С. М. ОГАНЕСЯН

РЕГУЛЯРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ



Гюмри-2004

Հայաստանի Հանրապետության Գիտությունների Ազգային Ակադեմիա

Ա.Նազարովի անվ. Երկրաֆիզիկայի և ինժեներային սեյսմաբանության ինստիտուտ

Ս.Մ.ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

ԵՌԱՉԱՓ ԳՐԱՎԻՄԵՏՐԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐՎԱԾ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

5637



ՀՀ ԳԱԱ "Գիտություն" հրատարակչություն
Երևան - 2004

National Academy of Sciences of the Republic of Armenia
Name A.Nazarov Institute of Geophysics and Engineering Seismology

S. M. HOVHANNISYAN

REGULAR METHODS OF SOLVING THREE-DIMENTION PROBLEM OF GRAVIMETRY



"Gitutiun" NAS RA Publishing House
Yerevan - 2004

Национальная Академия Наук Республики Армения

Институт геофизики и инженерной сейсмологии им. А.Назарова

С. М. ОГАНЕСЯН

РЕГУЛЯРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ

56337



Издательство "Гитутюн" НАН РА

Ереван - 2004

УДК 550.3

ББК 26.2
О - 361

Печатается по решению Ученого совета Института геофизики и инженерной сейсмологии НАН РА

Ответственный редактор – академик НАН РУ В. И. Старостенко

Книга рекомендована к печати рецензентами:

акад. АН РГ М.А.Алексидзе

канд.физ.-мат. наук А.Г. Манукян

Оганесян С.М.

О - 361 Регулярные методы решения трехмерных задач гравиметрии

Ереван "Гитутюн" 2004г. 381 стр.

В работе развиты теория и методика решения трехмерных обратных задач гравиметрии (ОЗГ) в рамках концепции математического моделирования.

На основе об'единения идей оптимизации и регуляризации введен в рассмотрение общий итерационный процесс, пригодный для решения линейных и нелинейных некорректных задач. Разработана общая теория двойственного метода решения обратных задач геофизики. Исследована структура общего решения линейной обратной задачи гравиметрии в классе $L_p(S)$ распределения плотностей. Составлены вычислительные схемы регуляризующих алгоритм решения трехмерных линейных и нелинейных обратных задач, сконструированы численные методы дискретизации соответствующих непрерывных задач, реализованные в виде технологических программ.

Книга рассчитана на геофизиков, аспирантов, занимающихся интерпретацией потенциальных полей.

О 1.803.010000
703(02)-2004

ББК 26.2

© ISBN 5-8080-0609-0

Издательство "Гитутюн" НАН РА, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора.....7

Введение.....11

Список обозначений.....22

ГЛАВА I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ПОСТАНОВКИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И РЕГУЛЯРНЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ.....25

§ 1. Обобщенная формулировка и математическая трактовка задач гравиметрии.....25

§ 2. Постановка конкретных задач гравиметрии в классе заданных моделей.....32

§ 3. Свойства операторов решения прямых задач гравиметрии.....41

§ 4. Прямые регулярные методы интерпретации гравиметрических данных.....52

§ 5. Связь между вариационным способом Тихонова и итерационными процессами. Некоторые новые свойства L – псевдорешения.....60

Выводы.....68

ГЛАВА II. ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ.....71

Введение.....71

§ 1. Идейные основы двойственного метода.....74

§ 2. Обобщенная двойственная задача и ее разрешимость.....80

§ 3. Решение обобщенной двойственной задачи регулярными методами.....88

§ 4. Теория двойственного метода для нелинейных задач и линейных задач с замкнутым неограниченным оператором.....97

§ 5. Двойственный метод решения линейной некорректной задачи в пространстве $L_p(S)$. Разложение $L_p(S)$ в специальную полупрямую сумму.....105

§ 6. О связи между двойственными и статистическими алгоритмами интерпретации данных гравиметрических наблюдений.....112

Выводы.....120

ГЛАВА Ш. СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ В КЛАССЕ $L_p(S)$ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТЕЙ.....123

§ 1. Краткий исторический обзор.....123

§ 2. Современное состояние теории.....136

§ 3. Построение общего решения линейной обратной задачи гравиметрии в пространстве $L_p(S)$.....144

§ 4. Дифференциальные свойства распределения плотностей несоздающих внешнего гравитационного поля 152

§ 5. Решение линейной обратной задачи гравиметрии для бесконечной полосы в пространстве $L_2(\Pi(a,b))$.....155

Выводы 163

ГЛАВА IУ. РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ....166

Введение.....166

§ 1. Обоснование выбора одного условного стабилизатора для решения многомерных обратных задач.....167

§ 2. Основные концепции метода конечных элементов и метода конечных разностей. Некоторые вопросы конечномерной аппроксимации обратных задач гравиметрии.....182

§ 3. Построение матричных аналогов оператора $\triangle^2 + \beta E$ с учетом краевых условий..... 187

§ 4. Вычислительные схемы для решения трехмерной линейной обратной задачи гравиметрии в пространстве $L_2(S)$ и результаты модельных расчетов.....206

§ 5. Алгоритмы и вычислительные схемы для решения нелинейной обратной задачи с контактной поверхности. Результаты модельных расчетов.....231

§ 6. Алгоритмы решения линейной обратной задачи гравиметрии с учетом сферичности планеты.....250

Выводы.....259

ГЛАВА У. РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.....262

§ 1. Построение гравитационной модели верхней части земной коры центральной части территории Армении 262

§ 2. Трехмерное распределение плотности в коре Днепровского грабена.....285

§ 3. Построение трехмерной гравитационной модели маскона в Море Нектара (с учетом сферичности Луны).....312

Выводы.....330

Заключение.....333

Список литературы.....338

Предисловие редактора

Сложность и необходимая точность решения современных практических задач геологии и геофизики такова, что требуется учитывать трехмерность реальных объектов. В геофизической литературе говорится об этом давно и специалистам ясно, что разработка методов решения трехмерных задач потенциальных полей - актуальнейшая проблема геофизики [377]. Однако знакомство с обширным потоком литературы убеждает, что только единичные работы посвящены этому вопросу по существу. Обычно же авторы публикации походя указывают, что такой-то метод может быть обобщен на трехмерный случай. Многолетний опыт таких замечаний свидетельствует о том, что они упрощают ситуацию и трудно реализуемы. Поэтому появление целенаправленной монографии, посвященной разработке теории и численных регулярных методов решения трехмерных задач гравиметрии, - важное и давно ожидаемое событие. Сразу отметим, что книга С.М.Оганесяна, достаточно широко освещающая указанную проблему, оригинальна и свежа, масштабна и глубока, плодотворна и практична.

Остановимся на ее некоторых моментах.

К настоящему времени для обратных задач гравиметрии известны различные постановки и вполне естественно желание их упорядочить с некоторой единой точки зрения. С такого упорядочивания, в основу которого положена концепция математического моделирования гравитационного поля и его источников (самый распространенный ныне подход к интерпретации геофизических наблюдений), начинается книга. При этом охватываются как функционально-аналитические, так и конечномерные параметрические модели среды; исследуются свойства оператора решения прямой задачи; приводятся регуляризующие по А.Н.Тихонову итерационные методы, пригодные для решения обратных задач с учетом их некорректности по всем трем

условиям Адамара. Все эти результаты служат фундаментом для последующих построений.

Основная трудность численного решения трехмерных задач - их большая размерность и в силу этого повышенная неустойчивость. Поэтому требуется способ решения, который либо позволяет уменьшать размерность, либо успешно с ней справляться. Вторая глава книги посвящена изложению способа, обеспечивающего сокращение размерности задачи на единицу исходного пространства. Это так называемый двойственный метод, который обеспечивает для геофизики широкие возможности, причем для решения не только линейных, но и нелинейных задач. Дается основательная теоретическая проработка способа, обобщение его на случай линейных неограниченных операторов. При этом показаны глубокие связи между параметрическим модифицированным функционалом Лагранжа и параметрическим функционалом А.Н.Тихонова. Связь этих функционалов позволила пролить свет на многие интересные области теории решения некорректно поставленных задач и установить общность казалось бы разных методов. Следует подчеркнуть, что из двойственного метода как частный случай следует метод Бэйкуса-Гильберта, который столь популярен за рубежом. Кстати этот метод имеет ограничения для пространственного случая*.

Благодаря ряду исследований советских и зарубежных специалистов (это работы Н.Вэка, А.И.Кобрунова, В.Н.Страхова, Ф.Сансо, А.С.Маргулиса и др.), особенно активно проводимых в последние 10-15 лет, сформулирована так называемая общая постановка *обратных задач теории потенциала в функциональных пространствах*. С.М.Оганесян внес существенный вклад в развитие этого

* Schomburg B. and Berendt G. On the convergence of the Backus-Gilbert algorithm, Inverse Problem,1987,v.3, No 2, p.341-346.

направления. Решение задач в функциональных пространствах расширяет возможности интерпретации за счет появляющейся гибкости.

В третьей главе строится теория общего решения обратной задачи теории потенциала (гравиметрии) в классе $L_p(S)$ распределения плотностей. Здесь приведены тонкие и глубокие результаты, имеющие не только геофизический, но и математический интерес. Необходимо подчеркнуть, что при первом взгляде на вещи, кажется, что для геофизики достаточно рассмотреть только случай $p = 2$. Однако изучение вопроса показывает, что этого недостаточно, поскольку в различных ситуациях практики целесообразно пользоваться разными метриками. Результаты, содержащиеся в монографии, обобщают многие положения, установленные ранее, и по полноте и глубине проработки являются крупным достижением современной теоретической геофизики.

Хотя применяемые в книге методы устойчивы и ориентированы на приближенное решение некорректных задач, ясно, что работоспособность вычислительных схем в случае решения трехмерных задач будет тем лучше, чем больше наложено ограничений на искомое решение. Поэтому в четвертой главе предлагается при решении нелинейных задач о контактной поверхности использовать в качестве условного стабилизатора функционал энергии деформации тонкой изогнутой пластинки. В случае же решения линейных задач (относительно неизвестных плотностей) применяется аппарат конечных элементов для аппроксимации искомой функции. Как первый, так и второй приемы прорабатываются в деталях и доводятся до высокотехнологических вычислительных схем, что позволяет их применять при решении самых разных задач геофизики.

Естественно, что окончательную оценку работоспособности методов можно сделать только на основании многочисленных экспери-

ментов как на модельных, так и на практических примерах. Этим результатам посвящена заключительная пятая глава монографии. Объем и разнообразие проведенных испытаний убеждают, что приведенные теория и вычислительные схемы "работают" в реальных условиях и решают поставленную задачу. Автор при этом рассматривает две основные задачи: линейную и нелинейную для контактной поверхности. Но в эти же вычислительные схемы можно вложить иные по содержанию задачи (например, рудные), которые также представляют большой интерес для практики.

И еще несколько заключительных слов.

Специалистам хорошо известно, что начиная с 1972 г. нас с автором связывают тесные творческие контакты. Поэтому на многие вопросы мы смотрим одинаково, либо наши точки зрения близки. Вместе с тем вряд ли будет ошибочным мнение, что специалисты встретят книгу С.М.Оганесяна с удовлетворением и она окажется полезной при проведении как теоретических, так и практических работ еще многие годы.

Акацемик НАН РУ В.И.Старостенко

В В Е Д Е Н И Е

I. Гравиметрические наблюдения, проводимые в настоящее время в больших объемах, содержат ценную информацию, которая необходима для решения одной из наиболее актуальных проблем геофизики: изучению глубинного строения земной коры и верхней мантии, а также отдельных их структур. Общенаучное значение проблемы заключается в расширении наших знаний о физике Земли. Прикладной ее аспект состоит в установлении основных закономерностей размещения полезных ископаемых, а также в их непосредственном поиске и разведке.

Изучение глубинного строения земной коры в пределах сложных или крупных регионов по данным гравиметрических наблюдений задача исключительно сложная. Сложность решаемых гравиметрических задач, высокие требования, предъявляемые к надежности и достоверности получаемых результатов, приводят к необходимости применения трехмерного моделирования. Переход к трехмерному моделированию среды и наблюденного гравитационного поля, с использованием сложных аппроксимационных конструкций, является крупной комплексной программой.

Разработка этой комплексной программы требует исследования ряда актуальных проблем, которые постепенно успешно решаются.

Одной из актуальных проблем построения пространственной плотностной интерпретационной модели исследуемой среды* является разработка теоретических и технологических основ эффективных и экономичных алгоритмов решения трехмерных обратных задач гравиметрии в рамках концепции математического моделирования.

В рамках этой концепции для описания среды и наблюденного

---

* В работе принята терминология, соответствующая работе В.Н.Страхова [367].

гравитационного поля наиболее часто используются функционально-аналитические модели и конечномерные параметрические модели. Использование функционально-аналитических моделей среды и поля значительно расширяет возможности интерпретации за счет появляющейся гибкости. Однако эта гибкость имеет и отрицательные последствия, так как достигается за счет существенной неоднозначности и (или) неустойчивости решения задачи. В силу этого возникает необходимость разработки принципа (критерия) отбора устойчивого решения из множества практической эквивалентности, т.е. постановки обратных задач гравиметрии как условно-экстремальных.

Построение моделей среды и поля, формулировка критерия отбора требуют привлечения в процессе интерпретации гравиметрических данных, по возможности, всей имеющейся априорной геолого-геофизической информации об исследуемой территории. Такой путь постановки и решения задачи построения пространственной плотностной интерпретационной модели исследуемой территории значительно повышает эффективность гравиметрического метода. Он позволяет тесно увязать геолого-геофизическое содержание задачи, ее математическую постановку и численный метод решения, учитывающий особенности ЭВМ.

2. В соответствии с концепцией математического моделирования процесс интерпретации гравиметрических данных подразделяется на несколько этапов [367,333,254]:

I) построение математических моделей среды и поля;

2) формулировка условно-экстремальной задачи;

3) извлечение информации в рамках принятых моделей и критерия оптимальности;

4) анализ извлеченной информации и принятие решения.

В работе основное внимание уделено пунктам 2) и 3), частично в главах I и У рассмотрены соответственно пункты I) и 4).

В связи с принятой методологией в главе I показано, что процесс извлечения информации из геолого-геофизических данных это есть решение условно-экстремальной задачи, которую в силу некорректности необходимо решать устойчивыми численными методами, т.е. в рамках идей регуляризации и оптимизации [254,333,367]. В работе приведены пять постановок обратных задач геофизики.

В зависимости от конкретно рассматриваемой гравиметрической задачи наиболее часто для их решения применяются:

I) вариационный способ Тихонова и его модификации [398,I00, 333 ,4I8 и др.] ;

2) итерационные методы [254,258,34I,344,355,4I,42,72,II3, I65,I66,I89,406 и др.];

3) методы, основанные на использовании преобразования Фурье [353,354,I63,I67,76,35I,3I8 и др.] , которые в дальнейшем будем называть прямыми("традиционными").

Концепция математических моделей, прямые регулярные методы решения некорректных задач применимы как к двухмерным, так и трехмерным задачам. Специфика гравиметрических задач такова, что не имеется принципиальной разницы между их двухмерными и трехмерными постановками. Поэтому формулировки многих трехмерных задач гравиметрии известны давно или получаются из соответствующих двухмерных проведением незначительных изменений и (или) нетрудных выкладок [I20].

Необходимость решения обратных задач гравиметрии в трехмерной постановке никогда не вызывала сомнения. В геофизической литературе об этом говорится давно, впервые, по-видимому, в работе [448]. Далее этот вопрос поднимался в работах К.Ф.Тяпкина

[408], В.В.Ломтадзе [197], В.И.Старостенко [333], В.Н.Страхова [367] и др.

Однако подавляющее большинство методов и алгоритмов реализованы только для двухмерных задач.

Знакомство с литературой убеждает, что только единичные работы посвящены трехмерным задачам по существу. Обычно же авторы публикаций указывают, что такой-то метод может быть обобщен на трехмерный случай.

Многолетний опыт таких замечаний свидетельствует о том, что они значительно упрощают ситуацию и такое обобщение трудно реализируемо или практически невозможно.

Среди работ, в которых действительно рассматриваются трехмерные задачи, наибольшие успехи достигнуты при его реализации в неформализованном подходе. Отметим работы С.С.Красовского [184], Г.Ш.Шенгелая [452], Л.И.Койфмана [175] и В.В.Бурьянова, В.В.Гордиенко, С.Н.Кулик, И.М.Логвинова [67], в которых решаются задачи построения трехмерных плотностных моделей земной коры, и работы Г.Н.Константинова [177, 381 и др.], в которых объемное моделирование магнитных аномалий применяется для решения задач поиска глубокозалегающих магнетитовых месторождений.

Только в последнее время, в связи с появлением ЭВМ серии ЕС, наметились сдвиги в этом направлении.

Обратная задача гравиметрии в трехмерной постановке в классах $L_2(S)$ или конечномерных параметрических моделей рассматривается в работах М.А.Алексидзе [9], А.Г.Манукяна [201], В.И. Старостенко [333], Л.Г.Цулейскири [437] и др., в которых решены конкретные модельные и практические задачи.

В работах А.В.Цирульского, Ф.И.Никоновой, И.Л.Пруткина [433], тех же авторов и В.И.Майера [435] метод построения эквивалентных семейств решения, развитый в работе [434] для двухмерных задач,

удалось с некоторыми изменениями распространить на трехмерный случай. В работе И.Л.Пруткина [300] при помощи метода локальных поправок решена трехмерная задача восстановления одной или нескольких контактных поверхностей. Им же написана первая кандидатская работа [301], посвященная сугубо трехмерным обратным задачам.

Методы решения трехмерных линейных и линеаризованных обратных задач с помощью преобразования Фурье развиты в работах В.И.Старостенко [368], Р.Г.С.Састри [351,368], А.И.Кобрунова [163,167] и В.А.Варфоломеева [76,167]. Однако надо отметить, что точность этого метода пока невысокая.

Основная трудность численного решения трехмерных задач традиционными регулярными методами - их большая размерность. В силу этого повышение неустойчивости и необходимость использования ЭВМ с большим объемом оперативной памяти. Поэтому для решения трехмерных задач требуются методы, которые либо позволяют уменьшать размерность, либо успешно справляться с неустойчивостью. Еще лучше, чтобы методы обладали обоими свойствами одновременно.

Во второй главе развиты двойственные методы решения линейных и нелинейных задач. Показано, что двойственные методы тесным образом связаны с прямыми методами.

На П Всесоюзной школе-семинаре "Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных аномалий" (Тбилиси, 1978) внимание автора работы привлек доклад А.И.Кобрунова. В этом докладе для решения двухмерной линейной обратной задачи гравиметрии в классе $L_2(S)$ распределения плотностей излагался алгоритм, позволяющий сводить ее к одномерной. Очевидным было, что алгоритм проходит и для трехмерных задач. Внимательный анализ работ [160-162] позволил выделить основную суть предложенного А.И.Кобруновым алгоритма и показать, что он основан на нахождении седловой точки функцио-

нала Лагранжа [309,I,II2]. Обоснование алгоритма, данное А.И.Кобруновым, проходило в двух вариантах при предположении, что линейный ограниченный оператор A в уравнении

$$Ax = b, \tag{0.I}$$

где $x \in H_1$, $b \in H_2$, H_1 и H_2 - гильбертовые пространства, нормально разрешим или нормальное решение x^* уравнения (0.I) является истокообразным, т.е. представим в виде $x^* = A^* y^*$, где A^* - сопряженный к A оператор и $N_{A^*} = \{x : A^* y = 0\}$ состоит из нулевого элемента, $y^* \in H_2$.

Подставляя значение x^* в уравнение (0.I), получим соотношение

$$AA^* y = b \tag{0.2}$$

для определения элемента y^*.

Оказалось, что идея нахождения элемента x^* при помощи y^* используется в вычислительной математике [86,I42,I9I,I98,4I3,467, 473 и др.]. В геофизике этот метод применялся в работах Бейкуса и Гильберта для решения сейсмологических задач [455,456,460, 46I].

В работах М.М.Лаврентьева [I9I], В.П.Маслова [205], В.В.Иванова, В.Ю.Кудринского [I42], П.-Ж.Лорана [I98] рассматривается регуляризованный способ определения элемента y^* при помощи решения уравнения

$$AA^* y + \alpha y = b, \quad \alpha > 0. \tag{0.3}$$

Доказана сходимость регуляризованной пары (x^α, y^α) к (x^*, y^*) при $\alpha \to 0$ и равенство $x^* = A^* y^*$.

В работах Ф.Наттерера [467], Т.И.Сайдмана [473] и У.А.Хямарика [425,426] регуляризованное приближение к y^*, соответственно x^*, находится при помощи проекционных методов [2I5].

Уравнение (0.3) связано с параметрическим модифицированным функционалом Лагранжа [274,309,I,II2].

В работах [256,274,259,277,279,I65,266] для некорректных задач сходимость алгоритма обосновывается без предположения о истокообразности нормального решения x^* и даются далеко идущие обобщения, которые подробно изложены в главе П. Удалось установить эквивалентность вариационного способа Тихонова и метода нахождения седловой точки параметрического модифицированного функционала Лагранжа. В связи с этим, по принятой в математической литературе терминологии [I,III,396], разработанный метод решения линейных и нелинейных некорректных задач назван двойственным. Точнее, двойственным по отношению к вариационному способу Тихонова, итерационному модифицированному методу Гаусса-Ньютона и т.д.

3. В качестве модельных классов среды и поля в работе используются конечномерные параметрические и функционально-аналитические модели, однако основное внимание уделено последним. Многие вопросы решения условно-экстремальных задач в классе конечно-мерных параметрических моделей рассмотрены в работах В.И.Старостенко [333] и С.М.Оганесяна [254].

Формулировка обратных задач гравиметрии в функциональных пространствах рассматривалась в работах советских и зарубежных специалистов Н.Вэка [475], А.Л.Великовича, Я.Б.Зельдовича [78], А.И.Корбунова [I60-I67], Ж.Л.Вигнерасса [477], В.Н.Страхова [360-367], В.Г.Черендниченко [44I-444], Ф.Сансо [47I], А.С. Маргулиса [205-2I0], В.И.Старостенко [276-278] и др.

Среди различных задач теории интерпретации в функциональных пространствах - построение общего решения линейной обратной задачи гравиметрии в классе $L_p(S)$ распределения плотностей является одним из центральных [377]. Оно тесно связано с вопросом

описания множеств эквивалентности; практической эквивалентности и нормальных решений; исследованием свойств оператора решения прямой задачи гравиметрии и его сопряженного оператора; разрешимостью задачи и т.д.

Эти проблемы по существу не являются новыми, они восходят к работам классиков теории потенциала.

Фактически еще в 1867 г. Дж.Стоксом [465] было понято, что общее решение линейной обратной задачи гравиметрии представимо в виде суммы частного решения, которым обусловлено заданное поле и множества решений несоздающих внешнего поля. Многие фундаментальные результаты в этой области в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций принадлежат итальянским геодезистам и математикам П.Пиццетти [468,469] и Дж.Лауричеллы [462].

56137

Анализу работ П.Пиццетти [468,469], Дж.Лауричеллы и обзору современного состояния теории посвящены соответственно параграфы 1 и 2 главы Ш. Фундаментальные результаты в области современной теории принадлежат В.Н.Страхову [362-365], А.И.Кобрунову [160-165] и А.С.Маргулису [205-210]. Оригинальные результаты, полученные автором в этой проблеме [256,258,259,264-265, 275-278], изложены в параграфе 3 главы I и параграфах 3-5 главы Ш.

4. Теоретические исследования и предложенные методы решения конкретных практических задач гравиметрии становятся полезными для геофизиков-практиков, если они доведены до апробированных вычислительных схем и программ. Решение этого вопроса требует проведения дополнительных работ, иногда очень существенных.

Основными вопросами при конструировании вычислительных схем являются обеспечение устойчивости и конечномерная аппросимация соответствующих интегральных и (или) дифференциальных операторов, связанных с решаемой задачей. Акцентирование внимания на

устойчивость вычислительной схемы, при доказанном регуляризующем свойстве алгоритма, не случайно. Требованию строгой выпуклости стабилизатора должен быть предан конкретный содержательный геофизический и геологический смысл. Это возможно, так как при постановке гравиметрических задач на основе вариационного способа Тихонова стабилизатор играет роль критерия отбора (оптимальности). Для развития и пропаганды направления введения априорной информации об изучаемой территории в процесс решения задачи в критериальной форме, обеспечивающей его единственность и одновременно геологическую содержательность, очень многое сделали А.И.Кобрунов [160-167] и В.Н.Страхов [367], оно использовалось в работах В.И.Старостенко [333], С.М.Оганесяна [254], В.Г.Филатова [418] и ряда других исследователей.

Для обеспечения устойчивости вычислительных схем трехмерных нелинейных обратных задач о контактной поверхности и построения обобщенного нормального решения линейной обратной задачи гравиметрии в $L_2(S)$ двойственным методом возникла необходимость конструирования стабилизатора, который использует свойства: геологической непрерывности плотностной границы между двумя пластами и математической непрерывности функции φ^α, как следа гармонической функции на плоскости $Z_0 = const$.

В параграфе I главы IУ исследуется целесообразность использования в качестве такого стабилизатора - функционала энергии деформации тонкой изогнутой пластинки на упругом основании.

После выбора вида стабилизирующего функционала возникает вопрос об аппроксимации исходных бесконечномерных задач - конечномерными. Это связано с построением - конечномерных аналогов соответствующих операторов, действующих в функциональных пространствах. На основе анализа известных методов решения задач математической физики, проведенных в параграфе 2 главы IУ, выбор сделан на гибриде метода конечных элементов

и метода конечных разностей.

Известно [144,223,426], что регуляризацию некорректной задачи можно производить также проекционными методами. Метод конечных элементов и метод конечных разностей являются разными способами реализации проекционного метода Галеркина со специальными финитными базисными (локально-аппроксимационными) функциями [139]. Их гибрид поэтому, будучи также проекционным, является дополнительным регуляризующим фактором. Фактически в вычислительных схемах используются два типа регуляризации: выбор стабилизатора и проекционного метода, что делает их особенно устойчивыми.

Далее, в параграфах 3-6 детально описывается процесс конструирования соответствующих вычислительных схем и показана их работоспособность на модельных примерах.

Приведен алгоритм решения линейной обратной задачи гравиметрии в классе конечномерной параметрической модели с учетом сферичности планет и показана его работоспособность.

В главе У рассматриваются практические примеры интерпретации данных гравиметрии для центральной части территории Армении Днепровского грабена и маскона Моря Нектара на Луне с использованием разработанных вычислительных схем.

Основные результаты, полученные в работе, являются оригинальными и имеют универсальный характер. В частности, все построенные методы по своему значению выходят за рамки гравиметрической проблематики и могут применяться для решения широкого круга геофизических задач, в частности геотермии и электрометрии.

5. Работа выполнена в лаборатории теоретической геофизики Института геофизики и инженерной сейсмологии НАН РА.

На формирование научных интересов и взглядов автора сущест-

ванное влияние оказал академик НАН РУ, докт.физ.-мат.наук В.И. Старостенко, который во многих вопросах содействовал выполнению настоящих исследований и проявлял к ним постоянный интерес. Автор всегда причислял себя к его ученикам.

Автор горячо благодарит академика АН России, профессора, докт.физ.-мат.наук В.Н.Страхова, творческие контакты с которым были всегда чрезвычайно плодотворными, полезными и стимулировали более углубленному рассмотрению многих вопросов, исследуемых в работе.

Искреннюю благодарность и признательность автор выражает доктору геол.-мин.наук Б.Г.Козленко, кандидату геол.-мин.наук А.Г.Бабаджаняну; кандидатам физ.-мат.наук А.Г.Манукяну, Э.Л. Шену; Л.Б.Оганесяну за представление практических материалов и участие в их интерпретации.

Составление вычислительных схем, проработка возникающих при этом вопросам и программная реализация большинства алгоритмов выполнены канд.физ.-мат.наук М.Г.Оганесяном.

Искреннюю признательность автор выражает академику Грузии докт.физ.-мат.наук М.А.Алексидзе, докторам физ.-мат.наук В.И. Аронову, В.Б.Гласко, Г.Г.Казаряну, А.И.Кобрунову, В.Г.Филатову, А.В.Цирульскому; докт.геол.-мин.наук В.М.Новоселицкому; канд. геол.-мин.наук Ш.С.Оганисяну ; кандидатам физ.-мат.наук А.С. Маргулису, Ю.А.Криксину и др. за внимание и интерес к работе или к её фрагментам, за ее поддержку, а также за критические замечания и многочисленные советы, способствовавшие улучшению окончательного варианта работы.

Список обозначений

Приведем ряд обозначений, используемых в работе.

$x \in M$ $(x \bar{\in} M)$ – элемент x принадлежит (не принадлежит) множеству M.

R_n – евклидовое пространство размерности n с обычным определением расстояния $\rho(x,y)$ между двумя точками $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$, т.е. $\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$. При $n = 2,3$ точки обозначают соответственно (x, z) и (x, y, z) $\left((\xi,\zeta) \text{ и } (\xi,\eta,\zeta)\right)$.

$$R_n^+ = \{ x \in R_n : x_n > 0 \}.$$

$$\Pi(a,b) = \{ (x,y,z) \in R_3 : 0 < a \le z \le b < \infty \}$$

S, Q – множества в R_n, в подавляющем большинстве случаев открытые, ограниченные.

$mes\, S - n$ – мерная лебеговая мера множества S.

∂S – граница множества S.

$\partial S \in C^2$ – граница множества S принадлежит классу $C^2 (0 \le z \le \infty)$.

$\bar{S}$ – замыкание множества S в R_n, т.е. $\bar{S} = S \cup \partial S$

$S = \{ v : P \}$ – множество, элементы которого обладают свойством P.

$U(x)$ – краткое обозначение для $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$\int\limits_S U(x)\,dS$ – краткое обозначение для $\int\limits_S \dots \int U(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n$, при $n = 2,3$ пишем $\iint\limits_S U(x,z)\,dx\,dz$ и $\iiint\limits_S U(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ – символ частной производной (классические или обобщенные).

$C^{(k)}(S)$ – множество функций $U(x)$, частные производные

которых до K -ого порядка включительно непрерывны в S .

$C^K(\bar{S})$ - множество функций $U(x)$, частные производные которых до K -ого порядка включительно непрерывны в $\bar{S}$.

$C_0^\infty(S)$ - множество бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Перечислим основные функциональные пространства, используемые в работе.

$L_p(S)$, $1 < p < \infty$ - банаховое пространство (т.е. полное линейное нормированное пространство), состоящее из всех определенных и измеримых (по Лебегу) на S функций $U(x)$, имеющих конечную норму

$$\|U\|_{L_p(S)} = \left(\int_S |U(x)|^p dS \right)^{1/p}.$$

Часто норму в $L_2(S)$ обозначаем $\|\cdot\|$, а скалярное произведение между U и V как (U, V).

$W_p^r(S)$ - пространство Соболева - элементами которого состоят функции из $L_p(S)$, имеющих обобщенные производные до порядка r включительно и суммируемые со степенью p в S .

$W_2^r(S)$ - гильбертово пространство, элементами которого служат те функции из $L_2(S)$, у которых есть обобщенные производные до порядка r включительно, квадратично суммируемые и с нормой

$$\|U\|^2_{W_2^r(S)} = \int_S \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{(\ell)} \left(\frac{\partial^\ell U}{\partial x_1^{\ell_1} \partial x_2^{\ell_2} \dots \partial x_n^{\ell_n}} \right)^2 dS,$$

где $\sum_{(\ell)}$ - есть суммирование всех возможных обобщенных производных порядка ℓ .

$\overset{\circ}{W}{}_p^r(S)$ - собственное подпространство $W_p^r(S)$, полу-

ченное замыканием $C_0^\infty(S)$ в норме $W_p^2(S)$.

$\dot{W}_p^2(S)$ – множество функций из пространства $W_p^2(S)$, продолженные нулем с сохранением класса.

$H = H_1 \oplus H_2$ – разложение гильбертова пространства в прямую сумму ортогональных подпространств H_1, H_2.

$H_2 = H \ominus H_1$ – ортогональное дополнение подпространства H_1 в гильбертовом пространстве H.

$L_p(S) = K \dot{+} F$ – разложение пространства $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, в полупрямую сумму подпространства K и замкнутого множества F.

$D(A)$ и $R(A)$ – области определения и значения оператора A.

H_A – пополнение гильбертового пространства H в смысле скалярного произведения $(u, v) = (Au, v)$.

$N(S, p)$ – множество функций $u \in L_p(S)$, несоздающих внешнего гравитационного поля.

$F(S, p)$ – множество нормальных решений линейного уравнения.

$H(S, p) = \{u \in L_p(S) : \Delta U(x) = 0,\ x \in S\}$ – множество гармонических функций в $L_p(S)$.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$ – оператор Лапласа.

$$\widetilde{U(x)} = \begin{cases} U(x), & x \in S, \\ 0, & x \in R_n \setminus S, \end{cases}$$ – продолжение функции U, определенного в множестве S, на все пространство R_n нулем.

ЛОЗГ – линейная обратная задача гравиметрии.

НОЗКП – нелинейная обратная задача о контактной поверхности.

МКЭ – метод конечных элементов.

МКР – метод конечных разностей.

АСПТТ – алгоритм спуска по параметру Тихонова-Гласко.

ГЛАВА I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ПОСТАНОВКИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И РЕГУЛЯРНЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

§ I. Обобщенная формулировка и математическая трактовка обратных задач гравиметрии

I. Обратные задачи гравиметрии служат основным инструментом при построении плотностных моделей земной коры и верхней мантии, а также структур, перспективных для поисков полезных ископаемых.

Плотностные модели строятся по наблюденному гравитационному полю, которое в зависимости от исследуемой задачи приравнивают к вертикальной производной гравитационного потенциала V_{zH} или - к радиальной производной V_{RH} [120,121]. При решении практических задач наблюденная величина, для определенности V_{zH}, обычно содержит погрешности, обусловленные введением соответствующих поправок, инструментальными измерениями, геологическими редукциями и т.д. Примем, что погрешности задания V_{zH} характеризуются числовой величиной δ, равной норме отклонения V_{zH} от гипотетического точного значения V_{zT}, т.е. $\delta = \| V_{zH} - V_{zT} \|$. Введение гипотетической величины V_{zT} связано с модельными представлениями о гравитационном поле и имеет чисто теоретическое значение. При решении практических обратных задач гравиметрии всегда оперируют с наблюденным гравитационным полем.

Возросшие требования, предъявляемые к результатам интерпретации гравиметрических (геофизических) данных, приводят к необходимости применения трехмерных моделей среды и поля. В связи с этим актуальным становится постановка обратных задач гравиметрии в трехмерном варианте [367,377].

2. Общая формулировка обратной задачи гравиметрии в пространственном случае заключается в следующем.

Пусть в трехмерном пространстве R_3 выбрана левая прямоугольная система координат x, y, z (ξ, η, ζ); ось направлена к центру Земли; области S_i, $i=\overline{1,N}$, принадлежат полупространству $R_3^+ = \{(x,y,z) \in R_3 : z>0\}$ и удовлетворяют условиям $S_i \cap S_j = \emptyset$ или $S_i \cap S_j = \partial S_i \cap \partial S_j$, $i \neq j$.

Гравитационное влияние V_z масс, распределенных в области S_i, $i=\overline{1,N}$, с плотностями $\sigma_i(\xi,\eta,\zeta)$ на точку наблюдения $(x,y,z) \in R_3$ определяется при помощи выражения

$$V_{zT} = \sum_{i=1}^{N} G \iiint_{S_i} \frac{(\zeta - z)\,\sigma_i(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{3/2}} . \quad (I.1)$$

Задано наблюденное поле V_{zH} на некотором множестве единственности $Q \subset R_3$. Требуется определить такие конфигурации областей S_i и распределения плотностей σ_i, $i=\overline{1,N}$, чтобы отклонения теоретического и наблюденного полей удовлетворяло неравенству

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} G \iiint_{S} \frac{(\zeta - z)\,\sigma_i(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{3/2}} - V_z(x,y,z) \right\|^2 \leq \delta^2, \; (x,y,z) \in Q. \quad (I.2)$$

При рассмотрении двухмерных задач гравиметрии их общая формулировка сводится к нахождению неизвестных из неравенства

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} 2G \iint_{S_i} \frac{(\zeta - z)\,\sigma_i(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2} - V(x,z) \right\|^2 \leq \delta^2, \; (x,z) \in Q. \quad (I.3)$$

Обозначим оператор решения прямой задачи (I.I) через F, который действует из банахова пространства B_1 в банаховое пространство B_2, т.е. $F: B_1 \to B_2$. Тогда неравенства (I.2) и (I.3) компактно можно записать в виде

$$\| Fx - b \|_{B_2}^2 \leq \delta^2, \quad (I.4)$$

где $x \in B_1$ – неизвестный элемент, $b = V_{zH} \in B_2$ – наблюденная величина.

Очевидно, что постановка обратной задачи гравиметрии в виде неравенства (I.2) и (I.3) не имеет единственного решения. Даже более, в силу некорректности обратных задач гравиметрии [120], множество $M_\delta = \{x : \|Fx - b\|^2 \le \delta^2\}$ может содержать элементы, лишенные всякого геофизического и содержательного смысла. Поэтому необходимо постановку обратной задачи гравиметрии дополнить принципом отбора такого элемента $x^\delta \in M_\delta$, который был бы устойчивым к малым погрешностям исходных данных. Принципы отбора решения могут быть различными в зависимости от имеющейся дополнительной информации о строении изучаемой территории, от предполагаемых свойств ожидаемого решения и т.д.

Все эти принципы отбора основаны на фундаментальном понятии регуляризующего оператора (алгоритма), который сформулирован А.Н.Тихоновым [398, с.54].

Приведем определение регуляризующего оператора для решения уравнения

$$Fx = b, \tag{I.5}$$

как это сделано в работе [398]. А потом его видоизменим применительно к решению обратных задач гравиметрии в постановке (I.4). Пусть $\bar{x}$ решение уравнения (I.5).

Определение I.I. Оператор $R(b,\delta) : B_1 \to B_2$ называется регуляризующим для уравнения (I.5) (относительно $\bar{x}$), если он обладает следующим свойством:

I) существует такое число $\delta_1 > 0$, что оператор $R(b,\delta)$ определен для всякого δ, $0 < \delta < \delta_1$, и любого $b \in B_2$, такого, что

$$\|b - \bar{b}\| \le \delta; \tag{I.6}$$

2) для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, \bar{b}) \le \delta_1$ такое, что из неравенства

$$\|b - \bar{b}\|_{B_2} \le \delta < \delta_0$$

следует неравенство

$$\|x^{\delta} - \bar{x}\|_{B_1} \le \varepsilon,$$

где $x^{\delta} = R(b, \delta)$.

В ряде случаев целесообразно использовать менее общее определение регуляризующего оператора.

Определение I.2. Оператор $R(b, \alpha)$, зависящий от параметра α, называется регуляризующим для уравнения (I.5) в окрестности $b = \bar{b}$, если он обладает такими свойствами:

I) существует такое число $\delta_1 > 0$, что оператор $R(b, \alpha)$ определен для всякого $\alpha > 0$ и любого δ - приближение элемента $\bar{b}$, т.е. $\|b - \bar{b}\| < \delta$, где $\delta < \delta_1$;

2) существует такая функция от δ, $\alpha = \alpha(\delta)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) \le \delta_1$, что если $b \in B_2$ и

$$\|b - \bar{b}\|_{B_2} \le \delta(\varepsilon)$$

то

$$\|x^{\alpha(\delta)} - \bar{x}\|_{B_1} \le \varepsilon,$$

где $x^{\alpha(\delta)} = R(b, \alpha(\delta))$. Элемент $x^{\alpha(\delta)}$ называется регуляризованным решением, а α - параметром регуляризации.

Приведем еще одно менее общее определение регуляризующего оператора, которое, по мнению автора, более приспособлено для обратных задач гравиметрии. Оно базируется на определении I применительно к квазирешению x^* задачи

$$\min_{x \in B_1} \| Fx - b \|^2 \qquad (I.7)$$

Определение I.3. Оператор $R(b, \delta) : B_2 \to B_1$ называется регуляризующим для задачи (I.5), если он обладает такими свойствами:

I) существует такое число $\delta_1 > 0$, что оператор $R(b, \delta)$ определен для всякого δ, $0 \le \delta \le \delta_1$ и любого $b \in B_2$, удовлетворяющего условию (I.6);

2) для любой последовательности $\{\delta_n\} \to 0$, последовательность $\{x_n\}$, образованная при помощи равенства

$$x_n^\delta = R(b, \delta_n)$$

минимизирующая для функционала (I.7) и фундаментальная.

Замечание I.I. В определении I.3 квазирешение x^* не использовано специально, чтобы в дальнейшем при рассмотрении модельных (практических) задач не появился термин "приближенное решение к квазирешению". Ибо при интерпретации гравиметрических данных уместно говорить о решении или регулированном решении.

Для решения конкретной задачи можно построить различные регуляризующие операторы. Более того, в зависимости от вида задачи, имеющейся информации о характере ее решения, погрешностях в исходных данных целесообразно выбирать различные регуляризующие операторы или, что то же самое, различные постановки обратных задач гравиметрии.

3. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые постановки обратных задач гравиметрии, позволяющие конструировать регу-

(I.7)

ляризующие алгоритмы для их решения [398,I6I,I65,254,258,34I]. Изложение начнем с вариационной постановки А.Н.Тихонова [398,с.58]. Пусть качественная и (или) количественная информация о дифференциальных свойствах искомого решения позволяют сконструировать сильно выпуклый неотрицательный функционал $\Omega(x)$, называемый стабилизирующим. В качестве регуляризованного решения задачи (I.4) возьмем элемент x^{δ}, минимизирующий функционал $\Omega(x)$ на множестве M_{δ}. Следовательно, приходим к такой задаче.

Постановка I. Найти $\min\Omega(x)$ при ограничении (I.4).

4. При исследовании территорий со сложным геологическим строением она обычно изучается различными геолого-геофизическими методами. Пусть в результате обработки геолого-геофизических данных геофизиком-интерпретатором составлена исходная схема (модель) строения исследуемой территории, т.е. элемент x_0.

Во второй постановке примем, что дополнительно можно сформулировать критерий $\Omega(\cdot)$ согласования искомого элемента x с исходной моделью x_0. Ставится задача определения такого элемента $x^{\delta}\in M_{\delta}$, который близок к исходной модели x_0 в смысле критерия $\Omega(\cdot)$.

Постановка 2. Найти

$$\min \Omega(x-x_0)$$

при ограничении (I.4).

Несколько видоизменим постановку 2, как это сделано в работах А.И.Кобрунова [I60-I65], а именно рассмотрим следующую задачу.

Постановка 3. Найти $\min \Omega(x-x_0)$

при ограничении (I.5).

Постановка 3 является условной, так как при помехе в правой части равенства (I.5) она неразрешима. Однако в главе 2 показа-

но, что при помощи условной постановки 3 можно построить интересный двойственный метод решения некорректных задач математической физики.

5. При решении ряда задач интерпретации гравиметрических данных использование только экстремальных критериев на практике оказывается недостаточным для получения геологически содержательных решений. Поэтому возникает необходимость включения в процесс решения задачи всех априорных сведений как достоверных, так и имеющих характер ограничений на возможные изменения неизвестного элемента x, которые задаются при помощи неравенств от некоторых функций φ_i, $i=\overline{1,n}$.

Постановка 4. Найти $\min \Omega(x-x_0)$ при ограничениях (I.4) и неравенствах

$$\varphi_i(x) \le 0, \quad i=\overline{1,n}.$$

6. В работах С.М.Оганесяна и В.И.Старостенко [341,254,258, 344] сформулирован новый подход к корректной постановке обратных задач гравиметрии (математической физики), объединивший идеи регуляризации и оптимизации. Этот подход позволяет использовать преимущества обоих методов и выделить класс устойчивых итерационных процессов для решения линейных и нелинейных некорректных задач. Суть этого подхода состоит в следующем. Начиная с исходной модели x_0, конструируется последовательность элементов $\{x_n\}$, минимизирующая функционал (I.7), которые в некотором смысле связаны с вариационным способом Тихонова. Необходимо выбрать элемент x_N, для которого впервые выполняется условие $x_N \in M_\delta$. Дадим более четкую формулировку задачи.

Постановка 5. Конструируется произвольная последовательность $\{x_n\}$, минимизирующая функционал (I.7), начальный элемент которой совпадает с исходной моделью x_0.

Требуется определить номер $n = N$, для которого выполняются условия

$$x_{N-1} \notin M_\delta \quad \text{и} \quad x_N \in M_\delta$$

т.е. $N = N(\delta)$. При этом для любой последовательности $\{\delta_k\} \to 0$ последовательность $\{x_{N(\delta_k)}\}$ является фундаментальной.

Замечание I.2. При решении практических задач процедура конструирования $\{x_n\}$ прекращается при первом выполнении условия $x_N \in M_\delta$.

Замечание I.3. Такое многообразие корректных постановок обратных задач гравиметрии, рассматриваемых в одной работе, не должно смущать читателей. В дальнейшем будет показано, что все они тесно взаимосвязаны и в конечном итоге приводят к наиболее используемым, по сути почти эквивалентным регуляризующим алгоритмам.

Очевидно, что постановки I-5 являются условно экстремальными задачами. Каждая из них имеет свою специфику и требует применения соответствующего подхода для построения регуляризующего алгоритма. Эти подходы формировались постепенно в процессе творческого осмысливания результатов удачного решения различных задач и имеют свою историю развития [398, I43, I9I, I00].

§ 2. Постановка конкретных задач гравиметрии в классе заданных моделей

I. Постановки обратных задач гравиметрии в параграфе I даны в самом общем виде. Теоретические исследования задач (I.I) и (I.2) связаны со значительными трудностями, а практический эффект таких постановок незначителен, в силу принципа эквивалентности. Поэтому при решении практических задач гравиметрии часть неизвестных закрепляются, а остальные подлежат определению. В зависимости от определяемых неизвестных оператор

$F: B_1 \to B_2$ может быть линейным или нелинейным. Оператор линейный, если фиксированы конфигурации областей S_i, $i=\overline{1,N}$, и определяются плотности σ_i, $i=\overline{1,N}$, или часть из них.

Во всех остальных случаях оператор решения прямой задачи гравиметрии $F: B_1 \to B_2$ - нелинейный. При $N = I$ имеется одна область S и неизвестное распределение плотности σ.

2. В настоящее время стало общепринятым, что для получения удовлетворительных решений количественную интерпретацию гравиметрических данных целесообрано выполнять в рамках определенных модельных представлений [356,333,75,I65,254]. Выбор физико-геологической модели является наиболее сложным и ответственным моментом, спределяющим точность и надежность построения плотностной модели исследуемой территории. При построении плотностных моделей в зависимости от его геологического строения и имеющихся геолого-геофизических данных используются различные физико-геологические модели (классы).

По классификации В.Н.Страхова [356] при решении обратных задач гравиметрии используются следующие модели:

I) по степени соответствия модельных распределений масс природным соотношениям - адекватные, эквивалентные и смешанные;

2) по степени полноты учета априорной информации - оптимальные и состоятельные;

3) по характеру аналитического описания полей, источников и связей между ними - детерминистические, статистические и смешанные;

4) по характеру алгоритмов извлечения информации, порождаемых моделью - параметрические, распознавательские и регрессионные.

Такое многообразие используемых моделей приводит к различным методам решения обратных задач гравиметрии [7-I8,33-38,45,

I00, I6I-I75,I82-I88,I94,20I-2I4,2I8,227-237,242-249,254-284, 300,30I,333-374,380-392,405-4I0,4I6-420,427-437,44I-452].

Среди них наибольшее распространение получил детерминический метод математического моделирования [I20]. В рамках этого метода возможны различные конкретизации неравенства (I.I) и (I.2):

I) в классе конечномерных параметрических адекватных или эквивалентных моделей ("классический") [9,I5,63,64,I09,254, 333,367,429,433];

2) в классе функционально-аналитических (бесконечномерных параметрических) моделей ("современный") [60-62,I6I-I68,206-2I2,245-247,256-258,263-266,275-278,354,360-367].

Для того, чтобы из соотношения (I.I) получить формулировку обратной задачи гравиметрии в классе конечномерных параметрических моделей, необходимо:

I) по имеющимся геолого-геофизическим данным области S_i, $i=\overline{1,N}$, представить совокупностью M_i, $i=\overline{1,N}$, тел достаточно простой геометрической формы с постоянными (полиномиальными) плотностями (подход Е.Г.Булаха [63], В.И.Старостенко [333], В.И.Гольдшмидта [I09] и др.) или аппроксимировать гравитационные эффекты каждого из тел совокупностью конечного числа сингулярных источников (подход А.В.Цирульского и его школы [427-435]);

2) определять неизвестные параметры модели из соответствующих условно экстремальных задач.

При первом подходе, после проведения соответствующих действий, приходим к постановкам § I с неравенством

$$\sum_{\ell=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M_i} G_{ij}\Psi_{ij\ell}\left(x_\ell, y_\ell, z_\ell, \{\}_{ij}, \dots, \{h_{ij}, \eta_{1ij}, \dots, \eta_{mij}; \zeta_{1ij}, \dots, \zeta_{kij}\right) - V_{2n\ell}\right)^2 \le \delta^2,$$

где σ_j - плотность j -ого элементарного тела, содержащего в области S_i, γ_{ije} - эффект j -ого тела области S_i единичной плотности в e -ой точке, M - общее количество точек наблюдения.

Формулировка обратной задачи в классе функционально-аналитических моделей получается из неравенств (I.2) и (I.3), если неизвестные распределения плотности $\sigma_i \in L_p(S_i)$, $i=\overline{1,N}$, и границы множеств $\partial S_i \in L_p(R_2)$, т.е. неизвестные элементы принадлежат конкретным функциональным пространствам.

В работе рассматриваются и исследуются следующие конкретные гравиметрические задачи:

I) определение неизвестного распределения плотности в заданной области S, принадлежащей пространству $L_p(S)$, $1<p<\infty$ т.е. в классе $L_p(S)$ распределения плотности;

2) нахождение положения плотностных границ раздела в классе контактных поверхностей;

3) обнаружение и локализация источников аномального поля в классе N изолированных тел знакоопределенными постоянными (линейными) плотностями;

4) линейная обратная задача гравиметрии с учетом сферичности планет.

Сформулируем вышеперечисленные гравиметрические задачи, которые конкретизируют постановки I-5.

3. Линейная обратная задача гравиметрии в классе $L_p(S)$ распределения плотностей. Пусть по геолого-геофизическим данным в полупространстве R_3^+ выделено открытое множество S, которому принадлежит носитель аномальных масс. Граница ∂S множества S удовлетворяет условиям

$\partial S = \partial \bar{S}$ и $mes\, \partial S = 0$ (n -мерная лебегова мера).

Задано наблюденное аномальное поле V_{zH} на некотором множестве единственности $Q \subset R_3$.

Постановка трехмерной линейной обратной задачи гравиметрии заключается в определении такого распределения плотности $\sigma(\xi,\eta,\zeta) \in L_p(S)$, $1<p<\infty$, который удовлетворяет неравенству

$$\left\| G\iiint_S \frac{(\zeta-z)\sigma(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}} - V_{zH}(x,y,z) \right\|^2 \le \delta^2, \quad (x,y,z) \in Q \qquad (I.8)$$

где $V_{zH} \in L_p(Q)$, $1<p<\infty$, и минимизирует один из функционалов $\Omega(\cdot)$.

Замечание I.4. Впервые близкие постановки при $p = 2$ рассмотрены в работах Н.Вэка [475] и А.И.Кобрунова [161]. Далее они исследовались в работах В.Н.Страхова [361-363], А.С.Маргулиса [206-210], Ф.Сансо [471], В.И.Старостенко [276-278] и С.М.Оганесяна [256,263-266,276-278].

Двухмерная линейная обратная задача гравиметрии сводится к постановкам I-5 с неравенством

$$\left\| 2G\iint_S \frac{(\zeta-z)\sigma(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2} - V_{zH}(x,z) \right\|^2_{L_p(Q)} \le \delta^2, \quad (x,z) \in Q, \qquad (I.9)$$

где $S \subset R_2^+$, $V_{zH} \in L_p(Q)$, $1<p<\infty$

4. Трехмерная нелинейная обратная задача гравиметрии о контактной поверхности. Задача о контактной поверхности - это классическая задача гравиметрии и относится к типу структурных. Впервые для двухмерного случая она сформулирована в работе Б.В.Нумерова [248] и с тех пор неоднократно рассматривалась многими исследователями [9,19,21,64,75,100,120,128,165,168,209, 231,232,254,262,281,301,333,337,341,357-359,416-420,432-435, 437,448].

Наиболее существенные теоретические результаты принадлежат

В.Н.Страхову [357-359]. Трехмерный случай исследовался в работах М.А.Алексидае[8,9], А.И.Кобрунова [161,165,168], Р.П.Денисюка [128,165,168], А.С.Маргулиса 210, С.М.Оганесяна[262, 267, 280], М.Г.Оганесяна[267,280], И.Л.Пруткина [301], В.И.Старостенко [333,280], Л.Г.Цулейскири [437].

Полная нелинейная трехмерная постановка рассматривалась в работах [262,267,210,301,437]. Приведем формулировку этой задачи, следуя работам [262,267].

Пусть наблюденное аномальное поле V_{zH} обусловлено некоторой областью $S_1 \subset R_3^+$, с избыточной плотностью $\Delta\rho(\xi,\eta,\zeta) \in L_2(S_1)$. Область S_1 ограничена сверху (снизу) поверхностью $H(\xi,\eta) \in L_2(S)$, а снизу (сверху) - $z(\xi,\eta) \in L_2(S)$, где S - проекция области S на плоскость $\xi O \eta$.

Требуется при фиксированных $H(\xi,\eta)$ и $\Delta\rho(\xi,\eta,\zeta)$ найти такое положение неизвестной формы нижней (верхней) поверхности $z(\xi,\eta)$, которая минимизирует функционал $\Omega(z)$ и удовлетворяет неравенству

$$\left\| G \iint\limits_{S} \int\limits_{H(\xi,\eta)}^{z(\xi,\eta)} \frac{(\zeta - z_0)\,\Delta\rho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta-z_0)^2]^{3/2}} - V_{zH} \right\|^2_{L_2(Q)} \le \delta^2 \qquad (I.10)$$

Однако нахождение элемента $z(\xi,\eta) \in L_2(S)$, удовлетворяющего неравенству (I.10), затруднено. При предположении, что избыточная плотность не зависит от переменной ζ, т.е. $\Delta\rho(\xi,\eta,\zeta) = \Delta\rho(\xi,\eta)$ неравенство (I.10), сводится к более простому и удобному для практических расчетов виду

$$\left\| G \iint\limits_{S} \frac{\Delta\rho(\xi,\eta)}{[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta-z_0)^2]^{1/2}} \Bigg|_{\zeta=z(\xi,\eta)}^{H(\xi,\eta)} d\xi\,d\eta - V_{zH}(x_0,y_0,z_0) \right\|^2_{L_2(Q)} \le \delta^2 \qquad (I.11)$$

Замечание I.5. В случае, когда $\Delta\rho(\xi,\eta) = \Delta\rho$, $H(\xi,\eta) = H$ и совпадает с асимптотой, приходим к классической постановке задачи о контактной поверхности [301]. При ограниченности области S задача о контактной поверхности, в случае ее разре-

шимости, имеет единственное решение [210].

Сформулируем трехмерную обратную задачу для N контактных поверхностей. Примем, что изучаемая геологическая среда может быть представлена N горизонтальными границами с плотностями между ними $\rho_i(\xi,\eta)$, $i=\overline{1,N+1}$.

Известны положения асимптот $H_i(\xi,\eta)$, $i=\overline{1,N}$, каждой контактной поверхности. Задано аномальное поле V_{zH} на некотором множестве Q.

Требуется определить положения неизвестных контактных поверхностей $z_i(\xi,\eta)\in L_2(S_i)$, $i=\overline{1,N}$, из условия минимума одного из функционалов $\Omega(\cdot)$ при выполнении неравенства

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} G \iint_{S_i} \frac{\Delta\rho_i(\xi,\eta)}{\left[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta-z_0)^2\right]^{1/2}} \Bigg|_{\zeta=H_i(\xi,\eta)}^{z(\xi,\eta)} d\xi d\eta - V_{zH} \right\|^2 \le \delta^2, \qquad (I.12)$$

где $S_i \subset R_2$, $i=\overline{1,N}$, – носители контактных поверхностей $z_i(\xi,\eta)$, $\Delta\rho_i = \rho_{i+1} - \rho_i$, $i=\overline{1,N}$.

5. Задача обнаружения и локализации источников аномальных полей. При поиске месторождений нефти и газа, полезных ископаемых исследуемые структуры "рудные тела" и другие геологические объекты отличаются многообразием форм и сложным пространственным изменением петрофизических свойств. Поэтому наблюдаемые на перспективных структурах гравиметрические поля обусловлены многими факторами, вследствие чего эффекты от интересующих исследователя источников в явном виде проявляются слабо. Выделение из наблюденного гравитационного поля Δg эффекта Δg_1, соответствующего нефтяным структурам, "рудным" телам производится при помощи:

I) построения физико-геологической модели изучаемой среды [323];

2) исключения фоновой составляющей при помощи нормальных моделей [89,157] или по способу Е.А.Мудрецовой и В.Г.Филатова [229,232] и т.д.

После получения Δg_1 процесс интерпретации целесообразно подразделить на три основные задачи [263,269,369]:

I) обнаружение и локализация источников аномального поля;

2) разделение локального поля Δg_1 на компоненты отдельных источников;

3) детальное описание этих источников, т.е. найти геометрические конфигурации и искомые распределения плотностей каждого тела.

При известном Δg_1 сложность геологического строения среды уже не является препятствием для постановки задачи обнаружения и локализации источников аномального поля. Задача рассматривается в двухмерной постановке.

Пусть выделенное на некотором множестве единственности $Q \subset R_2$ локальное аномальное гравитационное поле Δg_1, обусловленное N односвязными, ограниченными, взаимно непересекающими телами S_k°, $k=\overline{1,N}$, расположенными в R_2^+, с аномальными плотностями $\sigma_k(\xi,\eta)$. Известно, что для каждого тела S_k° в классе кусочно-постоянной функций обратная задача гравиметрии разрешима однозначно. Задана односвязная область $S \subset R_2^+$, которая содержит все тела.

Требуется определить количество N источников аномального поля Δg_1 и локализовать их. т.е. найти такие области S_k, $k=\overline{1,N}$, что $S_k^\circ \subset S_k$.

6. Постановка линейной обратной задачи гравиметрии с учетом сферичности планет. Опыт построения трехмерных региональных моделей показал необходимость учета истинной фигуры

планеты. Как показано в работах [339,202], для региональных исследований достаточно аппроксимировать планету формой шара, радиус которого равен среднему радиусу планеты. Математическое описание моделей, построенных на основе шарообразной модели, удобно осуществить в сферической системе координат, а в качестве элементарного тела использовать сферический прямоугольный параллелепипед (СПП) [339,202].

Известно [120], что значение ускорения силы притяжения g равно нормальной производной гравитационного потенциала V, т.е. $g = -\frac{\partial V}{\partial n}$. Так как для сферической планеты направление нормали n совпадает с радиальным направлением, то

$$g = V_R = -\frac{\partial V}{\partial R}. \qquad (I.13)$$

В геоцентрической сферической системе координат ускорение силы притяжения на точку $(R_0, \varphi_0, \lambda_0)$ СПП с координатами $(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2)$ задается при помощи равенства [339,202]

$$V_R = -\frac{\partial V}{\partial R} = G\int_{r_1}^{r_2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sigma(r)(R - r\cos\omega)r^2}{\rho^3}\sin\varphi\, d\varphi\, d\lambda\, dr, \qquad (I.14)$$

где $\rho = \sqrt{R_0^2 + r^2 - 2R_0 r\cos\omega}$, $\cos\omega = \cos\varphi_0\cos\varphi + \sin\varphi_0\sin\varphi \cdot \cos(\lambda - \lambda_0)$, ω – угол при центре сферы между направлениями на точки $(R_0, \varphi_0, \lambda_0)$ и (r, φ, λ) соответственно.

В работах [339,202] разработаны эффективные численные методы решения прямой задачи (I.14). Естественно, возникает вопрос о решении обратной задачи гравиметрии с учетом сферичности планет. Так как в качестве элементарного тела используется СПП, то постановка линейной обратной задачи гравиметрии для сферической планеты возможна в классе конечномерных параметрических моделей.

В работе В.И.Старостенко, С.М.Оганесяна и А.Г.Манукяна [348] сформулирована следующая обратная задача гравиметрии для сфери-

ческой Земли.

Пусть имеется наблюденное гравитационное поле V_{RH} на некотором произвольном рельефе Q. Известно, что поле обусловлено совокупностью N однородных по плотности геологических структур. Размеры каждой структуры известны и задаются в геоцентрической сферической системе координат. Определим такие неизвестные плотности σ_j, $j=\overline{1,N}$, этих структур, чтобы их суммарный гравитационный эффект в точках $(R_i, \varphi_i, \lambda_i)$, $i=\overline{1,M}$, удовлетворял неравенству

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\sigma_j - V_{R_i H} \right\|^2 \le \delta^2, \qquad (I.15)$$

где A_{ij} – величина гравитационного эффекта j-ой структуры единичной плотности на i-ую точку наблюдения, и минимизировал один из критериальных функционалов $\Omega(\cdot)$.

§ 3. Свойства операторов решения прямых задач гравиметрии

I. Исследование свойств прямой задачи гравиметрии имеет важное значение, так как существенно помогает в правильном выборе путей решения обратной задачи. Основным инструментом наших исследований являются методы и теоремы функционального анализа применительно к конкретным гравиметрическим задачам.

Изложение начнем с анализа оператора A решения линейной прямой задачи гравиметрии (I.8), (I.9), так как они поддаются наиболее глубокому и всестороннему изучению. Для применения методов функционального анализа к изучению свойств оператора $A: L_2(S) \to L_2(Q)$ построим его сопряженный оператор A^*. Для нахождения A^* воспользуемся определением понятия сопряженного оператора, т.е. равенством [I76, 306, I98].

$$(A\sigma, \varphi)_{L_2(Q)} = (\sigma, A^*\varphi)_{L_2(S)}.$$

Пусть $\sigma \in L_2(S)$, $\varphi \in L_2(Q)$ и величина $(A\sigma, \varphi)$ конечны. Тогда на основании теоремы Фубини [I76, с.317] получим цепочку равенств

$$(A\sigma,\varphi)_{L_2(Q)} = \iint_Q \left(\bar{G} \iiint_S \frac{(\zeta - z)\,\sigma(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{3/2}} \right) \varphi(x,y,z)\,dQ =$$

$$= \iiint_S \left\{ \bar{G} \iint_Q \frac{(\zeta - z)\,\varphi(x,y,z)\,dQ}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{3/2}} \right\} \sigma(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= (\sigma, A^*\varphi)_{L_2(S)},$$

где dQ – элемент площади множества Q, $\bar{G}$ – численно равна G и имеет размерность $\left[\frac{\text{г}\cdot\text{сек}^2}{\text{см}^4}\right]$.

Из полученного равенства видно, что

$$A^*\varphi = \bar{G} \iint_Q \frac{(\zeta - z)\,\varphi(x,y,z)\,dQ}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{3/2}}, \quad (\xi,\eta,\zeta) \in S \qquad \text{(I.16)}$$

Аналогично для двухмерного случая получим, что

$$A^*\varphi = 2\bar{G} \int_Q \frac{(\zeta - z)\,\varphi(x,z)\,dQ}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}, \quad (\xi,\zeta) \in S, \qquad \text{(I.17)}$$

где dQ – элемент длины дуги множества Q.

<u>Замечание I.6</u>. В случае, когда множество Q совпадает с плоскостью, перпендикулярной оси z, оператор A^* с точностью до постоянного множителя совпадает с оператором аналитического продолжения в верхнее полупространство, а точнее в область S' – симметричную области S относительно множества Q, а оператор A^*A представим в виде

$$A^*A\sigma = \bar{G}\iint_Q \frac{z_0 - z}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}\left(G\iiint_S \frac{(\zeta - z)\sigma(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{3/2}}\right)dQ =$$

$$= 2\pi G\bar{G}\iiint_S \frac{(\zeta + z_0)\sigma(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta+z)^2\right]^{3/2}}, \quad (x_0,y_0,z_0)\in S, \tag{I.18}$$

где в силу $z \equiv \bar{z}$ элемент $dQ = dx\,dy$.

Обозначим нулевое подпространство оператора $A: L_p(S) \to L_p(Q)$ через $N_A(S,p)$.

2. Пусть область S ограничена и Q удовлетворяет условиям замечания I.6, тогда на основании соотношения (I.18) справедлива [258,259].

Теорема I.I. Оператор решения прямой задачи гравиметрии A, действующей из $L_2(S)$ в $L_2(Q)$, ограничен.

Доказательство. Запишем скалярное произведение

$$(A\sigma, A\sigma) = (A^*A\sigma, \sigma) = 2\pi G\bar{G}\iiint_S \left(\iiint_S \frac{(\zeta+z_0)\sigma(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta+z_0)^2\right]^{3/2}}\right)\cdot$$

$$\cdot\,\sigma(x_0,y_0,z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0.$$

Пусть $M = \max \frac{\zeta + z_0}{\left[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta+z_0)^2\right]^{3/2}}$, тогда имеет место цепочка неравенств

$$\|A\sigma\|^2 \le 2\pi G\bar{G}\iiint_S\left(\iiint_S \frac{(\zeta+z_0)\,|\sigma(\xi,\eta,\zeta)|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta+z_0)^2\right]^{3/2}}\cdot|\sigma(x_0,y_0,z_0)|\right)\cdot$$

$$\cdot\,dx_0\,dy_0\,dz_0 \le 2\pi M G\bar{G}\left(\iiint_S |\sigma(\xi,\eta,\zeta)|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\right)^2 \le$$

$$2\pi M G\bar{G}\,\mathrm{mes}\,S\iiint_S \sigma^2(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \le 2\pi M G\bar{G}\,\mathrm{mes}\,S\,\|\sigma\|^2.$$

Следовательно, получили неравенство

$$\|A\sigma\|_{L_2(Q)} \le \sqrt{2\pi G\bar{G}\cdot M\cdot \mathrm{mes}\,S}\cdot\|\sigma\|_{L_2(S)}, \tag{I.19}$$

т.е. оператор A ограничен и его норма $\|A\| \le \sqrt{2\pi G\bar{G} M \cdot mes\, S}$.

Теорема I.I доказана.

Исследуем свойства формально записанного оператора

$$B\sigma = \iiint_S \frac{(\zeta + z_0)\,\sigma(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta + z_0)^2\right]^{3/2}}, \qquad (I.20)$$

где $(x_0, y_0, z_0) \in S$, $\sigma(\xi,\eta,\zeta) \in L_2(S)$, которые действуют из $L_2(S)$ в $L_2(S)$. Ядро оператора B функция $K(\xi,\eta,\zeta,x_0,y_0,z_0) = \frac{\zeta + z_0}{\left[(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta + z_0)^2\right]^{3/2}}$ является положительной и принадлежит пространству $L_2(S)$. Поэтому интеграл

$$\iiint_S \left(\iiint_S K^2(\xi,\eta,\zeta,x_0,y_0,z_0)\,dS \right) dS' < \infty. \qquad (I.21)$$

Из равенств (I.I8), (I.2I), работ [I76, с.46I,306] и теоремы I.I следует, что B является линейным неотрицательным вполне непрерывным самосопряженным оператором Гильберта-Шмидта, а его нулевое подпространство совпадает с множеством $N_A(S,2)$. Из теорем функционального анализа о собственных значениях и элементах самосопряженных операторов Гильберта-Шмидта [I76,306,423] и соотношений (I.I8), (I.20) следует [259].

Теорема I.2. Для любой произвольной ограниченной фиксированной области $S \subset R_3^+$ в пространстве гармонических функций $H(S,2)$ существует счетное число ортогональных гармонических функций σ_n на множестве $\bar{S}$, для которых

$$\iiint_S \frac{(\zeta - z)\,\sigma_n(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right]^{3/2}} = \mu_n \sigma_n', \quad (x,y,z) \in S', \qquad (I.22)$$

где $\forall n\ \mu_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ и σ' являются зеркальным отображением функции σ_n относительно плоскости $\xi O \eta$, т.е. $\sigma_n'(\xi,\eta,-\zeta) = \sigma_n(\xi,\eta,\zeta)$.

В общем случае аналитическое задание последовательности $\{G_n\}$ для произвольной области S затруднительно.

Однако для бесконечной горизонтальной полосы $\Pi(a,b) = \{(x,y,z) \in R_3, 0 < a \le z \le b\}$ и нижнего полупространства $\Pi(0,\infty) = R_3^+$ при любом $\mu_1, \mu_2 > 0$ и $\zeta - z_0 > 0$; т.е. внешняя точка находится над множеством $\Pi(a,b)$, справедливы равенства [259]

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)\, e^{-\mu(\zeta - z)} \cdot \cos\mu_1(\xi - x)\cos\mu_2(\eta - y)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\left[(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2\right]^{3/2}} = \tag{I.23}$$

$$= \frac{\pi}{\mu}\left(e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}\right) e^{\mu(z_0 - z)} \cdot \cos\mu_1(x - x_0)\cos\mu_2(y - y_0);$$

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)\, e^{-\mu(\zeta - z)} \cdot \cos\mu_1(\xi - x)\cos\mu_2(\eta - y)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\left[(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2\right]^{3/2}} = \tag{I.24}$$

$$= \frac{\pi}{\mu} e^{\mu(z_0 - z)} \cdot \cos\mu_1(x - x_0)\cos\mu_2(y - y_0)$$

$$\text{Ч} \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)\, e^{\mu(\zeta - z)} \cos\mu_1(\xi - x)\cos\mu_2(\eta - y)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\left[(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2\right]^{3/2}} = \tag{I.25}$$

$$= 2\pi (b - a)\, e^{\mu(z - z_0)} \cos\mu_1(x - x_0)\cos\mu_2(y - y_0),$$

где $\mu = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$.

В случае $\zeta - z_0 < 0$, т.е. внешняя точка (x_0, y_0, z_0) находится под множеством $\Pi(a,b)$, равенства (I.23) и (I.25) принимают соответственно вид

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)\, e^{-\mu(\zeta - z)} \cdot \cos\mu_1(\xi - x)\cos\mu_2(\eta - y)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\left[(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2\right]^{3/2}} = \tag{I.26}$$

$$= -2\pi (b - a)\, e^{-\mu(z_0 - z)} \cdot \cos\mu_1(x - x_0)\cos\mu_2(y - y_0)$$

и

$$\int_a^{\infty}\iint_{-\infty}\frac{(\zeta-z_0)\,e^{\quad}\cdot\cos\mu_1(\xi-x)\cos\mu_2(\eta-y)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta-z_0)^2\right]^{3/2}}=$$

$$=-\frac{\pi\left(e^{2\mu b}-e^{2\mu a}\right)}{\mu}\,e^{-\mu(z_0+z)}\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0). \qquad (I.27)$$

Из равенств (I.23) и (I.24) легко видно, что если точки наблюдения расположены только над множеством $\Pi(a,b)$, то в полосе $\Pi(a,b)$ существуют гармонические функции, не создающие внешнего поля над полосой. Однако, как показывают равенства (I.26) и (I.27), их внешние поля под полосой отличны от нулевого. Впервые внимание на этот результат обратили А.И.Кобрунов и В.А.Варфоломеев [167] (см.также работу [211]). Отметим, что для неограниченных или полых областей S множество единственности Q состоит из нескольких поверхностей.

Из равенств (I.23) и (I.27) следует, что для оператора AA^* элементы $e^{-\mu(z-z_0)}\cdot\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0)$ и $e^{\mu(z-z_0)}\cdot\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0)$ являются обобщенными собственными функциями при предположении, что внешняя точка находится соответственно над и под множеством $\Pi(a,b)$. Обобщенные собственные значения получаются из равенств

$$A^*A\,e^{-\mu(z-z_0)}\cos\mu_1(x-x_0)\cdot\cos\mu_2(y-y_0)=$$

$$=2\pi^2G\bar{G}\,\frac{e^{-\mu 2a}-e^{-2\mu b}}{\mu}\cdot e^{2\mu\bar{z}_1}\cdot e^{-\mu(z-z_0)}\cdot\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0) \qquad (I.28)$$

и

$$A^*A\,e^{\mu(z-z_0)}\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0)=$$

$$=2\pi^2G\bar{G}\,\frac{e^{2\mu b}-e^{2\mu a}}{\mu}\,e^{-2\mu z_2}\,e^{\mu(z-z_0)}\cdot\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0), \qquad (I.29)$$

где $z = z_i$, $i = 1,2$ – уравнение поверхности множества Q.

Из предельных соотношений

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{e^{-2\mu a} - e^{2\mu b}}{2\mu} = \lim_{\mu \to 0} \frac{e^{2\mu b} - e^{2\mu b}}{2\mu} = b - a,$$

равенств (I.28) и (I.29) и работ [423,422] следуют [259]:

Теорема I.3. Для бесконечной горизонтальной полосы $\Pi(a, b)$ в независимости от положения множества Q самосопряженный оператор $A^*A : L_2(\Pi(a,b)) \to L_2(\Pi(a,b))$ имеет непрерывный спектр, заключенный в интервале $[0, 4\pi^2 G\bar{G}(b-a)]$ и ограничен;

Теорема I.4. Для бесконечной горизонтальной полосы $\Pi(0, \infty)$ оператор A^*A имеет непрерывный спектр, заполняющий интервал $(0, \infty)$ и неограничен;

Теорема I.5. Оператор $A : L_2(\Pi(a,b)) \to L_2(R_2)$ ограничен, его норма $\|A\| = \sqrt{4\pi^2 (b-a) G\bar{G}}$ вне зависимости от расположения точки наблюдения.

Замечание I.7. Из теорем I.3–I.5 следует, что теорема I.I остается в силе при произвольном положении множества Q.

Пусть множество единственности Q является незамкнутой непрерывной поверхностью, тогда справедлива

Теорема I.6. Для любой ограниченной области S область значений линейного оператора $A : L_2(S) \to L_2(Q)$ всюду плотно в пространстве $L_2(Q)$, а сам оператор является вполне непрерывным.

Доказательство. Из операторного равенства $R(A)^{\perp} = N_A(S,2)$ следует, что справедливость теоремы I.6 будет установлена, если показать, что нуль пространства $N_{A^*}(Q,2)$ состоит из единственного нулевого элемента. Единственность нулевого элемента проводится аналогично доказательству единственности решения внешней задачи Неймана [83,399], если учесть, что

$$\Psi(\xi,\eta,\zeta) = \iint_Q \frac{(\zeta - z)\,\varphi(x,y,z)\,dQ}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2]^{3/2}}, \quad \varphi(x,y,z) \in L_2(Q),$$

на множестве $M=\{(\xi,\eta,\zeta)\in R_3, \zeta-z>0\}$ является гармонической и стремится к нулю при $(\xi,\eta,\zeta)\to 0$. Так как образ $A^*\varphi$ есть сужение функции $\psi(\xi,\eta,\zeta)$ на множество S, то множество нулей оператора $A^*\varphi$ состоит из единственного нулевого элемента.

Из вполне непрерывности операторов A^*A и AA^* следует [422,с.193], что операторы A и A^* также вполне непрерывны.

Теорема I.6 полностью доказана.

Замечание I.8. Если множество единственности Q есть замкнутая непрерывная поверхность, охватывающая область S, то теорема I.6 не имеет место. Действительно, в этом случае ядро оператора A^* содержит ненулевые элементы, которые совпадают с распределением на Q, создающим во внутренней части Q постоянный потенциал [259,399].

Теоремы I.4-I.6, замечание I.8 показывают, что свойства оператора A в зависимости от исходных множеств S и Q существенно изменяются. Это надо учитывать при решении линейной обратной задачи.

Из теоремы о плотной разрешимости следует, что для любой наперед заданной области S решения задачи (I.I3) в классе $L_p(S)$ распределения плотностей при незамкнутости Q являются состоятельными с мерой $\mu = 0$, т.е.

$$\mu = \inf_{z\in L_p(S)} \|Az-b\|_{L_p(Q)} = 0, \qquad (I.30)$$

и при любом $\delta>0$ существуют δ-эквивалентные решения, т.е. $z^\delta\in M_\delta$.

Однако, если S не охватывает всех особых точек аномального поля в δ-решениях z^δ при $\delta\to 0$ возникают сингулярности и они не принадлежат пространству $L_p(S)$.

Метод доказательства множественного равенства $N_{A^*}(Q,2)=\{0\}$ позволяет сформулировать теорему единственности для некоторых классов тел.

Теорема I.7. Для любых конечных и бесконечных материальных поверхностей обратная задача гравиметрии относительно плотностей разрешима однозначно.

Замечание I.9. Теоремы I.I-I.6 сформулированы для области $S\subset R_3^+$, но они верны для любого $n\geq 2$ -мерного пространства R_n и оператора $A: L_p(S)\longrightarrow L_p(Q)$, $1<p<\infty$.

3. Известно [220,222], что элемент x^* минимизирующий функционал (I.7) совпадает с решением уравнения

$$Fx=b$$

с правой частью, равной проекции элемента b на множество $\overline{R(F)}$ Если эта проекция не принадлежит $R(F)$, то задача (I.7) неразрешима.

На основании вышесказанного и теоремы I.6 следует, что ЛОЗГ в классе $L_p(S)$ распределения плотностей разрешима не при всех значениях наблюденной величины b. Если при некотором b она разрешима, то она имеет неединственное решение. Из вполне непрерывности оператора A следует [398], что ЛОЗГ в пространстве $L_p(S)$ неустойчиво к ошибкам задания b.

Таким образом, линейная обратная задача гравиметрии в классе $L_p(S)$ плотностей является некорректно поставленной по всем трем условиям Адамара.

Отметим, что из теоремы I.6 легко следует справедливость следующего результата.

Теорема I.7. Задачи $$\min \|Ab-b\|^2_{L_2(Q)} \qquad (I.31)$$

и $$Ab=b \qquad (I.32)$$

эквивалентны.

Когда множество Q есть плоскость, перпендикулярная оси

z, методу наименьших квадратов, можно дать геофизическое истолкование. Пусть при заданном $b = V_{zH}$ задача (I.3I) разрешима. Тогда множество ее точек минимума совпадает с множеством решений уравнения

$$A^*Az = A^*V_{zH}. \qquad (I.33)$$

На основании замечания I.6 и соотношения (I.I8) уравнению (I.33) эквивалентно уравнение

$$G\iiint_S \frac{(\zeta - z')\,\sigma(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{[(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2]^{3/2}} = V_{zH}^{пер}(x',y',z'), \qquad (I.33)$$

где $(x',y',z') \in S'$, $V_{zH}^{пер}$ – аналитический пересчет функции V_{zH} в область S'.

Следовательно, нахождение решения задачи (I.3I) фактически эквивалентно решению уравнения (I.33). Очевидно, что задачи (I.32) и (I.33) разрешимы одновременно.

4. Перейдем к рассмотрению оператора F решения прямой задачи гравиметрии о контактной поверхности. Из соотношения (I.II) непосредственно видно, что оператор

$$Fz = G\iint_S \left[\frac{\Delta\rho(\xi,\eta)}{[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(H(\xi,\eta)-z_0)^2]^{1/2}} - \right. \qquad (I.34)$$

$$\left. - \frac{\Delta\rho(\xi,\eta)}{[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(z(\xi,\eta)-z_0)^2]^{1/2}} \right] d\xi\,d\eta,$$

где неизвестная функция $z(\xi,\eta) \in L_2(S)$, $(x_0,y_0,z_0) \in Q$.

В общем случае для оператора F (задачи (I.II)) существует семейство контактных поверхностей, соответствующее разным значениям скачка плотности $\Delta\rho(\xi,\eta) = \Delta\rho$ и глубин до асимптотической поверхности $H(\xi,\eta) = H$, эквивалентных по внешнему гравитационному полю. В двухмерном случае задача построения семейств контактных поверхностей, эквивалентных по гравитационно-

му полю точечному источнику, впервые решена В.Н.Страховым [357] и совпадает с семейством конхоид Слюза. На этом примере В.Н.Страховым показана двухпараметрическая неоднозначность (по $\Delta\rho$ и H) обратной задачи гравиметрии о контактной поверхности. В последующем эти вопросы рассматривались в работах Н.В.Федоровой и А.В. Цирульского [416,417].

В трехмерном случае при ограниченности множества S, т.е. для финитной контактной поверхности, задача (I.II) имеет единственное решение [210], а оператор F является вполне непрерывным оператором типа Урысона [152-154,422]. Как показано на примерах оператора решения линейной прямой задачи, при увеличении размеров множества S ее свойства могут только ухудшаться.

Поэтому задача о контактной поверхности некорректна или по всем трем условиям, или в случае единственности ее решения - по I и 3 условиям.

Обозначим ядро оператора F через $K(\xi,\eta,z(\xi,\eta),x_0,y_0,z_0)$ В силу непрерывной дифференцируемости ядра K по переменной z и ограниченности $K_z'(\xi,\eta,z,x_0,y_0,z_0)$ по переменной z имеем, что существует производная Фреше $F'(z)$ оператора F, которая также является вполне непрерывной по z и представима в виде [154,422]

$$F'(z)h = G\iint_S \frac{(z(\xi,\eta)-z_0)\Delta\rho(\xi,\eta)\,h(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\left[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(z(\xi,\eta)-z_0)^2\right]^{3/2}}, \quad (I.35)$$

где $(x_0,y_0,z_0)\in Q$, $h(\xi,\eta)\in L_2(S)$.

Аналогично линейному оператору A получим, что при каждом фиксированном z сопряженный оператор $F'^*(z)$ к оператору $F'(z)$ имеет вид

$$F'^*(z)\varphi = \tilde{G}\iint_Q \frac{(z(\xi,\eta)-z_0)\Delta\rho(\xi,\eta)\,\varphi(x_0,y_0,z_0)\,dQ}{\left[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(z(\xi,\eta)-z_0)^2\right]^{3/2}}, \quad (I.36)$$

где $(\xi,\eta)\in S$; $\tilde{G}$ – численно совпадает с G и имеет размерность $\left[\frac{см^2\cdot сек^2}{2}\right]$.

Пусть поверхность Q задается при помощи функции $z_0=f(x_0,y_0)$. Для каждого фиксированного z оператор $F'(z)$ с точностью до функции $\frac{1}{\sqrt{1+f'^2_{x_0}+f'^2_{y_0}}}$ совпадает с решением прямой линейной задачи гравиметрии для материальной поверхности $z(\xi,\eta)$ с весовой функцией $\Delta\rho(\xi,\eta)$.

§ 4. Прямые регулярные методы интерпретации гравиметрических данных

I. Формулировке понятия регуляризующего оператора предшествовал целый цикл работ, посвященных исследованию проблемы устойчивости в обратных задачах, обладающих единственным решением.

В 1943 г. А.Н.Тихонов [397] нашел условия, при которых решение обратной задачи устойчиво. На основе изложенных в работе [397] идей М.М.Лаврентьев [191] сформулировал понятие задачи, корректной по Тихонову.

Это такие условия:

1) априори известно, что решение задачи существует для некоторого класса данных N и принадлежит некоторому заданному множеству M метрического пространства;

2) решение единственно в некотором классе данных N и в классе решений, принадлежащих M;

3) бесконечно малым вариациям данных задачи, не выводящих за пределы N, соответствует бесконечно малые вариации решения.

Множество M называется множеством корректности.

В применении к уравнению (I.5) корректность по Тихонову означает, что при $b=\bar{b}$ существует единственное решение $\bar{x}$

уравнения (I.5), принадлежащее компакту M. При этом оператор непрерывен на множестве $N=FM$.

В работах В.К.Иванова [I43-I45] приближенное решение некорректной задачи находится с использованием понятия квазирешения. При этом подходе понятие корректности остается неизменным, но изменяется понятие решения задачи. В.К.Иванов показывает единственность и устойчивость задачи нахождения квазирешения, если проекция каждого элемента b на множество $N=FM$ единственно [I44].

Понятие квазирешения широко используется в гравиметрической практике в неформализованном методе подбора, когда число определяемых параметров модели не больше 5÷I0.

2. Одновременно с понятием регуляризующего оператора А.Н.Тихонов указал вариационный способ решения обратных задач в постановках I и 2 (см.работу [398,стр.58-83]). Решение задачи (I.4I), (I.40) и (I.42), (I.40) методом Лагранжа может быть получено при помощи элемента x^{α} - минимизирующий сглаживающий параметрический функционал Тихонова

$$T^{\alpha}[x]=\|Fx-b\|^2_{H_2}+\alpha\,\Omega(x-x_0),\quad \alpha>0, \qquad (I.37)$$

при соответствующем выборе $\alpha=\alpha(\delta)>0$ и некоторых ограничениях на оператор $F:H_1\to H_2$. В функционале (I.37) элемент $x\in H_1$, $b\in H_2$, где H_1 и H_2 - некоторые гильбертовые пространства. Очевидно, что для постановки I в функционале (I.37) элемент x_0 тождественно равен нулевому.

Свойство устойчивости задачи минимизации функционала (I.37) достигается при помощи стабилизирующего функционала $\Omega(\cdot)$.

В работах [I44,223,224] для линейных задач доказана однозначность выбора регуляризованного решения $x^{\alpha(\delta)}$ из условия $\|Fx-b\|^2=\delta^2$, которое получило название принципа невязки.

Аналогичный результат для нелинейных задач имеет место в случае монотонности оператора F * [41].

Другой принцип выбора регуляризованного решения из условия $\min_{\alpha} \| \alpha \frac{dx^{\alpha}}{d\alpha} \|$, предложенный в основном для решения нелинейных задач, получил название квазиоптимального критерия Тихонова–Гласко [398,100]. На модельных и практических примерах показана хорошая работоспособность и эффективность критерия Тихонова–Гласко, если погрешность задания величины b не слишком велика. Однако указанный критерий не позволяет конструировать регуляризующие алгоритмы в определении I.2 [41,186,187].

В работах [333,341,254] при неизвестном δ предложен эвристический критерий для определения параметра регуляризации из условия

$$\min_{\alpha} \| Fx - b \|^2 = \| Fx^{\alpha(\delta)} - b \|^2 . \qquad (I.38)$$

Одновременно с критерием (I.38) целесообразно запоминать еще два предыдущих решения и выбор производить визуально.

Если оператор F и функционал $\Omega(\cdot)$ являются дифференцируемыми по Фреше, то элемент x^{α}, минимизирующий функционал (I.37), можно определить из уравнения Эйлера [398]

$$F'^{*}(x)(Fx - b) + \alpha \operatorname{grad} \Omega(x - x_0) = 0 . \qquad (I.39)$$

В случае линейности оператора F, т.е. $F = A$, уравнение Эйлера принимает вид

$$A^{*}Ax + \alpha \operatorname{grad} \Omega(x - x_0) = A^{*}b .$$

3. При построении последовательности $\{x_n\}$ для решения обратных задач в постановке 5 естественно воспользоваться итерационными методами. Они обладают рядом несомненных достоинств:

* Оператор $F : H_1 \to H_1$ называется монотонным, если для любых $x, y \in H_1$ выполняется неравенство $(x - y, Fx - Fy) \geq 0$.

высокая точность решения, простота вычислительных схем, их однотипность для задач с линейными и нелинейными операторами.

В теории оптимизации разработаны различные итерационные методы минимизации функционалов [48,73,74,121,144,183,191, 215,251,286,296,297,303,384,412,425,426,446,464,463].

Очевидно, что не все из них пригодны для решения некорректных задач, так как они не удовлетворяют последнему требованию постановки 5 [398,70]. В работах [341,257,258,260,344] для решения обратных задач в постановке 5 выделен класс итерационных процессов вида

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n \left(P(x_n) + \alpha_n B \right)^{-1} F'^{*}(x_n)(Fx_n - b), \qquad (I.40)$$

где $P(x)$ при каждом фиксированном x является самосопряженным неотрицательным оператором в пространстве H_1, т.е.

$$(P(x)y, y) \geq 0;$$

B - линейный самосопряженный положительно определенный оператор, т.е. для B справедливо соотношение

$$(Bx, x) \geq \rho \|x\|^2_{H_1}, \quad \rho > 0;$$

α_n и β_n - параметры итерационного процесса; $2F'^{*}(x)(Fx-b)$ - производная Фреше функционала (I.7).

В случае выпуклости функционала (I.7) и конечномерности пространства H_1 в работах [341,254] показано, что при прерывании последовательности $\{x_n\}$, образованной итерационным процессом (I.40), по условию

$$x_{N-1} \bar{\in} M_\delta \quad и \quad x_N \in M_\delta, \qquad (I.41)$$

элемент x_N является регуляризованным решением задачи (I.7). Следовательно, оператор $R(\delta, n) = x_n$ определяет регуляризующий алгоритм для решения обратной задачи гравиметрии в посте-

новке 5.

Одновременно с работой [341] были опубликованы статьи А.Б.Бакушинского [41,42], где предложено для решения некорректных задач использовать другой, близкий к (I.40), класс итерационных процессов

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n \left(P(x_n) + \alpha_n B \right)^{-1} \left(F'^{*}(x_n)(Fx_n - b) + \alpha B(x_n - x_0) \right), \quad \text{(I.42)}$$

который также позволяет строить регуляризующий оператор $R(b,\eta) = x_\eta$ и непосредственно связаны с функционалом (I.37).

Сходимость итерационного процесса (I.42) доказана для бесконечномерного случая. Далее показано, что элементы $\{x_n\}$ при точном $\bar{b}$ сходятся к ближайшему в смысле критерия $\Omega(x - x_0) = (B(x - x_0), x - x_0)$ решению задачи (I.7).

Построение регуляризующих алгоритмов при помощи процессов типа (I.40), (I.42) в математической литературе называется <u>принципом итеративной регуляризации</u> [41,42].

4. В зависимости от выбора операторов $P(x)$ и B из процессов (I.40) и (I.42) можно получить различные итерационные методы, многие из которых известны [341,254,41]. Пусть $\beta_n \equiv 1$

Выберем в итерационном процессе (I.40) оператор $P(x) \equiv 0$ и $B = E$. Тогда приходим к градиентному методу

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n F'^{*}(x_n)(Fx_n - b),$$

где $0 < \varepsilon_1 < \lambda_n = \frac{1}{\alpha_n} < \frac{2}{L + \varepsilon_1}$, L – костанта Липшица для функционала $f(x)$.

Очевидно, что методы скорейшего спуска, у которых λ_n отвечают этому неравенству, также являются устойчивыми. Впервые устойчивость методов спуска для линейных задач установлены В.М.Фридманом [421] и В.А.Морозовым [224] и экспериментально показана Б.Т.Поляком [298].

Пусть в процессе (I.40) оператор $P(x)=E$ и B есть матрица, соответствующая регуляризации первого порядка [398]. В этом случае приходим к градиентному методу

$$x_{n+1} = x_n - (E+\alpha_n B)^{-1} F'^*(x_n)(Fx_n - b)$$

в пространстве W_ρ, которое при $\rho=\alpha_n=const$ является конечномерным аналогом пространства Соболева $W_{2\rho}^1$ с весом ρ. Алгоритмы такого типа для решения некорректных задач предложил Б.Т.Поляк и экспериментально показал их высокую точность и устойчивость [298].

Если для минимизации произвольного функционала $f(x)$ в процессе (I.40) взять $P(x)=H(x)$, где $H(x)$ - гессиан функционала $f(x)$, то приходим к модифицированному методу Ньютона [286,254,341]

$$x_{n+1} = x_n - (H(x_n)+\alpha_n B)^{-1} f'(x_n).$$

Для работы наибольший интерес представляет случай $P(x)=F'^*(x)F'(x)$, который для процесса (I.40) соответствует итерационному модифицированному методу Гаусса-Ньютона [341, 286,297,254]

$$x_{n+1} = x_n - (F'^*(x_n)F'(x_n)+\alpha_n B)^{-1} F'^*(x_n)(Fx_n - b), \quad (I.43)$$

а для процесса (I.42) - диагональному алгоритму спуска по параметру Тихонова-Гласко [100,348]

$$x_{n+1} = x_n - (F'^*(x_n)F'(x_n)+\alpha_n B)^{-1}\left(F'^*(x_n)(Fx_n - b)+\alpha_n B(x_n - x_0)\right). \quad (I.44)$$

Пусть оператор F является линейным, т.е. $F=A$. Тогда процессы (I.43), (I.44) и (I.40) принимают соответственно вид

$$x_{n+1} = x_n - (A^*A+\alpha_n B)^{-1} A^*(Ax_n - b); \quad (I.45)$$

$$x_{n+1} = x_n - (A^*A+\alpha_n B)^{-1}\left(A^*(Ax_n - b)+\alpha_n B(x_n - x_0)\right) \quad (I.46)$$

и

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n (A^*A + \alpha_n B)^{-1} A^* (Ax_n - b). \qquad (I.47)$$

Процесс (I.45) при $\alpha_n \equiv \alpha_0$ совпадает с итерационным методом решения линейных некорректных задач, рассмотренным А.В.Кряневым [189]; при $\alpha_n = \frac{1}{\mu}$ эквивалентен процессу

$$x_{n+1} = x_n - \mu (\mu A^*A + B)^{-1} A^* (Ax_n - b), \qquad (I.48)$$

который впервые рассмотрен в работе В.А.Морозова [224].

Замечание I.IO. Впервые использование итерационных методов для решения некорректных задач предложили В.М.Фридман (линейная задача без помех в исходных данных) [42I] и М.М.Лаврентьев (линейные и нелинейные задачи с помехами в исходных данных) [I9I]. В дальнейшем итерационными методами решения линейных и нелинейных некорректных задач занимались В.А.Морозов [223,224], А.Б. Бакушинский [4I,42], В.Н.Страхов [355], Б.Т.Поляк [297], Г.И. Марчук [2I6], А.В.Крянев [I89], С.М.Оганесян [254,258,34I,353], В.И.Старостенко [34I,354], Г.М.Вайникко [72], В.Н.Трушников [406], Е.Г.Гольштейн [II2,II3], Н.В.Третьяков [II3] и др.

5. Условно-экстремальные постановки I, 2 и 5, как показано в пунктах 2,3, при помощи соответствующих методов решения удается свести к задачам безусловной минимизации. Однако постановка 4 является сугубо задачей математического программирования. Целесообразность использования математического программирования для решения обратных задач гравиметрии обосновывается следующими положениями [342,343].

Включение ограничений на неизвестные в ряде случаев позволяет привести задачи гравиразведки к классу задач, имеющих единственное решение. Это важный момент позволяет ограничивать действие принципа эквивалентности, который, как показано в работах В.Н.Страхова [358-360], А.В.Цирульского [427,43I,434],

Ф.Г.Филатова [418], М.А.Бродского [60-62], А.С.Маргулиса [206-210] и С.М.Оганесяна [256,266], имеет широкие пределы.

Использование ограничений на неизвестные значительно повышает устойчивость задачи. Это связано с тем, что ограничение суживает множество δ -эквивалентных решений. В случае единственности решения задачи (I.5) и компактности множества $\bar{Q} = \{x;\ \varphi_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,n}\}$ задача сводится к нахождению квазирешения по В.К.Иванову [144].

Применение ограничений позволяет достаточно просто осуществлять формализацию геолого-геофизических сведений количественного характера об исследуемом объекте и включить их в процесс поиска решений. Это избавляет от получения результатов интерпретации неестественных с геолого-геофизической точки зрения. Это особенно удобно при работе с дисплеями [290]. Очевидно, что по своей сути такой подход может рассматриваться как "пассивная" комплексная интерпретация различных геофизических данных.

Использование аппарата математического программирования совместно с устойчивыми итерационными процессами (I.40)-(I.47) существенно расширяет круг решаемых гравиметрических задач [254,333,342,343].

Наиболее просто аппарат математического программирования совмещается с устойчивыми итерационными процессами (I.40)-(I.47), когда множество $\bar{Q}$ выпукло.

В этом случае конструируется последовательность $\{x_n\}$ при помощи соотношения [255,343,41]

$$x_{n+1} = P_{\bar{Q}}\left(x_n - \beta_n\left(P(x_n) + \alpha_n B\right)^{-1} F'^{*}(x_n)\left(Fx_n - b\right)\right) \quad \text{(I.49)}$$

или

$$x_{n+1} = P_{\bar{Q}}\left(x_n - \beta_n\left(P(x_n) + \alpha_n B\right)^{-1}\left(F'^{*}(x_n)\left(Fx_n - b\right) + \alpha_n B\left(x_n - x_0\right)\right)\right), \quad \text{(I.50)}$$

где $P_{\bar{Q}}x$ - проекция элемента x на множество $\bar{Q}$, которая при выпуклости $\bar{Q}$ определяется единственным образом.

Теоретические исследования показывают, что процессы (I.42)-(I.47) тесно связаны с параметрическим функционалом (I.37) и вариационным способом Тихонова. Наиболее глубокие результаты получены для линейной задачи [271,257,260].

§ 5. Связь между вариационным способом Тихонова и итерационными процессами. Некоторые новые свойства L -псевдорешения

I. Для удобства доказательств примем, что стабилизатор $\Omega(\cdot) = \|\cdot\|^2_{H_1}$, т.е.

$$T^{\alpha}[x] = \|Ax - b\|^2_{H_2} + \alpha\|x - x_0\|^2_{H_1}, \quad \alpha > 0. \qquad (I.51)$$

Обозначим через $M_A = H_1 \ominus N_A$ ортогональное дополнение к подпространству N_A; P_{M_A} и P_{N_A} - операторы ортогонального проектирования соответственно на подпространства M_A и N_A; U - плоскость с направляющим подпространством M_A и элементом сдвига x_0. Для элемента x^{α}, минимизирующий функционал (I.51) справедлива [270,271].

Теорема I.8. При любом значении параметра $\alpha > 0$ элемент x^{α} принадлежит плоскости U.

Следствие I.I. Для любого фиксированного $x_0 \in U$ элемент x^{α} также принадлежит плоскости U.

Для любого фикисрованного $\alpha > 0$ имеет место операторное равенство

$$(A^*A + \alpha E)^{-1}A^*A + \alpha(A^*A + \alpha E)^{-1} = E,$$

где E - единичный оператор в H_1.

Используя теорему I.8, покажем некоторые важные свойства операторов $\alpha(A^*A+\alpha E)^{-1}$ и $(A^*A+\alpha E)^{-1}A^*A$, которые сформулируем в виде лемм и теорем [257].

Лемма I.I. Для любых $x_0 \in U$ и $\alpha > 0$ элемент $\alpha(A^*A+\alpha E)^{-1}x_0$ принадлежит плоскости U и норма оператора $\alpha(A^*A+\alpha E)^{-1}$ равна единице, т.е. $\|\alpha(A^*A+\alpha E)^{-1}\| = 1$.

Лемма I.2. Для любых $x_0 \in H_1$ и $\alpha > 0$ элемент $(A^*A+\alpha E)^{-1}A^*A x_0$ принадлежит подпространству M_A и норма оператора $(A^*A+\alpha E)^{-1}A^*A$ меньше единицы.

Лемма I.3. При $\alpha \to \infty$ операторы $\alpha(A^*A+\alpha E)^{-1}$ и $(A^*A+\alpha E)^{-1}A^*A$ сходятся по норме соответственно к операторам E и нулевому.

2. Пусть $\bar{x}^*$ обобщенное нормальное решение уравнения

$$Ax = b, \quad x \in H_1, \quad b \in H_2 \tag{I.52}$$

относительно произвольного элемента x_0.

Теорема I.9. Для любых ограничений последовательности чисел $\{\alpha_n\}$, последовательности $\{\beta_n\}$, удовлетворяющей условиям

$$0 < \varepsilon < \beta_n < 2-\varepsilon \tag{I.53}$$

и произвольном начальном элементе x_0 последовательность $\{x_n\}$, образованная итерационным процессом (I.47) при $B = E$, монотонно и сильно сходится к элементу $\bar{x}^*$.

Доказательство. В равенстве (I.47) слева и справа отнимем $\bar{x}^*$, а вместо $b = \bar{b}$ подставим равный ему элемент $A\bar{x}^*$.

В результате получим

$$x_{n+1} - \bar{x}^* = x_n - \bar{x}^* - \beta_n(A^*A+\alpha_n E)^{-1}A^*A(x_n - \bar{x}^*).$$

Отсюда

$$x_{n+1} - \bar{x}^* = \left(E - \beta_n(A^*A+\alpha_n E)^{-1}A^*A\right)(x_n - \bar{x}^*). \tag{I.54}$$

Поскольку для любых ограниченных β_n и α_n норма оператора $\| E - \beta_n (A^*A + \alpha_n E)^{-1} A^*A \| = 1$, то из (I.54) следует неравенство

$$\| x_{n+1} - \bar{x}^* \| \le \| x_n - \bar{x}^* \| \qquad (I.55)$$

т.е. последовательность $\{x_n\}$ - монотонная.

Сходимость процесса доказывает аналогично работе [271].

Теорема I.9 доказана.

3. Связь между одной реализацией итерационного процесса (I.47) и вариационным способом Тихонова устанавливает [257,260]

Теорема I.10. Если последовательность $\{\alpha_n\}$ монотонно стремится к нулю, $\beta_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \dfrac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{\alpha_{n-1}}, & n \ge 1 \end{cases}$, начальный элемент процесса (I.47) совпадает с фиксированным элементом функционала (I.51), то при параметре регуляризации $\alpha = \alpha_n$ элемент x^{α_n} совпадает с элементом x_{n+1}, образованным итерационным процессом (I.47).

Доказательство. Для функционала (I.51) уравнение Эйлера имеет вид

$$A^*Ax + \alpha x = A^*b + \alpha x_0. \qquad (I.56)$$

Уравнение (I.56) эквивалентно уравнению

$$x = x - (A^*A + \alpha E)^{-1} \left(A^*(Ax - b) + \alpha (x - x_0) \right). \qquad (I.57)$$

Для последовательности $\{\alpha_n\}$ образуем при помощи равенства (I.57) итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - (A^*A + \alpha_n E)^{-1} \left(A^*(Ax_n - b) + \alpha_n (x_n - x_0) \right). \qquad (I.57')$$

Очевидно, что элемент x_{n+1} итерационного процесса (I.57) является решением уравнения (I.56) при $\alpha = \alpha_n$, т.е. $x^{\alpha_n} = x_{n+1}$. Заменяя в процессе (I.57') элемент $x_n - x_0$ равным ему выражением $-\frac{1}{\alpha} A^*(Ax_n - b)$, получим процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{\alpha_{n-1}} (A^*A + \alpha_n E)^{-1} A^* (Ax - b).$$

Теорема I.I0 доказана.

Из теоремы I.I0 следует важное [260]

Следствие I.2. Элемент x^α, минимизирующий функционал (I.5I), при $\alpha \to 0$ монотонно сильно сходится к обобщенному нормальному решению $\bar{x}^*$ уравнения (I.52).

Замечание I.II. Для процессов (I.45)-(I.47) результаты остаются в силе в смысле нормы $\|x\|_{H_B}^2 = (Bx, x) = \Omega(x)$.

4. Некоторые свойства L -псевдорешения и элемента, минимизирующего обобщенный функционал Тихонова.

Применение вариационного способа А.Н.Тихонова показало, что условие сильной выпуклости, наложенной на стабилизирующий функционал $\Omega(\cdot)$, для сходимости регуляризованного решения, можно несколько ослабить. В связи с этим В.А.Морозовым [223,225] обобщенно понятие псевдорешения (нормального решения, квазирешения) задачи (I.I5)* и псевдообратного оператора A^+, введением так называемого L -псевдорешения и L - псевдообращения.

Отметим, что понятие псевдообратного оператора A^+ ввел в I920 г. Мур [96,с.32; 6] для случая конечномерного пространства. Широкий интерес к этим операторам проявился только в 50-х годах [96,6,85], причем это понятие было перенесено на случай бесконечномерных пространств [223,I44]. Конструктивным способом построения псевдообратного оператора является вариационный способ А.Н.Тихонова, а предельное свойство матрицы

* Терминология по псевдорешениям, квазирешениям и нормальным решениям еще не устоялась. Одни и те же понятия разные авторы называют по-разному (сравни, например, между собой [398, с.III, I44,с.29-30; с.292-293; 6,с.29; 223; 96,с.265].

Мура-Пенроуза лежит в основе этого метода при решении задач линейной алгебры [6, с.208].

Из теорем (I.8)-(I.II) следует, что

$$A^{+}=\lim_{\alpha\to 0}\left(B^{-1}A^{*}A+\alpha E\right)^{-1}B^{-1}A^{*}=\lim_{\alpha\to 0}\left(A^{*}A+\alpha B\right)^{-1}A^{*} \qquad (I.58)$$

При конечномерности H_1 оператор A^{+} есть обобщение псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза. Когда $B=E$ оператор A^{+} совпадает с ее обычным определением [6].

Приведем определение L псевдорешения.

Пусть на всюду плотном множестве D гильбетова пространства H заданы линейные операторы $A: D\to F$ и $L: D\to G$, где F и G - гильбертовы пространства. Поскольку операторы A и L определены на всюду плотном множестве, то существуют [306, с.327] сопряженные к ним операторы A^{*} и L^{*} с областями определения $D(A^{*})$ и $D(L^{*})$. Принимаем, что операторы A и L совокупно замкнуты и дополнительны [82, 23, 225].

Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Ax=f,\quad x\in D,\quad f\in F. \qquad (I.59)$$

L - псевдорешение уравнения (I.59), т.е. элемент $x_{fg}\in D$, определяется из условия [223, 225].

$$\|Lx_{fg}-g\|_{G}=\inf_{\bar{x}\in D_1}\|L\bar{x}-g\|_{G}=\nu,\quad g\in G, \qquad (I.60)$$

где

$$D_1=\left\{\bar{x}\in D:\ \inf_{x\in D}\|Ax-f\|_{F}\neq\phi\right\}. \qquad (I.61)$$

Из дополнительности операторов A и L на D следует

Лемма I.4. Оператор $C=A^{*}A+L^{*}L$ положительно определен на области своего определения $D_2=\left\{\bar{x}\in D:\ Ax\in D(A^{*})\cap Lx\in D(L^{*})\right\}$.

Доказательство. Операторы A и L являются дополнительными [223], если для любых u, v выполняется неравенство

$$\gamma^2\left(\|Au-Av\|_F^2+\|Lu-Lv\|_G^2\right)\geq\|u-v\|_H^2, \quad (I.62)$$

где константа $\gamma=\gamma(A,L)>0$.

Т.к. множество D линейно, на основании (I.62) можем записать

$$\gamma^2\left[(A(u-v),A(u-v))_F+(L(u-v),L(u-v))_G\right]\geq\|u-v\|_H^2. \quad (I.63)$$

Обозначим $u-v=x$ и $\frac{1}{\gamma^2}=m>0$. Тогда на основании (I.63) на элементах множества D_2 будет выполняться неравенство

$$(A^*Ax,x)+(L^*Lx,x)=(Cx,x)\geq m\|x\|_H^2 \quad (I.64)$$

т.е. оператор C положительно определен на D_2.

Лемма I.4 доказана.

Следуя В.А.Морозову [223,225], запишем обобщенный функционал А.Н.Тихонова

$$T^\alpha[x]=\|Ax-f\|_F^2+\alpha\|Lx-g\|_G^2,\ x\in D,\ \alpha>0. \quad (I.65)$$

Известно [225], что при любых f, g и $\alpha>0$ существует единственный элемент x_{fg}^α, минимизирующий функционал (I.65), который удовлетворяет тождеству Эйлера

$$(Ax_{fg}^\alpha-f,Aw)+\alpha(Lx_{fg}^\alpha-g,Lw)=0,\ \forall w\in D. \quad (I.66)$$

Если один из операторов A или L ограничен на D, то тогда из тождества Эйлера (I.66) получаем уравнение Эйлера [223]

$$A^*(Ax_{fg}^\alpha-f)+\alpha L^*(Lx_{fg}^\alpha-g)=0,\quad x\in D \quad (I.67)$$

Пусть для определенности ограничен оператор A . Если $g \in D(L^*)$, то на основании (I.67) имеем

$$x_{fg}^{\alpha} = (A^*A + \alpha L^*L)^{-1}(A^*f + L^*g). \qquad (I.68)$$

Пусть при некотором значении $\alpha = \alpha_1$ элемент $x_{fg}^{\alpha_1}$ минимизирует функционал (I.65). Тогда при помощи уравнения (I.67) можно найти x_{fg}^{α} для любого значения параметра $\alpha > 0$. Справедлива

Теорема I.II. Для любых $f \in F$, $g \in G$ и $\alpha > 0$ элемент x_{fg}^{α} можно представить в виде

$$x_{fg}^{\alpha} = x_{fg}^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1}(A^*A + \alpha L^*L)^{-1}A^*(Ax_{fg}^{\alpha} - f) \qquad (I.69)$$

или

$$x_{fg}^{\alpha} = x_{fg}^{\alpha_1} + (\alpha_1 - \alpha)(A^*A + \alpha L^*L)^{-1}L^*(Lx_{fg}^{\alpha_1} - g). \qquad (I.70)$$

Доказательство. Полагая в выражении (I.67) $\alpha = \alpha_1$, запишем

$$A^*(Ax_{fg}^{\alpha_1} - f) + \alpha_1 L^*(Lx_{fg}^{\alpha_1} - g) = 0. \qquad (I.71)$$

Умножим это равенство на $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, вычтем полученное из уравнения (I.67) и приведем подобные члены. В итоге получим:

$$A^*(Ax^{\alpha} - f) + \alpha L^*L(x^{\alpha} - x^{\alpha_1}) = \frac{\alpha}{\alpha_1}A^*(Ax_{fg}^{\alpha_1} - f). \qquad (I.72)$$

Вычитая из обеих частей равенства (I.72) выражение $A^*(Ax_{fg}^{\alpha} - f)$, после небольших преобразований получаем соотношение (I.69).

Из равенств (I.69) и (I.7I) следует соотношение (I.70).

Теорема I.II доказана.

Замечание I.I2. Представление (I.69) доказано в работах [257,260] при положительной определенности оператора L^*L , $g = Lx_0$, $x \in D$.

Замыкания множеств, определяемые равенствами $(L^*Lx, x) = 0$,

в пространстве H определяют два подпространства, которые обозначим соответственно через M_1 и M_2.

Из теоремы I.II следуют важные следствия, которые сформулируем в виде лемм.

Лемма I.5. При произвольном фиксированном $g \in G$, любых $f \in F$ и $\alpha > 0$ элемент x_{fg}^{α} принадлежит плоскости U_1 с направляющим подпространством M_1 и элементом сдвига $x_{fg}^{\alpha_1}$, т.е.

$$(L^*L(x_{fg}^{\alpha} - x_{fg}^{\alpha_1}), x^*) = 0, \quad \forall x^* \in N_A. \tag{I.73}$$

Доказательство. На основании равенства (I.69) имеем

$$\alpha L^*L(x_{fg}^{\alpha} - x_{fg}^{\alpha_1}) = -A^*A(x_{fg}^{\alpha} - x_{fg}^{\alpha_1}) - \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1} A^*(Ax_{fg}^{\alpha} - f). \tag{I.74}$$

Скалярно умножая левую и правую части (I.74) на $x^* \in N_A$ и учитывая, что $Ax^* = 0$, получаем соотношение (I.73).

Лемма I.6. При произвольном фиксированном $f \in F$, любых $g \in G$ и $\alpha > 0$ элемент x_{fg}^{α} принадлежит плоскости U_2 с направляющим подпространством M_2 и элементом сдвига $x_{fg}^{\alpha_1}$, т.е.

$$(A^*A(x_{fg}^{\alpha} - x_{fg}^{\alpha_1}), \bar{x}^*) = 0, \quad \forall \bar{x}^* \in N_L. \tag{I.75}$$

Доказательство строится на основании соотношения (I.70) аналогично доказательству леммы I.5.

Замечание I.I3. Равенство (I.73) установлено в работе 27I при положительной определенности оператора L^*L.

Объединяя леммы I.5 и I.6, устанавливаем, что справедлива

Теорема I.I2. При произвольных фиксированных f и g и любом $\alpha > 0$ элемент x_{fg}^{α}, минимизирующий функционал (I.62), принадлежит плоскости $U = U_1 \cap U_2$.

Замечание I.I4. Пусть H_C – пополнение D_2 в смысле скалярного произведения $(x, y)_{H_C} = (Cx, y)$, $x, y \in D_2$. В случае, ког-

да $H = H_c$, N_A и $N_L \subset H_c$, аналог теоремы I.I2 установлен в работе [273].

На основании равенства (I.68) можно показать [273], что

$$x_{fg}^{\alpha} = x_{f0}^{\alpha} + x_{0g}^{\alpha}, \qquad (I.76)$$

где x_{f0}^{α} и x_{0g}^{α} - элементы, минимизирующие функционал (I.65) соответственно при $f=0$ и $g=0$.

Пусть при заданном f существует L-псевдорешение x_{fg}. Обозначим через x_{0g} и x_{f0} L-псевдорешения задачи (I.59) соответственно при $f=0$ и $g=0$. Заметим, что при множество $D_L = N_A$. Справедлива

Теорема I.I3. Для любого $g \in G$ имеет место равенство

$$x_{fg} = x_{f0} + x_{0g}. \qquad (I.77)$$

Следствие I.3. Если x_{fg}, x_{f0} и $x_{g0} \in H_c$, то имеет место равенство

$$\|x_{fg}\|_{H_c}^2 = \|x_{f0}\|_{H_c}^2 + \|x_{0g}\|_{H_c}^2. \qquad (I.78)$$

Доказательство теоремы (I.I3) и следствия I.3 приведены в работе [273].

Выводы

I. В зависимости от степени геолого-геофизической изученности исследуемой территории в рамках концепции математического моделирования сформулированы различные постановки обратных задач гравиметрии, которые являются условно-экстремальными. В качестве модельных классов среды и поля используются конечномерные параметрические модели и функционально-аналитические модели. Задачи служат удобным аппаратом для изучения по гравита-

ционному полю вертикально-слоистых и горизонтально-слоистых структур, основанные на привлечении в интерпретационный процесс по возможности всей имеющейся априорной информации об исследуемой территории.

2. Даны постановки следующих трехмерных практических задач гравиметрии: I/ построение непрерывного распределения плотности в области $L_2(S)$, создающее заданное гравитационное поле; 2/ определение положения плотностной границы между двумя пластами с переменной по латерали плотностями; 3/ построение плотностной модели больших регионов с учетом сферичности планет; 4/ обнаружение и локализация источников аномального поля.

3. Методами функционального анализа и теории функций исследованы свойства оператора A решения прямой задачи гравиметрии в классе $L_p(S)$, $1<p<\infty$, распределения плотностей. Для этого, в первую очередь, построен вид сопряженного оператора A^*.

Показано, что для любой ограниченной области $S \subset R_3^+$ оператор $A: L_2(S) \to L_2(Q)$ является ограниченным, вполне непрерывным. Если область Q есть незамкнутая непрерывная поверхность, то область значения $R(A)$ является всюду плотным множеством в $L_2(Q)$. Аналогичные утверждения верны и для пространства $L_p(S)$. Существует счетное число ортогональных гармонических функций φ_n на множестве $\overline{S}$, что их образ на множестве Q совпадает со следом продолжения функции φ_n до множества Q' симметричной области Q относительно плоскости $Z = 0$.

Для бесконечной полосы $\Pi(a,b)$, $0<a<b<\infty$, удалось в явном виде записать вид обобщенных собственных функций оператора A.

Используя собственные значения оператора $A: L_2(\Pi(a,b)) \to L_2(R_2)$,

, удалось показать, что он ограничен и его норма $\|A\| = \sqrt{4\pi^2 G\bar{G}(b-a)}$ вне зависимости от расположения множества Q над или под полосой $\Pi(a,b)$.

4. Впервые на основе объединения идей оптимизации и регуляризации введен в рассмотрение общий итерационный процесс, пригодный для решения линейных и нелинейных некорректных задач. Для конечномерного пространства установлены достаточные условия сходимости процесса. Доказано, что процесс с операторами вида $C(x) = A(x) + \alpha B$ является регуляризующим по Тихонову. Показано, что многие известные итерационные методы следуют как частный случай из рассмотренного процесса и могут испсльзоваться при решении задач гравиметрии с линейными и нелинейными операторами. Далее итерационный процесс обобщен для решения задач математического программирования с выпуклым множеством ограничений.

5. Установлено, что для любого значения параметра регуляризации $\alpha > 0$ элемент x^α, минимизирующий параметрический функционал (I.5I), принадлежит плоскости $U = H_1 \ominus N_A$. Для итерационного процесса (I.47) впервые установлена монотонная и сильная сходимость в бесконечном пространстве H_1. Показано, что из итерационного процесса (I.47), при соответствующем выборе параметра β_n получается одна из реализаций вариационного способа Тихонова. Как следствие, получено утверждение о монотонной сходимости x^α при $\alpha \to 0$ к обобщенному нормальному решению $\bar{x}^*$ уравнения $Ax = b$. Установлены некоторые новые свойства L - псевдорешения x^α_{fg}.

ГЛАВА П. ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ

В в е д е н и е

I. Интенсивное развитие и широкое применение ЭВМ существенно сблизили проблемы вычислительной геофизики с математическими. Появление нового, весьма общего метода исследований - численного эксперимента (имитационного моделирования) - тесно увязало геофизическое содержание задачи, ее математическую постановку и численный метод решения, учитывающий особенности ЭВМ.

Как показано в главе I, растущие запросы практики ведут к постановке обратных задач геофизики в классе функционально-аналитических моделей. Вследствие этого в качестве искомых объектов выступают функции, операторы, функционалы и другие математические объекты. При построении вычислительных алгоритмов совершается обратный переход от функционально-аналитических моделей к дискретным (конечномерным). Конечно, необходимо, чтобы получаемая дискретная модель была максимально близка по своим свойствам к исходной модели. Такая дискретизация, особенно при решении трехмерных задач, приводит к резкому возрастанию количества определяемых неизвестных. С формальной точки зрения прямые регулярные методы, с успехом применяемые для решения различных двухмерных обратных задач гравиметрии в классе конечномерных параметрических моделей [333,100,418,254] и двухмерной задачи гравиметрии о контактной поверхности в пространстве $L_2(S)$ [100,128,398,418,75], - могут быть использованы и для трехмерных задач. Однако применение прямых регулярных методов для решения трехмерных обратных задач геофизики, "экстремальных"

в смысле количества определяемых неизвестных, связано с непосильными для современных ЭВМ вычислениями. Эти трудности оправдывают выделение трехмерных обратных задач геофизики в качестве самостоятельного математического объекта и делают целесообразным и необходимым разработку соответствующих эффективных регулярных методов их решения.

2. С необходимостью решения обратных задач в трехмерной постановке сталкиваются прежде всего специалисты – геофизики, работающие в сугубо прикладных областях [120]. Нередко специалисты-геофизики быстрее находят рациональный подход к решению, поскольку они опираются на понимание существа задачи, нежели математики, толкующие ее более формально (см. работы Ю.В.Антонова [11-14], В.М.Березкина [53,54], Е.А.Мудрецовой [227-231] и др.).

Математическая теория интерпретации гравитационных и магнитных аномалий должна контролировать и осмысливать эти рациональные подходы с тем, чтобы выделить из них действительно оригинальные идеи, понять их общематематическую основу, часто скрытую за содержательной терминологией оригинальных работ. Результаты численного эксперимента помогают выделить рациональные зерна в этих подходах. После этого создается весьма благоприятная ситуация для математических обоснований и обобщений. Решающее значение для успеха имеет создание такого метода, который учитывал бы три основные стороны проблемы: геофизическую, математическую и машинную. Роль математики не ограничивается обоснованием и обобщением метода, а делает его универсальным, не связанным рамками только одной прикладной проблемы.

Такая ситуация часто имела место в механике сплошных сред, где разработаны новые универсальные методы решения различных

задач математической физики [49,50,138,187,298,388].

Аналогичное произошло при разработке эффективного регулярного метода решения трехмерных обратных задач геофизики, реализуемого на современных ЭВМ. В работах А.И.Кобрунова [160-162] был предложен и численно реализован интересный алгоритм решения линейной обратной задачи гравиметрии в классе $L_2(S)$ распределения плоскостей в постановке 3. Идея алгоритма состоит в том, что при помощи декомпозиции исходной задачи на две подзадачи удается уменьшить размерность решаемой задачи на единицу. В алгоритмах А.И.Кобрунова обобщенное нормальное решение $\bar{x}^*$ задачи (I.52) находится по формуле

$$\bar{x}^* = A^* \bar{\varphi}^* + x_0, \qquad (П.1)$$

где функция $\bar{\varphi}^*$ является решением уравнения

$$AA^* \varphi = b - Ax_0. \qquad (П.2)$$

Замечание П.1. Если задача (I.52) некорректно поставлена, по крайней мере, в силу неустойчивости, то из существования решения задачи

$$\min \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2 \qquad (П.3)$$

при ограничении

$$Ax = b \qquad (П.4)$$

еще не следует разрешимость уравнения (П.2).

Детальный анализ работ А.И.Кобрунова [160-165] показал, что в его алгоритмах неявным образом вместо соотношений (П.1), (П.2) используются равенство

$$x = A^* \varphi + x_0 \qquad (П.5)$$

и уравнение

$$AA^* \varphi + \alpha \varphi = b - Ax_0. \qquad (П.6)$$

Дальнейшие исследования уравнений (П.5) и (П.6) привели к разработке универсального двойственного метода решения некорректных задач математической физики [256,274,259,268,281]. В настоящее время двойственный метод обоснован и обобщен для решения линейных и нелинейных некорректных задач в гильбертовых пространствах, линейных задач в пространствах $L_p(S)$, $1<p<\infty$ и в некоторых более общих банаховых пространствах [265,266,279].

Для глубокого усвоения геофизической и математической сути двойственного метода изложим полученные результаты индуктивным способом, т.е. в порядке возрастания их общности. Здесь мы разделяем мнение некоторых исследователей [367,333,304], что этот путь для понимания существа метода наиболее доступен для геофизиков и быстрее приводит к успеху. С этой целью изложение идейных основ двойственного метода начнем с подробного разбора некоторых известных способов решения систем линейных уравнений.

§ I. Идейные основы двойственного метода

I. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (П.7)$$

с прямоугольной матрицей $[A]$ размера $m \times n$.

Запишем для удобства систему (П.7) в виде

$$[A]\{x\} = \{b\}. \qquad (П.8)$$

где неизвестный вектор $\{x\} = (x_1, \dots x_n)^T$, правая часть $\{b\} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$.

Для решения системы (П.8) с прямоугольной матрицей $[A]$ ранга равной $\min(n, m)$, можно использовать следующие нормализации, называемые первой и второй трансформациями Гаусса [413]. Эти трансформации имеют соответственно вид

$$[A]^T[A]\{x\} = [A]^T\{b\} \qquad (П.9)$$

и

$$[A][A]^T\{\varphi\} = \{b\}, \qquad (П.10)$$

$$\{x\} = [A]^T\{\varphi\}, \qquad (П.11)$$

где вектор $\{\varphi\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\}$, $[A]^T = A^*$ - транспонированная матрица A.

Первая трансформация Гаусса, т.е. уравнение (П.9), получается из метода наименьших квадратов [413,86].

Исследуем вторую трансформацию Гаусса. Покажем, что компоненты вектора $\{\varphi\}$, решения уравнения (П.10), совпадают с множителями Лагранжа для задачи (П.3), (П.8) при $x_0 = 0$.

Действительно, функция Лагранжа для задачи (П.3), (П.4) имеет вид

$$L[\{x\}, \{\lambda\}] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i - b_j\right), \qquad (П.12)$$

где λ_j, $j = \overline{1,m}$ - множители Лагранжа, a_{ij} - компоненты матрицы $[A]$. Пусть $\{\lambda\} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$. Приравнивая к нулю производные функции Лагранжа (П.12) по переменным x_i, $i = \overline{1,n}$ и λ_j, $j = \overline{1,m}$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji}, \quad i = \overline{1,n}, & (\text{П.I3}) \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, \quad j = \overline{1,m}. & (\text{П.I4}) \end{cases}$$

Подставляя равенство (П.I3) в (П.I4) и делая замену переменных $\{\lambda\}$ на $\{\varphi\}$, получим соотношения (П.I0), (П.II), т.е. множители Лагранжа $\{\bar{\lambda}\}$ совпадают с вектором $\{\bar{\varphi}\}$, Следовательно, вторая трансформация Гаусса получается при решении задачи (П.3), (П.8) методом множителей Лагранжа.

Поставим равенство (П.I3) в функцию Лагранжа (П.I2). После несложных выкладок получим функцию

$$\psi(\{\varphi\}) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\varphi_j \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\left(\sum_{k=1}^{m}\varphi_k a_{ki}\right) + \sum_{j=1}^{m}\varphi_j b_j = \quad (\text{П.I5})$$

$$= -\frac{1}{2}\left([A][A]^T\{\varphi\}, \{\varphi\}\right) + \left(\{\varphi\}, \{b\}\right).$$

Вектор $\{\bar{\varphi}\}$ максимизирует функцию $\psi(\{\varphi\})$, т.е. является решением двойственной задачи к задаче (П.3), (П.8).

$$\max \psi(\{\varphi\}). \quad (\text{П.I6})$$

Замечание П.2. В конечномерных пространствах разрешимости задачи (П.3), (П.8) и двойственной задачи (П.I6) эквивалентны. Нахождение элемента $\bar{x}^*$ из соотношений (П.I0), (П.II) назовем двойственным методом решения задачи (П.3), (П.8) [274,279].

Квадратные матрицы $[A]^T[A]$ и $[A][A]^T$ имеют соответственно размеры $n \times n$ и $m \times m$. Поэтому выбор вида нормализации для решения уравнения (П.8) зависит от значений n и m. При решении переопределенных систем ($m > n$) целесообразно использовать первую трансформацию Гаусса, а недоопределенных систем ($m < n$) - вторую трансформацию Гаусса.

2. При переходе от системы уравнений (П.8) к операторному уравнению (I.52) формально аналоги соотношений (П.I2)-(П.I6) для решения задачи (П.3), (П.4) принимают следующий вид.

Запишем сначала функционал Лагранжа для задачи (П.3),(П.4)

$$L[x,\varphi] = \frac{1}{2}\|x-x_0\|^2_{H_1} - (Ax-b)_{H_2}, \qquad (П.I7)$$

где $\varphi \in H_2$ - переменная Лагранжа.

Целевой функционал для задачи (П.3), (П.4) [III]

$$\psi(\varphi) = \min_{x\in H_1} L[x,\varphi], \quad \varphi \in H_2. \qquad (П.I8)$$

Для любого b и фиксированного φ функционал (П.I7) является строго выпуклым квадратичным по переменной x и его безусловный минимум достигается на единственном элементе $\bar{x}$. Для его поиска найдем производную $L[x,\varphi]$ по x и приравняем ее к нулю. В результате получим

$$\bar{x} = A^*\varphi + x_0. \qquad (П.I9)$$

Следовательно

$$\min_{x\in H_1} L[x,\varphi] = L[\bar{x},\varphi] = L[A^*\varphi + x_0, \varphi], \quad \varphi \in H_2. \qquad (П.20)$$

На основании (П.I7) и (П.20) имеем

$$\psi(\varphi) = L[A^*\varphi + x_0, \varphi] = \frac{1}{2}\|A^*\varphi\| - (AA^*\varphi + Ax_0 - b, \varphi) = \qquad (П.2I)$$

$$= -\frac{1}{2}(AA^*\varphi, \varphi) + (b - Ax_0, \varphi)_{H_2}.$$

Двойственная задача к задаче (П.3), (П.4) заключается в определении

$$\max_{\varphi\in H_2} \psi(\varphi). \qquad (П.22)$$

Продифференцируем функционал (П.22) по φ и полученное выражение приравняем к нулю. Это приводит к уравнению

$$AA^*\varphi = b - Ax_0. \qquad (П.23)$$

Уравнение (П.23) дает решение двойственной задачи (П.22). Обозначим одно из ее решений через $\bar{\varphi}^*$ и подставим в равенство (П.I9). В результате получаем решение задачи (П.3), (П.4).

$$\bar{x}^* = A^*\bar{\varphi}^* + x_0. \qquad (П.24)$$

Таким образом, чтобы решить задачу (П.3), (П.4) двойственным методом, необходимо сначала найти одно из решений $\bar{\varphi}^*$ уравнения (П.23), а затем определить искомое решение $\bar{x}^*$ с помощью равенства (П.24).

Из замечания П.I следует, что если задача (I.52) некорректно поставлена только в силу неоднозначной разрешимости, то решение задачи (П.3), (П.4) двойственным методом фактически имеется в работах [I,III,II2,I98]. Однако процедура отыскания решения задачи (П.22) или решения ($\bar{x}^*$, $\bar{\varphi}^*$) задачи максимина для функционала Лагранжа, обладает свойством неустойчивости [II2,222, 4I5,309]. Как отмечалось в замечании П.I, решение задачи (П.3), (П.4) двойственным методом становится еще сложнее, если задача (I.52) некорректно поставлена по всем трем условиям Адамара, т.к. помимо неустойчивости задачи (П.22) возникает вопрос о ее разрешимости.

3. Следуя работам [256,274,259], в параграфах 2-4 при помощи функционала Лагранжа разработан двойственный метод нахождения регуляризованного решения задачи (П.3), (П.4). В параграфе 2 дано такое обобщение задачи (П.22), чтобы она была разрешима одновременно с задачей (П.3), (П.4); устанавливается связь между одним из решений обобщенной двойственной задачи $\bar{\varphi}_0^*$ и элементом $\bar{x}^*$ типа (П.24). Далее в параграфе 3 исследуются связи между задачами

(П.3), (П.4), обобщением (П.22), а также устойчивой задачей отыскания седловой точки параметрического модифицированного функционала Лагранжа [309,112]

$$L^{\alpha}[x,\varphi] = L[x,\varphi] - \frac{1}{2}\alpha\|\varphi-\varphi_0\|^2, \qquad (П.25)$$

где $\alpha>0$ - параметр регуляризации (при $\alpha=const$ функционал (П.25) есть обычный модифицированный функционал) Лагранжа [112, 309], $\varphi_0 \in H_2$ - фиксированный элемент.

Доказана монотонная и сильная сходимость компонент седловой точки $Z^{\alpha}=(x^{\alpha},\varphi^{\alpha})$ функционала (П.25) при $\alpha\to 0$ соответственно к $\bar{x}^*$ и $\bar{\varphi}_0^*$. Показано, что элементы x^{α} и φ^{α} совпадают с экстремальными элементами некоторых параметрических функционалов А.Н.Тихонова, связанных с уравнением (I.52) и задачей (П.22).

4. Таким образом, для решения задачи (I.52) можно использовать два эквивалентных алгоритма, основанных на параметрических функционалах А.Н.Тихонова или Лагранжа. Как и при нормализации системы уравнений (П.8), выбор алгоритма, т.е. параметрического функционала, зависит от структуры операторов A и A^*.

В практических трехмерных задачах гравиметрии множество единственности Q является некоторой поверхностью в R_3. Поэтому множество Q имеет размерность, равное двум. Пусть уравнение поверхности Q имеет вид $f(\xi,\eta)-\zeta=0$. Искомая модель в подавляющем большинстве случаев трехмерная. В линейной обратной задаче гравиметрии в классе $L_2(S)$ распределения плотностей оператор решения прямой задачи $A: L_2(S)\to L_2(Q)$, т.е. устанавливает соотношение между функцией трех переменных $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$ и фактически функцией двух переменных $\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\varphi(\xi,\eta,f(\xi,\eta))$. Сопряженный оператор $A^*: L_2(Q)\to L_2(S)$, т.е. каждой функции двух переменных $\varphi(\xi,\eta,f(\xi,\eta))$ ставит в

соответствие функцию трех переменных $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$. Следовательно, оператор $AA^*: L_2(Q) \to L_2(Q)$, а оператор $AA^*: L_2(S) \to L_2(S)$ и в уравнении (П.6) функция φ имеет размерность на единицу меньше, чем искомая функция $x = \sigma$ в уравнении (I.56). При определении σ^α по формуле $\sigma^\alpha = A^*\varphi^\alpha + \sigma_0$, процедуры сравнительно простой и устойчивый, происходит "расширение" размерности φ^α до размерности σ^α. Этим определяется большое удобство двойственного метода при решении практических трехмерных задач гравиметрии.

5. В работах Бейкуса и Гильберта [455,456,460,461] для решения задачи сейсмологии предложены алгоритмы, близкие к алгоритмам А.И.Кобрунова. Однако вопрос о регуляризации в этих алгоритмах не рассматривается даже в неявной форме.

§ 2. Обобщенная двойственная задача и ее разрешимость

Пусть задача (П.3), (П.4) разрешима, тогда имеет место

Теорема П.I. Для разрешимости двойственной задачи (П.22) необходимо и достаточно выполнение условия $\bar{x}^* - x_0 \in R(A^*)$. Максимальное значение функционала (П.2I) достигается на элементах $\bar{\varphi}^*$, которые удовлетворяют уравнению (П.23), и решение задачи (П.3), (П.4) представимо в виде (П.24).

Доказательство. Пусть элемент φ^* является решением задачи (П.22). Так как функционал (П.2I) является выпуклым вверх квадратичным, то его градиент в точке φ^* равен нулю, т.е. $AA^*\varphi^* + Ax_0 - b = 0$. Откуда $A(A^*\varphi^* + x_0) = b$. Из разрешимости задачи (П.3), (П.4) и принадлежности элемента $A^*\varphi^* + x_0$ плоскости U следует равенство $A^*\varphi^* + x_0 = \bar{x}^*$. Поэтому $\bar{x}^* - x_0 \in R(A^*)$.

Пусть выполняется условие $\bar{x}^* - x_0 \in R(A^*)$. Следова-

тельно, существует такой элемент $\tilde{\varphi}^* \in H_2$, что $\bar{x}^* - x_0 = A^* \tilde{\varphi}^*$. Подставляя выражение для $\bar{x}^*$ в уравнение (I.52), получим равенство

$$AA^* \tilde{\varphi}^* + Ax_0 = b.$$

Возьмем произвольный элемент φ пространства H_2, не равный $\tilde{\varphi}^*$. Тогда $\varphi - \tilde{\varphi}^* = \eta \neq 0$. На основании полученного равенства, аналогично работе [222], можно показать, что $\Psi(\tilde{\varphi}^*) \geq \Psi(\varphi)$. Следовательно, задача (П.22) разрешима.

Обозначим одно из решений задачи (П.22) через $\bar{\varphi}^*$. Из доказательства первой части теоремы следует, что элемент $\bar{\varphi}^*$ удовлетворяет уравнению (П.23) и справедливо соотношение (П.24).

Теорема П.I полностью доказана.

Замечание П.3. Если задача (П.3), (П.4) разрешима, то элемент $\bar{z} = (\bar{x}^*, \bar{\varphi}^*) \in H_1 \times H_2$ является единственным решением задачи

$$\max_{\varphi \in H_2} \min_{x \in H_1} L[x, \varphi], \qquad (П.26)$$

где $H_1 \times H_2$ – произведение пространств H_1 и H_2.

При предложении о нормальной разрешимости оператора A, условие $\bar{x}^* - x_0 \in R(A^*)$ в теореме П.I всегда выполняется. Поэтому имеет место

Теорема П.2. Если оператор A нормально разрешим*, то задачи (П.3), (П.4) и (П.22) разрешимы одновременно. Любое решение $\bar{\varphi}^*$ задачи (П.22) удовлетворяет уравнению (П.23) и элемент $\bar{x}^*$ представим в виде (П.24).

Замечание П.4. Утверждение теоремы П.2 о представлении элемента $\bar{x}^*$ фактически доказано в работе I98,с.20I .

2. Проведем такое обобщение двойственной задачи (П.22), чтобы она была разрешима одновременно с разрешимостью задачи

---

* Оператор A называется нормально разрешимым, если $R(A) = \overline{R(A)}$.

(П.4) и имели место обобщения равенства (П.23) и представления (П.24), т.е. имел место аналог теоремы П.2 в общем случае.

Для этого представим пространство H_2 в виде $H_2 = N_{A^*} \oplus M_{A^*}$, где $N_{A^*} = \{\varphi \in H_2 : A^*\varphi = 0\}$, $M_{A^*} = H_2 \ominus N_{A^*}$ – ортогональное дополнение к N_{A^*} в пространстве H_2. Возьмем сужение оператора A^* на подпространство M_{A^*} и проведем пополнение подпространства M_{A^*} в смысле скалярного произведения

$$(x, y) = (AA^*x, y)_{H_2}, \quad x, y \in M_{A^*}.$$

Пополненное пространство H_{AA^*} является полным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(x, y)_{H_{AA^*}} = (AA^*x, y), \quad x, y \in M_{A^*}. \qquad (П.27)$$

и подпространство M_{A^*} всюду плотно в H_{AA^*} [222].

Так как операторы AA^* и A^* являются ограниченными над подпространстве M_{A^*}, то их можно по непрерывности расширить соответственно до линейных ограниченных операторов $\widehat{AA^*}$ и $\widehat{A^*}$, определенных на всем пространстве H_{AA^*} [306].

Пусть задана последовательность элементов $\{\varphi_n\} \in M_{A^*}$. Элементы пространства H_{AA^*}, которые принадлежат подпространству M_{A^*}, будем называть старыми, а остальные – идеальными.

Лемма П.1. Если последовательность старых элементов $\{\varphi_n\}$ сходится к идеальному элементу $\bar{\varphi} \in H_{AA^*}$, то последовательность элементов $\{A^*\varphi_n\}$, принадлежащих M_A, сходится к элементу $\bar{x} \in M_A$, причем $\bar{x} = \widehat{A^*}\bar{\varphi}$ и $R(\widehat{A^*}) \subset M_A$.

Доказательство. Из сходимости последовательности $\{\varphi_n\}$ к идеальному элементу следует, что она является фундаментальной в пространстве H_{AA^*}, т.е. $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\|_{H_{AA^*}} = 0$.

Так как $\{\varphi_n\} \subset M_A$, то на основании равенства (П.27)

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\|^2_{H_{AA^*}} = \lim_{m,n\to\infty} \left(A^*(\varphi_n - \varphi_m), A^*(\varphi_n - \varphi_m)\right) = 0.$$

Следовательно, последовательность $\{A^*\varphi_n\}$ является фундаментальной в пространстве H_1. В силу полноты H_1 и замкнутости подпространства M_A последовательность $\{A^*\varphi_n\}$ имеет предел $\bar{x}$, который принадлежит M_A. Переходя к пределу в равенстве $x_n = A^*\varphi_n = \tilde{A}^*\varphi_n$, получим, в силу непрерывности оператора $\tilde{A}^*$, что $\bar{x} = \tilde{A}^*\bar{\varphi}$.

Лемма П.1 доказана.

Обобщение двойственной задачи (П.22) заключается в нахождении максимума функционала (П.21) в пространстве H_{AA^*}, т.е.

$$\max_{\varphi\in H_{AA^*}} \gamma(\varphi) = \max_{\varphi\in H_{AA^*}} \left[-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{H_{AA^*}} + (b - Ax_0, \varphi)_{H_2}\right]. \quad (П.28)$$

Замечание П.5. Элемент $\bar{\varphi}_0^* \in H_{AA^*}$, т.е. решение задачи (П.28) является обобщенным решением двойственной задачи (П.22). Действительно, когда элемент $\bar{\varphi}_0^* \in M_{A^*}$, он совпадает с обычным решением двойственной задачи (П.22).

Теорема П.5. Обобщенная двойственная задача (П.28) разрешима тогда и только тогда, когда задача (П.3), (П.4) разрешима. Максимум функционала (П.28) достигается на единственном элементе $\bar{\varphi}_0^*$ и решение задачи (П.3), (П.4) представимо в виде

$$\bar{x}^* = \tilde{A}^*\bar{\varphi}_0^* + x_0. \quad (П.29)$$

Доказательство. Пусть $\bar{\varphi}_0^*$ – решение обобщенной двойственной задачи (П.28). Для идеального элемента $\bar{\varphi}_0^*$ существует последовательность старых элементов $\{\varphi_n\} \subset M_{A^*}$, которая сходится к элементу $\bar{\varphi}_0^*$ в норме пространства H_{AA^*}. При помощи $\{\varphi_n\}$ образуем последовательность $\{A^*\varphi_n\}$. На основа-

нии леммы П.I последовательность $\{A^*\varphi_n\}$ сходится к элементу $\bar{x} \in M_A$ и $\bar{x} = \tilde{A}^* \bar{\varphi}_0^*$. Для любого n элемент $A^*\varphi_n$ представим в виде

$$A^*\varphi_n = x_n - x_0, \quad x_n \in U. \tag{П.30}$$

Так как последовательность $\{A^*\varphi_n\}$ сходится к $\bar{x}$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу $\bar{x}'$, причем

$$\bar{x} = x' - x_0 = \tilde{A}^* \tilde{\varphi}_0^*. \tag{П.31}$$

Для любого n уравнение $Ax = Ax_n$ разрешимо и его обобщенное нормальное решение относительно элемента x_0 совпадает с x_n. На основании равенства (П.30) и теоремы П.4 имеем, что для любого n элемент $\varphi_n \in M_{A^*}$ является решением задачи (П.22) при $b = Ax_n$.

Из условия $\varphi_n \in M_{A^*}$ и замечания П.5 имеем

$$\psi_n(\varphi_n) = \max_{\varphi \in H_{AA^*}} \psi_n(\varphi) = \max_{\varphi \in H_{AA^*}} \left[-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{H_{AA^*}} + (Ax_n - Ax_0, \varphi) \right] \tag{П.32}$$

Так как обобщенная двойственная задача (П.28) разрешима, то линейный функционал $(b - Ax_0, \varphi)_{H_2}$, определенный на всюду плотном множестве в H_{AA^*}, ограничен и по теореме Рисса [306] единственным образом представим в виде

$$(b - Ax_0, \varphi)_{H_2} = (\varphi, a)_{H_{AA^*}}. \tag{П.33}$$

Тогда в пространстве H_{AA^*} $\operatorname{grad}\psi = -\varphi + a$ и в точке $\bar{\varphi}_0^*$ равен нулю, т.е. $\operatorname{grad}\psi(\varphi)\big|_{\varphi=\bar{\varphi}_0^*} = -\varphi + a = 0$. Следовательно, $a = \bar{\varphi}_0^*$ и

$$(b - Ax_0, \varphi)_{H_2} = (\varphi, \bar{\varphi}_0^*)_{H_{AA^*}}. \tag{П.34}$$

На основании (П.27), (П.30) и (П.32) для любого n имеет место равенство

$$(Ax_n - Ax_0, \varphi)_{H_2} = (\varphi, \varphi_n)_{H_{AA^*}} \tag{П.35}$$

В силу непрерывности скалярного произведения существуют пределы правой и левой частей равенства (П.35) при $n \to \infty$. Переходя в (П.35) к пределу при $n \to \infty$, учитывая соотношение (П.34), получим цепочку равенств

$$\lim_{n\to\infty} (Ax_n - Ax_0, \varphi)_{H_2} = (A\bar{x}' - Ax_0, \varphi) = (b - Ax, \varphi). \qquad (П.36)$$

Из равенства (П.36) и $\bar{x}' \in U$ имеем $A\bar{x}' = b$, т.е. уравнение (I.52) разрешимо, и $\bar{x}' = \bar{x}^*$. Следовательно, задача (П.3), (П.4) также разрешима.

Пусть задача (П.3), (П.4) разрешима. При $b = A\bar{x}^*$ справедливо неравенство

$$|(b - Ax_0, \varphi)| \le |(A(\bar{x}^* - x_0), \varphi)_{H_2}| \le \|\bar{x}^* - x_0\|_{H_1} \|A^*\varphi\|_{H_1} \le \|\bar{x}^* - x_0\|_{H_1} \cdot \|\varphi\|_{H_{AA^*}}. \qquad (П.37)$$

Следовательно, линейный функционал $(b - Ax_0, \varphi)_{H_2}$, определенный на всюду плотном множестве в H_{AA^*}, ограничен и по теореме Рисса имеет место равенство (П.33). Поэтому функционал $\gamma(\varphi) = -\frac{1}{2}\|\varphi\|_{H_{AA^*}} + (\varphi, a)_{H_{AA^*}}$ является строго выпуклым вверх и определен на выпуклом замкнутом множестве H_{AA^*}. Следовательно [73], обобщенная двойственная задача (П.23) разрешима.

В силу единственности элемента a в представлении (П.33) имеем, что элемент $\bar{\varphi}_0^*$ также единствен. Таким образом, если обобщенная двойственная задача (П.28) разрешима, то она имеет единственное решение $\bar{\varphi}_0^* \in H_{AA^*}$. На основании равенств (П.31) и $\bar{x}' = \bar{x}^*$ получаем представление (П.29).

Теорема П.5 полностью доказана.

3. Из теоремы П.5 следует справедливость некоторых равенств, которые сформулируем в виде лемм.

Лемма П.2. Оператор $\tilde{A}^*$, определенный на всем H_{AA^*} и действующий в H_1, нормально разрешим и его область значений

$R(\widetilde{A}^*)$ совпадает с подпространством M_A, т.е. $R(\widetilde{A}^*) = M_A$.

Доказательство. Когда $x_0 = 0$ и элемент b пробегает всю область значений оператора A, на основании равенства (П.29), элемент $\bar{x}^*$ заполняет все подпространство M_A. Поэтому справедливо включение $R(\widetilde{A}^*) \supset M_A$. В лемме П.1 доказано противоположное включение $R(\widetilde{A}^*) \subset M_A$. Следовательно, имеет место множественное равенство $R(\widetilde{A}^*) = M_A$.

Лемма П.2 доказана.

Лемма П.3. Оператор $\widetilde{AA^*}$ представляется в виде произведения операторов A и $\widetilde{A}^*$, т.е. $\widetilde{AA^*} = A\widetilde{A}^*$ и является самосопряженным в пространстве H_{AA^*}.

Доказательство. На пространстве H_{AA^*} операторы $\widetilde{AA^*}$ и $A\widetilde{A}^*$ являются линейными ограниченными операторами соответственно по построению и как произведение ограниченных операторов. Области определений операторов $\widetilde{AA^*}$ и $A\widetilde{A}^*$ на всюду плотном множестве M_{A^*} в пространстве H_{AA^*} совпадают по построению. Так как из ограниченности линейного оператора следует его непрерывность, то операторы $\widetilde{AA^*}$ и $A\widetilde{A}^*$ совпадают на всем пространстве H_{AA^*}. Таким образом, оператор $\widetilde{AA^*}$ представим в виде произведения операторов A и A^*, т.е. $\widetilde{AA^*} = A\cdot\widetilde{A}^*$.

Пусть последовательность старых элементов $\{y_n\}$ сходится к произвольному элементу $y \in H_{AA^*}$. Из свойства непрерывности скалярного произведения и самосопряженности оператора AA^* для произвольных x и $y \in H_{AA^*}$ справедлива цепочка предельных равенств

$$(\widetilde{AA^*}x, y)_{H_{AA^*}} = \lim_{n\to\infty}(AA^*x, y_n)_{H_{AA^*}} = \lim_{n\to\infty}(\widetilde{AA^*}\widetilde{AA^*}x, y_n)_{H_2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(AA^*AA^*x, y_n)_{H_2} = \lim_{n\to\infty}(A\widetilde{A}^*x, AA^*y_n)_{H_2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(x, A\widetilde{A}^*y_n)_{H_{AA^*}} = (x, A\widetilde{A}^*y)_{H_{AA^*}}$$

Следовательно, оператор AA^* является самосопряженным в пространстве H_{AA^*}.

Лемма П.3 полностью доказана.

Рассмотрим следующее уравнение

$$\widetilde{AA}^*\varphi = b - Ax_0, \quad \varphi \in H_{AA^*}. \qquad (П.38)$$

Справедлива

Теорема П.6. Уравнение (П.38) и обобщенная двойственная задача (П.28) разрешимы одновременно. Единственное решение (П.38) совпадает с решением $\bar{\varphi}_0^*$ обобщенной двойственной задачи (П.28).

Доказательство. Из равенств $R(\widetilde{A}^*) = M_A$ и $\widetilde{AA}^* = A\widetilde{A}^*$ очевидным образом следует, что при заданном b уравнения (I.52) и (П.38) разрешимы одновременно. Следовательно, уравнения (П.38) и обобщенная двойственная задача (П.28) также разрешимы одновременно.

Если равенство (П.29) слева умножить на оператор A, то получим равенство $A\widetilde{A}^*\bar{\varphi}_0^* = b - Ax_0$. Следовательно, элемент $\bar{\varphi}_0^*$, решение обобщенной двойственной задачи (П.28), является также решением уравнения (П.38). В силу единственности элемента $\bar{\varphi}_0^*$ и на основании леммы П.2 уравнение (П.38) также имеет единственное решение.

Теорема П.6 доказана.

Из теоремы П.6 и леммы П.3 очевидным образом следует

Лемма П.4. Оператор $\widetilde{AA}^*$ является самосопряженным положительным расширением оператора AA^* с пространства H_2 на пространство H_{AA^*}.

4. Из результатов параграфа 2 следует, что двойственный метод нахождения обобщенного нормального решения $\bar{x}^*$ исходной линейной некорректной задачи (I.52) заключается:

I/ в определении решения $\bar{\varphi}_0^* \in H_{AA^*}$ обобщенной двойственной задачи (П.28);

2/ вычислении обобщенного нормального решения $\bar{x}^*$ при помощи соотношения (П.29).

Замечание П.6. Элемент $\bar{z}^* = (\bar{x}^*, \bar{\varphi}^*) \in H_1 \times H_{AA^*}$ является обобщенной точкой максимума функционала Лагранжа (П.17).

§ 3. Решение обобщенной двойственной задачи регулярными методами

I. Определение решения $\bar{\varphi}_0^*$ обобщенной двойственной задачи является достаточно сложной задачей ввиду следующих причин:

а) задачи (П.28) и (П.38) некорректно поставлены в силу их неразрешимости при любом $b \in H_2$ и неустойчивости решения в зависимости от ошибок задания величины b ;

б) на практике не всегда удается в явном виде записать оператор $\widetilde{A}^*$ и (или) задать пространство H_{AA^*}.

Поэтому для нахождения решения $\bar{\varphi}_0^*$ обобщенной двойственной задачи необходимо применять такие регуляризующие алгоритмы [398], которые используют только исходные операторы A , A^* и пространства H_1 , H_2 .

2. Сглаживающий параметрический функционал А.Н.Тихонова для двойственной задачи (П.22) записывается в виде

$$T_{gl}^{\alpha}[\varphi] = -\frac{1}{2}(AA^*\varphi, \varphi) + (b - Ax_0, \varphi) - \frac{1}{2}\alpha \|\varphi - \varphi_0\|^2, \qquad (П.39)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, $\varphi \in H_2$.

Из сильной выпуклости вверх и дифференцируемости функционала (П.39) очевидным образом [73,223] справедлива

Теорема П.7. Для любых $b \in H_2$ и $\alpha > 0$ максимум функционала (П.39) достигается на единственном элементе φ^{α} , который является решением уравнения

$$AA^*\varphi + \alpha\varphi = b - Ax_0 + \alpha\varphi_0. \qquad (\text{П.40})$$

Для доказательства предельного равенства $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|\varphi^\alpha - \bar{\varphi}_0^*\|^2_{H_{AA^*}} = 0$ в случае разрешимости уравнения (I.52) необходимо установить справедливость ряда теорем.

3. Предварительно введем в рассмотрение элемент x^α, связанный с φ^α по формуле $x^\alpha = A^*\varphi^\alpha + x_0$.

Из сильной выпуклости вверх по φ, при фиксированном x, и сильной выпуклости вниз по x, при фиксированном φ, функционала $L^\alpha[x,\varphi]$, а также линейности оператора A справедлива [I,73]

Теорема П.8. Для того, чтобы при любых $b \in H_2$ и $\alpha > 0$ элемент $\bar{z}^\alpha = (\bar{x}^\alpha, \bar{\varphi}^\alpha) \in H_1 \times H_2$ являлся единственной седловой точкой функционала (П.25) необходимо и достаточно, чтобы элементы $\bar{x}^\alpha$ и $\bar{\varphi}^\alpha$ удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} x = A^*\varphi + x_0, & (\text{П.41}) \\ Ax + \alpha\varphi = b + \alpha\varphi_0. & (\text{П.42}) \end{cases}$$

Замечание П.7. Уравнения (П.41) и (П.42) являются условиями стационарности для параметрического модифицированного функционала Лагранжа (П.25).

Рассмотрим следующую регуляризацию задачи (П.26):

найти

$$\max_{\varphi\in H_2} \min L^\alpha[x,\varphi]. \qquad (\text{П.43})$$

Из существования седловой точки функционала (П.25) следует, что

$$L^\alpha[\bar{x}^\alpha, \bar{\varphi}^\alpha] = \max_{\varphi\in H_2}\min_{x\in H_1} L^\alpha[x,\varphi] = \min_{x\in H_1}\max_{\varphi\in H_2} L^\alpha[x,\varphi] \qquad (\text{П.44})$$

Имеет место

Теорема П.9. Справедливы равенства $\varphi^{\alpha} = \bar{\varphi}^{\alpha}$ и $x^{\alpha} = \bar{x}^{\alpha}$.

Доказательство. На основании первого положения теории преобразования вариационных проблем Куранта-Гильберта, включение любого из условий стационарности функционала в список дополнительных условий приводит к вариационной задаче, которая эквивалентна исходной [I].

При наложении условия стационарности (П.4I) в качестве дополнительного условия к левой задаче равенства (П.44), в силу единственности минимума $L^{\alpha}[x, \varphi]$ при каждом фиксированном φ, символ $\min$ теряет смысл и приходим к эквивалентной задаче

$$\max L^{\alpha}[x, \varphi] \qquad (П.45)$$

при условии

$$x = A^{*}\varphi + x_{0}. \qquad (П.46)$$

Уравнение (П.46) уже разрешимо относительно x. Следовательно, применяя преобразование Фридрихса [I] к задаче (П.45), (П.46), т.е. подставляя значение x в функционал $L^{\alpha}[x, \varphi]$, легко получим вариационную задачу

$$\max_{\varphi \in H_2} T_{\partial\beta}^{\alpha}[\varphi]. \qquad (П.47)$$

Следовательно, элементы φ^{α} и $\bar{\varphi}^{\alpha}$ равны. Справедливость равенства $\bar{x}^{\alpha} = x^{\alpha}$ следует из построения элемента x^{α} и соотношения (П.4I).

Теорема П.9 доказана.

Рассмотрим следующий сглаживающий параметрический функционал А.Н.Тихонова для уравнения (I.52)

$$T^{\alpha}[x] = \|Ax - \beta\|_{H_2}^{2} + \alpha \|x - (x_{0} + A^{*}\varphi_{0})\|_{H_1}^{2}, \qquad (П.48)$$

где $x_{0} + A^{*}\varphi_{0}$ – фиксированный элемент.

Теорема П.10. Для любых b и $\alpha > 0$ элемент $x^\alpha = \bar{x}^\alpha$ минимизирует функционал (П.48).

Доказательство. При наложении условия стационарности (П.42) в качестве дополнительного условия к правой задаче равенства (П.44), в силу единственности максимума $L^\alpha[x, \varphi]$ при каждом фиксированном x, символ $\max$ теряет смысл и приходим к задаче

$$\min L^\alpha[x, \varphi] \qquad (П.49)$$

при условии

$$Ax + \alpha\varphi = b + \alpha\varphi_0. \qquad (П.50)$$

Применим преобразования Фридрихса к задаче (П.49), (П.50) относительно переменной φ.

Подставляя значения $\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\alpha}(Ax - b)$ и $\varphi = -\frac{1}{\alpha}(Ax - b) + \varphi_0$ в функционал $L^\alpha[x, \varphi]$ и проведя некоторые преобразования, получим цепочку равенств:

$$\frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 - (Ax - b, \varphi) - \frac{1}{2}\alpha\|\varphi - \varphi_0\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|Ax - b\|^2 - (Ax - b, \varphi_0) - \frac{1}{2\alpha}\|Ax - b\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\|Ax - b\|^2 + \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 - (Ax - b, \varphi_0) + (Ax, \varphi_0) -$$

$$- (Ax, \varphi_0) + (Ax_0, \varphi_0) - (Ax_0, \varphi_0) + \frac{1}{2}(AA^*\varphi_0, \varphi_0) - \frac{1}{2}(AA^*\varphi_0, \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\|Ax - b\|_{H_2}^2 + \frac{1}{2}\|x - (x_0 + A^*\varphi_0)\|_{H_1}^2 + (b - Ax_0 - \frac{1}{2}AA^*\varphi_0, \varphi_0) =$$

$$= K^\alpha[x].$$

Таким образом, задача (П.49), (П.50) переходит в задачу

$$\min_{x \in H_1} K^{\alpha}[x] \qquad (П.51)$$

От умножения функционала на постоянную величину и прибавления к нему постоянной величины его экстремальные свойства не изменяются, поэтому элемент $x^{\alpha} = \bar{x}^{\alpha}$, т.е. решение задачи (П.51), минимизирует также функционал (П.48).

Теорема П.10 полностью доказана.

3. Запишем следующий параметрический функционал А.Н.Тихонова для задачи (П.38)

$$T^{\alpha}_{ogb}[\varphi] = -\frac{1}{2}(\widetilde{AA^*}\varphi, \varphi)_{H_{AA^*}} + (b - Ax_0, \varphi)_{H_{AA^*}} - \frac{1}{2}\alpha \|\varphi - \varphi_0\|^2_{H_{AA^*}}. \qquad (П.52)$$

Справедлива

Теорема П.11. Для любого $\alpha > 0$ элемент $\varphi^{\alpha} = \bar{\varphi}^{\alpha}$, т.е. решение задачи (П.47), максимизирует функционал $T^{\alpha}_{ogb}[\varphi]$.

Доказательство. В силу сильной выпуклости вверх функционала (П.52) в пространстве H_{AA^*}, он для любого фиксированного принимает максимальное значение на единственном элементе φ_1^{α}. Уравнение Эйлера для функционала (П.52) имеет вид [223]

$$\widetilde{AA^*}\varphi + \alpha\varphi = b - Ax_0 + \alpha\varphi_0, \quad \varphi \in H_{AA^*}. \qquad (П.53)$$

Следовательно, элемент φ_1^{α} удовлетворяет уравнению (П.53) [73]. Так как на основании леммы П.3 область значений оператора AA^* принадлежит M_{A^*} и $\varphi_0 \in H_2$, из уравнения (П.53) получим, что для любого $\alpha > 0$ элемент $\varphi_1^{\alpha} \in H_2$. Тогда элемент $\widetilde{AA^*}\varphi_1^{\alpha} = AA^*\varphi_1^{\alpha}$ и φ_1^{α} удовлетворяет также уравнению (П.46). Следовательно, φ_1^{α} совпадает с элементом φ^{α}, т.е. решением задачи (П.47).

Теорема П.11 доказана.

4. Фиксированный элемент $x_0 + A^*\varphi_0$ в функционале (П.48) принадлежит плоскости U, следовательно, обобщенное нормальное решение уравнения (I.52), определенное относительно элемента

$x_0 + A^* y_0$, совпадает с $\bar{x}^*$ [270,271]. Учитывая, что при замене x_0 на $x_0 + A^* y_0$ обобщенное нормальное решение не изменяется, на основании работ [270,39,257] и теорем (П.9-П.II) очевидным образом может быть доказана

Теорема П.I2. Если при заданном b уравнение (I.52) разрешимо, то при $\alpha \to 0$ элементы y_α, x^α и $z^\alpha = (x^\alpha, y^\alpha)$ монотонно и сильно сходятся соответственно в пространствах H_{AA^*}, H_1 и $H_1 \times H_{AA^*}$ к решению $\bar{y}_0^*$ обобщенной двойственной задачи (П.28), обобщенному нормальному решению $\bar{x}^*$ уравнения (I.62) и обобщенной точке максимина $\bar{z}^* = (\bar{x}^*, \bar{y}_0^*)$ задачи (П.20).

5. При наличии ошибок в задании величины в задаче (П.3), (П.4) и (П.28) могут быть неразрешимы. Однако из теоремы П.I2 и работы [270] устанавливаем, что если параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ выбирается по критерию невязки или выполняются условия [398]:

а) $\delta^2 / \alpha(\delta) = \beta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$;

б) $\lim\limits_{\delta \to 0} \alpha(\delta) = 0$;

то справедлива

Теорема П.I3. При $\delta \to 0$ имеют место предельные равенства

$$\lim_{\delta \to 0} \| y^{\alpha(\delta)} - \bar{y}_0^* \|_{H_{AA^*}} = 0, \qquad (П.54)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \| x^{\alpha(\delta)} - \bar{x}^* \|_{H_1} = 0, \qquad (П.55)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \| z^{\alpha(\delta)} - \bar{z}^* \|_{H_1 \times H_{AA^*}} = 0. \qquad (П.56)$$

Предельные равенства (П.54), (П.55) и (П.56) устанавливают регуляризующие свойства предложенного метода нахождения обобщенного нормального решения $\bar{x}^*$ путем решения регулризованной двойственной задачи (П.39) и вычисления x^α по формуле $x^\alpha = A^* y^\alpha + x_0$.

Предельное равенство (П.55) показывает, что построенный алгоритм одновременно является также регуляризующим методом нахождения *обобщенной точки максимина функционала Лагранжа* (П.17).

6. Таким образом, на основании теорем (П.10–П.13) идея двойственного варианта вариационного способа А.Н.Тихонова нахождения регуляризованного решения обратной задачи гравиметрии и постановках I и 2 при $\Omega(\cdot) = \|\cdot\|^2$ состоит в следующем. Элемент x^α, минимизирующий функционал (I.5I), находится не из уравнения Эйлера

$$A^*Ax + \alpha x = A^*b + \alpha x_0, \tag{П.57}$$

а из системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} x = A^*\varphi + x_0, & (П.58) \\ Ax + \alpha\varphi = b & (П.59) \end{cases}$$

для параметрического модифицированного функционала Лагранжа (П.25) при $y_0 \equiv 0$.

Подставляя равенство (П.58) в (П.59), получаем соотношение

$$AA^*\varphi + \alpha\varphi = b - Ax_0 \tag{П.60}$$

для определения элемента $\varphi^\alpha = (AA^* + \alpha E)^{-1}(b - Ax_0)$. Равенство (П.60) совпадает с уравнением Эйлера для функционала (П.39). Элемент x^α вычисляется по формуле $x^\alpha = A^*\varphi^\alpha + x_0$. Выбор параметра регуляризации $\alpha(\delta)$ производится по некоторому критерию [398].

Из равенств (П.57)–(П.60) при $x_0 = 0$ имеем, что $x^\alpha = (A^*A + \alpha E_1)^{-1}A^*b = A^*(AA^* + \alpha E_2)^{-1}b$, т.е. справедлива [259].

Лемма П.5. Для любого $\alpha > 0$ справедливы операторные равенства

$$A^*(AA^*+\alpha E_2)^{-1} = (A^*A+\alpha E_1)^{-1}A^* \qquad (П.61)$$

и

$$A(A^*A+\alpha E_1)^{-1} = (AA^*+\alpha E_2)^{-1}A. \qquad (П.62)$$

Лемма П.5 является частным случаем более общего соотношения [72,278]

$$A^*g(AA^*) = g(A^*A)A^*, \qquad (П.63)$$

где $g(t)$ - непрерывная ограниченная функция на $(0,\infty)$.

Действительно непрерывную функцию можно с любой степенью точности равномерно аппроксимировать полиномами. Пусть

$$\varepsilon_n = \max_{0\le t\le\|A\|^2} |g_n(t)-g(t)| \longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty, \qquad (П.64)$$

где $g_n(t)$ - некоторый полином. Тогда на основании спектральной теории самосопряженных операторов [306,422]

$$\|g_n(A^*A)-g(A^*A)\| \le \varepsilon_n \to 0 \qquad (П.65)$$

и

$$\|g_n(AA^*)-g(AA^*)\| \le \varepsilon_n' \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

На основании (П.68) справедливо неравенство

$$\|A^*g(AA^*)-A^*g_n(AA^*)+g_n(A^*A)A^*-g(A^*A)A^*\| \le \|A^*\|(\varepsilon+\varepsilon'). \qquad (П.66)$$

Для полинома g_n формула (П.66) верно, так как для любого одночлена t^k, $k = 0,1,2,\ldots,$

$$A(A^*A)^k = (AA^*)^kA. \qquad (П.67)$$

Следовательно

$$\|A^*g(AA^*)-g(A^*A)A^*\| \le (\varepsilon+\varepsilon')\|A^*\| \longrightarrow 0 \text{ при } n\to 0, \qquad (П.68)$$

т.е. справедливо равенство (П.66).

7. Пусть в функционале (I.5I) стабилизатор $\Omega(x) = \|Bx\|^2$ и является строго выпуклым. Тогда двойственный вариант вариационного способа А.Н.Тихонова записывается в виде

$$\begin{cases} B^*Bx = A^*\varphi + B^*Bx_0, & (П.69) \\ Ax + \alpha\varphi = b, & (П.70) \end{cases}$$

где B^*B - положительно определенный оператор.

Аналог равенства (П.6I) принимает вид

$$(A^*A + \alpha B^*B)^{-1}A^* = \left((B^*B)^{-1}A^*A + \alpha E_1\right)^{-1}(B^*B)^{-1}A^* = \quad (П.7I)$$
$$= (B^*B)^{-1}A^*\left(A(B^*B)^{-1}A^* + \alpha E_2\right)^{-1}.$$

Для решения обратной задачи в постановке 3 двойственным вариантом вариационного способа А.Н.Тихонова необходимо ввести в рассмотрение следующий параметрический модифицированный функционал Лагранжа

$$L^{\alpha}[x,\varphi] = \Omega_1(x-x_0) - (Ax-b,\varphi) - \alpha\Omega_2(\varphi-\varphi_0), \alpha > 0, \quad (П.72)$$

где $\Omega_1(\cdot)$ и $\Omega_2(\cdot)$ - строго выпуклые, дифференцируемые по Фреше функционалы. Тогда система уравнений Эйлера для функционала (П.72) имеет вид

$$\begin{cases} \Omega_1'(x-x_0) = A^*\varphi, & (П.73) \\ Ax + \alpha\Omega_2'(\varphi-\varphi_0) = b. & (П.74) \end{cases}$$

В функционале (П.72) $\Omega_1(\cdot)$ выполняет по существу роль критерия выбора (оптимальности), а $\Omega_2(\cdot)$ - стабилизатора.

8. Равенства (П.6I), (П.62) и (П.7I) позволяют конструировать и обосновывать двойственные варианты многих итерационных процессов, в частности (I.45), (I.47), которые принимают соответственно вид

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \left(AB^{-1}A^* + \alpha_n E_2\right)^{-1}\left(AB^{-1}A^*\varphi_n - b\right), \quad (П.75)$$

$$x_{n+1} = B^{-1}A^*\varphi_{n+1}, \quad x_0 = B^{-1}A^*\varphi_0;$$

и

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \beta_n \left(AB^{-1}A^* + \alpha_n E_2\right)^{-1} \left(AB^{-1}A^*\varphi_n - b\right), \qquad (\text{П.76})$$

$$x_{n+1} = B^{-1}A^*\varphi_{n-1}, \quad x_0 = B^{-1}A^*\varphi_0.$$

Пусть последовательности $\{\alpha_n\}$ и (или) $\{\beta_n\}$ удовлетворяют условиям теоремы I.9. Тогда справедлива

Теорема П.I4. Последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{x_n\}$ образованные итерационными процессами (П.75), (П.76) монотонно и сильно сходятся соответственно к решению $\bar{\varphi}_0^*$ обобщенной двойственной задачи (П.28) и обобщенному нормальному решению $\bar{x}^*$ уравнения (I.52).

9. Удобства двойственных вариантов прямых регулярных методов решения обратных задач геофизики очевидны. Поэтому большой практический и теоретический интерес представляет развитие двойственного метода для решения более широкого круга некорректных задач. В параграфе 4 двойственный метод обобщен для решения нелинейной задачи с ограниченным оператором F и линейной задачи с не - ограниченным замкнутым оператором. Отметим, что для неограниченных операторов прямые методы не применимы. Обобщение двойственного метода решения линейных задач с ограниченным оператором для банаховых пространств $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, привели к новым существенным результатам. Поэтому эти результаты выделены в отдельный пятый параграф.

§ 4. Теория двойственного метода для нелинейных задач и линейных задач с замкнутым неограниченным оператором

I. Прямое обобщение двойственного метода для решения нелинейных некорректных задач не проходит. Так как не удается в яв-

ном виде построить целевой функционал двойственной задачи. Однако операторные равенства (П.6I), (П.7I) и параметрический модифицированный функционал Лагранжа позволяют реализовать основную идею двойственного метода конструированием взаимосвязанных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ для решения нелинейных обратных задач.

Запишем упрощенную постановку 3 для нелинейной задачи:

$$\text{найти} \quad \min \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 \tag{П.77}$$

при ограничении

$$Fx = b, \tag{П.78}$$

где $F: H_1 \to H_2$ - ограниченный, дифференцируемый по Фреше оператор.

Функционал Лагранжа задачи (П.77), (П.78) имеет вид

$$L[x, \varphi] = \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2_{H_1} - (Fx - b, \varphi), \tag{П.79}$$

где $\varphi \in H_2$.

Пусть множество решений задачи (П.78) выпукло. Тогда задача (П.77), (П.78) разрешима и имеет единственное нормальное решение $\bar{x}^*$.

Введем в рассмотрение задачу

$$\max_{\varphi \in H_2} \min_{x \in H_1} L[x, \varphi]. \tag{П.80}$$

С задачей (П.79) связана система уравнений

$$\begin{cases} x - x_0 = F'^*(x)\varphi, & \text{(П.8I)} \\ Fx - b = 0. & \text{(П.82)} \end{cases}$$

Анализ системы уравнений (П.8I), (П.82) показывает, что справедлива

Теорема П.I5. Для разрешимости задачи (П.80) необходимо и достаточно, чтобы нормальное решение $\bar{x}^*$ задачи (П.77), (П.78)

представлялось в виде

$$\bar{x}^* - x_0 = F'^*(\bar{x}^*)\,\varphi. \qquad (\text{П.83})$$

Проведем такое расширение понятия решения задачи (П.80), чтобы она была разрешима одновременно с разрешимостью задачи (П.77), (П.78).

Определение П.I. Задача (П.80) разрешима в обобщенном смысле, если существуют такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{\varphi_n\}$, что $\forall n$ элемент $x_n = F'^*(x_{n-1})\varphi_n + x$, где $x \in H_2$, и последовательность $\{x_n\}$ сходится в норме H_1 к элементу $\bar{x}^*$.

Для определения регуляризующего алгоритма нахождения $\bar{x}^*$, основанного на идее двойственного метода, рассмотрим сглаживающий функционал А.Н.Тихонова для нелинейной задачи (П.77), (П.78)

$$T^\alpha[x] = \|Fx - b\|^2_{H_2} + \alpha\|x - x_0\|^2_{H_1}, \quad \alpha > 0. \qquad (\text{П.84})$$

Известно [398,100], что элемент x^α, минимизирующий функционал (П.84), является решением уравнения

$$F'^*(x)(Fx - b) + \alpha(x - x_0) = 0. \qquad (\text{П.85})$$

Из равенства (П.85) видно, что элемент $x^\alpha - x_0$ представим в виде

$$x^\alpha - x_0 = -\frac{1}{\alpha} F'^*(x^\alpha)(Fx^\alpha - b). \qquad (\text{П.86})$$

Обозначим $-\frac{1}{\alpha}(Fx^\alpha - b)$ через φ^α. Тогда равенство (П.86) распадается на систему равенств

$$\begin{cases} x^\alpha - x_0 = F'^*(x^\alpha)\varphi^\alpha, & (\text{П.87}) \\ Fx^\alpha - b + \alpha\varphi^\alpha = 0. & (\text{П.88}) \end{cases}$$

Следовательно, пара $(x^\alpha, \varphi^\alpha)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} x - x_0 = F'^*(x)\varphi, & (\text{П.89}) \\ Fx - b + \alpha\varphi = 0. & (\text{П.90}) \end{cases}$$

Соотношения (П.89), (П.90) являются системой уравнения Эйлера для параметрического модифицированного функционала Лагранжа

$$L^{\alpha}[x,\varphi]=\frac{1}{2}\|x-x_0\|^2_{H_1}-(Fx-b,\varphi)-\frac{1}{2}\alpha\|\varphi\|^2_{H_2}, \qquad (П.91)$$

где $\alpha>0$ – параметр регуляризации.

На основании выше сказанного справедлива

Теорема П.16. Для любого $\alpha>0$ существует седловая точка $z^{\alpha}=(x^{\alpha},\varphi^{\alpha})$ функционала (П.91). Причем элемент x^{α} минимизирует функционал (П.84) и имеет место равенство (П.87).

Подставляя равенство (П.87) в (П.88) получим уравнение $F(x_0+F'^{*}(x)\varphi)-b+\alpha\varphi=0$. Линеаризуя его при $\alpha=\alpha_k$ относительно элемента $x_0+F'^{*}(x_n)$, где $x_0=x^{\alpha_{k-1}}$, получаем возможность находить φ_{n+1}, а $x_{n+1}=x_0+F'^{*}(x_n)\varphi_{n+1}$. Все нюансы нахождения x^{α_k} и φ^{α_k} описаны в главе IУ.

5. Решение линейного операторного уравнения первого рода с замкнутым неограниченным оператором T со всюду плотной областью определения. Теория двойственного метода, построенная для линейного ограниченного оператора A в параграфах I-3, непосредственно обобщается на случай замкнутого неограниченного оператора $T:H_1\to H_2$ со всюду плотной областью определения $D(T)$ [259,277].

Рассмотрим линейное операторное равенство

$$Tx=b, \qquad (П.92)$$

где $x\in H_1$ – искомый элемент, $b\in H_2$ – заданный элемент. Пусть задача (П.92) некорректно поставлена по всем трем условиям Адамара. В силу условий, наложенных на T, существует сопряженный оператор T^{*}.

Известно [306,307,422,185], что оператор T^{*} является линейным замкнутым, подпространства N_T и $N_{T^{*}}$ замкнуты, $D(T^{*})=H_2$ и

$\overline{R(T^*)} = M_T = H_1 \ominus N_T$. В силу замкнутости оператора T обобщенное нормальное решение $\bar{x}^*$ уравнения (П.92) определено относительно произвольного элемента $x_0 \in H_1$. Введем в рассмотрение плоскость U с направляющим подпространством M_T и элементом сдвига x_0 .

Будем решать задачи (П.92) в постановке 3, т.е. необходимо найти

$$\min \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2_{H_1} \qquad (П.93)$$

при условии

$$Tx = b, \quad x \in D(T). \qquad (П.94)$$

Отметим, что решение задачи (П.93), (П.94) совпадает с элементом $\bar{x}^*$.

Функционал Лагранжа для задачи (П.93),(П.94) имеет вид

$$L[x, \varphi] = \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2_{H_1} - (Tx - b, \varphi)_{H_2}, \qquad (П.95)$$

где $x \in D(T)$, $\varphi \in D(T^*)$.

Рассмотрим следующее расширение функционала Лагранжа по переменной x [306,307,422].

$$\tilde{L}[x, \varphi] = \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2_{H_1} - (x, T^*\varphi) + (b, \varphi), \qquad (П.96)$$

где $x \in H_1$, $\varphi \in D(T^*)$.

Двойственная задача к задаче (П.93), (П.94) заключается в определении

$$\max_{\varphi \in D(T^*)} \psi(\varphi), \qquad (П.97)$$

где функционал

$$\psi(\varphi) = \min_{x \in H_1} \tilde{L}[x, \varphi]. \qquad (П.98)$$

Для любого b и фиксированного $\varphi \in D(T^*)$ функционал (П.96) является строго выпуклым по переменной x и его безусловный минимум достигается на единственном элементе $\bar{x}$, который является решением уравнения

$$x - x_0 = T^*\varphi. \qquad (П.99)$$

Из уравнения (П.99) получим, что $\bar{x} = T^*\varphi + x_0$. Подставляя значение $\bar{x}$ в функционал (П.96), после несложных преобразований получим, что

$$\Psi(\varphi) = -\frac{1}{2}\|T^*\varphi\|^2_{H_1} + (b,\varphi) - (x_0, T^*\varphi), \quad \varphi \in D(T^*). \qquad (П.100)$$

Далее для задачи (П.98) с незначительными изменениями в доказательствах справедливы аналоги теорем П.1–П.2.

Проведем такое расширение понятия решения задачи (П.98), чтобы она была разрешима одновременно с разрешимостью задачи (П.93), (П.94). Пусть $M_{T^*} = H_2 \ominus N_{T^*}$.

Определение П.2. Задача (П.98) разрешима в обобщенном смысле, если существует такая последовательность $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in M_{T^*}$, что последовательность $\{x_n = T^*\varphi_n + x_0\}$ сходится к элементу $\bar{x}^*$ в норме пространства H_1.

Для построения последовательности $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющей определению П.2, рассмотрим следующие функционалы Тихонова и Лагранжа:

$$T^\alpha[x] = \|Tx - b\|^2_{H_2} + \alpha\|x - x_0\|^2_{H_1}, \quad \alpha > 0, \ x \in D(T); \qquad (П.101)$$

$$\tilde{L}^\alpha[x,\varphi] = \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2_{H_1} - (x, T^*\varphi) + (b,\varphi) - \frac{1}{2}\alpha\|\varphi\|^2_{H_2}; \qquad (П.102)$$

$$T^\alpha_{Jb}[\varphi] = \frac{1}{2}\|T^*\varphi\|^2_{H_1} - (b,\varphi) + (x_0, T^*\varphi) + \frac{1}{2}\alpha\|\varphi\|^2_{H_2}, \quad \varphi \in D(T^*). \qquad (П.103)$$

Так как операторы T и E совокупно замкнуты и дополнительны, то на основании работ [205, 223, 225] существует единственный

элемент x^α, минимизирующий функционал (П.101), который удовлетворяет тождеству Эйлера

$$T^*(Tx^\alpha - b) + \alpha(x^\alpha - x_0) = 0. \qquad (П.104)$$

В отличие от линейных задач с ограниченным оператором определить элемент x^α из тождества Эйлера (П.104) не всегда возможно. Так как $T^*(Tx^\alpha - b) = T^*Tx^\alpha - T^*b$, только при $b \in D(T^*)$. Однако, введя обозначение $\varphi^\alpha = -\frac{1}{\alpha}(Tx^\alpha - b)$, как и в нелинейной задаче, тождество Эйлера распадается на два тождества

$$\begin{cases} x^\alpha - x_0 = T^*\varphi^\alpha, & (П.105) \\ Tx^\alpha + \alpha\varphi^\alpha = b. & (П.106) \end{cases}$$

Следовательно, элементы x^α и φ^α являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x - x_0 = T^*\varphi, & (П.107) \\ Tx + \alpha\varphi = b. & (П.108) \end{cases}$$

Система уравнений (П.107), (П.108) совпадает с системой уравнений Эйлера для функционала (П.102), т.е. справедлива

Теорема П.18. Для любых $\alpha > 0$ и b существует единственная седловая точка $z^\alpha = (x^\alpha, \varphi^\alpha)$ параметрического модифицированного функционала Лагранжа (П.102). Причем элемент x^α минимизирует функционал (П.101), а элемент φ^α - функционал (П.103).

Решение системы линейных операторных уравнений (П.107), (П.108) является суммой двух решений $(x_1^\alpha, \varphi_1^\alpha)$ и $(x_2^\alpha, \varphi_2^\alpha)$ этой же системы соответственно при $x_0 = 0$ и $b = 0$.

Найдено решение системы (П.107), (П.108) при $x_0 = 0$. Подставляя равенство (П.107) в (П.108), получим уравнение для определения элемента φ_1^α

$$(TT^* + \alpha E_2)\varphi = b, \qquad (П.109)$$

т.е. $\varphi_1^\alpha = (TT^* + \alpha E_2)^{-1} b$. Элемент x^{α_1} определяется по формуле $x_1^\alpha = T^*(TT^* + \alpha E_2)^{-1} b$.

Пусть элемент $b = 0$. Из равенства (П.108) имеем, что элемент $\varphi = -\frac{1}{\alpha} Tx$. Подставляя значение элемента φ в соотношение (П.107), получим уравнение для нахождения x_2^α

$$(T^*T + \alpha E_1) x = \alpha x_0, \qquad (П.110)$$

т.е. $x_2^\alpha = \alpha (T^*T + \alpha E_1)^{-1} x_0$. Элемент φ_2^α определяется по формуле $\varphi_2^\alpha = -T(T^*T + \alpha E_1)^{-1} x_0$. Следовательно, решение системы (П.107), (П.108) представимо в виде [277]

$$x^\alpha = T^*(TT^* + \alpha E_2)^{-1} b + \alpha (T^*T + \alpha E_1)^{-1} x_0, \qquad (П.111)$$

$$\varphi^\alpha = (TT^* + \alpha E_2)^{-1} b - T(T^*T + \alpha E_1)^{-1} x_0. \qquad (П.112)$$

Пусть задана монотонно убывающая последовательность $\{\alpha_n\} \to 0$. Определим элементы последовательности $\{\varphi_n\}$ соотношения (П.112) при $\alpha = \alpha_n$. Вычислим последовательность $\{x_n\}$ по формуле $x_n = T^* \varphi_n + x_0$. Так как элементы x^α и φ^α связаны формулой (П.105), элементы $\{x_n\}$ удовлетворяют соотношению (П.101) при $\alpha = \alpha_n$.

Из сходимости по норме элемента x^α при $\alpha \to 0$ к $\bar{x}^*$ следует, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет определению П.2 и справедлива

Теорема П.19. Задача (П.98) разрешима в обобщенном смысле одновременно с разрешимостью задачи (П.93), (П.94).

На основании работ [257,271] легко следуют справедливость следующих предельных равенств в смысле сильной сходимости:

$$P_{N_{T^*}} = \lim_{\alpha \to 0} \alpha (TT^* + \alpha E_2)^{-1}; \qquad (П.113)$$

$$P_{H_2 \ominus N_{T^*}} = \lim_{\alpha \to 0} TT^* (TT^* + \alpha E_2)^{-1} \qquad (П.114)$$

Пусть при заданном b уравнение (П.93) разрешимо, тогда

$$T^{+}b = \lim_{\alpha \to 0} T^{*}(TT^{*} + \alpha E_2)^{-1} b. \qquad (П.115)$$

Двойственный метод решения уравнения (П.92) будет использован в главе Ш при построении распределений масс, не создающих внешнего поля.

Замечание П.10. Задача (П.93), (П.94) может быть решена только двойственным методом в отличии от задачи (П.3), (П.4).

Замечание П.11. При $T: H \to H$ и $\alpha = 1$ разрешимость системы (П.107), (П.108) доказана Дж.фон Нейманом [306, с.324].

Таким образом, регуляризующий алгоритм двойственного метода нахождения регуляризованного решения задачи (П.92) относительно элемента x_0 состоит из трех этапов:

1) определении последовательности $\{\gamma_n = \gamma^{\alpha_n}\}$ при помощи соотношения (П.112);

2) вычисления $\{x_n\}$ по формуле $x_n = T^{*}\gamma_n + x_0$;

3) отбор $x_n = x^{\alpha_n}$ по некоторому известному критерию [398, 100, 333].

§ 5. Двойственный метод решения линейной некорректной задачи в пространстве $L_p(S)$. Разложение $L_p(S)$ в специальную полупрямую сумму

1. При построении общего решения линейной обратной задачи гравиметрии в классе $L_p(S)$ распределения плотностей, которая рассматривается в главе Ш, возникла необходимость теорию двойственного метода решения линейной некорректной задачи с ограниченным оператором для гильбертового пространства обобщить на случай банахового пространства $L_p(S)$, $1 < p < \infty$ и ввести

Определение П.3. Пространство $L_p(S)$ разложимо в полу-

прямую сумму, если для подпространства $K \subset L_p(S)$ существует такое замкнутое множество F, что $K \cap F$ равно нулевому элементу и алгебраическая сумма K и F совпадает с $L_p(S)$.

Разложение пространства $L_p(S)$ в полупрямую сумму обозначим следующим образом $L_p(S) = K \oplus F$.

Пусть линейный непрерывный оператор $A: L_{p_1}(S) \to L_{p_2}(Q)$. Известно [185,422,176], что сопряженный оператор $A^*: L_{q_2}(Q) \to L_{q_1}(S)$, где $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$ и $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1$. Для удобства изложения вместо $L_p(S)$, где это не вызывает недоразумений, будем писать также L_p.

Рассмотрим следующую задачу:

найти $$\min \frac{1}{p_1} \|x - x_0\|^{p_1}_{L_{p_1}} \qquad (\text{П.II6})$$

при ограничении

$$Ax = b. \qquad (\text{П.II7})$$

Если при заданном b уравнение (П.II7) разрешимо, то задача (П.II6), (П.II7), в силу равномерной выпуклости пространства $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, имеет единственное решение $\bar{x}^*$, которое совпадает с обобщенным нормальным решением уравнения (П.II7) [398,196].

Для решения задачи (П.II6), (П.II7) двойственным методом рассмотрим следующий функционал Лагранжа [396]

$$L[x, \varphi] = \frac{1}{p_1} \|x - x_0\|^{p_1}_{L_{p_1}} - \langle Ax - b, \varphi \rangle, \qquad (\text{П.II8})$$

где $\varphi \in L_{q_2}$, $\langle , \rangle$ – каноническое спаривание пары сопряженных пространств.

Так как пространство L_{p_1} равномерно выпукло, то для любого b и фиксированного φ существует единственный элемент x_φ, минимизирующий функционал Лагранжа по переменной x, который является решением уравнения [196,396,70]

$$|x-x_0|^{p_1-2}\cdot(x-x_0)=A^*\varphi. \qquad (\text{П.II9})$$

Так как для функции $y_1=|x_1|^{p-2}\cdot x_1$ при $1<p<\infty$ существует обратная функция $x_1=|y_1|^{q-2}\cdot y_1$, то на основании уравнения (П.II9) и свойств градиента нормы в банаховом пространстве [70] легко можно показать, что целевой функционал двойственной задачи к задаче (П.II6), (П.II7)

$$\psi(\varphi)=\min_{x\in L_{p_1}} L[x,\varphi]=-\frac{1}{q_1}\|A^*\varphi\|^{q_1}_{L_{q_1}}+\langle b,\varphi\rangle-\langle x_0,A^*\varphi\rangle. \qquad (\text{П.I20})$$

Двойственная задача к задаче (П.II6), (П.II7) заключается в нахождении

$$\max_{\varphi\in L_{q_2}}\psi(\varphi). \qquad (\text{П.I2I})$$

Пусть задача (П.II6), (П.II7) разрешима; тогда имеет место

Теорема П.20. Для разрешимости задачи (П.I2I) необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\bar{x}^*-x_0=|A^*\bar{\varphi}^*|^{q_1-2}\cdot A^*\bar{\varphi}^*, \qquad (\text{П.I22})$$

где $\bar{\varphi}^*$ – любое решение уравнения

$$A\left(|A^*\varphi|^{q_1-2}\cdot A^*\varphi+x_0\right)=b. \qquad (\text{П.I23})$$

Доказательство. Необходимость. Пусть задача (П.I2I) разрешима. Тогда любое решение задачи (П.I2I) удовлетворяет уравнению (П.I23), для обобщенного нормального решения $\bar{x}^*$ задачи (П.II6), (П.II7) справедливо равенство

$$|\bar{x}^*-x_0|^{p_1-2}\cdot(\bar{x}^*-x_0)=A^*\bar{\varphi}^*, \qquad (\text{П.I24})$$

а элемент $\tilde{x}=x_0+|A^*\bar{\varphi}^*|^{q_1-2}\cdot A^*\bar{\varphi}^*$ является решением уравнения (П.II7).

Известно [70], что если $x\neq 0$, то $\operatorname{grad}\|x\|_{L_{p_1}}=\|x\|^{1-p_1}\cdot|x|^{p_1-2}\cdot x$ и $\|\operatorname{grad}\|x\|_{L_{p_1}}\|=1$. Поэтому норма $\|\,|\bar{x}^*-x_0|^{p_1-2}\cdot(x-x_0)\|=\|\bar{x}^*-x_0\|^{p_1-1}_{L_{p_1}}$. На основании равенства (П.I24) $\|\bar{x}-x_0\|^{p_1-1}=$

$= \|A^*\varphi\|_{L_{\rho_1}}$ или $\|\bar{x}^* - x_0\|_{L_{\rho_1}} = \|A^*\varphi\|_{L_{q_1}}^{q_1-1}$. Аналогично $\|\tilde{x} - x_0\| = \|A^*\varphi\|_{L_{q_1}}^{q_1-1}$) т.е. $\|\tilde{x} - x_0\|_{L_{\rho_1}} = \|\bar{x}^* - x_0\|_{L_{\rho_1}}$.

Так как задача (П.II6), (П.II7) разрешима однозначно, $\tilde{x}$ является решением уравнения (П.II7), то из равенства $\|\tilde{x} - x_0\| = \|\bar{x}^* - x_0\|$ следует совпадение элементов $\tilde{x}$ и $\bar{x}^*$ и справедливость соотношения (П.I22).

Достаточность. Так как уравнение (П.I23) есть градиент функционала (П.I20), приравненное к нулю, то достаточность условия (П.I22) для разрешимости задачи (П.I2I) очевидна.

Теорема П.20 доказана.

Следствие П.I. Если уравнение (П.II7) нормально разрешимо, то задачи (П.II6), (П.II7) и (П.I2I) разрешимы одновременно и их решения удовлетворяют равенствам (П.I22), (П.I23).

Принимая в равенствах (П.I22)-(П.I23) оператор A, совпадающий с единичным, $x_0 \equiv 0$ на основании следствия П.I, результатов Ф.Брауэлера и Е.И.Линькова [70, с.3I4] и свойств функции $y_1 = |x_1|^{\rho-2} x_1$, $1 < \rho < \infty$, нетрудно показать, что справедлива

Теорема П.2I. Градиент функционала $\frac{1}{\rho}\|x\|_{L_\rho}^{\rho}$, $1 < \rho < \infty$, является гомеоморфизмом L_ρ на L_q, обратный к нему оператор совпадает с градиентом функционала $\frac{1}{q}\|\varphi\|_{L_q}^{q}$.

Известно [I44], что в равномерно выпуклых пространствах оператор метрического проектирования на замкнутое выпуклое множество является корректным в смысле Адамара. Поэтому на основании определения П.3, теорем П.20 и П.2I, имеет место

Следствие П.2. Для любого подпространства $K \subset L_\rho$ элементы метрические проекции которых на K совпадают с нулевым элементом, образуют замкнутое множество $F = \{\frac{1}{q}\operatorname{grad}\|\varphi\|_{L_q}^{q} = |\varphi|^{q-2}\varphi, \varphi \in K^{\perp}\}$ и пространства $L_\rho(S)$ разложимо в полупрямую сумму

$$L_p(S) = K \oplus F = K \oplus |\varphi|^{q-2}\varphi, \quad \varphi \in K^{\perp}. \tag{П.I25}$$

Множество K совпадает с совокупностью всех непрерывных линейных функционалов на $L_p(S)$, обращающихся тождественно в нуль на K.

Следствие П.3. Для пространства L_{p_1} и L_{q_2} имеют место представления в виде специальной полупрямой суммы

$$L_{p_1} = N_A \oplus |A^*\varphi|^{q_1-2}A^*\varphi = N_A \oplus F_1, \quad \varphi \in L_{q_2}, \tag{П.I26}$$

$$L_{q_2} = N_{A^*} \oplus |A\bar{x}|^{p_2-2}A\bar{x} = N_{A^*} \oplus F_2, \quad x \in L_{p_1}. \tag{П.I27}$$

Замечание П.II. Для любого $b \in R(A)$ нормальное решение уравнения (П.II7) принадлежит множеству $F_1 = |A^*\varphi|^{q_1-2}A^*\varphi$. При $p_1 = q_2$ равенства (П.I26), (П.I27) являются ортогональными разложениями в прямую сумму для гильбертового пространства $L_2(S)$.

2. Известно [398, I96], что нахождение решения задачи (П.II6), (П.II7) элемента $\bar{x}^*$, является некорректной задачей. Построим регуляризующий алгоритм двойственного метода нахождения элемента $\bar{x}^*$. Для этого проведем такое расширение понятия решения задачи (П.I2I), чтобы она была разрешима одновременно с разрешимостью задачи (П.II6), (П.II7). Пусть φ_0 – произвольный элемент пространства L_{q_2}.

Определение П.3. Задача (П.I2I) разрешима в обобщенном смысле, если существует такая последовательность $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in F_2 + \varphi_0$, что последовательность $\{x_n = |A^*\varphi|^{q_1-2}A^*\varphi + x_0\}$ сходится в норме L_{p_1} к элементу $\bar{x}^*$.

Из определения П.3, теоремы П.2I и разложения (П.I26) следует, что если задача (П.I2I) разрешима в обобщенном смысле, то $\{A^*\varphi_n\}$ сходится в норме пространства L_{q_1}.

Для построения последовательности $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющей определению П.3, рассмотрим следующие параметрические функционалы Тихонова и Лагранжа

$$T^{\alpha_1}[x] = \frac{1}{p_2}\|Ax-b\|^{p_2}_{L_{p_2}} + \frac{\alpha_1}{p_1}\|x-x_0\|^{p_1}_{L_{p_1}} - \alpha_1 \langle x, A^*\varphi\rangle; \quad (\text{П.I28})$$

$$T^{\alpha}_{gb}[\varphi] = \frac{1}{q_1}\|A^*\varphi\|^{q_1}_{L_{q_1}} - \langle b,\varphi\rangle + \langle x_0, A^*\varphi\rangle + \frac{\alpha}{q_2}\|\varphi-\varphi_0\|^{q_2}_{L_{q_2}}; \quad (\text{П.I29})$$

$$L^{\alpha}[x,\varphi] = \frac{1}{p_1}\|x-x_0\|^{p_1}_{L_{p_1}} - \langle Ax-b,\varphi\rangle - \alpha\frac{1}{q_2}\|\varphi-\varphi_0\|^{2}_{L_{q_2}}, \quad (\text{П.I30})$$

где $\alpha_1, \alpha > 0$ – параметры регуляризации.

Функционалы (П.I28)-(П.I30) связаны соответственно с задачами (П.II6), (П.II7), (П.I2I) и (П.II8).

В силу равномерной выпуклости пространств $L_{p_1}, L_{p_2}, L_{q_1}, L_{q_2}$ следует [I96, с.I26], что для любых $\alpha_1, \alpha > 0$ и b существуют:

а) единственные элементы x^{α_1} и φ^{α}, минимизирующие соответственно функционалы Тихонова (П.I28) и (П.I29), которые являются решениями нелинейных уравнений

$$A^*\left(|Ax-b|^{p_2-2}\cdot(Ax-b)\right) + \alpha_1|x-x_0|^{p_1-2}\cdot(x-x_0) = \alpha A^*\varphi_0, \quad (\text{П.I3I})$$

$$A\left(|A^*\varphi|^{q_1-2}\cdot A^*\varphi + x_0\right) + \alpha|\varphi-\varphi_0|^{q_2-2}\cdot(\varphi-\varphi_0) = b; \quad (\text{П.I32})$$

б) единственная седловая точка $(x^{\alpha}, \varphi^{\alpha})$ функционала Лагранжа (П.I30), элементы которой удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$\begin{cases} |x-x_0|^{p_1-2}\cdot(x-x_0) = A^*\varphi, & (\text{П.I33}) \\ Ax + \alpha|\varphi-\varphi_0|^{q_2-2}\cdot(\varphi-\varphi_0) = b. & (\text{П.I34}) \end{cases}$$

Из анализа уравнений (П.I3I)-(П.I34), теоремы П.2I и равенств (П.I24), (П.I28) видно, что при $\alpha_1 = \alpha^{p_2-1}$, $x^{\alpha_1} = x^{\alpha}$, $\varphi^{\alpha} = \bar{\varphi}^{\alpha}$,

$$\varphi^{\alpha} - \varphi_0 = -\frac{1}{\alpha^{p_2-1}}|Ax^{\alpha}-b|^{p_2-2}\cdot(Ax^{\alpha}-b), \quad (\text{П.I35})$$

$$x^{\alpha} - x_0 = |A^*\varphi^{\alpha}|^{q_1-2}\cdot A^*\varphi^{\alpha}. \quad (\text{П.I36})$$

Пусть $U_1 = x_0 + F_1$ и $U_2 = y_0 + F_2$.

Теорема П.22. Если при заданном δ уравнение (П.II7) разрешимо, то при $\alpha_1 \to 0$ последовательность $\{x^{\alpha_1}\}$ сходится к $\bar{x}^*$ в норме L_{p_1} . Задача (П.I2I) разрешима в обобщенном смысле одновременно с разрешимостью задачи (П.II6) и (П.II7).

Доказательство. Пусть уравнение (П.II7) разрешимо. Из равенств (П.I35) и (П.I36) следует, что для любых α_1 , $\alpha > 0$ элемент x^{α_1} и y^{α} принадлежит соответственно замкнутым множествам U_1 и U_2 . Так как замкнутое множество U_1 является множеством единственности для задачи (П.II7), то на основании работы [I96] при $\alpha_1, \alpha \to 0$ имеет место сходимость $\{x^{\alpha_1}\}$ к элементу $\bar{x}^*$ в норме L_{p_1} и разрешимость задачи (П.I2I) в обобщенном смысле.

Теорема П.22 доказана.

Алгоритм двойственного метода нахождения регуляризованного решения задачи (П.I3I), (П.I32) состоит из трех этапов:

I) определения последовательности $\{y^{\alpha_n}\}$ путем решения нелинейного уравнения (П.I32) ($\alpha_n \to 0$);

2) вычисления $\{x^{\alpha_n}\}$ по формуле (П.I36);

3) отбор x^{α_n} по некоторому известному критерию.

Преимущество двойственного метода нахождения приближения элемента $\bar{x}^*$ при решении практических обратных задач геофизики в пространстве $L_p(S)$ по сравнению с другими известными методами [396, I96] заключается в том, что двойственный метод позволяет при помощи декомпозиции исходной задачи на две подзадачи (П.I32) и (П.I36) уменьшить размерность решаемой задачи на единицу. Этим определяется большое практическое удобство двойственного метода при его реализации на ЭВМ.

Замечание П.II. Результаты параграфа 5 остаются в силе для пары рефлексивных локально выпуклых пространств Ефимова-Стечкина

B_1 и B_2 , сопряженные пространства которых B_1^* и B_2^* также локально выпуклы.

§ 6. О связи между двойственными и статистическими алгоритмами интерпретации данных гравиметрических наблюдений

I. Пусть в системе уравнений Эйлера (П.58), (П.59) для функционала (П.25) наблюденная величина b есть сумма полезного сигнала (аномалия) $\bar{b}$ и случайной помехи ℓ . Анализ системы (П.58), (П.59) показывает, что элементы φ^α и x^α также являются случайными функциями. При этом характеристики плотности вероятности $P(\varphi)$ совпадают с соответствующими характеристиками плотности вероятности $P(\ell)$. Следовательно, в двойственных алгоритмах наравне с априорной информацией о решении $\bar{x}$ желательно использование априорной информации о плотности вероятности $\rho(\ell)$ или других характеристиках случайной помехи в наблюденном поле.

Для этого в функционале (П.72) возьмем, например, $\Omega_1(x-x_0) = (B(x-x_0), x-x_0)$ и $\Omega_2(\varphi) = (C\varphi, \varphi)$, т.е.

$$L^\alpha[x,\varphi] = (B(x-x_0), x-x_0) - (Ax-b,\varphi) - \alpha(C\varphi,\varphi), \qquad (\text{П.I37})$$

где B и C - самосопряженные положительно определенные операторы. Для функционала (П.I37) система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} B(x-x_0) = A^*\varphi, & (\text{П.I38}) \\ Ax + \alpha C\varphi = b. & (\text{П.I39}) \end{cases}$$

Подставляя выражение $x = x_0 + B^{-1}A^*\varphi$ в уравнение (П.I39), получим, что

$$\varphi^\alpha = (AB^{-1}A^* + \alpha C)^{-1}(b - Ax_0); \qquad (\text{П.I40})$$

$$x^\alpha = x_0 + B^{-1}A^*(AB^{-1}A^* + \alpha C)^{-1}(b + Ax_0) =$$
$$= (A^*C^{-1}A + \alpha B)^{-1}(A^*C^{-1}b + \alpha Bx_0) \qquad (\text{П.I41})$$

и справедливо операторное равенство

$$B^{-1}A^{*}(AB^{-1}A^{*}+\alpha C)^{-1}=(A^{*}C^{-1}A+\alpha B)^{-1}A^{*}C^{-1}. \qquad (\text{П.I42})$$

В зависимости от выбора вида операторов B и C, фиксированного элемента x_0 и параметра α, получаем различные статистические алгоритмы интерпретации данных геофизических наблюдений.

2. Вопросы интерпретации данных гравиметрии и магнитометрии при помощи статистического подхода даны в работах [II4-II6,367, I20,I55,I56,237,345,448 и др.]. Наиболее полно они разработаны в работах Ф.М.Гольцмана и Т.Б.Калининой [II4-II6].

При постановке обратных задач геофизики в рамках статистического подхода также необходимо с максимальной полнотой формализовать априорные представления о связи геофизического поля с искомыми параметрами модели. Однако, в статистическом подходе, в отличии от детерминистского подхода, наблюденная величина b всегда рассматривается как m -мерный случайный вектор. Поэтому связь между наблюденными данными и геофизической (математической) моделью источников аномального поля записывается в виде

$$Ax+\ell=b, \qquad (\text{П.I43})$$

где $b\in R_m$ - наблюденная величина, $x\in R_n$ - искомый вектор, $A: R_n \to R_m$ - оператор решения прямой задачи гравиметрии, $\ell\in R_m$ - помеха.

Обозначим через $P_0(\ell)$ плотность вероятности помехи ℓ. Очевидно, что компоненты вектора b являются случайными величинами, зависящими от компонент векторов Ax и ℓ. Условная плотность вероятности $P(b/x)$ вектора b при данном векторе с учетом (П.I43) равна

$$P(b/x)=P_0(b-Ax). \qquad (\text{П.I44})$$

С искомым вектором x будем связывать в зависимости от априорных данных плотность вероятности $P_0(x)$.

Теперь задача интерпретации данных гравиметрических наблюдений в статистической теории формулируется следующим образом. Известна условная плотность вероятности $P(b/x)$. Требуется найти статистический алгоритм, позволяющий по наблюденному вектору b производить оценку искомого вектора $\bar{x}$, т.е. $x_T = T(b)$. В детерминистическом подходе x_T это решение задачи.

Прежде чем перейти к решению этой задачи, кратко изложим необходимые в работе основные положения теории статистических решений [II5,87,77]. Вектор $\varepsilon(T) = x_T - \bar{x}$ называется ошибкой оценивания и его можно представить в виде

$$\varepsilon(T) = M[x_T] - \bar{x} + x_T - M[x_T] = \Delta(T,\bar{x}) + \zeta(T), \qquad (\text{П.I45})$$

где $M[\cdot]$ - символ математического ожидания случайного вектора. Вектор $\Delta(T,\bar{x}) = M[x_T] - \bar{x}$ называется смещением оценки и характеризует ошибку метода оценивания. Если смещение равно нулю, то оценка x_T называется несмещенной оценкой. Вектор $\zeta(T) = x_T - M[x_T]$ определяет случайную составляющую ошибки оценивания $\varepsilon(T)$. В качестве числовой характеристики случайного вектора часто используют корреляционную матрицу $B(T) = M[\zeta(T)\,\zeta^*(T)]$. Среднеквадратичная ошибка оценивания равна

$$D(T,\bar{x}) = M[(x_T-\bar{x})(x_T-\bar{x})^*] = \Delta(T,\bar{x})\left[\Delta(T,\bar{x})\right]^T + tr[B(T)], \qquad (\text{П.I46})$$

где $tr[\cdot]$ - след матрицы.

Если при неограниченном увеличении количества наблюдений $D(T,\bar{x})$ стремится к нулю, то оценка x_T называется состоятельной.

В зависимости от вида оператора T получаются различные

оценки. Для задач интерпретации данных гравиметрических наблюдений естественно отдавать предпочтение тем алгоритмам, у которых меньше среднеквадратическая ошибка.

Оценка x_{T_0} называется эффективной в классе K, если для любой оценки x_T из K ошибка $D(T,\bar{x})$ при всех $\bar{x}$ не меньше, чем ошибка x_{T_0}.

Эффективные оценки в классе K_0 несмещенных оценок называются просто эффективными.

Существующие методы построения оценок можно разделить на два класса. К первому относятся методы, которые используют так называемую функцию потерь. Второй класс объединяет методы, использующие известную формулу Байеса и оценки, построенные этими методами (максимум апостериорной плотности вероятности и максимального правдоподобия).

В методе максимума апостериорной плотности вероятности оценка определяется из условия максимума функции $P(x/b)$.

Так как логарит является монотонной функцией, то экстремумы $P(x/b)$ и $\ln P(x/b)$ достигаются при одинаковых значениях x. Если $\ln P(x/b)$ имеет непрерывную первую производную, то для нахождения оценки x_{MAB} можно продифференцировать $\ln P(x/b)$ по x и составить уравнение

$$\left[\ln P(x/b)\right]'_x = 0. \qquad (П.147)$$

Уравнение (П.147) называется уравнением максимальной апостериорной вероятности. С учетом формулы Байеса

$$P(x/b) = \frac{P_0(x)\cdot P(b/x)}{P_0(b)} \qquad (П.148)$$

уравнение (П.147) можно представить в виде, удобном для выделения роли априорной информации

$$\left[\ln P(B/x)\right]'_x + \left[\ln P_0(x)\right]'_x = 0. \qquad (П.149)$$

В тех случаях, когда нет никаких сведений об априорном распределении $P_0(x)$ (что эквивалентно $P_0(x) = const$ или x - неслучайный вектор) математическая статистика использует оценки максимального правдоподобия. Согласно этому методу в качестве x_T выбирается такое значение x, которое с наибольшей вероятностью обуславливает появление именно данного значения B. При этом условная плотность $P(B/x)$, рассматриваемая как функция от x, называется функцией правдоподобия. Оценка максимума функции правдоподобия есть такое значение $x_{МФП}$, при котором $P(B/x)$ максимальна. Уравнение для оценки $x_{МФП}$ имеет вид

$$\left[\ln P(B/x)\right]'_x = 0. \qquad (П.150)$$

Из сравнения (П.149) и (П.150) видно, что оценка $x_{МФП}$ есть предельный случай оценки $x_{МАВ}$, когда отсутствует априорная информация о плотности $P_0(x)$.

Показано [58], что при некоторых не очень ограничительных предложениях оценка по методу максимального правдоподобия состоятельна, асимптотически эффективна. При неограниченном возрастании объема наблюдений распределение оценки $x_{МФП}$ является нормальной со средним значением $\bar{x}$ и корреляционной матрицей, равной I_x^{-1},

где

$$I_x = M\left[\left(\ln P(B/x)\right)'_x \left(\ln P(B/x)\right)'^{*}_x\right] \qquad (П.151)$$

информационная матрица Фишера для плотности вероятности $P(B/x)$ [58].

3. Перейдем к построению оценок искомого вектора $\bar{x}$ решения уравнения (П.148), полагая векторы x и B стастистически независимыми и подчиненными нормальному закону распределения.

Пусть априорное распределение вектора x характеризуется средним значением $m_x = M[x]$ и ковариационной матрицей Bx ($x \sim Norm(m_x, Bx)$), $\ell \sim Norm(0, C_\ell)$.

Так как $P_0(x)$ и $P_0(\ell)$ - нормальные распределения, то распределение $P(b/x)$ также нормально. При этом, согласно (П.143) условное распределение характеризуется $Norm(b, C_\ell)$

$$P_0(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det C_x)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(C_x^{-1}(x-m_x)(x-m_x)\right)\right], \quad (П.152)$$

$$P(b/x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} (\det C_\ell)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(C_\ell^{-1}(b-Ax), (b-Ax)\right)\right]. \quad (П.153)$$

Для рассматриваемого случая уравнение максимальной апостериорной вероятности (П.144) принимает вид

$$A^* C_\ell^{-1}(b-Ax) - B_x^{-1}(x-m_x) = 0. \quad (П.154)$$

Откуда оценка

$$x_{MAB} = \left(B_x^{-1} + A^* C_\ell^{-1} A\right)^{-1}\left(A^* C_\ell^{-1} b + B_x^{-1} m_x\right). \quad (П.155)$$

Сравнение (П.155) и (П.141) показывает, что если в параметрическом модифицированном функционале Легранже (П.137) оператор взять равным B_x^{-1}, $C = C_\ell^{-1}$, $\alpha = 1$ и $x_0 = m_x$, то элемент x^α совпадает с оценкой x_{MAB}. Следовательно, если при конструировании функционала (П.137) использовать перечисленные статистические характеристики элементов x и ℓ, то получаемое решение будет эквивалентно методу максимального правдоподобия.

Оценку максимального правдоподобия найдем из уравнения

$$A^* C_\ell^{-1} A x = A^* C_\ell^{-1} b, \quad (П.156)$$

т.е.

$$x_{M\Phi\Pi} = (A^* C_e^{-1} A)^{-1} A^* C_e^{-1} b. \qquad (\text{П.I57})$$

Для сравнения точности оценок (П.I55) и (П.I57) необходимо найти ковариационные матрицы их ошибок оценивания C_{MAB} и $C_{M\Phi\Pi}$.

Известно [58,77], что для оценки максимальной апостериорной вероятности

$$C_{MAB} = (B_x^{-1} + A^* C_e^{-1} A)^{-1}, \qquad (\text{П.I58})$$

а для оценки максимального правдоподобия

$$C_{M\Phi\Pi} = (A^* C_e^{-1} A)^{-1}. \qquad (\text{П.I59})$$

При сравнении (П.I58) и (П.I59) видно, что ошибки по МАВ в общем случае меньше, чем ошибки МФП. Этого следовало ожидать, так как метод максимального правдоподобия использует существенно меньшую априорную информацию. Поэтому, несмотря на хорошие статистические свойства, применение оценки МФП при решении задач интерпретации данных гравиметрических наблюдений очень ограниченно. Это связано с плохой обусловленностью матрицы A, т.е. некорректности задачи интерпретации, что при отсутствии вероятностных ограничений на x приводит к большим ошибкам оценивания x_T. Вновь подтверждается основное положение теории регуляризации. Без привлечения дополнительной информации никакие статистические алгоритмы не могут увеличить разрешающую способность гравиметрического метода.

4. При решении большинства практических задач априорное распределение вектора x неизвестно. В этом случае правильное конструирование распределения $P_0(x)$ имеет важное значение для построения устойчивого решения методом максимальной апостериорной вероятности.

В подходе работы [407], который наиболее применим при реше-

нии обратных задач, аналогично вариационному принципу А.Н.Тихонова, априорная плотность $P_0(x)$ выбирается таким образом, чтобы исключить из множества возможных решений элементы x, являющиеся негладкими функциями. Для этого рассматривается квадратичная форма (Bx, x), представляющая собой конечно-разностный аналог стабилизатора n-го порядка. В качестве априорной плотности вероятности берут функцию $P_0(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) математическое ожидание $M[(Bx,x)] = B_0$;

2) содержит минимум информации о x.

В теории информации доказывается [II4], что такая функция есть

$$P_0(x,\alpha) = const \cdot \alpha^{\frac{n}{2}} exp\left[-\frac{\alpha}{2}(Bx,x)\right], \qquad (\text{П.I60})$$

где $\alpha = \frac{n}{B_0}$.

Приняв равенство (П.I60) в качестве априорной плотности и предполагая $\ell \sim Norm(0, C_\ell)$, получили уравнение максимума апостериорной вероятности

$$\left(A^* C_\ell^{-1} A + \alpha B\right) x = A^* C_\ell^{-1} b. \qquad (\text{П.I6I})$$

Из уравнения (П.I6I) получим, что оценка

$$x_{NAB} = \left(A^* C_\ell^{-1} A + \alpha B\right)^{-1} A^* C_\ell^{-1} b. \qquad (\text{П.I62})$$

Если величина B_0 неизвестна, то решение зависит от параметра α. Последний также называется параметром регуляризации.

Сравнение (П.I62) и (П.I4I) показывает, что решение x^{α}_{NAB} совпадает с решением по двойственному методу при $C = C_\ell^{-1}$ и $\alpha = \frac{n}{B_0}$. Из равенства (П.I62) видно, что элемент x^{α}, полученный при помощи функционала Лагранжа, минимизирует функционал Тихонова

$$T^{\alpha}[x] = \|Ax - b\|^2_{H_{C_\varepsilon^{-1}}} + \alpha \|x\|^2_{H_B}, \qquad (\text{П.I63})$$

где $\|x\|_{H_B} = (Bx, x)$. В функционале (П.I63) невязка и стабилизатор построены с учетом имеющейся статистической априорной информации о помехе и качественной информации об искомом решении. Эти совпадения подчеркивают "условность" деления методов интерпретации данных гравиметрических наблюдений на детерминированные и статистические. Все зависит от того, какой априорной информацией мы обладаем и как она учитывается в алгоритмах решения обратной задачи.

Выводы

I. Для трехмерных обратных задач геофизики обоснованы: трудоемкость применения прямых регулярных методов; выделение их в качестве самостоятельного математического объекта исследований; необходимость и целесообразность разработки соответствующих методов их решения, использующие специфику геофизических задач.

2. Для задачи (П.3), (П.4), с линейным непрерывным оператором $A: H_1 \to H_2$, при помощи функционала Лагранжа, построена ее двойственная задача. Впервые сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости двойственной задачи, когда задача (П.4) некорректно поставлена по всем трем условиям Адамара. Показано, что из разрешимости задачи (П.3),(П.4) еще не следует разрешимость ее двойственной задачи.

Дано такое обобщение двойственной задачи, которая разрешима одновременно с разрешимостью задачи (П.3),(П.4). Это обобщение приводит к построению расширений оператора A^* и пространства H_2 , т.е. $\widetilde{A}^*$ и H_{AA^*} . При помощи оператора $\widetilde{A}^*$ установлена зависимость между единственным решением $\bar{x}^*$

задачи (П.3),(П.4) и решением обобщенной двойственной задачи $\bar{\varphi}_0^*$.

3. При помощи параметрического модифицированного функционала Лагранжа сконструирована устойчивая, практически реализуемая процедура нахождения элементов $\bar{\varphi}_0^*$ и $\bar{x}^*$. Доказана монотонная и сильная сходимость компонент ее седловой точки $z^\alpha = (x^\alpha, \varphi^\alpha)$ при $\alpha \to 0$ соответственно к $\bar{x}^*$ и $\bar{\varphi}_0^*$. Показано, что элементы x^α и φ^α совпадают с экстремальными элементами некоторых параметрических функционалов Тихонова.

Обнаруженные глубокие связи между параметрическими функциями Тихонова и Лагранжа, позволившие впервые установить справедливость операторных равенств (П.61),(П.62). Эти равенства позволяют методы, связанные с функционалом Лагранжа, называть двойственными по отношению методов, связанных с функционалами Тихонова.

4. Для решения задачи (П.4) можно использовать два эквивалентных алгоритма, основанных на параметрических функционалах Тихонова и Лагранжа. Выбор алгоритма зависит от структуры операторов A и A^*. Исходя из специфики геофизических задач, в частности гравиметрических, структура операторов A и A^* такова, что целесообразно использовать алгоритмы, основанные на параметрическом модифицированном функционале Лагранжа. Так как в процедуре нахождения приближения к $\bar{\varphi}_0^*$ элемент φ^α имеет размерность на единицу меньше, чем $x^\alpha = A^* \varphi^\alpha + x_0$. Этим определяется преимущество двойственного метода при решении трехмерных задач геофизики. Показано, что уменьшение размерности достигается за счет ухудшения устойчивости задачи нахождения φ^α.

5. Операторы равенства (П.61)-(П.64) и другие его аналоги позволяют легко сконструировать двойственные варианты всех известных алгоритмов решения нелинейных обратных задач. Сходимость двойственных алгоритмов является очевидным фактором, так как

следует из сходимости прямых алгоритмов решения нелинейных задач.

Далее теория двойственного метода развита для решения линейных задач с замкнутым неограниченным оператором со всюду плотной областью определения.

6. Для решения ЛОЗГ в классе $L_p(S)$ распределения плотностей теория двойственного метода обобщена на банаховые пространства. При этом возникла необходимость введения понятия разложения пространства $L_p(S)$ в полупрямую сумму подпространства $K \subset L_p(S)$ и замкнутого множества F, т.е. $L_p(S) = K \dot{\oplus} F$. Показано, что для любого подпространства K существует замкнутое множество $F = \{ |\rho|^{q-2} \rho \in L_p(S),\ \rho \in K^{\perp} \}$, для которых справедливо разложение в полупрямую сумму.

При $n = 2$ разложение в полупрямую сумму совпадает с разложением в ортогональную сумму $L_2(S) = K \oplus K^{\perp}$. Далее показано, что множество нормальных решений уравнений $Ax = b$, где $A: L_{p_1} \to L_{q_1}$, совпадает с множеством $\{ |A^* \rho|^{q_1 - 2} A^* \rho,\ \rho \in L_{q_2} \}$ и для L_{p_1} и L_{q_1} имеют место представления в виде специальной полупрямой суммы.

7. Для использования априорной информации о среде и поле в процессе решения задачи в критериальной форме, введен параметрический модифицированный функционал (П.72). Этот функционал позволяет по существу раздельное использование информации о среде и поле; устанавливает связи между статистическими и двойственными регуляризующими алгоритмами.

ГЛАВА III. СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ В КЛАССЕ $L_p(S)$ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТЕЙ

§ I. Краткий исторический обзор

I. Проблема восстановления плотности $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$, распределенной в некоторой области S, по внешнему гравитационному полю V_{zH} впервые была поставлена в 1867 году Д.Стоксом [465]. В работе Д.Стокса в общих чертах сформулирован подход, который фактически представляет общее решение линейной обратной задачи гравиметрии в виде суммы двух решений. Одно из них - частное решение, которым обусловлено заданное поле V_{zH}, а другое - множество решений, создающих нулевое внешнее гравитационное поле. Д,Стоксом также показано, что для простого слоя обратная задача гравиметрии разрешима однозначно [465].

Спустя только 42 года П.Пиццетти в работах [468,469] начал систематическое исследование множества решений, несоздающих внешнего гравитационного поля. В статье [468], опубликованной в 1909 году, П.Пиццетти впервые ввел понятия тела нулевого притяжения, т.е. какого распределения $\sigma_0(\xi,\eta,\zeta)$ в области S, что для внешнего гравитационного поля

$$G\iiint_S \frac{(\zeta-z)\sigma_0(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}} = 0, \quad (x,y,z)\in R_3\setminus S, \qquad (\text{Ш.I})$$

или потенциала

$$V(x,y,z) = G\iiint_S \frac{\sigma_0(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}} = 0. \qquad (\text{Ш.2})$$

В 1910 г. П.Пиццетти опубликовал большую статью [469], в которой в развернутом и частично обобщенном виде приводятся ре-

зультаты работы [468] по изучению явления эквивалентности. В статье 1911 г.Дж.Лауричелла [462] подходит к этой проблеме с иных позиций и значительно углубляет исследования П.Пиццетти.

К сожалению, перечисленные выше важные и интересные работы итальянских математиков и геодезистов начала нашего века остались почти незамеченными последующими специалистами, изучавшими тела нулевого внешнего потенциала проблему единственности решения линейной обратной задачи теории потенциала в целом. Это особенно удивительно потому, что в очень сжатой форме основные идеи по проблеме повторяются П.Пиццетти в его известной монографии [294], опубликованной в Пизе в 1913 г. В итоге сложившейся ситуации результаты П.Пиццетти и Дж.Лауричеллы были независимо найдены или обобщены другими геофизиками и математиками, но значительно позже.

Выделим множества функций, заданных на области S. Пусть M – множество функций, которые конечны и непрерывны вместе со своими первыми производными и имеют конечный лапласиан; L – множество функций, для которых потенциал V является конечным и непрерывным вместе со своими первыми производными во всем пространстве R_3 $(M \subset L)$. Через n будем обозначать внешнюю нормаль поверхности ∂S.

Подавляющее большинство положений, излагаемых ниже, является следствием классической формулы Грина

$$\iiint_S (U\Delta V - V\Delta U)\,dS = \iint_{\partial S} \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dQ, \quad U, V \in M, \qquad (Ш.3)$$

или ее обобщения для функций из пространства $W_p^{2}(S)$, $2 \neq 2$.

2. Пусть в формуле (Ш.3) функция $U = \frac{1}{2}$, где $2 = \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right]^{1/2}$. Когда точка $(x,y,z) \in R_3$ является внешней по отношению к области S, то в пределах S функция $U = \frac{1}{2}$ является гармонической, т.е. $\Delta U = 0$. Следова-

тельно, на основании (Ш.3) имеем

$$\iiint_S \frac{\Delta V}{r}\,dS = \iint_{\partial S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dQ. \qquad (Ш.4)$$

Известно [294,146,332], что если $(x,y,z)\in R_3$ является внутренней точкой области S, то на основании (Ш.3) получаем

$$\iiint_S \frac{\Delta V}{r}\,dS = -4\pi V(x,y,z) + \iint_{\partial S}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dQ. \qquad (Ш.5)$$

Введем условия

$$V\big|_{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_{\partial S} = 0 \qquad (Ш.6)$$

и обозначение

$$\sigma_0(\xi,\eta,\zeta) = \Delta V, \quad (\xi,\eta,\zeta)\in S. \qquad (Ш.7)$$

На основании равенств (Ш.4), (Ш.5), с учетом условий (Ш.6) и (Ш.7), устанавливается

Теорема Ш.I (П.Пиццетти [468,469]). Если функция $V(\xi,\eta,\zeta)$, ее первые и вторые производные есть непрерывные конечные функции в объеме S с гладкой поверхностью ∂S, функция $V(\xi,\eta,\zeta)$ и ее производная по нормали обращаются в нуль на ∂S, то тело, занимающее объем S с плотностью (Ш.7), имеет нулевой потенциал притяжения на внешнюю точку и потенциал, равный $-4\pi G\cdot V(x,y,z)$ на внутреннюю точку.

Доказательство теоремы Ш.I элементарно: подставляя в соотношения (Ш.4) и (Ш.5) условия (Ш.6) и (Ш.7), немедленно приходим для внешней и внутренней точек $(x,y,z)\in R_3$ соответственно к соотношению (Ш.2), т.к. в данном случае $\sigma = \sigma_0$, и к выражению $\iiint_S \frac{\sigma(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,dS = -4\pi V(x,y,z)$.

Замечание Ш.I. Теорема Ш.I остается в силе, если $V\in M$.

Следовательно, изучение тел с нулевым внешним потенциалом, занимающим объем S, можно проводить при помощи функций $V\in M$,

удовлетворяющим условиям (Ш.6).

3. Пусть $S(\xi,\eta,\zeta)=0$ - уравнение поверхности ∂S. Построим функцию

$$V(\xi,\eta,\zeta)=S^2(\xi,\eta,\zeta)\cdot\varphi(\xi,\eta,\zeta), \qquad (Ш.8)$$

где $\varphi\in M$. Очевидно, что построенная функция V отвечает условиям (Ш.6) теоремы Ш.I. Таким образом, меняя φ, можно построить для объема S с поверхностью ∂S бесконечное множество плотностей $\sigma_0=\Delta V$, создающих нулевой внешний потенциал.

В работе [469] приводится общий вид σ_0 для эллипсоида.

В качестве примера получим общий вид плотности σ_0 для шара. Уравнение сферы с радиусом R имеет вид:

$$S(\xi,\eta,\zeta)=\xi^2+\eta^2+\zeta^2-R^2=r^2-R^2=0, \qquad (Ш.9)$$

где $r^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$. Вычисления по формуле (Ш.7) с учетом выражения (Ш.8), т.е. по соотношению

$$\sigma_0(\xi,\eta,\zeta)=\Delta V(\xi,\eta,\zeta)=\Delta\left[S^2(\xi,\eta,\zeta)\cdot\varphi(\xi,\eta,\zeta)\right], \qquad (Ш.10)$$

где принимается во внимание уравнение (Ш.9), дают

$$\sigma_0(\xi,\eta,\zeta)=4\varphi(5r^2-3R^2)+8S\left(\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)+S^2\Delta\varphi. \qquad (Ш.11)$$

Здесь, как и часто далее, зависимость функций от переменных (ξ,η,ζ) для простоты записи не показана.

Аналогично, на основании (Ш.10) запишем выражение плотности для бесконечного кругового цилиндра с нулевым внешним потенциалом

$$\sigma_0(\xi,\zeta)=8\varphi(2r^2-R^2)+8S\left(\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)+S^2\Delta\varphi, \qquad (Ш.12)$$

где R - радиус окружности и ее уравнение

$$S(\xi,\zeta)=\xi^2+\zeta^2-R^2=r^2-R^2=0. \qquad (Ш.13)$$

Конструкция П.Пиццетти (Ш.8) для построения в области S

плотностей, имеющих нулевой внешний потенциал, переоткрыта В.Г.Чередниченко [443].

Если в равенстве (Ш.I2) принять $R = I$, а также последовательно взять $\varphi(\xi,\zeta) = -\frac{1}{8}$, $\varphi(\xi,\zeta) = -\frac{\xi}{8}$ и $\varphi(\xi,\zeta) = -\frac{1}{8}\xi\zeta$, то соответственно получим плотности

$$\sigma_0(\xi,\zeta) = 1 - 2(\xi^2+\zeta^2), \quad \sigma_0(\xi,\zeta) = \xi\left[2 - 3(\xi^2+\zeta^2)\right], \quad (Ш.I4)$$

$$\sigma_0(\xi,\zeta) = \xi\zeta\left[3 - 4(\xi^2+\zeta^2)\right],$$

которые были выписаны В.Г.Чередниченко в результате иных теоретических соображений [442].

4. Перейдем к изложению важнейших результатов фундаментальной работы Дж.Лауричеллы [462]. Предварительно заметим, что в теоремах настоящего пункта все условия, накладываемые на область S, поверхность ∂S и плотность $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$, соответствуют работе [462]. Некоторые изменения в доказательствах теорем сделаны для удобства изложения.

Задачу определения степени неоднозначности масс в области S, создающих заданный внешний потенциал V, Дж.Лауричелла сводит к построению интегралов (операторов) от неизвестной плотности σ, которые полностью определяются заданным внешним потенциалом V.

Пусть поверхность ∂S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, т.е. ∂S гладкая; $V(x,y,z)$ - потенциальная функция, определяемая по формуле (Ш.2); Γ_2 - бигармоническая функция в S, т.е. функция, удовлетворяющая бигармоническому уравнению $\Delta^2\Gamma_2 = 0$.

Если дополнительно поверхность ∂S такова, что для области S существует функция Грина второго порядка первого рода $G_2 = z - \Gamma_2$, которая на ∂S удовлетворяет условиям $(\Gamma_2 - z)|_{\partial S} = \frac{\partial}{\partial n}(\Gamma_2 - z)\Big|_{\partial S} = 0$, то в пункте 2 работы [462] фактически

установлена

Теорема Ш.2 (Дж.Лауричелла [462]). Пусть заданы на ∂S значения потенциальной функции V и ее нормальной производной $\frac{\partial V}{\partial n}$, а также произвольная функция $\sigma \in M$. Тогда, независимо от значений функций $\Delta\sigma$ в области S, функция

$$V_1(x,y,z) = 4\pi G \iiint_S G_2 \Delta\sigma \, dS + \iint_{\partial S} \left(V \frac{\partial \Delta G_2}{\partial n} - \Delta G_2 \frac{\partial V}{\partial n} \right) dQ, \quad (x,y,z) \in S \qquad (Ш.15)$$

является внутренним потенциалом массы с плотностью $\bar{\sigma} = -\frac{\Delta V_1}{4\pi G}$. Внешний потенциал притяжения этой массы совпадает с $V(x,y,z)$.

Доказательство. В силу условий, наложенных на S и ∂S, краевая задача

$$\Delta^2 V_1 = -4\pi G \Delta\sigma \qquad (Ш.16)$$

при граничных условиях

$$V_1\big|_{\partial S} = V, \quad \frac{\partial V_1}{\partial n}\Big|_{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial n} \qquad (Ш.17)$$

имеет единственное решение, которое при помощи функции Грина G_2 представимо в виде равенства (Ш.15) (Т.Боджио, 1905 г. [462,465]).

Учитывая, что $V_1 \in M$, а также равенство (Ш.5) и условия (Ш.17), для $V_1(x,y,z)$ запишем другое соотношение

$$V_1(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_S \frac{\Delta V_1}{2} dS + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial S} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}\right) \right] dQ, \quad (x,y,z) \in S. \qquad (Ш.18)$$

В силу потенциальности функций $\frac{1}{2}$ и V имеет место равенство [146, с.105].

$$\iint_S \left[\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}\right) \right] dQ = 0, \quad (x,y,z) \in S.$$

Обозначив $\bar{\sigma} = -\frac{\Delta V_1}{4\pi G}$, получим

$$V_1(x,y,z) = G \iiint_S \frac{\bar{\sigma}}{2} dS. \qquad (Ш.19)$$

Следовательно, на основании равенств (Ш.I5) и (Ш.I9) имеем, что функция $V_1(x,y,z)$ является внутренним потенциалом для плотности $\bar{\sigma} = -\frac{\Delta V_1}{4\pi G}$ независимо от значений $\Delta\sigma$ в области S. Последнее утверждение теоремы следует из равенства (Ш.I6).

Теорема Ш.2 доказана.

Если на поверхности ∂S выполняются условия (Ш.6), то справедливо

Следствие Ш.I. Для любой плотности $\sigma \in M$ функция

$$V_1(x,y,z) = 4\pi G \iiint_S G_2 \Delta\sigma \, dS, \quad (x,y,z) \in S, \tag{Ш.20}$$

является внутренним потенциалом массы с плотностью $\bar{\sigma} = -\frac{\Delta V_1}{4\pi G}$. Эта же масса создает нулевой внешний потенциал притяжения.

Пусть M_1 множество тех элементов из M, которые имеют одинаковый фиксированный внешний потенциал притяжения $V(x,y,z)$. На основании теоремы Ш.2 лапласианы от элементов, принадлежащих множеству M_1, различны.

В пунктах 4–6 работы [462] установлена

Теорема Ш.3*. (Дж.Лауричелла [462]). Для того, чтобы при произвольных $\sigma \in M_1$ и $U \in M$ имело место равенство

$$G \iiint_S \sigma \cdot U \, dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial S} \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) dQ, \tag{Ш.2I}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция U была гармонической в области S.

Необходимость. Пусть для произвольных $\sigma \in M_1$ и $U \in M$ справедливо равенство (Ш.2I) и

---

* В результате опечатки в статье А.Марусси [465] указывается, что Дж.Лауричелла опубликовал этот результат в I9I2 г. Заодно отметим, что А.Марусси [465] относит публикацию конструкции П.Пиццетти (Ш.8) к I9I0 г., хотя впервые она приведена в работе I909 г. [468].

$$W(x,y,z) = G\iiint_S \frac{u}{r}\,dS, \quad (x,y,z) \in R_3. \qquad (\text{Ш}.22)$$

Для потенциальной функции V внутри S выполняется равенство $\Delta V = -4\pi G\sigma(\xi,\eta,\zeta)$. Учитывая это, а также принимая во внимание соотношения (Ш.22), (Ш.3) и включение $M \subset L$, получим цепочку равенств

$$(4\pi G)^2 \iiint_S \sigma u\,dS = \iiint_S \Delta V \Delta W\,dS = \iiint_S W\Delta^2 V\,dS +$$

$$+ \iint_{\partial S}\left(\Delta V\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial V}{\partial n}\right)dQ = -4\pi G\iiint_S W\Delta\sigma\,dS +$$

$$+ \iint_{\partial S}\left(\Delta V\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right)dQ,$$

т.е.

$$(4\pi G)^2 \iiint_S \sigma u\,dS = -4\pi G\iiint_S W\Delta\sigma\,dS + \qquad (\text{Ш}.23)$$

$$+ \iint_{\partial S}\left(\Delta V\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right)dQ.$$

Определим функцию W_1 как решение краевой задачи

$$\Delta^2 W_1 = 0 \qquad (\text{Ш}.24)$$

при условиях

$$W_1\Big|_{\partial S} = W, \quad \frac{\partial W_1}{\partial n}\Big|_{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial n}. \qquad (\text{Ш}.25)$$

Применим последовательно формулу (Ш.3) к правой и левой частям равенства

$$\iiint_S \Delta W_1 \Delta V\,dS = \iiint_S \Delta V \Delta W_1$$

В итоге получим

$$\iiint_S \left(V\Delta^2 W_1 - W_1\Delta^2 V\right)dS =$$

$$= \iint_{\partial S}\left(\Delta V\frac{\partial W_1}{\partial n} - W_1\frac{\partial \Delta V}{\partial n} + V\frac{\partial \Delta W_1}{\partial n} - \Delta W_1\frac{\partial V}{\partial n}\right)dQ. \qquad (\text{Ш}.26)$$

Отсюда, учитывая соотношения (Ш.24) и (Ш.25), имеем равенство

$$0 = \iiint_S W_1 \Delta^2 V \, dS + \iint_{\partial S} \left(\Delta V \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial \Delta V}{\partial n} + V \frac{\partial \Delta W_1}{\partial n} - \Delta W_1 \frac{\partial V}{\partial n} \right) dQ$$

или

$$0 = -4\pi G \iiint_S W_1 \Delta \sigma \, dS + \iint_{\partial S} \left(\Delta V \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial \Delta V}{\partial n} + V \frac{\partial \Delta W_1}{\partial n} - \Delta W_1 \frac{\partial V}{\partial n} \right) dQ. \qquad (Ш.27)$$

Вычтя из равенства (Ш.23) соотношение (Ш.27) и разделив полученное равенство на $4\pi G$, получим

$$4\pi G \iiint_S \sigma \cdot U \, dS = \iiint_S (W_1 - W) \Delta \sigma \, dS - \frac{1}{4\pi G} \iint_{\partial S} \left(V \frac{\partial \Delta W_1}{\partial n} - \Delta W_1 \frac{\partial V}{\partial n} \right) dQ. \qquad (Ш.28)$$

Равенство (Ш.28) совпадает с равенством (Ш.2I) при произвольном $\sigma \in M_1$ тогда и только тогда, когда потенциал функции U, т.е. функция W, совпадает с функцией W_1 в области S. На основании соотношений (Ш.22) и (Ш.24) имеем

$$\Delta^2 W = -4\pi G \Delta U = 0$$

т.е. функция U является гармонической в области S.

<u>Достаточность</u>. Если функция $U \in M$ гармоническая в области S, $\sigma \in M_1$ и V_1 является потенциалом плотности σ, то на основании формулы Грина (Ш.3) справедливо равенство

$$\iiint_S \Delta V_1 \cdot U \, dS = \iint_{\partial S} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dQ. \qquad (Ш.29)$$

Так как $\Delta V_1 = -4\pi G \sigma$, то из равенства (Ш.29) получим соотношение (Ш.2I).

Теорема Ш.3 полностью доказана.

Если на поверхности ∂S функция V удовлетворяет условиям (Ш.6), т.е. множество M_1 совпадает с плотностями в S, которые не создают внешнее поле, то на основании теоремы Ш.3 формулируется

Следствие Ш.2. Для ортогональности произвольной функции $U \in M$ к элементу $\sigma_0 \in M_1$, т.е.

$$\iint_S \sigma_0 U \, dS = 0, \qquad (Ш.30)$$

необходимо и достаточно, чтобы функция U была гармонической в области S.

П.С.Новиков [244,332,с.148] при доказательстве своей знаменитой теоремы единственности установил такой более общий результат.

Следствие Ш.3. Плотность $\sigma_0 \in L$ тела нулевого внешнего потенциала ортогональна внутри тела к любой гармонической функции $U \in M$.

Отметим, что при доказательстве необходимости теоремы Ш.3 для области S с достаточно гладкой границей ∂S фактически установлен еще один важный результат, который намного позже и независимо получили В.Н.Страхов [362] и В.Г.Чередниченко [443]. Сформулируем его как

Предложение Ш.1. Решение W_1 бигармонической краевой задачи (Ш.24), (Ш.25) является внутренним потенциалом гармонического распределения масс в S, создающих заданный внешний потенциал притяжения V.

Замечание Ш.2. В работе Дж.Лауричеллы [462] предложение Ш.1 и следствия Ш.2 и Ш.3 не формулируются. По всей видимости, понятие ортогональности к 1911 г. еще не было взято на вооружение

всеми математиками.

В работе [462] необходимость и достаточность теоремы Ш.3 доказываются как самостоятельные теоремы. Так как теорема Ш.3 имеет место при более слабых ограничениях на σ и поверхность ∂S, а также в силу чрезвычайной важности соотношения (Ш.2I) для гравиметрических задач, дадим расширенную формулировку теоремы Дж.Лауричеллы [462], которая обобщает теорему Ш.3. А именно справедлива

Теорема Ш.4. Интеграл по объему S с кусочно-гладкой поверхностью ∂S от произведения плотности $\sigma(\xi,\eta,\zeta)\in L$ на произвольную гармоническую функцию $U(\xi,\eta,\zeta)\in M$ полностью определяется внешним потенциалом $V(x,y,z)$, обусловленным массой, распределенной в области S, и выполняется соотношение (Ш.2I).

Теорема Ш.4 в формулировке работы [462] цитируется П.Пиццетти в книге [294,с.33].

Интеграл левой части равенства (Ш.2I) в современной литературе по разведочной гравиметрии называют гармоническим моментом масс, если U - гармонический полином, степень которого определяет порядок момента. В литературе по геодезической гравиметрии интегралы такого вида обычно называют стоксовыми постоянными [I46,с.I59].

5. Теорема Ш.4 имеет глубокие следствия. Коротко остановимся на некоторых из них.

Следствие Ш.4. Теорема Ш.I является частным случаем теоремы Ш.4.

Действительно, при $U=\frac{1}{r}$ и $V=\frac{\partial V}{\partial n}=0$ на ∂S соотношение (Ш.2I) немедленно переходит в равенство (Ш.2).

Следствие Ш.5 (Дж.Лауричелла [462]). Если для некоторого тела известен его внешний потенциал V, то этим определены:

а) общая масса тела: достаточно в (Ш.21) взять $U = 1$;

б) центр массы тела: достаточно в (Ш.21) последовательно взять $U = \xi$, $U = \eta$, $U = \zeta$;

в) основные оси инерции: достаточно в (Ш.21) последовательно взять $U = \xi\eta$, $U = \eta\zeta$; $U = \xi\zeta$.

г) разности между основными моментами инерции: достаточно в (Ш.21) последовательно взять $U = \xi^2 - \eta^2$, $U = \eta^2 - \zeta^2$, $U = \zeta^2 - \xi^2$.

Отметим, что пункт а) дает знаменитую формулу Гаусса [146, с.101]:

$$\iint_S \frac{\partial V}{\partial n} dQ = -4\pi G \cdot M, \qquad (Ш.31)$$

где M - масса тела объема S.

Следствие Ш.6 (П.Пиццетти [468,469]). Для тела нулевого внешнего потенциала равны нулю: общая масса, ее центр, основные оси инерции, разности между основными моментами инерции.

Все это очевидно на основании формулы (Ш.30), если в ней для U последовательно принять те же значения, которые приняты в следствии Ш.5.

П.Пиццетти получил результат следствия Ш.6 достаточно громоздким способом [468,469].

Следствие Ш.6 легко обобщается, что дает

Следствие Ш.7. Для тела нулевого внешнего потенциала все гармонические моменты равны нулю.

Следствие Ш.8. Если тела эквивалентны в отношении внешнего потенциала, то все их гармонические моменты равны между собой.

Это вытекает из следствия Ш.7, если в (Ш.30) подставить $\sigma_0 = \sigma' - \sigma$.

Утверждение следствия Ш.8, но в рамках следствия Ш.6, содержится в работах П.Пиццетти [468,469].

Формула (Ш.2I) послужила предметом глубоких исследований Г.А.Гамбурцева [97], А.А.Заморева [I37] и В.К.Иванова [I43], т.е. основой их исследований также является теорема Ш.4 Дж.Лауричеллы. Фундаментальное значение работ Г.А.Гамбурцева [97], А.А.Заморева [I37] и В.К.Иванова [I43] заключается в том, что они на основании равенства (Ш.2I) получили соотношения, непосредственно применимые в разведочной гравиметрии, т.е. когда исходные гравитационные поля заданы только на плоскости наблюдения, а не на замкнутой поверхности.

6. Коротко остановимся на частном, но важном случае. Пусть задан шар радиуса R с радиально распределенной плотностью $\sigma(r)$, где r - текущая точка радиуса шара. Начало сферических координат разместим в его центре.

Теорема Ш.5. (П.Пиццетти [468,469]). Если выполняется условие

$$\int_0^R \sigma(r)\, r^2 dr = 0, \qquad (Ш.32)$$

то общая масса шара равна нулю и соответственно равен нулю его внешний потенциал притяжения.

Теорема Ш.5 позволяет сформулировать для двумерного цилиндра радиуса R с радиально распределенной плотностью

Следствие Ш.9. Если выполняется условие

$$\int_0^R \sigma(r)\, r dr = 0, \qquad (Ш.33)$$

то общая масса двумерного цилиндра равна нулю и соответственно равен нулю его внешний потенциал притяжения.

7. Вслед за публикациями П.Пиццетти [468,469] и Дж.Лауричеллы [462] начались исследования по построению эквивалентных тел с распределением масс, не замещающих полностью объем S,

т.е. минуя проблему построения тел нулевого внешнего потенциала. В этой связи упомянем такой результат.

Введем обозначения $\Delta S_1 = \left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right)^2$; $S(\xi,\eta,\zeta) = 0$ - уравнение границы ∂S; $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ - та же функция, что и в равенстве (Ш.8). Справедлива

Теорема Ш.6 (К.Минео [466]). Масса, распределенная в объеме S с плотностью $\Delta(S\cdot\varphi)$, порождает тот же внешний потенциал, что и простой слой на контуре ∂S с плотностью $\varphi\sqrt{\Delta S_1}$.

Доказательство. По аналогии с (Ш.8) построим функцию $V(\xi,\eta,\zeta) = S(\xi,\eta,\zeta)\,\varphi(\xi,\eta,\zeta)$, где $S(\xi,\eta,\zeta)$ и $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ - дифференцируемые и конечные вместе с их первыми и вторыми производными функции. Тогда при выбранном V и $U = \frac{1}{2}$, причем точка (x,y,z) - внешняя по отношению к S, на основании формулы (Ш.3) имеем

$$\iiint_S \frac{\Delta(S\cdot\varphi)}{2}\,dS = \iint_{\partial S} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}(S\cdot\varphi)\,dQ = \iint_{\partial S} \frac{1}{2}\varphi\frac{\partial S}{\partial n}\,dQ; \qquad (Ш.34)$$

так как $V(\xi,\eta,\zeta) = S(\xi,\eta,\zeta) = 0$ на поверхности ∂S.

Остается вспомнить [146, с.21], что $\frac{\partial S}{\partial n} = \sqrt{\Delta S_1}$.

Теорема Ш.6 доказана.

С другими результатами по построению тел с заданным внешним потенциалом в рамках классической теории можно ознакомиться в работах [146, 294, 443, 332].

§ 2. Современное состояние теории

I. В последние годы активно развивается теория общего решения обратной линейной задачи гравиметрии в функциональных пространствах [78, 160-162, 204-210, 256, 259, 264, 265, 279, 362-365, 442-444, 471, 475]. Эта теория естественным образом включает в себя

построение тел с нулевым внешним гравитационным потенциалом. Основные результаты работ Н.Вэка [475], А.Л.Великовича и Э.Б.Зельдовича [78], А.И.Кобрунова [160,162], В.Н.Страхова [362-365], В.Г.Чередниченко [442-444], Ф.Сансо [471], А.С.Маргулиса [206-210], С.М.Оганесяна [256,259,264-266,277,278], В.И.Старостенко [277,278] по решению обратной задачи гравиметрии в пространстве $L_2(S)$ почти идентичны и, как правило, получены независимо. Отличия связаны с принципами подхода к рассматриваемой задаче и с условиями, накладываемыми на дифференциальные свойства границы ∂S ограниченного открытого множества S. Эти отличия на характер границы ∂S имеют принципиальное значение, так как требуют привлечения для доказательства одинаковых фактов различных по сложности методов и понятий теории функций и функционального анализа.

Многие из результатов работ [78,160-162,204-210,256,259, 264,265,279,362-365,442-444,471,475] являются прямым обобщением теорем П.Пиццетти и Дж.Лауричеллы для функций, принадлежащих пространствам $L_2(S)$ или $L_p(S)$, $1<p<\infty$, $S\in R_n$, $n\geq 2$

Пусть граница ∂S множества S удовлетворяет условиям $\partial S=\overline{\partial S}$ и $mes\,\partial S=0$ (n - мерная лебегова мера), (Ш.35) распределение плотности σ в множестве S принадлежит пространству $L_p(S)$. Потенциал плотности $\sigma\in L_p(S)$ вычисляется по формуле

$$V_p(x)=V_p\sigma=G_n\int_S \gamma(x-y)\,\sigma(y)\,dy,\quad x\in R_n,$$

где

$$G_n=\begin{cases}(n-2)\,\omega_n\,G, & n\geq 3,\\ 4\pi G, & n=2;\end{cases}$$

$\omega_n=\dfrac{2\pi^{(n/2)}}{\Gamma(n/2)}$ - площадь поверхности единичной сферы в R_n;

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ - есть гамма функция Эйлера; $\mathcal{J}(x)$ - фундаментальное решение уравнения Лапласа, равное

$$\mathcal{J}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\,\omega_n\,|x|_0^{n-2}}, & n \geq 3; \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x|_0, & n = 2; \end{cases} \qquad |x|_0 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Пусть $S_1 = R_n \setminus \bar{S}$; операторы V_{pe} и V_{pi}, соответственно внешний и внутренний потенциалы плотности $\sigma \in L_p(S)$, т.е. $V_{pe}\sigma = V_p\sigma\big|_{x \in S_1}$ и $V_{pi} = V_p\sigma\big|_{x \in S}$; $N(S,p) = \{\sigma \in L_p(S): V_{pe}\sigma = 0\}$ - ядро оператора V_{pe}; $H(S,p) = \{G \in L_p(S): \Delta G(x) = 0, x \in S\}$ - подпространство гармонических функций в $L_p(S)$; $S_j, j = \overline{1,m}$, - ограниченные компоненты связности множества S_1.

Обозначим через $\tilde{f}$ продолжение функции f, определенного в множестве S, на все пространство R_n вида

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S; \\ 0, & x \in R_n \setminus S. \end{cases}$$

В этих обозначениях [66,151] $\dot{W}_p^2(S) = \{f \in W_p^2(S): \tilde{f} \in W_p^2(R_n)\}$ - множество функций из пространства $W_p^2(S)$, продолженные нулем с сохранением класса.

Современные методы исследования структуры общего решения линейной обратной задачи гравиметрии основаны на следующих результатах [294,327,160,78]:

I/ для области значения оператора Лапласа, определенного на множестве $C_0^\infty(S)$, справедливо включение

$$\Delta C_0^\infty(S) \subset N(S,p); \qquad (\text{Ш}.36)$$

2/ имеет место равенство

$$\left[\Delta C_0^\infty(S)\right]^\perp = H(S,q),\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad (Ш.37)$$

где $\left[\Delta C_0^\infty(S)\right]^\perp$ - совокупность всех непрерывных линейных функционалов на S, обобщающихся тождественно в нуль на $\Delta C_0^\infty(S)$;

3/ для ортогонального дополнения множества $N(S,p)$ справедливо включение

$$N(S,p)^\perp \subset H(S,q). \qquad (Ш.38)$$

Соотношения (Ш.36), (Ш.38) определяют два подхода к построению общего решения линейной обратной задачи гравиметрии:

I/ устанавливается справедливость равенства

$$N(S,p) = \overline{\Delta C_0^\infty(S)} = \Delta \mathring{W}_p^2(S), \qquad (Ш.39)$$

где $\overline{\Delta C_0^\infty(S)}$ - замыкание области значения оператора Лапласа в норме пространства $L_p(S)$, а потом на основании (Ш.37) доказывается равенство

$$N(S,p)^\perp = H(S,q); \qquad (Ш.40)$$

2/ обратный, сначала устанавливается справедливость равенства (Ш.40), а потом - (Ш.39).

Представителями первого подхода являются Н.Вэк [475], В.Н. Страхов [362-365], В.Г.Чередниченко [442-444] и А.С.Маргулис [206-210], а второго подхода - А.И.Кобрунов [160,162], Ф.Сансо [471], С.М.Оганесян [256,259,264-266,277,278] и В.И.Старостенко [277,278].

Остановимся на некоторых из этих результатов. Наиболее просто равенства (Ш.39) и (Ш.40) доказываются для случая $p = 2$, которому посвящены основные работы. Случай $1 \le p < \infty$ изучался в работах А.И.Кобрунова [162], А.С.Маргулиса [207-210] и С.М.Ога-

несяна [264-266].

Изложение начнем с известных работ В.Н.Страхова [362,365]. Используемый в них способ доказательства обладает тем несомненным достоинством, что доступен широкому кругу геофизиков.

Пусть область S имеет границу $\partial S \in C^2$; $G(x)$ - потенциал Грина для плотности $\sigma(x) \in L_2(x)$, т.е. $G(x)$ - решение однородной краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta G(x) = -G_n \sigma(x), \quad x \in S, \tag{Ш.41}$$

при

$$G(x)\Big|_{\partial S} = 0. \tag{Ш.42}$$

Применяя формулу Грина (Ш.3) для функций G и V, принадлежащих пространству $W_2^2(S)$ [219,327,382], В.Н.Страхов получил следующее важное выражение для вычисления внешнего потенциала от плотности σ:

$$V(x) = -\iint_{\partial S} \frac{\partial G(y)}{\partial n} \cdot \frac{1}{z}\, dQ, \quad x \in S_1. \tag{Ш.43}$$

Из равенства (Ш.43) непосредственно следует

Лемма Ш.I (В.Н.Страхов [362,375]). Для того, чтобы масса с плотностью $\sigma_0 \in L_2(S)$ не создавала внешнее поле, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{\partial S} = 0. \tag{Ш.44}$$

Из леммы Ш.I легко следует

Лемма Ш.2. Если гармоническая плотность $\sigma \in L_2(S)$ не создает внешнее поле, то она тождественно равна нулю.

Доказательство. Пусть гармоническая плотность σ не создает внешнее поле, т.е. $\sigma \in N(S,2)$. Применив оператор Лапласа к обоим частям равенства (Ш.4I) и учитывая условия (Ш.42), (Ш.44), получим [219,382], что потенциал Грина $G(x) \equiv 0$. Из равенства

(Ш.41) следует, что гармоническая плотность σ также тождественно равна нулю.

Лемма Ш.2 доказана.

Замечание Ш.3. Лемма Ш.2 доказана в работе Ф.Сансо [471] для жордановой области S, удовлетворяющей условию конуса, и в работах С.М.Оганесяна [256,279] для области S с гладкой границей.

Отметим, что в работе [68] при помощи равенств (Ш.41) и (Ш.43) предложен новый способ решения прямой задачи гравиметрии и магнитометрии.

Так как задача (Ш.41), (Ш.42) имеет единственное решение [382], то для масс с плотностью $\sigma_0 \in N(S,2)$ потенциал Грина совпадает с внутренним потенциалом $V(x)$. Известно [327,207], что $V(x) \in W_2^2(x)$. Учитывая это, а также лемму Ш.1 и условия (Ш.42), (Ш.44), можно показать [382,с.29], что

$$G(x) = V(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(S). \qquad (Ш.45)$$

Используя соотношение (Ш.45), лемме Ш.1 можно дать следующую эквивалентную формулировку, которая является обобщением теоремы Ш.1, а именно справедлива

Теорема Ш.7. Подпространство плотностей, которые не создают внешнее поле, задается при помощи равенства (Ш.39), где $\rho = 2$.

Теорема Ш.7 установлена в работе Н.Вэка [475] для жордановой области S, удовлетворяющей условию конуса [304].

В работе А.С.Маргулиса [207] показано, что для ограниченного множества S, удовлетворяющего условиям (Ш.35), справедливо равенство

$$N(S,\rho) = \Delta \overset{\circ}{W}{}_\rho^2(S). \qquad (Ш.46)$$

Поэтому справедливость соотношения (Ш.39) эквивалентна равенству $\overset{\circ}{W}{}_p^2(S) = \dot{W}_p^2(S)$.

В краевых задачах математической физики важное значение имеет более общее равенство

$$\overset{\circ}{W}{}_p^r(S) = \dot{W}_p^r(S), \quad r = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (Ш.47)$$

Равенство (Ш.47) для области S с регулярной границей ∂S установлено С.Л.Соболевым [326,327] и С.М.Никольским [238,239]. В работе Г.Г.Казаряна [151] равенство (Ш.47) доказано для области с границей $\partial S \in C$. При $p > n$ равенство (Ш.47) доказано В.И.Буренковым [66] для неограниченного S с границей $\partial S = \partial\bar{S}$.

Используя результаты Г.Г.Казаряна [151] и В.И.Буренкова [66] в работе А.С.Маргулиса [207], установлено равенство (Ш.39) для множества S, удовлетворяющего условиям (Ш.35), при дополнительных предположениях $\partial S \in C$ или $p > n$.

В работах С.М.Оганесяна [256,259,278] доказано, что сужение оператора Δ на подпространство $\overset{\circ}{W}{}_2^2(S)$ совпадает с оператором Δ^*. Действительно, для $\vartheta \in D(\Delta)$ и $\varphi \in C_0^\infty(S)$ справедливо равенство

$$(\Delta\vartheta, \varphi) = (\vartheta, \Delta\varphi).$$

В силу непрерывности скалярного произведения в $L_2(S)$, переходя к пределу по переменной φ, получим соотношение

$$(\Delta\vartheta, \varphi) = (\vartheta, \Delta\varphi) = (\vartheta, \Delta^*\varphi), \quad \vartheta \in D(\Delta), \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(S). \qquad (Ш.48)$$

На основании равенств (Ш.49) и (Ш.37) имеет место результат, который обобщает следствия Ш.2 и Ш.3. Это

Теорема Ш.8. Для гильбертового пространства $L_2(S)$ справедливо ортогональное разложение

$$L_2(S) = N(S,2) \oplus H(S,2) \qquad (\text{Ш}.50)$$

Замечание Ш.4. Для области S с $\partial S \in C^\infty$ теорема Ш.8 фактически доказана П.С.Новиковым [244,78]. Соотношение (Ш.50) для области S с гладкой границей установлено в работе С.М.Оганесяна [256]. В работах К.Вэка [475] и Ф.Сансо [471] теорема Ш.8 доказана для жордановой области S, удовлетворяющей условию конуса. А.С.Маргулис [206,207] установил теорему Ш.8 для множества S с границей $\partial S \in C$.

Доказательство равенства (Ш.50) и теоремы Ш.7 для второго подхода основано на следующих рассуждениях. В работах А.Л.Великовича и Я.Б.Зельдовича [78], А.И.Кобрунова [160,162] доказано, что множество нормальных решений $H_0(S,2)$ ЛОЗГ в пространстве $L_2(S)$ являются гармоническими функциями. Следовательно, имеет место представление

$$L_2(S) = N(S,2) \oplus H_0(S,2). \qquad (\text{Ш}.51)$$

Из разложения (Ш.51) и леммы Ш.2 легко следует равенство $H_0(S,2) = H(S,2)$ и (Ш.50).

Далее на основании (Ш.37) получаем, что $N(S,2) = \overline{\Delta C_0^\infty(S)} = \Delta \overset{\circ}{W}{}_2^2(S)$.

Таким образом, структура общего решения линейной обратной задачи гравиметрии в пространстве $L_2(S)$ представима в виде

$$\tilde{\sigma} = \sigma_r + \Delta \overset{\circ}{W}{}_2^2(S), \qquad (\text{Ш}.52)$$

где $\sigma_r \in H(S,2)$ – нормальное решение задачи (I.8).

Следующий параграф посвящен доказательству равенств (Ш.39), (Ш.40), (Ш.47), (Ш.50), (Ш.52) в пространстве $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, для ограниченного открытого множества S с границей ∂S, удовлетворяющей условиям (Ш.35). Даны исчерпывающие описания мно-

жества нормальных решений $F(S,\rho)$ линейной обратной задачи гравиметрии в пространстве $L_\rho(S)$. Доказательство этих фактов основано на двойственном методе решения линейных некорректных задач в $L_\rho(S)$ и разложении $L_\rho(S)$ в специальную полупрямую сумму подпространств $N(S,\rho)$ и замкнутого множества $F(S,\rho)$.

При построении общего решения $\bar{z}$ одним из преимуществ второго подхода по сравнению с первым заключается в том, что удается ослабить условия, накладываемые на границу ∂S, и получить новые результаты и в теории дифференцируемых функций многих переменных. Это стало возможным благодаря привлечению в доказательства новых фактов, в частности разложений (Ш.50) и (Ш.5I).

§ 3. Построение общего решения линейной обратной задачи гравиметрии в пространстве $L_\rho(S)$

I. Для построения структуры общего решения $\bar{z}$ необходима более детальная конкретизация равенств (П.I22-П.I27) для задачи

$$\min \frac{1}{\rho}\|z\|^\rho_{L_\rho} \qquad (Ш.53)$$

при ограничении

$$V_{\rho e} z = v(x), \quad x \in Q, \quad v(x) \in L_\rho(Q), \qquad (Ш.54)$$

или

$$V_{z\rho e} z = v_1(x), \quad x \in Q, \quad v_1(x) \in L_\rho(Q). \qquad (Ш.55)$$

Для этого требуется установление справедливости результатов, которые являются важными для параграфа.

Пусть S ограниченное открытое множество. Тогда имеет место

Теорема Ш.9. Если функция $z_0 \in L_\rho(S)$, $1 < \rho < \infty$, имеет

нулевой внешний потенциал, то $\Delta \tilde{\sigma}_0$ является обобщенной функцией, принадлежащей $W_p^{-2}(S')$, носитель которой сосредоточен на $S \cup \partial S$.

Доказательство. Воспользуемся способом фиктивных областей [215,216]. Пусть ограниченная область S' с границей $\partial S' \in C^\infty$ полностью содержит множество S, т.е. $\bar{S} \subset S'$ и $\forall j$, $j = \overline{1,m}$, множество $S_j \setminus S'$ есть область.

В силу условий, наложенных на S', имеем [327], что для $\sigma \in N(S,\rho)$ потенциал $V_\rho(x)$ в области S' принадлежит подпространству $\overset{\circ}{W}{}_\rho^2(S)$ и $\Delta V(x) = -G_n \tilde{\sigma}(x)$, $x \in R_n$.

Сужение функции $\tilde{\sigma}_0$ на область S' обозначим через $\tilde{\sigma}_{01}$. Очевидно, что потенциалы σ_0 и $\tilde{\sigma}_{01}$ совпадают и $\tilde{\sigma}_{01} \in N(S',\rho)$.

На основании равенства (Ш.39), в силу условия $\partial S' \in C^\infty$, в области S' существует последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi_k \in C_0^\infty(S')$, которые сходятся в норме $L_\rho(S')$ к функции $\tilde{\sigma}_{01}$ и имеют нулевой внешний потенциал, т.е.

$$\{\varphi_k\} \xrightarrow{L_\rho(S')} \tilde{\sigma}_{01}, \quad \forall k, \ \varphi_k \in N(S',\rho) \cap C_0^\infty(S').$$

Пусть $V_{\rho ik}$ внутренний потенциал функции φ_k. Очевидно, что $V_{\rho ik} \in C_0^\infty(S')$ и последовательность $\{V_{\rho ik}\} \to V_\rho(x)$ в норме $W_\rho^2(S')$. На основании работ [256,259] имеем, что $\forall k$ $V_{\rho ik}$ является решением задачи

$$\Delta^2 V(x) = -G_n \Delta \varphi_k, \quad x \in S' \qquad (Ш.56)$$

при граничных условиях

$$V\big|_{\partial S'} = \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_{\partial S'} = 0. \qquad (Ш.57)$$

где $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ — бигармонический оператор.

Следовательно, для произвольного $\psi \in C_0^\infty(S')$ имеем

$$\int_{S'} \Delta^2 V_{\rho i k}\, \gamma\, dS' = \int_{S'} V_{\rho i k}\, \Delta^2 \gamma\, dS' = -\,\mathfrak{G}_n \int_{S'} \gamma_k\, \Delta \gamma\, dS' \qquad (\text{Ш}.58)$$

Так как последовательности $\{V_{\rho i k}\}$ и $\{\gamma_k\}$ сходятся соответственно к $V_\rho(x)$ и $\tilde{\delta}_{o1}$, то для любого $\gamma \in C_o^\infty(S')$ [327, с.77]

$$\lim_{k\to\infty} \int_{S'} \Delta^2 V_{\rho i k}\, \gamma\, dS' = \int_{S'} V_\rho(x)\, \Delta^2 \gamma\, dS' = -\,\mathfrak{G}_n \int_{S'} \tilde{\delta}_{o1}\, \Delta \gamma\, dS' \qquad (\text{Ш}.59)$$

Из сходимости $\{V_{\rho i k}\}$ к $V_\rho(x)$ и равенства (Ш.59) следует, что

а) $\{\Delta^2 V_{\rho i k}\}$ сходится к обобщенной функции F, носитель которой сосредоточен на $S \cup \partial S$, т.е. $\operatorname{supp} F \subset S \cup \partial S$.

б) функция $V_\rho(x) \in \overset{\circ}{W}{}_\rho^2(S')$ является единственным решением задачи (Ш.56), (Ш.57) с правой частью F [327, с.567], т.е.

$$\int_{S'} \Delta^2 V_\rho\, \gamma\, dS' = \int_{S'} F\, \gamma\, dS' = -\,\mathfrak{G}_n \int_{S'} \tilde{\delta}_{o1}\, \Delta \gamma\, dS' \qquad (\text{Ш}.60)$$

Так как линейный функционал $\int_{S'} \tilde{\delta}_{o1}\, \Delta \gamma\, dS'$ по непрерывности может быть продолжен на пространство $\overset{\circ}{W}{}_q^2(S')$, то очевидно, что обобщенная функция $F = \Delta \tilde{\delta}_{o1}$ принадлежит сопряженному пространству к $\overset{\circ}{W}{}_q^2(S')$, т.е. $F = \Delta \tilde{\delta}_{o1} \in W_\rho^{-2}(S')$ [422, с.81].

Теорема Ш.9 полностью доказана.

На основании теоремы Ш.9 лемма Ш.2 обобщается на случай гармонической функции $\delta_\Gamma \in L_\rho(S)$, $1 < \rho < \infty$, а именно справедливо

Следствие Ш.10. Если для множества S выполняются условия (Ш.35) и $\delta_\Gamma \in N(S,\rho)$, то $\delta_\Gamma \equiv 0$.

Доказательство. Известно [327], что потенциал и его первые частные производные от гармонической функции являются непрерывными функциями на всем пространстве R_n. Так как $\partial S = \partial \bar{S}$ и

$mes\,\partial S = 0$, то потенциал V_ρ и его первые частные производные всюду на ∂S равны нулю. Подставляя в равенство (Ш.60) вместо $\tilde{\gamma}$ произвольную функцию γ_1 из $C_0^\infty(S')$, обращающуюся в нуль на ∂S вместе со своими первыми частными производными, и учитывая, что $F \in W_\rho^{-2}(S')$ и для гармонической функции $\tilde{\gamma}_\Gamma$ $supp\, F = \Delta\tilde{\gamma}_\Gamma \subset \partial S$, получим равенства

$$\int_{S'} F\cdot\gamma_1\, dS' = \int_{S'} \tilde{\gamma}_\Gamma\, \Delta\gamma_1\, dS' = \int_S \gamma_\Gamma\cdot\Delta\gamma_1\, dS = 0. \qquad (Ш.61)$$

Так как произвольная функция $\Delta\gamma_1$ на множестве S может не принадлежать множеству $\Delta C_0^\infty(S)$, то на основании равенств (Ш.61) и (Ш.37) функция γ_Γ должна тождественно равняться нулю.

Следствие Ш.10 доказано.

Замечание Ш.5. В работе [266] следствие Ш.10 было доказано очень сложным путем. Следствие Ш.10 при $\rho = 2$ и $n = 2,3$ установлено в работе [278].

2. Так как оператор задачи (Ш.54) $V_{\rho e} : L_\rho(S) \to L_\rho(Q)$ является ограниченным [362,259], то для $V_{\rho e}$ существует сопряженный оператор $V_{\rho e}^* : L_q(Q) \to L_q(S)$, который задается при помощи соотношения

$$V_{\rho e}^*\varphi = \tilde{G}_n \int_Q J(x-y)\,\varphi(y)\,dQ, \quad x \in S,\ \varphi \in L_q(Q) \qquad (Ш.62)$$

и $R(V_{\rho e}^*) \subset H(S,q)$.

Следовательно, разложение (П.125) для задачи (Ш.53), (Ш.54) принимает вид

$$L_\rho(S) = N(S,\rho) \oplus \overline{|V_{\rho e}^*\varphi|^{q-2}\cdot V_{\rho e}^*\varphi}, \quad \varphi \in L_q(Q), \qquad (Ш.63)$$

где замкнутое множество $\overline{|V_{\rho e}^*\varphi|^{q-2} V_{\rho e}^*\varphi}$ совпадает с множеством нормальных решений уравнения (Ш.54) или (Ш.55).

Отметим еще раз, что $N(S,\rho)^\perp = \overline{V_{\rho e}^*\varphi}$.

Двойственное соотношение к разложению (Ш.63) в пространстве $L_q(S)$ следующее

$$L_q(S) = |N(S,p)|^{p-2} N(S,p) \oplus \overline{V_{pe}^* \varphi}. \qquad (Ш.64)$$

Меняя местами индексы p и q, получим

$$L_p(S) = |N(S,q)|^{q-2} N(S,q) \oplus \overline{V_{qe}^* \varphi}. \qquad (Ш.65)$$

Обозначим через Δ_p оператор Лапласа $\Delta : L_p(S) \to L_p(S)$.

Для неограниченного замкнутого всюду разрешимого оператора соотношение (П.125) также справедливо и на основании равенства (Ш.37) имеют место разложения

$$L_p(S) = |\overline{\Delta_p C_0^\infty(S)}|^{p-2} \overline{\Delta_p C_0^\infty(S)} \oplus H(S,q), \qquad (Ш.66)$$

$$L_p(S) = \overline{\Delta_p C_0^\infty(S)} \oplus |H(S,q)|^{q-2} H(S,q) \qquad (Ш.67)$$

и

$$L_p(S) = H(S,p) \oplus |\overline{\Delta_q C_0^\infty(S)}|^{q-2} \overline{\Delta_q C_0^\infty(S)}. \qquad (Ш.68)$$

Справедливость равенства (Ш.39) и теоремы Ш.8 для множества S, удовлетворяющего условию (Ш.35), в пространстве $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, устанавливается на основании следующих рассуждений. Из следствия Ш.10 и ортогонального разложения в прямую сумму

$$L_2(S) = H(S,2) \oplus \overline{\Delta_2 C_0^\infty(S)} = V_{2e}^* \varphi \oplus N(S,2)$$

непосредственно следует равенство $H(S,2) = \overline{V_{pe}^* \varphi}$ и $N(S,2) = \overline{\Delta_2 C_0^\infty(S)}$. Учитывая [402, с.78] тождественное вложение $L_p(S)$ в $L_p(K)$ при $p > K \geq 1$ получим для $p > 2$

$$H(S,p) = \overline{V_{pe}^* \varphi} \qquad (Ш.69)$$

$$N(S,\rho) = \Delta_\rho \overline{C_0^\infty(S)} \qquad (Ш.70)$$

Из рефлексивности пространств $L_\rho(S)$, $1<\rho<\infty$, следует, что равенство (Ш.69) при $\rho > 2$ обеспечивает выполнение равенства (Ш.70) при $1 < \rho < 2$ и наоборот. Т.е. равенства (Ш.69) и (Ш.70) справедливы для $1<\rho<\infty$.

На основании равенства (Ш.69) справедливо

Следствие Ш.II. Если для множества S выполняются условия (Ш.35), то множество гармонических функций в $\bar{S}$ всюду плотно в $H(S,\rho)$, $1<\rho<\infty$.

Теорема Ш.IO. Для множества S, удовлетворяющей условию (Ш.35), при $\ell = 2,3,\ldots$ и $1<\rho<\infty$ имеют место равенства (Ш.47).

Доказательство. На основании равенства (Ш.70) и включения

$$\Delta C_0^\infty(S) \subset \Delta \overset{\circ}{W}{}_\rho^{\ell}(S) \subset \Delta \dot{W}_\rho^{\ell}(S) = N(S,\rho) \qquad (Ш.7I)$$

справедливо равенство

$$\Delta \overset{\circ}{W}{}_\rho^{\ell}(S) = \Delta \dot{W}_\rho^{\ell}(S) = \overline{\Delta C_0^\infty(S)}. \qquad (Ш.72)$$

Следовательно, элементы $\overset{\circ}{W}{}_\rho^{\ell}(S)$ и $\dot{W}_\rho^{\ell}(S)$, для которых выполняется равенство (Ш.72), отличаются друг от друга на гармоническую функцию $V_\rho \in \dot{W}_\rho^{\ell}(S)$. Известно [207], что функции из $\dot{W}_\rho^{\ell}(S)$ являются внутренними потенциалами элемента $\zeta \in \Delta \dot{W}_\rho^{\ell}(S)$. Так как функция $V_\rho \in \dot{W}_\rho^{\ell}(S)$ является гармонической в множестве S, то $\zeta \in \Delta V_\rho \equiv 0$ и $\zeta \equiv 0$. Следовательно, $\overset{\circ}{W}{}_\rho^{\ell}(S) = \dot{W}_\rho^{\ell}(S)$. Из включения $\dot{W}_\rho^{\ell_1}(S) \subset \dot{W}_\rho^{\ell_2}(S)$, $\ell_1 > \ell_2$ следует справедливость равенства (Ш.47) для $\ell = 2,3,\ldots$

Теорема Ш.IO доказана.

На основании теоремы П.2I и равенств (Ш.63), (Ш.67-Ш.70) для множества S с $\partial S = \partial \bar{S}$ и $mes\,\partial S = 0$ справедливо

Следствие Ш.I2. Множество нормальных решений уравнения (Ш.54) совпадает с множеством $/H(S,q)/^{q-2}\cdot H(S,q)$. Нормальные решения уравнения (Ш.54) являются бесконечно дифференцируемыми функциями за исключением нулевых точек.

Следствие Ш.I2 для множества S с $\partial S \in C$ установлено в работе А.С.Маргулиса [209]. Первая часть утверждения содержится фактически в работе А.И.Кобрунова [I62].

Для множества S, удовлетворяющего условиям (Ш.35), равенства (Ш.63) и (Ш.65) принимают вид

$$L_p(S) = \Delta \overset{\circ}{W}{}_p^2(S) \oplus /H(S,q)/^{q-2}\cdot H(S,q) \qquad (Ш.73)$$

и

$$L_p(S) = H(S,p) \oplus /\Delta \overset{\circ}{W}{}_q^2(S)/^{q-2}\cdot \Delta \overset{\circ}{W}{}_q^2(S). \qquad (Ш.74)$$

Замечание Ш.6. На основании работы А.С.Маргулиса [209] для неограниченного открытого множества S, удовлетворяющего условиям $\partial S = \partial \bar{S}$ и $mes\,\partial S = 0$, расположенного в полупространстве $x_n > 0$, следствие Ш.I0, а вместе с ним и равенства (Ш.39), (Ш.50), (Ш.73), (Ш.74) остаются в силе с заменой пространства $W_p^2(S)$ на $L_p^2(S)$ [327,328] и линейного многообразия на его замыкание.

Замечание Ш.7. Для задачи (Ш.53) и (Ш.55) результаты параграфа 3 остаются в силе с заменой оператора V_{pe} на V_{zpe}.

3. Таким образом, структура общего решения линейной обратной задачи гравиметрии в классе $L_p(S)$ распределения плотностей представима в виде

$$\bar{\sigma} = \sigma_H + \Delta \overset{\circ}{W}{}_p^2(S), \qquad (Ш.75)$$

где нормальное решение $\sigma_H \in /H(S,q)/^{q-2}\cdot H(S,q)$.

Следствие Ш.I0 и двойственный метод решения линейных некорректных задач в $L_p(S)$ позволяют представить структуру общего

решения в несколько ином виде.

Из разложений в полупрямую сумму (Ш.73)

$$L_q(S) = \Delta \overset{\circ}{W}{}_q^2(S) \oplus |H(S,\rho)|^{\rho-2} \cdot H(S,\rho) \qquad (Ш.76)$$

и следствия Ш.10 получаем, что между подпространствами $H(S,\rho)$ и $H(S,q)$ существует взаимно однозначное соотношение. Следовательно, $H(S,\rho)$ является множеством единственности для задачи (Ш.54) и (Ш.55) и для пространства $L_\rho(S)$, $1<\rho<\infty$, справедливо представление в виде прямой суммы

$$L_\rho(S) = \Delta \overset{\circ}{W}{}_\rho^2(S) \oplus H(S,\rho) = N(S,\rho) \oplus H(S,\rho). \qquad (Ш.77)$$

Поэтому структура общего решения линейной обратной задачи гравиметрии представима также в виде

$$\bar{\zeta} = \zeta_r + \Delta \overset{\circ}{W}{}_\rho^2(S), \qquad (Ш.78)$$

где $\zeta_r \in H(S,\rho)$ - частное гармоническое решение задачи (Ш.54) или (Ш.55).

Покажем, что равенство (Ш.39) можно записать также в виде

$$N(S,\rho) = \Delta \overset{\circ}{W}{}_\rho^2(S) = R(\Delta_\rho^*), \qquad (Ш.79)$$

т.е. имеет место обобщение равенства (Ш.49) на случай $1<\rho<\infty$.

Действительно [266], для $\zeta \in D(\Delta_\rho)$ и $\varphi \in C_0^\infty(S)$ справедливо равенство

$$\int_S \Delta\zeta \cdot \varphi \, dS = \int \zeta \cdot \Delta\varphi \, dS. \qquad (Ш.80)$$

Так как левая часть равенства (Ш.80) является непрерывным линейным функционалом по переменной φ в пространстве $L_q(S)$, определенной на множестве $C_0^\infty(S)$, то она может быть продолжена по непрерывности на множество $\overset{\circ}{W}{}_q^2(S)$. Поэтому равенство (Ш.80) справедливо и для элементов $\zeta \in D(\Delta_\rho)$ и $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_q^2(S)$, т.е.

$$\langle \Delta_p \zeta, \varphi \rangle = \langle \zeta, \Delta_p^* \varphi \rangle, \quad \zeta \in D(\Delta_p), \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_q^2(S). \qquad (Ш.81)$$

Из равенства (Ш.81) имеем, что оператор Δ_p^* совпадает с сужением оператора Δ_q на множество $\overset{\circ}{W}{}_q^2(S)$. Меняя местами индексы p и q, получим равенство (Ш.79).

§ 4. Дифференциальные свойства распределения плотностей несоздающих внешнего гравитационного поля

I. Для исследования дифференциальных свойств функций $\zeta \in N(S,p)$ сформулируем следующую задачу [256,266]:

требуется по заданному элементу $b \in L_p(S)$ определить в множестве S, с границей, удовлетворяющей условиям (Ш.35), функцию $\zeta_0 \in W_p^2(S)$, которая удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \Delta_p \zeta = b, & (Ш.82) \\ V_{pe}\zeta = 0. & (Ш.83) \end{cases}$$

Так как для произвольного $b \in L_p(S)$ уравнение (Ш.82) имеет *решение, принадлежащее пространству* $W_p^2(S)$ [327, с.239], аналоги разложения (Ш.73) и (Ш.74) справедливы для пространства $W_p^2(S)$, то на основании равенства (Ш.39) легко следует

Теорема Ш.II. Для любого $b \in L_p(S), 1 < p < \infty$, существует единственное решение $\bar{\zeta}_0$ задачи (Ш.82), (Ш.83), принадлежащее пространству $W_p^2(S)$, которое определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} \zeta = -\frac{1}{6\pi} \Delta_q^* \varphi, & (Ш.84) \\ \Delta_p \zeta = b. & (Ш.85) \end{cases}$$

Подставляя равенство (Ш.84) в (Ш.85), получим, что потенциал φ_0 функции $\zeta_0 \in N(S,p)$ принадлежит множеству $\overset{\circ}{W}{}_p^2(S) \cap W_p^4(S)$ и определяется из уравнения

$$\Delta_p \Delta_q^* \varphi = - G_n b . \qquad (Ш.86)$$

При $n = 2$ уравнение (Ш.86) с точностью до постоянного множителя совпадает с уравнением изгиба тонкой пластинки с защемленным краем [395]. Когда граница множества ∂S принадлежит классу Липшица, уравнение (Ш.86) принимает естественный вид

$$\Delta^2 \varphi = - G_n b \qquad (Ш.87)$$

при граничных условиях

$$\varphi|_{\partial S} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\partial S} = 0 . \qquad (Ш.88)$$

Рассмотрим задачу

$$\min \frac{1}{p} \| z \|_{L_p}^p \qquad (Ш.89)$$

при ограничении

$$\Delta_p z = b , \quad b \in L_p(S) . \qquad (Ш.90)$$

Из равенства (Ш.66) следует, что множество нормальных решений задачи (Ш.89), (Ш.90) совпадает с множеством

$$\left| \overline{\Delta_q C_0^\infty(S)} \right|^{q-2} \overline{\Delta_q C_0^\infty(S)} \cap D(\Delta_p) .$$

Из равенств (Ш.73), (Ш.74) следует, что при $p = 2$ задачи (Ш.82), (Ш.83) и (Ш.89), (Ш.90) эквивалентны [256,259].

Так как задача (Ш.84), (Ш.85) условно корректна, то для поиска элемента $\bar{z}_0$ необходимо привлекать регуляризующие по А.Н. Тихонову алгоритмы [259,277,278].

Исследуем случай $p = 2$ и рассмотрим параметрические функционалы Тихонова

$$T^\alpha[z] = \| \Delta_2 z - b \|_{L_2(S)}^2 + \alpha \| z \|_{L_2(S)}^2 , \; z \in D(\Delta_2) \qquad (Ш.91)$$

и Лагранжа

$$L^{\alpha}[\zeta,\varphi] = \frac{1}{2}\|\zeta\|^2_{L_2(S)} - (\Delta_2\zeta - b, \varphi)_{L_2(S)} - \frac{1}{2}\alpha\|\varphi\|^2_{L_2(S)}, \qquad (Ш.92)$$

где $\zeta \in D(\Delta_2)$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(S)$, $\alpha > 0$ – параметр регуляризации.

Из результатов главы Ш, параграфа 4, пункта 5 легко следует [256,259]

Теорема Ш.12. При любом значении параметра регуляризации $\alpha > 0$ элемент, минимизирующий функционал (Ш.91), $\zeta^{\alpha} \in$ $\in W_2^2(S) \cap N(S,2)$ находится из системы уравнений Эйлера для функционала (Ш.92)

$$\begin{cases} \zeta = \Delta_2^{*}\varphi, & (Ш.93) \\ \Delta_2\zeta + \alpha\varphi = b, & (Ш.94) \end{cases}$$

т.е. $\zeta^{\alpha} = \Delta_2^{*}(\Delta_2\Delta_2^{*} + \alpha E)^{-1} b$. При этом для задачи (Ш.82), (Ш.83) единственное решение $\overline{\zeta}_0 = \lim\limits_{\alpha \to 0} \zeta^{\alpha}$.

2. Таким образом, элементы $\zeta \in N(S,\rho) \cap D(\Delta)$ являются также элементами пространства $W_{\rho}^2(S)$. Ухудшение дифференциальных свойств области определения оператора Δ_{ρ}, т.е. $D(\Delta_{\rho})$, на основании равенства (Ш.77) происходит за счет гармонических функций, а точнее их поведения на границе ∂S.

В работе С.М.Оганесяна и В.И.Старостенко [276] на основании системы (Ш.93), (Ш.94) для области S с границей $\partial S \in C^{0,1}$ и $n = 2$ разработан регуляризующий однопараметрический алгоритм эквивалентного перераспределения масс несоздающих внешнего гравитационного поля. Для липшецовой границы ∂S система (Ш.93), (Ш.94) преобразуется в краевую задачу [259,276]

$$\Delta^2\varphi + \alpha\varphi = b \qquad (Ш.95)$$

при граничных условиях

$$\varphi\big|_{\partial S} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\partial S} = 0 \qquad (Ш.96)$$

Алгоритм эквивалентного перераспределения состоит из двух этапов. На первом этапе при фиксированном α_n , решая систему (Ш.95), (Ш.96) методом конечных разностей, определяется функция φ^{α_n}. На втором этапе вычисляется распределение $\sigma_0^{\alpha_n} = \Delta \varphi^{\alpha_n}$ несоздающее внешнего поля. Для любой $\{\alpha_n\}$ последовательность $\{\sigma_0^{\alpha_n}\}$ состоит из элементов несоздающих внешнего поля. При $\alpha \to 0$ $\{\Delta \sigma_0^{\alpha_n}\}$ сходится к функции σ , т.е. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \Delta \sigma^{\alpha_n} = \sigma$. Примеры решения ряда модельных задач показали высокую эффективность алгоритма [276]. При $n = 2$ задача (Ш.95), (Ш.96) совпадает с задачей изгиба тонкой пластинки на упругом основании. Эффект регуляризации имеет физический смысл и соответствует введению упругого основания с коэффициентом податливости α [395]. Именно успешное решение задачи (Ш.95), (Ш.96) и опыт решения двухмерных обратных задач гравиметрии навело на мысль использовать для многомерных задач в качестве условного стабилизатора функционал энергии деформации тонкой изогнутой пластинки на упругом основании, который подробно обоснован в главе IУ.

§ 5. Решение линейной обратной задачи гравиметрии для бесконечной полосы в пространстве $L_2(\Pi(a,b))$

I. Многие теоремы, приведенные в данном параграфе, повторяют известные результаты А.И.Кобрунова [I62,I67], В.А.Варфоломеева [I67] и А.С.Маргулиса [209,2II], В.М.Новоселицкого [2II]. Однако они были получены независимо и существенно иным путем. Публикации этих результатов в печати помешал выход статьи А.С. Маргулиса и В.М.Новоселицкого [2II].

Подход, используемый в данном параграфе, опирается на фор-

мулы (I.23)-(I.29) и спектральную теорию самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве L_2 . Точнее, на разложение единицы самосопряженного оператора. По мнению автора она более доступна широкому кругу геофизиков "физической" наглядностью, чем метод Фурье - преобразований, используемый в работах [I62, I67,209,2II]. Поэтому автор считает возможным включение их в работу, так как они представляют интерес с методической точки зрения.

2. Бесконечная горизонтальная полоса с плотностью $\sigma \in L_2(\Pi(a,b))$ является естественной моделью для геологических структур с горизонтальными границами раздела. Условие $\sigma \in L_2(\Pi(a,b))$ означает наличие изменения аномальной плотности по горизонтали, затухающее на бесконечности.

Выбор этого модельного класса источников аномального поля вытекает из анализа геологического строения основных нефтегазоносных структур [246].

Рассмотрим следующие обратные задачи для полосы

$$A\sigma = G\int_a^b\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)\sigma(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta-z_0)^2]^{3/2}} = V_{zH}(x_0,y_0,z_0), \qquad (\text{Ш}.97)$$

где $(x_0,y_0,z_0)\in Q$, Q - множество точек наблюдения:

I/ множество $Q=Q_1$ есть плоскость, расположенная над горизонтальной полосой $\Pi(a,b)$, $z_0<a$;

2/ множество $Q=Q_2$ - под горизонтальной полосой $\Pi(a,b)$, $z_0>b$;

3/ $Q=Q_1\cup Q_2$.

Обозначим линейное многообразие гармонических функций в $L_2(\Pi(a,b))$ через $H(\Pi(a,b),2)$; замыкание $H(\Pi(a,b),2)$ в норме L_2 через $H^+(\Pi(a,b),2)$; множество нормальных решений уравнений (Ш.97) при $Q=Q_1$ через $H_1^+(\Pi(a,b),2)$; при

$Q = Q_2 - H_2^+(\Pi(a,b),2)$; при $Q = Q_1 \cup Q_2 - H_{1\cup 2}^+(\Pi(a,b),2)$; оператор $A: L_2(\Pi(a,b)) \to L_2(Q_1)$ через A_1; $A: L_2(\Pi(a,b)) \to L_2(Q_2) - A_2$; $A: L_2(\Pi(a,b),2) \to L_2(Q_1 \cup Q_2) \to A_{1\cup 2}$. Отметим, что $Q_1 \cup Q_2$ является множеством единственности для задачи (Ш.97).

На основании теории двойственного метода решения линейных некорректных задач, замечания Ш.6 и работы А.С.Маргулиса [209], имеют место следующие результаты.

Лемма Ш.3. Справедливы множественные равенства

$$H_1^+(\Pi(a,b),2) = \overline{R(A_1^*)}, \tag{Ш.98}$$

$$H_2^+(\Pi(a,b),2) = \overline{R(A_2^*)}, \tag{Ш.99}$$

$$H^+(\Pi(a,b),2) = H_{1\cup 2}^+(\Pi(a,b),2) = \overline{R(A_{1\cup 2}^*)}, \tag{Ш.100}$$

$$H^+(\Pi(a,b),2) = H_1^+(\Pi(a,b),2) \oplus H_2^+(\Pi(a,b),2), \tag{Ш.101}$$

$$L_2(\Pi(a,b),2) = \Delta \overset{\circ}{W}{}_\rho^2(\Pi(a,b)) \oplus H^+(\Pi(a,b),2). \tag{Ш.102}$$

Линейная обратная задача гравиметрии для горизонтальной полосы в пространстве $L_2(\Pi(a,b))$ разрешима в явном виде [167,211, 209].

Суть предлагаемого в работе метода заключается в следующем. Пусть известны собственные элементы и значения линейного самосопряженного вполне непрерывного оператора $A: H \to H$, т.е. $\{x_n\}$, $\{\lambda_n\}$ и

$$A x_n = \lambda_n x_n . \tag{Ш.103}$$

Известно [25,176,423], что в этом случае пространство H представлено в виде ортогональной суммы подпространства H_n , соответствующих собственным значениям λ_n , т.е.

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n \oplus \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n . \qquad (\text{Ш.I04})$$

Поэтому, если правую часть уравнения (П.II7) разложить по элементам $\{x_n\}$, т.е. $b = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n \left(\beta_n = \frac{(b, x_n)}{(x_n, x_n)}\right)$, то нормальное решение $\bar{x}$ уравнения (П.II7) представимо в виде

$$\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\lambda_n} x_n . \qquad (\text{Ш.I05})$$

Для самосопряженного оператора A с непрерывным спектром имеют место аналоги равенства (Ш.I04), (Ш.I05) с заменой суммы на интегралы. Доступное объяснение предельного перехода для оператора A с непрерывным спектром, с использованием понятий обобщенных собственных элементов и значений, дано в книге В.Хатсона и Дж.Пима [423, с.258-3I0].

Используя обобщенные собственные элементы и значения операторов $A_i^* A_i$, $i = 1,2$, полученные в равенствах (I.23)-(I.29), построим нормальные решения линейной обратной задачи гравиметрии для полосы $\Pi(a, b)$ в пространстве $L_2(\Pi(a, b))$.

3. Для построения нормального решения задачи (Ш.97) необходимо получить ряд формул и равенств, которые представляют также самостоятельный интерес.

Из равенства (I.28) имеем, что при $z_1 = 0$ обобщенные собственные элементы и значения операторов $A_1^* A_1$ и $A_1 A_1^*$ равны соответственно $e^{-\mu(z-z_0)} \cos\mu(x-x_0) \cos\mu_2(y-y_0)$ и $\cos\mu_1(x-x_0) \cos\mu_2(y-y_0)$ и $\lambda = 2\pi^2 \frac{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}}{\mu} G\bar{G}$, где $\mu = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$ и $0 < \mu_1, \mu_2 < \infty$.

Обобщенные собственные элементы $\cos\mu_1(x-x_0) \cos\mu_2(y-y_0)$ оператора $A_1 A_1^*$ приводят к заключению, что его разложение единицы совпадает с двухкратным интегралом Фурье, который удобно представить в виде

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) \cos\mu_1(x-x_0) \right.$$

$$\cdot \cos\mu_2(y-y_0)\,dx\,dy\Big\}\,d\mu_1\,d\mu_2,\quad \varphi\in L_2(R_2). \qquad (\text{Ш.I06})$$

Спектральное представление оператора $A_1A_1^*$ и обратного оператора $(A_1A_1^*)^{-1}$ имеет соответственно вид

$$A_1A_1^*\varphi = 2G\bar{G}\int_0^\infty\int\frac{e^{-2\mu a}-e^{-2\mu b}}{\mu}\cdot\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\int\varphi(x,y)\cos\mu_1(x-x_0)\cdot \qquad (\text{Ш.I07})$$

$$\cdot\cos\mu_2(y-y_0)\,dx\,dy\Big\}\,d\mu_1\,d\mu_2,\quad \varphi\in L_2(R_2).$$

$$(A_1A_1^*)^{-1}\varphi = \frac{1}{2\pi^4G\bar{G}}\int_0^\infty\int\frac{\mu}{e^{-2\mu a}-e^{-2\mu b}}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\int\varphi(x,y)\cdot \qquad (\text{Ш.I08})$$

$$\cdot\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0)\,dx\,dy\Big\}\,d\mu_1\,d\mu_2,\quad \varphi\in R(A_1A_1^*).$$

Так как

$$A_1^*\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0) = 2\pi\bar{G}\,e^{-\mu z}\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0), \qquad (\text{Ш.I09})$$

то на основании формулы (Ш.I06) легко устанавливается справедливость цепочки равенств

$$A_1^*V_{zH} = \bar{G}\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{z\,V_{zH}(x_0,y_0)\,dx_0\,dy_0}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right]^{3/2}} = \qquad (\text{Ш.II0})$$

$$= G\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int\Big\{e^{-\mu z}\int_{-\infty}^{\infty}\int V_{zH}\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0)\,dx_0\,dy_0\Big\}\,d\mu_1\,d\mu_2.$$

Из равенства (Ш.II0) следует формула

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{z-z_0}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}} = \qquad (\text{Ш.III})$$

$$= \int_0^\infty\int e^{-\mu(z-z_0)}\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0)\,d\mu_1\,d\mu_2,$$

которая имеется в справочнике [299, с.577]. Обобщение формулы (Ш.III) на n -мерный случай записывается следующим образом

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\pi^{\frac{n}{2}-1}\,\frac{x_n-x_{n0}}{|x-x_0|^n} = \int_0^\infty e^{-|\mu|(x_n-x_{n0})}\prod_{i=1}^{n-1}\cos\mu_i(x_i-x_{i0})\,d\mu. \qquad (\text{Ш.II2})$$

Соотношения (Ш.110), (Ш.108) и (Ш.106) позволяют представить оператор $A_1^*(A_1A_1^*+\alpha E)^{-1}V_{zH}$ в виде

$$A_1^*(A_1A_1^*+\alpha E)^{-1}V_{zH} = \frac{2\bar{G}}{\pi}\iint_0^\infty \frac{\mu e^{-\mu z}}{\pi G\bar{G}\left(e^{-2\mu a}-e^{-2\mu b}\right)+2\mu} \cdot \tag{Ш.113}$$

$$\cdot\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} V_{zH}\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0)\,d\mu_1\,d\mu_2\right\}dx_0\,dy_0.$$

Из равенств (Ш.111) и (I.18) следует спектральное представление операторов $A_1^*A_1$ и A_1, которые соответственно равны

$$A_1^*A_1 z = 4G\bar{G}\iint_0^\infty\left\{\int_a^b e^{-\mu(z+z_0)}\iint_{-\infty}^{\infty} z(x_0,y_0,z_0)\cos\mu_1(x-x_0)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\cos\mu_2(y-y_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0\right\}d\mu_1\,d\mu_2 \tag{Ш.114}$$

и

$$A_1 z = \frac{2}{\pi}G\iint_0^\infty\left\{\int_a^b e^{-\mu z}\iint_{-\infty}^{\infty} z(x,y,z)\cdot\right. \tag{Ш.115}$$

$$\left.\cdot\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0)\,dx\,dy\,dz\right\}d\mu_1\,d\mu_2.$$

Соотношение (Ш.114) и собственные значения $2\pi^2G\bar{G}\,\frac{e^{-2\mu a}-e^{-2\mu b}}{\mu}$ позволяют сразу записать (угадать) оператор проектирования на подпространство $\overline{R(A_1^*)}$, а именно

$$P_{\overline{R(A_1^*)}}\,z(x,y,z) = \frac{2}{\pi^2}\iint_0^\infty \frac{\mu}{e^{-2\mu a}-e^{-2\mu b}}\left\{\int_a^b e^{-\mu(z+z_0)}\cdot\right. \tag{Ш.116}$$

$$\left.\cdot\left[\iint_{-\infty}^{\infty} z(x_0,y_0,z_0)\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0)\,dx_0\,dy_0\right]dz_0\right\}.$$

Из соотношений (Ш.114)-(Ш.116) следует, что псевдообратный оператор $(A_1^*A_1)^+$ представим в виде

$$(A_1^*A_1)^+ z = \frac{1}{\pi^4 G\bar{G}}\iint_0^\infty\left(\frac{\mu}{e^{-2\mu a}-e^{-2\mu b}}\right)^2\left\{\int_a^b e^{-\mu(z+z_0)}\right. \tag{Ш.117}$$

$$\left.\cdot\iint_{-\infty}^{\infty} z(x_0,y_0,z_0)\cos\mu_1(x-x_0)\cos\mu_2(y-y_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0\right\}d\mu_1\,d\mu_2,$$

где $\zeta \in R(A_1^* A_1)$.

4. Вся предварительная работа для построения нормального решения задачи (Ш.97) при $Q = Q_1$ проведена. Однако для получения явной формулы нормального решения $\bar{\zeta} = (A_1^* A_1)^+ A_1^* V_{zH}$ проделаем еще одну выкладку. Необходимый результат получается из этой выкладки предельным переходом. Покажем при помощи вычисления справедливость (П.61) для обратной задачи гравиметрии в полосе $\Pi(a, b)$, т.е.

$$(A_1^* A_1 + \alpha E)^{-1} A_1^* V_{zH} = A_1^* (A_1 A_1^* + \alpha E)^{-1} V_{zH}. \qquad (Ш.118)$$

Так как $A_1^* V_{zH} \in R(A_1^* A_1)$ на основании равенств (Ш.110), (Ш.116), (Ш.117) имеем

$$(A_1^* A_1 + \alpha E)^{-1} A_1^* V_{zH} = \frac{2}{\pi^2} \iint_0^\infty \frac{\mu}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}} \cdot \frac{\nu e^{-\mu z}}{2\pi^2 G\bar{G}(e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}) + \alpha\mu} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ \int_a^b e^{-\mu z_0} \cdot \iint_{-\infty}^\infty \Big(\bar{G} \iint_{-\infty}^\infty \frac{z_0 V_{zH}(x_0', y_0')\, dx_0' dy_0'}{[(x-x_0')^2 + (y-y_0')^2 + z_0^2]^{3/2}} \cos\mu_1(x-x_0) \cdot \qquad (Ш.119)$$

$$\cdot \cos\mu_2(y-y_0)\, dx_0 dy_0 dz_0 \Big\} d\mu_1 d\mu_2.$$

Так как интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^\infty \Big(\iint_{-\infty}^\infty \frac{z_0 V(x_0', y_0')\, dx_0' dy_0'}{[(x-x_0')^2 + (y-y_0')^2 + z_0^2]^{3/2}} \Big) \cos\mu_1(x-x_0) \cos\mu_2(y-y_0)\, dx_0 dy_0$$

есть спектральная функция элемента $A_1^* V_{zH}$, то она с очевидностью равна $e^{-\mu z_0} \iint_{-\infty}^\infty V_{zH}(x_0, y_0) \cos\mu_1(x-x_0) \cos\mu_2(y-y_0)\, dx_0 dy_0$.

Учитывая это равенство, получим, что

$$(A_1^* A_1 + \alpha E)^{-1} A_1^* V_{zH} = \frac{4G}{\pi} \iint_0^\infty \frac{\mu}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}} \cdot \frac{\nu e^{-\mu z}}{2\pi^2 G\bar{G}(e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}) + \alpha\mu} \cdot \qquad (Ш.120)$$

$$\cdot \Big\{ \iint_{-\infty}^\infty V_{zH} \cos\mu_1(x-x_0) \cos\mu_2(y-y_0) \Big(\int_a^b e^{-\mu z} dz_0 \Big) dx_0 dy_0 \Big\} d\mu_1 d\mu_2 =$$

$$= \frac{2G}{\pi} \iint_0^\infty \frac{\nu e^{-\mu z}}{2\pi^2 G\bar{G}(e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}) + \alpha\mu} \Big\{ \iint_{-\infty}^\infty V_{zH} \cdot \cos\mu_1(x-x_0) \cdot$$

$$\cos\mu_2(y-y_0)\, dx_0 dy_0 \Big\} d\mu_1 d\mu_2 = A_1^* (A_1 A_1^* + \alpha E)^{-1} V_{zH} = \bar{\zeta}^\alpha.$$

Известно [398], что если при заданном V_{zH} задача (Ш.97) разрешима, то ее нормальное решение

$$\bar{\sigma} = \lim_{\alpha \to 0} (A_1^* A_1 + \alpha E)^{-1} A_1^* V_{zH} = (A_1^* A_1)^+ A_1^* V_{zH} \qquad (Ш.121)$$

Для проведения предельного перехода необходимо в равенстве (Ш.120) взять $\alpha = 0$, т.е.

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\pi^3 G} \int_0^\infty \int \frac{\mu e^{-\mu z}}{(e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b})} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int V_{zH} \cos \mu_1 (x - x_0) \cdot \right. \qquad (Ш.122)$$

$$\left. \cdot \cos \mu_2 (y - y_0) \, dx_0 \, dy_0 \right) d\mu_1 \, d\mu_2 .$$

Формула (Ш.122) дает явный вид нормального решения задачи (Ш.97) при $Q = Q_1$, а формула (Ш.120) – регуляризованного.

Отметим, что когда V_{zH} пробегает все значения из $R(A_1)$, элемент $\bar{\sigma}$ обегает все множество $H_1^+(\Pi(a, b), 2) = \overline{R(A_1^*)}$.

Аналогичным образом получаются явные выражения для нормального и регуляризованного решений задачи (Ш.97) при $Q = Q_2$. Сразу запишем вид этих решений:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\pi^3 G} \int_0^\infty \int \frac{\mu e^{\mu (z + 2z_2)}}{e^{2\mu b} - e^{2\mu a}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int V_{zH} \cos \mu_1 (x - x_0) \cdot \right. \qquad (Ш.123)$$

$$\left. \cdot \cos \mu_2 (y - y_0) \, dx_0 \, dy_0 \right) d\mu_1 \, d\mu_2 ,$$

где $z_2 > b$ – плоскость, на которой задана наблюденная величина V_{zH};

$$\sigma^\alpha = \frac{2\bar{G}}{\pi} \int_0^\infty \int \frac{\mu e^{\mu z}}{2\pi^2 G \bar{G} e^{-2\mu z_2} (e^{2\mu b} - e^{2\mu a}) + \alpha \mu} \cdot \qquad (Ш.124)$$

$$\cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int V_{zH} \cos \mu_1 (x - x_0) \cos \mu_2 (y - y_0) \, dx_0 \, dy_0 \right) d\mu_1 \, d\mu_2 .$$

Когда V_{zH} пробегает все значения из $R(A_2)$, элемент $\bar{\sigma}$ описывает все множество $H_2^+(\Pi(a, b), 2) = \overline{R(A_2^*)}$.

Объединение формул (Ш.122) и (Ш.123) дает явный вид нормального решения задачи (Ш.97) при $Q = Q_1 \cup Q_2$, а формул (Ш.121) и (Ш.124) – регуляризованного.

Из соотношений (Ш.107)-(Ш.121) можно получить много интерес-

ных формул для вычисления определенных интегралов. Часть из них известны и приведены в справочниках [I22,299]. Наибольший интерес для дальнейшего, по мнению автора, представляет формула (Ш.II6).

Множество гармонических функций в $\Pi(a,b)$ несоздающих внешнего гравитационного поля для задачи (Ш.97) при $Q = Q_1$ задается при помощи соотношения

$$\sigma_0(x,y,z) = \frac{1}{\pi^3 G} \int_0^\infty \int \left\{ \left(\frac{\mu e^{-\mu z}}{e^{-3\mu a} - e^{-2\mu b}} - \frac{e^{-\mu z}}{2(b-a)} \right) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int \delta(x_0, y_0) \cos\mu_1(x-x_0) \cos\mu_2(y-y_0)\, dx_0\, dy_0 \right\} d\mu_1\, d\mu_2, \qquad (Ш.I25)$$

где $\delta(x_0, y_0) \in R(A_1)$ и позволяет аналитическое продолжение в нижнее полупространство до уровня $z = b$ [I67].

Замечание Ш.8. Равенство (Ш.98)-(Ш.I25) получено для трехмерной обратной задачи гравиметрии в полосе $\Pi(a,b)$. Однако они с незначительными техническими изменениями верны также для $n \geq 2$.

При $a = 0$ и $b = \infty$ получаем решения обратной задачи гравиметрии для полупространства R_3^+ [I62]. Очевидно, что при этом задача (Ш.97) имеет смысл только при $Q = Q_1$.

Выводы

I. Проведены детальный анализ работ П.Пиццетти и Дж.Лауричеллы по теории тел нулевого потенциала, а также некоторых сопутствующих вопросов. Анализ показал, что многие их важные результаты были независимо найдены или обобщены другими геофизиками и математиками. Проведенный анализ преследовал цель познакомить современных специалистов с основными результатами П.Пиццетти и Дж.Лауричеллы и восстановить историческую справедливость.

2. Дан краткий обзор современного состояния теории потенциала. Показано, что многие современные результаты являются прямыми обобщениями теорем П.Пиццетти и Дж.Лауричеллы для функций, принадлежащих пространствам $L_2(S)$ или $L_p(S)$, $1<p<\infty$, $S\subset R_n$.

Показано, что в современных исследованиях выделяются два подхода к построению общего решения линейной обратной задачи гравиметрии в пространствах $L_2(S)$ или $L_p(S)$.

Основные результаты современной теории заключаются в описании множеств $N(S,p)$ и нормальных решений $F(S,p)$ ЛОЗГ. Доказано, что $N(S,p)=\Delta\,\mathring{W}_p^2(S)=R(\Delta_q^*)$, $L_2(S)=N(S,2)\oplus H(S,2)$ и $F(S,p)=|H(S,q)|^{q-2}H(S,q)$.

3. Основные результаты современной теории доказаны для ограниченного открытого множества S, удовлетворяющих условиям (Ш.35). Доказательства основаны на трех фактах: I/ если функция $\delta_0\in L_p(S)$, $1<p<\infty$, имеет нулевой внешний потенциал, то $\Delta\widetilde{\delta_0}$ является обобщенной функцией, принадлежащей $W_p^{-2}(S')$, $S\subset S'$, носитель которой сосредоточен на $S\vee\partial S$; 2/ разложении пространства $L_p(S)$ в полупрямую сумму $L_p(S)=N(S,p)\oplus F(S,p)$; 3/ в множестве S не существует гармонической функции, имеющей нулевой внешний потенциал.

Установлено также, что $\mathring{W}_p^2(S)=\dot{W}_p^2(S)$, $2\le 2<\infty$ и $H(S,p)=\overline{V_{qe}^{*}P}$.

4. Впервые показано, что множество $D(\Delta)\cap N(S,p)$ состоит из функций, принадлежащих пространству $W_p^2(S)$ и $D(\Delta)=H(S,p)+W_p^2(S)\cap N(S,p)$, т.е. ухудшение дифференциальных свойств $D(\Delta)$ происходит за счет гармонических функций.

Для множества S с границей ∂S, принадлежащей классу Липшица, построен алгоритм эквивалентного перераспределения масс.

5. Выписаны явные виды решения и регуляризованного решения ЛОЗГ в полосе $\Pi(a, b)$ с использованием формул (I.23)-(I.29) и разложения единицы самосопряженного оператора A^*A в $L_2(\Pi(a, b))$.

ГЛАВА IУ. РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ

В в е д е н и е

В настоящей главе, методами, развитыми в главах I–Ш, конструируются экономичные регуляризующие алгоритмы для решений: трехмерных линейных обратных задач гравиметрии (ЛОЗГ) в пространстве $L_2(S)$ и с учетом сферичности планет; трехмерной нелинейной обратной задачи гравиметрии о контактной поверхности (НОЗКП). Трехмерная ЛОЗГ в классе $L_2(S)$ распределения плотностей решается двойственным вариантом вариационного способа Тихонова (ВСТ); трехмерная НОЗКП – итерационным модифицированным методом Гаусса–Ньютона (ММГН), ВСТ, двойственным вариантом ВСТ; трехмерная ЛОЗГ с учетом сферичности планет – ММГН.

В первом параграфе для решения ЛОЗГ в пространстве $L_2(S)$ и НОЗКП, в рамках общего регуляризующего оператора Тихонова, обоснована возможность выбора в качестве условного стабилизатора функционала энергии деформации тонкой изогнутой пластинки на упругом основании с использованием дополнительной информации типа краевых условий. Показано, что в этом случае для решения трехмерных НОЗКП и ЛОЗГ в пространстве $L_2(S)$ можно использовать соответствующие уравнения Эйлера, которые являются двухмерными интегро-дифференциальными.

Во втором параграфе анализируются возможные пути решения НОЗКП и ЛОЗГ в пространстве $L_2(S)$ известными численными методами. Показано, что их целесообразно решать при помощи полученных интегро-дифференциальных уравнений. Делается заключение о том, что интегральные операторы, входящие в эти уравнения, нужно аппроксимировать методом конечных элементов (МКЭ), а дифференциальный оператор – методом конечных разностей (МКР).

В целом разработанный численный способ решения интегро-дифференциальных уравнений является по существу конечно-разностным. Однако он использует многие идеи, характерные для метода конечных элементов.

Далее, в параграфе три, используя приемы МКР, построены конечномерные матричные аппроксимации дифференциальных операторов с учетом краевых условий типа жесткого защемления, свободного опирания и свободного.

В четвертом и пятом параграфах методом конечных элементов построены конечномерные аналоги интегральных операторов, входящих в соответствующие уравнения Эйлера. После этой подготовительной работы конкретизируются общие вычислительные схемы двойственных вариантов ВСТ и итерационного ММГН, ВСТ, ММГН. Работоспособность разработанных алгоритмов показана на примерах решения модельных задач.

В шестом параграфе разработан алгоритм решения линейной обратной задачи гравиметрии с учетом сферичности планеты. Алгоритм основан на итерационном модифицированном методе Гаусса-Ньютона, в качестве элементарного тела для решения прямой задачи гравиметрии используется сферический прямоугольный параллелепипед. Исследовался вопрос решения ЛОЗГ с учетом сферичности при ограниченных исходных данных.

Приведены примеры решения модельных задач.

§ I. Обоснование выбора одного условного стабилизатора для решения многомерных обратных задач

I. Для построения конкретных регуляризующих алгоритмов для решения трехмерных ЛОЗГ в пространстве $L_2(S)$ и НОЗКП методами, разработанными в главах I-Ш, необходимо конкретизировать вид стабилизаторов в функционалах (I.37),(I.5I),(П.39),(П.72). Это

то же самое, что и задать оператор B в процессах (I.40),(I.43)-(I.50),(П.75)-(П.76),(П.99),(П.100). В зависимости от вида стабилизаторов в функционалах (I.37),(I.5I),(П.39) и (П.72) получаются *семейства регуляризующих алгоритмов для решения выше перечисленных задач*, которые обладают различными помехоустойчивыми свойствами. Выбор конструкции стабилизатора является специфическим для каждой рассматриваемой задачи и существенно зависит от свойств искомого решения. Если стабилизирующий функционал выполняет одновременно роль критерия оптимальности, то при его построении необходимо учитывать также априорные геолого-геофизические данные [I65].

Искомые решения трехмерных НОЗКП и ЛОЗГ обычно являются достаточно гладкими функциями. Поэтому успешное решение многих двухмерных обратных задач геофизики, в частности двухмерных аналогов выше перечисленных задач, при помощи регуляризующих алгоритмов стало возможным благодаря правильному выбору стабилизатора $\Omega(z)$, использующего качественную и (или) количественную информацию об искомом решении [I00-I04,I09,I28,I60-I68,227-232, 252,254-280,3I8,333-352,353-376,4I8-420,445].

Для многомерных задач ($x \in R_n$, $n \geq 2$) стабилизатором, учитывающим качественную информацию о гладкости решения, может служить функционал

$$\Omega(z) = \|z\|^2_{W_2^2(S)} = \int_S \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{(\ell)} \left(\frac{\partial^\ell z}{\partial x_1^{\ell_1} \partial x_2^{\ell_2} \dots \partial x_n^{\ell_n}} \right)^2 dS, \quad \text{(IУ.I)}$$

где $\sum_{(\ell)}$ – есть суммирование всех возможных обобщенных производных порядка ℓ, при $n < 2r$. Так как на основании теорем вложения Соболева ограниченное множество в $W_2^2(S)$ компактно в $L_2(S)$. Но уже при небольших r использование стабилизирующего функционала (IУ.I) достаточно сложно с вычислительной точки зрения.

Однако конструкция (I.37) позволяет использовать и количественную информацию об искомом решении типа краевых условий [100-102,418-420,254,262,276-341-344]. Использование количественной информации такого типа позволяет строить регуляризующие алгоритмы при более простой конструкции функционала $\Omega(z)$. Такие функционалы называются условными стабилизаторами [100,101].

Настоящий параграф посвящен конструированию условного стабилизатора для многомерных задач, которые способствуют разработке более экономичных регуляризующих алгоритмов и позволяют в случае гладкого решения построение равномерного приближения к нему.

2. При решении двухмерной НОЗКП с финитной границей в конструкции условного стабилизатора свойства гладкости и количественная информация типа краевых условий использовались в работах [100,418,101] и [254,340] соответственно явно и неявно следующим образом:

$$\Omega(z) = \int_a^b \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 dx \qquad (IУ.2)$$

при граничных условиях

$$z\Big|_{x=a} = z\Big|_{x=b} = 0 \qquad (IУ.3)$$

или

$$\frac{dz}{dx}\Big|_{x=a} = \frac{dz}{dx}\Big|_{x=b} = 0; \qquad (IУ.4)$$

$$\Omega(z) = \int_a^b \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 dx \qquad (IУ.5)$$

при граничных условиях

$$z\Big|_{x=a} = \frac{dz}{dx}\Big|_{x=a} = z\Big|_{x=b} = \frac{dz}{dx}\Big|_{x=b} = 0 \qquad (IУ.6)$$

или

$$\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=a} = \left.\frac{d^3z}{dx^3}\right|_{x=a} = \left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=b} = \left.\frac{d^3z}{dx^3}\right|_{x=b} = 0. \qquad (IУ.7)$$

Действительно, если к концам отрезка $[a,b]$ добавить по одной фиктивной точке, то численная аппроксимация производной функционала (IУ.5) при граничных условиях (IУ.6) приводит к матрице регуляризации B, применяемых в работах [254,340]. Неявно конструкция (IУ.5), (IУ.7) получается так. Заменим функционал (IУ.5) приближенно на $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(z_{i-1}-2z_i+z_{i+1})^2}{h}$, где $z_0=a$, $z_n=b$.

Тогда в уравнении Эйлера получим матрицу регуляризации

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & & & & \\ -2 & 5 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (IУ.8)$$

которая использовалась в работах [254,30-33,I72]. Эта же матрица B_1 при численной аппроксимации задачи (IУ.5),(IУ.7) с добавлением двух фиктивных точек к обоим концам отрезка $[a,b]$ получена в работе [47,с.I68-I69].

Замечание IУ.I. Граничные условия (IУ.7) естественным образом появляются при дифференцировании функционала (IУ.5) и использования понятия сопряженного оператора [306,с.329-332]. Конструкция условного стабилизатора (IУ.5),(IУ.7), приводившая к лучшим результатам при решении практических задач [30-33,I72], с точностью до постоянного множителя, совпадает с функционалом энергии деформации упругой балки при краевых условиях аналогичными со свободными концами. Граничные условия (IУ.6) соответствуют балке

с защемленными концами [129,47,179,395].

3. Для решения трехмерных НОЗКП и ЛОЗГ необходимо использовать сравнительно простые стабилизаторы, которые аналогичны конструкциям (IУ.5), (IУ.6) или (IУ.5), (IУ.7).

Оператор Лапласа Δ является естественным обобщением на функции нескольких переменных обычной второй производной функции одного переменного [394,с.60]. Действительно, если функция одной переменной $Z(x)$ имеет в окрестности точки x_0 непрерывную вторую производную, то

$$\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h}\left[\frac{z(x_0+h)-z(x_0-h)}{2} - z(x_0)\right] \quad (IУ.9)$$

Переходя к функции $Z(x)$ от n переменных, аналогично (IУ.9), для заданной точки x_0 рассмотрим ее n-мерную шаровую окрестность радиуса r и разность между средним арифметическим функции z на границе S_r такой окрестности $\frac{1}{mes\, S_r}\int_{S_r} z\, dS$, где $mes\, S_r$ - площадь поверхности n-мерной сферы S_r, и значением z_0. В случае непрерывности вторых частных производных функции $Z(x)$ в окрестности точки x_0 справедливо предельное равенство [394]

$$\Delta Z(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{2n}{r}\left[\frac{1}{mes\, S_r}\int_{S_r} z(x)\, dS - z(x_0)\right]$$

Кроме того, функция Лапласа позволяет оценить ее значение в точке через значения функции в соседних точках [394,с.60]. Поэтому непосредственным обобщением условных стабилизаторов (IУ.5),(IУ.6) или (IУ.7) является конструкция

$$\Omega(z) = \int_S (\Delta z)^2\, dS \quad (IУ.10)$$

при краевых условиях

$$z\Big|_{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial n}\Big|_{\partial S} = 0; \qquad (IУ.II)$$

или

$$z\Big|_{\partial S} = \Delta z\Big|_{\partial S} = 0; \qquad (IУ.I2)$$

или

$$\Delta z\Big|_{\partial S} = \frac{\partial \Delta z}{\partial n}\Big|_{\partial S} = 0. \qquad (IУ.I3)$$

Замечание IУ.2. Краевые условия (IУ.I3) являются естественными при минимизации функционала (IУ.I0) и поэтому могут быть опущены. Они появляются в уравнении Эйлера при вычислении производной Фреше функционала (IУ.I0).

Поэтому условный стабилизатор (IУ.I0),(IУ.I3) применялся в работе [256] для нахождения гармонического решения ЛОЗГ и в работе [79,с.38-43] в задачах интерполяции при неизвестном поведении восстанавливаемого распределения на ∂S. Однако конструкция (IУ.I0),(IУ.I3) в функционале (I.5I) для ЛОЗГ, при точном значении наблюденной величины b и любом значении параметра регуляризации α сразу приводит к искомому решению и не позволяет построить последовательность регуляризованных приближений, которые столь необходимы при наличии помех в исходных данных. Дело в том, что множество точек минимума функционала (IУ.I0) или решения уравнения $\Delta^2 z = 0$ при краевых условиях (IУ.I3) совпадают со множеством $H(S,z)$.

В отличие от замечания IУ.2 бигармоническая задача

$$\min \Omega(z) = \int_S \left((\Delta z)^2 + \beta z^2 - 2fz \right) dS, \quad f \in L_2(S), \beta \geq 0, \qquad (IУ.I4)$$

при краевых условиях (IУ.II),(IУ.I2) или (IУ.I3) имеет единственное решение z^{β}, принадлежащее пространству $W_2^2(S)$ [327, 382,I93]. Покажем, что элемент z^{β} обладает более высокими дифференциальными свойствами, а именно справедлива

Теорема IУ.I. При любых параметрах $\beta>0$ и краевых условиях (IУ.II),(IУ.I2) или (IУ.I3) элемент z^{β} является единственным решением бигармонического уравнения

$$\Delta^2 z + \beta z = f \qquad (IУ.I5)$$

и принадлежит соответственно пространствам $W_2^4(S)$, $W_2^4(S)$ и $W_2^4(S)+H(S,2)$.

Доказательство. На основании работы [306,с.320–327] и формулы Грина (Ш.3) следует, что оператор Δ на множестве $M_2=\{z: z\in D(\Delta) \text{ и } z/_{\partial S}=0\}$ является замкнутым самосопряженным. Обозначим его через Δ_2. Учитывая равенство (Ш.48), легко можно показать, что задачи (IУ.I4),(IУ.I3); (IУ.I4),(IУ.I2) и (IУ.I4),(IУ.II) эквивалентны соответственно задачам (IУ.I4)

$$\min_{z\in D(\Delta_2)} \Omega(z) = \int_S \left((\Delta z)^2+\beta z^2-2fz\right)dS, \quad f\in L_2(S) \qquad (IУ.I6)$$

и

$$\min_{z\in D(\Delta^2)=\overset{\circ}{W}{}_2^2(S)} \Omega(z) = \int_S \left((\Delta^* z)^2+\beta z^2-2fz\right)dS, \quad f\in L_2(S) \qquad (IУ.I7)$$

Операторы Δ, Δ_2 и Δ^* на своих областях определения являются замкнутыми. Поэтому на основании теории L-псевдорешения существуют элементы, минимизирующие функционалы (IУ.I7),(IУ.I6) и (IУ.I4), которые можно находить из соответствующих уравнений Эйлера

$$\Delta\Delta^* z + \beta z = f, \qquad (IУ.I8)$$

$$\Delta_2 \Delta_2 z + \beta z = f \qquad (IУ.I9)$$

и

$$\Delta^* \Delta z + \beta z = f. \qquad (IУ.20)$$

Уравнения (IУ.I8),(IУ.I9) и (IУ.20) совпадают с уравнением (IУ.I5) соответственно при краевых условиях (IУ.II),(IУ.I2) и (IУ.I3). Поэтому их решения принадлежат соответственно пространствам $W_2^4(S)$, $W_2^4(S)$ и $W_2^4(S) \dotplus H(S,2)$.

Теорема IУ.I полностью доказана.

При решении практических обратных задач геофизики наибольший интерес представляют случаи $n = 2,3$. На основании теорем вложения Соболева при $n = 2,3$ всякое ограниченное множество в $W_2^4(S)$ компактно в $L_2(S)$. Поэтому, если в функционале (I.37) в качестве условного стабилизатора использовать функционал (IУ.I4) при $f=0$, $\beta>0$ и краевых условиях (IУ.II),(IУ.I2) или (IУ.I3), то в соответствии с общей теорией метода регуляризации [398] справедлива

Теорема IУ.2. Элемент $z^{\alpha(\delta)}$, минимизирующий функционал (I.37) при дополнительных краевых условиях (IУ.II),(IУ.I2) или (IУ.I3), где параметр $\alpha(\delta)$ выбирается по одному из известных критериев, является регуляризованным решением задачи (I.5), т.е.

$$\lim_{\delta \to 0} \| z^{\alpha(\delta)} - z^* \|_{L_2(S)} = 0, \qquad (IУ.2I)$$

и принадлежит соответственно пространствам $W_2^4(S)$, $W_2^4(S)$ и $W_2^4(S) \dotplus H(S,2)$.

Если нормальное решение z^* гладкое, то при $\delta \to 0$ $z^{\alpha(\delta)} \to z^*$ равномерно.

Теорема IУ.2 обосновывает возможность выбора функционала (IУ.I4) при краевых условиях (IУ.II),(IУ.I2) или (IУ.I3) в каче-

стве условного стабилизатора. Благодаря двойственному методу решения практических линейных и нелинейных обратных задач геофизики, который уменьшает размерность исходной задачи на единицу, фактически остается только случай $n = 2$. При $n = 2$ решение задачи (IУ.I4),(IУ.II) совпадает с решением задачи об изгибе тонкой пластинки на упругом основании с защемленным краем. Поэтому несколько видоизменением функционала (IУ.I4), возникающим из требования теории упругости о возможности учета постоянной Пуассона ν [305,с.372].

В качестве условного стабилизатора для решения трехмерных ЛОЗГ и НОЗКП с точностью до постоянного множителя возьмем функционал энергии деформации тонкой изогнутой пластинки на упругом основании [262,267,395,305]

$$\Omega(z) = \iint_S \left\{ (\Delta z)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 \right] + \beta z^2 \right\} dx\,dy \qquad (IУ.22)$$

при краевых условиях (IУ.II); или

$$\nu \Delta z + (1-\nu)\left(\cos^2\gamma \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin^2\gamma \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \sin 2\gamma \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\Big|_{\partial S} = 0, \qquad (IУ.23)$$

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial n} + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\cos 2\gamma \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\right]\Big|_{\partial S} = 0; \qquad (IУ.24)$$

или

$$z\big|_{\partial S} = 0 \quad \text{и (IУ.23)}; \qquad (IУ.25)$$

где $\nu \geq 0$ – коэффициент Пуассона, $\beta \geq 0$ – коэффициент податливого основания, $(\vec{s}, \vec{n})$ – приграничная левая декартовая система координат [395,с.I04], $\vec{s}$ – вектор касательный к поверхности ∂S, γ – угол между $\vec{n}$ и осью x.

Замечание IУ.3. В теории изгиба тонкой пластинки [47,I29,

I79,395] условиям (IУ.II) соответствует жесткое защемление края; (IУ.25),(IУ.23) – свободное опирание края; (IУ.23),(IУ.24) – свободного края.

При значении параметра $\beta=0$ упругое основание отсутствует [395].

Конструкция условного стабилизатора (IУ.22) при соответствующих краевых условиях зависит от двух параметров (функций) ν и β, которые можно использовать как дополнительные регуляризующие. *Из физических соображений коэффициент Пуассона ν не может быть больше одной второй.* Однако с математической точки зрения в функционале (IУ.22) параметр ν может изменяться до единицы. В зависимости от значений параметров (функций) ν и β получаем различные условные стабилизаторы, в том числе рассмотренные выше.

4. Следуя работам [304,с.269-277;395,с.I06-II0] покажем, что строго выпуклый квадратичный функционал

$$\left((\Delta^2+\beta E)z,z\right)-2(f,z)=\iint_S\left(\Delta^2 z\cdot z+\beta z^2-2fz\right)dS,\quad \beta>0, \qquad (IУ.26)$$

при $f=0$ и любых краевых условиях (IУ.II),(IУ.25),(IУ.23) или (IУ.23),(IУ.24) совпадает с функционалом (IУ.22). Действительно, на основании формул Грина, производного произведения и интегрирования по частям имеют место ряд равенств.

$$\iint_S\left(\Delta^2 z\cdot z-\Delta z\Delta z\right)dS=\int_{\partial S}\left(z\frac{\partial\Delta z}{\partial n}-\Delta z\frac{\partial z}{\partial n}\right)dQ \qquad (IУ.27)$$

Преобразуем

$$\iint_S\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dS=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}\right]dS=$$

$$=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}\right)+z\frac{\partial^4 z}{\partial y^2\partial x^2}\right]dS=$$

$$= \iint_S z \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} dS + \int_{\partial S} \left[\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cos\gamma - z \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} \cos\gamma \right] dQ.$$

Учитывая, что в левой декартовой системе координат:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial n} \cos\gamma - \frac{\partial z}{\partial s} \sin\gamma, \qquad (IV.28)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial n} \sin\gamma + \frac{\partial z}{\partial s} \cos\gamma; \qquad (IV.29)$$

для замкнутой границы ∂S

$$\int_{\partial S} \frac{\partial z}{\partial s} F dQ = - \int_{\partial S} z \frac{\partial F}{\partial s} dQ; \qquad (IV.30)$$

получим

$$\iint_S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dS = \iint_S z \frac{\partial^4 z}{\partial x^2} + \qquad (IV.31)$$

$$\int_{\partial S} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cos^2\gamma \frac{\partial z}{\partial n} + z \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cos\gamma \sin\gamma - z \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \cos\gamma \right) dQ.$$

Аналогично

$$\iint_S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dS = \iint_S z \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} dS + \qquad (IV.32)$$

$$+ \int_{\partial S} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \sin^2\gamma \frac{\partial z}{\partial n} - z \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos\gamma \sin\gamma - z \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \sin\gamma \right) dQ;$$

$$\iint_S \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dS = \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \right] dS =$$

$$= \iint_S z \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} dS + \int_{\partial S} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \sin\gamma \cos\gamma \frac{\partial z}{\partial n} + \right. \qquad (IV.33)$$

$$+ z\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin^2\gamma - z\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\cos\gamma\Big)dQ;$$

$$\iint_S \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dS = \iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right) - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right]dS =$$

$$= \iint_S z\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}dS + \int_{\partial S}\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\gamma\cos\gamma\frac{\partial z}{\partial n} -$$

$$- z\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos^2\gamma - z\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\sin\gamma\Big)dQ. \qquad (IУ.34)$$

Складывая (IУ.3I) с (IУ.32) и (IУ.33) с (IУ.34) и вычитая полученные выражения друг от друга, получим равенство

$$2\iint_S\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dS = \qquad (IУ.35)$$

$$= \int_{\partial S}\Big\{\Big[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\gamma + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\gamma - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\gamma\sin\gamma\Big]\frac{\partial z}{\partial n} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial s}\Big[\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big)\sin\gamma\cos\gamma + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\right)z\Big\}dQ.$$

Умножим равенство (IУ.35) на $(1-\nu)$ и сложим с выражением (IУ.27). После несложных преобразований получим формулу

$$\iint_S \Delta^2 z\cdot z\,dS = \iint_S\left\{(\Delta z)^2 + 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dS - \qquad (IУ.36)$$

$$- \int_{\partial S}\Big[(1-\nu)\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\gamma + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\gamma + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin 2\gamma\Big) + \nu\Delta z\Big]\frac{\partial z}{\partial n}dQ +$$

$$+ \int_{\partial S}\Big\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\Big[\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big)\cos\gamma\sin\gamma + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos 2\gamma\Big] + \frac{\partial\Delta z}{\partial n}\Big\}z\,dQ.$$

Из формулы (IУ.36) с учетом любых краевых условий (IУ.II), (IУ.25),(IУ.23) или (IУ.23),(IУ.24) получим искомое равенство

$$\iint_S \left(\Delta^2 z \cdot z + \beta z^2\right) dS = \iint_S \left\{ (\Delta z)^2 + 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right] + \beta z^2 \right\} dS.$$

Аналогично (IУ.36) можно показать, что справедливо равенство

$$\iint_S \Delta^2 z \cdot u\, dS = \iint_S \left\{ \Delta z \Delta u - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right]\right\} dS - \tag{IУ.37}$$

$$- \int_{\partial S}\left[(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\gamma + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\gamma + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\sin 2\gamma\right) + \nu \Delta z\right]\frac{\partial u}{\partial n} dQ +$$

$$+ \int_{\partial S}\left\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\cos\gamma \sin\gamma + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos 2\gamma\right] + \frac{\partial \Delta z}{\partial n}\right\} u\, dQ.$$

Меняя местами функции $z(x,y)$ и $u(x,y)$ в формуле (IУ.37), можно показать, что для любых $0 \le \nu < 1$ и $\beta > 0$ сужение оператора $\Delta^2 + \beta E$ на множества $M_1 = \{ z : z \in D(\Delta^2)$ и выполняются краевые условия (IУ.II)$\}$, $M_2 = \{ z : z \in D(\Delta^2)$ и (IУ.25),(IУ.23)$\}$ или $M_3 = \{ z : z \in D(\Delta^2)$ и (IУ.23),(IУ.24)$\}$ являются неограниченными замкнутыми самосопряженными положительно определенными операторами. Обозначим эти операторы соответственно через $(\Delta^2 + \beta E)_1$, $(\Delta^2 + \beta E)_2$ и $(\Delta^2 + \beta E)_3$.

Из упрощенной теории L -псевдорешения для неограниченного замкнутого самосопряженного неотрицательного оператора A и единичного оператора E следует, что справедлива

Теорема IУ.3. При любых $f \in L_2(S)$, $\beta > 0$ и $0 \le \nu < 1$ существует единственный элемент z^β, минимизирующий функционал (IУ.26) при краевых условиях (IУ.II),(IУ.25),(IУ.23) и (IУ.23),

(IУ.24). Элемент $z^{\beta} \in W_2^4(S)$ и является решением уравнения (IУ.I5) при соответствующих краевых условиях.

Добавим к функционалу (IУ.22) слагаемое $-2\iint_S fz\,dz$. Тогда из равенства (IУ.36) следует

Теорема IУ.4. Для любых $f \in L_2(S)$, $\beta > 0$ и $0 \le \nu < 1$ существует единственный элемент z^{β}, минимизирующий функционал (IУ.22) с учетом соответствующих краевых условий в пространстве $W_2^2(S)$. Элемент z^{β} принадлежит пространству $W_2^4(S)$ и совпадает с элементом из теоремы IУ.3.

5. Выберем функционал (I.37) или (I.5I) в качестве условного стабилизатора функционал (IУ.22) при краевых условиях (IУ.II), (IУ.25),(IУ.23) или (IУ.23),(IУ.24). На основании идентичных рассуждений имеет место аналог теоремы IУ.2, а именно справедлива

Теорема IУ.5. Единственный элемент, минимизирующий функционалы (I.37) или (I.5I) при соответствующих краевых условиях, принадлежит, по крайней мере, пространству $W_2^4(S)$, где параметр $\alpha(\delta)$ выбирается по одному из известных критериев, является регуляризованным решением задачи (I.5). Если нормальное решение z^* гладкое, то при $\alpha \to 0$ регуляризованное решение $z^{\alpha(\delta)} \to z^*$ равномерно.

Замечание IУ.4. Краевые условия (IУ.23) и (или (IУ.24) являются естественными для функционала (IУ.22). Поэтому при выборе в регуляризующих функционалах (I.37),(П.72) или (П.39) в качестве стабилизатора (IУ.22), в случае ограниченности операторов A и F, краевые условия (IУ.23) и (или)(IУ.24) также являются естественными. Следовательно, при непосредственной минимизации функционалов (I.37),(П.72) или (П.39) эти краевые условия можно не учитывать, так как для точки экстремума они выполняются автоматически [I39,с.64-66].

На основании теоремы IУ.3, двойственного метода и замечания

IУ.4 для любых $\alpha > 0$ и b, минимизирующие элементы функционалов (I.37) и (П.39) соответственно z^α и $\varphi^\alpha \in W_2^4(S)$ и являются также решениями их уравнений Эйлера, а именно:

$$F'^*(z)Fz + \alpha(\Delta^2 + \beta E)_i^2 z = F'^*(z)b + \alpha(\Delta^2 + \beta E)_i^2 z_0 \quad (IУ.38)$$

и

$$AA^* + \alpha(\Delta^2 + \beta E)_i^2 \varphi = b - Au_0 + \alpha(\Delta^2 + \beta E)_i^2 \varphi_0 \quad (IУ.39)$$

где $i = I,3$. Элемент u^α, минимизирующий функционал (I.5I), находится по формуле

$$u^\alpha = A^* \varphi^\alpha + u_0. \quad (IУ.40)$$

Замечание IУ.5. Элемент $(u^\alpha, \varphi^\alpha)$ является седловой точкой функционала (П.72) при $\Omega_1 = \|u - u_0\|^2$, $\Omega_2(\varphi - \varphi_0)$ равный (IУ.26) и соответствующих краевых условиях, т.е.

$$\begin{cases} u - u_0 = A^* \varphi, & (IУ.4I) \\ Au + \alpha(\Delta^2 + \beta E_i)\varphi = b + \alpha(\Delta^2 + \beta E)_i^2 \varphi_0, \; i = \overline{1,3}. & (IУ.42) \end{cases}$$

Очевидно, что подставив значение u из (IУ.4I) в (IУ.42), получим равенство (IУ.39).

Из соотношений (I.8), (I.I6),(I.34) и (I.35) следует, что равенства (IУ.38) и (IУ.39) являются интегро-диффенциальными уравнениями с частными производными.

Таким образом, регуляризованные решения НОЗКП и ЛОЗГ в функциональном пространстве $L_2(S)$ соответственно z^α и φ^α (или u^α) можно находить при помощи непосредственной минимизации функционалов (I.37) т (П.39) с условным стабилизатором (IУ.22), учитывая замечания IУ.4, или из интегро-дифференциальных уравнений (IУ.38) и (IУ.39) с полным учетом соответствующих краевых условий.

§ 2. Основные концепции метода конечных элементов и метода конечных разностей. Некоторые вопросы конечномерной аппроксимации обратных задач гравиметрии

I. Для решения любой обратной задачи гравиметрии в пространстве L_2 на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ) необходимо использовать численные методы, при этом исходная бесконечномерная задача аппроксимируется некоторой конечномерной задачей. Для этой конечномерной задачи уже можно разработать вычислительные схемы, которые программно реализуемы на ЭВМ.

В настоящее время не имеется широкого опыта приближенного численного решения задач гравиметрии в функциональных пространствах, сведенных к минимизации функционалов, интегро-дифференциальным или дифференциальным уравнениям, с частными производными. Исключения составляют работы М.А.Алексидзе [7-9], В.Н.Страхова и С.Н.Иванова [370], А.И.Кобрунова [165], П.Н.Вабищевича и П.А.Пулатова [68], С.М.Оганесяна, М.Г.Оганесяна [267,268,280] и В.И.Старостенко [280]. Поэтому для численного решения рассматриваемых в работе задач пришлось обратиться к опыту решения аналогичных задач из механики сплошных сред, тепло- и масс обмена, аэрогидродинамики, электродинамики. Для их решения разработаны различные численные методы, которые подробно изложены в известных монографиях и учебной литературе [8,9,34,47-52,82,90,91,95,106,117,138, 139,147,179-181,215,216,250,253,285-288,298,303,308,313-317,321, 324,329,378,382,388,410].

Наиболее распространенными эффективными численными методами решения задач математической физики являются метод конечных элементов и метод конечных разностей. Метод конечных элементов с успехом применяется как для решения дифференциальных уравнений в частных производных, так и для минимизации функционалов [47,95, 138,139,180,216,250,253,285,308,324,378,382,410]. Метод конечных

разностей применяется в основном для решения дифференциальных уравнений в частных производных [34,106,127,154,193,215,222,287, 313-317,388].

Кратко остановимся на основных концепциях МКЭ и МКР.

2. Метод конечных элементов можно трактовать как способ аппроксимации неизвестной функции, заданной в области S, дискретной моделью, которая строится в конечном числе точек области в совокупности с кусочными локальными аппроксимациями этой функции на некотором конечном числе подобластей. Эти подобласти называются конечными элементами. Локальная аппроксимация функции на каждом конечном элементе единственным образом определяется значениями этой функции в конечном числе заранее выбранных точек этого элемента. Итак, при построении дискретной модели неизвестной функции поступают следующим образом:

1/ в рассматриваемой области S фиксируется конечное число точек, в которых должны быть определены значения неизвестной функции. Выбранные точки называются узловыми точками или просто узлами;

2/ область S приближенно представляется в виде совокупности конечного числа непересекающихся подобластей, называемых конечными элементами. Эти элементы могут иметь общие узловые точки;

3/ поведение неизвестной функции на каждом конечном элементе аппроксимируется с помощью отдельного набора заранее выбранных полиномиальных функций, таких, что локально они могут иметь однотипный вид. Коэффициенты полиномов выражаются через значения самих функций в узлах конечного элемента. Эти наборы полиномиальных функций часто задаются в таком виде, чтобы удовлетворить условиям непрерывности (а возможно и непрерывной дифференцируемости вплоть до некоторого порядка) описываемых их характеристик во всей области S, в зависимости от типа решаемой задачи.

Важной особенностью МКЭ является то, что первоначально при локальной аппроксимации функции на конечных элементах их можно рассматривать независимо друг от друга, т.е. от того какие места займут эти элементы в связанной модели.

Конечномерную аппроксимацию исходной задачи получают с помощью вариационных принципов при минимизации функционалов или с помощью метода Галеркина при решении дифференциальных уравнений, в частных производных.

3. Сущность метода конечных разностей может быть описана следующим образом. В области S изменения независимых переменных вводится сетка – дискретная совокупность узловых точек. Вместо непрерывной функции рассматриваются сеточные функции, значения которых задаются в узлах сетки. Дифференциальные уравнения с соответствующими краевыми условиями заменяются приближенными разностными уравнениями, связывающими значения искомой функции в узлах сетки.

При переходе от дифференциальной задачи к разностной дифференциальные операторы заменяются их разностными аналогами. Разностная производная в узлах сетки может быть записана различными способами в зависимости от шаблона, т.е. множества точек на которых аппроксимируется соответствующая производная или дифференциальный оператор. Разностные уравнения являются системой линейных или нелинейных алгебраических уравнений, которую уже можно так или иным способом решить на ЭВМ.

4. Известно [I39,2I5,3I3], что точность приближенного решения исходной задачи, простота и эффективность вычислительной схемы существенно зависят от выбранного численного метода. Поэтому казалось естественным для нахождения регуляризованных решений НОЗКП и ЛОЗГ предпочтение отдать методу конечных элементов в вариационной трактовке, т.е. непосредственно минимизировать функци-

оналы (I.37) или (II.39) с условным стабилизатором (IУ.22). Это заманчиво еще и тем, что в этом случае, на основании замечания IУ.4, из краевых условий (IУ.II),(IУ.25),(IУ.23) или (IУ.24) необходимо учитывать только те, где функция и ее нормальная производная обращаются в нуль на границе ∂S. *В МКЭ для обеспечения непрерывной дифференцируемости искомой функции, т.е. удовлетворительной конечномерной аппроксимации стабилизирующего функционала* (IУ.22), *необходимо использовать конечные элементы высокого порядка точности* [95,I38,I80]. При этом для локальной аппроксимации нужны конечные элементы с большим числом узлов и соответственно полиномы высоких степеней. Это приводит к значительному усложнению вычислительной схемы и, что более важно, намного увеличивается время расчетов конечномерных аналогов функционалов, связанных с интегральными операторами. Даже при таком усложнении вычислительной схемы МКЭ обеспечивает непрерывность только первой производной, в то время как регуляризованный элемент является трижды непрерывно дифференцируемой функцией. Отметим, что для удовлетворительной аппроксимации функционалов, связанных с интегральным оператором, т.е. оператором решения прямой задачи гравиметрии, нет необходимости на каждом конечном элементе использовать полиномы высоких степеней. Поэтому от непосредственного применения МКЭ с элементами высокого порядка точности для минимизации функционалов (I.37) и (II.39) с условным стабилизатором (IУ.22) пришлось отказаться.

Следовательно, для нахождения регуляризованных решений НОЗКП и ЛОЗГ необходимо использовать интегро-дифференциальные уравнения (IУ.38) и (IУ.39). Для успешного решения интегро-дифференциальных уравнений (IУ.38) и (IУ.39) *необходимо аппроксимировать входящие в него интегральные и дифференциальные операторы с высокой точностью, чтобы погрешности аппроксимации не превосходи-*

ли погрешностей задания исходных данных.

Известно [3I3,388,I06], что при решении дифференциальных уравнений методом конечных разностей сравнительно легко строятся разностные схемы высокого порядка аппроксимаций. При этом порядок аппроксимации зависит от гладкости искомого решения. Этот момент МКР имеет важное значение для решения рассматриваемых в работе задач. Однако в целом схемы МКР не приспособлены для решения интегро-дифференциальных уравнений, так как в этом методе остается открытым вопрос восполнения сеточной функции на всю область и не ясно как аппроксимировать интегральные операторы, входящие в уравнения (IУ.38) и (IУ.39).

В работах [I39,с.I47-I50;303,с.9-II] показано, что при решении дифференциальных уравнений между МКР и МКЭ существует глубокая связь, а именно они являются разновидностями метода Галеркина со специально выбранными локально определяемыми базисными (аппроксимационными) функциями. Однако соответствующие конечномерному аналогу дифференциального оператора $(\Delta^2+\beta E)_i$, $i=\overline{1,3}$, специальные локально аппроксимационные функции неизвестны, по крайней мере, автору.

Таким образом, непосредственное применение только МКЭ или МКР для решений НОЗКП и ЛОЗГ невозможно или связано с большими вычислительными трудностями.

В уравнениях (IУ.38) и (IУ.39) интегральные операторы и дифференциальный оператор $(\Delta^2+\beta E)_i$ играют различную роль, а именно: I/ интегральные непосредственно связаны с решаемой геофизической задачей; 2/ дифференциальный оператор - выполняет роль регуляризатора.

С учетом сделанных замечаний приходим к заключению, что МКЭ легко позволяет аппроксимировать интегральные операторы, входящие в уравнения, а МКР - дифференциальный. Поэтому можно сочетать пре-

имущества МКЭ и МКР применительно к решению задач, рассматриваемых в работе. Очевидно, что в этом случае узловые точки в МКЭ и МКР надо выбирать одинаковыми, а конфигурацию конечных элементов или их комбинаций – совпадающими с разностной сеткой.

Замечание IУ.6. Идея метода конечных элементов о разбиении области S на КЭ давно использовалась в гравиметрии при вычислении прямой задачи гравиметрии.

Только в качестве локально аппроксимирующих функций в основном использовались кусочно-постоянные, т.е. узловые точки фактически располагались внутри конечного элемента. Известно [215], что система кусочно-постоянных функций плотна в любом пространстве L_p, $p = 1,2,\ldots$, но не удовлетворяет условию линейной равномерной независимости.

Численное решение интегро-дифференциальных уравнений (IУ.38) и (IУ.39), при соответствующих краевых условиях, синтезом МКР и МКЭ, следуя работе [288], назовем методом дискретизации.

Покроем область S прямоугольной сеткой, параллельной координатным осям.

Из удобства дальнейшего изложения сначала построим конечномерные аппроксимации дифференциального оператора $\Delta^2 + \beta E$ при соответствующих краевых условиях, так как он общий для двух уравнений.

§ 3. Построение матричных аналогов оператора $\Delta^2 + \beta E$ с учетом краевых условий

1. Аппроксимация дифференциальных операторов МКР основана на замене частных производных, входящих в оператор и краевые условия, соответствующими конечными разностями. Это позволяет построить конечномерную матрицу достаточно простой структуры, аппроксимирующей заданный дифференциальный оператор.

При построении конечномерных аналогов дифференциальных операторов будем пользоваться обычным понятием производной, а не понятием обобщенной производной, как это следовало бы делать, поскольку элементы Z и $\varphi \in W_2^4(S) \cap C^3(S)$. Как показано в работах В.А.Морозова [I23, с.I82] и О.А.Лисковца [I96, с.207], это не приведет в данных условиях к существенным погрешностям.

Прежде чем перейти к соответствующим конечноразностным аппроксимациям, изложим основные зависимости между производными и конечными разностями. Этому вопросу уделяется внимание, поскольку существуют различные точки зрения, нередко требующие детальных разъяснений для геофизиков.

Прямоугольной сеткой, параллельной координатным осям, разобьем область Q на одинаковые прямоугольники размерами $h_x \times h_y$, дополняя или отбрасывая неполные. Значение неизвестной $f(x,y)$ в некотором узле (i,j) сетки обозначим через $f_{ij} = f(ih_x, jh_y)$.

Пусть

$$f_{i'j} = f\left(\frac{2i+1}{2}h_x, jh_y\right), \quad f_{ij'} = f\left(ih_x, \frac{2j+1}{2}h_y\right),$$

$$f_{i'j'} = f\left(\frac{2i+1}{2}h_x, \frac{2i+1}{2}h_y\right).$$

Первые частные производные функции $f(x,y)$ в отдельных узлах сетки описываются выражениями:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(ih_x, jh_y) \approx \left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{ij} = \frac{f_{i+1j} - f_{i-1j}}{2h_x}, \left[\frac{\Delta f}{\Delta y}\right] = \frac{f_{ij+1} - f_{ij-1}}{2h_y}; \qquad (IУ.43)$$

$$\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{i'j} = \frac{f_{i+1j} - f_{ij}}{h_x}, \left[\frac{\Delta f}{\Delta y}\right]_{ij'} = \frac{f_{ij+1} - f_{ij}}{h_y}; \qquad (IУ.44)$$

где точка (i',j) лежит по середине точек (i,j) и $(i+1,j)$, а (i,j') – (i,j) и $(i,j+1)$.

$$\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{i'j'} = \frac{f_{i+1,j} - f_{ij} + f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1}}{2h_x};$$

$$\left[\frac{\Delta f}{\Delta y}\right]_{i'j'} = \frac{f_{i,j+1} - f_{ij} + f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j}}{2h_y}.$$

Здесь следует обратить внимание на то, что конечно-разностная аппроксимация выражение первых частных производных функции в точке (i,j) с помощью формул (IУ.44), встречаемое в некоторых работах, менее точно, чем (IУ.43). Поэтому желательно использование формул (IУ.43), а формулами (IУ.44) аппроксимировать значение первых частных производных в точках (i',j) и (i,j').

Дальнейшие производные функции $f(x,y)$, необходимые в работе, заменяются разностными отношениями:

$$\left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\right]_{ij} = \frac{\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{i'j'} - \left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{(i-1)'j}}{h_x} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{ij} + f_{i-1,j}}{2h_x^2};$$

$$\left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta y^2}\right]_{ij} = \frac{\left[\frac{\Delta f}{\Delta y}\right]_{ij'} - \left[\frac{\Delta f}{\Delta y}\right]_{i(j-1)'}}{h_y} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{ij} + f_{i,j-1}}{2h_y^2};$$

$$\left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\right]_{i'j} = \frac{\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{i+1,j} - \left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{ij}}{h_x} = \frac{f_{i+2,j} - f_{i+1,j} - f_{ij} + f_{i-1,j}}{2h_x^2};$$

$$\left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta x \Delta y}\right]_{ij} = \frac{\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{ij+1} - \left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{ij-1}}{h_y} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{4h_x h_y};$$

$$\left[\frac{\Delta^3 f}{\Delta x^3}\right]_{ij} = \frac{\left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\right]_{i'j} - \left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\right]_{(i-1)'j}}{h_x} = \frac{f_{i+2,j} - 2f_{i+1,j} + 2f_{i-1,j} - f_{i-2,j}}{2h_x^3};$$

$$\left[\frac{\Delta^3 f}{\Delta x^2 \Delta y}\right]_{ij} = \frac{\left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\right]_{ij+1} - \left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\right]_{ij-1}}{2h_y} = \frac{f_{i-1j+1} - 2f_{ij+1} + f_{i+1j+1} - f_{i-1j-1} + 2f_{ij-1} - f_{i+1j-1}}{2h_x^2 h_y};$$

$$\left[\frac{\Delta^4 f}{\Delta x^4}\right] = \left[\frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\right]\right]_{ij} = \frac{f_{i+2j} - 2f_{i+1j} - f_{ij} - 2(f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j}) + f_{ij} - 2f_{i-1j} + f_{i-2j}}{h_x^4} = \frac{f_{i+2j} - 4f_{i+1j} + 6f_{ij} - 4f_{i-1j} + f_{i-2j}}{h_x^4};$$

$$\left[\frac{\Delta^4 f}{\Delta x^2 \Delta y^2}\right] = \left[\frac{\Delta^2}{\Delta y^2}\left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\right]_{ij}\right]_{ij} = \frac{f_{i+1j+1} - 2f_{i+1j} + f_{i+1j-1} - 2(f_{ij+1} - 2f_{ij} + f_{ij-1}) + f_{i-1j+1} - 2f_{i-1j} + f_{i-1j-1}}{h_x^2 h_y^2}.$$

Разностные отношения $\left[\frac{\Delta^4 f}{\Delta y^4}\right]_{ij}$ и $\left[\frac{\Delta^3 f}{\Delta y^2 \Delta x}\right]_{ij}$ получают аналогично.

Подставляя в бигармонический оператор $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ соответствующие разностные отношения, умножая полученное выражение на $h_x^2 h_y^2$ и введя обозначение $a = \frac{h_x}{h_y}$, $b = \frac{h_y}{h_x}$, получим для узла (i,j) равенство

$$h_x^2 h_y^2 [\Delta^2]_{ij} = a^2(f_{i-2j} - 4f_{i-1j} + 6f_{ij} - 4f_{i+1j} + f_{i+2j}) + 2[4f_{ij} - 2(f_{i-1j} + f_{ij-1} + f_{i+1j} + f_{ij+1}) + f_{i-1j-1} + f_{i-1j+1} + f_{i+1j-1} + f_{i+1j+1}] + b^2[f_{ij-2} - 4f_{ij-1} + 6f_{ij} - 4f_{ij+1} + f_{ij+2}]. \quad \text{(IУ.45)}$$

Схематическая структура (полный шаблон) конечно-разностного бигармонического оператора $h_x h_y [\Delta^2]_{ij}$, для (i,j) узла прямоугольной сетки для большей ясности, приведена на рис.IУ.Ia. Центральнй (ведущий) узел (i,j) выделен окружностью с жирной точкой внутри.

2. При практической реализации МКР весьма важным вопросом является правильное использование краевых условий, поскольку от них в значительной мере зависит точность получаемых результатов [3I3,2I5,I06]. Трудность заключается в том, что когда ведущим узлом (i,j) являются граничные или приграничные узлы, то в разностном соотношении (IУ.45) оказываются слагаемые, связанные с узлами, находящимися вне области S, в так называемой фиктивной области. Вопрос соответствующего исключения в разностном соотношении (IУ.45) слагаемых, связанных с фиктивными узлами, часто вызывает серьезные трудности. Он решается с помощью краевых условий [3I3,2I5,I06].

При этом необходимо использовать все краевые условия, в которых участвуют только значения функции $f(x,y)$ в узлах, совпадающие с ненулевыми элементами полного шаблона.

Необходимо различать формулировку граничных условий в зависимости от того, лежит ли граница ∂S области прямоугольного типа на линии сетки или между этими линиями. Для работы наибольший интерес представляет первый случай. Поэтому подробно рассмотрим его. Там, где будет необходим второй случай, шаблоны получаются по ходу решения соответствующей задачи.

Для принятого способа аппроксимации области S участки границы будут параллельны осям x или y. Поэтому угол γ соответственно равен ± 90 или 0 градусов и краевые условия (IУ.II), (IУ.23),(IУ.24) принимают соответственно вид:

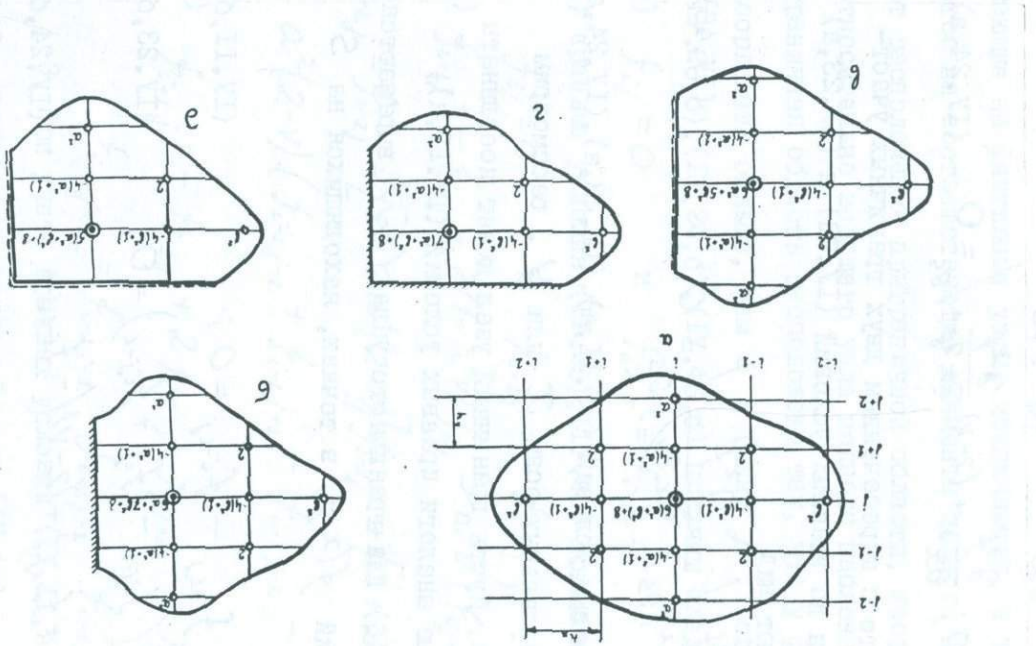


Рис. IУ.I. Шаблоны для построения конечномерной аппроксимации дифференциального оператора Δ^2 .

$$f\Big|_{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\partial s} = 0 \quad \text{и} \quad f\Big|_{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\partial s} = 0; \qquad \text{(IУ.II,а)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{\partial s} = 0; \qquad \text{(IУ.23,а)}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2}\Big|_{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\Big|_{\partial s} = 0. \qquad \text{(IУ.24,а)}$$

Для узла, совпадающего с пересечением двух граничных участков, угол γ неопределен и из краевых условий (IУ.23) и (IУ.23,а) получаем, что они принимают вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{\partial s} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{\partial s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{\partial s} = 0. \qquad \text{(IУ.46)}$$

В силу симметрии краевых условий (IУ.II,а),(IУ.23,а),(IУ.24,а) для участков границ, параллельных осям x или y, рассмотрим только правые соотношения. Пусть граничный узел имеет координаты (i,j). Конечно-разностные аналоги краевых условий (IУ.II,а), (IУ.23,а),(IУ.24,а),(IУ.46) для граничного узла (i,j) выражаются с помощью значений функций $f(x,y)$ в точках, находящихся на S и фиктивной области:

$$f_{ij} = 0 \quad \text{и} \quad f_{i+1j} - f_{i-1j} = 0; \qquad \text{(IУ.II,б)}$$

$$f_{i-1j} - 2f_{ij} + f_{i+1j} + a\nu\left(f_{ij-1} - 2f_{ij} + f_{ij+1}\right) = 0; \qquad \text{(IУ.23,б)}$$

$$b^2\left(-f_{i-2j} + 2f_{i-1j} - 2f_{i+1j} + f_{i+2j}\right) + (2-\nu)\left(-f_{i-1j-1} + \right. \qquad \text{(IУ.24,б)}$$

$$\left. + 2f_{i-1j} - f_{i-1j+1} + f_{i+1j-1} - 2f_{i+1j} + f_{i+1j+1}\right) = 0;$$

$$f_{i-1j} - 2f_{ij} + f_{i+1j} = 0, \quad f_{ij-1} - 2f_{ij} + f_{ij+1} = 0, \qquad \text{(IУ.46,б)}$$

$$- f_{i-1j-1} + f_{i+1j-1} - f_{i-1j+1} + f_{i+1j+1} = 0.$$

На основании равенств (IУ.II,б),(IУ.23,б),(IУ.24,б),(IУ.46,б) получаются зависимости функций $f(x,y)$ в фиктивных узлах от значений функций $f(x,y)$ в узлах, принадлежащих области S. При помощи этих зависимостей ненулевые элементы полного шаблона, попадающие на фиктивные узлы, исключаются, а точнее, перераспределяются на соответствующие элементы полного шаблона. В зависимости от расположения приграничной области, координаты фиктивных узлов относительно ведущего узла полного шаблона различны. Пусть приграничная область расположена так, что у фиктивных узлов первая координата больше, чем i и (или) j. Тогда из равенств (IУ.II,б), (IУ.23,б),(IУ.24,б),(IУ.46,б) получим следующие зависимости:

а) $f_{ij} = 0$ и $f_{i+1j} = f_{i-1j}$; (IУ.II,в)

б) краевые условия (IУ.25),(IУ.23) принимают вид

$$f_{ij} = 0 \quad \text{и} \quad f_{i+1j} = -f_{i-1j}; \tag{IУ.25,в}$$

в) $$f_{i+1j} = -f_{i-1j} + 2(1+a^2\nu) f_{ij} - a^2\nu (f_{ij-1} + f_{ij+1}), \tag{IУ.23,в}$$

$$f_{i+2j} = f_{i-2j} - \left[2 + 2\cdot a^2(2-\nu)\right] f_{i-1j} + \left[2 + 2a^2(2-\nu)\right] f_{i+1j} + a^2(2-\nu)\left(f_{i-1j-1} + f_{i-1j+1} - f_{i+1j-1} - f_{i+1j+1}\right); \tag{IУ.24,в}$$

г) $$f_{i+1j} = -f_{i-1j} + 2f_{ij}, \quad f_{ij+1} = -f_{ij-1} + 2f_{ij}; \tag{IУ.46,в}$$

$$f_{i+1j+1} = f_{i-1j-1} - f_{i+1j-1} + f_{i-1j+1}.$$

3. При учете краевых условий (IУ.II,в) или (IУ.25,в) левые части разностных уравнений типа (IУ.45), составленные для узла с координатами $(i-1, j)$, представлены на рис.IУ.I,б и в в виде неполных шаблонов. Они получены из полных шаблонов следующим образом [267]:

I/ отбрасыванием ненулевых элементов, попадающих на границу области S, так как в этих узлах $f_{ij} = 0$, $f_{ij-1} = 0$, $f_{ij+1} = 0$;

2/ перераспределением ненулевого элемента, оказавшегося на $(i+1,j)$ фиктивном узле, на $(i-1,j)$ элемент соответственно со знаком плюс или минус на основании равенств (IУ.II,в) и (IУ.25,в). Разности оператора (неполные шаблоны) с теми же краевыми условиями вблизи углового узла даны на рис.IУ.I,г и д.

4. Более сложными являются построения разностных операторов для узлов приграничной области при краевых условиях (IУ.23,в), (IУ.24,в) или (IУ.46,в). Сначала на рис.IУ.2а приведена конфигурация области и положение ведущего узла полного шаблона, когда краевые условия, при составлении разностного уравнения, еще не учитываются, т.е. используется полный шаблон. На рис.IУ.2 и IУ.3 даны неполные шаблоны для наиболее важных типов конфигураций приграничной области и расположения ведущего узла. Подробно разъясним методику получения неполных шаблонов, приведенных на рис.IУ.2,б,в,г, так как остальные и другие возможные варианты получаются аналогично. Предварительно заметим [I79], что в зависимости от конфигурации приграничной области и положения ведущего узла при построении разностного оператора полный шаблон участвует с различным коэффициентом K. Для вариантов, приведенных на рис.IУ.2 (а - д), коэффициент K берется соответственно равным 0,25; 0,75; 0,5; 0,5. При совпадении ведущего узла полного шаблона с любым внутренним узлом сетки вне зависимости от конфигурации приграничной области коэффициент K = I. Построим разностный оператор, приведенный на рис.IУ.2,б. Полный шаблон представим в виде матрицы размера 5x5

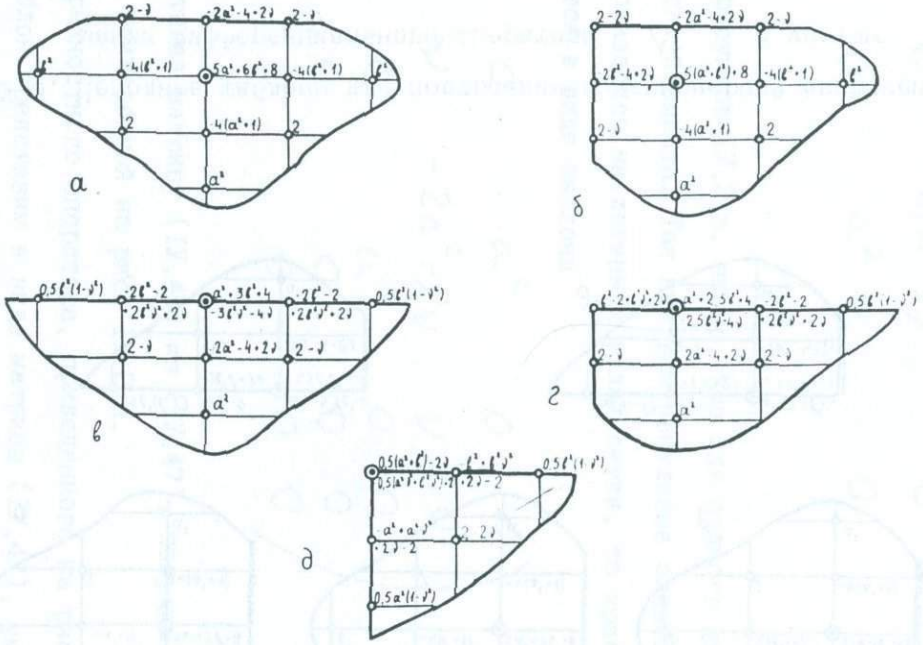


Рис. IУ.2. Неполные шаблоны для построения конечномерной аппроксимации дифференциального оператора Δ^2 с учетом краевых условий.

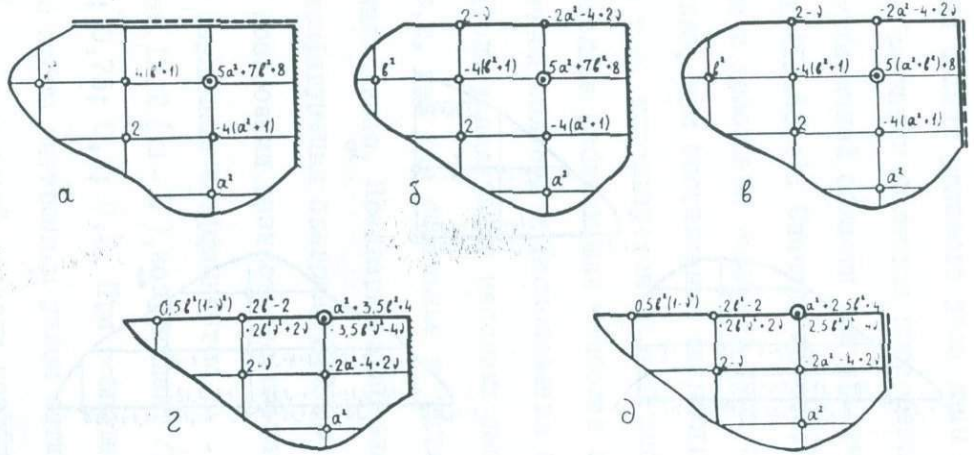


Рис. IУ.3. Неполные шаблоны для построения конечномерной аппроксимации дифференциального оператора Δ_r^2 с учетом краевых условий.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4(a^2+1) & 0 & 0 \\ b^2-4(b^2+1) & 6(a^2+b^2)+8 & -4(b^2+1) & b^2 & \\ 0 & 0 & -4(a^2+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (IУ.47)$$

Из рисунков IУ.2,а, видно, что для полного шаблона не хватает одного элемента. Так как все ненулевые элементы полного шаблона оказались на истинных узлах сетки, то краевые условия учитываются в виде шаблона

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & -2a^2-2\nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (IУ.48)$$

Вычитывая матрицу (IУ.48) из (IУ.47), получим разностный оператор, приведенный на рис. IУ.2,а.

Для разностного оператора, приведенного на рис. IУ.2,д, исходный шаблон представим в виде матрицы (IУ,47), умноженный на коэффициент $K = 0{,}25$. Далее, при помощи краевых условий перераспределим ненулевые элементы шаблона (матрицы), оказавшихся на фиктивных узлах сетки в следующем порядке:

I/ элементы a_{13} и a_{31} - по формулам типа (IУ.24,в);

2/ далее элемент a_{24} - по третьей формуле (IУ.46,в);

3/ a_{23} и a_{32} по первой и второй формулам типа (IУ.46,в) и a_{22} и a_{42} - по формулам типа (IУ.23,в).

В результате этих преобразований получим цепочку, последняя матрица которой совпадает с неполным шаблоном на рис. IУ.2,в:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -(a^2+1) & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{b^2}{4} & -(b^2+1) & \frac{3}{2}(a^2+b^2)+2 & -(b^2+1) & \frac{b^2}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -(a^2+1) & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{a^2+\nu}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -(b^2+1) & \frac{3}{2}(a^2+b^2)+2 & \frac{3b^2-4+\nu}{2} & \frac{b^2}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3a^2-4+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \text{(IУ.49)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2+\nu}{2} & \frac{\nu}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{b^2+\nu}{2} & \frac{3}{2}(a^2+b^2)+2 & \frac{-3b^2-4+\nu}{2} & \frac{b^2}{2} \\ 0 & \frac{\nu}{2} & \frac{-3a^2-4+\nu}{2} & 2-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2-a^2\nu^2-b^2\nu^2+4-4\nu}{2} & 2\nu-2+b^2+b^2\nu^2 & \frac{b^2(1-\nu^2)}{2} \\ 0 & 0 & 2\nu-2+a^2+a^2\nu^2 & 2-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & a^2(1-\nu^2)/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Еще раз отметим, что при построении цепочки (IУ.49) учтены все краевые условия для исключения ненулевых элементов полного шаблона, попадающих на фиктивные узлы.

МКР применяется также для решения задач со смешанными граничными условиями. Приведенные выше общие принципы и результаты работ [I79, с.393–400] облегчают самостоятельное построение матрицы $[\Delta^2+\beta E]_i$, $i=\overline{1,3}$, разностного аналога производной Фреше функционала (IУ.22) при соответствующих краевых условиях, т.е.

$$[\Omega'(z)]\{z\}=[\Delta^2+\beta E]_i\{z\},\quad i=\overline{1,3}, \qquad (IУ.50)$$

где $\{z\}$ – вектор неизвестных значений функции f_{ij} в узлах сетки.

В теории изгиба тонкой пластинки и в МКЭ $[\Delta^2+\beta E]_i$ называется глобальная матрица жесткости [I47,95, I38,32I].

5. Построение матриц $[\Delta^2+\beta E]_i$, $i=\overline{1,3}$, проведем для квадратной сетки, так как в этом случае $a=b=I$ и шаблоны значительно упрощаются [267]. С целью наглядности и простоты объяснения принципа построения матрицы $[\Delta^2+\beta E]_i$, $i=\overline{1,3}$, сразу для всех краевых условий возьмем в качестве примера прямоугольную область (рис.IУ.4), у которой участки границы: $x=0$ – жестко защемлен, $y=0$ – свободно оперт, $x=a$ и $y=b$ – свободны. Область S в направлении оси x разделим на m частей, а в направлении оси y – на n частей длины $h_x=h_y=h$. В пределах области S имеется $m\cdot n$ узлов с ненулевым значением функции z_{ij}. Поэтому в равенстве (IУ.50) матрица $[\Delta^2+\beta E]$ имеет размеры $mn\times mn$, а вектор $\{z\}$ длину mn. Разделим вектор z на m подвекторов $z=\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$. Каждый из подвекторов $z_i=\{z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{in}\}$, $i=\overline{1,m}$, имеет n составляющих, которые являются значениями функции $z_i(x,y)$ в узлах, лежащих на линии i, параллельной оси y.

Матрица $[\Delta^2+\beta E]$ содержит коэффициенты, показанные на шаблонах рис.IУ.I, IУ.2, IУ.3 при $a=b=I$. На основе этих

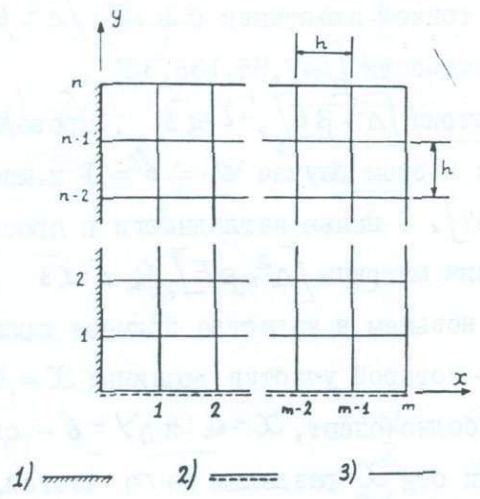


Рис. IУ.4. Прямоугольная область с различными краевыми условиями для построения матрицы $[\Delta^2 + \beta E]$.

шаблонов легко приходим к выводу, что в разностных операторах, относящихся к узлам, лежащим на линии i, входят значения $z(x,y)$ в узлах, лежащих на этой линии, а также на четырех соседних линиях $i \pm 1$, $i \pm 2$.

Поэтому матрица $[\Delta^2 + \beta E]$ представляет собой ленточную матрицу следующей структуры

$$[\Delta^2+\beta E] = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{12} & K_{13} & & & & & & & \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & & & & & & \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & & & & & \\ & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & K_{m-2,m-4} & K_{m-2,m-3} & K_{m-2,m-2} & K_{m-2,m-1} & K_{m-2,m} \\ & & & & & & & K_{m-1,m-3} & K_{m-1,m-2} & K_{m-1,m-1} & K_{m-1,m} \\ & & & & & & & & K_{m,m-2} & K_{m,m-1} & K_{m,m} \end{pmatrix} \quad (IУ.5I)$$

Так как область S прямоугольная, то каждая из подматриц имеет размер $n \times n$ и является снова ленточной. При правильном расположении шаблонов подматрицы $K_{i,i}$ содержат коэффициенты, попадающие на вертикальную линию i. Ширина ленты подматриц соответствует числу ненулевых коэффициентов, которое равно 5. Из тех же шаблонов следует, что ширина ленты подматриц $K_{i,i+1}$ равна 3. Наконец, подматрицы $K_{i,i\pm2}$ представляют собой диагональные матрицы, главным образом, единичные.

Структура подматрицы $K_{1,1}$ зависит от краевых условий на границах $x = 0$, $y = 0$ и $y = b$, причем два последних условия влияют лишь на вид двух первых и двух последних строк.

На основании соответствующих шаблонов, представленных на рис. IУ.I, IУ.2, IУ.3, получим

$$K_{1,1}=\begin{pmatrix}
20+\beta & -8 & 1 & & & \\
-8 & 21+\beta & -8 & 1 & & \\
1 & -8 & 21+\beta & -8 & 1 & \\
 & 1 & -8 & 21+\beta & -8 & 1 \\
 & & 1 & -8 & 20+\beta & -2(3-\nu) \\
 & & & 1 & -2(3-\nu) & \frac{17-8\nu-5\nu^2}{2}+\beta
\end{pmatrix}$$

Подматрицы $K_{i,i}$ одинаковы при $i = 2,3,\ldots,m-3$ и только их крайние строки зависят от краевых условий на линиях $y = 0$ и $y=b$. Пользуясь шаблонами, представленными на рис. IУ.I,б и IУ.2,б, получим

$$K_{i,i}=\begin{pmatrix}
19+\beta & -8 & 1 & & & \\
-8 & 20+\beta & -8 & 1 & & \\
1 & -8 & 20+\beta & -8 & 1 & \\
 & 1 & -8 & 20+\beta & -8 & 1 \\
 & & 1 & -8 & 19+\beta & -2(3-\nu) \\
 & & & 1 & -2(3-\nu) & 8-4\nu-3\nu^2+\beta
\end{pmatrix}$$

На структуру подматрицы $K_{m-1,m-1}$ и $K_{m,m}$ оказывают влияние, главным образом, краевые условия на $x=a$ и $y=b$. На основании шаблонов рис. IУ.2,в и IУ.3 устанавливаем, что

$$K_{m-1,m-1} = \begin{pmatrix} 18+\beta & -8 & 1 & & & \\ -8 & 19+\beta & -8 & 1 & & \\ 1 & -8 & 19+\beta & -8 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & -8 & 19+\beta & -8 & 1 & \\ & 1 & -8 & 18+\beta & -2(3-\nu) & \\ & & 1 & -2(3-\nu) & \frac{15-8\nu-5\nu^2}{2}+\beta & \end{pmatrix}$$

и

$$K_{m,m} = \begin{pmatrix} \frac{15-8\nu-5\nu^2}{2}+\beta & -2(2+\nu)(1-\nu) & \frac{1-\nu^2}{2} & & & \\ -2(2+\nu)(1-\nu) & 8-4\nu-3\nu^2+\beta & -2(2+\nu)(1-\nu) & \frac{1-\nu^2}{2} & & \\ \frac{1-\nu^2}{2} & -2(2+\nu)(1-\nu) & 8-4\nu-3\nu^2+\beta & -2(2+\nu)(1-\nu) & \frac{1-\nu^2}{2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{1-\nu^2}{2} & -2(2+\nu)(1-\nu) & 8-4\nu-3\nu^2+\beta & -2(2+\nu)(1-\nu) & \frac{1-\nu^2}{2} & \\ & \frac{1-\nu^2}{2} & -2(2+\nu)(1-\nu) & \frac{15-8\nu-5\nu^2}{2}+\beta & -(3+\nu)(1-\nu) & \\ & & \frac{1-\nu^2}{2} & -(3+\nu)(1-\nu) & (3+\nu)(1-\nu)+\beta & \end{pmatrix}$$

Почти все матрицы $K_{i,i-1}$ одинаковы и имеют вид

$$K_{i,i+1} = K_{i+1,i} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & & & \\ 2 & -8 & 2 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 2 & -8 & 2 \\ & & & 2 & -8 & 2-\nu \\ & & & & 2-\nu & -4+2\nu+2\nu^2 \end{pmatrix}$$

Только при $i = m-1$ согласно рис. IV.2,

$$K_{m,m-1} = K_{m-1,m} = \begin{pmatrix} -6+2\nu & 2-\nu & & & \\ 2-\nu & -6+2\nu & 2-\nu & & \\ & 2-\nu & -6+2\nu & 2-\nu & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2-\nu & -6+2\nu & 2-\nu \\ & & & & 2-\nu & -3+2\nu+\nu^2 \end{pmatrix}$$

Наконец, все матрицы $K_{i,i+2}$ в рассматриваемом случае являются единичными при $i = 1,2,\ldots,m-3$. При $i = m-2$, согласно шаблону на рис. IV.2,в, имеем

$$K_{m-2,m} = K_{m,m-2} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \frac{1-\nu^2}{2} \end{pmatrix}$$

Запись соответствующих матриц $K_{i,j}$ для областей S с другой конфигурацией границы ∂S не вызывает особых затруднений. Разница заключается в том, что на каждом i-ом столбце число переменных уже будет различным и соответственно подматрицы $K_{i,j}$ также имеют переменную размерность.

В приведенном примере содержатся основные элементы для самостоятельного построения конечномерных аналогов дифференциального оператора $\Delta^2 + \beta E$ при краевых условиях (IV.11),(IV.25), (IV.23),(IV.24), которые обозначим соответственно через $[\Delta^2 + \beta E]_i$, $i = \overline{1,3}$.

§ 4. Вычислительные схемы для решения трехмерной линейной обратной задачи гравиметрии в пространстве $L_2(S)$ и результаты модельных расчетов

I. В основе вычислительной схемы решения трехмерной ЛОЗГ в классе $L_2(S)$ распределения плотностей лежит двойственный метод, который сводит задачу к нахождению последовательности регуляризованных решений интегро-дифференциального уравнения (IУ.39) и выбору параметра α. Используя формулы (I.8) и (I.I6), запишем уравнение (IУ.39) в развернутом виде

$$G\bar{G}\iiint_S \frac{\zeta-z}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}}\left(\iint_Q \frac{(\zeta-z_0)\gamma(x_0,y_0,z_0)\,dQ}{[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta-z_0)^2]^{3/2}}\right)dS +$$

$$+\alpha(\Delta^2+\beta E)_i\,\gamma = V_{zH} - \iiint_S \frac{(\zeta-z)\,\sigma_0(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}} + \alpha(\Delta^2+\beta E)_i\,\gamma_0, \qquad (IУ.51)$$

$$i=\overline{1,3},\ (x,y,z)\in Q,\ V_{zH}\ и\ \gamma\in L_2(Q).$$

Для численной аппроксимации интегрального оператора необходимо построить конечномерные аналоги интегральных операторов A и A^*, т.е. матриц $[A]$ и $[A^*]$.

2. Построение матрицы $[A]$. Область интегрирования $S\subset R_3$, где ищется неизвестное распределение плотности $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$, разбивается выбранной сеткой на трехмерные прямоугольные конечные элементы (ПКЭ) $V^{(\rho)}$, границы которых параллельны координатным плоскостям $\xi O\eta$, $\xi O\zeta$ и $\eta O\zeta$ (рис.IУ.5), т.е.

$$S = V = \bigcup_{\rho=1}^{N} V^{(\rho)}, \qquad (IУ.52)$$

где N – общее число ПКЭ [267]. В каждом ρ –ом элементе возьмем восемь узлов, которые совпадают с вершинами параллелепипеда

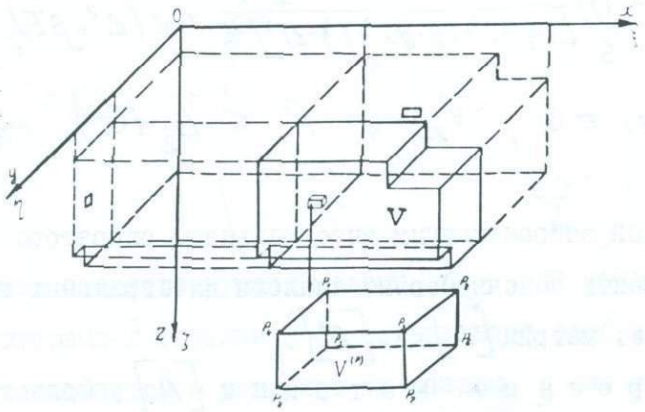


Рис. IУ.5. Общий вид области V и прямоугольного конечного элемента $V^{(P)}$ для аппроксимации трехмерных функций.

ρ_k, $k=\overline{1,8}$. Еще раз отметим, что вершины параллелепипеда $V^{(p)}$ совпадают с узлами прямоугольной сетки. Пронумеруем узлы прямоугольной сетки. Обозначим через NV общее количество узлов сетки, а неизвестные значения плотностей в этих узлах через вектор $\{\sigma\}=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{NV}\}$. Пусть в каждом ПКЭ $V^{(p)}$ поведение неизвестной функции $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$ описывается полиномом

$$\sigma(\xi,\eta,\zeta)\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)\in V^{(p)}} = \sigma^{(p)}(\xi,\eta,\zeta) = \sigma^{(p)} = a_1 + a_2\xi + \tag{IУ.53}$$

$$+ a_3\eta + a_4\zeta + a_5\xi\eta + a_6\xi\zeta + a_7\eta\zeta + a_8\xi\eta\zeta.$$

Выразим коэффициенты a_k, $k=\overline{1,8}$, через значения плотностей σ_{ρ_k} в вершинах параллелепипеда $V^{(p)}\rho_k$, $k=\overline{1,8}$. Поэтому коэффициенты a_k должны удовлетворять системе

$$\sigma_{\rho_k} = a_1 + a_2\xi_{\rho_k} + a_3\eta_{\rho_k} + a_4\zeta_{\rho_k} + a_5\xi_{\rho_k}\eta_{\rho_k} + a_6\xi_{\rho_k}\zeta_{\rho_k} + \tag{IУ.54}$$

$$+ a_7\eta_{\rho_k}\zeta_{\rho_k} + a_8\xi_{\rho_k}\eta_{\rho_k}\zeta_{\rho_k} = \sigma_{\rho_k},\ k=\overline{1,8},$$

где $(\xi_{\rho_k},\eta_{\rho_k},\zeta_{\rho_k})$ – координаты k-ого узла ρ-ого КЭ.

В векторе $\{\sigma\}$ каждая из σ_{ρ_k}, $k=\overline{1,8}$, имеет свое определенное место. Отметим, что один и тот же узел прямоугольной сети может принимать участие в различных элементах разбиения области и поэтому может иметь несколько индексаций. Определение номеров ρ_k, $k=\overline{1,8}$, ρ-ого элемента в связанной модели, т.е. в глобальной нумерации, для произвольной области V прямоугольного типа зависит от ее конфигурации и размеров конечных элементов $V^{(p)}$. С целью уменьшения вводимой информации и ручного труда процесс определения номера ρ_k в связанной модели автоматизирован, т.е. составлена подпрограмма (модуль), вычисляющая значения этих номеров в глобальной нумерации.

Найдя значения коэффициентов a_k, $k=\overline{1,8}$, из системы (IУ.54) и подставив их в равенство (IУ.53), после несложных пре-

образований получим равенство

$$\sigma^{(p)}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{k=1}^{8} N_k^{(p)}(\xi,\eta,\zeta)\,\sigma_{p_k}, \qquad (IV.55)$$

где локально аппроксимационные функции $N_k^{(p)}(\xi,\eta,\zeta)$ имеют вид:

$$N_1^{(p)} = H^{(p)}(\xi_{p_2}-\xi)(\eta_{p_4}-\eta)(\zeta_{p_5}-\zeta), \quad N_5^{(p)} = H^{(p)}(\xi_{p_2}-\xi)(\eta_{p_4}-\eta)(\zeta-\zeta_{p_1}),$$

$$N_2^{(p)} = H^{(p)}(\xi-\xi_{p_1})(\eta_{p_4}-\eta)(\zeta_{p_5}-\zeta), \quad N_6^{(p)} = H^{(p)}(\xi-\xi_{p_1})(\eta_{p_4}-\eta)(\zeta-\zeta_{p_1}), \qquad (IV.56)$$

$$N_3^{(p)} = H^{(p)}(\xi-\xi_{p_1})(\eta-\eta_{p_1})(\zeta_{p_5}-\zeta), \quad N_7^{(p)} = H^{(p)}(\xi-\xi_{p_1})(\eta-\eta_{p_1})(\zeta-\zeta_{p_1}),$$

$$N_4^{(p)} = H^{(p)}(\xi_{p_2}-\xi)(\eta-\eta_{p_1})(\zeta_{p_5}-\zeta), \quad N_8^{(p)} = H^{(p)}(\xi_{p_2}-\xi)(\eta-\eta_{p_1})(\zeta-\zeta_{p_1}),$$

$$H^{(p)} = \left[(\xi_{p_2}-\xi_{p_1})(\eta_{p_4}-\eta_{p_1})(\zeta_{p_5}-\zeta_{p_1})\right]^{-1}.$$

Локально аппроксимационные функции $N_k^{(p)}$, $k=\overline{1,8}$, которые называются также функциями формы, равны единице в узле p_k и нулю в остальных узлах.

Неизвестная функция $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$ в МКЭ представляется в виде

$$\sigma(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{p=1}^{N} \widetilde{\sigma}^{(p)}(\xi,\eta,\zeta), \qquad (IV.57)$$

где

$$\widetilde{\sigma}^{(p)} = \begin{cases} \sigma^{(p)}, & (\xi,\eta,\zeta) \in V^{(p)}, \\ 0, & (\xi,\eta,\zeta) \bar{\in} V^{(p)} \end{cases}$$

Для того, чтобы распределение плотности $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$ более наглядно выразить через вектор $\{\sigma\}$, в МКЭ вводится функция дискретного аргумента

$$\Omega_{Ki}^{(p)} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } P_K \text{ элемента } V^{(p)} \\ \text{совпадает с } i\text{-ым узлом прямоугольной} \\ \text{сетки,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases} \qquad (IV.58)$$

Тогда представление (IV.57) можно записать следующим образом

$$\sigma(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{p=1}^{N} \widetilde{\sigma}^{(p)}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{K=1}^{8} \sum_{i=1}^{NV} \Omega_{Ki}^{(p)} \widetilde{N}_K^{(p)} \sigma_i = \qquad (IV.59)$$

$$= \sum_{i=1}^{NV} \left(\sum_{p=1}^{N} \sum_{K=1}^{8} \Omega_{Ki}^{(p)} \widetilde{N}_K^{(p)} \right) \sigma_i = \sum_{i=1}^{NV} \phi_i \sigma_i .$$

Функции $\phi_i(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{K=1}^{8} \Omega_{Ki}^{(p)} \widetilde{N}_K^{(p)}(\xi,\eta,\zeta)$, $i = \overline{1,NV}$,

называются базисными или глобально аппроксимационными [95, 138, 285, 215, 321]. Обозначим носитель функции $\phi_i(\xi,\eta,\zeta)$ через $V_{(i)}$.

Значение оператора $A\sigma$ в произвольной точке $(x,y,z) \in Q$, с учетом выражений (IV.52), (IV.55), (IV.57), (IV.59), представляется в виде скалярного произведения вектор-функции $\{A(x,y,z)\}$ и вектора $\{\sigma\}$. Действительно [267],

$$A\sigma\Big|_{(x,y,z)\in Q} = \sum_{p=1}^{N} G \iiint_{V^{(p)}} \frac{(\zeta - z)\,\sigma^{(p)}(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2\right]^{3/2}} =$$

$$= \sum_{p=1}^{N} G \iiint_{V^{(p)}} \frac{(\zeta - z)\left(\sum_{K=1}^{8} N_K^{(p)} \sigma_K\right) d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2\right]^{3/2}} = \qquad (IV.60)$$

$$= \sum_{p=1}^{N} \sum_{K=1}^{8} \left(G \iiint_{V^{(p)}} \frac{(\zeta - z) N_K^{(p)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2\right]^{3/2}} \right) \sigma_K =$$

$$= \sum_{p=1}^{N} \sum_{K=1}^{8} \sum_{i=1}^{NV} \left(\Omega_{Ki}^{(p)} G \iiint_{V^{(p)}} \frac{(\zeta - z) N_K^{(p)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2\right]^{3/2}} \right) \sigma_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{NV} \left(G \iiint_{V(i)} \frac{(\zeta - z)\,\phi_i(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{3/2}} \right) \sigma_i = \sum \left\{ A^{(\rho)}(x,y,z) \right\} \{\sigma\} =$$

$$= \left\{ \sum_{\rho=1}^{N} A^{(\rho)}(x,y,z) \right\} \{\sigma\} = \{ A(x,y,z) \} \{\sigma\},$$

где элементы вектор-функции $\{A^{(\rho)}(x,y,z)\}$, связанные с индексами ρ_κ, $\kappa = \overline{1,8}$, равны

$$a_{\rho_\kappa}^{(\rho)} = G \iiint_{V^{(\rho)}} \frac{(\zeta - z)\,N_\kappa^{(\rho)}(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{3/2}}, \quad \kappa = \overline{1,8}, \qquad (IV.61)$$

а остальные – нулю.

Компоненты $a_j(x,y,z)$, $j = \overline{1,NV}$, вектор-функции $\{A(x,y,z)\}$ совпадают с гравитационным эффектом базисных функций ϕ_j, $j = \overline{1,NV}$, в точке наблюдения $(x,y,z) \in Q$.

Пусть множество единственности Q аппроксимировано N конечными элементами, общее количество вершин (узлов) которых равно NQ. Узлы имеют координаты (x_i, y_i, z_i), $i = \overline{1,NQ}$, которые совпадают с точками наблюдения поля V_{zH}. Для конструирования $[A]$ необходимо вычислить значения вектор-функции $\{A(x,y,z)\}$ в узлах (x_i, y_i, z_i), $i = \overline{1,NQ}$, и полученные вектора $\{A(x_i,y_i,z_i)\}$ объединить в виде матрицы.

Таким образом матрица $[A]$ равна

$$[A] = \left[a_j(x_i,y_i,z_i) \right] = \left[a_{ij} \right], \quad i = \overline{1,NQ}, \quad j = \overline{1,NV}. \qquad (IV.62)$$

На основании равенства $\{A(x,y,z)\} = \sum_{\rho=1}^{N} \{A^{(\rho)}(x,y,z)\}$ для получения элемента a_{ij} необходимо вычислить значения интегралов (IV.61) в точках (x_i, y_i, z_i), $i = \overline{1,NQ}$, от всех ПКЭ $V^{(\rho)}$, $\rho = \overline{1,N}$, и функций формы $N_\kappa^{(\rho)}$ при различных $\kappa = \overline{1,8}$, т.е. вычислить $8 \times NQ \times N$ интегралов вида

$$a^{(p)}_{i\rho_k} = a^{(p)}_{\rho_k}(x_i, y_i, z_i) = G\int_{\xi_{\rho_1}}^{\xi_{\rho_2}}\int_{\eta_{\rho_1}}^{\eta_{\rho_4}}\int_{\zeta_{\rho_1}}^{\zeta_{\rho_5}} \frac{(\zeta - z_i) N^{(p)}_k \, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\left[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 + (\zeta - z_i)^2\right]^{3/2}}, \quad k = \overline{1,8}. \qquad (IУ.63)$$

Объединим элементы $a^{(p)}_{i\rho_k}$ в вектор $\{D_i^{(p)}\}$.

Интегралы (IУ.63) вычисляются точно или приближенно, при помощи декартовых произведений квадратур типа Гаусса–Лежандра [47, 339], в зависимости от времени счета на ЭВМ. Для точного вычисления интегралов (IУ.63) произведем замену переменных $\xi' = \xi - x_i$, $\eta' = \eta - y_i$, $\zeta' = \zeta - z_i$. Пределы интегрирования в новых переменных будут

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_{\rho_1} - x_i, \quad \eta_1' = \eta_{\rho_1} - y_i, \quad \zeta_1' = \zeta_{\rho_1} - z_i, \\ \xi_2' &= \xi_{\rho_2} - x_i, \quad \eta_2' = \eta_{\rho_4} - y_i, \quad \zeta_2' = \zeta_{\rho_5} - z_i. \end{aligned} \qquad (IУ.64)$$

В новых координатах функции формы $N^{(p)}_k(\xi, \eta, \zeta)$ принимают вид, который позволяет записать их в удобной векторной форме

$$\left\{N^{(p)}(\xi', \eta', \zeta')\right\} = \left[C^{(p)}\right]\left\{\zeta'\right\}, \qquad (IУ.65)$$

где матрица

$$\left[C^{(p)}\right] = H^{(p)} \begin{pmatrix} \xi_2'\eta_2'\zeta_2' & -\eta_2'\zeta_2' & -\xi_2'\zeta_2' & \zeta_2' & -\xi_2'\eta_2' & \eta_2' & \xi_2' & -1 \\ -\xi_1'\eta_2'\zeta_2' & \eta_2'\zeta_2' & \xi_1'\zeta_2' & -\zeta_2' & \xi_1'\eta_2' & -\eta_2' & -\xi_1' & 1 \\ \xi_1'\eta_1'\zeta_2' & -\eta_1'\zeta_2' & -\xi_1'\zeta_2' & \zeta_2' & -\xi_1'\eta_1' & \eta_1' & \xi_1' & -1 \\ -\xi_2'\eta_2'\zeta_2' & \eta_1'\zeta_2' & \xi_2'\zeta_2' & -\zeta_2' & \xi_2'\eta_2' & -\eta_1' & -\xi_2' & 1 \\ -\xi_2'\eta_2'\zeta_1' & \eta_2'\zeta_1' & \xi_2'\zeta_1' & -\zeta_1' & \xi_2'\eta_2' & -\eta_2' & -\xi_2' & 1 \\ \xi_1'\eta_1'\zeta_1' & -\eta_2'\zeta_1' & -\xi_1'\zeta_1' & \zeta_1' & -\xi_1'\eta_2' & \eta_2' & \xi_1' & -1 \\ -\xi_1'\eta_1'\zeta_1' & \eta_1'\zeta_1' & \xi_1'\zeta_1' & -\zeta_1' & \xi_1'\eta_1' & -\eta_1' & -\xi_1' & 1 \\ \xi_2'\eta_1'\zeta_1' & -\eta_1'\zeta_1' & -\xi_2'\zeta_1' & \zeta_1' & -\xi_2'\eta_1' & \eta_1' & \xi_2' & -1 \end{pmatrix},$$

$$\{J'(\xi';\eta';\zeta')\} = \{1, \xi', \eta', \zeta', \xi'\eta', \xi'\zeta', \eta'\zeta', \xi'\eta'\zeta'\}.$$

Учитывая соотношения (IУ.63)–(IУ.65) элементы $a_{\rho_\kappa}^{(\rho)}$, $\kappa = \overline{1,8}$, предоставляются в виде [267]

$$a_{\rho_\kappa}^{(\rho)} = G\int_{\xi_1'}^{\xi_2'}\int_{\eta_1'}^{\eta_2'}\int_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} \frac{\zeta'}{R^3}\left(\sum_{m=1}^{8} C_{\kappa,m}^{(\rho)} J_m'(\xi';\eta';\zeta')\right) d\xi' d\eta' d\zeta' = \tag{IУ.66}$$

$$= G\sum_{m=1}^{8} C_{\kappa,m}^{(\rho)}\left(\int_{\xi_1'}^{\xi_2'}\int_{\eta_1'}^{\eta_2'}\int_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} \frac{\zeta'}{R^3} J_m'(\xi';\eta';\zeta')\, d\xi' d\eta' d\zeta'\right) =$$

$$= G\left[C^{(\rho)}\right]\{J\},$$

где вектор $\{J\} = \{J_1, \ldots, J_8\}$, $J_\kappa = \int_{\xi_1'}^{\xi_2'}\int_{\eta_1'}^{\eta_2'}\int_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} \frac{\zeta'}{R^3} J_\kappa' d\xi' d\eta' d\zeta'$.

Вычислим аналитические значения J_κ, $\kappa = \overline{1,8}$:

$$J_1 = \int_{\xi_1'}^{\xi_2'}\int_{\eta_1'}^{\eta_2'}\int_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} \frac{\zeta'}{R} d\xi' d\eta' d\zeta' = \tag{IУ.67}$$

$$= \left[\xi' \ln(R+\eta') + \eta' \ln(R+\xi') - \zeta' \operatorname{arctg} \frac{\xi'\eta'}{\zeta' R}\right]\Bigg|_{\xi'=\xi_1'}^{\xi_2'}\Bigg|_{\eta'=\eta_1'}^{\eta_2'}\Bigg|_{\zeta'=\zeta_1'}^{\zeta_2'};$$

$$J_2 = \int_{\xi_1'}^{\xi_2'}\int_{\eta_1'}^{\eta_2'}\int_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} \frac{\xi'\zeta'}{R^3} d\xi' d\eta' d\zeta' =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\eta' R + \left(\xi'^2 + \zeta'^2\right)\ln(R+\eta')\right]\Bigg|_{\xi'=\xi_1'}^{\xi_2'}\Bigg|_{\eta'=\eta_1'}^{\eta_2'}\Bigg|_{\zeta'=\zeta_1'}^{\zeta_2'}. \tag{IУ.68}$$

$$J_3 = \int_{\xi_1'}^{\xi_2'}\int_{\eta_1'}^{\eta_2'}\int_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} \frac{\eta'\zeta'}{R^3} d\xi' d\eta' d\zeta' = \tag{IУ.69}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\xi' R + (\eta'^2 + \zeta'^2)\ln(R+\xi')\right]\Bigg|_{\xi'=\xi_1'}^{\xi_2'} \Bigg|_{\eta'=\eta_1'}^{\eta_2'} \Bigg|_{\zeta'=\zeta_1'}^{\zeta_2'};$$

$$J_4 = \int_{\xi_1'}^{\xi_2'}\int_{\eta_1'}^{\eta_2'}\int_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} \frac{\xi'\eta'\zeta'}{R^3}\,d\xi'd\eta'd\zeta' = \frac{1}{3}R^3 \Bigg|_{\xi'=\xi_1'}^{\xi_2'} \Bigg|_{\eta'=\eta_1'}^{\eta_2'} \Bigg|_{\zeta'=\zeta_1'}^{\zeta_2'}; \tag{IV.70}$$

$$J_5 = \int_{\xi_1'}^{\xi_2'}\int_{\eta_1'}^{\eta_2'}\int_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} \frac{\zeta'^2}{R^3}\,d\xi'd\eta'd\zeta' = \frac{1}{2}\Bigg[\xi'^2 \operatorname{arctg}\frac{\eta'\zeta'}{\xi' R} + \tag{IV.71}$$

$$+ \eta'^2 \operatorname{arctg}\frac{\xi'\zeta'}{\eta' R} - \zeta'^2 \operatorname{arctg}\frac{\xi'\eta'}{\zeta' R} - \xi'\eta'\ln(R+\zeta')\Bigg]\Bigg|_{\xi'=\xi_1'}^{\xi_2'} \Bigg|_{\eta'=\eta_1'}^{\eta_2'} \Bigg|_{\zeta'=\zeta_1'}^{\zeta_2'};$$

$$J_6 = \int_{\xi_1'}^{\xi_2'}\int_{\eta_1'}^{\eta_2'}\int_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} \frac{\zeta'^2\xi'}{R^3}\,d\xi'd\eta'd\zeta' = \frac{1}{6}\Bigg[2\zeta'^3\ln(R+\eta') + \eta'\zeta' R - \tag{IV.72}$$

$$- \eta'(3\xi'^2 + \eta'^2)\ln(R+\zeta') + 2\xi'^3 \operatorname{arctg}\frac{\eta'\zeta'}{\xi' R}\Bigg]\Bigg|_{\xi'=\xi_1'}^{\xi_2'} \Bigg|_{\eta'=\eta_1'}^{\eta_2'} \Bigg|_{\zeta'=\zeta_1'}^{\zeta_2'};$$

$$J_7 = \int_{\xi_1'}^{\xi_2'}\int_{\eta_1'}^{\eta_2'}\int_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} \frac{\zeta'^2\eta'}{R^3}\,d\xi'd\eta'd\zeta' = \frac{1}{6}\Bigg[2\eta'^3\ln(R+\xi') + \xi'\zeta' R - \tag{IV.73}$$

$$- \xi'(3\eta'^2 + \xi'^2)\ln(R+\zeta') + 2\eta'^3 \operatorname{arctg}\frac{\xi'\zeta'}{\eta' R}\Bigg]\Bigg|_{\xi'=\xi_1'}^{\xi_2'} \Bigg|_{\eta'=\eta_1'}^{\eta_2'} \Bigg|_{\zeta'=\zeta_1'}^{\zeta_2'};$$

$$J_8 = \int_{\xi_1'}^{\xi_2'}\int_{\eta_1'}^{\eta_2'}\int_{\zeta_1'}^{\zeta_2'} \frac{\xi'\eta'\zeta'}{R^3}\, d\xi' d\eta' d\zeta' = \frac{1}{8}\Big[2\zeta' R^3 - \zeta' R(\xi'^2+\eta'^2) - (\xi'^2+\eta'^2)\ln(R+\zeta')\Big]\Big|_{\xi'=\xi_1'}^{\xi_2'}\Big|_{\eta'=\eta_1'}^{\eta_2'}\Big|_{\zeta'=\zeta_1'}^{\zeta_2'}, \qquad (IУ.74)$$

где $R = \left[\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2\right]^{1/2}$.

Вычислим при фиксированном $p=\overline{1,N}$ вектора $\{D_i^{(p)}\}$, $i=\overline{1,NQ}$, с помощью соотношений (IУ.67)-(IУ.75) и преобразуем их в $\{A_i^{(p)}\}$. Суммируя по $p=\overline{1,N}$ при фиксированном i вектора $\{A_i^{(p)}\}$, получим i-ую строку матрицы $[A]$. Перебором всех i заканчивается конструирование матрицы $[A]$, которая имеет размеры $NQ \times NV$.

3. Построение матрицы $[A^*]$. МКЭ позволяет конструировать численную аппроксимацию оператора A^* для произвольного множества Q [285, с.55]. Однако эти конструкции требуют долгого объяснения и в работе ограничимся случаем, когда Q совпадает с плоскостью $z = z_1 = const$ (рис.IУ.6). Тогда $dQ = dx\,dy$ и

$$A^*\varphi = \bar{G}\iint_Q \frac{(\zeta - z_1)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z_1)^2\right]^{3/2}}, \quad (\xi,\eta,\zeta)\in V. \qquad (IУ.76)$$

При решении практических задач множество точек наблюдения конечно, поэтому Q всегда ограничена. Разбиение множества Q на конечные элементы $Q^{(e)}$ прямоугольной сеткой и глобальную нумерацию узлов нужно проводить обязательно также, как и при построении матриц $[\Delta^2+\beta E]_i$, $i=\overline{1,3}$.

Тогда множество Q представимо в виде объединения двухмерных КЭ

$$Q = \bigcup_{e=1}^{M} Q^{(e)} \qquad (IУ.77)$$

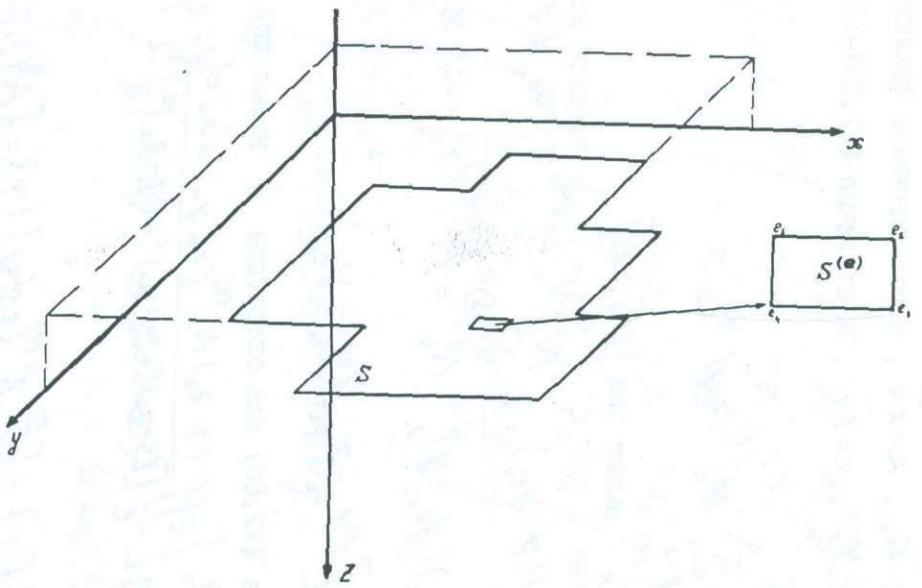


Рис. IУ.6. Область задания наблюденного поля Q на плоскости $Z = const$ и конечный элемент $Q^{(e)}$ в прямоугольной системе координат.

и имеют NQ узлов.

Пусть на каждом e -ом элементе изменение функции $\varphi(x,y)$ описывается полиномом

$$\varphi(x,y)\Big|_{(x,y)\in Q^{(e)}} = \varphi^{(e)} = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy. \quad (IУ.78)$$

Выразив значения a_κ, $\kappa = \overline{1,4}$, через значение функции φ в узлах $\Pi\kappa^{(e)}$, т.е. через φ_{e_κ}, $\kappa = \overline{1,4}$, аналогично (IУ.53)-(IУ.55), получим

$$\varphi^{(e)}(x,y) = \sum_{\kappa=1}^{4} N_\kappa^{(e)}(x,y)\,\varphi_{e_\kappa}, \quad (IУ.79)$$

где функции формы $N_\kappa^{(e)}$ имеют вид [285,321]

$$N_1^{(e)} = H^{(e)}(x_{e_2}-x)(y-y_{e_4}), \quad N_2^{(e)} = H^{(e)}(x-x_{e_1})(y-y_{e_4}),$$

$$N_3^{(e)} = H^{(e)}(x-x_{e_1})(y_{e_1}-y), \quad N_4^{(e)} = H^{(e)}(x_{e_2}-x)(y_{e_1}-y),$$

$$H^{(e)} = \left[(x_{e_2}-x_{e_1})(y_{e_4}-y_{e_1})\right]^{-1}.$$

Аналог равенства (IУ.60) для оператора A^* имеет вид

$$A^*\varphi\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)\in V} = \sum_{e=1}^{M}\left\{\bar{G}\sum_{\kappa=1}^{4}\left[\iint_{e}\frac{(\zeta-z_1)N_\kappa^{(e)}(x_0,y_0)\,dx_0\,dy_0}{\left[(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta-z_1)^2\right]^{3/2}}\varphi_{e_\kappa}\right\}\right. = \quad (IУ.80)$$

$$= \sum_{e=1}^{M}\left\{A^{*(e)}(\xi,\eta,\zeta)\right\}\{\varphi\} = \left\{\sum_{e=1}^{M}A^{*(e)}(\xi,\eta,\zeta)\right\}\{\varphi\} = \left\{A^*(\xi,\eta,\zeta)\right\}\{\varphi\}.$$

Проведя далее преобразования и рассуждения, подобные при построении матрицы $[A]$, сразу запишем аналоги выражений (IУ.63) и (IУ.66) для определения $[A^*]$, а именно:

$$a^{*(e)}_{j,e_\kappa} = a^{*(e)}_{e_\kappa}(\xi_j,\eta_j,\zeta_j) = \bar{G}\iint_{Q^{(e)}}\frac{(\zeta_j-z_1)N_\kappa^{(e)}(x,y)\,dx\,dy}{\left[(\xi_j-x)^2+(\eta_j-y)^2+(\zeta_j-z_1)^2\right]^{3/2}}, \quad (IУ.81)$$

где (ξ_j, η_j, ζ_j), $j=\overline{1,NV}$ – узлы разбиения области V, ℓ_κ, $\kappa=\overline{1,4}$, – номера узлов элемента $Q^{(e)}$, $N_\kappa^{(e)}$, $K=\overline{1,4}$, – функции формы для области $Q^{(e)}$, вектор

$$\{D_j^{(e)}\} = \bar{G}\left[C^{(e)}\right]\{Z\}, \qquad \text{(IУ.82)}$$

где

$$\left[C^{(e)}\right] = H^{(e)}\begin{pmatrix} -x_2'y_2' & y_1' & x_2' & -1 \\ x_1'y_1' & -y_1' & -x_1' & 1 \\ -x_1'y_2' & y_2' & x_1' & -1 \\ x_2'y_2' & -y_2' & -x_2' & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(IУ.83)}$$

а элементы вектора $\{Z\} = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ равны:

$$Z_1 = z'\int_{x_1'}^{x_2'}\int_{y_1'}^{y_2'} \frac{dx'dy'}{R^3} = \operatorname{arctg}\frac{x'y'}{z'R}\Bigg|_{x'=x_1'}^{x_2'}\Bigg|_{y'=y_1'}^{y_2'}; \qquad \text{(IУ.84)}$$

$$Z_2 = z'\int_{x_1'}^{x_2'}\int_{y_1'}^{y_2'} \frac{x'}{R^3}dx'dy' = z'\ln(R+y')\Big|_{x'=x_1'}^{x_2'}\Big|_{y'=y_1'}^{y_2'}; \qquad \text{(IУ.85)}$$

$$Z_3 = z'\int_{x_1'}^{x_2'}\int_{y_1'}^{y_2'} \frac{y'}{R^3}dx'dy' = z'\ln(R+x')\Big|_{x'=x_1'}^{x_2'}\Big|_{y'=y_1'}^{y_2'}; \qquad \text{(IУ.86)}$$

$$Z_4 = z'\int_{x_1'}^{x_2'}\int_{y_1'}^{y_2'} \frac{x'y'}{R^3}dx'dy' = z'R\Big|_{x'=x_1'}^{x_2'}\Big|_{y'=y_1'}^{y_2'}, \qquad \text{(IУ.87)}$$

$$R = \left[x'^2 + y'^2 + z'^2\right]^{1/2}, \qquad \text{(IУ.88)}$$

$$x_1' = x_{e_1} - \xi_i, \quad y_1' = y_{e_1} - \eta_i, \quad z' = \zeta_i - z_1,$$

$$x_2' = x_{e_2} - \xi_i, \quad y_2' = y_{e_4} - \eta_i.$$

Вычислим при фиксированном $\ell = \overline{1,NQ}$ вектора $\{D_j^{(\ell)}\}$, $j = \overline{1,NV}$, с помощью соотношений (IУ.84)–(IУ.88) и преобразуем их в вектор $\{A_j^{*(\ell)}\}$. Суммируя по ℓ при фиксированном j вектора $\{A_j^{*(\ell)}\}$ получим j строку матрицы $[A^*]$, которая имеет размерность $NV \times NQ$.

Перемножая матрицы $[A]$ и $[A^*]$, получим квадратичную матрицу $[AA^*]$ размеров $NQ \times NQ$, которая аппроксимирует интегральный оператор левой части равенства (IУ.5I).

4. Вычислительная схема для решения ЛОЗГ двойственным вариантом вариационного способа Тихонова заключается в выполнении следующих пунктов:

I/ задаются начальные значения z_0, φ_0, α_0 и параметры ν, δ, β, q;

2/ на k-ом шаге при фиксированном $\alpha_k = q\,\alpha_{k-1}$ в зависимости от краевых условий решается система линейных уравнений

$$\left([AA^*] + \alpha_k [\Delta^2 + \beta E]_i\right)\{\varphi\} = \{V_{zH}\} - [A]\{z_0\} + \alpha_k [\Delta^2 + \beta E]_i \{\varphi_0\}, \quad i = \overline{1,3}; \tag{IУ.89}$$

3/ определяется элемент $\{z^{\alpha_k}\} = [A^*]\{\varphi^{\alpha_k}\}$;

4/ выбор параметра α производится по критериям невязки квазиоптимальности, эвристическому критерию квазиневязки или визуальным.

Замечание IУ.7. Экспериментально установлено, что значение параметров можно рекомендовать такими $0 \le \beta < 1$, $q = 0,1 \div 0,3$, $\varphi_0 \equiv 0$, $\nu = 0,5$ и $\alpha_0 \le 100$. Важно решение системы (IУ.89) осуществить с высокой точностью. Для ЭВМ типа ЕС целесообразно применять методы Гаусса или Жордана с выбором главного элемента по столбцу, а вычисления производить с двойной точностью.

Вычислительная схема двойственного варианта итерационного

модифицированного метода Гаусса–Ньютона состоит из следующих пунктов:

1/ задаются начальные значения σ_0, φ_0; параметры ν, β, δ, последовательность $\{\alpha_n\}$;

2/ на n-ом шаге итерации в зависимости от краевых условий, на основании равенств (II.75), решается система линейных уравнений

$$\left([AA^*]+\alpha_n[\Delta^2+\beta E]_i\right)\{\Delta\varphi_n\}=[AA^*]\{\varphi_n\}-\{b\},\ i=\overline{1,3},\ (IV.90)$$

и находится приращение $\{\Delta\varphi_n\}$. Элемент $\{\varphi_{n+1}\}$ определяется по формуле

$$\{\varphi_{n+1}\}=\{\varphi_n\}-\{\Delta\varphi_n\}$$

3/ определяется элемент $\{z_{n+1}\}=[A^*]\{\varphi_{n+1}\}$;

4/ остановка итерационного процесса производится по критериям невязки, дискретным аналогом квазиоптимального критерия [102], эвристическому критерию квазиневязки (I.38) или визуальным.

5. Результаты решения модельных задач. На основе изложенных алгоритмов составлены программы на языке Фортран-IV для ПЭВМ IBM PC. Программы организованы по модульному принципу, а решение задач производится с двойной точностью. В модельных примерах параметр регуляризации $\alpha_{опт}=\alpha(\delta)$ выбирается по критерию невязки [267].

Приведенные две модельные задачи различаются только распределением плотности в области V. Распределение плотности $\sigma^{\alpha(\delta)}(\xi,\eta,\zeta)$, являющейся трехмерной функцией, приводится в виде изолиний распределения на различных уровнях. Модельные задачи решаются двойственным вариантом ВСТ.

Область Q, где задано поле V_z, является прямоугольником с площадью 120 км^2 (12x10 км). На уровне $Z_1 \equiv 0$ (дневная поверхность) и разбита на элементарные прямоугольники с площадью 1 км^2 (1x1) км. Область $V \subset R_3$, где ищется неизвестное распре-

деление плотности, имеет размерность 32 км^3 (4x4x2 км) и разбита на 1600 элементарных прямоугольных призм с размерностью 0,02 км^3 (0,2x0,2x0,5). Взаимное расположение V и Q показано на рис.IУ.7.

Задача первая. Пусть имеется точное гравитационное поле V_{zT} (рис.IУ.8,а), которое обусловлено аномальным объектом V, состоящим из трех частей. Плотности I и Ш частей одинаковы (0,5 г/см^3), а II части равна 0,8 г/см^3 (рис.IУ.7). По полю V_{zT} и полю V_{zH}, содержащему погрешность δ (рис.IУ.8,б), требуется восстановить распределение плотности в области V.

Решение задачи проведено при $\sigma_0 \equiv 0$ и двух значений начального приближения σ_0. В первом варианте принято, что $\sigma_0 \equiv 0$. Во втором варианте σ_0 имеет скачок 0,2 г/см^3, во второй части, т.е. в I и Ш частях $\sigma_0 = 0$, а во II – $\sigma_0 = 0{,}2$ г/см^3.

Варианты решения упорядочены следующим образом:

1. а) $\sigma_0 = 0$ и $\delta^2 = 0$; б) $\sigma_0 \neq 0$ и $\delta^2 = 0$;
2. а) $\sigma_0 = 0$ и $\delta^2 = 63$; б) $\sigma_0 \neq 0$ и $\delta^2 = 63$.

и показаны на рисунках (IУ.9)-(IУ.I2).

В соответствии способу разбиения, распределение плотности получено в 2205 узлах, которые расположены на пяти уровнях $z_i = (2+(i-1)0{,}5)$ км (441 узла на каждом).

Уравнение (IУ.90) при $\zeta = 3$, $\nu = 0{,}5$ и $\beta = 0$ решается относительно I43 значений φ, по такому же количеству значений поля V_{zT} или V_{zH}. Решения $\varphi^{\alpha}(x,y)$, полученные при $\alpha^* = \alpha_{опт}$, показаны на рис.IУ.I0 и IУ.I2 в соответствии с упорядочением вариантов. С таким же упорядочением на рис.IУ.9 и IУ.II показаны решения $\sigma^{\alpha^*}(\xi,\eta,\zeta)$ в виде изолиний на разрезах прямоугольника. Отметим, что критерий невязки выполняется с точностью $10^{-3} \div 10^{-5}$.

Из сопоставления полученных решений с точной моделью видно, что даже при наличии погрешности в исходных данных, которые составляют 9% максимальной величины поля, решение задачи σ^{α^*} при

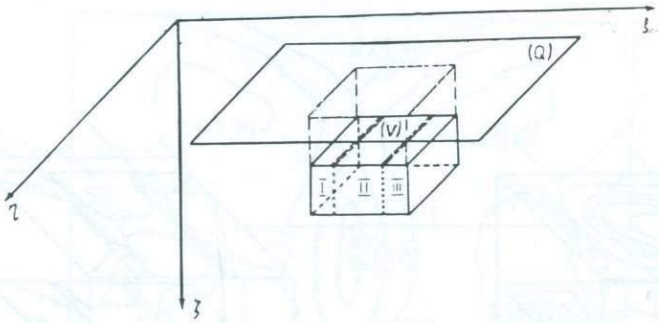


Рис. IУ.7. Взаимное расположение областей V и Q для модельной ЛОЗГ: I-Ш - аномальные области с постоянной плотностью.

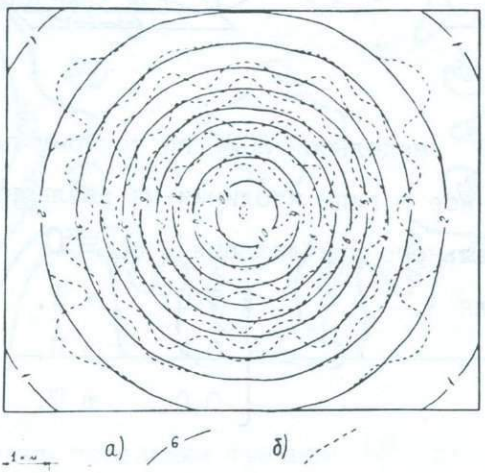


Рис. IУ.8. Гравитационное поле V_z для модельной ЛОЗГ:
а) значение изолинии точного поля V_{zT} (мгл);
б) изолинии возмущенного поля V_{zH}

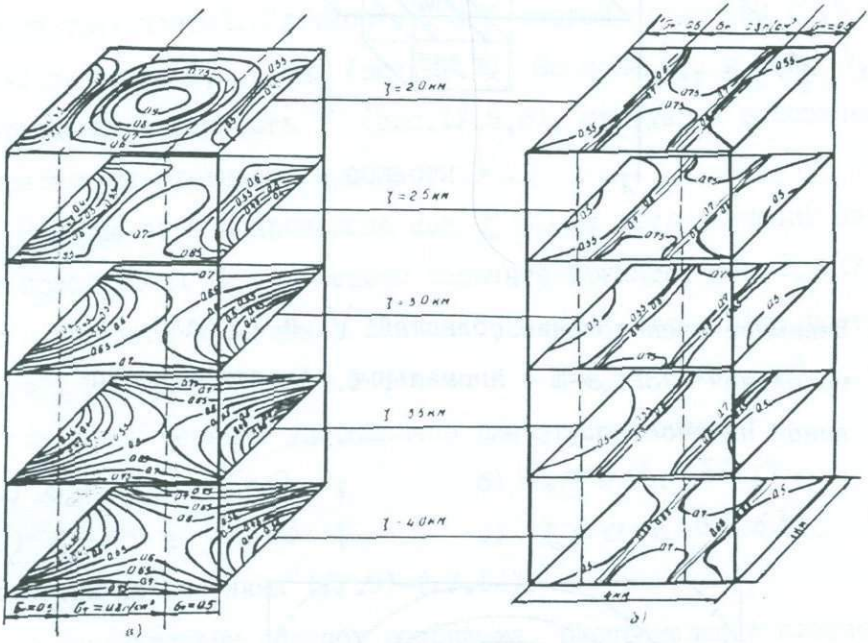
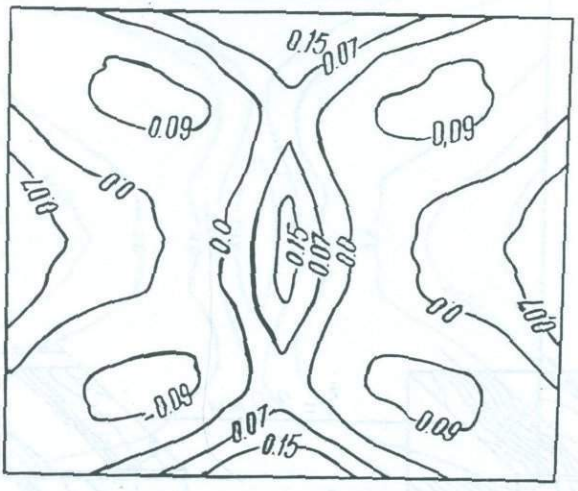


Рис.IУ.9. Решение σ^{α} модельной ЛОЗГ по точному полю V_{zT}, представленное в виде изолинии на различных уровнях:

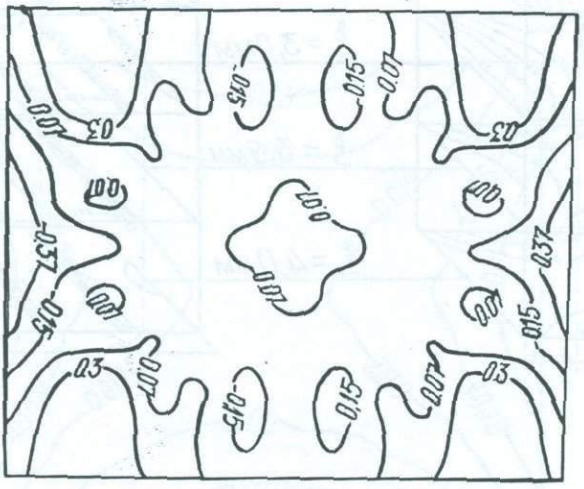
а) для начального приближения $\sigma_0 \equiv 0$;

б) то же для

$$\sigma_0 = \begin{cases} 0{,}0, & \text{в I,} \\ 0{,}2, & \text{в II,} \\ 0{,}0, & \text{в III.} \end{cases}$$



а)



б)

Рис. IУ.IO. Характер поведения функции φ для задачи с точным полем V_{zT} : а,б - то же, что и на рис. IУ.9.

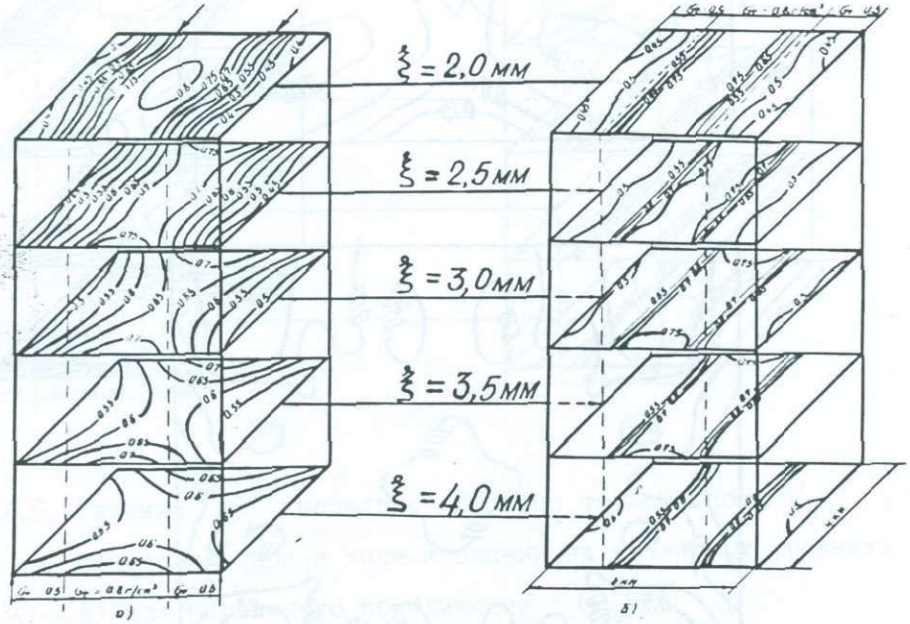
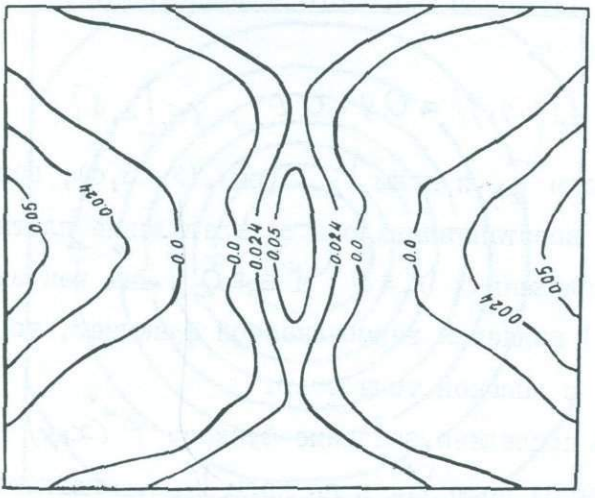
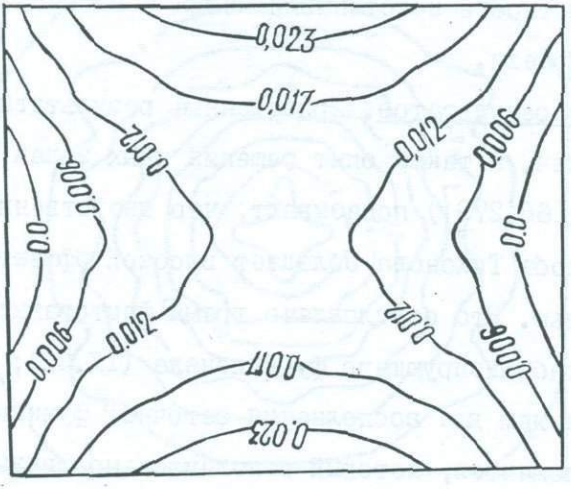


Рис. IУ.II. Решение модельной ЛОЗГ по возмущенному полю V_{zH}, представленное в виде изолинии на различных уровнях: а), б) то же, что и на рис. IУ.8.



а)



б)

Рис.IУ.I2. Характер поведения функции φ для задачи с возмущенным полем $V_{\text{ън}}$: а,б - то же, что и на рис. IУ.9.

$\sigma_0 \neq 0$ достаточно точно соответствует исходной модели.

Задача вторая. Поле V_{zT} (рис.IУ.I3,а) обусловлено аномальным объектом V, плотность которого линейно нарастает с глубиной по закону

$$\sigma_T(\xi,\eta,\zeta) = 0{,}9 + 0{,}1\cdot\zeta, \quad \zeta \in [2,4]. \qquad (IУ.9I)$$

По точному полю V_{zT} и полю V_{zH} (рис.IУ.I3,б), осложненным помехой ($\delta^2 = 63$) восстанавливалось распределение плотности в при начальных приближениях $\varphi_0 \equiv 0$ и $\sigma_0 \equiv 0$. Так как закон распределения (IУ.9I) является гармонической функцией, то решение должно получиться с высокой точностью.

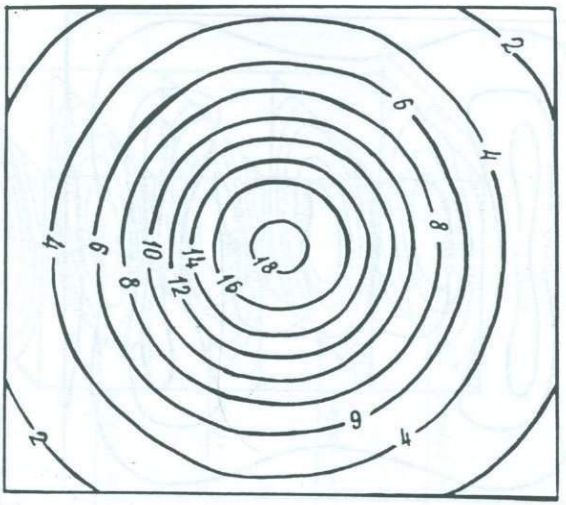
На рис.IУ.I4 приведено значение функции $\varphi^{\alpha^*}(x,y)$ при решении задачи по точному полю V_{zT} и по полю V_{zH}. Соответствующие им распределения плотности $\sigma^*(\xi,\eta,\zeta)$ показаны на рис.IУ.I5. Сравнения полученных решений с точным значением плотности (IУ.9I) показывают, что плотность восстанавливается с высокой точностью даже при наличии помехи.

6. Обсуждение результатов. Приведенные результаты решения двух модельных задач, а также опыт решения иных задач (например, из работ [I65,I67,I68,279]) показывают, что двойственный вариант вариационного способа Тихонова обладает высокой эффективностью и работоспособностью. Это обусловлено тремя факторами:

I/ выбором стабилизирующего функционала (IУ.22);

2/ использованием для восполнения сеточной функции $\varphi(x,y)$ метода конечных элементов, который дополнительно связывает значения сеточной функции в узловых точках условием непрерывности;

3/ некоторая нестабильность, свойственная функции $\varphi^{\alpha(\delta)}(x,y)$, решение уравнения (IУ.39), компенсируется интегральным оператором A^* при вычислении плотности распределения $\sigma(\xi,\eta,\zeta) = A^*\varphi^{\alpha}(x,y)$. При $\sigma_0 \equiv 0$ метод дает решение, которое описывается гармонической функцией. Как уже отмечалось, такие решения, как правило, геоло-



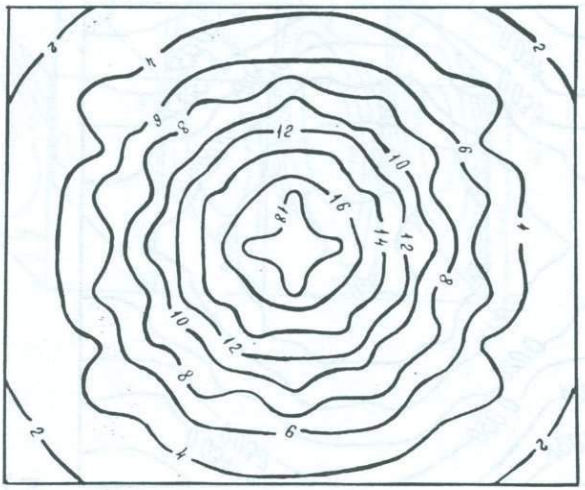
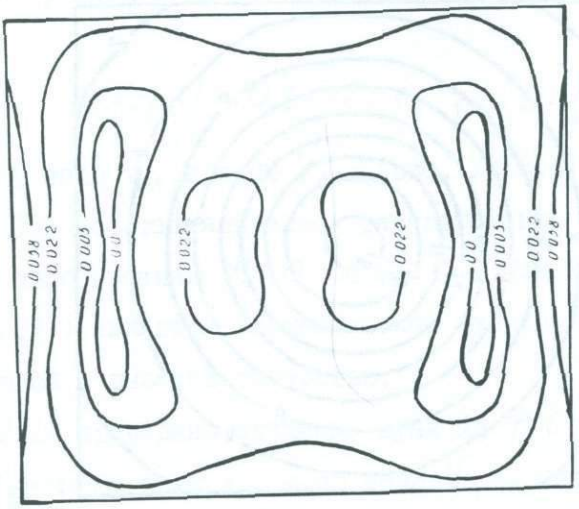
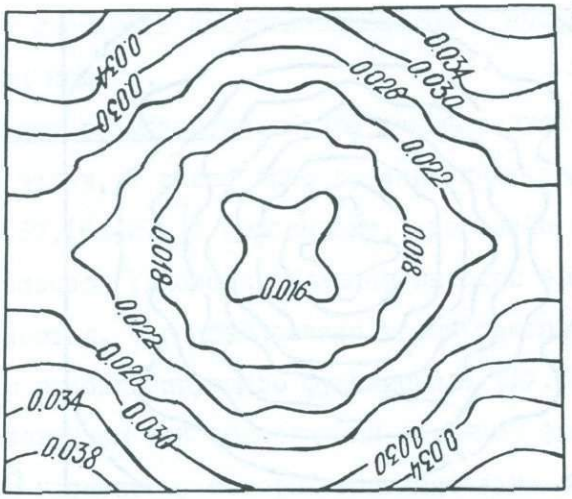


Рис. IУ.I3. Гравитационное поле V_z для второй задачи: а) точное поле V_{zT} ; б)) возмущенное погрешностью поле V_{zH} .



а)



б)

Рис. IУ.I4. Характер поведения функции φ для второй задачи: а,б – то же, что и на рис. IУ.I3.

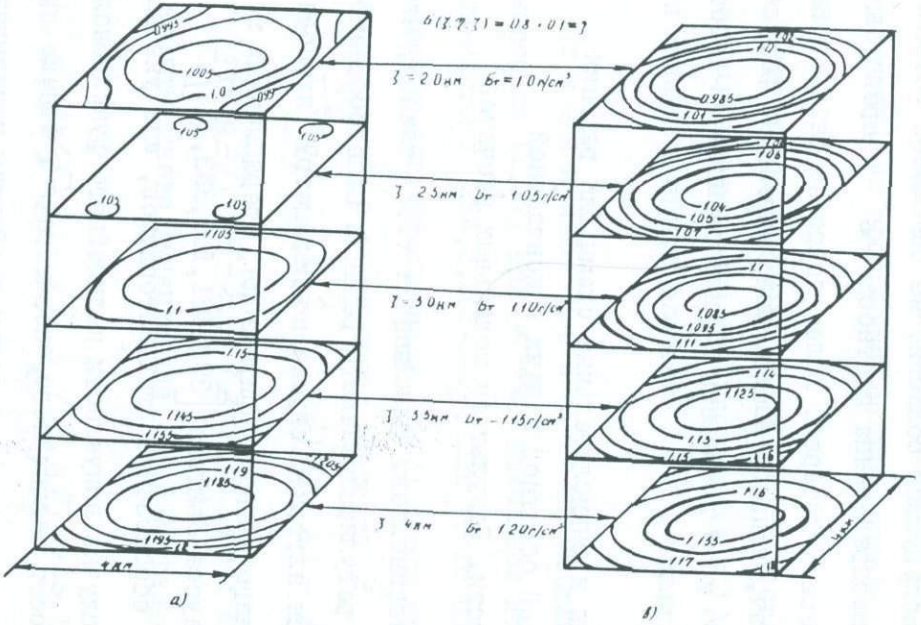


Рис.IУ.I5. Решение второй задачи, представленное в виде изолиний на различных уровнях: а) решение по точному полю ; б) по возмущенному полю .

тически бессодержательны. Однако они с успехом применяются при решении двухмерных задач обнаружения и локализации источников аномального поля [269]. В случае априорных сведений о распределении плотности в исследуемой области, на основании которых может быть построено распределение плотности σ^* и представлять несомненный практический интерес. Более подробно результаты решения модельных задач, вопросы выбора дополнительных регуляризующих параметров ν и β приведены в диссертационной работе М.Г.Оганесяна [253].

§ 5. Алгоритмы и вычислительные схемы для решения нелинейной обратной задачи о контактной поверхности. Результаты модельных расчетов

1. Структура нелинейного функционала (I.7) такова, что для нахождения его регуляризованного решения целесообразно и наиболее применяется алгоритм спуска по параметру Тихонова-Гласко (АСПТГ) и его диагональная модификация, итерационный модифицированный метод Гаусса-Ньютона [398,401,100,333,254].

Теоретическое обоснование этих алгоритмов, как указывалось в главе I, даны в случае выпуклости нелинейного функционала (I.7) или монотонности нелинейного оператора F. Однако примеры решения модельных и практических задач геофизики показывают, что алгоритмы работоспособны в более общем случае [100,333,254,341].

Приведем общие вычислительные схемы АСПТГ и итерационного ММНГ и их двойственных вариантов, а затем их конкретизируем для решения нелинейной обратной задачи о контактной поверхности.

2. Алгоритм спуска по параметру Тихонова-Гласко. Алгоритм подробно изложен в работе В.И.Старостенко [333], которой в основном будем придерживаться. Решение задачи осуществляется в результате выполнения следующих пунктов.

В н е ш н и й ц и к л. Параметрический функционал Тихонова (I.37) с условным стабилизатором (IУ.22) минимизируется на элементах монотонно убывающей последовательности $\{\alpha_k\}$, сходящейся к нулю. В качестве последовательности $\{\alpha_k\}$ удобно принять члены геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$, т.е. $\alpha_{k+1} = q\alpha_k$.

Для каждого последующего $\alpha = \alpha_k$ в качестве начального приближения для минимизации функционала (I.37), а точнее нахождения почти минимизирующего элемента z^{α_k}, принимается элемент $z^{\alpha_{k-1}}$.

В н у т р е н н и й ц и к л. Почти минимизирующий элемент z^{α_k} функционала (I.37) при $\alpha = \alpha_k$ находится итерационным методом Гаусса–Ньютона [254, с.261–262]. Для этого проведем квадратичную аппроксимацию функционала (I.37) путем линеаризации нелинейного оператора F в окрестности элемента $\hat{z}$, т.е.

$$T^{\alpha}[z] \approx \hat{T}^{\alpha}[z] = \| F\hat{z} + F'(\hat{z})(z-\hat{z}) - b\|^2 + \alpha_k \left((\Delta^2 + \beta E)_i (z-z_0), (z-z_0) \right), \quad i = \overline{1,3}. \tag{IУ.92}$$

Для квадратичного функционала (IУ.92) уравнение Эйлера имеет вид

$$F'^{*}(\hat{z})\left(F\hat{z} + F'(\hat{z})(z-\hat{z}) - b\right) + \alpha_k (\Delta^2 + \beta E)_i (z-z_0) = 0, \quad i = \overline{1,3}. \tag{IУ.93}$$

Запишем уравнение (IУ.93) в виде

$$F'^{*}(\hat{z})F'(\hat{z})(z-\hat{z}) + \alpha_k (\Delta^2 + \beta E)_i z = F'^{*}(\hat{z})\, b - F'^{*}(\hat{z})F\hat{z} + \alpha_k (\Delta^2 + \beta E)_i z_0, \quad i = \overline{1,3}. \tag{IУ.94}$$

Уравнение (IУ.94) является своеобразной линеаризацией нелинейного интегро-дифференциального уравнения, в окрестности точки $\hat{z}$, (IУ.38).

Отняв от обоих частей уравнения (IУ.94) выражение $\alpha_k (\Delta^2 + \beta E)_i \hat{z}$

и взяв $\hat{z} = z_n$, получим итерационный метод Гаусса–Ньютона для нахождения почти минимизирующего элемента z^{α_k}

$$F'^{*}(z_n)F'(z_n)(z_{n+1}-z_n) + \alpha_k(\Delta^2+\beta E)_i(z_{n+1}-z_n) = \tag{IУ.95}$$

$$= -F'^{*}(z_n)(Fz_n - b) + \alpha_k(\Delta^2+\beta E)_i(z_0-z_n),\ i=\overline{1,3},$$

который обычно записывается в виде

$$z_{n+1} = z_n - \left(F'^{*}(z_n)F'(z_n) + \alpha_k(\Delta^2+\beta E)_i\right)^{-1} \cdot \tag{IУ.96}$$

$$\cdot\left[F'^{*}(z_n)(Fz_n - b) + \alpha_k(\Delta^2+\beta E)_i(z_n-z_0)\right],\ i=\overline{1,3}.$$

В результате осуществления процесса (IУ.95) или (IУ.96) получим $\{z_n\}$, состоящую из экстремалей квадратичного функционала (IУ.92). Процесс оканчивается по условиям

$$\left|\hat{T}^{\alpha_k}[z_{n+1}] - \hat{T}^{\alpha_k}[z_n]\right| < \varepsilon_1 \text{ или } \max|z_{n+1}-z_n| < \varepsilon_2, \tag{IУ.97}$$

где ε_1 и ε_2 – некоторая заданная наперед величина. Для элемента z_{n+1}, первым удовлетворившим условию (IУ.97), принимается $z^{\alpha_k} = z_{n+1}$ и следует переход на внешний цикл и т.д.

К р и т е р и й о с т а н о в к и (в ы б о р а р е г у л я р и з о в а н н о г о р е ш е н и я). В результате выполнения внешнего и внутреннего циклов образуется последовательность $\{z^{\alpha_k}\}$. Остановка алгоритма зависит от способа выбора параметра регуляризации $\alpha_{опт} = \alpha(\delta) = \alpha_{k^*}$, где k^* – некоторое число. Для выбора параметра α, в зависимости от имеющейся информации, используются критерии невязки квазиоптимальности, эвристический критерий, квазиневязки (I.38) или визуальный.

Замечание IУ.8. Диагональная модификация АСПТТ (I.44) при $B = (\Delta^2+\beta E)_i$ получается из общего алгоритма, если во внутреннем цикле ограничится одним шагом итерации. Следовательно, в диагональной модификации АСПТТ внешний и внутренний циклы совме-

щают и превращаются в итерационный процесс, который имеет вид

$$z_{n+1} = z_n - \left(F'^*(z_n)F'(z_n) + \alpha_n(\Delta^2+\beta E)_i\right)^{-1}\left[F'^*(z_n)(Fz_n - b) + \right.$$
$$\left. + \alpha_n(\Delta^2+\beta E)_i(z_n - z_0)\right], \quad i=\overline{1,3}. \qquad (IУ.98)$$

С вычислительной точки зрения диагональную модификацию АСПТГ удобно записать в виде

$$\left(F'^*(z_n)F'(z_n) + \alpha_n(\Delta^2+\beta E)_i\right)(z_{n+1} - z_n) =$$
$$= -F'^*(z_n)(Fz_n - b) + \alpha_n(\Delta^2+\beta E)_i(z_0 - z_n), \quad i=\overline{1,3}. \qquad (IУ.99)$$

2. <u>Алгоритм итерационного модифицированного метода Гаусса-Ньютона</u> заключается в выполнении следующих пунктов:

I/ задаются начальное приближение z_0 и значение параметров α_0, β, ν. Кроме того, выбираются параметры q, ε, ε', δ и признак $C = I$;

2/ для нахождения приращения на n-ом шаге $h_n = z_{n+1} - z_n$ решается интегро-дифференциальное уравнение

$$\left(F'^*(z_n)F'(z_n) + \alpha_n(\Delta^2+\beta E)_i\right)(z_{n+1} - z_n) =$$
$$= -F'^*(z_n)(Fz_n - b), \quad i=\overline{1,3}, \qquad (IУ.100)$$

вместо обращения оператора $\left(F'^*(z_n)F'(z_n) + \alpha_n(\Delta^2+\beta E)_i\right)^{-1}$ и вычисления элемента $-\left(F'^*(z_n)F'(z_n) + \alpha_n(\Delta^2+\beta E)_i\right)^{-1}F'^*(z_n)(Fz_n - b)$, что эквивалентно;

3/ находится элемент $z_{n+1} = z_n + h_n$ и вычисляется значение функционала (I.7), т.е. $f(z_{n+1})$;

4/ если $C = 0$, то следует переход на пункт 6 ;

5/ если

$$f(z_{n+1}) < f(z_n) \le (1+\alpha\varepsilon')f(z_{n+1}), \qquad (IУ.101)$$

то $\alpha_{n+1} = q\alpha_n$, иначе, если выполняется только левая часть неравенства (IУ.101), признак C приравнивается к нулю, в противном случае $\alpha_{n+1} = \alpha_{n-1}$, $z_{n+1} = z_n$, $C = 0$ и следует переход

на пункт 2;

6/ вычисляется $\rho = f(z_n) - f(z_{n+1})$. Если $f(z_{n+1}) > \delta$ или $\rho > \varepsilon$, следует переход на пункт 2, иначе – остановка.

Замечание IУ.9. Остановка в алгоритме происходит по критерию невязки или эвристическому критерию квазиневязки. Однако можно использовать критерии квазиоптимальности или визуальный. Итерационный МЛГН (IУ.I00) можно получить из диагональной модификации АСПТГ, если в уравнении (IУ.98) принять $z_0 = z_n$. Это эквивалентно замене на каждом шагу итерации фиксированного элемента z_0 в функционалах (I.37) или (IУ.92) на элемент z_n .

Однако между АСПТГ и его диагональной модификацией и итерационным МЛГН существует принципиальная разница. Если в первых двух алгоритмах последовательность $\{\alpha_k\}$ должна монотонно стремиться к нулю, то в МЛГН это уже необязательно. С вычислительной точки зрения это дает определенные преимущества МЛГН, что реализовано введением в алгоритм признака C.

Замечание IУ.I0. В случае, когда оператор F линейный, т.е. $F = A$, алгоритм итерационного МЛГН остается почти без изменения, только в пункте 2 необходимо уравнение (IУ.I00) заменить на

$$(A^*A + \alpha_n B)(z_{n+1} - z_n) = -A^*(Az_n - b). \qquad (IУ.I02)$$

Отметим, что для линейных задач способ Дорофеева, приведенного в работе [I48, с.90–92], совпадает с МЛГН.

Замечание IУ.II. В некоторых монографиях, например [297], итерационный МЛГН называется методом Левенберга–Марквардта, так как введение параметра α_n в метод Гаусса–Ньютона было предложено в 1944 г. К.Левенбергом [463], а известность получило благодаря работе Д.Марквардта [464].

3. Двойственные варианты АСПТГ и его диагональной модификации и итерационного МЛГН.

Описание двойственного варианта АСПТТ дадим только для внутреннего цикла, так как все остальные пункты остаются почти без изменения.

Во внутреннем цикле последовательность $\{z_n = (x_n, \varphi_n)\}$ для нахождения квазиседловой точки функционала (П.90) при $\alpha = \alpha_k$ строится следующим образом.

Пусть получено некоторое приближение $z_n = (x_n, \varphi_n)$. Осуществим линеаризацию нелинейного оператора F в окрестности x_n, как это сделано в пункте 2 этого параграфа. В результате получим "квадратичную" аппроксимацию функционала (П.90)

$$\hat{L}^{\alpha}[x, \varphi] = \frac{1}{2}\|x - x_0\|_{H_1}^2 - \tag{IУ.103}$$

$$- \left((Fx_n + F'(x_n)(x - x_n) - b, \varphi) - \frac{1}{2}\alpha\|\varphi\|_{H_2}^2 \right).$$

Функционал (IУ.103) является квадратичным строго выпуклым вниз по переменной x и квадратичным строго выпуклым вверх по переменной φ.

Поэтому для любого $\alpha = \alpha_k$ и b существует седловая точка функционала (IУ.103), которую можно найти из системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} x - x_0 = F'^{*}(x_n)\varphi, & \text{(IУ.104)} \\ Fx_n + F'(x_n)(x - x_0) - b + \alpha_k \varphi = 0. & \text{(IУ.105)} \end{cases}$$

Подставляя равенство (IУ.104) в (IУ.105), получим уравнение для определения φ_{n+1},

$$\left(F'(x_n)F'^{*}(x_n) + \alpha E\right)\varphi_{n+1} = -Fx_n + b + F'(x_n)(x_n - x_0). \tag{IУ.106}$$

Элемент x_{n+1} вычисляется по формуле

$$x_{n+1} = F'^{*}(x_n)\varphi_{n+1} + x_0. \tag{IУ.107}$$

Принимая в соотношениях (IУ.106) и (IУ.107) $n = 0, 1, 2, \ldots,$

получим последовательность $\{z_n\}$ для определения квазиседловой точки $\Xi^{\alpha_k} = (x^{\alpha_k}, \varphi^{\alpha_k})$ функционала (IУ.I03). Процесс оканчивается по условию

$$\left| L^{\alpha}(x_{n+1}, \varphi_{n+1}) - L^{\alpha}(x_n, \varphi_n) \right| < \varepsilon, \qquad \text{(IУ.I08)}$$

где ε – некоторая наперед заданная величина. Для элемента (x_{n+1}, φ_{n+1}), обеспечившего выполнение условий (IУ.I08), принимается $x_k = x^{\alpha_k} = x_{n+1}$, $\varphi_k = \varphi^{\alpha_k} = \varphi_{n+1}$ и следует переход на внешний цикл.

Замечание IУ.I2. Если умножить соотношение (IУ.I06) слева на $F'^{*}(x_n)$, воспользоваться операторным равенством (П.6I) и формулой (IУ.I07), то получим уравнение (IУ.95). Следовательно, последовательности $\{x^{\alpha_k}\}$, конструируемые АСПТТ и его двойственным вариантом, совпадают.

Двойственный вариант диагонального АСПТТ при $B = E$, что не очень существенно, записывается следующим образом [279]:

пусть известен $z_k = (x_k, \varphi_k)$; элемент φ_{k+1} определяется из уравнения

$$\left(F'(x_k)F'^{*}(x_k) + \alpha_{k+1}E\right)\varphi_{k+1} = -Fx_k + b + F'(x_k)(x_k - x_0), \qquad \text{(IУ.I09)}$$

т.е. на каждом шаге внутреннего цикла ограничиваемся одним шагом итерации; элемент x_{k+1} вычисляется по формуле

$$x_{k+1} = F'^{*}(x_k)\varphi_{k+1} + x_0, \qquad \text{(IУ.II0)}$$

двойственный вариант ММТН состоит в определении элемента φ_{n+1} из уравнения

$$\left(F'(x_n)F'^{*}(x_n) + \alpha_n E\right)\varphi_{n+1} = -Fx_n + b, \qquad \text{(IУ.III)}$$

т.е. в функционале (IУ.I03) фиксированный элемент $x_0 = x_n$ и вычислении элемента x_{n+1} по формуле

$$x_{n+1} = F'^{*}(x_n)\varphi_{n+1} + x_0. \qquad \text{(IУ.II2)}$$

Действительно, умножив равенства (IУ.I09) и (IУ.II2) слева на $F'^{*}(x_n)$, воспользовавшись операторным равенством (П.6I) и формулами (IУ.II0) и (IУ.II2), получим соответственно итерационные процессы (I.44) и (I.43), где $B=E$.

Замечание IУ.I3. Для итерационных процессов с произвольным B равенства (IУ.I09) и (IУ.II0) принимают соответственно вид

$$\left(F'(x_k)B^{-1}F'^{*}(x_k)+\alpha_k E\right)\varphi_{k+1} = -Fx_k + b + F'(x_k)(x_k - x_0)$$

и

$$x_{k+1} = B^{-1}F'^{*}(x_k)\varphi_{k+1} + x_0.$$

4. Для конкретизации общих алгоритмов и построения соответствующих вычислительных схем, как видно из соотношений (IУ.95), (IУ.99), (IУ.I00), (IУ.I09), (IУ.III) *необходимо построить* конечномерные аналоги одних и тех же интегральных операторов F, $F'(z)$ и $F'^{*}(z)$, которые соответственно задаются при помощи равенств (I.34)-(I.36). Построение конечномерных аналогов интегральных операторов проведем МКЭ [267].

При решении нелинейных задач интегральные операторы в соотношениях (IУ.95), (IУ.99) и (IУ.I00) меняются на каждом шаге, в отличие от линейных задач. Поэтому необходимы такие конструкции конечномерных аналогов операторов F, $F'(z)$ и $F'^{*}(z)$, которые позволяют вычислять их достаточно быстро. При этом оператор F представляется в виде вектор-функции $\{Fz\}$, а $F'(z)$ и $F'^{*}(z)$ – матрицами $\left[F'(z)\right]$ и $\left[F'^{*}(z)\right]$.

Отметим, что при конструировании аппроксимаций интегральных операторов краевые условия не учитываются.

Примем как и для линейной задачи, что Q есть плоскость на уровне $z=z_0$. Разобьем области S и Q прямоугольной сеткой на КЭ $S^{(p)}$ и $Q^{(e)}$ соответственно с размерами $h_\xi \times h_\eta$ и $h_x \times h_y$, т.е.

$$S = \bigcup_{p=1}^{M} S^{(p)} \quad \text{и} \quad Q = \bigcup_{e=1}^{N} Q^{(e)} \qquad (IУ.113)$$

В качестве узлов в ПКЭ при решении НОЗКП возьмем:

а/ центры тяжести прямоугольников; б/ как обычно вершины.

Тогда аппроксимация подынтегральных функций $\rho(\xi,\eta)$, $H(\xi,\eta)$, $Z(\xi,\eta)$ и $\varphi(x,y)$ производится соответственно кусочно-постоянными функциями или полиномами полувторой степени (IУ.78).

б. Построение вектора $\{Fz\}$ и матриц $[F'(z)]$, $[F''(z)]$.

Сначала рассмотрим случай, когда исходные и неизвестные функции аппроксимированы кусочно-постоянно. Обозначим координаты центров тяжести ПКЭ $S^{(p)}$ и $Q^{(e)}$ соответственно через (ξ_p, η_p), $p=\overline{1,M}$, и (x_{oe}, y_{oe}), $e=\overline{1,N}$. Пусть $\{\rho\}=\{\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_M\}$, $\{H\}=\{H_1,H_2,\dots,H_M\}$, $\{Fz\}=\{F_1,F_2,\dots,F_N\}^T$, $\{Z\}=\{Z_1,Z_2,\dots,Z_M\}$, $\{\varphi\}=\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_N\}^T$ — соответственно значения функций ρ, H, Z, φ и оператора Fz в узлах ПКЭ.

На основании (I.34) компоненты вектор-функции $\{Fz\}$ представлены в виде [333]

$$F_e = \sum_{p=1}^{M} G \iint_{S^{(p)}} \rho_p \left[\frac{1}{\left[(x_{oe}-\xi)^2+(y_{oe}-\eta)^2+(z_0-H_0)^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{R} \right] d\xi\, d\eta = \qquad (IУ.114)$$

$$= -\sum_{p=1}^{M} G \int_{\rho} \left(\xi' \ln(\eta'+R) + \eta' \ln(\xi'+R) + z' \operatorname{arctg} \frac{z'R}{\xi'\eta'} \right) \Bigg|_{\xi'=\xi_p-\frac{h_1}{2}-x_{oe}}^{\xi_p+\frac{h_1}{2}-x_{oe}}$$

$$\Bigg|_{\eta'=\eta_p-\frac{h_2}{2}-y_{oe}}^{\eta_p+\frac{h_2}{2}-y_{oe}} \Bigg|_{z'=H_p-z_0}^{H_p+z_p-z_0},$$

где $$R = \left[(\xi-x_{oe})^2 + (\eta-y_{oe})^2 + (\zeta-z_0)^2 \right]^{1/2},$$

$$z' = z_p - z_0, \quad \xi' = \xi - x_{oe}, \quad \eta' = \eta - y_{oe}.$$

Элементы матрицы $\left[F'(z)\right] = \left[F'_{e,p}(z)\right]$, $e=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,M}$, на основании равенства (I.35) вычисляются по формуле

$$F'_{e,p}(z) = G\iint\limits_{S^{(p)}} \rho_p \frac{z_p - z_0}{R^3}\, d\xi\, d\eta = \qquad \text{(IУ.II5)}$$

$$= G\rho_p \operatorname{arctg} \frac{\xi' \eta'}{z' R} \Bigg|_{\xi' = \xi_p - \frac{h_\xi}{2} - x_{oe}}^{\xi_p + \frac{h_\xi}{2} - x_{oe}} \Bigg|_{\eta' = \eta_p - \frac{h_\eta}{2} - y_{oe}}^{\eta_p + \frac{h_\eta}{2} - y_{oe}}, \quad e=\overline{1,N},\ p=\overline{1,M}.$$

Для определения матрицы $\left[F'^{*}(z)\right] = \left[F'^{*}_{p,e}(z)\right]$, $p=\overline{1,M}$, $e=\overline{1,N}$, воспользуемся формулой (IУ.36). Тогда

$$F'^{*}_{p,e}(z) = \tilde{G}\rho_p \iint\limits_{Q^{(e)}} \frac{(z_p - z_0)\, dx_0\, dy_0}{\left[(\xi_p - x_0)^2 + (\eta_p - y_0) + (z_p - z_0)^2\right]^{3/2}} = \qquad \text{(IУ.II6)}$$

$$= \tilde{G}\rho_p \operatorname{arctg} \frac{x_0' y_0'}{z' R_1} \Bigg|_{x_0' = x_{oe} - \frac{h_x}{2} - \xi_p}^{x_{oe} + \frac{h_x}{2} - \xi_p} \Bigg|_{y_0' = y_{oe} - \frac{h_y}{2} - \eta_p}^{y_{oe} + \frac{h_y}{2} - \eta_p},$$

где $R_1' = (x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2)^{1/2}$

Замечание IУ.I4. Если размеры сеток $h_x = h_\xi$ и $h_y = h_\eta$, то $\left[F'^{*}(z)\right]^T = \left[F'(z)\right]$.

Далее рассмотрим построение $\{Fz\}$, $\left[F'(z)\right]$ и $\left[F'^{*}(z)\right]$ в случае, когда узлы КЭ совпадают с вершинами прямоугольников. Тогда все функции, входящие в равенства (I.34)–(I.36), на каждом КЭ $S^{(p)}$ и $Q^{(e)}$ аппроксимируются полиномами типа (IУ.78),(IУ.79). Известно [95,I38,32I], что такая аппроксимация обеспечивает непрерывность всех функций. Обозначим общее количество узлов для областей S и Q соответственно через MS и NQ, координаты узлов КЭ $S^{(p)}$ и $Q^{(e)}$ – (ξ_{p_i}, η_{p_i}), $i=\overline{1,4}$; (x_{oe_j}, y_{oe_j}), $j=\overline{1,4}$.

На основании равенства (I.34) компоненты $\{F_z\}$ определяются по формуле [267]

$$F_K = \sum_{p=1}^{M} G \iint_{S^{(p)}} \left[\sum_{i=1}^{4} \rho_{p_i} N_i^{(p)}\right] \left\{ \frac{1}{\left[(\xi - x_{ok})^2 + (\eta - y_{ok})^2 + \left(\sum_{i=1}^{4} H_{p_i} N_i^{(p)} - z_0\right)^2\right]^{1/2}} - \right. \tag{IУ.II7}$$

$$\left. - \frac{1}{\left[(\xi - x_{ok})^2 + (\eta - y_{ok})^2 + \left(\left(\sum_{i=1}^{4} z_{p_i} N_i^{(p)}\right) - z_0\right)^2\right]^{1/2}} \right\} d\xi\, d\eta, \quad K = \overline{1, NQ}.$$

Построение матриц $[F'(z)]$ и $[F'^{*}(z)]$ аналогично построению матрицы $[A^*]$. K-ую строку матрицы $[F'(z)]$ получаем по формуле

$$F'(z)\, h\Big|_{(x_{ok}, y_{ok})} = \sum_{p=1}^{M} \sum_{i=1}^{4} F'^{(p)}_{K,p}\, h_{p_i} = \tag{IУ.II8}$$

$$= \sum_{p=1}^{N} \{F_K'^{(p)}\}\{h\} = \{F_K'(z)\}\{h\},$$

где ненулевые элементы векторов $\{F_K'^{(p)}\}$, $p = \overline{1, M}$, связаны с индексом p_i, $i = \overline{1, 4}$, и определяются соотношением

$$F'^{(p)}_{K,p_i} = G \iint_{S^{(p)}} \frac{\left[\sum_{j=1}^{4} \rho_{p_j} N_j^{(p)}(\xi, \eta)\right]\left[\sum_{j=1}^{4} z_{p_j} N_j^{(p)}(\xi, \eta) - z_0\right]}{\left[(\xi - x_{ok})^2 + (\eta - y_{ok})^2 + \left(\sum_{j=1}^{4} z_{p_j} N_j^{(p)} - z_0\right)^2\right]^{3/2}} \cdot \tag{IУ.II9}$$

$$\cdot\, N_i^{(p)}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Выражения (IУ.II7) и (IУ.II9) аналитически не вычисляются. Приближенное вычисление этих интегралов проведено при помощи декартовых произведений квадратур типа Гаусса с 6 узлами [339,47].

Аналог выражений (IУ.87) для матрицы $[F'^{*}(z)]$ имеет вид

$$F'^{*(e)}_{j,e_K} = \bar{G} \rho_j \iint_{Q^{(e)}} \frac{(z_j - z_0)\, N_K^{(e)}(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0}{\left[(\xi_j - x_0)^2 + (\eta_j - y_0)^2 + (z_j - z_0)^2\right]^{3/2}}, \tag{IУ.I20}$$

где $z_j = z(\xi_j, \eta_j)$, $\rho_j = \rho(\xi_j, \eta_j)$, $j = \overline{1, MS}$. Нетрудно заметить, что интегралы (IУ.II0) и (IУ.8I) идентичны. Поэтому дальнейшее построение матрицы $[F'^{*}(z)]$ осуществляется по формулам

(IУ.82)-(IУ.87) с соответствующими константами из (IУ.I20).

Конечномерные аналоги процессов (IУ.96),(IУ.I00),(IУ.I09) и (IУ.III), при соответствующих краевых условиях, принимают вид

$$\left(\left[F'^{*}(z_n)\right]\left[F'(z_n)\right]+\alpha_k\left[\Delta^2+\beta E\right]_i\right)\left(\{z_{n+1}\}-\{z_n\}\right)= \tag{IУ.I2I}$$

$$=-\left[F'^{*}(z_n)\right]\left(\{Fz_n\}-\{b\}\right)+\alpha_k\left[\Delta^2+\beta E\right]_i\left(\{z_0\}-\{z_n\}\right),\ i=\overline{1,3};$$

$$\left(\left[F'^{*}(z_n)\right]\left[F'(z)\right]+\alpha_n\left[\Delta^2+\beta E\right]_i\right)\left(\{z_{n+1}\}-\{z_n\}\right)= \tag{IУ.I22}$$

$$=-\left[F'^{*}(z_n)\right]\left(\{Fz_n\}-\{b\}\right),\ i=\overline{1,3};$$

$$\left(\left[F'(z_k)\right]\left[F''^{*}(z_k)\right]+\alpha_{k+1}\left[\Delta^2+\beta E\right]_i\right)\{\varphi_{k+1}\}= \tag{IУ.I23}$$

$$=-\{Fz_k\}+\{b\}+\left[F'(z_k)\right]\left(\{z_k\}-\{b\}\right),\ i=1,3,$$

и

$$\left(\left[F'(z_n)\right]\left[F''^{*}(z_n)\right]+\alpha_n\left[\Delta^2+\beta E\right]_i\right)\{\varphi_{n+1}\}=-\{Fz_n\}+\{b\}. \tag{IУ.I24}$$

Вычислительные схемы АСПТГ и МПГН получают из соответствующих им алгоритмов с заменой интегро-дифференциальных уравнений (IУ.96),(IУ.I00),(IУ.I09),(IУ.III), на их конечномерные аналоги (IУ.I2I)-(IУ.I24).

6. Результаты решения модельных нелинейных задач о контактной поверхности. На основе вычислительных схем АСПТГ и итерационного МПГН и их двойственных аналогов составлены программы на языке Фортран-IУ для ПЭВМ IBM PC. Программы организованы с двойной точностью. Рассматриваются два модельных примера, которые различаются расположением областей S и Q, избыточной плотности $\rho(\xi,\eta)$ и положением нижней финитной контактной поверхнос-

ти $Z(x,y)$. Во всех модельных примерах глубина верхней поверхности $H(\xi,\eta) = 1$ км; область Q находится на плоскости $z = 0$. Фиксированный (начальный) элемент $z_0(x,y)$ совпадает с поверхностью H. Области S и Q разбиваются на конечные элементы, у которых $h_\xi = h_x = h_\eta = h_y = 1$ км.

Требуется при фиксированных $\rho(\xi,\eta)$ и $H(\xi,\eta)$ по точному полю V_{zT} и полю V_{zH}, содержащему погрешность δ, восстановить положение нижней финитной контактной поверхности [267].

Модельные примеры решались АСПТГ и ММГН с краевыми условиями (IУ.23) и (IУ.24), т.е. в процессах (IУ.121)-(IУ.123) использовалась матрица $[\Delta^2 + \beta E]_3$. Аппроксимация интегральных операторов Fz, $F'(z)$ и $F'^*(z)$ проводилась по формулам (IУ.114)-(IУ.116), (IУ.117)-(IУ.120) и смешанным вариантом, когда Fz вычислялось по формуле (IУ.114), а $F'(z)$ и $F'^*(z)$ - (IУ.118)-(IУ.120). Назовем эти аппроксимации соответственно по способам 1,2 и 3.

Исходя из численного эксперимента в вычислительных схемах АСПТГ и ММГН можно рекомендовать следующие значения параметров: $\alpha_0 = (3 \div 5) \| Fz_0 - V_z \|^2$, $q = 0,1 \div 0,3$, $\beta = 0,1$, $\nu = 0,5$.

Для выбранного фиксированного (начального) элемента $z_0 = H(\xi,\eta) = 1$ км результаты расчетов по АСПТГ и ММГН почти идентичны. При построении изолиний $Z(x,y)$ рисунки совпадают или очень близки. Поэтому в работе результате расчетов по АСПТГ и ММГН совмещены на одних рисунках. Однако время счета по ММГН в три раза быстрее АСПТГ.

Задача 1. Пусть задана финитная контактная поверхность $z_T(x,y)$ (рис.IУ.16а) с избыточной плотностью $\rho(\xi,\eta) = 1$ г/см^3. Взаимное расположение областей S и Q, площади которых соответственно равны 9 кмх10 км и 10 кмх10 км, показаны на рис.IУ.16,б. Там же дано в изолиниях значение поля V_{zT} от финитной контактной поверхности $z_T(x,y)$.

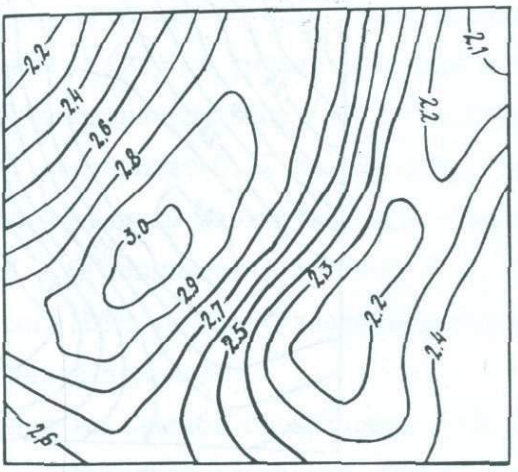


Рис.IУ.I6,а. Изолинии контактной поверхности z_T в км для модельной задачи I.

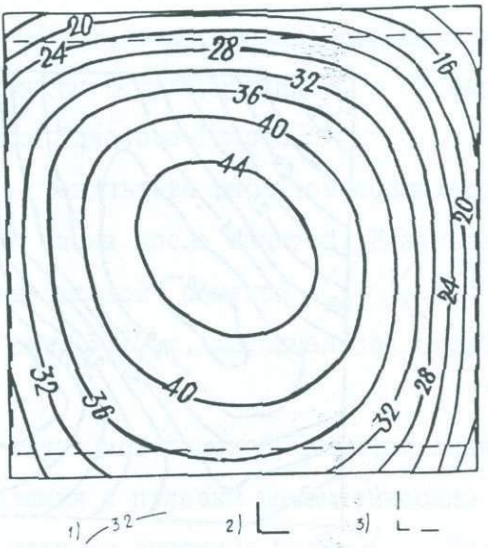


Рис.IУ.I6,б. Гравитационное поле V_z, создаваемое контактной поверхностью z_T модельной задачи I:
I - значение изолиний V_z в мГл; 2 - границы области Q; 3 - проекция области S на Q.

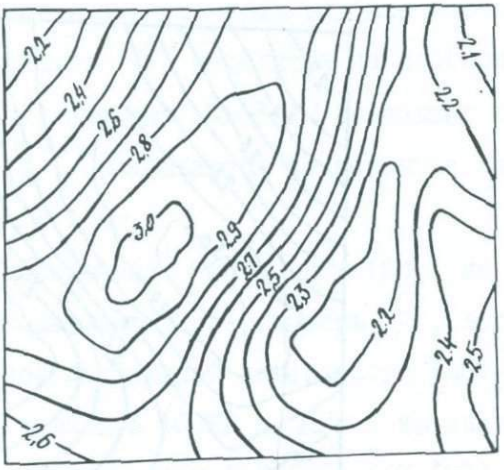


Рис.IУ.I6,в. Регуляризованное решение z^{α}, полученное по АСПТГ и ММГН.

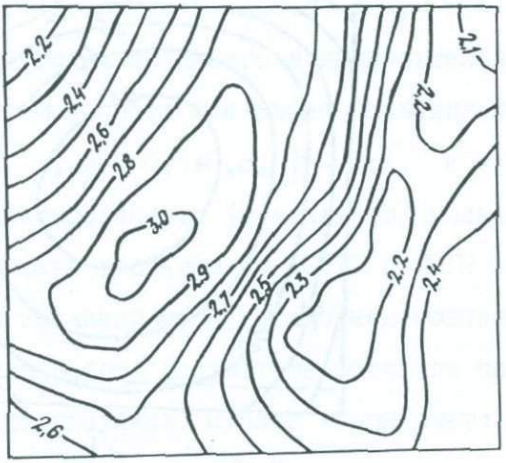


Рис.IУ.I6,г. Решение z^{α}, полученное по двойственному варианту ММГН.

Модельная задача I решается при помощи аппроксимации по способу I. Полученные значения $Z(x,y)$ в точках показаны в виде изолиний на рис.IУ.I6,в. Максимальная разница $|Z-Z_T|$ полученного решения Z от точного Z_T составляет 0,2I км. На рис.IУ.I6,г дано решение этой же задачи двойственным вариантом ММГН. Отметим, что точность решения по полю V_{zT} повышается, а $max|Z-Z_T| = 0{,}08$. Однако двойственный вариант ММГН не дает удовлетворительных результатов по полю осложненной помехой.

Задача 2. Для финитной контактной поверхности $Z_T(x,y)$ (рис. IУ.I7,а) с распределением избыточной плотности $\rho(\xi,\eta)$ (рис. IУ.I7,б) точное поле V_{zT} (рис.IУ.I7,в) рассчитано по способу аппроксимации 2. Области S и Q разбиты по ПКЭ с узлами, совпадающими с их вершинами. Общее количество узлов 9xI0=90 в области S и I4xI4=I96 – в области Q. Задача решалась при помощи аппроксимации по способу 3. Параметры регуляризации α и n выбирались по квазиоптимальному критерию Тихонова–Гласко.

По точному полю V_{zT} результаты расчетов совпадают с истинными с точностью третьего знака после запятой. Результаты расчета по полю осложненной "пилообразной" помехой $V_{zH} = V_{zT} \pm \delta$, где $\delta = 2$ мГл, приведены на рис.IУ.I7,г. Максимальное отклонение $|Z-Z_T| = 0{,}06$ км.

Осложним поле V_{zT} случайной помехой, имеющей близкое к нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием. Уровень помехи 4% максимального значения поля V_{zT}. Полученное решение дано на рис.IУ.I7,д. Сравнения с точным решением показывают, что все характерные особенности контактной поверхности сохранены, хотя $max|Z-Z_T| = 0{,}256$ км.

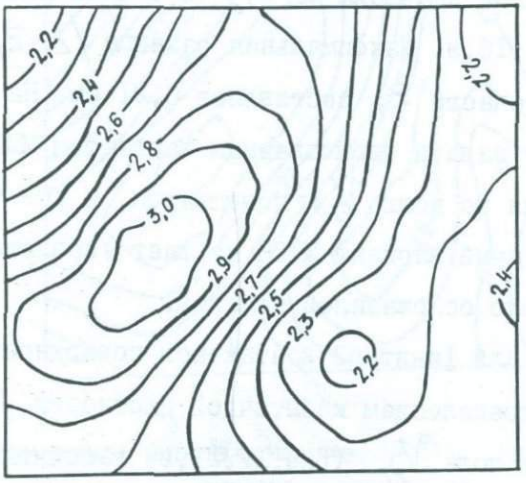


Рис. IУ.I7,а. Изолинии контактной поверхности z_T в км. для модельной задачи 2.

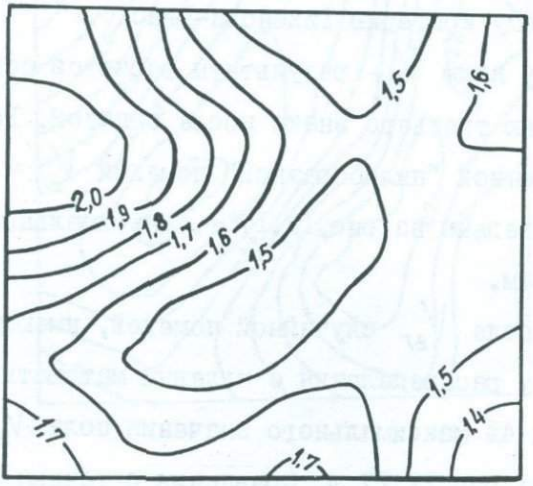


Рис. IУ.I7,б. Изолинии избыточной плотности $\rho(\xi, \eta)$ в г/см^3.

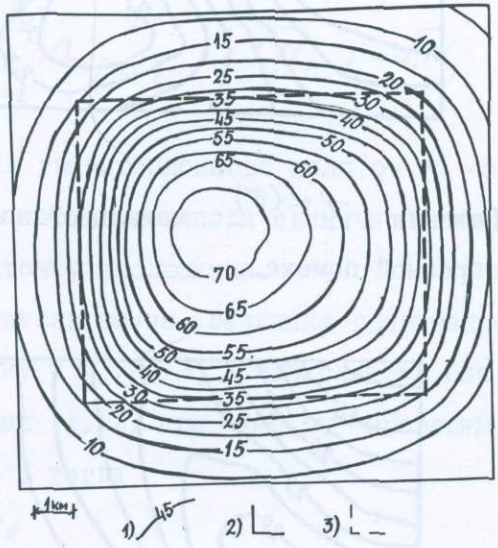


Рис.IУ.I7,в. Гравитационное поле V_z , создаваемое контактной поверхностью модельной задачи 2:
I/, 2/, 3/ - те же, что и на рис. IУ.I6,б.

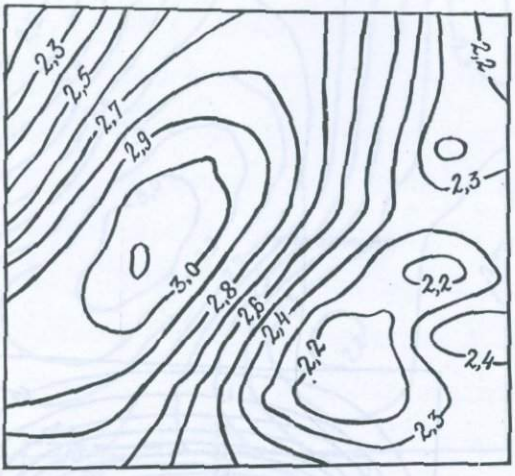


Рис.IУ.I7,г. Решение $z^{\alpha(\delta)}$ модельной задачи 2 при пилообразной помехе.

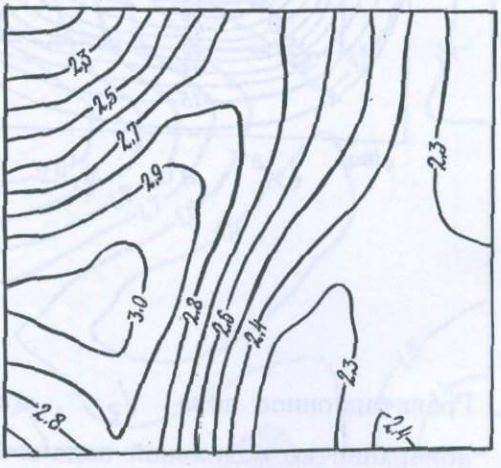


Рис.IУ.I7,д. Регуляризованное решение $z^{\alpha(\delta)}$ модельной задачи 2 при помехе с нормальным законом распределения.

§ 6. Алгоритмы решения линейной обратной задачи гравиметрии с учетом сферичности планеты

I. Для решения ЛОЗГ с учетом сферичности Земли конкретизируем матрицу A задачи (I.I3). Если все плотности σ_j, $j=\overline{1,N}$, различны, то матрица $[A]=[A_{ij}]$, $i=\overline{1,M}$, имеет размеры $M\times N$. Каждую j-ую геологическую структуру будем аппроксимировать совокупностью СПП с одинаковыми плотностями σ_j. В этом случае коэффициенты матрицы

$$A_{ij}=\sum_{k=1}^{N_j} a_{ijk}, \quad i=\overline{1,M}, \quad j=\overline{1,N}, \qquad (IУ.I25)$$

где a_{ijk} – величина гравитационного поля от K-ого сферического прямоугольного параллелепипеда единичной плотности в j-ой структуре на i-ую точку наблюдения.

Пусть i и j фиксированны. Величина гравитационного влияния a_{ijk} на i-ую точку $(R_i,\varphi_i,\lambda_i)$ вычисляется следующим образом [339,202]. В выражении (I.I2) при $\sigma(r)\equiv 1$ проведем интегрирование по переменной r, тогда

$$a_{ijk}=G\int_{\lambda_{1jk}}^{\lambda_{2jk}}\int_{\varphi_{1jk}}^{\varphi_{2jk}}\left(R_i F_{i3}^{2}-\cos\omega\, F_{i3}^{3}\right)\sin\varphi\, d\varphi\, d\lambda, \qquad (IУ.I26)$$

где $[r_{1jk}, r_{2jk}, \varphi_{1jk}, \varphi_{2jk}, \lambda_{1jk}, \lambda_{2jk}]$ – параметры K-ого элементарного СПП j-ой структуры. Общая формула для вычисления следующая

$$F_n^m=F_n^m(\varphi,\lambda)=\int_{r_1}^{r_2}\frac{r^m}{\rho^n}\,dr, \qquad \begin{matrix} m=0,1,2,\ldots, \\ n=2k+1,\ k=0,1,2,\ldots \end{matrix} \qquad (IУ.I27)$$

При $n=3$ и $m=2$

$$F_{i3}^{2} = \left[\frac{6r\cos^2\omega - r - 3R_i\cos\omega}{\rho_i} + (1 - 3\cos^2\omega)A \right] \Bigg|_{r_{1jk}}^{r_{2jk}},$$

где $A = -\ln(R_i\cos\omega - r + \rho_i)$,

$$\rho_i = R_i^2 + r^2 - 2R_i r\cos\omega,$$

$$\cos\omega = \cos\varphi_i\cos\varphi + \sin\varphi_i\sin\varphi\cos(\lambda_i - \lambda),$$

при $n = 3, m = 3$

$$F_{i3}^{3} = \frac{r^2}{\rho_i}$$

Двойные интегралы в выражении (IУ.126) аналитически не вычисляются. Для их приближенного вычисления нужно обратиться к кубатурным формулам. Известно [376], что алгебраическая точность кубатурной формулы находится в прямой связи с гармоническими моментами гравитационного поля. Следовательно, кубатурная формула должна иметь максимальную алгебраическую степень точности и, одновременно, минимальное количество узлов. В работах [339, 202] показано, что для решения задачи (IУ.126) самыми целесообразными являются кубатурные формулы, полученные от декартовых произведений квадратур типа Гаусса–Лежандра. Они при n узлах интегрирования имеют алгебраическую степень точности, равную $2n-1$.

В этих же работах, на основании квадратур Гаусса–Лежандра, разработан интересный кубатурный процесс для численного интегрирования выражений (IУ.126), которые в некоторых экстремальных случаях могут иметь слабую особенность.

Суммируя вычисленные значения a_{ijk}, по переменной K, получим коэффициент A_{ij} матрицы A. Перебором всех комбинаций i, j заканчивается построение матрицы A.

2. Линейная обратная задача гравиметрии с учетом сферичности Земли решалась модифицированным методом Гаусса–Ньютона, вычислительная схема которой приведена в § 5 главы IУ. На основании вычислительной схемы ММГН составлена программа для ПЭВМ IBM PC на языке Фортран–IУ, где все вычисления проводились с двойной точностью.

Основная цель модельных расчетов – выявление условий, позволяющих получать уверенные результаты при ограниченном количестве профилей наблюдений над трехмерными структурами.

Рассматриваются три модельные задачи (рис.IУ.I8–20). Для предварительно выбранной модели рассчитывались теоретические значения аномального гравитационного поля V_{RT} по одному, двум или трем профилям. Далее в поле V_{RT} вводится помеха для получения V_{RH}.

Величина помехи бралась до 3,5% от максимального значения точного поля V_{RT}. Исходя из опыта решения двухмерных ЛОЗГ в классе конечномерных параметрических моделей [254,27I,34I] в соотношении (IУ.I02) матрица B бралась равной единичной и пятидиагональной (IУ.8). Модельные расчеты показали, что для структур с большими размерами ЛОЗГ с учетом сферичности хорошо решается при нулевом порядке регуляризации, т.е. $B=E$. Все приведенные расчеты получены ММГН с единичной матрицей регуляризации.

Геометрические параметры моделей I–3, результаты решения модельных обратных задач приведены соответственно в таблицах I–3. Для модельных расчетов принято R = 637I км, что соответствует заданию поля V_{RH} на дневной поверхности; α_0 = I000,0; q = 0,I; ε = 0,I; ε' = 0,05; K = I6 – порядок квадратур типа Гаусса–Лежандра.

В качестве расчетных профилей использовались широтные и долготные дуги на поверхности Земли, т.е. $z=R$. Количество про-

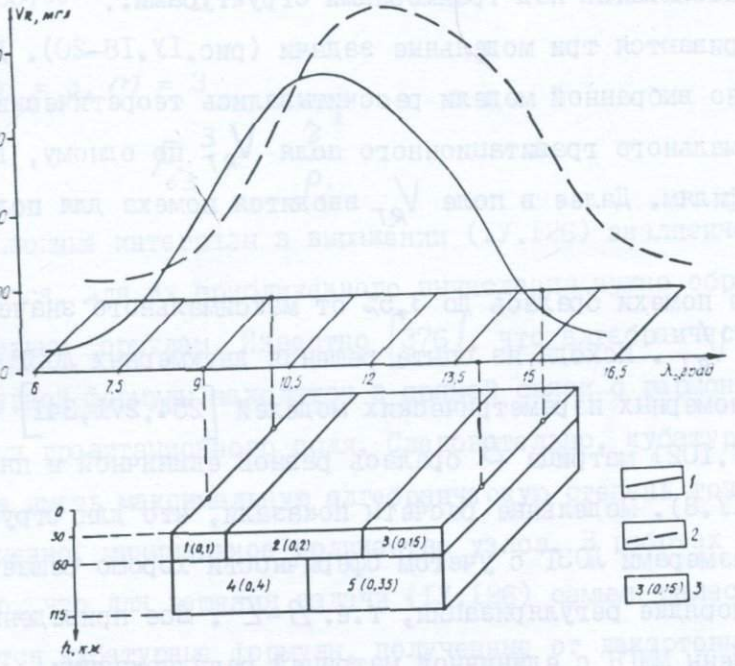


Рис.IУ.I8. Трехмерное тело и гравитационный эффект V_R для модели I: I,2 - функция V_{RT} соответственно на профилях $\varphi_o = 4I^o$ и $\varphi_o = 43^o$; 3 - порядковый номер СПП и точное значение аномальной плотности в г/см^3.

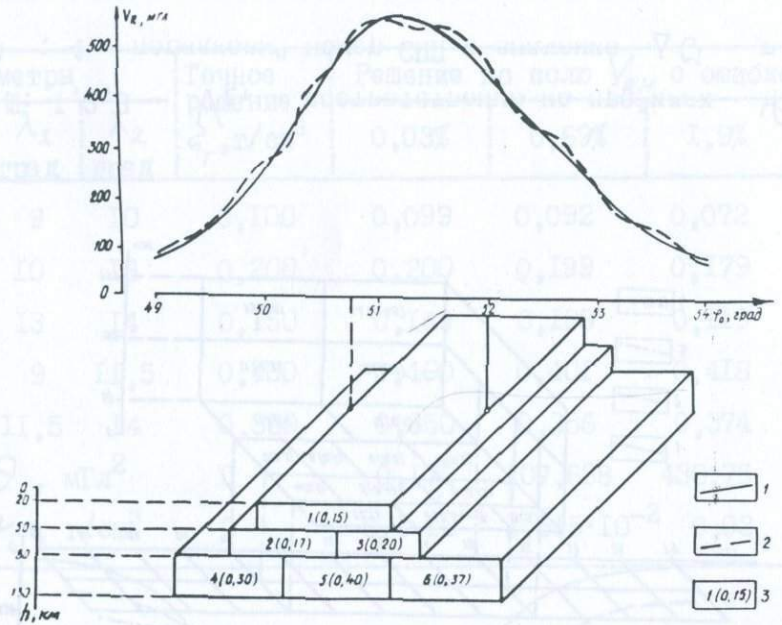


Рис.IУ.I9. Модель П: I - теоретическая аномалия V_{RT} на профиле $\lambda_o = 44^o$; 2 - по V_{RH}, осложненное помехой; 3 - то же, что и на рис. IУ.I8.

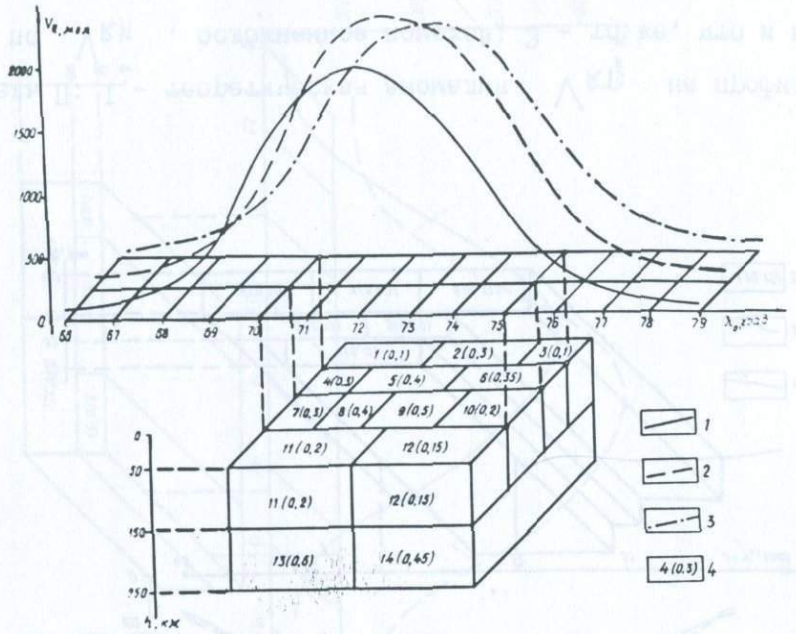


Рис. IУ.20. Модель Ш: I,2,3 - $V_{Rт}$ соответственно на профилях $\varphi_0 = 71^0, 72^0I5$ и $73^0 30$; 4 - порядковый номер СПП и значение $\Delta\sigma$ в г/см^0.

Таблица I

№ СПП	Геометрические параметры						Точное решение	Решение по полю V_{zH} с ошибкой			
	h_1 км	h_2 км	φ_1 град	φ_2 град	λ_1 град	λ_2 град	σ_T, г/см^3	0,03%	0,69%	I,9%	2,77%
I	30	60	40	44	9	I0	0,I00	0,099	0,092	0,072	0,I72
2	30	60	40	44	I0	I3	0,200	0,200	0,I99	0,I79	0,272
3	30	60	40	44	I3	I4	0,I50	0,I49	0,I38	0,II9	0,I70
4	60	II5	40	44	9	II,5	0,400	0,400	0,40I	0,4I8	0,343
5	60	II5	40	44	II,5	I4	0,350	0,350	0,356	0,374	0,320
					Θ, мГл^2		0	0,I72	I07,688	430,75	I723,0I5
					ψ, г/см^3		0	$6,I\cdot10^{-4}$	$I,5I5\cdot10^{-2}$	0,03	0,0606

Таблица 2

№ СШ	Геометрические параметры						Точное решение	Решение по полю V_{RH} с ошибкой			
	h_1 км	h_2 км	φ_1 град	φ_2 град	λ_1 град	λ_2 град	σ_T, г/см^3	0,03%	0,85%	I,70%	3,4%
I	20	50	50,75	52,0	42	46	0,I50	0,I5I	0,I74	0,I99	0,I64
2	50	80	50,5	5I,5	42	46	0,I70	0,I70	0,I66	0,I62	0,I47
3	50	80	5I,5	52,25	42	46	0,200	0,207	0,370	0,540	0,I48
4	80	I30	50,0	5I,0	42	46	0,300	0,300	0,304	0,307	0,32I
5	80	I30	5I,0	52,0	42	46	0,400	0,400	0,405	0,409	0,363
6	80	I30	52,0	53,0	42	46	0,370	0,370	0,373	0,37I	0,39I
				ω, мГл^2			0	0,2I9	I37,87	548,746	2I94,988
				γ, г/см^3			0	$2{,}8I\cdot10^{-3}$	$7{,}02\cdot10^{-2}$	0,I4047	0,28094

Таблица 3

№ СПП	Геометрические параметры						Точное решение	Решение по полю $V_{кн}$ с ошибкой		
	h_1 км	h_2 км	φ_1 град	φ_2 град	λ_1 град	λ_2 град	σ_T, г/см^3	0,01%	0,65%	1,3%
1	50	150	70	71	70	72	0,100	0,101	0,139	0,178
2	50	150	70	71	72	74	0,300	0,302	0,393	0,487
3	50	150	70	71	74	75	0,100	0,102	0,193	0,285
4	50	150	71	72	70	71	0,300	0,299	0,275	0,250
5	50	150	71	72	71	73	0,400	0,398	0,331	0,262
6	50	150	71	72	73	75	0,350	0,348	0,253	0,156
7	50	150	72	73,5	70	71	0,300	0,300	0,325	0,350
8	50	150	72	73,5	71	72	0,400	0,401	0,432	0,465
9	50	150	72	73,5	72	73,5	0,500	0,501	0,542	0,585
10	50	150	72	73,5	73,5	75	0,200	0,201	0,248	0,296
11	50	150	73,5	75	70	72,5	0,200	0,200	0,185	0,169
12	50	150	73,5	75	72,5	75	0,150	0,149	0,130	0,111
13	150	250	70	75	70	72,5	0,600	0,600	0,595	0,589
14	150	250	70	75	72,5	75	0,450	0,450	0,443	0,436
					Θ, мГл^2		0	0,532	1330,397	5321,590
					γ, г/см^3		0	$1,7\cdot10^{-3}$	$5,35\cdot10^{-2}$	0,10706

филей выбиралось в зависимости от сложности модели.

Для модели I использовались два широтных профиля: $\varphi_0 = 41^0$ и $\varphi_0 = 43^0$, на каждом из которых имеется по восемь точек наблюдений. Расстояние между точками на профилях составляет $1^0 30'$. При решении задачи для модели 2 поле V_R задавалось на одном полготном профиле $\lambda = 44^0$. Количество точек наблюдений равно 21, а расстояние между ними составляет $15'$. При расчетах для модели 3 поле V_R задавалось на трех широтных профилях: $\varphi_0 = 171^0$, $72^0 15'$ и $73^0 30'$. На каждом профиле 14 точек наблюдений, расстояние между которыми равно 1^0.

Величина помехи, равной одному проценту, для моделей I–3 составляет величины: 5.63, 6.82 и 22.78 (мГл).

В конце каждой таблицы приводится Θ – норма разности двух полей V_{RTp} и V_{RH}; Ψ – среднеквадратическая погрешность полученных решений.

Проведенные расчеты показывают, что при ограниченной информации о поле V_{RH} алгоритм дает удовлетворительные результаты. Однако взаимное положение профилей и некоторых элементарных тел не должно быть симметричным. Так как в этих случаях наблюдались эффекты эквивалентного перераспределения в зависимости от начального приближения вектора $\sigma_0 = \{\sigma_{01}, \sigma_{02}, \ldots, \sigma_{0N}\}$.

Выводы

I. Обоснован выбор в параметрических функционалах Тихонова и Лагранжа для решения соответственно НОЗКП и ЛОЗГ в пространстве $L_2(S)$ в качестве условного стабилизатора функционала энергии деформации тонкой изогнутой пластинки на упругом основании с использованием дополнительной информации типа краевых условий. Показано, что в этом случае для нахождения элементов

z^α и $(\sigma^\alpha, \gamma^\alpha)$, регуляризованных решений НОЗКП и ЛОЗГ, можно использовать также уравнения Эйлера для параметрических функционалов Тихонова и Лагранжа.

2. На основе анализа методов конечных элементов и конечных разностей применительно к решениям НОЗКП и ЛОЗГ в пространстве $L_2(S)$ сделано заключение, что элементы z^α и $(\sigma^\alpha, \gamma^\alpha)$ нужно находить из решения соответствующих уравнений Эйлера. При этом целесообразно конечномерную аппроксимацию бесконечномерной задачи производить следующим образом: интегральные операторы, входящие в уравнения Эйлера, аппроксимировать МКЭ, а дифференциальные операторы – МКР.

Так как метод конечных элементов и метод конечных разностей являются разными способами реализации проекционного метода Галеркина, со специальными финитными базисными функциями, то их гибрид, будучи также проекционным, является дополнительным регуляризующим фактором. Фактически впервые в вычислительных схемах решения НОЗКП и ЛОЗГ в пространстве $L_2(S)$ используются два типа регуляризации: выбор стабилизатора и проекционного метода, что делает их особенно устойчивыми.

3. Для областей прямоугольного типа построены конечномерные аналоги дифференциального оператора $\Delta^2 + \beta E$ с учетом краевых условий типа жесткого защемления, свободного опирания и свободного. Конечномерная аппроксимация интегральных операторов МКЭ проведена таким образом, чтобы узлы КЭ совпадали с узлами разностей сетки.

4. Впервые построен двойственный вариант алгоритма спуска по параметру Тихонова–Гласко и модифицированного метода Гаусса–Ньютона для решения нелинейных задач геофизики.

Работоспособность вычислительных схем решения трехмерных НОЗКП и ЛОЗГ в пространстве $L_2(S)$ показана на модельных приме-

рах. Расчеты показали, что хорошие результаты регуляризующие алгоритмы дают для краевых условий типа свободного опирания. При этом для ЛОЗГ дополнительные параметры регуляризации ν и β необходимо брать соответственно 0,5 и 0, а для НОЗКП – $\nu = 0{,}5$ и $\beta = 0{,}1$. Полученные решения при точном поле хорошо совпадают с точными решениями. При наличии помех в наблюденном поле решения вполне удовлетворительные и сохраняют основные черты точного решения.

5. Составлены алгоритм и вычислительная схема решения ЛОЗГ с учетом сферичности планет итерационным модифицированным методом Гаусса–Ньютона. Показано, что для этой задачи в качестве регуляризующей матрицы B целесообразно использовать единичную, начальное значение параметра α_0 нужно взять $\alpha_0 = 1000$. Расчеты на модельных задачах показывают, что при небогатой информации о гравитационном поле V_R алгоритм решения ЛОЗГ с учетом сферичности планет дает удовлетворительные результаты, для довольно сложных трехмерных моделей при наличии помех в исходных данных.

ГЛАВА У. РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§ I. Построение гравитационной модели верхней части земной коры центральной части территории Армении

I. Построение гравитационной модели центральной части территории Республики Армении проведено совместно с А.Г.Бабаджаняном [29-34] и Л.Б.Оганесяном [29,34] .

В настоящее время установлено, что блоко-складчатым структурам земной коры свойственны квазиоднородные геофизические поля, существенно изменяющиеся на границах этих структур. Степень геологического истолкования полей единичных блоков и особенностей их пространственных взаимоотношений оказывается различной, в зависимости от полноты используемых признаков, методов количественной интерпретации геофизических полей, количества и качества геологической информации. Значительные трудности возникают при изучении строении блоков на различных уровнях по глубине, особенно в тех случаях, когда отсутствуют или недостаточны данные по ГСЗ и территории слабо изучена глубоким бурением [28] .

2. Гравитационное поле территории Армении характеризуется отрицательными значениями аномалии Буге и зонами линейно-мозаичной формы различной интенсивности и ориентировки [98] .

Впервые районирование гравитационного поля территории М.Кавказа выполнено Э.Б.Аджимамудовым [3] , который в качестве аномалий выделил 2 зоны максимума - северо-восточный (Казах - ский) и юго-западный (Араксинский) с разделяющей их зоной Центрального минимума. Выделенные зоны, в первом приближении,

пространственно совпадают с тектоническими зонами, выделенными К.Н.Паффенгольцем (Сомхето-Карабахская, Армянская и Нахичеванская) [291], А.Т.Асланяном (Антикавказский, Севанский и Араксинский оротектонические пояса) [14] и А.А.Габриеляном (области раннеальпийской, среднеальпийской и позднеальпийской складчатости) [92,93].

Последующие более детальные гравиметрические исследования Ш.С.Оганисяна [283], Л.К.Татевосян [385] в целом подтвердили указанную схему, уточнив границы этих зон с выделением на крайнем юго-востоке Армении обособленной области максимума силы тяжести - Кафанского гравитационного сегмента.

Расположение исследуемой территории на "стыке" нескольких мегарегиональных тектонических зон обусловило необходимость выяснения особенностей гравитационного поля изучаемого района в более региональном масштабе.

3. Для этой цели А.Г.Бабаджаняном [28] было выполнено районирование гравитационного поля по его интенсивности, простиранию, протяженности изоаномалей и другим параметрам. На составленной им схеме (рис.У.I) в пределах территории Армении выделяются пять мегарегиональных гравитационных зон: Среднеараксинская (I), Ахурянская (П), Центральная (Ш), Алаверди-Иджеванская (IУ) и Горис-Кафанская (У).

Основное отличие схемы А.Г.Бабаджаняна от существующих заключается в выделении Ахурянской мегарегиональной зоны субмеридионального простирания.

Вышеуказанные мегарегиональные зоны разделяются между собой зонами относительно повышенных горизонтальных градиентов силы тяжести протяженностью в несколько десятков и даже сотен километров и величин порядка 3-5 мГл/км. Ширина выделенных мегарегиональных зон составляет 40-70 км, протяженность от 80 до 200 км

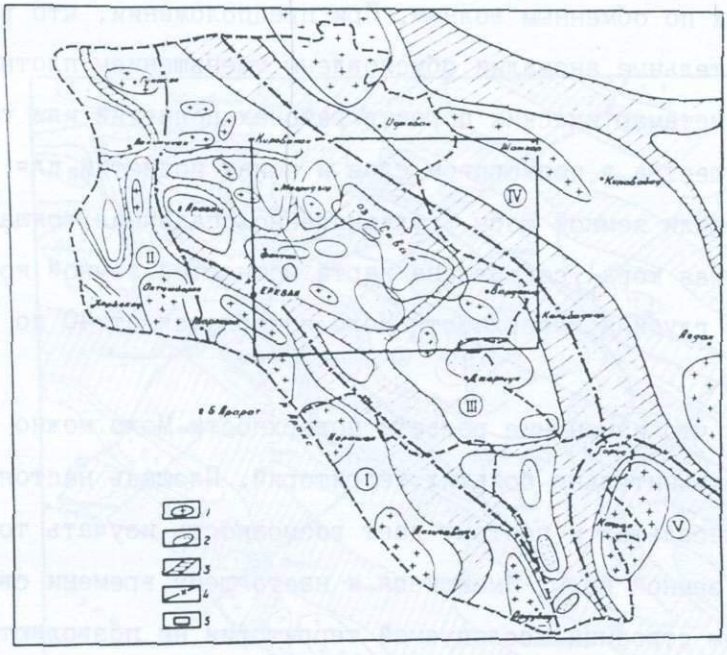


Рис.У.I. Схема районирования гравитационного поля Арм.ССР по А.Г.Бабаджаняну.

I - относительные максимумы Δg ; 2 - относительные минимумы Δg ; 3 - зоны больших горизонтальных градиентов Δg ; 4 - границы региональных гравитационных зон; 5 - исследуемая территория.

в пределах территории Армении, а разница значений аномалий между зонами достигает 70-90 мГл.

Региональные аномалии подобного характера обычно объясняются особенностями изменения рельефа поверхностей Конрада и Мохоровичича [98].

Наиболее полные данные о строении земной коры получены Ш.С.Оганисяном [284] путем интерпретации гравитационного поля с учетом данных по обменным волнам. При предположении, что региональные отрицательные аномалии обусловлены уменьшением плотности изверженных и метаморфических пород в районах поднятий или разуплотнением вещества в подкоровом слое и зонах поднятий для двухслойной модели земной коры (вулканогенно-осадочная толща - консолидированная кора) составлена карта мощностей земной коры. По этим данным глубина поверхности Мохо колеблется от 40 до 46 км.

Очевидно, что изменение рельефа поверхности Мохо можно определять для сравнительно больших территорий. Площадь настоящих исследований небольшая и поэтому дает возможность изучать только верхнюю часть земной коры. Имеющиеся к настоящему времени сведения о глубинном строении исследуемой территории не позволяют четко определить количество слоев земной коры на территории Армении. При строении гравитационной модели центральной части территории Армении принимается многослойная модель земной коры и в верхней части выделяются три границы.

С целью выявления этих границ вдоль шести интерпретационных региональных профилей с использованием геологических, сейсмологических и других геофизических материалов построим двухмерные плотностные модели верхней части земной коры 29-34 . Пространственное расположение профилей на схеме районирования гравита-

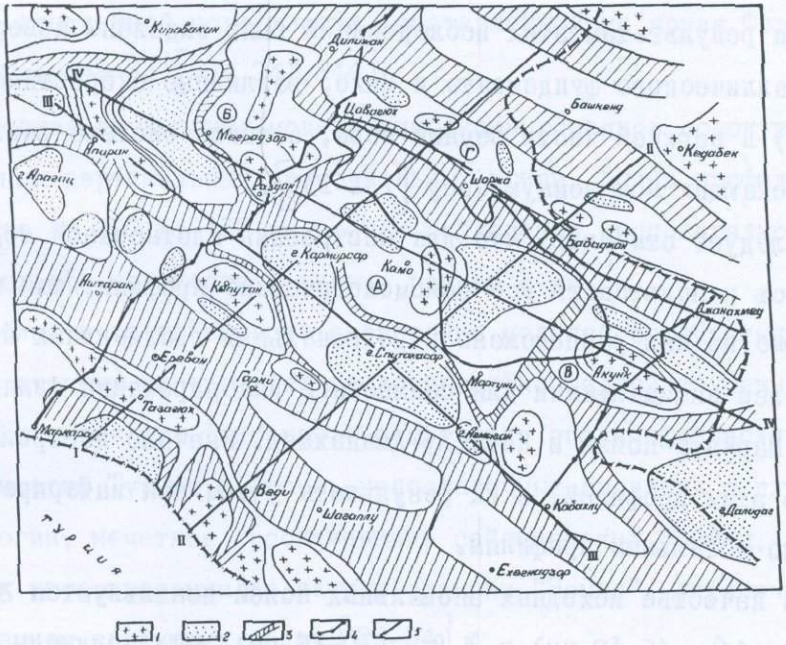


Рис.У.2. Схема уточненного районирования гравитационного поля исследуемой территории (составил А.Г.Бабаджанян) и расположения интерпретационных профилей.

I-3 – то же, что и рис.У.I; 4 – профили станций "Земля"; 5 – интерпретационные профили.

ционного поля показано на рис.У.2.

Интерпретация аномалий силы тяжести при помощи построения гравиметрических моделей позволяет получать новые данные о строении земной коры исследуемой территории.

4. Исходными данными для построения нулевого приближения принимаются результаты сейсмологических исследований со станциями "Земля", которые проводились на территории Арм.ССР в период 1968-1974 гг. и носили в основном маршрутный характер.

По результатам этих исследований были выделены поверхности кристаллического фундамента и Мохо, различные скоростные границы (слои) в верхней части земной коры, а также система разломов, пересекающих всю земную кору [131-135].

Следует отметить, что для построения плотностной модели не удалось использовать все сейсмологические профили, так как некоторые из них расположены в региональных градиентных зонах Δg. Наиболее оптимальными для совместной интерпретации являются профили Маркара-Пойлы и Кабахлу-Джанахмед. Вначале построим модели вдоль этих профилей, а их результаты учтем при интерпретации данных по остальным профилям.

В качестве исходных аномальных полей используются $\Delta g_{лок}$(0-5 км), $\Delta g_{лок}$(5-10 км) и $\Delta g_{лок}$(10-15 км). Они получены А.Т.Бабаджаняном по методике Тихонова-Буланже. в результате последовательного осреднения соответственно с радиусами 20 км, 40 км и 60 км наблюденного поля $\Delta g_н$, $\Delta g_{рег}$ (5 км) и $\Delta g_{рег}$ (10 км). Радиусы осреднения 20 км, 40 км и 60 км соответствуют глубинам до 5 км, до 10 км и до 15 км, т.е. $\Delta g_{лок}$(0-5 км) = $\Delta g_н - \Delta g_{рег}$ (5 км), $\Delta g_{лок}$(5-10 км) = $\Delta g_{рег}$(5 км) - $\Delta g_{рег}$(10 км) и $\Delta g_{лок}$(10-15 км) = $\Delta g_{рег}$(10 км) - $\Delta g_{рег}$(15 км). Локальные аномальные поля приведены на рис.2.3-2.8 работы [28]. Амплитуды локальных аномалий для глубин 5,10 и 15 км составляют соответственно 38,25 и

I5 мГл. Сравнение полученных результатов с величинами локальной аномалии $\Delta g_{лок}$ (0-I5), полученной непосредственным осреднением $\Delta g_{н}$, показало их хорошую согласованность, а именно:

$$\Delta g_{лок}(0\text{-}I5\ км) = \Delta g_{лок}(0\text{-}5\ км) + \Delta g_{лок}(5\text{-}I0\ км) + \Delta g_{лок}(I0\text{-}I5\ км) \pm (I\text{-}2)\ МГл. \quad (У.I)$$

Построение плотностной модели осуществляется методом итерационного моделирования [I74]. Количественная интерпретация проводилась по программе решения двухмерной обратной задачи гравиметрии о контактной поверхности, составленной на языке Фортран-IУ С.М.Оганесяном [254,34I,344].

Исходная двухмерная модель аппроксимировалась совокупностью бесконечных вертикальных прямоугольных призм. Длина профилей составляла от I30 до I60 км, точки наблюдения располагались на горном рельефе местности с шагом, равным 2 км.

Глубина и достоверность построения моделей существенно зависят от степени достигнутой геолого-геофизической изученности района. Учитывая ряд факторов - отсутствие гравиметрических данных территорий Турции и Ирана, недостаточные сведения о глубинной геологии, нечеткое прослеживание сейсмических границ, в результатах интерпретации по данным станции "Земля", ограничимся рассмотрением следующих задач [29-34]:

I/ определение средней глубины (асимптоты) и положения границы между осадочным чехлом и кристаллическим фундаментом;

2/ выявление и количественная характеристика по глубине вертикальных плотностных границ;

3/ изучение плотностных неоднородностей в верхней части земной коры.

5. Профиль Маркара-Пойлы. В наблюденном гравитационном поле профиль Маркара-Пойлы, протяженностью около I30 км, с юго-запада

на северо-восток пересекает Среднеараксинскую, Центральную и Алаверди-Иджеванскую региональные гравитационные зоны территории Армении (рис. У.2).

Качественный анализ относительных максимумов и минимумов наблюденного гравитационного поля $\Delta g_н$ по профилю (интенсивность, амплитуда, ширина и т.д.) позволяет предположить обусловленность этих экстремумов структурами, залегающими на небольших глубинах. Это предположение дополнительно может быть аргументировано приуроченностью некоторых установленных поднятий и опусканий поверхности кристаллического фундамента на территории Армении (Арзакан-Апаранский, Тазагюхский выступы, Фонтанский прогиб) к локальным относительным экстремумам гравитацоонного и магнитного полей [98,283] .

На основании указанных факторов на первом этапе интерпретации по остаточной локальной кривой $\Delta g_{лок}$ (0-5 км) определяется положение границы между осадочным чехлом и кристаллическим фундаментом. За исходное положение поверхности фундамента принимается поверхность "Ф", выявленная станциями "Земля" (рис. У.3). Средняя плотность пород кристаллического фундамента, исходя из имеющихся данных по физическим свойствам, была принята $2{,}80 \pm 0{,}05$ г/см^3 [28,282] .

Для возможных избыточных плотностей (0,I5÷0,3 г/см^3) и различных глубин залегания асимптотической поверхности (-I,5÷I,0 км относительно уровня моря) рассчитывались модели поверхности кристаллического фундамента (рис.У.3,а-в) при помощи решения обратной задачи о контактной поверхности. Качество отбора того или иного положения аномалиеобразующей границы оценивалось величиной среднеквадратичного отклонения заданных величин поля и найденных в результате интерпретации, т.е. по невязке или эвристическому критерию.

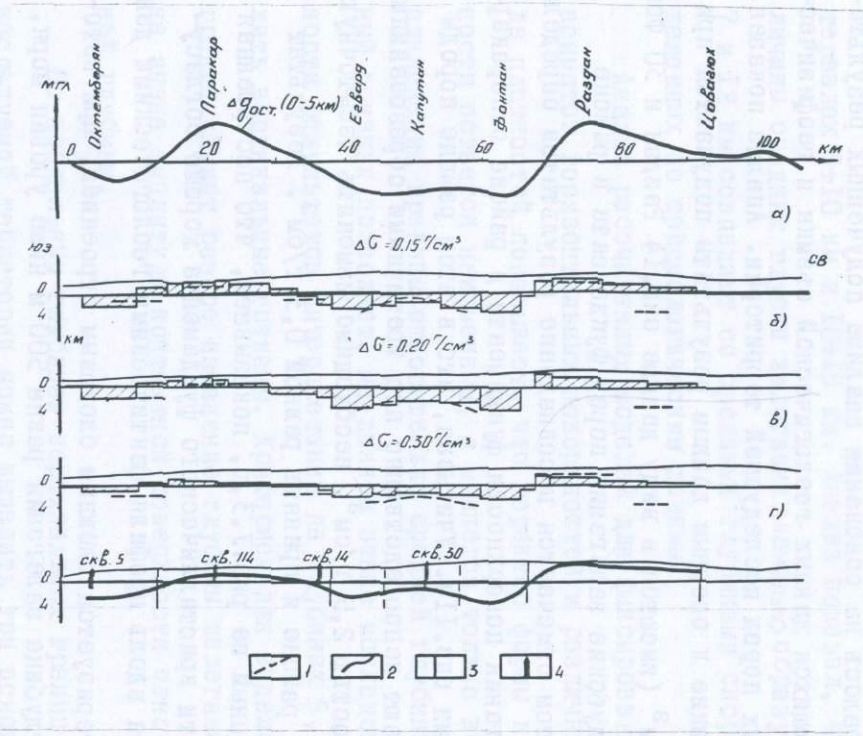


Рис.У.3. Определение положения поверхности фундамента по профилю Маркара-Пойлы: I - поверхность "Ф" по данным станций "Земля"; 2 - поверхность фундамента по данным Δg ; 3 - вертикальные границы в осадочном чехле; 4 - скважины.

Была определена средняя глубина залегания поверхности кристаллического фундамента, которая для исследуемой территории равна 500 м ниже уровня моря.

Положение границы между осадочным чехлом и кристаллическим фундаментом выбиралось на основании анализа полученных результатов с учетом имеющихся данных геологической съемки и геофизических свойств горных пород исследуемой территории. Анализ показал, что наиболее близкие к опорным данным результаты получаются при $\Delta\sigma$ = 0,2 г/см^3 (имеются в виду данные скв.I4 Раздан и 30 Фонтан, а также неглубокие залегания пород фундамента в районе с.Раздан). При этом отмечается несовпадение результатов определения глубины залегания поверхности фундамента в районе с.Паракар с опорными данными скв.II4. Учитывая, что в этом районе породы фундамента залегают непосредственно под третичными образованиями со средней плотностью 2,5 г/см^3, необходимо изменить избыточную плотность в этом районе и принять равной 0,3 г/см^3. Результат расчета, приведенный на рис.У.3,г, показывает, что построенная модель поверхности кристаллического фундамента хорошо согласуется с имеющимися вдоль профиля фактическими геологическими данными. Она характеризуется сложным блоковым строением, при котором ее средняя глубина залегания равна 500 м ниже уровня моря, а поверхность варьируется от I500÷I700 м выше до 2500÷3000 м ниже уровня моря.

Природа локального максимума $\Delta g_{лок}$ (0-5 км) в районе с.Капутан и соответствующее поднятие контактной поверхности, по всей видимости, обусловлены наличием на небольших глубинах интрузивных образований Капутанского железорудного месторождения.

На втором этапе интерпретации с целью выявления плотностных неоднородностей в верхней части земной коры по остаточным анома-

лиям $\Delta g_{лок}$ (5-10 км) и $\Delta g_{лок}$ (10-15 км) для избыточных плотностей 0,10; 0,15 и 0,20 г/см^3 рассчитывались вероятные положения более глубоких горизонтальных плотностных границ.

Глубины залегания асимптот искомых горизонтальных границ определялись, с учетом сейсмических данных, соответственно в интервалах 5÷10 км и 10÷15 км. Анализ показал, что полученные величины средних глубин залегания аномально образующих поверхностей 7 и 12 км совпадают со средними глубинами скоростных границ, выделенных по сейсмологическим данным.

Анализ рассчитанных моделей для фиксированных значений асимптот горизонтальных поверхностей и различных величин перепада плотностей показывает, что характер формы контактной поверхности остается неизменным, а меняется только величина амплитуды отклонения границы относительно средней глубины. Этот характерный признак позволяет, на данном этапе исследований, по совокупности результатов интерпретации на глубинах 5,10 и 15 км выделить вертикальные границы. Критерием для выделения вертикальных границ служат резкое изменение глубины залегания и (или) перемена знака амплитуды контактной поверхности относительно ее средней глубины.

По предельным глубинам вертикальных границ (разломов) на исследуемой территории можно выделить три основные группы: 1/ в осадочном чехле (0-5 км); 2/ в "гранитном" слое (5-10 км); 3/ достигающая глубин 15 км и более (рис.У.4). Как видно из рис.У.4, количество границ в группах неодинаково. Устанавливается уменьшение их количества в группах по глубине. Эти результаты согласуются с данными по обобщению работ ГСЗ на юге Европейской части СССР, где в верхней части земной коры разрывов больше, а их амплитуда меньше, чем в низах коры [439,440]. Для того, чтобы с глубиной амплитуды разрывов увеличились, необхо-

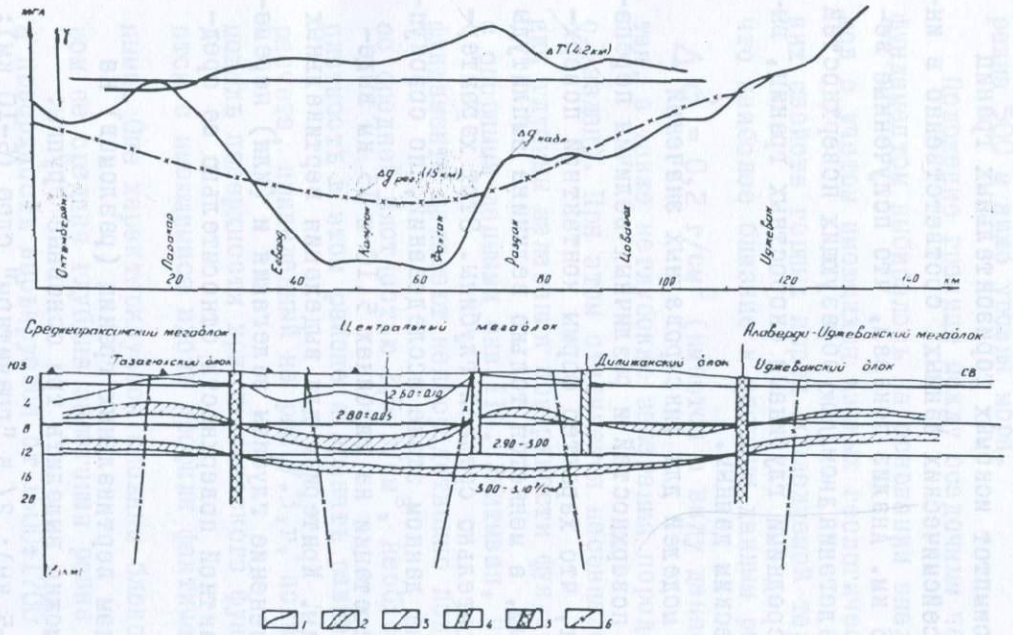


Рис.У.4. Модель по профилю Маркара-Пойлы: I - поверхность фундамента; 2 - зоны вероятного расположения горизонтальных границ; 3-6 - разломы; 3 - I группы; 4 - II группы; 5 - III группы; 6 - глубинные по данным станции "Земля".

димо допустить, что величины избыточных плотностей с глубиной уменьшаются.

Таким образом, по выявленным вертикальным границам представляется возможным выделить группы блоков, прослеживаемые на различных глубинах земной коры, которые по глубине также уменьшаются. В пределах осадочного чехла выделяются 8 блоков, "гранитном" слое - 5, на глубинах 15-20 км - 3.

Наиболее крупными структурами вдоль исследуемого профиля являются Среднеараксинский, Центральный и Алаверди-Иджеванский блоки, которые прослеживаются, по крайней мере, до глубин порядка 15÷20 км. Ширина этих блоков может достигать 70 км (Центральный блок).

Вопрос о положении более глубоких горизонтальных границ остается открытым. Решение этого вопроса в значительной степени зависит от выяснения значений перепада плотностей на этих границах. При этом важную роль играет установление зависимости между скоростями распространения упругих волн и плотностями в различных слоях земной коры.

Сравнение полученных результатов с данными станций "Земля" (рис.У.4) выявляет их существенное различие как по местоположению разломов, так и по определению предельных глубин их залегания.

6. Профиль Кабахлу-Джанахмед длиной около 80 км расположен в основном в Центральной зоне пониженных значений силы тяжести и пересекает с северо-востока на юго-запад Севанскую градиентную зону, Мазринский минимум, Акунский максимум и Далидагский минимум (рис.У.2).

По аналогичной методике произведена интерпретация остальных профилей.

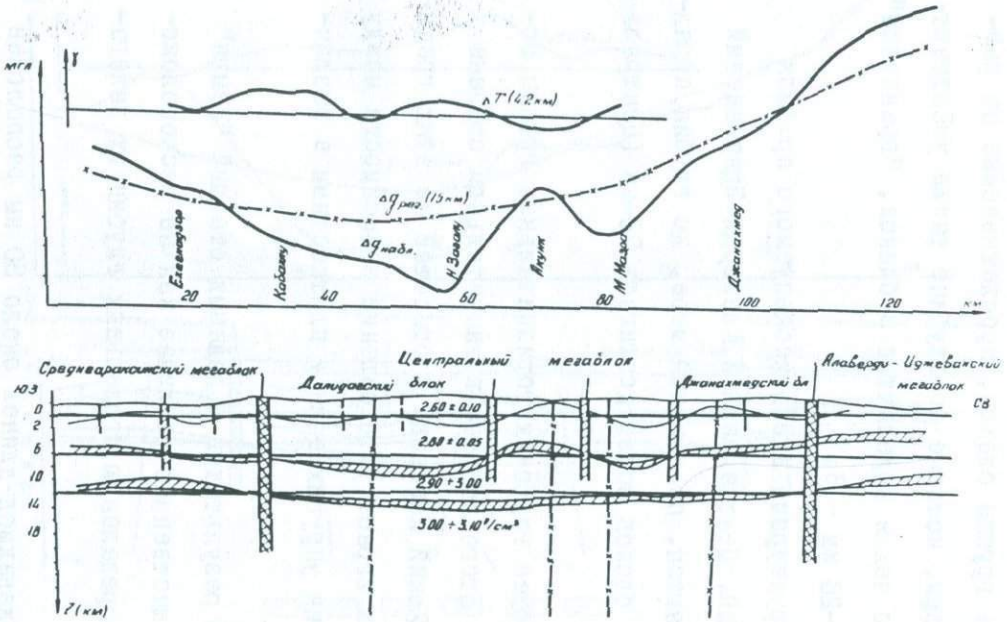


Рис.У.5. Модель по профилю Кабахлу-Джанахмед. Условные обозначения те же, что и на рис.У.4.

По эвристическому критерию (I.38), а также результатам определения физических свойств горных пород, наиболее предпочтительным для положения границы между осадочным чехлом и кристаллическим фундаментом является вариант решения с перепадом плотности 0,2 г/см^3 и средней глубины залегания аномалиеобразующей поверхности H = 500 м ниже уровня моря (рис.У.5).

По результатам количественной интерпретации выявляется сложное блоковое строение фундамента, который имеет максимальное погружение 3000 м ниже уровня моря в районе Мазринского относительного минимума $\Delta g_н$, а наибольшее поднятие - I400 м выше уровня моря в районе Акунского относительного максимума. При сравнении полученной модели с данными "Земля" выявляется существенное различие в оценке глубины залегания поверхности фундамента на концах рассматриваемого профиля в районе селений Кабахлу и Джанахмед (рис.У.5).

По поверхности фундамента вдоль исследуемого профиля выделяются следующие блоки: Ехегнадзорский, Далидагский, Акункский, Мазринский, Джанахмедский, Шахдагский.

С целью выяснения в какой мере выделенные блоки прослеживаются в юго-восточном направлении были проведены аналогичные исследования вдоль северо-восточного отрезка регионального геологического профиля Ж-3, составленного А.Т.Асланяном и др. [I4]. Расчеты показали, что блоковое строение фундамента сохраняется и полученное положение его поверхности хорошо согласуется с выделенными антиклинальными и синклинальными структурами, если принять за поверхность фундамента в районе Далидагского гравитационного минимума нижнюю границу триасовых отложений, а в районе Акункской и Мазринской аномалий - верхнюю границу нижнекарбоновых образований.

На втором этапе интерпретировались остаточные аномалии $\Delta g_{лок}$ (5-10 км) и $\Delta g_{лок}$ (10-15 км) для избыточных плотностей 0,10; 0,15 и 0,20 г/см^3.

Совокупный анализ рассчитанных моделей позволяет вдоль исследуемого профиля выделить три группы вертикальных плотностных границ, прослеживаемых на различные глубины земной коры. Как видно из рис.У.5, на глубинах 15-20 км выделяются 3 блока, на глубинах 5-10 км - 7, а в осадочной толще - 11. Как и для предыдущего профиля в данном случае также отмечается уменьшение числа блоков и ограничивающих их вертикальных границ по глубине.

Таким образом, на основе количественной интерпретации гравиметрических данных вдоль сейсмологических профилей Кабахлу-Джанахмед и Маркара-Пойлы построены плотностные модели верхней части земной коры в классе многоконтактных поверхностей. Определены положения границы между осадочным чехлом и кристаллическим фундаментом. Сравнение положения вертикальных плотностных границ, выявленных при количественной интерпретации, вдоль рассмотренных профилей с глубинными разломами, выделенными станциями "Земля", показало в ряде случаев несовпадение по местоположению и глубине заложения этих субвертикальных границ. Вопрос об объективных причинах расхождения между гравиметрическими и сейсмологическими данными требует, по-видимому, переинтерпретации данных станций "Земля".

7. Исходя из полученных результатов, для остальных региональных профилей при определении положения контактных поверхностей, из-за недостаточности фактических данных, средние глубины залегания принимались равными H = 500 м, 6 км, 12 км ниже уровня моря, а избыточная плотность - 0,20 г/см^3.

Результаты построения плотностных моделей вдоль профилей

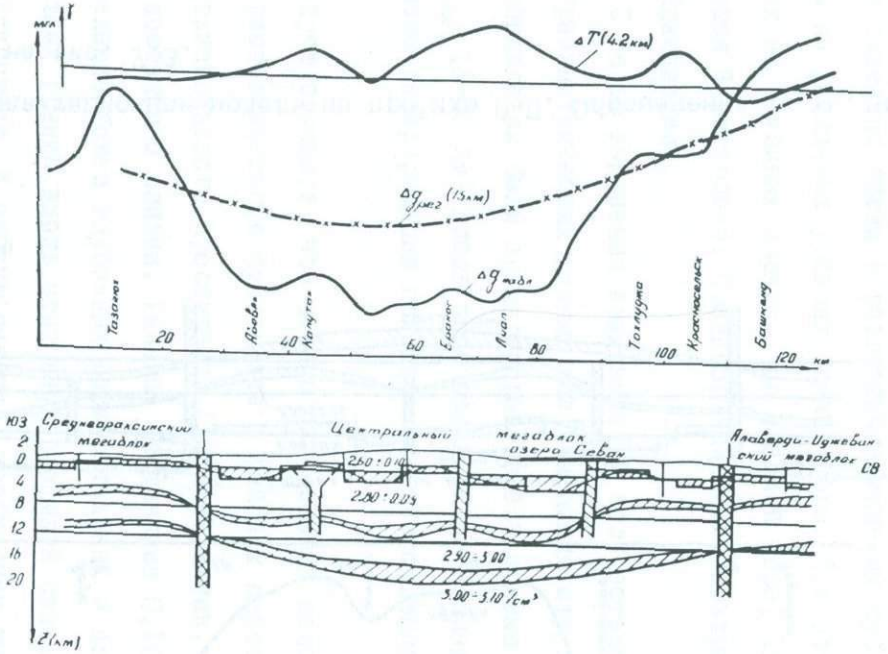


Рис.У.6. Гравитационная модель верхней части земной коры по профилю I-I. Обозначения те же, что и на рис. У.3.

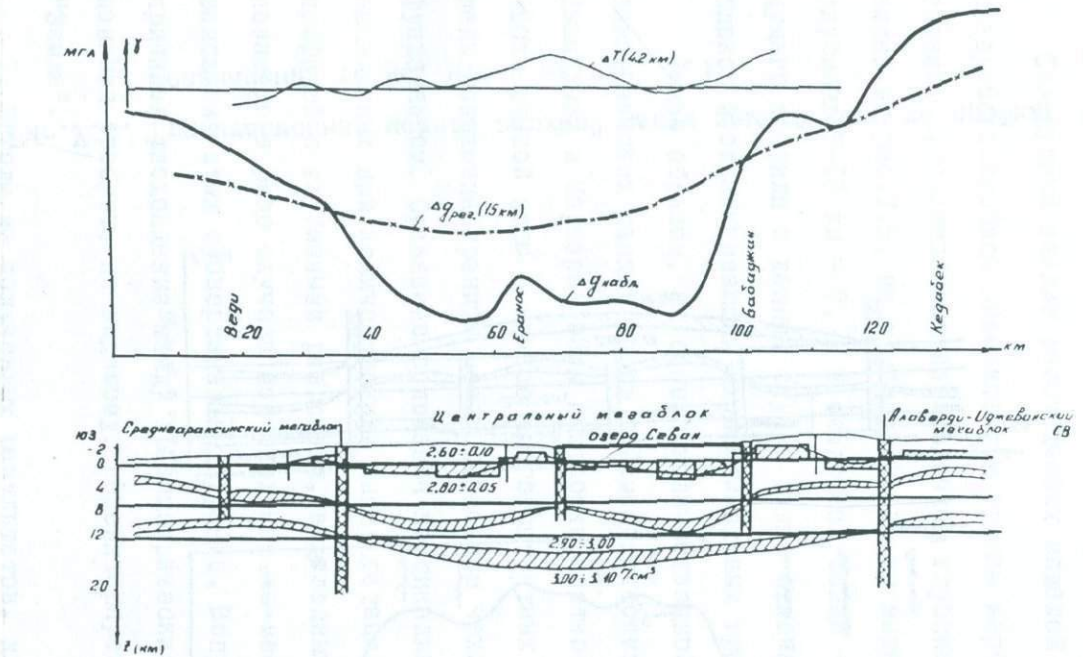


Рис.У.7. Гравитационная модель по профилю П-П. Обозначения те же, что и на рис. У.3.

I-I и П-П приведены соответственно на рис.У.6 и У.7.

В результате количественной интерпретации гравиметрических данных вдоль четырех субпараллельных региональных профилей, имеющих антикавказское направление, в пределах исследуемой территории выделены блоки и разграничивающие их субвертикальные границы на различных уровнях земной коры. При этом на всех профилях на глубинах порядка, по крайней мере, I5÷20 км четко выделяются 3 мегаблока: Среднеараксинский, Центральный и Алаверди-Иджеванский.

8. С целью выяснения возможностей количественной интерпретации гравиметрических данных для выявления структур в кавказском направлении были проинтерпретированы кривые $\Delta g_{лок}$ (0-5 км) и $\Delta g_{лок}$ (5-I0 км) вдоль профилей Анкаван-Раздан-Акунк и Ш-Ш. Результаты интерпретации приведены соответственно на рис.У.8 и У.9.

Следует отметить, что данные определения положения поверхности кристаллического фундамента в районах пересечения с профилями антикавказского простирания (Раздан, Акунк, Кабахлу, Фонтан и др.) достаточно близки. Разница составляет 0,I0÷0,I5 км.

Выделение более глубинных горизонтальных и вертикальных плотностных границ вдоль этих двух профилей связано с определенными трудностями. В первую очередь, необходимо учитывать боковые эффекты, возникающие из-за резкого изменения ширины Центральной региональной гравитационной зоны вдоль ее простирания. Поэтому для построения более точной модели необходимо для всей территории сразу интерпретировать аномалию Δg при помощи решения трехмерной обратной задачи.

9. В результате построения гравитационных моделей вдоль интерпретационных профилей в верхней части земной коры выделены

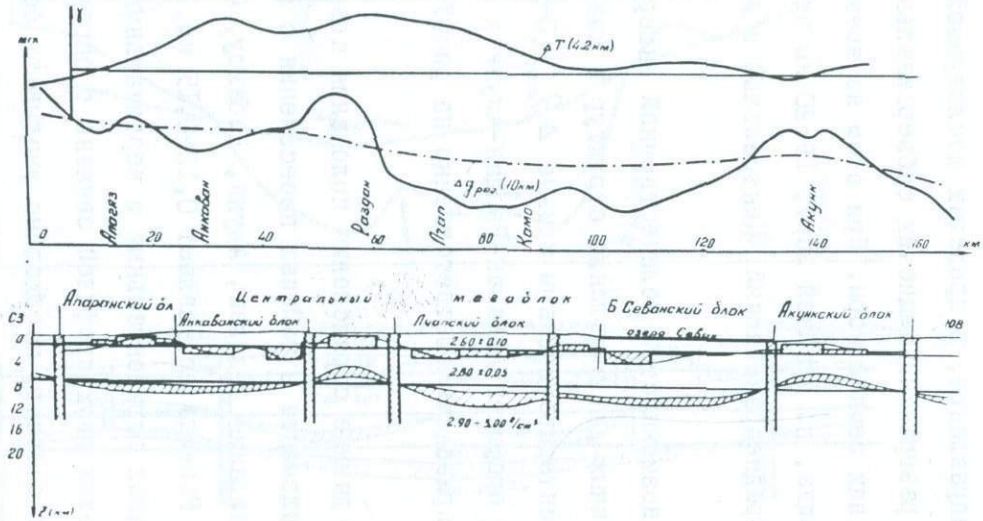


Рис.У.8. Гравитационная модель по профилю Анкаван-Раздан-Акунк. Обозначения те же, что на рис. У.3.

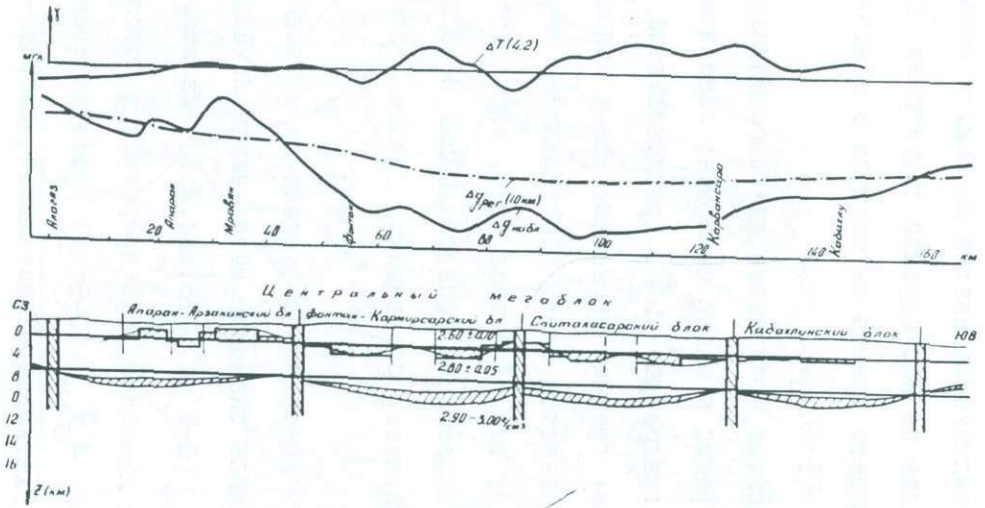


Рис.У.9. Гравитационная модель по профилю III–III. Обозначения те же, что и на рис. У.3.

вертикальные границы, прослеживаемые на различные глубины от 5 до 15-20 км. С целью выяснения пространственного прослеживания, местоположения и геологической природы этих границ А.Г.Бабаджаняном произведен комплексный анализ имеющихся геофизических и геологических материалов по исследуемой территории [28].

При изложении настоящего пункта мы следуем в основном работе А.Г.Бабаджаняна [28, с. 82-92].

Основными геофизическими признаками для прослеживания и соединения вертикальных границ в плане являются: линейные зоны больших горизонтальных градиентов Δg, прослеживаемые на десятки и сотни километров; границы магнитных зон и подзон, по обе стороны от которых меняется знак, простирание и интенсивность магнитных аномалий; линии и узкие зоны, вдоль которых происходит потеря осей корреляции гравитационных и магнитных аномалий; контрастный характер современных движений земной коры и т.д.

Для построения схемы поверхности фундамента и неоднородностей осадочного чехла важное значение имеет карта локальных аномалий силы тяжести $\Delta g_{лок}$ (0-5 км) [28, рис.2.3]. На этой карте выделяются чередующиеся линейные зоны прерывистых положительных и отрицательных аномалий $\Delta g_{лок}$ (0-5 км) преимущественно северо-западного простирания (Ехегнадзор-Тазагюхский, Джермук-Фонтанский, Джанахмед-Цовагюхский и др.). Протяженность их составляет от 60 до 100 км, а ширина - от 15 до 50 км.

В результате сопоставления этой карты с данными геологической и аэромагнитной съемок выявляются следующие закономерности:

1/ в пределах зон положительных аномалий $\Delta g_н$ расположены выходы палеозойских и мезозойских пород, а также интрузии различного состава и возраста;

2/ в пределах зон отрицательных аномалий $\Delta g_н$ имеют широкое

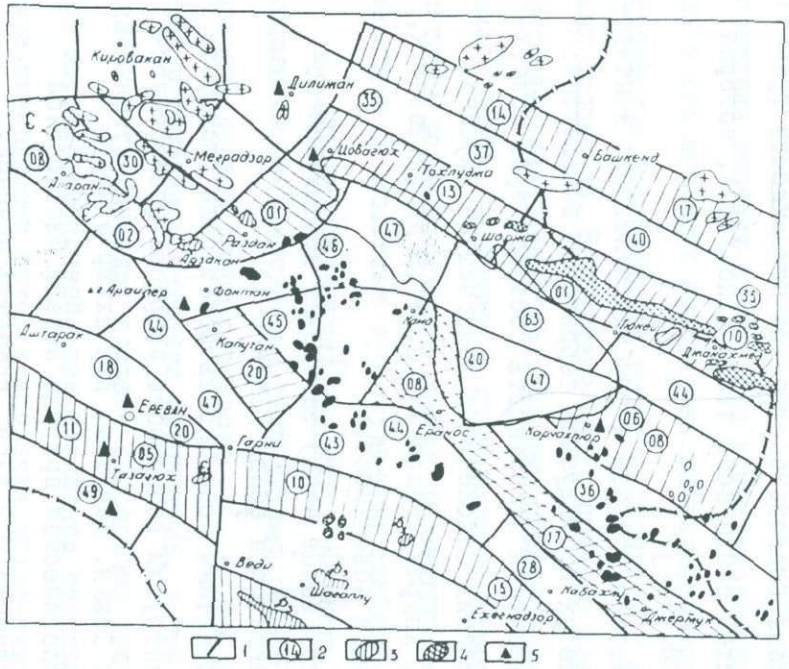


Рис.У.10. Схема блокового строения поверхности "Ф" (составил А.Г.Бабаджанян).

развитие неоген-четвертичные отложения и продукты эффузивного магматизма. Магнитное поле над ними характеризуется наличием интенсивных положительных и отрицательных значений ΔT_a.

Указанные соотношения позволяют вертикальные границы и блоки, выявленные в результате построения плотностных моделей по интерпретационным профилям, проследить и соединить. В результате получается схема блокового строения поверхности фундамента и неоднородностей осадочного чехла (рис.У.IO), которая имеется в работе [28, рис.4.I].

Исходя из геологической природы и глубины залегания контактной поверхности в пределах исследуемой территории выделяются:

I/ районы, где контактная поверхность соответствует поверхности кембрий-докембрийских отложений и залегает на глубинах 0,I÷0,2 км (с.Арзакан, Апаран, Раздан) и 0,5÷I,5 км (с.Тазагюх, Паракар и др.) от дневной поверхности;

б/ районы глубокого (более 4 км) залегания контактной поверхности (с.Фонтан, акватория озера Севан и др.);

в/ районы, где контактная поверхность может быть отождествлена с поверхностью интрузий различного возраста (северо-восточное побережье озера Севан, Капутан, Карчахпюр и др.);

г/ районы, где геслогическая природа первой плотностной границы со скачком плотности 0,2 г/см^3 остается неясной.

§ 2. Трехмерное распределение плотности в коре Днепровского грабена

I. Интерпретация выполнена совместно с В.И.Старостенко, В.Г.Козленко, Э.Л.Шеном, М.Г.Оганесяном, Т.П.Егоровой, Г.В.Дадюра [349].

Расшифровка региональных аномалий потенциальных полей Днеп-

ровско-Донецкого авлакогена, в частности его северо-западного звена - Днепровского грабена, имеет важное значение для понимания глубинного строения и генезиса как этой, так и аналогичных ей геоструктур. По степени изученности Днепровский грабен сопоставим с грабеном Осло, который послужил испытательным полигоном при исследованиях комплекса проблем, связанных с палеорифтами [178]. Преимущество грабена Осло как исследовательского полигона состоит в том, что консолидированные палеозойские породы в его пределах выходят на дневную поверхность. Глубинная структура Днепровского грабена скрыта под мощным чехлом осадочных отложений. Вследствие этого при его изучении геофизическими методами извлечение достоверных сведений из данных наблюдений имеет особое значение. В этом аспекте важную роль призваны сыграть формализованные оценки параметров аномальных масс, наименее отягощенные субъективными ошибками.

2. Данные предыдущих расчетов. Начиная с 1965 года, были выполнены многочисленные расчеты распределения физических параметров, прежде всего плотности σ, при различных представлениях о глубинном строении авлакогена, в том числе при прогибе поверхности Конрада; подъеме скоростных уровней V = 6,5 и 7,0 км/с под впадиной; при различном перепаде плотности на выступе поверхности Мохо; в варианте уплотнения и разуплотнения в подкоровом слое и т.п. [169,172,173]. Уплотнение в консолидированной коре аппроксимировалось горизонтальным цилиндрическим телом параллелепипедом, набором блоков, телами с плоским верхним и слоистым нижним ограничением; избыточные плотности задавались от постоянной во всем теле до переменной с несколькими градациями (до 5). Распределение плотности находилось методом подбора "вручную" и с помощью решения обратной задачи гравиметрии численными устойчивыми методами [341,254,258,172].

Общий подход к расчету аномальных масс претерпел определенную эволюцию, которая заключалась в том, что на первых этапах преобладало построение моделей, базирующихся на "априорной" информации, а на поздних стадиях стали более активно использоваться оценочные расчеты параметров аномальных масс. Показательно, что такого же рода эволюция прослеживается в работах по грабену Осло: в 1972-76 гг. выполнялось моделирование на ЭВМ на основе геолого-геофизических данных, а в последующем привлекался метод "идеального тела" Паркера, позволяющий определять нижнюю границу тела при заданной верхней [424]. Хотя оценки по методу Паркера являлись весьма трудоемкими, они давали, по мнению авторов [424], "неоспоримую" информацию об аномальном теле в противоположность общепринятому моделированию, при котором могут быть сделаны выводы, исходящие из случайных особенностей частных решений.

Упоминавшиеся выше оценки параметров аномальных масс выполнялись по преимуществу в привязке к профилю ГСЗ Пирятин-Талалаевка, пересекающему Лохвицкий региональный гравимагнитный максимум. На остальные части Днепропетровского грабена, где наблюдаются крупные положительные аномалии поля силы тяжести - Черниговский, Лютеньский, Солоховско-Диканьский - полученные представления распространялись по аналогии, с учетом поправки за увеличение глубины залегания кристаллического фундамента в юго-восточном направлении* . На этих представлениях базировалось построение объемной плотностной модели коры Днепропетровского грабена, начавшееся в середине 60-х годов. Моделирование поля по площади столкнулось с неожиданным феноменом, который выразился в затруднениях при подборе взаимосвязи основных аномалий - соот-

* Предельные оценки осуществлялись и по некоторым другим структурным элементам - например, для района Солоховского поднятия [169, с.55].

ношения амплитуд и характера градиентных зон. Эти затруднения имели не технический, а принципиальный характер. Попытки их преодоления привели в конечном итоге к формулировке системного принципа интерпретации: объект как система содержит в себе основные ограничения на получаемые при моделировании решения [169].

В дальнейшем работы по построению трехмерной плотностной модели Днепропетровского грабена с расчетом поля по площади, а также независимые оценки распределения аномальных масс формализованными способами продолжались; рассмотрению их результатов посвящен настоящий параграф.

3. Исходные материалы. Основой всех расчетов по полю силы тяжести послужила карта разностных аномалий $\Delta g_р$ (рис.У.II), которая была получена вычитанием из наблюденного гравитационного поля эффекта осадочного чехла. Для последнего функция использовалась та же, что и при предыдущих расчетах (рис.6 работы [169]). Эта функция была получена по лабораторным определениям плотности и пористости более 20 тыс.образцов керна, обобщенным на основе стандартного каротажа, с литологической и стратиграфической привязкой. В предыдущих работах при построении $\Delta g_р$ учитывался эффект соляных масс девона, распределение которых в моделях имело по большей части прогнозный характер. Кроме того, общая мощность осадочного чехла задавалась в ориентировке на данные работ КМПВ, согласно которым глубины до фундамента доходили до IO–II км в юго-восточной части грабена.

Разностное поле на рис.У.II получено при ограничении осадочного чехла глубиной 5 км, за исключением тех участков, где кристаллический фундамент выступает выше этого уровня (северо-западная часть грабена). Такое ограничение было принято, исходя из следующих соображений. Во-первых, поскольку распределение масс девонской соли достаточно гипотетично, ее целесообразно из зада-

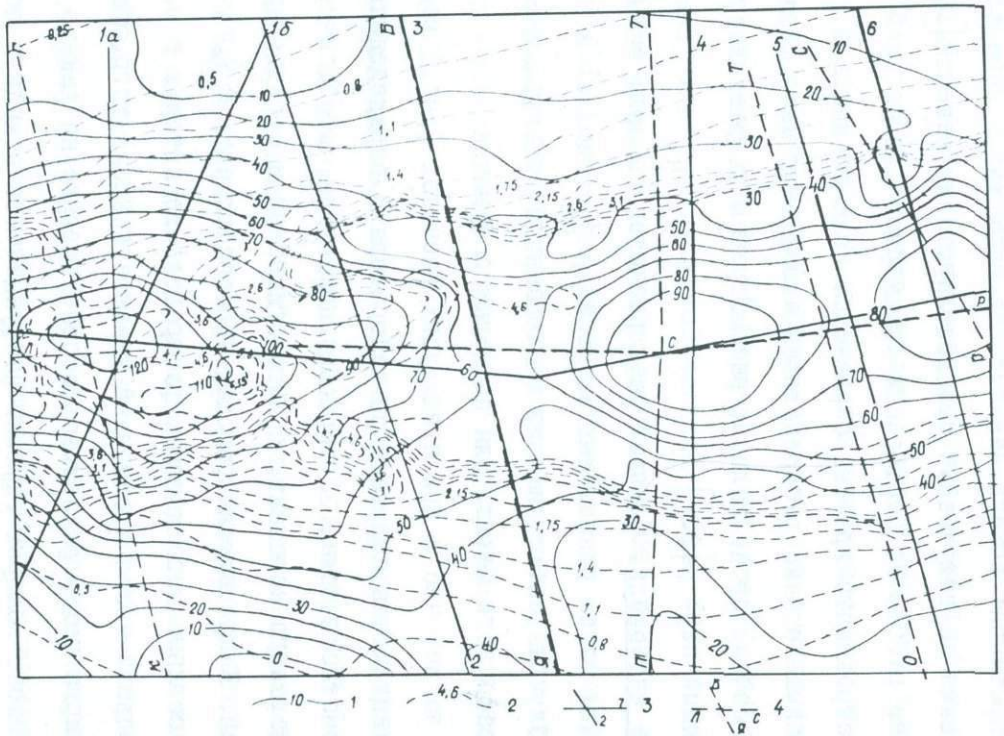


Рис.У.II. Карта разностного поля Днепровского грабена:
I - изолинии Δg_p , сечение 10^{-4} м/с^2, уровень условный; 2 - изогипсы поверхности кристаллического фундамента, оцифровка в глубинах средних линий поинтервальных срезов, км.; 3 - профили расчетов по двухмерной задаче; 4 - профили ГСЗ Киев-Гомель (К-Г), Ягодин-Батурин (Я-Б), Пирятин-Талалаевка (П-Т), Оболонь-Термы (О-Т), Решетиловка-Синёвка (Р-С), Лабог-Среднее-Рас (Л-С-Р).

ваемых параметров исключить. Во-вторых, начиная с 5 км в осадочном чехле Днепропетровского грабена весьма вероятно наличие вулканогенных компонентов (на ряде участков эффузивы фиксируются примерно с $H \sim 4$ км), которые следует относить к аномальным образованиям. И в-третьих, что может быть наиболее существенным, на глубине около 5 км плотность терригенных разностей вследствие литостатического давления и частичного диагенеза становится соизмеримой с плотностью кристаллических пород фундамента (2,7 т/м^3), и гравитационное влияние дефицита масс осадочного чехла становится близким к нулю [169, раздел I.I, 2.2].

Если даже допустить, что ниже 5 км средняя плотность нормально-осадочной толщи будет такой же, как для дефонских отложений выше этого уровня (2,65 т/м^3), то и в этом случае дефицит масс создает незначительный гравитационный эффект - около 4 мГл для интервала глубин 5÷7 км. С точки зрения региональных расчетов эта величина несущественна. Таким образом, влиянием осадочных пород глубже 5 км, учитывая рост статической нагрузки и насыщение разреза продуктами магматизма, можно пренебречь. Несколько сложнее обстоит дело с неопределенным, в общем случае, наличием в низах осадочной толщи галогенов. В условиях такой неопределенности наиболее рационально прибегать к предельным оценкам. Разностное поле, представленное на рис.22 работы [169], было построено при предельных глубинах до фундамента (I0-II км в районе Солоховского поднятия) и соответственно с максимальной мощностью галогенов (около 6 км в ядре того же поднятия). Амплитуда Δg_p в этом варианте возрастала в юго-восточном направлении, причем над Солоховским поднятием она на 40 мГл превышала отметки Δg_p района Черниговско-Брагинской седловины*. Простейшие оценки показали (см.рис.28 работы [169]), что объяснить такую аномалию массами с верхней кромкой залегания на глубине

* Этот элемент Днепровско-Донецкого авлакогена здесь рассматривается как часть Днепровского грабена.

10-11 км, можно лишь, приписав им $\sigma \geq 4$ т/м^3, т.е. плотность пород нижней мантии. Более приемлемые оценки $\Delta\sigma$ уплотнения в коре получались по варианту Δg_p, полученному при сокращенной мощности осадочного чехла и соответственно масс соли на 2-3 км (рис.41 работы [169]). Амплитуды региональных максимумов в этом варианте убывали в юго-восточном направлении, причем над Солоховским поднятием Δg_p было на 30 мГл меньше, чем над Черниговско-Брагинской седловиной. Рассчитанные с помощью устойчивых численных методов (например, рис.45 работы [169]) по этому Δg_p распределения масс дали величины $\sigma \sim 2{,}95$ т/м^3 в верхах консолидированной коры.

Сравнивая Δg_p вариантов рис.41 [169] и рис.У.11 настоящего параграфа, можно убедиться, что исключение из модели разреза галогенов изменило рисувку поля - Черниговский максимум расплылся, Лохвицкий и Лютеньский округлились; соотношение амплитуд изменилось несущественно. "Неубранные" соляные штоки на рис.У.11 выделились локальными аномалиями, особенно четко прослеживающимися вдоль северного борта. При оценках глубинного распределения масс их, естественно, следует игнорировать.

Таким образом, можно считать, что разностные поля, приведенные в [169], обеспечивают оценку параметров распределения аномальных масс в консолидированной части коры по верхнему пределу (максимальные $\Delta\sigma$); соответственно по Δg_p рис.У.11 получены оценки по нижнему пределу - сведения о минимально возможных .

4. Расчеты параметров аномальных масс в двухмерном варианте. Вычисления проводились на ПЭВМ IBM PC по программам В.И.Старостенко и А.Н.Заворотько [335,336], обеспечивающим решение обратной задачи гравиметрии для нескольких контактных поверхностей. Использовалась в основном линейная задача, т.е. при заданной конфигурации тел и глубины контактов определялась избы-

точная плотность $\Delta\sigma$. Отдельные варианты рассчитывались с помощью нелинейной обратной задачи, в которой при заданной избыточной плотности подбирался нижний контакт.

Расчеты выполнены по 8 профилям, пересекающим региональные максимумы и интермаксимальные зоны – все основные аномалии Днепровского грабена, за исключением Солоховско-Диканьского максимума. Первые два профиля – Iа и Iб – приурочены к экстремуму Черниговского максимума, причем Iа захватывает локальные максимумы, осложняющие крылья региональной аномалии, а Iб характеризует последнюю в "чистом" виде. Профиль 2 сечет восточный отрог Черниговского максимума, приходящийся на Кошелевский выступ фундамента. *Профиль 3 проходит через интермаксимальную зону,* соответствующую Ичнянской впадине, к которой приурочена группа соляно-купольных структур. Профили 4 и 6 проведены через Лохвицкий и Лютеньский максимумы соответственно (в структурном отношении это Сребненская впадина и Лютеньковский блок), а профиль 5 – через интермаксимальную зону, приходящуюся на южное крыло Погарщинской антиклинали. Профиль 7 является связующим, он задан по осевой части грабена.

Вычисления по этим профилям проводились в режиме численного эксперимента, т.е. рассчитывались группы вариантов различного сочетания параметров аномальных тел. В качестве примера рассмотрим *некоторые из таких расчетов по профилю* Iб (рис.У.I2). Здесь представлены варианты распределений аномальных масс, ограниченных на глубину двумя и тремя контактами с вертикальными и наклонными боковыми ограничениями. В целом распределение плотности получается дифференцированным по латерали с максимальными величинами Δg под экстремумом графика Δg_p . В зависимости от формы тел и глубины $H_н$ их нижнего ограничения $\Delta\sigma$ варьируют в пределах 0,06 (от 0,25 до 0,I9) т/м^3 при положении глу-

бин нижней кромки в интервале 20-26 км. В однослойном распределении (рис.У.I2,б) при максимальной глубине H избыточные плотности распространяются на всю мощность аномального тела (табл.4); в двуслойном (рис.У.I2,а) - только до границы между слоями (в первом слое $\Delta\sigma$ практически нулевые) (табл.5). Опробован вариант с подъемом верхнего ограничения (рис.У.I2,б) до отметок 2 и 3 км при $H_н$ = 20 км (геологическими породами): это соответствует насыщению низов осадочного чехла магматическими породами, средняя плотность в однослойном распределении меняется не более чем на 0,06 (0,26÷0,20) т/м^3, т.е. приближение верхней кромки аномального тела к поверхности наблюдений на оценку принципиально не влияет.

При решении обратной нелинейной задачи (р с.У.I3) оценивалось распределение аномальных масс на глубину в ориентировке на максимальную плотность, полученную при решении обратной линейной задачи с закреплением нижней кромки на H = 20 км. Получены такие величины: на профиле Iа при $\Delta\sigma$ = 0,26 т/м^3, = 27,5 км, на профиле 4 - при $\Delta\sigma$ = 0,2I т/м^3 - 27 км и на профиле 6 при 0,I9 т/м^3 - 24 км. Т.е. в вариантах по нелинейной задаче происходит растягивание масс по вертикали до почти 30% от величины, полученной решением линейной задачи. На расчетные значения $H_н$ оказывают влияние локальные искажения кривой $\Delta g_р$, в связи с чем нижний контакт получается пилообразным.

Подобные численные эксперименты были проведены по всем расчетным профилям. Для отображения результатов по каждому профилю в сопоставлении с остальными были выбраны две группы вариантов, наиболее удовлетворяющих критерию компактности. Этот критерий, введенный в разделе П.5 работы [333], основывался на том, что наилучшую сходимость расчетного поля с наблюденным давали рас-

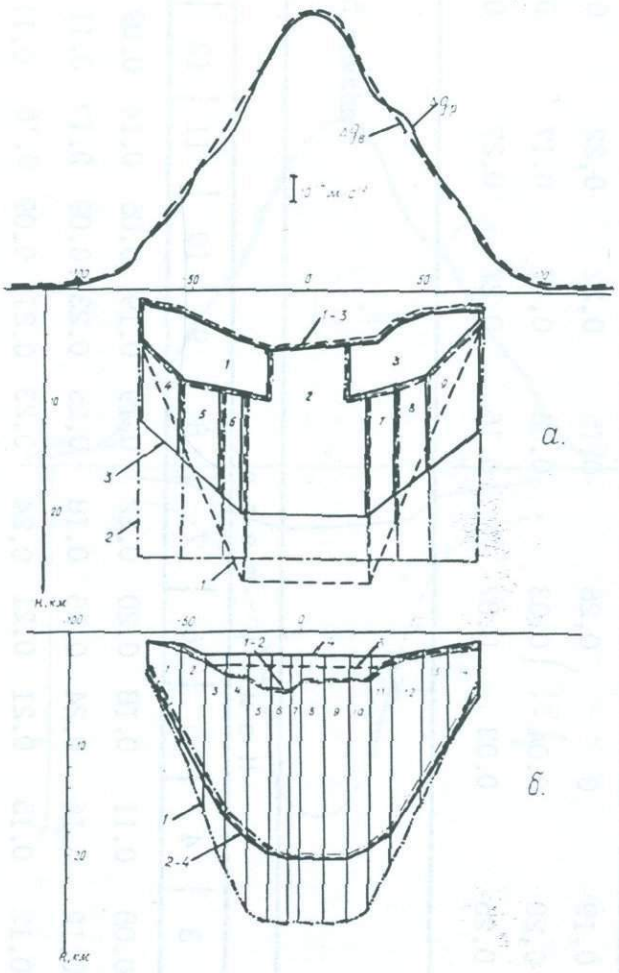


Рис.У.I2. Результаты расчетов распределения плотности по профилю I-б. Группы двухслойных (а) и однослойных (б) моделей. Графики поля: $\Delta g_{р}$ - разностное, $\Delta g_{в}$ - вычисленное. Цифры на разрезе вне контуров - номера вариантов, внутри контуров - номера тел.

Таблица 4

№№ варианта	Номер тела								
	I	2	3	4	5	6	7	8	9
I	0	0,I9	0	0,26	0,I5	0,22	0,22	0,I5	0,26
2	0,04	0,20	0.04	0.03	0.08	0,I7	0.I7	0.08	0.03
3	0.03	0.25	0.03	0.07	0.I6	0.27	0.27	0.I6	0.07

Таблица 5

№№№ варианта	Номер тела													
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4
I	0.09	0.II	0.08	0.II	0.I8	0.20	0.22	0.I9	0.I9	0.05	0.I4	0.09	0.07	0.09
2	0.I2	0.I3	0.I2	0.I6	0.24	0.26	0.I8	0.25	0.23	0.09	0.I7	0.II	0.09	0.I0
3	0.I3	0.I4	0.I2	0.I5	0.2I	0.2I	0.24	0.23	0.2I	0.09	0.I6	0.II	0.09	0.I0
4	0.I3	0.I4	0.II	0.I4	0.I9	0.20	0.23	0.22	0.I9	0.09	0.I6	0.I2	0.09	0.II

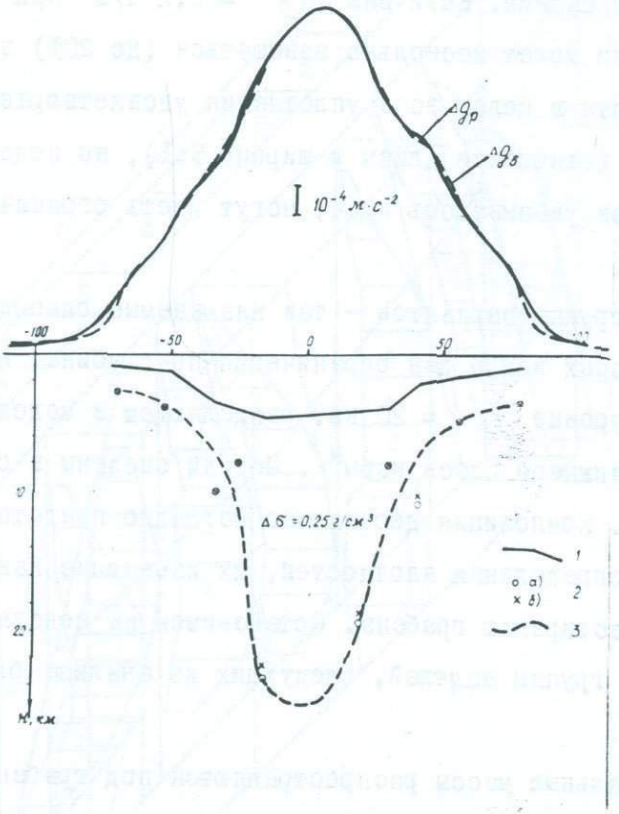


Рис.У.I3. Расчет положения нижнего ограничения $H_н$ аномальных маяя (двухмерная нелине"ная задача) по профилю I-б: I - заданное верхнее ограничение (поверхность кристаллического фундамента); 2 - расчетное положение $H_н$ при $\Delta\sigma$ = 0,25 (а) и 0,26 (б) т/м^3; 3 - положение асимптоты $H_н$.

пределения $\Delta\sigma$, занимающие наименьший объем. Второй критерий - близость максимального $\Delta\sigma$ к 0,2 т/м^3 в верхнем ("гранитном") слое коры - был обоснован в работе I72. При такой плотности наилучшим образом подбиралось разностное поле в предыдущих исследованиях, причем оно имело вполне рациональное геологическое толкование. Величина $\Delta\sigma$ = 0,2 т/м^3 при решении двумерной задачи может несколько завышаться (до 20%) вследствие того, что хотя в целом зона уплотнения удовлетворяет условию двумерности (отношение длины к ширине 5:I), но отдельные ее элементы, как указывалось выше, могут иметь ограничение по простиранию.

Первая группа вариантов - так называемые однослойные модели, у которых всего два ограничения по глубине, причем нижнее берется на уровне H = 20 км, разделяющем в модели приведения верхнего и нижнего слоев коры* . Модели сведены в блок-диаграмму рис.У.I4. Композиция достаточно наглядно представляет общий характер распределения плотностей, их изменение как вкрест, так и по простиранию грабена. Остановимся на основных особенностях этой группы моделей, следующих из анализа блок-диаграммы рис.У.I4:

I/ аномальные массы распространяются под грабеном на всю его ширину и выходят в пределы бортов, постепенно выклиниваясь. Распределение $\Delta\sigma$ дифференцировано по латерали, достигая максимума в осевой части и минимума на бортах. Максимальный диапазон - от 0,28 до 0,02 т/м^3. Общий характер распределения плотностей вкрест простирания грабена под максимумами и интермаксимальными зонами сохраняется;

2/ величина $\Delta\sigma$ в осевой части уменьшается с северо-запада на юго-восток с последовательностью 0,26-0,2I-0,I9 т/м^3 для Чер-

* Модель приведения плотностей взята из [I69,с.I44].

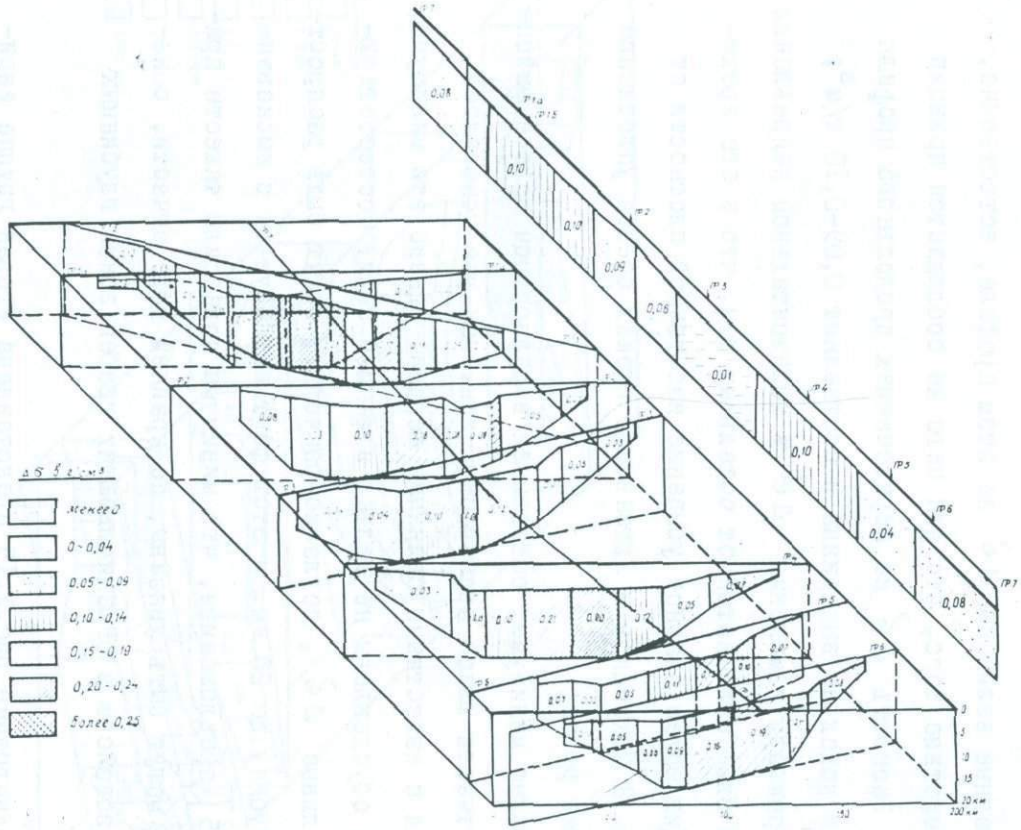


Рис. У.I4. Блок-диаграмма результатов расчетов распределения плотности по профилям I-6 (двухслойные модели).

ниговского, Лохвицкого и Лютеньского блоков соответственно. В интермаксимальных зонах $\Delta\delta$ снижаются до 0,10-0,15 т/м^3 (Ичнянский и Погарщинские блоки). Представление о характере изменения $\Delta\delta$ по оси впадины дает разрез по продольному профилю 7. Подобранные величины $\Delta\delta$ на этом профиле, естественно, занижены вследствие того, что для него не соблюдается принцип двумерности. Разность $\Delta\delta$ на пересечениях продольного профиля с поперечными довольно выдержана и составляет 0,09-0,10 т/м^3;

3/ по характеру изменения $\Delta\delta$ в горизонтальном направлении Черниговский блок отличается от остальных тем, что в его пределах происходит более плавное убывание избыточной плотности от оси к бортам. В Лохвицком и Лютеньском блоках осевое уплотнение выражено более резко;

4/ локальные минимумы, оставшиеся в разностном поле в районе северной и отчасти южной прибортовых зон, как уже говорилось, коррелируются с известными соляными телами. Однако эти минимумы, по-видимому, обусловлены не только влиянием соли. Соответствующие отрицательные $\Delta\delta$, согласно расчетам, могут быть распространены на глубину до 20 км, и этот факт согласуется с высказанным ранее [65] предложением, что минимумы поля силы тяжести прибортовых зон могут быть увязаны, по крайней мере отчасти, с изменениями физсвойств в ограничивающих грабен зонах глубинных разломов.

На блок-диаграмме рис.У.15 представлена вторая группа вариантов - решения по двуслойной модели. В ней задано три границы по вертикали, причем слой между двумя первыми берется с постоянной $\Delta\delta$, а между второй и третьей - с переменными $\Delta\delta$. Глубина промежуточной границы варьирует от 8 до 13 км. Нижнее ограничение везде принято на $H_н$ = 20 км. Из анализа материалов рис.У.15 можно сделать такие выводы:

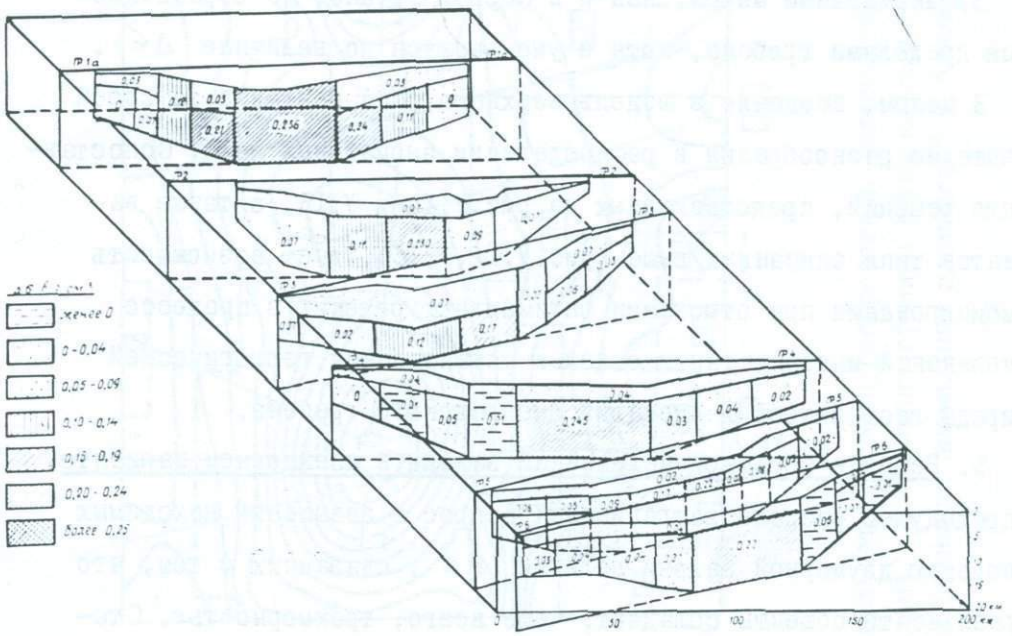


Рис.У.15. Блок-диаграмма результатов расчетов распределения плотности по профилям I-6 (двухслойные модели).

I/ в данной модификации осевая зона уплотнения становится более однородной. Величины $\Delta\sigma_{max}$ дают разброс всего 0,02 (0,24-0,22) т/м^3, включая Погарщинскую интермаксимальную зону. По ширине зоны $\Delta\sigma_{max}$ ограничена более резко, местами блоками с отрицательными $\Delta\sigma$;

2/ не везде переменные аномальные массы удается "загнать" под однородный верхний слой, причем это относится не только к положительным, но и к отрицательным $\Delta\sigma$. Мощность верхнего слоя наибольшая в сечении профиля 3, проходящего через Ичнянскую впадину, хотя $\Delta\sigma$ в ней не является минимальной (наименьшее $\Delta\sigma$ = 0,02 т/м^3, фиксируется в Погарщинском блоке);

3/ аномальные массы, как и в первой группе, не ограничиваются пределами грабена, хотя и уменьшаются по величине $\Delta\sigma$.

В целом, введение в модель верхнего слоя повлекло за собой повышение разнообразия в распределении аномальных масс. Сопоставление решений, представленных на рис.У.I4 и У.I5, а также вариантов типа описанных выше (рис.У.I2,У.I3), дает возможность комбинирования при отыскании оптимальных решений в процессе комплексной интерпретации с целью установления геологической природы геофизических аномалий Днепровского грабена.

5. Решение обратной нелинейной задачи в трехмерном варианте. В предыдущем разделе затрагивался вопрос о завышении находимых с помощью двумерной задачи величин $\Delta\sigma$, связанных с тем, что в реальности объекты обладают, чаще всего, трехмерностью. Степень завышения в каждом конкретном случае определить довольно трудно, а искаженные оценки $\Delta\sigma$ могут повлечь ошибки в геологическом толковании. В связи с этим проблема подбора масс в трехмерном варианте давно стоит на повестке дня; но до послед-

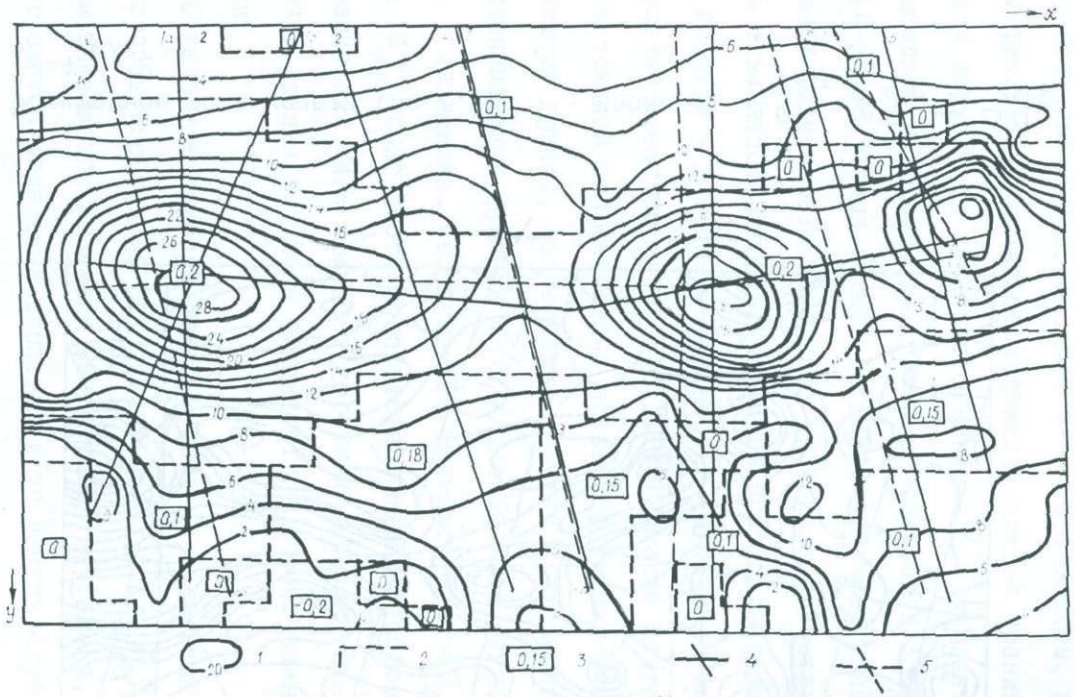


Рис.У.16. Результаты расчета распределения плотности в трехмерном варианте (нелинейная задача): I - нижняя граница аномальных масс; 2 - контуры аппроксимирующих блоков; 3 - величина аномальных плотностей в блоках, т/м^3; 4,5 - то же, что и на рис.У.II.

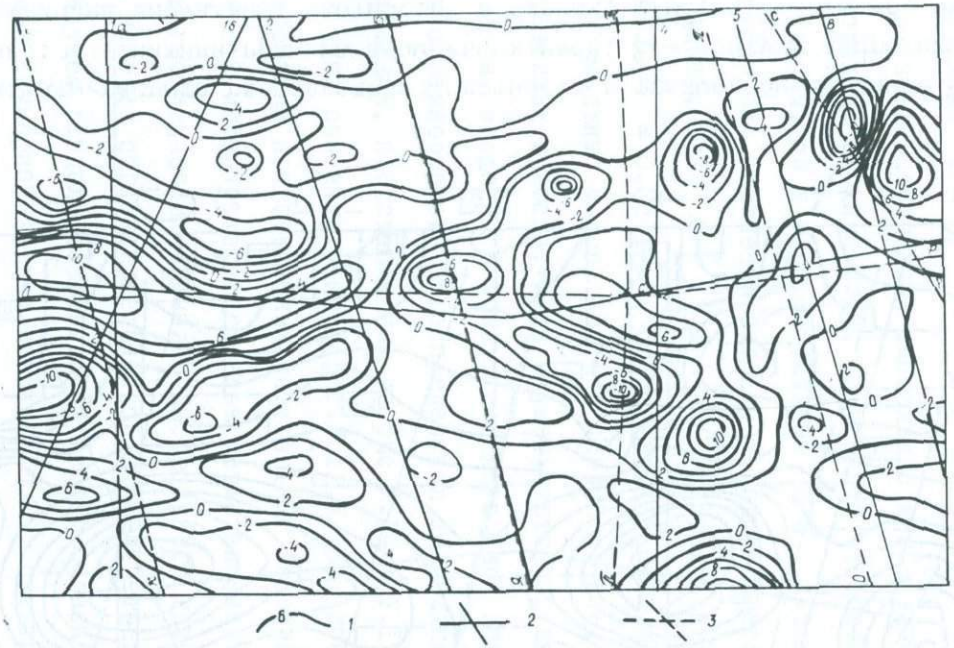


Рис.У.17. Остаточное поле модели рис.У.16: 1 – изолинии $\Delta g_{ост} = \Delta g_р - \Delta g_в$, 10^{-4} м/с^2.

него времени не существовало пригодных для практического употребления способов решения такой задачи.

С помощью программы решения трехмерной задачи гравиметрии, разработанной С.М.Оганесяном и М.Г.Оганесяном, по разностному полю рис.У.II рассчитано положение нижней границы при закрепленной верхней (в качестве функции $H(x,y)$ взята поверхность фундамента по рис.У.II). Решение получено в 336 точках для 24xI4 элементарных блоков по 2Ix20=420 значениям поля. Из-за большой размерности исходного материала и в связи с ограниченными возможностями ЭВМ счет велся по отдельности для двух частей площади - восточной и западной (с перекрытием). Сводный результат представлен на рис.У.I6. Решение получено при кусочно-постоянной аппроксимации искомой функции, что отражено в характере границ, разделяющих участки с различными плотностями. Восстановленная функция $Z(x,y)$ для большей наглядности представлена в изолиниях. Согласование вычисленного $\Delta g_в$ с распределением $\Delta g_р$ было достигнуто итерационным способом. Отметим, что итерационный ММГН обладает хорошими вычислительными свойствами с точки зрения быстроты сходимости и обеспечения требуемой точности.

О качестве подбора можно судить по материалам рис.У.I7, на котором изображено остаточное поле, т.е. $\Delta g_{ост} = \Delta g_р - \Delta g_в$. В нем выделяются аномалии амплитудой до I0 мГл, но все они имеют сугубо локальный характер и во многих случаях однозначно коррелируют с известными локальными структурами осадочного чехла. Так, в центре площади характерным полукольцом расположилась зона, включающая локальные минимумы, которые отвечают Муравковскому, Ичнянскому, Дмитриевскому и Роменскому соляным штокам. Систематических региональных составляющих в поле нет. Это свидетельствует о том, что глубинный фактор подобран

чисто.

Применение автоматизированного подбора существенно облегчает решение проблемы разделения аномалий, связанных с глубинными и приповерхностными факторами, которая вручную решалась с большими трудностями [I72]. Выявленные остаточные аномалии далее могут рассчитываться на другом уровне детальности, при меньших размерах аппроксимирующих блоков, с помощью той же программы RKONK, с получением таким образом независимых оценок параметров локальных аномальных масс, о необходимости которых говорилось в [I72].

Возвращаясь к рассмотренным решениям, отметим, что они неплохо согласуются с решениями, приведенными в пункте (см.рис. У.I4 и У.I5) и в то же время дополняют их. Однородные массы с $\Delta\sigma$ = 0,2 т/м^3 при нижнем ограничении на $H_н$ = 28 км (рис. У.I7) можно без особых затруднений пресбразовать в массы с $\Delta\sigma$ = 0,2 т/м^3 при $H_н$ = 20 км, т.е. в вариант рис.У.I4. Вместе с тем решение рис.У.I6 указывает на то, что часть аномальных масс все-таки может быть расположена глубже уровня 20 км. Интересно, что при автоматизированном подборе более отчетливо проявилось "родство" Черниговской и Лохвицкой аномалий, выражающееся в идентичности параметров аномальных масс.

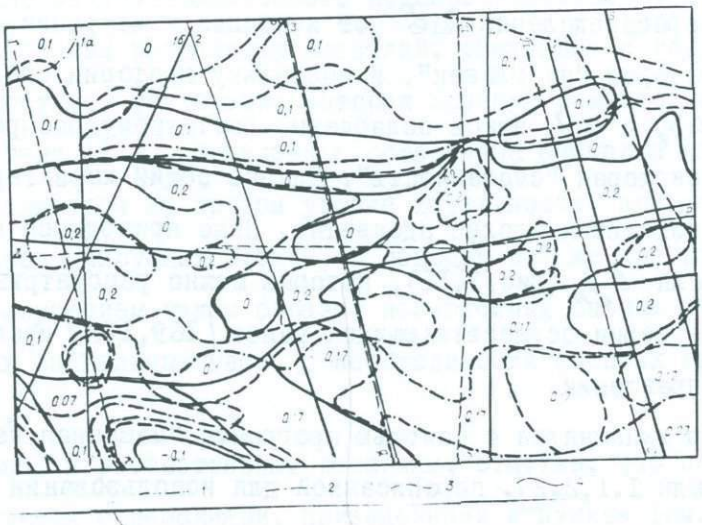
Из сопоставления решений по двумерной и трехмерной задачам ясно видна необходимость сочетания обоих методов, причем в этом комплексе двумерной задаче как более оперативной отводится роль аналитическая, подготовительная, а трехмерной - роль синтезирующая, завершающая.

6. Построение объемной модели подбором "вручную". Программа RKONK делает только первые шаги, и она еще не обладает необходимой гибкостью - хотя бы такой, как у программы двумерных задач. Последние, в свою очередь, также имеют определенные

(рассмотренные выше) ограничения в практическом использовании. Более универсальным в этом отношении является подбор "вручную". В нем перераспределение $\Delta\sigma$ от итерации к итерации задается интерпретатором "на глазок", и поскольку критерии степени совпадения Δg_σ и Δg_ρ здесь ослаблены, расчетному распределению присуща некоторая "смазанность". Однако общий характер аномальных масс находится вполне адекватно. Ниже приводится материал подбора поля Δg_ρ (рис.У.II), который можно рассматривать как завершение серии осуществлявшихся ранее [I69,I72] исследований в этом направлении.

Подбор выполнялся с помощью программы "машинная палетка" [I69, разделы I.I, 2.2], переписанной для использования ее на М-4030. Технология подбора, связанные с ним трудности подробно описаны в [I69], поэтому здесь мы на них не останавливаемся. Заметим только, что большой опыт работы с "машинной палеткой" показал ее высокую эффективность при расчете сложных плотностных сред, которая обеспечивается главным образом способом задания информации (*поинтервальными срезами*). Результаты расчетов представлены на рис.У.I8. Рассмотрим их основные следствия.

Распределение плотности в консолидированной коре Днепровского грабена имеет сложный характер. Это относится как к самому грабену, так и к прилегающим бортовым частям. Основную часть аномальных масс составляет уплотнение с $\Delta\sigma$ = 0,2 т/м^3, которое почти сплошь проходит вдоль Днепровского грабена в интервале глубин 7,5-20 км. На разных этажах (7,5-I0,I 0-I5 и I5-20 км) конфигурация масс в плане разнится незначительно. На северном борту, в сторону Воронежского кристаллического массива, уплотнение быстро выклинивается, очертания его просты, $\Delta\sigma$ не превышает 0,I. На юг, в сторону Украинского щита, распределение аномальной плотности более прихотливо, более разно-



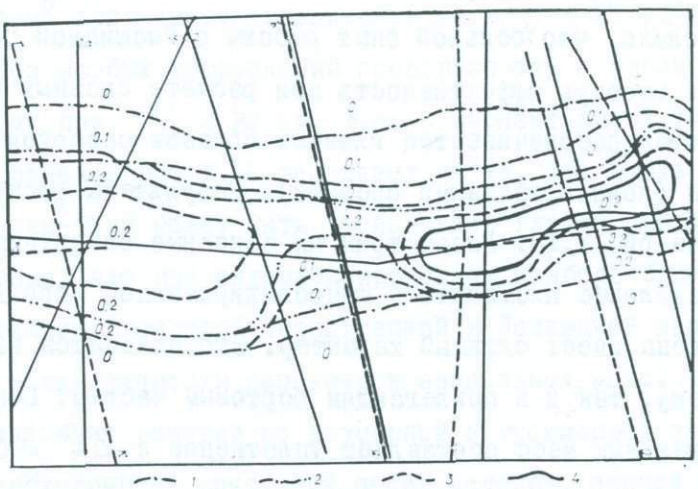


Рис.У.I8. Распределение аномальных масс в консолидированной коре Днепровского грабена, полученное подбором "вручную", в интервале глубин 0,I-I0 км (а) и I0-30 км (б). Контуры распространения аномальных масс на глубинах (цифры - аномальные плотности, т/м^3):
а - 0,I÷2,5 (I); 2,5÷5 (2); 5÷7,5 (3); 7,5÷I0 (4);
б - I0÷I5 (I); I5÷20 (2); 20÷25 (3); 25÷30 (4).

образно – от +0,I7 до –0,I т/м^3, т.е. здесь встречаются и отрицательные $\Delta\sigma$ (Бориспольский минимум). Они распространяются до H = I0 км.

В грабене аномальные массы с $\Delta\sigma$ = 0,2 т/м^3 продолжаются ниже уровня 20 км: в Черниговском блоке нижняя граница уплотнения погружается до 25 км, в Лохвицком и Лютеньском блоках – до 30 км (верхняя кромка уплотнения на последних проходит на H = = 7,5 км). Характерной и, как показал процесс подбора, необходимой особенностью модели является узкая, порядка 8–I0 км, вытянутая вдоль северного борта полоса отсутствия уплотнения (относительное разуплотнение) в интервале глубин 7,5–I5 км. Без этой детали поле в этой зоне не подбирается. Взаимное расположение этой полосы, северного краевого нарушения и осевого уплотнения позволяет утверждать, что все три элемента структуры связаны причинно.

Остаточное поле рассмотренной модели (рис.У.I9) содержит ряд аномалий систематического характера – на южном борту (юго-восточная часть площади), вдоль северного краевого нарушения (положительные на северо-западе, отрицательные – к юго-востоку); но поскольку они лежат в пределах точности подбора в данном масштабе ($\pm 5 \cdot I0^{-5}$ м/с^2), их устранение целесообразно выполнять при построении модели следующего ранга детальности. В целом не региональную составляющую поля можно считать подобранной.

Интересно сравнить поля $\Delta g_{ост}$ модели подбора "вручную" с машинным (рис.У.I7). Аномалии на рис.У.I9 более расплывчаты, что отображает отмеченную выше относительную "мягкость" критерия совместимости Δg_σ с Δg_p при ручном подборе. То есть, машинный подбор позволяет более четко разделить влияние масс, расположенных на больших и малых глубинах. При этом совпадающие локальные аномалии можно с уверенностью относить к неоднородностям в не-

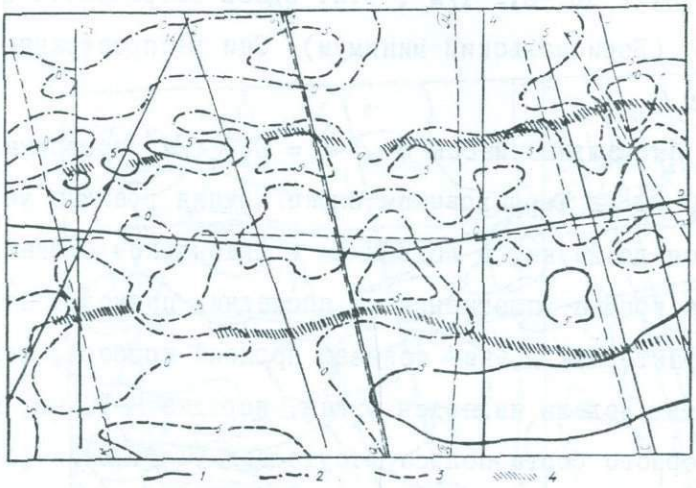


Рис.У.I9. Остаточное поле модели рис.У.I8. Положительные (I), нулевые (2) и отрицательные (3) изолинии $\Delta g_{ост}$; 4 - контур Днепровского грабена.

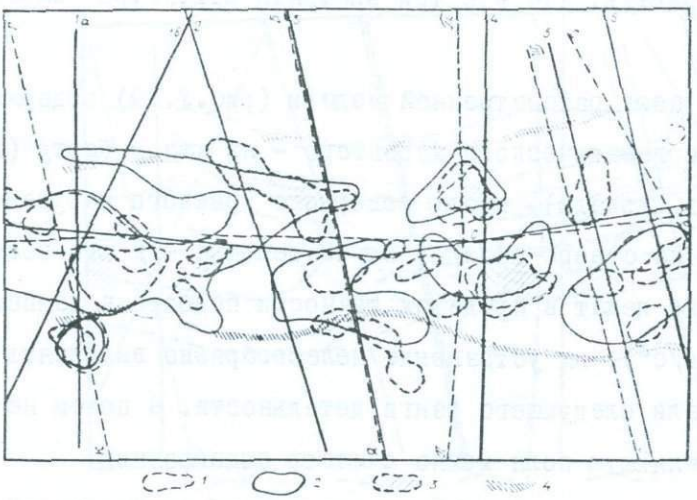


Рис.У.20. Сопоставление контуров приповерхностных аномальных масс и локальных аномалий магнитного поля. Границы уплотнения на глубинах 2,5-5 км (I) и 5-7,5 км (2) при $\Delta\sigma$ = 3,2 т/м^3; 3 - контуры локальных аномалий поля ΔT_a ; 4 - см. 4 рис.У.I9.

консолидированной коре. Это, например, – цепочка минимумов у северного краевого нарушения, коррелирующаяся с известными соляно-купольными структурами.

При ручном подборе разностного поля оказалось необходимым в отдельных местах нарастить уплотнение выше уровня 7,5 км до H = 2,5 км. Очевидно, что с кристаллическим фундаментом такие "наросты" увязывать нельзя, они обусловлены, скорее всего, развитием в осадочном чехле вулканогенных пород. Величины $\Delta\sigma$ = = 0,2 т/м^3 для таких пород, возможно, великоваты в качестве средних; эквивалентным решением является замена слоя с $\Delta\sigma$ = = 0,2 т/м^3 в интервале H = 2,5-4 км уплотнением в осадочном чехле в промежутке 0-4 км с $\Delta\sigma$ = 0,08 т/м^3.

Интересно сопоставить рассматриваемые выступы основного уплотнения с локальными магнитными максимумами Днепровского грабена (рис.У.20). Магнитные аномалии, очевидно, непосредственно выступами объяснены быть не могут, но должны иметь с ними общую первопричину. Намагниченные тела характеризуются небольшими размерами и, как это видно из формы аномалий, вытянуты по вертикали. Ранее уже делались попытки совместного анализа аномалий остаточного и гравитационного и магнитного полей [169]; в последнее время по одной такой аномалии (Талалаевской) выполнены количественные расчеты, показавшие, что локальный магнитный максимум, скорее всего, отображает подводящий канал вулкана верхнефаменского возраста.

7. Обсуждение результатов и выводы. Материалы формализованного подбора разностного поля Днепровского грабена в двумерном и трехмерном вариантах, рассмотренные выше, разнятся между собой в деталях, но обнаруживают вполне отчетливое единство в основных чертах. Общим у всех у них является то, что в осевой части Днепровского грабена существует уплотнение с $\Delta\sigma \approx$ 0,2 т/м^3. Несом-

ненно, что это уплотнение отображает типичный процесс базификации коры при классической схеме образования континентальных рифтов [169, рис. 5.8]. Веским аргументом в пользу линейной переработки фундамента (дайкообразных внедрений основных и ультраосновных пород) является зона относительного разуплотнения вдоль северного борта. С другой стороны, очевидно, что уплотнения распространены и вне осевой зоны грабена и даже выходят за его пределы. Это также согласуется с классическими схемами образования рифтовых структур [178], однако здесь уже становится трудным разобраться, где проявления рифтогенной базификации, а где влияние первичных неоднородностей фундамента. Это особенно характерно для Черниговского блока и его южного продолжения в сторону УШ. Во всяком случае, гетерогенность южного борта Днепровского грабена, несомненно, более высокая, чем северного. Непосредственным свидетельством вулканической активности в грабене являются локальные магнитные аномалии, причем вид этих аномалий отвечает развитию вулканизма центрального типа.

Важным вопросом является глубина распространения аномальных масс в осевой зоне. Уже первые оценки их параметров показали, что они тяготеют к верхней части консолидированной коры. Последующие расчеты этот вывод, в общем, подтвердили. Показательно, что при интерпретации гравитационных аномалий грабена Осло на первых порах уплотнение моделировалось в низах коры, но после использования метода Паркера оценки глубин галегания нижних кромок изменились в меньшую сторону [424]. В Днепровском грабене основной объем аномальных масс располагается выше H = 20 км. (Затем, что заглубление нижних кромок до 30 км в Лохвицком и Лютеньском блоках на рис.У.18б связано с тем, что их верхняя кромка принята на H = 7,5 км, а в интервале 5-7,5 км -

$\Delta\sigma$ = 0, тогда как при "машинном" подборе верхняя кромка брала-сь на H = 5 км). Но похоже, что часть аномальных масс должна располагаться глубже 20 км. Это встречает трудности при их истолковании: если относительно принятой функции приведения $\Delta\sigma$ = 0,2 т/м^3 в "гранитном" слое составляет 2,9 т/м^3 и объясняется естественным образом, то в "базальтовом" слое та же избыточная плотность дает уже 3,I т/м^3, которую с петрографических позиций просто трактовать не удается. Конечно, можно предположить, что ниже 20 км избыточные плотности более рассредоточенные по вертикали, так что их $\Delta\sigma$ будет значительно меньше 0,2 т/м^3; но тогда будет нарушен принцип компактности, и формально решение ухудшится.

§ 3. Построение трехмерной гравитационной модели маскона в Море Нектара (с учетом сферичности Луны)

I. Построение трехмерной модели маскона в Море Нектара, расположенного на Луне, проведено А.Г.Манукяном и В.И.Старостенко. Автор принимал участие с помощью программы решения обратной линейной задачи гравиметрии ММГН с учетом сферичности планет (конечномерный параметрический вариант), разработанный совместно с А.Г.Манукяном.

Изучение гравитационного поля Луны началось с запусков искусственных спутников Луны (ИСЛ). Гравитационное поле Луны определяется с помощью изучения возмущений орбиты ИСЛ. Спутниковый метод измерения этого поля основан на изучении доплеровского эффекта. При движении по орбите под действием неоднородного гравитационного поля Луны ИСЛ изменяет направление и величину скорости. Станции на Земле фиксируют ту компоненту изменения скорости, которая соответствует направлению луча ИСЛ-Земля. По лу-

чевым скоростям определяются лучевые ускорения V_{α} , как производные. Другими словами, лучевое ускорение - это проекция силы тяжести в точках наблюдений на луч зрения земного наблюдателя. Эти определения относятся к орбитальным точкам спутника, которые имеют различные высоты над лунной поверхностью.
Над центральной областью видимой стороны Луны лучевые ускорения совпадают с радиальными ускорениями. При этом сравнение лучевых и радиальных ускорений производится на уровне высоты орбиты.
С помощью советских и американских ИСЛ получено детальное аномальное гравитационное поле видимого полушария Луны.

2. Используя лучевые ускорения, полученные по наблюдениям ИСЛ "Лунар Орбитер-5", П.Мюллер и В.Съегрен в 1968 г. впервые построили карту лучевых ускорений видимой стороны Луны. На основе этой карты они пришли к открытию масконов - больших плотностных неоднородностей в теле Луны. Масконы очень хорошо согласуются с рельефом Луны и в основном совпадают с центральными областями лунных морей: Ясности, Дождей, Нектара, Кризисов, Влажности и др. [311]. Аномалии гравитационного поля над масконами в основном положительные и на высоте 100 км достигают до +220 мГл [311]. С момента открытия масконов на Луне многие исследователи интересовались историей их происхождений, а также интерпретацией аномальных лучевых ускорений [59,88,319,458,459, 470,474,475]. Интенсивно изучаются физико-механические параметры и химический состав доставленных на Землю лунных пород. Полученные в лабораторных условиях данные позволяют уточнить представления о лунных кольцевых морях и связанных с ними масконах.

3. Маскон в Море Нектара (обзор предыдущих исследований). Море Нектара расположено на видимой стороне Луны. Оно является одним из лунных многокольцевых впадин диаметром 820 км и с центром на 32^{0}E и $15,5^{0}$S [475]. Центр моря наполнен морскими базаль-

тами. Маскон в Море Нектара совпадает с базальтовыми накоплениями и имеет координаты центра $34^{0}E$ и $16^{0}S$ [311,457]. В настоящее время существуют многие работы, посвященные изучению масконов, в частности нектаровского [232,458,459,474,475 и др.].

В работах [232,470] обсуждаются вопросы построения гравитационных моделей масконов. Первыми исследователями маскона в Море Нектара были П.Мюллер и В.Съегрен [232]. Ими были использованы гравитационные данные космических кораблей "Аполлон-12" и "14", которые проходили над масконов в Море Нектара на различных высотах (от 25 до 116 км). Моделирование проводилось в двух вариантах. В качестве первой рассматривалась точечная масса на глубине 100 км и с массой $9,1x10^{-6}$ G·Мл (Мл - масса Луны). Масса и глубина выбирались так, чтобы их гравитационное поле наилучшим образом соответствовали наблюденным данным. Вторая модель представляла из себя приповерхностный диск. Причем вторая модель также была апробирована в двух вариантах. Первый - приповерхностный диск с радиусом 150 км и массой $5,1x10^{-6}$ G·Мл; П - 200 км и массой $9,1x10^{-6}$ G·Мл. Одновременно используя данные "Аполлона-12" и "14", они пришли к выводу [232], что лучшей является вторая модель. Для этой модели вычисленное гравитационное поле лучше согласуется с наблюденными данными. Высказывается мнение о существовании некоторых отрицательных гравитирующих масс вблизи масконов, которые уменьшают положительные аномалии на орбитальных точках. Однако не дается прямых указаний о возможных избыточных плотностях, а также глубинах их залегания.

С получением новых данных (уточненные параметры орбиты, новые данные лабораторных исследований лунных пород, доставленных на Землю и др.), позволено уточнять первоначальные дисковые модели П.Мюллера и В.Съегрена [232].

В работе [474] установлено, что мощность морского накопле-

ния при изостатической компенсации должна равняться 2,7 км, а при отсутствии компенсации – 8 км. Избыточная плотность маскона была принята равной I,0 г/см^3.

В обширной работе Т.И.Витфорд-Старка [475] приводятся топографические, морфологические, физико-механические, а также ряд других важных характеристик Моря Нектара. Мощность базальтового накопления, внедрение которого привело к образованию маскона, оценивается примерно в 4 км с объемом, равным I,2·I0^5 км^3. Мощность расплава ударного происхождения составляет примерно 2 км. Объем данного импактного расплава может быть равен (по формуле Ленджа и Эпренса) от 500000 км^3 до I450000 км^3. По мнению автора, в конечном итоге только I5% из этого объема остается во впадине. Оценка понижения морской впадины Моря Нектара по отношению к уровню лунной поверхности равна I,2 км.

Приведем еще несколько оценок, касающихся не только нектарского маскона, а всех лунных масконов.

По мнению Дж.А.Вуда [88], плотность лунных анертозитов составляет 2,8 г/см^3 ÷ 2,9 г/см^3, а морских базальтов – 3,3 г/см^3÷3,4 г/см^3. Эти данные обеспечивают контраст плотности $\Delta\delta \approx 0{,}4 \div 0{,}6$ г/см^3.

В работе М.У.Сагитова [3II] ориентировочная абсолютная плотность масконов (морских базальтов) берется 3,3 г/см^3. Причем она должна быть больше плотности лунной коры на величину 0,3 г/см^3. В.Н.Жарков [I36] предполагает, что избыточная плотность маскона должна быть 0,4 г/см^3 (δ = 3,3 г/см^3-2,9 г/см^3), а мощность аномальных масс равна примерно 20 км.

С точки зрения теории изостазии лунные масконы (в частности, маскон в Море Ясности) исследовал В.С.Сафронов [3I9]. При построении модели маскона принимаются следующие параметры: понижение уровня морской поверхности – до 3 км; плотность морских базаль-

тов – 3,0 г/см^3; аномальная плотность базальтов в среднем составляет I,0 г/см^3; толщина базальтов оценивается в I5÷20 км.

В работе [459] модель маскона построена при предположении, что избыточная плотность равна 0,5 г/см^3, а глубина кратера h = I,2 км (для Моря Нектара). Там же приводится оценка Де Хона для этого параметра: h < I,6 км.

В работе авторы используют процедуру вычисления гравитационного эффекта от сферических полигональных материальных слоев, предложенную в I960 г. М.Тальвани и М.Эвингом.

4. Гравитационная модель маскона в Море Нектара. Анализ проведенных работ показывает, что нет единого мнения о параметрах масконов, которые позволяют уверенно построить его реальную гравитационную модель.

Результаты исследования масконов дают следующие оценки их параметров:

I/ плотность лунной коры: $\sigma_к$ = 2,7 г/см^3 [3I9]; – 2,9 г/см^3 [88,94,I36,458]; – 3,0 г/см^3 [3II];

2/ плотность лунного базальта (маскона): σ_m = 3,0 г/см^3 [3I9]; – 3,3 г/см^3 [88,94,I36,3II]; – 3,4 г/см^3 [458]; – 3,05 ÷ 3,38 г/см^3 [4I7].

Кроме того, в работах [2I7,69] указывается, что лунные базальты могут иметь значительно большую плотность. Это связывается с содержанием большого количества ильменита, титанита и металлического железа, плотность которых достигает 4,4÷7,9 г/см^3 [4I7];

3/ плотность вещества, создающая отрицательные аномалии вблизи масконов, равна $\sigma_{отр}$ = 2,0 г/см^3 [3I9];

4/ мощность маскона (толщина базальтового слоя): H_m = 20 км [I36]; – 8 км [474]; – 4 км [475];

5/ глубина кратера (морской впадины): h = 3 км [3I9];

– I,5÷I,6 км [459]; – I,3÷I,5 км [94]; – I,2 км [458,475];

6/ диаметр маскона: D = 420 ± 20 км [3II,458]; - 4I0 км [475];

7/ разности моментов инерции Луны (в единицах $I0^{-6}$Мл. $R_л^2$) обусловленные наличием Нектаровского маскона B-A = 3,63 и C-A = 5,55 [3II,458];

8/ избыточная масса нектаровского маскона (в единицах $I0^{-6}$Мл) M_m = 9,67±I,4I [3II,458]; - 4,5 [59];

9/ лучевое ускорение V_x на орбитах ИСЛ "Аполлон-I2" (рис.У.2I) и "Аполлон-I4".

Указывая эти параметры, авторы одновременно не фиксируют их значения, а только отмечают приближенные значения границ изменения одного или двух параметров. Однако для построения гравитационной модели маскона необходимо, опираясь на некоторые из перечисленных значений параметров, определить возможные значения других и создать массив взаимосвязанных значений этих параметров.

На карте лучевых ускорений V_x (рис.У.2I) можно судить о том, что положительные аномалии обусловлены главным образом наличием в центре области маскона, а также другими аномальными массами с положительными избыточными плотностями (σ^+). Отрицательные аномалии обусловлены наличием отрицательных аномальных масс (σ^-) вокруг маскона.

Для построения исходной модели маскона поступим следующим образом. Так как величина V_x в основном зависит от величины избыточной плотности маскона ($\Delta\sigma = \sigma_m - \sigma_к$) и его мощности (H_m), то при наличии значения $\Delta\sigma_m$ по полю V_x определяется значение параметра H_m , либо - наоборот. При этом избыточные плотности положительных и отрицательных аномальных масс или их мощности выбираются априорно, а затем постепенно уточняются.

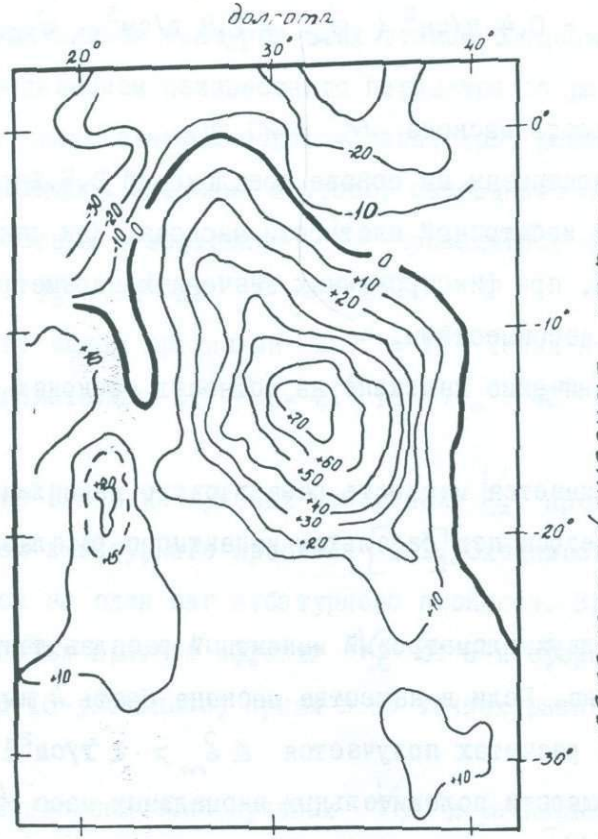


Рис. У.2I. Карта лучевых ускорений V_x .

Начальные модели строятся на основе полученных авторами [136,311,470,475] значений $\Delta\sigma_m$ и H_m. В качестве начальных выбраны следующие 5 моделей.

Модель 1. В основе модели лежит предположение о возможности избыточной плотности маскона $\Delta\sigma = 0{,}3$ г/см^3 ($\sigma_к = 3{,}0$ г/см^3, $\sigma_m = 3{,}3$ г/см^3).

Модель 2. $\Delta\sigma_m = 0{,}4$ г/см^3 ($\sigma_к = 2{,}9$ г/см^3, $\sigma_m = 3{,}3$ г/см^3).

Модель 3. Мощность маскона $H_m = 20$ км.

Модели 2 и 3 построены на основе предложений В.Н.Жаркова [136] о мощности и избыточной плотности маскона. Как показали дальнейшие расчеты, при фиксированных значениях параметров V_x и h эти условия несовместимы.

Модель 4. Ограничение наложено на мощность маскона: $H_m = 8$ км [470].

Модель 5. Принимается мощность базальтового накопления 4 км, а мощность находящегося под базальтом импактного расплава – 2 км [475].

В этой модели двухкилометровый импактный расплав также включен в состав маскона. Если в качестве маскона брать 4 км базальтовый слой, то при расчетах получается $\Delta\sigma_m > 2$ г/см^3, что маловероятно. При мощности положительных аномальных масс $H^+ = 3$ км и отрицательных – $H^- = 3$ км получается решение: $\Delta\sigma_m = 2{,}017$ г/см^3, $\sigma^+ = 0{,}709$ г/см^3 и $\sigma^- = -0{,}470$ г/см^3.

Во всех моделях принято: глубина кратера $h = 1{,}2$ км [459, 475], средний радиус Луны $R_л = 1738$ [311]. Карта лучевых ускорений, по которым подобраны свободные неизвестные параметры моделей ($\Delta\sigma_m$ или H_m), приведена на рис.У.21. Значения V_x соответствуют орбитальным точкам ИСЛ, определяемым по формуле

$$R(\varphi_0) = \frac{2339}{1 + 0{,}2731\ \cos(\varphi_0 - 1°26')}, \qquad (У.2)$$

где φ_0 – широта точки наблюдения.

Положительные избыточные плотности δ^+ брались равными 0,4 г/см^3, а – $\delta^- = -0{,}7$ г/см^3.

Для наилучшего представления маскона, как трехмерного образования, базальтовый слой представляется в виде трех этажей. Подбор горизонтальных контуров этих этажей осуществляется параллельно с определением неизвестного параметра по решению ПЗГ.

Фиксируя приведенные в моделях параметры, решением прямой задачи определялось значение другого: свободного параметра. Сравнение заданных и модельных V_x проводилось на широтных профилях от $\varphi_0 = 92^0$ до $\varphi_0 = 118^0$.

Расстояние между профилями $\Delta\varphi = 2^0$. Точки наблюдения на профилях располагались от $\lambda_0 = 21^0$ до $\lambda_0 = 40^0$ с шагом $\Delta\lambda = 1^0$.

Вычисление значений лучевых ускорений V_x проводилось с использованием кубатурного процесса [20]. Сходимость результатов обеспечивается за один шаг кубатурного процесса. Время счета с двойной точностью прямого эффекта V_x от 6-и сферических многоугольников (8–10-угольники) призм в 95 точках равно 1337 секунд на ПЭВМ IBM PC.

Для сравнения значений лучевых V_x и радиальных V_r ускорений на трех широтных профилях приводятся их значения в табл.6. В таблице указаны также расположение (φ_0) и высоты (H) профилей, по которым измерялись лучевые ускорения над поверхностью Луны.

В таблице 7 приводятся значения варьированных параметров моделей 1÷5, а также масса M_m ; разности моментов инерции Луны B–A и C–A, обусловленные наличием нектаровского маскона. Для

Таблица 6

φ_o	H, км	λ_o	25°	26°	27°	28°	29°	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°
102°	109,8	V_R	0.22	6.47	14.76	24.79	35.90	46.79	55.80	61.90	64.92	64.41	60.20	53.05	43.48
		V_x	12.10	19.94	29.22	39.44	49.46	57.63	62.39	63.29	60.54	54.05	44.50	53.19	21.02
104°	112.2	V_R	1,64	2,46	9.19	19.21	32,55	47.74	62.18	73.98	81.88	84.53	81.94	74.82	63,53
		V_x	7.68	14.70	23.29	34.64	47.93	60.84	70.67	76.06	76.15	70.54	60.41	47.11	31.79
106°	116.2	V_R	2.81	5.90	11.26	19.43	30.34	42.87	55.15	65.68	73.12	76.27	75.03	69.70	60.45
		V_x	12.38	16.84	23.43	32.12	42.25	52.16	59.97	64.51	64.80	60.47	52.34	41.28	28.25

Таблица 7

Параметры маскона	По [311,457]	Модель 1	Модель 2	Модель 3	Модель 4	Модель 5
$\Delta\sigma_m$, г/см^3	-	0.3	0.4	0.5	I,I	I,5
H_m, км		38.0	26.8	20.0	8.0	6.0
M_m, 10^{-6}Мл	9.67±I.4I	I0.558	I0.362	I0.333	I0.722	I0.492
B-A, $10^{-6} R_л^2$·Мл	3,63	3.39I	3.534	3.537	3.864	3.620
C-A, $10^{-6} R_л^2$·Мл	5.55	5.92I	5.8I5	5,807	6,044	5,926

Таблица 8

Параметры маскона	Модель Ia		Модель 3a	
	K > 0	K < 0	K > 0	K < 0
K, г/см^3/км	+0.0I9	-0.0I9	-0.0I7	-0.0I7
$\Delta\sigma_m(r_2)$, г/см^3	0.0	0.6	0.2	0.6
$\Delta\sigma_m(r_1)$, г/см^3	0.722	-0.I22	0.656	0.I44
H_m, км	38.0	38,0	26,8	26,8
M_m, 10^{-6}Мл	I0.627	I0.549	I0.0I7	I0.706
B-A, 10^{-6}Мл· $R_л^2$	3.563	3.6I9	3.402	3.666
C-A, $10^{-6} R_л^2$·Мл	5.9I3	5.928	5.6I9	6.0II

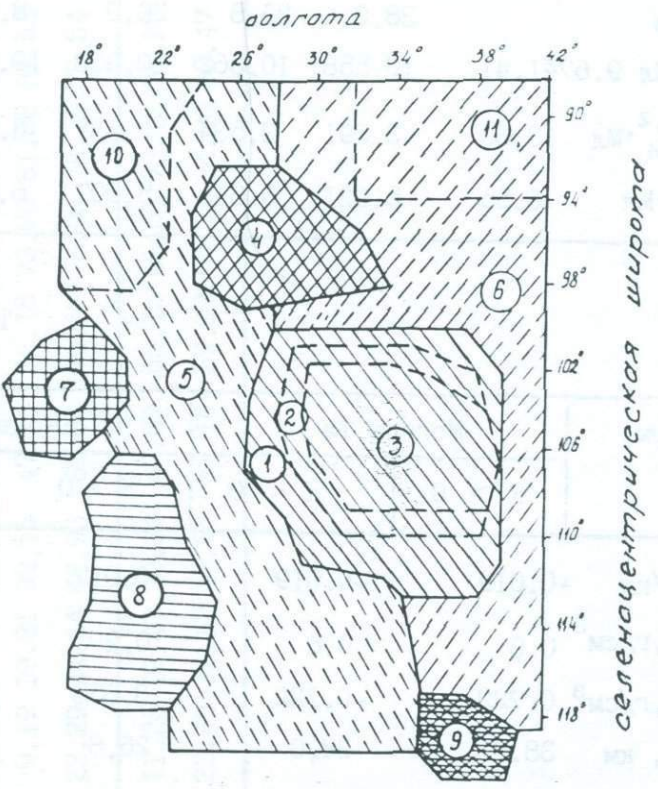


Рис.У.22. Радиальные проекции аномальных тел на сферическую поверхность Луны. Тела I,2,3 составляют маскон; тела 5,6,I0,II - отрицательные аномальные массы; тела 4,7, 8 и 9 - положительные аномальные массы.

сравнения значений M_m, В-А и С-А в таблицу включены их значения, полученные в работах [3II,458].

Как видно из таблицы, значения этих величин хорошо согласуются со значениями, полученными для моделей I÷5. Горизонтальные границы аномальных для всех моделей почти одинаковы.

На рис.У.22 показаны проекция сферических N -угольных призм аномальных тел на сферическую поверхность Луны и их порядковые номера для модели I. Модель состоит из II сферических многоугольных призм.

Тела I,2,3 расположены друг под другом в указанной последовательности и аппроксимируют маскон в центральной части Моря Нектара. Для всех моделей I:5 горизонтальные границы маскона хорошо выделяются. Диаметр проекции маскона на сферическую поверхность Луны составляет около 440 км. Указанная область совпадает с внутренней кольцевой областью Моря Нектара, диаметр которой 4I0 км [475]. Предполагалось, что тела 7,8 и 9, которые подобрались под положительными аномалиями V_x, также являются базальтовыми образованиями. Они находятся в западной (тела 7 и 8) и южной (тело 9) частях Моря Нектара и образуют внешнюю кольцевую границу диаметром 820 км [475]. Тело 4 тоже относится к числу последних, но с одинаковым успехом его можно включить в состав маскона. По гравитационным данным эти предположения являются идентичными, но предпочтителен второй вариант, если учесть величину D_m диаметра маскона [3II,458,475]. Что касается тел 5,6, I0 и II, то они обуславливают отрицательные аномальные массы вокруг маскона (тела I0 и II соответствуют глубинным массам и находятся соответственно под телами 5 и 6). Они в основном лежат между внутренней (D = 4I0 км) и внешней (D = 820 км) кольцевыми границами Моря Нектара.

Для пространственного представления моделей I÷5 на рис.У.23

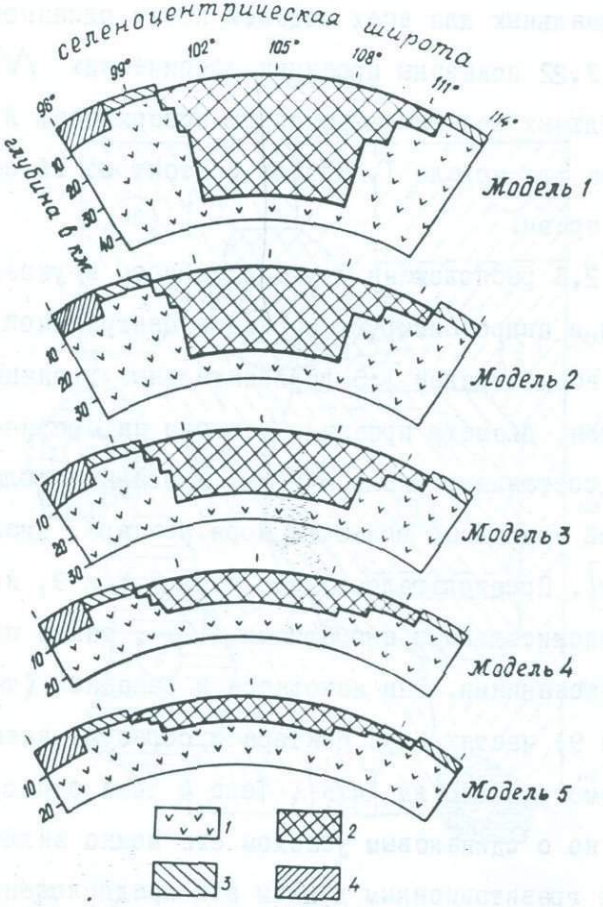


Рис.У.23. Вертикальные разрезы моделей I÷5 по широте φ_0 = I04°: I – лунная кора; 2 – маскон; 3 – отрицательные аномальные массы.

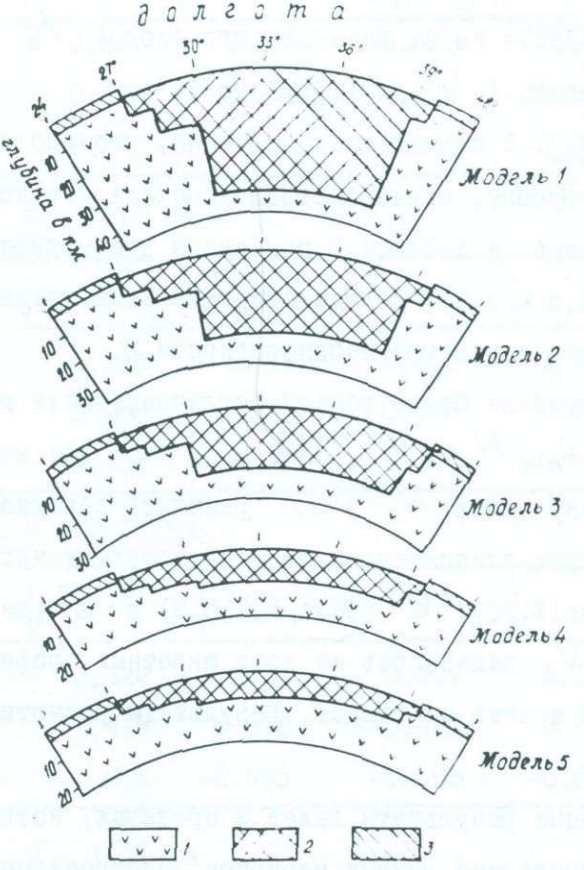


Рис.У.24. Вертикальные разрезы моделей I÷5 по долготе $\lambda_o = 33^\circ$: I-3 - те же, что и на рис. У.23; 4 - положительные аномальные массы.

и У.24 изображены их радиальные (вертикальные) разрезы вдоль широты $\varphi_0 = 104^0$ и долготы $\lambda_0 = 33^0$. Тела I,2 и 3 составляют воронкообразную структуру маскона. Для сравнения с результатами работы [475] для модели 5 вычислены объемы: маскона (V_m = 533I74 км^3); базальтового слоя (V_δ = 42I32I км^3), импактного расплата (V_i = III853 км^3).

Замечание У.I. В случае предположения, что плотность меняется линейно по глубине, можно построить модель неоднородного нектаровского маскона. В таблице 8 приведены две модификации моделей I и 3 (модели I,а и 3,а); соответствующие положительным и отрицательным значениям параметра неоднородности К.

С целью получения более точной согласованности между значениями V_x, $\Delta\sigma_m$, H_m, σ^+, H^+, σ^-, H^- для моделей I÷5 при различных значениях H^+ и H^- решалась обратная линейная задача гравиметрии относительно трех неизвестных плотностей: $\Delta\sigma_m$ (тела I,2,3, рис.У.22), σ^+ (тела 4,7,8,9) и σ^- (тела 5,6,I0, II). Значение V_x задавалось на трех широтных профилях φ_0 =98^0, I02^0 и I06^0 в 9 точках на каждом. Результаты расчетов приведены в таблице 9.

Все полученные результаты лежат в пределах, которые указаны многими исследователями лунных масконов. Построенные по лучевым ускорениям гравитационные модели I-5 с формальной точки зрения являются равносильными и равноценными. Любая из них удовлетворяет критерию близости, наблюденной у вычисленных полей, и могут служить гравитационными моделями маскона Моря Нектара.

Какой из построенных 5 моделей дать предпочтение?

Для этого воспользуемся значениями V_x, полученными по наблюденным ИСЛ "Аполлон-I4". Этот спутник проходит на высоте 28 км над масконом. Эти данные увеличивают информацию о гравитационном поле региона и содержат в себе новые характеристики поля. Значе-

Таблица 9

а) H^+= 8 км, H^-= 2(4) км*

Парам. \ Модель	I	2	3	4	5
$\Delta\sigma_m$	0.322	0.429	0.503	I,I28	I,586
σ^+	0.272	0.276	0.277	0.277	0.278
σ^-	-0.59I	-0.572	-0.576	-0.622	-0,600

б) H^+= 3 км, H^-= 3(I) км

Парам. \ Модель	I	2	3	4	5
$\Delta\sigma_m$	0.324	0.432	0.508	I.I40	I.56I
σ^+	0.680	0.694	0.698	0.704	0.702
σ^-	-0.406	-0.397	-0.400	-0.438	-0.4I3

в) H^+= 5 км, H^-= 2(I) км

Парам. \ Модель	I	2	3	4	5
$\Delta\sigma_m$	0.324	0.432	0.507	I.I40	I.340
σ^+	0,4I8	0_4I8	0.428	0.424	0.423
σ^-	-0.6I6	-0.595	-0.598	-0.657	-0.6I2

г) H^+= 5 км, H^-= I(I) км

Парам. \ Модель	I	2	3	4	5
$\Delta\sigma_m$	0.324	0.43I	0.506	I.I35	I.337
σ^+	0.423	0.427	0.429	0.432	0.428
σ^-	-I.2I2	-I,I69	-I,I79	-I,283	-I,204

* Значение в скобках соответствует мощности нижнего этажа (тела I0 и II, рис.У.22).

ния V_x на более низком уровне орбиты ИСЛ содержат более высокочастотные гармонические составляющие гравитационного поля.

По новым значениям V_x, заданным на профиле $\varphi_0 = 104^0$, решалась ЛОЗГ для моделей 1-5 в четырех вариантах (как в табл.9) относительно плотностей $\Delta\sigma_m$, σ^+ и σ^-. Полученные значения плотностей сверялись со значениями таблицы 9. Модели классифицировались по минимуму значений расхождения на различных уровнях задания V_x. Для всех вариантов моделей значения γ составляют 6-10%, за исключением модели 4. Значение γ для модели 4 равно примерно 3%. Классифицируя модели маскона по критерию $\min\{\gamma\}$, модель 4 выбрана как оптимальная.

Окончательные параметры построенной гравитационной модели маскона Моря Нектара следующие:

предполагаемые

$R_л = 1738$ км, $\sigma_к = 2{,}9$ г/см^3, $h = 1{,}2$ км;

полученные

$\Delta\sigma_m = 1{,}128$ г/см^3, $H_m = 8$ км

$\sigma^+ = 0{,}277$ г/см^3, $H^+ = 8$ км

$\sigma^- = -0{,}622$ г/см^3, $H^- = 2$ км

$D_m = 440$ км, $M_m = 10{,}722 \cdot 10^{-6}$ Мл

$B-A = 3{,}864 \cdot 10^{-6}$ Мл$\cdot R_л^2$, $C-A = 6{,}044 \cdot 10^{-6}$ Мл$\cdot R_л^2$.

Кроме того, заметим, что для избыточных плотностей и мощностей наблюдается следующая закономерность

$$H_m \cdot \Delta\sigma_m = 9{,}1$$
$$H^+\sigma^+ = 2{,}1$$
$$H^-\sigma^- = 1{,}2$$

Если предположить, что маскон является неоднородным образованием, то параметры плотностной модели будут следующие:

$\Delta\sigma_m = 0{,}907$; $1{,}146$; $1{,}255$ г/см^3 – соответствуют телам 1,2 и 3

(рис.У.22), при σ^{+} = 0,275 г/см^3 и σ^{-} = -0,658 г/см^3.

Выводы

I. Вдоль шести региональных интерпретационных профилей построены гравитационные модели (двухмерный вариант) верхней части земной коры с использованием геологических, сейсмологических, аэромагнитных и др. геофизических материалов. Определены средние глубины залегания аномалиеобразующих поверхностей и положение между осадочным чехлом и кристаллическим фундаментом (поверхность "Ф"); выделены горизонтальные плотностные неоднородности в верхней части земной коры.

По резкому изменению глубины залегания и перемене знака отклонения контактной поверхности относительно ее средней глубины выявлена система вертикальных границ в верхней части земной коры. Исходя из предельных глубин вертикальных границ выделены три основные группы: I - в осадочном чехле (0÷5 км); П - в "гранитном" слое (5-I0 км) и Ш - достигающие глубины I5÷20 и более км. Устанавливается уменьшение количества вертикальных границ в группах по глубине.

Для построения гравитационных моделей вдоль профилей кавказского направления необходимо проводить интерпретацию гравиметрических данных в трехмерной постановке.

Опыт использования устойчивых алгоритмов при изучении строения земной коры исследуемой территории показал их высокую эффективность. Они позволяют выполнять оценочные расчеты с грубой отбраковкой вариантов, производить детальные вычисления, учитывающие локальные особенности заданной кривой. При этом разности заданных и рассчитанных величин поля в каждой точке дают материал для целенаправленного задания последующих приближений модели

среды, в новом шаге метода итерационного моделирования, и ее геологическое осмысливание. Находить плотностные границы на больших глубинах.

2. Формальные оценки распределения аномальных масс по наблюденным и редуцированным (разностным) полям Днепровского грабена, несомненно, будут играть все возрастающую роль в интерпретации гравиметрических наблюдений, особенно в вариантах решения трехмерных задач. Подбор объемного распределения позволяет получать ценную информацию о структуре среды, содержащуюся в структуре интерпретируемого поля. Эффективность такого подбора доказана расчетами "вручную", при которых изменения модели для очередного приближения задается интерпретатором. Очевидно, что механизация этой процедуры полностью назрела. В пункте 4 рассматривается один из первых опытов автоматизированного построения трехмерной плотностной модели. По мере развития и усовершенствования подобных процедур - убыстрения расчетов (вплоть до перехода на диалоговый режим), увеличения детальности расчленения среды, упрощения оценок устойчивости решения, - они будут становиться основным средством анализа поля силы тяжести. За решениями двумерных задач сохранится роль оперативного анализа аномалий с целью построения исходных приближений трехмерной модели.

Приведенные конкретные решения дают важную информацию о характере распределения масс в консолидированной коре Днепровского грабена; что же касается выяснения деталей, то его целесообразно выполнять в комплексе с анализом данных сейсмометрии. Это является предметом специальной работы.

3. Построена трехмерная модель маскона Моря Нектара на Луне. Полученные оценки параметров маскона зависят от погрешностей поля V_x, выбранных значений δ_k и h. Однако при варьировании погрешности в пределах 10% полученные значения парамет-

ров маскона также будут меняться в тех же пределах. Использование дополнительной информации, данных "Аполлона-I4" позволили выбрать оптимальную модель маскона.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

I. Изучение глубинного строения земной коры в пределах сложных и крупных регионов при помощи гравиметрического метода задача исключительно сложная. Высокие требования, предъявляемые к надежности и достоверности получаемых результатов при интерпретации гравиметрических данных, приводят к необходимости применения трехмерного моделирования среды и поля. Переход к построению пространственной плотностной интерпретационной модели исследуемой среды является крупной научной комплексной программой. Одной из актуальных проблем этой программы является разработка теоретических и технологических основ эффективных алгоритмов решения трехмерных обратных задач гравиметрии.

В работе развивается и обосновывается новое научное направление в геофизике - решение трехмерных обратных задач гравиметрии в рамках концепции математического моделирования, основанное на привлечении в процессе интерпретации всей имеющейся априорной геолого-геофизической информации.

В рамках развиваемого направления получены следующие основные результаты:

I/ в зависимости от степени геолого-геофизической изученности исследуемой территории в рамках концепции математического моделирования сформулированы различные постановки обратных задач гравиметрии, которые сведены к условно-экспериментальным. В качестве модельных классов среды и поля используются функционально-аналитические модели и конечномерные параметрические модели. Задачи служат удобным аппаратом для изучения по гравитационному полю вертикально-слоистых и горизонтально-слоистых структур, с привлечением в процесс решения априорной информации об исследуемой территории;

2/ даны постановки трехмерных прантических задач гравиметрии: построение непрерывного эквивалентного распределения плотности в области S, создающие заданное гравитационное поле; определение положения плотностной границы между двумя пластами с переменной по латерали плотностями; построение плотностной модели больших регионов с учетом сферичности планет; обнаружение и локализация источников аномального поля;

3/ методами функционального анализа исследованы свойства оператора A решения прямой задачи гравиметрии в классе $L_p(S)$, $1 < p < \infty$, распределения плотностей.

Показано, что для любой области S, принадлежащей полосе $\Pi(a,b)$, $0 < a < b < \infty$, оператор $A: L_p(S) \to L_p(Q)$ является ограниченным;

4/ впервые на основе объединения идей оптимизации и регуляризации введен в рассмотрение общий итерационный процесс, пригодный для решения линейных и нелинейных некорректных задач. Для конечномерного пространства установлены достаточные условия сходимости процесса и его регуляризующие свойства для операторов вида $C(x) = P(x) + \alpha B$. Показано, что многие известные итерационные методы следуют как частный случай из рассмотренного процесса. Далее итерационный процесс обобщен для решения задач математического программирования с выпуклым множеством ограничений;

5/ для трехмерных обратных задач геофизики обоснованы трудоемкость применения традиционных регулярных методов и необходимость разработки соответствующих методов их решения, использующие специфику геофизических задач;

6/ для задачи (П.3),(П.4) с линейным непрерывным оператором $A: H_1 \to H_2$, при помощи функционала Лагранжа, построена ее двойственная задача.

Впервые сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости двойственной задачи, когда задача (П.4) некорректно поставлена по всем трем условиям Адамара. Показано, что из разрешимости задачи (П.3), (П.4) еще не следует разрешимость ее двойственной задачи. Дано такое обобщение двойственной задачи, которая разрешима одновременно с разрешимостью задачи (П.3), (П.4);

7/ при помощи параметрического модифицированного функционала Лагранжа сконструирована устойчивая, практически реализуемая процедура нахождения элементов $\overline{x_0^*}$ и $\overline{y_0^*}$. Показано, что компоненты ее седловой точки $z^\alpha = (x^\alpha, y^\alpha)$ совпадают с экстремальными элементами некоторых параметрических функционалов Тихонова, связанных с задачей (П.3), (П.4) и двойственной задачей;

8/ для решения задачи (П.4) можно использовать два эквивалентных алгоритма, основанных на параметрических функционалах Тихонова и Лагранжа. Выбор алгоритма зависит от структуры операторов A и A^*. Исходя их специфики геофизических задач структура операторов A и A^* такова, что целесообразно использовать алгоритмы, основанные на функционале Лагранжа. Так как в процедуре нахождения приближения к $\overline{y_0^*}$, элемент y^α имеет размерность на единицу меньше, чем $x^\alpha = A^* y^\alpha + x_0$, показано, что уменьшение размерности достигается за счет ухудшения устойчивости задачи нахождения y^α;

9/ обнаруженные глубокие связи между параметрическими функционалами Тихонова и Лагранжа позволили впервые установить справедливость оперативных равенств (П.61),(П.62). Они позволяют легко сконструировать двойственные варианты всех известных алгоритмов решения нелинейных задач. Сходимость двойственных алгоритмов является очевидным фактом и следует из сходимости прямых алгоритмов;

I0/ теория двойственного метода обобщена на пространстве $L_p(S)$, $1<p<\infty$. При этом впервые введено понятие разложения пространства $L_p(S)$ в полупрямую сумму. Показано, что для любого подпространства K существует замкнутое множество $F=\{|\varphi|^{q-2}\varphi \in L_p(S),\ \varphi \in K^{\perp}\}$, для которого $L_p(S)=K \oplus F$. При $p=2$ разложение в полупрямую сумму совпадает с разложением в ортогональную сумму $L_2(S)=K \oplus K^{\perp}$;

II/ для использования априорной информации о среде и поле в процессе решения задачи в критериальной форме, введен параметрический модифицированный функционал (П.72). Этот функционал позволяет по существу раздельное использование информации о среде и поле; устанавливает связь между статистическими и двойственными регуляризующими алгоритмами;

I2/ установлена структура общего решения ЛОЗГ в пространстве $L_p(S)$. Дано исчерпывающее описание множеств $N(S,p)$ и $F(S,p)$. Впервые показано, что множество $D(A) \cap N(S,p) \subset W_p^2(S)$ и $D(A)=H(S,p)+W_p^2(S) \cap H(S,p)$;

I3/ обоснован выбор в качестве условного стабилизатора функционала энергии деформации тонкой изогнутой пластинки на упругом основании с использованием дополнительной информации типа краевых условий;

I4/ на основе анализа МКЭ и МКР применительно к решениям НОЗКП и ЛОЗГ в пространстве $L_2(S)$ сделано заключение для их решения, нужно использовать уравнения Эйлера соответственно параметрических функционалов Тихонова и Лагранжа. При этом интегральные операторы, входящие в уравнение Эйлера, целесообразно аппроксимировать МКЭ, а дифференциальные – МКР;

I5/ гибрид метода конечных элементов и метода конечных разностей является проекционным и, следовательно, дополнительным регуляризующим фактором. Фактически впервые в вычислительных

схемах решения НОЗКП и ЛОЗГ в пространстве $L_2(S)$ используются два типа регуляризации: выбор стабилизатора и проекционного метода, что делает их особенно устойчивыми;

I6/ впервые построены и реализованы двойственные варианты АСПТГ и ММГН для решения нелинейных задач геофизики. Работоспособность вычислительных схем показана на модельных примерах.

Составлены алгоритм и вычислительная схема решения ЛОЗГ с учетом сферичности планет итерационным ММГН. Расчеты на модельных задачах показали, что при небогатой информации алгоритм дает удовлетворительные результаты для довольно сложных трехмерных моделей при наличии помех в исходных данных;

I7/ высокая работоспособность разработанных методов показана на примерах решения сложных практических задач.

Построена плотностная моделей центральной части территории Армении; исследовано трехмерное распределение плотности в коре Днепровского грабена; построена трехмерная гравитационная модель маскона в Море Нектара на Луне с учетом её сферичности.

Рассматриваемые примеры относятся к различным геологическим условиям и являются задачами, успешное решение которых без использования разработанных программ и алгоритмов весьма затруднительно;

I8/ разработанные методы имеют универсальный характер и могут применяться для решения различных задач геофизики (например, сейсмологии, электрометрии, магнитометрии и пр.). Основная трудность заключается в разработке эффективных методов решения соответствующих прямых задач.

Дальнейшее накапливание соответствующих программы решения задач гравиметрии должно позволить перейти от интерпретации в рамках концепции математической модели к системной интерпретации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978.-288с.
2. Абовян С.Б. Геология и полезные ископаемые северо-восточного побережья оз. Севан. – Ер.; Изд-во АН Арм.ССР, 1961.- 260с.
3. Аджимамудов Э.Б. О связи гравитационного поля с тектонической зональностью Малого Кавказа. –ДАН Арм.ССР, 1957, т.24, №4, с.167-169.
4. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т.1-2,–М.: Мир, 1983. 880с.
5. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977.- 224с.
6. Алексидзе М.А. Редукция силы тяжести. – Тбилиси: "Мецниереба", 1965.- 254с.
7. Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. – М.: Наука, 1978.- 352с.
8. Алексидзе М.А. Решение некоторых основных задач гравиметрии. – Тбилиси: "Мецниереба", 1985.- 412с.
9. Алексидзе М.А. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. – М.: Наука, 1987.- 336с.
10. Андреев Б.А., Клушин И.Г. Геологическое истолкование гравитационных аномалий. – Л.: Гостоптехиздат, 1962.- 496с.
11. Антонов Ю.В. Численные схемы экстраполяции магнитных и гравитационных аномалий. – Прикладная геофизика, 1978, вып.92, с. 172-185.
12. Антонов Ю.В. Разделение сложных аномалий силы тяжести. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1985.- 214с.
13. Антонов Ю.В. Разделение сложных аномалий силы тяжести. – В кн.: Теория и методика интерпретации гравимагнитных данных. – К.: Наукова думка, 1981, с.23-37.

14. Аоки М. Введение в методы оптимизации. – М.: Наука, 1977.- 344с.
15. Аронов В.И. Основные вопросы теории и практики обработки аномалий силы тяжести при произвольном рельефе поверхности наблюдений. Автореф. дис.... докт.физ-мат наук – М.: ИФЗ АН СССР, 1972.- 37с.
16. Аронов В.И. и др. Система программ обработки на ЭВМ гравитационных и магнитных полей, заданных на плоскости или произвольной поверхности. М.: ОЦНТИ ВИЭМС, 1972.- 92с.
17. Аронов В.И. Обработки на ЭВМ значений аномалий силы тяжести при произвольном рельефе поверхности наблюдений. – М.: Недра,1976.- 129с.
18. Аронов В.И., Гордин В.М., Ширгинов А.И. К вопросу о построении графиков и карт изолиний в геологии и геофизике с помощью ЭЦВМ. – Тр. ВНИГНИ, 1971, вып. 103, с.71-124.
19. Асланян А.Т. Региональная геология Армении. – Ереван, Айпетрат, 1958.- 430с.
20. Асланян А.Т., Арутюнян А.В. Исследование упругих свойств, плотности и сжимаемости ультрамафитов офиолитовых поясов Армении. – Изв. АН Арм.ССР, Науки о Земле, 1978, №6, с.58-68.
21. Асланян А.Т., Сатиан М.А. К геологической характеристике офиолитовых поясов Закавказья. – Изв. АН Арм.ССР, Науки о Земле, 1977, №4-5, с.13-26.
22. Асланян А.Т., Воларович М.П., Левыкин А.И., Арутюнян А.В. О составе, строении и упругих характеристиках земной коры и верхней мантии на территории Армении. – ДАН Арм.ССР, 1975, т.61, №3, с.152-159.
23. Асланян А.Т., Арутюнян А.В., Воларович М.П., Левыкин А.И. Об одном возможном механизме становления гипербазитовых поясов и спрединговых структур литосферы. – Изв. АН Арм.ССР, Науки о Земле, 1976, №6, с.3-12.
24. Ахвердян Л.А., Нагапетян В.В. Тектономагнитные исследования территории Армении. – Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1985.- 220 с.

25. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т.1, т.2–Харьков: Изд-во ХГУ, 1977.- 316с.; 1978.- 288с.
26. Бабаджанян А.Г. Особенности строения Присеванской и Ведиской офиолитовых зон Армении по геофизическим данным. – Изв. АН Арм.ССР, Науки о Земле, 1986, №5, с.23-29.
27. Бабаджанян А.Г. Результаты геофизических исследований массивов основ-ных и ультраосновных пород Присеванской офиолитовой зоны (Малый Кавказ). – Геофизический Журнал, 1981, т.3, №6, с.40-49.
28. Бабаджанян А.Г. Глубинное строение и геодинамика бассейна озер Севан по геофизическим данным. – Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1988.- 137с.
29. Бабаджанян А.Г., Оганесян Л.Б. Гравитационная модель глубинной геологической структуры по профилю Маркара-Пойлы (Малый Кавказ). – В. кн.: Теория и методика интерпретации гравимагнитных данных. – К.: Наукова думка, 1981, с.222-228.
30. Бабаджанян А.Г., Оганесян С.М. Гравитационная модель земной коры центральной части территории Армении. – В. кн.: Геофизические поля и строение земной коры Закавказья. – М.: Наука, 1985, с.89-96.
31. Бабаджанян А.Г., Оганесян С.М. Строение верхней части земной коры по профилю сс. Кабахлу-Джанахмед по гравиметрическим данным. – Изв. АН Арм.ССР, Науки о Земле, 1979, №4, с.88-95.
32. Бабаджанян А.Г., Оганесян С.М. Гравитационная модель верхней части земной коры по профилю Маркара-Пойлы. – Изв. АН Арм.ССР, Науки о Земле, 1980, №6, с.60-68.
33. Бабаджанян А.Г., Оганесян С.М., Оганесян Л.Б. Возможности гравиметрии при изучении строения земной коры на территории Армянской ССР. – В. кн.: Геологическое истолкование потенциальных полей. – К.: Наукова думка, 1983, с.10-16.

34. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1969.- 368с.

35. Бадалян М.С. Особенности новейшего вулканизма Армении. – Ереван: Изд. АН Арм.ССР, 1986.- 110с.

36. Бадалян С.В., Газарян Г.О., Гамоян В.Б. Подземная электроразведка на рудных месторождениях Армении. –Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1980.- 224с.

37. Балавадзе Б.К. Гравитационное поле и строение земной коры в Грузии. – Тбилиси: Изд-во АН Груз.ССР, 1957.- 126с.

38. Балавадзе Б.К., Старостенко В.И. О проблеме построения плотностных моделей земной коры в верхней мантии. – В кн.: Гравитационная модель земной коры и верхней мантии Земли. – К.: Наукова думка, 1979, с.7-8.

39. Бакушинский А.Б. Об одном численном методе решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода. –Ж.вычисл.матем. и матем. физики. 1965, т.5, № 4, с.744-749.

40. Бакушинский А.Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения.–Ж. вычисл.матем. и матем. физики, 1967, т.7, № 3, с.672-677.

41. Бакушинский А.Б. Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанные на принципе итеративной регуляризации. – Ж. вычисл.матем. и матем. физики, 1977, т.17, №6, с.1350-1362.

42. Бакушинский А.Б. Принцип итеративной регуляризации. Автореф. дис. ... докт. физ-мат наук. – М.: МГУ, 1984.- 18с.

43. Балк П.И. К аналитическому решению трехмерной прямой задачи гравиметрии. – Изв АН СССР, Физика Земли, 1975, №8, с.99-103.

44. Балк П.И. Об алгоритме численного решения трехмерной прямой задачи. – Геология и геофизика, 1979, №11, с.84-89.

45. Балк П.И., Балк Т.В., Горнаков И.В. Об устойчивости решения обратной задачи гравиметрии для группы точечных источников. – Геология и геофизика, 1982, №10, с.118-126.

46. Баракришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.- 384с.

47. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечного элемента. – М.: Стройиздат, 1982.- 448с.

48. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973.- 632с.

49. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1984.- 520с.

50. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985.- 256с.

51. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984.- 496с.

52. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983.- 440с.

53. Березкин В.М. Применение гравиразведки для поисков месторождений нефти и газа. – М.: Недра, 1973.- 264с.

54. Березкин В.М. Поиски месторождений нефти и газа. – В. спр.: Гравиразведка/ под ред. Е.А. Мудрецовой – М.: Недра, 1981, с.338-351.

55. Берс Л., Джон Ф., Шахтер М. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966.- 352с.

56. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Л.: Изд. ЛГУ, 1980.- 264с.

57. Борисов А.А., Кургулякова Г.И., Фирсова Д.Б. Магнитная модель верхов мантии континентальных и морских структур СССР. – В кн.: Физические свойства, состав и строение верхней мантии. – М.: 1974, с.96-101.

58. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. – М.: Наука, 1984.- 472с.

59. Бровар В.В., Юзефович А.П. Параметры лунных масконов. – В кн.: современные проблемы позиционной астрометрии. – М.: Изд.МГУ, с.303-312.

60. Бродский М.А. О разрешимости обратных задач гравиметрии и магнитометрии. Автореф. дис. ... докт. физ-мат наук. – М.: ИФЗ АН СССР, 1984.- 36с.

61. Бродский М.А. К построению априорных оценок решения обратной задачи гравиметрии. – В кн.: Решение прямой и обратной задач гравиметрии и магнитометрии (вопросы теории и методики). – М.: ИФЗ АН СССР, 1985, с.77-86.

62. Бродский М.А., Надирашвили Н.С. О существовании и единственности в обратной задаче потенциала при априорной информации о распределении источников. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1982, №8, с.55-64.

63. Булах Е.Г. Автоматизированная система интерпретации гравитационных аномалий. – К.: Наукова думка, 1973.- 202с.

64. Булах Е.Г., Ржаницын В.А., Маркова М.Н. Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиразведки. – К.: Наукова думка, 1976.- 220с.

65. Бураковской В.Е. О природе региональных минимумов силы тяжести в Днепровско–Донецкой впадине. – В. кн.: Методика геофизических исследований на Украине. – К.: Техника, 1975, с.84-86.

66. Буренков В.И. О приближении функций из пространства $W_p^l(\Omega)$ финитными функциями для произвольного открытого множества Ω. – Труды МИ АН СССР, 1974, т.131, с.51-63.

67. Бурьянов В.В., Гордиенко В.В., Кулик С.Н., Логвинов И.М. Комплексное геофизическое изучение тектоносферы континентов. – К.: Наукова думка, 1983.- 176с.

68. Вабищевич П.Н., Пулатов П.А. Экономичные разностные методы решения прямых задач грави- и магниторазведки. – Изв АН СССР, Физика Земли, 1983, №10, с.68-76.
69. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е. Д. Расчет пластин. – К.: Будівельник, 1970.- 436с.
70. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972.- 416с.
71. Вайнберг М.М. Функциональный анализ. – М.: Просвещение, 1979.- 128с.
72. Вайникко Г. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. – Тарту: Изд.ТГУ, 1982.- 112с.
73. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.- 520с.
74. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.- 400с.
75. Варламов А.С., Филатов В.Г. Определение плотности горных пород и геологических объектов. – М.: Недра, 1983.- 216с.
76. Варфоломеев В.А. Решение обратной задачи гравиметрии методом "линейного фильтра". Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – К.: ИГ АН УССР, 1984.- 21с.
77. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов. – М.: Советское радио, 1979.- 272с.
78. Великович А.Л., Зельдович Я.Б. Об одном подходе к решению обратной задачи теории потенциала. – ДАН СССР, 1973, т.212, №3, с.580-583.
79. Веселов В.В., Гонтов Д.П., Пустыльников Л.М. Вариационный подход к задачам интерпретации физических полей. – М.: Наука, 1983.- 120с.
80. Веселов К.Е. Некоторые проблемы современного развития гравиразведки. – В.кн.: Геологическое истолкование потенциальных полей. – К.: Наукова думка, 1983, с.54-56.

81. Веселов К.Е., Сагитов М.У. Гравиметрическая разведка. – М.: Недра, 1968.- 512с.

82. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами на ЭВМ. Справочное пособие. – К.: Наука, 1978.- 292с.

83. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.- 512с.

84. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976.- 280с.

85. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974.- 336с.

86. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977.- 224с.

87. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. – Новосибирск: Наука, 1984.- 240с.

88. Вуд Дж.А., Дики Дж.С., Марвин М.Ч., Науэлл Б.Н. Лунные анортазиты. – Изв. АН СССР, Сер.геолог., 1970, т.33, №6,

89. Вергасов В.А., Журкин И.Г., Красикова М.В. и др. Вычислительная математика. – М.: Недра, 1976.- 230с.

90. Вычислительные методы в электродинамике /Под ред. Р. Мигры – М.: Мир, 1977.- 488с.

91. Вычислительные процессы и системы. Вып. 1,2 и 3 /Под ред. Г.И. Марчука – М.: Наука, 1983.- 304с.; 1985.- 352с.; 1985.- 256с.

92. Габриелян А.А. Тектоническое районирование Антикавказа и положение его в системе альпийского орогена юга СССР и сопредельных стран. – Изв. АН Арм.ССР, Сер.геолог. и географ. наук, 1961, т.14, №4, с.7-22.

93. Габриелян А.А., Татевосян Л.К. Схема геолого-геофизического районирования Армянской ССР и смежных частей Антикавказа. – Изв. АН Арм.ССР, Науки о Земле, 1966, №1-2, с.21-33.

94. Галкин И.Н. Геофизика Луны. – М.: Наука, 1978.- 176с.
95. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984.- 430с.
96. Гантмахер. Теория матриц. – М.: Наука, 1966.- 576с.
97. Гамбурцев Г.А. Методы интерпретации гравитационных наблюдений. – Прикладная геофизика, 1936, вып.1, с.158-194.
98. Геология Армянской ССР, т.X, Геофизика. – Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, 1972.- 275с.
99. Глазнев В.Н., Павловский В.И., Раевский А.Б. Плотностная модель земной коры северо-восточной части Балтийского щита по гравитационным данным. – В кн.: Геологическое истолкование потенциальных полей. – К.: Наукова думка, 1983, с.67-75.
100. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1984.- 112с.
101. Гласко В.Б., Кондорская Е.Е. О некоторых стабилизирующих по А.Н. Тихонову функционалах для многомерных некорректных задач. – Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1983, т.23, №2, с.301-306.
102. Гласко В.Б., Крикеин Ю.А. О квазиоптимальном прерывании регуляризующего итерационного процесса. – Вестн. Моск.унив., Сер.3, 1982, №3, с.3-6.
103. Гласко В.Б., Старостенко В.И., Оганесян С.М. Алгоритмы подбора в заданных классах, основанные на регуляризации. – В спр.: Гравиразведка. /Под ред. Е.А. Мудрецовой. – М.: Недра, 1981, с.272-280.
104. Гласко В.Б., Гущин Г.В., Старостенко В.И. О применении метода регуляризации А.Н. Тихонова к решению нелинейных систем уравнений. – Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1975, т.15, №6, с.1607-1611.
105. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979.- 392с.
106. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1973.- 400с.

107. Голиздра Г.Я. Особые точки аналитического продолжения гравитационного поля и их связь с формой возмущающих масс. – В кн.: Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки. – Новосибирск: НГУ, 1966, с.273-388.

108. Гольдшмидт В.И. Региональные геофизические исследования и методика их количественного анализа. – М.: Недра, 1979.- 156с.

109. Гольдшмидт В.И. Оптимизация процесса количественной интерпретации данных гравиразведки. – М.: Недра, 1984.- 185с.

110. Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – М.: Наука, 1983.- 288с.

111. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М.: Наука, 1971.- 352с.

112. Гольштейн Е.Г. Метод модификации монотонных отображений. – Экономика и матем. методы, 1975, т.XI, вып.6, с.1144-1159.

113. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Градиентный метод минимизации и алгоритмы выпуклого программирования, связанные с модифицированными функциями Лагранжа. – Экономика и матем. методы, 1975, т.2, вып.4, с.730-742.

114. Гольцман Ф.М. Статические модели интерпретации. – М.: Наука, 1971.- 328с.

115. Гольцман Ф.М. Физический эксперимент и статические выводы. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.- 192с.

116. Гольцман Ф.М., Калинина Т.Б. Статическая интерпретация магнитных и гравитационных аномалий. – Л.: Недра, 1983.- 548с.

117. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978.- 336с.

118. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Некорректные задачи астрофизики. – М.: Наука, 1985.- 352с.

119. Гордин В.М., Михайлов В.О. Интерпретационная модель Вайна-Метьюса и ее применение в морской магнитометрии (методологические и методические аспекты). – В кн.: Геологическое истолкование потенциальных полей. – К.: Наукова думка, 1983, с.75-84.

120. Гравиразведка. Справочник геофизики /Под ред. Е.А. Мудрецовой – М.: Недра, 1981.- 398с.

121. Гравитационная модель земной коры и верхней мантии Земли. – К.: Наукова думка, 1979.- 248с.

122. Грандштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука.- 1971, 1108с.

123. Грендо В.Б. Гравитационная модель земной коры Красноярского края. В кн.: Гравитационная модель земной коры и верхней мантии Земли. – К.: Наукова думка, 1979, с.198-201.

124. Грендо В.Б. Автоматизация обработки данных гравиразведки и гравитационное моделирование геологических структур. Автореф. дис. ... канд. геол.- мин. наук. – К.: ИГ АН УССР, 1982.- 22с.

125. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1973.- 228с.

126. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Физматгиз, 1963.- 660с.

127. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалов Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967.- 368с.

128. Денисюк Р.П. Метод решения обратной задачи гравиметрии в классе плотностных границ сложнопостроенных сред. Автореф. дис. ... канд.геол.- мин.наук. – К.: ИГ АН УССР, 1984.- 19с.

129. Доннел Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука 1982.- 568с.

130. Дортман Н.Б., Васильева В.И. и др. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых СССР. – М.: Недра, 1964.- 326с.

131. Егоркина Г.В. Структура земной коры и верхней мантии Малого Кавказа (Армения) по данным обменных волн. – В кн.: Строение земной коры и верхней мантии Центральной и Восточной Европы. – К.: Наукова думка, 1978, с.199-205.

132. Егоркина Г.Х., Халевин Н.И. Структура некоторых офиолитовых поясов по сейсмическим данным. – В кн.: Глубинное строение и геофизические особенности структур земной коры и верхней мантии. – М.: Наука, 1977, с.62-69.

133. Егоркина Г.В., Соколова И.А., Егорова Л.М. Изучение глубинных разломов по материалам станций "Земля" на территории Армении. – Разведочная геофизика, 1976, вып.72, с.29-40.

134. Егоркина Г.В., Соколова И.А., Егорова Л.М. и др. Строение земной коры северо-западной части Армении. – Советская геология, 1973, №6, с.80-91.

135. Егоркина Г.В., Соколова И.А., Егорова Л.М. Глубинное строение ультрабазитовых поясов Армении. – Советская геология, 1976, №3, с.80-91.

136. Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет. – М.: Наука, 1960.- 658с.

137. Заморев А.А. Об определении производных гравитационного потенциала и соотношений между моментами возмущающих масс по производной, заданной на плоскости. – Изв. АН СССР, Сер.геогр. и геофиз., 1939, №3, с.275-286.

138. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975, 502с.

139. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимации. – М.: Мир, 1988.- 320с.

140. Зидаров Д. О решении обратной задачи потенциала и его применении в геофизике. – София: Изд-во Болгарской АН, 1968.- 154с.

141. Зидаров Д. Обратная гравиметрична задача в геопроучването и геодезията. – София: Изд-во БАН, 1984, 278с. (на болг. языке)

142. Иванов В.В., Кудринский В.Ю. Приближенное решение линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве методом наименьших квадратов. 1. – Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1966, №5, №6, с.831-841.

143. Иванов В.К. Об определении гармонических моментов возмущающих масс по производной гравитационного потенциала, заданной на плоскости. – Изв. АН СССР, Сер.геогр. и геофиз., 1950, №5, т.14, с.403-411.

144. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978.- 208с.

145. Иванов В.К., Казакова Л.Э. О приближении в среднем гармонических функций трех переменных гармоническими полиномами. – Матем. записи Уральского гос. университета, 1962, т.3, тетрадь 2, с.24-29.

146. Идельсон Н.И. Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике. – М.: ОНТИ, 1936.- 424с.

147. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. – М.: Наука, 1985.- 336с.

148. Мудревцова Е.А. Варламов А.С., Филатов В.Г., Комарова Г.М. Интерпретация данных высокоточной гравиразведки на неструктурных месторождениях нефти и газа. – М.: Недра, 1979.- 196с.

149. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Маука, 1974.- 480с.

150. Калиткин Н.И. Численные методы. – М.: Наука, 1978.- 512с.

151. Казарян Г.Г. О плотности гладких финитных функций в $\overset{o}{W}{}_p^r(\Omega)$. – Матем. заметки, 1967, т.2, №1, 1967, с.45-52.

152. Канторович Л.В. Приближенное решение функциональных уравнений. - Успехи матем. наук, 1956, т.11, вып.6, с.99-116.

153. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.- 742с.

154. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенное методы высшего анализа. – М.: Л: ГИФМЛ, 1962.- 708с.

155. Каратаев Г.И. Корреляционная схема геологической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. – Новосибирск: Наука, 1966.- 135с.

156. Каратаев Г.И. Статические методы построения плотностных разрезов известной геометрии по гравитационным аномалиям в условиях помех. – К.: Наукова думка, 1981, с. 82-97.

157. Картвелишвили К.М. Планетарная плотностная модель и нормальное гравитационное поле Земли. – М.: Наука, 1982.- 94с.

158. Кашкай М.А., Салехли Т.М., Магриби А.А., Султанов Л.А. Физические свойства вмещающих пород Агатагского и Ачканнского месторождений ртути (Малый Кавказ). – Изв. АН Аз.ССР, Науки о Земле, 1977, №5, с.55-60.

159. Книппер А.Л. Океаническая кора в структуре Альпийской складчатой области. – М.: Наука, 1975.- 208с.

160. Кобрунов А.И. О методе поиска оптимальных решений обратной задачи гравиразведки. Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – К.: ИГ АН УССР, 1977.- 22с.

161. Кобрунов А.И. О методе оптимизации при решении обратной задачи гравиразведки. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1978, №8, с.73-78.

162. Кобрунов А.И. К вопросу об интерпретации аномальных гравитационных полей методом оптимизации (трехмерная задача). – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1979, №10, с.67-76.

163. Кобрунов А.И. Разрешимость и эквивалентность в обратной задаче гравиразведки для нескольких плотностных границ. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1983, №5, с.33-45.

164. Кобрунов А.И. К теории методов подбора. – Геофизический журнал, 1983, т.5, №4, с.34-43.

165. Кобрунов А.И. Экспериментальные классы в задачах гравиметрии и их использование для построения плотностных моделей геологических сред. Автореф. дис. ... докт. физ-мат наук. – К.: ИГ АН УССР, 1985.- 50с.

166. Кобрунов А.И. Равномерные критерии оптимальности в задачах гравиметрии. – ДАН УССР, Сер.Б, 1986, №11, с.12-15.

167. Кобрунов А.И., Варфоломеев В.А. Об одном методе ε эквивалентных перераспределений и его использование при интерпретации гравитационных полей. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1981, №10, с. 25-44.

168. Кобрунов А.И., Денисюк Р.П. Решение обратной задачи гравиразведки в классе плотностных границ с переменной плотностью на контакте. – Изв. ВУЗ, Геология и разведка, 1982, №9.

169. Козленко В.Г. Системная интерпретация геофизических полей. – К.:Наукова думка, 1984.- 220с.

170. Козленко В.Г., Старостенко В.И., Шен Э.Л. Геофизическая модель как система. – ДАН УССР, Сер.Б, 1983, №3, с.22-25.

171. Козленко В.Г., Шен Э.Л. Об истолковании гравитационного поля Днепровского грабена. – В кн.: Гравитационная модель земной коры и верхней мантии Земли. – К.: Наукова думка, 1979, с.132-137.

172. Козленко В.Г., Шен Э.Л. Интерпретация площадных остаточных аномалий силы тяжести при построении гравитационной модели Днепровско-Донецкой впадины. – К.: Наукова думка, 1977, с.69-76.

173. Козленко В.Г., Лейбович С.Х., Шен Э.Л. Некоторые данные о природе Лохвицкого максимума. – В кн.: Геофизические исследования на Украине. – К.: Техника, 1970, с.152-155.

174. Козленко В.Г., Старостенко В.И., Субботин С.И. Строение коры и верхней мантии по гравиметрическим данным. – В кн.: Тектоносфера Земли. – М.: 1978, с.220-266.

175. Койфман Л.И. Трехмерное гравитационное моделирование при решении задач разведочной геофизики. Автореф. дис. ... канд.геол. – мин.наук. – К.: ИГ УССР, 1983.- 24с.

176. Колмогоров А.И., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976.- 544с.

177. Константинов Г.Н. Математическое моделирование при решении поисково-разведочных задач на железо. – В кн.: Математическое и физическое моделирование железорудных месторождений и рудных полей. – Новосибирск: МГ СССР, СНИИГГ и МС, 1983, с.18-33.

178. Континентальные рифты. Серия "Науки о Земле". – М.: Мир, 1981.- 484с.

179. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты. – М.: Стройиздат,1984.- 482с.

180. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.- 206с.

181. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984.- 352с.

182. Костюкевич А.С. Автоматизированный совместный подбор скоростных и плотностных моделей земной коры. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат наук. – К.: ИГ АН УССР, 1985.- 24с.

183. Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969.- 456с.

184. Красовский С.С. Отражение динамики земной коры континентального типа в гравитационном поле. – К.: Наукова думка, 1981.- 264с.

185. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1871.- 104с.

186. Криксин Ю.А. О решении линейных некорректных задач методом локальных невязок. – Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1984, т.24, №12, с.1892-1897.

187. Криксин Ю.А. О некоторых способах использования априорной информации для построения устойчивого приближения к решению обратных задач. Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – М.: МГУ, 1985.- 11с.

188. Крутиховская З.А., Пашкевич И.К., Силина И.М. Магнитная модель и структура земной коры Украинского щита. – К.: Наукова думка, 1982.- 216с.

189. Крянев А.В. Итерационный метод решения некорректных задач. – Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1974,т. 14, №1, с.25-35.

190. Лаврентьев М.А., Люстерник А.А. Основы вариационного исчисления. Т.1.часть П. – М. – Л.: ОНТИ, КНТП, 1935.- 400с.

191. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задач математической физики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.- 92с.

192. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980.- 288с.

193. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973.- 408с.

194. Левенков Я.Б. Повышение точности и скорости сходимости алгоритмов решения обратных нелинейных задач гравиметрии. Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – К.: ИГ АН УССР,1983.- 20с.

195. Ли В.С. Разделение и интерпретация гравитационный и магнитных полей на основе сеточных аппроксимирующих конструкций. Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – М.: ИФЗ АН СССР, 1984.- 25с.

196. Лисковец О.А. Вариационные методы решения неустойчивых задач. – Минск: Наука и техника, 1981.- 344с.

197. Ломтадзе В.В. Интерпретация гравитационных аномалий с помощью цифровых вычислительных машин. – Вопр. развед. геофизики, 1967, вып.6, с.61-65.

198. Лоран П.Ж. Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975.- 496с.

199. Лучицкий А.И. Аналитические и численные методы решения прямой двухмерной задачи гравиметрии и магнитометрии. Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – М.: ИФЗ АН СССР, 1980.- 22с.

200. Магницкий В.А. Внутреннее строение и физика Земли. – М.: Недра, 1965.- 380с.

201. Манукян А.Г. Решения прямых и обратных задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразных планетах. Дисс. ... канд. физ-мат. наук. – Ленинакан: 1985.- 175с.

202. Манукян А.Г. Решения прямых и обратных задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразных планетах. Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – К.: ИГ им. С.И. Субботина АН УССР.1985.- 23с.

203. Манукян А.Г. Решение трехмерной прямой задачи магнитометрии на сфере. –В кн.: Тезисы докл. научно-техн. конференции молодых геофизиков Закавказья. – Ленинакан, 1983, с.27-28.

204. Манукян А.Г., Старостенко В.И. Решение прямой задачи магнитометрии на шарообразной Земле. – ДАН УССР, Сер.Б, 1984, №5, с.11-17.

205. Маслов В.П. Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризационого процесса. – Успехи матем. наук, 1968, т.23, вып.3 (141), с.183-184.

206. Маргулис А.С. Гармонические плотности и обратные задачи потенциала. – В кн.: Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей. – К.: Наукова думка, 1981, с.130-136.

207. Маргулис А.С. К теории потенциала в классах $L_p(S)$. Изв. ВУЗ, Математика, 1982, №1, с.33-41.

208. Маргулис А.С. Теория потенциала для плотностей класса L_p и ее применение к обратным задачам гравиметрии. – В кн.: Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. – К.: Наукова думка, 1983, с.187-197.

209. Маргулис А.С. Рудные и структурные обратные задачи гравиметрии. Нормальные решения и их приложения. Автореф.дис. ... канд. физ-мат. наук. – М.:ИФЗ АН СССР, 1984.- 18с.

210. Маргулис А.С. О единственности решения обратной задачи гравиметрии для структурных моделей. – ДАН СССР, 1984, т.285, №2, с.242-246.

211. Маргулис А.С., Новоселицкий В.М. Фурье-аналогия в обратных задачах гравиметрии для некоторых "нефтяных" и "планетарных" плотностных моделей. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1982, №4, с.68-82.

212. Маргулис А.С., Новоселицкий В.М. Прогнозирование слоистого плотностного разреза по гравитационным аномалиям. – ДАН УССР, Сер.Б, 1982, №9, с.10-13.

213. Мартышко П.С. Некоторые вопросы теории и алгоритмы решения задач метода искусственного подмагничивания. Свердловск: АН СССР, Урал. научный центр, 1982.- 32с.

214. Мартышко П.С. Решение задач метода искусственного подмагничивания (МИП) в двух- и трехмерном случаях. – В кн.: Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. – К.: Наукова думка, 1983, с.198-204.

215. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977.- 456с.

216. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981.- 416с.

217. Мейсон Б., Мелдон У. Лунные породы. – М.: Мир, 1973.- 166с.

218. Михайлов В.О. Применение моделей механики при решении обратных задач гравиметрии. Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – М.: ВНИИ-Геофизика, 1976.- 22с.

219. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983.- 424с.

220. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1972.- 510с.

221. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.- 576с.

222. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных . – М.: Высшая школа, 1977.- 432с.

223. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1979.- 360с.

224. Морозов В.А. О регуляризующих семействах операторов. – В кн.: *Вычислительные методы и программирование.* – М.: *Изд-во МГУ*, 1967, вып.8, с.63-95.

225. Морозов В.А. L-псевдообращение и его свойства. – ДАН СССР, 1977, т.233, №2, с.291-294.

226. Морозов В.А. Линейные и нелинейные некорректные задачи. Итоги науки и техники. Математический анализ. – М.: ВИНИТИ, 1973, вып.11, с.129-178.

227. Мудрецова Е.А. Применение аналитического продолжения аномального гравитационного поля в нижнее полупространство для прогноза локальных неоднородностей разреза. – Прикладная геофизика, 1982, вып.103, с.116-128.

228. Мудрецова Е.А., Целев В.И. Эффективность гравитационных и магнитных полей при поисках залежей нефти и газа. – Геофизический журнал, т.7, №1, с.80-90.

229. Мудрецова Е.А., Филатов В.Г. Методы разделения полей. Трансформации, используемые для локации аномалий. – В спр. Гравиразведка /под ред. Е.А. Мудрецовой. – М.: Недра, 1981, с.247-254.

230. Мудрецова Е.А., Целев В.Г. Выбор параметров регуляризованного продолжения в нижнее полупространство двухмерных потенциальных полей для локализации источников аномалий. – Геофизический журнал, 1985, т.7, №4, с.88-93.

231. Мудрецова Е.А., Гласко В.Б., Филатов В.Г. О разрешающей способности метода регуляризации и определения участка характерного изменения формы контактной поверхности. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1974, №6, с.98-101.

232. Мюллер П., Съегрен В. Большие диски как модель лунных масконов и теории их образования. – В кн.: Луна /под ред. С. Ранкорна и Т. Юри. – М.: Мир, 1975, с.30-37.

233. Надирашвили Н.С. О классе гравиметрически эквивалентных тел. – В кн.: Теория и практика интерпретации гравитационных аномалий. – М.: ИФЗ АН СССР, 1982, с.15-25.

234. Назаретян С.Н. Глубинные разломы территории Арм. ССР. – Ер.: Изд-во АН Арм.ССР,1984.-139с.

235. Недялков И.П. Въерху обратная задача на потенциала за тела. – Изв.геофиз. института Болгар. АН, 1960, №1, с.15-24.

236. Непомнящих А.А., Овчаренко А.В., Ли В.С., Соколов Л.В. Интерпретация гравитационных аномалий на основе пространственного изучения и разделения полей. – Алма-Ата: МВ и ССО Каз.ССР, 1978.-87с.

237. Никитин А.А. Статические методы выделения геофизических аномалий. – М.: Недра, 1979.- 280с.

238. Никольский С.М. Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных. – Матем. сбор., 1963, №2, с.224-252.

239. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977.- 456с.

240. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1-2. – М.: Наука, 1983, 464с; 1983.- 448с.

241. Никонова Ф.И. Разрешимость обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде и ее использование для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Автореф. дис. ... канд.физ-мат наук. – М.: ИФЗ АН СССР, 1979.- 21с.

242. Никонова Ф.И. Использование одного класса потенциалов для приближенного решения обратной задачи гравиразведки и магниторазведки. – Прикладная геофизика. – М.: Недра, 1978, вып.93, с.153-156.

243. Никонова Ф.И., Цирульский А.В. Интерпретация гравимагнитных аномалий на основе классов потенциалов, для которых обратная задача разрешима в конечном виде. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1978, №2, с.74-85.

244. Новиков Н. Об единственности решения обратной задачи потенциала. – ДАН СССР, 1938, т.18, №3, с.165-168.

245. Новоселицкий В.М. Соотношения между переменными пластовыми, средними и эффективными плотностями при решении задач гравиразведки. – В кн.: Прикладная геофизика. – М.: Недра, 1971, вып.62, с.151-158.

246. Новоселицкий В.М. Интерпретация гравитационных аномалий в условиях латериального изменения плотности осадочных толщ. Автореф. дис. ... докт.геол.-мин.наук. – Пермь, ПГУ, 1975.- 34с.

247. Новоселицкий В.М., Губайдулин М.Г. Некоторые эквивалентные представления градиентно-слоистых сред в задачах гравиразведки. – В кн.: Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей. – К.: Наукова думка, 1981, с.347-352.

248. Нумеров Б.В. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности. – ДАН СССР, 1930, А, №21, с.569-574.

249. Обратные кинематические задачи взрывной сейсмологии. – М.: Наука, 1979.- 284с.

250. Обэн Ж.П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977.- 384с.

251. Овруцкий И.Г. Применение методов минимизации негладких функционалов для решения обратных задач геофизики. Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – К.: ИГ АН УССР, 1983.- 20с.

252. Овчаренко А.В. Некоторые вопросы методики разделения, восстановления и собственно истолкования двухмерных гравитационных полей на основе выметания источников. Автореф.дис. ... канд. физ-мат наук. – М.: ИФЗ АН СССР, 1979.- 24с.

253. Оганесян М.Г. Локализация источников и решение трехмерных обратных задач гравиметрии. Дисс. ... канд. физ-мат наук. –Ленинакан: ИГИС АН Арм.ССР, 1988.- 242с.

254. Оганесян С.М. Устойчивые итерационные процессы и их применение в задачах гравиметрии. Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – М.: ИФЗ АН СССР, 1977.- 23с.

255. Оганесян С.М. Обобщенный алгоритм решения задачи нелинейного программирования при ограничениях вида $a \le x \le b$ и его использование в геофизике. – ДАН УССР, Сер.Б, 1975, №12, с.1082-1086.

256. Оганесян С.М. Решение обратной задачи гравиметрии в классе $L_2(S)$ распределения плотностей. – ДАН УССР, Сер.Б, 1981, №6, с.39-43.

257. Оганесян С.М. Оценка скорости сходимости одного класса итерационных методов, применяемых при решении линейных некорректных задач геофизики. – В кн.: Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей. – К.: Наукова думка, 1981, с.154-170.

258. Оганесян С.М. Решение обратных задач гравиметрии итерационным методом. – Изв. АН Арм.ССР, Науки о Земле, 1981, №5, с.68-74.

259. Оганесян С.М. Решение линейных некорректных задач гравиметрии двойственным методом. – ДАН УССР, Сер.Б, 1982, №9, с.13-18.

260. Оганесян С.М. О связи одного итерационного процесса с вариационным методом А.Н. Тихонова. – В кн.: Методы решения некорректных задач и их приложения /под ред. А.Н. Тихонова и М.М. Лаврентьева. – Новосибирск: 1982, с.238-239.

261. Оганесян С.М. О нахождении "решений" операторного уравнения 1 рода в смысле Фридрихса методом регуляризации А.Н. Тихонова. – В кн.: Методы решения некорректных задач и их приложения /под ред. М.М. Лаврентьева. – Новосибирск: 1983, с.159-160.

262. Оганесян С.М. Решение трехмерной обратной задачи о контактной поверхности при помощи некоторых многомерных стабилизирующих функционалов. – В кн.: Тезисы докладов научно-технической конференции молодых геофизиков Закавказья. – Ленинакан, 1983, с.5-6.

263. Оганесян С.М. Обратная задача гравиметрии при заданном носителе масс. – В кн.: Теория и практика геологической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, Алма-Ата: ПГО "Казгеофизика", 1984, с.47-49.

264. Оганесян С.М. Обратная задача теории потенциала в пространстве $L_p(S)$. – В кн.: Теория и методика решения некорректно поставленных задач и их приложения /под ред.акад. А.Н. Тихонова. – Изд-во Саратовского университета, 1985, с.112-114.

265. Оганесян С.М. Обратная задача гравиметрии в $L_p(S)$ и вопросы приближения элементов из $W_p^r(S)$. – ДАН УССР, Сер.Б, 1987, №2, с.14-19.

266. Оганесян С.М. Обратная задача теории потенциала в пространстве $L_p(S)$ и приближение элементов из $W_p^r(S)$ бесконечно дифференцируемыми финитными функциями. – Изв. АН Арм.ССР, Математика, 1988, №1, с.39-53.

267. Оганесян С.М., Оганесян М.Г. Регуляризующие алгоритмы решения трехмерных обратных задач гравиметрии – I, II, Геофизический журнал, 1988, т.10, №1, с.21-36; №3, с.47-63.

268. Оганесян С.М., Оганесян М.Г. Решение модельных обратных задач гравиразведки двойственным методом. – В кн.: Всесоюзное совещание по разработке и комплексированию геофизических методов при детальной и эксплуатационной разведке рудных месторождений. – Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1982, с.104-105.

269. Оганесян С.М., Оганесян М.Г. Локализация рудных тел с помощью моделирования на ЭВМ. – В кн.: Тезисы докладов научно-технической конференции молодых геофизиков Закавказья. – Ленинакан, 1983, с.29-30.

270. Оганесян С.М., Старостенко В.И. Регуляризующий итерационный процесс, основанный на параметрическом функционале А.Н. Тихонова – ДАН СССР, 1978, т.238, №2, с.277-280.

271. Оганесян С.М., Старостенко В.И. Параметрический функционал А.Н. Тихонова и итерационные методы решения некорректных задач геофизики. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1978, №1, с.63-74.

272. Оганесян С.М., Старостенко В.И. О корректности постановки задач геофизики, представленных в виде систем уравнений и итерационных методов их решения. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1978, с.54-64.

273. Оганесян С.М., Старостенко В.И. О псевдорешениях и их использовании в некорректных задачах гравиметрии. – В сб.: Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей. – К.: Наукова думка, 1981, с.170-178.

274. Оганесян С.М., Старостенко В.И. Двойственный метод решения линейных некорректных задач, использующих параметрический функционал Лагранжа и вариационный способ А.Н. Тихонова. – ДАН СССР, 1982, т.263, №2, с.297-301.

275. Оганесян С.М., Старостенко В.И. Некоторые свойства L – псевдорешения и элемента, минимизирующий обобщенный функционал А.Н. Тихонова. – ДАН СССР, 1982, т.263, №3, с.540-542.

276. Оганесян С.М., Старостенко В.И. Построение тел с нулевым внешним гравитационным потенциалом. – В кн.: Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения/ под ред.акад. М.М. Лаврентьева. – Новосибирск: 1983, с.147-152.

277. Оганесян С.М., Старостенко В.И. L – псевдорешения и их использование для построения тел с нулевым внешним гравитационным полем. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1984, №2, с.51-62.

278. Оганесян С.М., Старостенко В.И. Тела нулевого гравитационного потенциала: о забытых работах и современном состоянии теории. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1985, №3, с.49-62.

279. Оганесян С.М., Манукян А.Г., Оганесян М.Г. Эффективные методы обработки данных гравиметрии и магнитометрии. – Изв. АН Арм.ССР, Науки о Земле, 1986, т.39, №5, с.39-45.

280. Оганесян С.М., Оганесян М.Г., Старостенко В.И. Решение трехмерных обратных задач гравиметрии регуляризующими алгоритмами. – ДАН УССР, Сер.Б, 1986, №11, с.18-22.

281. Оганесян С.М., Старостенко В.И., Оганесян М.Г. Двойственный метод решения линейных некорректных задач геофизики. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1984, №6, с.64-78.

282. Оганисян Ш.С. О плотности горных пород Армении. – Изв. АН Арм.ССР, серия геол. и географ. наук, 1969, т.12, с.

283. Оганисян Ш.С. О причинах, вызывающих отрицательные аномалии силы тяжести на территории Арм.ССР. – Изв. АН Арм.ССР, Науки о Земле, т.119, №1-2, 1966, с.55-62.

284. Оганисян Ш.С. Строение земной коры территории Армении по гравиметрическим данным. – В кн.: Гравитационная модель коры и верхней мантии Земли. – К.: Наукова думка, 1979, с.158-161.

285. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976.- 464с.

286. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнения со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975.- 558с.

287. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984.- 286с.

288. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984.- 152с.

289. Пашко В.Ф., Старостенко В.И. Методы решения прямых и обратных задач гравиметрии и магнитометрии на ЭВМ (по материалам зарубежных публикаций). – М.: ВИЭМС, 1982.- 97с.

290. Пашко В.Ф., Старостенко В.И. Интерактивные системы и автоматическое построение карт в геофизике (по материалам зарубежных публикаций).). – М.: ВИЭМС, 1983.- 69с.

291. Паффенгольц К.Н. Геологический очерк Кавказа. – Ереван: Изд. АН Арм.ССР, 1959.- 508с.

292. Пейве А.В. Тектоника Срединно-Атлантического хребта. – Геотектоника, 1975, №5, с.3-18.

293. Пейве А.В., Богданов И.А., Книппер А.Л., Перфильев А.С. Офиолиты: современное состояние и задачи исследования. – Геотектоника, 1977, №6, с.4-14.

294. Пиццети П. Основы механической теории фигур планет. – М:, Л.: Гостехиздат, 1933.- 170с.

295. Поверхностные сейсмические волны в горизонтально-неоднородной Земле / А.Л. Левшин, Т.Б. Яновская, А.В. Лендер и др. – М.: Недра, 1986.- 280с.

296. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. – М.: Мир, 1974.- 376с.

297. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983.- 384с.

298. Поляк Б.Т. Итерационные методы решения некорректных вариационных задач. – В кн.: Вычислительные методы и программирование. – М.: Изд-во МГУ, 1967, вып.8, с.63-95.

299. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981.- 798с.

300. Пруткин И.Л. О приближенном решении трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии методом локальных поправок. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1983, №1, с.53-58.

301. Пруткин И.Л. Некоторые вопросы теории и методы численного решения трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии. Автореф.дис. ... канд.физ-мат наук. – М.: ИФЗ АН СССР, 1985.- 21с.

302. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1982.- 560с.

303. Рвачев В.Л. Теория R–функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982.- 552с.

304. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985.- 592с.

305. Решение прямой и обратной задачи гравиметрии и магнитометрии (вопросы теории и методики). – М.: ИФЗ АН СССР, 1985.- 240с.

306. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979.- 590с.

307. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. – М.: Мир, 1982.- 488с.

308. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977.- 159с.

309. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.- 480с.

310. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975.- 445с.

311. Сагитов М.У. Лунная гравиметрия. – М.: Наука, 1979.- 432с.

312. Салехли Т.М., Султанов Л.А., Абдуллаев Э.Б. Закономерности изменения физико-механических свойств ультраосновных пород Севано-Акеринской тектонической зоны. – Геофизические исследования в Азербайджане, 1975, вып.3, с.92-97.

313. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.- 656с.

314. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973.- 142с.

315. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1980.- 352с.

316. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решений сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.- 592с.

317. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1976.- 120с.

318. Састри Р.Г. Регуляризующие быстродействующие алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии. Автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук. – М.: МГУ, 1980.- 24с.

319. Сафронов В.С. Лунные масконы и изостазия. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1971, №2, с.3-10.

320. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. – М.: Мир, 1980.- 456с.

321. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979.- 392с.

322. Скарин В.Д. К регуляризации минимаксных задач, возникающих в выпуклом программировании. – Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1977, т.17, №6, с.1408-1420.

323. Слепак З.М. Применение гравиразведки для изучения нефтегазоносных структур. – М.: Недра, 1980.- 152с.

324. Слесарев И.С., Сироткин А.М. Вариационно-разностные схемы в теории переноса нейтронов. – М.: Атомиздат, 1978.- 104с.

325. Сербуленко М.Г. Линейные методы разделения потенциальных полей. – В кн.: Дополнительные главы курса гравиразвдки и магниторазведки. – Новосибирск: Изд. МГУ, 1966, с.389-457с.

326. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962.- 188с.

327. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974.- 808с.

328. Соболев С.Л. Плотность финитных функций $L_p^m(E_n)$. – Сибирский матем. жур., 1963, т.4, №3, с.673-682.

329. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. Сб. статей. – М.: Наука, 1982.- 340с.

330. Соколовский К.И. Основные вопросы унитарного метода экстраполяции и разделения потенциальных полей. – ДАН УССР, Сер.Б, 1970, №9, с.713-716.

331. Соколовский К.И. Метод разделения полей на локальные компоненты, соответствующие источникам из заданных частных областей. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1979, №4, с.53-70.

332. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. – М.;Л: Гостехиздат, 1946.- 252с.

333. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – К.: Наукова думка, 1978.- 228с.

334. Старостенко В.И. Алгоритмы и вычислительные схемы решения прямых задач. – В спр.: Гравиразведка /под ред. Е.А. Мудрецовой. – М.: Недра, 1981, с.202-205.

335. Старостенко В.И., Заворотько А.Н. Методика и комплекс программ решения обратной линейной задачи гравиметрии на ЭВМ "Минск-22". – К.: Наукова думка, 1976.- 64с.

336. Старостенко В.И., Заворотько А.Н Методика и Алгол (Фортран) – программы устойчивого решения обратных линейных и нелинейных задач гравиметрии. – К.: Наукова думка, 1980.-104с.

337. Старостенко В.И., Заворотько А.Н Решение обратных задач гравиметрии для нескольких контактных поверхностей. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1982, №3, с.46-61.

338. Старостенко В.И., Заворотько А.Н Методическое руководство по решению обратной задачи гравиметрии для нескольких контактных поверхностей. . – К.: Наукова думка, 1984.- 56с.

339. Старостенко В.И., Манукян А.Г. Решение прямой задачи гравиметрии на шарообразной Земле. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1983, №12, с.34-49.

340. Старостенко В.И., Оганесян С.М. Итерационные методы решения некорректно поставленных задзч. – ДАН СССР, 1977, т.234, №2, с.312-315.

341. Старостенко В.И., Оганесян С.М. Устойчивые операторные процессы и их применение в задачах геофизики. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1977, №5, с.61-75.

342. Старостенко В.И., Оганесян С.М. Решение обратных задач гравиметрии методами математического программирования. – В кн.: Гравитационная модель коры и верхней мантии Земли. – К.: Наукова думка, 1979, с.72-74.

343. Старостенко В.И., Оганесян С.М. Алгоритмы подбора, основанные на использовании методов математического программирования. – В спр. Гравиразведка /под ред. Е.А. Мудрецовой. – М.: Недра, 1981, с.289-296.

344. Старостенко В.И., Оганесян С.М. Регуляризующие итерационные процессы. – В кн.: Методы решения некорректных задач и их приложения /под ред А.Н. Тихонова и М.М. Лаврентьева. – Новосибирск, 1982, с.119-128.

345. Старостенко В.И., Резникова М.А. Решение обратной нелинейной задачи структурной гравиразведки на основе Р-модели стохастического программирования. – ДАН УССР, Сер.Б, 1986, №2, с.11-14.

346. Старостенко В.И., Манукян А.Г., Заворотько А.Н. Методика решения прямой задачи гравиразведки и магнитометрии на шарообразных планетах. – К.: Наукова думка, 1986.- 112с.

347. Старостенко В.И., Манукян А.Г., Заворотько А.Н. Построение плотностных моделей крупных структур планет. – ДАН УССР, Сер.Б, 1983, №5, с.21-24.

348. Старостенко В.И., Оганесян С.М., Манукян А.Г. Решение линейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразной Земле. – В кн. Изучение литосферы геофизическими методами (физические свойства, сейсмометрия, гравиметрия, магнитометрия). – Киев: 1986, с.177-188.

349. Старостенко В.И., Козленко В.Г., Оганесян С.М., Шеен Э.Л., Оганесян М.Г., Егорова Т.П., Дядюра Г.В. Трехмерное распределение плотности в коре Днепровского грабена. – Геофизический журнал, 1986, т.8, №6, с.3-19.

350. Старостенко В.И., Исаев В.И., Сидоренко О.В., Васильев П.Б. Опыт применения нелинейного программирования для решения обратной задачи гравиметрии. – Геофизический журнал, 1985, т.7, №3, с.13-22.

351. Старостенко В.И., Састри Р.Г. Регуляризующее решение трехмерных задач геофизики, представленными интегральными уравнениями первого рода типа свертки. – ДАН СССР, 1979, т.246, №5, с.1074-1079.

352. Старостенко В.И., Манукян А.Г. Решение прямых задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразной Земле. – В кн.: Изучение литосферы геофизическими методами (физические свойства, сейсмометрия, гравиметрия, магнитометрия). – Киев: Наукова думка, 1986, с.147-176.

353. Страхов В.Н. Теория приближенного решения линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве и ее использование в разведочной геофизике. 1,П. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1969, №8, с.30-53; №9, с.64-96.

354. Страхов В.Н. Некоторые применения функционально-аналитических методов в математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. – Автореф. дис. ... докт. физ-мат наук. – М.: ИФЗ АН СССР, 1972.- 78с.

355. Страхов В.Н. О методе последовательных приближений для линейных уравнений в гильбертовом пространстве. – Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1973, в.13, №4, с.1041-1044.

356. Страхов В.Н. Метод математических моделей при решении обратных задач гравиразведки. – В спр.: Гравиразведка /под ред. Е.А. Мудрецовой. – М.: Недра, 1981, с.270-272.

357. Страхов В.Н. К теории обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1974, №6, с.39-60.

358. Страхов В.Н. Об условиях однозначного определения границы раздела двухмерных слоистых сред по данным гравитационных наблюдений. – ДАН УССР, Сер.Б, 1975, №12, с.1086-1091.

359. Страхов В.Н. О единственности решения плоской обратной задачи потенциала для распределения масс с кусочно-постоянной или кусочно-переменной плотностью. – ДАН УССР, Сер.Б, 1976, №3, с.234-238.

360. Страхов В.Н. Эквивалентность в плоской задаче гравиметрии при переменной плотности масс. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1977, №5, с.48-60.

361. Страхов В.Н. Об одном конструктивном способе построения эквивалентных решений в обратной задаче потенциала. – ДАН УССР, Сер.Б, 1978, №3, с.223-227.

362. Страхов В.Н. Об общих решениях обратных задач гравиметрии и магнитометрии. – Изв. ВУЗ, Геология и разведка, 1978, №4, с.25-32.

363. Страхов В.Н. Эквивалентные по внешнему полю перераспределения масс и их использование при интерпретации гравитационных аномалий. – ДАН УССР, Сер.Б, 1979, №8, с.627-630.

364. Страхов В.Н. К теории плоской задачи гравиметрии и магнитометрии. "Аналитический мир", порожденный выметанием Пуанкаре. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1978, №2, с.47-73.

365. Страхов В.Н. Эквивалентность в обратных задачах гравиметрии и возможности ее практического использования при интерпретации гравитационных аномалий. – 1, П. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1980, №2, с.44-64; 1980, №9, с.38-69.

366. Страхов В.Н. Аналитическое продолжение потенциальных полей. Связь особых точек с геометрией возмущающих масс. – В спр.: Гравиразведка. – М.: Недра, 1981, с.225-233.

367. Страхов В.Н. Основные идеи и методы извлечения информации из данных гравитационных и магнитных наблюдений. – В кн.: Теория и методика интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. – М.: ИФЗ АН СССР, 1979, с.146-269.

368. Страхов В.Н. Методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. –Пермь: МВССО РСФСР 1984.-2с.

369. Страхов В.Н. Метод локализации источников гравитационных аномалий. – Препринт №22, ИФЗ АН СССР. – М.: 1983.-5с.

370. Страхов В.Н., Иванов С.Н. Регуляризованные конечноразностные алгоритмы восстановления функций и их использование в геофизике. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1984, №2, с.63-83.

371. Страхов В.Н., Лапина М.И. Прямая и обратная задача гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников. – В кн.: Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. – К.: Наукова думка, 1983, с.3-87.

372. Страхов В.Н., Токарь Л.М. О вычислении высших производных и аналитическом продолжении двухмерных потенциальных полей на основе аппроксимации алгебраическими полиномами. – В кн.: Решение *прямой и обратной задачи гравиметрии и магнитометрии (вопросы* теории и методики). – М.: ИФЗ АН СССР, 1985, с.4-76.

373. Страхов В.Н., Филатов В.Г. Эквивалентность и единственность в обратной задаче гравиметрии. – В спр. Гравиразведка. – М.: Недра, 1981, с.151-159.

374. Страхов В.Н., Филатов В.Г. Неустойчивость решения обратных задач гравиразведки. Методы решения некорректно поставленных задач. – В спр. Гравиразведка /под ред. Е.А. Мудрецовой. – М.: Недра, 1981, с.159-162.

375. Страхов В.Н., Лучицкий А.И., Лапина М.И. Решение прямой задачи гравиметрии для неограниченных областей методом параметрического представления границы. – М.: ИФЗ АН СССР, препринт №5, 1980.-6с.

376. Страхов В.Н., Шуланя Т.В. Решение прямых трехмерных задач гравиметрии и магнитометрии при произвольных непрерывных законах распределения плотности и намагниченности. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1983, №9, с.57-74.

377. Страхов В.Н., Гольдшидт В.И., Калинина Т.Б., Старостенко В.И. Состояние и перспективы развития в СССР теории интерпретации гравитационных и магнитных полей. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1982, №5, с.11-30.

378. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977.-44с.

379. Строение, напряженно-деформированное состояние и условия сейсмичности литосферы Малого Кавказа /авторы: Д.И. Сихарулидзе, Н.П. Тутберидзе, А.Х. Баграмян и др. – Тбилиси: "Мецниереба", 1983.-25с.
380. Субботин С.И. Вопросы гравиметрии исследований земной коры и мантии, теории тектогенеза. – К.: Наукова думка, 1979.-74с.
381. Сурков В.С., Рампель Г.Г., Константинов Г.Н., Исаев Г.А. Глубокозалегающие рудные месторождения и проблема их поиска геофизическими методами. – Геология и геофизика, 1986, №2, с.91-99.
382. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980.-12с.
383. Сьярле Ф., Рабье П. Уравнение Кармана. – М.: Мир, 1983.-72с.
384. Тараканов Ю.А., Черевко Т.Н. Интерпретация крупных гравитационных аномалий Земли. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1979, №4, с.25-42.
385. Татевосян Л.К. Некоторые черты глубинного строения земной коры в области Кавказа по гравиметрическим данным. – Изв. АН Арм.ССР, Сер. геол. и геогр. Наук, 1961, т.14, №5, с.31-42.
386. Тектоносфера Земли. – М.: Наук, 1978.-32с.
387. Тектоносфера Украины и других регионов СССР. Сб. науч. трудов. – К.: Наукова думка, 1980.-04с.
388. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики /под ред. К.И. Бабенко. – М.: Наука, 1979.-96с.
389. Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей. – К.: Наукова думка, 1981.-12с.
390. Теория и практика интерпретации гравитационных аномалий. – М.: ИФЗ АН СССР, 1982.-52с.
391. Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. – М.: ИФЗ АН СССР, 1979.-72с.

392. Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. – К.: Наукова думка, 1983.-96с.

393. Тербер К.Дж. Архитектура высокопроизводительных вычислительных систем. – М.: Наука, 1985.-72с.

394. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. – М.: Наука, 1966.-208.

395. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: ГИФМЛ, 1963.-636с.

396. Тихомиров В.И. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1976.- 304с.

397. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач. – ДАН СССР, 1943, №5, т.39, с.196-198.

398. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1979 .-288с.

399. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. – М.: Наука, 1972.-736с.

400. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. . – М.: Наука, 1983.-200с.

401. Тихонов А.Н., Гласко В.Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах. – Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1964, т.4, №3, с.564-571

402. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.-496с.

403. Трибель Х. Теория интерпретации. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980.-664с.

404. Трибель Х. Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986.-448с.

405. Трошков Г.А., Грознова А.А. Математические методы интерпретации магнитных аномалий. – М.: Недра, 1985.-152с.

406. Трушников В.Н. Один нелинейный регуляризуюший алгоритм и некоторые его применения. – Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1979, т.19, №4, с.822-829.

407. Турчин В.Ф., Козлов В.П., Малкевич М.С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач.-Успехи физ. наук, 1970, т.202, №3.

408. Тяпкин К.Ф. Интерпретация гравитационных аномалий, обусловленных конечными по простиранию геологическими объектами. – М.: Госгеолтехиздат, 1961.-114с.

409. Тяпкин К.Ф. Тектоническое районирование. – В спр.: Гравиразведка /под ред. Е.А. Мудрецовой. – М.: Недра, 1981, с.324-328.

410. Тяпкин К.Ф., Голиздра Г.Я. Краткий обзор современных методов ослабления регионального фона гравитационных и магнитных полей. – М.: ВИЭМС, 1963.- 52с.

411. Уэрмер Дж. Теория потенциала. – М.: Мир, 1980.- 134с.

412. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.; Л.: Физматгиз, 1963.- 734с.

413. Фаддеев Д.К., Фадеева В.Н. К вопросу о решении линейных алгебраических систем. – Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1974, т.14, №3, с.539-559.

414. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985.- 384с.

415. Федоров В.В. Численные методы максимина. – М.: Наука, 1979, 280с.

416. Федорова Н.В. Прямые и обратные задачи логарифмического потенциала. Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – Свердловск: 1980.- 25с.

417. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых (петрофизика). Справочник геофизики /под ред. Н.Д. Дортмана. – М.: Недра, 1984.- 456с.

418. Филатов В.Г. Решение обратных задач гравиметрической разведки с применением метода регуляризации. Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – М.: ИФЗ АН СССР, 1974.- 22с.

419. Филатов В.Г. Решение прямой и обратной задач гравиметрии для двух контактных границ на основе выметания, концентрации и нелинейного программирования. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1980, №5, с.93-98.

420. Филатов В.Г., Антонов Ю.В. Решение обратной задачи гравиметрии для двух контактных поверхностей. – Прикладная геофизика, 1981, вып.99, с.90-98.

421. Фридман В.М. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1 рода. – Успехи матем. науки, 1956, т. II, вып.1, с.233-234.

422. Функциональный анализ /под ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972.- 544с.

423. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983.- 423с.

424. Хусебай Е.С., Инглед П.Ж., Рамбер И.Б. Интерпретации гравиметрических данных в районе рифта Осло с применением метода идеального тела и их корреляции с сейсмическими наблюдениями. – В кн.: Континентальные рифты. – М.: Мир, 1981, с.403-414с.

425. Хямарик У.А. Регуляризованные проекционные методы для некорректных задач. – Изв. АН ЭССР, физ-мат, 1984, т.33, №3, с.266-276.

426. Хямарик У.А. Регуляризация некорректных задач проекционными методами. –Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – Свердловск: УНЦ ИМиМ, 1986.- 12с.

427. Цирульский А.В. О единственности решения обратной задачи теории потенциала. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1969, №6, с.60-65с.

428. Цирульский А.В. О приведении наблюденных значений потенциальных полей с одному уровню. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1968, №3, с.85-89.

429. Цирульский А.В. Обратные задачи логарифмического потенциала. Автореф. дис. ... докт. физ-мат наук. – М.: ИФЗ АН СССР, 1976.- 39с.

430. Цирульский А.В., Аронов В.И. О редукции потенциальных геофизических полей на внешнюю полость. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1971, №7, с.94-101.

431. Цирульский А.В., Никонова Ф.И. О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1975, №5, с.37-46.

432. Цирульский А.В., Пруткин Я.Л. О решении обратной задачи гравиметрии для произвольных классов двухмерных и трехмерных потенциалов.: 1,П.: – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1981, №11, с.45-53; с.54-61.

433. Цирульский А.В., Никонова Ф.И., Пруткин И.Л. К вопросу о решении двухмерных и трехмерных обратных задач гравиразведки. В кн.: Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. – К.: Наукова думка, 1983, с.251-260.

434. Цирульский А.В., Никонова Ф.И., Федорова Н.В. Метод интерпретации гравитационных и магнитных аномалий с построением эквивалентных семейств решений. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980.- 136с.

435. Цирульский А.В., Майер В.И., Никонова Ф.И., Пруткин И.Л., Федорова Н.В. Об интерпретации трехмерных гравитационных и магнитных аномалий. – Тихоокеанская геология, 1984, №1, с.94-98.

436. Цубои Т. Гравитационное поле Земли. – М.: Мир, 1982.- 286с.

437. Цулейскири Л.Г. Об устойчивости обратных двухмерных и нелинейных трехмерных задач гравиметрии. – Автореф. дис. ... канд. физ-мат наук. – Тбилиси: ИГ АН ГССР, 1985.- 17с.

438. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности. – М.: Наука, 1981.- 352с.

439. Чекунов А.В. Строение земной коры и некоторые вопросы тектоники юга Европейской части СССР. – К.: Наукова думка, 1972.- 174с.

440. Чекунов А.В., Кучма В.Г. Глубинная структура разломов. – Геотектоника, 1979, №5, с.

441. Чередниченко В.Г. Обратная задача логарифмического потенциала. – Дифференциальные уравнения, 1973, т.9, №2, с.333-342с.

442. Чередниченко В.Г. Определение плотности тела по заданному потенциалу. – Дифференциальные уравнения, 1976, т.12, №1, с.144-147.

443. Чередниченко В.Г. К вопросу об определении плотности тела по заданному потенциалу. – ДАН СССР, 1978, т.240, №5, с.1032-1034.

444. Чередниченко В.Г. Плоские обратные задачи теории потенциала. Автореф. дис. ... докт. физ-мат наук. – М.: МГУ, 1983.- 18с.

445. Черный А.В. О точности численных решений некоторых задач геофизики. – В кн.: Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. – К.: Наукова думка, 1983, с.263-290.

446. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. – М.: Статистика, 1977.- 200с.

447. Шалаев С.В. Геологическое истолкование геофизических аномалий с помощью линейного программирования. – Л.: Недра, 1972.- 142с.

448. Шванк О.А., Люстих Е.И. Интерпретация гравитационных наблюдений. – М.; Л.: Гостоптехиздат, 1947.- 400с.

449. Шварц Л. Анализ. Т.1, т.П. – М.: Мир, 1972, 824с.; 1972, 528с.

450. Шен Э.Л. Гравитационная энергия и внутренняя структура планет. Автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук. – К.: ИГ АН УССР, 1980.- 14с.

451. Шен Э.Л., Старостенко В.И., Козленко В.Г. Система геофизических моделей. – ДАН УССР, Сер.Б, 1983, №3, с.18-21.

452. Шенгелая Г.Ш. Гравитационная модель земной коры Кавказа. – М.: Наука, 1984.- 128с.

453. Шуланя Т.В. Новые численные методы решения прямых трехмерных задач гравиметрии и магнитометрии. Автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук. – Тбилиси: ИГ АН ГССР, 1984.- 20с.

454. Юсупходжаев Х.И. Гравитационная модель литосферы Памиро-Тянь-Шанского региона. Автореф. дис. ... канд.геол. мин. Наук. – Баку: ИГ АН Азер.ССР, 1985.- 28с.

455. Bacrus G., Gilbert F. Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems. – Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1967, v.13, p.247-276.

456. Bacrus G., Gilbert F. The resolving porver of gross Earth data. – Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1968, v.16, p.169-205.

457. Bacrus G., Gilbert F. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data. – Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 6470, A266, p.123-142.

458. Booner J.R., Kovach R.L. Mascons and Lunar Gravity. – J. Geop. Res., 1970, v.75, №32, p.6558-6564.

459. Bowin C., Simon B., Wollnhaupt W.R. Mascons: A two-body solution. – J. Geop. Res., v.80, №35, 1975, p.4974-4955.

460. Gilbert F. The diagonal sum rule and averaged eigenfrequencies. . – Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1971, v.23, p.119-125.

461. Gilbert F. Ranking and winnorving gross Earth data for inversion and resolution. . – Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1971, v.23, 125-128.

462. Lauricella G. Sulla funzione potentiale di spazio corrispondente ad una assegnata arione esterna. – Rendiconti Atti del, R. Accademia dei Lincei, 1911, ser.quinta, v.XX, 1^0sem., p.99-107.

463. Lebenberg K. A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares. – Quarterly of Applied Mathematics, 1944, v.2, p.164-168.

464. Marquart D.W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. – Soc. Jndust. Appl. Math., 1963, v.4, №2, p.431-441.

465. Marussi A. On the density distribution in bodies of assigned outer New tonian attraction. – Bollettino di geofisica teorica ed applicata, 1980, v.XXII, №86, p.83-94.

466. Mineo C. *Sulla distribuzione della massa nell'in terno dan corpo in corrispondenta a un' assegnata arione esterna.* – *Rendiconti Atti del.R.* Accademia dei Lincei, 1915, ser.quinta, v.XXIV, 1^0sem., p.1047-1052.

467. Natterer F. Requlanisierung schluht gestellter Probleme durch Projection-swerfahiren. – Numer. Math., 1977, v.28, №3, p.329-341.

468. Pizzetti P. Corpi equivalento rispetto alla attrazione newtoniana esterna. – Rendiconti Atti del.R. Accademia dei Lincei, 1909, ser. quinta, v.XVIII, 1^0sem., p.211-215.

469. Pizzetti P. Intorno alle passiboli distribuzioni della massa nell' interno della Terra. – Annali di matematica pura ed applicata, 1910, ser.III, tomo XVII, p.225-258.

470. Phillips R.J., O.Conel J.E., Abbot A.A., Sjogren W.L., Morton J.B. Mascons: Progress towards unique solution for mass distribution. – J. Geophys. Res., 1972, v.77, №10, p.7106-7114.

471. Richter G.R. Numerical solution of integral equations of the first rind with nonsmoo the kernels. – SIAM J. Numer. Anal., v.15, №3, p.511-522.

472. Sanso F. Internal collocation. – Accad. Narion. Diei Lincei, Memorie, ser.VIII, v.XVI; ser.1a, Farc.I, 1980, 52p.

473. Seidman I.I. Convergent approximation methods for ill-posed problems. Part I-General theory. – Control and Cybernetics, 1981, v.10, №1-2, p.31-49.

474. Sjorgen W.L., Gottlob P., Muller P.M. and Wollenhaupt W. Lunar gravity via Appollo 14 Doppler radio tracking. – Science 175, 1972, p.165-168.

475. Week N. Inverse probleme der Potential theorie. – Appl. analys, 1972, v.2, №2, p.105-204.

476. Whitford-Strak J.H. The evolution of the Lunac Nectaris multiring basin. I carus. 1981, v.48, №3, December, p.393-427.

477. Vigneresse J.L. Linear inverse problem in gravity profile interpretation. – J. of Geophysics, 1977, v.43, №1-2, p/193-213.

Ս.Մ.ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

ԵՌԱՉԱՓ ԳՐԱՎԻՄԵՏՐԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐՎԱԾ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Տեխնիկական խմբագիր՝ Մ.Բ.Մկրտչյան
Կազմարար՝ Ա.Առաքելյան

Ստորագրված է տպագրության 05.11.2004: Ֆորմատ (18x25)
ԵՒՍԻ տպագրական կենտրոն:
Ծավալը 25 տպ. մամուլ: Տպաքանակ՝ 200

ԵՒՍԻ պատճենահանման-բազմացման բաժին:
ք.Գյումրի, Վ.Սարգսյան 5. E-mail iges@shirak.am

5637