Проф. В. В. ДОЛИВО-ДОБРОВОЛЬСКИЙ

КУРС КРИСТАЛЛОГРАФИИ

ОНТИ • 1937

Проф. В. В. ДОЛИВО-ДОБРОВОЛЬСКИЙ

548(071)
Д 64

548.
Д 64

КУРС КРИСТАЛЛОГРАФИИ

Посмертное издание, подготовленное к печати доцентом Лен. Горного ин-та и Ленинградского Гос. университета И. И. ШАФРАНОВСКИМ

111
669

Утверждено ГУУЗом НКТП СССР в качестве учебного пособия для втузов

7 р. 50 коп., переплет 1 р. 50 коп.

Библиотека
Геол[illegible]
Арм[illegible] СССР

ОНТИ • НКТП • СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ГОРНО-ТОПЛИВНОЙ И ГЕОЛОГО-РАЗВЕДОЧНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Ленинград 1937 Москва

Академия Наук АН Арм.ССР
Библиотека

ГР-65-5-2

Рецензенты: *А. К. Болдырев* и *Е. Е. Флинт*

Книга покойного профессора Ленинградского Горного института В. В. Доливо-Добровольского является подробным оригинально разработанным курсом кристаллографии.

В основу курса положена современная теория строения кристаллического вещества. Исходя из решетчатого строения кристаллов, автор дает логически-стройное изложение всего курса.

Особенно подробно разработаны геометрические отделы кристаллографии, знатоком и оригинальным работником в области которых был автор.

Книга является руководством для студентов вузов и втузов геологической, горной, химической и физической специальностей, проходящих курс кристаллографии, а также для аспирантов и научных работников.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Автор этой книги, профессор Ленинградского Горного института Вадим Владимирович Доливо-Добровольский скончался 1 сентября 1936 г., по возвращении с Алтая, в Москве. Несмотря на свою молодость (32 года), покойный успел зарекомендовать себя как талантливейший педагог и как автор ряда крупных кристаллографических работ. Уже 18-летним юношей В. В. публикует вывод простых форм додекаэдро-икосаэдрической системы. Впоследствии им разрабатывается вопрос о связи полярных координат с элементами кристалла. Посвященные этому вопросу статьи с приложенными к ним таблицами и диаграммами являются чрезвычайно полезным пособием для каждого, занимающегося измерением и вычислением кристаллов. К этому же периоду относится крупная работа о гексагидрите сернокислого магния, экспериментальные выводы которой приводятся в качестве примеров в курсах элементарной кристаллографии.

Вопросам, касающимся взаимоотношений между внешней формой кристаллов и условиями их образования, посвящены также монографии о кианите и берилле. В последние годы своей жизни покойный посвятил огромное количество труда и времени составлению монументального коллективного труда „Определителя кристаллов", редактором которого, наряду с проф. А. К. Болдыревым, он состоял. Параллельно с этим им разрабатывалась обширная докторская диссертация по классификации 230 групп симметрии и методам их простейшего определения на структурных моделях. Эти важные работы в настоящее время печатаются в „Записках Лен. Горного института".

В течение всей своей педагогической деятельности В. В. пользовался репутацией блестящего, исключительно талантливого преподавателя.

Студенчество и общественность Ленинградского Горного института неоднократно отмечали его достижения на педагогическом поприще и премировали его, как одного из лучших молодых профессоров. Слушатели В. В. не раз выражали желание видеть его лекции, оформленными в виде книги.

Приступая к ее созданию, В. В. задался целью в корне изменить общепринятый план изложения курса, всецело согласовав его с тем новым содержанием кристаллографии, которое она получила в результате применения рентгеновых лучей к исследованию кристаллов.

В основу всего изложения автор кладет современную теорию структуры кристаллов. Строго логически, шаг за шагом стремится он в виде одного стройного целого изложить все содержание кристаллографии, исходя из решетчатого строения кристаллического вещества. Этим путем книга непосредственно вводит читателя в круг всех наиболее существенных вопросов современной кристаллографии. Новизна и свежесть замысла и мастерское его выполнение в большинстве отделов книги вполне искупают некоторые шероховатости и трудности, связанные с необычным порядком изложения материала. К сожалению, окончательно обработать своей книги В. В. не удалось. После его смерти осталась законченная начерно обширная рукопись.

Ученики и друзья покойного приложили по возможности все усилия, чтобы издаваемая книга была достойна имени своего автора. Наибольшую часть этой работы выполнил редактор книги И. И. Шафрановский.

Ряд существенных замечаний был сделан при подготовке рукописи к печати проф. О. М. Аншелесом и мною; отдельные главы были особо просмотрены и отредактированы: П. В. Грушвицким (написавшим первую половину главы „Законы кристаллизации“ и просмотревшим остальную ее часть), Г. М. Поповым („Рентгенометрия“), В. Б. Татарским и Михайловым („Кристаллооптика“). Большую помощь редактору оказали также В. П. Будаев (графика), В. И. Михеев, В. Ф. Алявдин и М. Н. Балашева.

Несмотря на это, внимательный читатель без сомнения обнаружит в книге ряд промахов и упущений, неизбежных при оформлении книги без ее составителя. За указание таких недостатков редакция будет весьма признательна читателям.

Проф. *А. Болдырев*

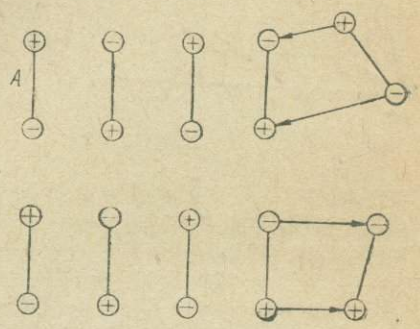
28/VI 1937 г.

ВВЕДЕНИЕ

1. Кристаллическое вещество и кристаллы

Естествознание изучает материю (вещество) во всех ее разнообразных формах движения.

По современным научным данным молекулы (или атомы) газов находятся в быстром движении, не позволяющем им соединяться друг с другом. В жидкостях движение уже не столь велико, — молекулы (или атомы) все время находятся в несколько упорядоченном расположении в соприкосновении друг с другом. Однако никаких прочных комбинаций их еще не успевает возникать. В случае еще большего замедления движения (например, при понижении температуры), междумолекулярные связи становятся значительно сильнее; молекулы оказываются определенно ориентированными друг относительно друга: возникает твердое вещество.



Фиг. 1. Ориентировка молекул при кристаллизации.

При этом наблюдается два случая. Молекулы могут остановиться в той беспорядочной ориентировке, в какой они находились в жидкости. Такое твердое вещество возникает обычно при быстром уменьшении движения, является „переохлажденной жидкостью“ и называется аморфным. Во втором случае, обычно при постепенном замедлении движения, каждая молекула успевает расположиться относительно своих соседей не как угодно, но в строго определенном положении. Возникновение вполне определенной ориентировки молекул друг относительно друга обусловливается тем, что между молекулами действует не одно только притяжение, но также имеет место и отталкивание.

Поясним это грубым примером. Пусть тело *A* (фиг. 1) является молекулой, обладающей двумя центрами притяжения: положительным (+) и отрицательным (—). Несколько таких молекул не будут отталкиваться друг от друга не при любом, а только при определенном „прилипании“ их друг к другу, при определенной относительной ориентировке. Одна из таких ориентировок и изображена на фиг. 1. Здесь положительные центры чередуются с отрицательными, молекулы оказываются притянутыми друг к другу, прочно соединенными друг с другом.

Таким образом, в расположении молекул должна наблюдаться определенная правильность, молекулы образуют правильные ряды, располагаются правильными параллельными плоскостями — „плоскими сетками“. Совокупность таких „плоских сеток“ носит название пространственной решетки* (фиг. 2).

---

* Точные определения будут даны ниже.

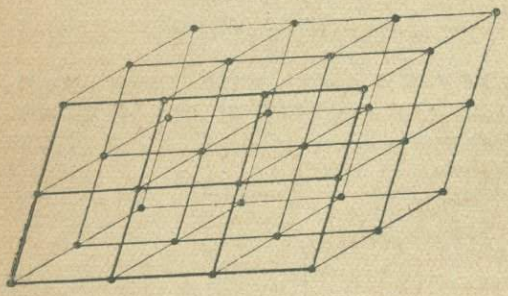
Кристаллическим веществом называется твердое вещество, в котором частицы расположены не как-либо случайно, а в определенном порядке, в виде правильных рядов, образующих пространственную решетку.

В качестве примеров кристаллических веществ можно указать на кварц, каменную соль, железо, медь, мрамор.

Аморфным веществом называется твердое вещество, частицы которого не образуют пространственной решетки. Примерами могут служить стекло, столярный клей, смола.

Правильность и порядок строения кристаллического вещества сказывается и во внешнем ограничении этого вещества: его границы часто оказываются не случайными, но представляют „плоские сетки", т. е. правильные плоскости, совокупность которых придает кускам кристаллического вещества многогранную форму.

*Кристаллом называется кусок кристаллического вещества, который, благодаря своей правильной внутренней структуре, приобрел форму многогранника.** Часто считают, что кристаллы представляют что-то редкое, особенное. Действительно, крупные, хорошо образованные экземпляры встречаются сравнительно редко и бережно коллекционируются в музеях. Однако мелкие несовершенно-образованные кристаллы и их обломки распространены повсюду. Почти вся твердая земная кора сложена кристаллическим веществом: под сравнительно тонким слоем почвы повсюду залегают горные породы, представляющие собой агрегаты (скопления) кристаллов различной крупности. В гранитах или в мраморе мы хорошо видим кусочки отдельных кристалликов; в известняке и базальте они заметны только под микроскопом. Лишь в редких случаях встречаются горные породы, сложенные аморфным веществом (например, вулканическое стекло).



чиг. 2.

То же можно сказать и о различных рудах и сопровождающих их минералах. Большинство железных, медных и других руд сложено веществом кристаллическим. Кристаллическое же вещество образует и большинство продуктов, полученных путем переработки этих руд: и железные, и медные, и другие изделия состоят из мелко-кристаллических агрегатов.

Различные продукты химической промышленности, как, например, нафталин, сахар, медный купорос, различные строительные материалы и многие другие вещества, являются кристаллическими.

Кристаллическое вещество принимает участие также в строении органического мира (например кости, зубы, роговица глаза и т. д. состоят из мельчайших кристаллических образований; отдельные кристаллы и друзы углекислого и щавелево-кислого кальция находятся в грибах и других растениях).

2. Предмет, задачи и методы кристаллографии

Характерным отличием кристаллов от жидкостей, газов и аморфных тел следует считать их внутреннюю структуру, благодаря которой частицы располагаются в строго закономерном порядке, будучи прикрепленными к определенным местам друг относительно друга. Из этого, однако, не следует, что эти частицы остаются в полном покое. Они непрерывно колеблются около некоторого своего среднего положения.

---

* Нередко в название „кристалл" (или „монокристалл") вкладывают более широкое представление и вполне резонно считают кристаллом даже и бесформенный кусок кристаллического вещества, в котором во всех его частях слагающие его ряды частицы имеют одинаковую параллельную ориентировку.

Все упомянутые выше разнообразные формы движения молекул (или атомов) в газах в жидкостях, в твердых веществах, всю эту „механику молекул" изучает та часть естествознания, которая носит название физики.

Кристаллография изучает кристаллическое вещество во всех его разнообразных изменениях.

Однако кристаллография должна считаться не просто отделом физики, но отдельной самостоятельной наукой; это право на самостоятельность создается специфичностью свойств кристаллического вещества, обусловленных правильностью его строения, его структурой. Кристаллографией изучаются все свойства вещества, все те закономерности и законы к нему относящиеся, которые стоят в связи с его правильной структурой. Если изучение того или иного свойства, той или иной закономерности проводится вне связи с геометрическими правильностями строения кристаллического вещества, то такое изучение выходит из рамок кристаллографии. Так, например, способность различных тел электризоваться изучается физикой. Но если при этом определяется, в каких именно местах данного кристалла возникают заряды, то такое изучение является уже предметом кристаллографии. Действительно, возникновение зарядов в тех или иных местах кристаллического вещества обусловлено специфичностью структуры вещества, его пространственной решеткой, а потому даже чисто эмпирическое определение распределения зарядов должно относиться не к физике, а к кристаллографии.

С другой стороны, нельзя изучать кристаллическое вещество вне связи с процессами его образования, вне его связи с той жидкостью или с тем газом, при изменении характера движения которых оно возникло. Равновесие расположения атомов, которое имеет место в кристаллическом веществе, относительно, — оно обусловлено вполне определенными физико-химическими условиями окружающей среды; при изменении этих условий (а эти условия никогда не остаются и не могут оставаться постоянными) изменяется и характер равновесия, или даже равновесие перестает существовать вовсе. Эта зависимость кристаллического вещества от физико-химических процессов окружающей его среды (жидкой, газообразной или твердой) обусловливает связь кристаллографии с наукой, изучающей эти процессы, с физической химией. Во всех вопросах возникновения и разрушения кристаллического вещества эти науки очень тесно переплетаются друг с другом.

Относительное расположение атомов в кристаллическом веществе зависит еще и от качества самих атомов, от химической природы атомов, слагающих кристаллическое вещество. Различным по химическому составу веществам отвечают различные по форме решетки. Отсюда возникает тесная связь кристаллографии с химией.

Наконец, как было выяснено выше, атомы кристаллического вещества располагаются в строго-определенном порядке, образуя геометрически-правильные ряды. Совокупность таких рядов — кристалл — оказывается вследствие этого имеющим форму многогранника. Изучением же различных многогранников и пространственных решеток, из которых построены кристаллы, занимаются геометрия и некоторые другие отделы математики.

Поэтому кристаллография в своих выводах постоянно опирается на математику, ставя в свою очередь перед ней целый ряд проблем, разрешение которых необходимо для практического изучения кристаллов.

Математика, физика, физическая химия и химия являются теми главнейшими науками, на которые опирается кристаллография и с которыми она тесно связана.

При этом, как уже упоминалось, геометрическая правильность в строении вещества обусловливает право кристаллографии считаться самостоятельной наукой, а потому геометрия кристаллического вещества неминуемо должна проникать и в физику, и в физико-химию, и в химию кристаллов. Установление взаимной связи между геометрией кристаллического вещества, его структурой и различными физическими, физико-химическими и химическими свойствами кристаллов является основной задачей кристаллографии.

Так, в области изучения физических свойств кристаллического вещества можно указать на важную проблему кристаллооптики. Не только эмпирическое констатирование оптических свойств того или иного вещества, но нахождение связи оптических явлений со строением вещества, выяснение влияния строения на изменчивость этих свойств, а отсюда возможность предвычислять их — вот круг вопросов, выдвигаемых кристаллографией в этой области.

При изучении электрических свойств встают аналогичные задачи. Механизм максвелловского „электрического смещения", явления электролиза, способность кристаллов электризоваться (пиро- и пьезоэлектричество) — все это необходимо изучать в связи с геометрией вещества, с его строением.

Механические свойства вещества также требуют к себе внимания. Твердость, спайность, сцепление, упругость, изгиб и другие деформации — все это должно изучаться не только эмпирически, но в тесной связи со строением вещества, которое и обусловливает механические свойства.

Аналогичное можно было бы сказать и в отношении тепловых и магнитных и других физических явлений. Это одна группа проблем — группа физических проблем, связывающих физику явлений с их геометрией.

Другой группой является группа химических проблем. Атомы, правильными рядами, которых построено кристаллическое вещество, имеют определенное качество, являются

реальными атомами и ионами определенных химических элементов. В связи с этим атомы выстраиваются в кристаллическом веществе геометрически различными рядами и образуют различные пространственные решетки.

Качество атомов, слагающих пространственную решетку, подчиняет себе форму этой решетки, а последнее обстоятельство сказывается даже на внешнем огранении кристаллов.

Определение связи между формой и химическим составом, изучение ее, как для целей диагностики (кристаллохимический диагноз), так и для определения законов, которыми обусловлена именно та, а не другая форма решетки того или иного элемента или химического соединения, практическое и теоретическое исследование и объяснение этих законов — вот широчайший круг проблем, выдвигаемых современной кристаллохимией. И эти проблемы тесно соприкасаются и отчасти сливаются с самыми глубокими общими проблемами познания строения материи, с проблемами строения природы атома, его ядра, распределения его электронов.

Наконец, не менее обширную группу проблем составляют вопросы, связанные с физико-химическими явлениями. Возникновение кристаллического вещества и все его существование вплоть до разрушения обусловлено физико-химическими факторами. Условия кристаллизации и возникновения кристаллов, механизм возникновения и разрушения пространственной решетки, вопросы перекристаллизации, совместной кристаллизации и совместного существования различных веществ и влияние окружающей среды на пространственную решетку в настоящее время изучены очень мало. А это влияние, как известно, огромно. Скорость и качество образования тех или иных частей пространственной решетки обусловливается в очень большой степени окружающей физико-химической обстановкой. Следствием различий в скоростях образования тех или иных частей пространственной решетки является внешняя форма, огранка кристалла („габитус"). Таким образом, проблемы внешней формы являются центральными в этой области. Здесь, как получение фактического материала и его систематизация, так и нахождение закономерностей и их объяснение требуют самого серьезного внимания.

Вот вкратце задачи третьей группы физико-химических проблем.

Конечно, не следует думать, что эти три группы не связаны друг с другом. Нельзя изучать, например, оптические свойства кристаллического вещества, не соприкасаясь при этом с вопросами о качестве атомов, слагающих это вещество, и с вопросами о физико-химических условиях его существования. Все три группы проблем очень тесно переплетаются друг с другом.

Следует еще указать, что успешное разрешение поставленных проблем в очень большой степени зависит и от дальнейшего теоретического углубления математического базиса геометрии решеток; необходимо также дальнейшее накопление и чисто эмпирического материала; необходима большая работа по дальнейшей систематизации и классификации существующих фактических данных. Отсюда понятна и важность дальнейшей разработки, развитие и усовершенствование существующих, а может быть и новых методик исследований. Среди различных методик, применяемых в кристаллографии, методика исследования кристаллов с помощью рентгеновых лучей имеет совершенно исключительное значение. Действительно, из предыдущего видно, что все задачи, стоящие перед современной кристаллографией, очень тесно связаны с изучением пространственной решетки, с определением внутренней структуры кристаллов.

В настоящее время только с помощью рентгеновых лучей сделалось возможным практическое определение этой внутренней структуры кристаллического вещества. Отсюда понятно, что рентгенометрия кристаллов занимает сейчас центральное место среди остальных методик, служащих для исследования различных свойств кристаллического вещества.

Выше мы рассмотрели задачи, стоящие перед кристаллографией, как задачи, обусловленные характером самого предмета и современной ступенью развития этой науки. Но нельзя думать, что эти задачи являются чем-то оторванным от задач и проблем не кристаллографических, от задач и проблем, выдвигаемых современной жизнью.

Весь исторический процесс развития кристаллографии совершался не оторванно от жизни, экономика непрерывно или непосредственно или через посредство других наук обусловливала развитие кристаллографии. Поэтому и проблемы, стоящие сейчас перед наукой, не могут не совпадать с проблемами, выдвигаемыми экономикой сегодняшнего дня, с проблемами, выдвигаемыми нашей хозяйственной жизнью.

Действительно, индустриализация страны в целом создает условия бурного развития целого ряда отраслей народного хозяйства. Проблема минерального сырья ставит ответственные задачи перед горным и геолого-разведочным делом. При исследовании земной коры, при исследовании как осадочных, так и изверженных горных пород, как месторождений полезных ископаемых, так и общей картины строения и жизни земной коры, геолого-разведочное дело практически наталкивается на объекты, построенные исключительно кристаллическим веществом, а отсюда на целый ряд вопросов, поставленных кристаллографией.

Вопросы связи внешней формы кристаллов с условиями образования того или иного месторождения, вопросы кристаллизации магмы и перекристаллизации являются чрезвычайно важными для этой отрасли народного хозяйства. Углубление задач геолого-

разведочного и горного дела требует решения целого ряда минералогических, петрографических и геохимических вопросов. Эти же науки для своих выводов требуют совершенно четких ответов по целому ряду вопросов кристаллографии. Кроме вопросов физико-химического порядка, проблемы кристаллохимии также являются исключительно существенными для этих наук. Так, исследование полезных ископаемых опирается на представления, связанные с изучением истории возникновения, законов распределения и миграции химических элементов земного шара. Эти вопросы, а также целый ряд других, с ними тесно связанных, изучаются современной геохимией на основе кристаллохимических представлений о природе вещества. Геохимия настоятельно требует дальнейшей разработки этих представлений. Вопросы конституции минералов также принадлежат к важнейшим проблемам кристаллохимии.

Работы кристаллографов, посвященные этому вопросу, являются ценнейшими для минералогии и разрешают фундаментальные вопросы, до настоящего времени бывшие спорными и неясными.

Развитие металлургии также требует от кристаллографии разрешения ряда практически-важных задач. И здесь четкое знание свойств и конституции минералов и руд совершенно необходимо для правильного подхода к вопросам обогащения и плавки. Но, кроме того, здесь требуют своего разрешения еще проблемы, связанные с получаемым металлом, так как последний представляет собою также вещество кристаллическое. Практика использования металла предъявляет к его качеству определенные требования. Для того, чтобы мы могли подчинить себе процессы получения металла и управлять его качеством, необходимо самое глубокое исследование всех фактов, их определяющих. И мы снова возвращаемся к вопросам кристаллизации, к физико-химической группе проблем, выдвигаемых кристаллографией. Строение сплавов, твердых растворов и целый ряд других вопросов являются общими как для металлографии, так и для кристаллографии и вместе с тем являются насущными и нужными в промышленности.

Кроме того, здесь особенно выпукло обрисовывается другая сторона — физические свойства являются функцией строения вещества, а потому группа проблем о связи физических (особенно механических) свойств со структурой выявляется здесь во всей своей практической значимости. Для правильного понимания процессов прокатки, ковки, литья, сварки и пр. изучение структуры металлов совершенно необходимо.

Химизация страны ставит ряд практических задач перед различными отраслями химической промышленности. И здесь опять-таки мы сталкиваемся с кристаллическим веществом; опять-таки приходится прибегать за помощью к кристаллографии. Проблемы химической кристаллографии частью совпадают, частью являются углублением и развитием проблем, выдвигаемых практикой химической промышленности. Сахарной, керамической, бумажной, военной, оптической промышленности и радиотехнике постоянно приходится иметь дело с кристаллическим веществом, а потому и решать задачи, имеющие непосредственное отношение к кристаллографии, решать задачи, являющиеся одинаково важными как для перечисленных отраслей, так и для самой кристаллографии, как науки.

Таким образом, проблемы кристаллографии являются насущными жизненными проблемами, их разрешение необходимо не для одной кристаллографии, их разрешения требуют самые различные отрасли народного хозяйства, их разрешения требует вся экономика нашей страны.

ОТДЕЛ I

ОСНОВЫ УЧЕНИЯ О СТРОЕНИИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА

Глава I

РЕНТГЕНОМЕТРИЯ КРИСТАЛЛОВ

1. Получение и главнейшие свойства рентгеновых лучей

Из введения следует, что самым характерным признаком кристаллического вещества является его структура, отвечающая пространственной решетке. Существование пространственной решетки предполагалось уже очень давно. Разработанная Франкенгеймом (1835 г.) и Браве (1850 г.) теория пространственной решетки объясняла собою почти все законы, связанные с кристаллическим веществом. Однако, несмотря на блестящую разработку этой теории целым рядом математиков и кристаллографов, несмотря на целый ряд косвенных доказательств правильности теоретических воззрений на решетчатое строение кристаллического вещества, долгое время непосредственному практическому изучению решетка не поддавалась. Главное затруднение заключалось в том, что расстояния между соседними плоскими сетками решетки, вследствие их ничтожно малых размеров, не поддавались измерению.

В 1895 г. знаменитый немецкий физик В. К. Рентген открыл лучи, названные им Х-лучами и носящие теперь его имя. Эти лучи, как известно, представляют собою электромагнитную энергию, аналогичную энергии видимого света. От лучей последнего они отличаются значительно меньшими длинами волн (в 10000 раз). В 1912 г. мюнхенский физик М. Лауэ, на основании ряда предшествующих работ, предположил, что длина волн рентгеновых лучей приблизительно одинакова с расстояниями между плоскими сетками пространственных решеток кристаллических веществ. Исходя из этого предположения, у Лауэ возникла мысль применить рентгеновы лучи к исследованию кристаллов. Предположения Лауэ блестяще оправдались. В результате был найден, наконец, тот масштаб, тот „аршин", которым возможно измерять межплоскостные расстояния кристаллических решеток. Открытие Лауэ позволило, с одной стороны, пользуясь кристаллической решеткой, глубоко познакомиться с природой рентгеновых лучей, с другой стороны, пользуясь рентгеновыми лучами, практически изучать пространственные решетки кристаллического вещества. Вполне понятно, что открытие Лауэ сыграло в кристаллографии совершенно исключительную роль. Исследование кристаллов при помощи рентгеновых лучей является фундаментом при практическом ознакомлении с кристаллическим веществом. Поэтому, прежде всего, и остановимся на основах рентгенометрии кристаллов.

Для получения рентгеновых лучей служат так называемые рентгеновские трубки, представляющие собою стеклянные или металлические сосуды с разреженным воздухом. В трубку введены два электрода, соединенные с полюсами источника тока высокого напряжения (от 20000 до 200000 V и более). Ток высокого напряжения получается обычно при помощи трансформаторов. Однако рентгеновские трубки обычно не работают на переменном трансформаторном токе. Для преобразования получаемого переменного тока в ток одного направления поль-

зуются особыми выпрямляющими ток приспособлениями — кенотронами или механическими выпрямителями, включенными по той или другой схеме (работа с так называемыми трубками Кулиджа производится иногда и непосредственно на переменном токе).

Если воздух из трубки удален лишь частично, например до давления, равного 0,001 *мм* ртутного столба, то воздух в трубке является проводником электричества. Под влиянием электрического поля молекулы воздуха расщепляются на ионы. При этом положительно заряженные ионы, двигаясь к отрицательно-заряженному электроду (катоду) трубки и ударяясь о его поверхность, вырывают из вещества катода электроны. Поток таких электронов носит название *катодного пучка*. Электроны катодного пучка, под влиянием электрического поля, несутся с колоссальными скоростями от катода к положительно заряженному полюсу (антикатоду) и, резко тормозясь, вызывают возникновение рентгеновых лучей.

Рентгеновские трубки, в которых остается разреженный газ, называются ионными или газовыми трубками. Примером таких ионных трубок служит трубка Хаддинга.

Если же воздух в трубке выкачан практически нацело (до давления, равного примерно 0,0000001 *мм* ртутного столба), то в таком случае для получения необходимого потока электронов катод следует накалить. С этой целью катоду придается форма спирали. Через эту спираль (обычно изготовленную из тонкой вольфрамовой проволоки) пропускают электрический ток низкого напряжения, но сравнительно большой силы, нагревающий спираль до 2000—2500°С. При такой температуре происходит обильное выделение электронов из вещества спирали. Полученные электроны образуют электронный пучок.

Рентгеновские трубки с предельно разреженным воздухом и накаляемым катодом носят название электронных трубок или трубок Кулиджа.

Полученные тем или иным способом электроны, энергично бомбардируя атомы вещества антикатода, возбуждают лучистую энергию в виде рентгеновых лучей. При сравнительно малых напряжениях на полюсах трубки с поверхности антикатода выделяются „белые“ рентгеновы лучи, т. е. лучи, состоящие из множества волн разных длин. С увеличением напряжения для каждого вещества антикатода наступают моменты, когда начинают выделяться „характеристические“ лучи определенных длин волн, некоторые из которых обладают значительно большей интенсивностью по сравнению с „белыми“ лучами. Для каждого химического элемента, из которого сделан антикатод, длины волн, составляющие характеристическое излучение, зависят от порядкового номера данного элемента. С увеличением атомного номера наблюдаются закономерные уменьшения длин волн. Поэтому подбором антикатода мы в состоянии регулировать характер излучения и вести работу с известными, наперед заданными нам, лучами.

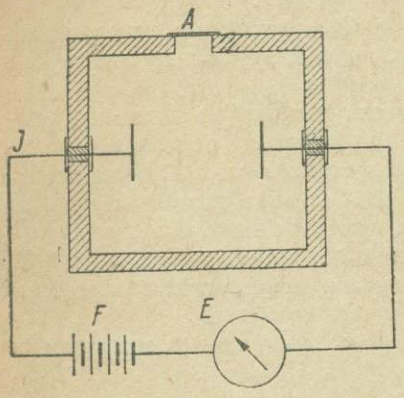
Отметим основные свойства рентгеновых лучей.

Уже самим Рентгеном были указаны различные важные свойства рентгеновых лучей. Исключительное практическое значение приобрела способность этих лучей проходить через многие тела, непрозрачные для световых лучей. Широкое применение рентгеновых лучей в медицине — общеизвестно. Не менее широкое применение приобретает и просвечивание металлов и других тел в разных отраслях техники и естествознания.

Различные тела обладают различной прозрачностью для рентгеновых лучей. Дерево более прозрачно, чем алюминий, алюминий более прозрачен, чем железо, железо более прозрачно, чем свинец и т. д. Из всех материалов особенно плохой прозрачностью обладают свинец и барит ($BaSO_4$). Ввиду вредного действия рентгеновых лучей на человеческий организм, в рентгенолабораториях прибегают к защитным приспособлениям, сделанным обычно из свинца и барита. Например, стенки комнат, в которых установлены рентгеновские трубки, покрывают баритовым бетоном и баритовой штукатуркой или листовым свинцом, трубки обкладывают свинцом и пр.

Сами по себе рентгеновы лучи невидимы для нашего глаза. Поэтому для обнаружения рентгеновых лучей и грубого определения их интенсивности пользуются либо свойством этих лучей действовать, подобно световым лучам, на фотографическую пластинку или пленку, либо свойством их вызывать флюоресценцию тел. Особенно заметной флюоресценцией обладают $CaWO_4$ (синеватый свет) и $BaPt(CN)_4 \cdot 4H_2O$ (желтоватый свет). Однако наиболее чувствительным является метод получения „ионизационного тока". Этот метод основан на свойстве рентгеновых лучей при прохождении через газ создавать условия, достаточные для его ионизации. Эти газы, будучи в обычных условиях плохими проводниками электричества, под влиянием рентгеновых лучей частично расщепляются на ионы и, таким образом, легко проводят ток.

Специальная ионизационная камера J, сделанная из свинца или другого мало прозрачного для рентгеновых лучей материала, наполняется бромистым метилом или каким-либо другим тяжелым газом (фиг. 3). К камере подводится ток от батареи аккумуляторов F. Ввиду того, что цепь разомкнута камерой J, гальванометр E практически никакого тока в цепи не покажет. Однако как только через окошечко A, закрытое тонкой алюминиевой фольгой, в камеру попадут рентгеновы лучи, газ, ионизируясь, сможет проводить электрический ток, и стрелка гальванометра E тотчас же обнаружит прохождение тока. Направляя окошечко A на место, где предполагаются рентгеновы лучи, показаниями гальванометра руководствуются как для их обнаружения, так и для определения их интенсивности. Таков наиболее точный путь определения интенсивности рентгеновых лучей.



Фиг. 3. Ионизационная камера.

Характер отражения рентгеновых лучей от плоских сеток кристаллических решеток обнаруживает замечательные особенности. Следует заметить, что рентгеновы лучи вообще не отражаются от твердых или жидких тел, подобно лучам видимого света. Попадая, например, на поверхность зеркала, рентгеновы лучи могут отчасти поглощаться и рассеиваться, отчасти пронизывать зеркало, но явлений простого отражения наблюдаться не будет.

От плоских сеток кристалла рентгеновы лучи, в общем случае, так же, как и вообще от всяких других тел, не отражаются. Однако при некоторых специальных условиях отражение наступает.

Рассмотрим теорию этих явлений в той упрощенной схеме, которая была предложена английскими учеными Браггами.

2. Закон отражения рентгеновых лучей от плоских сеток кристаллов

На одну систему плоских сеток данной решетки направлен пучок параллельных рентгеновых лучей SS.. (фиг. 4). Обозначим расстояние между соседними плоскими сетками через d. Пусть угол между направлением лучей и поверхностью плоских сеток равен θ.

В результате частичного рассеяния плоскими сетками рентгеновых лучей, возникают некоторые „отраженные" лучи. Выберем из пучка лучей такие лучи — SB, S_1B_1, S_2B_2, S_3B_3 и т. д., которые, после отражений в различных плоских сетках данной системы, пойдут по одному направлению BC. Сравним между собою длины путей, проходимых этими лучами до какой-нибудь точки C. Эти длины изображаются отрезками SBC, S_1B_1C, S_2B_2C и т. д.

Очевидно, что $SBC < S_1B_1C < S_2B_2C$ и т. д... Найдем величину Δ, на которую путь луча S_1 длиннее пути луча S:

$$\Delta = S_1B_1C - SBC.$$

Проведя $B_1N \perp SB$, видим, что

$$\Delta = BB_1 - NB.$$

Из прямоугольного треугольника BNB_1 находим:

$$NB = BB_1 \cos NBB_1 = BB_1 \cos 2\theta.$$

Отсюда:

$$\Delta = BB_1 - NB = BB_1 - BB_1 \cos 2\theta = BB_1(1 - \cos 2\theta) = BB_1\, 2\sin^2\theta.$$

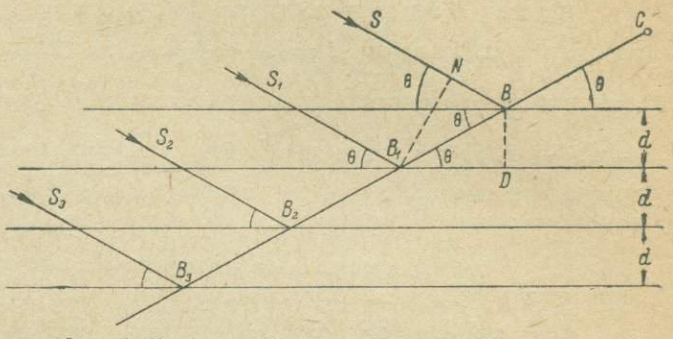
Из вспомогательного прямоугольного треугольника BDB_1 находим:

$$BB_1 = \frac{BD}{\sin BB_1D} = \frac{d}{\sin\theta}.$$

Таким образом:

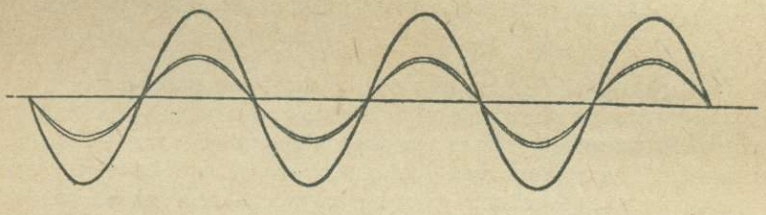
$$\Delta = BB_1\, 2\sin^2\theta =$$

$$= \frac{d}{\sin\theta}.2\sin^2\theta = 2d\sin\theta.$$



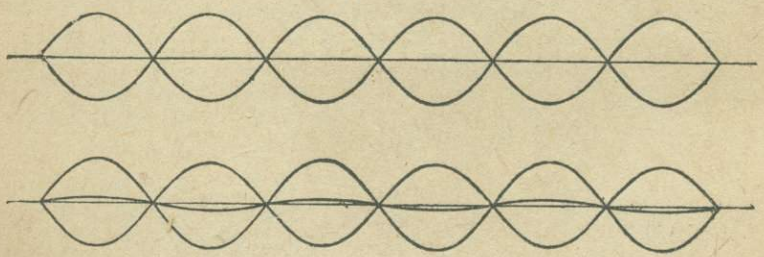
Фиг. 4. К выводу формулы Брагга — Вульфа.

Нетрудно видеть, что и длина пути луча S_2 больше длины пути луча S_1 на то же расстояние $\Delta = 2d\sin\theta$ и т. д. Длина же пути луча S_2 больше длины первого луча S на величину 2Δ, путь луча S_3 длиннеепути того же луча S на величину 3Δ и т. д.



Фиг. 5.

Таким образом все лучи, идущие вдоль направления BC, будут отставать один от другого на величину Δ, которая в оптике носит название **разности хода лучей**. Из оптики же известно, что колебания лучей, идущих по одному направлению, взаимодействуя друг с другом, складываются, давая некоторое результи-



Фиг. 6.

рующее колебание (явление интерференции). При этом, если разность хода Δ таких лучей равна целому числу n длин волн λ (т. е., если $\Delta = n\lambda$), то их колебания, накладываясь друг на друга, усиливаются, и амплитуда (высота гребней волн) результирующего колебания будет равна сумме амплитуд, составляющих (фиг. 5).

Наоборот, если разность хода Δ равна $\lambda/2$ или, вообще, нечетному числу полуволн $(n\lambda + 1/2\lambda)$, то колебания таких лучей взаимно уничтожатся (фиг. 6).

Таким образом и в нашем случае, если $\Delta = 2d\sin\theta$ будет равна λ или 2λ или 3λ или вообще $n\lambda$, то колебания лучей, идущих вдоль направления BC, складываясь, будут усиливать друг друга. Несмотря на ничтожную величину каждого отдельного колебания, в результате интерференции множества таких колебаний получим отраженный луч BC, амплитуда которого будет иметь уже вполне уловимую величину.

Но если Δ будет хотя бы очень мало отличаться от длины волны λ, например, на одну двухтысячную $\left(\Delta = \lambda + \frac{1}{2000}\lambda\right)$, то обязательно найдется некоторый такой тысячный луч, разность хода которого с первым будет $1000\,\Delta = 1000\left(\lambda + \frac{1}{2000}\lambda\right) = n\lambda + \frac{1}{2}\lambda$. Луч с таким колебанием уничтожит первый. Таким же образом, любой другой отраженный луч будет также уничтожаться, и никакого общего отражения по направлению BC не будет.

Рентгеновы лучи отражаются от плоских сеток только в том случае, если разность хода $\Delta = n\lambda$. Эта разность хода получится, если падающие лучи образуют с плоскостями сеток такой угол θ, при котором

$$\Delta = n\lambda = 2d\sin\theta.$$

Угол θ, при котором наблюдается отражение рентгеновых лучей от плоских сеток решетки, будем называть углом отблеска (он же называется брагговским углом или, по неудачному переводу с английского, углом скольжения).

Из сказанного видно, что угол отблеска должен удовлетворять формуле:

$$\Delta = n\lambda = 2d\sin\theta. \qquad (1)$$

Эта формула, показывающая, при каких соотношениях между длиной волны λ, расстоянием между плоскими сетками d и углом отблеска θ может иметь место отражение рентгеновых лучей, носит название формулы Брагга — Вульфа.

Из формулы (1) вытекает, что от одной и той же системы плоских сеток отражения могут наблюдаться при различных углах отблеска θ, так как n может принимать различные значения, равные 1, 2, 3 и т. д. Соответственно с этим, отражения наблюдаются при различных углах θ_1, θ_2, θ_3..., удовлетворяющих формулам:

$$\lambda = 2d\sin\theta_1$$
$$2\lambda = 2d\sin\theta_2$$
$$3\lambda = 2d\sin\theta_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$n\lambda = 2d\sin\theta_n.$$

Отсюда следует:

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{2d}$$
$$\sin\theta_2 = 2\,\frac{\lambda}{2d} = 2\sin\theta_1$$
$$\sin\theta_3 = 3\,\frac{\lambda}{2d} = 3\sin\theta_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin\theta_n = n\,\frac{\lambda}{2d} = n\sin\theta_1.$$

Отражения рентгеновых лучей от плоских сеток решетки происходят при различных углах отблеска θ. Синус любого угла отблеска θ равен целому числу синусов наименьшего угла отблеска θ_1:

$$\sin\theta_n = n\sin\theta_1. \qquad (2)$$

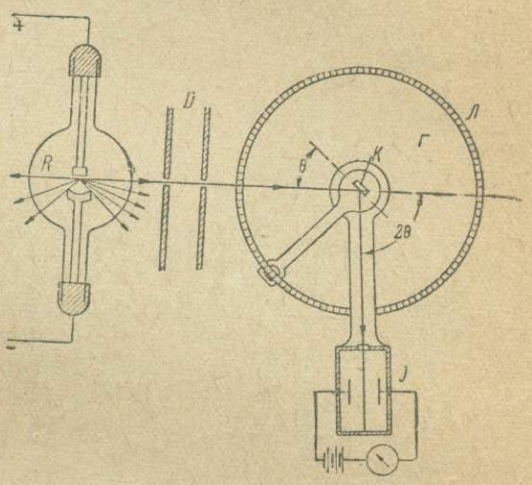
Зная наименьший угол θ_1, при котором происходит отражение, все остальные углы отблеска можно просто вычислить по формуле (2). Наоборот, зная порядок отражения n, можно по углу отблеска θ_n вычислить наименьший угол θ_1.

Выведенная выше формула Брагга — Вульфа является фундаментом для изучения пространственных решеток. Действительно, если найти угол отблеска θ_n, то, зная длину волны рентгеновых лучей λ и порядок отражения n, легко определить d:

$$d = \frac{n\lambda}{2\sin\theta_n} = \frac{\lambda}{2\sin\theta_1}.$$

Определяя эти расстояния d_1, d_2, d_3... и т. д. для различных систем плоских сеток данной пространственной решетки, можно получить полное представление об ее форме и размерах. Таким образом, исследование структуры кристаллов неразрывно связано с методами определения d_1, d_2, d_3... и т. д., а эти последние, естественно, с методами определения углов отблеска.

Существует несколько методов для подобных определений. Общими для всех методов являются применение узкого пучка рентгеновых лучей, направляемого на объект, и фиксация или улавливание отраженных лучей фотографической пластинкой (пленкой) или ионизационной камерой.



Фиг. 7. Схема опыта Браггов.

R—рентгеновская трубка, *D*—диафрагма, *Г*—гониометр, *Л*—лимб гониометра, *K*—кристалл, *J*—ионизационная камера.

3. Методы определения углов отблеска

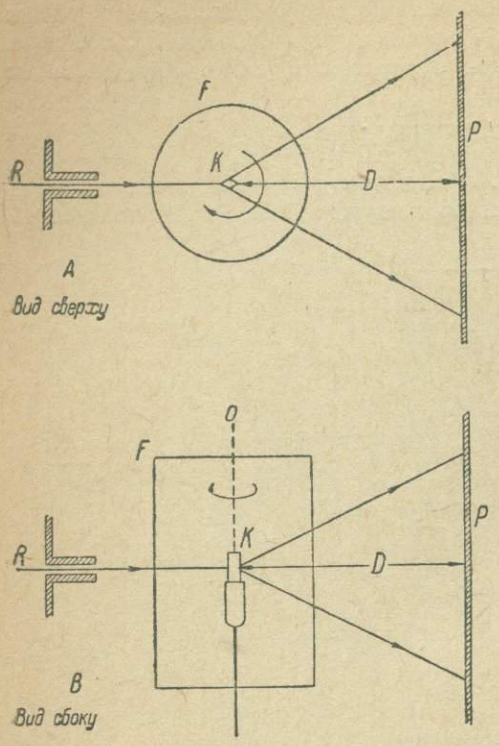
а) Метод Браггов (спектрометрический метод)

Кристалл *K* (фиг. 7) укрепляется на специальном приборе „гониометре“ *Г* (подробности о нем — см. ниже), позволяющем вращать кристалл и тем самым различно ориентировать его грани (а следовательно, и его плоские сетки) относительно падающих характеристических рентгеновых лучей *RK*. Углы поворота кристалла можно отсчитывать по горизонтальному лимбу *Л* гониометра. Отраженные лучи улавливаются ионизационной камерой *J*. Эта камера также может вращаться вокруг той же вертикальной оси, причем все углы поворота этой камеры отсчитываются по тому же лимбу *Л*. Вращая кристалл и ионизационную камеру, добиваются такого положения, чтобы отраженный луч от данной грани (системы плоских сеток) попал в камеру. При этом камера будет располагаться относительно направления *RK* под углом вдвое большим, чем угол, образованный отражающей гранью с тем же направлением *RK*. Так, например, если грань в положении отражения образует угол θ с направлением *RK*, камера *J* образует угол 2θ. Следовательно, устанавливая с помощью ионизационной камеры моменты отражений, легко находим по лимбу удвоенные углы отблеска.

б) Метод Поляни (метод кристалловращения)

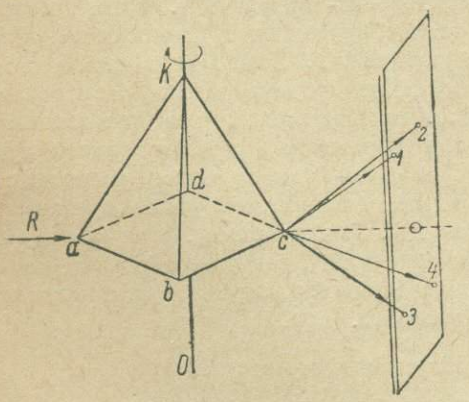
В методе Браггов ионизационной камерой могут улавливаться только те отраженные лучи, которые лежат в горизонтальной плоскости (на фиг. 7 — лежащие в плоскости чертежа). Окошко ионизационной камеры все время остается в одной и той же плоскости, перпендикулярной к оси вращения кристалла. Камере нельзя придавать какие-либо наклоны к этой оси вращения. Для того, чтобы улавливать не только горизонтальные лучи, но и наклонные, вместо ионизационной

камеры устанавливают фотографическую пластинку P или цилиндрическую пленку F (фиг. 8 и 9). Кристалл K вращается вокруг вертикальной оси OK. Каждая плоская сетка этого кристалла при его вращении будет занимать различные положения по отношению к падающим характеристическим рентгеновым лучам.

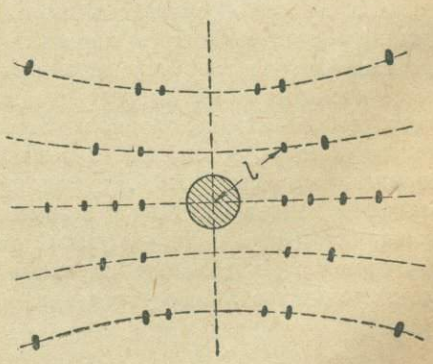


Фиг. 8. Постановка опыта по методу „кристалловращения".

Углы наклона каждой плоской сетки к лучам RK будут, при вращении кристалла, непрерывно меняться, а потому в некоторые моменты эта плоская сетка может оказаться расположенной как раз под углом отблеска θ, т. е. сможет отражать лучи определенной длины волны. Пусть, например при указанном на фиг. 9 расположении плоской сетки Kab она будет составлять угол отблеска θ с падающим рентгеновым лучом Ra. В этом положении эта сетка дает некоторый отраженный луч *1*. Если смотреть вдоль падающего луча Ra, то отраженный луч окажется направленным вправо и вверх. Нетрудно сообразить, что при вращении вокруг оси OK, как указано стрелкой на рисунке, плоскость Kab займет положение Kad. Очевидно здесь плоскость будет расположена под таким же углом θ, как и в первом положении. Поэтому и в новой ориентировке данная сетка даст некоторый отраженный луч *2*. Этот луч будет направлен влево и вверх и, таким образом, не будет совпадать с лучом *1*. Когда наша плоская сетка повернется настолько, что займет положение Kdc, то она снова окажется расположенной под углом отблеска θ, однако отраженный от нее луч *3* будет направлен вправо и вниз. При дальнейшем вращении плоская сетка примет позицию Kbc и снова плоская



Фиг. 9.



Фиг. 10.

сетка, образуя угол θ с падающим лучом Ra, даст отраженный луч *4*. Последний будет направлен влево и вниз. При дальнейшем вращении плоская сетка снова займет первоначальную ориентировку Kab. Таким образом, в общем случае, при

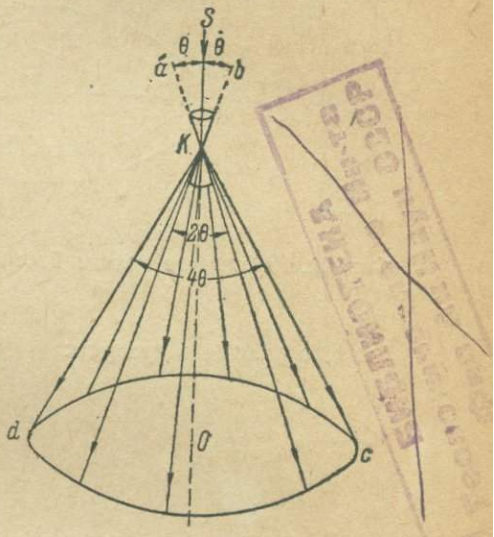
полном обороте кристалла на 360° наблюдаются четыре момента, когда будет происходить отражение рентгеновых лучей от данной плоской сетки. Поэтому на фотографической пластинке (рентгенограмме) образуются четыре пятна, расположенные в вершинах прямоугольника (фиг. 10). Углов отблеска для каждой плоской сетки целая серия (вспомним соотношение $\sin\theta_n = n\sin\theta_1$, где $n = 1, 2, 3, 4...$). Поэтому и пятен, расположенных в вершинах различных прямоугольников, должна образоваться целая система. Кроме того, так как систем плоских сеток в кристалле не одна, а много, то много получится и пятен на рентгенограмме.

Обозначив расстояние от центра прямоугольника (место прохождения неотраженных от кристалла лучей) до некоторого пятна, например l, через l, а расстояние кристалла до плоской пластинки — через D, находим:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{l}{D}.$$

в) Метод Дебая, Шеррера и Хелла (метод порошков)

В качестве объекта служит здесь уже не отдельный кристалл (монокристалл), а кристаллический порошок, который можно рассматривать как совокупность мелких кристаллических осколков. Если такой порошок поместить на пути характеристических рентгеновых лучей, то последние будут отражаться только от тех осколков, плоские сетки в которых случайно ориентированы под углами отблеска к падающим лучам. Плоские сетки, ориентированные под всякими другими углами, отражений не дадут. Так как в порошке осколков очень много, то должны встречаться любые ориентировки отдельных кусочков, а потому обязательно должны найтись плоские сетки, расположенные под углами отблеска. Очевидно, что под одним и тем же углом отблеска θ в порошке может быть расположено огромное количество одинаковых плоских сеток во множестве осколков различной пространственной ориентировки (фиг. 11). Каждая отражающая система плоских сеток пересекается (при продолжении) со своими соседями по линиям, составляющим угол θ с направлением падающего луча SK. Эти линии образуют круговой конус с осью, совпадающей с направлением SK. Угол растворения этого конуса будет 2θ ($\angle bKa$ на фиг. 11). Каждый отраженный луч будет располагаться под углом θ к образующим этого конуса. Таким образом отраженные лучи составят конус с углом растворения 4θ ($\angle cKd$).



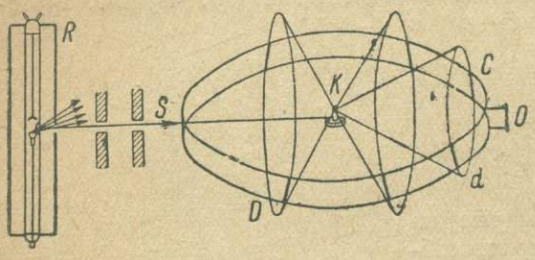
Фиг. 11. Образование одного конуса отраженных лучей.

В порошке, кроме плоских сеток, расположенных под углом θ, найдутся тождественные сетки, ориентированные под углом $\theta_1 = \arcsin(2\sin\theta)$ (что означает $\sin\theta_1 = 2\sin\theta$). Эти сетки также дадут свой конус отраженных лучей с растворением $4\theta_1$. Сетки, расположенные под углом $\theta_2 = \arcsin(3\sin\theta)$, дадут свой конус с растворением $4\theta_2$ и т. д. Таким образом все тождественные системы плоских сеток дают целую серию конусов отраженных лучей, углы отблеска которых связаны формулой:

$$\sin\theta_n = n \cdot \sin\theta_1.$$

Однако в каждом кристаллическом осколке порошка присутствует не одна система плоских сеток. Под некоторым углом к первой проходит еще другая система отражающих сеток, с другим расстоянием d, а следовательно, и с другими углами отблеска. Эта новая система плоских сеток дает другую серию конусов отраженных лучей. В результате, при прохождении рентгеновых лучей через

порошок, возникнут различные серии конусов отражений. Это обстоятельство и используется в методе Дебая, Шеррера и Хелла. При постановке метода характеристические лучи рентгеновской трубки направляются в цилиндрическую камеру D („камера Дебая“) (фиг. 12). По середине этой камеры устанавливается столбик кристаллического порошка, подлежащего исследованию. Лучи, прошедшие порошок без отражения, выйдут через отверстие O. Лучи же, образующие конуса отражений, фиксируются на цилиндрической фотографической пленке, которой обкладывается внутренняя стенка камеры или наружная сторона „пленкодержателя“. Конусы отраженных рентгеновых лучей, пересекаясь с цилиндрической поверхностью пленки, образуют на последней „линии“ или „дужки“ — большей или меньшей интенсивности (фиг. 13).



Фиг. 12. Постановка метода Дебая—Шеррера—Хелла.

Измеряя расстояние между двумя симметричными линиями c и d, получим длину дуги cd, измеряющей угол растворения конуса.

Этот угол, как мы выяснили, равен 4θ. Отсюда, если радиус камеры Дебая r, следует, что:

$$\angle 4\theta = \frac{\smile cd}{r},$$

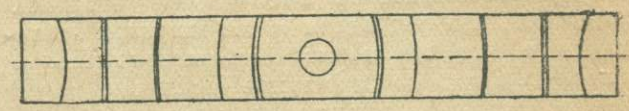
или, переводя в градусы:

$$\angle 4\theta^\circ = \frac{cd}{r} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi},$$

откуда

$$\theta = \frac{cd}{r} \cdot \frac{45^\circ}{\pi}.$$

Таким путем, измеряя рсстояния между линиями, образованными одним и тем же конусом, и зная радус камеры, нетрудно вычислить угол отблеска, отвечающий данному конусу.



Фиг. 13. Дебаеграмма меди.

г) *Метод Лауэ*

В методе Дебая, Шеррера и Хелла исследуемое вещество вращать не приходится, так как замена кристалла кристаллическим порошком создает присутствие плоских сеток, расположенных уже без вращения под подходящими для отражения углами. Если же взять монокристалл и не подвергать его вращению, то только случайно в этом кристалле может оказаться плоская сетка, расположенная под углом отблеска. В общем же случае плоские сетки будут расположены под углами, не удовлетворяющими формуле $n\lambda = 2d \sin\theta$, и следовательно не будут давать отраженных лучей.

Но очевидно, что каков бы ни был угол наклона плоской сетки относительно направления падающих лучей, можно подобрать такие длины волн, чтобы указанное соотношение между θ, d и λ удовлетворялось. В предыдущих методах мы пользовались рентгеновыми лучами определенных длин волн (характеристическим излучением) и, изменяя углы наклона сетки, получали отражения. В методе Лауэ кристалл не вращается, следовательно, углы, все время не изменяются, но зато кристалл освещается лучами разной длины волны. Для этого берутся „белые“ рентгеновы лучи, состоящие из разных длин волн, среди которых для каждой системы плоских сеток могут найтись лучи, удовлетворяющие формуле Брагга — Вульфа.

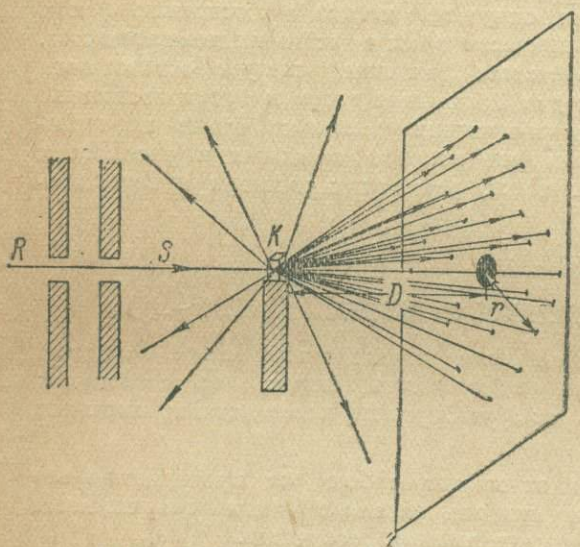
В остальном метод аналогичен методу Поляни при плоской фотографической пластинке, с той только разницей, что на пластинке от каждой системы плоских

сеток получается не четыре пятна, а только одно (фиг. 14). Так же, как и в методе Поляни, если расстояние от центра пластинки до пятна равно l, а расстояние от кристалла до пластинки — D, то:

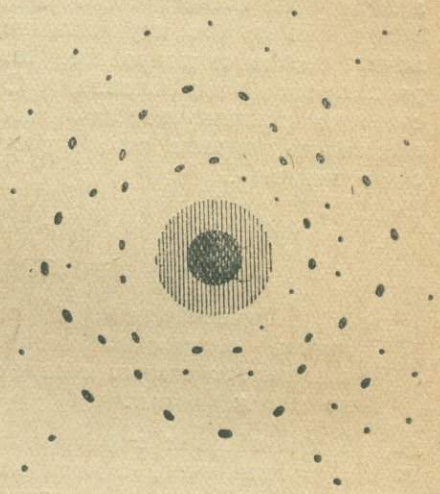
$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{l}{D}.$$

д) Сравнительные достоинства и недостатки описанных методов

Метод Браггов выгодно отличается от остальных методов возможностью производить помощью ионизационной камеры точные количественные определения интенсивности отраженных лучей. Вторым важным достоинством является то обстоятельство, что, при хорошем огранении кристалла, легко разобраться, какие именно плоские сетки (и им параллельные грани кристалла) дают улавливаемые отражения. Каждое найденное по



Фиг. 14. Постановка метода Лауэ.



Фиг. 15. Лауэграмма каменной соли.

формуле Брагга—Вульфа d оказывается вполне однозначно „привязанным" к определенной системе плоских сеток. Недостатком является необходимость особой юстировки для каждой зоны, связанная с этим большая затрата времени и невозможность исследовать отраженные лучи, лежащие не в горизонтальной плоскости вращения ионизационной камеры.

Последних недостатков лишен метод Поляни, в котором, вместе с тем, нетрудно разобраться по рентгенограмме — от каких именно плоских сеток наблюдаются отражения.

Последняя задача значительно осложняется в методе Дебая, Шеррера и Хелла, где в случае мало симметричных кристаллов трудно найти, от каких плоских сеток осколков наблюдаются те или иные „линии" на рентгенограмме („порошкограмме"). Таким образом, в большинстве случаев этот метод не приводит к полному определению структуры исследуемого кристаллического вещества. Но, с другой стороны, возможность исследовать кристаллическое вещество в тонкораздробленном состоянии („порошки") дало этому методу широкое распространение. Метод порошков с успехом применяется при исследовании различных сплавов, тонкораздробленных руд и многих других веществ, считавшихся раньше, вследствие своей сильной раздробленности, аморфными.

Самым существенным недостатком метода Лауэ является невозможность определить d по найденному с помощью лауэграммы углу отблеска. Действительно, благодаря тому, что кристалл освещается „белыми" рентгеновыми лучами, в уравнении $d = \frac{n\lambda}{2 \sin \theta}$ остается неизвестным λ. Мы не можем узнать, какую именно длину волны λ имел отразившийся луч. Достоинство этого метода заключается в том, что он позволяет разобраться в относительных наклонах различных плоских сеток друг к другу, а также устанавливать симметрию того направления, по которому проходил рентгенов луч через кристалл. О всем многообразии практических применений различных методов здесь говорить мы не можем.

4. Основные выводы рентгенометрии кристаллов

Среди массы чрезвычайно важных и интересных следствий, к которым привело изучение кристаллического вещества при помощи рентгеновых лучей, укажем сейчас на два. Во-первых, рентгенометрия кристаллов доказала, что *кристаллическое вещество построено пространственными решетками.*

Это непосредственно видно из рассмотрения рентгенограммы и факта существования углов отблеска θ.

Во-вторых, рентгенометрия кристаллов доказала, что

вещества, различные по составу, обладают различными пространственными решетками.

Это непосредственно видно из того, что углы отблеска θ, а следовательно, и расстояния d различны для различных веществ.

В сущности вся кристаллография опирается на эти два основных факта, а потому мы и считали необходимым привести прежде всего их доказательства. Теперь, когда эти кардинальные положения доказаны, следует остановиться на них несколько подробнее. Поэтому две ближайших главы и будут посвящены рассмотрению этих положений. Сначала мы изучим несколько ближе пространственную решетку вообще, затем коснемся второго следствия и рассмотрим главнейшие вопросы связи пространственных решеток с составом кристаллического вещества.

Глава II

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ РЕШЕТКА

Пространственной решеткой (или параллелепипедальной системой точек) называется бесконечная совокупность точек, расположенных в вершинах равных и параллельных друг другу параллелепипедов, смежных по целым граням.

Таким образом параллелепипеды заполняют собою все пространство без всяких промежутков, причем каждая сторона параллелепипеда соприкасается только с одной, равной ей стороной соседнего параллелепипеда.

Точки, слагающие пространственную решетку, называются узлами пространственной решетки.

В кристаллическом веществе с каждым узлом пространственной решетки связана некоторая частица кристаллического вещества.

Если оставить в стороне вопрос о природе таких частиц и рассматривать их независимо от того будут ли это ионы, атомы, молекулы или целые группы молекул, то можно заменить рассмотрение этих частиц рассмотрением отдельных их точек. Для определенности будем рассматривать, например, их центры тяжести, т. е. некоторые определенные точки. Вот эти-то точки и являются узлами пространственной решетки кристалла. Замена частиц математическими точками, предложенная Делафоссом (1843 г.) и Зеебером (1824 г.) позволила Франкенгейму (1835—1842 гг.) и особенно французскому ученому Огюсту Бравэ (1848 г.) свести ряд вопросов о структуре кристаллов в плоскость математики. Это чрезвычайно благотворно отразилось на дальнейшем углублении теории структуры.

Так как все параллелепипеды, слагающие пространственную решетку, равны и параллельны, то ребра одного являются продолжением ребер соседнего параллелепипеда, а потому узлы решетки должны располагаться на прямых линиях.

Совокупность узлов решетки, лежащих на одной прямой линии, носит название ряда пространственной решетки.

Нетрудно видеть, что в ряду расстояния между соседними узлами одинаковы. Например промежутки AA_1 (фиг. 16) и A_3A_4 равны между собой.

Расстояние между ближайшими соседними узлами ряда называется промежутком ряда (периодом идентичности).

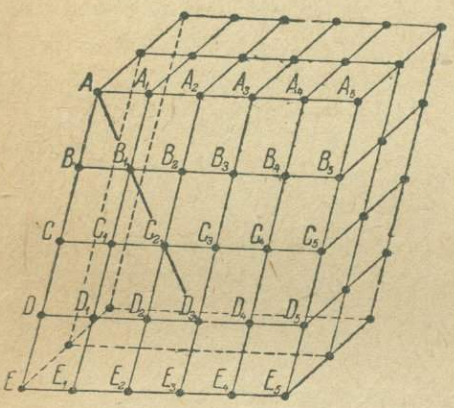
Параллельно любому ряду всегда расположено бесконечное множество рядов, тождественных с данным. На фиг. 16 линиями показаны только три системы рядов, однако, соединяя как угодно иначе два любых узла решетки прямой линией и продолжая эту прямую в обе стороны, получим различные новые ряды (например диагональный ряд $A\,B_1C_2\,D_3\ldots$).

Эти ряды отличаются друг от друга не только направлением в пространстве, но и величиной своих промежутков. При этом, чем меньше промежуток ряда, тем большее количество узлов приходится на единицу длины ряда, тем „плотнее" будут данные ряды.

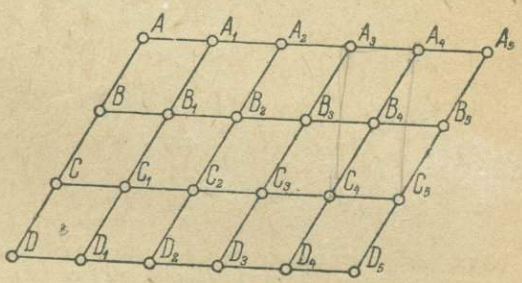
Плотностью ряда называется количество узлов, приходящихся на единицу длины ряда.

Очевидно, что плотность ряда обратно пропорциональна величине промежутка.

Если провести плоскость через два каких-нибудь ряда решетки, то эта плоскость пройдет и через бесконечное множество рядов, тождественных взятым.



Фиг. 16.



Фиг. 17. Плоская сетка.

Плоской сеткой (или плоской решеткой) называется совокупность узлов пространственной решетки, лежащих в одной плоскости.

Узлы, лежащие в этой плоскости, образуют систему вершин равных и параллельных параллелограмов [например, в плоской сетке, совпадающей с плоскостью чертежа (фиг. 17), имеем параллелограм AA_1B_1B].

Параллелограм, имеющий точки решетки только в своих вершинах, но не имеющий таких точек ни на сторонах, ни внутри, называется примитивным параллелограмом.

Параллелограм, стороны которого параллельны наиболее плотным рядам данной плоской сетки, называется кратчайшим примитивным параллелограмом.

Очевидно, что стороны кратчайшего примитивного параллелограма образованы наименьшими промежутками рядов данной сетки.

На фиг. 17 параллелограм AA_1B_1B — примитивный параллелограм; параллелограм AA_2B_2B — не примитивный.

Параллельно каждой плоской сетке расположено бесконечное множество таких же тождественных плоских сеток. Бесконечная совокупность параллельных друг другу плоских сеток решетки будем называть серией плоских сеток. На фиг. 16 легко усматриваются три серии плоских сеток (параллельные плоскости чертежа и наклонные, параллельные ряду $AA_1A_2\ldots$ и ряду $ABCD$).

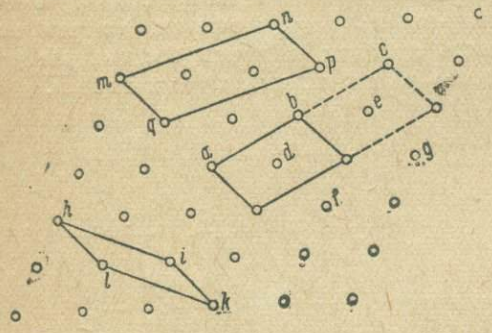
Но очевидно, что кроме этих трех серий плоских сеток, в пространственной решетке проходит бесконечное множество различных других плоских сеток

(например диагональных по отношению к указанным). Вообще говоря, через три любых узла пространственной решетки всегда можно провести плоскую сетку.

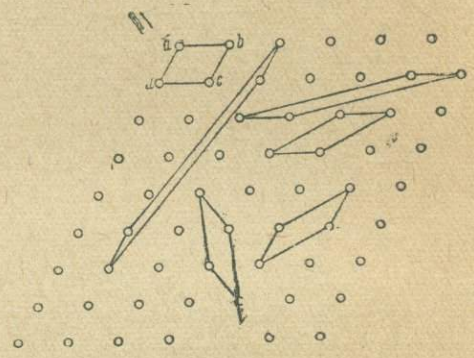
Непараллельные друг другу плоские сетки отличаются друг от друга не только положением в пространстве, но и густотой расположения узлов на их поверхности.

Плотностью D плоской сетки называется количество узлов, приходящихся на единицу поверхности этой сетки.

Очевидно, чем гуще данная сетка усажена узлами решетки, тем меньшую площадь будут занимать параллелограмы этой сетки (подразумеваются параллелограмы, имеющие узлы только в своих вершинах). Найдем число узлов, приходящихся на один параллелограм. Каждая вершина принадлежит одновременно четырем попарно сложенным параллелограмам. Значит, на один параллелограм приходится $^1/_4$ узла от каждой вершины. Всех вершин у параллелограма четыре; следовательно, на весь параллелограм приходится $4 \cdot {}^1/_4 = 1$ узел. Отсюда:



Фиг. 18. Различные параллелепипеды пространственной решетки (на чертеже показаны только основания параллелепипедов). Узлы решетки, не лежащие в плоскости чертежа, не показаны.



Фиг. 19. Различные параллелепипеды идентичности одной решетки (показаны только основания параллелепипедов).

Плотность D данной плоской сетки обратно пропорциональна площади F параллелограма, у которого узлы расположены только в его вершинах.

$$D = \frac{1}{F}.$$

Плоскостями, параллельными трем любым, непересекающимся в параллельных ребрах плоским сеткам, всю пространственную решетку можно разбить на бесконечную совокупность равных, параллельных и смежных по целым граням параллелепипедов. Если расположение узлов решетки у одного параллелепипеда известно, то всю решетку можно построить параллельным повторением данного, поступательно перемещая его на величину его ребер по их направлению. (Поступательным называется такое перемещение, при котором все точки перемещающейся фигуры двигаются по параллельным линиям.)

Параллелепипед с узлами или только в его вершинах, или с узлами в вершинах и на гранях или внутри его, но без узлов на ребрах, поступанием которого на величину и по направлениям его ребер можно построить всю пространственную решетку, носит название параллелепипеда повторяемости.

Параллелепипеды повторяемости можно выделять у данной пространственной решетки самым различным образом (фиг. 18). Два любых узла решетки

можно принять за вершины таких параллелепипедов, и тогда очевидно, что при совмещении одного узла решетки с другим параллельным поступанием все остальные узлы также будут совмещаться друг с другом.

Как видно из фиг. 18, параллелепипеды повторяемости, кроме узлов в вершинах, могут не иметь никаких других узлов ни внутри, ни на своих границах (например параллелепипед *hikl*). В других же случаях параллелепипеды повторяемости заключают внутри себя или на своих границах еще узлы, вполне идентичные с узлами вершин и принадлежащие той же самой пространственной решетке (например параллелепипед *mnpq*). Вершины таких параллелепипедов не образуют всех узлов данной пространственной решетки.

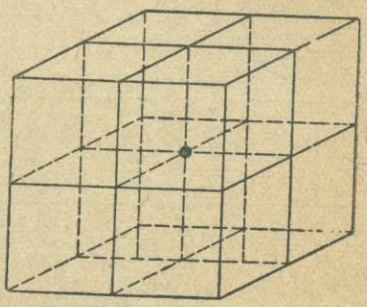
*Параллелепипеды повторяемости, вершины которых образуют все узлы данной пространственной решетки, носят названия параллелепипедов идентичности (или примитивных).**

Таким образом никаких узлов, кроме узлов вершин, ни внутри, ни на границах этих параллелепипедов не существует. Выделять такие параллелепипеды в одной и той же решетке можно различными способами (фиг. 19).

Параллелепипед идентичности (или примитивный), ребра которого параллельны системам трех наиболее плотных рядов решетки, носит название кратчайшего примитивного параллелепипеда.

На фиг. 19 кратчайшим примитивным параллелепипедом будет параллелепипед *abcd*.

Докажем, что объем любого примитивного параллелепипеда равен объему кратчайшего примитивного параллелепипеда.



Фиг. 20. Узел решетки восьми смежных параллелепипедов.

Для доказательства найдем прежде всего число узлов, приходящихся на любой параллелепипед идентичности (или примитивный), а следовательно, и на кратчайший примитивный параллелепипед. Каждый узел принадлежит одновременно восьми вершинам восьми попарно смежных параллелепипедов (фиг. 20). Следовательно, на один параллелепипед приходится $^1/_8$ узла. Всех вершин у параллелепипеда 8. Отсюда следует, что на один параллелепипед приходится $8 \times {}^1/_8 = 1$ узел решетки.

Одна и та же пространственная решетка может быть разбита на параллелепипед идентичности различными способами. В одном частном случае такой разбивки получаются кратчайшие примитивные параллелепипеды.

Очевидно, что каким бы способом мы ни разбивали нашу решетку на параллелепипеды, ее общий объем и общее количество узлов остаются постоянными. Так как каждому узлу отвечает один тот или иной параллелепипед идентичности, то очевидно, что число параллелепипедов при любых разбивках всего объема будет одно и то же. Сколько в нашей решетке кратчайших примитивных параллелепипедов, столько же и каждого вида других равных между собою параллелепипедов идентичности. Поэтому, каков бы ни был параллелепипед идентичности, он будет занимать ту же часть общего объема всей решетки, как и кратчайший примитивный параллелепипед. Следовательно:

объем любого параллелепипеда идентичности равен объему кратчайшего примитивного параллелепипеда.

Объем любого же другого параллелепипеда повторяемости, не являющегося параллелепипедом идентичности, всегда больше объема примитивного параллеле-

---

* Приведенное определение примитивного параллелепипеда принято Ниггли (1928 г.) и др.

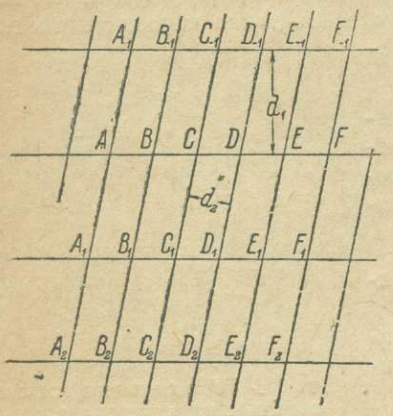
пипеда (это следует из того, что количество узлов, приходящихся на один такой параллелепипед, всегда будет больше количества узлов, приходящихся на один примитивный параллелепипед (т. е. > 1). Объем всякого параллелепипеда равен произведению площади основания F на высоту d. Основанием параллелепипеда идентичности является один из параллелограмов плоской сетки. Высотой же будет тогда являться расстояние по перпендикуляру между соседними плоскими сетками.

Расстояние между двумя ближайшими параллельными тождественными плоскими сетками (высота параллелепипеда идентичности) называется межплоскостным расстоянием d.

Объем параллелепипеда идентичности равен

$$V = d \cdot F,$$

где F — площадь параллелограма данной плоской сетки, а d — межплоскостное расстояние.



Фиг. 21.

Так как плотность сетки D, как мы вывели, обратно пропорциональна F, то

$$V = \frac{d}{D}$$

или:

межплоскостное расстояние данной плоской сетки прямо пропорционально ее плотности:

$$d = V \cdot D.$$

Выведенное соотношение легко иллюстрируется примером, изображенным на фиг. 21. Перпендикулярная к плоскости бумаги плоская сетка $ABCDEF$ имеет большую плотность (густо усажена узлами) и расположена относительно далеко от своих ближайших параллельных соседних сеток $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ и $A_{-1}B_{-1}C_{-1}D_{-1}E_{-1}F_{-1}$.

Наоборот, у плоской сетки $B_{-1}BB_1B_2$, имеющей небольшую плотность, ближайшие соседи $A_{-1}AA_1$ и $C_{-1}CC_1$..... расположены на близком расстоянии (d_2).

Глава III

КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА

1. Природа узлов пространственных решеток

Для удобства изучения строения кристаллического вещества в предыдущей главе мы рассматривали узлы пространственной решетки как точки, представляющие собою центры тяжести некоторых кристаллических единиц, слагающих вещество. Эти отдельные частицы совершенно одинаковы и могут быть как атомами, так и молекулами или даже целыми группами молекул.

В каждой такой частице можно было бы выделять не центр ее тяжести, но другую вполне определенную, одинаковую у всех точку, например, геометрический центр частицы или центр какого-либо одного атома. Так, для кристалла хлористого цезия (CsCl) можно построить решетку с узлами, совпадающими или с атомами (вернее — ионами) цезия, или с атомами (вернее — ионами) хлора. Очевидно, что обе эти решетки будут тождественны, но сдвинуты одна относительно другой на величину расстояния между атомом Cs и атомом Cl (фиг. 22). Таким образом:

реальные кристаллические вещества образуют сложные пространственные решетки (кристаллические решетки), состоящие из нескольких геометрически равных простых решеток, вставленных одна в другую.

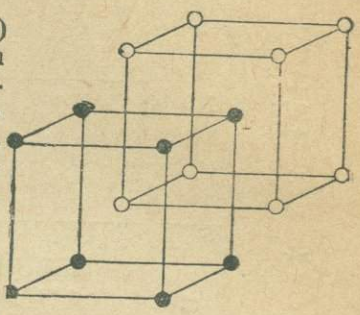
Узлами кристаллических решеток являются атомы или ионы химических элементов.

Так как каждый атом представляет собою весьма сложную систему, состоящую из положительно заряженного ядра и отрицательно заряженных электронных оболочек, окружающих это ядро, то между атомами действуют не только силы притяжения, но и силы отталкивания.

В грубой схеме два соседних атома (или иона) будут притягиваться друг к другу до тех пор, пока силы притяжения не будут уравновешены силами отталкивания. А так как атомы различных химических элементов имеют различное строение, то и их силы взаимодействия различны. Таким образом расстояния между атомами различных химических элементов в кристаллической решетке должны быть различны.

Основной закон, формулированный нами выше, получает свое объяснение:

вещества, имеющие различный химический состав, имеют различные кристаллические решетки.



Фиг. 22. Структура CsCl.

Как указывалось, на этом основном законе о кристаллических решетках базируется вся кристаллохимия.

2. Радиусы атомов и ионов и кристаллохимический закон Гольдшмидта

Остановимся подробнее на расстояниях между отдельными атомами. Эти величины, как мы видели, определяют характер кристаллической решетки. Как только что указывалось, каждый атом обладает определенными отталкивательными силами, которые не позволяют ему подходить к своему соседу ближе определенного расстояния. В первом приближении атому каждого химического элемента можно приписать определенную „сферу действия", внутрь которой никакой другой атом проникнуть не может.

Атомным (или ионным) радиусом или радиусом сферы действия данного атома (или иона) называется минимальное расстояние, считаемое от его центра, на которое отталкивательные силы данного атома (иона) позволяют ему приблизиться к своим соседям.

Так как каждый атом, соседний с данным, также обладает определенной сферой действия, то очевидно, что расстояние между центрами двух атомов решетки не может быть меньше суммы их атомных (или ионных) радиусов. В первом приближении расстояние между соседними атомами равно сумме их атомных радиусов.

Отсюда вытекает исключительная важность изучения атомных и ионных радиусов; они определяют расстояния между узлами решетки и таким образом характер структуры кристаллического вещества.

Начало изучения атомных (и ионных) радиусов было положено Браггом в 1913 г., подробную же разработку это учение получило в последние годы благодаря работам В. М. Гольдшмидта и его школы. Важные теоретические заключения были сделаны Паулингом (1927 г.).

Остановимся на некоторых главнейших выводах, к которым приводят теоретические и экспериментальные исследования.

Атомные (и ионные) радиусы различных химических элементов имеют различную величину.

Таблица 1

Атомные (без знака) и ионные (со знаком + или —) радиусы, найденные эмпирически (последние в решетках типа NaCl, т. е. с координационным числом 6)

По В. М. Гольдшмидту (1926) *

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		
H^- 1,54									
Li 1,56	Be 1,05		C 0,77	N 0,71	O 0,60				
Li^+ 0,78	Be^{2+} 0,34		C^{4+} ⩽0,2		O^{2-} 1,32	F^- 1,33			
			Si^{4-} 1,98	N^{5+} <0,1—0,2	S^{2-} 1,74	Cl^- 1,81			
Na 1,86	Mg 1,62	Al 1,43	Si 1,13	P^{5+} 0,3—0,4	S 1,04	Cl 1,07			
Na^+ 0,98	Mg^{2+} 0,78	Al^{3+} 0,57	Si^{4+} 0,39		S^{6+} 0,34				
K 2,23	Ca 2,21	Sc 1,51	Ti 1,49	V 1,32	Cr 1,25	Mn 1,29	Fe 1,26	Co 1,26	Ni 1,24
						Mn^{2+} 0,91	Fe^{2+} 0,83	Co^{2+} 0,82	Ni^{2+} 0,78
			Ti^{3+} 0,69	V^{3+} 0,65	Cr^{3+} 0,65	Mn^{3+} 0,70	Fe^{3+} 0,67		
K^+ 1,33	Ca^{2+} 1,06	Sc^{3+} 0,83	Ti^{4+} 0,64	V^{4+} 0,61	Cr^{6+} 0,3—0,4	Mn^{4+} 0,52			
				V^{5+} 0,4	Se^{2-} 1,91	Br^- 1,96			
Cu 1,27	Zn 1,33	Ga 1,33	Ge 1,22	As 1,16	Se 1,13	Br 1,19			
	Zn^{2+} 0,83	Ga^{3+} 0,62	Ge^{4+} 0,44	As^{3+} 0,69	Se^{6+} 0,3—0,4				
			Zr 1,62	Nb 1,43	Mo 1,36		Ru 1,30	Rh 1,34	Pd 1,37
Rb^+ 1,49	Sr^{2+} 1,27	Y^{3+} 1,06	Zr^{4+} 0,87	Nb^{4+} 0,69	Mo^{4+} 0,68		Ru^{4+} 0,65	Rh^{3+} 0,68	
				Nb^{5+} 0,69					
			Sn^{4-} 2,15		Te^{2-} 2,11	J^- 2,20			
Ag 1,44	Cd 1,49	In 1,45	Sn 1,40	Sb 1,34	Te 1,33	J 1,36			
Ag^+ 1,13	Cd^{2+} 1,03	In^{3+} 0,92	Sn^{4+} 0,74	Sb^{3+} 0,90	Te^{4+} 0,89	J^{5+} 0,94			
		TR	Hf 1,66	Ta 1,42	W 1,37		Os 1,31	Ir 1,35	Pt 1,38
Cs^+ 1,65	Ba^{2+} 1,43				W^{4+} 0,68		Os^{4+} 0,67	Ir^{4+} 0,66	
			Pb^{4-} 2,15						
Au 1,44	Hg 1,49	Tl 1,99	Pb 1,74	Bi 1,46					
		Tl^+ 1,49	Pb^{2+} 1,32						
	Hg^{2+} 1,12	Tl^{3+} 1,05	Pb^{4+} 0,84						
			Th 1,82		U^{4+} 1,05				
			Th^{4+} 1,10						

		Ce 1,83							
La^{3+} 1,22		Ce^{3+} 1,18	Pr^{3+} 1,16	Nd^{3+} 1,15	Jl^{3+}?	Sm^{3+} 1,13	Eu^{3+} 1,13		
		Ce^{4+} 1,02	Pr^{4+} 1,00						
Gd^{3+} 1,11		Tb^{3+} 1,09	Dy^{3+} 1,07	Ho^{3+} 1,05	Er^{3+} 1,04	Tu^{3+} 1,04	Yb^{3+} 1,00	Cp^{3+} 0,99	
		Tb^{4+} 0,89							

* Эта таблица приводится с небольшими изменениями в том виде, как ее дает O. Hassel („Kristallchemie", 1934, стр. 12).

Какой-либо простой зависимости между атомным радиусом и атомным весом или атомным номером не существует — лишь наблюдается закономерное периодическое изменение радиусов в зависимости от атомного номера.

В таблице 1 даны атомные и ионные радиусы химических элементов.

Величина атомного (и ионного) радиуса каждого химического элемента не является неизменной и постоянной величиной: она резко меняется в зависимости от заряда атома и от целого ряда других причин.

Остановимся вкратце на главнейших факторах, обусловливающих изменения атомных (ионных) радиусов различных элементов.

I. Радиус сферы действия иона (заряженного атома) отличается от атомного радиуса того же самого элемента.

Положительно-заряженные ионы (металлы) имеют меньший радиус сферы действия, чем соответственный радиус сферы действия нейтрального атома.

Отрицательно-заряженные ионы (металлоиды) имеют бóльший радиус сферы действия, чем соответственный радиус сферы действия нейтрального атома.

Напомним, что положительно-заряженный ион несет меньшее количество электронов, по сравнению с атомом, а у отрицательно-заряженного иона, наоборот, имеется избыток электронов.

Указанные соотношения говорят о том, что на радиус сферы действия оказывают влияние именно эти электроны, помещающиеся во внешней электронной оболочке атома. При этом, чем больше зарядов несет ион данного элемента, тем больше его радиус будет отличаться от атомного радиуса.

Так, атомный радиус таллия $Tl^0 = 1{,}99$ Å;
ионный радиус таллия с одним зарядом $Tl^{1+} = 1{,}49$ Å;
» » » с тремя зарядами $Tl^{3+} = 1{,}05$ Å.

Другой пример:

Ионный радиус отрицательно заряженного свинца $Pb^{4-} = 2{,}15$ Å;
атомный радиус свинца . . . . . $Pb^0 = 1{,}74$ „;
ионный радиус положительно заряженного свинца $Pb^{2+} = 1{,}32$ „;
» » » » » $Pb^{4+} = 0{,}84$ „.

Здесь еще более резко выявляется периодическая зависимость ионных радиусов от атомного номера.

II. Величина атомного (или ионного) радиуса меняется в зависимости от так называемой поляризационной способности атома (или иона).

Поляризационной способностью называется способность атома (или иона) под влиянием внешнего электростатического поля деформироваться, смещая свое положительное ядро относительно отрицательной электронной оболочки.

При этом атомы (ионы) с большими атомными (ионными) радиусами способны сильнее поляризоваться, чем атомы (ионы) с малыми радиусами.

Таким образом, отрицательно заряженные ионы (ионы металлоидов) способны больше поляризоваться, чем положительно заряженные (ионы металлов).

Внешнее электростатическое поле, необходимое для поляризации, создается соседними ионами. При этом различные ионы создают различное поле, а следовательно, обладают различной способностью поляризовать.

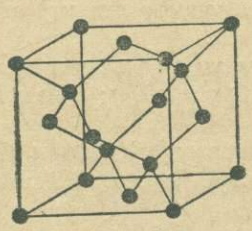
Чем меньше атомный (ионный) радиус, тем больше этот атом (ион) способен поляризовать.

Таким образом, положительно-заряженные ионы (ионы металлов) способны сильнее поляризовать, чем отрицательно-заряженные (ионы металлоидов).

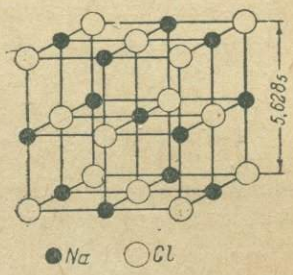
Результатом поляризации обычно является уменьшение ионных радиусов

III. Кроме величины и знака заряда и поляризационной способности, на величину атомных (ионных) радиусов оказывают влияние и другие факторы.

Величина атомного (ионного) радиуса зависит от термодинамических условий, в которых находится данное вещество. При изменении температуры и давления изменяются и атомные (ионные) радиусы.



Фиг. 23. Структура алмаза.



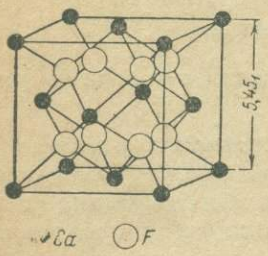
Фиг. 24. Структура NaCl.

В общем случае *атомные (ионные) радиусы тем больше, чем больше температура и меньше давление.*

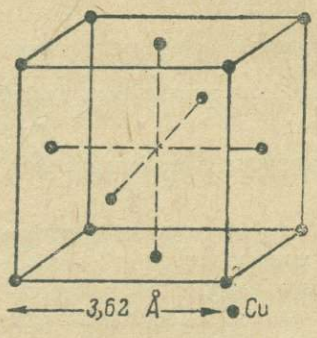
При этом, изменения величин радиусов для различных химических элементов, вообще говоря, различны.

IV. Наконец, следует еще отметить зависимость атомных (ионных) радиусов от так называемого „координационного" числа.

Координационным числом называется количество ближайших соседних атомов (ионов), окружающих данный атом (ион) в кристаллической решетке.



Фиг. 25. Структура флюорита.



Фиг. 26. Атомная решетка меди—Cu.

Так, в решетке алмаза (фиг. 23) координационное число 4, так как каждый атом углерода окружен четырьмя другими. В решетке каменной соли (NaCl) (фиг. 24) координационное число 6, как для ионов Na, так и для ионов Cl, так как каждый ион Na окружен шестью ионами Cl, и, наоборот, каждый ион Cl окружен шестью ионами Na. В решетке флюорита (CaF_2) для ионов Ca координационное число 4, для ионов F—8 (см. фиг. 25). В решетке меди (Cu) (фиг. 26) координационное число 12. В решетке хлористого цезия (CsCl) (фиг. 22) координационное число 8, как для Cs, так и для Cl.

Исследования показывают, что *чем больше координационное число, тем больше атомный (ионный) радиус данного элемента.*

Так, радиус Cl в решетке хлористого цезия (координационное число 8) больше радиуса Cl в решетке хлористого натрия (координационное число 6). Однако эти изменения радиусов ионов в общем незначительны (порядка 3—4%; редко 11—12%).

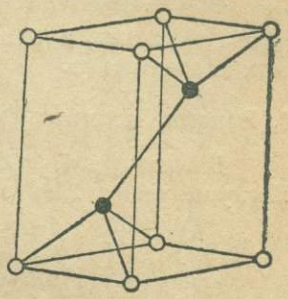
Вышеописанные соотношения атомных (ионных) радиусов имеют исключительное значение и являются ключом к пониманию строения кристаллических решеток.

Строение кристалла данного химического состава предопределяется соотношением величин радиусов сфер действия слагающих решетку атомов (ионов) и их поляризационными свойствами.

Это положение было впервые четко формулировано В. М. Гольдшмидтом и носит название кристаллохимического закона Гольдшмидта.

3. Влияние поляризационных свойств на характер кристаллической решетки

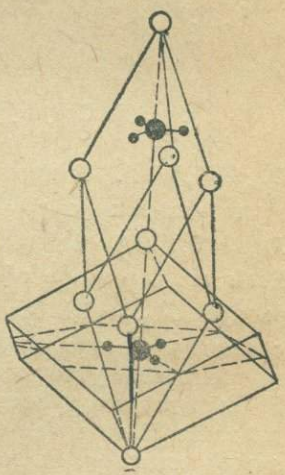
Наибольший эффект наблюдается при взаимодействии сильнополяризуемых и сильно поляризующихся ионов. Например, большой отрицательно-заряженный ион иода (J) имеет радиус сферы действия в 2,20 Å и легко поляризуется. Ионный радиус кадмия (Cd) = = 1,03 Å. Казалось бы, что расстояние между центрами ионов J и Cd в иодистом кадмие CdJ_2 не может быть меньше $2{,}20 + 1{,}03 = 3{,}23$ Å. Однако, благодаря сильной поляризации ионов J, последние, деформируясь, приближаются к ионам Cd настолько, что расстояния между ближайшими соседями сокращаются до величины 2,98 Å. В результате получается характерная для многих аналогичных случаев „слоистая решетка" (фиг. 27). К плоским сеткам слабополяризующихся ионов Cd с обеих сторон притянуты две параллельно-расположенные плоские сетки сильно поляризующихся ионов J. Параллельным повторением таких тройных слоев слагается вся решетка.



Фиг. 27. Структура CdJ_2.

Кроме образований слоистых решеток (CdJ_2, MoS_2, PbO_2 и др.), в результате сильной поляризации ионов могут образоваться решетки и другого характера. Двувалентный ион кислорода (O^{2-}) ($R_{i_O} = 1{,}32$ Å) легко поляризуется четырехвалентным ионом углерода (C^{4+}) ($R_{i_C} = = +0{,}2$ Å). Последний обладает сильной способностью поляризовать. В результате этого вместо расстояния $1{,}32 + 0{,}2 = 1{,}54$ Å, между ионами O и C наблюдаются уменьшенные расстояния.

В решетке кальцита ($CaCO_3$) ионы O притянуты к ионам C до расстояния 1,25 Å. Каждый ион C окружает себя тремя близко притянутыми ионами O, образуя в решетке самостоятельные группы — „ионные радикалы" CO_3 (фиг. 28).



Фиг. 28. Структура кальцита—$CaCO_3$.

Ионный радикал — группа CO_3 — состоит из четырех ионов, из которых 3 кислородных имеют по 2 отрицательных заряда. Таким образом вся группа имеет два отрицательных заряда $[(-3 \times 2) + 4 = -2]$.

Кристаллические решетки, в которых обособляются отрицательно-заряженные группы атомов (ионов), носят названия радикал-ионных решеток.

Радикал-ионные решетки не представляют редкости: примерами могут служить почти все соли различных кислородных кислот ($NaNO_3$, $BaSO_4$, Ag_3PO_4 и т. п.), где обособляются ионные радикалы (NO_3, SO_4, PO_4 и т. п.).

Если обособившаяся в решетке группа атомов несет не отрицательный заряд, как в предыдущих примерах, но положительный, то такая группа называется

„ионным комплексом". Например, группа NH_4 имеет один положительный заряд $(+5-1\times4=+1)$.

Кристаллические решетки, в которых обособляются положительно-заряженные группы атомов, носят название комплекс-ионных решеток. Примером комплекс-ионной решетки может служить соединение: $\{Ni\ [NH_3]_6\}^{2+}Cl_2^{2-}$.

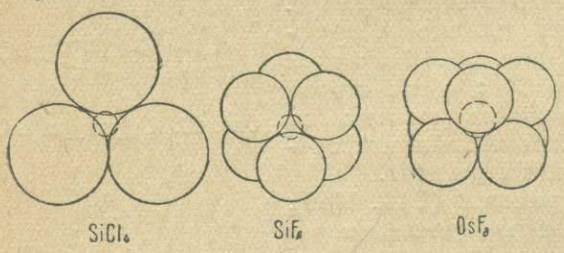
Наконец, явления поляризации могут приводить к обособлению целых отдельных молекул. Например, в решетке углекислоты CO_2, ионы кислорода O^{2-} оказываются близко притянутыми к сильно поляризующему иону углерода C^{4+} (аналогично тому, как это мы видели в решетке $CaCO_3$). Вместо ожидаемого расстояния 1,54 Å в решетке CO_2 расстояние между C и O всего только 1,05 Å. К каждому иону C оказываются притянутыми по два иона O, в результате чего получается „молекулярная решетка".

Кристаллические решетки, в которых обособляются группы атомов, образующие отдельные молекулы, носят название молекулярных решеток.

Примерами, кроме указанной решетки CO_2, могут служить многие органические соединения.

4. Влияние атомных (ионных) радиусов на характер кристаллической решетки

Важная роль относительных величин атомных (ионных) радиусов указывалась Магнусом еще в 1922 г. Воспользуемся приводимыми им примерами, выявляющими значение атомных (ионных) радиусов для тех или иных кристаллических построек.



Фиг. 29. Структура $SiCl_4$, SiF_6 и OsF_8.

Кристаллическая решетка четыреххлористого кремния $SiCl_4$ построена ионами Si, окруженными четырьмя ионами Cl таким образом, что их радиусы сфер действия касаются друг друга.

На фиг. 29 изображены четыре касающиеся друг друга сферы действия Cl (их радиус $R_{iCl}=1{,}8$ Å). В промежутке между ними, в середине, одновременно касаясь всех четырех сфер Cl, помещается в сфере действия Si (с радиусом $R_{iSi}=0{,}4$ Å). Таким образом координационное число для Si равно четырем. Если взять четыре сферы действия меньшего радиуса (например, фтор имеет радиус $R_{iF}=1{,}3$ Å) и расположить их таким же образом, то очевидно, что средний промежуток между ними будет уже меньше. Поэтому сфера действия Si в этом промежутке уже не сможет поместиться. Чтобы промежуток между сферами F был достаточно велик, необходимо расположить их другим способом. Сфере действия Si не будет тесно, если эта сфера будет помещена в промежутке не между четырьмя, но между шестью касающимися друг друга сферами действия F. Фиг. 29 иллюстрирует сказанное. Таким образом формула соединения Si с F будет не SiF_4, но SiF_6. Иным будет и координационное число (для Si — 6).

Промежуток между шестью сферами F, в котором свободно помещается сфера действия Si, будет мал для иона с большей сферой действия. Так, иону осмия (Os), имеющему радиус сферы действия $R_{iOs}=0{,}67$ Å в этом промежутке будет тесно. На фиг. 29 показано, что ион Os должен быть окружен не шестью, но восемью ионами F, для того, чтобы иметь возможность занять промежуток между ионами F. Таким образом соединение Os с F должно иметь химическую формулу OsF_8 с координационным числом 8 для Os.

Приведенные примеры показывают, каким образом соотношения между ионными радиусами сказываются на координационном числе, а отсюда и на характере кристаллической постройки и на химической формуле вещества.

5. Изоморфизм

Описанное выше изменение характера кристаллической постройки в зависимости от различных ионных радиусов происходит далеко не всегда. Если различие в отношениях ионных радиусов, слагающих решетки, незначительно (при незначительной разнице и в отношениях поляризационных свойств ионов), то и кристаллические постройки незначительно отличаются друг от друга.

Свойство веществ, аналогичных по химическому составу, образовывать аналогичные кристаллические решетки носит название изоморфизма.

Вещества, обладающие этим свойством, называются изоморфными по отношению друг к другу.

Не вдаваясь в подробности об аналогичности химического состава и кристаллических решеток, рассмотрим несколько конкретных примеров.

Сернокислый магний (эпсомит — $MgSO_4 \cdot 7H_2O$) и сернокислый никель (моренозит $NiSO_4 \cdot 7H_2O$) имеют аналогичные химические формулы, отличающиеся друг от друга только двувалентным металлом (Mg и Ni). Ионный радиус магния $R_{iMg} = 0{,}78$ Å, ионный радиус никеля $R_{iNi} = 0{,}78$ Å. Равенство радиусов, при близости поляризационных свойств ионов Mg и Ni, ведет к тому, что кристаллические решетки вышеуказанных сернокислых солей оказываются почти совершенно тождественными. Решетка $NiSO_4 \cdot 7H_2O$ отличается от решетки $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ только тем, что ионы Ni в ней замещены Mg. Такая замена очень мало отражается на соотношениях между расположением остальных ионов решеток. Лишь очень точные измерения позволяют найти незначительные относительные смещения остальных ионов.

Хлористый натрий (галит — NaCl) и хлористый калий (сильвин — KCl) представляют собою другой пример изоморфных веществ. Структуры этих веществ показывают полную аналогию, отличаясь однако друг от друга абсолютными расстояниями между узлами решеток. Действительно, ионные радиусы натрия и калия не столь близки друг к другу, как радиусы Mg и Ni ($R_{iNa} = 0{,}98$ Å; $R_{iK} = 1{,}33$ Å). Поэтому аналогия пространственных решеток не простирается на абсолютные расстояния между ионами, показывая однако полное тождество в относительном расположении ионов.

Хлористый аммоний (нашатырь — NH_4Cl) является аналогом NaCl и KCl как по химическим свойствам, так и по строению. Решетка NH_4Cl отвечает решетке NaCl, в которой ионы Na заменены ионным комплексом NH_4.

Аналогичную химическую формулу имеют и соответственные фтористые, бромистые и иодистые соли: NaF, NaBr, NaJ, KF, KBr, KJ. Пространственные решетки этих веществ, при полной аналогии строения, отличаются только абсолютными расстояниями между соответственными узлами (фиг. 24).

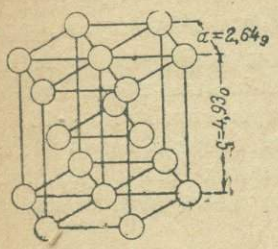
Меньшую аналогию химических формул показывают вещества Zn_2SiO_4 и Li_2BeF_4, однако и у них расположение атомов в решетке аналогично: места Zn, Si и O занимают соответственно Li, Be и F.

Из приведенных примеров видно, что в одних случаях аналогия в строении решеток простирается и на абсолютные расстояния между отдельными узлами решетки, в других случаях (например, NaCl и KCl) этого не наблюдается.

Рассмотрим ближе случай полного сходства, простирающегося и на абсолютные расстояния между атомами. Как указывалось, решетки $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ и $NiSO_4 \cdot 7H_2O$ геометрически неотличимы (по внешнему виду эти вещества легко различаются по цвету — первое бесцветно, второе имеет темную изумрудно-зеленую окраску). Решетку $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ можно рассматривать как решетку $NiSO_4 \cdot 7H_2O$, в которой ионы Mg заменены ионами Ni. Ввиду близости радиусов и поляризационных свойств ионов Mg и Ni, такая замена одних ионов другими может быть произведена не целиком, но только частично. Таким образом, могут существовать решетки, в которых не все, но только некоторые ионы Mg заме-

нены Ni. Такие решетки носят название смешанных кристаллов или изоморфных смесей.

Изоморфные смеси не следует смешивать с двойными солями. Так, изоморфная смесь $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ и $NiSO_4 \cdot 7H_2O$ не представляет соединения $MgNi[SO_4]_2 \cdot 14H_2O$ или ему подобного; в решетке соли написанной формулы ровно половина ионов Mg заменена ионами Ni. В изоморфных же смесях допустима замена одних ионов другими в любых пропорциях. Поэтому химическую формулу рассматриваемой изоморфной смеси принято писать таким образом: $(Mg, Ni)SO_4 \cdot 7H_2O$. В отдельных частных случаях количества Mg и Ni могут варьировать от 0 до 100%. Если количество Mg значительно превышает количество Ni, то формулу иногда пишут таким образом: $(Mg, Ni)SO_4 \cdot 7H_2O$. Наоборот, когда ионы Mg заменяют лишь кое-где ионы Ni в решетке $NiSO_4 \cdot 7H_2O$, то формулу такой изоморфной смеси пишут так: $(Ni, Mg)SO_4 \cdot 7H_2O$. Первая формула $(Mg, Ni)SO_4 \cdot 7H_2O$ отвечает почти бесцветным, слегка зеленоватым кристаллам, последняя — зеленым кристаллам, почти столь же темным и густоокрашенным, как и чистые кристаллы $NiSO_4 \cdot 7H_2O$. Кроме того, можно получить ряд промежуточных соединений. Таким образом мыслимы изоморфные смеси любого промежуточного состава между $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ и $NiSO_4 \cdot 7H_2O$.



Фиг. 30. Структура цинка.

Примером аналогичной смесимости могут служить и многие сплавы. Так, кристаллические решетки металлических золота (Au) и серебра (Ag) построены совершенно аналогично и отличаются только расстояниями между узлами. Решетка их аналогична решетке меди (Cu) (см. фиг. 26). Сплавы золота с серебром (электрум) являются смешанными кристаллами состава (Au, Ag). Подобные кристаллы можно себе представлять как кристаллы золота, в которых часть атомов Au заменена атомами Ag или, наоборот, как кристаллы серебра, в которых часть атомов Ag заменена атомами Au. Такая замена может наблюдаться в любых пропорциях, причем расстояния между узлами в сплавах (Au, Ag) будут промежуточными относительно расстояний между узлами в решетке Au и расстояний между узлами в решетке Ag.

Свойство изоморфных веществ образовать смешанные кристаллы переменного промежуточного состава называется совершенным изоморфизмом.

Не всякие изоморфные вещества способны образовать смешанные кристаллы переменного состава. Так, например, при обыкновенной температуре NaCl и KCl не дают изоморфных смесей. Очевидно, что разница в ионных радиусах и поляризационных свойствах Na и K настолько значительна, что в решетке NaCl нельзя заменить отдельный ион Na на ион K без нарушения целости всей решетки ($R_{i_{Na}} = 0{,}98$ Å, $R_{i_K} = 1{,}33$ Å). Не образуют смешанных кристаллов и Zn_2SiO_4 и Li_2BeF_4.

Если изоморфные вещества не образуют однородных кристаллов переменного состава, то изоморфизм этих веществ называется несовершенным изоморфизмом.

Резкой границы между совершенным и несовершенным изоморфизмом провести нельзя. Так, NaCl и KCl могут служить примером несовершенного изоморфизма только при обыкновенной температуре и давлении. При высоких температурах они способны давать изоморфные смеси (Na, K) Cl.

С другой стороны, многие вещества могут смешиваться друг с другом не в любых пропорциях, но только частично до известного предела.

Такая неполная смесимость часто обнаруживается у сплавов. Так, например,

в кристаллической решетке серебра (Ag) атомы серебра могут заменяться атомами алюминия (Al) не более чем на 20%. При большем содержании Al в сплаве возникает соединение Ag_3Al с другой структурой.

Неполная смесимость часто наблюдается у веществ, даже не изоморфных, друг с другом. Так, серебро (Ag), имеющее структуру, изображенную на фиг. 26, не изоморфно ни с цинком (Zn) (фиг. 30), ни с его соединениями с серебром AgZn, Ag_5Zn_8 и Ag_2Zn_3. Однако, несмотря на это, в кристаллической решетке серебра атомы Ag могут заменяться атомами Zn до 37%.

Смешанные кристаллы (особенно в сплавах) называются еще твердыми растворами первого рода. Их не следует смешивать с твердыми растворами второго рода, в которых одни атомы решетки не заменяются другими, но другие, посторонние атомы внедряются в данную кристаллическую решетку, распределяясь в промежутках между ее атомами.

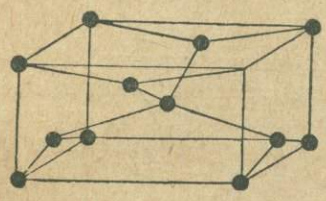
Так, кристаллы палладия (Pd) способны впитывать в себя различные количества водорода (H). При этом атомы водорода распределяются между атомами палладия, не замещая последние, но только лишь несколько их раздвигая.

Расстояние между атомами палладия в чистой решетке — 3,873 Å. В решетке же, насыщенной водородом, эти расстояния увеличиваются до 4,057 Å (насыщение может доходить до 82 атомов H на 100 атомов Pd).

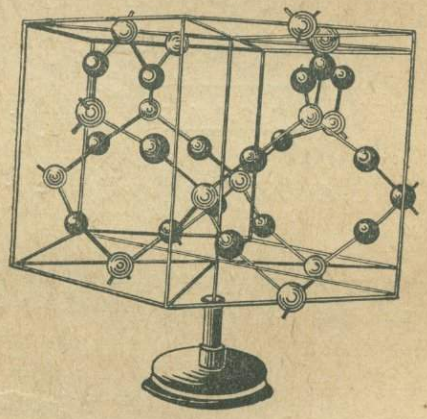
Аналогичные твердые растворы образуют и сплавы железа с углеродом и марганца с углеродом. Твердыми же растворами объясняется часто наблюдаемая окраска различных минералов в тот или иной цвет. Так, галит (NaCl) иногда имеет красивую синюю окраску, зависящую от того, что в решетку NaCl внедрены атомы Na.

6. Полиморфизм

Согласно сформулированному в разделе 2 кристаллохимическому закону Гольдшмидта, характер кристаллической решетки предопределяется соотношением атомных (ионных) радиусов и их поляризационными свойствами. Как величины этих радиусов, так и их поляризационные свойства зависят от термодинамических условий, в которых находится данная кристаллическая решетка. Изменение радиусов и их поляризационных свойств при изменении



Фиг. 31. Структура β-Sn. Белое олово.



Фиг. 32. Структура β-кварца.

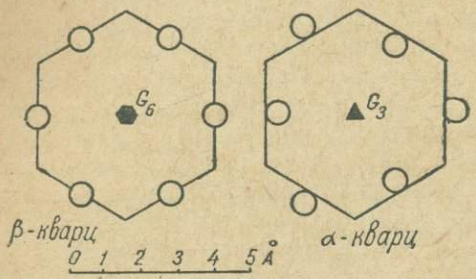
термодинамических условий в общем незначительно. Поэтому в определенных пределах температуры и давления эти изменения мало отражаются на характере всей решетки. Однако, если эти незначительные изменения перейдут определенные границы, при которых соотношения радиусов и их поляризационных свойств сделают неустойчивым прежнее расположение атомов, то должна наступить перегруппировка, должна образоваться новая решетка, с другим расположением атомов.

Свойство вещества определенного химического состава образовать различные кристаллические решетки носит название полиморфизма.

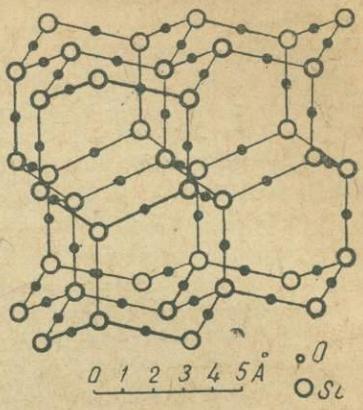
Отдельные видоизменения этого вещества, отвечающие определенным кристаллическим решеткам, называются его полиморфическими модификациями.

Рассмотрим несколько примеров.

Обыкновенное металлическое олово (так называемое „белое олово" β-Sn) образует решетку, изображенную на фиг. 31.

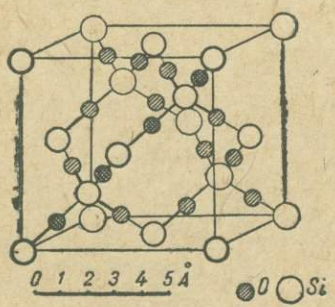


Фиг. 33. Проекция структур β- и α-кварца.

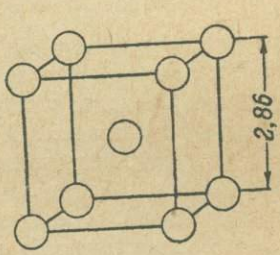


Фиг. 34. Структура β-тридимита.

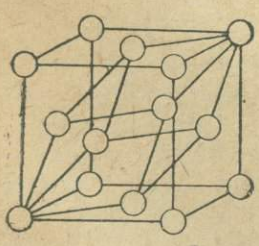
При понижении температуры (ниже 18°) белое олово распадается в порошок, представляющий собою „серое олово" с решеткой, как у алмаза (фиг. 23) („оловянная чума", разрушающая в сильные морозы оловянные изделия). При нагревании же белого олова (выше 195°) возникает еще третья хрупкая модификация. При обратном изменении температуры наступают обратные превращения.



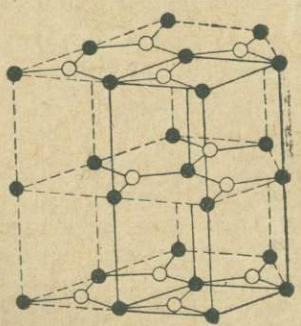
Фиг. 35. Структура β-кристобалита.



Фиг. 36. Структура α-железа.



Фиг. 37. Структура меди.



Фиг. 38.

Кремнекислота SiO_2 образует ряд модификаций, играющих важную роль как в природных, так и в технических процессах (при постройке заводских печей, в стеклянном и фарфоровом производстве и т. п.). Устойчивая при обыкновенных температурах и давлениях кремнекислота образует модификацию, называемую α-кварцем. При 575° эта модификация переходит в β-кварц, незначительно отличающийся от α-кварца (фиг. 32 и 33).

При 870° полученная группировка снова оказывается неравновесной, и атомы снова перестраиваются, образуя „β_2-тридимит“ (фиг. 34). Наконец при 1470° β_2-тридимит превращается в β-кристобалит (фиг. 35). При нагревании свыше 1710° тепловое движение совершается настолько энергично, что решетка β-кристобалита разрушается, и получается жидкое аморфное стекло.

Железо образует 3 модификации: α-железо (фиг. 36) при нагревании свыше 900° переходит в γ-железо (фиг. 37), которое в свою очередь при дальнейшем нагревании до 1400° превращается в δ-железо. α- и δ-железо по относительному расположению своих атомов ничем не отличаются одно от другого. Однако абсолютные размеры между атомами у этих модификаций резко различны, они постепенно, без скачка не могут превращаться друг в друга, а потому должны рассматриваться как две различные модификации.

Классический пример полиморфизма представляет углерод (C), дающий две полиморфные модификации: алмаз (фиг. 23) и графит (фиг. 38).

Явление полиморфизма распространено довольно широко и встречается не только у элементов („аллотропия“) или простых соединений, но и у веществ довольно сложного состава, как например, $CaCO_3$, Al_2SiO_5, $CuSeO_3 \cdot 2H_2O$, $C_6H_4Cl[NO_2]_2$ и др.

ОТДЕЛ II

ЗАКОНЫ КРИСТАЛЛООБРАЗОВАНИЯ

Глава IV

ЗАКОНЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА*

1. Зависимость кристаллообразования от температуры и давления

Как известно, вещество бывает в трех фазных состояниях: газообразном, жидком и твердом. Вещество H_2O представляет собою твердый лед при низких температурах, при 0° лед плавится в жидкую воду, которая устойчива до 100°, после чего превращается в пар. Указанные точки перехода из одного агрегатного состояния в другое отвечают атмосферному давлению (760 *мм*). При других давлениях температуры перехода будут уже иные. При бо́льшем давлении кипение воды наступает при более высоких температурах, а плавление льда — при более низких, так что интервал устойчивости воды в жидком состоянии расширяется.

Наоборот, при уменьшенном давлении вода будет устойчивой в меньшем температурном интервале. При еще более низком давлении она может оказаться совсем неустойчивой, и лед с повышением температуры будет непосредственно переходить в пар.

В физической химии, для более наглядного изображения областей устойчивости и условий взаимного перехода различных фаз, пользуются так называемыми диаграммами состояния.

В этих диаграммах графически изображается зависимость точек взаимоперехода (равновесия) фаз от температуры и давления, отложенных соответственно на абсциссе и ординате, и наглядно оконтуриваются области устойчивости каждой фазы. Для каждой определенной температуры ($t°$) и определенного давления (P) с помощью диаграммы можно узнать какое состояние или, как говорят, какая фаза вещества будет устойчивой. При $t° = 10°$ и $P = 900$ *мм* вещество H_2O будет находиться в жидком состоянии, так как на диаграмме координатам $t° = 10°$ и $P = 900$ *мм* отвечает точка b, лежащая в области воды (фиг. 39). Если теперь, оставляя давление неизмененным, мы будем понижать температуру, то получим лед, когда температура сделается меньше dc. С повышением температуры, когда абсцисса be пересечет кривую испарения, вода превратится в пар. Если мы оставим воду, взятую первоначально при $t° = 10°$ и $P = 900$ *мм* при неизменной температуре, но будем уменьшать давление, то также можем получить пар, в условиях $t° = 10°$ и $P < af$. Отсюда следует, что вода устойчива только при давлениях, превышающих некоторый ряд значений, и в пределах определенных температурных интервалов.

Совершенно также диаграмма показывает, что пар устойчив только при малых давлениях, при больших же он переходит в лед, если температура его ниже 0°, или в воду при температурах выше 0°.

Аналогичную, хотя и несколько иную картину мы видим на диаграммах состояния других веществ. Необходимо только отметить, что в большинстве случаев кривая равновесия фаз жидкой и твердой имеет наклон от оси давления (фиг. 39) и что положение этой кривой на диаграмме воды является в известном смысле аномальным. Это значит, что с повышением давления температура перехода твердой фазы в жидкую, как правило, возрастает, тогда как у воды наблюдается обратная зависимость.

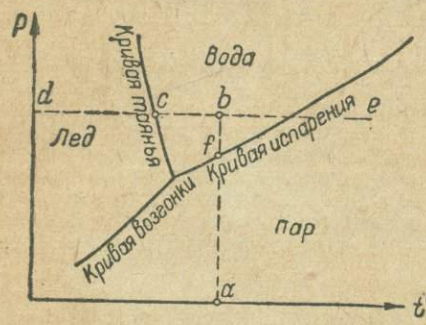
Эти диаграммы состояния, играющие огромную роль в физической химии, для нас важны в том отношении, что они показывают условия возникновения кристаллического вещества. Твердая фаза в рассмотренных случаях — фаза кристаллическая, и из диаграмм видно, что кристаллическое вещество возникает из жидкого или газообразного состояния при изменении (понижении) их температуры и при изменении (обычно при повышении) давления.

Однако, мы знаем, что само твердое вещество может быть в нескольких кристаллических состояниях — полиморфических модификациях. Каждая модификация устойчива

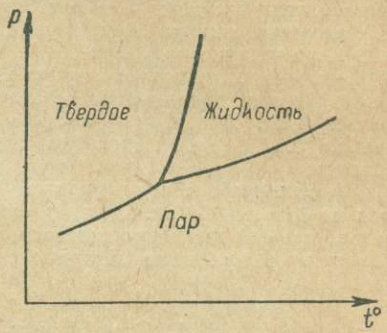
* Разделы 2 и 3 этой главы принадлежат П. В. Грушвицкому, разделы 1, 4 и 5 переработаны и дополнены им же.

в пределах определенных температур и давлений и представляет собою в этом смысле такую же „фазу" состояния вещества, как жидкость или газ. Поэтому, строго говоря, оконтуренные нами в диаграммах (фиг. 39 и 40) области твердого состояния вещества следует рассматривать как совокупность нескольких областей, принадлежащих различным полиморфным модификациям, причем области эти могут быть выделены и оконтурены самостоятельно. Такие более подробные диаграммы изображены на фиг. 41 и 42. (При рассмотрении диаграммы фиг. 41 надо иметь в виду, что кривые возгонки и испарения на ней характеризуются относительно ничтожными давлениями и практически сливаются с осью абсцисс).

Эти диаграммы показывают, что не всякую модификацию можно получить из жидкости и из газа. Некоторые (например, лед II, III, V, VI) не могут быть получены из паро-

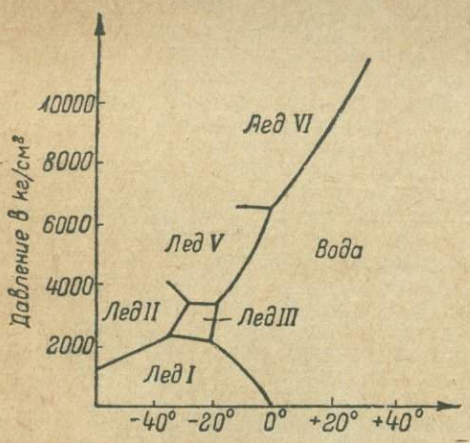


Фиг. 39. Диаграмма состояния H_2O (схема).

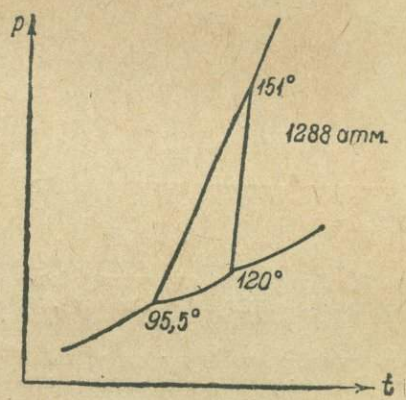


Фиг. 40. Диаграмма состояния серы (схема).

образного состояния, другие (например, лед II) не могут получаться ни из жидкости, ни из газа. Лед II получается только при изменении физико-химических условий, в которых находится какая-нибудь другая модификация льда (I, III или V).



Фиг. 41. Полная диаграмма состояния H_2O.



Фиг. 42. Полная диаграмма состояния серы.

Из всего этого следует, что переход в кристаллическое состояние может осуществляться не только за счет состояния жидкого или газообразного, но также из других модификаций твердого состояния, и что причиной этого перехода всегда является то или иное изменение физико-химических условий существования вещества.*

* Аналогично полиморфным модификациям твердого кристаллического вещества, различные модификации наблюдаются и у некоторых жидкостей. Так, кроме обычного жидкого состояния для некоторых веществ открыто „анизотропно-жидкое". Анизотропные жидкости (неправильно называемые также жидкими кристаллами) представляют собою состояние вещества, характеризующееся вполне определенными условиями перехода в другие фазы и занимающее на физико-химической диаграмме вполне определенное поле устойчивости. Поэтому оно может рассматриваться как самостоятельное фазовое состояние.

Для правильного понимания условий образования той или иной фазы следует еще заметить, что в диаграммах оконтуриваются поля, отвечающие вполне устойчивому состоянию фаз. Однако кроме устойчивых (стабильных) состояний наблюдаются еще так называемые метастабильные. Так, воду можно переохладить без превращения ее в лед, т. е. получить воду при нормальном давлении, но при температуре ниже 0°.

По исследованиям Фаренгейта, воду можно довести до температуры —9,4°, не превращая ее в лед. Но достаточно малейшей частичке льда попасть в такую переохлажденную воду, как наступает быстрая кристаллизация.

Мейер и Пфаф в 1934 г. опубликовали результаты своих исследований, по которым целый ряд веществ, как, например, салол, имеющий температуру плавления 41,7°, после тщательной очистки от взвешенных частиц фильтрованием в расплавленном состоянии не кристаллизуется даже при переохлаждении до температуры жидкого воздуха.

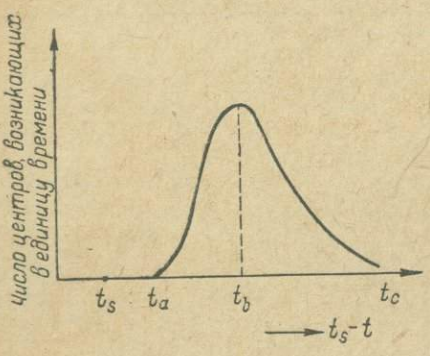
Задержка в превращении часто наблюдается и при переходах одной кристаллической модификации в другую.

Есть вещества, которые могут оставаться в метастабильном состоянии неопределенно долгое время и чрезвычайно медленно переходят во вполне устойчивую при данных условиях фазу. Интересно отметить, что задержки в переходе из твердого состояния в жидкое (т. е. случаи перегрева твердых тел при плавлении) до сих пор никем не наблюдались.

Превращение в модификацию, устойчивую при данных условиях, часто задерживается на большой срок. Однако, если такое превращение наступило, то без изменения температуры или давления или того и другого одновременно нельзя снова получить метастабильную модификацию. Например, из льда при —9°, мы не можем получить переохлажденной воды

2. Способность веществ к кристаллизации

Превращение вещества в кристаллическое состояние совершается не мгновенно. Когда при изменении физико-химических факторов (температуры и давления) мы вступаем в область устойчивости данной кристаллической фазы, то сначала возникают только отдельные зародыши этой фазы среди массы неизмененного материала. В различных участках ранее существовавшей среды (будем рассматривать случай с жидкой фазой, который особенно хорошо изучен) возникают „центры кристаллизации" — зародыши, вокруг которых и начинается процесс фазового превращения — кристаллизация.



Фиг. 43. Диаграмма скорости образования зародышей по Тамману.

По Тамману быстрота превращения в кристаллическое состояние в каждом данном случае определяется двумя факторами:

1. Количеством центров кристаллизации, образующихся в единицу времени.
2. Линейной скоростью кристаллизации.

В момент, когда вещество находится в условиях, отвечающих точке перехода твердого состояния в жидкое, скорость образования центров кристаллизации практически равна нулю. Но при охлаждении, чем больше температура жидкости будет отличаться от условий, определяемых точкой плавления, т. е., чем сильнее будет переохлаждена жидкость, тем больше будет скорость образования центров кристаллизации.

Тамман указывает, однако, что увеличение числа центров кристаллизации, возникающих в единицу времени, происходит только до некоторого предела. С дальнейшим переохлаждением скорость образования центров уменьшается и постепенно сходит на-нет.

Зависимость от переохлаждения числа центров кристаллизации, возникающих в единицу времени, может быть наглядно представлена диаграммой Таммана (см. фиг. 43). Здесь на оси абсцисс отложена величина переохлаждения расплава, выражающаяся разностью температуры плавления и температуры в данной точке оси $t_s - t$, а на ординате — скорость образования центров кристаллизации, т. е. число центров, возникающих в единицу времени.

Мы видим, что при температуре плавления t_s центры кристаллизации вовсе не образуются, с уменьшением температуры до некоторого значения t_a число образующихся центров кристаллизации становится ощутимым. Далее происходит быстрый рост скорости образования центров, которая при температуре t_b достигает своего максимума.

Еще далее она начинает падать и при температуре t_c оказывается опять практически равной нулю. Тамман установил эту зависимость экспериментально, изучая кристаллизацию целого ряда, главным образом, органических веществ.

Объяснение такой закономерности обычно связывают с резким возрастанием вязкости, которое наблюдается примерно в том же температурном интервале, что и максимум скорости образования центров кристаллизации.

С понижением температуры от точки плавления, в связи с уменьшением энергии движения молекул, резко возрастает их способность объединяться в кристаллические зародыши. Этим объясняется восходящая ветвь кривой Таммана. Но на этот процесс накладывается увеличение вязкости жидкости, приводящее к очень значительному уменьшению подвижности молекул, и так как эти изменения происходят чрезвычайно резко, то способность к образованию центров кристаллизации в некоторый момент начинает снижаться и с дальнейшим увеличением вязкости практически падает до нуля.

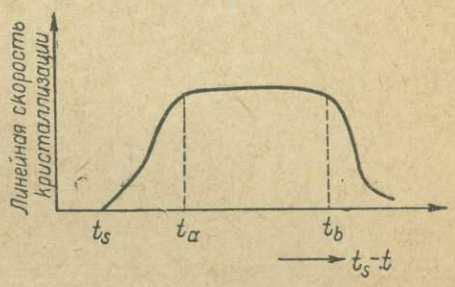
Существуют и другие попытки объяснить описанную закономерность. Сам Тамман большое значение придает предположенному им наличию в жидкостях двух типов молекул — „изотропных" и „анизотропных", из которых только вторые способны объединяться в кристаллические постройки.

Подтверждение этой точки зрения Тамман видит, прежде всего, в том, что вещества, способные легко кристаллизоваться из жидкого состояния, обычно легко кристаллизуются также непосредственно из пара (при возгонке). Напротив, жидкости, способные сильно переохлаждаться, обычно конденсируются при возгонке в виде капелек. Таким образом, способность к образованию кристаллических зародышей определяется характером самих молекул и, очевидно, не зависит от агрегатного состояния.

Однако никакие другие свойства жидкостей не обнаруживают наличия в них двух указанных типов молекул.

Надо отметить, что научная ценность даже экспериментальных данных о возникновении центров кристаллизации, полученных Тамманом, как это недавно показал Н. Фукс, * может быть поставлена под сомнение. Прежде всего, Тамман очень мало уделял внимания такому существенному для возникновения кристаллических зародышей обстоятельству, как наличие взвешенных в расплаве пылинок.

Но Фукс приводит еще более веское возражение против экспериментальных данных Таммана. Надо иметь в виду, что, как это будет пояснено ниже, рост кристаллов и кристаллических зародышей очень резко тормозится увеличением переохлаждения. Следовательно, возникающие при значительных переохлаждениях зародыши почти совершенно не растут. Обнаружение субмикроскопических зародышей в методике Таммана осуществлялось следующим приемом: выдержанную некоторое время при том или ином переохлаждении жидкость быстро нагревали почти до температуры плавления (на несколько градусов ниже ее). При этой температуре образование новых зародышей не происходило вовсе, а рост ранее возникших центров кристаллизации шел довольно интенсивно, в результате чего образовались большие сферолиты, число которых можно было подсчитать. Эта операция получила название „проявления" зародышей.



Фиг. 44. Диаграмма линейной скорости кристаллизации по Тамману.

Тамман не учел, однако, что при малых переохлаждениях, как это установили Оствальд и ряд других исследователей, в равновесии с жидкостью могут находиться кристаллики, величина которых больше некоторого предела, тогда как при меньших размерах они оказываются неустойчивыми и растворяются.

Именно такая судьба и могла, в условиях температуры „проявления", постигнуть громадную массу зародышей, возникших при большом переохлаждении, вследствие их ничтожной величины.

В этом случае диаграмма Таммана ни в какой мере не отражает действительную скорость возникновения центров кристаллизации, и самый характер зависимости — наличие резко выраженного максимума — не имеет ничего общего с действительностью. Конечно, для правильной оценки такого рода возражений нужно проследить приложимость их к отдельным конкретным экспериментальным работам Таммана, а пока это не сделано, ошибочно было бы переоценивать их значение.

Вторым фактором, который, по Тамману, определяет способность кристаллизоваться для данного вещества, является, как уже указывалось, „линейная скорость кристаллизации", или, лучше сказать, скорость роста кристаллов. Ее можно характеризовать как приращение толщины данной грани в единицу времени (обычно *мм*/минуту) или как приращение массы кристалла, отнесенное к единице площади грани, в единицу времени $\left(\frac{\text{грамм}}{см^2 \text{ минут}}\right)$.

Скорость роста кристаллов, оказывается, также зависит от переохлаждения, причем эта зависимость в значительной степени напоминает уже изученную нами связь с темпе-

---

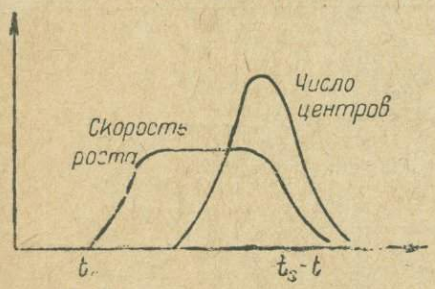
* Н. Фукс, Успехи физ. наук, т. XV, вып. 4.

ратурой скорости образования зародышей (фиг. 44). Однако между диаграммами на фиг. 43 и 44 все же имеется ряд отличий. *

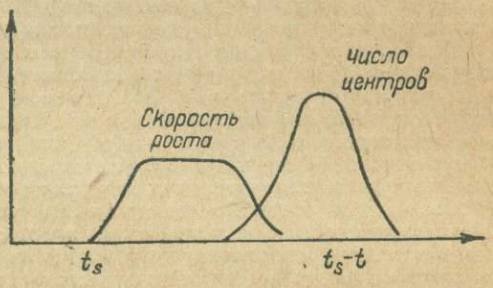
Прежде всего необходимо указать, что на диаграмме фиг. 44 кривая имеет плоский максимум, тогда как максимум на диаграмме фиг. 43 был резко выражен. Далее, весьма существенно, что кривая „линейной скорости кристаллизации" начинается непосредственно в точке плавления, тогда как для начала образования зародышей необходимо было уже некоторое переохлаждение до температуры t_a (фиг. 43).

Тамман дает следующее объяснение рассмотренной нами формы кривой скорости роста кристаллов.

Начиная с точки плавления t_s и далее, в температурном интервале $t_s - t_a$ выделяющееся при кристаллизации тепло нагревает поверхностный слой до температуры плавления, и, следовательно, скорость роста кристалла будет определяться темпом теплоотдачи. В свою очередь, теплоотдача растет с увеличением разности температур поверхности растущего кристалла и окружающей жидкости. Наконец, в условиях t_a разность температур достигает такой величины, что кристалл может развивать присущую ему скорость нарастания, являющуюся индивидуальной особенностью вещества. В интервале $t_a - t_b$ линейная скорость кристаллизации остается неизменной, так как неизменна температура на поверхности растущего кристалла, а теплоотдача осуществляется идеально. При дальнейшем переохлаждении теплоотдача с поверхности растущего кристалла становится столь интенсивной, что выделяющееся при кристаллизации тепло уже не может поддерживать в пограничном слое прежние термические условия, а процесс кристаллообразования, идущий



Фиг. 45. Случай высокой кристаллизационной способности.



Фиг. 46. Случай низкой кристаллизационной способности.

в этом слое, должен происходить уже не при температуре плавления (как в интервале $t_a - t_b$), а при более низких температурах. В результате этого, темп кристаллообразования начинает снижаться и довольно быстро падает почти до нуля.

Надо иметь в виду, что это толкование Таммана полученных им экспериментальных данных тоже вызывает ряд возражений. Дело в том, что многие авторы вообще не признают существования у кристаллов какой-то им присущей скорости роста, которая может осуществляться при температуре плавления и при условии идеальной теплоотдачи. Действительно, быть может, более естественным является предположение, что материал, находящийся на границе с поверхностью кристалла и обладающий температурой ниже температуры плавления, при условии не слишком большой вязкости, будет переходить в кристаллическое состояние практически мгновенно. Тогда линейная скорость кристаллизации будет всецело определяться темпом теплопередачи в расплаве или диффузии в растворе. Именно исходя из такого предположения даются математические формулы линейной скорости кристаллизации веществ.

Правда, с этой точки зрения, экспериментальные данные Таммана оказываются, как будто, необъяснимыми.

Характером изменения обоих рассмотренных факторов, а именно скорости образования центров кристаллизации и скорости роста кристаллов, определяется быстрота образования кристаллического вещества, или, как ее нередко называют, кристаллизационная способность.

Здесь большое значение приобретают не только величины максимумов соответствующих кривых, но и их взаимное расположение.

Если максимумы обеих кривых более или менее совпадают, то кристаллизационная способность в соответствующих им условиях будет очень велика (фиг. 45); если же максимумы разобщены, как это показано на диаграмме (фиг. 46), то кристаллизационная способность вещества будет мала.

---

* Диаграмма линейной скорости кристаллизации, данная самим Таммаком, имеет несколько более сложное строение, а именно в области кривой, примыкающей к точке t_b, наблюдается разрыв. Но мы не будем входить в рассмотрение этого второстепенного обстоятельства.

Интересно отметить при этом, что максимум кривой скорости образования зародышей всегда сдвинут в большей или меньшей степени, по сравнению с максимумом линейной скорости кристаллизации, в сторону большего переохлаждения. Сдвиг в обратном направлении никогда не наблюдается.

Если вещество обладает низкой кристаллизационной способностью, то при охлаждении, особенно если оно производится быстро, мы можем пройти через области возникновения и роста центров кристаллизации и попасть в условия, где кристаллизационная способность совершенно ничтожна. В этих условиях переохлаждения жидкость обычно приобретает очень значительную вязкость и может оставаться устойчивой иногда неопределенно долгое время.

Такие переохлажденные жидкости называются обычно стеклами. Особенно большой способностью к образованию стекол характеризуются многие силикаты. Вообще всякое твердое вещество, не обладающее кристаллической решеткой, т. е. вещество аморфное, следует рассматривать как переохлажденную жидкость. С этой точки зрения аморфное состояние является ложно твердым и может быть противопоставлено истинно твердому — кристаллическому состоянию.

С точки зрения физической химии стекловатое состояние есть состояние метастабильное. С течением времени оно может переходить в стабильное, т. е. кристаллическое состояние. Этот процесс в обычных стеклах называется расстекловыванием или заруханием.

3. Зависимость кристаллообразования от концентрации

Все приведенные до сих пор соображения характеризовали процесс кристаллизации в системе, представленной различными фазами одного и того же вещества, так что возникающий в них кристаллический материал имел тот же состав, что и фазы, за счет которых шла кристаллизация. В физической химии такие системы называются однокомпонентными, так как состав каждой фазы этих систем может быть выражен одной и той же химической единицей — компонентом. *

Практически, как в природе, так и в технике, однокомпонентные системы встречаются довольно редко, обычно наблюдаются системы из нескольких компонентов.

Влияние состава на процесс кристаллизации очень велико; иногда уже ничтожная примесь того или иного вещества совершенно меняет условия и характер кристаллообразования. Особенно чутким реагентом на примеси является кристаллизационная способность: нередко ничтожная „загрязненность" расплава увеличивает ее во много раз. Существуют материалы, закристаллизовать которые в чистом виде вообще не удается. Как бы осторожно мы их не охлаждали, они неизменно переходят в стекловатое состояние. Однако стоит прибавить к их расплаву некоторое, иногда ничтожное количество определенной группы веществ, как расплав получает способность легко и быстро кристаллизоваться. Такие вещества, резко повышающие кристаллизационную способность, обычно называются минерализаторами.

Действие минерализаторов чаще всего объясняется тем, что они сильно понижают вязкость расплава, а понижение вязкости, как уже упоминалось, облегчает возможность кристаллизации.

В проблемах синтетической химии вопросу о минерализации уделяется очень много внимания.

Если добавленное вещество по своей природе не отличается особенно резко от основного материала, то влияние такой примеси на характер и условия кристаллизации не будет столь значительным, как в случае минерализаторов, но все же, особенно если вещество добавлено в большом количестве, окажется весьма существенным.

Таким образом концентрацию компонентов мы вправе рассматривать как один из физико-химических параметров, наравне с температурой и давлением, определяющих состояние системы.

Для двухкомпонентных систем состав может быть определен одной величиной — процентной долей одного из компонентов, так как этим самым будет определено и количество другого компонента (как дополнение до 100%).

Таким образом состояние двухкомпонентной системы определяется тремя переменными величинами: температурой, давлением и концентрацией одного из компонентов. Чтобы изобразить это в виде точки на диаграмме, пришлось бы прибегать к пространственным представлениям (диаграмма с тремя координатными осями).

Однако обычно избегают этого усложнения тем, что один из параметров (чаще всего давление) считают неизменным, т. е. строят как бы изобарический разрез пространственной диаграммы. Такой разрез будет характеризовать все превращения в данной двухкомпонентной системе, происходящие под влиянием изменения температуры и концентрации при постоянном давлении.

---

* Под числом компонентов физико-химической системы понимают наименьшее число химических индивидуумов, которыми может быть выражен состав любой фазы в этой системе. Соответственно этому, химические индивидуумы, выражающие состав фаз, называются компонентами.

При переходе к системам из большего числа компонентов, состав приходится определять не одной, а несколькими величинами. В соответствии с этим, возрастает число физико-химических параметров, каждому из которых на диаграмме должна соответствовать одна из координатных осей.

Для изображения таких систем приходится прибегать к целому ряду специальных приемов, рассмотрение которых, однако, уже не входит в нашу задачу.

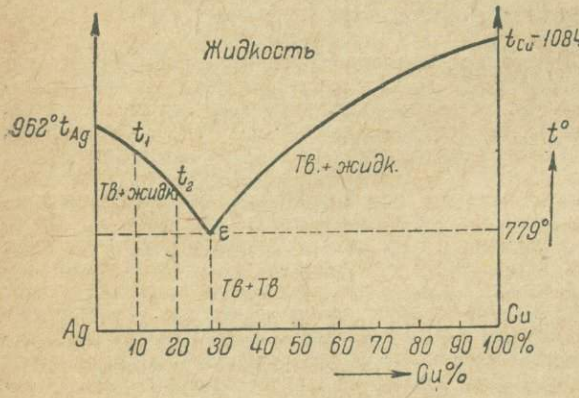
Вернемся теперь к двухкомпонентным системам.

Рассмотрим на конкретном примере зависимость температуры кристаллизации от состава смеси. Проследим, например, эту зависимость в системе Ag — Cu, где она сравнительно проста (см. фиг. 47). На приведенном графике (обычно называемом диаграммой плавкости) по вертикальной оси отложена температура, а по горизонтальной — состав системы, причем с передвижением слева направо растет процентная доля меди от 0 до 100%.

Очевидно, в левом краю диаграммы у нас представлено чистое серебро, а в правом — чистая медь. Температура плавления чистого серебра — 962° С, а чистой меди — 1084°. Этим температурам соответствуют точки t_{Ag} и t_{Cu} на диаграмме.

Кривые $t_{Ag}\varepsilon$ и $t_{Cu}\varepsilon$ характеризуют температуры кристаллизации смешанных расплавов, состав которых изображается на горизонтальной оси.

Расплав, состоящий из 90% серебра и 10% меди, кристаллизуется примерно при 910° (точка t_1), причем выпадают кристаллы серебра, а обогащающийся медью остаток оказывается еще более легкоплавким. При содержании в 20% меди, выпадение первых кристаллов серебра происходит уже при температуре примерно в 840° (точка t_2).



Фиг. 47. Диаграмма плавкости системы Ag—Cu.

Наконец, расплав, содержащий 28% Cu и 72% Ag, кристаллизуется только при 779° (точка ε), причем будут одновременно выпадать и серебро и медь. Любой другой расплав меди и серебра кристаллизуется при более высокой температуре, причем, если меди в нем меньше 28%, то сначала выпадает серебро, если больше — то медь. Остающийся при этом расплав в первом случае обогащается медью, во втором — обедняется и с дальнейшим понижением температуры обязательно достигает состава в 28% Cu и 72% Ag, при котором, как уже сказано, происходит одновременная кристаллизация и серебра и меди. Такой наиболее низкотемпературный расплав, из которого происходит одновременная кристаллизация обоих компонентов, называется эвтектическим расплавом, а точка ε, при которой затвердевает этот расплав, и соответствующая этой точке температура, называются эвтектической точкой и эвтектической температурой.

Для кристаллографии эвтектические расплавы интересны в том отношении, что при их кристаллизации получаются особого рода правильные сростки различных кристаллов, закономерно прорастающих друг друга. Такое прорастание известно под названием эвтектического.

Обычно диаграммы плавкости осложняются тем, что между компонентами двойной системы могут образоваться промежуточные химические соединения. Кроме того, очень часто наблюдается известная взаимная растворимость в кристаллическом состоянии одного компонента в другом (такая растворимость в небольших пределах имеет место и в системе Ag — Cu, но для упрощения диаграммы мы пренебрегли ею).

Говоря о растворимости в твердой фазе, нельзя не упомянуть о том, что в некоторых системах она не только может достигнуть очень широких пределов, но и делается непрерывной. Так, из расплавов золота и платины мы можем получить кристаллы с любым содержанием этих компонентов (то же явление наблюдается в системе золото — медь, но там при низких температурах оно несколько осложняется). Такие кристаллы неопределенного состава, состоящие из смеси различных компонентов, содержащихся в нестехиометрических соотношениях, но вместе с тем представляющие собой единую кристаллическую постройку (а не агрегат различных по составу кристалликов, как это было в эвтектических смесях), называются смешанными кристаллами или твердыми растворами.

Нередко область смесимости компонентов в твердом растворе оказывается в большей или меньшей степени ограниченной. Так, например, твердое серебро растворяет в себе не более 40% платины. Если же исходный расплав содержал ее в большем количестве, то при кристаллизации его часть платины обособится и не войдет в твердый раствор с серебром. Интересно отметить, что эта обособившаяся платина сама растворит в себе до 10% серебра.

Далее, говоря о твердых растворах, необходимо упомянуть о случаях уменьшения предела смесимости при понижении температуры. В этих системах при кристаллизации могут образоваться такие смешанные кристаллы, состав которых с дальнейшим понижением температуры выходит за пределы смесимости компонентов. В этом случае твердый раствор оказывается неустойчивым, и может произойти обособление избыточного (против предела смесимости) компонента.

Рассмотрим, например, как ведет себя смесь 75% свинца и 25% висмута. При охлаждении расплав такого состава окончательно закристаллизуется при 165° (первые кристаллы будут возникать при значительно более высокой температуре), причем образуется совершенно однородный твердый раствор, далеко не достигший предела смесимости. Однако при охлаждении ниже 70°, в растворе сказывается избыточный висмут, который и начинает обособляться во все возрастающем количестве. При 0° система будет уже представлена твердым раствором свинца, содержащего около 17% Bi, и прорастающими его самостоятельными кристаллами почти чистого висмута.

Пожалуй, еще более интересным является тот случай, когда способность к взаимной растворимости компонентов не только претерпевает постепенные изменения, а в определенной точке совершенно исчезает. Тогда твердый раствор распадается на систему различных по составу кристалликов, обычно закономерно прорастающих друг друга. Эта смесь и по характеру образования и по структуре вполне аналогична эвтектической, но, чтобы оттенить особенность происхождения (не из жидкого, а из твердого раствора), ее называют эвтектоидной. Такой эвтектоидный распад наблюдается при образовании белого чугуна превращением γ-модификации железа (содержащего в растворе цементит Fe_3C) в прорастающие друг друга α-железо и цементит. Интересно отметить, что как раз в этом случае быстрым охлаждением — закалкой — можно избежать распад твердого раствора и получить смешанные кристаллы в метастабильном состоянии. Как известно, переохлажденная и нерасплавившаяся γ-модификация железа (+ Fe_3C) носит название стали.

Теперь остановимся несколько подробнее на таких двойных системах, один из компонентов которых обладает резко отличной от другого температурой плавления. Именно такие условия имеют место в водных растворах солей. Здесь еще резче сказывается влияние состава на температуру кристаллизации того или иного компонента. Так, в чистом расплаве при атмосферном давлении затвердевание поваренной соли происходит при 772° С.

Из раствора, содержащего 89,8 атомных % H_2O, поваренная соль кристаллизуется уже при 180° С. При 90,3% H_2O кристаллизация NaCl происходит при 100°. Наконец, при 91,1 атомных процента H_2O поваренная соль выпадает только при 0°. При еще большем содержании H_2O в растворе NaCl не образуется вовсе, а при температурах ниже 0,15° выпадает гидрат хлористого натрия $NaCl \cdot 2H_2O$. При содержании 92,3% воды в растворе NaCl, кристаллизация хлористого натрия (в виде $NaCl \cdot 2H_2O$) происходит только при — 21,1°, причем одновременно вода превращается в лед (получается эвтектическая смесь H_2O и $NaCl \cdot 2H_2O$). При еще большем содержании воды, при понижении температуры сначала будет образовываться лед, и раствор, обогащенный поваренной солью, в конце концов будет давать ту же эвтектическую смесь.

Из всего сказанного следует, что, несмотря на все кажущееся несходство между растворами и расплавами, по существу между ними нет никакой принципиальной разницы.

Графическое изображение фазовых превращений в растворе, как и во всякой физико-химической системе, производится с помощью диаграмм состояния, называемых здесь кривыми растворимости. Кривые эти совершенно тождественны с уже рассмотренными диаграммами плавкости. Внешне некоторым отличием может служить то, что, если в диаграммах плавкости обычно (тоже далеко не всегда) рассматривались все возможные смеси данных компонентов от 0 до 100% каждого, то диаграммы растворимости всегда характеризуют только некоторый практически интересный интервал составов.

С помощью диаграмм растворимости мы можем решать целый ряд практических задач. При этом надо всегда иметь в виду, что нередко содержание соли в них рассчитывается не по отношению ко всему раствору, а относительно чистого растворителя, т. е. учитывается число грамм соли, приходящихся на 100 *г* воды. Такое выражение состава часто оказывается более удобным в практическом отношении.

Название кривых растворимости только-что описанные диаграммы состояния получили потому, что они показывают, какое количество данного вещества может быть растворено в том или ином количестве растворителя в условиях определенных температуры и давления. Вообще растворимостью называют количество данного вещества, содержащееся в 100 *г* раствора, находящегося в равновесии с твердой фазой того же вещества, т. е. раствора, в котором без изменения физико-химических условий невозможно дальнейшее увеличение концентрации путем растворения. Такой раствор принято называть насыщенным; твердое вещество в нем не растворяется и не образуется.

Если при данных физико-химических условиях концентрация данного раствора меньше концентрации насыщения, то такой раствор называется недосыщенным или ненасыщенным. В таком растворе будет происходить растворение кристаллического вещества.

Если же при данных физико-химических условиях концентрация данного раствора

больше концентрации насыщения, то такой раствор называется пересыщенным. В таком растворе может происходить образование кристаллического вещества.

Для получения кристаллического вещества из раствора очень часто пользуются изменением растворимости, в зависимости от температуры. Изменив температуру (обычно приходится понижать ее), мы получаем сначала насыщенный раствор, а затем пересыщенный раствор, из которого, как уже указывалось, может выпадать кристаллическое вещество.

Однако пересыщение раствора, а следовательно, и получение из него кристаллического вещества может быть достигнуто не только изменением температуры, но и изменением концентрации раствора, причем процесс кристаллизации будет происходить при неизменных температуре и давлении. Изменение концентрации раствора может быть достигнуто различными способами. Обычно для этого прибегают к испарению растворителя, причем раствор обогащается нелетучим компонентом.

Вообще, для получения кристаллического вещества из раствора чаще всего прибегают или к изменению (обычно уменьшению) температуры, или же к удалению растворителя.

4. Перекристаллизация

Если мы желаем получить из водного раствора некоторое количество медного купороса ($CuSO_4 \cdot 5H_2O$) для наблюдений за ростом (возникновением) и огранкой образовавшихся кристаллов и если готового раствора у нас нет, то для осуществления кристаллизации необходимо такой раствор предварительно приготовить.

Для этого мы, прежде всего, должны выбрать сосуд, в котором намерены вести кристаллизацию. Такие сосуды называются кристаллизаторами и в простейшем случае представляют собою стеклянные цилиндрические чашки.

После измерения емкости кристаллизатора определяют термометром температуру, при которой будет вестись кристаллизация (температуру комнаты или температуру термостата, если кристаллизацию предположено вести в термостате). С помощью кривых или таблиц растворимости вычисляется количество вещества, необходимого для насыщения выбранного нами количества воды при данной температуре.

Так, если кристаллизатор вмещает 300 $см^3$ воды, температура комнаты — 20° С, то следует взять 127 $г$ медного купороса. Взвешивание производится на простых весах с точностью от одного до четверти грамма, причем бывает полезно с помощью фарфоровой ступки предварительно растолочь в порошок взятое для кристаллизации вещество.

К отвешенному количеству прибавляют добавочно столько вещества, сколько желают получить в виде кристаллов.

Указанное количество вещества помещается в стакан и растворяется в отмеренном с помощью мензурки объеме растворителя (в нашем случае — в 300 $см^3$ воды). Однако, взятая нами увеличенная порция (вместо 127 $г$, приблизительно, 130 $г$ медного купороса) не может целиком раствориться в данном объеме при 20° температуры. Поэтому раствор необходимо несколько нагреть (или растворять в нагретой воде).

Когда все вещество будет растворено, фильтруют полученный раствор прямо в кристаллизатор, в котором при охлаждении и образуется необходимый нам пересыщенный раствор. Пустой кристаллизатор рекомендуется слегка нагреть. Кристаллизатор должен быть тщательно вымыт от пыли; фильтрование следует производить осторожно, не допуская разбрызгивания раствора.

Прикрыв кристаллизационную чашку стеклом или листком бумаги, ставят готовый раствор или в термостат, или просто в спокойное место, наименее подверженное колебаниям температуры.

Обычно уже на следующий день на дне кристаллизационной чашки можно обнаружить несколько отдельных кристалликов, выпавших из раствора. Если их немного и они друг другу не мешают, то можно оставить их, не трогая.

Для их дальнейшего роста прибегают ко второму способу создания пересыщения: из раствора, прикрытого только бумагой, растворитель непрерывно испаряется и тем самым увеличивает концентрацию оставшегося раствора. Увеличение концентрации создает пересыщение, благодаря которому происходит дальнейший рост кристаллов.

В случае выпадения слишком большого числа кристаллов или образования на дне сосуда сплошной мелко-кристаллической корки, раствор перефильтровывают в другой кристаллизатор.

Из числа выпавших кристалликов выбирают один или несколько наиболее хорошо образованных и пинцетом перекладывают их в отфильтрованный раствор. Кристаллики следует перекладывать непосредственно из раствора в раствор, не оставляя их долго на воздухе. В противном случае их следует сразу же осторожно обтереть куском фильтровальной бумаги, после чего кисточкой смахивают приставшие волокна. Если этого не сделать, начнется энергичное высыхание мокрых кристалликов и выпадение на их поверхности растворенного вещества, что нарушит однородность и создаст дефекты в огранке.

Когда выращиваемым кристаллам станет тесно в имеющемся объеме раствора, готовят (выше описанным способом) новые порции раствора, в которые и переносят кристаллы. При этом, во избежание возможного растворения, не следует опускать кри-

сталлы, не проверив температуру полученного раствора и таким образом не убедившись в том, что раствор действительно пересыщен.

Для первых опытов по выращиванию кристаллов удобно брать различные сернокислые соли двухвалентных металлов: $CuSO_4 \cdot 5H_2O$; $MgSO_4 \cdot 7H_2O$; $NiSO_4 \cdot 7H_2O$; $CoSO_4 \cdot 7H_2O$; $ZnSO_4 \cdot 7H_2O$; хорошо кристаллизуются двойные сернокислые соли дву- и одновалентных металлов. Хорошо кристаллизуются и двойные сернокислые соли одно- и трехвалентных металлов (квасцы): $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$ и аналогично $KCr(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$.

Кроме перечисленных сернокислых солей хорошо кристаллизуется сегнетова соль хлорноватокислый натрий ($NaClO_3$) и многие другие вещества.

Если растворимость данного вещества не известна, то растворяют вещество в теплом или даже горячем растворителе до его насыщения. При остывании получается раствор, часто настолько пересыщенный, что сразу выпадают неправильные сростки или мелкокристаллические корочки. Такому раствору дают вполне охладиться и, отфильтровав, получают раствор, вполне годный для медленного выращивания кристаллов. Предварительное взвешивание вещества, взятого для приготовления раствора и выпавшего при его охлаждении, даст опорные цифры для приготовления следующих порций раствора, если в том встретится необходимость.

Растворение кристаллического материала и получение его вновь в кристаллическом состоянии с помощью охлаждения полученного раствора или испарением из него растворителя называют перекристаллизацией вещества.

5. Пути образования кристаллического вещества в природе и в технике

Как уже указывалось выше, мы не можем подробно останавливаться на теории явлений кристаллизации многокомпонентных систем. Отметим только, что явления эти могут быть классифицированы по типу фазы или фаз, за счет которых идет кристаллизация, и по соотношению в химическом составе кристаллизующейся и исходной фаз.

Возникновение кристаллического вещества может происходить в газообразной, жидкой и твердой среде. При этом состав кристаллизующегося материала может быть одинаков с окружающей средой, может лишь частично отличаться от состава окружающей среды, давая с другими компонентами однородные фазы переменного состава, и, наконец, возникающее кристаллическое вещество может иметь другой состав, чем окружающая его среда, и не образовывать с нею однородных смешанных фаз.

Рассмотрим систематически примеры этих случаев.

а) Кристаллизация в газообразной среде

1) Окружающая среда имеет состав кристаллизующегося вещества. Наблюдается обычно при резком уменьшении температуры или увеличении давления. Практически газ, превращающийся в кристаллическое вещество, находится почти всегда в смеси с другими газами, присутствующими хотя бы в ничтожном количестве. Таким образом этот случай редко осуществляется в чистом виде.

Примером такого процесса из области техники может служить очистка различных веществ с помощью „возгонки". Так, для получения химически-чистого металлического магния, последний под большим вакуумом подвергается сильному нагреву в электрической печи. Воздух над раскаленным металлом выкачивается; образующиеся пары магния поднимаются к холодным стенкам печки и осаждаются там в виде твердой кристаллической корки (примеси при этом не возгоняются).

2) Окружающая среда представляет собою смесь газов, один или несколько из которых переходят в твердое состояние.

Этот случай осуществляется гораздо чаще; примеры кристаллообразования этим способом наблюдаются как в природе, так и в технике и легко могут воспроизводиться в лаборатории.

Образование инея, снежинок или кристалликов льда на стеклах окон, образование кристалликов серы и хлористого натрия в вулканах объясняется непосредственным переходом паров этих веществ в твердое состояние.

В лаборатории легко осуществить сгущение паров иода. Для этого нужно нагреть в закрытой колбе несколько кристалликов этого вещества, до их испарения. В холодных частях пары иода будут давать кристаллический материал, нередко хорошо ограненный (этим путем в технике и производится очистка „сырого" иода).

3) Окружающая среда другого состава, чем возникающее кристаллическое вещество. Сюда относятся процессы кристаллообразования при химическом взаимодействии газов. В качестве примера из техники можно привести получение окиси цинка. При плавке цинковых руд получающиеся пары цинка, поднимаясь вверх, окисляются кислородом воздуха и образуют белый кристаллический порошок окиси цинка.

Другой пример — образование нашатыря при проникновении паров соляной кислоты в атмосферу, содержащую аммиак ($NH_3 + HCl = NH_4Cl$) (белые корки, часто покрывающие пробки рядом стоящих склянок соляной кислоты и аммиака, образуются именно таким путем).

В природе также встречаются примеры кристаллообразования при взаимодействии веществ, находящихся в газообразном состоянии. Так, пары хлорного железа и воды в вулканах образуют кристаллы железного блеска $2FeCl_3 + 3H_2O \rightarrow Fe_2O_3 + 6HCl$.

б) Кристаллизация в жидкой среде

Процессы кристаллообразования, протекающие в жидкой среде, наблюдаются гораздо чаще и играют первенствующую роль как в природе, так и в технике.

1) Окружающая среда — того же состава, как и возникающее кристаллическое вещество. В качестве примера процесса, широко распространенного в природе, можно привести образование льда в реках и озерах.

Пример из техники — получение всевозможных металлических изделий при помощи литья.

В лаборатории подобный процесс кристаллизации легко осуществить расплавлением и последующим охлаждением очень многих легкоплавких солей (для опытов особенно удобен салол).

2) Окружающая среда имеет состав, отличный от кристаллизующегося материала, причем в процессе кристаллизации происходит изменение этого состава (состав расплава или раствора). Этот способ кристаллообразования имеет наибольшее значение в земной коре. Магматический расплав, застывая, дает огромные массивы кристаллического вещества (батолиты, лакколиты и т. д.). При этом наиболее летучие, насыщенные водой и газами легкие подвижные части часто дают месторождения очень больших и хорошо образованных кристаллов.

Сюда же примыкают случаи образования кристаллов из настоящих водных растворов. Так, при испарении морской воды образуются месторождения различных солей (хлористые и сернокислые соли натрия, калия, магния и др.).

Кристаллизация из расплавов и растворов очень широко используется и техникой. Основной процесс металлургии — плавка руд, в результате которой получается чугун или другие металлические сплавы — является примером такого способа получения кристаллического вещества.

На аналогичных процессах кристаллизации основаны и важнейшие способы очистки очень многих химических препаратов. Посторонние примеси при кристаллизации остаются в растворе.

3) Кристаллизующее вещество не образует фаз переменного состава (растворов или расплавов) с остальными компонентами системы. Сюда относятся случаи выпадения кристаллического осадка при взаимодействии нескольких растворов.

Такие реакции играют исключительную роль в химической практике. Достаточно вспомнить, что качественный химический анализ в большой степени основан именно на реакциях, при которых в результате взаимодействия двух растворов получается твердый осадок (например, в щелочном растворе соли кальция определяются с помощью раствора щавелевокислого аммония:

$$CaCl_2 + (NH_4)_2C_2O_4 \rightarrow CaC_2O_4 + 2NH_4Cl.$$

Получается белый кристаллический осадок щавелевокислого кальция).

При получении соды по способу Сольвея имеет место взаимодействие растворов кислой углеаммониевой соли и хлористого натрия

$$NH_4HCO_3 + NaCl \rightarrow NaHCO_3 + NH_4Cl.$$

Получающаяся кислая угленатровая соль образует осадок.

Другой пример — получение бромистого серебра для фотографических пластинок. Для этого смешивают теплые водные растворы азотносеребряной соли и бромистого аммония:

$$AgNO_3 + NH_4Br \rightarrow AgBr + NH_4NO_3.$$

Для получения бромистого серебра в мелкораздробленном состоянии (суспензии) реакция ведется в желатине.

Кристаллизация в жидкой среде другого состава, чем возникающее вещество, имеет место и при электролизе, теперь широко применяемом в технике для получения или очистки различных металлов. С помощью электролиза очищается и получается медь (из сернокислых растворов), получается и очищается цинк (из сернокислых и хлористых растворов), очищается серебро (из азотнокислых растворов) и т. д. В природе также нередко наблюдаются реакции взаимодействия растворов. Так, вода, обогащенная CO_2, смешиваясь с растворами гидрата кальция, дает в осадке минерал кальцит:

$$H_2CO_3 + Ca(OH)_2 \rightarrow CaCO_3\downarrow + 2H_2O.$$

в) Кристаллизация в твердой среде

Этот случай кристаллизации не играет такой роли, как кристаллообразование в жидкой среде, однако отдельные важные примеры кристаллизации в твердой среде имеют место и в природе и в технике.

1) Окружающая твердая среда того же состава, как и возникающее кристаллическое вещество. Сюда, прежде всего, относятся явления полиморфных превращений, которые уже были рассмотрены нами раньше.

Пожалуй, здесь же будет уместно упомянуть о случаях перекристаллизации твердого вещества без образования полиморфных модификаций. Так, иногда мелкокристаллические сростки под влиянием изменений давления, температуры, механических воздействий и тому подобных причин превращаются в крупнокристаллические. В качестве примера из техники можно упомянуть об укрупнении зерен железа в вагонных осях, наблюдаемом в результате постоянных сотрясений. В природе, под влиянием давления и высокой температуры, тонкозернистый мел превращается в крупнокристаллический мрамор. В лаборатории проследить за подобной перекристаллизацией удобно на препаратах ментола. Микроскопические лучеобразно расходящиеся иголочки ментола через несколько дней после своего образования из расплава превращаются в ясно различимые агрегаты отдельных кристалликов.

Наконец, образование кристаллического вещества в твердой среде наблюдается при переходе аморфного вещества в кристаллическое.

Правда, аморфное вещество, как было нами выяснено выше, следует рассматривать как переохлажденную жидкость, а потому и явления превращения аморфного вещества только формально и условно могут быть отнесены к разбираемому типу кристаллообразования. Как мы уже говорили, аморфное вещество, представляя собою переохлажденную жидкость, может крайне медленно „расстекловываться", переходя в более устойчивое кристаллическое состояние.

Сюда относятся наблюдаемые нередко явления помутнения старинных стекол „засахаривание" карамели и т. п.

Явлениям такого перехода в кристаллическое состояние сильно способствуют изменения температуры и давления.

Наконец, могут „расстекловываться" многие стекловатые горные породы, превращаясь в агрегат мельчайших кристаллических зерен.

Однако эти процессы расстекловывания горных пород, а также и многие другие процессы превращений аморфных веществ следует уже относить к следующей рубрике процессов кристаллизации.

2) Кристаллизующееся вещество отличается по составу от первоначального твердого материала, но образует с ним фазы переменного состава. Примером подобного явления может служить уже рассмотренный нами случай распада твердого раствора при уменьшении предела смесимости. Сюда же следует отнести только что указанный пример образования кристаллического вещества в аморфной среде, когда кристаллы и аморфный материал характеризуются различными составами (как это мы имеем в горных породах).

3) Кристаллизующееся вещество отличается по составу от первоначального твердого материала и не образует с ним фаз переменного состава. Сюда можно отнести уже рассмотренные нами распады эвтектоидных систем.

Здесь же надо упомянуть о случаях образования кристаллического вещества из твердой фазы, которое сопровождается выделением газообразного или жидкого продукта, например, широко используемый в технике прием получения негашеной извести при прокаливании известняка или мрамора.

Наконец, несколько особняком стоят случаи образования кристаллического вещества при взаимодействии фаз различного характера, а именно при реакции твердое — газ и твердое — жидкость.

Глава V

ЗАКОНЫ САМООГРАНЯЕМОСТИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА

1. Основной закон самограняемости кристаллического вещества (закон плоскогранности и прямореберности кристаллов)

Следствием правильного внутреннего строения кристаллического вещества, т. е. следствием существования пространственной решетки является то, что внешние границы этого вещества отражают правильность его внутреннего строения, принимая форму многогранников (кристаллов).

Кристаллическое вещество способно самограняться, т. е. принимать форму плоскостных многогранников.

Напомним некоторые основные сведения из геометрии многогранников. Плоскостными многогранниками называются фигуры, ограниченные плоскими

поверхностями. Плоскости, ограничивающие многогранник, называются гранями, линии пересечения граней — ребрами и точки пересечения ребер — вершинами многогранника. Различают многогранники выпуклые и невыпуклые, с входящими углами. Если обозначить число граней данного выпуклого многогранника через F, число его ребер через K и число вершин через E, то можно доказать, что $F+E=K+2$.

Совокупность граней, пересекающихся в параллельных ребрах, называется „поясом" или „зоною". Направление, параллельное всем граням и ребрам пояса, называется осью пояса.

В способности кристаллического вещества образовывать многогранники проявляется наиболее характерный внешний признак кристаллического вещества. Если существование пространственной решетки по существу дела отличает кристаллическое вещество от аморфного, то существование кристаллов является внешней особенностью кристаллического вещества, резко отличающей это вещество от аморфного. Аморфное вещество, без превращения в кристаллическое, ни при каких условиях не может самоограняться.

Способность кристаллического вещества образовать кристаллы, т. е. многогранники с плоскими гранями и прямыми ребрами, обращала на себя внимание исследователей с древнейших времен. Закон самограняемости кристаллов, называемый также законом плоскогранности и пряморебрности, является исторически первым научным обобщением в области изучения кристаллического вещества, и о нем сообщает уже Плиний (679 г.).

Правильная внешняя форма кристаллов обращала на себя внимание и в средние века: кристаллы рассматривались как чудесная игра природы, и с ними связывались различные мистические представления. После возникновения теорий строения кристаллического вещества, существование кристаллов уже перестало казаться столь чудесным.

Действительно, с точки зрения учения о пространственной решетке *грани кристаллов представляют собою различные плоские сетки, ребра — ряды пространственной решетки.*

Формулированное выше положение определяет основы связи между кристаллическим многогранником и его решеткой. Параллельно каждой грани кристалла проходят плоские сетки его решетки; параллельно каждому ребру кристалла располагаются ряды его решетки. Так как каждый ряд решетки можно рассматривать как линию пересечения двух плоских сеток и эта линия пересечения лежит в обеих плоских сетках, то, *параллельно двум любым (непараллельным) граням кристалла располагаются ряды его решетки.*

Так как всякую плоскую сетку можно рассматривать как плоскость, проведенную через два ряда решетки, то *параллельно двум любым (непараллельным) ребрам кристалла располагаются плоские сетки его решетки.*

Все эти, почти очевидные следствия позволяют находить расположение плоских сеток и рядов кристаллических многогранников, не прибегая к рентгенометрии.

Однако кристаллическое вещество может получить многогранную форму только тогда, когда возникновение и дальнейшее увеличение объема этого вещества не стесняется окружающей средой. Необходимо, чтобы внешняя окружающая среда не мешала свободному образованию кристалла. Поэтому способность кристаллического вещества самограняться выявляется далеко не всегда, а только лишь в особо-благоприятных условиях.

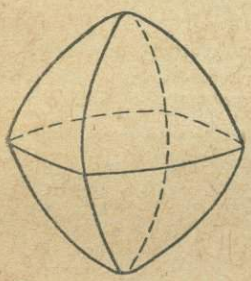
Если посторонние тела или другие соседние куски того же кристаллического вещества мешают свободному кристаллообразованию, то получаются или совершенно неправильные или частично деформированные куски кристаллического вещества. Отсюда имеем кристаллы бо́льшей или меньшей степени совершенства лишь отчасти сохраняющие огранку, и так называемые кривогранные кри

сталлы. Часто такие кристаллы наблюдаются в результате потери первоначальной, вполне совершенной огранки вследствие различных внешних воздействий на кристалл уже после его образования.

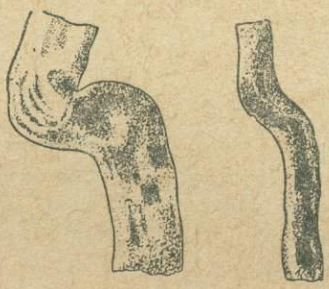
Так, очень часто кривогранность вызывается явлениями растворения. Если поместить кристалл в какую-либо среду, в которой вещество кристалла может растворяться (например, кристаллы сахара в воду), то растворение обычно начинается с вершин и ребер кристалла. При этом кристалл, постепенно округляясь, получает кривогранную форму.

На фиг. 48 изображен кривогранный кристалл квасцов.

Часто кривогранность обусловлена и чисто механическими факторами. Так, в горных породах, подверженных давлению, иногда некоторые кристаллы деформируются, изгибаясь и скручиваясь. На фиг. 49 изображены сильно изогнутые кристаллы кианита ($Al_2O_3 \cdot SiO_2$). Изогнутые кристаллы можно легко получить из столбиков каменной соли, изгибая их в воде или солевом растворе. Наконец, кривогранность кристаллов часто возникает благодаря *вицинальным граням.*



Фиг. 48. Округленный кристалл квасцов.



Фиг. 49. Кривогранные кристаллы кианита.



Фиг. 50. Кристалл турмалина с вицинальными призмами.

Вицинальными гранями называются грани или части грани, отклонившиеся от своего правильного положения.

На кристаллах турмалина боковые грани заменяются рядом очень тонких вицинальных граней, совокупность которых создает впечатление кривогранной поверхности (фиг. 50).

Таким образом причин кривогранности кристаллов может быть много, и кривогранные кристаллы не представляют собою редкости, но это, конечно, нисколько не умаляет значения закона о способности кристаллов принимать форму плоскостных многогранников.

2. Явления роста кристаллов

Среди разнообразных способов возникновения кристаллического вещества, получение кристаллических многогранников легче всего наблюдается при кристаллизации из растворов. Для этого только следует позаботиться о том, чтобы при кристаллизации не возникало большое число центров кристаллизации. Для непосредственного наблюдения, каким образом осуществляется рост кристаллов, лучше всего прибегнуть к микроскопу.

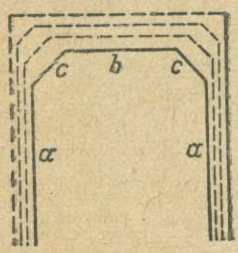
Для этого помещаем при помощи стеклянной палочки каплю пересыщенного раствора на предметное стекло. Быстрое испарение очень скоро приведет к образованию хорошо заметных под микроскопом кристалликов. Наблюдая за кристаллами через небольшие промежутки времени, не трудно заметить постепенное их увеличение. Отдельные грани, ограничивающие кристалл, перемещаются при этом параллельно самим себе.

Скоростью роста данной грани называется то расстояние по нормали к ней, на которое она отодвигается в единицу времени при росте кристалла.

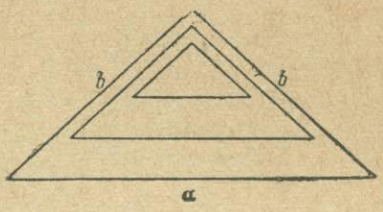
Скорости роста различных кристаллических граней, вообще говоря, различны.

Это различие в скоростях роста различных граней обусловливает весь внешний облик (габитус) кристалла. Рассмотрим на примере — каким образом скорость роста влияет на величину (площадь) грани. Пусть грани *a* (назовем их прямыми гранями) (фиг. 51) растут медленнее граней *c* (назовем грани *c* косыми гранями). Тогда нетрудно видеть, что при росте кристалла косые грани *c* уменьшаются, а в конце совсем могут зарасти и исчезнуть.

Наоборот, если предположить, что у того же кристалла (фиг. 51), скорость роста косых граней *c* меньше скоростей роста прямых граней *a*, то при росте кристалла зарастают прямые грани, и в конце концов кристалл может оказаться ограненным только одними косыми гранями.



Фиг. 51. Схема роста кристалла с различными скоростями роста у разных граней.



Фиг. 52.

Приведенные примеры достаточно ясно показывают, что при своем росте *кристалл покрывается гранями с малыми скоростями роста, грани с большими скоростями роста зарастают и могут даже совсем исчезнуть.*

В некоторых редких случаях грани с большими скоростями роста оказываются больше граней с малыми скоростями. Так, в случае, показанном на фиг. 52, медленнорастущие грани *b* всегда будут меньше быстрорастущей грани *a*.

Возникает вопрос — почему же скорости роста одних граней отличаются от скоростей роста других? Очевидно, должна существовать разница в физической природе таких граней. Как мы видели, грани кристалла представляют собою плоские сетки. Различные же (непараллельные друг другу) плоские сетки имеют различное строение. Прежде всего, они отличаются ретикулярной плотностью. Очевидно, что чем больше плотность, тем бо́льшее количество беспорядочно-плавающих в растворе частиц должно принять правильную ориентировку для образования плоской сетки. Наоборот, для образования плоской сетки малой плотности небольшое количество частиц раствора должно правильно ориентироваться друг относительно друга. Отсюда следует, что грани с малыми плотностями должны расти скорее граней больших плотностей.

Поэтому

кристаллы покрываются гранями с большими ретикулярными плотностями. Грани малых плотностей встречаются реже и часто совершенно зарастают.

Это положение было высказано (в несколько другой формулировке) еще Браве, творцом учения о пространственной решетке, и носит название закона Браве.

Однако, кроме ретикулярной плотности, на относительные скорости роста различных граней может влиять и целый ряд других факторов, — факторов внешних, физико-химического порядка. Вследствие этого закон Браве часто совер-

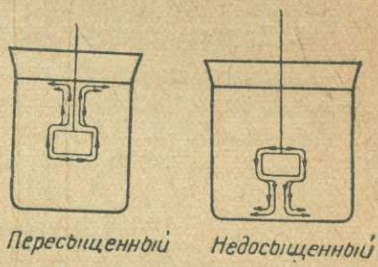
шенно нарушается, и кристалл оказывается покрытым гранями с малыми плотностями, грани же больших плотностей иногда зарастают.

Остановимся далее и на этих факторах.

3. Концентрационные потоки

Рассмотрим, каким образом совершается рост кристалла. Вокруг кристалла находится пересыщенный раствор, в котором имеется избыток частиц, по сравнению с насыщенным раствором.

Эти частицы близ кристалла принимают правильную ориентировку и образуют плоские сетки, налагающиеся на кристалл и тем самым увеличивающие его размеры. Вместе с тем, образовавшаяся плоская сетка лишает пересыщения раствор, находящийся непосредственно близ кристалла, и таким образом кристалл оказывается окутанным слоем уже не пересыщенного, но насыщенного (или слабо пересыщенного) раствора. Казалось бы, что рост кристалла должен приостановиться, однако получившийся вокруг кристалла насыщенный раствор имеет меньший уд. вес, чем окружающий его пересыщенный, вследствие чего он поднимается вверх. Этим самым новые порции пересыщенного раствора могут подойти к кристаллу, отчего кристалл снова получает возможность роста. Легкий, менее густой раствор поднимается вверх, образуя над кристаллом струю в окружающем, более концентрированном растворе (фиг. 53).



Фиг. 53. Концентрационные потоки в пересыщенном и недосыщенном растворе.

*Потоки раствора, окружающие растущий кристалл и имеющие иную концентрацию, чем остальная масса раствора, носят название концентрационных потоков *.*

Концентрационные потоки, открытые, как доказал Г. Г. Леммлейн, акад. Товием Ловицем в Петероурге в 1805 г. и подробно изученные Г. В. Вульфом (1901 г.), являются причиной двух существенных явлений.

С одной стороны, концентрационные потоки создают расслаивание раствора. Менее концентрированный раствор, струей поднимаясь над растущим кристаллом, скапливается в верхних слоях раствора и тем самым нарушает первоначальную однородность раствора. Это явление было эмпирически изучено П. А. Земятченским (1914 г.).

С другой стороны,

концентрационные потоки сильно влияют на относительные скорости роста различных граней и тем самым на весь внешний облик кристалла.

Действительно, вследствие того, что концентрационные потоки, направляясь вверх, заслоняют собою верхние части кристалла, последние всегда будут находиться в менее благоприятных условиях роста. В нижних частях кристалла непрерывный приток новых порций пересыщенного раствора обеспечивает быстрый рост расположенных здесь граней.

Таким образом, независимо от ретикулярной плотности тех или иных граней, грани, расположенные в нижних частях кристалла, будут расти скорее верхних граней, омываемых все время струями менее пересыщенного раствора.

Если рост кристалла происходит на дне какого-либо сосуда (например, кристаллизатора), то, благодаря возникающим концентрационным потокам, боко-

* Концентрационные потоки наблюдаются не только при росте кристалла, но и при его растворении. Однако при растворении эти потоки, представляющие собою более концентрированный раствор, чем окружающая среда, направлены не вверх, а вниз.

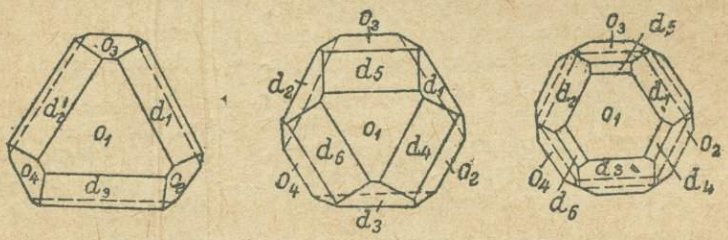
вые грани будут расти быстрее верхней и нижней, на которой кристалл лежит и которая вообще лишена возможности расти. Таким образом, кристалл уплощается по той грани, на которой он лежит во время кристаллизации. Это явление приводит к тому, что, вместо кубиков, кристаллы поваренной соли приобретают форму прямоугольных табличек, а кристаллы квасцов, вместо формы правильного восьмигранника (октаэдра), получают уплощенную форму шестиугольных пластин.

Для того, чтобы по возможности уменьшить влияние концентрационных потоков, по временам перекладывают кристалл с одной грани на другую или подвешивают его на волоске или на нити. Однако и в этом случае концентрационные потоки оказывают довольно сильное влияние. Чтобы еще более уменьшить это влияние прибегают к различным мешалкам или к вращающимся кристаллизаторам.

4. Другие факторы, влияющие на скорости роста различных граней

Кроме концентрационных потоков, имеются и другие внешние причины, влияющие на относительные скорости роста.

Опыты А. В. Шубникова с квасцами показали, что чем меньше пересыщение, тем меньше разнятся между собою скорости роста различных граней.



Фиг. 54. Изменение формы кристаллов квасцов с изменением пересыщения.

В сильно пересыщенных растворах разница в скоростях роста у граней разных плотностей довольно значительна, а потому грани с малыми плотностями зарастают, и на кристаллах остается небольшое число граней. При кристаллизации из почти насыщенных растворов все грани растут почти с одинаковой скоростью, и кристаллы оказываются ограниченными большим числом граней, более или менее равномерно развитых (изометрический габитус) (фиг. 54).

Температура, при которой идет кристаллизация, оказывает также свое влияние. Повидимому, чем ниже температура, тем меньше разнятся между собою скорости роста различных граней. При высоких температурах наблюдаются чаще игольчатые и другие неравномерно-развитые формы; при низких температурах имеет место более изометрическое развитие (фиг. 55).

На относительные скорости роста, а следовательно и на облик кристалла оказывает также влияние характер растворителя.

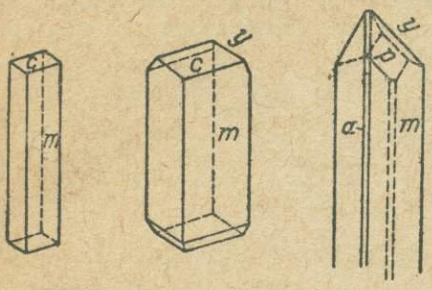
Часто очень сильное влияние оказывают сорастворенные вещества. В качестве примера можно привести влияние мочевины на скорости роста граней поваренной соли.

Из чистых водных растворов NaCl кристаллизуется в кубах. Скорости роста косых граней (фиг. 56) настолько велики по сравнению со скоростями роста прямых граней (*a*), что они зарастают, не успевая образоваться.

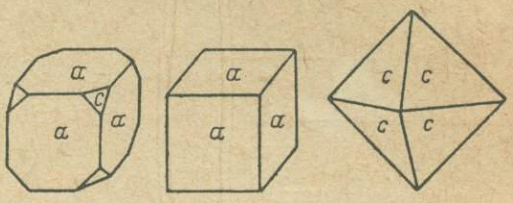
Если кристаллизацию вести из раствора, содержащего мочевину, то скорости роста косых граней *c* начинают уже меньше отличаться от скоростей прямых граней *a*, и грани *c* не успевают зарастать. Если мочевины в растворе много, то скорости роста косых граней делаются настолько незначительными по сравнению со скоростями роста прямых, что прямые грани нацело зарастают, и кристаллы оказываются ограненными только одними косыми гранями — вместо кубов получаются „октаэдры“ хлористого натрия.

Обратную картину мы наблюдаем у квасцов ($KAl[SO_4]_2 \cdot 12H_2O$). Из чистых водных растворов квасцы кристаллизуются в восьмигранниках (октаэдрах). При их кристаллизации из водных растворов, содержащих буру (или некоторые другие вещества), получаются кубы.

Резюмируя сказанное в трех последних параграфах, видим, что целый ряд факторов приводит к тому, что одно и то же вещество выкристаллизовывается в многогранниках различной внешней формы. В одних условиях гранями являются одни плоские сетки, при других условиях эти плоские сетки могут совершенно не служить элементами огранки кристалла.



Фиг. 55. Габитус кристаллов $MgSO_4 \cdot 6H_2O$, полученных при различной температуре.



Фиг. 56. Кристаллы NaCl из чистого водного раствора и из раствора с мочевиной.

Плоские сетки, не являющиеся гранями данного кристалла, но встречающиеся как грани на других кристаллах того же самого вещества, носят название „возможных граней" данного кристалла.

Аналогичное определение можно дать и для ребер, которые, присутствуя на одних экземплярах, зарастают на других.

Ряды решетки, не являющиеся ребрами данного кристалла, но встречающиеся как ребра на других кристаллах того же самого вещества, носят название „возможных ребер" данного кристалла.

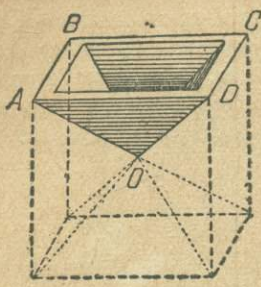
5. Фигуры роста

Независимо от ретикулярной плотности тех или иных граней и характера концентрационных потоков, вершины кристалла находятся в более благоприятных условиях для своего роста, чем остальные его части. Действительно, вершины окружены с разных сторон пересыщенным раствором, к граням же примыкает пересыщенный раствор только с одной стороны. Ребра кристалла занимают в этом отношении промежуточное положение. Таким образом приток пересыщенного раствора легче всего осуществляется к вершинам, затем к ребрам, а затем уже к граням кристалла. Если концентрационные потоки недостаточно быстро сравнивают возникающую разницу в условиях роста вершин, ребер и граней кристалла (что особенно может иметь место в вязкой жидкости), то скорости роста граней не смогут успевать за скоростью роста вершин и ребер.

Так, например, у кристаллов NaCl и KCl, выпадающих из сильно пересыщенных растворов, вместо неуспевающих зарасти граней образуются ступенчатые, вдавленные внутрь пирамиды (фиг. 57).

При еще более резкой разнице в скоростях роста по различным направлениям получаются другие фигуры роста: так называемые „скелеты кристаллов", „дендриты", „трихиты" и пр. Примером первых образований могут служить снежинки, представляющие собою скелеты льда (фиг. 58). Шестилучевые звезды снежинок образуются в результате быстрого роста углов шестиугольника, лежащего в центре звезды. Если бы процесс роста совершался более равномерно, то вещество успевало бы выкристаллизовываться и между лучами, и мы имели бы шестиугольные таблички, сплошь заполненные веществом.

Дендриты представляют собою большие скелетные образования с различными древовидными разветвлениями, часто изогнутыми и потерявшими свою правильную форму. Лед часто образует и дендриты (ледяные узоры на окнах). Образуют дендриты также и многие металлы как получаемые искусственно, так и находимые в природе, например, железо, медь, серебро.



Фиг. 57. Схема пирамиды роста поваренной соли.

Размазывая стеклянной палочкой подогретую капельку пересыщенного раствора квасцов, нетрудно проследить за ростом дендритов под микроскопом. Дендриты квасцов получают форму веточек, пересекающихся под прямым углом.



Фиг. 58. Формы снежинок.

Трихиты, скопулиты и белопиты представляют собою различные по виду очень тонкие, волосообразные или перьевидные, или иглообразные ветви кристаллических скелетов. Они возникают как первые проявления кристаллизации вязкого переохлажденного раствора, каковым является аморфное стекло.

6. Регенерация кристаллов

Если фигура роста кристалла попадает в нормальные условия роста, то промежутки между отдельными незаполненными частями фигуры зарастают, и образуется нормально-ограненный кристалл. Аналогичное явление наблюдается и при погружении в соответствующий раствор различных поврежденных кристаллов или обломков кристаллического вещества. Так, если раздробить кристалл и затем бросить в раствор полученные неправильные осколки, то каждый из них покроется гранями и образует отдельный кристаллик.

Аналогичное этому явление регенерации удобно наблюдать под микроскопом. Для этого на кристаллы, выращенные на предметном стекле, помещаем каплю ненасыщенного растворителя. Когда кристаллы округляются от начавшегося растворения, убираем раствор фильтровальной бумагой и помещаем каплю другого, уже пересыщенного раствора. Тогда начинается отложение вещества и появляются отдельные гранки. Однако большинство их быстро зарастает, остаются грани, наиболее медленно растущие, и, в конце концов, восстанавливается целиком утраченная первоначальная форма.

Явление превращения в кристаллы округленных (шарообразных) кусков кристаллического вещества подробно изучалось Д. Н. Артемьевым, который по скоростям зарастания тех или иных граней судил об их ретикулярной плотности, а отсюда делал выводы и о структуре кристаллического вещества, о его пространственной решетке.

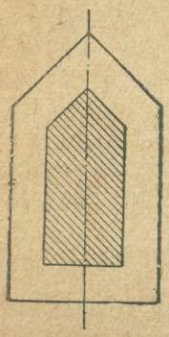
7. Кристаллизация изоморфных солей и закономерные срастания веществ различного состава

Много интересных явлений можно обнаружить при кристаллизации изоморфных солей. Предположим, что взятые соли представляют собою пример совершенного изоморфизма, т. е. могут образовывать кристаллы промежуточного состава между данными солями. Возьмем, например, знакомые уже нам сернокислый магний ($MgSO_4 \cdot 7H_2O$) и сернокислый никель ($NiSO_4 \cdot 7H_2O$). Если бесцветный раствор сернокислого магния слить с густозеленым раствором сернокислого никеля, то из

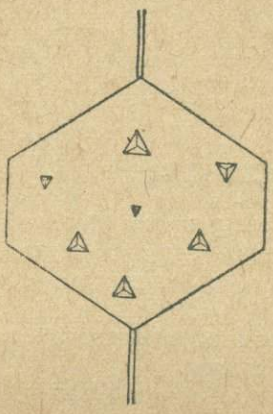
смеси этих двух растворов как раз и будет кристаллизоваться вещество, заключающее в своей решетке как ионы магния, так и ионы никеля: $(Mg,Ni)SO_4 \cdot 7H_2O$. В зависимости от взятых пропорций растворов, можно по желанию получать кристаллы от почти бесцветных, с малым содержанием Ni, до густо окрашенных, почти не содержащих Mg.

Аналогичные опыты легко осуществить, смешивая растворы красивого красного сернокислого кобальта ($CoSO_4 \cdot 7H_2O$) с предыдущими солями.

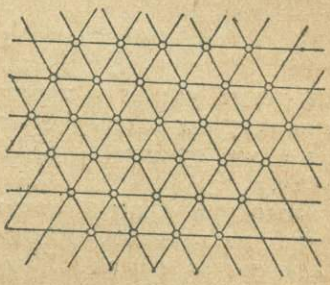
Еще более эффектны опыты по опусканию готовых кристаллов одного вещества в раствор другого. Если вещества не изоморфны, то опущенный кристалл просто будет растворяться в постороннем для него пересыщенном растворе. Если же окружающий раствор представляет собой пересыщенный раствор изоморфной соли, то эта



Фиг. 59. Кристалл сернокислого магния с серединой из сернокислого никеля.



Фиг. 60. Кристаллики KJ, закономерно наросшие на пластинке мусковита (калийной слюды) — $(K,H)_2Al_2Si_2O_8$.



Фиг. 61. Плоская сетка ионов калия в структуре слюды.

соль будет кристаллизоваться на опущенном кристалле так, как если бы кристалл был того же самого вещества, что и раствор. Так, кристалл сернокислого никеля, опущенный в раствор сернокислого магния, будет снаружи обрастать сернокислым магнием. В результате получим кристалл сернокислого магния с серединой из сернокислого никеля (фиг. 59).

Такое закономерное обрастание одного вещества другим объясняется тем, что грани кристалла, представляющие собою плоские сетки, имеют почти одинаковое строение у обоих веществ.

Близость в строении плоских сеток может явиться причиной закономерного срастания веществ даже не изоморфных друг другу.

Чрезвычайно поучительны опыты с кристаллизацией иодистого калия (KJ). Если с чистым листочком калийной слюды $[(K,H)_2Al_2Si_2O_8]$ соприкасается пересыщенный раствор иодистого калия, то кристаллики KJ будут расти на листике слюды всегда в одной и той же ориентировке, на одной и той же грани (фиг. 60). Параллельно этой грани в решетке KJ располагаются плоские сетки, сложенные ионами калия, образующими сеть правильных треугольников (фиг. 61) (расстояние между ближайшими ионами составляет 4,99 Å).

Грань слюды представляет собою плоскую сетку, образованную также ионами калия. Эти ионы образуют почти такую же сеть, как и ионы калия в решетке KJ (расстояние между соседними ионами составляет 5,18 Å). Поэтому плоские сетки KJ закономерно ложатся на плоскую сетку слюды, как если бы это была плоская сетка ионов калия решетки KJ.

Опыты удобнее всего производить под микроскопом. Помещаем в пересыщенный раствор KJ листочек слюды, кладем его мокрым на предметное стекло и, не покрывая покровным стеклом, следим в микроскоп за кристалликами, выпадающими при высыхании листочка.

ОТДЕЛ III

ЗАКОН ПОСТОЯНСТВА УГЛОВ КРИСТАЛЛОВ, ИХ ИЗМЕРЕНИЕ И ИЗОБРАЖЕНИЕ

Глава VI

ЗАКОН СТЕНОНА

Из основ учения о кристаллической решетке (раздел 1, глава III) мы знаем что различные по составу кристаллические вещества имеют различные решетки различные же кристаллы одного и того же вещества обладают одинаковыми решетками.

Рассмотрим теперь, каким образом этот основной закон кристаллохимии отражается на внешнем огранении кристаллов.

Совершенно очевидно, что внешний вид кристаллов различных веществ, обладающих различными пространственными решетками, будет различен. Но будут ли одинаковы различные кристаллы одного и того же вещества, будут ли одинаковы кристаллы, обладающие одинаковой пространственной решеткой?

Внешний облик (габитус) кристалла определяется относительными скоростями роста кристаллических граней. Скорости же роста различных граней, как мы видели при изучении явлений кристаллизации, обусловливаются не одной только пространственной решеткой кристалла (ретикулярными плотностями его плоских сеток). Относительные скорости роста зависят еще и от целого ряда других факторов (глава V, разделы 3 и 4). В одних условиях одни плоские сетки и ряды решетки служат гранями и ребрами кристалла, в других условиях эти плоские сетки и ряды могут превратиться из действительных в возможные грани и ребра, и кристалл покроется другими гранями.

Таким образом:

в различных кристаллах одного и того же вещества величина и форма граней, их взаимное расстояние и даже их число — могут изменяться.

Что же остается неизменным во внешней форме кристаллов? Очевидно, что относительные наклоны, углы между одинаковыми плоскими сетками и рядами у одинаковых пространственных решеток тождественны. Отсюда следует, что:

углы между соответственными гранями и ребрами в различных кристаллах одного и того же вещества постоянны.

Под соответственными гранями и ребрами здесь разумеются такие, плоские сетки и ряды которых тождественны.

На фиг. 62 изображены четыре кристалла горного хрусталя (SiO_2) различного внешнего вида. Но так как пространственные решетки этих четырех кристаллов одинаковы, одинаковы и углы между соответственными гранями (соответственные грани помечены на чертежах одинаковыми буквами).

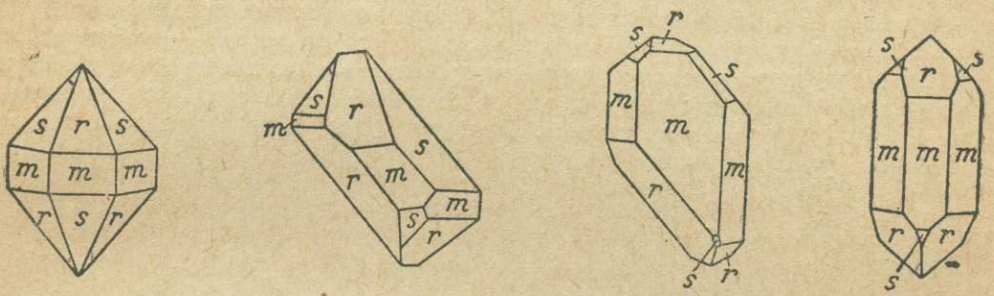
Очевидно, что у кристаллов различных веществ мы не встретим соответственных граней, а потому и углы между гранями и ребрами таких кристаллов не одинаковы и будут меняться от кристалла к кристаллу.

Изложенный выше закон постоянства углов кристалла носит название закона Стенона — Ромэ-де-Л'Иля. Стенон первым высказал этот закон в общем виде (1669 г.). Ромэ-де-Л'Иль же (в 1783 г.), основываясь на произведенных им многочисленных наблюдениях, проверил и экспериментально доказал справедливость данного закона для множества кристаллических веществ. Первое упоминание об этом законе, высказанное, впрочем, только для кристаллов снега, мы находим у Иоганна Кеплера (1615 г.).

Для правильного понимания закона Стенона необходимо сделать одну очень существенную оговорку.

Углы между соответственными гранями и ребрами в различных кристаллах одинаковых веществ постоянны только при одинаковых физико-химических условиях.

Эта оговорка имеет двоякое значение. Прежде всего, мы знаем, что при изменении физико-химических условий, например при повышении температуры, пространственные решетки непрерывно претерпевают незначительные изменения в своих размерах и формах. Отсюда следует, что при этом могут меняться и



Фиг. 62. Различные кристаллы горного хрусталя — SiO_2, иллюстрирующие закон Стенона.

углы между плоскими сетками. Поэтому, сравнивая два одинаковых кристалла — один при комнатной температуре, а другой в нагретом состоянии, мы можем уже и не обнаружить полного тождества углов между соответственными гранями и ребрами. Однако, как показали опыты, эти изменения настолько незначительны, что могут быть подмечены только при особо-чувствительных методах исследования.

Значительно важнее другая сторона вопроса. Выше указывалось, что изменение физико-химических условий может приводить к полной перестройке кристаллической решетки, к явлениям полиморфных превращений. Очевидно, что закон постоянства углов кристаллов остается справедливым только для кристаллов одной и той же модификации вещества. У кристаллов, принадлежащих к различным полиморфным модификациям, мы можем не найти даже соответственных граней, а потому и говорить о равенстве углов просто не приходится. Такие вещества следует рассматривать как различные. Различными мы их должны считать даже в том случае, если они могут, в неустойчивом состоянии, существовать и при одинаковых физико-химических условиях.

Скажем несколько слов о степени точности рассматриваемого закона. Закон Стенона может считаться абсолютно точным только для идеально-образованных кристаллов. Реальные же кристаллы, как мы знаем, не представляют собою идеальных геометрических многогранников и могут обладать даже кривогранностью. Вицинальные грани (см. стр. 49), возникающие вследствие не вполне параллельного расположения плоских сеток у граней кристаллов, механические деформации ранее хорошо образованных кристаллов и другие знакомые уже нам нарушения правильной огранки создают условия для незначительных колебаний в углах между соответственными гранями таких кристаллов.

Огранку кристаллов можно считать весьма совершенной, если расхождения в углах между соответственными гранями не превышают одной минуты. Редко можно встретить кристаллы, образованные более совершенно. Менее совершенная огранка наблюдается гораздо чаще.

При колебаниях в углах, не превышающих 10—15′, мы считаем кристаллы еще хорошо образованными. На плохо образованных кристаллах колебания в углах достигают нескольких градусов.

Главное значение закона Стенона состоит в том, что здесь выявляется то общее и характерное, что связывает различные кристаллы одного и того же вещества. Как бы ни была разнообразна внешняя форма кристаллов, при постоянстве углов между их соответственными гранями, они являются кристаллами одного и того же вещества. Отсюда, методом сравнения с углами известных кристаллов, можно только по одной внешней форме судить о веществе, о составе неизвестных кристаллов, не прибегая к их химическому анализу. Ниже мы подробнее остановимся на существующих способах такого определения (см. отдел VIII).

Необходимо обратить внимание на то, что законом Стенона выявляется принципиальная важность изучения углов между гранями и ребрами кристаллов. Угловые соотношения, взаимный наклон граней друг к другу является характерным для кристаллов и не зависит от внешних, часто изменчивых условий кристаллизации. Поэтому измерению углов кристаллов („гониометрии" — от греческого слова „гонио" = угол) уделяется большое внимание в кристаллографии, и обычно исследование кристаллического вещества и начинают с измерений угловых соотношений между гранями его кристаллов. Поэтому и мы остановимся прежде всего на методике кристаллоизмерений.

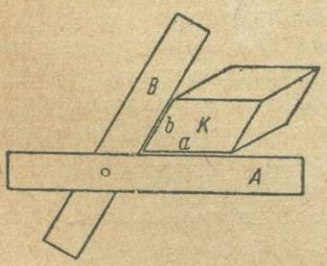
Глава VII

ИЗМЕРЕНИЕ КРИСТАЛЛОВ

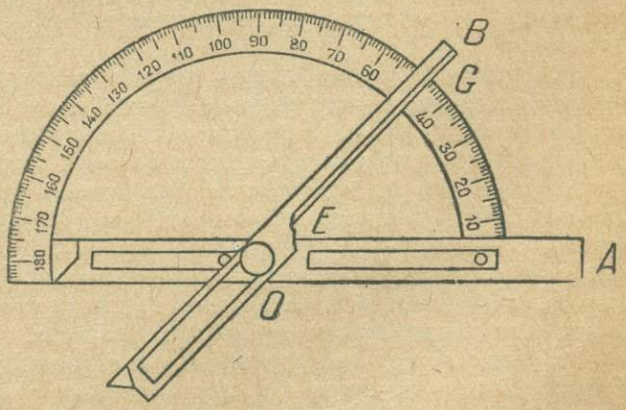
1. Прикладные гониометры

Приборы для измерений углов между гранями (в частности для непосредственного измерения относительных наклонов граней кристаллов друг к другу) называются гониометрами. Различают гониометры прикладные (или прикасательные) и отражательные.

Прикладные гониометры дают возможность непосредственно измерять углы между гранями кристаллов. Они представляют собой в простейшем случае две связанные шарниром плоские линеечки A и B (фиг. 63), которые, подобно ножницам, могут быть расположены под любым углом друг к другу. Пусть на кристалле K необходимо определить угол между его гранями a и b. Для этого ребро



Фиг. 63. Схема прикладного гониометра.



Фиг. 64. Гониометр Каранжо.

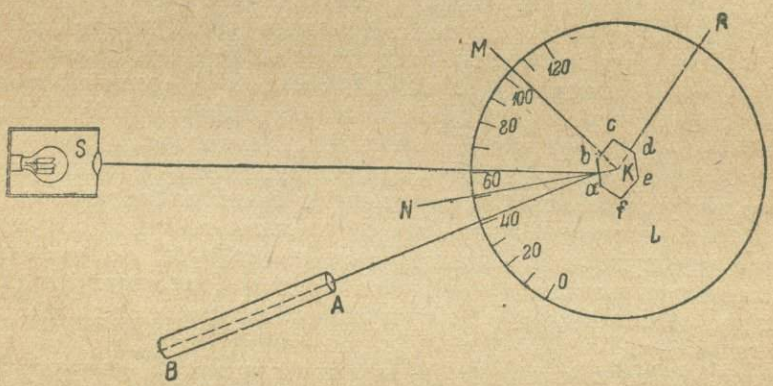
между гранями *a* и *b* располагается перпендикулярно плоскости линеечек гониометра, а линеечки складываются таким образом, чтобы грани оказались плотно прижатыми к их внутренним сторонам. Очевидно, что в таком положении угол между линеечками *A* и *B* будет равен двугранному углу между гранями *a* и *b*. Для измерения угла между линеечками, последние прикладываются к транспортиру. В металлическом гониометре Каранжо *, во избежание случайных изменений угла между линеечками, последние после прикладывания к кристаллу могут быть плотно прижаты при помощи винта *O*. Для отсчета угла этот гониометр точно накладывается на специальный штифт транспортира (фиг. 64).

Преимущество всех прикладных гониометров заключается в их исключительной простоте и портативности. Такой гониометр нетрудно захватить с собою в любую экспедицию. Измерять им можно большие, весьма несовершенно образованные кристаллы. Недостатком прикладного гониометра является его непригодность для измерения маленьких кристалликов и хорошо образованных кристаллов. Для последних эти гониометры недостаточно точны. Точность измерений прикладными гониометрами не превышает $^1/_2°$.

2. Принципы устройства однокружных отражательных гониометров

Отражательный гониометр был изобретен Волластоном в 1809 г., затем усовершенствован Митчерлихом в 1843 г.

Лучи света от источника *S* падают на кристалл *abcdef* (фиг. 65). Грани кристалла, как плоские поверхности, отражают падающие лучи по известным



Фиг. 65. Схема отражательного гониометра.

законам: 1) угол падения равен углу отражения и 2) плоскость, в которой лежат падающий и отраженный лучи, перпендикулярна к отражающей плоскости.

Если грань *ab* кристалла будет перпендикулярна к биссектрисе *KN* угла между падающим лучом *SK* и оптической осью зрительной трубы *AB*, то отраженный от этой грани луч попадет в трубу. В этот момент, если мы будем смотреть на кристалл через трубу *AB*, отражающая поверхность *ab* представится нам ярко блестящей („отсвет" от грани *ab*). Другие грани в это же время не блестят. Кристалл устанавливают таким образом, чтобы ребро пересечения грани *ab* с соседней гранью *bc* (ребро *b*) было перпендикулярно к биссектрисе *KN*. Если теперь вращать кристалл вокруг оси, параллельной этому ребру (вокруг оси *K*), то очевидно, что когда кристалл повернется на угол *NKM* (*KM* — нормаль к грани *bc*) соседняя грань *bc* займет положение предыдущей грани *ab* и даст „отсвет" в трубу *AB*. В этом положении вместо грани *ab* заблестит грань *bc*. В промежуточных положениях кристалла ни грань *ab*, ни грань *bc* блестеть не будут.

* Каранжо — первый изобретатель прикладного гониометра; гониометром Каранжо пользовался Роме-де-Л'Иль при установлении закона постоянства углов кристаллов.

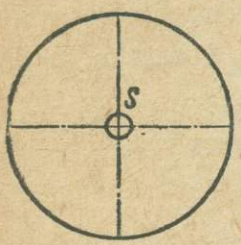
Углы поворота кристалла могут быть отсчитаны по лимбу *L*. Пусть, например, при первоначальном положении кристалла, когда нормаль к грани *ab* совпадала с биссектрисой *KN*, отсчет по лимбу был 30°, при втором положении, когда нормаль к грани *bc* совпадает с биссектрисой *KN*, отсчет по лимбу — 90°. Очевидно, что разность этих двух отсчетов 90—30° = 60° будет отвечать углу *NKM* между нормалями к граням *ab* и *bc*.

Таким образом может быть произведено измерение угла между нормалями к граням кристалла. От углов между нормалями легко перейти к углам между гранями.

Если, например (фиг. 65), угол между нормалями к граням *ab* и *bc* $\angle NKM = \alpha$, то угол между гранями $abc = \beta$ отвечает углу с соответственно-перпендикулярными сторонами $(180° - \alpha)$.

Углы между нормалями к граням кристалла являются дополнениями до 180° углов между соответственными гранями.

При помощи отражательного гониометра можно значительно увеличить точность измерений кристаллов. Особенно точность отсчетов может быть повышена при телескопической установке фокусного расстояния зрительной трубы. При наведении фокуса трубы „на бесконечность" (что осуществляется введением добавочной линзы), кристалл в трубу не будет виден, но отражающая, подобно зеркалу грань кристалла даст нам возможность увидеть изображение источника света *S*. (Для более четкого изображения следует позаботиться о том, чтобы в помещении не было другого источника света, кроме *S*). В окуляре трубы *A* установлен крест нитей, и при взятии отсчета изображение источника *S* (сигнал от грани *ab*) помещают на пересечение окулярного креста (фиг. 66). Кристалл вращают вокруг оси *K* до тех пор, пока сигнал от соседней грани *bc* не займет точно места предыдущего на центре креста. Взятие отсчетов при установке граней кристалла по сигналам (не по отсветам) позволяет производить измерение кристаллов с точностью до одной минуты.



Фиг. 66. Положение сигнала при взятии отсчета.

Вторым преимуществом отражательных гониометров, по сравнению с прикладными, является возможность измерять маленькие кристаллики (до $^1/_{10}$ булавочной головки и даже меньше). Доступными для измерения оказываются и сростки с входящими углами.

Недостатком этих гониометров является трудность измерений кристаллов с матовыми гранями, плохо отражающими свет. Кроме того, существующие конструкции гониометров не приспособлены для измерений больших кристаллов (более 1 *см* в поперечнике).

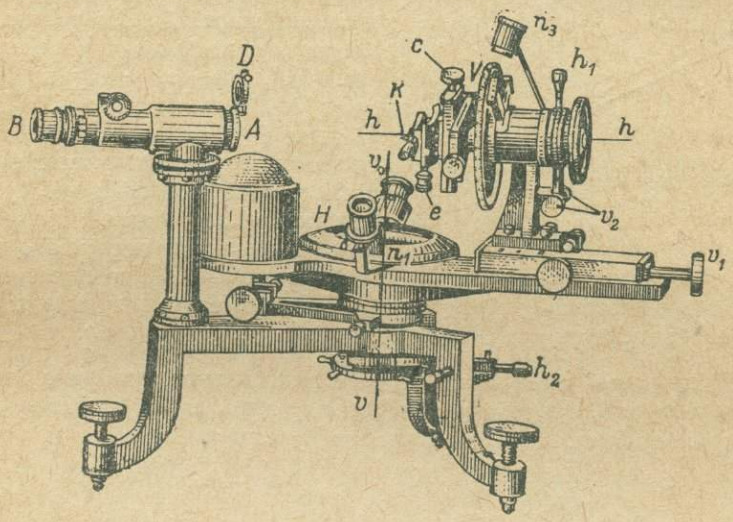
3. Принципы устройства двукружных (теодолитных) гониометров

Отражательный гониометр описанной конструкции (так называемый, одно-кружный отражательный гониометр) позволяет без затруднений измерить угол между нормалями не только для двух соседних граней *ab* и *bc* (см. фиг. 65). Если на кристалле присутствуют еще грани, лежащие в поясе граней *ab* и *bc*, то легко получить углы между нормалями и для этих граней. Как мы знаем (см. стр. 48), все грани одного пояса пересекаются в параллельных ребрах, а потому, если грани *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fa* лежат в одном поясе, то все они параллельны ребру *b*, а следовательно—оси вращения кристалла *K*. Поэтому нормали всех этих граней при вращении будут поочередно совмещаться с биссектрисой *KN*. Лучи, отраженные от этих граней, поочередно будут давать в трубе отсветы и сигналы. Беря по лимбу *L* отсчеты, отвечающие сигналам от каждой грани, мы легко определим углы между нормалями ко всем граням пояса. Если, кроме граней измеренного пояса, на кристалле присутствуют еще другие грани,

(„косые“ грани по отношению к оси вращения гониометра K), то очевидно, что для измерения углов нормалей к этим граням кристалл придется ориентировать иначе и ребра других поясов совмещать с осью вращения K. Чем больше различных поясов присутствует на кристалле, тем больше операций переориентировок кристалла придется проделать.

В 1893 г. Е. С. Федоровым и, независимо от него, В. Гольдшмидтом (Гейдельбергским), а затем почти одновременно с ними Чапским были изобретены гониометры, дающие возможность измерять кристалл целиком без изменения его ориентировок относительно оси вращения вокруг оси K.

В отличие от однокружного гониометра, изображенного на фиг. 65, ими были сконструированы гониометры двукружные, с двумя лимбами — вертикальным лимбом V (отвечающим в точности лимбу L однокружного гониометра) и горизонтальным лимбом H. Таким образом, кристалл может вращаться вокруг двух взаимно-перпендикулярных осей вращения: оси vv, перпендикулярной лимбу H,



Фиг. 67. Двукружный гониометр Е. С. Федорова.

и оси hh, перпендикулярной лимбу V. Сравнивая фиг. 65 с фиг. 67, на которой представлена схема двукружного гониометра Федорова, видим, что вся верхняя часть двукружного гониометра вполне отвечает гониометру однокружному. Если кристалл ориентировать так, что ось пояса граней a, b, c ... f (фиг. 68) будет параллельна оси вращения hh, то нетрудно зафиксировать с помощью лимба V положение нормалей ко всем этим граням так же, как и на однокружном. Для определения положения „косых“ граней a', a''' и др. придется, прежде всего, поставить, вращением вокруг оси hh, ось пояса граней a', a'', a''' в положение, параллельное оси вращения vv. Так как ось vv расположена на приборе перпендикулярно биссектрисе KN, то при вращении кристалла вокруг оси vv грани a', a'', a''' будут поочередно становиться в положение, первоначально занимаемое гранью a, а потому будут поочередно давать в трубе отсветы и сигналы.

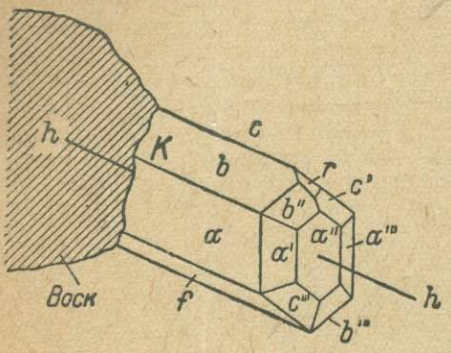
Углы наклона нормалей граней a', a'', a''' к нормали первой грани a того же пояса отсчитываются по горизонтальному кругу H.

Таким образом, вращением вокруг оси vv могут быть зафиксированы положения нормалей и „косых“ граней.

Измерение кристалла сводится к получению отсветов и сигналов от всех граней кристалла; вращая кристалл вокруг осей hh и vv, можно совместить нормаль к любой грани с биссектрисой NK и таким образом получить от этой грани отсвет и сигнал. Положение каждой нормали при этом фиксируется двумя отсчетами: по горизонтальному кругу H и по вертикальному кругу V.

Рассмотрим ближе, какие углы отсчитываются по этим кругам. Как видно из поясняющей фиг. 69, по кругу H отсчитываются углы наклона нормали грани кристалла к оси вращения hh, по кругу же V — углы между плоскостями, проходящими через hh и данные нормали.

Таким образом, при измерении кристалла положение каждой нормали n к грани определяется двумя углами: 1) углом ρ, представляющим угол между n и осью hh, и 2) углом φ, представляющим собою двугранный угол между плоскостью, в которой лежат n и hh, и некоторой другой плоскостью, проходящей через hh.

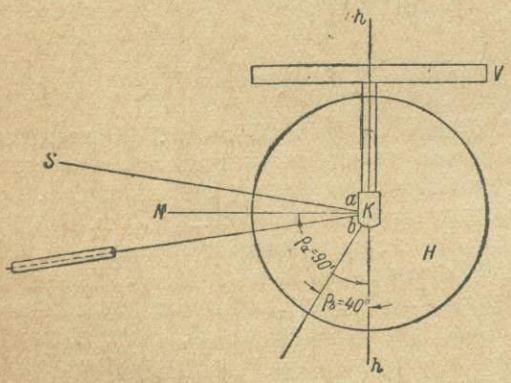


Фиг. 68. Положение кристалла K на гониометре.

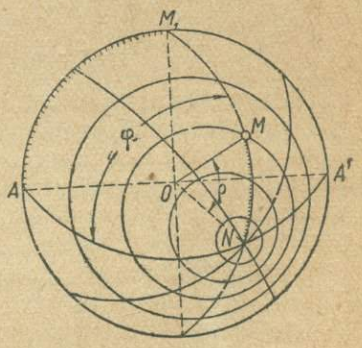
Эти углы ρ и φ ни что иное, как полярные координаты, употребляющиеся для определения положения прямой линии (направления) в пространстве. Они же служат для определения положения точки на поверхности шара. Действительно, представим себе шар с центром O (например, глобус) (фиг. 70), примем одну из точек его за полюс (N). Тогда плоскость AOM', перпендикулярная ON, будет плоскостью экватора. Плоскости, проходящие через ON, например, плоскости AON, $M'ON$ и др., будут меридиональными плоскостями. Примем плоскость AON за плоскость начального меридиана.

Тогда положение направления OM (или точки M) в геометрии (а также в астрономии и кристаллографии) принято определять полярными координатами: долготой φ и полярным расстоянием ρ.

Двугранный угол, образованный плоскостью меридиана данного направления OM с плоскостью начального меридиана, называется долготой данного направления и обозначается буквой φ.



Фиг. 69.



Фиг. 70.

Угол, образованный данным направлением OM и нормалью к плоскости экватора (ON), называется полярным расстоянием данного направления и обозначается буквой ρ.

Углы φ и ρ называются полярными координатами направления OM (или точки M на поверхности шара).

Заметим здесь же, что географические координаты представляют собою долготу φ, тождественную с вышеопределенной, и широту ξ, представляющую собою дополнение ρ до 90° ($\rho = 90° - \xi$).

Отсюда следует, что:

при измерении кристалла на двукружном гониометре определяются положения в пространстве нормалей к граням кристалла при помощи полярных координат φ и ρ.

В Федоровском гониометре по горизонтальному лимбу отсчитывается ρ, по вертикальному — φ.

Поскольку полярные координаты φ и ρ определяют положение нормалей в пространстве, они фиксируют тем самым и относительные наклоны этих нормалей друг к другу. Нахождение же угловых соотношений между нормалями, а следовательно, и между гранями как раз и является нашей задачей измерения кристалла. Таким образом, двукружный гониометр эту задачу вполне разрешает, так же, как и гониометр прикладной или однокружный.

В результате измерения кристалла на двукружном гониометре получается список полярных координат φ и ρ для нормалей к граням кристалла.

4. Двукружный (теодолитный) гониометр Е. С. Федорова и работа с ним

Остановимся на некоторых подробностях конструкции двукружного отражательного гониометра Е. С. Федорова. Измерения на этом гониометре производятся в специальной „гониометрической лаборатории", представляющей собой затемненную от дневного света комнату, в которой на маленьких, но массивных столиках, вделанных в стену, устанавливаются гониометры. На специальном столике помещается осветительный фонарь („осветитель"), дающий при помощи линзы пучок приблизительно горизонтальных и параллельных лучей. Эти лучи направляются на кристалл гониометра, причем часто, чтобы удлинить путь, ставят на их пути зеркало, так что лучи только после отражения от зеркала попадают на кристалл.

Кристалл K (фиг. 67) приклеивается воском к „кристаллоносцу" f, помещаемому на горизонтальной оси вращения гониометра (hh). Необходимо ориентировать кристалл относительно этой оси так, чтобы некоторые (действительные или возможные) ребра кристалла были параллельны этой оси (на фиг. 68 ребра граней пояса a, b, c . . . . параллельны оси hh). Иногда же кристалл ориентируют так, чтобы одна из его граней была перпендикулярна этой оси (грань a'' на фиг. 68 перпендикулярна оси hh).

Операция совмещения какого-либо ребра кристалла (действительного или возможного) или нормали к грани кристалла с (горизонтальной) осью вращения гониометра, называется юстировкой.

Для юстировки служат специальные цилиндрические салазки с винтами e_1 и e_2, позволяющие в достаточно широких пределах придавать кристаллу различные наклоны к оси гониометра.

Для того, чтобы кристалл располагался всегда в центре поля зрения зрительной трубы гониометра, необходимо поместить его в точке пересечения всех осей гониометра — горизонтальной оси вращения hh, вертикальной оси вращения vv и оптической оси трубы.

Операция совмещения кристалла с точкой пересечения осей гониометра называется центрировкой.

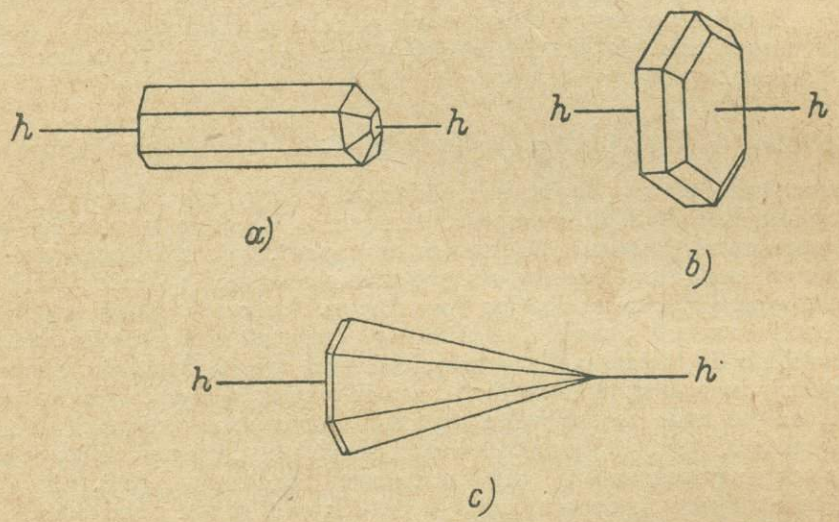
Для центрировки служат специальные плоские салазки с винтами c и c, позволяющие поступательно перемещать кристалл относительно осей гониометра, а следовательно, и привести его в требуемое положение.

Вращение вокруг горизонтальной оси hh осуществляется при помощи круга V. Винт v_1 — зажимной винт, v_2 — микрометренный винт оси hh, V — лимб для отсчетов углов поворота оси hh, H — лимб для отсчетов углов поворота вокруг вертикальной оси vv, h_1 — зажимной, h_2 — микрометренный винт оси vv.

Зрительная труба *AB* может быть установлена или для наблюдения самого кристалла и отсветов его граней, или же для наблюдений сигналов от граней. Для последней цели следует откидывать специальную линзу *D*.

Гониометр на трех массивных ножках устанавливается таким образом по отношению к источнику света, чтобы биссектриса между падающим лучом и оптической осью трубы была строго перпендикулярна к вертикальной оси вращения *vv*.

Перед работой гониометр обычно выверяется и исправляются дефекты, могущие повлечь неточности при измерениях. Главнейшими источниками ошибок могут служить: 1) несхождение всех трех осей гониометра в одной точке, 2) неперпендикулярность биссектрисы между падающим лучом и оптической осью трубы и вертикальной оси *vv*, 3) неперпендикулярность горизонтальной и вертикальной осей гониометра и 4) неправильное положение места нуля горизонтального лимба *H*.*



Фиг. 71. Ориентировка различных по габитусу кристаллов на гониометре.

После поверок гониометра производят наклеивание кристалла на снимающийся с гониометра кристаллоносец. При этом часто бывает полезно предварительно смахнуть с кристалла пыль или даже протереть его ватой или сухой, или, если кристалл не растворяется, смоченной в спирту. Руками к измеряемому кристаллу прикасаться не рекомендуется; при наклеивании кристалл следует держать или пинцетом, или куском фильтровальной бумаги, или же наклеивать простым прикосновением воска кристаллоносца к кристаллу, неподвижно лежащему на столе.

Когда кристалл наклеен на кристаллоносец, а кристаллоносец укреплен винтом к юстирным салазкам, приступают к центрировке и юстировке кристалла. Строго говоря, предварительно стараются грубо юстировать кристалл уже при операции наклейки его на кристаллоносец, придавая ему нужный наклон в воске.

Кристаллы удлиненного призматического габитуса (фиг. 71*a*) обычно юстируются таким образом, чтобы ось пояса призматических граней совпала с осью гониометра *hh* („юстировка по поясу“). Кристаллы таблитчатого габитуса (фиг. 71*b*) обычно юстируются так, чтобы самая большая грань (таблица) была перпендикулярна оси *hh* („юстировка по грани“). Кристаллы пирамидального габитуса (фиг. 71*c*) обычно юстируются так, чтобы возможное ребро, равнонаклоненное ко

*) Положение места нуля у вертикального лимба *V* роли не играет.

всем или некоторым граням, совпало с осью *hh* („юстировка по равнонаклоненным граням").

Рядом систематических наблюдений над ориентировкой этих граней добиваются правильной юстировки кристалла.

От тщательности юстировки в большой степени зависит точность результатов измерений.

Только после центрировки и юстировки можно приступить к измерению кристалла.

5. Ход измерения кристалла

Измерение кристалла всегда начинают с измерения граней, при помощи которых производилась юстировка кристалла.

Пусть кристалл юстирован по поясу граней *a*, *b*, *c* .... (фиг. 68). Так как в результате юстировки ось пояса граней *a*, *b*, *c* ..... совпала с осью *hh* гониометра, то нормали ко всем граням этого пояса будут наклонены под углом 90° к оси *hh*. Как мы знаем, этот угол наклона представляет собой полярное расстояние ρ нормалей к этим граням. Таким образом, ρ всех граней нашего пояса одинаково и равно в точности 90°. Отсюда следует, что одним только вращением вокруг оси *hh*, оставляя неизменным отсчет по горизонтальному лимбу $\rho = 90°$, можно измерить все грани этого пояса (как это делается в однокружных гониометрах).

Оставляя в лаборатории только свет осветителя, вращением вокруг оси *hh* приводим сигнал от одной из граней нашего пояса в поле зрения трубы. Закрепив винт v_1, микрометренным винтом v_2 точно подводим сигнал на горизонтальную нить (если гониомегр хорошо выверен, юстировка произведена тщательно и кристалл правильно огранен, то сигнал при этом окажется и на вертикальной нити).

Сигналы от различных граней редко бывают одинаковы. Если грань хорошо образована и представляет собой гладкую плоскость, то сигнал является точным изображением источника света (линзы осветительного фонаря). Если грань, отражая, несколько рассеивает свет, то сигнал получается уже более или менее расплывчатым, тусклым, не имеющим определенных границ. В случае кривогранности кристалла, сигналы получаются в виде выгнутых полос (сигналы от цилиндрических поверхностей) или еще более сложного рисунка. Когда присутствуют вицинальные грани, то часто вместо одного сигнала наблюдается несколько отдельных пятен. Наконец, случается иногда, что вследствие сильного рассеивания света никакого сигнала не наблюдается (матовые грани). Так как от „качества" сигнала зависит точность наведения его на горизонтальную нить, а следовательно, и точность всей работы, важно учитывать „качество" сигналов для каждой грани. Для оценки „качества" сигнала употребляется пятиступенчатая шкала (см. табл. 2).

После наблюдений за качеством сигнала, опустив линзу *D*, наблюдают за очертанием и размерами грани, дающей сигнал. Эта грань, в отличие от других, будет блестеть. Если, несмотря на это, уловить очертания грани не удается, то зажигают лампу, которую держат на пути лучей, идущих от осветителя (на расстоянии 20—30 *см* от кристалла). Яркий блеск грани, от которой наблюдался сигнал, позволит легко обнаружить размеры и форму этой грани.

Размеры грани определяются, конечно, относительные, а именно рассматривают, какую площадь занимает данная грань по сравнению со всей поверхностью кристалла. Размеры граней классифицируют также по пятиступенчатой шкале (см. табл. 3).

После определения размеров и очертания грани, уже при верхнем свете берут отсчет по нониусу лимба *V*.

Обычно лимбы гониометров имеют градусные деления, причем каждый градус разделен еще пополам. Это позволяет брать отсчеты по лимбу с точностью до 30′. Лимбы снабжены нониусами (n_1, n_2, n_3, n_4 на фиг. 67). Нониусы имеют

Таблица 2

Качество сигнала	Вид сигнала	Балл
Весьма хорошее	Один яркий отчетливый сигнал	5
Хорошее	Один тусклый сигнал, однако такой, что его середину легко навести на нить окулярного креста	4
Среднее	Несколько сигналов или одно, или несколько пятен, не выходящих из поля зрения. Сигналы в виде комет с ясно улавливаемым максимумом яркости	3
Плохое	Несколько сигналов или одно, или несколько пятен, выходящих из поля зрения. „Кометы" без ясно улавливаемого максимума яркости	2
Весьма плохое	Сигнала нет. Грань устанавливается только по отсвету	1

Таблица 3

Размеры граней	Описание размеров	Условные обозначения
Весьма сильно развитые „габитусные" грани, величина которых резко преобладает над величиной всех остальных граней	—	
Сильно развитые	Габитусные грани, при наличии однако и других крупных граней	
Средние.	—	
Мало развитые.	—	
Весьма мало развитые.	Ничтожные притупления ребер и вершин кристалла, невидимые простым глазом без лупы или микроскопа	

по 30 делений. Отсюда следует, что точность отсчетов по нониусам $30' \cdot \frac{1}{30} = 1'$. Как мы знаем, большей точности не требуется, так как несовершенства кристаллообразования обычно превышают одну минуту.

Взятый отсчет, вместе с произведенными наблюдениями над гранью, заносится в специальный *журнал измерений*. В этом журнале обязательно указываются прежде всего название и номер измеряемого кристалла, дата измерения и фамилия автора измерения.

Далее ведется запись по форме, показанной в табл. 4 (для примера приведен журнал измерения кристалла роговой обманки $\{n\,[SiO_3]_4Ca(Mg, Fe)_3 \cdot m\,(Al, Fe)_2\,O_3\}$.

Таблица 4

№ грани	Очертание грани	Размеры ее	Очертание сигнала, если это характерно	Качество сигнала	φ	ρ	Примечания
1				5	326°50′	90°00′	
2				4	29°01′	90°00′	
3				3	56°43′	90°00′	На грани — продольная штриховка
4				4	84°39′	90°00′	
5				5	146°50′	90°00′	
6				4	208°48′	90°00′	
7				2	237°16′	90°00′	На грани — продольная штриховка
8				4	264°52′	90°00′	
9				5	56°50′	14°56′	
10				4	282°26′	22°22′	
11				3	191°01′	22°00′	

После того, как замеренная грань полностью зарегистрирована в журнале, переходят к измерению следующей грани, притушив верхний свет. Глядя в трубу, убеждаются предварительно, что сигнал от измеренной грани не сместился. Отпускают зажимной винт. По часовой стрелке плавно вращают круг *V* (фиг. 67) до тех пор, пока сигнал от следующей грани не попадает в поле зрения. После этого проделывают весь цикл наблюдений, описанных выше.

Так как матовые, плохообразованные грани совсем не дают сигналов или дают трудно улавливаемые сигналы, то при вышеописанном ходе измерений можно

пропустить какую-либо грань. Во избежание этого — сначала разыскивают грань по отсвету и после уже находят сигнал. Начинающему, во избежание недоразумений при измерении призматических кристаллов с большим числом граней, лучше пользоваться непосредственно сигналами.

При переходе от измеренной грани к следующей, важно следить за тем, чтобы вращение лимба V производилось всегда в одну и ту же сторону (всегда по часовой стрелке), иначе придется постоянно возвращаться к граням, ранее уже измеренным. При вращении все время в одну сторону, мы только после измерения всех граней нашего пояса вернемся к первой грани.

Когда измерение граней, по которым производилась юстировка, закончено, переходят к остальным граням кристалла.

К измерению „косых" граней легко перейти, если можно наблюдать ребра, параллельные вертикальной нити окулярного креста (например, ребра между гранями a и a' на фиг. 68). Тогда очевидно, что, закрепив винт горизонтальной оси hh в положении, при котором данное ребро вертикально, движением вокруг вертикальной оси vv получают отсвет от „косой" грани с вертикальным ребром (от грани a', фиг. 68).

Значительно труднее добиться отсвета, если такие вертикальные ребра не наблюдаются. Тогда легче всего поймать отсвет от косой грани, освещая кристалл лампой, поставленной на пути лучей, идущих от осветителя (лампу необходимо держать на расстоянии 20—30 *см* от кристалла). Поворотами круга V, при одновременном движении вокруг оси vv добиваются яркого блеска косой грани; после этого, потушив лампу и пользуясь светом осветителя, уже при небольших поворотах кристалла вокруг hh и vv, нетрудно будет получить и отсвет. Когда отсвет тем или иным путем получен, поднимают линзу D и находят сигнал. Обычно сигнал при этом уже бывает в поле зрения. В противном случае, небольшими дополнительными поворотами вокруг обеих или одной из осей hh и vv приводят сигнал в поле зрения трубы. После этого закрепляют винты v_1 и h_1. Микрометренными винтами v_2 и h_2 приводят сигнал на пересечение нитей окулярного креста (при помощи винта v_2 смещают сигнал на горизонтальную нить, винт h_2 смещает сигнал на вертикальную нить) и берут два отсчета: по кругу V — отсчет φ и по кругу H — отсчет ρ; форма журнала для косых граней — прежняя. Заново нумеровать косые грани не следует.

После измерения одной косой грани всегда бывает полезно поискать еще другие косые грани, у которых полярное расстояние ρ одинаково с ρ измеренной грани. Очень часто такие грани оказываются присутствующими на кристалле (это будут грани, равнонаклоненные к оси hh, но не лежащие в одном поясе). Они легко обнаруживаются, если при закрепленном лимбе H вращать круг V подобно тому, как это делалось при измерении граней, параллельных оси hh. Разница хода измерений равнонаклоненных косых граней с вышеописанным ходом измерений граней первоначального пояса должна заключаться в следующем: сигналы от этих граней каждый раз следует наводить не только на горизонтальную нить, но и на вертикальную, и брать каждый раз по два отсчета. Обычно измеряемые косые грани должны иметь одинаковые ρ, и, казалось бы, мы должны их измерить при совершенно неподвижном круге H. Однако практически небольшие отклонения ρ для различных равнонаклоненных граней наблюдаются, а потому обязательно надо фиксировать ρ каждой грани, независимо от отсчета ρ у предыдущей. Поэтому каждый раз следует стараться микрометренными винтами по возможности точнее приводить сигнал на пересечение обеих нитей и каждый раз брать два отсчета. Когда все равнонаклоненные грани измерены, переходят к следующей серии равнонаклоненных граней, вращением вокруг оси vv, как это было описано выше.

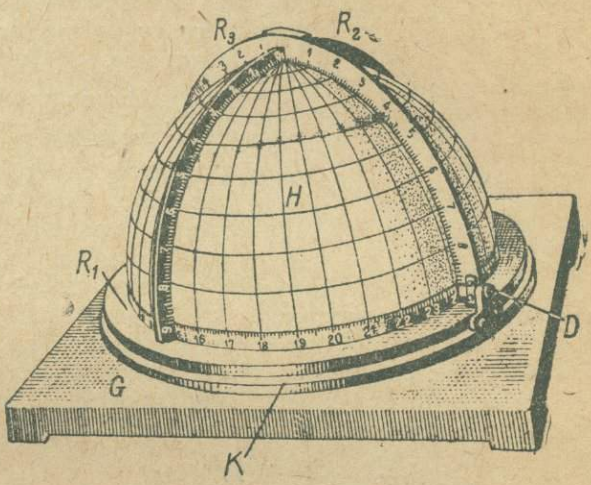
Измерение следует считать законченным, когда будут записаны отсчеты от всех граней нашего кристалла (грани, заклеенные воском кристаллоносца, для измерения, конечно, пропадают).

ИЗОБРАЖЕНИЕ КРИСТАЛЛОВ

1. Стереографические проекции

Положение той или иной нормали грани кристалла, в зависимости от ее долготы φ и полярного расстояния ρ, может быть наглядно представлено, если пользоваться шаром, к которому мы уже прибегали для уяснения сущности полярных координат (стр. 62, фиг. 70).

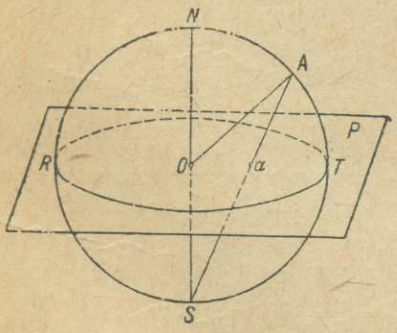
На поверхности такого шара, центр которого лежит в точке пересечения всех нормалей, каждая нормаль изобразится точкой. Рассмотрение расположения нормали сведется к рассмотрению положения точки на поверхности шара. Таким образом, результаты измерения кристалла могут быть наглядно зафиксированы точками на поверхности шара. Для этой цели служат металлическая сфера Федорова или фарфоровая гемисфера Никитина (фиг. 72). Положение точки на глобусе легко определяется, если на последнем проведены меридианы и параллели, поэтому они имеются и на упомянутых приборах.



Фиг. 72. Гемисфера Никитина.

Совокупность меридианов и параллелей, проведенных на поверхности шара через определенное число градусов (например, 10°), называется градусной сетью.

Пользуясь градусной сетью, нетрудно отсчитать φ и ρ той или иной нормали и получить на шаре ее изображение (сферическую проекцию). Обратно, градусная сеть позволяет удобно и быстро найти полярные координаты любой точки на поверхности шара, а следовательно, найти и положение нормали, изображаемой данной точкой.



Фиг. 73.

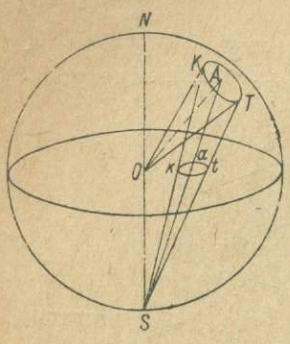
Ввиду громоздкости глобуса, последний обычно заменяется картами и планами, представляющими плоские изображения на листе бумаги (проекции) различных частей поверхности глобуса (вспомним хотя бы изображения земных полушарий).

В кристаллографии (так же, как и в астрономии и картографии) для изображения поверхности шара на плоскости употребляются так называемые „стереографические проекции".

Для этого один из диаметров шара принимается за ось проекции — обычно диаметр, соединяющий северный полюс N с южным S (фиг. 73).

Плоскость P, перпендикулярная к этому диаметру и проходящая через центр шара, будет служить плоскостью проекции, т. е. плоскостью, на которой и получается изображение (проекция) поверхности шара.

Линия пересечения шара с плоскостью проекции называется окружностью проекции, ее центр — центром проекции O. Одна из точек пересечения оси проекции с шаром (обычно южный полюс — S) принимается за *точку зрения* (точку глаза). В эту точку мы мысленно помещаем свой глаз при проектировании. Для изображения какой-либо точки A (например, точки пересечения нормали OA грани кристалла с шаром) проводят прямую из точки зрения O к данной точке A. Эта прямая называется *лучом зрения* или проектирующей прямой. Точка пересечения луча зрения SA с плоскостью проекции P (точка a) и будет изображением точки A: a является *стереографической проекцией* точки A на шаре или направления OA в пространстве.



Фиг. 74.

Стереографическая проекция направления (например, ребра кристалла) изображается точкой.

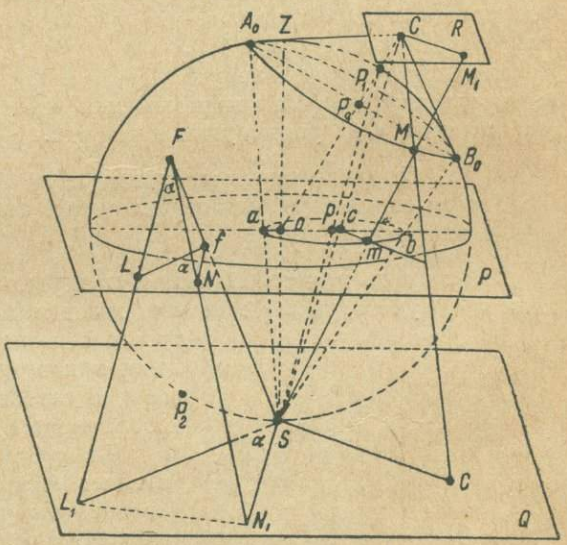
Для изображения не одной точки, а какой-либо линии (например, контура KT, фиг. 74) следует, очевидно, провести проектирующие лучи из точки зрения S ко всем точкам данной линии. Для замкнутого контура получим при этом целый „конус“ лучей зрения с вершиной в точке S (проектирующий конус SKT). Вся совокупность проведенных проектирующих лучей вырежет в плоскости проекции некоторую линию kt, которая и будет стереографической проекцией линии KT.

Важно отметить, что если данный контур KT представляет собой окружность, то и проекция этого контура kt также представляет собой окружность.

Стереографическая проекция окружности есть окружность.

Доказательство этого важнейшего, несколько неожиданного свойства стереографических проекций можно осуществить различными способами.

Ниже мы помещаем доказательство, приведенное Н. К. Разумовским в его книге о стереографических проекциях.* Изложение целиком заимствуем из курса „Кристаллохимического анализа“ Н. Н. Падурова.**



Фиг. 75.

Теорема. *Окружности на сфере изображаются в стереографической проекции окружностями.* Докажем сначала эту теорему для окружностей малых кругов. Пусть дана окружность малого круга A_0MB_0 (фиг. 75). Опишем вокруг шара конус, касающийся шара по данной окружности A_0MB_0, и построим проекцию его вершины c. Через C и точку зрения S проводим плоскости R и Q параллельно

* Н. К. Разумовский. Стереографические проекции. Изд. КУБУЧ, Л., 1932, стр. 20.

** Н. Н. Падуров. Кристаллохимический анализ и методы геометрической кристаллографии. Гос. Научно-Техн. изд., 1931, стр. 19.

В этих книгах можно найти многие здесь опускаемые подробности о стереографических проекциях.

плоскости проекции P. Возьмем на данной окружности произвольную точку M и построим ее проекцию m. Докажем, что длина cm не зависит от положения точки M на окружности. Продолжим образующую CM конуса до пересечения с плоскостью Q в точке C_0 и прямую SM до пересечения с плоскостью R в точке M_1. Плоскость SCM_1 пересекает три параллельные плоскости R, P и Q по параллельным прямым $CM_1 \parallel cm \parallel SC_0$, поэтому:

$$1) \quad \triangle M_1CS \backsim \triangle mcS$$

и, следовательно,

$$\frac{cm}{CM_1} = \frac{Sc}{SC},$$

откуда:

$$cm = CM_1 \cdot \frac{Sc}{SC};$$

$$2) \quad \triangle M_1CM \backsim \triangle SMC_0$$

и, следовательно,

$$\frac{CM_1}{C_0S} = \frac{CM}{C_0M}.$$

Далее $C_0S = C_0M$, как касательные к шару из одной точки. Поэтому из 2) имеем:

$$CM_1 = CM;$$

подставив в 1), получим:

$$cm = CM \cdot \frac{Sc}{SC}.$$

Так как для данного конуса CM, Sc и SC являются величинами постоянными, не зависящими от положения точки M, то

$$cm = \text{const},$$

и значит внутри замкнутой кривой amb есть где-то точка c, от которой все точки этой кривой находятся на равных расстояниях. Иначе: кривая amb есть окружность. Теорема для малых кругов доказана.

Для больших кругов вместо конуса мы получаем цилиндр, и C лежит в бесконечности. Но так как каждый большой круг мы можем рассматривать как частное положение малого круга, то очевидно, что теорема относится и к нему. В самом деле, если параллельно большому кругу проведем на небольшом от него расстоянии малый круг, то для него, по доказанному, теорема справедлива. Будем сближать малый круг с большим, оставляя их плоскости параллельными между собою. При этом сближении их плоскости также будут сближаться и в пределе совпадут. Точки проекции малого круга, представляющей собою окружность, будут неограниченно приближаться к соседним точкам проекции большого круга, что, очевидно, возможно лишь тогда, если последняя тоже окружность.

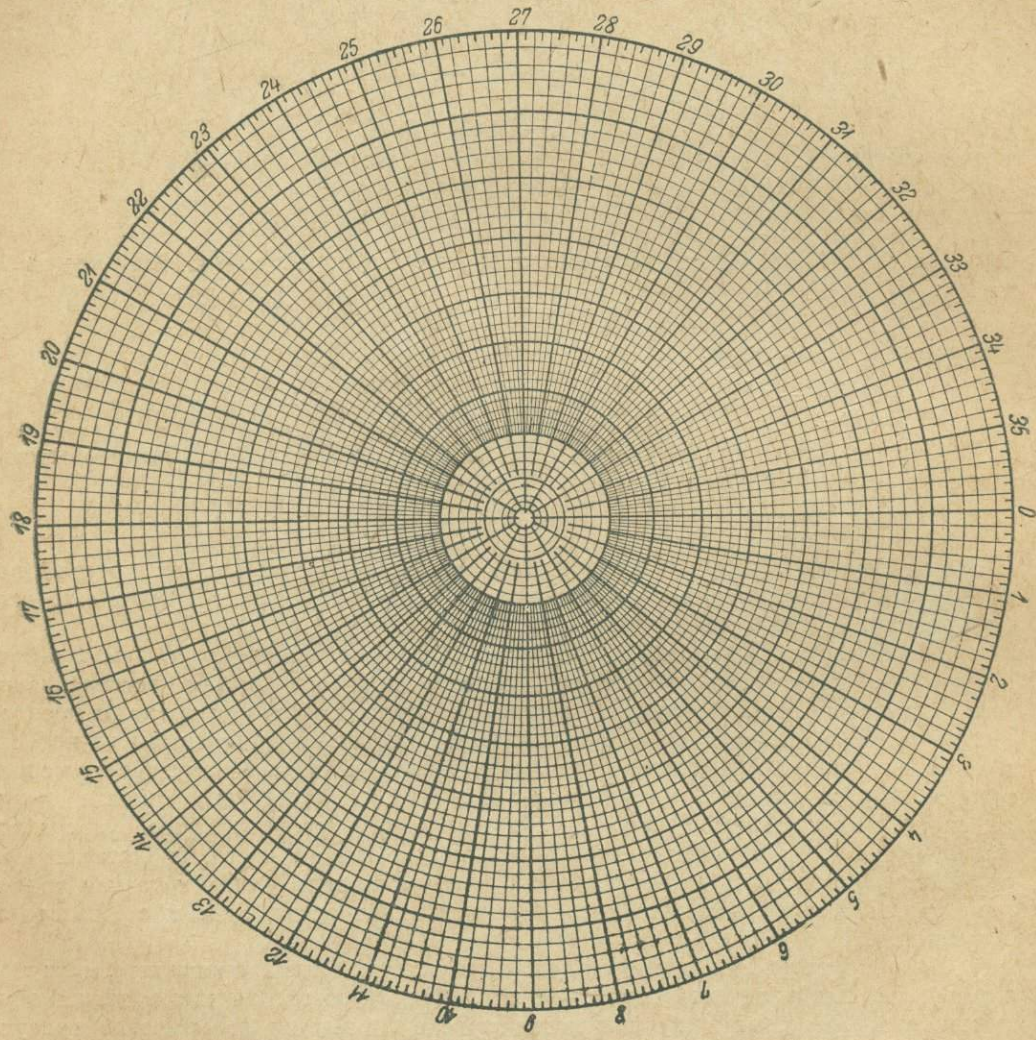
Подобно тому, как все построения на глобусе легко выполнимы, если последний снабжен градусной сетью, — построение стереографических проекций осуществляется легко, если на плоскости проекции имеется изображение градусной сети.

Стереографическая проекция градусной сети называется стереографической сеткой.

На стереографических сетках изображается только половина градусной сети, именно та половина, которая лежит над плоскостью проекции (верхняя полусфера). Так как меридианы и параллели проектируемой градусной сети представляют дуги окружностей больших и малых кругов, то и их стереографические проекции изображаются также дугами окружностей.

2. Стереографическая сетка А. К. Болдырева*

Стереографическая сетка А. К. Болдырева является чрезвычайно удобной для изображения и нахождения стереографических проекций. Эта сетка (фиг. 76) представляет собой стереографическую проекцию градусной сети, спроектированной на плоскость экватора (точка зрения — в южном полюсе). Меридианы и параллели проведены через каждые 5°. Меридианы изображаются прямыми, радиально расходящимися из центра проекции (эти прямые могут рассматриваться как дуги бесконечно большого радиуса).



Фиг. 76.

Начальный (нулевой) меридиан помечен индексом 0. Далее цифрами обозначены меридианы через каждые 10°.

Параллели изображаются концентрическими окружностями. Самая большая из них, с радиусом в 10 *см*, совпадает с окружностью проекции и является проекцией экватора.

---

* Как сетки А. К. Болдырева, так и сетки Вульфа и другие издаются Федоровским институтом в Ленинграде.

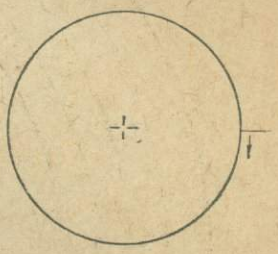
В центре проекции точкой изображается полюс („нулевая параллель").

В качестве плоскости проекции берется лист прозрачной бумаги (восковка, калька) на котором и производятся все построения.*

Сетку кладут на ровную поверхность так, чтобы нулевой меридиан протягивался из центра вправо. Прозрачную бумагу накладывают сверху на сетку и остро отточенным карандашом отмечают место центра проекции. Для того, чтобы отмеченная точка не затерялась при последующих построениях и по окончании работы, ее делают ясно приметной при помощи четырех небольших черточек, не касающихся нашей точки и образующих около нее крест -|-. Этот крест служит для центрировки чертежа на сетке. Далее проводится небольшая черточка справа на продолжении нулевого меридиана за окружностью проекции. Эта черточка служит для юстировки чертежа относительно начала координат.**

Задача 1. Построить стереографические проекции направлений, координаты которых φ и ρ — даны.

Направления, проекции которых строятся чаще всего, представляют нормали к граням или плоским сеткам кристалла. Однако, совершенно также координатами φ и ρ задаются и всякие другие направления, например, ребра кристалла, ряды пространственной решетки, оси симметрии кристалла, о которых речь будет дальше, и т. д. Для этого нужно только перенести данное направление параллельно самому себе так, чтобы оно прошло через центр шара.



Фиг. 77.

Итак, дано направление A, долгота которого пусть будет равна 30°; а полярное расстояние — 40°. Условимся для краткости обозначать это такой записью: A (30°, 40°); первая цифра, стоящая в скобках, всегда обозначает долготу, а вторая — полярное расстояние.

Долготы φ условимся отсчитывать от нулевого меридиана по часовой стрелке. Для памяти помечаем стрелочкой указанное направление отсчета (фиг. 78).

Помня, что на сетке меридианы проведены через каждые 5° (жирные линии через 10°), отсчитываем по окружности проекции данное число градусов долготы. Полученный отсчет определит плоскость меридиана, в котором лежит данное направление. В нашем примере, при $\varphi = 30°$, эта плоскость совпадет с третьим жирным меридианом.

Полярные расстояния ρ всегда отсчитываются от центра проекции.

Пользуясь параллелями сетки и помня, что они проведены через такие же интервалы, как и меридианы, отсчитываем от центра вдоль найденного меридиана данное число градусов полярного расстояния ρ. В нашем примере $\rho = 40°$. Искомой проекцией данного направления будет являться точка пересечения найденного меридиана с четвертой (от центра) жирной параллелью.

Найденную точку отмечаем острием карандаша, обводим ее, чтобы она была приметна, небольшим кружком и надписываем A (30°, 40°) или, просто, A. Построение выполнено.

Как ни просто указанное построение, начинающему рекомендуется для четкого его усвоения построить проекции хотя бы трех направлений с различными координатами.

Упражнения. Построить стереографические проекции следующих направлений: A (30°, 40°); B (163°, 67°); C (262°, 90°); D (300°, 100°).

---

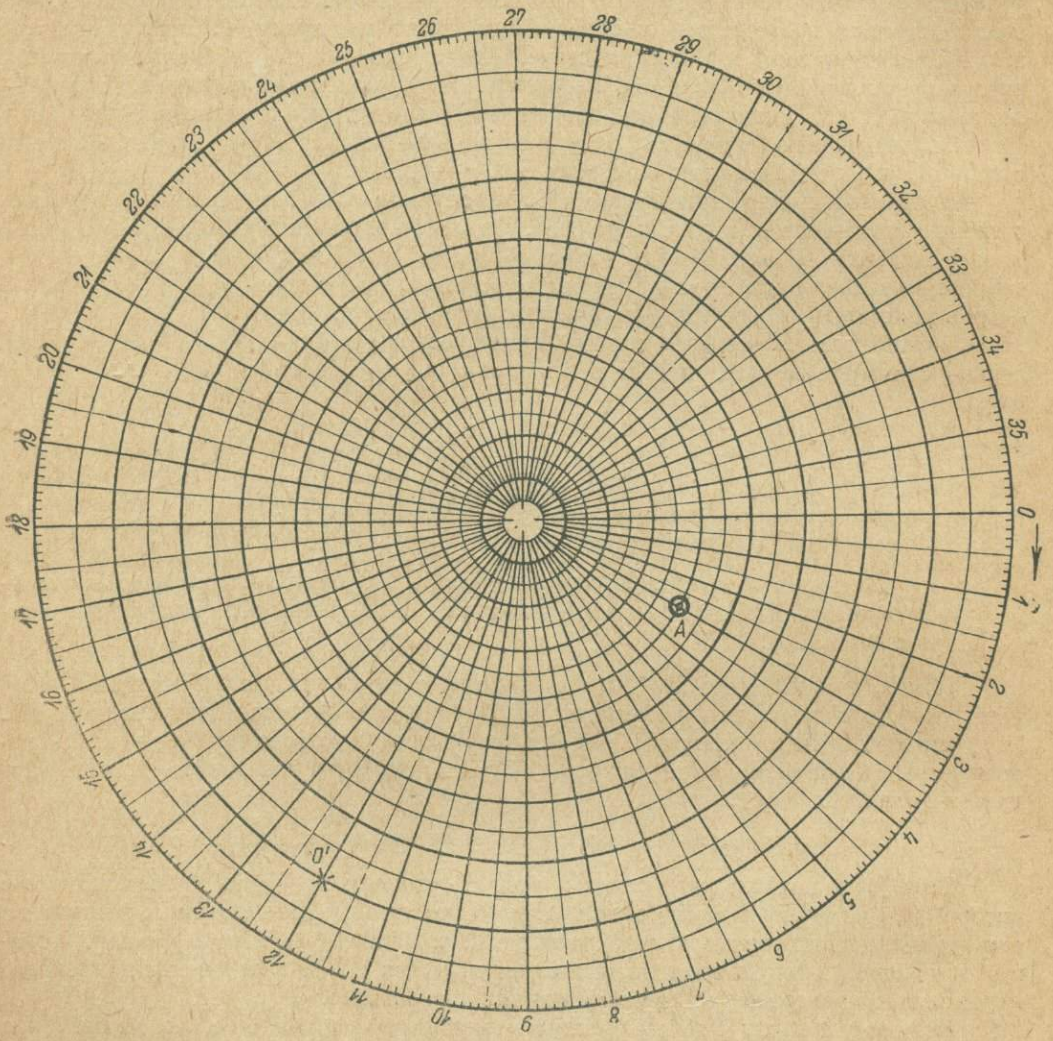
* Здесь описываются приемы работы со стереографическими проекциями, которые, как показывают многолетние опыты автора, являются наиболее простыми и для усвоения и для получения требуемых результатов.

** Никаких других черточек (например, слева, вверху и внизу чертежа) делать не следует (фиг. 77).

Для нахождения проекции B, очевидно придется интерполировать между линиями параллелей и меридианов. При аккуратной работе точность построений можно доводить до $^1/_2°$.

Точка C лежит на окружности проекции ($\rho = 90°$).

Интерес представляет нахождение проекции D (300°, 100)°. Найдя меридиан 300°, мы не сможем, пользуясь параллелями сетки, отложить 100°. Последняя параллель отвечает отсчету в 90°. Очевидно, что данное направление D выходит



Фиг. 78.

на шаре в точке, лежащей под плоскостью проекции (в нижней полусфере). Для того, чтобы использовать сетку и для таких направлений, будем придерживаться метода проф. А. К. Болдырева. Этот метод состоит в замене данного направления другим, ему противоположным. Тогда вместо точки D, лежащей в нижней полусфере, противоположное направление дает точку D', диаметрально противоположную D и лежащую уже в верхней полусфере. Очевидно, если полярное расстояние данного направления D отвечало ρ, то полярное расстояние направления D' будет $\rho = (180° - \rho)$; долгота направления D' будет отличаться от долготы направления D на 180°.

Отсюда следует, что вместо точки D с координатами (300°, 100°) следует построить точку D' с координатами (120°, 80°). Для этого, отсчитав по трехсотому меридиану 90°, переходим к противоположному концу диаметра сетки, совпадающего с меридианом 300°, и продолжаем отсчеты уже не от центра, но к центру проекции. Таким образом последние 10° (от 90° до 100°) отсчитываем в меридиане (300°—180°) от окружности проекции (фиг. 78).

Чтобы не забыть, что построенная нами точка изображает проекцию направления, противоположного данному, помечаем ее не кружком, но крестиком.*

Простые соображения приводят к следующим выводам, которые полезно всегда помнить:

Горизонтальные направления (например, горизонтальные ребра и нормали к вертикальным граням) имеют $\rho = 90°$ *и проектируются на окружности проекции.*

Вертикальные направления (например, все вертикальные ребра и нормали к горизонтальным граням) имеют $\rho = 0°$ *и проектируются в центре проекции.*

Наклонные направления имеют $\rho \neq 0° \neq 90°$ *и проектируются внутри окружности проекции. Если* $\rho < 90°$, *то чем больше* ρ, *тем ближе располагаются проекции направлений к окружности проекции.*

Если $\rho > 90°$ *(но* $< 270°$*), то направления при проектировании заменяются противоположными и помечаются на проекции не кружками, но крестиками.*

Задача 2 (обратная задаче 1). Определить координаты направлений, заданных на чертеже, своими стереографическими проекциями. После тщательной центрировки и юстировки чертежа на сетке Болдырева, точка, изображающая заданное направление, окажется лежащей или на каких-либо меридианах и параллелях, или же между какими-либо соседними меридианами и параллелями сетки. Пусть данная точка помечена на чертеже кружком. Отсчитываем от центра число параллелей до параллели, на которой (или рядом с которой) расположена данная точка. Найденная величина (с поправкой на несовпадение параллели с данной точкой) есть искомое полярное расстояние ρ. Далее отсчитываем число меридианов от нулевого меридиана (по часовой стрелке) до меридиана, на котором (или рядом с которым) лежит данная точка. Найденная величина (с поправкой на несовпадение меридиана с данной точкой) есть искомая долгота φ.

Если данная точка помечена на чертеже крестиком, то к числу градусов, отсчитанных от центра до данной проекции, берем дополнение до 180°. Эта величина будет ρ. Долгота φ получается прибавлением или отнятием 180° от угла, образованного начальным меридианом с радиусом, на котором лежит данная проекция (угол отсчитывается от начального меридиана по часовой стрелке).

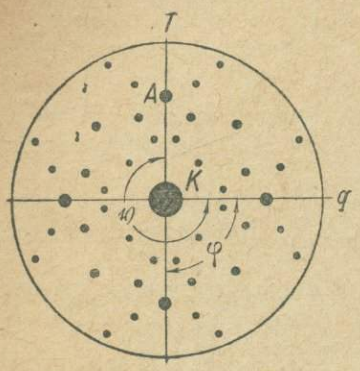
Упражнения лучше всего произвести на произвольно помеченных на чертеже трех-четырех точках, из которых по крайней мере одну следует пометить не кружком, а крестиком.

Задача 3. Построить стереографическую проекцию нормалей к граням кристалла, измеренного на двукружном гониометре. Для составления требуемой проекции используется список, полученный в результате измерения кристалла в журнале измерений. Отсчеты округляются до $^1/_2°$. Точки, изображающие нормали, помечаются теми же номерами, которыми они обозначены в журнале измерений.

---

* Может быть, несколько более наглядным является метод Г. В. Вульфа. По этому методу, для получения проекций точек нижней полусферы точку зрения помещают не в нижнем (южном) полюсе, но в верхнем (северном). Тогда точки обеих полусфер будут проектироваться внутри окружности проекции. Однако при построениях диаметрально противоположных точек, решение различных задач менее мешкотно, поэтому мы и придерживаемся метода А. К. Болдырева.

Полезно при этом указывать на проекции и величину граней, а иногда и на качество сигналов. Величину граней можно условно представлять количеством кружков, окружающих данную точку. Проекции в виде точек, изображающие очень маленькие грани, вовсе не обводятся кружками; маленькие грани помечаются одним кружком; средние — двумя; большие — тремя; очень большие следует помечать четырьмя кружками. Качество сигнала проще всего указывать римскими цифрами, поставленными рядом с проекциями (I — очень плохой сигнал, II — плохой, III — средний и т. д.).



Фиг. 79.

Стереографическая проекция обычно составляется не после измерения, но попутно с измерением кристалла, так как может служить для обнаружения различных промахов и ошибок и тем самым позволяет их немедленно исправлять.

Замечание. Под „стереографической проекцией кристалла" в дальнейшем, если не сделано никаких специальных оговорок, мы будем всегда подразумевать стереографическую проекцию нормалей к граням данного кристалла.

Упражнение. Построить стереографическую проекцию кристалла, журнал измерений которого приведен на стр. 67.

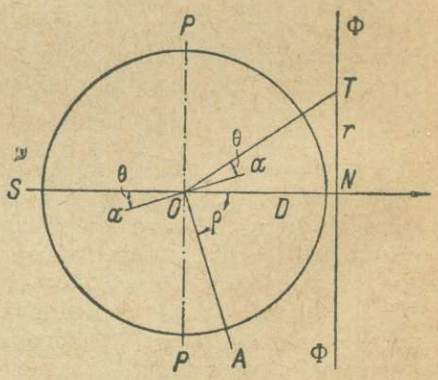
Задача 4. Построить стереографическую проекцию нормалей к плоским сеткам кристалла по данной лауэграмме этого кристалла.

Как известно, лауэграмма представляет собою фотографический снимок, получаемый рентгеновыми лучами в результате прохождения этих лучей через кристалл (см. главу „Рентгенометрия кристаллов", раздел 3.) Снимок представляет совокупность пятен различной интенсивности (фиг. 79). Каждое пятно получается в результате отражения падающего рентгенова луча от той или иной плоской сетки кристалла.

Если рентгенов луч SN (фиг. 80) падает на плоскую сетку aa под углом θ, то он отразится от этой сетки под тем же углом θ, причем отраженный луч OT будет лежать в одной плоскости с падающим лучом и с нормалью OA к плоской сетке aa. На фотографической пластинке $\Phi\Phi$ получается пятно T на расстоянии $TN = r$ от места прохождения неотраженного луча ON.

Если расстояние ON равно D, то:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{r}{D}.$$



Фиг. 80.

За плоскость проекции берем плоскость PP, параллельную фотографической пластинке $\Phi\Phi$. Ось проекции SN совпадет с направлением падающего рентгенова луча. $\angle NOA$ — угол, составленный осью проекции с нормалью OA к плоской сетке aa, будет являться полярным расстоянием ρ этой сетки.

Из чертежа видно, что

$$\operatorname{tg} 2\theta = \operatorname{tg}(180° - 2\rho) = \operatorname{tg}(-2\rho) = \operatorname{ctg}(90° + 2\rho).$$

Так как нормаль OA лежит в одной плоскости с отраженным лучом OT, и эта плоскость проходит через ось проекции SN, то оба эти направления — и нормаль OA и отраженный луч OT — лежат в одной меридиональной плоскости, но

направлены в разные стороны от оси SN. Поэтому меридиан NAS отличается своей долготой φ от меридиана NTS на 180°.

Отсюда следует такой метод получения стереографической проекции нормалей к плоским сеткам. Помечаем на лауэграмме начальный (нулевой) меридиан Kq (фиг. 79). Для получения проекции нормали к плоской сетке, дающей некоторое пятно A, проводим меридиан KT, в котором лежит данное пятно. Измеряем $\angle qK \cdot T = \upsilon$ от начального маридиана Kq до меридиана KT (как обычно, по часовой стрелке). Этот угол υ будет долготой пятна. Долгота искомой нормали $\varphi = \upsilon - 180°$.

Измеряем расстояние пятна от центра: $r = KA$. Если D — расстояние от исследуемого кристалла до пластинки, то полярное расстояние искомой нормали определится из формулы:

$$\operatorname{ctg}(90° + 2\rho) = \frac{r}{D}.$$

По полученным координатам φ и ρ строим стереографическую проекцию нормали $A(\varphi, \rho)$.

Упражнение. Построить стереографическую проекцию нормалей к плоским сеткам кристалла, лауэграмма которого изображена на фиг. 79. Расстояние D принять равным 3 *см*.

Простота решений указанных выше задач, казалось бы, заставляет отдавать предпочтение сетке Болдырева перед другими. Однако почти все остальные задачи, встречаемые в кристаллографической практике, решаются на сетке Болдырева довольно сложно и часто требуют применения специальных особых инструментов (углового циркуля, треногого циркуля, стереографического транспортира, линейки для пологих дуг и т. д.)

Действительно, если бы мы пожелали, пользуясь сеткой Болдырева, построить стереографическую проекцию, не направления, но плоскости, изображаемой, как мы знаем, окружностью, то в общем случае такое построение без циркуля и линейки невозможно.

Как решение этой задачи, так и решение целого ряда других не менее важных задач, очень просто выполняется, если пользоваться не сеткой Болдырева, но сеткой Г. В. Вульфа. Поэтому для решения дальнейших задач мы перейдем к сетке Вульфа.

3. Стереографическая сетка Вульфа

Представим себе градусную сеть шара, „лежащую на боку“ таким образом, чтобы диаметр, соединяющий ее полюса, был бы не вертикален, но горизонтален. Сетка Вульфа и представляет собою стереографическую проекцию такой повернутой на 90° градусной сетки (фиг. 81). Плоскость проекции, которую мы считаем горизонтальной, будет совпадать с одним из меридианов сетки Вульфа, точка зрения окажется лежащей на экваторе сетки Вульфа. Так как меридианы и параллели представляют собой на шаре дуги окружностей, то и на сетке Вульфа они изображаются дугами окружностей различного радиуса. Они проведены на сетке Вульфа через 2° (жирные линии через 10°). Таким образом здесь нечетные градусы и доли градусов отсчитываются на-глаз. Радиус окружности проекции сетки Вульфа также равен 10 *см*.

Сетку Вульфа ориентируют так, чтобы экватор сетки протягивался слева направо.*

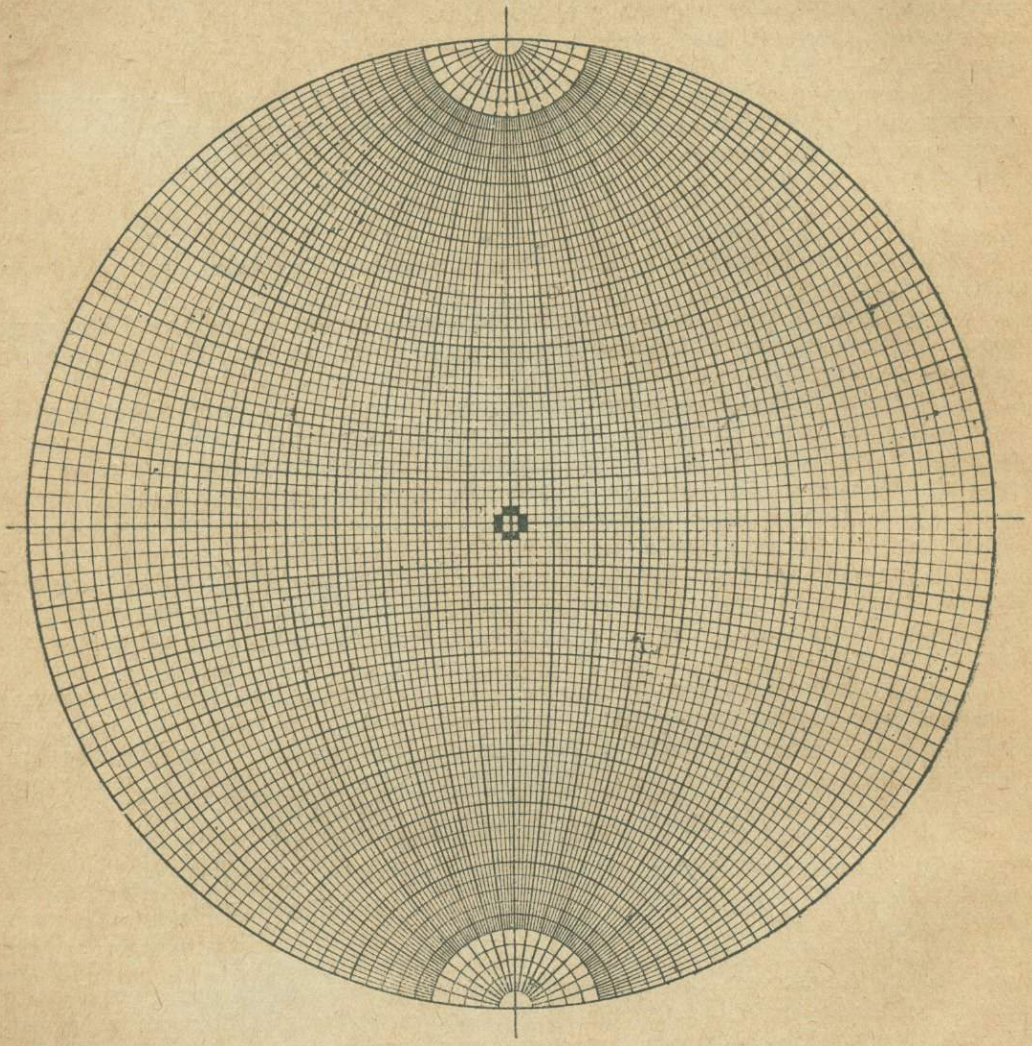
Центрировка и юстировка чертежа на сетке производится совершенно так же, как и на сетке Болдырева.

Необходимо помнить, что полюса сетки и чертежа (т. е. листа прозрачной бумаги, накладываемого на сетку) следует считать несовпадающими друг с дру-

---

* При таком расположении удобнее чертить дуги, отвечающие меридианам сетки Вульфа.

гом. В то время как полюса сетки располагаются на окружности проекции, полюса чертежа следует себе представлять в центре проекции. Поэтому и нулевой меридиан, протягивающийся на чертеже так же, как и на сетке Болдырева, от центра вправо, не совпадает ни с одним из меридианов сетки Вульфа, но протягивается по ее экватору. Таким образом, градусная сеть, которая определяет собою полярные координаты φ и ρ на чертеже, не отвечает градусной сетке



Фиг. 81. Сетка Вульфа.

Вульфа. Градусную сеть чертежа следует себе мысленно представлять такою, какой она изображается на сетке Болдырева.*

Поэтому полярные расстояния ρ, как и всегда, следует отсчитывать от центра чертежа, а долготы φ — от нулевого меридиана по окружности проекции по часовой стрелке.

---

* Проф. Н. Н. Падуров предлагает снабжать прозрачную бумагу, на которой производятся построения, сеткой, отвечающей сетке Болдырева. При работе на такой сетке (сетке Падурова) ясно видно, как ориентирована координатная система чертежа.

Мы не придерживаемся здесь остроумного метода Н. Н. Падурова, ввиду того, что, во-первых, при его применении расходуется на каждый чертеж по одной специально отпечатанной сетке и, во-вторых, через линии сетки Падурова трудно ориентироваться в линиях сетки Вульфа (транспаранта), чертеж пестрит, и начинающие делают ошибки.

Задача 5. Построить стереографические проекции направлений, координаты которых φ и ρ — даны.

Пусть, например, дано направление A (30°, 40°). Подобно тому, как это мы делали при работе на сетке Болдырева (после центрировки и юстировки чертежа), начинаем с отсчета долготы $\varphi = 30°$. Долгота, как мы знаем, отсчитывается по окружности проекции от нулевого меридиана. Нулевой меридиан помечен у нас черточкой с правой стороны чертежа. На окружности проекции есть деления, по которым можно осуществить отсчеты. Отсчитав нужные нам 30°, ставим на окружности проекции временную вспомогательную точку. Очевидно, что проекция искомого направления должна лежать на прямой, соединяющей центр чертежа со вспомогательной точкой. По направлению этой прямой от центра и следует отсчитывать данное ρ. Однако здесь выступают недостатки сетки Вульфа: в то время, как на сетке Болдырева этот отсчет осуществляется очень просто, на сетке Вульфа мы не найдем делений, которые бы позволили отсчитывать в нужном нам направлении. Приходится итти по более сложному пути.

Воспользуемся тем, что в направлении экватора сетки Вульфа (с которым в исходном положении сетки совпадает нулевой меридиан) деления для градусных отсчетов имеются. Поэтому вращаем чертеж на сетке Вульфа таким образом, чтобы при сохранении центрировки чертежа поставленная нами временная вспомогательная точка попала на экватор сетки Вульфа (очевидно, что для этого придется сделать поворот чертежа на 30° против часовой стрелки). После поворота по экватору сетки Вульфа отсчитываем от центра чертежа 40° данного полярного расстояния ρ. Ставим точку, обводим ее кружком и помечаем буквой A. Остается только поворотом привести чертеж в исходное положение. Задача решена.

Упражнения. Для практики можно посоветовать найти проекции всех направлений (и нормалей к граням), указанных в предыдущем параграфе и найденных нами при помощи сетки Болдырева. Для проверки можно совместить полученные чертежи с составленными ранее. Нанесенные точки на старых и на новых чертежах должны совпадать.

Задача 6 (обратная). Определить координаты направлений, заданных на чертеже своими стереографическими проекциями.

Пусть на чертеже направление, координаты которого мы определяем, изображается точкой X.

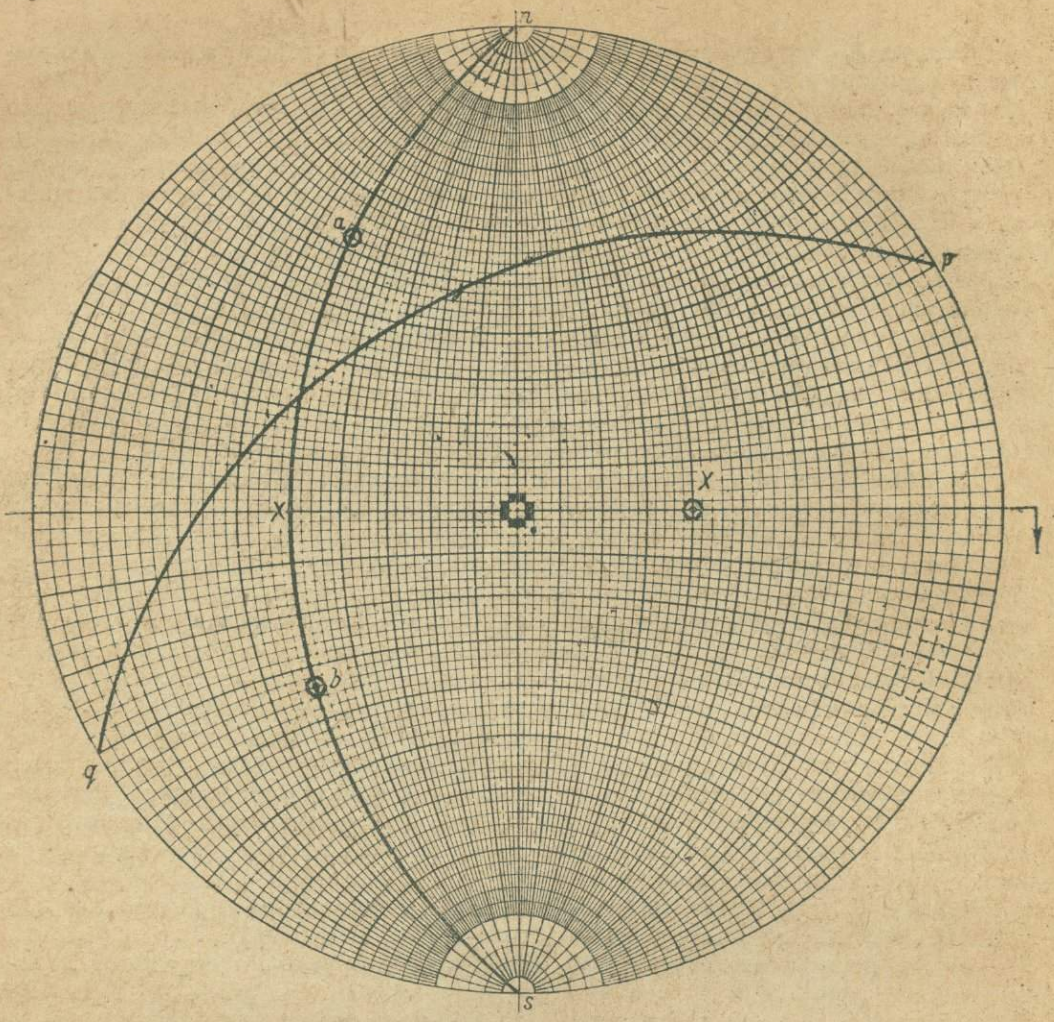
Тщательно следя за центрировкой, вращаем чертеж на сетке Вульфа, чтобы данная точка X попала на экватор сетки Вульфа (фиг. 82). В полученном положении по экватору сетки Вульфа отсчитываем от центра до точки X полярное расстояние ρ. В конце экватора, по которому мы производили отсчеты, на окружности проекции получаем временную вспомогательную точку. Приведя чертеж к исходному положению, отсчитываем долготу от нулевого меридиана, помеченного черточкой на чертеже, до временной вспомогательной точки (по часовой стрелке). * Полученные координаты φ и ρ выписываем рядом с точкой X на чертеже (в скобках сначала пишем φ, а потом ρ). Задача решена.

Предостережение. Указанную задачу, в общем случае, без поворота чертежа решить невозможно. Грубая ошибка всех начинающих состоит в том, что неправильно определяют долготу точки X при помощи параллели сетки Вульфа, на которой точка X лежит (фиг. 83).

Именно: определяется долгота точки m, являющейся пересечением параллели Xm и окружности проекции. Очевидно, что искомая долгота при этом определится углом *пот*, а не углом *поX*. При таком способе работы решение не будет верным. Начинающему следует это хорошо запомнить.

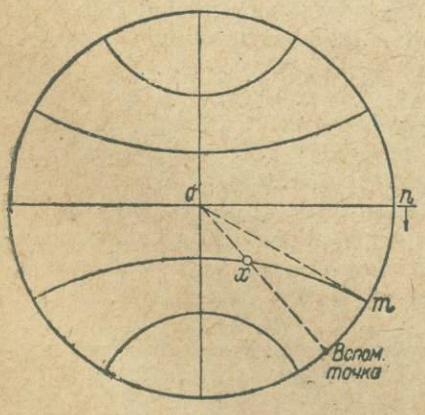
---

* Нахождение координаты φ может быть выполнено и без отметки временной вспомогательной точки. Долгота отсчитывается при этом после поворота чертежа от экватора сетки Вульфа (от места, где помечается вспомогательная точка) против часовой стрелки до черточки, обозначающей начальный меридиан. Во избежание путаницы у начинающего, мы не придерживаемся этого безусловно лучшего способа.



Фиг. 82.

Упражнения. Для того, чтобы иметь возможность самому себя проконтролировать при самостоятельных занятиях, можно предложить переснять на восковку точки с чертежей, построенных нами при решении прямых задач (задача 1); определить координаты переснятых точек при помощи сетки Вульфа и сверить полученные координаты с координатами, заданными для решения прямых задач (задача 1).



Фиг. 83.

Решение двух самых основных задач — нанесение проекции по координатам φ и ρ и определение координат по заданной на чертеже проекции, осуществляется на сетке Болдырева гораздо проще, чем на сетке Вульфа. Решение остальных задач * проще на сетке Вульфа. Поэтому самым рациональным является пользование обеими сетками: для решения двух первых

* Сказанное не относится к задачам 3 и 4, которые являются частными приложениями задачи 1.

задач — сеткой Болдырева, для решения остальных задач — сеткой Вульфа. Так как радиусы обеих сеток одинаковы (10 *см*), то под один и тот же чертеж можно подкладывать как ту, так и другую сетку, в зависимости от характера данной задачи.

Задача 7. Построить стереографические проекции плоскостей, координаты которых — φ и ρ — даны.

Положение плоскости в пространстве задается координатами φ и ρ нормали к этой плоскости. Таким образом, указанную задачу можно перефразировать так: „найти стереографическую проекцию плоскости, нормальной к данному направлению".

В кристаллографии плоскостями, проекции которых строятся, чаще всего являются грани и плоские сетки кристалла или же нормали к ребрам (или рядам решетки). Кроме того строятся проекции плоскостей симметрии, о которых речь будет дальше, и другие плоскости. Для этого нужно только проектируемую плоскость параллельно самой себе перенести так, чтобы она прошла через центр шара.

Для примера построим плоскость X с координатами (30°, 40°). Прежде всего, по данным $\varphi = 30°$ и $\rho = 40°$, строим стереографическую проекцию направления, нормального к данной плоскости. Эту задачу мы уже умеем выполнять (см. задачу 1, фиг. 82). Для построения стереографической проекции плоскости, нормальной к построенному направлению, следует эту плоскость (проходящую через центр шара) продолжить таким образом, чтобы она пересекла шар проекции. Очевидно, что полученная линия пересечения будет представлять собою дугу (окружность) большого круга. Все точки этой дуги (окружности) будут образовывать углы в 90° с построенным направлением. * Все эти точки и необходимо спроектировать, причем и в проекции они образуют дугу окружности (проекция окружности есть окружность).

Стереографическая проекция плоскости (например, грани кристалла) есть окружность.

Поступаем следующим образом: следя за центрировкой чертежа, вращением совмещаем проекцию построенной нормали X (30°, 40°) с экватором сетки Вульфа (фиг. 82). Отсчитываем по экватору сетки Вульфа 90° от построенной точки в сторону к центру чертежа. Полученная в результате этого отсчета точка (x) окажется лежащей или на каком-либо из меридианов сетки Вульфа, или же между двумя соседними меридианами. Пользуясь ближайшим меридианом сетки как транспарантом, проводим от руки меридиан (nxs), проходящий через полученную точку x. Вычерченная таким образом дуга окружности и будет искомая стереографическая проекция плоскости. Действительно, нетрудно убедиться, что все ее точки образуют углы в 90° с нормалью x (30°, 40°). Для этого возьмем на этой дуге точки x, n и s. От проекции X до x мы отсчитывали 90°, а от X до n и до s тоже 90°, так как X лежит на экваторе, а n и s — в полюсах сетки Вульфа. Таким образом проведенная дуга действительно представляет собою стереографическую проекцию плоскости с заданными координатами X (30°, 40°).

Указанное построение не изменяется, если проекция нормали с данными координатами изображается не кружком, но крестиком.

Упражнения. Построить стереографические проекции плоскостей, нормальных к направлениям A (30°, 40°); D (300°, 100°); C (262°, 90°) (проекции этих направлений уже построены при решении задачи 1).

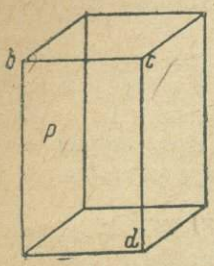
Задача 8 (обратная задача 5). Определить координаты плоскостей, заданных на чертеже своими стереографическими проекциями.

---

* Поэтому эта окружность называется экватором по отношению к точке выхода на шаре построенного направления. В свою очередь, эта последняя точка носит название полюса нашей окружности. Этими терминами мы пользоваться не будем.

Очевидно, что для этого придется строить сначала нормали к заданным плоскостям. Координаты этих нормалей и определяют искомые координаты плоскостей. Координаты нормалей мы умеем определять. Поэтому указанную задачу можно перефразировать так: „найти стереографическую проекцию направления, нормального к заданной плоскости".

Пусть заданная плоскость на чертеже представлена некоторой дугой окружности pq (фиг. 82). Тщательно следя за правильностью центрировки чертежа на сетке Вульфа, вращаем чертеж до совмещения данной дуги с каким-либо меридианом сетки Вульфа. Если этого не происходит, располагаем данную дугу между двумя соседними меридианами сетки. В полученной ориентировке от точки, лежащей на пересечении данной дуги с экватором сетки Вульфа (от точки x), отсчитываем по экватору сетки Вульфа в сторону к центру чертежа 90°. Получаем искомую стереографическую проекцию нормали к плоскости pq. Координаты полученного направления X определяем, как в задаче 2. Полученные φ и ρ и будут искомыми.



Фиг. 84. Грань p проходит через ребра bc и cd и определяется положением этих ребер.

Упражнения. Повернув чертеж на сетке на любой угол (при сохранении центрировки), проводим дугу по любому меридиану сетки. Проведенная дуга и может служить заданной проекцией плоскости, φ и ρ которой следует определить.

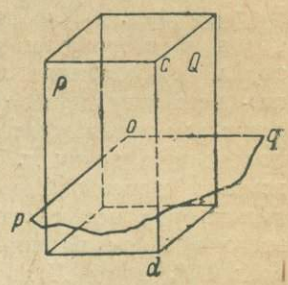
Задача 9. Найти стереографическую проекцию плоскости, проходящую через два направления, заданных на чертеже стереографическими проекциями.

Если два данных направления представляют собой ребра кристалла, то искомая плоскость является гранью кристалла (действительной или возможной), проходящей через эти ребра (фиг. 84). Если же два данных направления представляют собой нормали к граням кристалла, то искомая плоскость есть плоскость, нормальная к ребру, образованному пересечением данных граней (фиг. 85).

Очевидно, что искомая плоскость пересечет шар проекций по дуге большого круга, которая проходит через выходы обоих заданных направлений.

Поступаем поэтому для решения задачи следующим образом.

Пусть данные направления изображаются на чертеже точками a и b (фиг. 82). Следя за центрировкой чертежа на сетке, вращением совмещаем обе данные точки с одним из меридианов сетки Вульфа. Если этого не происходит, интерполируя, располагаем обе точки между двумя соседними меридианами. Пользуясь ближайшим меридианом сетки как транспарантом, проводим от руки меридиан $nabs$, проходящий через данные точки a и b. Так как всякий меридиан есть дуга большого круга, и проведенная нами дуга проходит через данные точки a и b, то она и является искомой стереографической проекцией плоскости.



Фиг. 85. Плоскость проходит через нормали к граням кристалла и нормальна к ребру между ними.

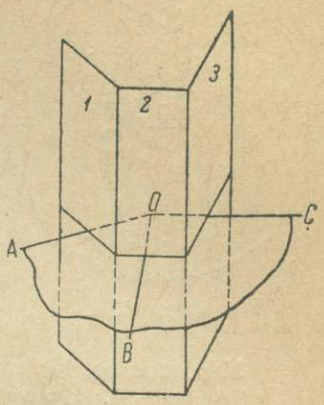
Предостережение. Следует помнить, что только меридианы являются дугами больших кругов. Параллели таковыми не являются. Поэтому совмещение двух заданных точек с одной из параллелей сетки Вульфа и прочерчивание этой параллели *не будет решением* задачи. Искомая дуга должна всегда располагаться выпуклостью от центра чертежа.

Замечание. Стереографические проекции ко всем нормалям граней одного пояса (см. стр. 48) всегда могут быть совмещены с одним из меридианов сетки Вульфа (или расположены между двумя соседними меридианами); иначе говоря, они располагаются на проекции одной из дуг большого круга.

Пусть грани *1*, *2* и *3* (фиг. 86) пересекаются в параллельных ребрах и

таким образом являются гранями одного пояса. Тогда нормали к этим граням OA, OB и OC должны, как нетрудно доказать, лежать в одной и той же плоскости $OABC$. Эта плоскость проходит через все наши нормали и в стереографической проекции должна изображаться дугой, проходящей через стереографические проекции данных нормалей. Отсюда и следует формулированное выше замечание.

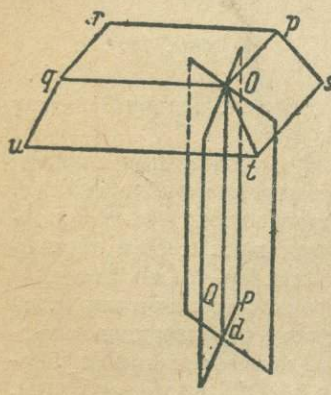
Упражнения. Построить стереографические проекции плоскостей, проходящих через направления A и B, A и D', B и D', A и C (проекции этих направлений уже имеются на нашем чертеже).



Фиг. 86.

Задача 10. Измерить угол между двумя направлениями, заданными на чертеже своими стереографическими проекциями. Задача эта играет исключительно важную роль в кристаллографии. Мы знаем, что углы между гранями и ребрами кристалла являются характерными величинами, по которым можно распознавать кристаллы одинаковых веществ и отличать друг от друга кристаллы различные (закон Стенона). Измерение на двукружном гониометре непосредственно углов между всеми гранями не дает. При помощи стереографической проекции углы между нормалями к граням и определяются решением задачи 6 (зная углы между нормалями, нетрудно перейти к углам между гранями, беря дополнения до 180° углов между нормалями).

Выходы данных направлений на шаре изображаются точками. Угол между данными направлениями измеряется очевидно дугой большого круга, соединяющей на шаре оба выхода. Мы уже умеем строить проекцию такой дуги (задача 5). Поэтому поступаем следующим образом. Пусть данные направления изображаются на чертеже точками a и b (фиг. 82). Следя за центрировкой чертежа, располагаем эти точки, как и в предыдущей задаче, на одном из меридианов сетки Вульфа (или между двумя соседними меридианами). Пользуясь двуградусными делениями, на которые разбиты все меридианы сетки Вульфа, нетрудно сосчитать число градусов, заключенное между точками a и b. Полученный отсчет следует записать у середины дуги, проходящей через точки a и b. Полученное число градусов и будет искомым.



Фиг. 87.

Предостережение то же, что и к предыдущей задаче.

Упражнения. Измерить углы между направлениями A и B, A и D', B и D', A и C.

Ответы: 96°, 82°, $43^1/_2$°, 104°.

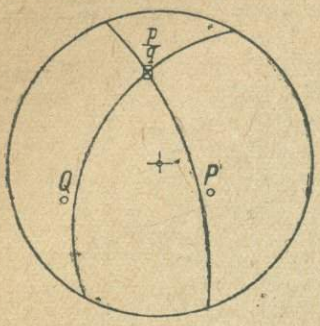
Задача 11. Найти стереографическую проекцию линии пересечения плоскостей, заданных на чертеже своими стереографическими проекциями.

Если две данные плоскости представляют собою некоторые грани кристалла (фиг. 87, P и Q), то линия их пересечения является действительным или возможным ребром кристалла (ребро Od).

Если две данные плоскости представляют собой нормали к ребрам кристалла, то линия их пересечения является нормалью к грани кристалла, проходящей через данные ребра. Действительно, пусть P и Q (фиг. 87) — плоскости, нормальные к ребрам Op и Oq некоторого кристалла $Oqrpstu$. Линия пересечения этих плоскостей Od должна быть перпендикулярна как ребру Op, так и ребру Oq. Следовательно, она будет перпендикулярна и ко всей плоскости $qOpr$,

которая проходит через эти ребра. Таким образом, линия *Od* является нормалью к грани *qOpr*.

Предложенная задача чрезвычайно проста. Заданные плоскости изображаются двумя дугами. Точка их пересечения принадлежит одновременно обеим дугам и является, следовательно, проекцией направления, лежащего одновременно в обеих данных плоскостях. Такое направление и является линией пересечения данных плоскостей. Таким образом, указанная точка пересечения дуг и будет искомой.



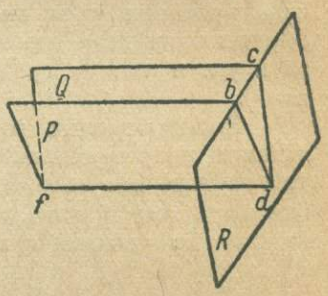
Фиг. 88.

Замечание. Как было указано, линией пересечения двух граней является ребро кристалла. Условимся стереографические проекции ребер, в отличие от стереографических проекций нормалей к граням, изображать не кружочками, но квадратиками (фиг. 88). Координаты же φ и ρ ребер кристалла будем писать не в круглых, но в квадратных скобках. Например, координаты ребра между гранями *P* и *Q* записываются: *P*/*Q* [160°, 55°].

Упражнение. Найти ребро пересечения граней *A* (30°, 40°) и *B* (163°, 67°).

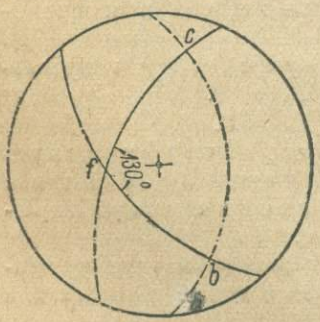
Задача 12. Измерить угол между двумя плоскостями, заданными на чертеже своими стереографическими проекциями.

Очевидно, что двугранный угол между плоскостями *P* и *Q* (фиг. 89) измеряется плоским углом *bdc*, образованным линиями пересечения данных плоскостей с плоскостью *R*, перпендикулярной к обеим. Плоскость *R* является, таким образом, нормалью линии *fd*, по которой пересекаются данные плоскости. Поэтому поступаем следующим образом. Данные плоскости на чертеже изображаются двумя дугами. Точка пересечения *f* этих дуг (фиг. 90) изображает линию пересечения данных плоскостей (см. задачу 9). Вращением совмещаем эту точку *f* с экватором сетки Вульфа. Отсчитывая (в сторону центра) 90°, находим меридиан, который отвечает плоскости, нормальной к *f* (см. задачу 3). Этот меридиан пересечет данные дуги в двух точках (точки *c* и *b*).



Фиг. 89.

Пользуясь этим меридианом, отсчитываем число градусов между точками *c* и *b* (см. задачу 6). Задача решена. Ответ записываем на чертеже около точки *f*.



Фиг. 90.

Так как угол между плоскостями равен дополнению до 180° угла между нормалями к этим плоскостям, то, очевидно, указанную задачу можно решить и иначе. Действительно, построив проекции нормалей к данным плоскостям (см. задачу 6), нетрудно измерить угол между полученными направлениями (см. задачу 8). Беря дополнение до 180° найденного угла, получим искомый двугранный угол.

Упражнения. Найти углы сферического треугольника *abd* (см. упражнения к задачам 1 и 10).

Ответы: угол при вершине $a = 41°$, при вершине $d = 108°$, при вершине $b = 71^1/_2°$ (последний получен как дополнение до 180° внешнего смежного угла $108^1/_2°$).

Задача 13. Найти стереографическую проекцию геометрического места направлений, образующих с данным направлением *A* (φ, ρ) данный угол α.

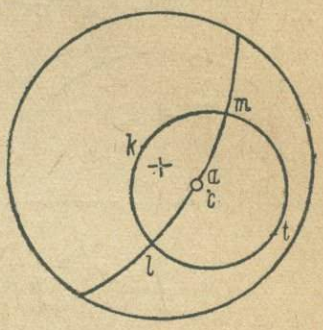
Очевидно, что направления искомого геометрического места образуют в про-

странстве круговой конус, осью которого является заданное направление A. На шаре этот круговой конус вырежет окружность (KT) сферическим радиусом $AK = AT = \alpha°$. В проекции эта окружность изобразится окружностью kt (фиг. 74).

Поэтому указанную задачу можно перефразировать таким образом:

Построить стереографическую проекцию окружности данного радиуса и с данным центром a.

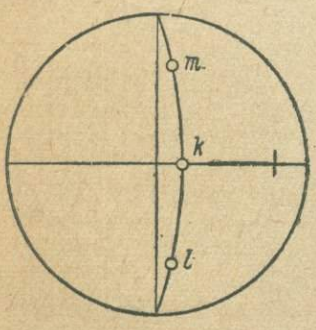
Заметим сразу же, что геометрический центр окружности на чертеже не будет совпадать с проекцией этого центра. Точка a, таким образом, не будет являться геометрическим центром окружности kt, хотя точка A и является геометрическим центром окружности KT; точку a мы будем называть сферическим центром окружности kt.



Фиг. 91.

Поступаем следующим образом (фиг. 91). Строим стереографическую проекцию данного направления A (см. задачу 1). Вращением (следя, как всегда, за центрировкой чертежа) помещаем проекцию a на экватор сетки Вульфа. Отсчитываем по экватору от точки a к центру данное α (например, если $\alpha = 50°$, то отсчитываем по 50°). Получаем на экваторе точку k. Далее по меридиану, на котором лежит точка a (или по меридианам, между которыми эта точка лежит), отсчитываем в обе стороны также по $\alpha°$. Получаем еще две точки — m и l. Три полученные точки k, m и l принадлежат искомому геометрическому месту. Оно должно представлять собою окружность, а всякая окружность вполне определяется тремя точками.

Для построения искомой дуги окружности заметим, что если мы сумеем одновременно поместить все три полученные нами точки k, m и l на одну из линий стереографической сетки (безразлично — на меридиан или на параллель), то, пользуясь этой линией как лекалом (вернее — как транспарантом), мы можем вычертить дугу искомой окружности. Действительно, — вычерченная линия пройдет через все три наши точки и будет вместе с тем дугой окружности, так как все меридианы и все параллели стереографических сеток представляют собою дуги окружностей различных радиусов.



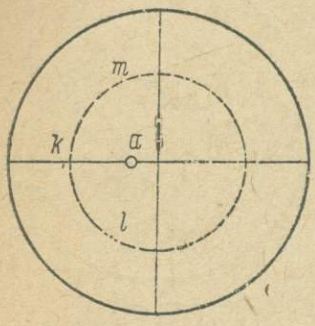
Фиг. 92.

Для совмещения трех найденных нами точек k, m и l с одной из линий сетки проще всего поступать следующим образом. Сдвигаем чертеж на сетке Вульфа так, чтобы точки k и a оставались лежащими на экваторе сетки (центрировка, таким образом, не сохраняется). При перемещении чертежа следим за меридианами, через которые проходят точка k и точки m и l. Если в некоторый момент точка k окажется лежащей на меридиане, на котором лежат и точки m и l, то останавливаем перемещение (фиг. 92). В полученном положении три точки k, m и l лежат на одной дуге окружности, которую мы и прочерчиваем от руки, пользуясь меридианом сетки Вульфа как лекалом (вернее — как транспарантом) (чаще всего три точки k, m и l укладываются не на самом меридиане сетки, а между двумя соседними. Тогда, пользуясь ближайшим, проводим на-глаз искомую дугу, проходящую через все три точки k, m и l).

Если при перемещении точек k и a вдоль экватора сетки Вульфа точка k выйдет за окружность проекции сетки и вместе с тем еще не окажется лежащей на одном меридиане с точками m и l, то проще всего перейти к сетке Болдырева, параллели которой представляют собой окружности меньших радиусов, чем меридианы сетки Вульфа.

Подкладывая под чертеж сетку Болдырева, совмещаем точки a и k с на-

чальным меридианом сетки и перемещаем чертеж на сетке таким образом, чтобы эти точки оставались лежащими на этом меридиане (вернее — на его продолжении, $\varphi = 180°$). При этом перемещении следим за концентрическими параллелями сетки Болдырева, через которые проходит точка k и точки m и l. Если в некоторый момент точка k окажется лежащей на параллели, на которой лежат и точки m и l, то останавливаем перемещение (фиг. 93). В полученном положении три наших точки лежат на одной дуге окружности, которую нетрудно прочертить от руки, пользуясь параллельно сеткой Болдырева как транспарантом. * (Если все три точки не попадают ни на одну из окружностей сетки Болдырева, помещаем их между двумя соседними окружностями и, пользуясь ближайшей, на-глаз проводим окружность, проходящую через точки m, k и l.)



Фиг. 93.

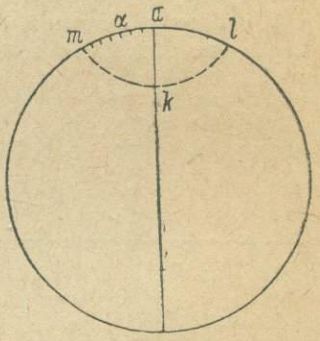
Чтобы не прибегать к сетке Болдырева, можно также строить искомую окружность при помощи циркуля и линейки или, наконец, пользоваться параллелями сетки Вульфа (задача в этом случае осложняется построением добавочных точек).

Частный случай

Если данное направление A, вокруг которого строится искомое геометрическое место (конус в пространстве, окружность на шаре и на чертеже), горизонтально, задача может быть очень сильно упрощена.

Стереографическая проекция a данного направления A в этом случае помещается на окружности проекции. Вращением на сетке Вульфа мы совмещаем точку a не с экватором, как это всегда делается, но с полюсом сетки Вульфа (чертеж центрирован) (фиг. 94). Отсчитываем от точки a по окружности проекции данное $\alpha°$. Получим точку m, лежащую на некоторой параллели сетки Вульфа (или между двумя соседними параллелями).

Пользуясь ближайшей параллелью как транспарантом, прочерчиваем от руки дугу окружности mkl, которая и будет искомой.



Фиг. 94.

Упражнения: I. Построить геометрические места направлений, образующих с направлением A (36°, 60°) следующие углы: 1) $\alpha = 70°$; 2) $\alpha = 50°$; 3) $\alpha = 30°$.

II. Построить геометрические места направлений, образующих с направлением β (114°, 90°) следующие углы: 1) $\alpha = 70°$; 2) $\alpha = 50°$; 3) $\alpha = 30°$.

Замечание. Если по условию задачи $\alpha > 90°$, то задача решается просто только в случае, когда данное направление A горизонтально ($\rho = 90°$).

Покажем на конкретном примере решение задачи в общем случае ($\rho \neq 90°$).

Пусть, например, $\alpha = 130°$. Проекцию данного направления A (36°, 60°) вращением на сетке совмещаем с экватором (центрировку сохраняем). Отсчитываем 130° по экватору сетки. Получаем точку k (фиг. 95) — одну из точек искомой окружности. Если теперь мы попробуем по меридиану *nas* отсчитывать от a по 130°, то увидим, что делений для такого отсчета на сетке нехватит. До полюсов сетки n и s может быть отсчитано не более 90°. Чтобы получить возможность отсчитать нужное число градусов $\alpha = 130°$, прибегают к дополнительным поворотам. Вращением (при сохранении центрировки) помещают точку a на параллель сетки Вульфа, отстоящую от по-

* Для этой же цели, вместо сетки Болдырева, можно употреблять и специальный „концентрический транспарант" проф. Н. Н. Падурова. Этот транспарант представляет собой сетку Болдырева, лишенную меридианов.

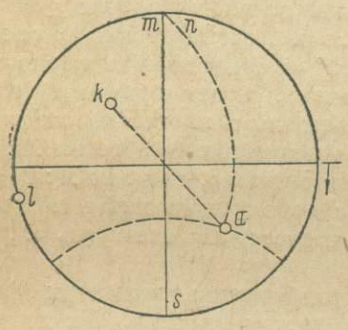
люса n на 130° (или, что то же, от s на 50°). Очевидно, что в полученном положении от точки a до точки n будут укладываться необходимые нам 130° (фиг. 95). Помечаем точку, совпадающую в найденном положении с n — это будет точка m — вторая точка искомой окружности.

Вращением в обратную сторону помещают точку a на параллель сетки, отстоящую от полюса s на 130° (или, что то же, от n на 50°). Очевидно, что в полученном положении от точки a до точки s также будут укладываться нужные нам 130°.

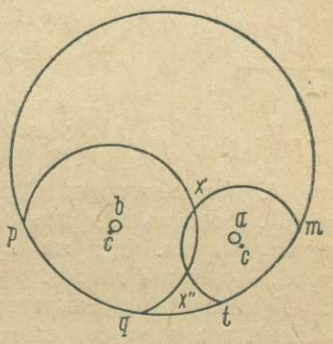
Точка l, совпадающая в найденном положении с полюсом s, является третьей точкой искомой окружности.

Возвращаем точку a на экватор сетки и при помощи перемещения вдоль направления ka (центрировка не сохраняется) совмещаем три найденных точки с одним из меридианов сетки. Прочерчивая этот меридиан, получим дугу искомой окружности. Задача решена.

Задача 14. Найти стереографическую проекцию направления X, образующего данные углы α и β с данными направлениями A и B.



Фиг. 95.



Фиг. 96.

Задача целиком основана на предыдущей.

Очевидно, что искомое направление X принадлежит к геометрическому месту всех направлений, расположенных под углом α к направлению A. Геометрическое место таких направлений изображается в проекции некоторой окружностью mt со сферическим центром a (фиг. 96). Искомое направление X должно, таким образом, изображаться одной из точек окружности.

Совершенно так же искомое направление принадлежит и к геометрическому месту всех направлений, расположенных под углом β к направлению B. Геометрическое место таких направлений изображается в проекции некоторой окружностью pq со сферическим центром b. Искомое направление X должно, таким образом, изображаться одной из точек и этой окружности. Очевидно, что обе точки, принадлежащие обеим окружностям одновременно, точки пересечения этих окружностей, и будут являться искомой проекцией.

Замечание. Задача невозможна, если окружности mt и pq не пересекаются.

Упражнения.

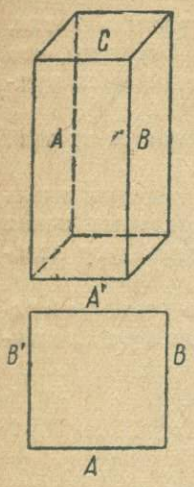
1) Найти стереографические проекции направлений X' и X, образующих углы 45° с направлением A (40°, 60°) и 65° с направлением B (150°, 50°).

2) Найти стереографическую проекцию направления Y, образующего угол 70° с направлением C (0°, 90°) и угол 120° с направлением D (110°, 90°).

Задача 15. По результатам измерений кристалла прикладным или однокружным отражательным гониометром составить его стереографическую проекцию („нанести кристалл на сетку").

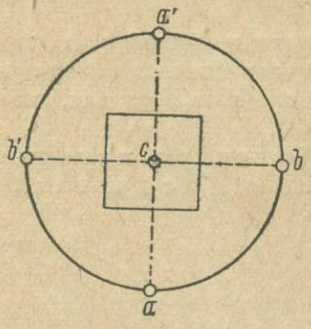
Рассмотрим несколько примеров. Начнем с простейшего.

1) Пусть данный кристалл является призмой с квадратным основанием C (фиг. 97). Измерения прикладным гониометром подтверждают, что угол между гранями A и B прямой: $A:B=90°$, также $A:C=90°$ и $B:C=90°$.



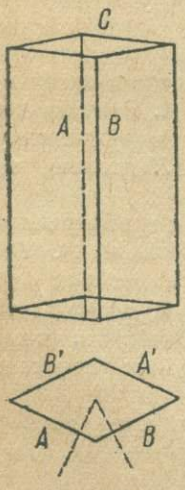
Фиг. 97.

Для проектирования прежде всего следует выбрать ориентировку кристалла относительно плоскости проекции (последнюю будем, как всегда, считать горизонтальной). Ориентируем его таким образом, чтобы грани A и B (и им параллельные A' и B') были вертикальны. Грань A располагаем к наблюдателю, грань B — с правой стороны. Нормаль к грани B, как нормаль к вертикальной грани, изобразится в проекции точкой, лежащей на окружности проекции. Помечаем ее в начальном (нулевом) меридиане точкой b (фиг. 98). Очевидно, что нормаль к грани B', параллельной B, изобразится точкой b', диаметрально противоположной b. Нормаль к вертикальной грани A образует $\angle 90°$ с нормалью b. Поэтому точка a, отстоящая на 90° от b и лежащая на окружности проекции, будет проекцией грани A. Диаметрально противоположная точка a' будет проекцией грани A', параллельной A. Верхняя грань C расположена горизонтально, так как $A:C=90°$ и $B:C=90°$. Нормаль к грани C — вертикальна, а потому проектируется точкой c в центре проекции. Тут же крестиком проектируется нижняя грань C', параллельная C. Проекция готова.

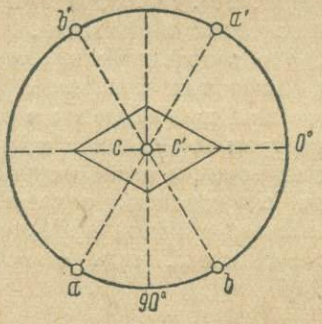


Фиг. 98.

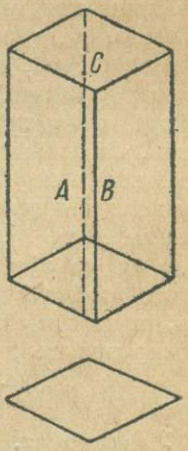
2) Кристалл представляет собой призму с ромбическим основанием (фиг. 99). Прикладным гониометром были измерены углы между гранями. Их дополнения



Фиг. 99.



Фиг. 100.



Фиг. 101.

до 180° являются углами между нормалями к граням. Получились следующие значения углов между нормалями: $A:B=64°$; $A:C=90°$; $B:C=90°$.

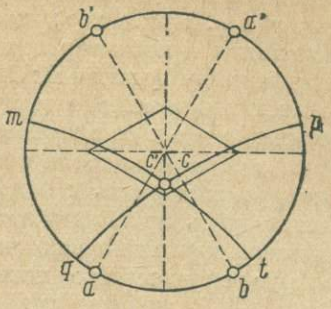
Ориентируем кристалл относительно горизонтальной плоскости проекции так, чтобы грани A, B, A' и B' были вертикальны, причем грани A и B образовали бы одинаковые углы с плоскостью меридиана 90°.

При такой ориентировке нормали к этим граням будут проектироваться точками a и b на окружности проекции (фиг. 100), на расстоянии в 64° друг от

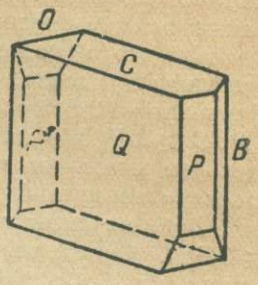
друга и на расстояниях в $64°:2=32°$ по обе стороны от меридиана 90°. Построив точки a и b, нетрудно найти остальные проекции a', b', c и c'.

3) Кристалл представляет собой призму с ромбическим основанием, однако в отличие от предыдущего случая, основания не перпендикулярны к боковым граням (фиг. 101).

Углы между нормалями: $A:B=64°$; $A:C=72°$; $B:C=72°$.



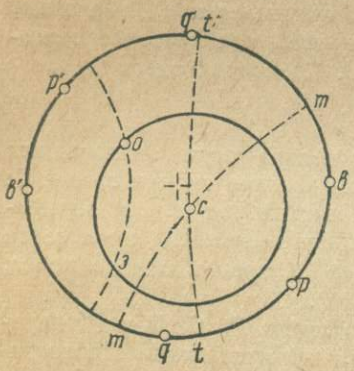
Фиг. 102.



Фиг. 103.

Ориентируем кристалл относительно горизонтальной плоскости проекции, как и предыдущий, так, чтобы грани A, B, A' и B' были вертикальны, причем грани A и B образовали бы одинаковые углы по $64°:2=32°$ с плоскостью меридиана 90°. Прежде всего и строим проекции этих граней, откладывая по окружности проекции по 32° в обе стороны от меридиана 90°. Грань C не является горизонтальной гранью, а потому ее нормаль не будет уже проектироваться в центре. Для построения проекции этой нормали придется воспользоваться данными измерений (фиг. 102).

Искомая нормаль C образует угол в 72° с нормалью A и угол 72° с нормалью B. Так как положение в проекции нормалей A и B уже найдено, то нахождение проекции нормали C сводится к решению задачи 12.



Фиг. 104.

Строим проекцию геометрического места направлений, образующих угол в 72° с направлением нормали A. Получаем дугу окружности mt.

Строим проекцию геометрического места направлений, образующих угол в 72° с направлением B. Получаем дугу окружности pq.

В пересечении этих дуг получаем точку c, которая и является искомой стереографической проекцией нормали C.

Далее крестиком c' следует изобразить и нормаль к грани C', параллельной C.

Таким образом все нормали спроектированы, и задача решена.

4) Рассмотрим более сложный пример.

Кристалл, изображенный на фиг. 103, был измерен на однокружном гониометре, в результате чего получены следующие значения углов между нормалями:

$$B:P=41°58'$$
$$P:Q=53°40'$$
$$B:C=83°25'$$
$$P:C=72°29'$$
$$B':O=54°18'$$
$$C:O=59°26'$$

При этом было обнаружено, что каждая грань имеет параллельную себе по другую сторону кристалла (например, грани P параллельна грань P').*

Ориентируем кристалл таким образом, чтобы грани B, P, Q, B', P', Q' были вертикальны. Тогда проекции их нормалей изобразятся на окружности проекции. Расположим вертикальную грань B так, чтобы нормаль к ней протягивалась слева направо. Проекция этой нормали изобразится поэтому точкой b

* Взят пример кристалла двойной соли муравьино-кислой меди и бария: $[HCOO]_6CuBa_2\cdot 4H_2O$ (описание см. у Грота, „Chemische Kristallographie", III, 24).

в начальном меридиане (см. фиг. 104). От полученной точки b отложим по окружности проекции $B:P \cong 42°$. Получим точку p — проекцию нормали P. Откладывая далее от точки p угол $P:Q = 53^2/_3°$, получим проекцию Q (также на окружности проекции) — q. Проекции нормалей к остальным вертикальным граням (B', P' и Q') просто получаются построением точек b', p' и q', диаметрально противоположных точкам b, p и q. После того, как все нормали к вертикальным граням спроектированы, переходим к проектированию нормали C.

Для этого пользуемся данными углами $B:C$ и $P:C$. Построение, как и в предыдущей задаче, сводится к применению задачи 12. Две дуги tt и mm (со сферическими центрами в точках b и p и со сферическими радиусами $B:C \cong 83^1/_2°$ и $P:C \cong 72^1/_2°$) пересекаются в точке c, которая и является проекцией нормали C. Здесь же крестиком проектируется нормаль к нижней грани C'. Для построения проекции нормали O придется опять применить задачу 10.

Дуга nn имеет сферический центр в точке b' и сферический радиус $B':O \cong \cong 54^1/_3°$. Окружность вокруг сферического центра c проведена сферическим радиусом в $C:O \cong 59^1/_2°$.

В пересечении этой окружности с дугой nn получаем две точки o и ω. Обе эти точки являются проекциями нормалей, удовлетворяющих заданным углам $B':O$ и $C:O$. Для решения вопроса — какая же из двух полученных точек действительно является проекцией нормали данной грани O, следует обратиться к рисунку кристалла (фиг. 103) (еще лучше — к его модели или к самому реальному объекту исследования).

Из рисунка видно, что грань O расположена с задней стороны кристалла и не обращена к наблюдателю. Поэтому проекция ее нормали должна изображаться в задней части проекции и не должна быть обращена к наблюдателю, как проекция ω. Таким образом, точку ω следует отбросить, как неверное решение, и точку o считать за проекцию нормали грани O. Крестиком здесь же следует пометить и нормаль к параллельной грани O'.

Построение закончено.

Замечание. Решение как этой задачи, так и целого ряда аналогичных можно отчасти проверить и упростить, если помнить о замечании к задаче 7: нормали ко всем граням, пересекающимся в параллельных ребрах и стереографических проекциях, всегда могут быть расположены на одном из меридианов сетки (иными словами, через точки, изображающие нормали к граням одного пояса, всегда можно провести проекцию дуги большого круга).

В решенной нами задаче из рисунка видно, что грани P, C, O и P' пересекаются в параллельных ребрах. Поэтому все точки, изображающие стереографические проекции нормалей к этим граням, при вращении на сетке Вульфа должны совмещаться с одним из меридианов сетки. Производя такое совмещение, можно убедиться в относительной правильности построения точек p, c, o и p', а в случае — если эти точки не окажутся лежащими на одном меридиане, исправить и уточнить их положение на чертеже.

Упражнения. Начинающему рекомендуется измерить самому несколько простых моделей кристаллов прикладным гониометром (хотя бы самодельным). Результаты измерения могут служить для составления стереографической проекции. Кроме того, полезно составить стереографические проекции и по нижеприведенным данным.

Кристалл $[PO_4]_2CrH_3 \cdot 8H_2O$ (фиг. 105) имеет следующие углы между нормалями:

$$B:Q = 77°30'$$
$$B':P = 38°00'$$
$$Q:C = 70°50'$$
$$P:C = 62°30'$$
$$B:R = 79°00'$$
$$C:R = 62°00'$$

Построить стереографическую проекцию кристалла.

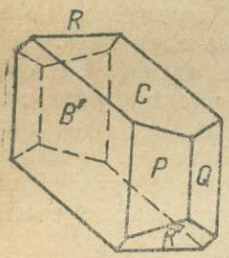
Поверка. Построенные нормали должны иметь следующие координаты:
B (0°, 90°); Q ($77^1/_2$°, 90°); P (142°, 90°); B' (180°, 90°); Q' ($257^1/_2$°, 90°); P' (322°, 90°); C (137°, 30°); C' (317°, 150°); R ($290^1/_2$°, 33°); R' ($110^1/_2$°, 147°).

2) Кристалл $CO\{CH:C\,[COO\cdot C_2H_5]\}_2O$ (фиг. 106) имеет следующие углы между нормалями:

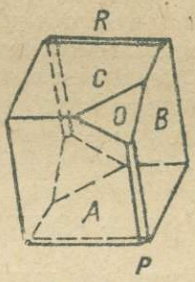
$$B:A = 85°31'$$
$$A:P = 53°09'$$
$$A:C = 70°15'$$
$$B:C = 82°42'$$
$$A:O = 57°47'$$
$$C:O = 25°55'$$
$$C:R = 21°01'$$
$$O:R = 42°00'$$

При этом каждая грань имеет параллельную себе.
Построить стереографическую проекцию кристалла.

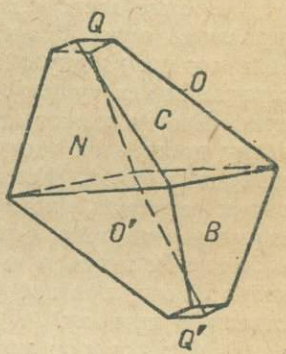
Поверка. Построенные нормали должны иметь следующие координаты:
B (0°, 90°); P ($32^1/_2$°, 90°); A ($85^1/_2$°, 90°); B' (180°, 90°); P' ($212^1/_2$°, 90°); A' ($265^1/_2$°, 90°); C (69°, 20°); O (46°,44°); O' (226°, 136°); R (342°, 06°); R' (142°, 174°).



Фиг. 105.



Фиг. 106.



Фиг. 107.

3) Кристалл $W_9B_2O_{32}Cd_2\cdot 18H_2O$ (фиг. 107) имеет следующие углы между нормалями:

$$B':N = 46°54'$$
$$B:C = 65°12'$$
$$N':C = 75°07'$$
$$B':Q = 53°18'$$
$$C:Q = 61°30°$$
$$C:O = 45°54'$$
$$Q:O = 53°00'$$

Грани B, N, B' и N' — вертикальны.
Построить стереографическую проекцию кристалла.

Поверка. Построенные нормали должны иметь следующие координаты:
B (0°, 90°); A (133°, 90°); B' (180°, 90°); N' (313°, 90°); C (6°, 25°); C' (186°, 154°); Q (177°, 37°); Q' (357°, 142°); O (277°, 41°); O' (97°, 138°).

Задача 16. Повернуть данное направление вокруг вертикальной оси на данное число градусов.

Пусть данное направление A изображается в проекции точкой a. Пусть это направление следует повернуть на α° вокруг проектирующейся в центре вертикальной оси.

Очевидно, что при вращении вокруг этой оси направление A будет неизменно оставаться под одним и тем же углом ρ к оси вращения, а проекция a будет перемещаться по дуге окружности со сферическим радиусом ρ и со сфе-

рическим центром в центре проекции. Если до поворота координаты были A (φ, ρ), то после поворота координаты будут A_1 ($\varphi \pm \alpha$, ρ).

Отсюда следуют такие способы решения задачи:

1) Вращением на сетке Вульфа (при сохранении центрировки) совмещаем данную точку a с экватором сетки. По окружности проекции отсчитываем в сторону вращения данный угол поворота $\alpha°$. Ставим на окружности проекции временную вспомогательную точку, после чего вращением (при сохранении центрировки) совмещаем вспомогательную точку с экватором сетки Вульфа. От центра по экватору сетки отсчитываем полярное расстояние, равное первоначальному полярному расстоянию данного направления A. Конечная точка отсчета и будет являться стереографической проекцией направления A после поворота.

2) Проще всего задача решается на сетке Болдырева. От меридиана, на котором лежит данная проекция a, отсчитываем по параллели, на которой она лежит, в сторону вращения данный угол поворота $\alpha°$.

Конечная точка отсчета, лежащая на меридиане ($\varphi \pm \alpha°$) и на той же параллели ρ, на которой лежала данная проекция, и является искомой стереографической проекцией направления A после поворота.

Задача 17. Сравнить и отождествить два кристалла, одинаково юстированных при измерении на двукружном гониометре.

Прежде всего составляем стереографические проекции обоих кристаллов (проекцию одного из них полезно делать чернилами или тушью). Накладываем один чертеж на другой (будем называть первым нижний чертеж, помеченный чернилами или тушью). Так как юстировка обоих кристаллов одинакова, то их ориентировка может отличаться только положением начального меридиана. Поэтому вращением второго чертежа на первом можно добиться одинаковой ориентировки обоих. Когда все (или большинство) нормалей к граням совпадут на обоих чертежах, помечаем черточкой на втором чертеже положение начального меридиана первого чертежа. Угол α между помеченной черточкой и начальным меридианом второго чертежа будет являться тем углом поворота вокруг вертикальной оси, при котором второй чертеж примет ориентировку, вполне тождественную первому.

Этот поворот можно осуществить, как указано в задаче 12.

Упражнение. Измеренный кристалл, согласно журналу измерений, имеет координаты: *1* (326° 50′; 90° 00′), *2* (29° 01′; 90° 00′), *3* (56° 43′; 90° 00′), *4* (84° 39′; 90° 00′), *5* (146° 50′; 90° 00′), *6* (208° 48′; 90° 00′), *7* (237° 16′; 90° 00′), *8* (264° 52′; 90° 00′), *9* (56° 50′; 14° 56′), *10* (282° 26′; 29° 22′), *11* (191° 01′; 22° 00′). Из справочника В. Гольдшмидта „Kristallographische Winkeltabellen“ следует, что кристаллы роговой обманки имеют следующие координаты граней: *1* (0° 00′; 90° 00′), *2* (62° 05′; 90° 00′), *3* (90° 00′; 90° 00′), *4* (117° 55′; 90° 00′), *5* (180° 00′; 90° 00′), *6* (242° 05′; 90° 00′), *7* (270° 00′; 90° 00′), *8* (297° 55′; 90° 00′), *9* (90° 00′; 14° 58′), *10* (315° 39′; 22° 20′), *11* (224° 21′; 22° 20′), *12* (70° 20′; 41° 07′), *13* (109° 40′; 41° 07′) и др.

Сравнить измеренный кристалл с кристаллами Гольдшмидта и привести его к ориентировке Гольдшмидта.

Ответ. Если измеренный кристалл повернуть на 33° по часовой стрелке, он окажется ориентирован так же, как и кристалл Гольдшмидта. Однако для последнего дается большее число различных граней. Грани *12*, *13* и другие не присутствуют на измеренном кристалле.

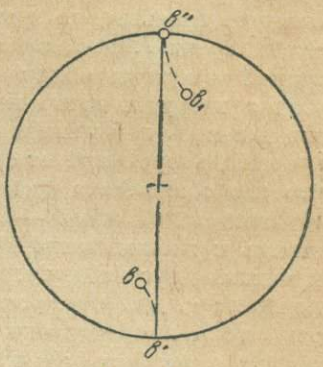
Задача 18. Повернуть данное направление вокруг данной горизонтальной оси на данное число градусов.

Пусть данное направление A изображается в проекции точкой a. Пусть это направление следует повернуть на угол α вокруг горизонтальной оси, проектирующейся на окружности проекции некоторой точки ω.

Так как при вращении направление A будет неизменно располагаться под одинаковым углом к оси вращения ω, то проекция a будет перемещаться по дуге

окружности, сферическим центром которой будет являться точка ω, а сферическим радиусом — угловое расстояние от точки ω до точки a. Поэтому поступаем следующим образом.

Поворотом чертежа на сетке (при сохранении центрировки) совмещаем точку ω с полюсом сетки Вульфа, или, что то же, но несколько нагляднее, поворотом сетки под чертежом совмещаем полюс сетки с точкой ω. По параллели сетки Вульфа перемещаем точку a на данное число градусов (в сторону вращения). Задача решена.

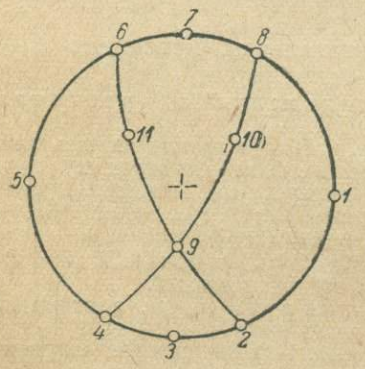


Фиг. 108.

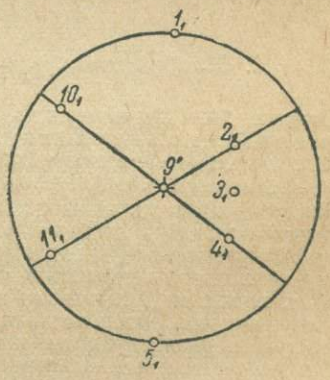
Замечание. Может случиться, что при отсчете по параллели величины $\alpha°$ у нас нехватит делений. Параллель приведет нас к окружности проекции в то время, когда мы успеем отсчитать всего лишь угол $\gamma < \alpha$. Так, например, данное направление, проекция которого изображается точкой b, может быть повернуто в сторону вращения только на угол $b'b = \gamma < \alpha$. При таком повороте приходим к точке b' на окружности проекции. В этом случае поступаем следующим образом: находим точку b'', диаметрально противоположную точке b', и от этой точки b'' продолжаем отсчет по параллели, на которой лежит точка b'' (фиг. 108).

Очевидно, останется отсчитать еще по этой параллели $(\alpha - \gamma) = b''b_1$. В результате получаем точку b_1, которая является проекцией направления, диаметрально противоположного искомому. Помечаем полученную точку крестиком.

Аналогично, если данная точка помечена крестиком (c) и при отсчете по параллели угла $cc' = \sigma < \alpha$ мы придем на окружность проекции в точке c', то берем точку c'', диаметрально противоположную c', и продолжаем отсчет по той параллели, на которой лежит точка c''. Отсчитав $c''c_1 = (\alpha - \delta)°$, придем к искомой точке, которую помечаем кружком.



Фиг. 109.



Фиг. 110.

Упражнение. Кристалл, грани которого имеют координаты $M(0°, 90°)$; $E(45°, 90°)$; $P(90°, 90°)$; $E'(135°, 90°)$; $M'(180°, 90°)$; $T(36°, 141°)$; $T'(216°, 39°)$; $T_1(144°, 141°)$, $T_1'(324°, 39°)$, повернуть вокруг горизонтальной оси $\omega(0°, 90°)$ на 64° (верх вращать к себе).

Поверка. Нормали граней после поворота должны иметь следующие координаты: $M(0°, 90°)$; $T(59\,1/2°, 90°)$; $T_1(119\,1/2°, 90°)$; $M'(180°, 90°)$; $T'(239\,1/2°, 90°)$; $T_1'(299\,1/2°, 90°)$; $P(90°, 26°)$; $E(24°, 50\,1/2°)$; $E_1(156°, 50\,1/2°)$.

Задача 19. Сравнить и отождествить два кристалла, различно юстированных, при измерении на двукружном гониометре.

Рассмотрим только один конкретный пример.

Пусть стереографическая проекция первого кристалла, юстированного при измерении по поясу, изображается фиг. 109.

Второй кристалл при измерении юстировался по грани 9_1 и изобразился в стереографической проекции на фиг. 110.

На первом кристалле угол $9:1 = 9:5 = 90°$; на втором кристалле тоже есть прямые углы: $9_1:1_1 = 9_1:5_1 = 90°$. Отсюда можно сделать вывод, что если грани 9 отвечает грань 9_1, то граням 1 и 5 отвечают грани 1_1 и 5_1 на втором кристалле. Чтобы грани 1_1 и 5_1 заняли ориентировку граней 1 и 5, необходимо кристалл второй повернуть вокруг вертикальной оси на некоторый угол α. Величину этого угла α нетрудно найти наложением проекций друг на друга (подобно тому, как это делалось при решении задачи 13). После поворота вокруг вертикальной оси, кристалл второй примет ориентировку, указанную на фиг. 109. Теперь уже видно, что для совмещения грани 9_1 с гранью 9 необходимо повернуть кристалл вокруг горизонтальной оси 5_1—1_1 на некоторый угол γ так, чтобы верхняя часть вращалась к наблюдателю. Величину угла поворота γ нетрудно получить наложением проекций друг на друга. Угловое расстояние между точками 9_1 и 9 равно углу поворота γ. Для осуществления этого поворота вращаем чертеж на сетке Вульфа так, чтобы проекции оси вращения, совпадающие с точками 1_1 и 5_1, совпали с полюсами сетки Вульфа (нагляднее, наоборот, сетку Вульфа повернуть под чертежом, оставляя нетронутой ориентировку кристалла). При повороте вокруг оси полюсов сетки каждая точка будет перемещаться по параллелям сетки на $\angle\gamma$, и после поворота грани расположатся, как указано на чертеже 109.

Теперь оба кристалла имеют одинаковую ориентировку, их легко и удобно сравнивать друг с другом.

Упражнение. Решить предыдущую задачу на сетке Вульфа по следующим данным: 1) координаты граней первого кристалла: *1* (0°; 90°); *2* (62°; 90°); *3* (90°; 90°); *4* (118°; 90°); *5* (180°; 90°); *6* (242°; 90°); *7* (270°; 90°); *8* (298°; 90°); *9* (90°; 15°); *10* (315½°; 22⅓°); *11* (224½°; 22⅓°); 2) координаты граней второго кристалла: 1_1 (327°; 90°); 2_1 (28°; 76½°); 3_1 (57°; 75°); 4_1 (85½°; 76½°); 5_1 (147°; 90°); 9_1 (∞; 0°); 10_1 (267°; 36½°); 11_1 (207°; 36½°).

4. Изображение кристалла в ортогональных проекциях

Задача 20. Вычертить „головку кристалла" в ортогональной проекции (вид кристалла сверху).

Стереографические проекции позволяют очень удобно и просто изучать различные угловые соотношения между гранями и ребрами кристалла. Однако при всех их достоинствах они обладают одним существенным недостатком. По стереографической проекции можно только приблизительно догадываться о внешнем облике (о габитусе) кристалла. Наглядного представления о том, как выглядит кристалл, стереографическая проекция не дает. Поэтому приходится прибегать к ортогональным проекциям, передающим внешний вид кристалла, хотя и неудобным для изучения угловых его соотношений.

Как известно, ортогональная проекция получается в том случае, если все проектирующие лучи перпендикулярны к плоскости проекции.

Так, ортогональной проекцией отрезка AB (фиг. 111), мы назовем отрезок ab на плоскости проекции P, получаемый проведением прямых Aa и Bb, перпендикулярных плоскости P. Проектирующие лучи Aa и Bb можно рассматривать при этом как лучи зрения, проведенные из некоторой точки зрения S, лежащей в бесконечности.

Заметим сразу же, что при проектировании многогранников (каковыми и являются кристаллы) фактически изображаются на чертеже только ребра между гранями. Самые грани не изображаются, но представляются глазу как плоскости, проходящие через изображенные линиями ребра.

Так, ортогональная проекция пирамиды $EABCD$ с ромбическим основанием (фиг. 112) на плоскости проекций изображается ромбом $abcd$ с диагоналями, в котором каждая линия изображает одно из ребер пирамиды. Фактически на чертеже проводятся только линии, изображающие ребра. Грани получаются сами собою, как площади чертежа, замкнутые ребрами (например грань EAB на чертеже представляется треугольником, образованным ребрами ea, eb и ab).

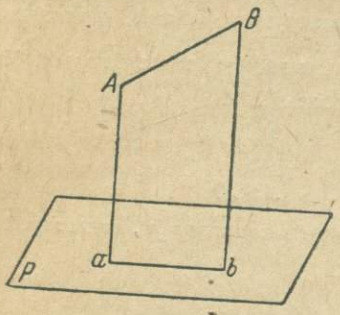
Таким образом проектирование кристалла в ортогональных проекциях сводится к проектированию ребер кристалла.

Начнем с простейших случаев.

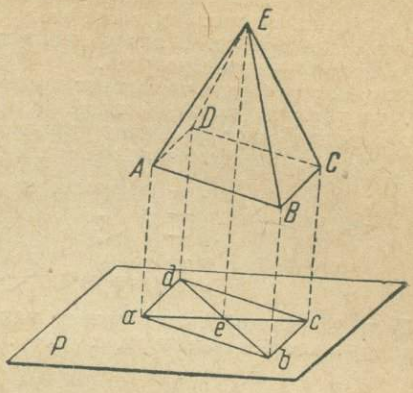
Пример 1. Пусть требуется получить точный чертеж пирамиды, представленный на фиг. 112.

Чтобы получить точное изображение ромба *abcd*, представляющего искомую ортогональную проекцию, необходимо знать — под какими углами друг к другу располагаются линии чертежа. Для этого пользуются стереографической проекцией кристалла.

Плоскость стереографической проекции будем считать совпадающей с плоскостью ортогональной проекции.

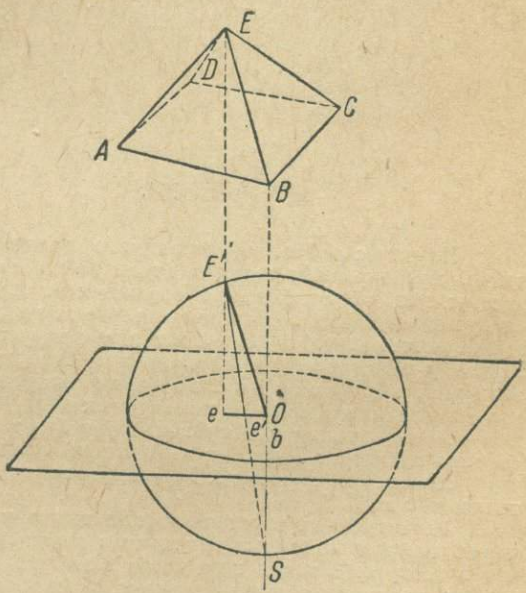


Фиг. 111.



Фиг. 112.

При стереографическом проектировании какого-либо направления, например, ребра кристалла *BE* (фиг. 113), мы через центр шара проекции *O* проводим направление *OE'*, параллельное *BE* (иными словами переносим направление *BE* параллельно самому себе к центру шара). Точка *e'* будет стереографической проекцией ребра *BE*. Нетрудно видеть, что, если провести на чертеже линию *Oe'*, то она будет параллельна ортогональной проекции *be* данного ребра. Действительно линия *be* — линия пересечения плоскости проекции с вертикальной плоскостью *BEbe*, проведенной через данное ребро *BE*; линию *Oe'* также можно рассматривать как линию пересечения плоскости проекции с вертикальной плоскостью *E'Oe'*, проведенной через направление *OE'*, параллельное данному ребру. Таким образом, обе вертикальные плоскости (*BEbe* и *E'Oe'*) параллельны, а следовательно, их линии пересечения с плоскостью проекции также параллельны.



Фиг. 113.

Отсюда правило:

Ортогональная проекция ребра кристалла параллельна прямой, соединяющей стереографическую проекцию данного ребра с центром проекции.

Неудобство пользования приведенным правилом заключается в том, что обычно проектируются не ребра, но нормали к граням кристалла (составляется „стереографическая проекция кристалла", т. е. проекция нормалей к его граням. См. замечание к задаче 3).

Однако каждое ребро является линией пересечения двух каких-либо граней кристалла. Например, ребро *BE* является линией пересечения граней *EBA* и *EBC*.

Пусть нормаль к грани *EBA* изображается в стереографической проекции точкой *1*, нормаль к *EBC* — точкой *2* (фиг. 114). Плоскость, проходящая через обе нормали, изобразится дугой *1—2*, проходящей через обе точки. Эта плоскость, как плоскость, проходящая через нормали к граням, будет перпендикулярна самим граням, а следовательно, и к линии их пересечения, т. е. к данному ребру *BE*. Таким образом, данное ребро будет являться нормалью к плоскости *1—2*. Если дугу *1—2* совместить с одним из меридианов сетки Вульфа, то проекция данного ребра e_1 окажется лежащей на экваторе сетки (задача 4—фиг. 115).

Отсюда следует такое правило:

Если совместить стереографические проекции нормалей к двум граням кристалла с меридианом сетки Вульфа, то экватор сетки будет параллелен ортогональной проекции ребра, образованного двумя данными гранями.

Это правило лежит в основе получения ортогональной проекции.

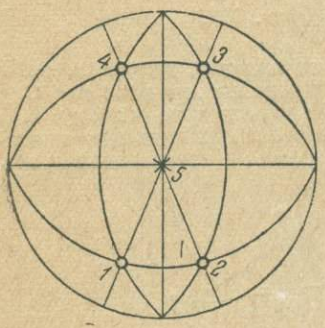
В обычных случаях берут для этого лист кальки вдвое большего формата, чем для работы на сетке Вульфа. В левой половине строится стереографическая проекция кристалла, в правой — ортогональная.

Если вычерчивание не желают производить на кальке или на восковке, то к листу бумаги, на котором предполагается получить ортогональную проекцию, приклеивается сбоку прозрачный лист со стереографической проекцией.

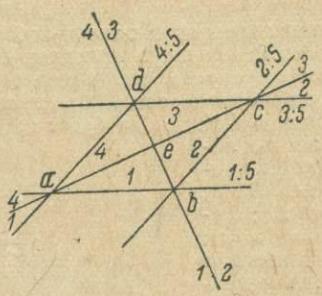
Пусть стереографическая проекция нашей пирамиды изображается фигурой 114.

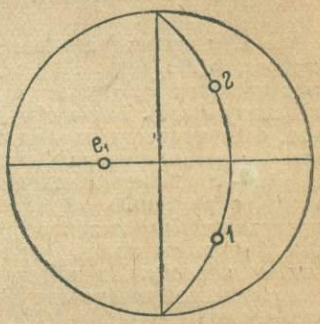
1 — проекция нормали плоскости *EBA*
2 — „ „ „ *EBC*
3 — „ „ „ *ECD*
4 — „ „ „ *EDA*
5 (крестик) „ „ *ABCD*

Точкой в правой части чертежа намечаем какую-либо вершину (*e*), от которой начинают вычерчивание примыкающих ребер.



Фиг. 114.





Фиг. 115.

Начнем с ребра, образованного гранями *EBA* и *EBC* (*1* и *2*). Как было выяснено выше, направление проекций этого ребра *eb* параллельно экватору сетки Вульфа в тот момент, когда проекции *1* и *2* совмещены с одним из меридианов сетки. Поэтому поступаем следующим образом. Вращением чертежа на сетке Вульфа совмещаем точки *1* и *2* с меридианом сетки (фиг. 115). Пользуясь затем треугольником и линейкой, проводим параллельно экватору сетки прямую *eb* через намеченную точку *e*. Во избежание путаницы, в конце этой прямой цифрами *1* и *2* по разные стороны от нее помечаем, что проведенное ребро является границей граней, помеченных в проекции номерами *1* и *2*. На проведенной прямой помечаем точку *b*. Отрезок *eb* и будет являться проекцией ребра *EB*. Длина этого отрезка целиком зависит от выбранного нами масштаба изображения.*

Переходим к ребру *EC* между гранями *EBC* и *ECD*, нормали которых изображаются точками *2* и *3*.

Устанавливая вращением эти точки на один из меридианов сетки Вульфа, прочерчиваем при помощи треугольника и линейки, параллельно экватору сетки, прямую *ec* через точку *e*. В конце этой прямой надписываем *3/2*. В отличие от предыдущего, теперь уже длину отрезка мы не можем взять по произволу. Величиной отрезка *eb* мы уже определили масштаб изображения, и положение точки *c* на прямой *ec* определится при последующих построениях само собою.

Теперь же переходим к ребру *ED* между гранями, нормали которых представлены точками *3* и *4*. Строя по предыдущему проекцию *ed* этого ребра, убеждаемся, что прямая *ed* является продолжением прямой *eb*.

Совершенно так же убеждаемся, что прямая *ea* является продолжением прямой *ec*.

Направления всех ребер вокруг вершины *e* построены.

Кроме вершины *e*, на чертеже помечена нами вершина *b* (конец ребра *eb*). Переходим к этой вершине. Как видно из фиг. 112, в вершине *b* сходятся три ребра: построен-

* Последний обычно бывает безразличен.

ное уже нами ребро *BE* и ребра *AB* и *BC*. Для построения изображения ребра *BC* заметим, что это ребро является границей граней *BCE* и *BCDA*. В стереографической проекции нормали к этим граням изображаются точками *2* и *5*. По общему правилу совмещаем эти точки с одним из меридианов сетки (в данном частном случае этот меридиан представляет собою прямую линию). В полученном положении параллельно экватору сетки Вульфа проводим прямую *bc* через точку *b*. Во избежание путаницы, как и при предыдущих построениях, на конце проведенной прямой записываем *2 : 5*.*

Положение конца ребра *bc*, определяемое точкой *c*, получается как видим, само собою: точка *c* есть точка пересечения ребер *ec* и *bc*. Этим самым определяется и длина ребра *ec*, направление которого было нами построено уже раньше.

Многоугольник (треугольник *ebc*) из трех ребер *eb*, *bc* и *ec* замкнулся, и тем самым определилась ортогональная проекция *ebc* всей грани *EBC*, окаймленной построенными ребрами. В середине полученного треугольника *ebc* помечаем эту грань номером *2* (номером, которым была помечена на стереографической проекции нормаль к этой грани).

Переходим к ребру *AB*, образованному гранями *BAE* и *BADC*, нормали к которым изображаются точками *1* и *5*. Придерживаясь предыдущих правил, через точку *b* прочерчиваем направление (*1 : 5*), отрезок *ab* которого будет изображением ребра *AB*. В результате этого построения будет закончено изображение грани *EBA* (треугольник *eba*). Помечаем построенный треугольник номером *1*.

В результате двух предыдущих построений получаем изображения еще двух вершин: точка *c* изображает вершину *C*, точка *a* — вершину *A*.

В вершине *C* сходятся три ребра, из которых два (*CE* и *CB*) уже построены. Строим третье ребро *CD*, которое граничит с гранями *CDE* и *CDAB*.

Придерживаясь предыдущих правил, получим прямую *3 : 5*, на которой отрезок *cd* изобразит искомое ребро *CD*.

Нетрудно сообразить, что, так как *CD* ∥ *AB*, то и *cd* ∥ *ab*:

Параллельные ребра многогранника в ортогональной проекции изображаются параллельными прямыми.

После построения всех ребер вокруг вершины *C*, переходим к вершине *A*. У этой вершины осталось непостроенным ребро *AD*. Строя это ребро, по предыдущим правилам или просто проводя через вершину *a* прямую *4 : 5* ∥ *2 : 5*, получаем ребро *ad*.

Точка *d*, изображающая вершину *D*, получилась у нас двумя способами: 1) как точка пересечения ребер *4/3* и *3 : 5* и 2) как точка пересечения ребер *4/3* и *3 : 5*. Оба эти способа должны приводить к одной точке *d*. Если на прямой *4/3* получим две точки *d*, то это значит, что графические построения выполнялись нами не совсем точно.** Получившуюся погрешность приходится уничтожать, несколько исправляя положения ребер *cd* и *ad* и, если нужно, то и вершин *c* и *a*.

После этого ортогональную проекцию пирамиды можно считать законченной.

Пример II. Пусть требуется вычертить ортогональную проекцию кристалла, представленного в стереографической проекции на фиг. 109 (задача 19).

Для того чтобы ориентироваться в относительных длинах вычерчиваемых ребер и не запутаться в построениях, во всех сколько-нибудь сложных случаях рекомендуется предварительно составить грубый рисунок, изображающий искомую проекцию (вид на кристалл сверху).

Такой рисунок полезно сделать попутно с измерением кристалла на гониометре. Для этого после измерения устанавливают горизонтальную ось вращения гониометра в положение совпадения с оптической осью зрительной трубы. В таком положении ребра, по которым производилась юстировка, будут параллельны оси трубы. Глядя на кристалл в трубу, схематически зарисовывают его вид. На фиг. 116 изображена нарисованная таким образом „головка кристалла", подлежащего вычерчиванию. Более точный рисунок можно получить под микроскопом. (Ребра, по которым производилась юстировка, устанавливают параллельно оси микроскопа, если при этом пользоваться окуляром со шкалой, то можно попутно измерить кажущиеся длины ребер).

Для того чтобы от грубого рисунка перейти к точному чертежу, необходимо воспользоваться именно стереографической проекцией.

Поместив стереографическую проекцию в левой половине чертежа (фиг. 117), получаем в его правой половине положение какой-либо вершины (*e*), от которой начинают вычерчивание. В этой вершине сходится три ребра (*9/10*, *9/11* и *10/11*).

Направления этих ребер и получаем прежде всего согласно общим вышеизложенным правилам. Помечая на одном из этих ребер, например, *10/9* точку *b*, определим длину ребра *10/9* и тем самым определим вершину *b*. От этой вершины строим направления ребер *9/2* и *10/1* (вертикальное ребро *1/2* проектируется точкой *b* и таким образом оказы-

---

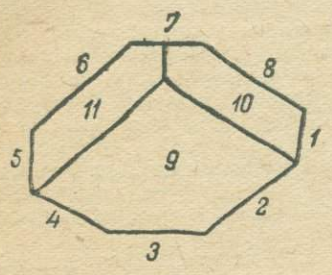
* Условимся, если одна из точек изображается в проекции крестиком, ставить номера точек не по разные стороны проведенного ребра (*2/5*), но в строчку со знаком деления (*2 : 5*).

** Если, конечно, не сделано какой-либо грубой ошибки в построении.

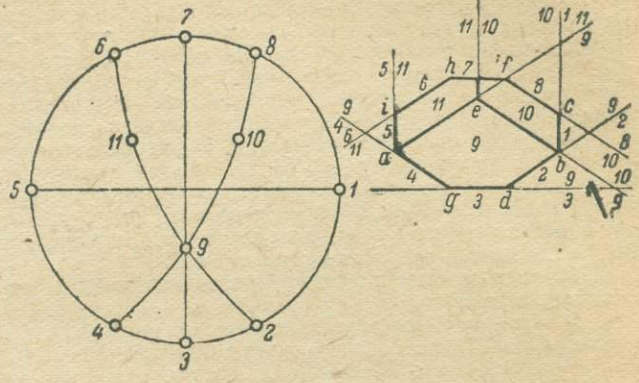
вается уже изображенным). Длины ребер *9/2* и *10/1* определяются приблизительно по сделанному предварительно рисунку с вида кристалла сверху. Получаем изображения вершин *c* и *d* (они же изображают и вертикальные ребра *1/8* и *1/3*).

Из вершины *c* может быть построено ребро $\frac{8}{10}$ или по общим правилам, или, проще, как ребро, параллельное *10/9* (проведением прямой $cf \parallel eb$).

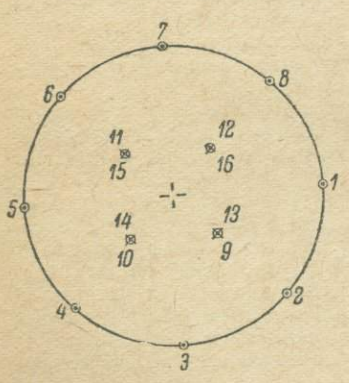
Аналогично производятся построения и остальных ребер. Длины отдельных ребер получаются при этом или сами собою, или же (некоторые) берутся по схематическому рисунку головки кристалла (или непосредственно срисовываются с кристалла, или с его модели). При этом прибегают к двум методам работы. В одних случаях, если важно изобразить именно данный экземпляр, который исследуется, то длины отдельных ребер определяются с наивозможнейшей точностью. В других случаях, если желают изобразить вообще некоторый кристалл данной партии кристаллов, подвергшихся исследованию, то не гонятся за передачей всех индивидуальных особенностей изображенного на схематическом рисунке экземпляра, но несколько его идеализируют. От этого существо дела не страдает, так как мы знаем, что отдельные грани, отвечающие даже совершенно одинаковым плоским сеткам, вследствие различных внешних причин, оказываются развитыми не одинаково. Ребра между соответственными гранями также оказываются не одинаковой длины — на одних кристаллах они могут быть относительно длиннее, на других короче (стр. 56 — закон Стенона).

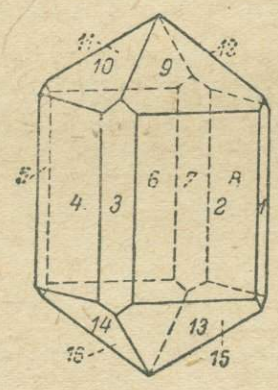


Фиг. 116.



Фиг. 117.





Фиг. 118.

Поэтому на чертежах идеализируют кристаллы в том смысле, что длины ребер, образующих одинаковые углы со своими соседями, изображают одинаковыми. Так, берут $cf = bd$, так как углы первого ребра *cf* с соседними ребрами *cb* и *fh* равны углам второго ребра *bd* с соответственными ребрами *bc* и *dg*. На этом же основании изображают им равными и ребра *ag* и *ih*. Из этих же соображений берут $dg = fh$; $bc = ai$; $ea = eb$. При идеальных условиях кристаллизации указанные равенства выдерживались бы и на реальных кристаллах.*

Пример III. Пусть требуется вычертить ортогональную проекцию кристалла, изображенного на фиг. 118 и представленного в стереографической проекции в левой части фигуры 118.

От кристалла, рассмотренного в предыдущем примере, данный кристалл отличается только тем, что на нем присутствуют и нижние грани, нормали к которым изображаются в стереографических проекциях крестиками (крестики *13, 14, 15, 16*).

---

* Четкие правила установления того, какие ребра можно считать равными, станут вполне ясными лишь после с ознакомлением с двумя следующими отделами книги.

Прежде всего, совершенно так же, как в предыдущем примере, вычерчиваются ребра верхней половины кристалла. Ребра нижней половины, вообще говоря, скрыты от наблюдателя верхними гранями и невидимы. Поэтому кристалл считают прозрачным и изображают нижние ребра пунктиром. Правила для вычерчивания пунктирных ребер остаются совершенно теми же, что и для вычерчивания остальных ребер. Чтобы не ошибиться — какие ребра следует проводить пунктиром, а какие сплошными линиями, следует всегда иметь в виду, что только *ребра, образованные гранями, стереографические проекции нормалей к которым изображаются крестиками, вычерчиваются в ортогональной проекции пунктиром.*

Если одна из проекций изображается кружком, а вторая — крестиком — ребро вычерчивается сплошной линией.

Тремя приведенными примерами мы ограничим описание получения ортогональной проекции „головки кристалла" (вида кристалла сверху).

Упражнения. Для упражнения можно ограничиться вычерчиванием кристаллов, приведенных в трех вышеизложенных примерах. Кроме того, можно рекомендовать вычерчивание кристаллов, данные о которых приведены в упражнениях к задаче 11.

Задача 21. Вычертить кристалл в ортогональной проекции при косом положении кристалла по отношению к плоскости проекции (вид сбоку несколько повернутого кристалла*).

То обстоятельство, что в ортогональных проекциях, полученных вышеописанным способом, вертикальные (боковые) грани изображаются в одну линию вместе с ребрами, а вертикальные ребра проектируются точками, сильно вредит наглядности этих проекций.

Так, например, призма с квадратным основанием (фиг. 97) изображается в проекции мало наглядным квадратом. Таким же квадратом изображается и куб. Очевидно, что одного изображения, представляющего вид сверху, недостаточно. Поэтому прибегают или ко второму изображению—спереди (как это делается в начертательной геометрии), или же, чтобы не потерять при этом изображения верхних и боковых граней, поворачивают кристалл таким образом, чтобы были видимы и передние (*a*), и боковые (*b*), и верхние (*c*) грани. Получаются изображения, весьма наглядно передающие форму многогранника (фиг. 118, правая часть).

Для получения таких изображений необходимо повернуть кристалл к лучам зрения „боком" („положить кристалл на бок"). В таком повернутом положении его и следует проектировать. Для этого, как мы знаем, нам понадобится и стереографическая его проекция. Поэтому, прежде всего, остановимся на задаче о получении стереографической проекции кристалла после поворота.

Допустим, что мы желаем изобразить в косом положении уже знакомый нам кристалл, изображенный на фиг. 109 (задача 20, пример II).

Для того, чтобы при повороте стали видимы не только передние, но и боковые грани, располагают ось вращения под углом в 20° к начальному меридиану. Стереографические проекции этой оси изобразятся точками *уу*, ортогональная — представится прямой *уу*. Вокруг этой оси кристалл поворачивают на 80° (верхним концом от наблюдателя)** (фиг. 119).

Из задачи 18 мы знаем, как будут при этом перемещаться проекции нормалей к граням. Для этого подкладываем под чертежом сетку Вульфа таким образом, чтобы точки *уу* совпали с полюсами сетки. Тогда каждая точка должна будет переместиться по параллели на 80°. Точка *1* займет положение *1′*, точки *2, 3, 4, 9* расположатся соответственно в точках *2′, 3′, 4′* и *9′*. Точки *5, 6, 7* и *8* уйдут под плоскость проекции, а потому изобразятся диаметрально противоположными точками-крестиками *5′, 6′, 7′* и *8′* (эти точки совпадут с точками *1′, 2′, 3′* и *4′*). Точки *10* и *11* также изобразятся крестиками *10′* и *11′* (их положение найдется, как указано в замечании к задаче 18). Полученные проекции после поворота, во избежание путаницы, следует помечать какими-либо резко отличными знаками (например, цветным карандашом или тушью).

Во избежание ошибок и для уточнения произведенных построений очень полезно, по совету В. Б. Татарского, проверить правильное расположение проекций относительно поясов, которые образуют данные грани. Мы знаем (см. замечания к задаче 5 и к задаче 11), что все точки, изображающие нормали к граням одного пояса, могут быть расположены на одном из меридианов сетки. Точки, располагающиеся первоначально на одном меридиане, и после поворота на 80° могут быть совмещены с одним из меридианов (конечно, с иным, чем до поворота). Производя такое совмещение, можно отчасти проверить, испра-

---

* Нижеописанные методы были впервые введены в практику в 1927 г. автором при преподавании кристаллографии в Ленинградском и Ташкентском университетах, а затем с 1929 г. и в Ленинградском Горном институте. Впервые они описаны в 1934 г. (В. Б. Татарский, Инструкция по вычерчиванию кристаллов, Кубуч, 1934).

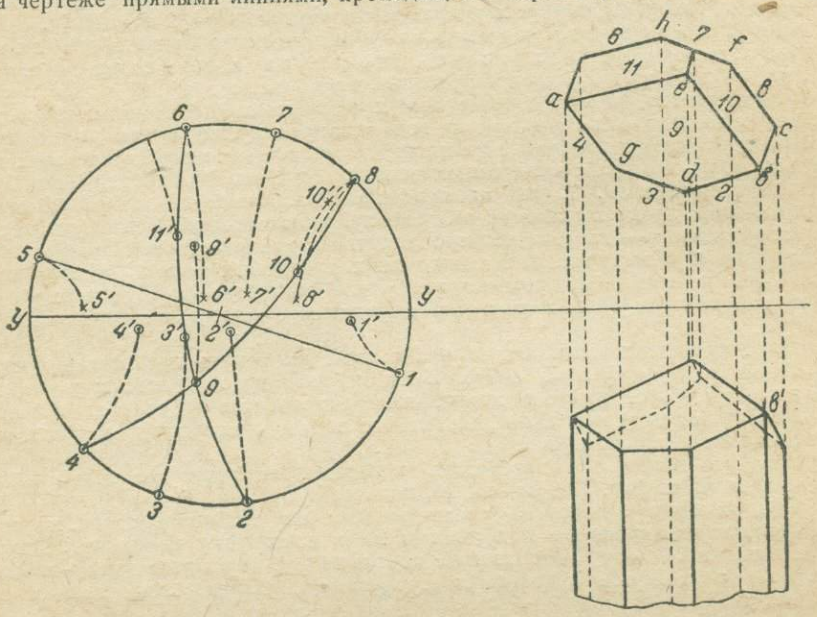
** Если при этом после всех построений получается все же мало наглядное изображение (например, некоторые из граней все-таки изобразятся не многоугольниками, но линиями), то изменяют угол поворота кристалла и направление оси поворота. Ось поворота располагают в таком случае под углом от 10 до 30° к начальному меридиану и поворачивают кристалл на угол, отличный от 80° (от 70° до 85°).

вить и уточнить произведенные операции поворота. В нашем примере нормали к граням *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8*, как нормали к граням одного пояса, должны в проекции укладываться на один из меридианов (иначе через точки *1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′* и *8′* можно провести проекцию дуги большого круга). Также и точки *1′, 10′, 11′* и *5′* можно совместить с одним из меридианов. Точки *2′, 9′, 11′* и *6′* также должны располагаться на одном из меридианов.

После этих поверок можно считать, что стереографическая проекция повернутого кристалла готова.

Рассмотрим теперь, как при нашем повороте будут перемещаться различные вершины кристалла, изображенные в ортогональных проекциях.

Очевидно, что каждая вершина будет при повороте описывать дугу окружности, оставаясь неизменно в одной и той же плоскости, нормальной к оси вращения. Так как ось вращения лежит в плоскости чертежа, то плоскости, в которых будут вращаться вершины кристалла, будут перпендикулярны к чертежу. Поэтому эти плоскости будут изображаться на чертеже прямыми линиями, проходящими через вершины кристалла и перпен-



Фиг. 119.

дикулярными к оси *yy*. Так, например, плоскость, в которой будет вращаться вершина *e*, изображается прямой линией $ee' \perp yy$. Пользуясь треугольником и линейкой, проводим через каждую изображенную на чертеже вершину головки кристалла линию, перпендикулярную к оси *yy*. На этих линиях должны располагаться соответственные вершины и после поворота на 80°.

Будем считать, что самая верхняя вершина *e* после поворота займет положение *e′*.*

Когда намечена верхняя вершина, приступаем к вычерчиванию ребер, сходящихся в этой вершине. В нашем случае в точке *e* сходятся три ребра: *9/10, 9/11* и *10/11*.

Начнем с построения ребра *9/10*. Поступаем согласно общим правилам. Берем проекции нормалей к граням *9* и *10* после поворота (точки *9′* и *10′*). Совмещаем их с меридианом сетки Вульфа. Направление, параллельное экватору сетки, дает направление искомого ребра. Через точку *e′* проводим это ребро. Один его конец — вершина *e′*. Второй конец — вершина *b′*, которая должна лежать не только на проведенном ребре, но и на линии *bb′*, перпендикулярной *hh′* (как было показано выше, вершина *b* при вращении не может сойти с этой линии). Таким образом ребро *e′b′* построено целиком.

Переходим к ребру *e′a′*. Направление этого ребра, проходящего через вершину *e′*, определяется при помощи проекций *9′* и *11′*, а длина его — точкой *e′* и линией *aa′*, перпендикулярной *yy*.

Когда все ребра, проходящие через вершину *e*, проведены, переходим к следующей вершине, лучше всего к наиболее высокой после *e* (вершина *c*).

---

* Точку *e′* мы намечаем на линии *ee′* произвольно. Это мы вправе сделать, так как по существу безразлично, на каком расстоянии от изображенного на фиг. 117 кристалла считать проведенной плоскость проекции, и следовательно ось *yy*; этим расстоянием и определяется положение точки *e′*.

Из вершины *c* строим ребра *cf* и *ch*. При этом, так как ребро образовано гранями, нормали которых изображаются крестиками, проводим это ребро пунктиром (см. пример III задачи 20). Концы каждого ребра определяются линиями, перпендикулярными *yy*.

Переходя постепенно к ребрам, лежащим все ниже и ниже, получим все требуемое изображение. Построения сильно упрощаются тем, что параллельные ребра изображаются и в проекции параллельными линиями. Ребра, бывшие до поворота вертикальными, изображаются линиями, совпадающими с линиями, перпендикулярными *yy*.

Если для вычерчивания был бы дан не кристалл, изображенный на фиг. 117, но кристалл, изображенный на фиг. 118, то чертеж усложнился бы еще вычерчиванием ребер нижней половины. Одну из вершин нижней головки кристалла пришлось бы взять, сообразуясь с натурой (принимая во внимание длину его вертикальных ребер и вытянутость кристалла), остальные строятся так же, как и верхние грани. Если какая-либо вершина при построениях не замыкается в одной точке, то образующаяся погрешность или распределяется равномерно по всем ранее нанесенным ребрам, или же, если она значительна, построения выполняются вторично более тщательно.

Упражнения. Кроме вычерчивания кристаллов, изображенных на фиг. 117 и 118, можно рекомендовать сделать чертежи кристаллов, описанных в упражнениях к задаче 11. Лучшими же объектами для вычерчивания являются любые реальные кристаллы, лично измеренные занимающимся.

5. Некоторые заключительные замечания о стереографических проекциях

Мы видели при решении различных задач, что очень часто в стереографических проекциях изображаются различные нормали. Так, например, вместо граней изображаются нормали к граням. Часто изображаются также нормали к ребрам (дуга меридиана, проходящая через проекции двух нормалей, является проекцией плоскости, нормальной к ребру; см. задачу 20).

Для сокращения, чтобы не оговаривать каждый раз, что строится стереографическая проекция нормали к данному геометрическому образу (к грани, к ребру), в кристаллографии введено понятие о „гномостереографических" проекциях (удобства и сокращения от введения этих лишних терминов получаются, впрочем, очень сомнительные).

Гномостереографической проекцией данного геометрического образа называется стереографическая проекция нормали к данному образу.

Отсюда следует:

Гномостереографическая проекция плоскости (например грани кристалла) изображается точкой. Гномостереографическая проекция направления (например, ребра кристалла) изображается дугой окружности.

Построение гномостереографической проекции по данной стереографической проекции и, обратно, построение стереографической проекции по данной гномостереографической — сводятся к решению задач 9 и 10.

Стереографические проекции, известные еще Гиппарху (в 180—125 гг. до нашей эры), в кристаллографии стали употребляться с 1804 г. (Бернгарди), но широкое распространение получили только после работ Миллера (1835 г.) и особенно Е. С. Федорова (1892 г.).

Кроме описанных выше сеток Болдырева, Вульфа и Падурова, употребляются и другие стереографические сетки. Еще лет 10 тому назад наиболее употребительной в СССР была не сетка Вульфа, но сетка Федорова. Хотя стереографические сетки были предложены Мебиусом еще в 1824 г., однако только Е. С. Федоров в 1892 г. впервые применил их в кристаллографии. Он был первым автором как сетки „полярной" (примером которой является сетка Болдырева), так и сетки „экваториальной" (примером которой является сетка Вульфа). Сеткой Е. С. Федорова называется сложная сетка, состоящая из „полярной" и наложенных на нее двух „экваториальных" сеток (фиг. 120).

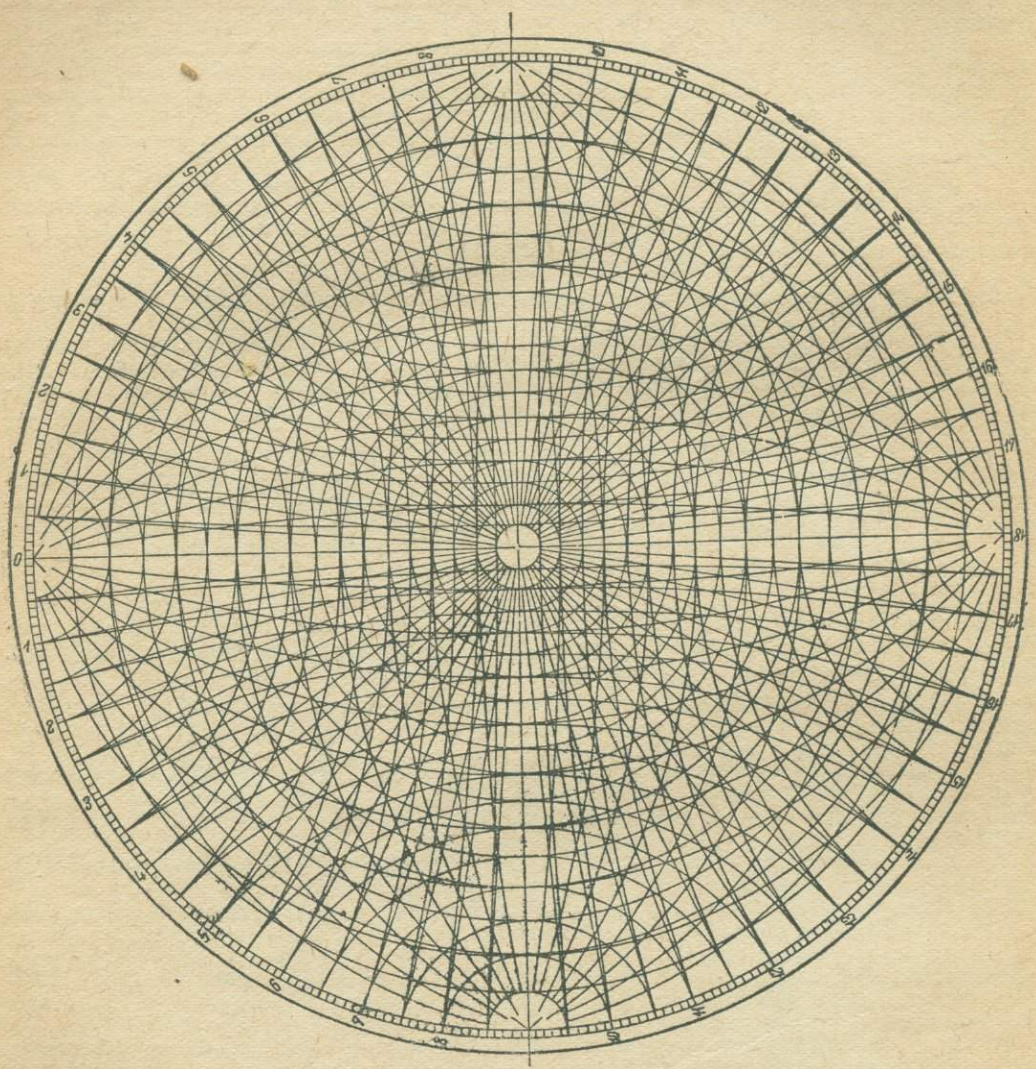
Вульф изобрел свою сетку независимо от Федорова в 1892 г. Сетки Болдырева и Белянкина являются упрощениями сетки Федорова (последняя представляет собою, так же, как и сетка Болдырева, „полярную сетку" с делениями не через 2, но через 10°).

Пользоваться стереографическими проекциями для изображения кристаллов можно и без сеток, делая чертежи циркулем и линейкой. Для вполне четкого усвоения проекций, упражнения на построение стереографических проекций без сетки очень желательны. Однако мы здесь не будем приводить правил решений задач без сеток. Не будем здесь касаться и вопроса о построении самих сеток. Все прекрасно умеют разбираться и ориентироваться в географических картах, однако очень немногие знают каким образом получена данная карта и какие проекции при этом были применены, и это мало затрудняет пользование этими картами. Аналогично этому, для решения кристаллографических задач на сетках не является обязательным умение решать их без сеток и не обязательно уметь сетку вычертить самому.

Кроме стереографических проекций, в кристаллографии часто применяются еще линейные и гномонические проекции.

Линейная проекция направления *AA* строится следующим образом. Через точку зрения *S* проводится направление, параллельное данному. Точка пересечения проведен-

ного направления с плоскостью проекции P — точка a' — и называется линейной проекцией данного направления. Очень простые соображения приводят к выводу, что если данное направление имеет полярное расстояние ρ, то линейная проекция данного направления совпадает со стереографической проекцией другого направления, имеющего полярное расстояние 2ρ (и ту же долготу φ). Для получения линейной проекции плоскости, проводят через точку зрения S плоскость R, параллельную данной. Линия пересечения плоскости R с плоскостью проекции P и называется линейной проекцией данной



Фиг. 120. Сетка Е. С. Федорова.

плоскости. Гномонической проекцией называется линейная проекция нормали к данному геометрическому образу. Таким образом, гномоническая проекция направления представляет собой прямую линию; гномоническая проекция плоскости представляет собой точку.

Линейные проекции известны с древнейших времен (Фалес Милетский, 640—548 гг. до нашей эры). В кристаллографии как линейные, так и гномонические проекции впервые применил Квенштедт (1834 г.). Особенно же широкое распространение они получили благодаря работам В. Гольдшмидта (1887 г.). Школой Гольдшмидта эти проекции всегда употребляются и теперь. * В дальнейшем нам они не понадобятся.

---

* См. например, книгу Э. М. Бонштедт, Руководство по измерению и вычислению кристаллов по методу Гольдшмидта, Изд. Акад. наук СССР, 1934 г. Здесь же изложены правила вычерчивания кристаллов (к сожалению, почему то без объяснений этих правил).

ОТДЕЛ IV

ЗАКОНЫ СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА

Глава IX

ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ

1. Общие замечания

Одним из характернейших свойств кристаллической решетки является ее прерывная однородность. Разные части кристаллической решетки построены совершенно одинаково, в ее строении наблюдается закономерная повторяемость. Правильная повторяемость и равенство различных частей одного целого составляют один из признаков симметрии фигуры. Кристаллическая решетка, таким образом, является фигурой симметричной. Благодаря этому, изучение кристаллической решетки основывается на свойствах симметричных фигур. Учение о симметрии глубоко пронизывает всю кристаллографию, на нем базируются все классификации кристаллических веществ, оно дает ключ к пониманию целого ряда наблюдающихся законов и свойств кристаллического вещества. Ввиду такой исключительной роли учения о симметрии в кристаллографии, остановимся сначала на общих основах этого учения для того, чтобы применить их затем к изучению кристаллических веществ и кристаллов.

2. Равные фигуры

Прежде всего для того, чтобы выяснить сущность понятия о симметрии, познакомимся с понятиями о равенстве фигур.

Определение 1. *Фигурой или геометрическим образом называется любая совокупность точек.*

Определение 2. *Если расстояние между двумя любыми точками одной фигуры всегда равно расстоянию между соответственными точками другой, то такие фигуры называются равными.*

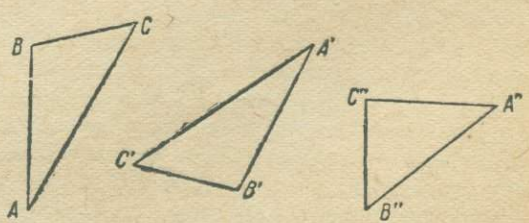
Фигуры ABC и $A'B'C'$ (фиг. 121) равны, так как $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $CA = C'A'$.

Фигуры, ABC и $A''B''C''$ не равны, так как, хотя

$$AB = A''B'' \text{ и } BC = B''C'',$$

но

$$CA \neq C''A''.$$



Фиг. 121.

Определение 3. *Если две равные фигуры можно совместить друг с другом наложением (вернее — вложением), то такие фигуры называются конгруэнтными (совместиморавными). В противном случае равные фигуры называются энантиоморфными (отраженноравными).*

Фигуры ABC и $A'B'C'$ (фиг. 121) являются примером конгруэнтных фигур: их нетрудно совместить друг с другом наложением соответственных точек A, B и C.

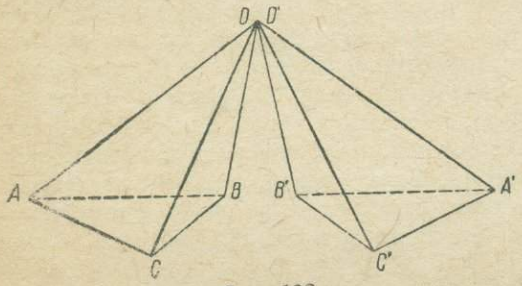
Фигуры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (фиг. 122) равны, так как расстояние между любой парой точек одной фигуры равно расстоянию между соответственной парой точек другой фигуры (например, расстояние $BD = B'D'$; $BC = B'C'$ и т. д.). Однако, если мы попробуем совместить эти фигуры вложением, то легко убедимся, что это невозможно.

При совмещении трех точек одной фигуры с тремя соответственными точками другой, четвертые соответственные точки этих фигур не будут совмещаться (совместив точки DBC с точками $D'B'C'$, увидим, что точки A и A' будут расположены по разные стороны от плоскости совмещения).

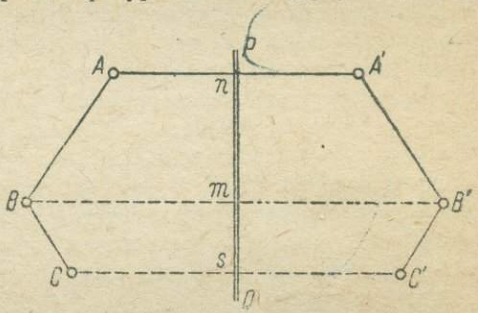
Таким образом, фигуры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ являются примером фигур энантиоморфных. Другим хорошим примером энантиоморфных фигур могут служить правая и левая рука. Они равны, но несовместимы вложением.

Определение 4. *Действие, посредством которого из одной фигуры может быть получена другая равная ей фигура, называется преобразованием равенства.*

Так, если мы имеем фигуру ABC (фиг. 121), то смещением точек этой фигуры в положение $A'B'C'$ получим, кроме фигуры ABC, другую фигуру $A'B'C'$, равную данной.



Фиг. 122.



Фиг. 123.

Таким образом, *движение есть преобразование равенства*, причем такое, при котором получается фигура, конгруэнтная данной.

Рассмотрим еще несколько примеров преобразований равенства.

Теорема 1. *Отражение в плоскости (зеркальное отражение) есть преобразование равенства.*

Пусть дана некоторая плоскость PQ, перпендикулярная к плоскости чертежа (фиг. 123), и некоторая фигура ABC (она может состоять не из трех, но из любого числа точек).

Отражением в плоскости называется такое преобразование, при котором каждая точка заменяется другой соответственной точкой следующим образом: из данной точки (например, A) опускается перпендикуляр на данную плоскость PQ ($\perp An$), и этот перпендикуляр продолжается за плоскость отражения на расстояние, равное расстоянию от точки до плоскости ($nA' = An$). Конец полученного отрезка (точка A') и будет искомой соответственной точкой.

Строя таким образом соответственные точки данной фигуры, получим некоторую новую фигуру. Требуется доказать, что полученная новая фигура $A'B'C'$ равна данной фигуре ABC.

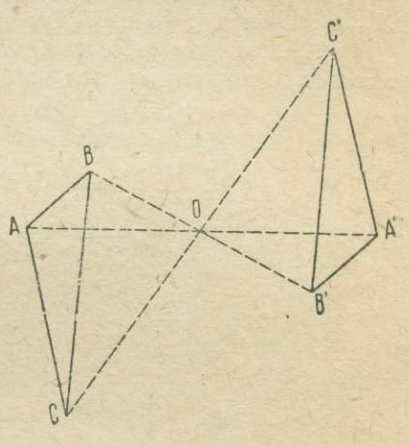
Для этого достаточно доказать, что расстояние между двумя любыми точками данной фигуры равно расстоянию между соответственными точками построенной фигуры. Докажем, например, что $AB = A'B'$. По условию отражения, $An = nA' \perp PQ$ и $Bm = mB' \perp PQ$. Отсюда следует, что при наложении прямоугольных трапеций $AnmB$ и $A'nmB'$ они совпадут, а следовательно, $AB = A'B'$.

Итак, расстояния между любыми парами точек данной фигуры равны расстояниям между соответственными парами точек другой фигуры; согласно определению 2, две такие фигуры равны. Таким образом, полученная при отражении в плоскости новая фигура $A'B'C'$ равна данной фигуре ABC, и, следовательно, отражение в плоскости есть действительно преобразование равенства.

Теорема 2. *Отражение в точке (инверсия) есть преобразование равенства.*

Пусть нам даны некоторая точка O и некоторая фигура ABC (она может состоять не из трех, но из любого числа точек) (фиг. 124).

Отражением в точке (инверсией) называется такое преобразование, при котором каждая точка заменяется другой соответственной точкой следующим образом: из данной точки фигуры (например, A) проводят прямую через данную точку O (центр инверсии) и продолжают эту прямую по другую сторону от O на расстояние, равное расстоянию от данной точки фигуры до центра инверсии O ($AO = OA'$). Конец полученного отрезка (точка A') и будет искомой соответственной точкой.



Фиг. 124.

Строя таким образом соответственные точки данной фигуры, получим некоторую новую фигуру. Требуется доказать, что новая фигура $A'B'C'$ равна данной фигуре ABC. Для этого достаточно доказать, что расстояние между двумя любыми точками данной фигуры равно расстоянию между соответственными точками построенной фигуры. Докажем, например, что $AB = A'B'$. По условию отражения в точке (инверсии) $AO = OA'$ и $BO = OB'$.

Кроме того, $\angle AOB = \angle A'OB'$ как вертикальные углы. Отсюда следует, что $\triangle AOB = \triangle A'OB'$, а потому и $AB = A'B'$. Итак, расстояния между любыми парами точек одной фигуры равны расстояниям между соответственными парами другой фигуры; согласно определению 2, такие фигуры равны. Таким образом полученная при инверсии новая фигура $A'B'C'$ равна данной фигуре ABC, а следовательно, инверсия есть действительно преобразование равенства.

Предыдущие теоремы показывают, что преобразования равенства весьма разнообразны: из одной фигуры можно получить другую, ей равную, различными способами (движением, отражением в плоскости, инверсией). Равным образом совместить две равные фигуры друг с другом можно также различными способами. Очевидно, что равные фигуры ABC и $A'B'C'$, изображенные на фиг. 123, совмещаются отражением в плоскости (PQ). Равные же фигуры ABC и $A'B'C'$, изображенные на фиг. 124, отражением в плоскости совместить нельзя; однако они совместимы при помощи инверсии. Таким образом совмещение равных фигур может достигаться не какими угодно способами, а вполне определенным для каждого конкретного случая. Достигнуть совмещения двух любых равных фигур, при любой их относительной ориентировке, помогает следующая теорема, которая сводит все многообразие различных мыслимых преобразований равенств к одним только отражениям.

Теорема 3. *Две любые равные фигуры всегда можно совместить последовательными отражениями в плоскостях, причем для этого потребуется произвести максимум четыре отражения**.

* Доказательство этой теоремы, с некоторыми изменениями, заимствовано из труда А. К. Болдырева „Основы геометрического учения о симметрии“ (Зап. Минер. о-ва, XLV, вып. 1, стр. 336).

Для совмещения плоских фигур всегда бывает достаточно произвести три отражения. Ниже мы имеем в виду и плоские фигуры.

Предварительно докажем лемму.

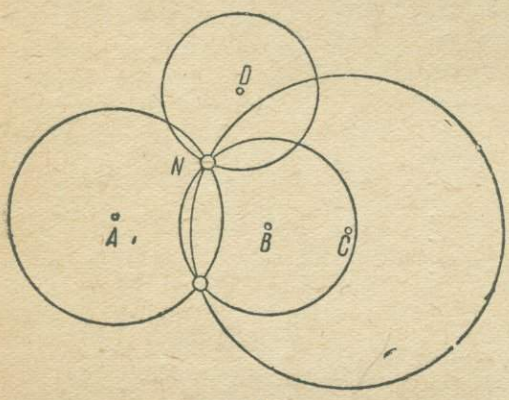
Лемма. *Если четыре точки (не лежащие в одной плоскости) одной фигуры совпадают с четырьмя соответственными точками другой, равной ей, фигуры, то фигуры совпадают всеми своими точками.*

Пусть точки A, B, C и D фигуры F совпадают с соответственными точками A', B', C' и D' равной фигуры F'. Возьмем любую точку N фигуры F. Соответственной точкой фигуры F' будет точка N'. Ввиду равенства фигур F и F' имеем:

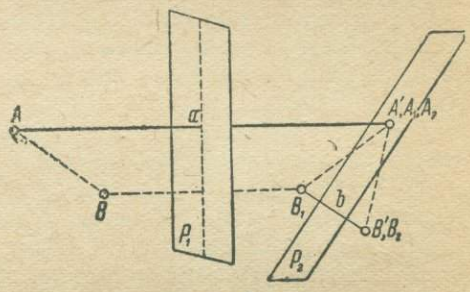
$$NA = N'A';\ NB = N'B';\ NC = N'C';\ ND = N'D'.$$

Очевидно, что точка N является общей точкой четырех шаров с центрами в точках A, B, C и D и с радиусами, соответственно равными отрезкам AN, BN, CN и DN. Легко видеть, что, ввиду совпадения точек A, B, C и D с точками A', B', C' и D', точка N' должна лежать в пересечении тех же четырех шаров.

Из геометрии известно, что четыре шара, центры которых не лежат в одной плоскости, могут иметь только одну общую точку пересечения. * Эта точка должна являться одновременно и точкой N и точкой N'. Таким образом точки N и N' совпадают.



Фиг. 125.



Фиг. 126.

Отсюда следует, что любая точка N фигуры F совпадает с соответственной точкой N' фигуры F', т. е. равные фигуры F и F' совпадают целиком.

Четыре шара, центры которых не лежат в одной плоскости, могут пересекаться только в одной точке. На фиг. 125 изображено сечение четырех шаров, проходящее через общую точку пересечения N и перпендикулярное плоскости центров шаров A, B и C. (Центры шаров не лежат в плоскости чертежа).

Далее переходим к доказательству самой теоремы.

Пусть A, B, C, D, E.... будут точками некоторой не плоской фигуры F; точки A', B', C', D', E'.... являются соответственными точками равной фигуры F' (в дальнейшем соответственные точки будем также помечать одинаковыми буквами). В общем случае соответственные точки фигур F и F' не совпадают.

1) Соединим точки A и A' прямой AA' (фиг. 126). Через середину этого отрезка (через точку a) проведем плоскость $= P_1 \perp AA'$ и отразим в этой плоскости фигуру F. Получим фигуру F_1, равную F (по теореме 1) с точками A_1 B_1, C_1, D_1, E_1....

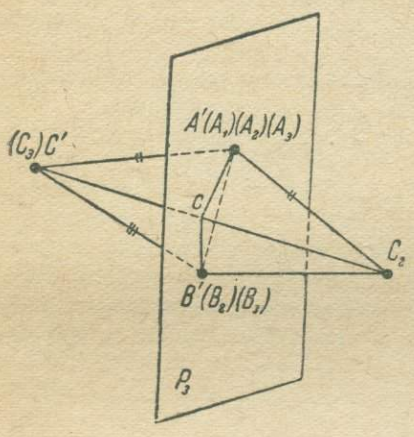
При этом точка A_1 совпадет с точкой A'. Остальные точки могут совпасть, а могут и не совпасть. Если они все совпадают, то данную фигуру F мы уже совместили с F' посредством только одного отражения в плоскости P_1. Этот

* Для пояснения напомним, что три шара могут иметь две точки пересечения, не лежащие в плоскости центров этих шаров (обе точки располагаются симметрично относительно этой плоскости). Если центр четвертого шара не совпадает с этой плоскостью, то его поверхность может пройти только через одну из точек пересечения первых трех шаров.

возможный случай оставим сейчас в стороне. Пусть точка B_1 не совпадет с точкой B'.

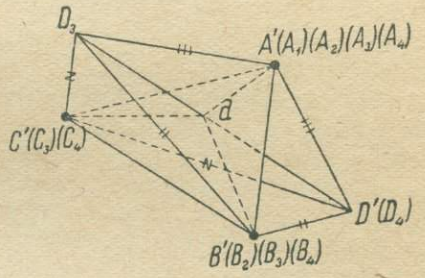
2) Фигуры F_1 и F' равны (ибо порознь они равны фигуре F). Значит, $A_1B_1 = A'B'$ и треугольник $A'B'B_1$ — равнобедренный. Проведем через его вершину $A'(A_1)$ плоскость, перпендикулярную к его основанию $= P_2 \perp B_1B'$. Плоскость P_2 рассечет отрезок B_1B' в его середине ($B_1b = bB'$). Отразим фигуру F_1 в только что проведенной плоскости. Получим новую фигуру F_2 с точками A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 ..., равную предыдущим. При этом точка A_2 совпадает с A_1 и A'; B_2 совпадает с B'.

Остальные точки фигуры F_2 могут совпасть с точками F', а могут и не совпасть. В первом случае фигуры F_2 и F' совпадают, а следовательно, фигуры F и F' совмещены нами посредством двух отражений (в плоскостях P_1 и P_2). Этот возможный случай оставим в стороне и рассмотрим случай несовпадения остальных точек. Пусть точка C_2 не совпадает с точкой C'.



Фиг. 127.

3) Фигуры F_2 и F' равны. Значит, $A_2C_2 = A'C'$ и треугольник $A'C'C_2$ — равнобедренный. Также $B_2C_2 = B'C'$ и треугольник $B'C'C_2$ — равнобедренный (фиг. 127). Оба треугольника имеют общее основание



Фиг. 128.

$C'C_2$. Разделим отрезок $C'C_2$ пополам ($C'c = C_2c$) и проведем медианы cA' (в треугольнике $A'C'C_2$) и cB' (в треугольнике $B'C'C_2$). Медианы равнобедренных треугольников являются и их высотами. Поэтому $C'C_2$ перпендикулярна cA' и $C'C_2$ перпендикулярна cB'.

Отсюда следует, что отрезок $C'C_2$ перпендикулярен всей плоскости P_3, проходящей через cA' и cB'. А так как эта плоскость делит отрезок $C'C_2$ пополам ($C'c = cC_2$), то при отражении в плоскости P_3 точка C_2 совместится с точкой C'. Точки же $A'(A_2)$ и $B'(B_2)$, как лежащие в плоскости P_3, останутся на месте.

В результате отражения всей фигуры F_2 в плоскости P_3 получим новую фигуру F_3, равную всем предыдущим. При этом ее точки A_3, B_3 и C_3 совпадают с точками A', B' и C'.

Если при этом все остальные точки F_3 окажутся совпадающими с точками F', то это значит, что равные фигуры F и F' могут быть совмещены последовательным отражением в трех плоскостях (P_1, P_2 и P_3). Рассмотрим более сложный случай, когда не все остальные соответственные точки фигур F' и F_3 совпадают друг с другом. Среди таких точек возьмем точку D', не лежащую в плоскости $A'B'C'$ (фиг. 128). Пусть точка D_3 не совпадает с точкой D'. Если любая не лежащая в плоскости $A'B'C'$ точка фигуры F' окажется совпадающей с соответственной точкой фигуры F_3 то, согласно лемме, фигуры F' и F_3 совпадают всеми своими точками. Это противоречит принятому нами предположению о несовпадении хотя бы некоторых точек фигур F' и F_3. Поэтому обязательно должна найтись некоторая точка D', несовпадающая с соответственной ей точкой, которая не лежит в плоскости $A'B'C'$.

4) Фигуры F_3 и F' равны. Значит, $A_3D_3 = A'D'$ и треугольник $A'D'D_3$ — равнобедренный. Также $B_3D_3 = B'D'$ и треугольник $B'D'D_3$ — равнобедренный. Также и $C_3D_3 = C'D'$ и треугольник $C'D'D_3$ — равнобедренный. Все три треугольника имеют общее основание D_3D'. Разделим отрезок D_3D' пополам ($D_3d = dD'$) и проведем из полученной точки d медианы всех трех треугольников: dA', dB' и dC'. Медианы равнобедренных треугольников являются и их высотами. Поэтому $D_3D' \perp dA'$; $D_3D' \perp dB'$ и $D_3D' \perp dC'$. Отсюда видно, что отрезки dA', dB' и dC' все лежат в плоскости P_4, перпендикулярной к D_3D'. Эта плоскость проходит через точки A', B' и C' и делит пополам отрезок D_3D'.

Отразим фигуру F_3 в этой плоскости. Получим фигуру F_4 равную всем предыдущим. При этом четыре ее точки A_4, B_4, C_4 и D_4 будут совпадать с точками A', B', C' и D'.

Эти четыре точки не лежат в одной плоскости, так как точка D' не лежит в плоскости точек A', B' и C'.

Согласно предыдущей лемме, совпадение четырех точек A', B', C', D' и A_4, B_4, C_4, D_4 двух равных фигур F и F_4 доказывает совпадение этих фигур всеми своими точками.

Таким образом при последовательном отражении фигуры F в плоскостях P_1, P_2, P_3 и P_4 эта фигура, последовательно занимая места фигур F_1, F_2, F_3 и F_4, окажется целиком совмещенной с фигурой F'. Теорема доказана.

3. Симметричные фигуры

Будем рассматривать совокупность точек $ABCA'B'C'$ (фиг. 123) не как две фигуры, а как одну. При отражении в плоскости PQ вся фигура $ABCA'B'C'$ совместится сама с собою, т. е. займет в пространстве то же положение, которое она занимала и до отражения, только лишь отдельные ее точки займут новые места (точки A, B и C займут места точек A', B' и C', а точки A', B' и C' займут места точек A, B и C). Совокупность точек $ABCA'B'C'$ является образцом симметричной фигуры.

Определение 5. *Симметричной фигурой называется такая фигура, которая при некотором преобразовании равенства совмещается всеми своими точками с исходным положением в пространстве, причем одни ее точки переходят на место других.*

Определение 6. *Преобразование равенства, при котором симметричная фигура совмещается сама с собою, называется симметрическим преобразованием.*

Очевидно, что предыдущие теоремы будут верны не только для равных фигур, но и для симметричных фигур, так как каждую симметричную фигуру можно рассматривать как совокупность двух равных фигур, совпадающих в пространстве всеми своими точками.

Принимая это во внимание, получим вместо теорем 1, 2 и 3 теоремы 4, 5 и 6.

Теорема 4. *Отражение в плоскости может являться симметрическим преобразованием симметричной фигуры.*

Теорема 5. *Отражение в точке (инверсия) может являться симметрическим преобразованием симметричной фигуры.*

Определение 7. *Вспомогательные геометрические образы, посредством которых производятся симметрические преобразования данных симметричных фигур, называются элементами симметрии.*

Таким образом, если при отражении в плоскости происходит совмещение фигуры, то эта плоскость является „элементом симметрии“ данной фигуры. Аналогично, если при отражении в точке фигура совмещается сама с собою, то эта точка (центр инверсии) является „элементом симметрии“ данной фигуры. Из

сказанного видно, что аналогично тому, как мыслимы различные симметрические преобразования, так мыслимы и различные элементы симметрии.

Простое ограничение при изучении как различных симметрических преобразований, так и различных элементов симметрии налагается теоремой 3, которая для случая симметричной фигуры перефразируется так:

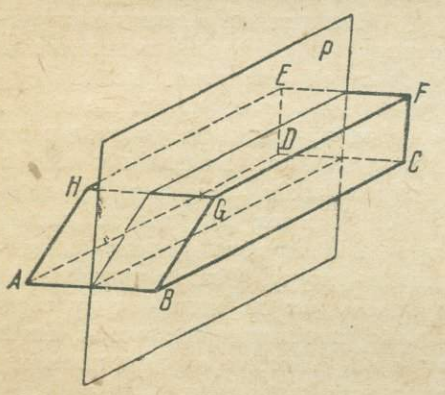
Теорема 6. *Любая симметричная фигура может быть совмещена сама с собою последовательными отражениями в плоскостях, причем для этого потребуется максимум четыре отражения.*

В более простых случаях отражений потребуется меньше. Три, два или даже одно отражение могут привести симметричную фигуру в совмещение со своим исходным положением в пространстве. Рассмотрение всех этих случаев дает полную картину всех геометрически мыслимых типов симметрии фигур.

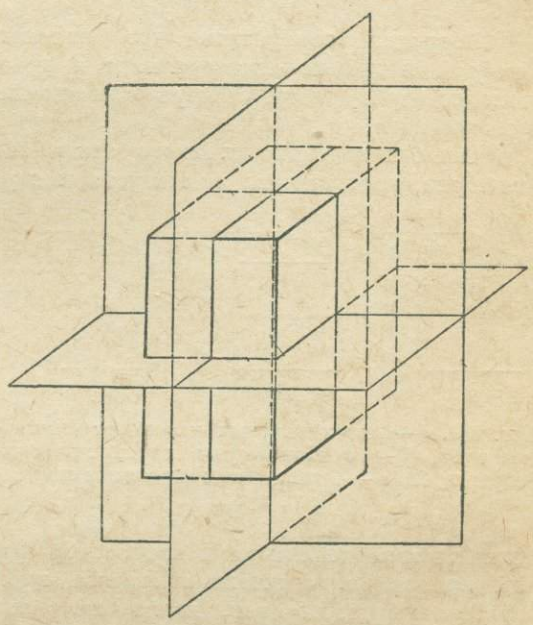
4. Отражение в одной плоскости

В простейшем случае совмещение симметричной фигуры со своим исходным положением в пространстве достигается одним отражением. Так, фигура $ABCA'B'C'$ (фиг. 123), как мы уже видели, может совмещаться сама с собою при одном отражении в плоскости.

Определение 8. *Плоскость, при отражении в которой фигура совмещается со своим исходным положением в пространстве, называется плоскостью симметрии.*



Фиг. 129.



Фиг. 130.

Таким образом плоскость PQ есть плоскость симметрии фигуры $ABCA'B'C'$ (фиг. 123). Плоскость симметрии является одним из простейших элементов симметрии, которым обладают очень многие фигуры: стулья, столы, человеческое тело, кристаллические решетки, кристаллы.

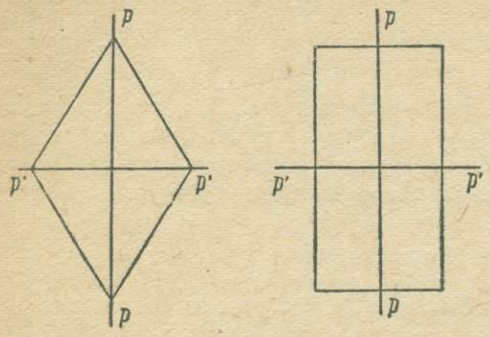
Для приобретения навыка в разыскании плоскостей симметрии тех или иных фигур очень удобно пользоваться моделями кристаллов или кристаллических решеток.

Беря в руки тот или иной многогранник, стараются мысленно рассечь его плоскостью на две половины таким образом, чтобы при отражении в намеченной плоскости эти половины совместились друг с другом.

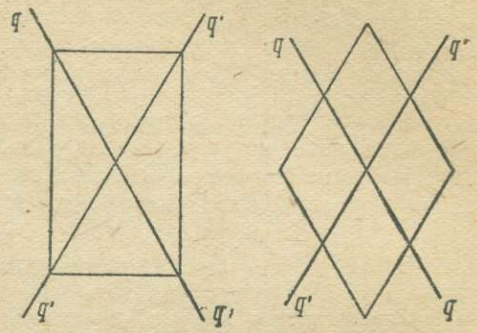
Многогранник $ABCDEFGH$ (фиг. 129) обладает плоскостью симметрии P, так как при отражении в такой плоскости правая половина многогранника совместится с левой, левая же совместится с его правой половиной.

Плоскость симметрии обозначается латинской буквой p (от слова planos — плоскость).

В одной фигуре может быть несколько плоскостей симметрии. Так, в прямоугольном параллелепипеде (например, в спичечной коробке) (фиг. 130) присутствуют три взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии ($3p$).



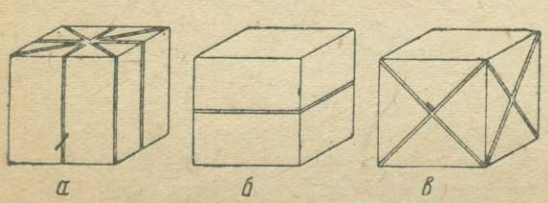
Фиг. 131. pp и $p'p'$ являются плоскостями симметрии изображенных фигур.



Фиг. 132. qq и $q'q'$ не являются плоскостями симметрии изображенных фигур.

Нетрудно сообразить, что плоскости симметрии, или перпендикулярны к ребрам и граням многогранника и проходят через их середины, или же они проходят вдоль ребер, образуя одинаковые углы с равными гранями и ребрами многогранника.

Ошибка начинающих часто заключается в том, что они находят плоскости симметрии, рассекающие многогранник с ребрами и гранями, неодинаково-наклоненными к проведенной плоскости. (см. фиг. 131 и 132).



Фиг. 133. $а$—4 вертикальных плоскости симметрии куба, $б$ — горизонтальная плоскость симметрии куба, $в$ — 4 наклонных плоскости симметрии куба.

Часто также возникают затруднения при определении количества плоскостей симметрии данной фигуры. Для того, чтобы не делать ошибок при подсчете рекомендуется держать фигуру в одном положении. Сначала, когда мы знакомимся с фигурой и ищем плоскости симметрии, бывает очень полезно поворачивать фигуру. Однако при подсчете количества найденных нами плоскостей симметрии следует держать фигуру в одном положении, сосчитывая сначала вертикальные плоскости симметрии, затем горизонтальную, наконец, наклонные (если, конечно, таковые вообще имеются). Так, у куба (фиг. 133) четыре вертикальных плоскости симметрии, одна горизонтальная и четыре наклонных плоскостей симметрии (последние проходят через горизонтальные ребра и диагонали боковых граней).

5. Последовательное отражение в двух пересекающихся плоскостях

Две плоскости могут или пересекаться, или быть параллельными друг другу. Рассмотрим сначала первый случай.

Пусть дана некоторая фигура, состоящая из четырех точек $ABCD$ (фиг. 134).

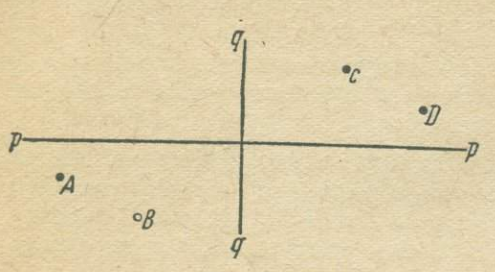
Очевидно, что одним отражением в плоскости такую фигуру нельзя совместить со своим исходным положением в пространстве.

Отражая эту фигуру в некоторой плоскости pp (фиг. 135), получим новую фигуру $A'B'C'D'$ с точками, не совпадающими с данной фигурой.

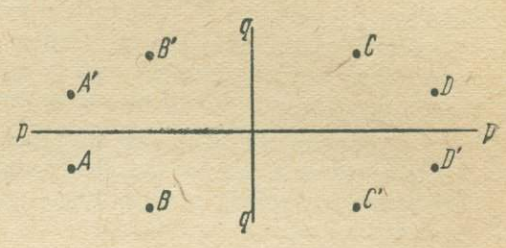
Отражая фигуру $A'B'C'D'$ в плоскости qq, получим исходную фигуру $ABCD$. Таким образом данная фигура совместилась сама с собою в результате

последовательных отражений в двух плоскостях (только точки A и B поменялись местами с точками C и D).

Теорема 7. *Последовательное отражение в двух плоскостях, пересекающихся под углом α, можно заменить, без изменения результатов, одним поворотом вокруг линии пересечения этих плоскостей на угол 2α в направлении от плоскости первого отражения к плоскости второго отражения.*



Фиг. 134.



Фиг. 135.

За плоскость чертежа примем плоскость, перпендикулярную к обеим плоскостям, а следовательно, и к линии их пересечения. Тогда эти плоскости изобразятся прямыми OP и OQ, а линия их пересечения точкой O (фиг. 136).

Возьмем какую угодно точку A любой фигуры и подвергнем ее последовательным отражениям в плоскостях OP и OQ.

После первого отражения точка A займет положение A' причем

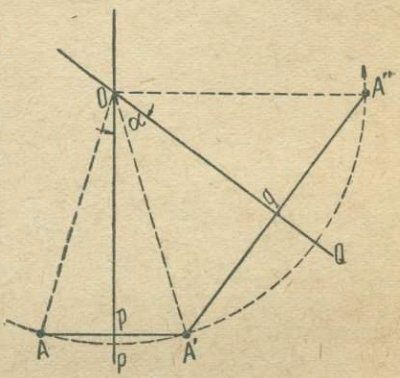
$$Ap = pA' \perp OP. \tag{1}$$

Отражая теперь полученную точку A' во второй плоскости, получим точку A''. причем

$$A'q = qA'' \perp OQ. \tag{2}$$

Требуется доказать, что при повороте точки A вокруг оси O на угол $2\alpha = 2 \angle POQ$ мы получим ту же самую точку A'', как и при помощи двух отражений. Для этого докажем следующие два пункта. а) Точка A совмещается при вращении вокруг O с точкой A'', а следовательно, обе эти точки должны находиться на одинаковом расстоянии от оси вращения: $OA = OA''$. б) Угол поворота $\angle AOA''$ равен удвоенному углу между плоскостями:

$$\angle AOA'' = 2 \angle POQ.$$



Фиг. 136.

Из условия (1) следует, что треугольники ApO и $A'pO$ прямоугольны, а так как один катет у них общий, а другие равны по тому же условию (1), то эти треугольники равны. Отсюда следует, что

$$OA = OA' \tag{3}$$

и

$$\angle AOp = \angle A'Op. \tag{4}$$

Аналогично из условия (2) следует, что треугольник $A'Oq$ и $A''Oq$ прямоугольны и равны. Отсюда следует:

$$OA' = OA'' \tag{5}$$

$$\angle A''Oq = \angle A'Oq. \tag{6}$$

Сопоставляя (3) и (5), получим: $OA = OA' = OA''$. Итак, первая часть теоремы (а) доказана: точка A'' действительно может быть получена вращением вокруг оси O.

Складывая почленно (4) и (6) получим:

$$\angle AOp + \angle A''Oq = \angle A'Op + \angle A'Oq = \angle pOq = \angle \alpha.$$

Искомый угол поворота $\angle AOA''$, как видно из чертежа, равен сумме трех углов:

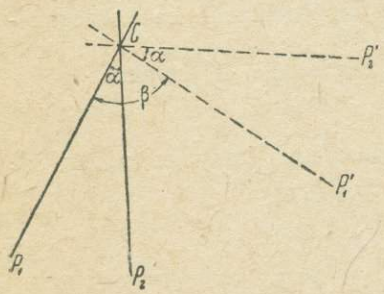
$$\angle AOA'' = \angle AOp + \angle pOq + \angle A''Oq = (\angle AOp + \angle A''Oq) + \angle pOq = \\ = \angle \alpha + \angle \alpha = \angle 2\alpha.$$

Таким образом доказана и вторая часть теоремы относительно величины угла поворота. Так как доказательство применимо к любой точке данной фигуры, то, следовательно, оно применимо и ко всей фигуре.

Теорема 8 (обратная теореме 7). *Поворот вокруг некоторой оси на угол α можно заменить без изменения результатов последовательным отражением в двух плоскостях, пересекающихся по данной оси. При этом плоскость первого отражения можно взять произвольно,* а плоскость второго отражения—под углом $\frac{\alpha}{2}$ к первой в направлении поворота.*

Действительно, последовательное отражение в этих плоскостях, согласно теореме 7, приводит к тому же результату, как и данный поворот.

Сопоставляя теоремы 7 и 8, приходим к следующему выводу.



Фиг. 137.

Следствие из теорем 7 и 8. *Плоскости двух последовательных отражений, пересекающиеся под углом α, без изменения результатов отражений, можно повернуть вокруг линии их пересечения на произвольный угол β (оставляя неизменным угол между ними).*

Действительно, отражения в двух таких плоскостях P_1 и P_2, согласно теореме 7, можно заменить поворотом вокруг линии их пересечения C на угол 2α. Последний же поворот, согласно теореме 8, можно заменить отражениями в двух плоскостях P_1' и P_2', пересекающихся в той же оси и расположенных под углом α друг к другу. Эти две последних плоскости могут и не совпадать с первоначальными плоскостями P_1 и P_2. Очевидно, что плоскости P_1' и P_2' можно непосредственно получить из плоскостей P_1 и P_2 простым поворотом этих плоскостей вокруг C на некоторый угол β (фиг. 137).

Приведенные теоремы 7 и 8 показывают, что поворот также может являться некоторым симметрическим преобразованием, как и отражения в плоскостях; при этом поворот является преобразованием значительно более наглядным, чем два последовательных отражения. Поэтому, при исследовании симметрии фигур, вместо сложной и малонаглядной операции совмещения последовательными отражениями в двух плоскостях, обычно прибегают к простому симметрическому преобразованию с помощью поворота.

Определение 9. *Линия, при вращении вокруг которой на некоторый угол фигура совмещается со своим исходным положением в пространстве, называется поворотной осью симметрии или „гирой".***

Так, например, в кубе перпендикулярно к середине грани куба (фиг. 138) проходит некоторая гира, так как при вращении вокруг нее куб будет совмещаться со своим исходным положением в пространстве.

---

* Лишь бы ось лежала в этой плоскости.

**От греческого корня „гирос" — круг, вращение.

Гира, наряду с плоскостью симметрии, также является „элементом симметрии", к подробному изучению которого мы сейчас и перейдем.

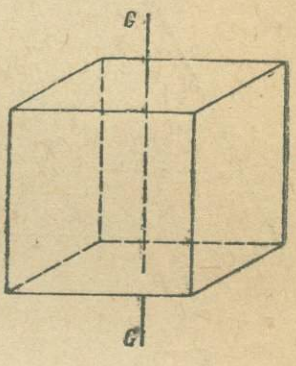
Определение 10. *Наименьший (конечный и отличный от нуля) угол поворота, при котором происходит совмещение данной симметричной фигуры со своим исходным положением в пространстве, называется элементарным углом поворота данной оси.* *

Элементарный угол поворота рассмотренной нами гиры куба равен 90°.

Очевидно, что если α есть элементарный угол поворота данной гиры, то при вращении фигуры на угол 2α, 3α, $\ldots\ldots m\alpha$ (где m — любое целое число), фигура также будет совмещаться сама с собою. Так, например, вращая куб на $2 \times 90 = 180°$, $3 \times 90 = 270°$, $4 \times 90 = 360°$, $5 \times 90 = 450°$ и т. д., будем получать совмещение куба со своим исходным положением в пространстве.

Теорема 9. *Если α — элементарный угол поворота данной гиры, то всякий другой угол поворота этой гиры является кратным элементарного угла α, т. е. равен $n\alpha$, где n обязательно целое число.*

Предположим противное, т. е. что некоторый угол поворота данной оси равен $k\alpha$, где k — число не целое, но некоторая дробь, или число иррациональное. Это число не может быть < 1, так как тогда угол поворота $k\alpha < \alpha$ и, следовательно, $k\alpha$, а не α являлось бы элементарным наименьшим углом поворота данной гиры. Следовательно $k > 1$.



Фиг. 138.

Пусть число k заключается между двумя целыми числами:

$$m < k < m + 1,$$

где m — целое число. Умножая все части написанного неравенства на α, получим:

$$m\alpha < k\alpha < m\alpha + \alpha.$$

Вычтем из всех частей этого неравенства величину $m\alpha$:

$$0 < k\alpha - m\alpha < \alpha.$$

$k\alpha$ — по условию угол поворота данной оси; $k\alpha - m\alpha$ — также угол поворота данной оси, так как m — число целое. Следовательно, и отличная от нуля разность двух углов поворота $k\alpha - m\alpha$ также является углом поворота, при котором происходит совмещение данной фигуры. Но эта разность, согласно написанному неравенству, меньше элементарного угла поворота. Таким образом, мы пришли к выводу, что существует угол поворота меньше элементарного угла α, т. е. меньше наименьшего угла. Абсурдность этого вывода приводит к заключению о невозможности предположения, что k — число не целое. Теорема доказана.

Следствие. *Элементарный угол поворота всякой гиры есть целая часть угла в 360°.*

Действительно, при вращении фигуры на 360° (при полном обороте) любая фигура будет совмещаться со своим исходным положением в пространстве. Следовательно, 360° есть один из углов поворота всякой гиры. Но, как мы видели, согласно теореме 9, любой угол поворота заключает в себе целое число n элементарных углов поворота α. Следовательно, и $\angle 360°$ — также заключает в себе целое число n элементарных углов α; $360° = n\alpha$ или:

$$\alpha = \frac{360°}{n}.$$

---

* Существование такого угла у всякой гиры, не имеющей бесконечно малых углов поворота, мы оставляем без доказательства.

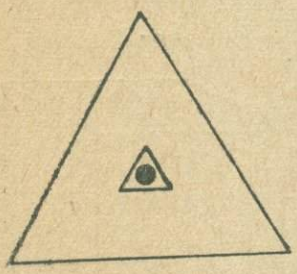
Так как n — число целое, то α есть целая часть угла 360°, что и требовалось доказать.

Определение 11. *Целое число n, показывающее сколько раз элементарный угол поворота данной гиры заключается в полном обороте (в 360°), называется наименованием гиры.*

Как мы видели, наименование гиры n и ее элементарный угол поворота α связаны таким простым соотношением:

$$\boxed{\alpha = \frac{360^\circ}{n}}.$$

Различные гиры отличаются друг от друга своим наименованием и элементарным углом поворота. Для определения наименования гиры, вращают фигуру вокруг определяемой гиры на 360°, следя за тем, сколько раз при этом фигура будет совмещаться сама с собою. Так, при вращении куба вокруг перпендикуляра к середине его грани, при полном обороте куб четыре раза совместится сам с собою (фиг. 138). Следовательно, наименование гиры, совпадающей с направлением оси поворота, есть 4. Элементарный угол $\alpha = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Равносторонний треугольник при вращении на 360° вокруг перпендикуляра к его центру O (фиг. 139) совместится сам с собою 3 раза. Отсюда наименование гиры, совпадающей с нормалью к середине треугольника, есть 3, а элементарный угол $\alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.



Фиг. 139.

Рассмотрим по порядку все возможные случаи различных наименований гир. По наименованию гиры получают и свои названия (производящиеся от греческих числительных).

$n = 1$; $\alpha = 360^\circ$. — Моногира* (одинарная поворотная ось симметрии). Очевидно, что любая фигура, при вращении на 360° вокруг любого направления в пространстве, всегда совместится со своим исходным положением. Поэтому моногиры не рассматриваются при изучении симметрии фигур.

Условное обозначение — G_1.

$n = 2$; $\alpha = 180^\circ$. — Дигира** (двойная ось симметрии, ось симметрии второго порядка). При полном обороте совмещение фигуры со своим исходным положением происходит два раза. У куба дигиры проходят через середины ребер.

Условное обозначение — G_2 или a (старое обозначение — L_2).

$n = 3$; $\alpha = 120^\circ$. — Тригира*** (тройная ось симметрии, ось симметрии третьего порядка). Обозначение — G_3 (старое обозначение — L_3).

Примером тригиры могут являться длинные диагонали куба, соединяющие противолежащие вершины.

$n = 4$; $\alpha = 90^\circ$. — Тетрагира**** (четверная ось симметрии, ось симметрии четвертого порядка). Обозначение — G_4 (старое обозначение — L_4). Пример тетрагиры был рассмотрен уже выше.

Мы видели, что при вращении куба вокруг нормали к середине его грани при полном обороте он четыре раза совмещается сам с собою. При этом любая точка фигуры будет каждый раз совмещаться с местом, на котором до этого была такая же соответственная точка. Если наш куб представляет собою кристалл хлористого натрия, то при каждом повороте на 90° каждый ион хлора будет сов-

---

* От греческого числительного „моно" = один.
** От греческого числительного „ди" = два.
*** От греческого числительного „три".
**** От греческого числительного „тетра" = четыре.

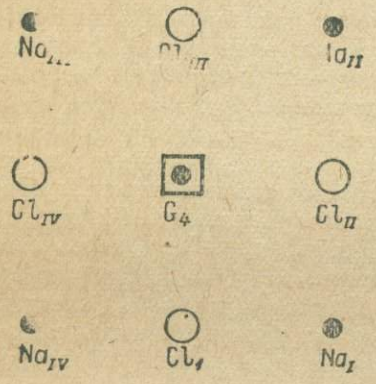
мещаться с местом соответственного такого же иона. (Например, при вращении вокруг G_4 на фиг. 140 ион Cl_I последовательно будет занимать места Cl_{II}, Cl_{III} и Cl_{IV}.

Аналогично и каждый ион натрия будет занимать место соответственного такого же иона (см. фиг. 140).

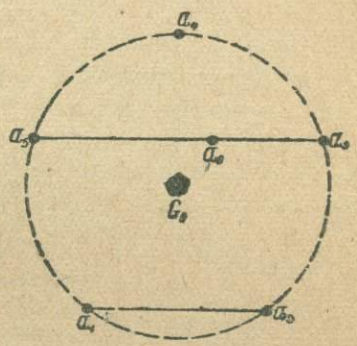
Таким образом вокруг G_4 соответственные ионы будут располагаться группами по четыре на одинаковых расстояниях от оси и на одинаковых расстояниях от своих соседей.

Аналогичные совмещения ионов решетки происходят и при вращении вокруг гир других наименований.

$n=5$; $\alpha=72°$. — Пентагира * (пятерная ось симметрии, ось симметрии пятого порядка). Обозначение — G_5. Примером пентагиры может служить перпендикуляр к середине пятиконечной звезды.



Фиг. 140.



Фиг. 141.

Теорема 10. *Кристаллические решетки, а следовательно, и кристаллы не могут обладать пентагирами.*

Предположим противное. Пусть в кристаллической решетке проходит G_5 (плоскость чертежа перпендикулярна к ней) (фиг. 141). Вокруг этой оси располагаются узлы пространственной решетки кристалла, причем они должны лежать таким образом, чтобы при вращении на $\frac{360°}{5}=72°$ каждый узел занял место соответственного такого же узла. Таким образом вокруг G_5 соответственные узлы должны располагаться группами по пяти на одинаковых расстояниях от оси и на одинаковых расстояниях от своих соседей.

Рассмотрим такую группу в пять соответственных узлов a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5, ближайших к G_5. Эти узлы принадлежат пространственной решетке, а потому к ним применимы все положения, выведенные для них в отделе I (глава II). Воспользуемся некоторыми из них. Через два любых узла пространственной решетки можно провести ряд решетки, причем через любой другой узел, параллельно проведенному ряду, пройдет такой же тождественно-построенный ряд с такими же расстояниями между соответственными узлами. Проведем ряд через узлы a_1 и a_2. Параллельно этому ряду построим ряд, проходящий через узел a_5 (ряд a_5a_3). В последнем построенном ряду узлы должны находиться на тех же расстояниях a_1, $a_2=b$, как и в первом ряду. Отсюда следует, что на расстоянии $a_5a_6=b$ обязательно должен быть узел. Этого требует пространственная решетка. Таким образом, с одной стороны, узел a_6 должен существовать в нашей решетке, но, с другой стороны, этот узел не может существовать там, ввиду того, что с самого

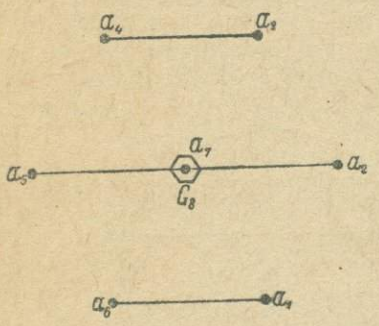
* От греческого числительного пента = „пять".

начала мы взяли пять узлов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ближайших к G_5, а узел a_6 располагается еще ближе этих ближайших узлов. Следовательно мы пришли к явному абсурду. Таким образом предположение о возможности существования G_5 в кристаллическом веществе приводит к противоречию с основными законами о пространственной решетке, а потому G_5 не может встречаться в кристаллическом веществе и в кристаллах.

В дальнейшем пентагира нами изучаться не будет.

$n=6$; $\alpha=60°$. — Гексагира* (шестерная ось симметрии, ось симметрии шестого порядка). Обозначение — G_6 (старое обозначение — L_6).

Возникает вопрос о возможности существования этой оси в кристаллическом веществе. Предположим, что ось G_6 существует (фиг. 142) (плоскость чертежа перпендикулярна к оси). Мы знаем, что узлы пространственной решетки должны меняться своими местами при повороте на $\frac{360°}{6}=60°$. Отсюда следует, что соответственные узлы решетки должны располагаться группами по шести на одинаковом расстоянии от оси и на одинаковых расстояниях от своих соседей. На чертеже изображена такая группа из шести узлов — a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ближайших к G_6. Изображенное расположение этих узлов не будет противоречить законам строения пространственной решетки. Действительно, параллельно любому ряду, например a_1a_6, можно провести через соответственные узлы тождественные ряды a_4a_3 и a_5a_2. Для того, чтобы в последнем ряду промежутки между узлами были такими же, как и в ряду a_1a_6 и a_3a_4, необходимо существование еще одного узла между a_2 и a_5 — узла a_7, лежащего на оси G_6. Полученная решетка не противоречит существованию G_6, а потому такая ось возможна в кристаллическом веществе и часто встречается на кристаллах.



Фиг. 142.

$n=7$; $\alpha=51\frac{3°}{7}$. — Гептагира* — G_7;

$n=8$; $\alpha=45°$. — Октогира** — G_8;

$n=9$; $\alpha=40°$. — Эннеагира*** — G_9;

$n=10°$; $\alpha=36°$. — Декагира**** — G_{10}.

Теорема 11. *Кристаллические решетки, а следовательно, и кристаллы не могут обладать гирами наименования $n=7$, 8, 9 и выше.*

Доказательство совершенно аналогично доказательству невозможности существования в кристаллических решетках G_5.

Упомянем еще предельный случай, когда n стремится к бесконечности.

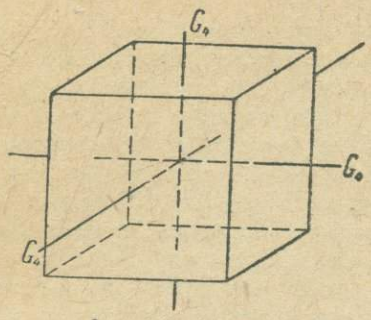
$n\to\infty$; $\alpha\to 0°$. — Ось вращения. При повороте на любой, сколь угодно малый угол фигура совмещается сама с собою. Примерами фигуры с осями вращения являются круговой конус, круговой цилиндр и другие так называемые тела вращения. Кристаллическим решеткам эта ось не свойственна.

В дальнейшем мы будем изучать только оси симметрии, встречающиеся на кристаллах: G_2, G_3, G_4 и G_6. Гиры G_3, G_4 и G_6 называют главными осями, в отличие от дигир (G_2).

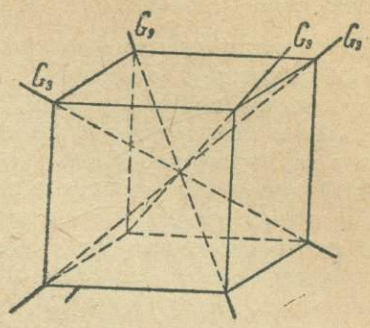
---

* От греческого числительного „гекса" = шесть.
** От греческого числительного „гепта" = семь.
*** От греческого числительного „окто" = восемь.
**** От греческого числительного „эннеа" = девять.
***** От греческого числительного „дека" = десять.

Для приобретения практических навыков в определениях различных гир, удобно пользоваться моделями кристаллических многогранников. Исследуемую фигуру вращают вокруг различных направлений, проходящих через нее, следя за происходящими или не происходящими при этом совмещениями фигуры со своим исходным положением в пространстве, причем это исходное положение совер-



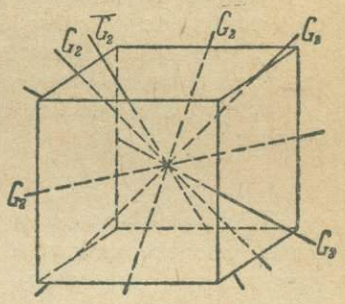
Фиг. 143. 3 G_3 куба.



Фиг. 144. 4 G_3 куба.

шенно безразлично. Так, вращая куб вокруг G_4, совершенно безразлично — начинаем ли мы испытание с положения, при котором куб обращен к нам гранью, или же с положения, при котором он обращен к нам ребром. В том или ином случае мы определяем одну и ту же ось G_4. Не каждое направление, проходящее через многогранник, может являться гирой. Так, гирами не могут являться направления, не проходящие через центр фигуры.

Нетрудно сообразить, что гиры или перпендикулярны к граням многогранника и проходят через их середины, или же проходят через вершины многогранника, будучи равнонаклонными к его одинаковым граням и ребрам. Дигиры (G_2) могут еще проходить перпендикулярно к серединам ребер многогранника. Только эти места многогранника и подлежат испытанию для нахождения гир. В одном многограннике может присутствовать несколько различных и несколько одинаковых гир.



Фиг. 145. 6 G_2 куба.

Так, в кубе мы имеем три взаимноперпендикулярных G_4 (проходящих через середины граней) (фиг. 143), $4G_3$, проходящих через вершины куба (фиг. 144), $6G_2$, проходящих через середины ребер (фиг. 145).

Для того, чтобы не ошибиться при подсчете количества найденных гир, следует придерживаться указаний, данных для плоскостей симметрии.

6. Понятие о сложении симметрических преобразований и элементов симметрии

Вращением вокруг оси мы пользуемся для замены мало наглядной операции последовательного отражения в двух плоскостях.

Симметрическое преобразование, которое приводит к одинаковому результату с последовательным применением некоторых других, называется равнодействующим преобразованием.

Таким образом отражения в двух плоскостях дают в качестве равнодействующего преобразования поворот вокруг линии пересечения этих плоскостей.

*Сложением преобразований называется нахождение равнодействующего преобразования нескольких (обычно двух) данных преобразований.**

* Совокупность всех этих преобразований образует „группу".

Таким образом поворот вокруг линии пересечения двух плоскостей может рассматриваться как результат сложения двух отражений в этих плоскостях:

$$\text{Отр.} \cdot \text{Отр.} = \text{Пов.}$$

Знак „плюс" между слагаемыми преобразованиями согласно с теорией групп не пишут. Несмотря на это, приводимая символическая запись читается: „отражение плюс отражение равно повороту".

Аналогичное имеет место и при сложении других преобразований. В нашем случае сложения двух отражений, как видно из примера, описанного в начале предыдущего параграфа (стр. 110), отражение в каждой из двух данных плоскостей в отдельности может и не приводить фигуры в совмещение с ее исходным положением в пространстве. Лишь последовательное совместное применение этих отражений приводит фигуру в исходное положение. Однако мыслим и тот частный случай, при котором и не совместные, но отдельные отражения в плоскостях также совмещают фигуру с ее исходным положением. Каждая из плоскостей отражения может являться сама по себе самостоятельной плоскостью симметрии фигуры. Тогда, очевидно, вращением вокруг оси симметрии мы заменяем последовательное отражение в двух плоскостях симметрии. Ось симметрии заменяет собою последовательное применение двух плоскостей симметрии.

Элемент симметрии, применение которого приводит к одинаковому результату с последовательным применением некоторых других элементов, называется равнодействующим элементом симметрии.

Таким образом две пересекающиеся плоскости симметрии имеют в качестве равнодействующего элемента симметрии ось симметрии.

Сложением элементов симметрии называется нахождение равнодействующего элемента симметрии нескольких (обычно двух) данных элементов.*

Складывая две пересекающиеся плоскости симметрии, получаем ось симметрии:

$$P \cdot P = G$$

(и в этой символической записи, алгебраический знак „плюс" между складываемыми плоскостями симметрии, не пишут; несмотря на это, приведенная запись читается так: „плоскость симметрии плюс плоскость симметрии дают ось симметрии").

Введение понятия о сложении преобразований и элементов симметрии весьма облегчает изучение симметрии фигур как теоретическое, так и чисто практическое. Найдя на фигуре два элемента симметрии, мы можем найти третий, уже пользуясь правилами сложения и не прибегая к разыскиванию его эмпирически на фигуре. Так, из рассмотрения сложения плоскостей симметрии, вытекает такое следствие:

Линии пересечения плоскостей симметрии любой фигуры являются осями симметрии.

Рассмотрим еще несколько примеров сложений симметрических преобразований и вытекающих из них практически-важных следствий.

Теорема 12. *Равнодействующим симметрическим преобразованием отражения в плоскости с последующим поворотом на 180° вокруг нормали к этой плоскости является инверсия в точке пересечения плоскости отражения и оси поворота.*

Пусть P (фиг. 146) является плоскостью, в которой мы производим отражение. Нормаль к этой плоскости NS — ось, вокруг которой производится поворот на 180°.

---

* Совокупность всех таких элементов симметрии (исходных и равнодействующих) образует „группу".

Возьмем какую-либо точку A_1 фигуры. При отражении в плоскости P эта точка займет положение A_2, причем по закону отражения:

$$A_1m = mA_2 \perp P. \tag{1}$$

После отражения повернем полученную точку A_2 вокруг HS на 180°. Получим точку A_3, причем

$$1)\ A_2O = A_3O \tag{2}$$

(расстояние до любой точки оси при повороте не изменяется).

$$2)\ \angle A_3OS = \angle A_2OS \tag{3}$$

(при повороте вокруг оси HS прямая A_2O совмещается с прямой A_3O).

Кроме того, нетрудно видеть, что все три точки A_1, A_2 и A_3 будут лежать в одной плоскости с осью HS.

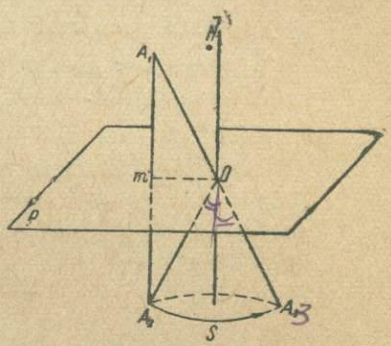
По условию теоремы требуется доказать, что ту же самую точку A_3 мы получим из точки A_1, если, вместо отражения и поворота, применим инверсию в точке O.

Для этого нужно убедиться, что относительно точек A_1, O и A_3 выполнены условия инверсии:

а) $A_1O = OA_3$; б) $\angle A_1OA_3 = 180°$,

т. е. точка A_3 лежит на продолжении прямой A_1O.

Рассмотрим прямоугольные треугольники: треугольник A_1Om и треугольник A_2Om. Катет mO у них общий, два другие катета A_1m и mA_2 равны по закону отражения (1). Из равенства этих треугольников следует:



Фиг. 146.

$$A_1O = A_2O, \tag{4}$$

$$\angle A_1Om = \angle A_2Om. \tag{5}$$

Сопоставляя (4) с (2), получим

$$A_1O = A_2O = A_3O.$$

Первое условие является доказанным.

Складывая почленно (5) и (3), получим

$$\angle A_1Om + \angle A_3OS = \angle A_2Om + \angle A_2OS. \tag{6}$$

Сумма двух последних углов равна прямому

$$\angle A_2Om + \angle A_2OS = 90°.$$

Следовательно, и сумма двух углов левой части равенства (6) тоже равна прямому углу:

$$\angle A_1Om + \angle A_3OS = 90°.$$

Сумма же всех четырех углов равна двум прямым:

$$\angle A_1Om + \angle A_3OS + \angle A_2Om + \angle A_2OS = 90° + 90°,$$

или

$$\angle A_1OA_3 = 180°,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом,

$$\text{Отр.} \cdot P \cdot \text{Пов.}_{180}(HS) = \text{Инв. } O. \tag{7}$$

Заключения и следствия

1) Если плоскость отражения является самостоятельной плоскостью симметрии фигуры, а ось поворота является дигирой фигуры, то последовательное

применение этих элементов симметрии можно заменить, согласно доказанной теореме, применением центра инверсии в точке O. Иначе:

Точка пересечения плоскости симметрии и перпендикулярной к ней дигиры является центром инверсии.

Таким образом центр инверсии является равнодействующим элементом симметрии плоскости симметрии и нормальной к ней дигиры:

$$P \cdot \perp G_2 = C.$$

2) Различными путями можно получить еще следующие результаты:

Равнодействующим симметрическим преобразованием отражения в плоскости Рс последующей инверсией в точке О, лежащей в этой плоскости, является поворот на 180° вокруг нормали к данной плоскости, проведенной через точку О.

$$\text{Отр. } P \cdot \text{Инв. } O = \text{Пов.}_{180^\circ}(HS).$$

3) Для элементов симметрии аналогично:

Нормаль к плоскости симметрии, проведенная через центр инверсии, является дигирой.

$$C \cdot P = \perp G_2.$$

4) Равнодействующим симметрическим преобразованием поворота на 180° с последующей инверсией около точки О, лежащей на оси поворота, является отражение в плоскости, нормальной к этой оси и проходящей через точку О.

$$\text{Пов.}_{180^\circ}(HS) \cdot \text{Инв. } O = \text{Отр. } P.$$

5) Плоскость, нормальная к дигире, проведенная через центр инверсии, является плоскостью симметрии.

$$G_2 \cdot C = \perp P.$$

6) Указанные соотношения, важные теоретически, помогают и при практическом определении элементов симметрии фигур. Найдя два из указанных элементов симметрии, можно эмпирически не разыскивать третьего — он неминуемо должен присутствовать у фигуры.

7) Так как поворот на 180° можно заменять последовательными отражениями в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях, то последовательное отражение в трех взаимно-перпендикулярных плоскостях можно заменять инверсией. Обратно — инверсию можно заменять последовательным отражением в трех взаимно-перпендикулярных плоскостях.

$$\text{Отр.} \cdot \perp \text{Отр.} \cdot \perp \text{Отр.} = \text{Инв.}$$

8) Для элементов симметрии, аналогично:

$$P \cdot \perp P \cdot \perp P = C.$$

9) В предыдущих рассуждениях в качестве гиры фигурировала дигира G_2. Очевидно, что совершенно те же выводы можно сделать и для любой другой гиры четного наименования. Действительно, всякая четная гира приводит к совмещению фигуры при повороте на 180°, а потому является в этом смысле дигирой, применительно к которой мы вели все наши рассуждения.

Теорема 13 (теорема Эйлера). *Равнодействующим симметрическим преобразованием двух последовательных поворотов вокруг осей, пересекающихся в одной точке, является поворот вокруг некоторой третьей оси. Ее положение и угол поворота определяются как указано в доказательстве.*

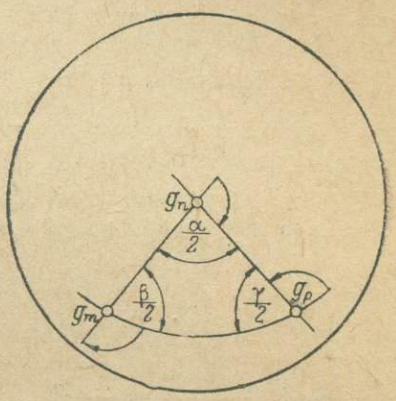
Для наглядного изображения всех этих осей прибегнем к стереографическим проекциям (фиг. 147). Пусть G_n и G_m стереографические проекции двух данных осей поворота, пересекающихся в центре шара проекции. Углы поворота этих осей α и β.

Требуется найти преобразование, заменяющее собою последовательные повороты вокруг осей G_n и G_m.

$$\text{Пов.}_{\alpha} G_n \cdot \text{Пов.}_{\beta} G_m = ?$$

Для решения поставленной задачи поворот вокруг G_n заменим отражениями в двух плоскостях, проходящих через эту ось и расположенных под углом $\frac{\alpha}{2}$ друг к другу (согласно теореме 8). Проведем эти плоскости таким образом, чтобы плоскость второго отражения прошла через вторую ось G_m. Пусть при таком расположении стереографическая проекция первой плоскости отражения будет G_nG_p, стереографическая проекция второй плоскости отражения G_nG_m:

$$\text{Пов. } G_m = \text{Отр. } G_nG_p \cdot \text{Отр. } G_nG_m. \qquad (1)$$



Фиг. 147.

Поворот вокруг второй оси G_m также заменим двумя отражениями в плоскостях, проходящих через эту ось и расположенных под углом $\frac{\beta}{2}$ друг к другу (теорема 8). Проведем эти плоскости таким образом, чтобы плоскость первого отражения прошла через первую ось:

$$\text{Пов. } G_m = \text{Отр. } G_mG_n \cdot \text{Отр. } G_mG_p. \qquad (2)$$

Заменив оба поворота отражениями, мы вместо двух поворотов можем, без изменения результатов, произвести четыре отражения:

$$\text{Пов. } G_n \cdot \text{Пов. } G_m = \text{Отр. } G_nG_p \cdot \text{Отр. } G_nG_m \cdot \text{Отр. } G_mG_n \cdot \text{Отр. } G_mG_p. \qquad (3)$$

Но отражения в плоскостях G_nG_m и G_mG_n, непосредственно следующие друг за другом, являются отражениями в одной и той же плоскости. Такие два отражения возвращают все точки отражаемой фигуры в их первоначальные места, а потому эти отражения взаимно уничтожаются. Остаются два отражения:

$$\text{Пов. } G_n \cdot \text{Пов. } G_m = \text{Отр. } G_nG_p \cdot \text{Отр. } G_mG_p. \qquad (4)$$

Согласно теореме 7, отражения в двух пересекающихся плоскостях можно заменить поворотом вокруг линии пересечения этих плоскостей на угол вдвое больший, чем угол между плоскостями. Стереографическая проекция линии пересечения плоскостей G_nG_p и G_mG_p есть G_p; угол между плоскостями $G_nG_pG_m = \frac{\gamma}{2}$.

$$\text{Отр. } G_nG_p \cdot \text{Отр. } G_mG_p = \text{Пов. } G_p. \qquad (5)$$

Сопоставляя (5) и (4), получим:

$$\text{Пов. } G_n \cdot \text{Пов. } G_m = \text{Пов. } G_p.$$

Таким образом, вместо двух поворотов вокруг осей G_n и G_m на углы α и β, можно, без изменения результатов, произвести поворот вокруг некоторой оси G_p на угол γ. Итак, поворот вокруг оси G_p на угол γ является равнодействующим преобразованием двух поворотов G_n и G_m.

Следствие 1. Если каждая из осей поворотов представляет собою некоторую гиру фигуры, то очевидно, что доказанная теорема приводит к следующему выводу:

Через точку пересечения двух гир всегда проходит третья, равнодействующая гира. Ее положение и наименование определяются, как указано в доказательстве, предыдущей теоремой.

Следствие 2. *Совместное существование гиры с элементарным углом поворота α и перпендикулярной к ней дигиры влечет за собою существование дигир, также перпендикулярных к данной гире и расположенных под углом $\frac{\alpha}{2}$ друг к другу.*

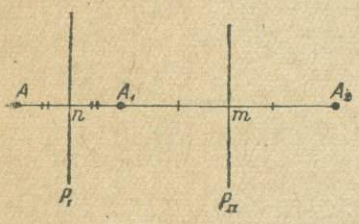
Например, если перпендикулярно G_6 проходит дигира G_2, то, кроме этой дигиры, перпендикулярно к G_6 располагаются еще $5G_2$, всего, следовательно, с данной дигирой $6G_2$, под углом $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ друг к другу.

После рассмотрения настоящего вводного параграфа о сложении элементов симметрии, вернемся к нашему систематическому разбору различных случаев совмещений симметричных фигур при помощи отражений.

7. Последовательное отражение в двух параллельных плоскостях

Рассмотрим неразобранный нами случай последовательного отражения в двух параллельных плоскостях.

Определение 12. *Поступанием называется такое перемещение фигуры, при котором все точки этой фигуры движутся по прямым, параллельным друг другу.*



Фиг. 148.

Теорема 14. *Отражение в двух параллельных плоскостях можно заменить поступанием в направлении, перпендикулярном к плоскостям отражений от плоскости первого отражения к плоскости второго отражения. Величина поступания равна удвоенному расстоянию между плоскостями отражения.*

Пусть P_{I} и P_{II} следы двух плоскостей отражения (плоскость чертежа перпендикулярна этим плоскостям) (фиг. 148).

Возьмем какую-либо точку A системы и подвергнем ее отражениям в плоскостях P_{I} и P_{II}. После первого отражения точка A займет положение A_1, причем $An = nA_1 \perp P_{\text{I}}$. После второго отражения точка A_1 придет в положение A_2, причем $A_1m = mA_2 \perp P_{\text{II}}$.

В результате двух отражений точка A переместилась на величину $AA_2 \perp P_{\text{I и II}}$. При этом:

$$AA_2 = An + nA_1 + A_1m + mA_2 = (An + nA_1) + (A_1m + mA_2) = \\ = 2nA_1 + 2A_1m = 2(nA_1 + A_1m) = 2nm.$$

Это рассуждение применимо к любой точке фигуры, а потому все точки фигуры в результате двух последовательных отражений переместятся перпендикулярно P_{I} и P_{II} на величину $2nm$, т. е. на величину вдвое бо́льшую расстояния между плоскостями. Теорема доказана.

Теорема 15 *(обратная теорема). Поступание можно заменить последовательным отражением в двух плоскостях, перпендикулярных к направлению поступания и расположенных друг от друга на расстоянии, вдвое меньшем величины поступания.*

Предыдущее рассуждение показывает, что действительно получается тот же самый результат.

Если в результате двух последовательных отражений фигура совмещается со своим исходным положением в пространстве, то такие отражения являются симметрическим преобразованием, и поступание, таким образом, является также примером симметрического преобразования.

Определение 13. *Вектор, указывающий величину и направление поступания, называется трансляцией (переносом, шагом симметрии).*

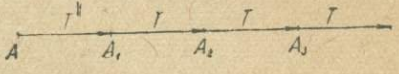
Таким образом, трансляция отвечает элементу симметрии, характеризующему поступание. Будем обозначать его буквой T.

Как следствие теоремы 14, можно найти, что вектор, нормальный к параллельным плоскостям симметрии и равный двойному расстоянию между этими плоскостями, является трансляцией данной фигуры.

Теорема 16. *Фигуры конечных размеров не могут обладать трансляцией, не равной нулю.*

Предположим противное. Пусть некоторая конечная фигура обладает трансляцией, иными словами, совмещается сама с собою при поступании на конечную величину T.

Пусть точка A—одна из точек нашей фигуры (фиг. 149). Поступание на величину T в направлении вектора AA_1 совмещает точку A с точкой A_1, причем вся фигура совмещается со своим исходным положением в пространстве. Место точки A, следовательно, будет занято какой то другой точкой нашей фигуры. Подвергая фигуру еще таким же поступаниям T, найдем, что точка A будет занимать места точек A_2, A_3, $A_4 \ldots A_n$. Таким образом, все эти точки, начиная от точки A, неминуемо должны принадлежать нашей фигуре. Расстояние от точки A до точки A_n равно nT; так как числом трансляций мы не ограничены, то n можно сделать сколь угодно большим. Отсюда видно, что фигура, обладающая точкой A и переносом T, должна обладать точками, отстоящими от A на бесконечно большое расстояние.



Фиг. 149.

Фигуры конечных размеров не могут обладать такими точками.

Следствие. *Трансляции могут встречаться только на фигурах бесконечных.*

Примером фигур, обладающих трансляциями, являются ряды, плоские сетки и пространственные решетки (параллелепипедальные системы точек) кристаллического вещества.

Действительно, перемещая поступательно кристаллическую решетку в направлении какого-либо ряда на величину расстояния между соответственными узлами, мы совместим всю решетку со своим исходным положением в пространстве, лишь одни точки займут места других соответственных точек.

Таким образом

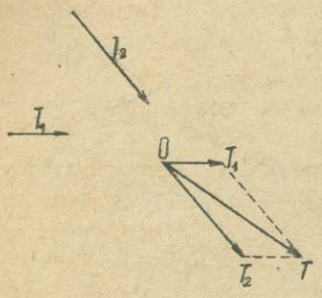
любой отрезок прямой, соединяющей два узла пространственной решетки (параллелепипедальной системы точек), может рассматриваться как трансляция.

Теорема 17. *Равнодействующим симметрическим преобразованием двух поступаний является третье поступание, величина и направление которого определяются как диагональ параллелограма, сторонами которого являются данные поступания.*

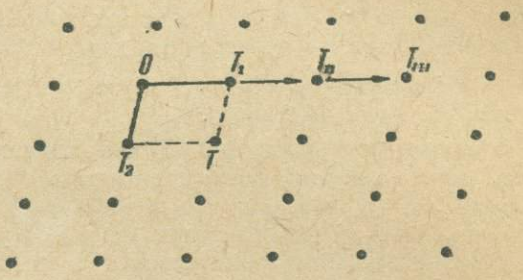
Пусть даны два поступания, направления и величины которых характеризуются векторами T_1 и T_2 (фиг. 150). Последовательное применение обоих будет смещать любую точку O фигуры сначала на величину OT_1, равную и параллельную T_1, затем на величину T_1T, равную и параллельную T_2, так что точка O займет место точки T. В точку T можно притти из точки O и непосредственно следуя по направлению диагонали параллелограма OT_1TT_2. Таким образом поступание OT является равнодействующим двух данных.

Следствие 1. *Если фигура обладает двумя трансляциями T_1 и T_2, то она обладает и равнодействующей трансляцией T, отвечающей диагонали параллелограма, сторонами которого являются данные трансляции T_1 и T_2.*

Пример. Плоская сетка (фиг. 151) имеет трансляции, параллельные рядам OT_1 и OT_2. Равнодействующей трансляцией является трансляция, направление



Фиг. 150.

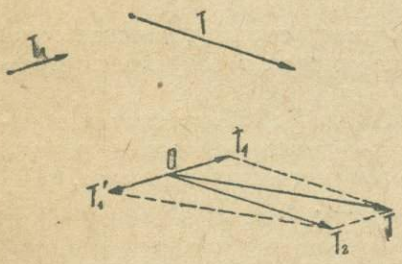


Фиг. 151.

которой совпадает с одним из рядов сетки (OT), а величина равна промежутку ряда OT.

Следствие 2. *Если фигура обладает трансляциями T и T_1, то она обладает и трансляцией T_2, направление и величина которой определяются как сторона треугольника, двумя другими сторонами которого являются данные трансляции T и T_1.*

Пусть нам даны трансляции T и T_1 (фиг. 152). Заменим их равными и параллельными векторами OT и OT_1, проходящими через одну и ту же точку O данной фигуры. Существование трансляции OT_1 влечет за собою существование и обратной трансляции OT_1'. Складывая трансляцию OT_1' с трансляцией OT, получим, согласно предыдущему следствию, трансляцию OT_2, которая, как видно из чертежа, равна и параллельна отрезку T_1T. Отрезок же T_1T и является стороной треугольника OTT_1, две другие стороны которого OT и OT_1 равны и параллельны данным трансляциям T и T_1.



Фиг. 152.

Следствие 3. *Если направления трансляций совпадают, то равнодействующая трансляция равна алгебраической сумме данных.*

OT_{II} (фиг. 151) является трансляцией в данной плоской сетке, так же, как и OT_I. Очевидно, что равнодействующей трансляцией здесь будет

$$OT_{III} = OT_I + OT_{II}.$$

Замечание. Если фигура совмещается сама с собою при поступании T, то очевидно, что она совместится и при поступании $2T$, $3T$... и, вообще, nT (где n — любое целое число).

Таким образом существование трансляции T ведет за собою существование трансляций $2T$, $3T$... nT, различных по своей величине (их совокупность образует „линейную группу“ трансляций).

Определение 14. *Наименьшая трансляция среди трансляций данного направления называется элементарной трансляцией.* *

Легко доказать, что если среди трансляций данного направления нет бесконечно малых трансляций, то элементарная трансляция должна существовать. В пространственных решетках элементарными трансляциями являются промежутки рядов (периоды идентичности) решетки.

Наименьшую трансляцию называем „элементарной", по аналогии с элементарным (наименьшим) углом поворота у осей симметрии.

Теорема 18. *Все трансляции данного направления суть кратные элементарной трансляции.*

Если обозначим элементарную трансляцию через T, то всякая другая трансляция в этом направлении равна nT, где n — целое число.

Для доказательства предположим противное. Пусть существует некоторая трансляция nT, для которой n не целое число, а некоторая дробь или число иррациональное [$n < 1$ быть не может, так как тогда трансляция $nT < T$, т. е. T не есть наименьшая (элементарная) трансляция]. Пусть n больше некоторого числа m, но меньше целого числа $m+1$:

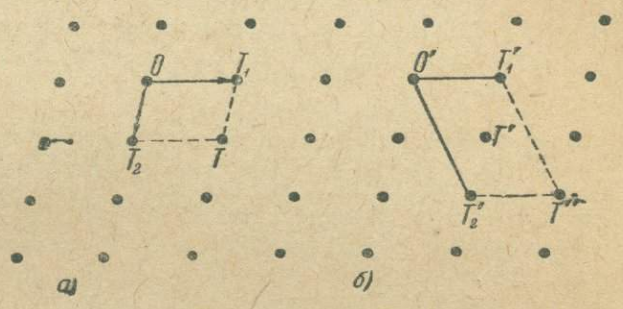
$$m < n < m+1.$$

Умножая все части написанного неравенства на T, получим:

$$mT < nT < mT + T.$$

Вычтем из всех частей этого неравенства величину mT:

$$0 < nT - mT < T.$$



Фиг. 153. Сопряженная (*а*) и несопряженная (*б*) трансляция.

nT — по условию, некоторая трансляция. mT — как величина кратная элементарной трансляции, также является трансляцией. Следовательно, и отличная от нуля разность двух трансляций ($nT - mT$) также является трансляцией, при которой происходит совмещение данной фигуры. Но эта разность, согласно написанному неравенству, меньше элементарной трансляции T. Таким образом мы пришли к выводу, что существуют трансляции меньшие наименьшей (элементарной) трансляции. Следовательно, нельзя было предполагать, что n число не целое. Теорема доказана.

Пример. В пространственной решетке элементарными трансляциями являются промежутки между ближайшими соответственными узлами любых рядов решетки. Имея две элементарные трансляции, многократным приложением их к некоторой точке легко построить плоскую сетку. Например, трансляциями OT_1 и OT_2 нетрудно из точки O вывести все другие точки плоской сетки, изображенной на фиг. 153.

Определение 15. *Две элементарные трансляции, исчерпывающие своим повторением данную сетку, называются по отношению к ней сопряженными трансляциями.*

Очевидно, что OT_1 и OT_2 — две сопряженные трансляции. Две элементарные трансляции OT_1' и OT_2' — не являются сопряженными, так как никакими повторениями этих переносов точку O' нельзя совместить с точкой T' (фиг. 153).

---

* По Федорову — „элементарным поступанием", по Болдыреву и Шибольду — „примитивной трансляцией", по Богомолову — „первообразным переносом".

Определение 16. *Три элементарные трансляции, исчерпывающие своим повторением данную решетку, называются по отношению к ней сопряженными трансляциями.*

Очевидно, что три трансляции, равные и параллельные ребрам примитивного параллелепипеда решетки, являются одним из примеров трех сопряженных трансляций.

Определение 17. *Данное направление называется сопряженным с данной плоской сеткой, если элементарная трансляция этого направления вместе с двумя сопряженными трансляциями сетки образует тройку сопряженных трансляций.*

Очевидно, что при построении параллелепипеда при помощи трех сопряженных трансляций узлы пространственной решетки расположатся только в его вершинах. Ни в середине, ни на сторонах, ни на ребрах, вне вершин, никаких узлов быть не может.

Отсюда следует такая теорема:

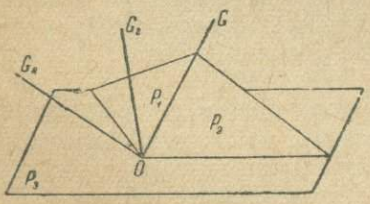
Теорема 19. *Параллелепипед повторяемости, построенный при помощи трех сопряженных трансляций, является параллелепипедом идентичности.*

В плоской сетке, в которой лежат два любых параллельных ребра параллелепипеда идентичности, ряды, образующие данные ребра, являются соседними рядами плоской сетки. Так, OT_1 и T_2T — два соседних ряда, образующих ребра параллелепипеда идентичности. $O'T_1'$ и $T_2'T''$ — два несоседних ряда, а потому параллелепипед с ребрами $O'T_1'$ и $T_2'T''$ не есть параллелепипед идентичности (фиг. 153).

8. Отражение в трех пересекающихся плоскостях

Теорема 20. *Последовательное отражение в трех плоскостях, пересекающихся в одной точке, можно заменить, без изменения результатов, поворотом вокруг некоторой оси, с последующей инверсией около точки, лежащей на этой оси.*

Пусть даны три плоскости отражения P_1, P_2 и P_3 (фиг. 154). O — точка их пересечения. Требуется найти преобразование R, заменяющее последовательное отражение в этих плоскостях:



Фиг. 154.

$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } P_1 \cdot \text{Отр. } P_2 \cdot \text{Отр. } P_3.$$

Согласно теореме 7, последовательное отражение в плоскостях P_1 и P_2 заменяем поворотом вокруг линии их пересечения $[P_1|P_2] = OG$.

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } OG \cdot \text{Отр. } P_3.$$

Согласно следствию 4 теоремы 12, поворот на 180° вокруг оси с последующей инверсией в точке, лежащей на этой оси, можно заменить отражением в плоскости, нормальной к данной оси и проходящей через центр инверсии. Обратно, отражение в плоскости очевидно можно заменить поворотом на 180° вокруг оси, нормальной к плоскости отражения, с последующей инверсией в точке пересечения оси с плоскостью отражения (ибо эти преобразования приводят к тому же результату, как и отражение в данной плоскости).

Через точку O проведем ось $OG_2 \perp P_3$ и заменим указанными выше преобразованиями отражение в плоскости P_3:

$$\text{Отр. } P_3 = \text{Пов.}_{180^\circ}(OG_2) \cdot \text{Инв. } O.$$

Отсюда:

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } OG \cdot \text{Пов}_{180^\circ}(OG_2) \cdot \text{Инв. } O.$$

Таким образом отражение в трех плоскостях мы свели к двум последовательным поворотам с последующей инверсией в точке пересечения обеих осей поворота.

Последовательные повороты вокруг пересекающихся в точке O осей OG и OG_2, согласно теореме Эйлера, заменяем равнодействующим поворотом вокруг оси G_R, проходящей через ту же точку O. В результате получим:

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } G_R \cdot \text{Инв. } O.$$

Таким образом мы пришли к выводу, что отражения в трех плоскостях, пересекающихся в точке O, можно заменить поворотом вокруг оси G_R, проходящей через ту же точку O с последующей инверсией в точке O. Теорема доказана.

Замечание. Указанное в теореме преобразование: поворот, связанный с инверсией, называется *инверсионно-поворотным* преобразованием.

Последовательное отражение в трех плоскостях, согласно теореме 6, может являться симметрическим преобразованием. Вместо этого сложного и не наглядного преобразования, прибегают к инверсионно-поворотному.

Определение 18. *Линия, при вращении вокруг которой на некоторый угол, с последующей (или первоначальной) инверсией в точке, лежащей на этой линии, фигура совмещается со своим исходным положением в пространстве, называется инверсионно-поворотной осью симметрии или „гироидой“.* *

Теоремы и определения относительно элементарного угла поворота и наименования гироид вполне аналогичны соответственным теоремам и определениям для гир. Их легко формулировать, вводя соответственные изменения в тексты определений 10, 11 и теорем 9, 10. Здесь мы их приводить не будем.

Подобно тому, как это мы делали при изучении гир, рассмотрим последовательно и гироиды всех различных наименований.

$n = 1$; $\alpha = 360^\circ$. — Моногироида — G_{1i}. — Совмещение получается при вращении на 360° с последующей инверсией. Вращения на 360° можно вовсе не производить. От этого ничего не изменится — остается инверсия около некоторой точки. Таким образом, это симметрическое преобразование является знакомой уже нам инверсией, а элементом симметрии, служащим для него, является центр инверсии (см. теорему 2). Таким образом, моногироида равнозначна центру инверсии (C).

Остановимся на вопросе о практическом определении центра инверсии на фигурах.

Если у фигуры есть центр инверсии, то соответственные точки располагаются парами на одинаковых расстояниях по обе стороны от него. Если в качестве объекта исследования мы имеем многогранник, то каждая грань этого многогранника должна иметь параллельную и равную по очертанию грань по другую сторону многогранника. Этим признаком удобнее всего пользоваться при определениях. Многогранник кладут на какую-либо грань на стол и следят за тем, будет ли параллельна верхняя грань многогранника поверхности стола. Если она оказывается параллельной, то смотрят — равна ли эта верхняя грань

---

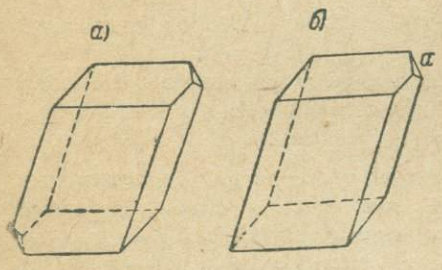
* В всех старых руководствах вместо изучения инверсионно-поворотных осей (гироид) изучаются так называемые зеркально-поворотные оси (оси сложной симметрии), представляющие собой поворотное преобразование, связанное не с инверсией, но с отражением в перпендикулярной плоскости. Педагогический опыт показал, что практическое определение зеркально-поворотных осей нисколько не проще определения инверсионных. Так как последние гораздо удобнее для целей классификации, то только они нами и изучаются.

нижней грани, на которой многогранник лежит. Если и это имеет место, кладут многогранник на другую грань и производят такое же испытание. Далее подвергают испытанию третью пару граней и т. д. Если окажется, что решительно каждая грань имеет параллельную и равную себе, значит центр инверсии имеется (фиг. 155*а*). Если будет обнаружено, что хотя бы одна грань многогранника не имеет параллельной или равной себе грани, то это служит уже достаточным признаком того, что центр инверсии отсутствует (фиг. 155*б*).

В некоторых руководствах по кристаллографии центр инверсии называется центром симметрии. Однако последний термин, при всей его подкупающей простоте и логичности, нами не употребляется ввиду того, что Е. С. Федоров центру симметрии приписывает другое понятие.

У конечной фигуры центр инверсии может быть только один, расположенный в центре тяжести этой фигуры.

$n = 2 \cdot \alpha = 180°$. — Дигироида — G_{2i}. Совмещение происходит при повороте на 180° с последующей инверсией в точке, лежащей на этой оси. В следствии 5 теоремы 12 указывалось, что равнодействующим элементом симметрии дигиры и центра инверсии, лежащего на этой дигире, является нормальная к этой дигире плоскость симметрии: $G_2 \cdot C = P$. Это значит, что поворот фигуры вокруг оси на 180°, с последующей инверсией в точке, лежащей на этой оси, приводит к тому же результату, как и отражение в плоскости, перпендикулярной к данной оси. Так как в дигироиде совмещены как раз поворот на 180° вокруг оси с последующей инверсией в точке, то очевидно, что отражение в плоскости, перпендикулярной к дигироиде и проходящей через ее центр инверсии, должно привести к такому же результату, как и применение дигироиды. Таким образом, дигироида равнозначна плоскости симметрии: $G_{2i} = P$. Поэтому дигироида никогда не рассматривается при исследовании симметрии фигур. Вместо этого изучаются плоскости симметрии.



Фиг. 155. *а* — многогранник имеет центр инверсии. Каждая грань имеет параллельную и равную грань по другую сторону фигуры. *б* — многогранник не имеет центра инверсии, так как грань *а* не имеет соответственной параллельной грани по другую сторону фигуры.

$n = 3$; $\alpha = 120°$. — Тригироида — G_{3i}. Поворот на 120° с последующей инверсией дает совмещение фигуры. Очевидно, что и при инверсии с последующим поворотом на 120° фигуры получим тот же результат:

$$\text{Пов. } 120° \cdot \text{Инв.} = \text{Инв. Пов. } 120°. \qquad (1)$$

Очевидно также, что после одного поворота с инверсией можно сделать еще второй поворот в ту же сторону с инверсией, третий поворот с инверсией и т. д., причем после каждого такого поворота с инверсией фигура будет совмещаться сама с собою.

Сделаем последовательно два таких „поворотно-инверсионных" преобразования:

$$\text{Инв.} \cdot \text{Пов. } 120° \cdot \text{Инв.} \cdot \text{Пов. } 120° = \text{Пов. } 120° \cdot \text{Инв. Инв. Пов. } 120° =$$
$$= \text{Пов. } 120° \cdot (\text{Инв. Инв.}) \cdot \text{Пов. } 120°. \qquad (2)$$

Нетрудно сообразить, что последовательное двукратное применение инверсии в одной и той же точке возвращает все точки фигуры в исходные места. Поэтому эти две инверсии взаимно уничтожаются. Остаются два поворота вокруг одной и той же оси, следующие один за другим:

$$\text{Пов. } 120° \cdot \text{Пов. } 120°.$$

Эти два поворота суммируются как один поворот на $120° + 120° = 240°$.

$$\text{Пов. } 120° \cdot \text{Пов. } 120° = \text{Пов. } 240°. \qquad (3)$$

Поворот же на угол α в какую-либо одну сторону (например, по часовой стрелке) всегда можно заменить поворотом на угол $(360° - \alpha)$ в противоположную сторону (против часовой стрелки).

$$\text{Пов. } 240° = \text{Пов.} - (360° - 240°) = \text{Пов.} - 120°. \tag{4}$$

Таким образом, сопоставляя (3) и (4) с (2), получим:

$$\text{Инв.} \cdot \text{Пов. } 120° \cdot \text{Инв.} \cdot \text{Пов. } 120° = \text{Пов.} - 120°$$

или:

$$G_{3i} \cdot G_{3i} = G^{-120°}.$$

Иначе говоря, последовательное применение двух „инверсионно-поворотных" преобразований при помощи G_{3i} приводит к тому же результату как и простой поворот вокруг G_{3i} на 120° в противоположную сторону. Таким образом, всякая тригироида обязательно является в то же самое время и тригирой

$$2G_{3i} = G_3.$$

Произведем „инверсионно-поворотное" преобразование с помощью G_{3i} три раза.

$$\text{Инв. Пов. } 120° \cdot \text{Инв. Пов. } 120° \cdot \text{Инв. Пов. } 120° =$$
$$= (\text{Пов. } 120° \cdot \text{Инв.})\ (\text{Инв. Пов. } 120°)\ (\text{Пов. } 120° \cdot \text{Инв.}) =$$
$$= \text{Пов. } 120° \cdot (\text{Инв. Инв.}) \cdot \text{Пов. } 120° \cdot \text{Пов. } 120° \cdot \text{Инв.} =$$
$$= 3\ \text{Пов. } 120° \cdot \text{Инв.} = \text{Пов. } 360° \cdot \text{Инв.} = \text{Инв.}$$

Из написанного следует, что трехкратное применение G_{3i} приводит к такому же результату, как и простая инверсия. Отсюда видно, что присутствие тригироиды обязательно влечет за собою присутствие центра инверсии:

$$3G_{3i} = C.$$

Для того, чтобы наглядно представить указанное соотношение, проследим каким образом будет перемещаться какая-либо точка A_1 фигуры, имеющей G_{3i} (фиг. 156). Плоскость чертежа проведем перпендикулярно к G_{3i}, через центр инверсии тригироиды. Точку A_1 возьмем на расстоянии h над плоскостью чертежа (условимся все точки, лежащие над плоскостью чертежа, помечать кружками, точки, лежащие под плоскостью чертежа, — крестиками). Вращение будем производить против часовой стрелки.

Поворот на 120° совместит точку A_1 с точкой A_5, последующая инверсия приведет ее в точку A_2, расположенную на расстоянии h под плоскостью чертежа. Это будет результатом одного инверсионно-поворотного преобразования. Второе преобразование приведет нашу точку через A_2 к точке A_3. Очевидно, что последовательное применение двух таких преобразований равнозначно простому повороту точки A_1 на 120° по часовой стрелке.

Трехкратное инверсионно-поворотное преобразование приведет точку A_1 в совмещение с точкой A_4. Очевидно, что точку A_4 можно получить из точки A_1 гораздо проще: с помощью только одной инверсии. Всего с помощью G_{3i} выводятся шесть точек: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, расположенных, как это видно из чертежа, таким образом, что они совмещаются друг с другом не только при инверсионно-поворотном преобразовании, но и при простой инверсии (без последующего поворота) или при простом повороте (без последующей инверсии).

Таким образом:

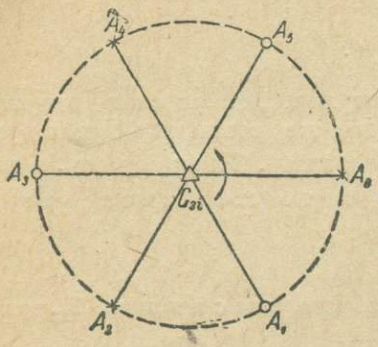
тригироида может рассматриваться, как совокупность тригиры и центра инверсии, лежащего на ней.

$$G_{3i} = G_3 \cdot C.$$

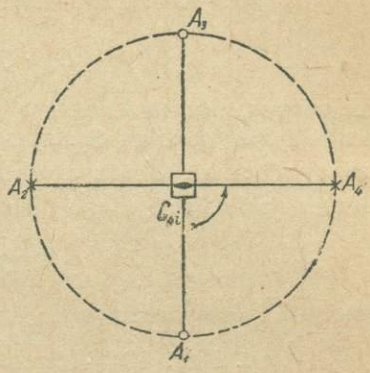
Являясь комбинацией самостоятельной тригиры с самостоятельным центром инверсии, тригироида не изучается при определении симметрии фигур.

$n = 4$; $\alpha = 90°$. — Тетрагироида — G_{4i}. Поворот на 90°, с последующей инверсией, приводит к совмещению фигуры:

Инв. — Пов. 90° = Пов. 90° · Инв. = Инв. Пов. 90°.



Фиг. 156.



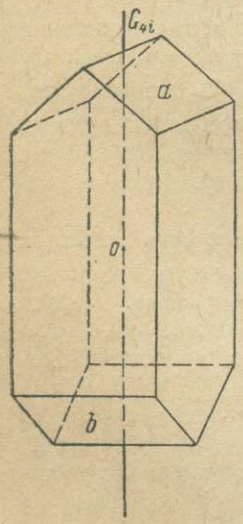
Фиг. 157.

Сделаем подряд два инверсионно-поворотных преобразования. Очевидно, что при этом фигура должна также совместиться сама с собою:

Инв. — Пов. 90° · Инв. — Пов. 90° = Пов. 90° · Инв. Инв. Пов. 90°.

Две последовательные инверсии в одной и той же точке взаимно уничтожаются. Остаются два поворота, которые суммируются в один:

Инв. — Пов. 90° · Инв. — Пов. 90° = Пов. 90° · Пов. 90° =
= Пов. 180°.



Фиг. 158.

Или, иначе, двукратное применение тетрагироиды приводит к такому же результату, как и простой поворот на 180° без инверсии, т. е. приводит к результату применения простой дигиры:

$$2G_{4i} = G_2.$$

Таким образом:

всякая тетрагироида обязательно является в то же самое время дигирой.

Следует подчеркнуть, что обратное *неверно.* Далеко не всякая дигира является тетрагироидой.

Для пояснения сущности инверсионно-поворотного преобразования с помощью тетрагироиды, рассмотрим каким образом происходят совмещения точек в фигуре, обладающей G_{4i}. Пусть плоскость чертежа перпендикулярна G_{4i} и проходит через центр инверсии тетрагироиды. Точки будем обозначать так же, как и на фиг. 157. При вращении на 90° против часовой стрелки точка A_1 расположится над точкой A_4, после же инверсии займет место точки A_2.

Далее, после второго инверсионно-поворотного преобразования, наша точка совместится с A_3. Очевидно, что точку A_3 можно получить из точки A_1 простым поворотом на 180° вокруг той же оси.

Следующее инверсионно-поворотное преобразование дает точку A_4.

Вся совокупность точек A_1, A_2, A_3 и A_4 показывает, что просто при повороте на 90° или просто при инверсии совмещения фигуры не происходит. Лишь только совместное применение поворота на 90° и инверсии приводит к совмещению.

Фигуры, обладающие G_{4i}, не имеют G_4 и не имеют C.

В качестве примера фигуры, обладающей G_{4i}, рассмотрим многогранник, изображенный на фиг. 158.

Простой поворот на 90° не дает совмещения фигуры с ее исходным положением в пространстве. Простая инверсия также не приводит к совмещению. Поворот же с последующей иверсией в точке O совмещает многогранник с его исходным положением в пространстве. Для того, чтобы в этом убедиться, удобнее всего проследить перемещения какой-либо одной грани многогранника, например, a. При вращении против часовой стрелки на 90° эта грань займет положение в верхней части многогранника сзади, причем окажется параллельной грани b.

Так как грани a и b равны и одинаково удалены от центра O, то после инверсии в точке O повернутая грань a займет место грани b.

Аналогично будут себя вести и все другие грани, ребра и вершины многогранника: при повороте на 90° с последующей инверсией они будут совмещаться с соответственными равными им гранями, ребрами и вершинами, так что весь многогранник займет в пространстве свое первоначальное место.

Тетрагироида является наиболее трудно разыскиваемым элементом симметрии и безошибочно определяется только после приобретения навыка рядом практических упражнений.

Некоторое облегчение при разыскании G_{4i} создают указанные выше соотношения: так как $2G_{4i} = G_2$, то G_{4i} самостоятельно никогда не разыскивается. Только, если найдена G_2 и у фигуры не оказалось ни G_4, ни C, задают себе вопрос — не является ли найденная G_2 еще одновременно и G_{4i}. Для этого мысленно поворачивают какую-либо часть фигуры (грань, ребро или вершину) вокруг G_2 на 90° и следят за тем — расположится ли при этом повернутая часть симметрично относительно центра фигуры с какой-либо из повернутых частей. Если любая часть фигуры при таком испытании будет располагаться симметрично относительно центра с некоторой другой неповернутой частью, то наличие G_{4i} этим доказывается.

$n = 5$; $\alpha = 72°$. — Пентагироида.

Теорема 21. *Кристаллические решетки, а следовательно и кристаллы не могут обладать пентагироидой.*

Доказательство тождественно с доказательством относительно пентагиры.

$n = 6$; $\alpha = 60°$. — Гексагироида — G_{6i}. Совмещение получается при повороте на 60° с последующей инверсией.

Очевидно, что двукратное применение такого инверсионно-поворотного преобразования также приводит к совмещению фигуры.

$$\text{Инв.} — \text{Пов. } 60° \cdot \text{Инв.} — \text{Пов. } 60° = (\text{Пов. } 60° \cdot \text{Инв.})\ (\text{Инв. Пов. } 60°) =$$
$$= \text{Пов. } 60° \cdot (\text{Инв. Инв.}) \cdot \text{Пов. } 60° = \text{Пов. } 60° \cdot \text{Пов. } 60° = \text{Пов. } 120°.$$

Таким образом двойное применение гексагироиды приводит к тому же результату, как и применение тригиры: совмещение получается при простом повороте на 120°. Отсюда следует, что всякая гексагироида является в то же самое время тригирой.

$$2G_{6i} = G_3.$$

Подвергнем фигуру трехкратному инверсионно-поворотному преобразованию при помощи G_{6i}:

$$\text{Инв.} — \text{Пов. } 60° \cdot \text{Инв.} — \text{Пов. } 60° \cdot \text{Инв.} — \text{Пов. } 60° =$$
$$= (\text{Пов. } 60° \cdot \text{Инв.}) \cdot (\text{Инв. Пов. } 60°) \cdot (\text{Пов. } 60° \cdot \text{Инв.}) =$$
$$= \text{Пов. } 60° \cdot (\text{Инв. Инв.}) \cdot \text{Пов. } 60° \cdot \text{Пов. } 60° \cdot \text{Инв.} = 3 \cdot \text{пов. } 60° \cdot \text{Инв.} =$$
$$= \text{Пов. } 180° \cdot \text{Инв.}$$

Из написанного видно, что трехкратное применение приводит к тому же результату, как и поворот на 180° с последующей инверсией, т. е. приводит к тому же результату, как и применение дигироиды. Дигироида же, как было выяснено выше, равнозначна плоскости симметрии, к ней перпендикулярной:

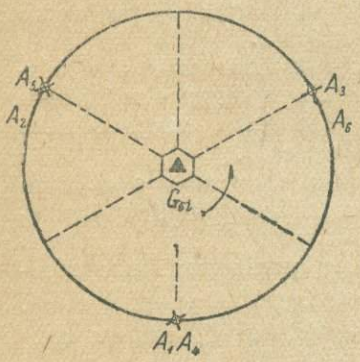
$$\text{Пов. } 180° \cdot \text{Инв.} = \text{Отр.} \perp P.$$

Таким образом:

$$\text{Инв.} — \text{Пов. } 60° \cdot \text{Инв.} — \text{Пов. } 60° \cdot \text{Инв.} — \text{Пов. } 60° = \text{Отр.} \perp P.$$

Отсюда следует, что трехкратное применение G_{6i} приводит к тому же результату, как и отражение в плоскости, перпендикулярной к G_{6i}, т. е. приводит к тому же результату, как и применение плоскости симметрии. Отсюда видно, что существование гексагироиды неминуемо влечет за собою присутствие плоскости симметрии, перпендикулярной к гексагироиде:

$$3G_{6i} = \perp P.$$



Фиг. 159.

Для более наглядного представления о G_{6i} рассмотрим — каким образом будут перемещаться точки фигуры при инверсионно-поворотном преобразовании (фиг. 159).

Плоскость чертежа проведем аналогично тому, как это сделано на фиг. 156 и фиг. 157. Так же будем помечать и точки. Поворот против часовой стрелки точки A_1, лежащей над плоскостью чертежа, на 60°, с последующей инверсией, совместит эту точку с точкой A_2, лежащей под плоскостью чертежа (точка A_2 помечена крестиком). Следующий поворот (в ту же сторону) на 60° с последующей инверсией приведет нашу точку к точке A_3, расположенной снова над плоскостью чертежа (точка A_3 помечена кружком). Точку A_3 можно получить и проще: поворотом точки A_1 на 120° (в том же направлении).

Следующий поворот и инверсия приведут к точке A_4, расположенной, как это видно из чертежа, как раз под точкой A_1. Очевидно, что точку A_4 можно получить из точки A_1 простым отражением ее в плоскости, совпадающей с плоскостью чертежа. Дальнейшие преобразования дадут точки A_5 и A_6. Совокупность всех выведенных точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6, как это видно из чертежа, совмещается друг с другом не только при применении G_{6i}, но и при простом повороте на 120° вокруг той же оси и при простом отражении в плоскости, перпендикулярной к этой оси. Таким образом существование G_{6i} влечет за собою обязательное существование G_3 и плоскости симметрии, к ней перпендикулярной.

Нетрудно убедиться и в обратном: если имеется G_3 и перпендикулярная к ней плоскость симметрии, то эта G_3 является в то же самое время и G_{6i}.*

Гексагироида может рассматриваться как совокупность тригиры и плоскости симметрии, к ней перпендикулярной:

$$G_{6i} = G_3 \cdot \perp P.$$

---

* Действительно: $\text{Пов. } 120° \cdot \text{Отр.} \perp P = \text{Пов. } 120° \cdot (\text{Пов. } 180° \cdot \text{Инв.}) =$
$= (\text{Пов. } 120° \cdot \text{Пов. } 180°) \cdot \text{Инв.} = \text{Пов. } 300° \cdot \text{Инв.} = \text{Пов.} — (360° — 300°) \cdot \text{Инв.} =$
$= \text{Пов. } (-60°) \cdot \text{Инв.} = \text{Инв.} \cdot \text{Пов. } (-60°).$

Благодаря этому, самостоятельно гексагироида никогда не разыскивается. Если обнаружена на данной фигуре G_3, то всегда следует исследовать, не проходит ли перпендикулярно найденной G_3 плоскость симметрии. Если такая плоскость имеется, то этим самым доказывается существование G_{6i}, совпадающей с G_3. Ввиду того, что наименование гексагироиды выше наименования G_3, гексагироиду всегда приходится учитывать для целей классификации изучаемой фигуры. Поэтому, несмотря на ее несамостоятельность, ее нельзя игнорировать при исследованиях симметрии фигур, как это делается с осью G_{3i}.

$$n = 7,\ 8,\ 9\ldots\ \alpha = 51\frac{3}{7}^{\circ},\ 45^{\circ},\ 40^{\circ}\ldots$$

Теорема 22. *Кристаллические решетки, а следовательно и кристаллы не могут обладать гироидами наименования n выше шести (7, 8, 9 и т. д. до ∞).*

Доказательство подобно доказательству теоремы 11. Поэтому эти оси не изучаются.

Ниже сопоставлены в одну таблицу все рассмотренные выше гироиды.

$G_{1i} = C$; *моногироида. Равнозначна центру инверсии.*

$G_{2i} = P$; *дигироида. Равнозначна плоскости симметрии.*

$G_{3i} = G_3, C$; *тригироида. Не изучается, как представляющая комбинацию тригиры с центром инверсии.*

G_{4i}; *тетрагироида. Всегда является в то же самое время G_2. Не встречается в случае присутствия G_4 или C.*

$G_{6i} = G_3 \perp P$; *гексагироида. Представляет комбинацию G_3 и перпендикулярной к ней плоскости симметрии.*

Из приведенной сводки видно, что только G_{4i} является гироидой, требующей непосредственного определения. Изучение всех остальных гироид заменяется изучением более простых элементов симметрии.

Инверсионно-поворотные преобразования складываются совершенно так же, как и поворотные, причем:

равнодействующим инверсионно-поворотного и поворотного преобразования является инверсионно-поворотное; равнодействующим двух инверсионно-поворотных является поворотное.

Для двух поворотных преобразований нами была рассмотрена теорема Эйлера, позволяющая находить равнодействующее поворотное преобразование. Здесь мы имеем аналогичные теоремы.

Теорема 23. *Равнодействующим симметрическим преобразованием поворота вокруг некоторой оси с последовательным инверсионно-поворотным преобразованием вокруг другой оси, пересекающей первую в центре своей инверсии, является инверсионно-поворотное преобразование вокруг некоторой третьей оси. Ее положение, угол поворота и центр определяются как указано в доказательстве.*

Воспользуемся чертежом и обозначениями, приводимыми при доказательстве теоремы Эйлера (стр. 121, фиг. 147). Предположим, однако, что G_m представляет собой ось не поворотного, но инверсионно-поворотного преобразования. Находим равнодействующее преобразование R, опираясь на теорему Эйлера:

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } G_n \cdot \text{Инв.} \cdot \text{Пов. } G_m = \text{Пов. } G_n \cdot (\text{Пов. } G_m \cdot \text{Инв.}) =$$
$$= (\text{Пов. } G_n \cdot \text{Пов. } G_m \cdot \text{Инв.}).$$

Повороты G_n и G_m складываем по теореме Эйлера:

Отсюда:
$$\text{Пов. } G_n \cdot \text{Пов. } G_m = \text{Пов. } G_p.$$
$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } G_p \cdot \text{Инв.} = \text{Инв: Пов.} \cdot G_p.$$

Расположение и угол поворота G_p, как видно, находится совершенно так же, как и в случае сложения двух поворотных преобразований (см. теорему Эйлера).

Следствие. Если каждая из осей данных преобразований представляет собой некоторую ось симметрии (поворотную и инверсионную), то приходим к следующему выводу:

Если через центр гироиды проходит гира, то этот центр является центром и равнодействующей гироиды. Ее положение и наименование определяются как положение и наименование равнодействующей гиры по теореме Эйлера.

Теорема 24. *Равнодействующим симметрическим преобразованием последовательных инверсионно-поворотных преобразований вокруг двух осей, пересекающихся в их центрах инверсий, является поворотное преобразование вокруг некоторой третьей оси. Ее положение и угол поворота определяются совершенно так же, как в теореме Эйлера.*

Ход доказательства аналогичен доказательству предыдущей теоремы. Чертеж и обозначения те же, как и в теореме Эйлера (фиг. 147, стр. 121). Однако как G_m, так и G_n будут служить осями инверсионных преобразований.

Проще всего находим равнодействующее преобразование следующим образом:

$$\text{Преобр. } R = \text{Инв.} - \text{Пов. } G_n \cdot \text{Инв.} - \text{Пов. } G_m = (\text{Инв.} \cdot \text{Пов. } G_n) \cdot (\text{Инв. Пов. } G_m) = \\ = \text{Инв. } (\text{Пов} \cdot G_n \cdot \text{Инв. Пов. } G_m).$$

Два последние преобразования складываем, согласно предыдущей теореме:

$$\text{Пов} \cdot G_n \cdot \text{Инв.} \cdot \text{Пов. } G_m = \text{Инв.} - \text{Пов. } G_p.$$

Отсюда:

$$\text{Преобр. } R = \text{Инв.} \cdot \text{Инв.} - \text{Пов. } G_p = \text{Инв.} \cdot (\text{Инв.} \cdot \text{Пов. } G_p) = \\ = (\text{Инв.} + \text{Инв.}) \cdot \text{Пов. } G_p = \text{Пов. } G_p.$$

Следствие. *Через общий центр двух гироид всегда проходит равнодействующая гира. Ее положение и наименование определяются совершенно так же, как в теореме Эйлера.*

Замечания. Таким образом, теорема Эйлера оказывается справедливой независимо от того, имеем ли мы дело с гирой или с гироидами. *

С частными случаями теорем 23 и 24 мы уже встречались в выводе равнодействующих преобразований при сложении центра инверсии с плоскостью симметрии и с дигирой. Следствия 1, 2, 3, 4 и 5 вместе с теоремой 12 могут рассматриваться и как следствия теорем 23 и 24. Действительно, центр инверсии является моногироидой, а нормаль к плоскости симметрии — дигироидой. Складывая эти элементы симметрии по правилам теорем 23 и 24 придем к вышеуказанным следствиям. Предоставляем это сделать желающим.

9. Отражение в трех плоскостях, не пересекающихся в одной точке

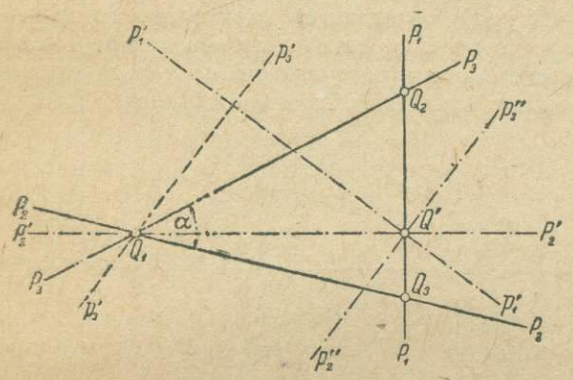
Теорема 25. *Отражение в трех плоскостях, не пересекающихся в одной точке, можно заменить, без изменения результатов, отражением в некоторой плоскости с последующим поступанием, параллельным этой плоскости.*

Рассмотрим самый общий случай, когда все три наши плоскости отражения P_1, P_2 и P_3 не параллельны между собою. В этом случае, так как плоскости

* В этом большое преимущество инверсионных осей по сравнению с зеркально-поворотными, для которых хотя и можно указать теоремы, отвечающие теореме Эйлера, но как их доказательства, так и производимые там построения для нахождения равнодействующей, сложнее и делаются по-другому, чем в теореме Эйлера.

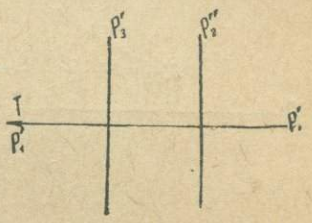
не пересекаются в одной точке, три линии их пересечений должны быть параллельны друг другу. Пусть плоскость чертежа перпендикулярна всем трем нашим плоскостям (фиг. 160). Тогда эти плоскости P_1, P_2 и P_3 изобразятся прямыми линиями, линии же их пересечений — точками Q_1, Q_2 и Q_3. Согласно следствию из теорем 7 и 8, две плоскости последовательного отражения можно, без изменения результатов, повернуть вокруг линии их пересечения на произвольный угол (оставляя неизменным угол между плоскостями). Повернем плоскости отражения P_2 и P_3 вокруг линии их пересечения Q_1, оставляя неизменным угол между ними α, таким образом, чтобы P_2, после поворота заняла бы положение $P'_2 \perp P_1$.

$$\text{Отр. } P_1 \cdot \text{Отр. } P_2 \cdot \text{Отр. } P_3 = \text{Отр} \cdot P_1 \cdot \text{Отр. } P_2' \cdot \text{Отр. } P_3'.$$



Фиг. 160.

Теперь плоскости последовательных отражений P_2' и P_1 повернем вокруг линии их пересечения Q_3, оставляя эти плоскости взаимно перпендикулярными,



Фиг. 161.

так, чтобы плоскость P_1 после поворота заняла положение $P_1' \perp P_3'$.

$$\text{Отр. } P_1 \cdot \text{Отр. } P_2 \cdot \text{Отр. } P_3 = \text{Отр. } P_1 \cdot \text{Отр. } P_2' \cdot \text{Отр. } P_3' =$$
$$= \text{Отр. } P_1' \cdot \text{Отр. } P_2'' \cdot \text{Отр. } P_3'.$$

Полученный результат говорит о том, что плоскости данных отражений можно заменить тремя другими плоскостями, из которых две параллельны, а третья им перпендикулярна (см. фиг. 161).

Согласно теореме 14, отражения в двух параллельных плоскостях можно заменить поступанием в направлении, перпендикулярном плоскостям, на величину, равную удвоенному расстоянию между плоскостями.

Вместо двух отражений в плоскостях P_2'' и P_3' можно произвести поступание, характеризуемое вектором $T = 2\ Q_3'Q_1'$:

$$\text{Отр. } P_1 \cdot \text{Отр. } P_2 \cdot \text{Отр. } P_3 = \text{Отр. } P_1' \cdot \text{Поступ. } T.$$

Таким образом отражение в трех плоскостях, не пересекающихся в одной точке, сводится к отражению в некоторой плоскости с последующим поступанием вдоль этой плоскости. *

Теорема доказана.

Замечание. Указанное в теореме преобразование — отражение, связанное с поступанием вдоль плоскости отражения, называется скользящим отражением.

Согласно теореме 6, три последовательных отражения могут являться симметрическим преобразованием, совмещающим фигуру со своим исходным положением в пространстве. Это не наглядное преобразование заменяется, как указано в теореме 25, скользящим отражением.

---

* В частном случае (когда все три данных плоскости параллельны друг другу) это поступание равно нулю.

Определение 19. *Плоскость, отражением в которой с последующим поступанием вдоль этой плоскости фигура совмещается со своим исходным положением в пространстве, называется плоскостью скольжения (транспланой или планоидом).*

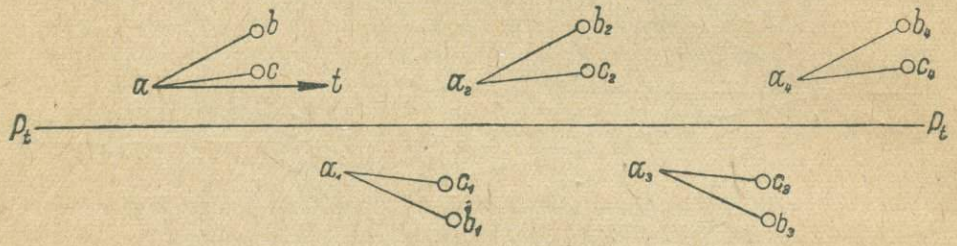
Плоскость скольжения, таким образом, также является элементом симметрии. Условное обозначение трансплоскости — P_t.

Очевидно, что безразлично — сначала ли произвести отражение, а затем применить поступание, или, наоборот, сначала фигуре придать поступание, а затем уже произвести отражение:

$$\text{Скольз. отр. } P_t = \text{Отр. } P. \text{ Поступ. } t = \text{Поступ. } t \cdot \text{Отр. } P.$$

Фиг. 162 представляет пример фигуры, обладающей плоскостью скольжения.

Наименьшее поступание at, при котором происходит совмещение отраженной в плоскости P фигуры, назовем элементарным поступанием плоскости скольжения (величина скольжения, компонента скольжения), соответственный перенос —



Фиг. 162. Плоскость скольжения P_t совмещает точки abc с точками $a_1\ b_1\ c_1$; точки $a_2\ b_2\ c_2$ точками $a_3\ b_3\ c_3$; $a_3\ b_3\ c_3$ при поступании at с последующим отражением в плоскости P_t (площадь чертежа перпендикулярна к плоскости скольжения).

элементарным переносом этой плоскости. Направление этого переноса называется направлением скольжения.

По направлению скольжения различают „парапланоиды" (обозначается P_p), направление скольжения — вертикально; „ортопланоиды" (обозначается P_o), направление скольжения — горизонтально; „клинопланоиды" (обозначается P_k), направление скольжения — наклонно. Очевидно, что все эти определения чисто условны и зависят от относительной ориентировки данной плоскости скольжения. Повернув фигуры, мы тем самым можем превратить парапланоид в ортопланоид или в клинопланоид и наоборот.

Если фигура обладает плоскостью скольжения, то, очевидно, что двукратное применение этого элемента симметрии также должно совмещать фигуру с ее исходным положением:

$$\text{Скольз. отр. } P_t \cdot \text{Скольз. отр. } P_t = (\text{Поступ. } t \cdot \text{Отр. } P) \cdot (\text{Отр. } P \cdot \text{Поступ. } t) =$$
$$= \text{Поступ. } t \cdot (\text{Отр. } P \cdot \text{Отр. } P) \cdot \text{Поступ. } t = \text{Поступ. } t \cdot \text{Поступ. } t = \text{Поступ. } 2t.$$

Как видим, двукратное применение плоскости скольжения приводит к такому же результату, как и поступание с элементарной трансляцией, вдвое большей, чем у плоскости скольжения.

Отсюда вытекает **следствие:**

параллельно направлению скольжения всякой плоскости скольжения всегда имеются трансляции.

Теорема 26. *Фигуры конечных размеров не могут обладать плоскостями скольжения.*

Действительно, всякая плоскость скольжения неминуемо сопровождается трансляциями (см. выше). Согласно же теореме 16, фигуры конечных размеров

не могут обладать трансляциями. Следовательно, фигуры конечных размеров не могут обладать и плоскостями скольжения.

Следствие. *Плоскости скольжения могут встречаться только на фигурах бесконечных.*

Примером фигур, обладающих плоскостями скольжения, являются кристаллические решетки.

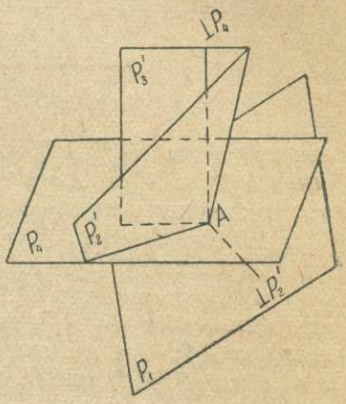
10. Отражение в четырех плоскостях

Теорема 27. *Последовательное отражение в четырех каких угодно плоскостях можно заменить, без изменения результатов, поворотом вокруг некоторой оси с последующим поступанием вдоль этой оси.*

Доказательство, с небольшими изменениями, заимствуем у А. К. Болдырева. Обозначим данные плоскости, в которых последовательно произведены отражения, через P_1, P_2, P_3 и P_4. В общем случае они не пересекаются в одной точке и не имеют параллельных линий пересечения. Требуется найти равнодействующее преобразование R, заменяющее последовательные отражения в четырех данных плоскостях:

Преобр. $R =$ Отр. $P_1 \cdot$ Отр. $P_2 \cdot$ Отр. $P_3 \cdot$ Отр. P_4.

Согласно следствию из теорем 7 и 8, результаты двух последовательных отражений не меняются при вращении обеих плоскостей отражения вокруг линии их пересечения. Воспользуемся этой возможностью.



Фиг. 163.

1) Вращаем плоскости P_2 и P_3 вокруг линии их пересечения $[P_2/P_3]$ (сохраняя между ними один и тот же угол) до тех пор, пока плоскость P_3 не пройдет через перпендикуляр к плоскости P_4. Этот перпендикуляр проведем через точку A пересечения P_2, P_3 и P_4 (фиг. 163). Новое положение вращавшихся плоскостей обозначим через P_2' и P_3'. Отражения в плоскостях P_2 и P_3 можно заменить отражениями в плоскостях P_2' и P_3'. Результат от этого не изменится. Отсюда следует, что искомое преобразование R можно выразить так:

$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } P_1 \cdot \text{Отр. } P_2' \cdot \text{Отр. } P_3' \cdot \text{Отр. } P_4.$$

При этом $P_3' \perp P_4$.

2) Далее вращаем P_3' и P_4 вокруг их линии пересечения $[P_3'/P_4]$ (сохраняя между ними прямой угол), пока P_4 не пройдет через перпендикуляр к P_2'. Этот перпендикуляр проведем также через точку A пересечения P_2, P_3 и P_4. Новое положение вращавшихся плоскостей обозначим через P_3'' и P_4'. Согласно следствию к теоремам 7 и 8, отражение в плоскостях P_3' и P_4 можно заменить отражениями в плоскостях P_3'' и P_4'. Результат от этого не изменится. Отсюда:

$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } P_1 \cdot \text{Отр. } P_2' \cdot \text{Отр. } P_3'' \cdot \text{Отр. } P_4'.$$

При этом: $P_2' \perp P_4'$ и $P_3'' \perp P_4'$.

Отсюда следует, что

$$[P_2'/P_3''] \perp P_4' \text{ (фиг. 164).}$$

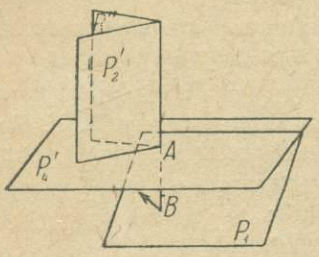
3) Далее вращаем P_2' и P_3'' вокруг линии их пересечения $[P_2/P_3]$ (сохраняя угол между ними) до тех пор, пока P_2' не пройдет через перпендикуляр к P_1. Этот перпендикуляр проведен из какой-нибудь точки оси вращения $[P_2/P_3]$, например, из B. Новое положение вращавшихся плоскостей обозначим через P_2''

и P_3'''. Тогда последовательные отражения в P_2' и P_3'' можно заменить отражениями в P_2'' и P_3'''. От этого результат не изменится.

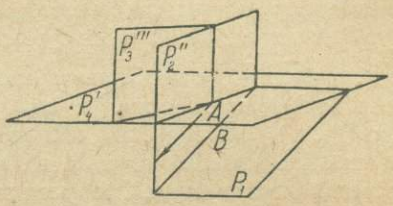
Преобр. $R =$ Отр. $P_1 \cdot$ Отр. $P_2'' \cdot$ Отр. $P_3''' \cdot$ Отр. P_4'.

При этом $P_2'' \perp P_1$ и $P_3''' \perp P_4'$ (фиг. 165).

4) Вращаем P_3''' и P_4', сохраняя прямым угол между ними, вокруг их линии пересечения $[P_3'''/P_4']$, пока P_4' не пройдет через прямую, параллельную линии пересечения P_2'' и P_1. Эта параллельная прямая проведена из какой-нибудь точки



Фиг. 164.



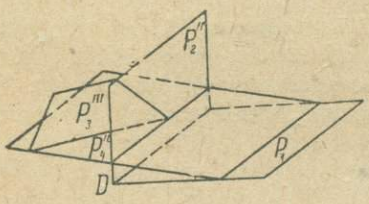
Фиг. 165.

оси вращения $[P_3'''/P_4']$, например, из A. Новое положение плоскостей обозначим через P_3'''' и P_4''. Тогда последовательные отражения в плоскостях P_3''' и P_4' можно заменить отражениями в P_3'''' и P_4''. От этого результат не изменится.

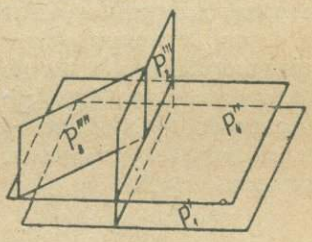
Преобр. $R =$ Отр. $P_1 \cdot$ Отр. $P_2'' \cdot$ Отр. $P_3'''' \cdot$ Отр. P_4''.

При этом $P_2'' \perp P_1$; $P_3'''' \perp P_4''$ и линия пересечения $[P_1/P_2''] \perp P_4''$ (фиг. 166).

5) Вращаем P_1 и P_2'', не изменяя прямого угла между ними, вокруг линии их пересечения $[P_1/P_2'']$ до тех пор, пока P_1 не пройдет через прямую, параллельную P_4''; эта прямая, например DF, проведена из какой-нибудь точки оси вращения $[P_1/P_2'']$ так, что обе эти линии не совпадают. Новое положение вращавшихся плоскостей назовем P_1' и P_2'''. Тогда последовательное отражение



Фиг. 166.



Фиг. 167.

в плоскостях P_1 и P_2'' можно заменить отражениями в P_1' и P_2'''. Результат от этого не изменится.

Преобр. $R =$ Отр. $P_1' \cdot$ Отр. $P_2''' \cdot$ Отр. $P_3''''' \cdot$ Отр. P_4''.

При этом $P_1' \parallel P_4''$, а каждая из остальных плоскостей к ним перпендикулярна (фиг. 167).

6) Согласно теореме 7, последовательное отражение в плоскостях P_1' и P_2''' можно заменить поворотом вокруг их линии пересечения $(P_1'/P_2''']$ на 180° (так как угол между плоскостями равен 90°).

По той же теореме этот поворот должен осуществляться в сторону от первого ко второму отражению. Однако очевидно, что результаты вращения на 180° всегда не зависят от направления вращения (при повороте на 180° против часовой стрелки фигура приходит в такое же положение, как и при повороте на 180° по часовой стрелке). Поэтому поворот на 180° можно заменить последовательными отражениями, не только сначала в P_1', а затем в P_2''', но и отражениями сначала в P_2''', а затем в P_1'.

Отр. $P_1' \cdot$ Отр. $P_2''' =$ Пов. 180° $=$ Отр. $P_2''' \cdot$ Отр. P_1'.

Таким образом, при последовательных отражениях во взаимно перпендикулярных плоскостях можно менять порядок отражений. Результат от этого не меняется. Принимая это во внимание, напишем:

$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } P_2''' \cdot \text{Отр. } P_1' \cdot \text{Отр. } P_3'''' \cdot \text{Отр. } P_4''.$$

7) На том же основании меняем порядок непосредственно следующих друг за другом отражений в P_1' и P_3'''' ($P_1' \perp P_3''''$). Получаем такой ряд отражений:

$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } P_2''' \cdot \text{Отр. } P_3'''' \cdot \text{Отр. } P_1'. \text{ Отр. } P_4''.$$

8) Согласно теореме 7, заменяем теперь отражения в пересекающихся плоскостях P_2''' и P_3'''' поворотом вокруг оси $[P_2'''/P_3'''']$ на определенный угол (вообще, 180°):

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } [P_2'''/P_3''''] \cdot \text{Отр. } P_1' \cdot \text{Отр. } P_4''.$$

9) Согласно теореме 14, заменяем отражения в параллельных плоскостях P_1' и P_4'' поступанием на определенное расстояние вдоль перпендикуляра к этим плоскостям, т. е. вдоль той же оси $[P_2'''/P_3'''']$:

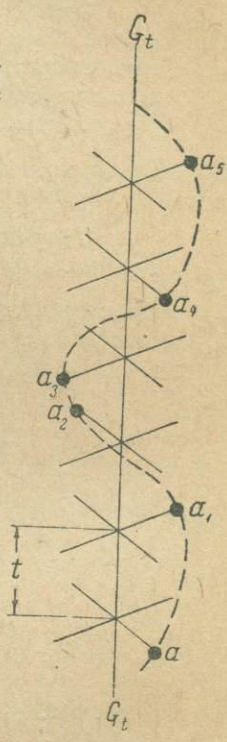
$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } [P_2'''/P_3''''] \cdot \text{Поступ. } \| \; [P_2'''/P_3''''].$$

Теорема доказана.

Замечание. Указанное в теореме преобразование — поворот, связанный с поступанием вдоль оси поворота, называется винтово-поворотным или просто винтовым преобразованием.

Согласно теореме 6, последовательное отражение в четырех плоскостях может являться симметрическим преобразованием. Вместо этого не наглядного преобразования, изучают, согласно теореме, винтовое преобразование. Дадим определение элементу симметрии, служащему для этой цели.

Определение 20. *Линия, вращение вокруг которой с последующим поступанием вдоль нее совмещает фигуру со своим исходным положением в пространстве, называется винтовой осью симметрии (геликогирой).*



Фиг. 168.

На фиг. 168 изображена фигура, имеющая геликогиру — G_t. Действительно, точка a фигуры при повороте вокруг этой оси на 90° с последующим поступанием (трансляцией) вверх на расстояние t совместится с точкой a_1. Точка a_1 при таком же повороте на угол 90° с последующей трансляцией, совмещается с точкой a_2. Точка a_2 при этом совместится с точкой a_3 и т. д.

Величина t (величина поступания, которая в связи с поворотом приводит фигуру в совмещение) называется ходом геликогиры.

Очевидно что, если при повороте на угол α с ходом вдоль оси t фигура совмещается сама с собою, то фигура будет совмещаться и при повороте вокруг той же геликогиры на угол 2α с ходом $2t$; при повороте на угол 3α — с ходом $3t$; и вообще, при повороте на угол $m\alpha$ — с ходом mt, где m — любое целое число.

Очевидно, что при повороте на угол $(360° - \alpha)$ с ходом t фигура также будет совмещаться. Совмещение будет иметь место и при поворотах на углы $(360° - 2\alpha)$; $(360° - 3\alpha)$... $(360° - m\alpha)$, если эти повороты будут сопровождаться соответственными ходами $2t$, $3t$... mt.

Наименьший угол поворота геликогиры, при котором, в связи с некоторым определенным поступанием, происходит совмещение фигуры, называется элементарным углом поворота данной геликогиры.

Отвечающая элементарному углу поворота величина поступания или ход геликогиры называется элементарным ходом или элементарной трансляцией данной геликогиры. *

Очевидно, что рассмотренная нами геликогира, изображенная на фиг. 168, имеет элементарный угол поворота 90° и элементарную трансляцию, равную t.

Аналогично простым гирам и гироидам и у геликогир различают наименование оси. Наименованием геликогиры называется число, показывающее сколько раз элементарный угол поворота содержится в одном полном обороте. Напомним из вышеизложенного, что если α элементарный угол поворота, то наименование $n = \frac{360°}{\alpha}$. Геликогира, изображенная на фиг. 168, имеет, следовательно, наименование 4 (тетрагеликогира).

Определение 21. *Геликогира называется правой, если вращение вокруг нее происходит по часовой стрелке, если смотреть по направлению трансляции; геликогира называется левой, если вращение вокруг нее происходит против часовой стрелки, если смотреть по направлению трансляции.*

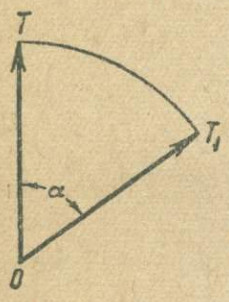
Очевидно, что ось, изображенная на фиг. 168, является левой винтовой осью.

Теорема 28. *Фигуры конечных размеров не могут обладать геликогирами.*

Действительно, всякая геликогира связана с трансляцией вдоль этой оси. Существование трансляций исключает возможность геликогир у конечных фигур.

Геликогиры могут присутствовать только на фигурах бесконечных.

Примером таких фигур могут служить кристаллические решетки.



Фиг. 169.

Теорема 29. *В кристаллических решетках не могут существовать геликогиры с углами поворота меньшими 60°.*

Пусть G_t — некоторая геликогира с углом поворота α (фиг. 169) и с ходом t. Плоскость чертежа перпендикулярна к G_t, и таким образом последняя на чертеже изображается точкой (точка O на фиг. 169).

Неотъемлемой принадлежностью всякой кристаллической решетки, как мы знаем, является существование трансляций. Среди всех трансляций выберем наименьшую, не параллельную G_t, и расположим основание вектора, характеризующего эту трансляцию, в точке O. Пусть OT изображает проекцию этого вектора на плоскость чертежа. Так как проекция не может быть длиннее проектируемого отрезка, то никакой трансляции (непараллельной G_t), меньшей по своей величине, чем отрезок OT, в данной решетке быть не может.

При повороте вокруг G_t на угол α, с последующей трансляцией t, мы совместим наш вектор OT с равным ему вектором OT_1 нашей кристаллической решетки. Основание вектора OT_1 расположим в той же точке O, как и основание вектора OT (это всегда возможно, так как векторам трансляций можно придавать любые поступания).

---

* Иногда ее называют винтовой компонентой. Не следует смешивать элементарную трансляцию геликогиры с чистой элементарной трансляцией, которая может совпадать с направлением геликогиры. Эти трансляции не равны одна другой, совершенно так же, как элементарный угол поворота геликогиры не равен элементарному углу поворота гиры, с которой данная геликогира может совпадать.

Отрезок TT_1, замыкающий две трансляции OT и OT_1, согласно следствию 2 теоремы 17, сам является трансляцией. Величина этой замыкающей трансляции TT_1 не может быть меньше величины вектора OT, так как вектор OT — наименьший среди всех трансляций, непараллельных G_t (проекция этого вектора должна быть короче TT_1). Следовательно, вектор TT_1 должен быть не меньше OT:

$$TT_1 \geqslant OT. \tag{1}$$

Из равнобедренного треугольника OTT_1 выразим основание TT_1 через сторону OT и угол при вершине $TOT_1 = \alpha$:

$$TT_1 = 2 \cdot OT \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$2 \cdot OT \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \geqslant OT.$$

Отсюда следует:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{1}{2},$$

$$\frac{\alpha}{2} \geqslant 30°,$$

$$\alpha \geqslant 60°.$$

Следствие 1. Так как элементарный угол поворота геликогиры есть наименьший среди всех возможных, то элементарный угол поворота любой геликогиры больше или равен 60°.

Следствие 2. Так как элементарный угол поворота оси равен $\frac{360°}{n}$, где n — наименование геликогиры, то имеем:

$$\frac{360°}{n} \geqslant 60°,$$

$$n \leqslant \frac{360°}{60°},$$

$$n \leqslant 6.$$

Отсюда:

В кристаллических решетках не могут существовать геликогиры с наименованием $n > 6$.

Теорема 30. *В кристаллических решетках наименование геликогиры всегда выражается целым числом.*

Пусть геликогира G_t данной кристаллической решетки имеет элементарный угол поворота α и элементарный ход t.

Наименование такой геликогиры

$$n = \frac{360°}{\alpha}.$$

Заметим прежде всего, что n не может быть меньше 1, ибо в этом случае:

$$\frac{360°}{\alpha} < 1.$$

Откуда:

$$\alpha > 360°.$$

Такие углы поворота не рассматриваются, так как целые обороты вокруг любой оси можно отбросить.

С другой стороны, согласно следствию 2 предыдущей теоремы, $n \leqslant 6$. Таким образом n число конечное:

$$1 \leqslant n \leqslant 6.$$

Если предположить, что n не целое число, то всегда можно указать два таких целых числа m и $(m+1)$, между которыми заключается число n:

$$m < n < (m+1).$$

Или:

$$m < \frac{360^\circ}{\alpha} < (m+1).$$

Отсюда, умножая все части неравенства на α:

$$m\alpha < 360^\circ < m\alpha + \alpha.$$

Или, вычитая из всех частей неравенства величину $m\alpha$:

$$0 < 360^\circ - m\alpha < \alpha.$$

Но, как было ранее выяснено, если α — угол поворота некоторой геликогиры, то и угол $m\alpha$ и угол $(360^\circ - m\alpha)$ будут также углами поворота этой геликогиры (при ходе оси mt).

Как показывает написанное неравенство, угол поворота $(360^\circ - m\alpha)$ меньше элементарного угла поворота α. Мы пришли к абсурду, так как никаких углов поворота, меньших элементарного (наименьшего) угла α, быть не может.

Следовательно, нельзя было предполагать, что наименование n может выражаться числом не целым.

Следствие. *В кристаллических решетках элементарный угол поворота всякой геликогиры является целой частью полного оборота.*

Систематика геликогир

Подобно тому, как это мы делали при изучении гир и гироид, рассмотрим по порядку все геликогиры.

$n = 1$; $\alpha = 360^\circ$. — Моногеликогира — G_{1t}.

Так как вращения на 360° можно не производить, то совмещение достигается простым поступанием вдоль оси. Таким образом, моногеликогира есть не что иное, как простая трансляция, подробно изученная уже раньше (§ 7) (моногеликогира может также рассматриваться, как агеликогира, если считать, что никакого вращения вокруг оси мы не производили).

$n = 2$; $\alpha = 180^\circ$. — Дигеликогира — G_{2_t} (или a_t)

Совмещение достигается поворотом на 180° с последующей трансляцией. Очевидно, что при повороте на $2\alpha = 360^\circ$, нужно ход оси увеличить также вдвое. Поворота на 360° можно не производить.

Отсюда следует, что вдоль всякой дигеликогиры имеются чистые трансляции. Обозначим элементарную трансляцию вдоль оси через T. Она равна удвоенному ходу дигеликогиры. Таким образом ход (элементарная трансляция) дигеликогиры G_{2_t} равен $\frac{1}{2}$ T.

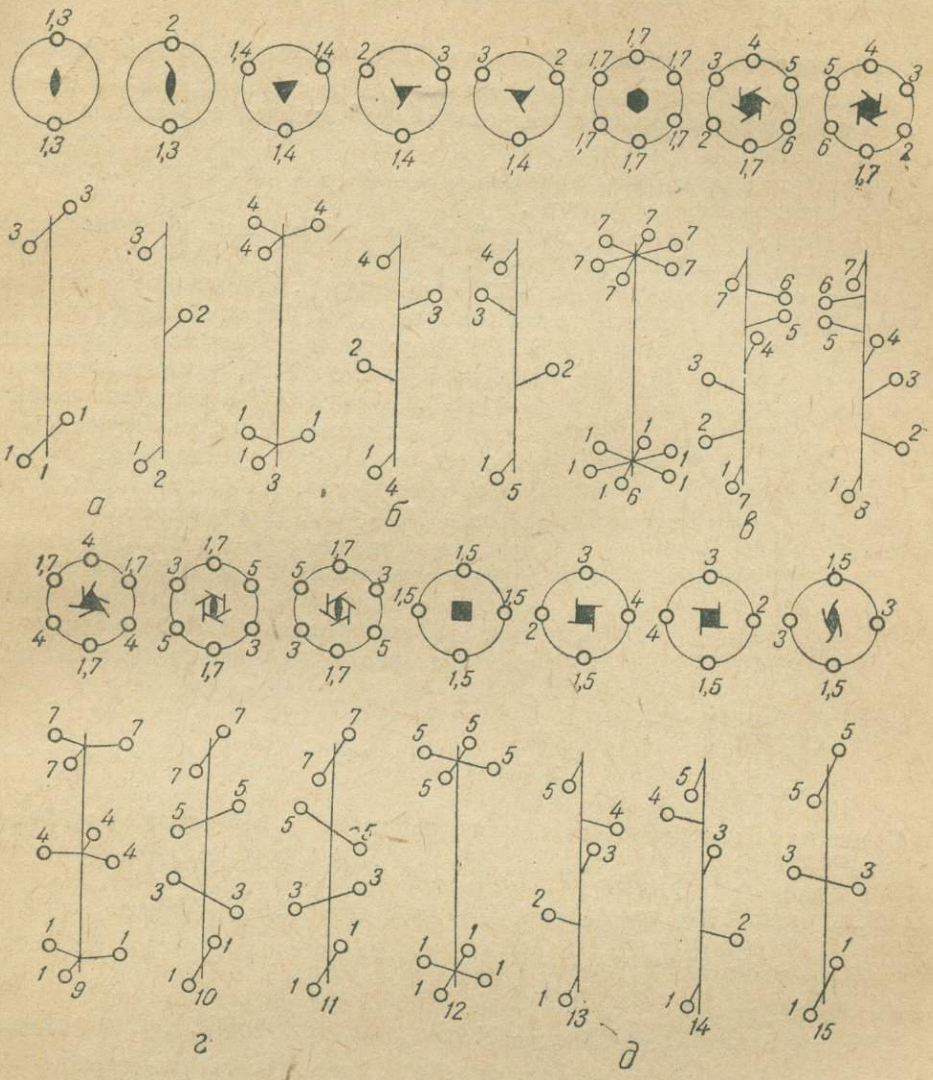
$n = 3$; $\alpha = 120^\circ$. — Тригеликогира — G_{3_t}

Совмещение достигается поворотом на 120°, с последующей трансляцией. Трехкратное применение G_{3_t} приводит к чистой трансляции T. Таким образом, элементарная трансляция (ход оси) G_{3_t} равна $\frac{1}{3}$ T. Различают правые и левые тригеликогиры (иногда левые тригеликогиры рассматривают как правые с ходом $\frac{2}{3}$ T).

$n = 4$; $\alpha = 90^\circ$. — Тетрагеликогира — G_{4_t}

Пример такой оси был нами уже рассмотрен (фиг. 168). Чистая трансляция T имеет место при четырехкратном применении G_{4_t}. Таким образом элементарная трансляция (ход оси) равна $\frac{1}{4}$ T. Различают правые и левые тетрагеликогиры

G_{+4_t} и G_{-4_t}. Левая изображена на фиг. 168 (иногда левые тетрагеликогиры рассматриваются как геликогиры правые с ходом $\frac{3}{4}T$). Кроме правых и левых геликогир различают еще тетрагеликогиры с ходом $\frac{2}{4}T = \frac{1}{2}T$ (фиг. 170).



Фиг. 170. Винтовые оси.
а—двойные винтовые оси, *б*—тройные винтовые оси, *в*—шестерные винтовые оси, *г*—шестерные винтовые оси, *д*—четверные винтовые оси.

Такая геликогира является, как нетрудно сообразить, в то же самое время простой дигирой. Будем ее обозначать $G_{4_{t_2}}$ и называть *тетрагеликодигирой.*

$n = 5$; $\alpha = 72°$. — Пентагеликогира — G_{5_t}.

В кристаллических решетках пентагеликогира существовать не может.

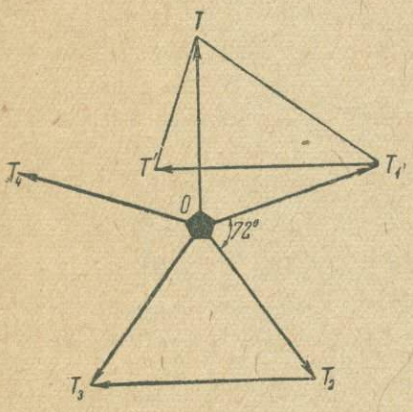
Предположим, что в решетке проходит пентагеликогира G_{5_t} перпендикулярно плоскости чертежа (изображается точкой O на фиг. 171).

Как мы знаем, во всякой решетке присутствуют трансляции. Среди них выберем наименьшую, не параллельную G_{5_t}. Пусть OT изображает проекцию вектора, характеризующего эту трансляцию на плоскость чертежа. Так как проекция не может быть длиннее проектируемого отрезка, то никакой трансляции (непараллельной G_{5_t}), меньшей по своей величине, чем отрезок OT, в данной решетке быть не может.

При повороте вокруг G_{5_t} на угол $\alpha = 72°$ с последующей трансляцией, мы совместим вектор OT с равным ему вектором OT_1 нашей кристаллической решетки. Дальнейшими поворотами на углы $\alpha = 72°$ выведем трансляцию OT_2, затем OT_3 и, наконец, OT_4. Основания всех выведенных векторов расположим в одной и той же точке O (это всегда возможно, так как векторам трансляций можно придавать любые поступания).

В результате мы получим „звезду" трансляций из пяти векторов, расположенных под углом $\alpha = 72°$ друг к другу.

Мы знаем (следствие 2 теоремы 17), что отрезки, замыкающие концы векторов трансляций, сами являются векторами трансляций. Таким образом, отрезки TT_1 и T_2T_3 характеризуют некоторые трансляции. Построим вектор T_1T', равный и параллельный T_2T_3. Сторона $T'T$ в треугольнике TT_1T', как сторона треугольника, две другие стороны которого являются трансляциями, также является трансляцией. Из чертежа видно, что эта сторона $T'T < OT$. Нам же известно, что OT изображает наименьшую трансляцию, и никакой другой трансляции $TT' < OT$ быть не может. Отсюда следует, что и вся „звезда" трансляций, изображенная на фиг. 171, также невозможна, а потому и G_{5_t} не может существовать в кристаллических решетках.



Фиг. 171.

$n = 6$; $\alpha = 60°$. — Гексагеликогира — G_{6_t}.

Совмещение достигается при повороте на 60° с последующей трансляцией на величину $\frac{1}{6}\,T$ (ход оси). Различают при этом правые G_{+6_t} (фиг. 170) и левые G_{-6_t} (фиг. 170) геликогиры (левые иногда рассматривают как правые с ходом $\frac{5}{6}\,T$). Гексагеликогира может являться вместе с тем простой тригирой или простой дигирой.

Если ход оси равен $\frac{2}{6}\,T = \frac{1}{3}\,T$, получаем геликогиру, являющуюся одновременно дигирой: гексагеликодигиру G_{6t_2}. Левые гексагеликодигиры G_{-6t_2} иногда рассматривают как правые с ходом $\frac{4}{6}\,T = \frac{2}{3}\,T$ (фиг. 170). Если ход оси $\frac{3}{6}\,T = \frac{1}{2}\,T$, имеем гексагеликогиру, являющуюся в то же самое время тригирой (гексагеликотригира G_{6t_3}) (в этом случае, так же как и в случае дигеликогиры, гексагеликодигира будет одновременно и правой и левой).

Рассмотренные нами симметрические преобразования с помощью различных геликогир явились результатом замены отражений в четырех плоскостях. При этом рассматривался самый общий случай расположения этих плоскостей. В частных случаях плоскости могут пересекаться все в одной точке или некоторые из них или же все они могут быть параллельными между собой.

Несложные рассуждения показывают, что никаких новых симметрических преобразований, кроме преобразований с помощью уже рассмотренных нами эле-

ментов симметрии, при этом не наблюдается. Эти преобразования сводятся к частным случаям геликогир. Так, если четыре плоскости отражения пересекаются в одной точке, то отражение в таких плоскостях можно заменить простым поворотом вокруг гиры. Простая гира является частным случаем геликогиры, при ходе оси t, равном нулю или T, где T — чистая элементарная трансляция вдоль оси.

Если все четыре плоскости отражения параллельны, то отражение в таких плоскостях можно заменить трансляцией. Трансляция, как мы видели, также является частным случаем геликогиры: она представляет собой геликогиру с элементарным углом поворота, равным нулю или 360° (моногеликогиру или агеликогиру).

Таким образом изучение преобразований при отражениях в четырех плоскостях может считаться исчерпанным.

11. Сводка результатов выводов предыдущих разделов

Согласно теореме 6, любая симметрическая фигура может быть совмещена сама с собою последовательными отражениями в плоскостях, причем для этого потребуется максимум четыре отражения. Поэтому, чтобы не пропустить ни одного мыслимого случая симметрии фигур, мы систематически разобрали случаи отражений в одной, двух, трех и четырех плоскостях.

Достаточно даже было бы рассмотреть только случаи отражения в трех и четырех плоскостях, так как отражения в одной и в двух плоскостях являются их частными случаями. Действительно, стоит только представить, что две из трех плоскостей отражения совпадают — получим отражение в одной плоскости (поэтому-то плоскость симметрии является частным случаем гироиды: дигироида $= G_{2_i} = P$).

Аналогично, если сливаются отражения в двух из четырех плоскостей, то придем к отражению в двух плоскостях (поэтому-то гиры и трансляции являются частным случаем геликогир) (см. раздел 9).

Для удобства изучения результатов, мало наглядные операции многократных отражений заменялись преобразованиями, более легко поддающимися практическому исследованию. В результате мы пришли к целому ряду „элементов симметрии", т. е. различных вспомогательных геометрических образов, при помощи которых совершаются найденные симметрические преобразования. После такого систематического исследования мы можем быть уверены в том, что невозможны никакие другие случаи симметрии фигур, которые не могли бы быть изучены при помощи найденных элементов симметрии. Полученный нами набор элементов симметрии является вполне исчерпывающим для любых случаев симметрии фигур и вместе с тем он не содержит и ничего лишнего. Поэтому никаких других элементов симметрии нам рассматривать не нужно. Не следует думать, что их нельзя и изобрести. Они возможны, однако целиком могут быть заменены изученными нами (так, в учебниках кристаллографии раньше рассматривались так называемые зеркально-поворотные оси симметрии — плангироиды. Любая планги-роида отвечает той или иной совокупности изучавшихся нами элементов симметрии, а потому нам их рассматривать совершенно излишне).

Таким образом, изученными нами элементами симметрии может быть целиком и полностью охарактеризована симметрия фигур.

Сопоставим теперь вместе все изученные нами и необходимые для кристаллографии элементы симметрии в одну таблицу (табл. 5).

Как видно из табл. 5, элементов симметрии для бесконечных фигур больше и они разнообразнее элементов симметрии фигур конечных. Поэтому определять элементы симметрии кристаллических решеток гораздо труднее, чем определять элементы симметрии кристаллических многогранников. Необходимо приобрести достаточный навык в умении находить элементы симметрии конечных фигур, прежде чем приступать к изучению бесконечных. Поэтому, хотя кристаллическое

Сводка кристаллографических элементов симметрии

Для конечных фигур (кристаллов)	Значок на чертежах	Для бесконечных фигур (кристаллических решеток)
А. Геликогиры и их частные случаи		
—		$G_{1t} = t$ трансляция (моногеликогира)
—		t_p, t_0, t_k пара, орто, клино-трансляция
$G_2 = a$ дигира		$G_2 = a$ дигира
—		$G_{2t} = a_h$ дигеликогира
$G_3 =$ тригира . . .		G_3 тригира
—		G_{+3t} тригеликогира правая
—		G_{-3t} тригеликогира левая
$G_4 =$ тетрагира . .		G_4 тетрагира
—		G_{+4t} тетрагеликогира правая
—		G_{-4t} тетрагеликогира левая
—		G_{4t_2} { тетрагеликогира, она же дигира; тетрагеликодигира
—		
$G_6 =$ гексагира . .		G_6 гексагира
—		G_{+t} гексагеликогира правая
—		G_{-6t} гексагеликогира левая
—		G_{+6t_3} гексагеликотригира
—		G_{-6t} минус гексагеликодигира (гексагеликогира левая, она же дигира)
—		G_{+6t_2} плюс гексагеликодигира (гексагеликогира правая, она же дигира)

Для конечных фигур (кристаллов)	Значок на чертежах	Для бесконечных фигур (кристаллических решеток)
Б. Гироиды и их частные случаи		
C — центр инверсии .		C центр инверсии
P — плоскость симметрии (плана)		P плоскость симметрии (плана)
—		P_t плоскость (трансплана)
—		В частных случаях имеем:
—		P_p паратрансплана
—		P_0 ортотрансплана
—		P_k клинотрансплана
G_{4i} тетрагироида . .		G_{4i} тетрагироида
$G_{6i} = G_3 + \perp p$ гексагироида		$G_{6i} = G_3 + \perp p$ гексагироида

Примечание. Знак G_{3t} — обозначает любую тригеликогиру, G_{4t} — любую тетрагеликогиру и G_{6t} — любую гексагеликогиру.

вещество сравнительно редко встречается в виде хорошо образованных кристаллов, изучение кристаллических многогранников является совершенно необходимым для понимания симметрии кристаллических решеток. Химику же, геологу, петрографу и особенно минералогу подробное исследование кристаллических многогранников необходимо и непосредственно. В своей практической работе им часто приходится встречаться с ограненными кристаллами.

Краткие методические указания — каким образом отыскивается тот или иной элемент симметрии данного многогранника, были даны при описаниях соответственных элементов. Поэтому сейчас мы ограничимся только несколькими замечаниями, касающимися определений не отдельных элементов симметрии, а всей их совокупности, имеющейся у данной многогранной фигуры.

Прежде всего укажем на два свойства всяких совокупностей элементов симметрии фигур:

Конечные фигуры, не имеющие осей бесконечно-больших наименований, имеют конечное число элементов симметрии.

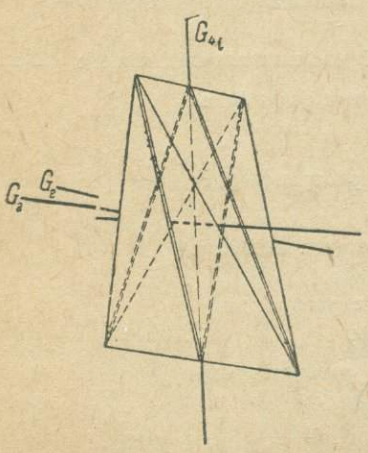
Все элементы симметрии конечной фигуры пересекаются в одной точке.

Доказывать эти положения мы не будем.

Лучше всего начинать определения с гир. Перебирая вершины и нормали к серединам граней, находят сначала главные гиры (G_6, G_4, G_3), а затем и дигиры ($G_2 = a$), для определения которых пересматривают еще нормали к серединам ребер многогранника. Сосчитывают число найденных осей и сразу же записывают результаты. Так, если исследуемый многогранник — куб, то записывают $3G_4$, $4G_3$, $6G_2$ (см. фиг. 143, 144, 145).

Если найдена G_3, обязательно, не откладывая, смотрят: проходит ли перпендикулярно ей плоскость симметрии. Если такая имеется — записывают: G_{6_i} $(G_3 P)$. Если найдены двойные оси и нет G_4, то исследуем, есть ли у фигуры центр инверсии. Если такового тоже нет, необходимо выяснить: не является ли найденная G_2 одновременно еще и G_{4_i}. Если последнее обнаружено — записывают: G_{4_i} (G_2).— Эта запись обозначает, что G_{4_i} является в то же время и дигирой G_2. После определения гир и гироид переходят к нахождению плоскостей симметрии, внимательно сосчитывают их количества и записывают число найденных плоскостей. Наконец, исследуют, есть ли у нашей фигуры центр инверсии, если только он не был определен раньше. Если центр инверсии обнаружен, записывают и его. Таким образом, в результате исследования всех элементов симметрии куба, получим такую запись:

$$3\,G_4,\ 4\,G_3,\ 6\,G_2,\ 9\,P,\ C.$$



Фиг. 172.

В результате исследования тетрагонального тетраэдра (фиг. 172) получим такую запись:

$$G_{4i}\,(G_2),\ 2\,G_2,\ 2\,P.$$

Здесь, через середины всех шести ребер, проходят дигиры — всего, следовательно, $3\,G_2$. Однако, одна из них является в то же самое время тетрагироидой G_{4i}. Отсюда и следует написанное.

При нахождении элементов симметрии часто весьма помогает понятие о так называемых равных элементах симметрии.

Определение 22. *Равными элементами симметрии называются такие, которые совмещаются друг с другом при помощи каких-либо элементов симметрии данной фигуры.*

Так, при повороте на 40° вокруг вертикальной G_4 куба (фиг. 143), одна из его горизонтальных тетрагир совмещается с другой. Поэтому эти тетрагиры нужно считать равными друг другу. При этом же вращении, $4\,G_3$ куба также совмещаются друг с другом, следовательно, и они представляют равные между собой элементы симметрии.

Если найдена только одна G_3 куба, то, поворачивая эту G_3 вокруг G_4 три раза на 90°, выведем еще $3\,G_3$; всего получим $4\,G_3$ куба. Аналогично, если найдена одна горизонтальная G_4, то, вращая ее на 90°, нетрудно вывести и другую. Таким образом, применяя симметрические преобразования к одному из элементов симметрии фигуры, легко находить и другие ее элементы симметрии.

Если найден элемент симметрии A, то при симметрическом преобразовании с помощью этого элемента фигура совмещается сама с собою; поэтому и всякий элемент симметрии B должен при этом также совмещаться с каким то равным ему элементом симметрии B'.* Поэтому, найдя B, мы можем, просто применяя к B симметрическое преобразование при помощи элемента A, вывести еще не обнаруженные элементы (например, B').

* Если только он не совмещается сам с собой.

При поисках элементов симметрии не следует пренебрегать и правилами, вытекающими из теорем сложения элементов симметрии (см. раздел 6).

Плоскости симметрии следует искать проходящими через оси симметрии, так как эти оси часто бывают их линиями пересечения.

Плоскости симметрии часто располагаются также и нормально к осям (четные гиры G_2, G_4 и G_6, в случае присутствия центра инверсии, обязательно имеют нормальные к ним плоскости симметрии).

Дигиры следует искать среди направлений, перпендикулярных к главным гирам и перпендикулярно плоскостям симметрии.

Этими краткими указаниями мы и ограничимся, хотя они далеко не исчерпывают, конечно, всех правил, которые можно придумать для облегчения поисков элементов симметрии многогранников.

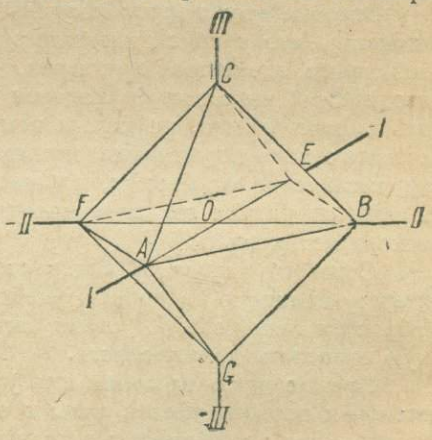
Только после приобретения известного навыка в определении симметрии конечных фигур, можно приступать к изучению фигур бесконечных, к изучению кристаллических решеток. Поэтому систематическое и подробное практическое изучение кристаллических решеток мы отложим до окончания изучения симметрии конечных фигур.

Глава X

СИНГОНИИ И ВИДЫ СИММЕТРИИ

1. Вывод 32 видов симметрии

Знакомясь с симметрией фигур, мы видим, что различные фигуры обладают в общем случае различными элементами симметрии. Совокупность элементов симметрии, списки этих элементов довольно разнообразны. Собранные нами эмпирические сведения о симметрии тех или иных фигур будут просто набором фактов: эти наборы не смогут приносить нам пользы до тех пор, пока мы не приведем их в порядок, не создадим определенной системы, определенной классификации.



Фиг. 173.

Классификация фигур по присутствию или отсутствию в них тех или иных элементов симметрии играет исключительную роль в кристаллографии. Существование или, наоборот, отсутствие того или иного элемента налагает отпечаток и предопределяет собою целый ряд свойств кристаллического вещества.

Эмпирическое ознакомление с симметрией тех или иных фигур приводит к заключению, что иногда очень похожие по своей внешней форме фигуры характеризуются совершенно различными элементами симметрии. Наоборот, наблюдаются случаи, когда весьма различные по форме фигуры обладают тождественной совокупностью элементов симметрии. Так, например, мы видели, что совокупность элементов симметрии куба может быть представлена таким списком: 3 G_4, 4 G_3, 6 G_2, 9 P, C. Правильный восьмигранник (октаэдр) (фиг. 173), как оказывается, имеет в точности такой же набор элементов симметрии: 3 G_4, 4 G_3, 6 G_2, 9 P, C. Про две такие фигуры, как куб и октаэдр, говорят, что они относятся к одному „виду симметрии".

Определение 23. *Видом симметрии (классом или точечной группой) называется полная совокупность элементов симметрии той или иной конечной фигуры.*

Различных фигур, даже только одних кристаллических многогранников, мыслимо бесконечное множество. Возникает вопрос: существует ли бесконечное множество видов симметрии? Всякие ли совокупности элементов симметрии могут встречаться у фигур? Конечные фигуры, как это видно, из табл. 5, имеют 8 различных элементов симметрии. Каждая фигура может обладать, как мы знаем, несколькими одинаковыми элементами симметрии. Таким образом, комбинаций из этих восьми элементов симметрии можно, казалось бы, представить бесконечное множество. Всякие ли комбинации могут встречаться? — Нетрудно убедиться в том, что далеко не всякие совокупности элементов симметрии теоретически возможны.

Например, можно утверждать, что нельзя ни создать, ни даже мысленно представить себе фигуру, у которой одновременно присутствовали бы и G_6 и G_4. Разберем причину такой несовместимости. Вспомним, что два симметрических преобразования всегда можно заменить некоторым третьим, им равнодействующим (раздел 6). Соответственно этому, если есть два элемента симметрии, должен существовать и третий, применение которого приводит к тому же результату, как и последовательное применение первых двух. Последовательное применение вращения вокруг одной гиры и вращения вокруг некоторой второй гиры, как мы знаем (теорема Эйлера), можно заменить вращением вокруг некоторой третьей гиры. Ее положение и наименование вполне определяются положением и наименованием двух данных гир. Оказывается, как бы мы ни располагали G_6 и G_4 относительно друг друга, выводящаяся по теореме Эйлера равнодействующая гира получает невозможное — дробное или иррациональное наименование, с элементарным углом, не являющимся целой частью 360°. Так как такие гиры не могут встречаться, то не мыслима и комбинация G_6 и G_4 на одной фигуре.

Какие же комбинации элементов симметрии возможны?

Впервые этот вопрос поставил немецкий ученый Гессель в 1830 г., который и доказал, что у кристаллического вещества могут существовать 32 различные комбинации элементов симметрии, что мыслимо 32 вида симметрии кристаллов. Этот важный вывод не был оценен современниками Гесселя. В то время ведущую роль в кристаллографии играла немецкая школа эмпиристов, которой были чужды математические дедуктивные методы. Спустя 40 лет русский ученый А. В. Гадолин, независимо от Гесселя, пришел к таким же результатам. В настоящее время 32 вида симметрии являются краеугольным камнем всех классификаций кристаллического вещества.

Строгого вывода 32 видов симметрии мы здесь приводить не будем, отсылая интересующихся к подробным учебникам (Е. С. Федорова, С. А. Богомолова и др.). Набросаем лишь общую схему вывода, совершенно не претендуя на математическую строгость доказательств.

Прежде всего разделим для удобства все мыслимые виды симметрии на две части — к первой отнесем виды с одной или даже совсем без главных осей, ко второй — виды симметрии с несколькими главными осями. Рассмотрим сначала виды симметрии первой части.

а) Виды симметрии с одной главной осью или вовсе без главной оси

Здесь мыслимы комбинации одной (и не более одной) G_3, G_4, G_{4i}, G_6 и G_{6i} с одной или несколькими „неглавными“ осями: a, c, p. Здесь же мыслимы, конечно, и просто все указанные элементы симметрии не в комбинациях, а в единственном числе каждый. Такие случаи образуют ряд простейших видов симметрии.

1) Эти простейшие случаи образуют ряд так называемых *„примитивных“* видов симметрии: G_2, G_3, G_4 и G_6 (оставляем пока в стороне инверсионные оси вместе с их частными случаями c и p). К этому же ряду следует отнести и фигуры без всякой симметрии. Вид симметрии таких многогранников по аналогии можно обозначить G_0 (или G_1, что менее удобно).

Таким образом, получается ряд в пять „примитивных“ видов симметрии, ко-

торые лягут в основу дальнейших выводов. В табл. 6 эти виды симметрии образуют первую слева колонну.

Будем теперь комбинировать элементы симметрии полученных видов с другими „неглавными“ осями c, p и a.

2) Начнем с центра инверсии (c). Прибавление c к предыдущему ряду примитивных видов даст ряд „центральных“ видов симметрии:

$$G_0 c,\ G_2 c,\ G_3 c,\ G_4 c,\ G_6 c.$$

Однако следует помнить, что если есть два элемента симметрии, то найдется еще третий, им равнодействующий. Выписанные нами элементы симметрии „центральных“ видов симметрии являются лишь „порождающими“ элементами. Виды же симметрии представляют собой совокупность всех элементов симметрии — порождающих и равнодействующих. Поэтому нам следует найти еще равнодействующие элементы. Всякая четная ось симметрии с центром инверсии дает к качестве равнодействующего элемента симметрии плоскость симметрии, перпендикулярную к оси (следствие 4 теоремы 12). Для нечетной гиры имеем: $G_3 c = G_i$, которую мы не рассматриваем. $G_0 c$ — не дает равнодействующего элемента, так как здесь мы имеем один центр инверсии без какого-либо другого элемента симметрии. Принимая во внимание все сказанное, получим для „центральных“ видов симметрии такие формулы: $G_0 c$, $G_2 cp$, $G_3 c$, $G_4 cp$, $G_6 cp$ (эти виды симметрии образуют вторую колонну нашей табл. 6).

Таблица 6

Виды симметрии с одной главной гирой или без главной гиры

Примитивные виды симметрии	Центральные виды симметрии	Планальные виды симметрии	Аксиальные виды симметрии	Планаксиальные виды симметрии
G_0	G_0c	G_1p	G_1a	G_1apc
G_2	G_2cp	$G_2 2p$	$G_2 2a = 3a$	$G_2 2a 3pc = 3a3pc$
G_3	G_3c	$G_3 3p$	$G_3 3a$	$G_3 3a 3pc$
G_4	G_4cp	$G_4 4p$	$G_4 4a$	$G_4 4a 5pc$
G_6	G_6cp	$G_6 6p$	$G_6 6a$	$G_6 6a 7pc$

3) Будем прибавлять теперь к примитивным видам плоскость симметрии. Здесь мыслимо прибавление тремя способами: а) перпендикулярно оси, б) вдоль оси и в) наклонно к оси. Случай а) не подлежит сейчас рассмотрению, так как для четных гир это приводит к существованию c, а случай с c был уже нами рассмотрен только-что. Для нечетной же гиры $G_3 + \perp p = G_{6i}$ получаем в качестве главной оси гироиду, а такие случаи будут нами рассматриваться при выводе видов симметрии с гироидами. Случай в) мы также не должны рассматривать, так как здесь, в качестве равнодействующих элементов симметрии, возникают новые главные оси.

Таким образом этот случай приводит к прибавлению новых главных осей, а в этой части вывода мы должны прибавить только неглавные оси.

Итак, остается прибавление плоскостей только вдоль оси (случай б). Получаем: $G_0 p = G_1 p$; $G_2 p$; $G_3 p$; $G_4 p$; $G_6 p$. Это — порождающие элементы симметрии. Складывая их друг с другом, выведем равнодействующие плоскости симметрии ($G + p = P$) (их нетрудно получить с помощью теоремы 8). В результате получим такие виды симметрии: $G_1 p$; $G_2 2p$; $G_3 3p$; $G_4 4p$; $G_6 6p$ (третья колонна табл. 6). Это так называемые „планальные“ виды симметрии („планос“ — плоскость).

4) Прибавление дигиры a мыслимо тоже тремя способами: а) перпендикулярно имеющейся оси, б) вдоль оси и в) наклонно к оси. Случай б) не подлежит рассмотрению, так как он просто ничего не меняет в случае четной оси и удваивает наименование нечетной ($G_3 + a = G_6$). Случай в) также не должен нами рас-

сматриваться, так как ведет к появлению или нескольких главных осей или, в случае косого прибавления a к дигире, к появлению главной оси, перпендикулярной к a, а потому будет рассмотрен, как случай перпендикулярного прибавления a к соответственной главной оси. Остается случай перпендикулярного расположения a к имеющейся оси. Получаем следующие порождающие элементы симметрии: $G_0\,a = G_1\,a$; $G_2\,a$; $G_3\,a$; $G_4\,a$; $G_6\,a$. Согласно теореме 13 (следствие 2), получим, в качестве равнодействующих элементов симметрии, новые дигиры: $G_1\,a$; $G_2\,2\,a = 3\,G_2 = 3\,a$; $G_3\,3\,a$; $G_4\,4\,a$; $G_6\,6\,a$ (четвертая колонна таблицы). Это так называемые „аксиальные" виды симметрии („Axe" = ось).

5) Остается теперь рассмотреть одновременное прибавление нескольких неглавных осей. Например, и p и c. Очевидно, что одновременное прибавление p и c можно осуществить двумя способами: 1) можно прибавлять c в „планальные" виды симметрии, 2) можно прибавлять p в „центральные" виды симметрии. Аналогично, одновременное прибавление a и c можно осуществить: 1) прибавлением c к „аксиальным" видам и 2) прибавлением a к „центральным". Аналогично осуществимо одновременное прибавление a и p.

Простые выводы показывают, что во всех случаях получается один и тот же результат. Прибавление нового добавочного элемента симметрии как к центральным, так и к планальным, так и к аксиальным видам симметрии приводит к существованию в них комбинации всех трех добавочных элементов — и c, и p, и a (прибавление двух из них влечет существование третьего). Беря за порождающие элементы симметрии a и p, прибавлением p к „аксиальным" видам или прибавлением a к „планальным" получаем: $G_0\,ap = G_1\,ap$; $G_2\,ap$; $G_3\,ap$; $G_4\,ap$; $G_6\,ap$. Это — порождающие элементы симметрии. Полные совокупности будут иметь в качестве равнодействующего элемента симметрии и c, и заключать в себе как бы сумму добавляемых элементов симметрии видов с той же осью. Суммируя добавочные элементы симметрии горизонтальных строк, получим: $G_1\,apc$; $G_2\,2a\,3pc = 3a\;3\,pc$; $G_3\,3a\,3pc$; $G_4\,4\,a\,5\,pc$; $G_6\,6\,a\,7\,pc$. Это так называемые *„план-аксиальные"* виды.

6) Рассмотрим теперь дополнительно виды симметрии с главной осью G_{4i} и G_{6i}. Имеем два *„гироидно-примитивных"* вида $G_{4i}(a)$ и $G_{6i}(G_3p)$ (табл. 7, первая колонна слева). Всякая G_{4i} является одновременно G_2, а потому в скобках мы это и записываем $G_{4i}(a)$; всякая G_{6i} является одновременно G_3 с плоскостью симметрии, к ней перпендикулярной. Эти элементы симметрии мы и записываем в скобках.

Прибавляем теперь к этим осям те же неглавные оси. Прибавление c невозможно, так как c не может встречаться на фигурах, имеющих G_{4i} и G_{6i}. Прибавление же p, a и ap приводит к одинаковому результату. Получаем только два вида симметрии $G_{4i}(a)\;2\,a\;2\,p$ и $G_{6i}(G_3p)\;3\,a\;3\,p$. Будем называть их гироидопланальными видами.

Присматриваясь к таблицам, видим, что в некоторых клетках у нас получились тождественные элементы симметрии, верхний вид четвертой колонны и второй вид первой колонны представляют то же самое: $G_1a = G_2$. Один из них, следовательно, чтобы не было повторений, нужно выкинуть. Выкинем G_2. Далее верхний вид пятой колонны одинаков со вторым видом второй колонны: $G_1\,a\,p\,c = G_2\,c\,p$. Выбросим $G_2\,cp$.

Также следует выбросить четыре вида симметрии двух последних колонн табл. 7. Всего останется 27 различных видов симметрии.

Таблица 7

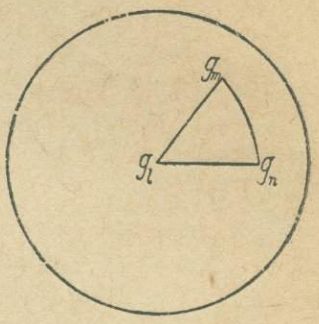
Виды симметрии с одной главной гироидой

Гироиднопримитивные виды симметрии		Гироиднопланальные виды симметрии		
$G_{4i}(a)$	—	$G_{4i}(a)\,2a2p$	$[G_{4i}(a)\,2a2p]$	$[G_{4i}(a)\,2a2p]$
$G_{6i}(G_3p)$	—	$G_{6i}(G_3p)\,3a3p$	$[G_{6i}(G_3p)\,3a3p]$	$[G_{6i}(G_3p)\,3a3p]$

б) Виды симметрии с несколькими главными осями

Прежде всего рассмотрим вопрос — каким образом могут располагаться эти оси одна относительно другой. Пусть G_l одна из главных осей фигуры.

Расположим ее так, чтобы она проектировалась в центре стереографической проекции (фиг. 174). Пусть G_m будет некоторая другая главная ось, ближайшая к выходу G_l. Согласно теореме Эйлера, если есть две оси, то можно получить третью, им равнодействующую при помощи следующего построения. Через оси G_l и G_m проводим плоскость G_lG_m, после чего строим плоскости G_lG_n и G_mG_n таким образом, чтобы углы при осях G_l и G_m были равны половинам элементарных углов поворота этих осей. Если эти углы α и β, то строим около осей G_l и G_m — $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$. Пересечение плоскостей G_lG_n и G_mG_n дает ось G_n. G_n будет являться равнодействующей осью симметрии с элементарным углом γ.

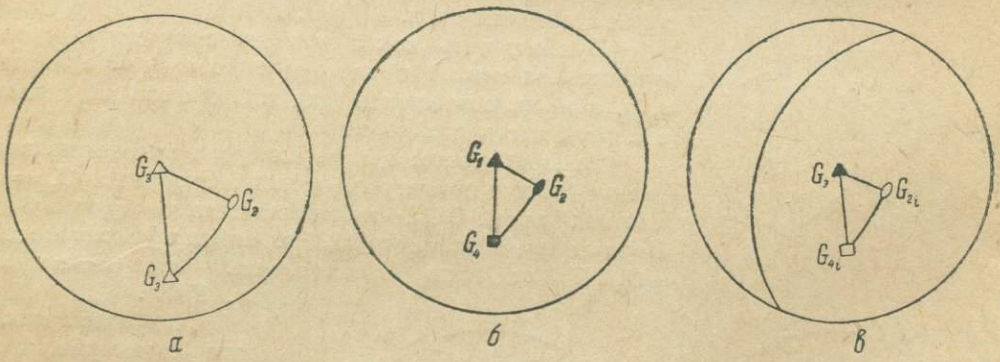


Фиг. 174.

Для кристаллов элементарные углы поворотов могут быть только:

120°, 90° и 60° (отвечающие осям G_3, G_4 и G_6 или соответственным гироидам).

Соответственно с этим, величины $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ могут иметь только такие значения: 60° (отвечает G_3), 45° (отвечает G_4 и G_{4i}) и 30° (отвечает G_6 и G_{6i}). Таким образом, два угла сферического треугольника $G_lG_mG_n$ должны быть обязательно равны этим величинам. Третий же угол — половина элементарного угла равнодействующей оси. Эта ось может и не быть главной — она может быть двойной осью. Таким образом третий угол сферического треугольника $\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ может быть

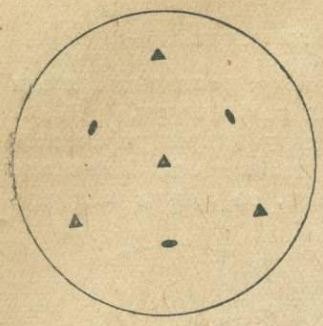


Фиг. 175.

равен, кроме 60°, 45°, 30°, еще и 90° (отвечает дигире G_2 и дигироиде G_{2i}). Только комбинации этих углов и возможны в нашем сферическом треугольнике, причем угол в 90° может быть только один. При этом, так как сумма углов всякого сферического треугольника, как известно из сферической тригонометрии, всегда больше 180°, то мы получаем еще ограничивающее обстоятельство для наших углов.

Покажем прежде всего, что ограничение делает невозможным существование в нашем сферическом треугольнике угла в 30°.

Действительно, если один из углов равен 30°, то, если взять для двух других максимальные возможные значения углов — 60° и 90°, получим в сумме $30° + 60° + 90° = 180°$, что невозможно.



а

Так как в нашем треугольнике не может быть угла в 30°, не может быть и отвечающей этому углу оси. Таким образом, ни G_6, ни G_{3i} не могут присутствовать среди видов симметрии с несколькими главными осями.

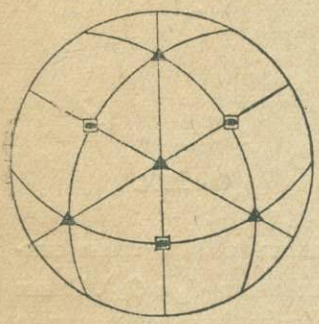
Следовательно, углы нашего треугольника могут иметь значения только 45°, 60° и один из углов — 90°.

Нетрудно убедиться в том, что сумма углов оказывается больше 180° только в двух случаях:

$$60° + 60° + 90°$$

$$45° + 60° + 90°.$$

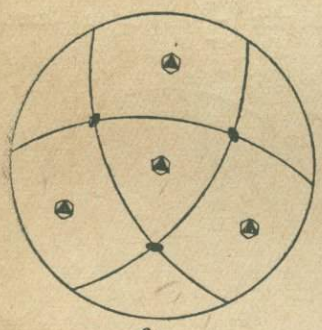
При всех других комбинациях получаем величины меньшие или равные 180°. Построим найденные треугольники по трем углам.



б

В первом случае вершинами треугольника служат оси G_3, G_3 и G_2 (фиг. 175*а*); во втором — G_4, G_3 и G_2 (фиг. 175*б*), или G_{4i}, G_3 и G_{2i} (фиг. 175*в*).

1) Рассмотрим первый случай. Вращая одну G_3 вокруг другой G_3, найдем еще $2\,G_3$, итого $4\,G_3$; вращая G_2 вокруг G_3, получим еще $2\,G_2$, итого $3\,G_2$. Всего, следовательно, будем иметь $4G_3\,3G_2$. Нетрудно убедиться, что никаких других элементов симметрии, при правильном построении треугольника $G_3G_3G_2$, больше не выведется.

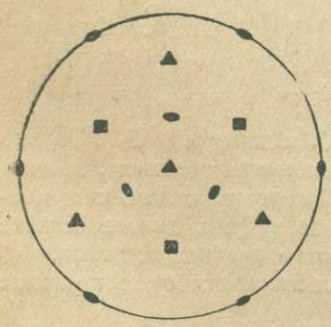


в

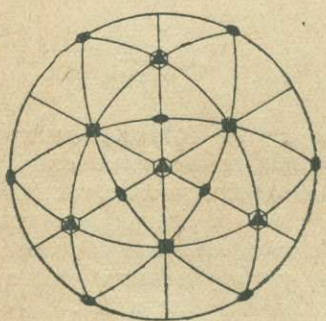
Порождающими элементами симметрии являются здесь две главные оси G_3G_3, остальные не являются порождающими, а потому они должны рассматриваться как добавочные. Поэтому этот вид симметрии следует считать *примитивным* видом симметрии, подобно видам первой колонны табл. 6 (фиг. 176*а*).

Будем теперь комбинировать полученную совокупность элементов симметрии с добавочными осями c, p, a и ap, совершенно так же, как это мы делали в первой части нашего вывода.

2) Прибавление центра инверсии вызовет появление плоскостей симметрии, перпендикулярных к $G_2 = a$. Так как имеем $3\,G_2$, то соответственно получим $3\,p$. Порождающие элементы G_3G_3c. Полная совокупность: $4\,G_3\,3\,G_2\,3\,pc$, Это *центральный* вид симметрии (фиг. 176*в*).



г



д

Фиг. 176.

3) Прибавление плоскости симметрии, проходящей через главные оси. Порождающие оси G_3G_3p. Строя равнодействующие, найдем, что G_2 превращаются в G_{4i}. Поэтому этот случай отвечает и прибавлению p к осям G_3 и G_{4i}, изображенным на фиг. 175 *в*. Всего получается

$$4G_3 3G_{4i}\ (3G_2)\ 6p.$$

Это — планальный вид симметрии (фиг. 176*б*). Прибавление плоскости симметрии перпендикулярно главной оси невозможно, так как превращает G_3 в G_{6i}; косое прибавление или не дает ничего нового, если проведенная плоскость пройдет через другую главную ось, или дает центральный вид симметрии, если проведенная плоскость пройдет через дигиры. Другие косые прибавления плоскости симметрии невозможны, так как при отражении в них сразу же выведутся новые G_3, проекции которых расположатся ближе к главной центральной G_3, чем имеющиеся. Мы же с самого начала взяли две главные оси G_3, ближайшие друг к другу.

4) Прибавление дигиры *a* может быть осуществлено только таким образом, чтобы не получились при этом новые G_3, расположенные ближе нашей главной G_3, чем расположена на ней проекция второй порождающей оси G_3. Нетрудно убедиться в том, что единственный здесь возможный случай, — это прибавление перпендикулярное к G_3. При этом появятся G_2 и между нашими порождающими G_3, так что в результате получатся G_4, отвечающие случаю фиг. 176*г*. Порождающие элементы: G_3G_3a. Вид симметрии, следовательно, следует назвать аксиальным. Полная совокупность: $4G_3$, $3G_4$, $6G_2$.

5) Прибавление *ap* приводит к „планаксиальному“ виду симметрии, изображенному на фиг. 176*д*. Порождающие элементы: G_3G_3ap; полная совокупность:

$$4G_3 3G_4 6G_2 9pc.$$

Можно доказать, что указанными пятью видами симметрии исчерпываются все виды с несколькими главными осями. Никаких же других расположений главных осей, кроме указанных на фиг. 176, быть не может.

Всего, следовательно, получено нами $27 + 5 = 32$ вида симметрии.

2. Классификация 32 видов симметрии кристаллов

Прежде всего, 32 вида симметрии группируются на три категории:

Низшую категорию образуют виды симметрии без главных осей.

Среднюю категорию образуют виды симметрии с одной главной осью.

Высшую категорию образуют виды симметрии с несколькими главными осями.

Таким образом низшей категорией объединяются 8 видов симметрии двух верхних рядов (табл. 6, стр. 151). Средней категорией объединяются остальные 19 видов симметрии таблиц 6 и 7. В высшую категорию попадают 5 видов симметрии табл. 8.

Таблица 8

Виды симметрии с несколькими главными осями

Примитивный вид симметрии	Центральный вид симметрии	Планальный вид симметрии	Аксиальный вид симметрии	Планаксиальный вид симметрии
$4G_3 3G_2$	$4G_3 3G_2 3pc$	$4G_3 3G_{4_i} (3G_2) 6p$	$4G_3 3G_4 6G_2$	$4G_3 3G_4 6G_2 9pc$

Более дробным является разделение категорий на „сингонии“ * (системы). Каждой сингонией объединяются виды симметрии с одинаковой главной осью или, в случае отсутствия главной оси, объединяются виды симметрии со сходными неглавными осями.

Легко видеть, что при таком принципе виды симметрии каждой горизонтальной строки таблиц 6—8 оказываются принадлежащими к одной „сингонии“.

* „Сингония“ по-гречески значит „сходноугольность“. В группах видов симметрии, принадлежащих к одной сингонии, устанавливаются оси координат со сходной совокупностью характерных углов между ними. О координатных осях речь будет ниже.

Так, в нижнем горизонтальном ряду табл. 6 все виды симметрии обладают одной гексагирой G_6. Поэтому все они относятся к одной сингонии „гексагирной“ (гексагональной). К этой же сингонии следует отнести и нижний горизонтальный ряд табл. 7, с видами симметрии, имеющими главной осью G_{6i}. Всего таким образом гексагирной сингонией объединяются $5+2=7$ видов симметрии (в таблице все они выписаны в один горизонтальный ряд).

„Тетрагирная“ (тетрагональная) сингония объединяет семь аналогичных видов симметрии, имеющих одну главную ось с наименованием G_4 или G_{4i} (в таблицах 6 и 7 виды симметрии этой сингонии располагаются в горизонтальном ряду, непосредственно над видами симметрии гексагирной сингонии).

Над видами симметрии тетрагирной сингонии в таблицах 6 и 7 расположен ряд видов симметрии с одной главной осью G_3. Эти виды симметрии образуют „тригирную“ (тригональную) сингонию.

Главные оси присутствуют еще в видах симметрии табл. 8. Однако в отличие от видов симметрии предыдущих сингоний, здесь в каждом виде симметрии имеется несколько главных осей (причем они бывают даже различных наименований), в частности всегда присутствуют $4G_3$.

Виды симметрии этой категории объединяются в „полигирную“ (кубическую) сингонию.*

Эти виды симметрии помещены в нижнем ряду табл. 9, причем их стереографические проекции повернуты относительно стереографических проекций фиг. 176 таким образом, чтобы $4G_3$ располагались под одинаковыми углами к оси проекции. Кристаллы этой сингонии всегда таким образом и ориентируются в пространстве.

Виды симметрии двух верхних рядов таблиц 6 и 9 не имеют главных осей.

Во втором ряду роль главной (вертикальной) оси играет дигира G_2, которая является здесь осью высшего наименования, а потому виды симметрии этого ряда объединяются в „дигирную“ (ромбическую) сингонию.

Что касается верхнего ряда табл. 6 и 9, то здесь никакой вертикальной оси, которая по аналогии играла бы роль главной, нет. Условно можно считать, что вертикально расположена „агира“ или „моногира“. Согласно с этим, виды симметрии этой строки должны считаться принадлежащими „агирной“ или „моногирной“ сингониям.

При этом мы видим, что в первых двух видах симметрии (примитивном и центральном) осью высшего наименования является одинарная ось, ось первого порядка (агира или инверсионная ось, так как центр инверсии есть агироида).

В остальных трех видах симметрии (планальном, аксиальном и планаксиальном), хотя роль главной оси играет опять-таки одинарная ось, однако добавочными осями здесь являются оси более высокого наименования. Осями высшего наименования служат здесь двойные оси (оси второго порядка): поворотные (дигиры) или инверсионные (плоскость симметрии есть дигироида). Благодаря этому обстоятельству, а также благодаря еще целому ряду других причин, с которыми мы познакомимся позднее, виды симметрии верхней горизонтальной строки разделяют на две сингонии, каждую из которых можно называть „агирной“ или „моногирной“. Условно к „агирной“ (триклинной) сингонии относят два первых вида симметрии (примитивный и центральный), а к „моногирной“ (моноклинной) — три остальных. Окончательно приходим к таким выводам:

Низшая категория разделяется на три сингонии.

1) К агирной (триклинной) относятся виды симметрии, имеющие осями наивысшего наименования одинарные оси (агиры и агироиды).

2) К моногирной (моноклинной) относятся виды симметрии, имеющие осями наивысшего наименования двойные оси (дигиры и дигироиды), причем каждый элемент симметрии присутствует везде в единственном числе.

---

* Напомним еще раз, что „поли“ по-гречески значит „много“ (полиморфизм).

3) К дигирной (ромбической) сингонии относятся виды симметрии, имеющие осями наивысшего наименования также двойные оси (дигиры и дигироиды), однако здесь хотя бы один из элементов симметрии присутствует не в единственном числе (всегда присутствует или несколько дигир или несколько дигироид, т. е. плоскостей симметрии).

Средняя категория разделяется на следующие три сингонии:

1) К тригирной (тригональной) относятся виды симметрии, единственной главной осью которых является тригира G_3.

2) К тетрагирной (тетрагональной) сингонии относятся виды симметрии, единственной главной осью которых является тетрагира G_4 или тетрагироида G_{4i}.

3) К гексагирной (гексагональной) сингонии относятся виды симметрии, единственной главной осью которых является гексагира G_6 или гексагироида G_{6i}.

Высшая категория заключает в себе одну сингонию — полигирную (кубическую), к которой относятся виды симметрии, имеющие несколько главных осей, в частности в видах симметрии этой сингонии всегда присутствуют четыре тригиры ($4G_3$).

Указанная классификация видов симметрии легко запоминается, если для их изучения пользоваться табл. 9, в которой сопоставлены все 32 вида симметрии кристаллов.

Табл. 9 является, конечно, и лучшим ключом для определения вида симметрий того или иного многогранника.

Из вывода было видно, что каждый вид симметрии вполне определяется его „порождающими“ элементами симметрии. Поэтому, для нахождения вида симметрии, в сущности достаточно нахождения только этих порождающих элементов. Для их определения отыскиваем у данной фигуры главные оси, которыми определяется категория. После главных осей ищем элементы симметрии, перпендикулярные найденной главной оси: дигиру и дигироиду (дигироиды, перпендикулярные к оси, являются плоскостями симметрии, проходящими вдоль оси). В случае их отсутствия, смотрим — есть ли центр инверсии. Этих определений вполне достаточно, чтобы записать порождающие элементы симметрии. Порождающий элементы симметрии являются наиболее удобным условным обозначением, формулой, характеризующей вид симметрии. Поэтому порождающие элементы также приводятся в табл. 9. Зная принципы классификации, нетрудно найти в таблице вид симметрии, порождающие элементы которого тождественны найденным нами у исследуемой фигуры. Остается только, с помощью стереографической проекции, проверить правильность нашего определения и убедиться в том, что действии тельно все те элементы симметрии, которые изображены в проекции, присутствуют у нашей фигуры. Этому может помочь табл. 10, составленная так же, как и табл. 9, но в которой приводятся полные списки всех элементов симметрии фигур.

Этот метод определений вида симметрии почти всегда безошибочно приводит к цели. Иногда, однако, случается, что определенные у фигуры „порождающие“ элементы симметрии совершенно не находятся в таблице.

Это значит, что мы или совсем неверно их определили, или определили кроме порождающих элементов, еще и лишние равнодействующие, или, наконец за порождающие элементы выбрали другие элементы симметрии по сравнению с табл. 9.

Такие промахи чаще всего случаются при определении видов симметрии низшей категории (без главных осей). Там порождающие элементы симметрии можно выбирать различными способами. Поэтому лучше всего в этих случаях сначала найти сингонию, непосредственно пользуясь определениями сингоний низшей категории (стр. 156); это определит горизонтальный ряд табл. 9, к которому принадлежит вид симметрии определяемой фигуры. Таким образом узнаем,

Таблица 9

Главные оси (гиры)	Добавочные оси	$(G_1=)-$	$(G_{1i}=)c$	$(G_{2i}=)p$	$(G_2=)a$	$(G_2=)a$ или $(G_{2i}=)p$	$(G_1=)-$	$(G_2=)a$ или $(G_{2i}=)p$	Главные оси (гироиды)
	Сингонии	Виды симметрии							
		Примитивный	Центральный	Планальный	Аксиальный	План-аксиальный	Гироидо-примитивный	Гироидо-планальный	
G_0 или G_1	Агирная и моногирная	1 G_0	2 G_0C	3 G_1p	4 G_1a	5 G_1ap			
G_2	Дигирная	см 4	см 5	6 G_2p	7 G_2a	8 G_2ap			
G_3	Тригирная	9 G_3	10 G_3C	11 G_3p	12 G_3a	13 G_3ap			
G_4	Тетрагирная	14 G_4	15 G_4C	16 G_4p	17 G_4a	18 G_4ap	19 G_{4i}	20 $G_{4i}p$	G_{4i}
G_6	Гексагирная	21 G_6	22 G_6C	23 G_6p	24 G_6a	25 G_6ap	26 G_{6i}	27 $G_{6i}p$	G_{6i}
G_3G_3	Полигирная	28 G_3G_3	29 G_3G_3C	30 G_3G_3p	31 G_3G_3a	32 G_3G_3ap			

Таблица 10

Виды симметрии / Сингонии	Виды симметрии						
	Примитивный	Центральный	Планальный	Аксиальный	Планаксиальный	Гироидо-примитивный	Гироидо-планальный
Агирная	—	c	p	G_2	c, G_2, p		
Моногирная			G_2, $2p$	$3G_2$	$c, 3G_2, 3p$		
Дигирная			G_3, $3p$	G_3, $3a$	$G_3, 3a, 3p, c$		
Тригирная	G_3	G_3, c	G_4, $4p$	G_4, $4a$	$G_4, 4a, 5p, c$	$G_{4i}(G_2)$	$G_{4i}(G_2)$, $2a$, $2p$
Тетрагирная	G_4	G_4, p, c	$4, G_3$, $3G_2(3G_{4i})$, $6p$	$3G_4$, $4G_3$, $6G_2$	$3G_4, 4G_3$, $6G_2, 9p, c$	$G_{6i}(G_3, p)$	$G_{6i}(G_3p)3a$, p
Гексагирная	G_6	G_6, p, c	G_6 $6p$	G_6, $6a$	$G_6, 6a, 7p, c$		
Полигирная	$4G_3, 3G_2$	$4G_3, 3G_2$, $3p, c$					

которая из осей, G_1 или G_2, должна здесь играть роль главной оси, и легко составляем правильную формулу для порождающих элементов симметрии.

Другим источником недоразумений является неправильное определение видов симметрии, главной осью которых является гироида G_{4i} или G_{6i}. Эти элементы симметрии начинающие чаще всего просто пропускают: G_{4i} принимают за G_2, а G_{6i} — за G_3. Отсюда вытекает невозможность найти в таблице вид симметрии, подходящий к определенному. Кроме того, даже при нахождении G_i часто за порождающий добавочный к главному элементу симметрии берут не плоскость симметрии, но дигиру или, что уже просто неверно, и плоскость и дигиру (пишут G_ia или G_iap вместо G_ip).

Ограничимся двумя указанными предостережениями от ошибок и перейдем к некоторым замечаниям по поводу приводимых названий.

Кристаллографическая номенклатура является вообще больным местом в кристаллографии. Различные ученые и исследователи применяют различные названия, подчас очень трудные и запутанные. Мы будем придерживаться новых простых названий, выработанных в последние годы Федоровским институтом кристаллографии.

Однако старые наиболее употребительные, исторически сложившиеся названия сингоний в настоящее время, конечно, нельзя игнорировать, а потому они и приведены в скобках, наряду с предлагаемыми рациональными названиями.

Как видим, старые названия сингоний основываются на различных признаках, не являющихся главными признаками сингоний. Даже наиболее рациональные названия — тригональная, тетрагональная и гексагональная — следует считать неудачными, поскольку в переводе с греческого они значат „треугольная", „четырехугольная" и „шестиугольная". Фигуры, принадлежащие этим сингониям, далеко не всегда имеют трех-, четырех- или шестиугольные формы.

Названия видов симметрии еще более многочисленны и трудны. Каждый вид симметрии имеет по десятку различных названий, тогда как в сущности было бы вполне достаточно никаких названий видам симметрии не приписывать, обозначая их просто при помощи порождающих элементов симметрии. Среди же различных названий, безусловно, наиболее простыми и рациональными являются приведенные у нас в таблицах названия Федоровского института. Эти названия отвечают самому существу дела — они даны по порождающим элементам симметрии.

Условные символические обозначения для видов симметрии также весьма разнообразны. Наиболее употребительны обозначения Шенфлиса, наиболее простые и рациональные обозначения — Федоровского института.

Для различных справок в табл. 11 сопоставлены различные, наиболее важные названия различных сингоний, видов симметрии и их условных обозначений, приводимые в русской литературе.

Сопоставление различных названий и обозначений сингоний и видов симметрии

№№	Рациональные названия и обозначения Федоровского института	Обозначения Шенфлиса	Старые названия сингоний (или систем) и видов симметрии (или классов)
	Агирная сингония		**Триклинная сингония**, триклиническая система, трехклиномерная система.
1	G_0 — примитивный вид симметрии	C_1	Моноэдрический вид симметрии, гемипризматический, гемиэдрия триклинной системы, асимметрический класс.
2	G_0c — центральный вид симметрии	S_2	Пинокоидальный вид симметрии, голоэдрия триклинной системы.
	Моногирная сингония		**Моноклинная сингония**, моноклиническая система, одноклиномерная система.
3	G_1p — планальный вид симметрии	C_1^h	Диэдрический безосный (анаксиальный) вид симметрии, гемипризматический безосный, доматический класс, гемиэдрия моноклинной системы.
4	G_1a — аксиальный вид симметрии	C_2	Диэдрический осевой (аксиальный) вид симметрии, гемипризматический осевой, сфеноидальный, гемиморфия моноклинной системы, сфеноидальная гемиэдрия моноклинной системы.
5	G_1ap — планаксиальный вид симметрии	C_2^h	Призматический вид симметрии, ромбопризматический, голоэдрия моноклинной системы.
	Дигирная сингония		**Ромбическая сингония**, орторомбическая система.
6	G_2p — планальный вид симметрии	C_2^v	Ромбопирамидальный вид симметрии, гемиморфия ромбической системы.
7	G_2a — аксиальный вид симметрии	V	Ромботетраэдрический вид симметрии, ромбосфеноэдрический, гемиэдрия (сфеноидальная) ромбической системы.
8	G_2ap — планаксиальный вид симметрии	V^h	Ромбодипирамидальный вид симметрии, голоэдрия ромбической системы.
	Тригирная сингония		**Тригональная подсистема**, тригональная система.
9	G_3 — примитивный вид симметрии	C_3	Тригонально-пирамидальный вид симметрии, тригональная тетартоэдрия тригональной системы, огдоэдрия гексагональной системы.
10	G_3c — центральный вид симметрии	S_6	Ромбоэдрический вид симметрии, тригонально - ромбоэдрический, ромбоэдрическая тетартоэдрия гексагональной системы.
11	G_3p — планальный вид симметрии	C_3^v	Дитригонально-пирамидальный вид симметрии, гемиморфная гемиэдрия тригональной системы, тетартоморфия тригональной системы.
12	G_3a — аксиальный вид симметрии	D_3	Тригонально-трапецоэдрический вид симметрии, трапецоэдрическая тетартоэдрия гексагональной системы.
13	G_3ap — планаксиальный вид симметрии	D_3^d	Дитригонально - скаленоэдрический вид симметрии, ромбоэдрическая гемиэдрия гексагональной системы, скаленоэдрическая гемиэдрия гексагональной системы.
	Тетрагирная сингония		**Тетрагональная сингония**, квадратная система.
14	G_4 — примитивный вид симметрии	C_4	Тетрагонально-пирамидальный вид симметрии, пирамидальная тетартоэдрия, гемиморфия квадратной системы.

№№	Рациональные названия и обозначения Федоровского института	Обозначения Шенфлиса	Старые названия сингоний (или систем) и видов симметрии (или классов)
15	G_4c — центральный вид симметрии	C_4^h	Тетрагонально - дипирамидальный вид симметрии, тетрагонально-бипирамидальный вид симметрии, пирамидальная гемиэдрия квадратной системы.
16	G_4p — планальный вид симметрии	C_4^v	Дитетрагонально-пирамидальный вид симметрии, гемиморфия квадратной системы.
17	G_4a — аксиальный вид симметрии	D_4	Тетрагонально - трапецоэдрический вид симметрии, трапецоэдрическая гемиэдрия квадратной системы.
18	G_4ap — планаксиальный вид симметрии	D_4^h	Дитетрагонально - дипирамидальный вид симметрии, дитетрагонально - бипирамидальный, голоэдрия квадратной системы.
19	G_{4i}—инверсионно-примитивный вид симметрии	S_4	Тетрагонально-тетраэдрический вид симметрии, тетрагонально - сфеноэдрический, сфеноидальная тетартоэдрия квадратной системы.
20	$G_{4i}p$ — инверсионно-планальный вид симметрии	V^d	Тетрагонально - скаленоэдрический вид симметрии, скаленоэдрическая гемиэдрия квадратной системы, сфеноидальная гемиэдрия квадратной системы.
	Гексагирная сингония		Гексагональная сингония
21	G_6—примитивный вид симметрии	C_6	Гексагонально-пирамидальный вид симметрии, гемиморфно-пирамидальная гемиэдрия гексагональной системы, пирамидальная тетартоэдрия гексагональной системы, тетартоморфия гексагональной системы.
22	G_6c — центральный вид симметрии	C_6^h	Гексагонально-дипирамидальный вид симметрии, гексагонально-бипирамидальный, пирамидальная гемиэдрия гексагональной системы.
23	G_6p — планальный вид симметрии	C_6^v	Дигексагонально - пирамидальный вид симметрии, гемиморфия гексагональной системы, гемиморфная гемиэдрия гексагональной системы.
24	G_6a—аксиальный вид симметрии	D_6	Гексагонально - трапецоэдрический вид симметрии, трапецоэдрическая гемиэдрия гексагональной системы.
25	G_6ap — планаксиальный вид симметрии	D_6^h	Дигексагонально - дипирамидальный вид симметрии, дигексагонально - бипирамидальный, голоэдрия гексагональной системы.
26	G_{6i}—инверсионно-примитивный вид симметрии	C_3^h	Тригонально - дипирамидальный вид симметрии, тригонально - бипирамидальный, тригонотипная тетартоэдрия гексагональной системы, сфеноидальная тетартоэдрия гексагональной системы.
27	$G_{6i}p$ — инверсионно-планальный вид симметрии	D_3^h	Дитригонально-дипирамидальный вид симметрии, дитригонально-бипирамидальный, голоэдрия тригональной системы, тригонотипная гемиэдрия гексагональной системы, сфеноидальная гемиэдрия гексагональной системы.
	Полигирная сингония		Кубическая сингония, кубо-октаэдрическая, правильная, тессеральная.
28	G_3G_3—примитивный вид симметрии	T	Пентагон-три-тетраэдрический вид симметрии, тритетраэдрический, тетартоэдрия правильной системы.

№№	Рациональные названия и обозначения Федоровского института	Обозначения Шенфлиса	Старые названия сингоний (или систем) и видов симметрии (или классов)
29.	G_3G_3c—центральный вид симметрии	T^h	Дидодекаэдрический вид симметрии, додекаэдрический, пентагональная гемиэдрия правильной системы.
30	G_3G_3p — планальный вид симметрии	T^d	Гексатетраэдрический вид симметрии, тетраэдрический, тетраэдрическая гемиэдрия правильной системы.
31	G_3G_3a—аксиальный вид симметрии	O	Пентагон-три-октаэдрический вид симметрии, триоктаэдрический, гироэдрический, плагиэдрическая гемиэдрия правильной системы.
32	G_3G_3ap—планаксиальный вид симметрии	O^h	Гексоктаэдрический вид симметрии, октаэдрический, голоэдрия правильной системы.

Глава XI

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГРУППЫ (РАЗНОВИДНОСТИ) СИММЕТРИИ

1. Сложение переносов с различными другими элементами симметрии

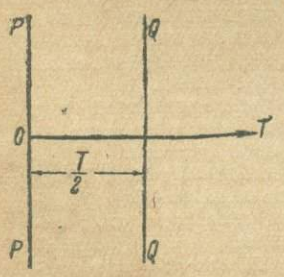
32 вида симметрии характеризуют симметрию конечных кристаллических многогранников. Перейдем теперь к симметрии внутреннего строения кристаллов, к симметрии кристаллических решеток. Среди различных элементов их симметрии трансляции, как мы знаем, являются обязательными. Отсюда следует, что изучение симметрии кристаллических решеток невозможно без детального ознакомления со свойствами этих трансляций. В первую очередь остановимся на теоремах сложения трансляций с различными другими элементами симметрии.

Теорема 31. *Равнодействующим преобразованием отражения в плоскости P и поступания, направление которого перпендикулярно P, является отражение в плоскости, параллельной P и отстоящей от нее в сторону поступания на величину, равную половине поступания.*

Пусть проекция плоскости отражения изображается на перпендикулярной к ней плоскости чертежа прямой PP, поступание — вектором OT (фиг. 177).

Требуется найти равнодействующее преобразование:

Преобр. R = Отр. PP · Поступ. OT.



Фиг. 177.

Поступание OT заменим отражениями в двух плоскостях PP и QQ по теореме 15, согласно которой обе плоскости перпендикулярны OT и отстоят друг от друга на расстоянии $\frac{OT}{2}$:

Преобр. R = Отр. PP (Отр. PP · Отр. QQ)

или:

Преобр. R = (Отр. PP · Отр. PP) · Отр. QQ.

Два последовательных отражения в одной и той же плоскости PP взаимно уничтожаются:

Преобр. R = Отр. QQ.

Таким образом, равнодействующим преобразованием будет отражение в плоскости QQ, расположенной (фиг. 177) как указано в условии теоремы.

Следствие. Равнодействующим элементом симметрии плоскости симметрии P и перпендикулярной к ней трансляции T является плоскость симметрии, параллельная данной и отстоящая от нее в сторону трансляции на величину половины ее длины.

Теорема 32. *Равнодействующим преобразованием отражения в плоскости P и неперпендикулярного к плоскости P поступания T является скользящее отражение в плоскости, параллельной P и отстоящей от P в сторону поступания на величину половины проекции вектора поступания на нормаль к плоскости P. Величина скольжения равна проекции данного вектора на эти плоскости.*

Преобр. R = Отр. P · Поступ. T (фиг. 178).

Пусть поступание выражается трансляцией OT. Разложим ее на две трансляции по правилу параллелограма, причем OT будет диагональю такого параллелограма, одна сторона которого T_p направлена вдоль плоскости P, а другая T_n — ей перпендикулярна (фиг. 178).

$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } P \cdot \text{Поступ. } OT_n \cdot \text{Поступ. } OT_p$$

или:

$$\text{Преобр. } R = (\text{Отр. } P \cdot \text{Поступ. } OT_n) \cdot \text{Поступ. } OT_p.$$

Согласно предыдущей теореме, сложим преобразования, поставленные в скобках и получим:

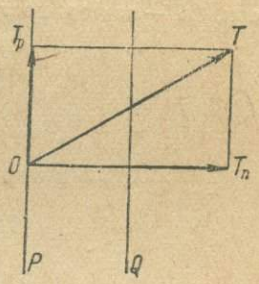
$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } Q \cdot \text{Поступ. } OT_p.$$

Здесь плоскость Q параллельна P и отстоит от нее на расстоянии $\frac{OT_n}{2}$. Таким образом отражение в плоскости с последующим неперпендикулярным поступанием сводится к отражению в параллельной плоскости с последующим поступанием вдоль этой плоскости, т. е. сводится к скользящему отражению в плоскости Q. Величина скольжения OT_p и расстояние от данной плоскости до полученной плоскости Q, как видно из вывода, отвечают требованиям теоремы.

Следствие. Равнодействующим элементом симметрии плоскости симметрии P и неперпендикулярной трансляции T является плоскость скольжения, параллельная данной и отстоящая от нее в сторону трансляции на величину половины проекции этой трансляции на нормаль к плоскости. Величина скольжения равна проекции данной трансляции на плоскость.

Теорема 33. *Скользящее отражение с величиной скольжения t и поступание T, перпендикулярное к плоскости скольжения, дают в качестве равнодействующего преобразования скользящее же отражение в плоскости, параллельной данной, с такой же величиной и направлением скольжения; эта плоскость отстоит от данной в сторону поступания на величину $\frac{T}{2}$.*

$$\text{Преобр. } R = \text{Скольз. отр. } P_t \cdot \text{Поступ. } OT.$$



Фиг. 178.

Скользящее отражение P_t заменяем поступанием t и отражением в плоскости PP (фиг. 177).

$$\text{Преобр. } R = \text{Поступ. } t \cdot \text{Отр. } PP \cdot \text{Поступ. } OT$$

или:

$$\text{Преобр. } R = \text{Поступ. } t\ (\text{Отр. } PP \cdot \text{Поступ. } OT).$$

Согласно выводам теоремы 31, выражение, стоящее в скобках, можно заменить отражением в плоскости QQ, параллельной плоскости PP и отстоящей от последней в сторону поступания на половину ее величины.

$$\text{Преобр. } R = \text{Поступ. } t \cdot \text{Отр. } QQ.$$

В результате приходим к отражению в плоскости, связанному с поступанием t, параллельным этой плоскости, т. е. к скользящему отражению. Плоскость скользящего отражения, как видно из построения, отстоит на величину $\frac{T}{2}$ от данной плоскости скольжения.

Следствие. Равнодействующим элементом симметрии плоскости скольжения с величиной скольжения t и перпендикулярной к ней трансляции T является плоскость скольжения, параллельная данной с такой же величиной и направлением скольжения и отстоящая от данной в сторону трансляции на половину ее длины $\left(\frac{T}{2}\right)$.

Теорема 34. *Равнодействующим преобразованием скользящего отражения (с величиной скольжения t) и неперпендикулярного к плоскости скользящего отражения поступания T является скользящее отражение, плоскость которого параллельна данной и отстоит от нее на величину $\frac{T_n}{2}$. Здесь T_n — проекция вектора данного поступания T на нормаль к плоскости скользящего отражения. Величина и направление скольжения определяются как указано в доказательстве.*

Найдем равнодействующее преобразование (фиг. 178):

$$\text{Преобр. } R = \text{Скольз. отр. } P_t \cdot \text{Поступ. } OT$$

или:

$$\text{Преобр. } R = (\text{Поступ. } t \cdot \text{Отр. } P) \cdot \text{Поступ. } OT$$

или:

$$\text{Преобр. } R = \text{Поступ. } t\ (\text{Отр. } P \cdot \text{Пост. } OT).$$

Согласно теореме 31, выражение, стоящее в скобках, можно заменить скользящим отражением в плоскости скольжения Q. Направление скольжения OT_p равно проекции данного переноса OT на плоскость P или Q.

$$\text{Преобр. } R = \text{Поступ. } t \cdot \text{Скольз. отр. } Q$$

или:

$$\text{Преобр. } R = \text{Поступ. } t \cdot \text{Поступ. } OT_p \cdot \text{Отр. } Q$$

или:

$$\text{Преобр. } R = (\text{Поступ. } t \cdot \text{Поступ. } OT_p) \cdot \text{Отр. } Q.$$

Два поступания (t и OT_p) складываются в одно равнодействующее поступание t' (теорема 17). Так как оба эти поступания параллельны плоскостям P и Q, то и диагональ параллелограма t' будет также параллельна этим плоскостям.

$$\text{Преобр. } R = \text{Пост. } t' \cdot \text{Отр. } Q.$$

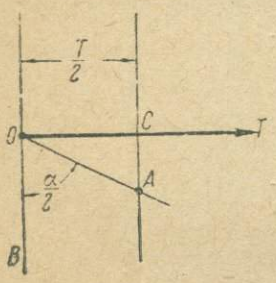
Таким образом приходим к скользящему отражению в плоскости Q. Направление и величина скольжения находится как диагональ параллелограма, построенного на величине скольжения t и проекции T_p данного поступания на плоскость скольжения.

Следствие. Равнодействующим элементом симметрии плоскости скольжения P_t и неперпендикулярной трансляции T является плоскость скольжения Q_t, параллельная данной. Ее расстояние до P_t, величина и направление скольжения определяются согласно теореме 34.

Теорема 35. *Равнодействующим преобразованием поворота вокруг оси на угол α и перпендикулярного к оси поступания на величину OT является поворот на угол α вокруг оси, параллельной данной. Ее расположение по отношению к данной определяется как указано в доказательстве.*

Пусть O — проекция оси поворота на плоскость чертежа, перпендикулярного данной оси, OT — вектор поступания (фиг. 179). Требуется найти равнодействующее преобразование R:

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } \alpha \cdot \text{Поступ. } OT.$$



Фиг. 179.

Поворот на угол α заменяем последовательным отражением в плоскостях OA и OB, расположенных под углом $\frac{\alpha}{2}$ друг к другу, причем OB берем перпендикулярно OT:

$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } OA \cdot \text{Отр. } OB \cdot \text{Поступ. } OT.$$

Поступание OT заменяем последовательным отражением в двух параллельных плоскостях OB и CA, расположенных на расстоянии $\frac{OT}{2}$ друг от друга:

$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } OA \cdot \text{Отр. } OB \cdot \text{Отр. } OB \cdot \text{Отр. } CA.$$

Два последовательных отражения в плоскости OB взаимно уничтожаются:

$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } OA \cdot \text{Отр. } CA.$$

Два последовательных отражения в пересекающихся по оси A плоскостях OA и CA заменяем поворотом вокруг оси A на угол, вдвое больший угла $OAC = \frac{\alpha}{2}$; т. е. заменяем поворотом на угол α вокруг оси A:

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } A.$$

Ось A, как видно из чертежа, отстоит от оси O на расстояние

$$OA = l = \frac{OC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{T}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

или:

$$l = \frac{T}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

направление OA делает угол с направлением OT, равный $AOT = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Теорема доказана.

Следствие. Равнодействующим элементом симметрии гиры G с углом поворота α и перпендикулярной к ней трансляции T является гира, параллельная данной и с тем же углом поворота. Ее расположение относительно данной определяется согласно теореме 35.

Теорема 36. *Равнодействующим преобразованием поворота вокруг оси на угол α и неперпендикулярного к ней поступания T является винтово-поворотное преобразование, с поворотом на угол α вокруг оси, параллельной данной. Положение этой оси и величина поступания вдоль нее определяются как указано в доказательстве.*

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } \alpha \cdot \text{Пост. } OT.$$

Разложим перенос OT на два составляющие по правилу параллелограма; одно из них направим вдоль нашей оси поворота G (пусть эта составляющая равна T_g). Вторую, с величиной T_n, направим нормально оси.

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } \alpha \cdot \text{Поступ. } OT_n \cdot \text{Поступ. } OT_g$$

или:

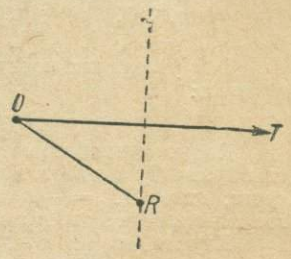
$$\text{Преобр. } R = (\text{Пов. } \alpha \cdot \text{Поступ. } OT_n) \cdot \text{Поступ. } OT_g.$$

Складывая, согласно предыдущей теореме, два первых преобразования, получим:

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов.}_A \alpha \cdot \text{Пост. } OT_g.$$

Поворот вокруг оси A (параллельной оси G), на угол α с последующим поступанием OT_g вдоль этой оси (или, что то же, вдоль оси $G \parallel A$) представляет винтовое преобразование. Как видно из вывода, ось этого преобразования расположена по отношению к данной так, как расположилась бы ось равнодействующего преобразования при сложении поворота с перпендикулярным поступанием OT_n (см. теорему 35).

Следствие. Равнодействующим элементом симметрии гиры с элементарным углом поворота α и неперпендикулярной трансляции T является геликогира, параллельная данной и с тем же элементарным углом поворота α. Ее положение и ход определяются согласно теореме 36.



Фиг. 180.

Теорема 37. *Равнодействующим винтово-поворотного преобразования (с поступанием t и с поворотом на угол α вокруг некоторой оси) и перпендикулярного к этой оси поступания T является винтово-поворотное преобразование (с поступанием t и с поворотом на угол α вокруг оси, параллельной данной). Ее расположение определяется как указано в доказательстве.*

Найдем равнодействующее преобразование (фиг. 180):

$$\text{Преобр. } R = \text{Винт. пов. } G_t \cdot \text{Поступ. } OT.$$

Винтовое преобразование около G_t представим как поступание t с последующим поворотом вокруг оси G на α:

$$\text{Преобр. } R = \text{Поступ. } t \cdot \text{Пов. } \alpha \cdot \text{Поступ. } OT$$

или:

$$\text{Преобр. } R = \text{Поступ. } t \ (\text{Пов. } \alpha \cdot \text{Поступ. } OT).$$

Согласно теореме 35, вращение вокруг оси G на угол α с последующим поступанием OT заменяем поворотом вокруг другой оси A, параллельной данной, на этот же угол α.

$$\text{Преобр. } R = \text{Поступ. } t \cdot \text{Пов.}_A \alpha.$$

Поступание t, связанное с поворотом вокруг оси, параллельной направлению поступания, есть винтовое преобразование.

Направление, по которому равнодействующая ось сдвинута относительно данной, образует угол $\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$ с направлением переноса T; величина, на которую она сдвинута относительно данной, равна $l = \dfrac{T}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

Следствие. Равнодействующей геликогиры G_t (с элементарным углом поворота α и с ходом t) и перпендикулярной трансляции T является геликогира G_t, параллельная данной, с таким же углом α и с таким же ходом t; расположение этой геликогиры определяется согласно теореме 37.

Теорема 38. *Равнодействующим винтово-поворотного преобразования (с поступанием t и с поворотом на угол α вокруг некоторой оси) и не перпендику-*

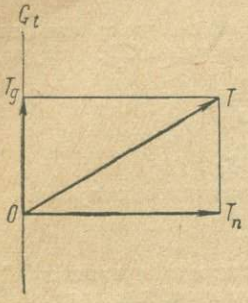
лярного к этой оси поступания T является винтово-поворотное преобразование тоже с поворотом α вокруг оси, параллельной данной. Ее расположение и величина поступания вдоль нее определяются как указано в доказательстве.

Найдем равнодействующее преобразование (фиг. 181):

$$\text{Преобр. } R = \text{Винт. пов. } G_t \cdot \text{Поступ. } OT.$$

Разложим вектор данного поступания OT на две составляющие OT_n и OT_g по правилу параллелограмма: OT_g — направим вдоль оси, OT_n — нормально к ней.

$$\text{Преобр. } R = \text{Винт. пов. } G_t \cdot \text{Поступ. } OT_n \cdot \text{Поступ. } OT_g$$



Фиг. 181.

или:

$$\text{Преобр. } R = (\text{Винт. пов. } G_t \cdot \text{Поступ. } OT_n) \cdot \text{Поступ. } OT_g.$$

Винтовое преобразование G_t с перпендикулярным к оси этого преобразования поступанием OT_n, как это видно из предыдущей теоремы, можно заменить винтовым преобразованием вокруг некоторой параллельной оси A (с тем же углом поворота α и поступанием вдоль оси t. Положение этой оси определяется как указано в предыдущей теореме 37).

$$\text{Преорб. } R = \text{Винт. пов.. } A_t \cdot \text{Поступ. } OT_g$$

или:

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } \alpha \cdot \text{Поступ. } t \cdot \text{Поступ. } OT_g$$

или:

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } \alpha\ (\text{Поступ. } t \cdot \text{Поступ. } OT_g).$$

Оба указанных поступания параллельны оси поворота, а потому алгебраически суммируются:

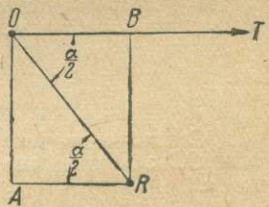
$$\text{Преобр. } R = \text{Пов. } \alpha \cdot \text{Поступ. } (t + OT_g).$$

Получим винтовое преобразование, причем ось A_t этого преобразования параллельна данной оси G_t и имеет тот же угол поворота α, но поступание равно $(t + OT_g)$. (В частном случае, если $OT_g = -t$, получим в качестве равнодействующей R_t не винтовое, но простое поворотное преобразование.)

Как видно из построений, ось равнодействующего преобразования расположена по отношению к данной так же, как она располагается и при сложении неперпендикулярного поступания, не с винтовым поворотом, но с простым поворотом (теорема 36).

Следствие. Равнодействующей геликогиры G_t (с углом поворота α и ходом t) и неперпендикулярной к ней трансляции T является геликогира (в частном случае гира) с тем же углом поворота α, параллельная данной. Ее расположение и ход определяются согласно теореме 38.

Теорема 39. *Равнодействующей инверсионно-поворотного преобразования (с поворотом на угол α вокруг некоторой оси) и перпендикулярного к этой оси поступания T является инверсионно-поворотное преобразование с поворотом на угол α вокруг оси, параллельной данной. Ее расположение относительно данной оси определяется как указано в доказательстве.*



Фиг. 182.

Найдем равнодействующее преобразование (фиг. 182):

$$\text{Преобр. } R = \text{Инв. пов. } G_i \cdot \text{Поступ. } OT$$

или:

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов.}_{G_i}\alpha \cdot \text{Инв. } O \cdot \text{Поступ. } OT. \qquad (1)$$

Поворот вокруг оси G_i на угол α заменим последовательным отражением в двух плоскостях, пересекающихся по этой оси под углом $\frac{\alpha}{2}$. За плоскость второго отражения примем плоскость, проходящую через ось и вектор OT. Ее след изобразится прямой OT. Первая плоскость отражения спроектируется тогда прямой OR. Имеем:

$$\text{Пов.}_{G_i}\alpha = \text{Отр. } OR \cdot \text{Отр. } OT. \qquad (2)$$

Инверсию в точке O заменяем последовательным отражением в трех, взаимно перпендикулярных плоскостях, пересекающихся в точке O (см. теорему 12, следствие 7). Первую из этих трех плоскостей расположим проходящей через вектор OT, перпендикулярно плоскости чертежа (ее след изобразится прямой OT), вторую совместим с плоскостью чертежа (обозначим ее H), а третью расположим перпендикулярно переносу OT.

$$\text{Инв. } O = \text{Отр. } OT \cdot \text{Отр. } H \cdot \text{Отр. } OA. \qquad (3)$$

Поступание OT заменим последовательным отражением в двух параллельных плоскостях, нормальных OT и отстоящих одна от другой на величину половины поступания (теорема 15). За плоскость первого отражения примем плоскость OA. Плоскостью второго отражения будет тогда плоскость RB:

$$\text{Поступ. } OT = \text{Отр. } OA \cdot \text{Отр. } RB. \tag{4}$$

Подставляя (2), (3) и (4) в выражение (1), получим:

$$\text{Преобр. } R = (\text{Отр. } OR \cdot \text{Отр. } OT) \cdot (\text{Отр. } OT \cdot \text{Отр. } H \cdot \text{Отр. } OA) \cdot (\text{Отр. } OA \cdot \text{Отр. } RB)$$

или:

$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } OR \cdot (\text{Отр. } OT \cdot \text{Отр. } OT) \cdot \text{Отр. } H\ (\text{Отр. } OA \cdot \text{Отр. } OA) \cdot \text{Отр. } RB.$$

Здесь в скобках выделены двойные отражения в одних и тех же плоскостях, которые взаимно уничтожают друг друга:

$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } OR \cdot \text{Отр. } H \cdot \text{Отр. } RB.$$

Проведем теперь через линию пересечения плоскостей OR и RB плоскость RA параллельно RB. Мы знаем, что отражение в такой плоскости, произведенное последовательно два раза, не будет изменять результатов преобразований. Введем такое двойное отражение:

$$\text{Преобр. } R = \text{Отр. } OR \cdot (\text{Отр. } RA \cdot \text{Отр. } RA) \cdot \text{Отр. } H \cdot \text{Отр. } RB$$

или:

$$\text{Преобр. } R = (\text{Отр. } OR \cdot \text{Отр. } RA) \cdot (\text{Отр. } RA \cdot \text{Отр. } H \cdot \text{Отр. } RB). \tag{5}$$

Последовательное отражение в двух пересекающихся плоскостях OR и RA заменяем поворотом вокруг линии их пересечения оси R на угол, вдвое бо́льший угла между этими плоскостями. Угол между плоскостями, как это видно из чертежа, равен $\frac{\alpha}{2}$.

Таким образом:

$$\text{Отр. } OR \cdot \text{Отр. } RA = \text{Пов.}_R\, \alpha. \tag{6}$$

Последовательное отражение в трех взаимно перпендикулярных плоскостях RA, H и RB заменяем центром инверсии в точке их пересечения R:

$$\text{Отр. } RA \cdot \text{Отр. } H \cdot \text{Отр. } RB = \text{Инв. } R. \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в выражение (5), получим:

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов.}_R\, \alpha \cdot \text{Инв. } R.$$

Получим инверсионно-поворотное преобразование. Ось R этого преобразования имеет тот же угол поворота α, как и ось G_i данного преобразования. По отношению к ней равнодействующая сдвинута в направлении, образующем с направлением данного поступания OT угол $\frac{\alpha}{2}$, на величину

$$OR = \frac{\frac{OT}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \text{или} \quad l = \frac{T}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Равнодействующей гироиды G_i (с углом поворота α) и перпендикулярной к ней трансляции T является гироида с тем же углом поворота α, параллельная данной. Ее расположение относительно данной определяется согласно теореме 39.

Следствие 2. Так как простую инверсию в некоторой точке O можно рассматривать как инверсионно-поворотное преобразование с поворотом на угол $\alpha = 360°$, то можно найти и равнодействующее преобразование инверсии и поступания. Согласно теореме, равнодействующим преобразованием будет инверсионно-поворотное с таким же углом поворота, т. е. с $\alpha = 360°$. Другими словами, равнодействующим будет простая инверсия в точке O', которая не совпадает с центром O данной инверсии. Искомая точка O' должна быть смещена в направлении, составляющем с направлением данного поступания угол $\frac{\alpha}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$, т. е. смещена с направлением самого поступания. Величина этого смещения равна:

$$= \frac{T}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{T}{2}.$$

Равнодействующим преобразованием инверсии в некоторой точке O и поступания T является инверсия в другой точке O′. Эта точка смещена относительно данной в направлении поступания на половину поступания T.

Следствие 3. *Равнодействующим элементом симметрии центра инверсии и трансляции T является центр инверсии, смещенный относительно данного в направлении трансляции T, на половину величины этой трансляции.*

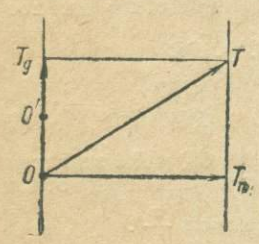
Теорема 40. *Равнодействующим инверсионно-поворотного преобразования (с поворотом на угол α) вокруг некоторой оси и не перпендикулярного к ней поступания T является инверсионно-поворотное преобразование с поворотом на угол α вокруг оси, параллельной данной. Ее расположение относительно данной определяется как указано в доказательстве.*

Если поступание OT (фиг. 183) неперпендикулярно оси G_i данного инверсионного преобразования, то разлагаем вектор этого поступания на две составляющих OT_g и OT_n по правилу параллелограма, причем $OT_g \parallel G_i$, а $OT_n \perp G_i$.

Преобр. R = Инв. пов. G_i (Поступ. OT_g · Поступ. OT_n).

Инверсионно-поворотное преобразование G_i рассматриваем как поворот на угол α с последующей инверсией в точке O.

Имеем:



Фиг. 183.

Преобр. R = (Пов.$_{G_i}{}^{\alpha}$ · Инв. O) (Поступ. OT_g · Поступ. OT_n)

или:

Преобр. R = Пов.$_{G_i}{}^{\alpha}$ (Инв. O · Поступ. OT_g) · Поступ. OT_n.

Согласно следствию теоремы 39, равнодействующим преобразованием инверсии в точке O и поступания OT_g является инверсия в другой точке O', смещенной относительно первой в направлении поступания OT_g на половину его величины.

Преобр. R = Пов.$_{G_i}{}^{\alpha}$ · Инв. O' · Поступ. OT_n

или:

Преобр. R = (Пов.$_{G_i}{}^{\alpha}$ · Инв. O') · Поступ. OT_n.

Так как точка O' лежит на той же оси G_i, то выражение, стоящее в скобках, представляет собой инверсионное преобразование около той же оси G_i, но только с другим центром инверсии.

реобр. R = Инв. пов. G_i' · Поступ. OT_n.

Согласно выводам предыдущей теоремы, это выражение заменяется инверсионным преобразованием вокруг равнодействующей оси R_i, параллельной G_i и сдвинутой относительно нее, как указано в доказательстве этой теоремы. Таким образом имеем:

Преобр. R = Преобр. R_i.

Наше искомое равнодействующее преобразование свелось к инверсионному преобразованию около оси R_i. Как видно из хода вывода, ось R_i параллельна данной и имеет тот же угол поворота α. Она сдвинута относительно данной в таком направлении, что угол между перпендикулярными к гироиде проекциями переноса (T_n) и направлением смещения оси равен $\frac{\alpha}{2}$. Величина этой проекции $l = -\frac{T_n}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Смещение центра инверсии вдоль этой оси отвечает $\frac{T_g}{2}$, где T_g — проекция переноса T на данную гироиду.

Следствие. Равнодействующий элемент симметрии гироиды G_i (с углом поворота α) и неперпендикулярной к ней трансляции T является гироида с тем же углом поворота α, параллельная данной. Ее расположение определяется согласно теореме 40.

2. Понятие о сходственности симметрических преобразований и элементов симметрии

Два симметрических преобразования называются сходственными, если они отличаются друг от друга поступанием.

Два элемента симметрии называются сходственными, если они отличаются друг от друга трансляцией.

Элементы симметрии P и Q взаимно сходственны, если

$$\text{Преобр. } P = \text{Преобр. } Q \cdot \text{Поступ. } T,$$

где T — некоторая трансляция.

Про элемент симметрии P говорят, что он сходственен элементу симметрии Q. Обратно, про элемент симметрии Q можно сказать, что он сходственен с P.

Теоремы предыдущего параграфа дают очень много примеров сходственных элементов симметрии. Все равнодействующие элементы симметрий трансляции с каким-либо иным элементом симметрии будут сходственны с этим элементом.

Теоремы предыдущего раздела показывают, что сходственные элементы симметрии всегда взаимно параллельны. *

Далее, из тех же теорем вытекает, что трансляция, перпендикулярная к любому элементу симметрии, дает при сложении с этим элементом в качестве равнодействующего такой же элемент симметрии, параллельный данному. Отсюда следует, что

два одинаковых параллельно расположенных элемента симметрии взаимно сходственны.

Теоремы сложения различных элементов симметрии с неперпендикулярными переносами дают возможность разбить все элементы симметрии (перечисленные в табл. 5) на такие категории, в которых два любых параллельно-расположенных элемента будут взаимно сходственны.

Взаимно сходственны следующие категории параллельно расположенных элементов симметрии:

1) T_1, T_p, T_o, T_k.
2) a; a_t.
3) G_3; G_{+3_t}; G_{-3_t}.
4) G_4; G_{+4_t}; G_{-4_t}; $G_{4_{t_2}}$.
5) G_6; G_{+6_t}; G_{-6_t}; $G_{+6_{t_3}}$; $G_{-6_{t_3}}$; $G_{6_{t_2}}$.
6) C.
7) P; P_t; P_p; P_o; P_k.
8) G_{4_i}.
9) G_{6_i}.

Здесь два любых элемента симметрии каждой горизонтальной строки сходственны.

Теорема 41. *Если элемент симметрии P_1 сходственен с Q_1, а P_2 сходственен с Q_2, то равнодействующий элемент симметрии R_p будет сходственен с равнодействующим элементом симметрии R_q.*

Равнодействующим преобразованием R_p будет:

$$\text{Преобр. } R_p = \text{Преобр. } P_1 \cdot \text{Преобр. } P_2.$$

По определению же сходственности имеем:

$$\text{Преобр. } P_1 = \text{Поступ. } T_1 \cdot \text{Преобр. } Q_1,$$

и

$$\text{Преобр. } P_2 = \text{Преобр. } Q_2 \cdot \text{Поступ. } T_2,$$

где T_1 и T_2 — некоторые трансляции.

Подставляя полученные выражения, получим:

$$\text{Преобр. } R_p = (\text{Поступ. } T_1 \cdot \text{Преобр. } Q_1) \cdot (\text{Преобр. } Q_2 \cdot \text{Поступ. } T_2)$$

или:

$$\text{Преобр. } R_p = \text{Поступ. } T_1\ (\text{Преобр. } Q_1 \cdot \text{Преобр. } Q_2)\ \text{Поступ. } T_2.$$

Равнодействующим преобразованием Q_1 и Q_2 является R_q. Отсюда:

$$\text{Преобр. } R_p = \text{Поступ. } T_1 \cdot \text{Преобр. } R_q \cdot \text{Поступ. } T_q.$$

Как видим, преобразования R_p и R_q отличаются друг от друга только поступаниями. Соответственно и элементы симметрии R_p и R_q отличаются друг от друга только трансляциями. Таким образом эти элементы симметрии сходственны между собою.

3. Пространственные группы симметрии

Подобно тому, как видами симметрии называется совокупность элементов симметрии конечной фигуры, —

совокупность элементов симметрии кристаллической решетки называется пространственной группой симметрии (разновидностью симметрии).

---

* Исключение представляют направления переносов. У сходственных элементов симметрии эти направления могут и не быть параллельны (например, у сходственных плоскостей скольжения). Однако переносы как раз и являются теми элементами, которыми сходственные элементы симметрии по определению отличаются друг от друга.

Вполне понятно, что пространственных групп должно быть больше, чем 32. Действительно, различных элементов симметрии у конечных фигур, как это следует из табл. 5, восемь, у бесконечных же — их двадцать один. Поэтому и совокупность этих элементов симметрии гораздо больше, чем у фигур конечных. В девяностых годах прошлого столетия Федоров и Шенфлис впервые решили задачу о нахождении всех теоретически возможных разновидностей симметрии. Согласно их выводам различных совокупностей элементов симметрии у бесконечных кристаллических фигур не 32, но 230.

Мы не будем останавливаться на всех различных теоретических предпосылках, служащих основой для их выводов, не будем останавливаться и на описании самого хода рассуждений, позволившего им найти все 230 теоретически возможных совокупности элементов симметрии кристаллического вещества.

Однако некоторые основные соображения, которые делают понятным — каким образом можно разобраться в этом вопросе и каким образом возможно простое нахождение этих разновидностей — мы здесь приведем.

Прежде всего отметим основное свойство пространственных групп, вытекающее из того обстоятельства, что кристаллические решетки обладают трансляциями. Пусть в решетке имеем трансляцию T. При поступании T решетка должна совмещаться сама с собою. Следовательно, каждый элемент симметрии этой решетки должен при этом занять место равного ему другого такого же элемента. Подвергая трансляции T какой-нибудь элемент симметрии P_1, совместим его с равным ему элементом P_2,* этот последний с P_3, P_3 с P_4 и т. д.

Все элементы симметрии P_1, P_2, P_3, P_4 ... должны принадлежать решетке. Все они параллельно ориентированы в пространстве и располагаются на одной бесконечной прямой на расстояниях T друг от друга. Так как в решетке кроме трансляции T существует бесконечное множество других трансляций по другим направлениям, то, кроме P_1, P_2, P_3 ..., можно найти, что и по различным другим направлениям располагаются такие же элементы симметрии.

Параллельно любому элементу симметрии кристаллической решетки проходит бесконечное множество равных ему элементов симметрии.

Так, если через центр элементарной ячейки хлористого натрия проходит G_4, такая же параллельная G_4 проходит через центр любой другой элементарной ячейки того же самого куска кристаллического вещества.

Докажем теперь основную теорему, связывающую симметрию кристаллической решетки с симметрией вещества формы кристаллов.

Теорема 42. *Если параллельно каждому элементу симметрии кристаллической решетки, через некоторую точку O провести элементы симметрии, сходственные данным и не заключающие трансляций, то полученная совокупность будет одним из 32 видов симметрии кристаллов.*

Прежде всего, из таблички на стр. 169 видно, что каждый из всех мыслимых 21 элементов симметрии кристаллической решетки сходственен с одним из 8 элементов симметрии кристаллов. Поэтому, какова бы ни была совокупность элементов симметрии решетки, совокупность сходственных им элементов, проходящих через точку O, как не заключающая в себе трансляций, будет комбинацией исключительно только элементов, встречающихся в видах симметрии кристаллов.

Нужно доказать только, что полученная комбинация является одной из возможных для конечных фигур, т. е. отвечает одному из 32 видов симметрии.

Если предположить, что полученная комбинация элементов симметрии не является ни одним из 32 видов симметрии, то это может быть только в двух случаях:

а) в полученной совокупности просто нехватает некоторых элементов симметрии до полной совокупности, представляющей один из видов симметрии;

б) в полученной совокупности элементы симметрии так расположены, что они не могут встречаться на конечных кристаллических фигурах. Иными словами, их относительное расположение таково, что при сложении их друг с другом выводятся невозможные для кристаллов равнодействующие элементы симметрии.

Как видим, и в случае а) и в случае б) рассматриваемые совокупности не заключают в себе некоторых равнодействующих элементов симметрии, т. е. не являются полными совокупностями всех элементов (порождающих и равнодействующих), не представляют группы.

Пусть отсутствует некоторый равнодействующий элемент симметрии R_p двух элементов P_1 и P_2 рассматриваемой совокупности. В случае а) это будет один из элементов симметрии, которого нехватает в нашей комбинации элементов симметрии для отождествления этой комбинации с одним из 32 видов; в случае б) это будет элемент симметрии, не свойственный кристаллам (невозможного для кристаллов наименования).

Возьмем элементы симметрии Q_1 и Q_2 кристаллической решетки, сходственные с P_1 и P_2 построенной нами совокупности, проходящей через точку O. Элемент симметрии

---

* Не следует путать понятий о равных и равнодействующих элементах симметрии. P_2 получается не сложением P_1 с трансляцией T ($=P_2=P_1T$), но простым перенесением элемента P_2 при помощи трансляции T.

равнодействующий Q_1 и $Q_2 — R_q$, очевидно, также должен присутствовать в решетке. Раз это так, то при построении совокупности элементов, проходящей через точку O, мы построим и элемент симметрии, сходственной с R_q. Согласно теореме 41, этот элемент симметрии будет равнодействующим элементом симметрии P_1 и P_2, т. е. будет элементом симметрии R_p. Таким образом элемент R_p неминуемо должен оказаться в числе элементов симметрии, проходящих через точку O. Следовательно, нельзя было предполагать, что присутствуют не все равнодействующие совокупности элементов, проходящих через O. Так как это имеет место, то нельзя было делать ни предположения а), ни предположения б). Следовательно, совокупность элементов симметрии, проходящих через O, есть один из 32 видов симметрии кристаллов.

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что всякая пространственная группа симметрии (разновидность симметрии) обладает элементами симметрии, сходственными с элементами одного из 32 видов симметрии кристаллов или, иначе,

всякая пространственная группа (разновидность) симметрии сходственна с одним из 32 видов симметрии кристаллов.

Элементы симметрии всякой пространственной группы симметрии отличаются от элементов симметрии сходственного вида симметрии только трансляциями.

Каждому из восьми элементов симметрии кристаллов отвечает несколько сходственных элементов симметрии решетки. Так, элементу G_3 кристалла сходственны элементы G_3, G_{+3_t} и G_{-3_t} решетки. Поэтому:

Каждому виду симметрии отвечает несколько сходственных пространственных групп (разновидностей) симметрии (как исключение — одна разновидность).

Припомнив, что сходственные элементы симметрии всегда имеют параллельную ориентировку в пространстве и пользуясь основным свойством расположения элементов симметрии в кристаллической решетке, приходим к такому выводу:

Параллельно каждому элементу симметрии кристалла в кристаллической решетке проходит бесконечное множество сходственных элементов симметрии (т. е. таких же или отличающихся трансляциями от элементов симметрии кристалла).

В частности для плоскостей симметрии этот вывод может быть формулирован таким образом:

Параллельно каждой плоскости симметрии кристалла в кристаллической решетке проходит бесконечное множество или плоскостей симметрии, или плоскостей скольжения, или и плоскостей симметрии и плоскостей скольжения.

Тот же вывод, примененный к гирам, приводит к такому заключению:

Параллельно каждой гире кристалла в кристаллической решетке проходит бесконечное множество или таких же гир, или геликогир того же наименования, или и гир и геликогир того же наименования.

Так, например, если мы имеем на кристалле G_2, то в кристаллическом веществе параллельно G_2 проходит бесконечное множество таких же G_2 или G_{2_t}, или и G_2 и G_{2_t}.

Кроме того, для гир G_4, G_6 (и гироиды G_{4i}) наш вывод следует еще дополнить. В случае G_4 (и G_{4_i}) двукратное применение этого элемента симметрии приводит к тому же результату, как и применение $G_2 = a$. Иными словами, всякая G_4 (и G_{4i}) является в то же время дигирой a. Складывая эту дигиру с трансляциями, получим, как равнодействующий элемент, или параллельную дигиру a или параллельную геликодигиру a_t. Иными словами, элементами симметрии, сходственными с дигирой, заключенной в G_4 (и G_{4i}), будут a и a_t. Поэтому в кристаллическом веществе, параллельно G_4 кристалла, должны проходить, кроме элементов симметрии, сходственных с G_4, еще и элементы симметрии, сходственные с дигирой a, которая заключается в G_4 (в случае присутствия центра инверсии между двумя равными G_4, эта дигира решетки превращается в G_{4i}).

Аналогичные выводы мы имеем и для G_6. Двукратное применение G_6 тождественно с применением G_3; трехкратное применение G_6 приводит к результатам применения a. Другими словами, G_6 заключает в себе G_3 и a. Поэтому параллельно G_6 в кристаллическом веществе должны проходить кроме элементов симметрии, сходственных с G_6, еще элементы симметрии, сходственные с G_3 и a, которые заключаются в данном G_6. Таким образом параллельно G_6 в кристаллической решетке проходят или G_6 или G_{6_t}, а кроме того, G_3 или G_{3_t} и a или a_t (в случае присутствия плоскостей симметрии, перпендикулярных к G_6, полученная G_3 превратится при этом в G_{6i}).

Принимая во внимание сказанное, окончательно можно формулировать наши выводы следующим образом:

Параллельно каждой гире кристалла в кристаллической решетке проходит бесконечное множество или гир, или геликогир, или и гир и геликогир; наимено-

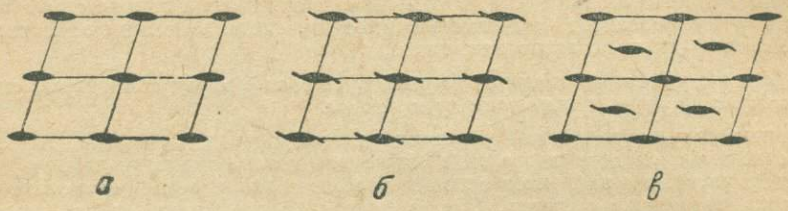
вания всех этих гир и геликогир: 1) представляют целые части наименования данной гиры и 2) равны этому наименованию.*

Сходные (но не совершенно подобные) выводы можно сделать и относительно гироид.

Указанные свойства разновидностей симметрии позволяют уже находить эти разновидности, отвечающие тому или иному виду симметрии.

Заменяя элементы симметрии данного вида симметрии различными возможными сходственными элементами, будем получать различные пространственные группы (разновидности) симметрии данного вида.

Рассмотрим два простейших примера.

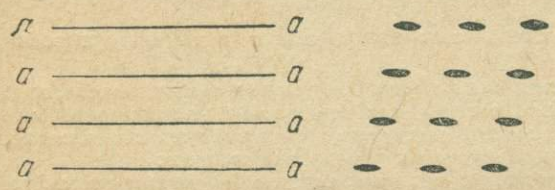


Фиг. 184.

Возьмем вид симметрии, характеризующийся одной дигирой (G_1a, аксиальный вид моногирной сингонии).

В пространственных решетках кристаллов, принадлежащих этому виду симметрии, параллельно дигире кристалла может проходить или 1) бесконечное множество таких же дигир, или 2) бесконечное множество геликодигир, или 3) бесконечное множество и дигир и геликодигир.

Случай 1 представлен на фиг. 184*а*. Обозначим его G_1a. Случай 2 изображен на фиг. 184*б*; обозначение — G_1a_t. Случай 3 изображен на фиг. 184*в*; обозначение — G_1a^t (постановка значка вверху обозначает совокупность a и a_t).



Фиг. 185.

Этими тремя разновидностями исчерпываются все возможные разновидности данного вида симметрии.

В качестве второго примера рассмотрим вид симметрии, характеризующийся дигирой, перпендикулярной плоскостью симметрии и, в качестве равнодействующего элемента симметрии, центром инверсии. (G_1ap планаксиальный вид моногирной сингонии.)

Параллельно дигире кристалла в кристаллическом веществе, согласно предыдущим замечаниям, проходят или дигары a, или геликодигиры a_t, или и те и другие (a^t). Параллельно плоскости симметрии кристалла могут проходит или плоскости же симметрии (p), или плоскости скольжения (p_t), или и те и другие (p^t), или, наконец, плоскости скольжения с различным направлением скольжения $p^t{}_t$.

Получим такие комбинации:

$$ap,\ ap_t,\ ap^t,\ ap^t{}_t,\ a_tp,\ a_tp_t,\ a_tp^t,\ a_tp^t{}_t,\ a^tp,\ a^tp_t,\ a^tp^t,\ a^tp^t{}_t.$$

Однако среди этих комбинаций не все представляют собою разновидности симметрии. Так, строя все равнодействующие элементы симметрии комбинации ap^t, получим еще геликогиры, параллельные дигирам a, т. е. придем к разновидности a^tp^t (поэтому и $ap^t{}_t$ тоже невозможно). К той же разновидности приводит и комбинация a_tp^t, где неминуемо должны появиться дигиры a (аналогично, и для $a^tp^t{}_t$). a^tp тоже не может существовать — обязательно должна еще присутствовать плоскость скольжения p_t. Опять-таки приходим к a^tp^t. Также невозможна и $a_tp^t{}_t$.

В результате приходим к шести группам:

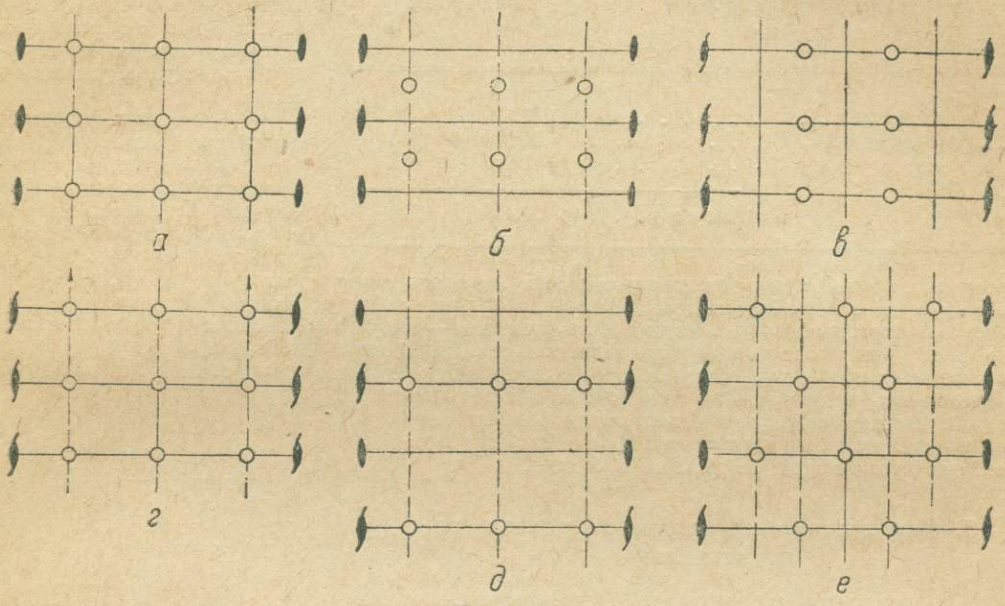
G_1ap	(фиг. 186*а*);	$G_1a_tp_t$	(фиг. 186*г*);
G_1ap_t	(„ 186*б*);	$G_1a^tp_t$	(„ 186*д*);
G_1a_tp	(„ 186*в*);	$G_1a^tp^t$	(„ 186*е*).

* Проще и строже доказывается существование гир с наименованиями, равными целым частям наименования данной гиры, путем нахождения равнодействующих элементов симметрии параллельных и равных гир, складывая их попарно и по три: $G_4 \cdot G_4 = G_2$; $G_6 \cdot G_6 = G_3$; $G_6 \cdot G_6 \cdot G_6 = G_2$; однако, чтобы не вводить теорем, доказывающих справедливость этих положений, необходимые выводы сделаны здесь обходным путем.

Виды симметрии, разновидности которых мы рассмотрели, относятся к верхнему горизонтальному ряду таблицы видов симметрии (табл. 9).

Чтобы получить разновидности симметрии других рядов, можно поступать совершенно аналогично тому, как мы поступали при нахождении того или иного вида симметрии. Каждый вид симметрии можно рассматривать как совокупность какой-то главной оси, с добавочными элементами симметрии (c, p, a, ap). Также и всякую разновидность симметрии можно рассматривать как совокупность каких-то главных осей с добавочными элементами симметрии. Только это уже не будут элементы симметрии пяти видов симметрии первого горизонтального ряда таблицы. Для получения разновидностей симметрии придется комбинировать главные оси со всеми разновидностями симметрии первого горизонтального ряда.

Так например, чтобы получить разновидности аксиального вида симметрии, придется главные оси комбинировать не только с дигирами, но и с параллельными им геликодигирами, и, наконец, и с теми и с другими.



Фиг. 186.

Перебирая все возможные случаи главных осей, сходственных с главной осью исследуемого вида симметрии, комбинируем их с тремя разновидностями, указанными на фиг. 184 *а*, *б*, *в*. Выводим затем равнодействующие элементы симметрии и выбрасываем получающиеся вторично, уже выведенные разновидности. Оставшиеся после такого выбора разновидности и будут искомыми.

Для получения всех разновидностей симметрии какого-нибудь планаксиального вида симметрии придется комбинировать сходственные главные оси этого вида симметрии с элементами симметрии шести разновидностей, изображенных на фиг. 186. Попрежнему отбрасывая, после проведения равнодействующих, лишние, тождественные с имеющимися, получим все разновидности данного планаксиального вида симметрии.

Перебирая таким образом все 32 вида симметрии, найдем все 230 разновидностей. Число разновидностей симметрии каждого вида очень различно. Некоторые виды симметрии имеют только по одной разновидности (виды G_0, G_0c, G_{6i}), другие—до 28 разновидностей (вид G_2ap). В большинстве случаев имеется 6—10 разновидностей.

4. Классификация пространственных групп

Все разновидности симметрии Федоров классифицирует на три отдела.

Если параллельно каждой гире (G) данного вида симметрии в пространственной группе симметрии проходят гиры же (G) (или G вместе с G_t), а параллельно каждой плоскости симметрии (P), плоскости же симметрии (P) (или P вместе с P_t), то такая группа симметрии называется симморфной.

Если параллельно хотя бы одной гире (G) данного вида симметрии в пространственной группе симметрии проходят не гиры, но только геликогиры (G_t), то такая группа симметрии называется асимморфной.

Если параллельно хотя бы одной плоскости симметрии (P) данного вида симметрии в пространственной группе симметрии проходят не плоскости симметрии, но плоскости скольжения (P_t), и эта группа не является асимморфной, то она называется гемисимморфной.

Симморфные группы Е. С. Федоров обозначает буквой *s*, асимморфные — буквой *a*, гемисимморфные — буквой *h*.

Из приведенных определений можно ожидать, что больше всего среди 230 групп встретится асимморфных, для образования которых достаточно замены геликогирой хотя бы гиры данного вида симметрии.

Таблица 12

Распределение пространственных групп симметрии

Пространственные группы симметрии	Число	%
Симморфные	73	32
Асимморфные	103	45
Гемисимморфные	54	23
Всего . .	230	100

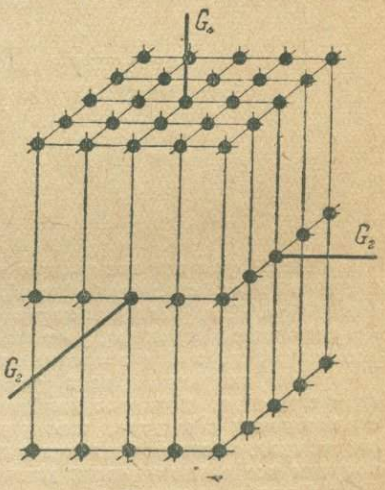
Табл. 12 дает распределение 230 пространственных групп.

Шибольдом предложено более дробное деление, причем он различает асимморфные и гемисимморфные группы различных видов.

Отдельных названий, подобных названиям 32 видов симметрии, разновидности не имеют, хотя Шибольдом таковые и предлагались. Обычно пользуются обозначениями Шенфлиса, который просто нумерует разновидности каждого вида симметрии. Е. С. Федоров дает другую общую нумерацию. В табл. 13* приведены условные обозначения обоих авторов. Для того чтобы сразу же было понятно — какую именно совокупность элементов симметрии имеет та или иная разновидность, рядом приведены краткие формулы. Они составлены так же, как условные обозначения видов симметрии и объяснены на вышеприведенных примерах. Для того, чтобы показать каким образом главные оси расположены относительно добавочных, последние заключаются в скобки, если главные оси проходят, не соприкасаясь с ними.

5. Определение симметрии на реальных кристаллах

В предыдущих разделах было выяснено, что каждому элементу симметрии кристалла отвечают сходственные элементы симметрии кристаллической решетки. Если, например, на кристалле обнаружено G_4, то в кристаллической решетке параллельно этому G_4 должны проходить или G_4 или G_{4_t}. Если же ни G_4, ни G_{4_t} (или $G_{4_{t2}}$) в кристаллическом веществе не проходит, то тетрагира, обнаруженная на кристалле, является только кажущейся. При повороте на 90° вокруг этой G_4 совмещаются только внешние точки ограничения фигуры, но не точки решетки. Таким образом, наше определение G_4 будет ошибочным. Чтобы понять возможность такой ошибки — ограничимся двумя примерами.



Фиг. 187.

Пусть мы имеем кристаллическое вещество, построенное решеткой, изображенной на фиг. 187. Очевидно, что решетку следует отнести к тетрагирной (тетрагональной) сингонии, так как вертикально через нее проходят G_4, а горизонтально — G_2.

---

* Таблица взята из посмертной работы автора, посвященной номенклатуре и классификации 230 разновидностей. В этом виде она представляет последний вариант, принятый окончательно автором. Ряд изменений, внесенных в таблицу, в тексте учебника отсутствует. Большие буквы, стоящие в конце формул, указывают на типы решеток (о них см. ниже).

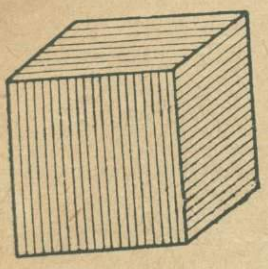
Различные обозначения пространственных групп симметрии

	Федоров Е. II (1895)	Шенфлис А. III (1923)	Новая символика
	Агирная (триклинная) сингония — G^0		
	Примитивный (моноэдрический) вид симметрии — g^0		
1	$1s$	C_1	g^0P
	Центральный (пинакоидальный) вид симметрии — g^0c		
2	$2s$	γ_2	g^0cP
	Моногирная (моноклинная) сингония — G^1		
	Планальный (диэдрический анаксиальный) вид симметрии — g^1p		
3	$5s$	$C^1{}_{1h}$	g^1pP
4	$1h$	$C^2{}_{1h}$	g^1p^tP
5	$6s$	$C^3{}_{1h}$	g^1pC
6	$2h$	$C^4{}_{1h}$	g^1p^tC
	Аксиальный (диэдрический аксиальный) вид симметрии — g^1a		
7	$3s$	$C^1{}_2$	g^1aP
8	$1a$	$C^2{}_2$	g^1a^tP
9	$4s$	$C^3{}_2$	g^1aC
	Планаксиальный (призматический) вид симметрии — g^1ap		
10	$7s$	$C^1{}_{2h}$	g^1apP
11	$2a$	$C^2{}_{2h}$	g^1a^tpP
12	$8s$	$C^3{}_{2h}$	g^1apC
13	$3h$	$C^4{}_{2h}$	g^1ap^tP
14	$3a$	$C^5{}_{2h}$	$g^1a^tp^tP$
15	$4h$	$C^6{}_{2h}$	g^1ap^tC
	Дигирная (ромбическая) сингония — G^2		
	Планальный (ромбо-пирамидальный) вид симметрии — g^2p		
16	$13s$	$C^1{}_{2v}$	g^2pP
17	$9a$	$C^2{}_{2v}$	$g^{2t}pP$
18	$5h$	$C^3{}_{2v}$	g^2p^pP
19	$6h$	$C^4{}_{2v}$	g^2p^oP
20	$11a$	$C^5{}_{2v}$	$g^{2t}p^oP$
21	$7h$	$C^6{}_{2v}$	g^2p^kP
22	$10a$	$C^7{}_{2v}$	$g^{2t}p^kP$
23	$9h$	$C^8{}_{2v}$	$g^2(p^o)P$
24	$12a$	$C^9{}_{2v}$	$g^{2t}(p^o)P$
25	$8h$	$C^{10}{}_{2v}$	g^2p^kP
26	$14s$	$C^{11}{}_{2v}$	g^2pC
27	$13a$	$C^{12}{}_{2v}$	$g^{2t}pC$
28	$10h$	$C^{13}{}_{2v}$	g^2p^pC
29	$15s$	$C^{14}{}_{2v}$	g^2pA
30	$11h$	$C^{15}{}_{2v}$	g^2p^pA
31	$12h$	$C^{16}{}_{2v}$	g^2p^oA
32	$13h$	$C^{17}{}_{2v}$	g^2p^kA
33	$17s$	$C^{18}{}_{2v}$	g^2pF
34	$16h$	$C^{19}{}_{2v}$	g^2p^kF
35	$16s$	$C^{20}{}_{2v}$	g^2pI
36	$15h$	$C^{21}{}_{2v}$	g^2p^pI
37	$14h$	$C^{22}{}_{2v}$	g^2p^oI
	Аксиальный (ромбо-тетраэдрический) вид симметрии — g^2a		
38	$9s$	V^1	g^2aP
39	$4a$	V^2	$g^{2t}aP$
40	$7a$	V^3	$g^2(a^t)P$
41	$8a$	V^4	$g^{2t}(a^t)P$
42	$5a$	V^5	$g^{2t}aC$
43	$10s$	V^6	g^2aC
44	$12s$	V^7	g^2aF
45	$11s$	V^8	g^2aI
46	$6a$	V^9	g^2a^tI
	Планаксиальный (ромбо-дипирамидальный) вид симметрии — g^2ap		
47	$18s$	$V^1{}_h$	g^2apP
48	$19h$	$V^2{}_h$	$g^2a(p^k)P$
49	$17h$	$V^3{}_h$	g^2ap^1P
50	$18h$	$V^4{}_h$	$g^2a(p^o)P$
51	$14a$	$V^5{}_h$	$g^{2t}apP$
52	$17a$	$V^6{}_h$	$g^{2t}a(p^o)P$
53	$15a$	$V^7{}_h$	$g^{2t}ap^kP$
54	$16a$	$V^8{}_h$	$g^{2t}ap^oP$
55	$22a$	$V^9{}_h$	$g^2(a^t)(p^o)P$
56	$27a$	$V^{10}{}_h$	$g^2(a^t)p^pP$
57	$23a$	$V^{11}{}_h$	$g^2(a^t)p^oP$
58	$25a$	$V^{12}{}_h$	$g^2(a^t)(p^k)P$
59	$24a$	$V^{13}{}_h$	$g^2(a^t)pP$
60	$26a$	$V^{14}{}_h$	$g^2(a^t)p^kP$
61	$29a$	$V^{15}{}_h$	$g^{2t}(a^t)p^oP$
62	$28a$	$V^{16}{}_h$	$g^{2t}(a^t)(p^o)P$
63	$18a$	$V^{17}{}_h$	$g^{2t}apC$
64	$19a$	$V^{18}{}_h$	$g^{2t}a^tpC$
65	$19s$	$V^{19}{}_h$	g^2apC
66	$20h$	$V^{20}{}_h$	g^2ap^pC
67	$21h$	$V^{21}{}_h$	g^2ap^oC
68	$22h$	$V^{22}{}_h$	g^2ap^kC
69	$21s$	$V^{23}{}_h$	g^2apF
70	$24h$	$V^{24}{}_h$	$g^2a(p^k)F$
71	$20s$	$V^{25}{}_h$	g^2apI
72	$23h$	$V^{26}{}_h$	g^2ap^pI
73	$21a$	$V^{27}{}_h$	$g^2a^tp^pI$
74	$20a$	$V^{28}{}_h$	g^2a^tpI

	Федоров Е. II (1895)	Шенфлис А. III (1923)	Новая символика
	Тригирная (тригональная) сингония — G^3		
	Примитивный (тригонально-пирамидальный) вид симметрии — g^3		
75	38*s*	C^1_3	g^3C
76	68*a*	C^2_3	$g^{+3t}C$
77	69*a*	C^3_3	$g^{-3t}C$
78	39*s*	C^4_3	g^3R
	Центральный (ромбоэдрический) вид симметрии — g^3c		
79	51*s*	C^1_{3i}	g^3cC
80	52*s*	C^2_{3i}	g^3cR
	Планальный (дитригонально-пирамидальный) вид симметрии — g^3p		
81	40*s*	C^1_{3v}	g^3pH
82	41*s*	C^2_{3v}	g^3pC
83	39*h*	C^3_{3v}	g^3p^pH
84	40*h*	C^4_{3v}	g^3p^pC
85	42*s*	C^5_{3v}	g^3pR
86	41*h*	C^6_{3v}	g^3p^pR
	Аксиальный (тригонально-трапецоэдрический) вид симметрия — g^3a		
87	45*s*	D^1_3	g^3aC
88	44*s*	D^2_3	g^3aH
89	72*a*	D^3_3	$g^{+3t}aC$
90	70*a*	D^4_3	$g^{+3t}aH$
91	73*a*	D^5_3	$g^{-3t}aC$
92	71*a*	D^6_3	$g^{-3t}aH$
93	46*s*	D^7_3	g^3aR
	Планаксиальный (дитригонально-скаленоэдрический) вид симметрии — g^3ap		
94	56*s*	D^1_{3d}	g^3apC
95	46*h*	D^2_{3d}	g^3ap^pC
96	55*s*	D^3_{3d}	g^3apH
97	45*h*	D^4_{3d}	g^3ap^pH
98	57*s*	D^5_{3d}	g^3apR
99	47*h*	D^6_{3d}	g^3ap^pR
	Тетрагирная (тетрагональная) сингония — G^4		
	Примитивный (тетрагонально-пирамидальный) вид симметрии — g^4		
100	22*s*	C^1_4	g^4P
101	30*a*	C^2_4	$g^{+4t}P$
102	33*a*	C^3_4	$g^{4t2}P$
103	31*a*	C^4_4	$g^{-4t}P$
104	23*s*	C^5_4	g^4I
105	32*a*	C^6_4	$g^{4t}I$
	Центральный (тетрагонально-дипирамидальный) вид симметрии — g^4c		
106	28*s*	C^1_{4h}	g^4cP
107	41*a*	C^2_{4h}	$g^{4t2}cP$
108	29*h*	C^3_{4h}	$g^4(c)P$
109	42*a*	C^4_{4h}	$g^{4t2}(c)P$
110	29*s*	C^5_{4h}	g^4cI
111	40*a*	C^6_{4h}	$g^{4t}(c)I$
	Планальный (дитетрагонально-пирамидальный) вид симметрии — g^4p		
112	24*s*	C^1_{4v}	g^4pP
113	26*h*	C^2_{4v}	$g^4(p^o)P$
114	37*a*	C^3_{4v}	$g^{4t2}p^pP$
115	38*a*	C^4_{4v}	$g^{4t2}(p^k)P$
116	25*h*	C^5_{4v}	g^4p^pP
117	27*h*	C^6_{4v}	$g^4(p^k)P$
118	36*a*	C^7_{4v}	$g^{4t2}pP$
119	39*a*	C^8_{4v}	$g^{4t2}(p^o)P$
120	25*s*	C^9_{4v}	g^4pI
121	28*h*	C^{10}_{4v}	g^4p^pI
122	34*a*	C^{11}_{4v}	$g^{4t}p^kI$
123	35*a*	C^{12}_{4v}	$g^{4t}p^oI$
	Аксиальный (тетрагонально-трапецоэдрический) вид симметрии — g^4a		
124	30*s*	D^1_4	g^4aP
125	43*a*	D^2_4	$g^4(a^t)P$
126	44*a*	D^3_4	$g^{+4t}aP$
127	48*a*	D^4_4	$g^{+4t}(a^t)P$
128	47*a*	D^5_4	$g^{4t2}aP$
129	50*a*	D^6_4	$g^{4t2}(a^t)P$
130	45*a*	D^7_4	$g^{-4t}aP$
131	49*a*	D^8_4	$g^{-4t}(a^t)P$
132	31*s*	D^9_4	g^4aI
133	46*a*	D^{10}_4	$g^{4t}aI$
	Планаксиальный (дитетрагонально-дипирамидальный) вид симметрии — g^4ap		
134	36*s*	D^1_{4h}	g^4apP
135	35*h*	D^2_{4h}	g^4ap^pP
136	36*h*	D^3_{4h}	$g^4a(p^o)P$
137	37*h*	D^4_{4h}	$g^4a(p^k)P$
138	54*a*	D^5_{4h}	$g^4(a^t)(p^o)P$
139	56*a*	D^6_{4h}	$g^4(a^t)(p^k)P$
140	55*a*	D^7_{4h}	$g^4(a^t)pP$
141	57*a*	D^8_{4h}	$g^4(a^t)p^pP$
142	60*a*	D^9_{4h}	$g^{4t2}apP$
143	61*a*	D^{10}_{4h}	$g^{4t2}ap^pP$
144	63*a*	D^{11}_{4h}	$g^{4t2}a(p^o)P$
145	62*a*	D^{12}_{4h}	$g^{4t2}a(p^k)P$
146	66*a*	D^{13}_{4h}	$g^{4t2}(a^t)(p^o)P$
147	64*a*	D^{14}_{4h}	$g^{4t2}(a^t)(p^k)P$
148	67*a*	D^{15}_{4h}	$g^4(a^t)pP$
149	65*a*	D^{16}_{4h}	$g^4(a^t)p^pP$
150	37*s*	D^{17}_{4h}	g^4apI
151	38*h*	D^{18}_{4h}	g^4ap^pI
152	59*a*	D^{19}_{4h}	$g^{4t}apI$
153	58*a*	D^{20}_{4h}	$g^{4t}ap^oI$
	Центрогирно-примитивный (тетрагонально-тетраэдрический) вид симметрии — g^4c		
154	26*s*	γ^1_4	g^4cP
155	27*s*	γ^2_4	g^4cI

	Федоров Е. II (1895)	Шенфлис А. III (1923)	Новая символика
	Центрогирно-планальный (тетрагонально-скаленоэдрический) вид симметрии — $g^{4c}p$		
156	32*s*	V^1_d	$g^{4c}pC$
157	30*h*	V^2_d	$g^{4c}p^pC$
158	52*a*	V^3_d	$g^{4c}p^oC$
159	53*a*	V^4_d	$g^{4c}p^kC$
160	33*s*	V^5_d	$g^{4c}pP$
161	31*h*	V^6_d	$g^{4c}p^pP$
162	32*h*	V^7_d	$g^{4c}(p^o)P$
163	33*h*	V^8_d	$g^{4c}(p^k)P$
164	35*s*	V^9_d	$g^{4c}pI$
165	34*h*	V^{10}_d	$g^{4c}p^pI$
166	34*s*	V^{11}_d	$g^{4c}pF$
167	51*a*	V^{12}_d	$g^{4c}(p^k)F$
	Гексагирная (гексагональная) сингония — G^6		
	Примитивный (гексагонально-пирамидальный) вид симметрии — g^6		
168	49*s*	C^1_6	g^6C
169	74*a*	C^2_6	$g^{+6t}C$
170	75*a*	C^3_6	$g^{-6t}C$
171	76*a*	C^4_6	$g^{+6t2}C$
172	77*a*	C^5_6	$g^{-6t2}C$
173	78*a*	C^6_6	$g^{6t3}C$
	Центральный (гексагонально-дипирамидальный) вид симметрии — g^6c		
174	53*s*	C^1_{6h}	g^6cC
175	81*a*	C^2_{6h}	$g^{6t3}(c)C$
	Планальный (дигексагонально-пирамидальный) вид симметрии — g^6p		
176	50*s*	C^1_{6v}	g^6pC
177	44*h*	C^2_{6v}	g^6p^pC
178	80*a*	C^3_{6v}	$g^{6t3}pC$
179	79*a*	C^4_{6v}	$g^{6t3}p^pC$
	Аксиальный (гексагонально-трапецоэдрический) вид симметрии — g^6a		
180	54*s*	D^1_6	g^6aC
181	82*a*	D^2_6	$g^{-6t}aC$
182	83*a*	D^3_6	$g^{-6t}aC$
183	84*a*	D^4_6	$g^{+6t2}aC$
184	85*a*	D^5_6	$g^{-6t2}aC$
185	86*a*	D^6_6	$g^{6t3}aC$
	Планаксиальный (дигексагонально-дипирамидальный) вид симметрии — g^6ap		
186	58*s*	D^1_{6h}	g^6apC
187	48*h*	D^2_{6h}	g^6ap^pC
188	87*a*	D^3_{6h}	$g^{6t3}ap^pC$
189	88*a*	D^4_{6h}	$g^{6t3}apC$
	Центрогирно-примитивный (тригонально-дипирамидальный) вид симметрии — g^{6c}		
190	43*s*	C^1_{3h}	$g^{6c}C$
	Центрогирно-планальный (дитригонально-дипирамидальный) вид симметрии — $g^{6c}p$		
191	48*s*	D^1_{3h}	$g^{6c}pH$
192	43*h*	D^2_{3h}	$g^{6c}p^pH$
193	47*s*	D^3_{3h}	$g^{6c}pC$
194	42*h*	D^4_{3h}	$g^{6c}p^pC$
	Полигирная (кубическая) сингония — G^p		
	Примитивный (пентагон-тритетраэдрический) вид симметрии — g^p		
195	59*s*	T^1	g^pP
196	61*s*	T^2	g^pF
197	60*s*	T^3	g^pI
198	89*a*	T^4	$g^{(p)}P$
199	90*a*	T^5	$g^{(p)}I$
	Центральный (дидодекаэдрический) вид симметрии — g^pc		
200	62*s*	T^1_h	g^pcP
201	49*h*	T^2_h	$g^p[c]P$
202	64*s*	T^3_h	g^pcF
203	50*h*	T^4_h	$g^p[c]F$
204	63*s*	T^5_h	g^pcI
205	91*a*	T^6_h	$g^p[c]I$
206	92*a*	T^7_h	$g[p][c]I$
	Планальный (гексатетраэдрический) вид симметрии — g^pp		
207	65*s*	T^1_d	g^ppP
208	67*s*	T^2_d	g^ppF
209	66*s*	T^3_d	g^ppI
210	51*h*	T^4_d	g^pp^kP
211	52*h*	T^5_d	g^pp^pF
212	93*a*	T^6_d	$g^{(p)}p^kI$
	Аксиальный (пентагон-триоктаэдрический) вид симметрии — g^pa		
213	68*s*	O^1	g^paP
214	98*a*	O^2	$g^p[a]P$
215	70*s*	O^3	g^paF
216	97*a*	O^4	$g^p[a]F$
217	69*s*	O^5	g^paI
218	94*a*	O^6	$g^{+(p)}(a)P$
219	95*a*	O^7	$g^{-(p)}(a)P$
220	96*a*	O^8	$g^{(p)}(a)I$
	Планаксиальный (гексаоктаэдрический) вид симметрии — g^pap		
221	71*s*	O^1_h	g^papP
222	53*h*	O^2_h	g^papkP
223	102*a*	O^3_h	$g^p(a)p^kP$
224	103*a*	O^4_h	$g^p(a)p^pP$
225	73*s*	O^5_h	g^papF
226	54*h*	O^6_h	g^papF
227	100*a*	O^7_h	$g^p(a)pF$
228	101*a*	O^8_h	$g^p(a)p^pF$
229	72*s*	O^9_h	g^papI
230	99*a*	O^{10}_h	$g^p(a)p^kI$

Внешняя форма ограничения такой решетки может быть представлена тремя парами взаимно-перпендикулярных граней. При случайном равенстве горизонтальных и вертикальных граней внешняя форма будет кубом. Рассматривая наш кристалл как куб, мы определим у него не только вертикальную G_4, но и горизонтальные G_2 примем за G_4; мы обнаружим G_4 там, где на самом деле их нет. Таким образом, внешняя форма кристалла бывает „обманчивой", и, определяя элементы симметрии только внешней формы, мы можем впасть в ошибку и неправильно определить даже сингонию.

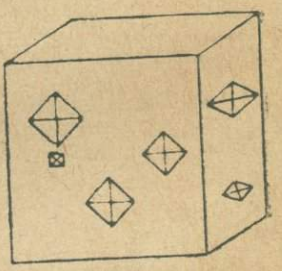


Фиг. 188. Пирит.

Чаще, однако, могут встречаться ошибки в определении вида симметрии. Пусть мы имеем кристалл кубической сингонии, имеющий внешнюю форму исштрихованного куба, часто наблюдающегося на кристаллах пирита ($Fe S_2$) (фиг. 188). Мы совершенно безошибочно найдем, что у нашего кристалла присутствуют не девять, но только три плоскости симметрии (параллельные и перпендикулярные граням куба). Никаких диагональных плоскостей симметрии у такого исштрихованного куба провести нельзя, так как при отражении в этих плоскостях системы штрихов не будут приходить в совмещение. Предположим теперь, что штрихи на гранях другого кристалла того же вещества, вследствие каких-либо причин мало развиты или даже вовсе не заметны. Рассматривая куб такого кристалла, мы насчитаем у него не три, но все девять плоскостей симметрии и ошибочно отнесем его, вместо центрального, к планаксиальному виду симметрии.

Приведенные примеры, вместе с более глубокими соображениями, о которых мы здесь говорить не будем, приводят к заключению, что:

симметрия внешней формы кристалла может не отвечать симметрии его внутреннего строения; для точного определения вида симметрии необходимо, кроме внешней огранки, исследовать и другие признаки симметрии вещества.



Фиг. 189.

Такими признаками могут служить физико-химические и физические свойства кристаллов.

Остановимся сначала на первых.

Штриховатость только-что рассмотренного куба может служить примером такого признака. Благодаря особым свойствам данной кристаллической решетки, при определенных физико-химических условиях, вместо гладких плоскостей ограничения, получаются исштрихованные грани (фиг. 188). Подмечая штриховатость на тех или иных гранях того или иного вещества, мы можем корректировать определение элементов симметрии (у вещества, кристаллизующегося в кубах, изображенных на фиг. 188, найдем не 9, но только 3 плоскости симметрии, не $3G_4$, но только $3G_2$ и т. п.).

Другим характерным признаком являются так называемые фигуры травления. При действии какого-либо растворителя на кристаллическое вещество, кроме равномерного растворения, иногда наблюдается неравномерное разъедание растворителем граней кристалла. На гранях появляются углубления, ямки, имеющие часто характерную форму. Стороны таких ямок оказываются возможными гранями кристалла, причем полученная ямка может обладать определенной симметрией.

Так, на всех трех парах граней куба у хлористого калия (KCl) фигуры травления имеют вид вдавленных в кристалл ступенчатых пирамидок (фиг. 189). Каждая такая пирамидка обладает G_4, проходящей через его середину. Это подтверждает правильность отнесения куба к кубической сингонии и к виду симметрии, обладающему $3G_4$ (соответственно трем взаимно-перпендикулярным парам

граней куба). (Таким образом, возможное толкование решетки нашего кристалла как решетки, изображенной на фиг. 187, только с одной тетрагирой — отпадает).

Однако, если мы рассмотрим, каким образом расположены плоскости симметрии у нашей фигуры травления, то увидим, что эти плоскости симметрии повернуты относительно плоскостей симметрии куба на некоторый угол. Плоскостей же симметрии, отвечающих плоскостям симметрии куба, у пирамидки травления нет. Так как и в кубе нельзя провести плоскостей симметрии, отвечающих плоскостям симметрии фигуры травления, то, следовательно, никаких плоскостей симметрии в данном кристаллическом веществе провести нельзя* (следовательно, вид симметрии нашего куба — аксиальный).

Таким образом, сравнивая симметрию фигур травления с симметрией кристалла, мы опять-таки можем корректировать определение элементов симметрии.

Подобным же образом помогает разбираться в симметрии изучение свойств, характеризующихся противоположным знаком на концах одного и того же направления. Укажем только на способность некоторых кристаллов электризоваться при определенных условиях.

При электризации противоположные концы кристалла заряжаются разноименным электричеством. Если один конец зарядился положительно, то другой конец отвечает отрицательному знаку.

Электричество, возникающее на кристалле благодаря изменениям температуры, называется пироэлектричеством.

Электричество, возникающее на кристалле благодаря изменению давления, называется пьезоэлектричеством.

Для обнаружения пироэлектричества обычно прибегают к нагреванию кристалла; пьезоэлектричество обнаруживают, подвергая кристалл сжатию.

Для целей исследования свойств симметрии важно определить места распределения зарядов и их знаки на кристалле.

Рассмотрим здесь „метод опыления“ или метод Кундта. Для этого подвергшийся нагреванию или давлению кристалл посыпают через специальное сито смесью порошков серы (S) и сурика (Pb_3O_4). Сера — желтого цвета, сурик — красного; их смесь — оранжевого цвета. При прохождении частичек порошка через сито они от трения электризуются, причем сера электризуется отрицательно, а сурик — положительно. Отрицательно заряженные частички серы, попадая на поверхность исследуемого кристалла, будут прилипать к ней в том случае, если в данном месте кристалл заряжен положительно, и будут свободно скатываться с кристалла, если в данном месте кристалл заряжен отрицательно. Наоборот, положительно заряженные частички сурика будут прилипать в тех местах, где кристалл заряжен отрицательным электричеством, и не будут прилипать в частях, заряженных отрицательно.

Таким образом положительно заряженные части кристалла окажутся опыленными желтым порошком серы, а отрицательно-заряженные — красным порошком сурика.

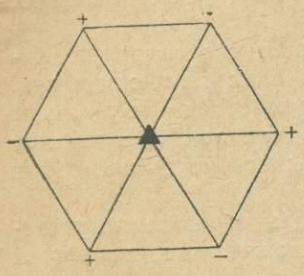
Подвергая такому опыту нагретый кристалл турмалина, увидим, что один его конец заряжается положительно, другой — отрицательно. Кристаллы турмалина относятся к тригирной (тригональной) сингонии, причем G_3 совпадает с направлением удлинения кристалла. Распределение разноименных электрических зарядов на разных концах G_3 доказывает отсутствие целого ряда элементов симметрии. Таким образом сразу же видно, что у кристаллов турмалина нет плоскости симметрии, перпендикулярной G_3. Иначе при отражении в этой плоскости положи-

---

* На самом деле этот вопрос несколько сложнее. Остается непонятным — почему фигуры травления все-таки обладают плоскостями симметрии. Кроме того, новейшие опыты показывают тесную зависимость симметрии фигур травления от симметрии растворителя, что еще более усложняет вопрос.

тельно-заряженная часть кристалла совмещалась бы и с отрицательно-заряженной частью. По этой же причине нельзя предполагать и существование центра инверсии и существование дигиры, перпендикулярной G_3.

Благодаря этому кристаллы турмалина не могут быть отнесены ни к центральному (G_3c), ни к аксиальному (G_3a), ни к планаксиальному (G_3ap) виду симметрии. Для этих кристаллов оказываются возможными только примитивный (G_3) и планальный (G_3P) виды симметрии. Все геометрические данные приводят к заключению, что кристаллы турмалина следует относить к планальному виду симметрии (G_3P).



Фиг. 190.

Кристаллы кварца (SiO_2) относятся также к тригирной (тригональной) сингонии, однако концы G_3 этих кристаллов не заряжаются разноименным электричеством ни при изменении температуры, ни при изменении давления.

Заряды распределяются на концах дигиры, перпендикулярной G_3 (фиг. 190). Всего перпендикулярно G_3 проходят три дигиры, совмещающиеся друг с другом при повороте на 120° вокруг G_3. Поэтому электричество должно распределяться на концах каждой дигиры таким образом, чтобы при повороте на 120° положительные заряды совмещались с положительными, отрицательные — с отрицательными зарядами (фиг. 190).

Указанное распределение зарядов подтверждает правильность отнесения кристаллов кварца к аксиальному виду симметрии (G_3a). Никаких других элементов симметрии, кроме G_3 и дигир, здесь быть не может, несмотря на то, что сплошь и рядом по своей внешней форме кристаллы кварца кажутся обладающими и центром инверсии и плоскостями симметрии.

Приведенные примеры достаточно выпукло обрисовывают значение изучения пиро- и пьезоэлектрических свойств для выяснения симметрии кристаллов.

ОТДЕЛ V

ЗАКОНЫ О ФОРМАХ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА

Глава XII

ФОРМЫ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ

1. Общая теория учения о формах

Изучение форм кристаллов практически является чрезвычайно важным. Нередко форма многогранника настолько характерна для того или иного вещества, что последнее узнается без всяких исследований физических и химических свойств.

Внешняя форма кристаллов играет особенно важную роль при определении минералов. Иногда по одной внешней огранке можно судить даже о происхождении данного минерала и угадывать его месторождение.

Поэтому изучению форм кристаллов (морфологии кристаллов) всегда уделялось большое внимание в курсах минералогии.

Многие считали учение о формах главной сущностью нашей науки. Такой взгляд безусловно устарел; учение о формах является только одним из многочисленных отделов кристаллографии. Однако, ввиду до сих пор не утраченной практической значимости этого отдела, познакомиться с главными формами кристаллов совершенно необходимо.

Изучая симметрию многогранников, мы видели, что при различных симметрических преобразованиях грани многогранника совмещаются друг с другом.

Многогранник, все грани которого могут совмещаться друг с другом при симметрических преобразованиях, называется простой формой.

Куб является примером простой формы; все шесть его граней совмещаются друг с другом посредством имеющихся элементов симметрии. Действительно, взяв какую-либо одну грань A (фиг. 191) и вращая ее вокруг G_3, мы совместим эту грань с гранями B и C, посредством же центра инверсии полученные три грани A, B, C совмещаются с соответственно параллельными гранями A', B', C', и таким образом любая грань A может быть совмещена со всеми остальными гранями нашего многогранника.

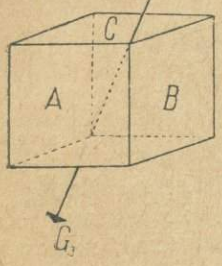
Многогранник, изображенный на фиг. 192, относящийся к тетрагирной (тетрагональной) сингонии, нельзя назвать простой формой. Действительно, грань A, вращением вокруг G_4, легко совместить с гранью B и далее с соответственно параллельными гранями A' и B' (с задними боковыми гранями, не обозначенными на рисунке буквами). Однако никакими элементами симметрии эти грани нельзя совместить с гранью C.

Многогранник, не все грани которого могут совмещаться друг с другом при симметрических преобразованиях, называется комбинацией простых форм.

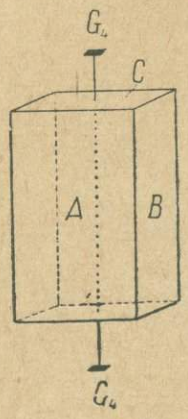
Многогранник, изображенный на фиг. 192, представляет комбинацию двух простых форм: четыре вертикальных грани A, B, A' и B' принадлежат одной простой форме, верхняя же C с нижней гранью C' составляют другую простую форму. Из определения простой формы вытекает следующее следствие:

все грани одной простой формы должны быть одинаковыми.

На фиг. 193 изображена комбинация трех простых форм (*a*, *b* и *c*), на фиг. 194 — четырех простых форм (*a*, *b*, *c* и *d*), на фиг. 191 — простая форма (начинающие очень часто предлагают простые формы называть комбинациями одной формы; такое название, построенное на аналогии, нерационально, так как противоречит смыслу слова „комбинация"). Отличать простые формы от комбинаций и определять число простых форм, слагающих данную комбинацию, обычно не представляет затруднений.



Фиг. 191.



Фиг. 192.

Во избежание ошибок в трудных случаях, заметим, что разница в величине и очертаниях граней доказывает то, что грани принадлежат к разным формам. Однако одинаковая величина и одинаковое очертание граней еще не доказывают, что эти грани относятся к одной форме; необходимо еще доказать, что такие грани могут совмещаться друг с другом посредством какого-либо элемента симметрии.

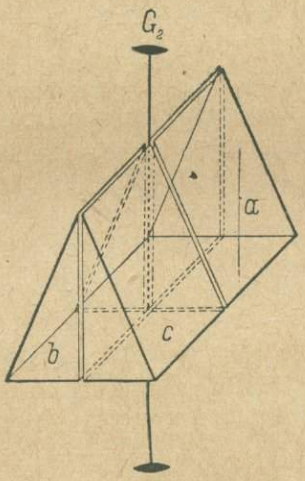
Простая форма, грани которой перпендикулярны, либо параллельны элементам симметрии, или же расположены перпендикулярно плоскости, проходящей через гиры различных наименований, носит название частной формы.

Грани куба перпендикулярны G_4 — поэтому эта форма — частная форма. Грани формы $AB\,A'B'$ (фиг. 192) параллельны G_4, поэтому эта форма — частная форма. Грани формы *c* (фиг. 193) перпендикулярны плоскости, проходящей через G_2 и G_3, поэтому эта форма также частная.

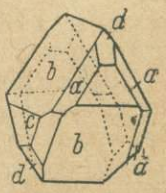
*Простая форма, грани которой расположены косо по отношению к элементам симметрии и не перпендикулярны плоскостям, проходящим через гиры различных наименований, называется общей формой.**

Форма с гранями *a* (фиг. 193) является общей формой, так как ее грани наклонены (не параллельны и не перпендикулярны) ко всем элементам симметрии фигуры.

Очевидно, что комбинации могут слагаться как частными, так и общими формами.



Фиг. 193.



Фиг. 194. Медный колчедан FeS_2Cu.

Всех простых форм (общих и частных) в кристаллографии существует 47 (если считать равные энантиоморфные формы за одинаковые).

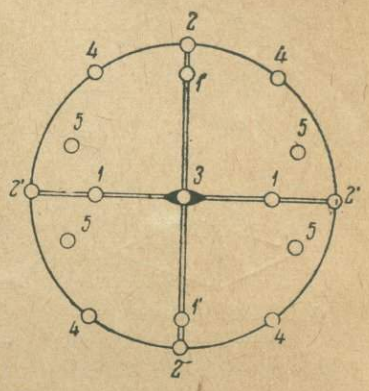
* Исключение представляют некоторые формы полигирной (кубической) сингонии, которые, несмотря на то, что их грани параллельны G_3, являются не частными, но общими формами.

Их нетрудно получить для каждого из 32 видов симметрии. Для того, чтобы несколько разобраться в этом вопросе, рассмотрим вывод простых форм дигирно-планального вида симметрии (G_2p).

Стереографическая проекция элементов симметрии этого вида изображена на фиг. 195 (в центре — дигира, через которую проходят две взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии).

Представим себе некоторый многогранник, принадлежащий к этому виду симметрии, и рассмотрим различные возможные случаи расположения его граней.

Предположим, что одна из его граней расположена перпендикулярно к плоскости симметрии таким образом, что нормаль к ней в стереографической проекции изображается точкой *1*. Нетрудно сообразить, что присутствие такой грани, без симметрично к ней расположенной другой грани *1*, противоречило бы элементам симметрии нашего вида. Поэтому грань *1* должна иметь на многограннике равную грань *1*, той же самой простой формы. Присутствие одной — должно повлечь существование второй, которую легко получить из первой путем симметрических преобразований. Такими преобразованиями могут являться или поворот вокруг дигиры или отражение в присутствующей плоскости симметрии. Нетрудно видеть, что, кроме двух граней *1* и *1*, никаких других граней путем присутствующих элементов симметрии получить нельзя. Таким образом, простая форма, к которой принадлежат грани *1* и *1*, имеет всего две грани — является „двугранной". Две ее грани пересекаются под некоторым углом, который определяется углом наклона грани *1* к дигире. На фиг. 195 точками *1'* и *1'* изображена такая же простая „двугранная" форма, но с более острым углом между гранями (так как проекция *1'* отстоит дальше от дигиры, чем проекция *1*).



Фиг. 195.

Если проекцию нормали расположить еще дальше от проекции дигиры (но попрежнему в плоскости симметрии), поместив ее на окружности проекции, то две грани *2* и *2* простой формы *2—2* не будут уже пересекаться, но станут параллельными друг другу (и дигире). Таким образом получим в этом частном случае некоторую другую двугранную форму.

Очевидно, что, если нормаль к заданной грани располагается в другой плоскости симметрии, но также на окружности проекции, то получим совершенно такую же двугранную форму, состоящую из двух параллельных граней (*2'* и *2'*).

Если нормаль к заданной грани расположить в центре проекции (точка *3*), то ни отражения в плоскостях симметрии, ни повороты вокруг дигиры не дадут граней, принадлежащих к той же простой форме. Отсюда следует, что грань *3* представляет собою некоторую самостоятельную одногранную простую форму.

Если нормаль к грани расположена на окружности проекции, но не в плоскости симметрии (точка *4*), то симметрические преобразования приводят к необходимости существования еще трех равных граней, симметрично расположенных относительно плоскостей симметрии. Таким образом в этом случае получается четырехгранная форма *4—4—4—4*. Все грани этой формы параллельны дигире и образуют некоторую призму (фиг. 196).

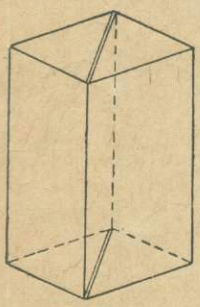
В общем случае, если нормаль к грани расположена и не в плоскостях симметрии и не параллельно дигире, но косо по отношению ко всем присутствующим элементам симметрии, будем иметь грань „общей" формы. Отражая проекцию *5* в обеих плоскостях симметрии и вращая ее вокруг дигиры, выведем еще 3, а всего, следовательно, 4 грани простой общей формы *5—5—5—5*. Как видим, получается тоже четырехгранная форма, однако с гранями, не параллельными

к дигире, а сходящимися в одной вершине. Эта форма представляет собой некоторую пирамиду (фиг. 197).

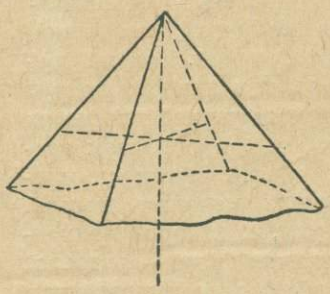
Очевидно, что никаких других случаев расположения граней относительно элементов симметрии, кроме рассмотренных нами, быть не может. Таким образом в дигирно-планальном виде симметрии возможно всего пять типов различных простых форм: одна общая и четыре частных.

Общая форма отвечает некоторой пирамиде (*5—5—5—5*). Из частных форм: одна одногранная (*3*) (грани перпендикулярны G_2 и p), две — двугранных: с параллельными гранями (*2—2* или *2′—2′*) (грани параллельны G_2 и перпендикулярны P) и с наклонными гранями *1—1* или *1′—1′* (грани не параллельны G_2, но перпендикулярны P), и, наконец, одна четырехгранная призма (*4—4—4—4*) (с гранями, параллельными G_2, но не перпендикулярными P).

Совершенно аналогичный вывод можно сделать для каждого из 32 видов симметрии. Предоставляем сделать его читателю. Из вывода следует, что в различных видах симметрии довольно часто возможны одинаковые простые формы. Всего во всех 32 видах симметрии различных простых форм отбирается, как было сказано, 47.



Фиг. 196. Ромбическая призма.



Фиг. 197. Ромбическая пирамида. Горизонтальное сечение — ромб.

Комбинируясь друг с другом, простые формы дают бесконечное множество различных комбинаций. Эти комбинации, ввиду их бесконечного разнообразия, не имеют, конечно, особых названий, но характеризуются теми простыми формами, которыми они слагаются. Каждая же простая форма носит свое определенное название.

Названия простых форм, так же, как и названия видов симметрии, составлялись постепенно, в связи с ходом развития кристаллографии, и многие из них нельзя назвать рациональными.

Ниже мы будем придерживаться наиболее рациональной номенклатуры, выработанной Федоровским институтом кристаллографии в 1924 г. Эта номенклатура, хотя и не лишена некоторых недостатков, все же является лучшей из всех. Кроме названий, распространенных в общежитии (например, куб, пирамида, призма), многие формы называются по числу граней (например, „тетраэдр“ — четырехгранник, так как по гречески тетра — четыре, а эдра — грань).

Наконец, формы иногда носят названия по виду граней (например, „ромбоэдр“ — многогранник, каждая грань которого представляет собою ромб). Последние нельзя признать удобными, так как в комбинации одна и та же форма может иметь различные очертания своих граней (например, грани ромбоэдра, в комбинации со многими другими простыми формами, оказываются совсем не имеющими формы ромбов).

Так как каждой категории сингоний присущи свои простые формы многогранников, то систематическое изучение форм будет нами разбито на три части: формы кристаллов низшей категории, формы кристаллов средней категории и формы кристаллов высшей категории.

2. Простые формы кристаллов низшей категории

Опыт и теория показывают, что кристаллы низшей категории могут быть ограничены семью различными простыми формами.

Обратимся снова к фиг. 193, представляющей собою комбинацию трех форм (*a*, *b* и *c*). Форма *c* имеет только одну грань, — представляет собой, следовательно,

одногранник, который поэтому и называется „моноэдром". Эта форма может встречаться во всех сингониях, кроме полигирной (кубической), и легко определяется во всех комбинациях (не в комбинациях она встречаться не может). Если какая-либо грань не имеет себе равных, то эта грань ничем иным быть не может, как только гранью моноэдра.

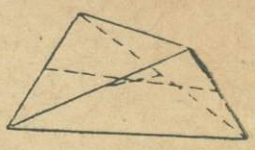
Две грани *a* образуют вторую простую форму. Такая форма, как состоящая из двух граней, называется „диэдром".

Две грани *b* также образуют простую форму, однако эта форма отлична от предыдущей. В то время, как диэдр слагают две грани, расположенные под углом друг к другу, грани *b* параллельны между собою. Поэтому такую форму нельзя уже называть диэдром. Рационально, по аналогии с названиями других форм (например с „дипирамидой", о которой речь ниже), называть эту форму „димоноэдром". Однако вместо этого принято неудачное название „пинакоид" (от греческого слова „πιναξ" — доска).

Пинакоид, как и моноэдр, может встречаться во всех сингониях [кроме полигирной (кубической)] и легко узнается в любых комбинациях.

Простая форма, состоящая только из одной пары параллельных граней, ничем другим быть не может, как только пинакоидом.

Таким образом фиг. 193 представляет собой комбинацию трех форм: моноэдра, диэдра и пинакоида. Другие формы, встречающиеся в низшей категории сингоний, сложнее.



Фиг. 198. Ромбический тетраэдр.

Из них три формы имеют по четыре грани.

Ромбическая призма (фиг. 196) в сечении имеет ромб и ограничена двумя парами параллельных граней, из которых одновременно можно видеть (если считать многогранник непрозрачным) максимум две грани. Этим ромбическую призму можно легко отличить от других четырехгранных форм низшей категории в любой комбинации.

Часто грани ромбической призмы, лежащие на противоположных концах комбинации, начинающие принимают за два диэдра. Поэтому рекомендуется, определив „диэдр", взглянуть — нет ли на другом конце многогранника такого же „диэдра". Два таких одинаковых „диэдра" почти всегда оказываются связанными элементами симметрии и в совокупности образуют ромбическую призму (например, передние и задние грани в фиг. 196 не представляют собою двух диэдров, но являются одной ромбической призмой).

Ромбический тетраэдр (фиг. 198) в среднем сечении (проходящем через G_2) имеет ромб и ограничен четырьмя непараллельными гранями, из которых одновременно можно видеть максимум три грани. По этому признаку данная форма легко отличается от остальных простых форм низшей категории в любой комбинации.

Ромбическая пирамида (фиг. 197) в сечении имеет ромб и также ограничена четырьмя непараллельными гранями, которые однако, в отличие от граней тетраэдра, все сходятся в одной вершине. Поэтому, если смотреть со стороны этой вершины, то одновременно будут видны все четыре грани этой формы. По такому признаку ромбическая пирамида легко отличается и от ромбической призмы и от ромбического тетраэдра. Таким образом, если в данной комбинации присутствует четырехгранная форма, то, поворачивая ее различными сторонами к наблюдателю, следят за тем, сколько граней этой формы можно увидеть одновременно. Если удастся увидеть только две грани определяемой формы — имеем ромбическую призму; если в некоторых положениях видим три грани, но не больше, то это — ромбический тетраэдр. Если, наконец, удастся так поставить многогранник, что одновременно видны все четыре грани — имеем ромбическую пирамиду.

Седьмая простая форма низшей категории имеет восемь граней и представляет собою как бы две ромбических пирамиды, сложенных своими основаниями. Она называется ромбической дипирамидой (фиг. 199).

Характерным признаком, позволяющим узнавать эту форму в любой комбинации, является число ее граней. Других восьмигранных форм кристаллы низшей категории не имеют.

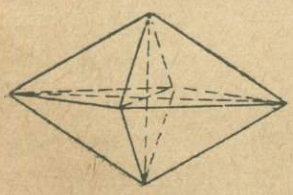
Ниже приводится табл. 14, могущая служить ключом для определения многогранников низшей категории.

Таблица 14

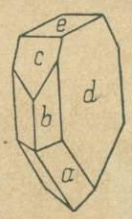
Ключ к определению простых форм многогранников низшей категории

Число граней определяемой формы	Характерные отличительные признаки при одинаковом числе граней у нескольких форм	Название и рисунок простой формы и ее сечения	Виды симметрии, в которых данная форма может встречаться	Главнейшие синонимы
1	—	Моноэдр	G_0; G_1p; G_1a; G_2p; G_2a	Педион, гемипинакоид
2	Грани непараллельны	Диэдр	G_1p, G_1a; G_2p,	Дома, сфеноид, гемипризма
	Грани параллельны	Пинакоид (димоноэдр)	G_0c; G_1p, G_1a; G_1ap; G_2p; G_2a; G_2ap	—
4	Одновременно видимы максимум две грани (грани попарно параллельны)	Ромбическая призма	G_1ap; G_2p, G_2a; G_2ap;	—
	Одновременно видимы максимум три грани	Ромбический тетраэдр	G_2a	Сфеноэдр, дисфеноид
	Одновременно могут быть видимы все четыре грани	Ромбическая пирамида	G_2p	—
8	—	Ромбическая дипирамида	G_2ap	Ромбическая бипирамида

Рассмотрим на конкретном примере — каким образом следует вести изучение многогранника для определения его форм. Пусть нам дана модель, изображенная на фиг. 200. Прежде всего определяем ее элементы симметрии. Нетрудно найти, что вертикально проходят две взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии, пересекающиеся по вертикальной дигире. Других элементов симметрии нет. Выписываем найденное: $G_2 2p$. Отсюда следует, что данная модель принадлежит к низшей категории, дигирной (ромбической) сингонии, планальному виду симметрии.



Фиг. 199. Ромбическая дипирамида.



Фиг. 200. Каламин $SiO_4Zn_2 \cdot H_2O$.

После этого сосчитываем из скольких простых форм слагается данная комбинация. При этом убеждаемся, что присутствуют всего пять различных форм (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*). Переходим к определению этих форм.

Лучше всего начинать с форм с наибольшими по площади гранями.

Самыми большими являются грани *d*. Считаем, сколько граней отвечает этой форме. Их — две. Смотрим по таблице, какие простые формы состоят из двух граней. Оказывается, что по две грани имеют только диэдр и пинакоид, отличаясь, как указано в таблице, относительным наклоном своих граней. Так

как грани у нас параллельны — форма d — пинакоид (димоноэдр). Проверяем в следующем столбце и убеждаемся, что пинакоид действительно может встречаться в виде G_2p.

Переходим к форме e. Она представлена одной гранью. По таблице сразу же находим ее название — моноэдр. Контролируем определение, убеждаясь по следующему столбцу таблицы, что эта форма возможна в виде симметрии G_2p.

Граней c — две, как и граней d, однако грани c не параллельны между собою, а потому представляют диэдр. Список следующего столбца показывает, что диэдр, в нашем виде G_2p, встречаться может.

Грани a могут принадлежать трем четырехгранным формам. Поворачивая многогранник нижней вершиной к себе, убеждаемся, что все четыре грани a сделаются одновременно видимыми, а потому, согласно таблице, грани a — грани ромбической пирамиды. В виде G_2p эта форма возможна.

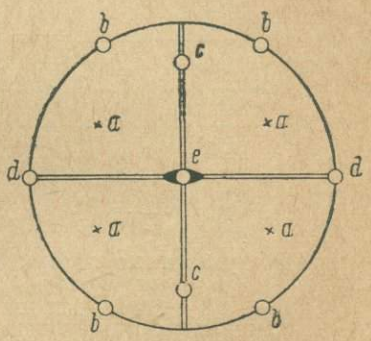
Из четырех граней b одновременно могут быть видимы только максимум две. Поэтому эта форма — ромбическая призма (не два диэдра). Следующий столбец таблицы подтверждает возможность встретить ромбическую призму в нашем виде G_2p.

Комбинация определена полностью.

Запись должна выглядеть, примерно, так:

Элементы симметрии — $G_2 2p$.
Категория — низшая.
Сингония — дигирная (ромбическая).
Вид симметрии — планальный.
Условное обозначение — G_2p.
Комбинация — 5 форм:

пинакоид	1
моноэдр	1
диэдр	1
ромбическая пирамида	1
ромбическая призма	1
Итого	5 форм



Фиг. 201.

(Поверку суммы найденных форм следует производить обязательно).

Иногда большую помощь для определения форм оказывает проектирование кристаллов. В большинстве случаев при этом бывает достаточным ограничиться получением только приблизительных проекций, вычерченных от руки, без помощи измерений и стереографических сеток.

Для этого рисуется стереографическая проекция найденного вида симметрии. Исследуемый многогранник ориентируется в пространстве таким образом, чтобы изображение его элементов симметрии вполне отвечало одному из 32 рисунков, изображенных в табл. 9.

В нашем примере многогранник может быть ориентирован, как показано на фиг. 201 (гранью e вверх, гранью d — вправо). Проекция элементов симметрии представлена в клетке G_2p в табл. 9.

В полученное изображение элементов симметрии вписываются стереографические проекции нормалей к граням кристалла. Удобнее всего начинать с вертикальных граней.

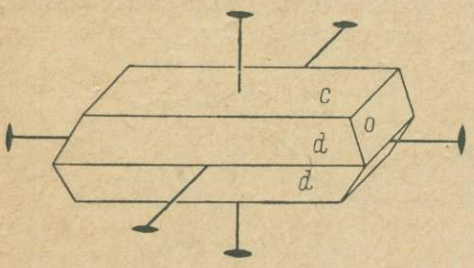
Нормаль к грани d лежит в плоскости симметрии, а потому изобразится точкой d, расположенной в проекции этой плоскости. Параллельная грань изобразится точкой d'. Мысленно проводя из центра многогранника нормали к вертикальным граням b, приблизительно определяем, под каким углом расположены они к плоскости симметрии. (Для наглядности можно рекомендовать прикладывать к этим граням тыльный конец карандаша.) На-глаз откладываем наблюденный угол по окружности проекции от концов плоскости симметрии. Получаем проекции b—b—b—b (фиг. 201).

После вертикальных граней переходим к проектированию горизонтальных. В нашем примере нормаль к горизонтальной грани e изобразится в центре проек-

ции. Далее получаем нормали c и c. Они лежат в плоскости симметрии, параллельной грани d, и имеют сравнительно незначительный наклон к горизонту (большое ρ). Поэтому их проекции c и c изображаются довольно далеко от центра проекции.

Остается спроектировать нормали к четырем нижним граням a. Прикладывая тыльный конец карандаша к этим граням a, судим о расположении их нормалей, после чего, принимая во внимание, что грани a лежат под плоскостью проекции и, сообразуясь с наклонами нормалей к горизонту и к плоскостям симметрии, расставляем на чертеже точки a. Проекция кристалла готова.

Следует сделать две поверки. Во-первых, по проекции необходимо убедиться в том, что расположение помеченных на чертеже точек не противоречит присутствующим элементам симметрии (например, четыре точки a и b должны располагаться симметрично относительно плоскостей симметрии, так же, как и пары точек c—c и d—d). Кроме того, следует убедиться в том, что никакие другие точки, кроме точек, помещенных на чертеже, присутствующими элементами симметрии выведены быть не могут.



Фиг. 202.

Во-вторых, следует убедиться в том, что проекции нормалей к граням, принадлежащим одному поясу, изображаются на проекции одной дуги большого круга (см. замечание к задаче 9 на стр. 82); например, грани d, a, a, d располагаются на дугах $daad$.

Две указанные поверки позволяют уточнить расположение спроектированных точек.

Выделяя группы точек, изображающих проекции, принадлежащие одной простой форме, не трудно сообразить, какой именно простой форме они принадлежат (подобно тому, как это было сделано на примере вывода простых форм данного вида симметрии. См. предыдущий раздел, стр. 183). Таким образом, можно определить все формы данной комбинации, совершенно не прибегая к табл. 14, а пользуясь исключительно составленной проекцией.

Рассмотрим второй пример. Фиг. 202 имеет три взаимно перпендикулярные дигиры и три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, через них проходящие, и центр инверсии. Отсюда следует, что кристалл принадлежит к низшей категории дигирной (ромбической) сингонии, планаксиальному виду симметрии (G_2ap). Комбинация трех форм (c, d, o) (d и o — грани разных форм; первые длиннее вторых).

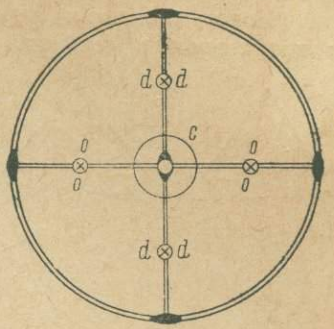
Две параллельные грани c представляют собою пинакоид; четыре грани d и четыре грани o, как не трудно убедиться с помощью таблицы, — ромбические призмы. Таким образом, в результате исследования имеем:

Элементы симметрии — $3G_2 3pc$.
Категория — низшая.
Сингония — дигирная (ромбическая).
Вид симметрии — планаксиальный.
Условное обозначение — G_2ap.
Комбинация трех форм:
пинакоид 1
ромбические призмы . . 2

Итого . . . 3 формы

Подробное описание, как получить приблизительную стереографическую проекцию этого кристалла, мы приводить не будем, изобразив на фиг. 203 только окончательный результат проектирования.

Приведенными двумя примерами ограничим описание определений многогранников низшей категории, считая, однако, совершенно необходимым всякому изучающему кристаллографию произвести не менее десяти исследований многогранников, так как быстрое и безошибочное определение (в особенности без табл. 14) дается только упорными упражнениями. *



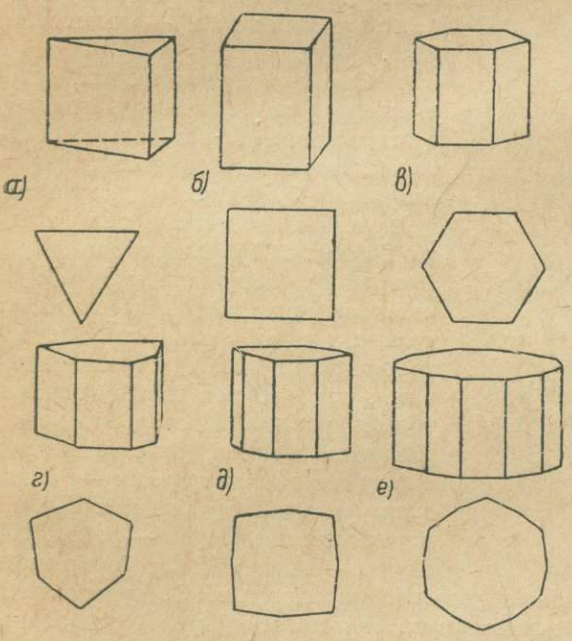
Фиг. 203.

3. Простые формы кристаллов средней категории

У кристаллов средней категории встречается значительно большее количество форм, чем у кристаллов низшей категории (всего 27). Однако, почти все эти формы аналогичны (две даже совпадают) с изученными ранее. Поэтому, ознакомление с формами кристаллов средней категории не вызывает затруднений.

Моноэдр — нам уже знаком, пинакоид (димоноэдр) — тоже.

Призмы у кристаллов средней категории не могут иметь ромба в сечении, а потому не могут и называться ромбическими. Если сечение имеет форму правильного треугольника (тригона), призма называется тригональной (фиг. 204*а*); при квадратном сечении (тетрагона) — призма называется тетрагональной (фиг. 204*б*); при сечении в форме правильного шестиугольника (гексагона) — гексагональной призмой (фиг. 204*в*).



Фиг. 204.

Кроме этих простейших призм, могут встречаться еще и более сложные. Если сечение имеет форму дитригона (фиг. 204*г*), призма называется дитригональной призмой. Эту призму легко себе представить, если вообразить на каждой грани тригональной призмы по две грани. В отличие от гексагональной призмы, также шестигранной, дитригональная не имеет параллельных граней, и двугранные углы любой грани с соседними не одинаковы.

Аналогично, если сечение призмы имеет форму дитетрагона, призма называется дитетрагональной (фиг. 204*д*). Если, наконец, сечение призмы представляет собою дигексагон, то призма называется дигексагональной (фиг. 204*е*).

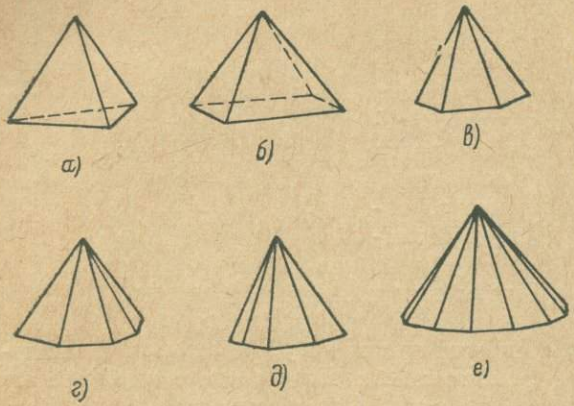
Пирамиды кристаллов средней сингонии показывают такую же аналогию с ромбической пирамидой, как разобранные призмы с ромбической призмой.

---

* Для этих упражнений очень удобны десятиштучные наборы моделей кристаллов низшей категории, специально подобранных и изготовляемых модельной мастерской Федоровского института. Такие же десятиштучные наборы подобраны и для изучения кристаллов средней и высшей категорий.

Вместо ромбической пирамиды, в случае тригонального сечения, имеем тригональную пирамиду (фиг. 205*а*). Если сечение — квадрат (тетрагон), пирамида называется тетрагональной (фиг. 205*б*). Наконец, гексагональной пирамидой называется пирамида с гексагональным сечением (фиг. 205*в*).

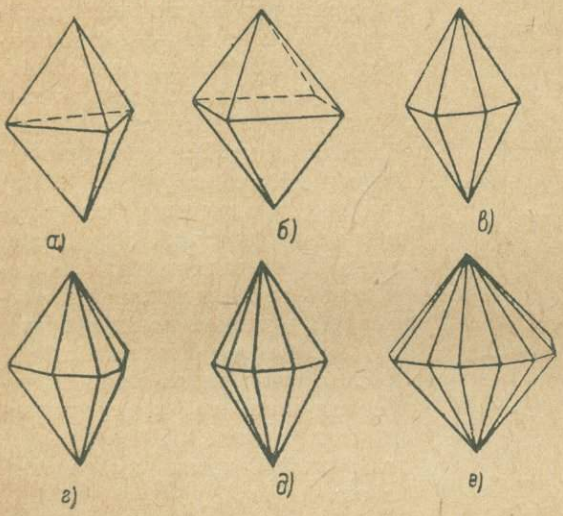
Более сложными пирамидами являются: дитригональная (фиг. 205*г*) с дитригоном в сечении, дитетрагональная (фиг. 205*д*) с дитетрагоном в сечении и дигексагональная (фиг. 205*е*) с дигексагоном в сечении. Эти пирамиды можно представить себе, как соответственные тригональные, тетрагональные и гексагональные, каждая грань которых заменена двумя гранями (отсюда и приставка „ди").



Фиг. 205.

Дипирамиды показывают такую же аналогию. Сечение тригональной дипирамиды отвечает тригону, тетрагональной — квадрату (тетрагону), гексагональной — гексагону (фиг. 206*а*, *б*, *в*).

Дитригональная дипирамида (фиг. 206*г*) имеет в сечении дитригон, дитетрагональная (фиг. 206*д*) — дитетрагон и дигексагональная — дигексагон (фиг. 206*е*).



Фиг. 206.

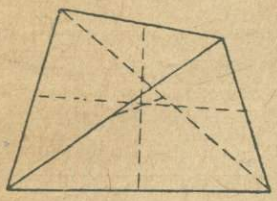
Среднее сечение формы, отвечающей ромбическому тетраэдру в тетрагирной (тетрагональной) сингонии, является квадратом (перпендикулярно G_{4i}), а потому называется тетрагональным тетраэдром (фиг. 207). В тригирной (тригональной) сингонии этой форме отвечает форма, состоящая из шести граней, причем три нижние грани расположены между тремя верхними, так что под каждой верхней гранью располагается ребро между нижними гранями, а под ребром между верхними гранями — нижняя грань (фиг. 208) (у тригональной дипирамиды: под ребром — ребро, под гранью — грань). Такая форма называется ромбоэдром, так как каждая ее грань представляет ромб. Следует помнить, что этот ромб не сохраняется в комбинациях, и очертания граней ромбоэдра в комбинации могут быть какими угодно (поэтому приведенное название нельзя считать удачным; по аналогии с тетрагональным тетраэдром, эту форму рациональнее было бы называть, также по числу граней, тригональный гексаэдр).

В гексагирной (гексагональной) сингонии аналогичной формы не существует.

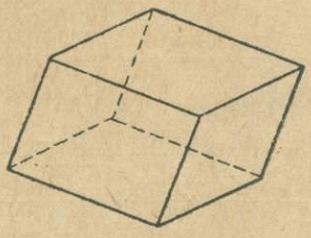
Подобно тому, как, кроме простых призм, пирамид и дипирамид, существуют еще более сложные — с удвоенным числом граней, так удвоенное число граней могут иметь и тетрагональный тетраэдр и ромбоэдр. Такие формы называются соответственно тетрагональным и дитригональным скаленоэдрами (фиг. 209*а* и фиг. 209*б*) („скалена" — значит по-гречески разносторонний треугольник).

напрашивающиеся здесь рациональные названия дитетраэдр и дигексаэдр, к сожалению, пока не приняты.

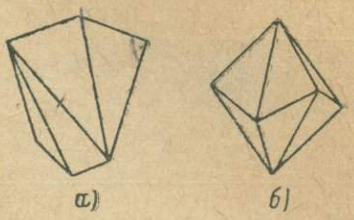
Наконец, многогранники средней категории имеют еще совсем особые формы, отвечающие диэдру. Это так называемые трапецоэдры (трапеца — четырехугольник, у которого равны две соседние стороны). Трапецоэдры могут быть тригональными (фиг. 210*б*), тетрагональными (фиг. 210*а*) и гексагональными (фиг. 210*в*).



Фиг. 207. Тетрагональный тетраэдр.



Фиг. 208. Ромбоэдр.

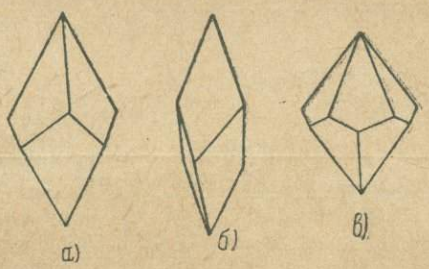


Фиг. 209. *а* — тетрагональный скаленоэдр, *б* — дитригональный скаленоэдр.

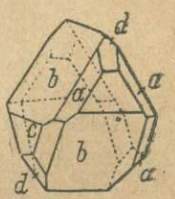
Все перечисленные простые формы изображены в табл. 15 (стр. 192), которая может служить удобным ключом при определении форм, слагающих любую комбинацию. Пользование этой таблицей уясняется из следующего примера.

Пусть дан многогранник, изображенный на фиг. 211. Прежде всего определяем его элементы симметрии $G_{4i}(G_2)2G_22p$.

Отсюда следует, что многогранник относится к тетрагироидно-планальному виду симметрии $G_{4i}p$. Записав все относящееся к определениям симметрии (элементы симметрии, категорию, сингонию, вид симметрии и условные обозначения), переходим к определению форм.



Фиг. 210.



Фиг. 211.

Находим, что многогранник представляет комбинацию четырех форм. Рассматриваем каждую форму отдельно. Подсчитываем число наиболее крупных по величине граней формы *b*. Их — четыре. Обращаясь к таблице, видим, что существует три четырехгранных формы, отличающихся друг от друга наклонами своих граней к главной оси симметрии (в данном случае G_{4i}). На фигуре грань *b* пересекает эту ось в верхней части многогранника, грань же *b'* пересекает ее внизу. Согласно таблице, форма, отвечающая такому расположению граней, должна быть тетрагональным тетраэдром. Проверяем определение по соседнему столбцу таблицы, убеждаясь в том, что найденная форма действительно может встречаться в нашем виде симметрии $G_{4i}p$.

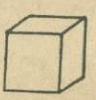
К этому же результату приводит и определение формы *d* (здесь только для того чтобы разобраться, как пересекают грани формы *d* ось G_{4i}, их приходится мысленно продолжать вверх и вниз).

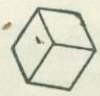
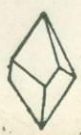
Форма *c* имеет также четыре грани. Однако как бы мы ни продолжали грани этой формы, они никогда не пересекут G_{4i}, будучи ей параллельными. Этот случай также предусмотрен таблицей и отвечает тетрагональной призме. Соседний список видов симметрии не противоречит сделанному определению.

Таблица 15

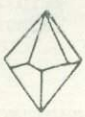
Ключ к определению простых форм многогранников средней категории

(G – обозначает главную ось симметрии, которую всегда следует ориентировать вертикально)

Число граней определ. фор.	Характерные отличительные признаки при одинаковом числе граней у нескольких форм	Название и рисунок простой формы	Виды симметрии, в которых данная форма может встречаться	Главнейшие синонимы
1	—	Моноэдр 	G_2, G_2P, G_1, G_1p, G_6, G_6p	Базопедион
2	—	Пинакоид (димоноэдр) 	G_2c, G_2a, G_2ap, G_1c, G_1a, G_1ap, G_6c, G_1a, G_1ap, G_{6i}, $G_{6i}P$	Базопинакоид
3	Грани параллельны G	Тригональная призма 	G_3, G_3p, G_3a, G_{6i}, $G_{6i}p$	
	Грани непараллельны G	Тригональная пирамида 	G_3, G_3p	
4	Грани параллельны G	Тетрагональная призма 	G_4, G_4c, G_4p, G_1a, G_1ap, G_{4i}, $G_{4i}p$	Квадратная призма
	Все грани формы пересекают G с одной стороны (или над или под многогранником)	Тетрагональная пирамида 	G_4, G_4p	Квадратная пирамида
	Все грани формы пересекают G с обеих сторон (и над и под многогранником)	Тетрагональный тетраэдр 	G_{4i}, $G_{4i}p$	Квадратный бисфеноид

Число граней опред. фор.	Характерные отличительные признаки при одинаковом числе граней у нескольких форм			Название и рисунок простой формы	Виды симметрии, в которых данная форма может встречаться	Главнейшие синонимы
6	Грани параллельны G	Грани попарно параллельны.		Гексагональная призма 	G_3c, G_3p, G_3a, G_3ap, G_6, G_6c, G_6p, G_6a, G_6ap	
		Грани не параллельны . . .		Дитригональная призма 	G_3p, G_3a, $G_{6i}p$	
	Все грани формы пересекают G с одной стороны (или над или под многогранником)	Грани одинаково наклонены к своим соседям (той же формы)		Гексагональная пирамида 	G_3p, G_6, G_6p	
		Грани не одинаково наклонены к своим соседям		Дитригональная пирамида 	G_3p	
	Грани формы пересекают G с обеих сторон (и над и под многогранником)	Грани попарно параллельны		Ромбоэдр (тригональный гексаэдр) 	G_3c, G_3a, G_3ap	
		Грани не параллельны	Нижние грани пересекаются с верхними по горизонтальным ребрам	Тригональная дипирамида 	G_3a, G_3ap, G_{6i}, $G_{6i}p$	тригональная бипирамида
			Нижние грани пересекаются с верхними по наклонным ребрам	Тригональный трапеоэдр 	G_3a	

Число граней определ. фор.	Характерные отличительные признаки при одинаковом числе граней у нескольких форм		Название и рисунок простой формы	Виды симметрии, в которых данная форма может встречаться	Главнейшие синонимы
8	Грани параллельны G		Дитетрагональная призма 	G_4p, G_4a, G_4ap, $G_{4i}p$	
	Все грани формы пересекают G с одной стороны (или над или под многогранником)		Дитетрагональная пирамида 	G_4p	
	Грани формы пересекают G с обеих сторон (над и под многогранником)	Грани попарно параллельны	Тетрагональная дипирамида 	G_4c, G_4a, G_4ap, $G_{4i}p$	квадратная бипирамида
		Пара нижних граней лежит симметрично между двумя парами верхних	Тетрагональный скаленоэдр (дитетраэдр) 	$G_{4i}p$	
		Грани не параллельны. Нижняя грань лежит не симметрично между двумя верхними . .	Тетрагональный трапецоэдр 	G_4a	

Число граней опредл. фор.	Характерные отличительные признаки при одинаковом числе граней у нескольких форм			Название и рисунок простой формы	Виды симметрии, в которых данная форма может встречаться	Главнейшие синонимы
12	Грани параллельны G			Дигексагональная призма 	G_3ap, G_6p, G_6a, G_6ap	
	Все грани формы пересекают G с одной стороны (или над или под многогранником)			Дигексагональная пирамида 	G_6p	
	Грани формы пересекают G с обеих сторон (и над и под многогранником)	Грани попарно параллельны	Нижние грани пересекаются с верхними по горизонтальным ребрам	Гексагональная дипирамида 	G_3ap, G_6c, G_6a, G_6ap, $G_{6i}p$	гексагональная дипирамида
			Нижние грани пересекаются с верхними по наклонным ребрам	Дитригональный скаленоэдр (дигексаэдр) 	G_3ap	
		Грани не параллельны	Нижние грани пересекаются с верхними по горизонтальным ребрам	Дитригональная дипирамида 	$G_{6i}p$	
			Нижние грани пересекаются с верхними по наклонным ребрам	Гексагональный трапецоэдр 	G_6a	

Продолжение

Число граней определ. фор.	Характерные отличительные признаки при одинаковом числе граней у нескольких форм	Название и рисунок простой формы	Виды симметрии, в которых данная форма может встречаться	Главнейшие синонимы
16	—	Дитетрагональная дипирамида 	G_4ap	дитетрагональная бипирамида
24	—	Дигексагональная дипирамида 	G_6ap	дигексагональная бипирамида

При составлении этой таблицы существенную помощь мне оказал В. Б. Татарский, которому приношу свою сердечную благодарность.

Сосчитываем, наконец, число граней формы a. Их — восемь. Восьмигранных форм довольно много. По предыдущему смотрим как наклонены различные грани к G_{4_i}. Они этой оси не параллельны, но пересекают ее как под (грани a'), так и над многогранником (грани a).

Такому случаю на этот раз отвечает не одна форма, но целых три. Кладя наш многогранник на стол гранью a, убеждаемся, что грань a имеет себе параллельную a'. Разбираемся также, согласно указаниям таблицы, каким образом грани a пересекаются с гранями a'. Непосредственно наблюдаем горизонтальные ребра между этими гранями. Это обстоятельство заставляет отнести определяемую форму к тетрагональной дипирамиде. Список видов симметрии, в которых тетрагональная дипирамида может присутствовать, не противоречит сделанному определению.

Таким образом исследование произведено полностью. Запись должна иметь следующий вид:

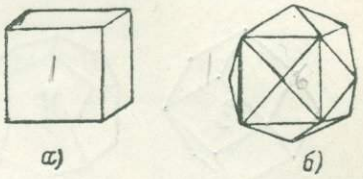
Элементы симметрии — $G_{4_i}(G_2)2G_2 2p$.
Категория — средняя.
Сингония — тетрагирная (тетрагональная).
Вид симметрии — гироидо-планальный.
Условное обозначение — $G_{4_i}p$.
Комбинация четырех форм:
Тетрагональные тетраэдры . . 2
Тетрагональная призма 1
Тетрагональная дипирамида . . 1

Итого . . . . 4 формы.

Для приобретения достаточного навыка в определениях требуется проработать не менее десяти комбинаций кристаллов средней категории.

4. Простые формы кристаллов высшей категории [полигирной (кубической) сингонии]

Полигирная (кубическая) сингония по своим формам стоит особняком от других сингоний. Простые формы этой сингонии, в большинстве случаев резко отличные от всех рассмотренных ранее, не имеют аналогов в других сингониях. Прежде всего следует твердо запомнить, что никаких моноэдров, пинакоидов (димоноэдров), призм, пирамид и дипирамид в этой сингонии встречаться не может. Ей свойственны 15 совершенно особых, своеобразных форм.

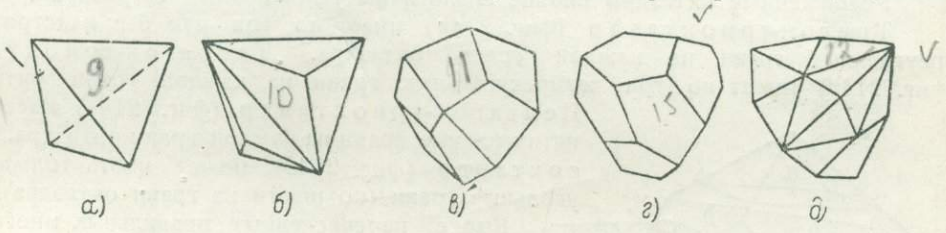


Фиг. 212.

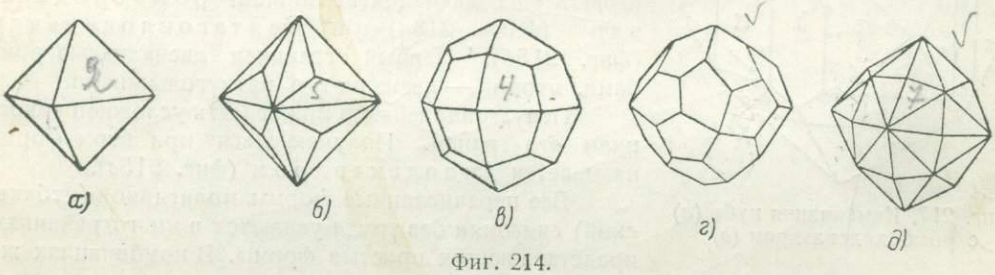
Только три простые формы имеют аналоги в других сингониях.

Одна из них — г е к с а э д р (к у б) (фиг. 212*а*). От знакомого нам ромбоэдра (тригонального гексаэдра) эта форма отличается тем, что ее грани представляют собою не ромбы, но квадраты. Гексаэдр может присутствовать во всех видах симметрии полигирной сингонии и очень часто встречается на кристаллах (отсюда прежнее название — кубическая сингония).

Как и в других сингониях формы полигирной (кубической) сингонии могут усложняться удвоением числа граней [например, вспомним тригональную и дитригональную призмы или тетрагональный тетраэдр и тетрагональный скаленоэдр (дитетраэдр)]. В полигирной сингонии это усложнение простирается еще дальше:



Фиг. 213.



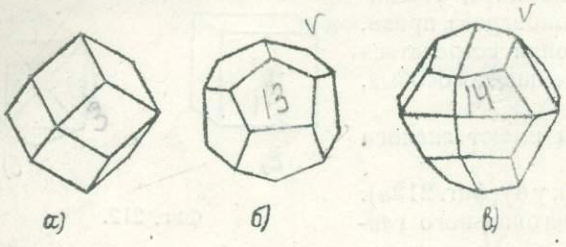
Фиг. 214.

число граней не только удваивается, но и утраивается, учетверяется и даже ушестеряется. Так, например, усложненным гексаэдром является „тетрагексаэдр“ (фиг. 212*б*). Этот многогранник представляет собой гексаэдр (куб), на каждой грани которого расположено по четыре грани.

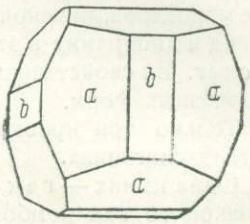
Второй формой, с аналогом которой мы встречались в других сингониях, является т е т р а э д р (фиг. 213*а*). У знакомого нам ромбического тетраэдра грани имеют форму разносторонних треугольников. У тетрагонального тетраэдра — грани равнобедренные треугольники. Правильный тетраэдр или просто тетраэдр ограничен равносторонними треугольниками.

У усложненных тетраэдров каждая грань заменяется тремя или шестью гранями. В первом случае мы имеем тритетраэдры, во втором — гексатетраэдры. Однако оказывается, что расположение граней тритетраэдров может быть раз-

лично. В зависимости от этого получаются многогранники или с треугольными гранями (тригон-тритетраэдр, фиг. 213 *б*), или с четырехугольными гранями (тетрагон-тритетраэдр, фиг. 213*в*), или же с пятиугольными гранями (пентагон-тритетраэдр, фиг. 213*г*). Гексатетраэдры (фиг. 213*д*) могут иметь только треугольные грани (поэтому называть его тригон-гексатетраэдром совершенно излишне).



Фиг. 215.

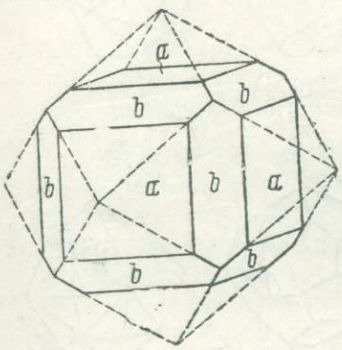


Фиг. 216. Комбинация куба (*b*) с пентагондодекаэдром (*a*).

Формой, похожей на тетрагональную дипирамиду, является правильный восьмигранник — октаэдр (фиг. 214*а*). Все его грани представляют равносторонние треугольники.

Усложненные октаэдры вполне аналогичны усложненным тетраэдрам.

Тригон-триоктаэдр (фиг. 214*б*) имеет по три как бы надстроенных треугольных грани на каждой грани октаэдра. Тетрагон-триоктаэдр (фиг. 214*в*) имеет по три четырехугольных грани на каждой грани октаэдра. Пентагон-триоктаэдр (фиг. 214*г*) имеет три пятиугольные грани на каждой грани октаэдра. Гексоктаэдр (фиг. 214*д*) может иметь только треугольные грани (по шести на грани октаэдра).



Фиг. 217. Комбинация куба (*a*) с ромбододекаэдром (*b*).

Кроме перечисленных правильных многогранников (гексаэдр, тетраэдр, октаэдр), важную роль играют еще двенадцатигранники: ромбододекаэдр (фиг. 215*а*) и пентагондодекаэдр (фиг. 215*б*). Первый ограничен двенадцатью ромбами, второй — двенадцатью пятиугольниками.

Пентагондодекаэдр может быть усложнен удвоением его граней. Получающаяся при этом форма называется дидодекаэдром (фиг. 215*в*).

Все перечисленные формы полигирной (кубической) сингонии без труда узнаются в многогранниках, представляющих простые формы. В комбинациях же определение форм вызывает обычно больше затруднений, чем при аналогичных определениях комбинаций других сингоний. Главным затруднением здесь является то, что многие формы называются не только по числу граней (тетраэдр, гексаэдр, октаэдр), но и по очертанию граней (ромбододекаэдр, пентагондодекаэдр и др.). Очертание же граней в комбинациях почти всегда отлично от очертания этой грани у многогранника, представляющего одну простую форму. Так, например, грани пентагондодекаэдра в комбинации его с гексаэдром (кубом) (фиг. 216) уже не будут пятиугольными, но, срезаясь гранями куба, превратятся в шестиугольники. Из-за этого, конечно, простая форма не превратится из пентагон-додекаэдра в „гексагон-додекаэдр".

Таким образом следует помнить, что в комбинации многогранники почти всегда изменяют очертания своих граней. Для безошибочных суждений об очертаниях граней простой формы полезно научиться мысленно восстанавливать очертания граней определяемой формы. Для этого срезанные соседними посторонними

Ключ к определению простых форм многогранников полигирной (кубической) сингонии

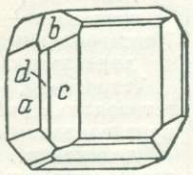
Число граней определяемой формы	Характерные отличительные признаки при одинаковом числе граней у нескольких форм		Название простой формы	Виды симметрии, в которых данная форма может встречаться	Главнейшие синонимы
4	—		Тетраэдр	G_3G_3; G_3G_3p	Правильный четырехгранник
6	—		Гексаэдр (куб)	G_3G_3; G_3G_3c; G_3G_3p; G_3G_3a; G_3G_3ap	Правильный шестигранник
8	—		Октаэдр	G_3G_3c; G_3G_3a; G_3G_3ap	Правильный восьмигранник
12	Грани попарно параллельны	есть перпендикулярные грани	Ромбододекаэдр	G_3G_3; G_3G_3c; G_3G_3p; G_3G_3a; G_3G_3ap	Ромбический додекаэдр, гранатоэдр
		нет перпендикулярных граней	Пентагон-додекаэдр	G_3G_3; G_3G_3c	Пентагональный додекаэдр
	Грани не параллельны	Каждая грань различно наклонена ко всем G_2	Пентагон-тритетраэдр	G_3G_3	Тетратоэдр, тетраэдрический пентагональный додекаэдр, тетраэдрический пентагон-додекаэдр
		Грани расположены между G_3 и G_2	Тригон-тритетраэдр	G_3G_3; G_3G_3p	Пирамидальный тетраэдр, триакистетраэдр
		Грани расположены между G_3 и G_3	Тетрагон-тритетраэдр	G_3G_3; G_3G_3p	Дельтоэдр, дельтоид-додекаэдр
		Грани $\parallel G_4$ или G_{4i}	Тетрагексаэдр	G_3G_3p; G_3G_3a; G_3G_3ap	Пирамидальный куб, тетракисгексаэдр
		Каждая грань различно наклонена ко всем G_2	Дидодекаэдр	G_3G_3c	Диакис-додекаэдр, преломленный пентагональный додекаэдр
24	Грани попарно параллельны	Грани расположены между G_3 и G_2 (в виде симметр. G_3G_3c между G_3 и G_3)	Тригон-триоктаэдр	G_3G_3c; G_3G_3a; G_3G_3ap	Пирамидальный октаэдр, триакисоктаэдр
		Грани расположены между G_3 и G_4 (в виде симм. G_3G_3c между G_3 и G_2)	Тетрагон-триоктаэдр	G_3G_3c; G_3G_3a; G_3G_3ap	Трапецоэдр, икоситетраэдр
		У многогранника есть G_4 (нет p)	Пентагон-триоктаэдр	G_3G_3a	Гироэдр, пентагональный икоситетраэдр, пентагоникоситетраэдр
	Грани не параллельны	У многогранника нет G_4 (есть p)	Гексатетраэдр	G_3G_3p	Преломленный, пирамидальный тетраэдр, гексакистетраэдр
48	—		Гексоктаэдр	G_3G_3ap	Сорокавосьмигранник, гексакисоктаэдр

формами части граней следует мысленно продолжить до их взаимного пересечения, и в таком реставрированном виде сообразить — каково очертание грани. На фиг. 217 представлена комбинация куба (*a*) с ромбододекаэдром (*b*). Очертания граней последнего совсем отличны от ромба. Однако пунктиром показано, каким образом, мысленно реставрируя грани *b*, можно притти к выводу, что эти грани относятся к ромбододекаэдру. Более легким, но механическим является определение простых форм с помощью табл. 16, составленной аналогично таблицам 14 и 15.

В полигирной (кубической) сингонии при определении форм прежде всего следует сосчитать число граней определяемой формы. После этого, если по числу граней форма не определяется (двенадцати- и двадцатичетырехгранников имеется несколько), то прибегают к добавочным наблюдениям, согласно указаниям таблицы. Определение проверяется данными о видах симметрии, в которых найденная форма может встречаться.

Рассмотрим для примера кристаллический многогранник, изображенный на фиг. 218. Он относится к виду симметрии G_3G_3 и представляет собою комбинацию четырех форм (*a*, *b*, *c* и *d*).

Подсчитываем число граней *a*. Оно равно шести. Шесть граней имеет только один многогранник полигирной (кубической) сингонии — это гексаэдр (куб).



Фиг. 218.

Таким образом грани *a* ничем другим быть не могут, как только гранями гексаэдра (куба), что впрочем видно и непосредственно.

Граней *b* — четыре. Четырехгранник опять-таки в полигирной (кубической) сингонии может быть только один — это тетраэдр.

Итак, грани *b* — являются гранями тетраэдра. Граней *c* и *d* — по двенадцати. Двенадцатигранников в полигирной (кубической) сингонии — пять. Согласно таблице, определяем — являются ли грани *c* попарно-параллельными. Для этого кладем многогранник на стол гранью *c* и смотрим, есть ли сверху грань *c*, параллельная плоскости стола. Убеждаемся, что каждая грань имеет себе параллельную. Также убеждаемся, что и грани *d* попарно-параллельны. Табл. 16 указывает, что два двенадцатигранника имеют попарно-параллельные грани. Они отличаются друг от друга присутствием или отсутствием взаимно-перпендикулярных граней. Испытание на перпендикулярность граней нагляднее всего производить, кладя грань испытываемой формы на горизонтальную поверхность стола. Присутствие в этой ориентировке вертикально-расположенных плоскостей исследуемой формы доказывает существование взаимно-перпендикулярных граней. Грани *d* имеют взаимно-перпендикулярные плоскости, грани *c* — таковых не имеют. Отсюда следует, что грани *d* относятся к ромбододекаэдру, а грани *c* к пентагондодекаэдру. То, что все найденные нами формы могут присутствовать в виде симметрии G_3G_3, до некоторой степени контролирует правильность определения.

Полная запись должна иметь такой вид:

Элементы симметрии — $4G_3$ $3G_2$.
Категория — высшая.
Сингония — полигирная (кубическая).
Вид симметрии — примитивный.
Условное обозначение — G_3G_3.
Комбинация четырех форм:

Гексаэдр (куб)	1
Тетраэдр	1
Пентагон-додекаэдр	1
Ромбо-додекаэдр	1
Итого	4 формы.

В качестве более сложного примера рассмотрим многогранник, изображенный на фиг. 219.

Вид симметрии — G_3G_3p. Все три формы (n, l и d) представляют двенадцатигранники.

По предыдущему, как на фиг. 218, найдем, что грани d — грани ромбододекаэдра, так как, кладя исследуемый многогранник на стол гранью d, убеждаемся, что сверху будет расположена грань d, параллельная нижней, а вертикально расположатся еще две грани d, перпендикулярные нижней. Грани l и n не имеют попарно-параллельных плоскостей. Каждая из них одинаково наклонена к двум из трех G_2. Однако в то время, как грани l располагаются между G_3 и G_2, грани n лежат между G_3 и G_3 (вернее, нормаль к грани l расположена в остром углу между G_3 и G_2, нормаль к грани n — в остром углу между G_3 и G_3).

Отсюда следует, что грани l принадлежат тригонтритетраэдру, грани же n — тетрагон-тритетраэдру.

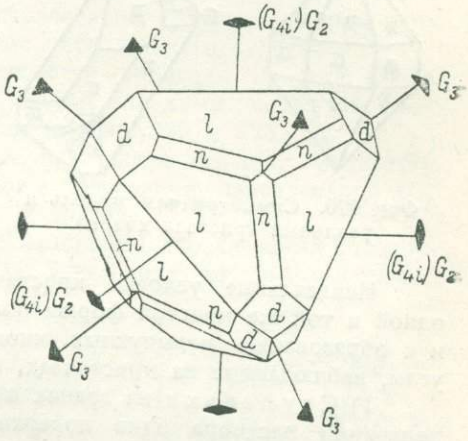
Форма записи:

Элементы симметрии — $3G_4(G_2)4G_36p$.
Категория — высшая.
Сингония — полигирная (кубическая).
Вид симметрии — планальный.
Условное обозначение — G_3G_3p.

Комбинация трех форм:

Тригон-тритетраэдр. 1
Тетрагон-тритетраэдр 1
Ромбо-додекаэдр. 1

Итого: . . . 3 формы.



Фиг. 219.

Занимающемуся следует проработать по вышеуказанной форме по меньшей мере 10 комбинаций полигирной (кубической) сингонии.

5. Формы реальных кристаллов

Изучив геометрические многогранники, которые могут встречаться на кристаллах, остановимся теперь на особенностях реальных кристаллических фигур. По законам симметрии физическая природа разных граней одной и той же простой формы должна быть одинакова. Если у данного кристалла появляется при кристаллизации грань той или иной простой формы, то при абсолютно одинаковых физико-химических условиях во всех частях, окружающих растущий кристалл, должны появиться и другие грани той же формы, и в таком же самом развитии.

Действительно, различное развитие граней обусловливается, как мы знаем (стр. 50), разницей в скоростях их роста. Разница же в скоростях роста, при таких идеальных условиях кристаллизации, будет зависеть исключительно от различий в физической природе граней (например, от различия в ретикулярных плотностях граней). Так как физическая природа всех граней одной и той же простой формы одинакова, то и скорости роста всех таких граней будут одинаковы, и все грани простой формы будут одинаково развиты.

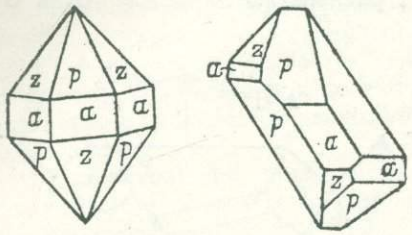
Таким образом при идеальных условиях кристаллизации должны получаться многогранники, по форме не отличающиеся от изучаемых нами деревянных моделей.

Однако, как мы знаем, не все части кристалла находятся в одинаковых условиях: нам известно, например, что концентрационные потоки создают условия быстрого роста нижних граней и задерживают рост верхних. Уже одной этой причины вполне достаточно для того, чтобы простые формы реальных кристаллов получали неравномерное развитие.

На фиг. 220 изображены симметричная модель и реальный кристалл кварца. Как видно, некоторые грани той или иной простой формы могут присутствовать не в полном числе, могут иметь неодинаковый вид граней и т. д.

Все это следует иметь в виду при определении симметрии и форм реальных кристаллов.

При их исследовании прежде всего мысленным параллельным перенесением граней стараются воссоздать кристалл в том виде, в каком он получился бы при идеальных условиях кристаллизации. Только после этого можно приступать к определению его симметрии и форм.



Фиг. 220. Симметричная модель и реальный кристалл кварца.

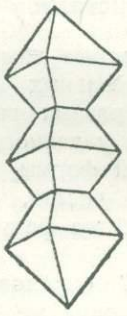
Безошибочное определение при этом дается только, конечно, в том случае, если навык к разбору идеально-ограненных многогранников уже приобретен. Это обстоятельство подчеркивает важность упражнений с моделями. Такие упражнения являются совершенно необходимым предварительным этапом для возможности разбираться в морфологии реальных кристаллов.

Неидеальные условия кристаллизации ведут не только к тому, что грани одной и той же простой формы получают неодинаковое развитие. Они приводят и к образованию невыпуклых многогранников с входящими углами. Входящие углы, наблюдаемые на кристаллах, имеют различный характер.

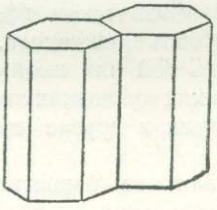
1) Ступеньки на гранях происходят чаще всего при неравномерной концентрации раствора близ поверхности одной и той же грани. Часть грани, у которой концентрация раствора меньше, не отстает при своем росте от частей, находящихся в более благоприятных условиях (фиг. 221).



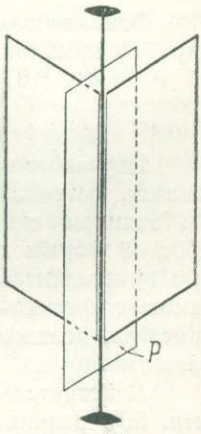
Фиг. 221.



Фиг. 222. Параллельный сросток октаэдров.



Фиг. 223.



Фиг. 224.

2) Фигуры травления (см. стр. 178) представляют второй пример образования кристаллов с входящими углами.

3) К этим образованиям близко примыкает штриховатость граней. Отдельные штрихи часто имеют форму канав, стороны которых, образуя входящие углы кристалла, являются действительными или возможными гранями.

4) Наконец, входящие углы наблюдаются у сростков отдельных кристаллов. Кристаллы срастаются или в случайной ориентировке или же закономерно один относительно другого.

Оставляя сейчас в стороне закономерные сростки кристаллов различных веществ, о которых мы упоминали на стр. 55, рассмотрим лишь срастающиеся

кристаллы одного и того же вещества. Закономерность в таких сростках выражается в том, что отдельные кристаллы, образующие сросток, располагаются один относительно другого симметрично.

При помощи тех или иных элементов симметрии можно совместить один кристалл, входящий в сросток, с другим индивидом. Эти элементы симметрии могут быть различны.

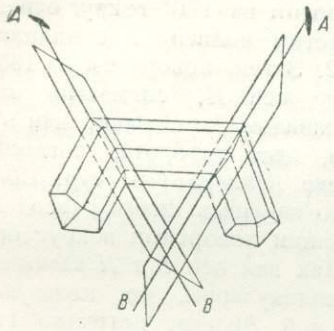
Сросток, в котором его индивиды могут совмещаться друг с другом при помощи трансляции, называется параллельным сростком.

Действительно, если при поступании один индивид сростка может занять место другого, то все грани и ребра первого параллельны граням и ребрам второго. Поэтому данный сросток и носит название параллельного сростка.

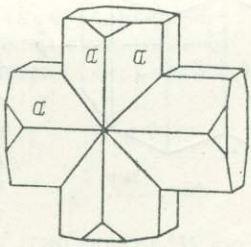
Трансляции, при помощи которых совмещаются индивиды сростка, очень часто бывают параллельны или перпендикулярны тем или иным элементам симметрии каждого индивида. Примеры изображены на фиг. 222 и 223.

Фиг. 222 изображает параллельный сросток кристаллов квасцов. Октаэдры квасцов срослись таким образом, что при помощи трансляции, параллельной G_4, совмещаются друг с другом.

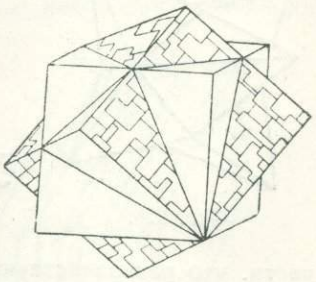
На фиг. 223 изображен параллельный сросток кристаллов берилла. Гексагональные призмы берилла



Фиг. 225.



Фиг. 226.



Фиг. 227.

срослись таким образом, что при помощи трансляции, перпендикулярной G_6 совмещаются друг с другом.

Сросток, в котором его индивиды могут совмещаться друг с другом при помощи дигиры (или геликодигиры), плоскости симметрии (или плоскости скольжения) или центра инверсии, называется двойниковым сростком или двойником, тройником, четверником и т. п., в зависимости от числа сросшихся индивидов.

На фиг. 224 изображен сросток двух кристаллов моногирной (моноклинной) сингонии. При отражении в плоскости P индивиды этого сростка совмещаются друг с другом. Эти же индивиды совмещаются друг с другом и при вращении на 180° вокруг вертикального направления, которое является, таким образом, дигирой сростка.

Благодаря всему этому наш сросток следует называть двойником.

Элементы симметрии, при помощи которых совмещаются индивиды двойникового сростка, называются двойниковыми элементами (двойниковая ось, двойниковая плоскость, двойниковый центр).

Таким образом, плоскость P (фиг. 224) — двойниковая плоскость; вертикальное направление — двойниковая ось.

На фиг. 225 изображен тройник, у которого двойниковыми плоскостями являются плоскости P, двойниковыми осями — направления AB и перпендикуляры к ним и двойниковым плоскостям.

Фиг. 224 и 225 являются примерами двойника и тройника *срастания*. Кроме таких двойников (тройников и т. п.) различают еще двойники (тройники и т. п.) *прорастания*. Фиг. 226 и 227 представляют примеры двойников прорастания, а фиг. 228 — тройника прорастания.

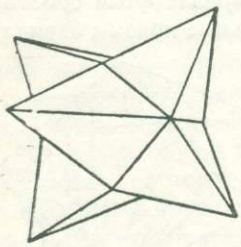
Резкой границы между двойниками срастания и двойниками прорастания провести нельзя.

При совпадении двойниковой оси с каким-либо рядом кристаллической решетки (т. е. параллельно какому-либо действительному или возможному ребру кристалла), двойник называется параллельным. *

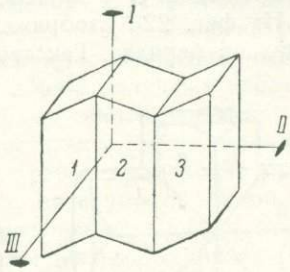
При совпадении двойниковой оси (или нормали к двойниковой плоскости) с нормалью к какой-либо плоской сетке кристаллической решетки (т. е. при расположении оси нормально к какой-либо действительной или возможной грани кристалла), двойник называется нормальным.

Представим себе сросток из трех индивидов, в котором индивид *1* и *2* представляют собою параллельный двойник (фиг. 229), а индивиды *2* и *3* — нормальный, причем двойниковая ось последнего (*II*) нормальна к плоскости, в которой лежит двойниковая ось *I* параллельного двойника. Тогда оси *I* и *II* будут взаимно-перпендикулярны.

Рассмотрим, как будут взаимно-ориентированы индивиды *1* и *3*. Очевидно, что индивид *1* можно совместить с индивидом *3* двумя поворотами. Сначала, поворотом на 180° вокруг оси *I*, совместим индивид *1* с индивидом 2. Затем, поворотом на 180° вокруг оси *II*, совместим его с индивидом *3*. Однако, как мы знаем, два поворота, согласно теореме Эйлера (см. стр. 120), можно заменить одним равнодействующим поворотом вокруг оси *III*. Так как оси *I* и *II* взаимно-перпендикулярны, то, пользуясь теоремой Эйлера, нетрудно вывести, что равнодействующая ось *III* должна быть перпендикулярна им обеим и иметь угол поворота 180°. Таким образом при вращении на 180° вокруг оси *III* индивид *1* совместится с индивидом *3*, и, следовательно, эти индивиды образуют двойник с двойниковой осью *III*. Эта ось будет перпендикулярна некоторому ряду решетки (оси *I*) и будет лежать в некоторой плоской сетке перпендикулярно оси *II*. Такой двойник называется сложным (промежуточный индивид *2* может отсутствовать и приведен нами только для уяснения происхождения этого закона). Итак:



Фиг. 228.



Фиг. 229.

Если двойниковая ось — нормаль к какому-либо ряду решетки и лежит в плоской сетке, которая проходит через этот ряд, двойник называется сложным.

* (Другими словами, в сложном двойнике двойниковая ось нормальна к ребру и лежит в грани, проходящей через это ребро.)

Двойниковые оси часто бывают параллельны (или перпендикулярны) тем или иным элементам симметрии. Однако

двойниковая ось не может быть параллельна гире четного наименования.

Предположим, что двойниковая ось *D* параллельна четной гире *G* одного из индивидов сростка (фиг. 230). Индивид *I* совмещается сам с собою при повороте на 180° вокруг *G*. Поворот на 180° вокруг *D* совмещает также индивид *I* со вторым индивидом *II*. Очевидно, что, применив последовательно поворот вокруг *G* и поворот вокруг *D*, мы также совместим индивид *I* с индивидом *II*. Однако два поворота вокруг двух осей могут быть заменены некоторым равнодействующим преобразованием.

Найдем его.

$$\text{Преобр. } R = \text{Пов.}_{180^\circ}\ G \cdot \text{Пов.}_{180^\circ}\ D.$$

* Не следует этот термин путать с термином — параллельный сросток.

Повороты на 180° заменяем отражениями в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях, пересекающихся по оси поворота. Плоскости отражений проводим как показано на чертеже (фиг. 230).

$$\text{Пов.}_{180°}\ G = \text{Отр.}\ AG \cdot \text{Отр.}\ GD$$

$$\text{Пов.}_{180°}\ D = \text{Отр.}\ GD \cdot \text{Отр.}\ BD.$$

В совокупности получим:

$$\text{Преобр.}\ R = \text{Отр.}\ AG \cdot \text{Отр.}\ GD \cdot \text{Отр.}\ GD \cdot \text{Отр.}\ BD.$$

Два последовательных отражения в плоскости GD взаимно уничтожаются.

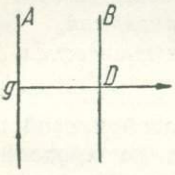
$$\text{Преобр.}\ R = \text{Отр.}\ AG \cdot \text{Отр.}\ BD.$$

Отражения в параллельных плоскостях AG и BD заменяем поступанием (теорема 15, стр. 122) на величину $2GD$ по направлению, перпендикулярному этим плоскостям. Таким образом:

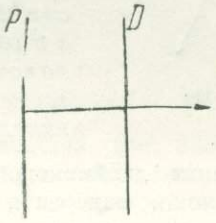
$$\text{Преобр.}\ R = \text{Поступ.}\ 2GD.$$

Это значит, что индивид I можно совместить с индивидом II нашего сростка не только поворотом на 180° вокруг D, но и поступанием. Сросток же, в котором индивиды совмещаются при поступании (с помощью некоторой трансляции), называется параллельным сростком, а не двойником. Таким образом не может существовать двойника, у которого двойниковая ось параллельна четной гире

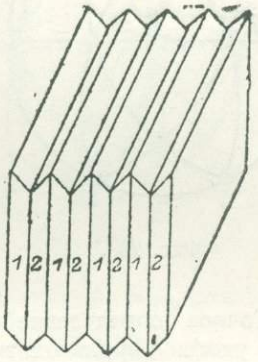
$$(G_2,\ G_4,\ G_{4i} \text{ или } G_6)$$



Фиг. 230.



Фиг. 231.



Фиг. 232. Полисинтетический двойник.

Очевидно, что двойниковая ось не может и совпадать с такими гирами, так как при повороте на 180° вокруг четной гиры индивид будет совмещаться сам с собою, но не с другим индивидом.

Двойниковая плоскость обычно или нормальна к какому-либо ряду решетки, или совпадает с какой-либо плоской сеткой решетки, или, наконец, проходит через ряд решетки, перпендикулярно плоской сетке, в которой лежит этот ряд.

Двойниковая плоскость не может быть параллельна плоскости симметрии.

Предположим, что двойниковая плоскость D параллельна плоскости симметрии P индивида I двойника (фиг. 231). При отражении в плоскост P индивид I совмещается сам с собою. При отражении в плоскости D индивид I совмещается с индивидом II сростка. Очевидно, что при последовательном отражении в плоскостях P и D индивид I также должен совместиться с индивидом II. Последовательное же отражение в двух параллельных плоскостях P и D можно заменить поступанием (теорема 15, стр. 122). Таким образом, индивид I совмещается с индивидом II некоторым поступанием, а потому представляет собою не двойник, но параллельный сросток. У двойника же двойниковая плоскость не может быть параллельна плоскости симметрии.

Очевидно, что она не может и совпадать с плоскостью симметрии, так как тогда, при отражении в такой плоскости кристалл будет совмещаться сам с собою, а не с другим индивидом сростка.

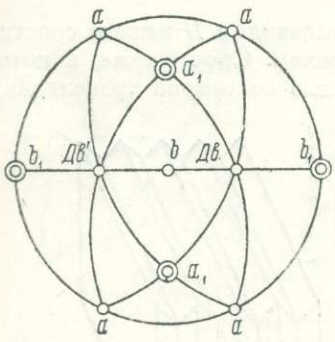
У кристаллов с центром инверсии нормально к двойниковой оси проходит двойниковая плоскость.

Такая плоскость возникнет в результате сложения центра инверсии с двойниковой осью (см. стр. 120).

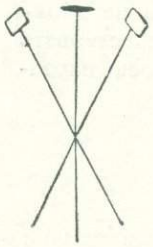
Поверхность срастания индивидов двойника называется двойниковым швом. Двойниковый шов может и не совпадать с двойниковой плоскостью.

Кроме параллельных сростков и двойников, наблюдаются еще сростки, сочетающие в себе оба типа. В этих сростках каждый индивид со своими ближайшими соседями сдвойникован, с соседями же своих соседей находится в параллельной ориентировке.

На фиг. 232 изображен такой сросток, в котором для наглядности все индивиды перенумерованы. При этом видно, что все четные индивиды находятся между собою в параллельной ориентировке, но относительно всех нечетных индивидов занимают двойниковую ориентировку. Совершенно также все нечетные параллельны друг другу и являются двойниками по отношению к четным индивидам.



Фиг. 233.


Фиг. 234.

Сросток, в котором каждый индивид может совмещаться со своими ближайшими соседями при помощи дигиры, плоскости симметрии или центра инверсии, а с соседями своих соседей при помощи трансляций, называется полисинтетическим двойником.

Точное определение расположения двойниковой оси и двойниковой плоскости удобно производить при помощи измерения двойника на теодолитном гониометре. Для этого обычно юстируют один из индивидов двойника и измеряют как юстированный индивид, так и второй индивид. Таким образом получают списки полярных координат граней обоих индивидов. Попутно составляется и стереографическая проекция с изображениями нормалей к граням обоих индивидов. На фиг. 233 для примера представлена стереографическая проекция двойника, изображенного на фиг. 226 (проекции нормалей одного индивида помечены простыми кружками, второго — двойными). На проекции и определяют положение двойниковых осей и плоскостей.

Двойниковая ось является биссектрисой угла между соответственными направлениями обоих индивидов.

Действительно, пусть например в каждом из индивидов двойника присутствует по одной G_4 (фиг. 234). Так как при вращении одного индивида вокруг двойниковой оси на 180° он должен совместиться с другим, то и G_4 первого индивида должна совместиться с G_4 второго индивида. Это возможно только в том случае, если вращение производить вокруг одной из биссектрис между обеими G_4.

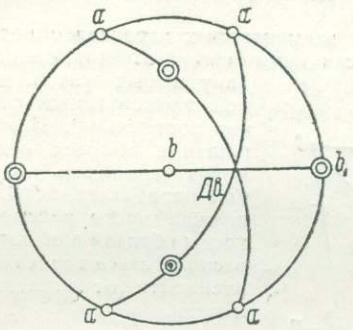
Отсюда ясно, что двойниковая ось должна являться одной из биссектрис между соответственными направлениями обоих индивидов.

Отсюда вытекает следующий метод определения двойниковой оси. — Каждую точку проекции первого индивида соединяем дугами больших кругов с соответственными точками проекций второго индивида. Получаем целый ряд дуг, изоб-

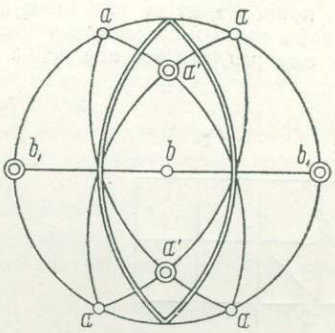
ражающих плоскости, проходящие через соответственные направления сростка (в нашем случае через нормали к одинаковым граням различных индивидов). В этих плоскостях должны, очевидно, лежать биссектрисы между соответственными направлениями. Проекции этих биссектрис должны располагаться на дугах, соединяющих соответственные точки. При этом очевидно, что если та или иная биссектриса, между парой соответственных направлений, является двойниковой осью, то ее проекция будет лежать одновременно в различных дугах, соединяющих соответственные точки, т. е. будет лежать на пересечении этих дуг.

Точки *Дв* и *Дв′* (фиг. 233) как раз и являются точками пересечения проведенных дуг. Поэтому эти точки *Дв* и *Дв′* являются проекциями двойниковых осей. Измеряя при помощи сетки Вульфа длины дуг $Два = Два_1$ и $Двb = Двb_1$ убеждаемся, что найденные проекции действительно являются биссектрисами дуг aa_1 и bb_1, а потому действительно являются двойниковыми осями сростка.

В некоторых случаях на практике дуги, проведенные через соответственные направления, не пересекаются в одной точке, но дают некоторый треугольник



Фиг. 235.



Фиг. 236.

(или многоугольник) погрешностей (фиг. 235). За двойниковую ось принимается центр *Дв* получившегося треугольника (или многоугольника).

Нахождение двойниковых плоскостей основывается на теореме, вполне аналогичной доказанной выше для двойниковых осей:

Двойниковая плоскость делит пополам угол между соответственными направлениями обоих индивидов.

Доказательство предоставляем читателю.

Не останавливаясь на пояснениях — как строятся проекции двойниковых плоскостей, ограничимся изображением готового результата (см. фиг. 236, на которой двойниковые плоскости показаны двойными линиями).

Понятие о расположении двойниковых осей и двойниковых плоскостей иногда является чрезвычайно важным. Для примера укажем, что на основании изучения расположения двойниковой оси относительно различных оптических направлений в сростке может быть определен химический состав полевого шпата.

Глава XIII

ФОРМЫ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

1. Формы элементарной ячейки кристаллической решетки

Форма пространственной решетки определяется формой параллелепипеда повторяемости. Например, прямоугольный параллелепипед повторяемости определяет прямоугольную решетку (фиг. 237). Однако параллелепипеды повторяемости могут быть проведены в одной и той же решетке различными способами. Очевидно, что в прямоугольной решетке можно выбрать и непрямоугольный параллелепипед повторяемости, и от этого

решетка не превратится в косоугольную. Поэтому для характеристики формы решетки будем рассматривать параллелепипеды, симметрия которых отвечает симметрии решетки.

Параллелепипед повторяемости, обладающий сингонией данной решетки, при максимальном числе равных углов между его ребрами, называется элементарным параллелепипедом или элементарной ячейкой.

Пересекающиеся в одной точке направления, параллельные ребрам элементарного параллелепипеда, называются кристаллографическими осями.

Длины этих ребер являются некоторыми элементарными трансляциями.

На фиг. 238 изображена элементарная ячейка триклинной сингонии $ABCDEFGH$. Направления AD, AB и AH называются кристаллографическими осями. Условно ось, обращенная к наблюдателю, называется первой осью $I \parallel AD$, обращенная вправо—второй $II \parallel AB$, и идущая вверх — третьей осью $III \parallel AH$. AD, AB, AH являются элементарными трансляциями и обозначаются буквами a, b, c или a_0, b_0, c_0. ($AD = a$; $AB = b$; $AH = c$).

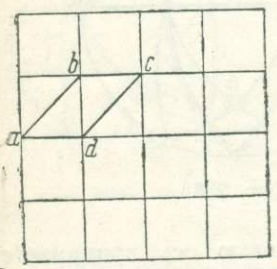
Углы между кристаллографическими осями обозначаются буквами α, β, и γ.

$$\angle HAB = \angle (II : III) = \alpha;\ \angle HAD = \angle (I : III) = \beta;\ \angle DAB = \angle (I : II) = \gamma.$$

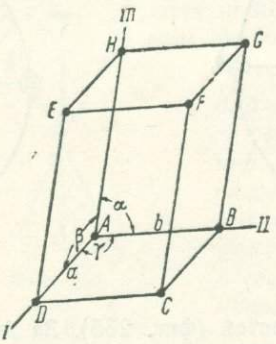
Совокупность углов между ребрами элементарного параллелепипеда и величины их длин называются константами решетки или элементами кристалла.

В зависимости от сингонии, элементарный параллелепипед, а следовательно и решетка приобретают ту или иную форму.

Чтобы ознакомиться с возможными формами элементарных параллелепипедов, подчеркнем еще раз, что все его ребра являются трансляциями (всякий отрезок, соединяющий пару любых узлов решетки, может рассматриваться как вектор поступания). Поэтому для решения вопроса о том, как могут выглядеть элементарные параллелепипеды, следует прежде всего рассмотреть — каким образом в решетке могут располагаться трансляции в зависимости от элементов симметрии.



Фиг. 237. Косоугольный параллелепипед повторяемости прямоугольной решетки.



Фиг. 238.

Теорема 43. *В кристаллических решетках всегда есть трансляции, параллельные элементам симметрии.*

1) Для геликогир это очевидно. Если ход оси t, а наименование $n(G_{nt})$, то, как было выяснено при описании геликогир, (nt) есть чистая трансляция вдоль геликогиры.

2) Для доказательства теоремы в случае гир (G) заметим, что в пространственной решетке как фигуре трех измерений все узлы не могут быть расположены в одной плоскости. Так как любая прямая, соединяющая пару узлов пространственной решетки, есть трансляция, то обязательно найдутся трансляции, наклонно расположенные к данной гире. Мы знаем, что сложением такой неперпендикулярной трансляции с гирой получается геликогира, параллельная данной. Параллельно же геликогире есть трансляции. Следовательно, и параллельно гирам должны существовать трансляции.

3) Гироиды G_{6_i} и G_{4_i} являются в то же самое время G_3 и G_2, для которых теорема доказана.

4) Для плоскостей симметрии P опять-таки воспользуемся неперпендикулярной трансляцией OV (фиг. 239).

При отражении в плоскости P трансляция обязательно должна совместиться с равной ей трансляцией OV'. Следовательно, если в решетке есть OV, то есть и OV'.

Сложив эти две трансляции, получим по правилу параллелограма равнодействующую трансляцию OV'', лежащую в плоскости P.

Нетрудно видеть, что кроме наклонной трансляции OV в решетке должны быть и другие наклонные трансляции, не лежащие в плоскости VOV' (иначе, если бы все трансляции лежали в одной плоскости, решетка не представляла бы собою трехмерной фигуры).

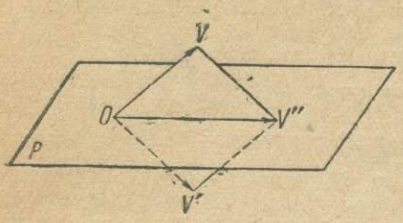
Таким образом, в плоскости P должны существовать различные трансляции.

5) Если дана плоскость скольжения, то добавочная трансляция в этой плоскости не вносит существенных изменений в доказательство, приведенное для плоскостей симметрии.

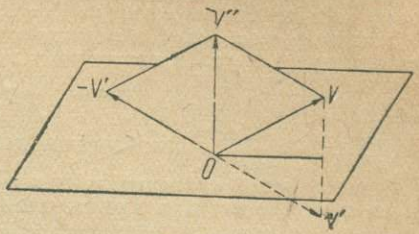
Теорема 44. *В кристаллических решетках всегда есть трансляции, нормальные элементам симметрии.*

1) Если имеется гира, то, как мы знаем (теорема 35, стр. 164), при сложении ее с перпендикулярной трансляцией получаем гиру, параллельную данной, с таким же углом поворота. Можно доказать и обратную теорему — если есть две параллельные гиры с одинаковыми углами поворота, то должна существовать трансляция, перпендикулярная направлениям гир. В решетке, как мы знаем, при наличии какой-либо гиры, имеется и бесконечное множество гир, параллельных данной. Следовательно, имеются и трансляции, перпендикулярные им (а так как параллельные гиры располагаются все не в одной плоскости, то найдутся трансляции различных направлений, перпендикулярных гире).

2) Если имеется геликогира G_t, то возьмем ей параллельную $(G_t)'$, после чего произведем сложение этих геликогир, причем повороты и поступания одной сделаем



Фиг. 239.



Фиг. 240.

обратными поворотам и поступаниям другой: Пр. R = Винт. преобр. $G_t \cdot$ Винт. преобр. $(G_t)' \cdot$ Пр. R = (Пов. $\alpha \cdot$ Поступ. $t) \cdot$ (Пост. $(-t) \cdot$ Пов. $(-\alpha)$). Пр. R = Пов. $_{G}{}^{\alpha}$ (Пост. $t \cdot$ Пост. $(-t)) \cdot$ Пов. $_{G}{}'$ $(-\alpha) \cdot$ Пр. R = Пов. $_{G}{}^{\alpha} \cdot$ Пов. $_{G}{}'$ $(-\alpha)$.

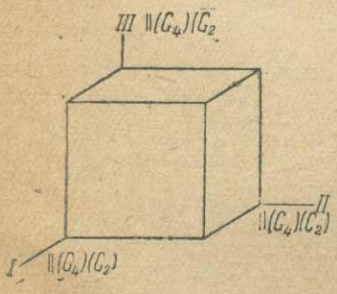
Повороты вокруг двух параллельных осей G и G' можно заменить перпендикулярной трансляцией:

$$\text{Пр. } R = \text{Поступ.} \perp G_t.$$

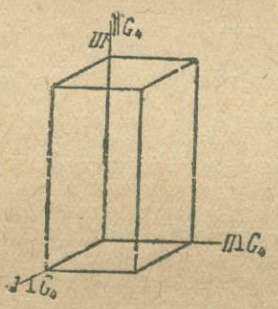
3) Гироиды G_{6_i} и G_{3_i} являются одновременно и гирами (G_3 и G_2). Для гир же существование трансляций, им перпендикулярных, уже доказано.

4) Для плоскостей симметрии существование нормальных трансляций можно доказать следующим образом.

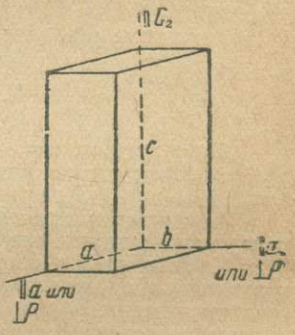
Возьмем какую-либо трансляцию OV, неперпендикулярную к плоскости симметрии P (фиг. 240). При отражении в плоскости P эта трансляция обязательно должна совместиться



Фиг. 241.



Фиг. 242.



Фиг. 243.

с равной ей трансляцией OV'. Возьмем трансляцию, обратную OV', $-(-OV')$. Строя трансляцию, равнодействующую OV и $(-OV')$, получим трансляцию OV'', перпендикулярную к плоскости P (эта трансляция является геометрической разностью переносов OV и OV').

5) Если дана плоскость скольжения, то добавочная трансляция в этой плоскости не изменяет доказательства, приводимого для плоскости симметрии.

Указанные теоремы позволяют построить элементарные ячейки решеток всех сингоний.

Рассмотрим их систематически.

Полигирная (кубическая) сингония

В полигирной сингонии всегда присутствуют три взаимно-перпендикулярные G_4 или G_2 (или сходственные им G_{4t} или G_{2t}). По теореме стр. 208 имеются переносы, параллельные этим осям. Построим на этих трансляциях параллелепипед повторяемости. Его ребра,

следовательно, совпадут с нашими трансляциями, а потому будут взаимно-перпендикулярными.

В кубической сингонии всегда присутствуют G_3 (или сходственные G_{3t}). Поворотом вокруг G_3 можно совмещать друг с другом данные G_4 или G_2. При этом должны совмещаться и ребра нашего параллелепипеда. Отсюда следует, что они равны.

Таким образом параллелепипед повторяемости кубической сингонии имеет форму прямоугольного параллелепипеда с равными ребрами, т. е. отвечает по формуле кубу (фиг. 241).

Как видим, сингония построенного нами указанным способом параллелепипеда повторяемости куба совпадает с сингонией нашей решетки и имеет все свои углы равными, а потому он является элементарной ячейкой полигирной (кубической) сингонии.

Таким образом, ячейка полигирной (кубической) сингонии получает следующую характеристику для углов между ребрами и для относительных их величин:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90°;\ a = b = c.$$

Тетрагирная (тетрагональная) сингония

В тетрагирной сингонии всегда присутствует G_4 (или G_{4i} или G_{4t}). Параллельно этой оси и перпендикулярно ей должны располагаться трансляции (фиг. 242, трансляции c и a). При повороте перпендикулярной трансляции a вокруг G_4 на 90°, она должна совместиться с равной ей трансляцией b. Трансляции c, a и b принимаем за ребра параллелепипеда повторяемости. Построенный таким образом параллелепипед, обладая сингонией решетки и имея все свои углы равными, будет являться элементарной ячейкой рассматриваемой сингонии.

Константы решетки таковы:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90°;\ a = b \neq c.$$

(В решетке этой сингонии нельзя найти таких элементов симметрии, которыми можно было бы совместить ребра a или b с трансляцией c, а потому эти ребра и не могут быть одинаковыми).

Дигирная (ромбическая) сингония

Всегда присутствует хотя бы одна G_2 (или G_{2t}). Трансляцию, параллельную этой оси, принимаем за ребро c параллелепипеда. За ребра a и b выбираем перпендикулярные трансляции, вместе с тем перпендикулярные и параллельные плоскостям симметрии и остальным дигирам. Построенный таким образом параллелепипед является элементарным (фиг. 243).

Константы решетки:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90°;\ a \neq b \neq c.$$

Моногирная (моноклинная) сингония

Присутствует или одна дигира (a), или одна дигироида ($\perp P$), или и то и другое (им соответствуют сходственные с ними a_t или $\perp P_t$). Трансляцию, параллельную этим осям ($\parallel a$ или $\perp P$), примем за ребро b параллелепипеда.

В плоскости, перпендикулярной к дигире a или в плоскости симметрии P всегда присутствуют трансляции различных направлений, которые и принимаются за ребра a и c.

Однако угол между направлениями этих трансляций не должен уже быть прямым и зависит не от симметрии решетки, а от самого вещества. Различным веществам свойственны различные углы между направлениями трансляций a и c. У полученного таким образом элементарного параллелепипеда:

$$a \neq b \neq c;\ \alpha = \gamma = 90° < \beta$$

(поэтому, рассматриваемая сингония и называлась „моноклинной", что значит — „с одним наклонным, непрямым углом") (фиг. 244).

Агирная (триклинная) сингония

Эта сингония характеризуется или полным отсутствием элементов симметрии или присутствием только лишь центра инверсии. Поэтому никаких трансляций, параллельных и перпендикулярных каким-либо элементам симметрии, здесь провести нельзя. Нет здесь и трансляций, перпендикулярных друг другу. Следовательно, всякий параллелепипед повторяемости в триклинной сингонии будет косоугольным.

Взяв три различных трансляции (не лежащие в одной плоскости), построим элементарную ячейку, у которой:

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma;\ a \neq b \neq c.$$

(Название „триклинная" сингония как раз и показывает, что здесь имеется три наклонных, непрямых угла) (фиг. 238).

Тригирная (тригональная) сингония

Всегда присутствует G_3 (или G_{3i}). Возьмем какую-либо трансляцию a, *наклоненную* к G_3 (a не параллельна G_3 и a не перпендикулярна G_3). При поворотах вокруг G_3 на 120° наша трансляция должна совмещаться с равными ей трансляциями b и c, наклоненными под таким же углом к G_3, как и трансляция a.

Три равных и равнонаклоненных к G_3 трансляции a, b и c принимаем за ребра элементарного параллелепипеда.

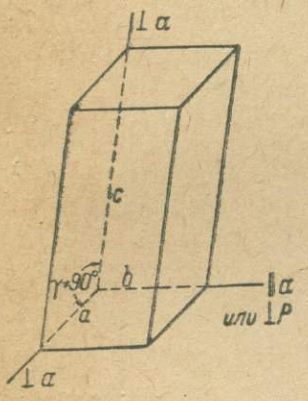
Этот элементарный параллелепипед (ромбоэдр) имеет такие константы:

$$\alpha = \beta = \gamma \neq 90°; \quad a = b = c \quad \text{(фиг. 245).}$$

Гексагирная (гексагональная) сингония

Всегда присутствует G_6 или G_{6i}, или G_{6t}. Трансляция, перпендикулярная к данной оси, при поворотах на 60° будет совмещаться с равными ей трансляциями, расположенными под углами 60° друг к другу. Если принять две такие трансляции за ребра a и b параллелепипеда, а в качестве третьего ребра — трансляцию, параллельную главной оси G_6, то получим параллелепипед повторяемости, не являющийся элементарным параллелепипедом.

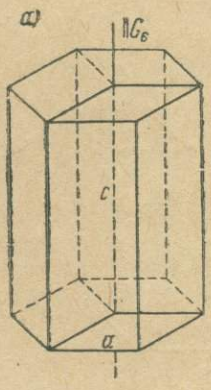
Действительно, параллелепипед с константами: $\alpha = 60°$; $\beta = \gamma = 90°$; $a = b \neq c$ относится к дигирной (ромбической), а не к гексагирной (гексагональной) сингонии.

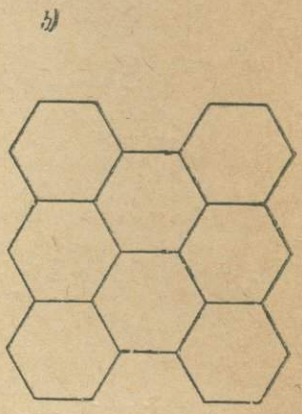


Фиг. 244.



Фиг. 245.





Фиг. 246.

Но, с другой стороны, вообще нельзя себе представить параллелепипед, имеющий G_6. Поэтому в гексагирной (гексагональной) сингонии рассматривают не элементарный параллелепипед, но особую элементарную ячейку, состоящую из трех параллелепипедов (фиг. 246), повернутых один относительно другого на 120°. Такая ячейка имеет форму гексагональной призмы (ограниченной пинакоидом) и обладает гексагирной (гексагональной) симметрией, а потому ее и следует называть „элементарной". Направления, параллельные ребрам элементарной ячейки, мы назвали кристаллографическими осями. Такие ячейки имеют четыре различных направления. Поэтому здесь различают и четыре кристаллографических оси. (Более подробно об их расположении см. в главе XIV.)

Следует отметить, что эти решетки гексагирной сингонии можно выделить в ячейку в виде ромбоэдра. Однако симметрия ромбоэдра ниже симметрии гексагирной сингонии, а потому такая ячейка не будет элементарной.

Систематический просмотр всех сингоний показал нам, что каждая сингония характеризуется своей, ей присущей элементарной ячейкой.

Различия элементарных ячеек для разных веществ, принадлежащих одной и той же сингонии, сводятся к различиям только абсолютных значений констант решетки. Равенство же соответственных величин ребер и углов между ребрами имеет место для ячеек всех веществ одной и той же сингонии.

Эти ячейки в первую очередь определяют форму пространственной решетки. Таким образом соответственно с семью различными элементарными ячейками, найденными нами, различают решетки семи типов, отвечающих семи сингониям.

Замечание. При выводе ячеек той или иной сингонии мы имели в виду присутствие гир и плоскостей симметрии, не рассматривая случаев, когда их заменяют соответственные геликогиры и плоскости скольжения. Очевидно, что в этих случаях выводы существенно не изменяются, так как существование добавочного поступания, заключен-

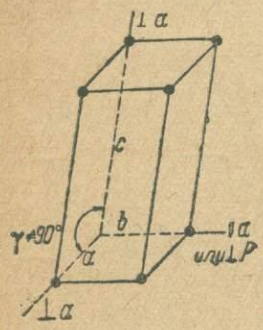
ного в указанных элементах симметрии, не отражается на расположении трансляций, (трансляциям всегда можно придавать любые поступания).

2. 14 решеток Браве

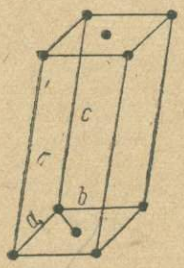
Соответственно семи сингониям, мы нашли семь форм элементарных ячеек. Каждая ячейка, являясь параллелепипедом повторяемости, может быть одновременно и параллелепипедом идентичности, может же им и не быть. Действительно, если три элементарных трансляции, определяющие собою элементарную ячейку, являются тремя сопряженными трансляциями, то в такой элементарной ячейке никаких узлов, кроме узлов в вершинах ячейки, не будет.

Такой параллелепипед повторяемости и будет являться параллелепипедом идентичности (или примитивным) (в частном случае, если сопряженные элементарные трансляции, параллельные ребрам параллелепипеда, совпадают с наименьшими трансляциями, — то элементарный параллелепипед будет совпадать с кратчайшим примитивным).

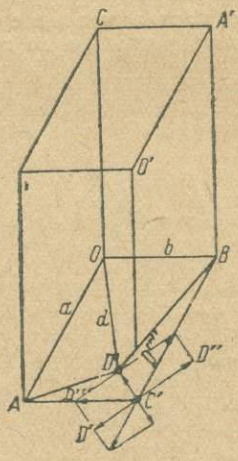
Если же трансляции, параллельные ребрам элементарного параллелепипеда, не являются сопряженными, то в ячейке, кроме узлов, занимающих ее вершины, будут еще узлы внутри или на сторонах ячейки.



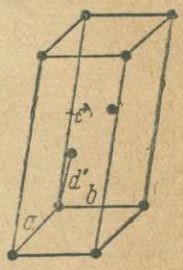
Фиг. 247.



Фиг. 248.



Фиг. 249.



Фиг. 250.

В зависимости от того, как именно расположены сопряженные трансляции относительно ребер элементарной ячейки, последние могут отличаться расположением своих узлов.

Рассмотрим все случаи, которые возможны для элементарных ячеек различных сингоний (при этом, так же, как и при рассмотрении видов симметрии, совершенно не будем ставить своей целью дать строгий их вывод).

Агирная (триклинная) сингония

Элементарный параллелепипед — косоугольный с неравными ребрами. Поэтому его ребра всегда можно построить параллельно трем сопряженным трансляциям решетки, и таким образом элементарную ячейку всегда можно сделать совпадающей с параллелепипедом идентичности (примитивным) (выбрав среди сопряженных трансляций наименьшие, получим элементарную ячейку, совпадающую с кратчайшим примитивным параллелепипедом).

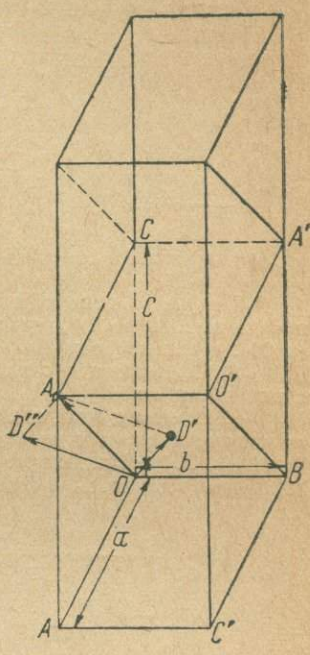
Таким образом в рассматриваемой сингонии ребра элементарной ячейки всегда совпадают с тройкой сопряженных трансляций. Никаких узлов, кроме узлов в вершинах, ячейка не имеет. Решетка, отвечающая такой ячейке, называется решеткой *P*. Решетка *P* агирной (триклинной) сингонии обозначается P_{tr} или T_{tr} (фиг. 238).

Моногирная (моноклинная) сингония

Элементарная ячейка изображена на фиг. 244. Если ребра *a*, *b* и *c* — три сопряженных трансляции, получаем простую решетку (*P*), изображенную на фиг. 247. Обозначение — $P_{mon.}$ или Γ_m. В этом случае направление каждого ребра сопряжено с пересекающей это ребро плоской сеткой. Трансляции *a* и *c* всегда можно выбрать сопряженными друг с другом.

Если ребро b не сопряжено с плоской сеткой ac, то в таком случае получаем другую решетку. При этом, если сопряженная с плоской сеткой ac трансляция d лежит в плоскости ab, то получаем решетку, центрированную по одной паре граней (фиг. 248) (центробазисная решетка). Конец трансляции d обязательно должен совпадать с центром грани ab.

Действительно, предположим, что лежащая в плоскости ab трансляция d направлена из вершины O не в центр прямоугольника $OAC'B$, но как-либо иначе, например так, как это изображено на рис. 249. Очевидно, что соединяя с концом вектора OD (с точкой D) концы векторов $b = OB$, $a = OA$ и OC', т. е. проводя векторы AD, BD и $C'D$, получим трансляции (следствие 2 теоремы 17, стр. 124). Вместе с вектором OD будем иметь четыре вектора вокруг точки D. Выберем среди этих векторов наименьший. На нашем чертеже наименьшим вектором является вектор $C'D$. Так как в моногирной (моноклинной) сингонии ребро OB (и ребро AC') параллельно G_2 (или перпендикулярно P), то вращая трансляцию вокруг G_2 на 180° или отражая эту трансляцию в P, получим некоторые трансляции, равные $C'D$. Основания векторов этих трансляций поместим в точке C'; тогда найденные трансляции изобразятся равными, но противоположно направленными отрезками $C'D'$ и $C'D''$. (Достаточно построить один из этих векторов, полученный или отражением, или вращением на 180°, другой же взять, как противоположный построенному). По правилу параллелограма построим вектор $C'D'''$, равнодействующий $C'D$ и $C'D'$, и $C'D''''$, равнодействующий $C'D$ и $C'D''$.



Фиг. 251.

Легко видеть, что направления полученных векторов параллельны трансляциям a и b. При этом, во всяком случае, один из полученных векторов обязательно будет меньше трансляции соответственного направления (a или b). Но трансляции a и b — элементарные трансляции, и никаких других в их направлениях быть не может. Отсюда следует, что трансляция $d = OD$ не может быть направлена иначе, чем в центр прямоугольника $OAC'B$.

Если сопряженная с плоской сеткой ac трансляция d' лежит в плоскости bc, то получаем также решетку, центрированную по одной паре граней (фиг. 250). Такая решетка, центрированная по грани, пересекающей ребро a, называется решеткой A. Нетрудно видеть, что обе решетки — и A и C — одинаковы, и их названия зависят от того, какое ребро назвать ребром a, а какое ребро c. Таким образом эти решетки не отличимы одна от другой, и их названия зависят от условного выбора названий ребер.

Остается еще рассмотреть случай, когда трансляция, сопряженная с плоской сеткой ac (AOC), не лежит ни в плоскости ab, ни в плоскости bc, но направлена внутрь параллелепипеда. Пусть конец этой сопряженной трансляции располагается в некоторой точке D', вне плоскостей ab и cb (фиг. 251). Вращая этот вектор на 180° вокруг OB (параллельно G_2), берем OD'', противоположный полученному. Этот же вектор можно получить, отражая вектор OD' в плоскости симметрии ac.

Строим вектор, равнодействующий OD' и OD''. Полученный вектор OA' вместе с векторами OD', OD'' и OB лежит в одной плоскости, перпендикулярной плоскости ac. При этом OA' лежит в плоской сетке AOC. Назовем его трансляцией a'. Найдем в этой же плоской сетке трансляцию c', сопряженную с a'. Двумя сопряженными трансляциями плоская сетка AOC может быть определена целиком, как и сопряженными трансляциями a и b. Трансляция b по предыдущему не будет сопряжена с плоской сеткой AOC. С этой сеткой попрежнему будет сопряжена трансляция $d'(OD')$. Отсюда мы придем к такому выводу: если в плоскости AOC за сопряженные трансляции взять a_1 и c_1, то решетка определится сопряженными трансляциями a_1, c_1 и d', причем d' будет лежать в плоскости a_1b. Приходим, таким образом, к рассмотренному уже случаю, а именно к базоцентрированной решетке C_1 (фиг. 248). Таким образом в моногирной (моноклинной) сингонии имеем две решетки: простую Γ_m и центрированную по одной паре граней („центробазисную“) $\Gamma_{m'}$.

Дигирная (ромбическая) сингония.

Элементарная ячейка изображена на фиг. 243.

I. Если ребра a, b и c — три сопряженные трансляции, получаем простую решетку P (фиг. 252). Обозначается эта решетка — P_0 или Γ_0.

II. Кроме этого случая, возможно, что среди трансляций a, b и c только две являются сопряженными. Пусть, например, a и b — сопряженные трансляции, но ребро c не сопряжено с плоской сеткой ab.

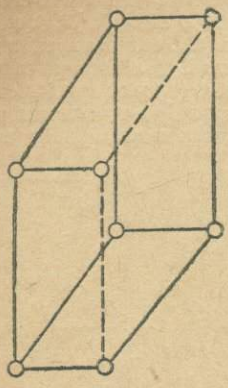
Здесь следует различать такие случаи.

1) Сопряженная с плоской сеткой ab трансляция d лежит в плоскости bc. Совершенно аналогично тому, как это было сделано в выводе решетки моногирной (моноклин-

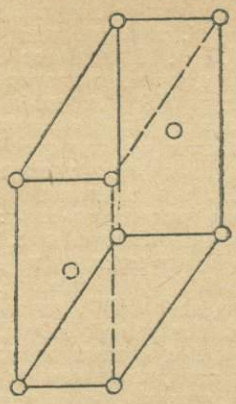
ной) сингонии, легко доказать, что конец трансляции должен совпадать с центром прямоугольника *bc*.

Получаем решетку *A*, центрированную по задней и по передней грани (центробазисная решетка A_{rhomb} или Γ_o') (фиг. 253).

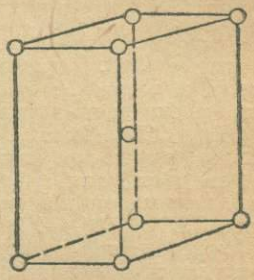
2) Сопряженная с плоской сеткой *ab* трансляция *d* лежит в плоскости *ac*.



Фиг. 252.



Фиг. 253.

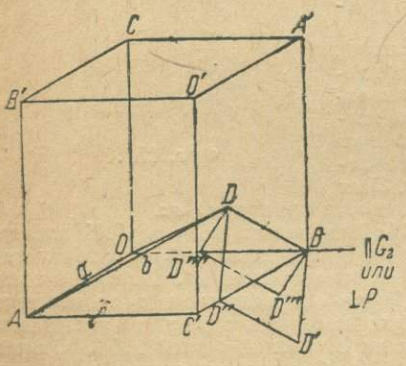


Фиг. 254.

Получаем центробазисную решетку B_{rhomb} (фиг. 253). Очевидно, что этот случай ничего нового не представляет. Он совпадает с предыдущим, решетка которого повернута на 90°, в связи с чем ребро *a* названо ребром *b*, а ребро *b* названо ребром *a*.

3) Сопряженная с плоской сеткой *ab* трансляция *d* не лежит ни в плоскости *ab*, ни в плоскости *ac*.

Если конец этой трансляции совпадает с центром всего параллелепипеда, получаем пространственно-центрированную, иначе центрообъемную, решетку *I* (Innenzentriertes Gitter) (фиг. 254). Для дигирной (ромбической) сингонии эта решетка обозначается I_0 или Γ_0''. Нетрудно доказать, что конец трансляции *d* не может располагаться вне центра параллелепипеда. Предположим, что конец вектора *d* не совпадает с центром, но является некоторой точкой *D* (не лежащей и на гранях параллелепипеда) (фиг. 255). Отрезки *AD*, *BD* и *C'D* очевидно должны также являться трансляциями. Среди четырех векторов *AD*, *BD*, *C'D* и *OD* выберем наименьший. Пусть, например, наименьшим вектором будет вектор *BD*. Если ребра *a* и *b* параллельны G_2, то вращением вектора *BD* вокруг $G_2 \parallel a$ получим вектор *BD'*, а вращением вокруг $G_2 \parallel b$ выведем вектор *BD''*. Если ребра *a* и *b* являются только нормалями к плоскостям симметрии, то, отражая вектор *BD* в этих плоскостях и беря векторы направления противоположного выведенным, при отражениях придем к тем же векторам *BD'* и *BD''*. Строим по правилу параллелограма равнодействующий *BD* и *BD'* вектор *BD'''* и равнодействующий *BD* и *BD''* вектор *BD''''*. Направления этих равнодействующих векторов, как легко видеть, будут параллельны направлениям трансляций *a* и *b*. При этом хотя бы один из этих векторов обязательно будет меньше ему параллельной трансляции *a* или *b* (см. фиг. 256, изображающую проекцию всех векторов параллелепипеда на грань *ab*).



Фиг. 255.

Приходим к абсурду, так как существование трансляций, меньших по своей величине параллельных им элементарных (т. е. наименьших) трансляций *a* и *b*, невозможно.

Очевидно, нет нужды отдельно разбирать случаи, когда из трех трансляций *a*, *b* и *c* сопряженными являются не *a* и *b*, но *a* и *c* или *b* и *c*. При этом мы попрежнему придем или к центробазисной решетке (*A*, *B* или *C*) или к центрообъемной *I*.

4. Наконец, возможен случай, когда среди трансляций *a*, *b* и *c* совсем нет сопряженных друг с другом. Возьмем плоскую сетку *ab*. В ней трансляция *a* не сопряжена с трансляцией *b*. Тогда с *a* должна быть сопряжена некоторая другая трансляция *d*. Конец вектора *d* обязательно должен совпадать с центром прямоугольника *ab* (иначе, как было доказано в предыдущих случаях, *a* или *b* не будут являться элементарными трансляциями).

Далее, трансляция *c* не может быть сопряженной с плоской сеткой *ad*, так как по условию *c* не сопряжено с *a*. Для трансляции, сопряженной с сеткой *ad*, мыслимы следующие положения:

1) Сопряженная с плоской сеткой *ad* трансляция *e* лежит в плоскости *ac*. Легко доказать по предыдущему, что конец вектора *e* должен совпадать с центром прямоугольника *ac*.

Из полученного центра (из точки *E*) строим трансляцию, равную и параллельную трансляции *AD*. Легко видеть, что конец полученного вектора *EF* совпадает с центром прямоугольника *bc*.

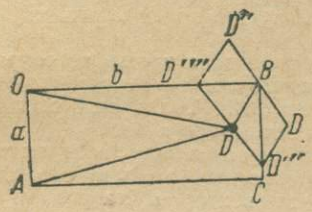
Наконец, строим трансляцию из вершины *C*, равную и параллельную *d*, из вершины *B* — равную и параллельную *e*, из вершины *A* — равную и параллельную *OF*. В результате получим узлы, совпадающие с центрами верхней, правой и передней граней параллелепипеда (эти же точки можно получить и проведением различных других трансляций).

Таким образом мы пришли к ячейке с узлами в центрах всех граней (фиг. 257). Такая центрогранная решетка называется решеткой *F* (Flächenzentriertes Gitter). Для дигирной (ромбической) сингонии эта решетка обозначается F_{rhomb} или Γ_0'''.

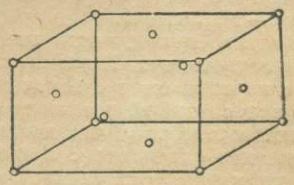
2) Сопряженная с плоской сеткой *ad* трансляция *f* лежит в плоскости *bc*. Эта трансляция сразу же приводит к существованию узла в центре грани *bc*. Из этого узла, при помощи трансляции *FE* приходим к узлу в центре боковой грани. Снова получаем центрогранную решетку Γ_0'''. Таким образом этот случай тождественен предыдущему.

3) Сопряженная с плоской сеткой *ad* трансляция *g* не лежит ни в плоскости *ac*, ни в плоскости *bc*, но направлена внутрь параллелепипеда. По предыдущему легко доказать, что конец вектора *g* должен совпадать с центром параллелепипеда (иначе придем к выводу, что *a* или *b* — не элементарные трансляции). В случае совпадения конца вектора *g* (точки *G*) с центром параллелепипеда, должна существовать трансляция, соединяющая концы векторов *g* и *d*, т. е. трансляции *DG*. Легко видеть, что эта трансляция *DG* параллельна трансляции *c* и равна ее половине.

Следовательно предположение о существовании вектора *g*, направленного внутрь параллелепипеда, приводит к существованию трансляций, параллельных *c*, но меньших



Фиг. 256.



Фиг. 257.

элементарной (т. е. наименьшей) трансляции по этому направлению. Этот случай, таким образом, отпадает.

Всего, следовательно, в дигирной (ромбической) сингонии возможны четыре решетки: простая *P*, центробазисная (*C*, *A* или *B*), центрообъемная — *I* и центрогранная — *F*.

Тетрагирная (тетрагональная) сингония

Элементарная ячейка изображена на фиг. 242. Трансляции *a* и *b* возьмем наименьшими среди трансляций, перпендикулярных к G_4. При таком выборе трансляции *a* и *b* всегда будут сопряженными.

Что же касается трансляции *c*, то здесь возможны два случая:

1) Трансляция *c* сопряжена с сеткой *ab*. *a*, *b* и *c* — тройка сопряженных трансляций, дающих простую решетку *P* (фиг. 258). Обозначение — P_{tetr} или Γ_t.

2) Трансляция *c* не сопряжена с сеткой *ab*. Тогда трансляцией, сопряженной с сеткой *ab*, будет трансляция *d*, равная половине диагонали параллелепипеда (фиг. 259). Получаем центрообъемную решетку *I*. Обозначение — I_{tetr} или Γ_t'.

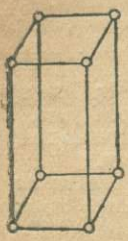
Докажем, что конец трансляции *d*, сопряженной с сеткой *ab*, не может не совпадать с центром параллелепипеда.

Действительно, если предположить трансляцию, идущую от вершины не к центру, но заканчивающуюся в любой точке *D* внутри или на грани параллелепипеда, то отрезки, соединяющие точку с четырьмя вершинами параллелепипеда *O*, *A*, *B* и *C'*, будут являться трансляциями. Среди этих четырех трансляций возьмем наименьшую (фиг. 260*a*). Пусть для примера это будет трансляция *C'D*. Поворотом вокруг G_4 легко выведем еще три равных *C'D* трансляции, расположенные под одинаковыми углами к G_4. Основания всех этих векторов расположим в одной и той же вершине *C'*. Тогда концы этих векторов *D'*, *D''* и *D'''* вместе с концом вектора *C'D* (*D*) расположатся все в плоскости, нормальной к G_4. Отрезки, соединяющие концы этих векторов, как известно, являются трансляциями (следствие 2 к теореме 17, стр. 124) и образуют квадрат *DD'D''D'''* (на фиг. 260*b* этот квадрат изображен не в перспективе, но спроектирован сверху). Нетрудно доказать, что стороны этого квадрата (плоскость которого параллельна плоскости квадрата *ab*) будут всегда меньше длин ребер *a* и *b*. Это доказывает, что в квадрате *ab*, кроме трансляций *a* и *b*,

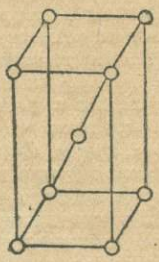
есть еще другие, меньшие трансляции, а потому трансляции a и - не являются сопряженными. Следовательно, приходим к выводу, противоречащему условию.

Отсюда следует, что никаких трансляций, направленных от вершины иначе, чем к центру параллелепипеда, быть не может.

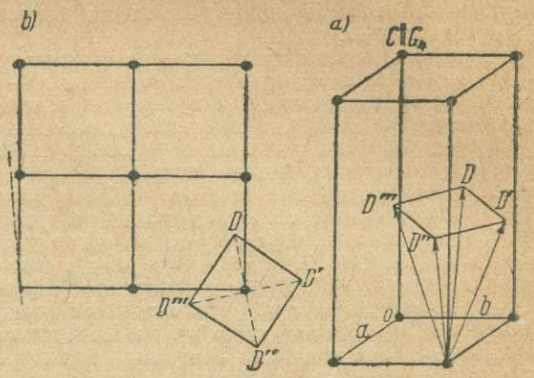
Таким образом в тетрагирной сингонии возможны две решетки: простая — P и центрообъемная — I.



Фиг. 258.



Фиг. 259.



Фиг. 260.

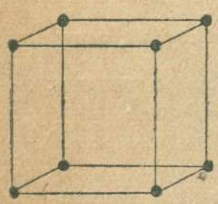
Полигирная (кубическая) сингония

Элементарная ячейка имеет форму куба (фиг. 241).

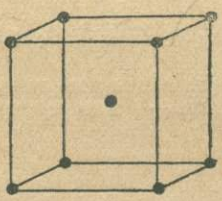
Если a, b и c — три сопряженных трансляции, получаем простую решетку P (фиг. 261). Обозначение — P_{reg} или Г.

Рассмотрим случай, когда две трансляции сопряжены, а третья не сопряжена с плоской сеткой первых двух. Предположим для примера, что a и b — сопряженные трансляции, тогда как c не сопряжена с плоской сеткой ab (фиг. 262). Тогда сопряженной трансляцией будет трансляция d, равная половине длинной диагонали куба.

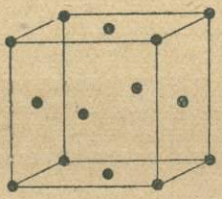
Доказательство того, что конец вектора d должен совпадать с центром параллелепипеда, совершенно одинаково с аналогичным доказательством, приведенным для тетрагирной (тетрагональной) сингонии (предположение, что вектор d направлен не в центр



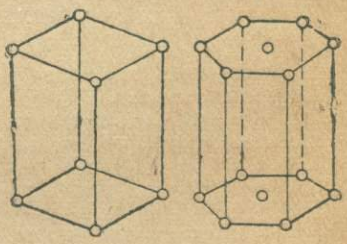
Фиг. 261.



Фиг. 262.



Фиг. 263.



Фиг. 264

параллелепипеда, но как угодно иначе, например, к центру одной из граней параллелепипеда, приводит к выводу о несопряженности трансляций a и b). В результате получаем центрообъемную (центрированную) решетку I_{reg} или Г″ (фиг. 262).

Остается рассмотреть еще случай, когда среди трансляций a, b и c совсем нет сопряженных. Рассуждения, совершенно подобные приведенным для аналогичного случая дигирной (ромбической) сингонии, приводят к выводу о существовании центрогранной решетки F. Эта решетка для кубической сингонии обозначается F_{reg} или Г‴ (фиг. 263).

Таким образом в полигирной (кубической) сингонии имеем три решетки: простую — P, центрообъемную — I и центрогранную — F.

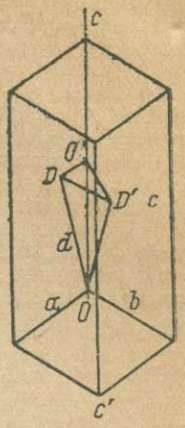
Гексагирная (гексагональная) сингония

Элементарная ячейка (фиг. 264) складывается тремя, повернутыми друг относительно друга параллелепипедами повторяемости. Каждый параллелепипед повторяемости представляет собою ромбическую призму с углом в 60°.

Возьмем среди всех перпендикулярных к G_6 (или G_{6i}) трансляций наименьшие равные трансляции a и b (расположенные под углом 60° друг к другу). При таком выборе данные трансляции будут сопряженными.

Если трансляция c сопряжена с плоской сеткой ab, получим простую решетку P (фиг. 264 a и $б$). Обозначение — P_{hex} или (Γ_h).

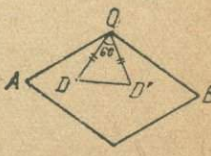
Случаи несопряженности трансляции c с плоской сеткой ab невозможны. Действительно, предположим, что трансляция сопряженности с плоской сеткой ab, есть трансляция d, направленная как-либо внутри параллелепипеда или идущая вдоль его грани. Поворотом вокруг G_6 получим равную ей трансляцию d'. Основание вектора d' расположим в точке O так же, как и основание вектора d. Легко видеть, что отрезок DD', замыкающий концы векторов d и d', будет перпендикулярен D_6. Этот отрезок, таким образом, является трансляцией, параллельной плоскости ab. Геометрически он равен отрезку $O'D$ — расстоянию от точки D до оси OC (на фиг. 265 внизу изображены эти отрезки в проекции на плоскость ab). Так как точка D лежит внутри или на границе параллелепипеда, то очевидно, что отрезок $O'D$ (а следовательно, и отрезок DD') всегда меньше ребра параллелепипеда OA ($OD' < O'A$). Отрезок DD' является трансляцией, перпендикулярной G_6, а следовательно a (и b) не наименьшие трансляции, перпендикулярные к G_6. Но это противоречит первоначальному условию о том, что a и b — наименьшие из всех перпендикулярных трансляций. Таким образом трансляция c должна быть обязательно сопряженной трансляцией по отношению к плоской сетке ab, и, следовательно, в гексагирной сингонии может существовать только одна решетка P.



Тригирная (тригональная) сингония

Элементарная ячейка имеет форму ромбоэдра (фиг. 245). Ребра этой ячейки представляют собою трансляции, равнонаклоненные к G_3. Возьмем за ребра ромбоэдра наименьшие трансляции, имеющиеся в решетке (не параллельные G_3 и не перпендикулярные G_3).

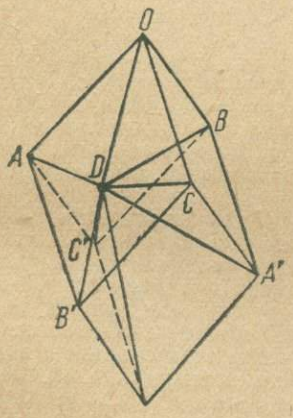
Если три равнонаклоненных к G_3 трансляции a, b и c — сопряженные трансляции, то получаем простую „ромбоэдрическую" решетку P (обозначается P_{trig}, R, Γ_{rh}).



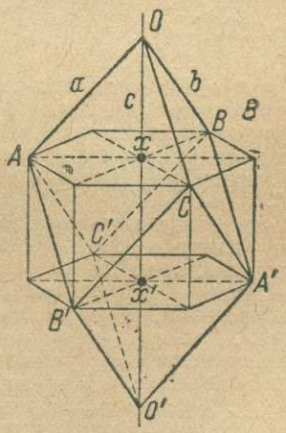
Фиг. 265.

Докажем, что трансляции a, b и c не могут быть не сопряженными. Если только одна из них не сопряжена с двумя другими или если среди них нет ни одной пары сопряженных трансляций, должна существовать некоторая сопряженная трансляция, направленная из вершины O или внутрь ромбоэдра (первый случай), или вдоль одной из его граней (второй случай).

Предположим, что один из этих случаев имеет место. Конец найденной сопряженной трансляции (точку D) соединим со всеми вершинами ромбоэдра (фиг. 266). Полученные отрезки AD, BD, CD, OD, $A'D$, $B'D$, $C'D$ и $O'D$ представляют собою некоторые трансляции.



Фиг. 266.



Фиг. 267.

Среди них обязательно найдутся меньшие по своей величине, чем ребро ромбоэдра. Если такие отрезки не будут параллельны G_3 и не будут перпендикулярны G_3, то получим трансляции, наклоненные к G_3 и меньшие, чем трансляции a, b и c. Но по условию трансляции a, b и c — наименьшие среди всех наклоненных к G_3 трансляций. Отсюда следует, что трансляций, направленных внутрь ромбоэдра или вдоль его граней (не параллельных ребрам) быть не может.

Однако для одного частного случая приведенное рассуждение не применимо. Пред-

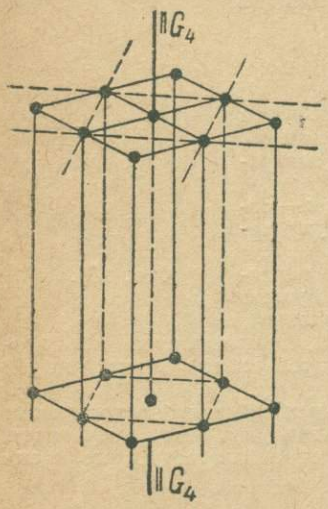
ставим себе трансляцию Ox, параллельную оси OO, параллельную G_3 и равную одной трети отрезка OO. Соединяя вершины A, B и C с концом такого вектора, получим векторы Ax, Bx и Cx, которые, хотя и короче ребер ромбоэдра, но расположены не наклонно, а перпендикулярно к оси OO (перпендикулярно G_3) (фиг. 267). Наш же ромбоэдр построен на наименьших „наклонных" трансляциях. Поэтому существование трансляции не противоречит условиям построения ромбоэдра.

Рассмотрим к чему приводит этот случай.

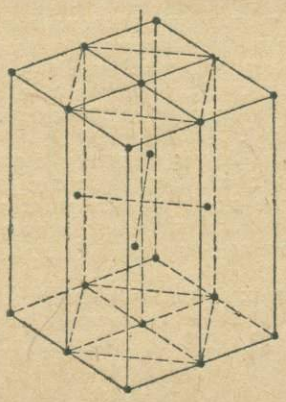
Откладывая вектор Ox дважды, получаем, кроме узла x, еще узел x'. Трансляции $A'x'$, $B'x'$ и $C'x'$ также будут перпендикулярны G_3, как и трансляции Ax, Bx и Cx. Всего, следовательно, получим шесть трансляций, перпендикулярных к G_3. Их можно представить себе расположенными и вокруг узла x и вокруг узла x'. Все они равны между собою и расположатся под углами в 60° друг к другу. Вместе с трансляциями, равными и параллельными трансляции xx', они вырежут в решетке гексагональную призму.

Никаких узлов внутри этой призмы или на ее гранях, не считая узлов вершин и узлов x и x', быть не может (в таком случае, по доказанному выше придем к существованию трансляций меньших длин ребер ромбоэдра). Бесконечная совокупность параллельно-расположенных таких призм захватит решительно все точки пространственной решетки.

Таким образом, в тригирной сингонии возможны две решетки: решетка простая — P (ромбоэдрическая) и знакомая нам уже гексагональная решетка Γ_h.



Фиг. 268.



Фиг. 269.

Сопоставляя наши выводы для всех семи сингоний, видим, что всего возможно 14 различных решеток. Эти решетки носят название решеток Браве, по имени знакомого уже нам французского ученого Огюста Браве, впервые их изучившего.

Приводимая нами трактовка решеток как простых, центрогранных, центрообъемных и пр. является до некоторой степени условной. Во многих случаях одну и ту же решетку можно рассматривать и как центрообъемную и как, например, центрогранную, если принимать во внимание другие тройки сопряженных трансляций. Не вдаваясь в подробности, ограничимся рассмотрением только двух примеров. В тетрагирной сингонии возможны две решетки: простая — P (фиг. 258) и центрообъемная — I (фиг. 259). Нетрудно видеть, что простую (P) можно рассматривать и как центробазисную (C). Действительно, четыре половинки элементарных ячеек, соприкасающихся по общему ребру параллельно G_4 (фиг. 268), образуют ячейку, центрированную по основанию. Пунктирными линиями показано, каким образом в решетке P, состоящей из простых элементарных ячеек, можно выделить ячейки, центрированные по основанию, и, следовательно, рассматривать эту решетку как решетку C.

Аналогично этому центрообъемную решетку I той же сингонии можно рассматривать как центрогранную F. На фиг. 269 изображены четыре элементарных ячейки центрообъемной решетки I, центральные половинки которых образуют центрогранную ячейку F.

Таким образом в тетрагирной сингонии решеток две: P или C и I или F. Решетку же P никаким способом, не нарушая сингонии параллелепипеда, нельзя истолковать как решетку I или F. Для того, чтобы не было неопределенности в трактовках тех или иных решеток, рассматривают решетки таким образом, чтобы элементарная ячейка имела минимальные длины ребер (или, что то же, получила бы наименьший объем). Тогда, очевидно, что решетку P_{tetr} нельзя истолковать как C_{tetr}, а решетку I_{tetr} — как F_{tetr}. Принимая принцип минимального объема, придем к трактовкам 14 решеток, указанных в тексте.

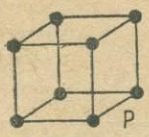
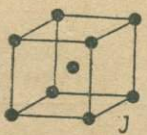
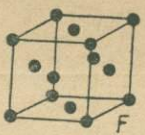
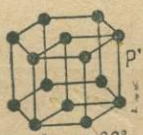
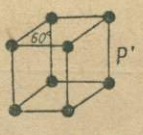
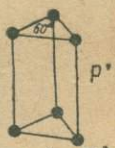
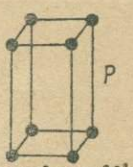
Заметив сказанное, сопоставим все 14 решеток в табл. 17, в которой укажем и другие возможные трактовки той или иной решетки.

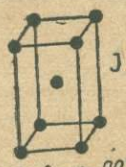
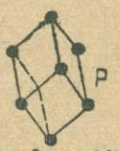
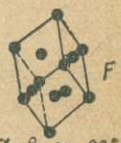
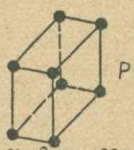
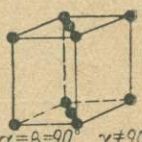
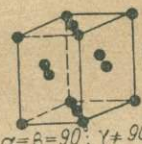
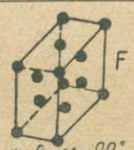
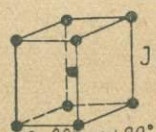
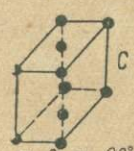
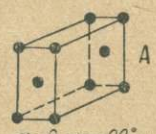
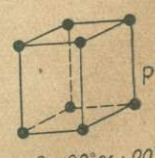
3. Структуры Е. С. Федорова

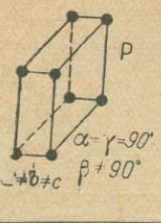
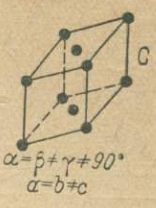
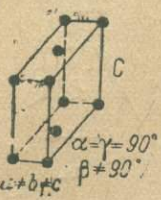
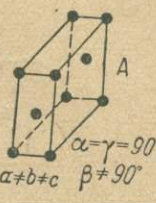
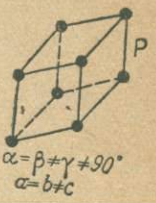
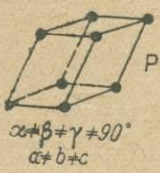
Просматривая внимательно таблицу предыдущего параграфа, мы видим, что все решетки можно свести к четырем видам — P, I, F, и P'. Виды C, A, I' и I'' не имеют самостоятельного значения и всегда могут быть истолкованы как решетки предыдущих видов. При этом любая из рассматриваемых решеток может быть получена из решеток P, I, F полигирной (кубической) сингонии и P' гексагирной (гексагональной) сингонии.

14 решеток Браве

Условные обозначения: *P* — простая решетка; *I* — центрообъемная; *F* — центрогранная; *C* — центрированная по верхней грани; *A* — центрированная по передней грани

Сингония	№№ по порядку	Обозначение: немецкое	Обозначение: французск.	Форма решетки	Другие возможные трактовки той же решетки
Полигирная (кубическая)	1	P_{reg}	Γ_c	 P $\alpha=\beta=\gamma=90°$ $a=b=c$	
	2	I_{reg}	Γ''_c	 J $\alpha=\beta=\gamma=90°$ $a=b=c$	
	3	F_{reg}	Γ'''_c	 F $\alpha=\beta=\gamma=90°$ $a=b=c$	
Гексагирная (гексагональная)	4	P_{hex}	Γ_h	 P' $\alpha=\beta=\gamma\neq90°$ $\delta=120°$ $a=b=c\neq d$	 60° P' $\alpha=\beta=90°$ $\gamma=60°$ $a=b\neq c$  60° P' $\alpha=\beta=90°$ $\gamma=60°$ $a=b\neq c$
Тетрагирная (тетрагональная)	5	P_{tetr}	Γ_t	 P $\alpha=\beta=\gamma=90°$ $a=b\neq c$	 C $\alpha=\beta=\gamma=90°$ $a=b\neq c$

Сингония	№№ по порядку	Обозначение: немецкое	Обозначение: французское	Форма решетки	Другие возможные трактовки той же решетки
Тетрагирная (тетрагональная)	6	*tetr*	Γ''_t	 $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ $a=b\neq c$	 $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ $a=b\neq c$
Тригирная (тригональная)	7	R_{trig}	Γ_{rh}	 $\alpha=\beta=\gamma\neq90^\circ$ $a=b=c$	 $\alpha=\beta=\gamma\neq90^\circ$ $a=b=c$  $\alpha=\beta=\gamma\neq90^\circ$ $a=b=c$
Дигирная (ромбическая)	8	P_{rhbi}	Γ_o или Γ_v	 $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ $a\neq b\neq c$	 $\alpha=\beta=90^\circ$ $\gamma\neq90^\circ$ $a=b\neq c$
	9	I_{rhbi}	Γ''_o или Γ'''_v	 $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ $a\neq b\neq c$	 $\alpha=\beta=90^\circ$ $\gamma\neq90^\circ$ $a=b\neq c$
	10	F_{rhbi}	Γ'''_o или Γ''_v	 $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ $a\neq b\neq c$	 $\alpha=\beta=90^\circ$ $\gamma\neq90^\circ$ $a=b\neq c$
	11	C_{rhbi}	Γ'_o или Γ'_v	 $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ $a\neq b\neq c$	 $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ $a\neq b\neq c$  $\alpha=\beta=90^\circ$ $\gamma\neq90^\circ$ $a\neq b\neq c$

Сингония	№№ по порядку	Обозначение: немецкое	Обозначение: французское	Форма решетки	Другие возможные трактовки той же решетки
Моногирная (моноклинная)	12	P_{mkl}	Γ_m		
	13	C_{mkl}	Γ'_m		 
Агирная (триклинная)	14	P_{trikl}	Γ_{tr}		*I F C A*

Для этого четыре указанные решетки следует подвергать деформациям, растягивая их, сжимая и сдвигая. При помощи таких деформаций легко получается любая из решеток Браве.

Е. С. Федоров рассматривает каждую решетку как деформированную решетку полигирной (кубической) или гексагирной (гексагональной) сингонии. При этом он относит ее к такому виду, который может быть получен из исходных четырех видов полигирной (кубической) или гексагирной (гексагональной) сингонии путем минимальной деформации. Поэтому, по Е. С. Федорову, не безразлично, как называть, например, решетку тригирной (тригональной) сингонии. Как видно из табл. 17, каждую решетку этой сингонии можно истолковать и как решетку простую (P), и как решетку центрированную (I), и как решетку центрогранную (F). По Е. С. Федорову же, в каждом конкретном случае следует разобраться — при какой трактовке ромбоэдр элементарной ячейки будет наиболее похож на куб. Если, например, центрированная элементарная ячейка может быть получена при минимальном растяжении или сжатии вдоль G_3 куба, то структуру следует называть центрированной (I).

Е. С. Федоровым для обозначения видов решеток взяты вместо букв P, I, F и P' буквы h, o, d и цифра 6. Соответственные типы решеток названы — гексаэдрической (h), октаэдрической (o), додекаэдрической (d) и призматической (6) структурами (эти названия даны по форме соответственных так называемых „параллелоэдров". Теория „параллелоэдров", разработанная Е. С. Федоровым, как раз и привела к разделению всех решеток на четыре указанных вида).

Таким образом любому кристаллическому веществу, по Е. С. Федорову, приписывается одна из четырех структур (h, o, d или 6) с таким расчетом, чтобы эта структура наименее отличалась от структур h, o, d полигирной (кубической) сингонии или структуры 6 гексагирной (гексагональной) сингонии.

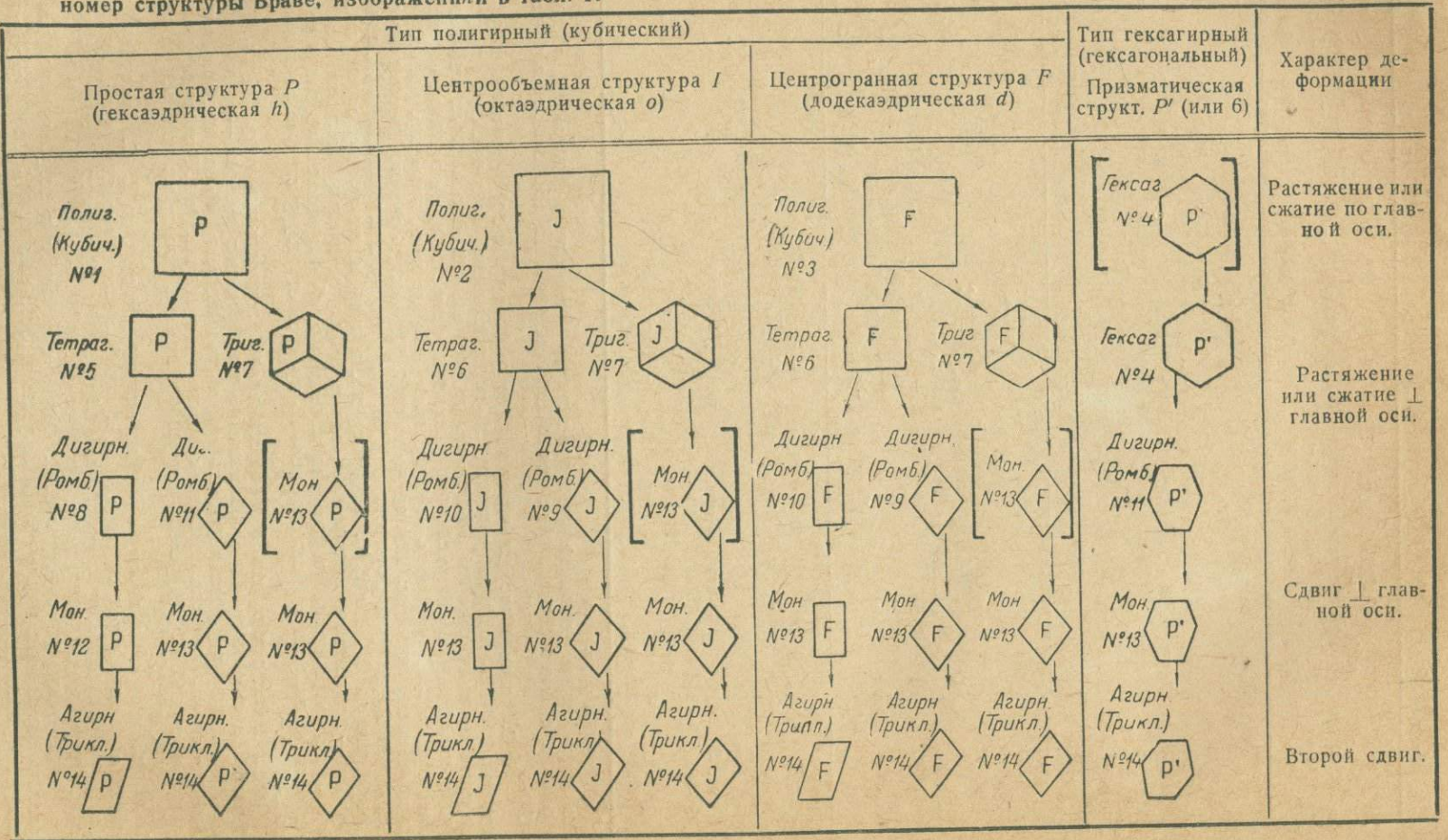
Разделение на структуры Е. С. Федорова приводит к тому, что каждая решетка рассматривается как деформированная решетка либо полигирной (кубической), либо гексагирной (гексагональной) сингонии.

Таблица 18

Классификация форм решеток по Федорову

№ под сингонией данной решетки указывает порядковый номер структуры Браве, изображенной в табл. 17

В скобках помещены структуры, не отличающиеся от нижестоящих



Отсюда вытекает деление всех решеток на два основных типа — тип полигирный (кубический) и тип гексагирный (гексагональный). Тип полигирный (кубический) в свою очередь разделяется на три вида структуры (*h*, *o* и *d*). [К типу гексагирному (гексагональному) относится только одна структура (6)]. С другой стороны, в зависимости от характера и величины деформации, каждый вид структуры может относиться к различным сингониям. В табл. 18 дана сокращенная схема классификации всех решеток по Федорову.

В табл. 18 стрелками показаны, каким путем, какими деформациями четырех исходных структур получаются все остальные решетки Браве.

Так, растягивая или сжимая простую кубическую решетку P по G_4, получим простую тетрагирную решетку (№ 5 по табл. 18). Ячейка имеет форму тетрагональной призмы. Растягивая далее эту решетку по G_2, перпендикулярной к сторонам ячейки, получим дигирную (ромбическую) решетку с ячейкой, имеющей прямоугольное сечение (№ 8). Если же растягивать по G_2, расположенным под углом 45° к первым, получим тоже дигирную (ромбическую) решетку. Однако ячейка этой решетки имеет ромбическое сечение (№ 11). Сдвигая верхнюю плоскость относительно нижней, у последней ячейки получим моногирную (моноклинную) ячейку, изображенную в табл. 18 под № 13. Второй сдвиг превратит ее в агирную (триклинную) ячейку.

Из табл. 18 видно, что принцип Е. С. Федорова, согласно которому каждую решетку мы рассматриваем как минимально деформированную решетку одного из четырех основных и независимых видов структуры, позволяет дать их более дробное деление. Многие из 14 решеток Браве оказываются при этом разделенными на несколько отдельных видов. Если отбросить помещенные в табл. 18 в скобках повторяющиеся дважды виды, всего, согласно таблице, получаем 37 видов решеток.

Классификация Е. С. Федорова выгодно отличается от других аналогичных классификаций структур тем, что ею выявляется общая и взаимная связь всех решеток друг с другом. Даже два типа кристаллов — полигирной (кубической) и гексагирной (гексагональной) с их, казалось бы, совершенно независимыми структурами, классификацией Е. С. Федорова оказываются связанными целым рядом переходов.

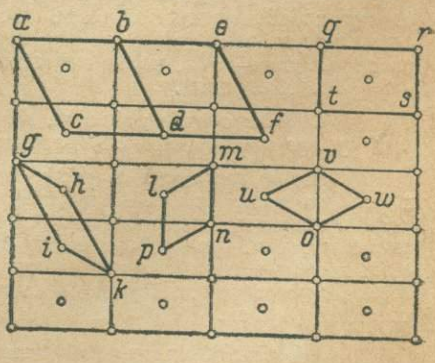
Действительно, решетка любой сингонии первого типа путем небольших деформаций может быть превращена в агирную (триклинную). Все же решетки этой сингонии принадлежат к одной решетке Браве, и небольшими деформациями постепенно переходят друг в друга. Каждый вид решетки агирной (триклинной) сингонии легко превратить из центрированной в центрогранную или в решетку простую P' гексагирного (гексагонального) типа. Последняя же, путем обратных деформаций, связана с решеткой гексагирной (гексагональной) сингонии. Таким образом гексагирная (гексагональная) сингония оказывается взаимно-связанной с полигирной (кубической).

Классификация Е. С. Федорова указывает место каждой решетки среди других, ее генетическую связь со всеми другими решетками и является благодаря этому наиболее глубокой и естественной классификацией кристаллических веществ.

4. Сводка различных понятий о клетках пространственных решеток

Заканчивая рассмотрение различных форм пространственных решеток, дадим общую сводку о различных клетках, которыми эта решетка строится.

Любой параллелепипед, выделенный в решетке, мы называем параллелепипедом повторяемости, если вся решетка выводится параллельным повторением этого параллелепипеда. Все полученные параллелепипеды при этом соприкасаются друг с другом целыми гранями, причем длины их ребер — наименьшие расстояния между узлами по данному направлению. Например, *abcd* является одним из параллелепипедов повторяемости. *aefc* мы таковым не называем и считаем состоящим из двух параллелепипедов повторяемости: *abcd* и *befd* (фиг. 270).



Фиг. 270.

В частном случае, если параллелепипед повторяемости не имеет внутри себя точек, идентичных с точками его вершин, то он называется параллелепипедом идентичности или примитивным (например, *ghki*).

Параллелепипед идентичности (примитивный) с наименьшими длинами ребер называется кратчайшим примитивным параллелепипедом (параллелепипед *lmnp*).

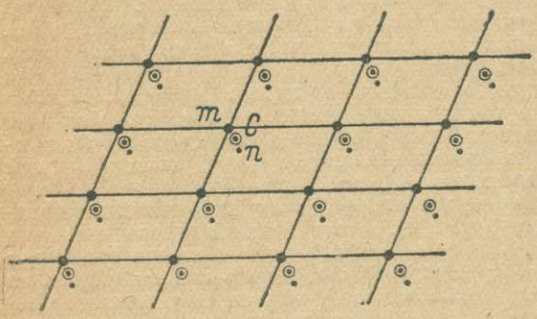
С другой стороны, параллелепипед повторяемости называется элементарным параллелепипедом, если его симметрия отвечает симметрии решетки. Согласно с углублением идей Е. С. Федорова этого определения вполне достаточно. Более узким является общепринятое определение, согласно которому предыдущее определение должно быть дополнено требованием максимального количества равных узлов у параллелепипеда.

Таким образом *qrst* — элементарная ячейка и в узком и в широком смысле. *uvwo* можно назвать элементарной ячейкой только согласно со взглядами Е. С. Федорова. Наименьший по величине элементарный параллелепипед называется параллелепипедом Браве. Элементарный параллелепипед может быть, а может и не быть кратчайшим примитивным параллелепипедом.

Во всех рассмотренных случаях решетка целиком состояла из идентичных точек. Элементарная ячейка, содержащая в себе и все неидентичные точки, называется базисной ячейкой. Изучению решеток, содержащих и неидентичные точки, посвящены нижеследующие разделы настоящей главы.

5. Правильные системы точек

В предыдущих разделах этой главы нами были рассмотрены различные виды пространственных решеток, все точки которых могут совмещаться друг с другом, при помощи только одних трансляций. Тремя сопряженными трансляциями строится вся решетка (поэтому рассмотренные решетки называются „трансляционными"). Однако, как мы знаем, в кристаллическом веществе кроме трансляций могут быть еще и другие элементы симметрии. Мы их принимали отчасти во внимание при рассмотрении форм решеток. Остановимся теперь на вопросе о связи трансляционных решеток с элементами симметрии подробнее. Пусть, например, в нашей трансляционной решетке присутствует центр инверсии (*C*), лежащий возле какого-либо узла *m* (фиг. 271). Тогда, в силу существования трансляций, возле каждого узла должен помещаться такой же центр инверсии (центры инверсии изображены на фигуре точками, обведенными кружками). При инверсии узла *m* в точке *C*, получим узел *n*. Целый ряд таких же узлов возникнет и рядом с другими центрами инверсии. Узел *n* с ему аналогичными построит вторую трансляционную решетку, совершенно тождественную первой, только сдвинутую относительно первой на величину *mn*.



Фиг. 271.

Этот результат нас, конечно, не должен удивлять. Мы знаем, что реальные кристаллические решетки слагаются несколькими, вставленными одна в другую. Новым здесь будет только то, что наши две, вставленные одна в другую решетки не являются независимыми, но связаны друг с другом центрами инверсии.

Полученная сложная решетка резко отличается от простой тем, что вектор, соединяющий два любых узла решетки, может и не являться трансляцией (например, отрезок *mn* не есть трансляция). Одному узлу простой трансляционной решетки отвечает целая совокупность точек. В рассматриваемом случае точки *m* и *n* вместе с центром инверсии образуют как бы один узел простой трансляционной решетки.

Обратно, каждый узел любой трансляционной решетки может рассматриваться как совокупность нескольких точек, связанных друг с другом элементами симметрии. Полная совокупность всех таких точек, образующих несколько вставленных друг в друга трансляционных решеток, носит название правильной системы точек.

Таким образом,

бесконечная фигура, все точки которой связаны друг с другом имеющимися у нее элементами симметрии, называется правильной системой точек.

Правильная система точек вполне отвечает понятию о простой форме многогранника. Она является как бы простой формой не конечной, но бесконечной фигуры.

Различным совокупностям элементов симметрии отвечают различные правильные системы точек. Их вывод может быть сделан совершенно аналогично выводу всех простых форм кристаллографических многогранников. Каждой из 230 пространственных групп симметрии свойственны свои правильные системы точек, отвечающие общим и частным формам.

Общей правильной системой точек называется такая правильная система, каждая точка которой не соприкасается ни с одним из элементов симметрии и не лежит на равных расстояниях от одинаковых элементов симметрии.

Частной правильной системой точек называется такая правильная система, каждая точка которой или лежит на каком-либо элементе симметрии или отстоит на равных расстояниях от одинаковых элементов симметрии.

Очевидно, что правильная система точек, изображенная на фиг. 271, является общей правильной системой.

Если бы, однако, вместо точек m и n и остальных соответственных, мы имели бы точки c, совпадающие с центрами инверсии, то такой случай представил бы собою пример частной правильной системы.

Каждой из 230 пространственных групп симметрии отвечает одна общая правильная система и одна или несколько частных правильных систем.

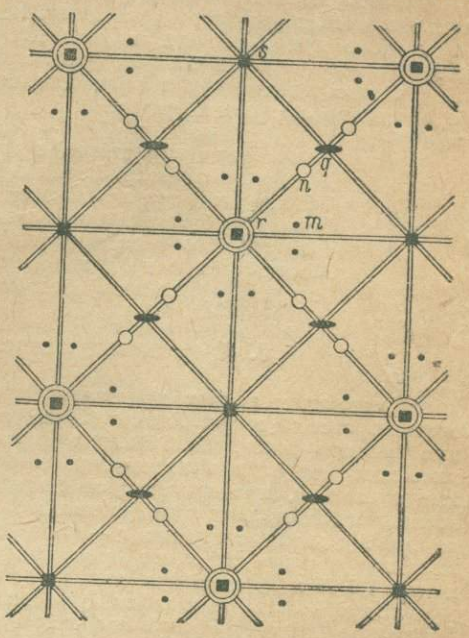
Все эти системы точек описаны для каждой разновидности (в атласе Шибольда приведены даже проекции каждой общей правильной системы).

Трансляционные решетки являются примерами частных правильных систем, у которых точки лежат в пересечении элементов симметрии.

Для того, чтобы яснее разобраться в понятиях о правильных системах точек, рассмотрим конкретный пример.

Пусть нам дана пространственная группа симметрии $24\ s = C^1_{4v}$ (первое обозначение — Е. С. Федорова; второе — Шенфлиса).

Согласно табл. 13, совокупность порождающих элементов симметрии этой разновидности может быть написана в таком виде: G_4p. Присутствие G_4 говорит, что мы имеем дело с тетрагирной (тетрагональной) сингонией. Добавочным элементом симметрии является только плоскость симметрии (p). Таким образом наша пространственная группа симметрии относится к планальному виду симметрии. Отсутствие указателей (t) говорит, что ни геликогир, ни плоскостей скольжения не имеется. Отсутствие скобок говорит о том, что плоскости симметрии проходят через главные оси G_4. Пользуясь всем этим, нетрудно построить проекцию всех элементов симметрии этой группы симметрии (фиг. 272).



Фиг. 272.

Точка общего положения (m) должна относиться к общей правильной системе точек, которую легко построить, поворачивая точку вокруг присутствующих гир и отражая ее в плоскостях симметрии (точки построенной правильной системы отмечены черными кружками).

Частные системы точек можно получить, помещая точки где-либо на элементах симметрии. Точка (n), лежащая в плоскости симметрии, принадлежит к частной правильной системе, помеченной незачерненными кружками. Нетрудно сообразить, что этих точек будет вдвое меньше по сравнению с точками общей системы: на две точки m приходится только одна точка n. Другую частную правильную систему представляют точки q, лежащие на всех G_2 (они не помечены). Точек этой системы вдвое меньше, чем точек n, так как около каждой точки q расположено по две точки n.

Наконец, правильная система точек, совпадающая с G_4, помечена двойными кружками (r). Эти точки располагаются не на всех G_4, но только на равных (как показано на чертеже). Точек этой системы вдвое меньше, чем точек системы q и в четыре раза меньше, чем точек системы n (легко видеть, что каждая точка r окружена четырьмя точками n).

Точки, лежащие на всех остальных G_4, на которых не лежат точки r, образуют в точности такую же систему точек (s), как и точки r, сдвинутую относительно этой системы на расстояние rs.

Вместе с тем точки двух последних систем (r и s) представляют собою точки простых трансляционных решеток.

Каждая из рассмотренных систем точек (m, n, q, r и s) независима одна от другой и при совмещении, скажем, точки n с точкой q, совмещения правильных систем не последует. Однако все эти системы могут создавать кристаллическую решетку не только по отдельности, но и в комбинациях друг с другом.

Комбинацией правильных систем точек называется такая фигура, не все точки которой связаны имеющимися у этой фигуры элементами симметрии.

Таким образом, понятие о комбинации систем точек вполне отвечает понятию о комбинациях форм у конечных фигур.

Отношение числа точек различных правильных систем, образующих комбинацию всегда бывает вполне определенным. Так, отношение количеств точек систем m, n, q, r и s, комбинация которых представлена на фиг. 272, будет:

$$m : n : q : r : s = 8 : 4 : 2 : 1 : 1.$$

Никаких других отношений, кроме выражающихся приведенными числами 8, 4, 2 и 1, эта разновидность не допускает.

Другие разновидности дают другие отношения чисел точек своих правильных систем, образующих комбинацию.

А. В. Шубников перебрал все 230 разновидностей и нашел, какие именно комбинации относительных чисел количеств точек возможны для каждой.

Можно доказать (и можно просто вывести эмпирически), что относительные числа количеств таких точек, слагающих комбинацию данной разновидности, не могут быть иными, чем относительные количества граней простых форм вида симметрии, к которому эта разновидность принадлежит. Так, рассматриваемая нами разновидность (фиг. 272) относится к планальному виду симметрии тетрагирной (тетрагональной) сингонии.

В этом виде симметрии могут встречаться следующие простые формы: моноэдр (число граней — 1), тетрагональная призма, тетрагональная пирамида (с числом граней 4) и дитетрагональная призма и дитетрагональная пирамида (с числом граней по 8). Относительные количества граней могут быть: 8:1; 4:1; 8:4 = 2:1, т. е. выражаются рядом чисел 8, 4, 2, 1.

Такой же ряд нами как раз и был получен для относительных количеств точек правильных систем рассмотренной нами разновидности.

Ниже приведены все возможные относительные числа точек правильных систем, могущие встречаться в той или иной сингонии.

Относительные числа количеств точек правильных систем могут быть равны наборам только следующих рядов:

Полигирная (кубическая) сингония . . . . . 1, 4, 6, 8, 12, 24, 48.
Гексагирная (гексагональная) сингония . . . . . 1, 2, 6, 12, 24.
Тетрагирная (тетрагональная) сингония . . . . . 1, 2, 4, 8, 16.
Тригирная (тригональная) сингония . . . . . 1, 3, 6, 12.
Дигирная (ромбическая) сингония . . . . . 1, 2, 4, 8.
Моногирная (моноклинная) сингония . . . . . 1, 2, 4.
Агирная (триклинная) сингония . . . . . 1, 2.

6. Кристаллохимический закон А. В. Шубникова

Решетки реальных кристаллических веществ представляют собою комбинации правильных систем точек. Атомы (ионы) различных химических элементов образуют различные системы точек. Комбинацией таких систем получается кристаллическая решетка химического соединения нескольких элементов. Так, все черные кружки фиг. 272, помеченные точкой *m*, представляют собою атомы одного и того же элемента (назовем его элементом *M*); кружки *n* могут являться уже атомами другого элемента (назовем его элементом *N*); двойные кружки *r* — третьего (назовем его *R*). Если больше никаких правильных систем точек здесь не присутствует, то химическое соединение, состоящее из элементов *M*, *N* и *R*, очевидно, должно иметь химическую формулу M_8N_4R.

Если бы система точек *R* не входила в нашу комбинацию, а решетка слагалась бы только двумя правильными системами, то двухкомпонентное химическое соединение из элементов *M* и *N* имело бы химическую формулу $M_8N_4 = M_2N$. Мы предположили, что все эти атомы *M*, *N* и *R* — атомы различных элементов. Однако можно предположить, что атомы *R* и *N* — атомы одного и того же элемента. Обозначим его *Q*. Но атомы *R* и *N* неравны и геометрически независимы друг от друга, а потому и роль этих атомов в соединении должна быть различна. Получаем соединение M_8Q_5, в котором атомы *Q* двух сортов, играющие неодинаковую роль в соединении. Каким образом атомы одного и того же элемента могут играть неодинаковую роль лучше всего уяснить из примера. Магнитный железняк имеет химический состав Fe_3O_4. Однако атомы железа здесь различны — два из них трехвалентны, а один — двухвалентен. Химическую формулу подробнее можно изобразить таким образом:

$$Fe'' \begin{matrix} O - Fe''' = O \\ O - Fe''' = O \end{matrix}$$

Очевидно, что в кристаллической решетке Fe''' не может совмещаться элементами симметрии с Fe'', а потому Fe''' и Fe'' образуют две различные независимые правильные системы точек. Да и кислороды O в приведенной формуле, несмотря на то, что все они двухвалентны, должны слагаться по двум различным правильным системам точек, так как два из них связаны только с Fe''', тогда как два других имеют связи и с Fe''' и с Fe''.

Из этого примера видно, что даже атомы одного и того же элемента могут иметь различное значение.

С другой стороны, как мы знаем из примеров изоморфизма, атомы различных элементов могут заменять друг друга в одной и той же решетке, точнее, в одной и той же правильной системе точек. Поэтому, во избежание путаницы, будем говорить не об атомах различных элементов, а просто о „разных“ атомах.

Условимся называть „разными" атомами атомы, играющие различную химическую роль в соединении, а, следовательно, и геометрическую роль в кристаллической решетке.

В нашем примере M, N, R — разные атомы, образующие соединение формулы M_8N_4R (если два из них разные атомы одного элемента, то химическую формулу следует писать так: M_8N_4N или M_8R_4R, или, если M и N равные элементы — M_8M_4R и т. д.).

Очевидно, что относительные количества этих разных атомов не могут быть какими угодно. Так как каждый из атомов M, N, R относится к определенной правильной системе точек, то относительные количества этих атомов могут быть только такими, какими могут быть относительные количества точек правильных систем.

Для рассматриваемой группы симметрии эти относительные количества, как мы нашли, могут выражаться только числами ряда: 8, 4, 2, 1. Следовательно, химические формулы трехкомпонентного соединения из трех различных сортов атомов A, B, C здесь могут быть только такие: $A_1B_1C_1$; $A_1B_1C_2$; $A_1B_1C_4$; $A_1B_1C_8$; $A_1B_2C_2$; $A_1B_2C_4$; $A_1B_2C_8$; $A_1B_4C_4$; $A_1B_4C_8$; $A_1B_8C_8$. Остальные комбинации ($A_2B_2C_2$), ($A_2B_2C_4$), ($A_2B_2C_8$), ($A_2B_4C_4$), ($A_2B_4C_8$), ($A_2B_8C_8$), ($A_4B_4C_4$), ($A_4B_4C_8$), ($A_4B_8C_8$), ($A_8B_8C_8$), сокращаясь, дают предыдущие.

Никакие другие комбинации, например, $A_1B_3C_3$ или $A_1B_1C_5$ невозможны в данной разновидности.

Но, однако, соединение $A_1B_3C_3$ может кристаллизоваться в тригирной (тригональной) сингонии, для которой числа, выражающие относительные количества точек правильных систем, представляются рядом: 1, 3, 6, 12.

Соединение же $A_1B_1C_5$ не может кристаллизоваться ни в одной сингонии. Действительно, просматривая ряды возможных относительных количеств точек правильных систем, указанных в конце предыдущего параграфа, видим, что числа 5 нет ни в одном ряду.

Таким образом, соединение разных атомов $A_1B_1C_5$ не может кристаллизоваться.

Отсюда:

Относительные количества a, b, c . . . q химического соединения разных атомов A, B, C . . . Q (с формулой $A_aB_bC_c$ . . . Q_q) не являются вполне произвольными. Они обусловлены законом кристаллографической симметрии.

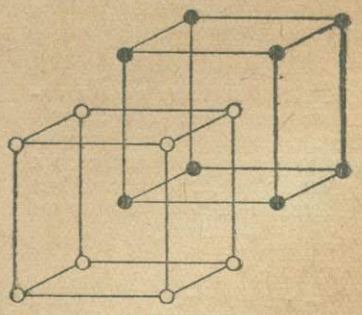
Это положение, составляющее кристаллохимический закон А. В. Шубникова, наряду с законом Дальтона и учением о валентностях, налагает существенные ограничения в возможности образования тех или иных веществ.

В каждой разновидности симметрии могут кристаллизоваться лишь такие химические соединения разных атомов $A_aB_bC_c$ . . . . Q_q, в которых числа a, b, c . . . q отвечают возможным относительным количествам точек правильных систем, возможных в данной группе симметрии.

Каждое химическое соединение разных атомов A_a, B_b, C_c . . . . Q_q может кристаллизоваться только в таких разновидностях симметрии, в которых числа a, b, c . . . q отвечают относительным количествам точек правильных систем, возможных в данной группе симметрии.

7. Кристаллохимический закон Грота

Подобно тому, как частные формы многогранников встречаются несравненно чаще, чем общие, частные правильные системы точек встречаются чаще общих правильных систем. В наиболее простом (частном) случае расположения точек относительно элементов симметрии обычно получается простейшая правильная система в виде соответственной трансляционной решетки (точки r на фиг. 272).



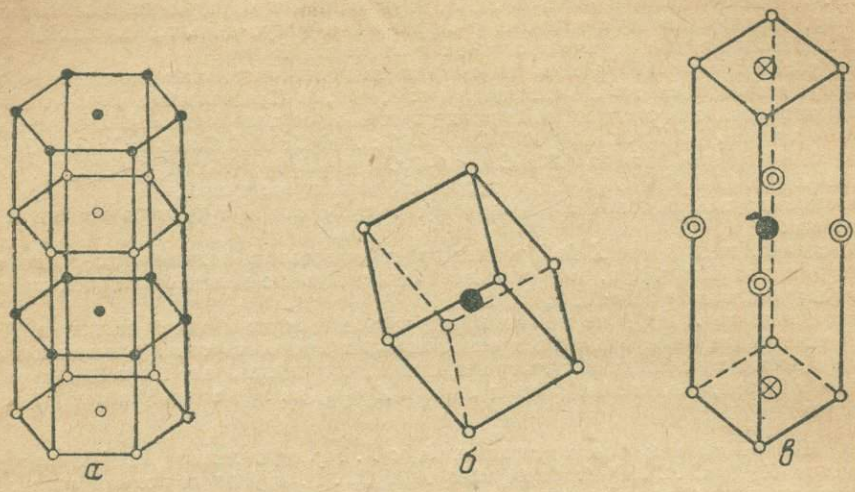
Фиг. 273.

Трансляционные решетки в качестве правильных систем, повидимому, являются наиболее типичной формой строения решеток. Однако трансляционных решеток в качестве правильных систем точек одной и той же кристаллической решетки может быть и не любое число.

Такие решетки получаются только в том случае, если их точки располагаются в совершенно определенных местах по отношению к элементам симметрии (обычно в точках их пересечений). Если эти места заняты, то никакой новой трансляционной решетки, вписанной в данную комбинацию систем точек, себе представить нельзя. Возникает вопрос о возможном максимальном числе самостоятельных трансляционных решеток, могущих входить в комбинацию той или иной разновидности симметрии.

Совершенно не входя в подробное изучение этого вопроса, ограничимся лишь рассмотрением числа простых трансляционных решеток, независимо друг от друга, которые, комбинируясь друг с другом, не изменяют общей симметрии.

Для сохранения всех элементов симметрии простой трансляционной решетки *P* полигирной (кубической) сингонии, в такую решетку можно поместить только одну такую же решетку. Вторая решетка должна быть помещена таким образом, чтобы ее точка приходилась в центре элементарной ячейки первой [пример такой комбинации двух правильных систем осуществляется природой в решетке хлористого цезия CsCl (фиг. 273)].



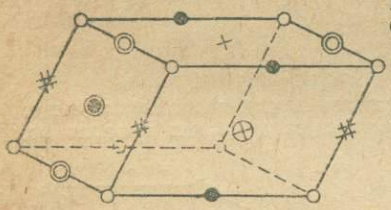
Фиг. 274.

В гексагирной и тригирной (гексагональной и тригональной) сингониях можно вставить также только две решетки одну в другую, не изменяя симметрии (фиг. 274 *а* и *б*).

В тетрагирной (тетрагональной) сингонии, не снижая симметрии решетки, можно вложить одну в другую четыре одинаковых простых решетки (фиг. 274 *в*).

В низшей же категории без влияния на симметрию могут комбинироваться друг с другом до восьми решеток (фиг. 275).

Другие виды решеток (*I*, *F*, *C*) дают несколько другие результаты. Однако и там количество решеток, которые можно вставлять друг в друга без снижения симметрии, в низшей категории превосходит остальные.



Фиг. 275. Базисная ячейка решетки дигирной, моногирной или агирной сингонии, состоящая из 8 независимых простых трансляционных решеток (8-ая решетка в центре ячейки не показана).

Отсюда можно сделать заключение, что, если решетку слагают много „разных" атомов, то вещество будет иметь решетку низшей категории. Много „разных" атомов имеют вещества сложного состава.

Указанные соображения находят свое подтверждение в эмпирически найденном кристаллохимическом законе Грота:

Чем проще химический состав вещества, тем, в большинстве случаев, выше его симметрия.

Наиболее простыми по своему составу являются, конечно, химические элементы. Оказывается, что громадное большинство элементов кристаллизуется или в полигирной (кубической), или в гексагирной (гексагональной) сингонии.

Многие из элементов представлены и полигирными (кубическими) и гексагирными (гексагональными) модификациями. Многие кроме этих модификаций имеют еще и другие, менее симметричные.

Исключения представляют галлий (Ga), кристаллизующийся в дигирной (ромбической) сингонии, висмут (Bi) — в тригирной (тригональной) и галлоиды: хлор (Cl), бром (Br) и иод (J), кристаллизующиеся в дигирной (ромбической) сингонии.

К полигирной (кубической) сингонии относятся элементы: Ar, H, Li, Na, K, Rb, Cs, Cu, Ag, Au, B, Al, In, Ge, C, Si, Ti, Zr, Sn, Pb, Th, N, P, V, Nb, Ta, P, As, Sb, Cr, Mo, W, Mn, Fe, Co, Ni, Ru, Rh, Pd, Os, Ir, Pt.

К гексагирной (гексагональной) сингонии относятся: Be, Mg, Ca, Zn, Cd, Hg, Tl, Ce, C, Ti, Zr, Hf, O, S, Se, Te, Re, Co, Ru, Pd, Os, Ir.

В тетрагирной (тетрагональной) сингонии встречены лишь полиморфные модификации элементов, уже приведенных выше: In, Tl, Sn, Mn.

В тригирной (тригональной) сингонии встречен висмут (Bi) и, в качестве полиморфных модификаций, следующие элементы из вышеприведенных: P, As, Sb.

К дигирной (ромбической) сингонии относятся Cl, Br, J, Ga и как третьи полиморфные модификации Sn и S.

В моногирной (моноклинной) сингонии встречены лишь полиморфные модификации уже приведенных выше элементов S и Se.

В агирной (триклинной) сингонии элементы не встречены.

Сингония остальных элементов, здесь не упомянутых, пока не установлена. Как видим, одни галлоиды и галлий до сего времени известны только в кристаллах низшей категории.

Следующими по сложности следует считать бинарные соединения: соединения, состоящие из двух элементов. Большинство их относится к полигирной (кубической) и гексагональной сингониям.

Многие бинарные соединения известны и в три- и тетрагирной (три- и тетрагональной) сингониях. Остальные, которых в общем немного, кристаллизуются в кристаллах низшей категории.

С усложнением химического состава, все реже и реже встречаются примеры кристаллов высокой симметрии. Так, например, квасцы — $[SO_4]_2\ AlK \cdot 12\ H_2O$, гексаметилентетрамин — $[CH_2]_6N_4$ и гранат — $[SiO_4]_3Al_2Ca_3$ относятся к кубической (полигирной) сингонии. Большинство же сложных по составу соединений кристаллизуется в кристаллах низшей категории.

8. Распределение изученных кристаллов по симметрии

Так как сложных соединений известно значительно больше, чем простых, то следствием закона Грота является утверждение, что

большинство кристаллических веществ кристаллизуется в кристаллах низшей категории.

То, что сложных соединений больше, чем простых, вполне понятно: элементов — 92, их комбинаций по два можно сложить гораздо больше девяносто двух, трехкомпонентных же соединений еще больше. Поликомпонентных соединений сложного состава можно сложить несравненно большее число, чем остальных. Однако усложнение химического состава может быть осуществлено только до известного предела. Вещества с очень сложными молекулами не образуются, распадаясь на несколько более простых. Таким наиболее сложным по составу веществам отвечают кристаллы агирной (триклинной) сингонии. В связи с этим кристаллов этой сингонии должно быть меньше, чем кристаллов других низших сингоний, отвечающих наиболее распространенным по сложности соединениям.

Таблица 19

Распределение изученных кристаллических веществ по сингониям

Сингония	Число изученных кристаллов			
	абсолютное	в %	абсолютное	в %
Полигирная (кубическая)	516	7,62	1336	19,95
Гексагирная (гексагональная)	196	2,89		
Тригирная (тригональная)	297	4,38		
Тетрагирная (тетрагональная)	327	5,06		
Дигирная (ромбическая)	1922	28,32	5431	80,05
Моногирная (моноклинная)	2844	41,93		
Агирная (триклинная)	665	9,80		
Итого	6767	100,00	6767	100,00

Указанные выводы подтверждаются чисто эмпирическими подсчетами. Приводим таблицу распределения кристаллических веществ по сингониям (табл. 19). В эту таблицу попали все вещества, изученные до 1920 г. В настоящее время всех изученных кристаллов гораздо больше, однако их относительное распределение по сингониям остается приблизительно тем же самым.

Из табл. 19 видно, что более четырех пятых кристаллических веществ приходится на кристаллы низшей категории.

Что касается распределения веществ по видам симметрии, то здесь в каждой сингонии наблюдается значительное преобладание видов с максимальной симметрией.

Кристаллические вещества каждой сингонии в большинстве своем принадлежат к наиболее симметричному виду симметрии.

Значительно реже планаксиальных встречаются аксиальные и особенно примитивные виды симметрии.

Может быть при более подробных исследованиях очень многие вещества, относимые сейчас к планаксиальному виду симметрии, окажутся обладающими более низкой симметрией. Действительно, в пространственных группах симметрии не обнаруживается заметных тенденций к преобладанию наиболее симметричных групп.

По сводке Эвальда и Германа, к 1932 г. были подробно изучены структуры 338 различных кристаллических веществ (не считая очень большого числа веществ, изоморфных сосчитанным). Из этого числа 107 изученных веществ (31%) приходятся на симморфные группы (см. стр. 155); 191 вещество (57%) приходится на асимморфные группы и 40 веществ (12%) — на гемисимморфные группы (12%).

С другой стороны, группы, наиболее многочисленные по количеству встреченных в них различных соединений, также являются асимморфными. Более десяти соединений, кристаллизующихся в одной группе симметрии, известны в шести случаях:

I_h^6 — 11 веществ,	$O_h t$ — 13 веществ,
D_h^4 — 14 веществ,	D_{3d}^5 — 15 веществ,
C_{2h}^5 — 21 вещество,	V_h^{16} — 23 вещества.

Кроме D_{3d}^5, все эти группы — группы асимморфные.

Таким образом, в кристаллическом веществе чаще осуществляется симметрия, выраженная присутствием геликогир, гиры встречаются реже геликогир.

Среди различных трансляционных решеток преобладают решетки простые (P) (вместе с ромбоэдрическими R), на втором месте стоят центрообъемные (I), затем центрогранные (F), гексагональные (P_h) и, наконец, центробазисные (C).

Таблица 20

Распределение изученных кристаллических веществ по трансляционным решеткам

Форма решетки	P (и R)	I	F	P_h	C	Всего
Количество изученных решеток данной формы	205	44	38	28	23	338
В процентах	61%	13%	11%	8%	7%	100%

Следуя идеям Е. С. Федорова и рассматривая любую трансляционную решетку как минимально-деформированную решетку P, I или F полигирной (кубической) сингонии или P_h гексагирной (гексагональной) сингонии, придем к несколько более равномерному делению. Е. С. Федоровым даются структуры решеток для 6740 веществ. По четырем структурам Е. С. Федорова эти вещества распределяются следующим образом (см. табл. 21).

Таблица 21

Распределение изученных кристаллических веществ по структурам Федорова

Структура Федорова	F (или d)	I (или o)	P (или h)	P_h (или 6)	Всего
Количество решеток данной формы	1390 низш. + 110 триг. 373 кубич. 166 тетр.	1254 + 109 50 85	1031 + 78 66 76	1952	6740
	2039	1498	1251		
	30%	22%	19%	29%	100%

В заключение настоящей главы дадим несколько практических указаний об определении симметрии и форм кристаллических решеток на моделях. * Необходимость этого вытекает из следующих соображений. Когда в результате подробного исследования находится структура того или иного вещества, с помощью модели всегда проверяется правильность всех выводов. Построенная модель должна отвечать и найденной трансляционной решетке, и найденной пространственной группе симметрии, и данному химическому составу, т. е. относительным количествам правильных систем точек, слагающих построенную комбинацию. По одному этому уже необходимо уметь ориентироваться в геометрических свойствах тех или иных моделей кристаллических структур.

Если перед нами модель неизвестной нам структуры, то прежде всего следует определить элементарный параллелепипед решетки. Обычно это не представляет никаких затруднений, так как почти всегда модель и представляет „базисную клетку" решетки, т. е. один элементарный параллелепипед, содержащий в себе точки всех правильных систем.

I. Если перед нами модель неизвестной нам структуры, то прежде всего следует искать направления трансляции. Соединяя одинаковые точки решетки прямыми линиями, смотрим, располагаются ли на них все точки нашей прямой на равных расстояниях. Принимая эти расстояния за трансляции, проверяем их при помощи других точек нашей решетки. Если при поступаниях на величины предположенных нами трансляций все другие точки также будут приходить в совмещение друг с другом — значит, трансляция по данному направлению действительно существует.

Находя трансляции, попутно следим за их относительными наклонами друг к другу, стараясь подмечать все прямые углы между ними. Найденными трансляциями определяются параллелепипеды повторяемости, среди которых выбираем параллелепипед с максимальным числом прямых углов (элементарную ячейку).

II. Следующим этапом исследования является изучение найденной ячейки. Прежде всего находят константы ячейки, т. е. углы между ребрами и их длины (α, β, γ, a, b, c).

Равенство некоторых или всех этих углов прямому или друг другу и равенство некоторых или всех длин ребер позволит определить сингонию нашей решетки (см. раздел 1 настоящей главы, стр. 207—212).

Далее определяем вид решетки. Для этого смотрим, есть ли трансляции, при помощи которых из точек, лежащих в вершинах ячейки, можно получить точки, лежащие внутри или на гранях ячейки. Такие точки, как мы знаем, могут находиться или в центрах граней ячейки или в центре самой ячейки. Убеждаемся в их присутствии и проверяем, на всякий случай, что вектор, соединяющий найденную точку с вершиной ячейки, действительно является трансляцией. Если точка, идентичная с вершиной ячейки, находится в центре ячейки — имеем центрообъемную решетку (I), если такие точки лежат в центрах всех граней — центрогранную

* Подробная разработка вопроса дана в специальной монографии автора, находящейся в печати.

решетку (F). Если идентичные точки находятся в центре только одной грани — то решетка — центробазисная (C или A). Если, наконец, никаких трансляций, которые позволили бы вывести точки, лежащие внутри ячейки, из точек ее вершин, не наблюдается, то решетка простая (P). Вместе с определением сингонии получаем, таким образом, одну из 14 трансляционных решеток. По табл. 20 проверяем возможность нашего определения.

Если окажется, что элементарную ячейку мы выбрали не наименьшего возможного объема (не отвечающую параллелепипедам Браве, изображения которых приведены в левой колонке табл. 17), то в определение вносим необходимые исправления [только в случае тригирной (тригональной) сингонии оставляем первоначально найденную ячейку с прямыми углами и не переделываем ее на ромбоэдрическую].

III. После определения трансляционной решетки переходим к определению главных осей симметрии группы.

Для этого рассматриваем направления, параллельные ребру c элементарной ячейки; эти направления являются направлениями главных осей. Очень часто оси симметрии совпадают с рядами решеток, реже — проходят между ними.

Так как сингония уже определена, то обычно определение главных гир, гироид и геликогир не представляет затруднений. Только следует помнить, что по параллельным направлениям могут проходить и гиры, и гироиды, и геликогиры одновременно. Например, если найдены геликотетрагиры и геликодигиры — записываем оси наибольшей симметрии — G_{4t}.

IV. После нахождения главных гир исследуем направления, параллельные ребру b элементарной ячейки. Эти направления суть направления добавочных осей: дигир и геликодигир. Ищем те и другие и сразу же смотрим, какое положение они занимают по отношению к найденным главным осям.

Допустим, мы нашли и дигиры (a) и геликодигиры (a_t), их совокупность записываем a^t.

Пусть дигиры (a) пересекаются с осями G_{4t}, а геликодиры (a_t) проходят между ними. Значок геликодигиры заключаем поэтому в скобки $a^{(t)}$. Получаем такую запись — $G_{4t}a^{(t)}$.

V. Переходим к определению плоскостей, нормальных к ребру b ячейки. Исследуем, есть ли среди этих плоскостей плоскости симметрии или плоскости скольжения.

Сначала ищем плоскости симметрии. Чаще всего они проходят через многие точки решетки. Значительно реже они располагаются между парами одинаковых точек, не проходя через самые точки.

Если плоскости симметрии найдены, делим расстояние между ближайшими параллельными плоскостями пополам и смотрим — не проходят ли там плоскости скольжения. Если плоскостей симметрии не найдено, плоскости скольжения разыскиваются непосредственно.

Пусть мы нашли и плоскости симметрии (p) и плоскости скольжения (p_t). Совокупность тех и других схематически помечается таким образом: p^t. Смотрим, каким образом проходят найденные плоскости по отношению к главным осям. Пусть наши плоскости симметрии располагаются между главными осями, плоскости же скольжения проходят через главные оси. Чтобы показать, что плоскости симметрии не проходят через главные оси, заключаем их в скобки. Получаем $(p)^t$, что вместе с полученной ранее записью составит такую формулу: $G_{4t}a^{(t)}(p)^t$.

VI. Согласно полученной формуле, видим, что вид симметрии нашей решетки — планаксиальный тетрагирной (тетрагональной) сингонии (G_4ap).

VII. Остается определить, комбинацию каких и скольких правильных систем точек представляет наша решетка. Так как элементы симметрии уже найдены, то найти все не идентичные точки ячейки не представляет затруднений. Несколько сложнее рассчитать относительные количества точек правильных систем, слагающих данную комбинацию. Но и здесь при достаточном внимании, нельзя впасть в ошибку.

ОТДЕЛ VI

ЗАКОНЫ АЮИ И ВЕЙССА И УЧЕНИЕ О СИМВОЛАХ

Глава XIV

СИМВОЛЫ ПЛОСКИХ СЕТОК

1. Закон рациональности параметров плоских сеток кристалла. Главнейшие определения

В учении о симметрии мы довольно подробно познакомились с теми закономерностями, которыми обусловлено расположение одинаковых сеток решетки. Например, четыре плоские сетки, соответствующие граням тетрагональной призмы, связаны друг с другом параллельной им всем тетрагирой G_4.

Изучим теперь геометрические законы, связывающие расположение *неодинаковых* плоских сеток; например — закон, связывающий расположение сеток, параллельных граням тетрагональной призмы, с расположением сеток, параллельных граням тетрагональной пирамиды. (В частном случае, для граней кристалла, поставленная задача является задачей нахождения связи между расположением граней различных простых форм.)

Примем три непараллельных ряда OX, OY и OZ пространственной решетки за координатные оси (фиг. 276). Обозначим примитивные промежутки между соседними узлами ряда OX через a_0, промежутки ряда OY — через b_0 и ряда OZ — через c_0. Три плоские сетки, проходящие через каждую пару координатных осей, будут являться тремя координатными плоскостями. На фиг. 276, чтобы не запутывать чертежа, изображены узлы только этих трех плоских сеток.

Вспомним, что плоской сеткой является любая плоскость, проходящая через три, не лежащих на одной прямой узла решетки. Поэтому плоскость ABC, проходящая через некоторые узлы A, B и C, является плоской сеткой нашей решетки. Рассмотрим отрезки OA, OB и OC, отсекаемые на координатных осях плоской сеткой ABC.

Отрезки, которые отсекает на координатных осях данная плоская сетка (или грань) кристалла, называются параметрами этой сетки (или грани).

Пусть параметр OA заключает a примитивных промежутков a_0, параметр OB — b промежутков b_0, параметр OC — c промежутков c_0:

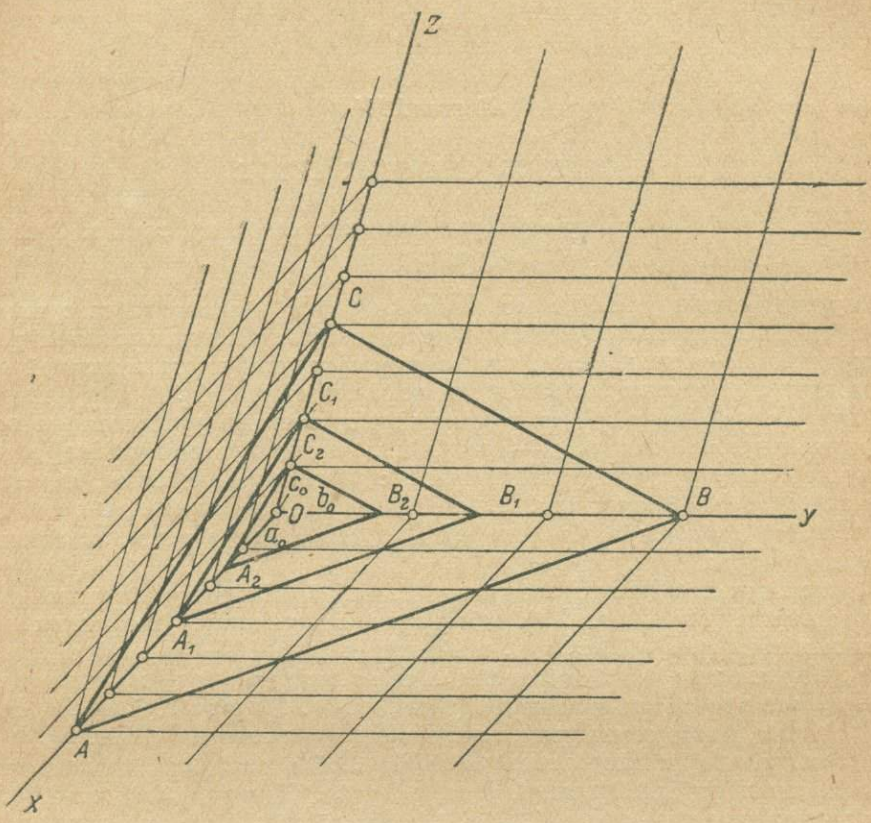
$$OA = a \cdot a_0;\ OB = b \cdot b_0;\ OC = c \cdot c_0.$$

В рассмотренном нами примере три узла A, B и C данной плоской сетки лежат на трех координатных осях. Поэтому числа a, b и c, очевидно, должны быть целыми (в нашем примере: $a = 6$; $b = 3$; $c = 4$).

Мы знаем, что через любой узел пространственной решетки проходит плоская сетка, параллельная данной (сетка той же серии). Рассмотрим сетку, параллельную ABC и проходящую через узел A_1 (сетку $A_1B_1C_1$). Из чертежа видно, что параметр OB_1 этой плоской сетки уже не заключает в себе целое число примитивных промежутков b_0, но равен $3/2\ b_0$.

Для плоской сетки $A_2B_2C_2$ параметры соответственно равны $OA_2 = 3/2\ a_0$; $OB_2 = 3/4\ b_0$; $OC_2 = 1\ c_0$. Если за единицу для измерения параметров по каждой оси принять соответственные примитивные промежутки a_0, b_0 и c_0, то параметры сетки $A_2B_2C_2$ выразятся числами 3/2, 3/4 и 1.

Можно строго доказать, что любая плоская сетка обладает параметрами, заключающими в себе или целое, или дробное, но во всяком случае рациональное число примитивных промежутков. Иррациональные числа невозможны. Таким образом,



Фиг. 276.

если параметры любой плоской сетки измерять примитивными промежутками соответственных координатных рядов, то они всегда будут выражаться рациональными числами. Величины:

$$h_1 = \frac{OA}{a_0},\ h_2 = \frac{OB}{b_0},\ h_3 = \frac{OC}{c_0},$$

отвечают рациональным числам (целым или дробям).

Сформулированный здесь закон рациональности параметров плоских сеток кристаллов является чрезвычайно важным, так как дает возможность при помощи рациональных чисел характеризовать положение плоских сеток. Три параметра: a, b и c данной плоской сетки (при условии, если эти параметры измерялись примитивными промежутками координатных рядов) вполне определяют положение этой плоской сетки в кристалле. Так, параметры 3/2, 3/4 и 1 вполне определяют положение плоской сетки $A_2B_2C_2$.

Положение плоской сетки ABC вполне характеризуется параметрами 6, 3 и 4.

Положению плоской сетки $A_1B_1C_1$ отвечают числа: 3, $\frac{3}{2}$, 2.

Числа или знаки, характеризующие положение плоских сеток (и граней) кристалла, носят название кристаллографических индексов.

Казалось бы, что указанные числа (3/2, 3/4 и 1 для сетки $A_2B_2C_2$; 6, 3 и 4 для сетки ABC; 3, 3/2, 2 для сетки $A_1B_1C_1$) проще всего и принимать за индексы этих сеток. Однако практика решения различных кристаллографических задач показала, что удобнее за индексы принимать не указанные числа, но числа им обратные $\left(\text{не величины } a,\ b \text{ и } c, \text{ но величины } \frac{1}{a},\ \frac{1}{b} \text{ и } \frac{1}{c}\right)$.

Числа p_1, p_2 и p_3, обратные параметрам, измеренным примитивными промежутками соответственных координатных рядов, называются индексами данной плоской сетки.

$$p_1 = \frac{1}{h} = \frac{1}{\left(\frac{OA}{a_0}\right)};\quad p_2 = \frac{1}{k} = \frac{1}{\left(\frac{OB}{b_0}\right)};\quad p_3 = \frac{1}{l} = \frac{1}{\left(\frac{OC}{c_0}\right)}.$$

Так, индексы плоской сетки ABC будут:

$$p_1 = \frac{1}{\left(\frac{OA}{a_0}\right)} = \frac{1}{6};\quad p_2 = \frac{1}{\left(\frac{OB}{b_0}\right)} = \frac{1}{3};\quad p_3 = \frac{1}{\left(\frac{OC}{c_0}\right)} = \frac{1}{4}.$$

Индексы плоской сетки $A_2B_2C_2$:

$$p_1 = \frac{1}{\frac{OA_2}{a_0}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3};\quad p_2 = \frac{1}{\frac{OB_2}{b_0}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3};$$

$$p_3 = \frac{1}{\frac{OC_2}{c_0}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1}\right)} = 1.$$

Совокупность индексов p_1, p_2 и p_3 данной плоской сетки называется символом этой сетки и записывается в круглых скобках $(p_1 p_2 p_3)$.

Символ плоской сетки ABC будет $\left(\frac{1}{6}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\right)$, символ плоской сетки $A_2B_2C_2$ — $\left(\frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\ 1\right)$.

Таким образом, совокупность трех рациональных чисел $(p_1\ p_2\ p_3)$, обратных параметрам плоской сетки, называется символом данной плоской сетки. При этом параметры должны измеряться примитивными промежутками соответственных координатных рядов.

Ряды, принятые в этом случае за координатные оси, называются кристаллографическими осями.

На первом месте в символе пишется индекс, отвечающий первой кристаллографической оси, которая направлена обычно к наблюдателю. На втором месте ставится индекс, отвечающий второй кристаллографической оси, направляемой обычно вправо. На третьем месте пишется индекс, отвечающий третьей кристаллографической оси, направляемой обычно вверх.

На фиг. 276 первая ось отвечает ряду OX, вторая — OY, третья — OZ.

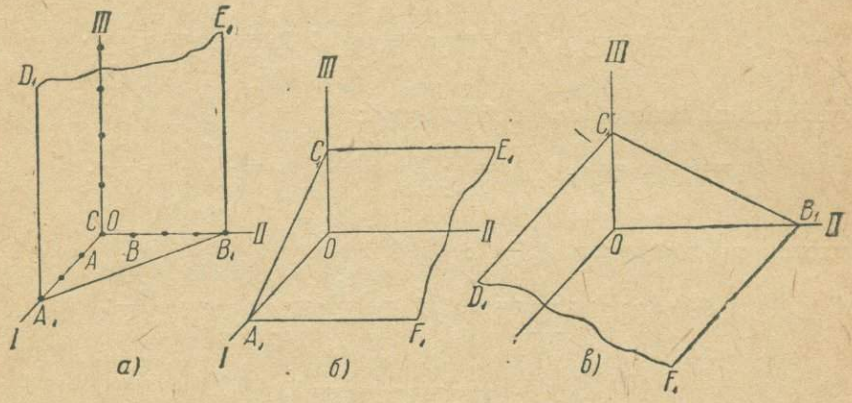
При этом оси принято проводить вдоль ребер элементарных ячеек решетки. Так как элементарные ячейки обычно имеют среди всех параллелепипедов повторяемости максимальное число прямых углов между своими ребрами, то тем самым и кристаллографические оси, в большинстве случаев, имеют по возможности максимальное число прямых углов между собою. Эти углы обозначаются буквами α, β, γ, причем углом α считается угол между осями второй и третьей, углом β — угол между осями первой и третьей, уголом γ — между первой и второй осями.

В соответствии с различной формой элементарных ячеек в различных сингониях получаются различные углы между кристаллографическими осями. Подробнее о расположении осей в решетках различных сингоний будет сказано ниже.

Остановимся на рассмотрении символов различных плоских сеток.

В общем случае, когда данная плоская сетка пересекает все три кристаллографические оси, ее символ (pqr) выражается тремя индексами p_1, p_2 и p_3, представляющими различные рациональные числа.

Рассмотрим частные случаи. Пусть данная плоская сетка параллельна одной из кристаллографических осей. На фиг. 277*а* изображена сетка $A_1B_1E_1D_1$, параллельная третьей кристаллографической оси. Величина параметра этой сетки по оси *III* будет равна бесконечности (∞). Параметры же по осям *I* и *II* равны соответственно OA_1 и OB_1. Примитивные промежутки рядов *I* и *II* — $OA = a_0$ и $OB = b_0$.



Фиг. 277.

Отсюда индексы рассматриваемой сетки:

$$p_1 = \frac{1}{\left(\frac{OA_1}{OA}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{3}{1}\right)} = \frac{1}{3};\quad p_2 = \frac{1}{\left(\frac{OB_1}{OB}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{4}{1}\right)} = \frac{1}{4};$$

$$p_3 = \frac{1}{\left(\frac{\infty}{OC}\right)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отсюда символ: $\left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ 0\right)$.

Плоские сетки, параллельные третьей кристаллографической оси, имеют символы с нулем на третьем месте: (p_1p_20).

Аналогично этому у плоских сеток, параллельных второй оси (например, $A_1C_1E_1F_1$, фиг. 277*б*), индекс p_2, отвечающий второй оси, равен нулю.

Плоские сетки, параллельные второй кристаллографической оси, имеют символы с нулем на втором месте: (p_10p_3).

На фиг. 277*в* изображена плоская сетка $A_1C_1D_1F_1$, параллельная первой кристаллографической оси. Легко видеть, что *плоские сетки, параллельные первой кристаллографической оси, имеют символы с нулем на первом месте:* $(0p_2p_3)$.

Рассмотрим теперь плоские сетки, параллельные одновременно двум осям.

На фиг. 278*а* изображена сетка $D_1A_1F_1$, параллельная как третьей, так и второй оси.

Два параметра такой сетки равны нулям: $p_2 = 0$; $p_3 = 0$.

Плоские сетки, параллельные второй и третьей кристаллографической оси, имеют символы с нулями на втором и третьем месте: (p_100).

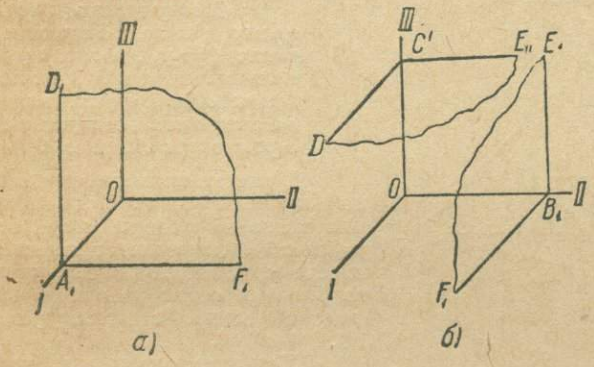
Пользуясь фиг. 278*б* и рассматривая плоские сетки $E_1B_1F_1$ и $F_{11}CD$, приходим к аналогичным выводам:

Плоские сетки, параллельные первой и третьей оси, имеют символы $(0p_20)$; *плоские сетки, параллельные первой и второй оси, имеют символы* $(00p_3)$.

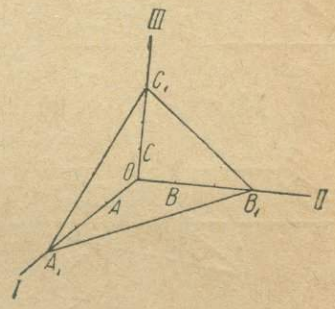
Рассмотрим наконец еще один частный случай. На фиг. 279 изображена плоская сетка $A_1B_1C_1$, параметры которой заключают одинаковое количество примитивных промежутков по каждой из осей. Индексы этой сетки:

$$p_1 = \frac{1}{\left(\frac{OA_1}{OA}\right)} = \frac{1}{3};\quad p_2 = \frac{1}{\left(\frac{OB_1}{OB}\right)} = \frac{1}{3};\quad p_3 = \frac{1}{\left(\frac{OC_1}{OC}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Символ: $\left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\right)$.



Фиг. 278.



Фиг. 279.

Плоские сетки, параметры которых заключают одинаковое (целое или дробное) число примитивных промежутков по каждой оси, имеют символы с одинаковыми индексами: $(p_1p_1p_1)$.

2. Сериальные символы и символы плоских сеток, ближайших к началу координат

Для плоских сеток одной серии (т. е. параллельных друг другу) из подобия: $\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2 \sim OA_3B_3 \sim \ldots$, а также из подобия $\triangle OBC \sim \triangle OB_1C_1 \sim \triangle OB_2C_2 \sim \triangle OB_3C_3 \sim \ldots$ следует пропорциональность сторон этих треугольников:

$$OA : OB : OC = OA_1 : OB_1 : OC_1 = OA_2 : OB_2 : OC_2 = OA_3 : OB_3 : OC_3 \ldots$$

Отсюда следует, что если взять постоянные отношения $a_0 : b_0 : c_0$ и делить их соответственно на OA, OB и OC, то получим:

$$\frac{a_0}{OA} : \frac{b_0}{OB} : \frac{c_0}{OC} = \frac{a_0}{OA_1} : \frac{b_0}{OB_1} : \frac{c_0}{OC_1} = \frac{a_0}{OA_2} : \frac{b_0}{OB_2} : \frac{c_0}{OC_2} = \frac{a_0}{OA_3} : \frac{b_0}{OB_3} : \frac{c_0}{OC_3} \ldots.$$

Можно полученный результат переписать так:

$$\frac{1}{\left(\frac{OA}{a_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OB}{b_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OC}{c_0}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{OA_1}{a_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OB_1}{b_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OC_1}{c_0}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{OA_2}{a_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OB_2}{b_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OC_2}{c_0}\right)} = \ldots.$$

Имея в виду определение индексов, получим:

$$p_1 : p_2 : p_3 = p_1' : p_2' : p_3'.$$

Отношение плоских сеток одной и той же серии постоянно.

Например, в нашем примере плоских сеток, изображенных на фиг. 276:

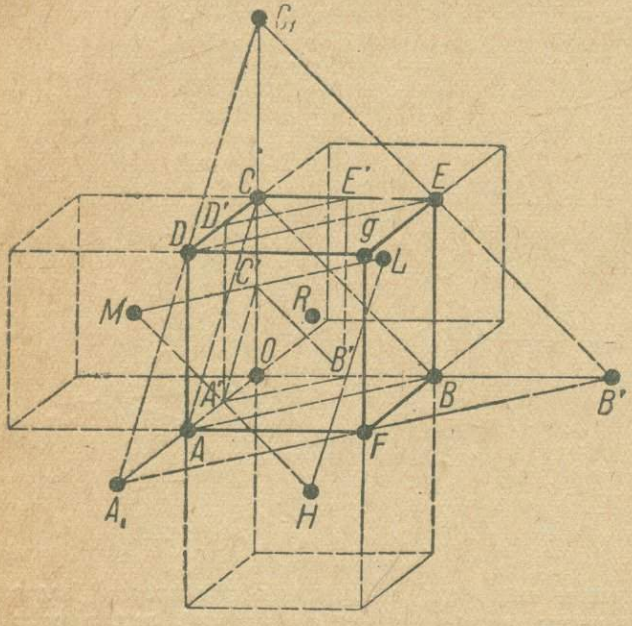
$$\frac{1}{6} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 1 = 2 : 4 : 3.$$

Нетрудно сообразить, что, каковы бы ни были индексы символа плоской сетки, их отношение, как отношение рациональных чисел, всегда может быть представлено отношением чисел *целых* и *взаимно-простых*.

Действительно, если индексы p_1, p_2, p_3 числа целые и не взаимно-простые, то, значит, они имеют общего множителя, на который, при взятии отношений, их можно сократить. Придем к трем целым и взаимно-простым числам. Если данные индексы p_1, p_2 и p_3 — числа дробные, то их отношение можно привести к общему знаменателю и сократить на этот знаменатель. Опять получим целые числа.

Таким образом:

Отношение индексов плоских сеток одной и той же серии постоянно и может быть представлено как отношение целых и взаимно-простых чисел. Эти три числа называются индексами серии.



Фиг. 280.

В нашем примере для всех параллельных плоских сеток ABC, $A_1B_1C_1$ и т. д. на фиг. 276 индексами серии являются числа 2, 4 и 3.

Совокупность трех целых и взаимно-простых чисел ($p_1p_2p_3$), пропорциональных индексам плоских сеток одной серии, называется символом серии или сериальным символом.

В нашем примере сериальный символ плоских сеток (243). Как видно из этого примера, сериальный символ может являться вместе с тем и символом одной из плоских сеток данной серии (плоской сетки с параметрами 1/2, 1/4 и 1/3).

Нетрудно сообразить, что, чем больше индексы символа сетки данной серии, тем ближе эта сетка расположена к началу координат. Действительно, индексы обратны параметрам: чем меньше параметры, тем больше индексы. Сетка же с малыми параметрами ближе к началу координат, чем сетка с большими параметрами. Поэтому и сетки с индексами, выражаемыми правильными дробями, лежат дальше от начала координат, чем сетки с индексами, представленными целыми числами. Сериальные же индексы всегда выражаются целыми числами.

Теорией структуры кристаллов доказывается следующая теорема:

Всегда существует плоская сетка, символ которой тождественен с сериальным символом (т. е. выражается тремя целыми и взаимно-простыми числами); она является среди всех плоских сеток данной серии или ближайшей к началу координат, или второй от начала.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Будем считать, что кристаллографические оси, как это принято, проведены вдоль ребер элементарной ячейки решетки. Если эти направления являются сопряженными рядами решетки, то никаких узлов ни внутри, ни на границах элементарных ячеек быть не может, кроме узлов в вершинах ячеек. Решетка называется простой (Г) (или гексаэдрической по Е. С. Федорову) (см. стр. 218).

В этом случае всегда любая плоская сетка (pqr), символ которой тождественен с сериальным символом, среди сеток данной серии является ближайшей к началу координат.

Если ребра элементарной ячейки, а следовательно, и кристаллографические оси не являются сопряженными рядами решетки, то, кроме узлов, лежащих в вершинах ячеек, внутри или на их границах, располагаются еще узлы. Через эти добавочные узлы также можно проводить плоские сетки различных серий.

В некоторых случаях эти добавочные плоские сетки могут проходить ближе к началу координат, чем плоская сетка, имеющая символ, тождественный с сериальным символом.

Рассмотрим сначала случай центрообъемной решетки Γ^v (октаэдрической — по Е. С. Федорову). Как мы знаем (см. стр. 218), в центрах элементарных ячеек такой решетки сидят добавочные узлы (фиг. 280). Промежутки рядов $a_0 = OA$; $b_0 = OB$; $c_0 = OC$.

Возьмем для примера плоскую сетку $A_1B_1C_1$ (фиг. 280). Индексы символа этой сетки:

$$p_1' = \frac{1}{\left(\frac{OA_1}{a_0}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{2}{1}\right)} = \frac{1}{2}; \quad p_2' = \frac{1}{\left(\frac{OB_1}{b_0}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{2}{1}\right)} = \frac{1}{2}; \quad p_3' = \frac{1}{\left(\frac{OC_1}{c_0}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{2}{1}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, символ этой сетки $\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)$.

Индексы более близкой к началу координат параллельной сетки ABC будут:

$$p_1 = \frac{1}{\left(\frac{OA}{a_0}\right)} = \frac{1}{1} = 1; \quad p_2 = \frac{1}{\left(\frac{OB}{b_0}\right)} = \frac{1}{1} = 1; \quad p_3 = \frac{1}{\left(\frac{OC}{c_0}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Отсюда символ этой сетки (111). Этот символ очевидно равен сериальному символу, так как состоит из целых простых чисел. Если бы никаких добавочных узлов в решетке не присутствовало, то сетка ABC была бы ближайшей к началу координат среди сеток рассматриваемой серии. В нашем же случае через добавочные узлы проходят еще плоские сетки этой же серии. Можно доказать, что добавочные плоские сетки этой серии располагаются как раз между сетками, проходящими через узлы координатных осей. При помощи чертежа (лучше по моделям решеток) можно видеть, что через добавочные узлы LMH трех соседних ячеек проходит плоская сетка, параллельная ABC и $A_1B_1C_1$, т. е. плоская сетка той же серии. Эта плоская сетка пересекает оси координат в точках A', B', C', как видно из чертежа, на расстояниях вдвое меньших, чем плоская сетка ABC. Индексы плоской сетки $A'B'C'$ будут

$$p_1 = \frac{1}{\frac{OA'}{a_0}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2; \quad p_2 = \frac{1}{\left(\frac{OB'}{b_0}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2; \quad p_3 = \frac{1}{\left(\frac{OC'}{c_0}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2.$$

Следовательно, ее символ будет (222).

Как видим, плоская сетка (111) с сериальным символом в рассматриваемом случае является не ближайшей, но второй от начала.

Рассмотрим теперь другую плоскую сетку, проходящую через узлы A_1 и B_1 и параллельную оси C.

Ее индексы:

$$p_1 = \frac{1}{\left(\frac{OA_1}{a_0}\right)} = \frac{1}{2}; \quad p_2 = \frac{1}{\left(\frac{OB_1}{b_0}\right)} = \frac{1}{2}; \quad p_3 = \frac{1}{\left(\frac{OC_1}{c_0}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\infty}{c_0}\right)} = 0.$$

Отсюда символ: $\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0\right)$.

Символ сетки $ABED$ той же серии — (110). Он совпадает с сериальным символом. Если бы никаких добавочных узлов не существовало, сетка $ABED$ была бы ближайшей к началу координат. Однако, как видим из чертежа, через добавочные узлы никаких новых плоских сеток рассматриваемой серии (110) провести нельзя. Все добавочные узлы оказываются лежащими в уже проведенных сетках (например, узел R внутри ячейки $OAFBCDGE$ лежит в плоскости $ABED$). Таким образом никаких плоских сеток ближе к началу координат, чем плоская сетка $ABED$, несмотря на присутствие добавочных узлов, провести нельзя. Отсюда видно, что для серии (110) плоская сетка с сериальным символом является ближайшей к началу координат.

Теорией центрообъемных решеток доказывается, что, если сумма индексов в сериальном символе четная [в символе (110) имеем $1+1+0=2$], то плоская сетка с сериальным символом является ближайшей к началу координат. Если же сумма индексов нечетная [в символе (111) имеем $1+1+1=3$], то плоская сетка с сериальным символом является второй от начала.

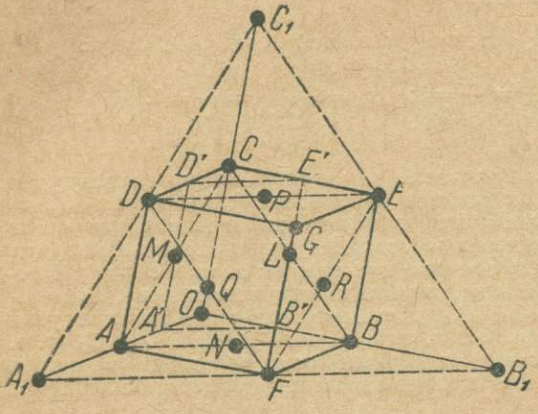
Иначе это же можно выразить и так:

Для центрообъемной решетки Γ'' плоская сетка $(p_1p_2p_3)$ с сериальным символом является ближайшей к началу координат, если два ее индекса нечетные (сумма $p_1+p_2+p_3$ — четная) и является второй от начала, если один или три ее индекса нечетные (сумма $p_1+p_2+p_3$ — нечетная).

Рассмотрим теперь случай центрогранной решетки Γ''' (додекаэдрической, по Е. С. Федорову). Как мы знаем (см. стр. 218), на серединах граней элементарных ячеек такой решетки расположены добавочные узлы (фиг. 281). Промежутки рядов попрежнему: $a_0 = OA$; $b_0 = OB$; $c_0 = OC$.

Рассмотрим те же плоские сетки, как и в предыдущем случае. Сетка $A_1B_1C_1$ имеет символ $\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)$ и принадлежит, как и сетка ABC, серии с символом (111). Сетка

ABC имеет сериальный символ (111). Как видно из чертежа (лучше разобраться на модели), все плоские сетки этой серии (111) пройдут через добавочные узлы ячеек). Так, узлы L, M, N, лежащие в центрах граней $OBEC$, $OADC$ и $OAFB$, лежат в плоской сетке ABC. Узлы P, Q и R, лежащие в центрах граней $CDGE$, $DAFG$ и $FBEG$, лежат в плоской сетке $A_1B_1C_1$. Таким образом через добавочные узлы никаких добавочных плоских сеток рассматриваемой серии провести нельзя.



Фиг. 281.

Если же взять плоскую сетку $ABED$, имеющую символ (110) (сериальный символ), то через добавочные узлы L и M можно провести добавочную плоскую сетку $A'B'E'D'$ вдвое ближе к началу координат.

Можно доказать, что:

Для центрогранной решетки Γ''' плоская сетка $(p_1p_2p_3)$ с сериальным символом является ближайшей к началу координат, если все ее индексы нечетные, и является второй от начала, если в символе индексы смешанные (иначе — один или два нечетных индекса).

В наших частных примерах для сетки (111) имеем нечетные индексы — сетка, ближайшая к началу. Сетка (110) имеет два нечетных индекса и является второй от начала.

Для центробазисной решетки Γ' добавочные узлы располагаются на одной паре параллельных граней ячейки. Будем считать, что эта пара граней является верхней и нижней гранями ячейки (фиг. 282).

В этом случае плоская сетка ABC с символом (111) среди сеток этой серии является ближайшей к началу, несмотря на присутствие добавочных узлов M и L. Также и плоская сетка $ABED$ с символом (110) является ближайшей из своей серии. Но возьмем плоскую сетку $AFGD$. Ее индексы таковы:

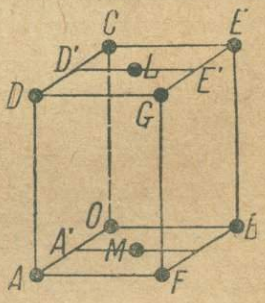
$$p_1 = \frac{1}{\left(\frac{OA}{a_0}\right)}; \quad p_2 = \frac{1}{\left(\frac{\infty}{b_0}\right)} = \frac{1}{\infty} = 0; \quad p_3 = \frac{1}{\left(\frac{\infty}{c_0}\right)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Символ как этой сетки, так и сериальной — (100).

Через добавочные узлы L и M проводим сетку той же серии $A'B'E'D'$. Эта сетка будет иметь символ (200) и проходит вдвое ближе к началу, чем сетка $AFGD$.

Доказано, что:

Для центробазисной решетки Γ', центрированной по верхнему и нижнему основаниям, плоская сетка $(p_1p_2p_3)$ с сериальным символом является ближайшей к началу координат, если сумма двух первых индексов — четная $(p_1+p_2$ — четное) и является второй от начала, если эта сумма нечетная.



Фиг. 282.

В наших частных примерах для сетки ABC, так же, как и для сетки $ABED$, мы имели четную сумму $p_1+p_2=1+1=2$. Сетки были ближайшими. Для сетки $AFGD$ сумма $p_1+p_2=1+0=1$ — нечетная. Сетка — вторая от начала.

Замечание. Если добавочные узлы располагаются на передней и задней гранях ячейки, то, вместо суммы двух первых индексов (p_1+p_2), нужно рассматривать сумму второго и третьего индексов (p_1+p_3). Если же центрированы боковые грани ячейки (правая и левая), то нужно рассматривать сумму первого и третьего индексов (p_1+p_3).

Во всех тех случаях, когда плоская сетка $(p_1p_2p_3)$ с сериальным символом является второй от начала координат, — плоская сетка, ближайшая к началу, имеет индексы вдвое большие соответственных сериальных индексов.

Действительно, пусть плоская сетка (pqr) с сериальным символом является второй от начала и имеет параметры a, b и c; по определению индексов имеем:

$$p_1 = \frac{1}{\left(\frac{a}{a_0}\right)} = \frac{a_0}{a}; \quad p_2 = \frac{b_0}{b}; \quad p_3 = \frac{c_0}{c}$$

Ближайшая к началу плоская сетка должна проходить на расстоянии вдвое меньшем к началу, чем предыдущая ($p_1p_2p_3$). Ее параметры поэтому должны быть в два раза меньше параметров a, b и c и равны соответственно $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ и $\frac{c}{2}$.

Отсюда индексы ближайшей сетки:

$$p_1' = \frac{a_0}{\left(\frac{a}{2}\right)} = 2\frac{a_0}{a}; \quad p_2' = \frac{b_0}{\left(\frac{b}{2}\right)} = 2\frac{b_0}{b}; \quad p_3' = \frac{c_0}{\left(\frac{c}{2}\right)} = 2\frac{c_0}{c},$$

или

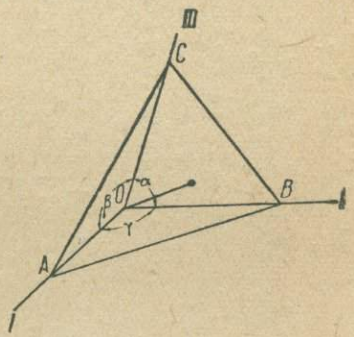
$$p_1' = 2p_1; \quad p_2' = 2p_2; \quad p_3' = 2p_3,$$

что и требовалось доказать.

Примеры таких индексов мы имели в предыдущем: на фиг. 280 сетка $A'B'C'$ имеет символ (222); сетка $A'B'E'D'$ имеет символ (220).

3. Зависимость межплоскостных расстояний от символов плоских сеток и от сериальных символов

Пусть три кристаллографические оси *I*, *II* и *III* (фиг. 283) проведены параллельно трем ребрам элементарной ячейки решетки. Обозначим углы между этими ребрами, а следовательно и между кристаллографическими осями через α, β и γ (угол α — угол между осями *II* и *III*; β — между *I* и *III*; γ — между *I* и *II*). Длины ребер ячейки обозначим через a_0, b_0 и c_0; эти величины определяют примитивные промежутки вдоль осей. Возьмем некоторую плоскую сетку *ABC*, ближайшую к началу координат, среди серии, к которой эта плоская сетка принадлежит. Очевидно, что через узел *O*, лежащий в начале координат, можно провести плоскую сетку той же серии. Считая от этой сетки, сетка *ABC* будет ближайшая среди сеток рассматриваемой серии. Расстояние между этими соседними сетками, межплоскостное расстояние d будет, очевидно, равно длине перпендикуляра, опущенного из точки *O* на плоскость *ABC*.



Фиг. 283.

Чисто геометрические зависимости между высотой, площадью основания и объемом тетраэдра *OABC* позволяют выразить расстояние d через длины ребер $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ и углы α, β и γ между ними. Не останавливаясь на простых, но утомительных тригонометрических преобразованиях, приведем непосредственно окончательный результат (см. форм. (1), стр. 242).

Длины ребер a, b и c равны параметрам нашей плоской сетки *ABC*. Если символ этой плоской сетки — (pqr), а примитивные промежутки координатных осей — a_0, b_0 и c_0, то параметры можно выразить через индексы символа и величины a_0, b_0 и c_0. Из определения индексов имеем:

$$p_1 = \frac{1}{\left(\frac{a}{a_0}\right)} = \frac{a_0}{a}; \quad p_2 = \frac{b_0}{b}; \quad p_3 = \frac{c_0}{c}.$$

Отсюда

$$a = \frac{a_0}{p_1}; \quad b = \frac{b_0}{p_2}; \quad c = \frac{c_0}{p_3}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (1), получим форм. (2) (стр. 242).

Эта формула позволяет находить межплоскостные расстояния любой серии плоских сеток, если известны элементарная ячейка и символы плоской сетки, ближайшей к началу координат. Из предыдущего раздела известно, что индексы такой плоской сетки или совпадают с сериальными индексами, или же вдвое больше последних.

По данным сериальным индексам и по форме решетки вполне определяются индексы ближайшей плоской сетки. Так например, в центрообъемной решетке для серии плоских сеток ($p_1p_2p_3$), где ($p_1 + p_2 + p_3$) — число нечетное, индексы ближайшей сетки будут $2p_1$, $2p_2$ и $2p_3$. Подставляя эти величины вместо p_1, p_2 и p_3 в формулу (2), получим формулу, выражающую межплоскостное расстояние в зависимости от индексов серии, а не от индексов ближайшей сетки (см. форм. (3), стр. 242).

Формула (3) служит для нахождения межплоскостных расстояний по сериальным индексам, когда плоская сетка с сериальным символом не является ближайшей к началу. Если же плоская сетка с сериальным символом является ближайшей к началу, то вычисление межплоскостного расстояния производится по формуле (2), где p_1, p_2 и p_3 являются сериальными индексами, так же, как и в формуле (3).

$$d^2 = \frac{a^2b^2c^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)}{a^2b^2\sin^2\gamma+a^2c^2\sin^2\beta+b^2c^2\sin^2\alpha+2a^2bc(\cos\beta\cdot\cos\alpha-\cos\gamma)+2ab^2c(\cos\alpha\cdot\cos\gamma-\cos\beta)+2abc^2(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\gamma)}. \quad (1)$$

$$d^2 = \frac{a_0^2b_0^2c_0^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)}{p_1^2b_0^2c_0^2\sin^2\alpha+p_2^2a_0^2c_0^2\sin^2\beta+p_3^2a_0^2b_0^2\sin^2\gamma+2p_1p_2a_0b_0c_0^2(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\gamma)+2p_1p_3a_0b_0^2c_0(\cos\alpha\cdot\cos\gamma-\cos\beta)+2p_2p_3a_0^2b_0c_0(\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos\alpha)}. \quad (2)$$

$$d^2 = \frac{a_0^2b_0^2c_0^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)}{p_1^2b_0^2c_0^2\sin^2\alpha+p_2^2a_0^2c_0^2\sin^2\beta+p_3^2a_0^2b_0^2\sin^2\gamma+2p_1p_2a_0b_0c_0^2(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\gamma)+2p_1p_3a_0b_0^2c_0(\cos\alpha\cdot\cos\gamma-\cos\beta)+2p_2p_3a_0^2b_0c_0(\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos\alpha)}. \quad (3)$$

$$d^2 = {}^1/_4\frac{a_0^2b_0^2c_0^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)}{p_1^2b_0^2c_0^2\sin^2\alpha+p_2^2a_0^2c_0^2\sin^2\beta+p_3^2a_0^2b_0^2\sin^2\gamma+2p_1p_2a_0b_0c_0^2(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\gamma)+2p_1p_3a_0b_0^2c_0(\cos\alpha\cdot\cos\gamma-\cos\beta)+2p_2p_3a_0^2b_0c_0(\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos\alpha)}. \quad (4)$$

$$\frac{1}{d^2} = \frac{p_1^2b_0^2c_0^2\sin^2\alpha+p_2^2a_0^2c_0^2\sin^2\beta+p_3^2a_0^2b_0^2\sin^2\gamma+2p_1p_2a_0b_0c_0^2(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\gamma)+2p_1p_3a_0b_0^2c_0(\cos\alpha\cdot\cos\gamma-\cos\beta)+2p_2p_3a_0^2b_0c_0(\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos\alpha)}{a_0^2b_0^2c_0^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)}$$

$$\frac{1}{d^2} = 4\frac{p_1^2b_0^2c_0^2\sin^2\alpha+p_2^2a_0^2c_0^2\sin^2\beta+p_3^2a_0^2b_0^2\sin^2\gamma+2p_1p_2a_0b_0c_0^2(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\gamma)+2p_1p_3a_0b_0^2c_0(\cos\alpha\cdot\cos\gamma-\cos\beta)+2p_2p_3a_0^2b_0c_0(\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos\alpha)}{a_0^2b_0^2c_0^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)}. \quad (5)$$

При различных расчетах структур чаще приходится пользоваться не величиной межплоскостного расстояния d, но величиной ей обратной — $\frac{1}{d}$. Поэтому преобразуем формулы (2) и (3) для этого случая:

1) Если плоская сетка с сериальным символом является ближайшей к началу координат, то величина, обратная межплоскостному расстоянию d, в зависимости от формы элементарной ячейки и индексов серии выражается формулой (4), где p_1, p_2, p_3 — индексы серии, a_0, b_0 и c_0 — величины ребер элементарной ячейки, α, β, γ — углы между этими ребрами.

Если плоская сетка с сериальным символом является второй от начала координат, то величина, обратная межплоскостному расстоянию, в зависимости от формы элементарной ячейки и индексов серии, выражается формулой (5), где p_1, p_2, p_3 — индексы серии, a_0, b_0, c_0 — величины ребер элементарной ячейки и α, β, γ — углы между этими ребрами.

В случае симметричных ячеек решеток, у которых некоторые из ребер a_0, b_0 и c_0 (или все) равны между собою и некоторые (или все) углы α, β, γ являются прямыми, формулы (4) и (5) сильно упрощаются.

Рассмотрим получающиеся при этом выражения для всех 14 решеток Браве.

Агирная (триклинная) сингония

Элементарная ячейка имеет $a_0 \neq b_0 \neq c_0$; $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90°$. Формулы не упрощаются. Так как решетку этой сингонии всегда можно рассматривать как простую Г (14-я решетка Браве), то для вычисления всегда служит формула (4).

Моногирная (моноклинная) сингония

$$a_0 \neq b_0 \neq c_0; \qquad \alpha = \gamma = 90° \neq \beta$$

12-я решетка Браве — простая Г (табл. 17).

$$\frac{1}{d^2} = \frac{p_1^2}{a_0^2\sin^2\beta} + \frac{p_2^2}{b_0^2} + \frac{p_3^2}{c_0^2\sin^2\beta} - \frac{2p_1p_3\cos\beta}{a_0c_0\sin^2\beta}. \quad (6)$$

13-я решетка Браве — центробазисная Г′ (центрированная по верхнему и нижнему основанию).

A) (p_1+p_2) — число четное. Формула (6).

B) (p_1+p_2) — число нечетное.

$$\frac{1}{d^2} = 4\frac{p_1^2}{a^2\sin^2\beta} + \frac{p_2^2}{b_0^2} + \frac{p_3^2}{c_0^2\sin^2\beta} - \frac{2p_1p_2\cos\beta}{a_0c_0\sin^2\beta}. \quad (7)$$

Дигирная (ромбическая) сингония

$$a_0 \neq b_0 \neq c_0; \qquad \alpha = \beta = \gamma = 90°.$$

8-я решетка Браве — простая Г (табл. 17)

$$\frac{1}{d^2} = \frac{p_1^2}{a_0^2} + \frac{p_2^2}{b_0^2} + \frac{p_3^2}{c_0^2}. \quad (8)$$

11-я решетка Браве — центробазисная (табл. 17).

A) (p_1+p_2) — число четное. Формула (8).

B) (p_1+p_2) — число нечетное.

$$\frac{1}{d^2} = 4\left(\frac{p_1^2}{a_0^2} + \frac{p_2^2}{b_0^2} + \frac{p_3^2}{c_0^2}\right). \quad (9)$$

10-я решетка Браве — центрогранная Г‴ (табл. 17)

A) p_1, p_2 и p_3 — число нечетное. Формула (8).

B) Один или два нечетных индекса. Формула (9)

9-я решетка Браве — центрообъемная — Г″ (табл. 17).

A) $(p_1+p_2+p_3)$ — число четное. Формула (8).

B) $(p_1+p_2+p_3)$ — число нечетное. Формула (9).

Тетрагирная (тетрагональная) сингони

$$a_0 = b_0 \neq c_0; \quad \alpha = \beta = \gamma = 90°.$$

5-я решетка Браве — простая Г (табл. 17).

$$\frac{1}{d^2} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{a_0^2} + \frac{p_3^2}{c_0}, \tag{10}$$

6-я решетка Браве — центрообъемная.

А) $(p_1 + p_2 + p_3)$ — число четное. Формула (10).

В) $(p_1 + p_2 + p_3)$ — число нечетное.

$$\frac{1}{d^2} = 4\left[\frac{p_1^2 + p_2^2}{a_0^2} + \frac{p_3^2}{c_0^2}\right]. \tag{11}$$

Полигирная (кубическая) сингония

$$a_0 = b_0 = c_0; \quad \alpha = \beta = \gamma = 90°.$$

1-я решетка Браве — простая Г (табл. 17).

$$\frac{1}{d^2} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{a_0^2}. \tag{12}$$

3-я решетка Браве — центрогранная Г‴.

А) p_1, p_2 и p_3 — числа нечетные. Формула (12).

В) Один или два нечетных индекса

$$\frac{1}{d^2} = 4\,\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{a_0^2}. \tag{13}$$

-я решетка Браве — центрообъемная Г″.

А) $(p_1 + p_2 + p_3)$ — число четное. Формула (12).

В) $(p_1 + p_2 + p_3)$ — число нечетное. Формула (13).

Тригирная (тригональная) сингония

$$a = b = c; \quad \alpha = \beta = \gamma \neq 90°.$$

7-я решетка Браве — простая Г (табл. 17).

$$\frac{1}{d^2} = \frac{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\sin^2\alpha + 2(p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3)(\cos^2\alpha - \cos\alpha)}{a_0^2(1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha)}. \tag{14}$$

Гексагирная (гексагональная) сингония

4-я решетка Браве (табл. 17).

За ребра элементарной ячейки (а, следовательно, и за кристаллографические оси, проведенные вдоль этих ребер) принимаем ребра:

$$AO = a_0,\ OB = b_0 \text{ и } OC = c_0.$$

Тогда

$$a_0 = b_0 \neq c_0; \quad \alpha = \beta = 90°; \quad \gamma = 120°.$$

$$\frac{1}{d^2} = \frac{p_1^2 a_0^2 c_0^2 + p_2^2 a_0^2 c_0^2 + p_3^2 a_0^2 c_0^2 \sin 120° - 2p_1p_2 a_0^2 c_0^2 \cos 120°}{a_0^2 b_0^2 c_0^2 \sin^2 120°}.$$

$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\sin^2 120° = \frac{3}{4}$. $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

Подставляя получаем:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2}{a_0^2} + \frac{p_3^2}{c_0^2}. \tag{15}$$

Глава XV

СИМВОЛЫ ГРАНЕЙ

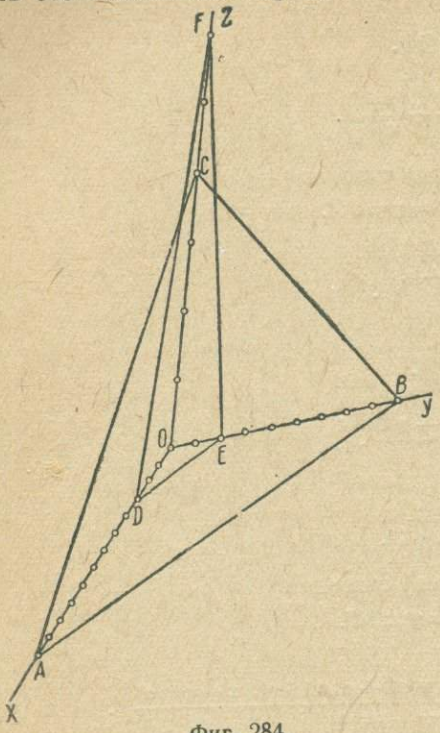
1. Закон рациональности отношений параметров (закон Аюи)

В пространственной решетке три ряда OX, OY и OZ (фиг. 284), пересекающихся в одной точке O, примем за координатные оси. Обозначим примитивные промежутки ряда OX через a_0, ряда OY через b_0, ряда OZ через c_0. Три плоских

сетки, проходящие через каждую пару координатных осей, будут являться тремя координатными плоскостями. Некоторая плоская сетка ABC пересекает координатные оси на расстоянии $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ от начала координат. Отрезки a, b и c называются параметрами сетки ABC (см. стр. 234).

В предыдущем параграфе было выяснено, что, если параметры сетки измерять соответственными примитивными промежутками a_0, b_0 и c_0, то получим всегда *рациональные* величины:

$$h_1 = \frac{a}{a_0}; \quad h_2 = \frac{b}{b_0}; \quad h_3 = \frac{c}{c_0}.$$



Фиг. 284.

В нашем примере: $h_1 = 12$; $h_2 = 9$; $h_3 = 4$. В более сложных случаях могут получаться дроби, иррациональные же числа — никогда.

Возьмем некоторую другую плоскую сетку, не параллельную первой (иначе — другой серии) DEF. Ее параметры $OD = d$; $OE = e$ и $OF = f$. Если эти параметры измерять примитивными промежутками, получим также три рациональных числа (целых или дробных):

$$h_1' = \frac{d}{a_0}; \quad h_2' = \frac{e}{b_0}; \quad h_3' = \frac{f}{c_0}.$$

(в нашем примере $h_1' = 3$; $h_2' = 2$; $h_3' = 6$). Отсюда следует, что, если параметры одной сетки (например, ABC) измерять параметрами другой сетки (например, DEF), то отношение полученных чисел будет отношением рациональных чисел, а потому всегда равно отношению целых чисел.

Действительно,

$$a = h_1 a_0; \quad b = h_2 b_0; \quad c = h_3 c_0.$$
$$d = h_1' a_0; \quad e = h_2' b_0; \quad f = h_3' c_0.$$

Если измерять параметры a, b, c параметрами d, e, f — получим:

$$\frac{a}{d} = \frac{h_1 a_0}{h_1' a_0} = \frac{h_1}{h_1'}; \quad \frac{b}{e} = \frac{h_2 b_0}{h_2' b_0} = \frac{h_2}{h_2'}; \quad \frac{c}{f} = \frac{h_3 c_0}{h_3' c_0} = \frac{h_3}{h_3'}.$$

Так как h, h'_1, h_2, h'_2 и h_3, h_3' числа рациональные, то и их отношения $\frac{h_1}{h_1'}$, $\frac{h_2}{h_2'}$ и $\frac{h_3}{h_3'}$ тоже являются числами рациональными.

Поэтому и отношение этих отношений:

$$\frac{a}{d} : \frac{b}{e} : \frac{c}{f} = \frac{h_1}{h_1'} : \frac{h_2}{h_2'} : \frac{h_3}{h_3'},$$

как отношение рациональных чисел, всегда может быть представлено отношением чисел целых и взаимно простых.

В нашем примере:

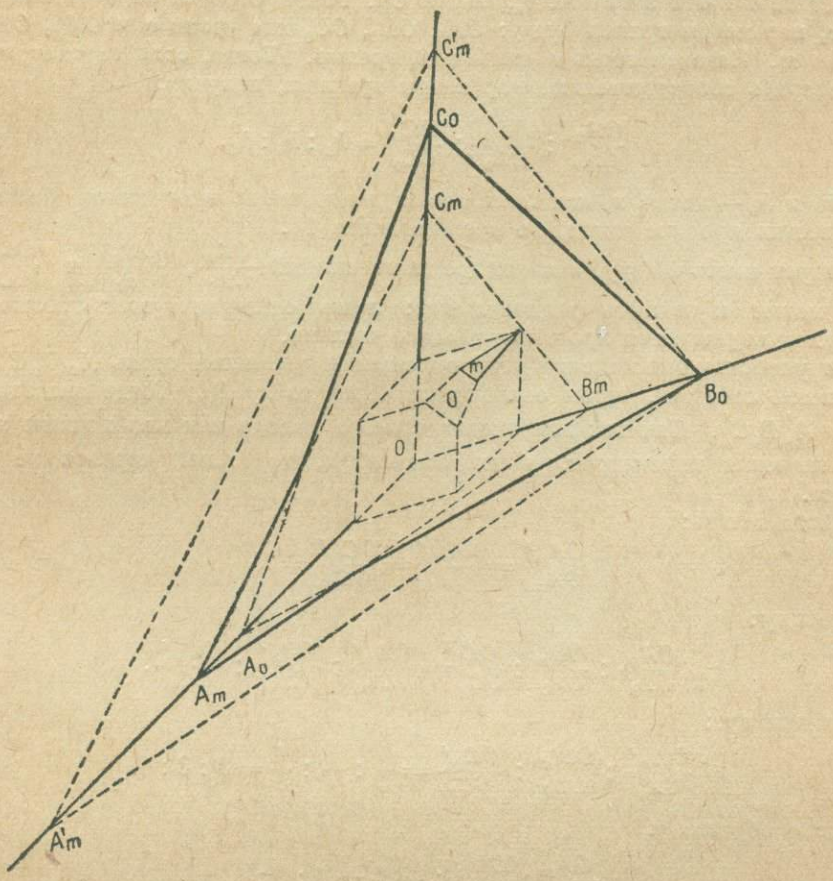
$$\frac{a}{d} : \frac{b}{e} : \frac{c}{f} = \frac{12}{3} : \frac{9}{2} : \frac{4}{6} = \frac{24}{6} : \frac{27}{6} : \frac{4}{6} = 24 : 27 : 4.$$

Таким образом,

если параметры одной сетки измерять параметрами другой сетки, то отношение полученных величин равно отношению целых и взаимно-простых чисел.

Каждое ребро кристалла является рядом решетки (см. стр. 48) поэтому, очевидно, что координатные оси можно проводить параллельно ребрам кристалла. Так как каждая грань кристалла является некоторой плоской сеткой (см. стр. 48), то для кристаллических многогранников наши выводы могут быть формулированы следующим образом:

Отношение отрезков (параметров), отсекаемых гранью кристалла на трех ребрах, избранных за координатные оси, равно отношению целых и взаимно простых чисел, при условии, что параметры эти измерены осо-



Фиг. 285.

быми единицами для каждой из осей. За единицы измерения должны быть приняты параметры некоторой другой грани кристалла.

Грань, параметры которой приняты за единицы измерения параметров остальных граней, называется единичной гранью.

Наблюдения показывают, что целые числа, о которых говорится в нашем выводе, в огромном большинстве случаев являются числами весьма простыми, не превышающими 10.

Выше рассмотренные заключения составляют так называемый закон рациональности отношений параметров. Часто его называют также законом целых чисел или просто, по имени французского ученого, открывшего этот закон, законом Аюи (Haüy). Свои выводы Аюи строил на основе созданной им весьма несовершенной теории структуры кристаллов (1784 г.). Утверждение же, что отношения параметров выражаются не только целыми, но и весьма простыми числами, было выве-

дено Аюи на основе огромного фактического материала, собранного еще Ромэ-де-л'Илем.

Закон Аюи дает самую общую связь между различными гранями каждого кристалла, независимо от того, принадлежат ли эти грани одной или нескольким простым формам. Рассмотрим пример. Пусть нам дан кристалл, изображенный на фиг. 285. Три задних ребра этого кристалла примем за координатные оси, которые продолжим далеко во все стороны. Мысленно продолжим также плоскости граней o и m нашего кристалла до их пересечения с осями. Пусть плоскость грани o пересекает координатные оси в точках A_0, B_0 и C_0. Плоскость грани m пересекает те же оси в точках A_m, B_m и C_m. Тогда отрезки на осях, или, как их называют, параметры граней будут: OA_0, OB_0, OC_0 для грани o и OA_m, OB_m, OC_m для грани m. Назовем грань o единичной гранью. Тогда, если параметрами этой грани измерить соответственные параметры грани m, получим:

$$\frac{OA_m}{OA_0} : \frac{OB_m}{OB_0} : \frac{OC_m}{OC_0} = h_1 : h_2 : h_3,$$

где h_1, h_2 и h_3 — целые и, как показывают наблюдения, в огромном большинстве случаев весьма простые числа, не превышающие 10.

Следует иметь в виду, что каждое из отношений $\frac{OA_m}{OA_0}$, $\frac{OB_m}{OB_0}$ и $\frac{OC_m}{OC_0}$ практически может и не быть рациональным: лишь отношения этих отношений рациональны и выражаются простыми целыми числами.

Для удобства определений этих отношений перенесем грань $A_mB_mC_m$ параллельно самой себе так, чтобы она прошла через точку B_0. Тогда она займет положение $A'_mB_0C'_m$. Так как для окончательного вывода нам необходимы не абсолютные значения параметров, а их отношения, то такой перенос не изменит результата.

Действительно:

$$\frac{OA_m'}{OA_m} = \frac{OB_m'}{OB_m} = \frac{OC_m'}{OC_m} = K.$$

Поэтому:

$$\frac{OA_m}{OA_0} : \frac{OB_m}{OB_0} : \frac{OC}{OC_0} = \frac{OA_m'}{OA_0} : \frac{OB_m'}{OB_0} : \frac{OC_m'}{OC_0}.$$

В нашем примере:

$$\frac{OA_m'}{OA_0} : \frac{OB'_m}{OB_0} : \frac{OC_m'}{OC_0} = \frac{5}{3} : \frac{1}{1} : \frac{4}{3} = 5 : 3 : 4.$$

Таким образом и

$$\frac{OA_m}{OA_0} : \frac{OB_m}{OB_0} : \frac{OC_m}{OC_0} = 5 : 3 : 4,$$

т. е. отношение параметров, отсекаемых гранью на осях, выражается простыми целыми числами (при условии, что эти параметры измерены параметрами единичной грани).

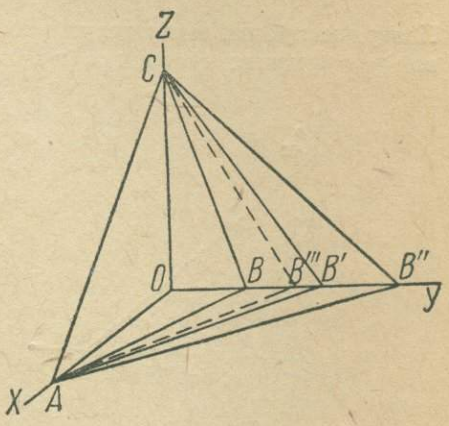
Значение закона Аюи не только в том, что он связывает друг с другом различные грани кристаллов, но еще в том, что он дает возможность находить положение различных плоских сеток без непосредственных исследований кристаллической решетки.

Действительно, предыдущие выводы показали, что любая плоская сетка кристалла должна подчиняться закону Аюи. Нетрудно доказать и обратное: любая плоскость, подчиняющаяся закону Аюи, параллельна некоторой плоской сетке (или совпадает с нею). Строя плоскости, отношения параметров которых рациональны, определяем тем самым расположение различных плоских сеток, а следовательно, и возможных граней кристалла (см. стр. 53). Для этого три какие-либо грани кристалла, не пересекающиеся в параллельных ребрах, принимаем за координатные

плоскости (грани OAB, OBC и OCA на фиг. 286). Линии их пересечения образуют координатные оси OX, OY и OZ. Какую-либо четвертую грань ABC, пересекающую (при достаточном продолжении) все три координатные оси — примем за единичную грань. Отложим по одной из осей, например, по оси OY, остаток вдвое больший, чем параметр OB. Получим на оси OY точку B'. Через точки B', A и C проведем плоскость $AB'C$. Эта плоскость удовлетворяет закону Аюи. В самом деле:

$$\frac{OA}{OA} : \frac{OB'}{OB} : \frac{OC}{OC} = 1 : 2 : 1,$$

т. е. отношения параметров построенной плоскости, при условии, что эти параметры измерены параметрами единичной грани, равны отношениям целых чисел. Раз это так, то параллельно проведенной плоскости $AB'C$ в кристалле должны проходить плоские сетки решетки, и сама плоскость может являться возможной гранью кристалла.



Фиг. 286.

Аналогичные рассуждения показывают, что параллельно плоскости $AB''C$ также проходят плоские сетки, так как:

$$\frac{OA}{OA} : \frac{OB''}{OB} : \frac{OC}{OC} = 1 : 3 : 1.$$

Таким образом путем чисто геометрических построений, откладывая по осям различные параметры, можно находить положение различных плоских сеток, а, следовательно, и различных возможных граней кристалла.

Плоскости, не подчиняющиеся закону Аюи, не параллельны плоским сеткам решетки, а потому никогда не могут встретиться на кристаллах как грани. Например, плоскость $AB'''C$ с параметрами OA, $OB''' = OB\sqrt{3}$ и OC никогда не может встретиться на кристалле как грань, так как параллельно такой плоскости в кристалле нет плоских сеток. Действительно:

$$\frac{OA}{OA} : \frac{OB'''}{OB} : \frac{OC}{OC} = 1 : \sqrt{3} : 1.$$

Получаем иррациональные отношения, невозможные для плоских сеток.

При исследовании реальных кристаллов иногда оказывается, что измеренные отношения:

$$\frac{OA_m}{OA_0} : \frac{OB_m}{OB_0} : \frac{OC_m}{OC_0}$$

выражаются не целыми числами, а числами, отличающимися от целых на небольшую величину, выходящую за пределы точности измерений. Это обстоятельство обусловлено несовершенством кристаллообразования (присутствием вициналей, кривогранностью граней и пр.) и нисколько не подрывает, конечно, значения закона Аюи.

2. Основные понятия и определения в учении о символах граней кристалла

Главнейшее применение закона Аюи состоит в характеристике расположения граней на кристаллическом многограннике. Фигурирующие в законе Аюи три простых целых числа h_1', h_2' и h_3', пропорциональные параметрам данной грани (при условии, что эти параметры измерены параметрами единичных граней), вполне точно определяют положение заданной грани, если только известно расположение координатных осей и единичной грани. Таким образом, эти три числа могли бы

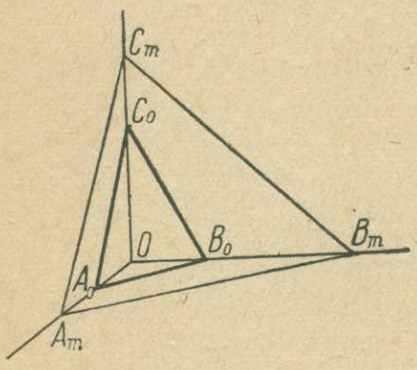
служить для характеристики расположения той или иной грани. Однако практика показала, что удобнее пользоваться не этими числами, но им обратно-пропорциональными:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{h_1'} : \frac{1}{h_2'} : \frac{1}{h_3'}.$$

Совершенно очевидно, что, если h_1', h_2' и h_3' — числа целые, то и p_1, p_2 и p_3 могут быть представлены как числа целые и взаимно простые. Действительно:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{h_1'} : \frac{1}{h_2'} : \frac{1}{h_3'} = \frac{h_2' h_3'}{h_1' h_2' h_3'} : \frac{h_1' h_3'}{h_1' h_2' h_3'} : \frac{h_1' h_2'}{h_1' h_2' h_3'} = h_2' h_3' : h_1' h_3' : h_1' h_2'.$$

Попарные произведения целых чисел h_1', h_2' и h_3' — числа целые. Поэтому в правой части наших пропорций стоят числа целые. Если эти числа не взаимно простые, то их следует сократить на общего множителя и тогда придем к числам целым и взаимно-простым.



Фиг. 287.

В примере, приведенном в начале предыдущего раздела, параметры выражались отношением чисел 12, 9 и 4 (см. стр. 244). Отношение чисел, им обратных, равно:

$$\frac{1}{12} : \frac{1}{9} : \frac{1}{4} = \frac{9 \cdot 4}{12 \cdot 9 \cdot 4} : \frac{12 \cdot 4}{12 \cdot 9 \cdot 4} : \frac{12 \cdot 9}{12 \cdot 9 \cdot 4} =$$
$$= (9 \cdot 4) : (12 \cdot 4) : (12 \cdot 9) =$$
$$= 9 : 12 : (3 \cdot 9) = 3 : 4 : 9.$$

Эти целые и взаимно-простые числа по предложению Миллера (1839 г.) и служат для характеристики расположения граней кристалла.

*Символом грани кристалла называется совокупность трех наименьших целых чисел ($p_1 p_2 p_3$), обратно пропорциональных параметрам данной грани. * При этом эти параметры должны измеряться параметрами единичной грани.*

Таким образом для обозначения граней символами, необходимо:

1) Выбрать три направления, пересекающиеся в одной точке и параллельные трем ребрам кристалла (или трем рядам решетки), в качестве координатных осей. Такие оси носят название кристаллографических осей, причем первая ось *I* (фиг. 287) располагается к наблюдателю, вторая (*II*) — вправо, третья (*III*) — вверх.

2) Принять одну из граней (или плоских сеток), пересекающих все три кристаллографические оси, за единичную грань (грань $A_0B_0C_0$). Параметры этой грани (отрезки OA_0, OB_0 и OC_0) принимаются за единицы измерений по кристаллографическим осям.

3) Измерить единичными параметрами (OA_0, OB_0, OC_0) параметры (OA, OB, OC) плоскости, параллельной или совпадающей с гранью, которую мы желаем обозначить символом.

Здесь, так же, как и при рассмотрении закона Аюи (стр. 245), удобно предварительно перенести определяемую грань параллельно самой себе так, чтобы получить результаты измерений в целых числах (на фиг. 287: $\frac{OA_m}{OA_0} = \frac{2}{1}$; $\frac{OB_m}{OB_0} = \frac{3}{1}$; $\frac{OC_m}{OC_0} = \frac{3}{2}$).

* Как увидим ниже, символы гексагирных (гексагональных) кристаллов выражаются совокупностью четырех целых чисел.

4) Найти обратные отношения полученных величин:

$$\frac{1}{\left(\frac{OA_m}{OA_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OB_m}{OB_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OC_m}{OC_0}\right)}$$

$$\left(\text{на фиг. 287 имеем: } \frac{1}{\left(\frac{2}{1}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{3}{1}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{2}{3}\right).$$

5) На основании закона Аюи эти отношения всегда могут быть выражены в целых числах.

Находим наименьшие значения этих целых чисел:

$$\boxed{\frac{1}{\left(\frac{OA_m}{OA_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OB_m}{OB_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OC_m}{OC_0}\right)} = p_1 : p_2 : p_3} \qquad (1)$$

$$\left(\text{в нашем примере: } \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{3}{6} : \frac{2}{6} : \frac{4}{6} = 3 : 2 : 4\right).$$

6) Найденные три целых и взаимно-простых числа ($p_1 p_2 p_3$) пишутся подряд, без знаков отношений, заключаются в круглые скобки и представляют собою символ грани ABC [в нашем примере символ грани ABC будет (324)].

Каждое из чисел p_1, p_2 и p_3, взятое в отдельности, носит название индекса символа. Первый индекс отвечает отношению по первой кристаллографической оси, второй индекс — по второй оси, третий — по третьей оси. *

Рассмотрим главнейшие случаи значений символов различных граней.

1) Для определения символа единичной грани $A_0B_0C_0$ очевидно следует параметры этой грани измерять этими же самыми параметрами, так как именно они и берутся за единицы измерения по кристаллографическим осям. Для данного случая формула (1) дает:

$$\frac{1}{\left(\frac{OA_0}{OA_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OB_0}{OB_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OC_0}{OC_0}\right)} = \frac{1}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{1} = 1 : 1 : 1.$$

Символ единичной грани — (111).

Три единицы в символе говорят о том, что параметры этой грани приняты за единицы измерений по трем осям, причем совершенно не указывают на равенство этих параметров между собою.

По каждой оси может быть своя единица измерения, не равная другим, подобно тому как в различных государствах могут быть приняты различные меры длины, не равные друг другу.

Один метр не равен одному аршину, хотя то и другое является единицей для измерений.

2) Определим символ грани A_0B_0NM, изображенный на фиг. 288.

Эта грань параллельна третьей кристаллографической оси III. Следовательно, величина ее параметра по третьей оси равна бесконечности (∞).

Параметры же этой грани по первой и второй оси такие же как и у единичной грани: OA_0 и OB_0.

По формуле получаем символ:

$$\frac{1}{\left(\frac{OA_0}{OA_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OB_0}{OB_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{\infty}{OC_0}\right)} = 1 : 1 : \frac{1}{\infty} = 1 : 1 : 0.$$

Таким образом символ плоскости A_0B_0NM есть (110).

---

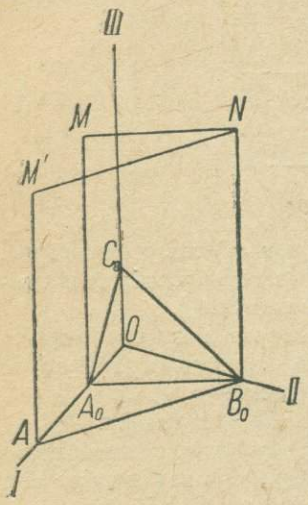
* Если один или несколько индексов выражается двузначным или еще большим числом, то индексы отделяются друг от друга точками, например, (2 · 11 · 3), (17 · 16 · 1).

Очевидно, что всякая плоскость, параллельная A_0B_0NM, например $A'B'N'M'$, выражается таким же символом, так как

$$\frac{OA'}{OA_0} = \frac{OB'}{OB_0}.$$

Нетрудно вывести, что всякая плоскость, параллельная оси *II* и проходящая через прямую A_0C_0 (или параллельно ей), выражается символом (101).

Аналогично, плоскость, параллельная оси *I* и проходящая через прямую B_0C_0 (или параллельно ей), имеет символ (011). Схематические чертежи, поясняющие сказанное, предлагается сделать самому занимающемуся.



Фиг. 288.

Грани, имеющие в символе один нуль и две единицы, называются нульдвуединичными.

3) Определим символ грани $AB_0M'N$, параллельной оси *III* (фиг. 288).

По формуле имеем:

$$\left(\frac{\frac{1}{OA}}{\frac{1}{OA_0}}\right) : \left(\frac{\frac{1}{OB_0}}{\frac{1}{OB_0}}\right) : \left(\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{OC_0}}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}}\right) : \frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} : 1 : 0 = 1 : 2 : 0.$$

Итак, символ плоскости AB_0NM' будет (120).

Очевидно, что и символ любой плоскости $A'B'N'M'$, параллельной $AB_0\ NM'$, будет также (120).

Нетрудно сообразить, что символ любой плоскости, параллельной оси *III*, будет (p_1p_20), где p_1 и p_2 — некоторые целые числа.

Аналогично можно найти, что символ любой грани, параллельной второй оси, будет (p_10p_3), а параллельной первой оси — $(0p_2p_3)$, где p_1, p_2 и p_3 — некоторые целые числа (чертежи, поясняющие сказанное, предлагается сделать самому занимающемуся).

4) Определим символы граней, параллельных одновременно двум осям.

Пусть некоторая плоскость параллельна осям *II* и *III*. Параметры этой плоскости по этим осям будут равны бесконечности (∞).

Поэтому имеем:

$$\left(\frac{\frac{1}{OA}}{\frac{1}{OA_0}}\right) : \left(\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{OB_0}}\right) : \left(\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{OC_0}}\right) = \frac{OA_0}{OA} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} = \frac{OA_0}{OA} : 0 : 0.$$

Или, сократив на $\frac{OA_0}{OA}$, окончательно получим

$$\frac{OA_0}{OA} : 0 : 0 = 1 : 0 : 0.$$

Итак, символ грани будет (100).

Аналогично, нетрудно найти, что символ грани, пересекающей только ось *II* (параллельной осям *I* и *III*), будет (010).

Символ грани, пересекающей только ось *III* (параллельной осям *I* и *II*), будет (001) (Чертежи предлагается сделать самому занимающемуся).

Грани, параллельные одновременно двум кристаллографическим осям (пересекающие только одну ось), носят названце основных граней. Грань с символом (100) *называется первой основной гранью.*

Грань (010) *называется второй основной гранью.*

Грань (001) *называется третьей основной гранью.*

Очевидно, что кристаллографические оси параллельны линиям пересечений основных граней. Поэтому положение кристаллографических осей вполне определяется положением основных граней, и, наоборот, положение основных граней вполне определяется положением кристаллографических осей.

5) Грань, не параллельная ни одной из кристаллографических осей, пересекающая, следовательно, все три оси, не может иметь ни одного нуля в символе, и в общем случае выражается символом $(p_1p_2p_3)$, где p_1, p_2 и p_3 — некоторые целые числа, не равные нулю.

В рассмотренных выше примерах значений символов различных граней кристаллов мы считали расположение кристаллографических осей и единичной грани уже известными. Однако для определения граней символами необходимо прежде всего так или иначе установить систему координат и выбрать единичную грань.

Проведение кристаллографических осей и выбор единичной грани называется установкой кристалла.

От установки кристалла целиком зависят символы всех граней. Если, например, в рассмотренном нами примере, изображенном на фиг. 287, за единичную грань выбрать не грань $A_0B_0C_0$, но грань $A_mB_mC_m$, то символ грани $A_mB_mC_m$ будет не (324), как было нами найдено, но представится как (111). [Грань же $A_0B_0C_0$ получит символ (463)].

Для определенности стремятся проводить кристаллографические оси параллельно ребрам элементарной ячейки, а за единичную грань принимают грань, параллельную такой плоской сетке, параметры которой равны примитивным промежуткам a_0, b_0, и c_0 по каждой из осей. Таким образом параметры единичной грани будут равны (или пропорциональны) примитивным промежуткам рядов.

Как было выяснено в главе XIII, в решетках кристаллографические оси проводятся вдоль ребер элементарных ячеек. В качестве индексов серии плоских сеток принимаются числа, обратно-пропорциональные числу примитивных промежутков, заключающихся в параметрах данной сетки. При указанной установке кристалла, в качестве индексов грани кристалла должны быть приняты числа, обратно-пропорциональные параметрам этой грани, измеренным теми же примитивными промежутками. Таким образом:

Если кристаллографические оси проведены вдоль ребер элементарных ячеек и единичная грань параллельна плоской сетке, параметры которой равны примитивным промежуткам осей, то символы граней совпадают с сериальными символами соответствующих плоских сеток.

Совершенно очевидно, что для установки кристалла по ребрам элементарной ячейки необходимо, чтобы форма и ориентировка последней были известны. В противном случае стремятся производить установку кристалла таким образом, чтобы хотя кристаллографические оси совпадали с направлениями ребер ячейки.

Задача отличается тем, что параллельно этим ребрам в кристалле располагаются те или иные элементы симметрии.

Поэтому, сообразуясь со сказанным о форме элементарных ячеек решеток различных сингоний, можно дать правила для установок кристаллов. Кристаллографические оси кристалла, установленные согласно этим правилам, будут параллельны ребрам элементарной ячейки.

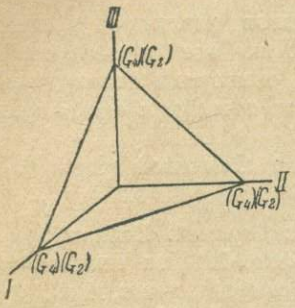
Без точного исследования структуры ручаться за параллельность единичной грани с такой плоской сеткой можно лишь в отдельных частных случаях.

Е. С. Федоровым были разработаны правила „правильной“ установки кристаллов, без исследования структуры. При всех преимуществах применения установок Е. С. Федорова, эти правила все же далеко не всегда приводят к выбору единичной грани, параллельно плоской сетке, с параметрами, равными ребрам элементарной ячейки. Ввиду этого и сложности правил федоровской установки, нами будут рассмотрены только общепринятые правила.

3. Установка кристаллов и определение символов граней различных сингоний

Полигирная (кубическая) сингония

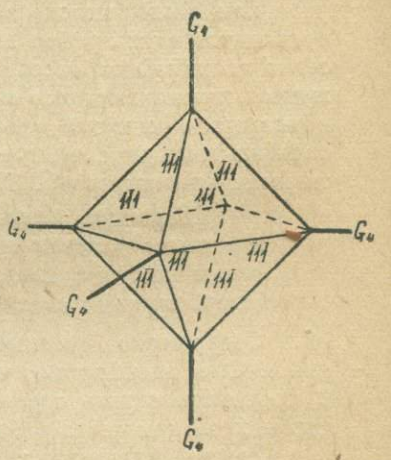
Следует различать два случая: тетрагиры могут или присутствовать, или же отсутствовать на данном кристалле. Рассмотрим сначала первый случай.



Фиг. 289.

1. $3G_4$ *присутствуют.* В этом случае три взаимно-перпендикулярные $3G_4$ и принимаются за три кристаллографические оси. Первая направляется к наблюдателю, вторая — справа налево, третья — вертикально вверх (фиг. 289). За единичную грань принимается действительная или возможная грань, нормальная к тригире G_3. Такой гранью является грань октаэдра. Нетрудно убедиться, что параметры этой грани совершенно одинаковы (фиг. 290). Таким образом единицы измерений по всем трем осям равны друг другу. Это сильно облегчает определение символов граней у кристаллов полигирной (кубической) сингонии.

Как уже указывалось, символ единичной грани — (111). Однако такими символами обладает только одна из восьми граней октаэдра — именно передняя правая верхняя грань, отсекающая положительные отрезки по всем трем кристаллографическим осям. Соседняя с нею задняя правая верхняя грань имеет совершенно такие же по абсолютной величине параметры, однако по первой оси отсекает отрицательный отрезок, так как первую ось мы считаем направленной от центра к наблюдателю. Противоположное же направление — от наблюдателя к задней стороне кристалла — следует считать отрицательным. Поэтому задняя правая грань, хотя и будет выражаться символом, состоящим из трех единиц, однако первый индекс, отвечающий первой кристаллографической оси, должен иметь знак минус. Этот минус в символе граней принято писать над цифрой индекса. Таким образом символ этой грани будет: $(\bar{1}11)$.



Фиг. 290. Октаэдр.

Аналогично задняя левая верхняя грань имеет отрицательный параметр не только по первой оси (пересекает эту ось не спереди, а сзади), но и по второй. Действительно, вторую ось мы считаем положительной от центра вправо; грань же пересекает эту ось с левой стороны кристалла. Поэтому символ грани $(\bar{1}1\bar{1})$.

Аналогично нетрудно найти, что передняя левая верхняя грань имеет символ $(1\bar{1}1)$.

Нижние грани отличаются от верхних тем, что их параметр по третьей оси OF имеет отрицательное значение, а нижние грани пересекают третью ось не сверху, но снизу.

Первый индекс считается отрицательным, если грань (или ее продолжение) пересекает первую кристаллографическую ось сзади, а не спереди кристалла.

Второй индекс считается отрицательным, если грань пересекает вторую ось с левой, а не с правой стороны кристалла.

Третий индекс считается отрицательным, если грань пересекает третью ось снизу, а не сверху кристалла.

Пользуясь указанным правилом знаков, сопоставим символы всех восьми граней октаэдра.

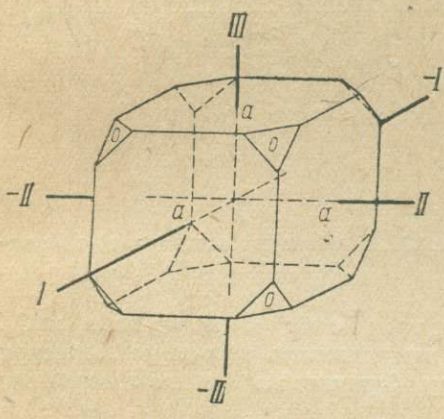
Из таблицы видно, что символы всех граней октаэдра выражаются одинаковыми индексами и отличаются друг от друга только знаками. Поэтому очень часто, когда имеется в виду вся совокупность граней данной простой формы, не выписывается весь список символов для всех граней данной формы, но пишется только один символ, по возможности с положительными индексами. Этот символ заключают не в круглые, но в фигурные скобки.

Расположение грани	Символ
Передняя правая верхняя	(111)
Задняя правая верхняя	$(\bar{1}11)$
Задняя левая верхняя	$(\bar{1}\bar{1}1)$
Передняя левая верхняя	$(1\bar{1}1)$
Передняя правая нижняя	$(11\bar{1})$
Задняя правая нижняя	$(\bar{1}1\bar{1})$
Задняя левая нижняя	$(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$
Передняя левая нижняя	$(1\bar{1}\bar{1})$

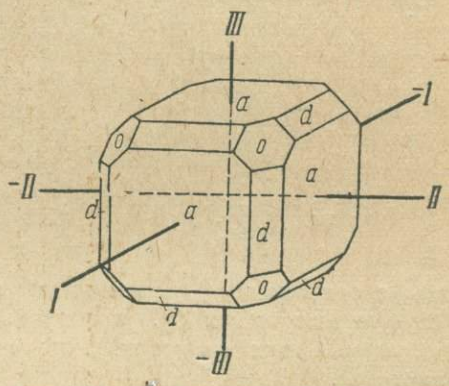
Фигурные скобки условно обозначают, что написанный символ относится ко всем граням данной простой формы, хотя символы остальных граней этой формы и отличаются от написанного знаками и расположением индексов.

Таким образом, вместо всего списка предыдущей таблицы, коротко можно записать:

Символ граней октаэдра — {111}.



Фиг. 291. Комбинация куба (*a*) с октаэдром (*o*).



Фиг. 292. Комбинация куба (*a*) с октаэдром (*o*) и ромбододекаэдром (*d*).

Рассмотрим теперь кристалл, изображенный на фиг. 291. Установка точно такая же, как и в предыдущем случае. Здесь, кроме изученных нами уже граней октаэдра, присутствуют грани гексаэдра (куба). Каждая грань куба параллельна одновременно двум кристаллографическим осям. Найти символы этих граней затруднений не представляет.

Передняя грань — (100);
Задняя грань — $(\bar{1}00)$;
Правая грань — (010);
Левая грань — $(0\bar{1}0)$;
Верхняя грань — (001);
Нижняя грань — $(00\bar{1})$.

Короче говоря, всю совокупность этих граней, отличающихся знаками и расположением индексов, можно записать пользуясь фигурными скобками: {100}

Фиг. 292 разнится от предыдущей присутствием граней ромбододекаэдра. Каждая грань ромбододекаэдра параллельна одной из кристаллографических осей

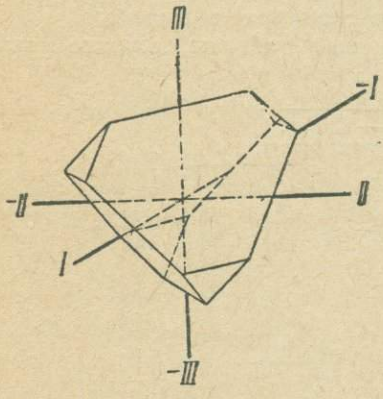
и обладает равными параметрами по двум другим осям. Так как единичная грань обладает также равными параметрами по этим же осям, то грани ромбододекаэдра являются таким образом нульдвуединичными гранями (см. стр. 250).

Все грани ромбододекаэдра имеют в символе по одному нулю и по две единицы, каждая из которых может быть как положительной, так и отрицательной, и может занимать любое место среди трех индексов символа.

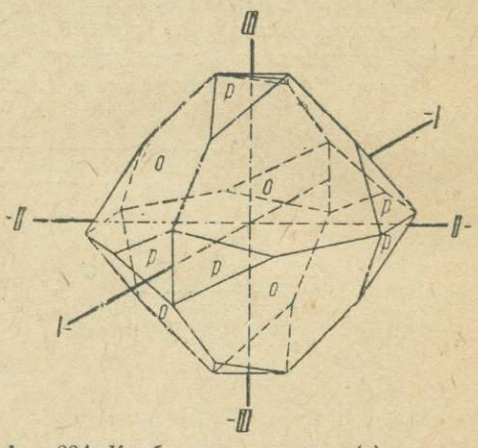
Символ граней ромбододекаэдра — {110}.

Подробно рассматривать символы других форм мы здесь не будем.

2. $3G_4$ *отсутствуют.* В этом случае кристаллографические оси проводятся по трем взаимноперпендикулярным дигирам. Следует подчеркнуть, что только при отсутствии тетрагир кристаллографические оси следует проводить указанным способом; в противном случае обязательно проведение осей по $3G_4$. За единичную грань принимается попрежнему действительная или возможная



Фиг. 293. Комбинация двух тетраэдров.



Фиг. 294. Комбинация октаэдра (*o*) с пентагон-додекаэдром (*p*).

грань с одинаковыми параметрами по всем трем осям и нормальная к G_8. В случаях отсутствия G_4, эта грань может принадлежать не только октаэдру (центральный вид симметрии), но и тетраэдру (примитивный и планальный вид симметрии).

Символ граней тетраэдра — {111}.

На фиг. 293 кроме граней одного тетраэдра, присутствуют еще грани второго тетраэдра, притупляющие вершины первого. Очевидно, что все три параметра граней второго тетраэдра, в одинаковое число раз больше соответственных параметров граней первого тетраэдра. Поэтому символы граней и этого тетраэдра выражаются тремя единицами, отличаясь от первого своими знаками.

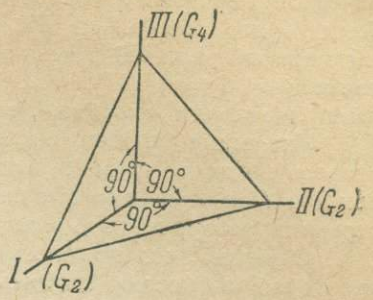
Символ граней второго тетраэдра — {$\bar{1}$11}.

Фиг. 294 представляет комбинацию октаэдра {111} и пентагон-додекаэдра {210}.

Действительно, параметр грани *p* по первой оси почти равен соответственному параметру единичной грани; параметр же по второй оси почти вдвое больше соответственного параметра единичной грани. Если грань *p* мысленно перенести параллельно самой себе так, чтобы ее параметр по первой оси сделался равным параметру единичной грани, то параметр ее по второй оси будет ровно вдвое больше соответственного единичного параметра. В этом легко убедиться просто прикладывая карандаш к этой грани в сторону пересечения продолжения данной грани с кристаллографической осью *II*. Третьей оси грань *p*

параллельна; таким образом параметры грани a, измеренные параметрами единичной грани, будут относиться друг к другу как $1 : 2 : \infty$. Чтобы от параметров перейти к индексам символа, нужно взять величины, обратные параметрам:

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{\infty} = \frac{2}{2} : \frac{1}{2} : 0 = 2 : 1 : 0.$$

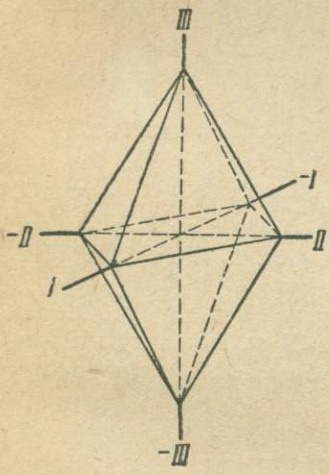


Фиг 295.

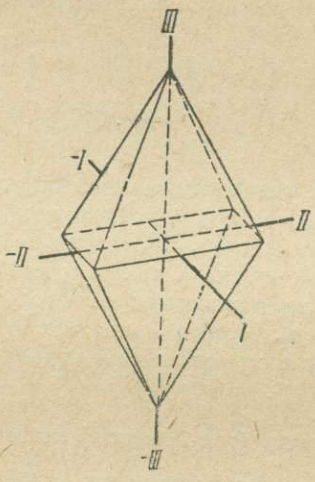
Таким образом символ грани p будет (210). Часто бывает трудно определить на-глаз количество единичных отрезков, заключающихся в том или ином параметре. Иногда мало помогает и простое прикладывание карандаша или линеечки к определяемой грани для более наглядного уяснения места пересечения этой грани с мысленно продолженными кристаллографическими осями. В этих случаях очевидно необходимо прибегнуть к менее примитивным и более точным способам определения символов. В первоначальных же упражнениях в таких случаях просто не следует определять индексов в цифрах, ограничиваясь буквенными их обозначениями. Предыдущий символ (210) можно представить как $(p_1 p_2 0)$ (где $p_1 > p_2$).

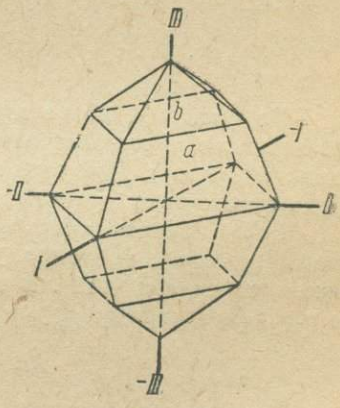
Тетрагирная (тетрагональная) сингония

Главная ось симметрии (G_4 или G_{4i}) принимается здесь за третью кристаллографическую ось и устанавливается вертикально.



Фиг. 296.





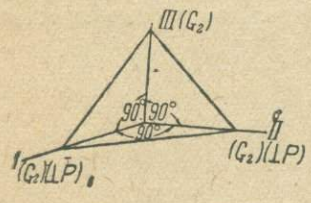
Фиг. 297.

Первая и вторая кристаллографические оси проводятся в плоскости, перпендикулярной по двум взаимно-перпендикулярным G_2 (фиг. 295); при отсутствии G_2 — по двум взаимно-перпендикулярным нормалям к плоскостям симметрии, проходящим через G_4. Наконец, в сравнительно редких случаях отсутствия и таких плоскостей, за первую и вторую кристаллографические оси выбираются два взаимно-перпендикулярных ряда решетки, лежащих в плоской сетке перпендикулярно G_4 и параллельных двум действительным или возможным ребрам кристалла. Таким образом во всех случаях устанавливается прямоугольная система координат: как и в полигирной (кубической) сингонии, первая ось проводится к наблюдателю, вторая — справа налево, третья — вверх.

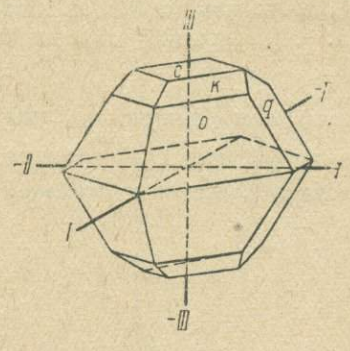
За единичную грань принимается действительная или возможная грань, имеющая равные параметры по первой и по второй оси (фиг. 295). Достичь равенства параметров по всем трем осям, как это удавалось в полигирной (кубической) сингонии, здесь невозможно. Единичный параметр по третьей оси всегда будет или больше или меньше первых двух. Подчеркнем еще раз, что, несмотря на различие в величинах этих параметров, символ единичной грани неизменно будет (111), так как неравные друг другу параметры мы и принимаем за единицы измерения, за эталоны для измерений по различным осям.

Указанные простые правила установок тетрагирных (тетрагональных) кристаллов не дают полной однозначности. Так, в фиг. 296 кристаллографические оси *I* и *II* можно провести не только через вершины (левая часть), но и через середины ребер, как это показано справа.

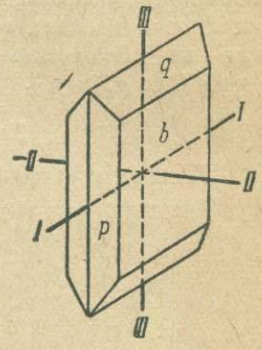
Очевидно, что при таком расположении осей единичная грань будет только некоторой возможной гранью. Символ грани дипирамиды в этом случае будет уже не {111}, но {011}. Нет никаких оснований приписывать этой грани какой-либо символ, вроде {021}, на том основании, что ее параметр по третьей оси больше собственного параметра по второй оси. Единицы измерений по этим осям также различны, и потому, несмотря на различие параметров, индексы символа могут выражаться единицами.



Фиг. 298.



Фиг. 299.



Фиг. 300.

На фиг. 297, кроме двух возможных способов проведения осей *I* и *II* (через вершины и через середины ребер), выступает неопределенность и в выборе единичной грани. При проведении осей, как показано на фиг. 297, за единичную грань может быть принята как грань *a*, так и грань *b*.

Если принять грань *a* за единичную, символ грани *b* будет (113) или вообще $(p_2p_2p_1)$, причем $p_1 > p_2$. Можно принять и грань *b* за единичную и приписать ей символ (111). В этом случае символ грани *a* будет (331) или вообще $(p_1p_1p_2)$ (попрежнему $p_1 > p_2$).

Дигирная (ромбическая) сингония

Кристаллографические оси проводятся по трем взаимно-перпендикулярным дигирам.

В случае присутствия только одной G_2 она принимается за вертикальную ось *III*. Оси *I* и *II* проводятся нормально к плоскостям симметрии. Таким образом и в дигирной (ромбической) сингонии всегда устанавливается прямоугольная система координат.

За единичную грань может быть выбрана любая грань, косо расположенная ко всем трем кристаллографическим осям. Все три параметра этой грани различны, и таким образом по каждой оси измерения производятся различными единицами (фиг. 298).

На фиг. 299 представлена комбинация *o* {111}, *k* {113}, *q* {011} и *c* {001}.

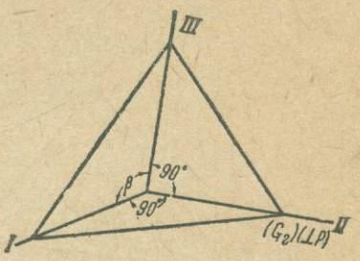
На фиг. 300 единичная грань отсутствует. Это не является препятствием для определения символов. За единичную грань мы принимаем такую возможную

грань, которая пересекает оси *I* и *II* в том же отношении, в котором их пересекает грань *p*. Поэтому символ грани *p* будет (110). Аналогично считаем, что наша возможная единичная грань пересекает оси *II* и *III* в том же отношении, в котором их пересекает грань *q*. Поэтому символ грани *q* будет (011). Символ грани *b* — (010).

Моногирная (моноклинная) сингония

В моногирной (моноклинной) сингонии может присутствовать не более одной G_2. По ней проводят кристаллографическую ось *II* и направляют ее слева направо.

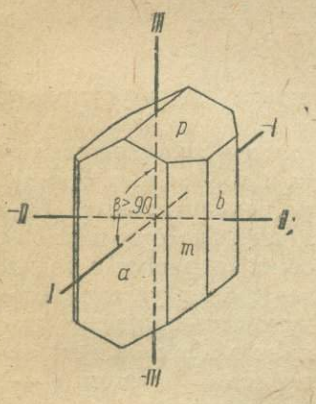
(При отсутствии G_2, за ось *II* принимают нормаль к плоскости симметрии) (фиг. 301).



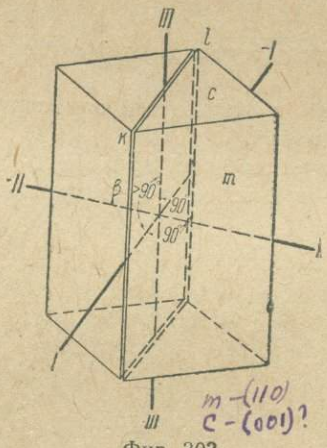
Фиг. 301.

В плоскости, перпендикулярной к оси *II* (в большинстве случаев такая плоскость является плоскостью симметрии), проводят оси *I* и *III*. Однако здесь нет уже осей симметрии, которыми можно было бы для этого воспользоваться. Поэтому приходится прибегать к проведению осей непосредственно по рядам решетки, пользуясь для этого действительными или возможными ребрами кристалла. Так, на фиг. 302 ось *III* проведена в плоскости симметрии параллельно наиболее длинным вытянутым ребрам фигуры. Эта ось устанавливается всегда вертикально.

Ось *I* в моногирных (моноклинных) кристаллах не удается проводить горизонтально к наблюдателю, как это было до сих пор. Такое направление не будет являться рядом решетки (нормаль к грани только в частных случаях является рядом решетки). Поэтому ось *I* приходится проводить не под прямым углом к оси *III*, но под тупым углом с некоторым наклоном вниз к наблюдателю.



Фиг. 302.



Фиг. 303.

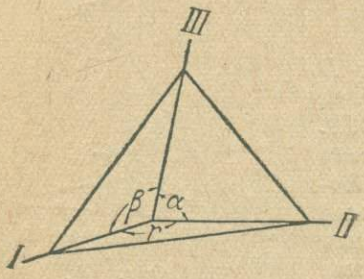
На фиг. 302 ось *I* проведена параллельно верхнему ребру кристалла, так что угол между осями *I* и *III* (угол β) больше 90°. Очевидно, что два других угла между кристаллографическими осями будут прямыми; поэтому получается уже не прямоугольная система координат, но с одним непрямым углом (старое название „моноклинная" сингония указывает на присутствие одного непрямого „наклонного" угла: „моно" — один, „клино" — наклон).

За единичную грань, так же, как и в дигирной (ромбической) сингонии, принимают любую действительную или только возможную грань, пересекающую все три оси (ее параметры неравны друг другу).

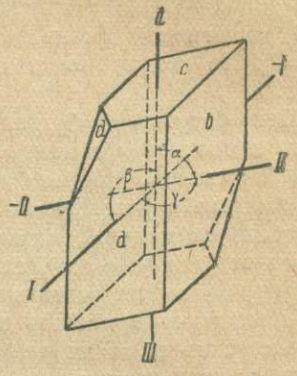
Символы граней фиг. 302: *a* — (100), *b* — (010), *m* — (110), *p* — (011); единичная грань отсутствует.

Определим символы фиг. 303, представляющей собою комбинацию ромбической призмы *m* с пинакоидом *c*, причем плоскость последнего не перпендикулярна к ребрам призмы *m* [таким образом фигура принадлежит к моногирной (моноклинной), а не дигирной (ромбической) сингонии]. Прежде всего в моногирной (моноклинной) сингонии проводится ось *II* (слева направо по G_2). Затем

в плоскости симметрии (в плоскости, перпендикулярной к оси *II*) выбирается ось *III* и устанавливается вертикально. Проще всего за ось *III* принять ряд решетки, параллельный ребрам призмы *m*. Ось *I* будет направлена с наклоном вниз к наблюдателю в той же плоскости симметрии, параллельно плоскости грани *c*. То, что это направление действительно является рядом решетки, видно из того, что оно параллельно линии пересечения грани *c* с плоскостью симметрии (на чертеже это пересечение показано тонкими двойными линиями). Плоскость симметрии есть плоская



Фиг. 304.



Фиг. 305.

сетка. Поэтому пересечение плоскости симметрии с гранью *c* есть ряд решетки. Следовательно, и направление оси *I*, параллельное этому ряду *kl*, может быть принято за кристаллографическую ось.

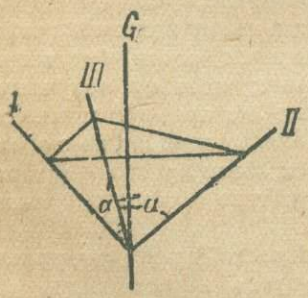
Единичная грань на фиг. 303 отсутствует.

Символы: m — {110}, c — {001}.

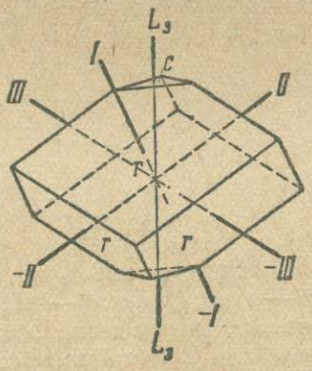
Агирная (триклинная) сингония

Полное отсутствие осей и плоскостей симметрии делает здесь установку кристалла еще более произвольной.

Все три кристаллографические оси приходится проводить непосредственно по рядам решетки, пользуясь для этого действительными или только возможными ребрами кристалла. Получается косоугольная система координат с тремя непрямыми углами между кристаллографическими осями (отсюда и старое название сингонии — „триклинная").



Фиг. 306.



Фиг. 307. Комбинация ромбоэдра (*r*) с пинакоидом (*c*).

Ось *III* устанавливается вертикально. Ось *II* проводят по возможности, хотя бы приблизительно, слева направо.

За ось *I* принимают ряд решетки, хотя бы приблизительно направленный к наблюдателю (фиг. 304).

За единичную грань, как и в предыдущих сингониях, принимают действительную или возможную грань, пересекающую все три оси (параметры этой грани не равны друг другу).

Символы граней фиг. 305 будут: a — {100}, b — {010}, c — {001}, d — {1$\bar{1}$1}.

Тригирная сингония (тригональная) подсингония

За кристаллографические оси принимаются ряды решетки, параллельные трем действительным или возможным ребрам, равнонаклонным к G_3 (фиг. 306).

Так как главную ось симметрии всегда принято ориентировать вертикально, то все три кристаллографические оси располагаются здесь наклонно.

Ось *I* направлена к наблюдателю с наклоном вверх, ось *II* — от наблюдателя вправо и с таким же наклоном вверх, ось *III* — от наблюдателя влево и с таким же наклоном вверх (фиг. 306).

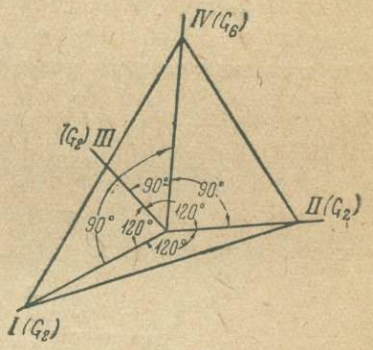
За единичную грань принимается действительная или возможная грань, перпендикулярная G_3. Такая грань всегда образует равные параметры по всем трем осям. (В этом отношении данная установка аналогична установке кубической сингонии, однако отличается от последней тем, что углы между кристаллографическими осями здесь непрямые).

Символы граней фиг. 307 будут: ромбоэдр r — {100} и пинакоид c — {111}.

Гексагирная (гексагональная сингония)

Применяется несколько различных и совершенно особенных установок, не с тремя, но с четырьмя кристаллографическими осями.

1. Установка Браве. В горизонтальной плоскости, нормальной к G_6, проводятся первая, вторая и третья кристаллографические оси (фиг. 308). Первая ось (*I*) проводится к наблюдателю по ряду решетки, совпадающему с G_2 или с нормалью к *P*, или в их отсутствии — по ряду, параллельному действительному или возможному ребру. Вторая ось *II* располагается под углом в 120° к первой, считая против часовой стрелки, третья — под углом 120° к первой, считая по часовой стрелке. Четвертая ось — *IV* — направляется по G_6 (фиг. 308).



Фиг. 308.

За единичную грань принимается такая, которая имеет равные параметры по осям *I* и *II* и неравный — по оси *IV*. Эта грань (см. грань *ABC* фиг. 309) пересекает отрицательный конец оси *III* на расстоянии, равном половине параметров по осям *I* и *II* (см. фиг. 310).

Ввиду того, что вертикально располагается G_6, единицы измерения всех горизонтальных осей (как по положительным, так и по отрицательным их концам) не должны быть различны, так как при поворотах на 60° они могут совмещаться друг с другом.

Поэтому параметр единичной грани по оси *III*, мы должны принимать за $^1/_2$. Таким образом параметры единичной грани — 1, 1, $^1/_2$ и 1.

Символы граней в этой установке выражаются не тремя, но четырьмя индексами. Единичная грань *ABC* получит символ $(11\bar{2}1)$.

Символ грани *ADC* (фиг. 309) аналогичен символу нульдвуединичной грани: $(10\bar{1}1)$.

Символы других верхних граней, представленных на фиг. 309 (считая против часовой стрелки), изобразятся так: $(01\bar{1}1)$, $(\bar{1}101)$, $(\bar{1}011)$, $(0\bar{1}11)$, $(1\bar{1}01)$.

Теорема 45. *В гексагирной (гексагональной) сингонии при установке Браве алгебраическая сумма трех первых индексов равна нулю.*

Если в общем случае символ грани составляют четыре индекса $(p_1p_2p_3p_4)$, то теорема утверждает, что

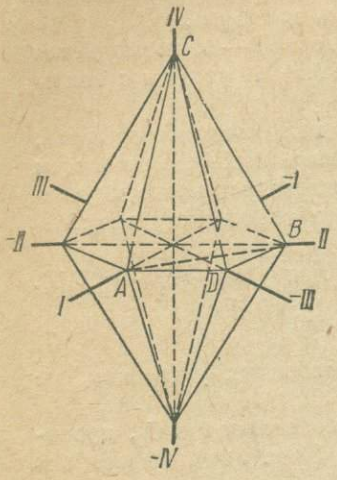
$$p_1 + p_2 + p_3 = 0.$$

На фиг. 311 представлены три горизонтальные оси *I*, *II* и *III* (ось *IV* перпендикулярна к плоскости чертежа).

Линия *ab* — след некоторой грани с символом $(p_1p_2p_3p_4)$. Очевидно, что

отрезки Oa, Ob и Oc представляют собою параметры этой грани по осям I, II и III.

Единицы измерений по всем трем горизонтальным осям одинаковы; поэтому они просто обратно пропорциональны соответственным параметрам:



Фиг. 309.

$$p_1 = \frac{K}{Oa};\ p_2 = \frac{K}{Ob};\ p_3 = -\frac{K}{Oc}, \qquad (1)$$

где K — коэфициент пропорциональности.

Очевидно, что

$$\text{пл. } \triangle aOb = \text{пл. } \triangle bOc + \text{пл. } \triangle cOa. \qquad (2)$$

Представим площадь каждого треугольника как половину произведения двух его сторон на синус угла между этими сторонами. Тогда вместо (2) можно написать

$$\frac{1}{2} Oa \cdot Ob \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} Ob \cdot Oc \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} Oa \cdot Oc \cdot \sin 60^\circ \qquad (3)$$

или, сокращая на $\sin 60^\circ$ (имея в виду, что $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$), получим,

$$Oa \cdot Ob = Ob \cdot Oc + Oa \cdot Oc; \qquad (4)$$

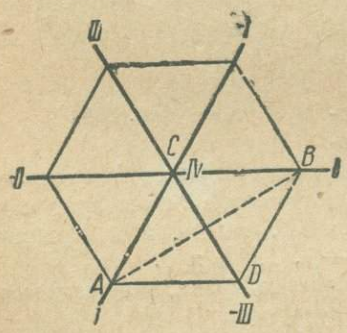
деля каждый член на произведение $(Oa \cdot Ob \cdot Oc)$, получим:

$$\frac{1}{Oc} = \frac{1}{Oa} + \frac{1}{Ob}. \qquad (5)$$

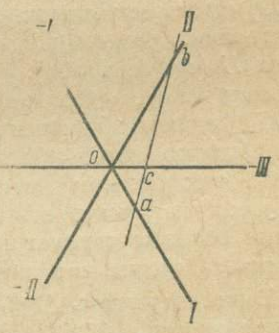
Подставляя в (5) значения индексов из (1) и сокращая на K, получим:

$$-p_3 = p_1 + p_2 \text{ или } p_1 + p_2 + p_3 = 0,$$

что и требовалось доказать.



Фиг. 310.



Фиг. 311.

Приведенная теорема позволяет определять не четыре, но только три индекса. Один из индексов, отвечающих горизонтальным осям, можно всегда находить по доказанной формуле. Так, например, третий индекс всегда равен сумме первых двух с обратным знаком: $p_3 = -(p_1 + p_2)$.

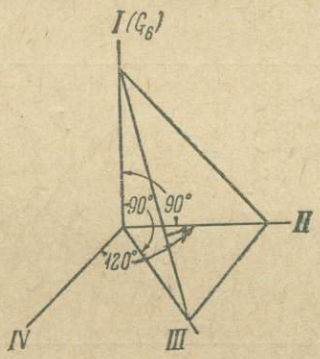
2. Установка Е. С. Федорова. За ось I принимается G_6 и устанавливается вертикально. Оси II, III и IV проводятся под прямым углом к оси I в горизонтальной плоскости. Начиная от оси II, устанавливаемой горизонтально (фиг. 312), горизонтальные оси проводятся под углом 60° друг к другу по часовой стрелке. За единичную грань принимается такая, которая имеет равные параметры по осям II и III и неравный им по вертикальной оси. Четвертой оси единичная грань па-

раллельна, однако единица измерения по этой оси будет равна параметрам по оси *II* и *III*, так как все эти три оси представляют собою равные направления в кристалле. Символ грани и в этой установке выражается не тремя, но четырьмя индексами. Единичная грань имеет символ (1110). Символы других верхних граней, представленных на фиг. 313 (считая по часовой стрелке), изобразятся так: (1011), $(1\bar{1}01)$, $(1\bar{1}\bar{1}0)$, $(10\bar{1}\bar{1})$, (1101).

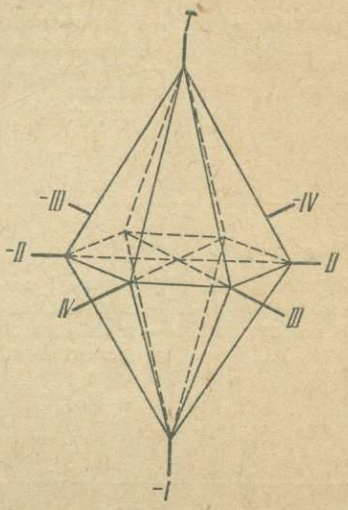
Теорема 46. *В гексагирной (гексагональной) сингонии, при установке Федорова три последних индекса в символе грани* $(p_2p_3p_4)$ *связаны соотношением* $p_2+p_4-p_3=0$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы (см. стр. 260). Таким образом:

третий индекс в символе гексагирной (гексагональной) сингонии при установке Федорова всегда равен алгебраической сумме второго и четвертого индексов.



Фиг. 312.



Фиг. 313.

Замечание. Приведенные установки с четырьмя кристаллографическими осями часто применяют не только для гексагирных (гексагональных) кристаллов, но и и для тригирных (тригональных).

Упражнения на определение символов граней кристаллов самое удобное начинать с моделей. * При небольшом навыке легко научиться находить символы быстро и безошибочно. В случае трудности определения того или иного символа на-глаз, следует прибегать к буквенным индексам. На первых двух-трех моделях полезно определить индексы всех без исключения граней, для того чтобы вполне освоиться с правилами знаков. На следующих моделях достаточно ограничивать определение одной гранью каждой присутствующей формы (по возможности указывать символы с положительными индексами). Для удобства работы и запоминания приведена таблица установок кристаллов всех сингоний (табл. 22).

4. Метод косинусов

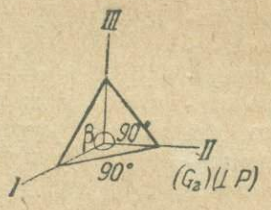
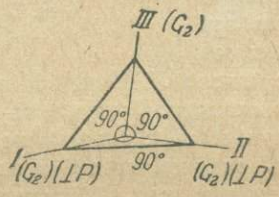
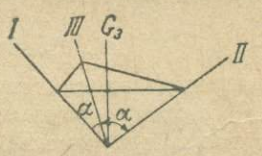
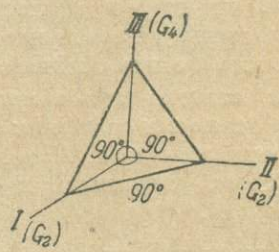
Для точного определения символов прибегают к стереографическим проекциям. На стереографической проекции устанавливают положение проекций единичной грани и кристаллографических осей (или вместо кристаллографических осей — положение проекций координатных граней, линиями пересечения которых являются кристаллографические оси). Остановимся только на одном способе нахождения символов на стереографической проекции, способе, разработанном Г. В. Вульфом и носящим название метода косинусов.

Применение этого метода основано на следующей теореме:

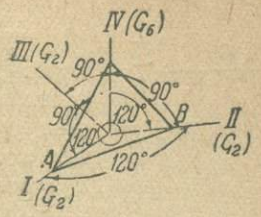
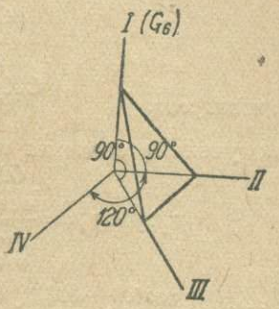
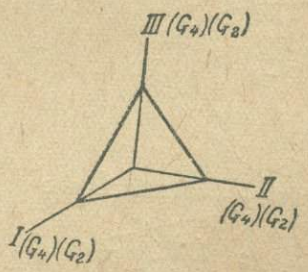
Индексы символа грани прямо пропорциональны косинусам углов, которые составляют нормаль к данной грани с соответственными кристаллографическими осями. При этом эти косинусы должны измеряться косинусами углов, составленных соответственными осями с нормалью к единичной грани.

* Специальные комплекты для таких упражнений изготовляются кристалло-модельной мастерской Федоровского института в Ленинграде.

Установки кристаллов разных сингоний

Сингония	Расположение кристаллографических осей и углы между ними	Схема осей	Расположение единичной грани и ее параметры a, b и c
Агирная (триклинная)	*III* — вертикальна *I* — приблизительно в сторону наблюдателя *II* — приблизительно вправо $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90°$		$a \neq b \neq c$
Моногирная (моноклинная)	*II* ∥ G_2 или ⊥ p — вправо *III* — вертикальна *I* — к наблюдателю с некоторым наклоном вниз $\alpha = \gamma = 90° \neq \beta$		$a \neq b \neq c$
Дигирная (ромбическая)	*III* ∥ G_2 — вертикальна *I* и *II* — горизонтальны *I* ∥ G_2 или ⊥ p — к наблюдателю *II* ∥ G_2 или ⊥ p — вправо $\alpha = \beta = \gamma = 90°$		$a \neq b \neq c$
Тригирная (тригональная)	*I*, *II*, *III* — равно наклонены *I* — приблиз. к наблюд. и вверх *II* — прибл. вправо вверх *III* — » влево » $\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$		(горизонтальна) $a = b = c$
Тетрагирная (тетрагональная)	*III* ∥ G_4 или G_{4i} — вертикальна *I* и *II* — горизонтальны *I* — к наблюдателю *II* — вправо $\alpha = \beta = \gamma = 90°$		$a = b \neq c$

Продолжение

Сингония	Расположение кристаллографических осей и углы между ними	Схема осей	Расположение единичной грани и ее параметры a, b и c
Гексагирная (гексагональная) Установка Браве	$IV \parallel G_6$ или G_{6i} — вертикальна I, II и III — горизонтальны (горизонтальны) I — к наблюдателю II — под углом в 120° против часовой стрелки от оси I III — под углом в 120° по часовой стрелки от оси I		$a = b = c \neq d$, где a, b и c — параметры по горизонтальным осям, а параметр d по вертикальной оси
Гексагирная (гексагональная) Установка Федорова	$I \parallel G_6$ или G_{6i} — вертикальна II, III и IV — горизонтальны II — вправо III — под углом в 60° по часовой стрелке от оси II IV — под углом в 60° по часовой стрелке от оси III		$a \neq b = c = d$ где a — параметр по верт. оси; b, c и d по горизонтальн. осям
Полигирная (кубическая)	Оси — по $3G_4$, а если их нет, то по $3G_2$ I — к наблюд. II — вправо III — вверх $\alpha = \beta = \gamma = 90°$		$a = b = c$

Пусть (фиг. 314) I, II и III — три кристаллографических оси, $A_0B_0C_0$ — единичная грань, ABC — некоторая грань с символом $(p_1p_2p_3)$, ON_0 — нормаль к единичной грани и ON — нормаль к грани $(p_1p_2p_3)$.

Обозначим углы ON_0 с кристаллографическими осями I, II и III соответственно через λ_0, μ_0 и ν_0.

$$\angle N_0OA_0 = \lambda_0;\ \angle N_0OB_0 = \mu_0;\ \angle N_0OC_0 = \nu_0.$$

Аналогичные углы ON обозначим через λ, μ и ν.

$$\angle NOA = \lambda;\ \angle NOB = \mu;\ \angle NOC = \nu.$$

Требуется доказать, что

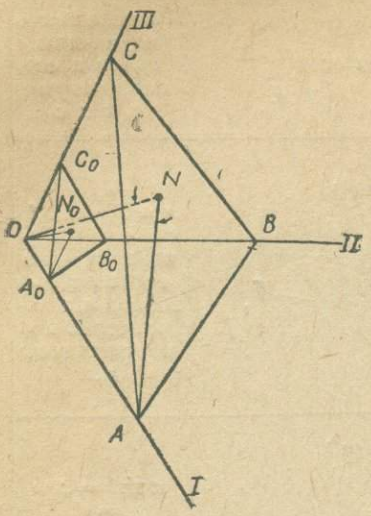
$$\boxed{p_1 : p_2 : p_3 = \frac{\cos\lambda}{\cos\lambda_0} : \frac{\cos\mu}{\cos\mu_0} : \frac{\cos\nu}{\cos\nu_0}}. \qquad (1)$$

По определению индексов символа грани имеем:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{\left(\frac{OA}{OA_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OB}{OB_0}\right)} : \frac{1}{\left(\frac{OC}{OC_0}\right)};$$

иначе

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{OA_0}{OA} : \frac{OB_0}{OB} : \frac{OC_0}{OC}. \qquad (2)$$



Фиг. 314. Теорема косинусов.

Выразим параметры граней ABC и $A_0B_0C_0$ через длины перпендикуляров ON и ON_0. Для этого из оснований этих перпендикуляров проводим прямые NA, NB, NC, N_0A_0, N_0B_0 и N_0C_0. Из полученных прямоугольных (при N и N_0) треугольников NOA, NOB, NOC, N_0OA_0, N_0OB_0 и N_0OC_0 имеем:

$$OA = \frac{ON}{\cos\lambda};\ OB = \frac{ON}{\cos\mu};\ OC = \frac{ON}{\cos\nu}.$$

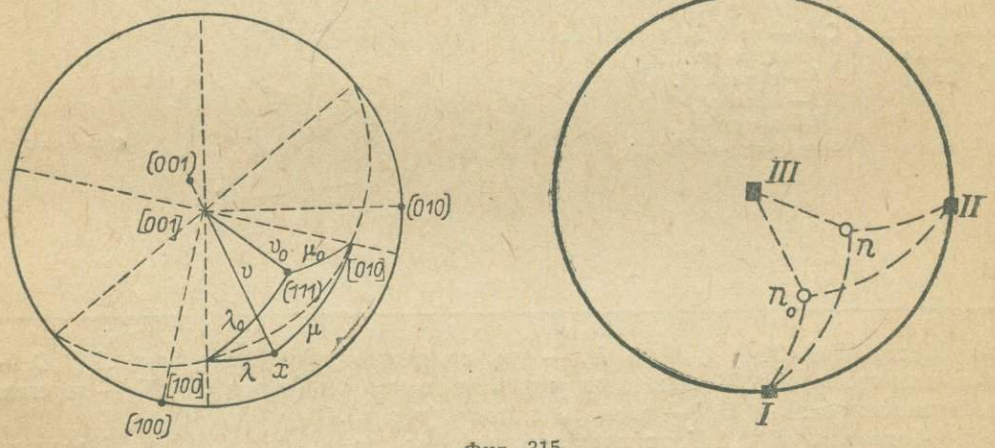
$$OA_0 = \frac{ON_0}{\cos\lambda_0};\ OB_0 = \frac{ON_0}{\cos\mu_0};\ OC_0 = \frac{ON_0}{\cos\nu_0}.$$

Подставляя полученные значения параметров в выражение (2), получим:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{\frac{ON_0}{\cos\lambda_0}}{\frac{ON}{\cos\lambda}} : \frac{\frac{ON_0}{\cos\mu_0}}{\frac{ON}{\cos\mu}} : \frac{\frac{ON_0}{\cos\nu_0}}{\frac{ON}{\cos\nu}}.$$

Иначе:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{\cos\lambda}{\cos\lambda_0} \cdot \frac{ON_0}{ON} : \frac{\cos\mu}{\cos\mu_0} \cdot \frac{ON_0}{ON} : \frac{\cos\nu}{\cos\nu_0} \cdot \frac{ON_0}{ON}.$$



Фиг. 315.

Сокращая на $\frac{ON_0}{ON}$, получим формулу (1), что и требовалось доказать.

Формула (1) и служит для определения символов при помощи стереографической проекции. В стереографической проекции изображаются нормали к граням кристалла. Пусть нормаль к грани $(p_1p_2p_3)$ изображается точкой n; нормаль к единичной грани — n_0. Пусть стереографические проекции кристаллографических осей изображаются точками I, II и III* (фиг. 315).

* Если непосредственно на чертеже не удается установить проекций I, II и III, то легко их построить, так как они являются точками пересечения дуг, изображающих стереографические проекции координатных граней (см. задачу 6, отдел III).

Угол λ между направлением n и направлением I легко найти совмещая точки n и I с одним из меридианов сетки Вульфа. Тогда число делений по этому меридиану между точками n и I и даст угол λ (см. задачу 6 в отделе III). Аналогично находится и угол λ_0. Совмещением с меридианом точек n и II находится угол μ. Аналогично определяется и μ_0. Подобным же путем определяется ν и ν_0. Когда все эти углы найдены, останется только по таблицам выписать косинусы найденных углов, поделить их соответственным образом друг на друга, и символ будет определен.

λ, μ, ν, λ_0, μ_0, и ν_0 определяются на сетке Вульфа; cos λ, cos μ и cos ν берутся по таблицам натуральных тригонометрических величин, полученные числа делятся на cos λ_0, cos μ_0 и cos ν_0, которые находятся попутно с предыдущими определениями. Деление проще всего выполняется при помощи логарифмической линейки. Не следует думать, что при этом должны получиться три целых числа. Будет грубой ошибкой округлять полученные три числа до целых чисел. Каждое из чисел в отдельности может и не быть целым: только лишь их отношение должно быть равно отношению целых чисел. Практически, ввиду погрешностей кристаллообразования, кристаллоизмерения и построения проекций измерения углов на сетке, отношение полученных трех чисел оказывается только приблизительно равным отношению чисел целых. Поэтому иногда остаются некоторые сомнения в правильности определения. Помогает то обстоятельство, что индексы в большинстве случаев являются очень небольшими числами: нулями, единицами, двойками, тройками; индексы, выражающиеся двузначными числами, встречаются очень редко.

Упражнение. Измерения кристалла, произведенные на двукружном гониометре, дали следующие значения координат его граней: *1* (10°05′; 90°00′); *2* (40°00′; 90°00′); *3* (69°51′; 90°00′); *4* (88°53′; 90°00′); *5* (130°01′; 90°00′); *6* (171°03′; 90°00′); *7* (190°10′; 90°00′); *8* (220°01′; 90°00′); *9* (249°46′; 90°00′); *10* (269°05′; 90′00′); *11* (309°57′; 90°00′); *12* (351°05′; 90°00′); *13* (130°03′; 43°23′); *14* (310°02′; 43°30′); *15* (88°56′; 51°28′); *16* (170°59′; 51°30′); *17* (269°02′; 51°27′); *18* (351°03′; 51°26′); *19* (∞;0°,00′); *20* (60°58′; 52°53′); *21* (198°00′; 52°50′); *22* (240°30′; 53°10′); *23* (18°10′;53°40′); *24* (60°54′; 33°25′). (Грани, симметричные грани *24*, не давали сигналов). Определить методом косинусов символы всех граней данного кристалла.

Глава XVI

СИМВОЛЫ РЯДОВ и РЕБЕР

1. Основные понятия и определения

Пусть *OI*, *OII* и *OIII* — три координатных ряда решетки некоторого кристалла (фиг. 316). *ABC* — плоская сетка, параллельная единичной грани (111). Пусть нам дано какое-либо ребро кристалла или, вообще, некоторый ряд решетки. Мы знаем, что через любой узел проходит ряд, параллельный данному. Возьмем ряд, параллельный данному и проходящий через начало координат *O*. Пусть этот ряд будет рядом *ON*. Для того чтобы охарактеризовать положение этого ряда в пространстве, необходимо знать положение в этом ряду хотя бы одной точки, не совпадающей с началом координат. Пусть координаты точки *N* будут x, y и z. Если эти координаты измерять примитивными промежутками единичной грани a_0, b_0, c_0, то три числа r_1, r_2 и r_3, пропорциональные полученным таким образом координатам, будут вполне определять положение ряда в пространстве:

$$r_1 : r_2 : r_3 = \frac{x}{a_0} : \frac{y}{b_0} : \frac{z}{c_0}.$$

Например, на фиг. 316 положение ряда *ON* можно охарактеризовать числами

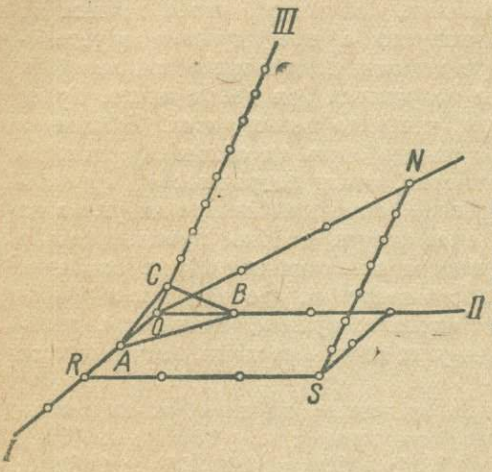
$$r_1 : r_2 : r_3 = \frac{OR}{OA} : \frac{RS}{OB} : \frac{SN}{OC} = 2 : 3 : 7.$$

Можно доказать, что отношение чисел r_1, r_2 и r_3 всегда равно отношению целых и взаимно-простых чисел. Доказательство будет нами приведено ниже, сейчас же дадим определение:

Символом ребра кристалла или ряда решетки называется совокупность трех наименьших целых чисел $[r_1r_2r_3]$, прямо-пропорциональных координатам любой точки ряда, параллельного данному и проходящего через начало координат. При этом координаты должны измеряться параметрами единичной грани:

$$r_1 : r_2 : r_3 = \frac{x}{a_0} : \frac{y}{b_0} : \frac{z}{c_0}.$$

В отличие от символов граней, символы ребер заключаются не в круглые, но в квадратные скобки. Как и для символов граней, каждое из чисел r_1, r_2 и r_3 называется индексом символа.



Фиг. 316.

На фиг. 316 всякое ребро кристалла и всякий ряд решетки, параллельный ряду *ON*, имеет символ [237].

Символы всех параллельных ребер одинаковы и называются символами пояса, так как параллельные ребра образуются гранями одного пояса.

Рассмотрим символы координатных рядов (кристаллографических осей).

Для определения символа первой кристаллографической оси *OI*, возьмем любую точку на этой оси и рассмотрим ее координаты. Имеем: $x = a$; $y = 0$; $z = 0$. Индексы символа найдутся из пропорций:

$$r_1 : r_2 : r_3 = \frac{x}{a_0} : \frac{y}{b_0} : \frac{z}{c_0} =$$

$$= \frac{a}{a_0} : \frac{0}{b_0} : \frac{0}{c_0} = \frac{a}{a_0} : 0 : 0.$$

Умножая каждый из индексов на $\frac{a_0}{a}$, получим:

$$r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 0 : 0.$$

Отсюда следует, что искомый символ [100]. Аналогично нетрудно найти символы второй и третьей кристаллографической оси.

Первая кристаллографическая ось имеет символ					[100]
Вторая	„	„	„	„	[010]
Третья	„	„	„	„	[001]

Для определения символов различных других рядов (или ребер) удобнее всего пользоваться зависимостью между символами граней и символами ребер.

Докажем следующую теорему:

Если символ грани или серии сеток $(p_1p_2p_3)$ и символ ребра (или ряда), в ней лежащего, — $[r_1r_2r_3]$, то тогда между индексами имеет место соотношение:

$$p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3 = 0.$$

Из определения символа ребра (или ряда) следует:

$$r_1 : r_2 : r_3 = \frac{x}{a_0} : \frac{y}{b_0} : \frac{z}{c_0}$$

$$\text{или: } r_1 = k\frac{x}{a_0};\ r_2 = k\frac{y}{b_0};\ r_3 = k\frac{z}{c_0}, \qquad (1),$$

где k — некоторый коэфициент пропорциональности, a_0, b_0 и c_0 — параметры единичной грани, x, y и z — координаты некоторой точки прямой, параллельной данному ребру и проходящей через начало координат.

Найдем эти координаты из уравнения (1):

$$x = \frac{r_1}{k}a_0;\quad y = \frac{r_2}{k}b_0;\quad z = \frac{r_3}{k}c_0. \qquad (2)$$

После этих предварительных определений найдем уравнение плоскости $(p_1p_2p_3)$. Если обозначить параметры грани $(p_1p_2p_3)$ через a, b и c, то оно примет такой вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

В этой плоскости лежит данное ребро (ряд) $[r_1r_2r_3]$. Уравнение плоскости, параллельной нашей грани $(p_1p_2p_3)$ и проходящей через начало координат, не имеет свободного члена:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0. \tag{3}$$

В этой плоскости должна лежать прямая, проходящая через начало координат и параллельная данному ребру (ряду) $[r_1r_2r_3]$. Поэтому координаты любой точки этой прямой должны удовлетворять уравнению плоскости (3).

Вследствие этого и предварительно найденные нами координаты (2) некоторой точки этой прямой должны удовлетворять уравнению плоскости (3). Подставим значения этих координат (2) в уравнение (3):

$$\frac{r_1a_0}{ka}+\frac{r_2b_0}{kb}+\frac{r_3c_0}{kc}=0. \tag{4}$$

Из определения символа грани следует (см. стр. 248):

$$p_1:p_2:p_3=\frac{1}{\frac{a}{a_0}}:\frac{1}{\frac{b}{b_0}}:\frac{1}{\frac{c}{c_0}}$$

или

$$p_1=l\frac{a_0}{a};\ p_2=l\ \frac{b_0}{b};\ p_3=l\ \frac{c_0}{c}, \tag{5}$$

где l — коэфициент пропорциональности.

Из уравнения (5) следует:

$$a=l\frac{a_0}{p_1};\ b=l\ \frac{b_0}{p_2};\ c=l\frac{c_0}{p_3}. \tag{6}$$

Подставим эти значения a, b и c в уравнение (4). Получим

$$\frac{r_1a_0}{kl\frac{a_0}{p_1}}+\frac{r_2b_0}{kl\frac{b_0}{p_2}}+\frac{r_3c_0}{kl\frac{c_0}{p_3}}=0. \tag{7}$$

Произведя сокращение и отбрасывая общие множители k и l, получим

$$p_1r_1+p_2r_2+p_3r_3=0, \tag{8}$$

что и требовалось доказать.

Полученная нами формула (8) позволяет определять символы ребер по символам граней. Любое ребро кристалла является линией пересечения двух некоторых граней (так же, как любой ряд решетки является линией пересечения двух плоских сеток).

Пусть символы этих двух граней или серий (плоских сеток) будут $(p_1p_2p_3)$ и $(q_1q_2q_3)$. Искомый символ ребра обозначим через $[r_1r_2r_3]$. Так как ребро $[r_1r_2r_3]$ лежит в грани $(p_1p_2p_3)$, к нему применимо выведенное выше соотношение:

$$p_1r_1+p_2r_2+p_3r_3=0. \tag{9}$$

Так как ребро $[r_1r_2r_3]$ лежит и в грани $(q_1q_2q_3)$, то, согласно доказанной теореме, должно существовать и такое соотношение

$$q_1r_1+q_2r_2+q_3r_3=0. \tag{10}$$

Если символы $(p_1p_2p_3)$ и $(q_1q_2q_3)$ известны, то совместным решением уравнений (9) и (10) можно найти индексы r_1, r_2 и r_3. Так как имеем только два уравнения с тремя неизвестными, то возможно определить лишь отношения искомых неизвестных $r_1:r_2:r_3$. Однако для наших целей этого вполне достаточно.

Тем или иным способом решений алгебраических уравнений придем к следующим выводам: *

$$r_1:r_2:r_3=(p_2q_3-q_2p_3):(p_3q_1-q_3p_1):(p_1q_2-q_1p_2). \tag{11}$$

Формула (11) и служит для определения символов ребер по символам граней и символов рядов по сериальным символам плоских сеток.

Для быстрого получения искомых ответов по формуле (1) удобно пользоваться следующим мнемоническим правилом.

---

* Проще всего при помощи теории определителей: отношение $r_1:r_2:r_3$ будет равно отношению миноров детерминанта $\begin{vmatrix} 111 \\ p_1p_2p_3 \\ q_1q_2q_3 \end{vmatrix}$, разложенного по первой строке.

Напишем дважды индексы символов данных граней:

$$p_1p_2p_3p_1p_2p_3$$
$$q_1q_2q_3q_1q_2q_3.$$

Отчеркнем правые и левые столбцы:

$$\begin{array}{c|c|c} p_1 & p_2p_3p_1p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2q_3q_1q_2 & q_3 \end{array}$$

Производя в средней части перекрестные перемножения, берем разности полученных чисел:

$$\begin{array}{c|c|c} p_1 & p_2 \quad p_3 \quad p_1 \quad p_2 & p_3 \\ q_1 & \times \quad \times \quad \times & q_3 \\ & q_2 \quad q_3 \quad q_1 \quad q_2 & \end{array}$$

$$(p_2q_3 - q_2p_3) : (p_3q_1 - q_3p_1) : (p_1q_2 - q_1p_2) = r_1 : r_2 : r_3$$

Примеры:

1) Найти символ ребра пересечения граней (123) и (201).

Пишем:

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 \quad 3 \quad 1 \quad 2 & 3 \\ & \times \quad \times \quad \times & \\ 2 & 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 & 1 \end{array}$$

$$(2 \cdot 1 - 0 \cdot 3) : (3 \cdot 2 - 1 \cdot 1) : (1 \cdot 0 - 2 \cdot 2) = (2 - 0) : (6 - 1) : (0 - 4) = 2 : 5 : \overline{4}.$$

Искомый символ — $[25\overline{4}]$.

2) Найти символ ряда решетки, который является линией пересечения ряда плоских сеток с сериальными символами $(\overline{2}11)$ и $(\overline{1}20)$.

$$\begin{array}{c|c|c} 2 & \overline{1} \quad 1 \quad 2 \quad \overline{1} & 1 \\ & \quad \quad \quad \quad & \\ 1 & \overline{2} \quad 0 \quad 1 \quad \overline{2} & 0 \end{array}$$

$$(\overline{1} \cdot 0 - \overline{2} \cdot 1) : (1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) : (2 \cdot \overline{2} - 1 \cdot \overline{1}) = (0 - \overline{2}) : (1 - 0) : (\overline{4} - \overline{1}) = 2 : 1 : \overline{3}.$$

Искомый символ $[21\overline{3}]$.

Нетрудно видеть, что если сначала написать индексы $q_1q_2q_3$, а затем индексы $p_1p_2p_3$, то в ответах знаки изменятся на обратные. Так, если в нашем первом примере написать:

$$\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 & 1 \\ & \times \quad \times \quad \times & \\ 1 & 2 \quad 3 \quad 1 \quad 2 & 3 \end{array}$$

получим не $2:5:\overline{4}$, но $\overline{2}:\overline{5}:4$.

Найденный символ $[\overline{2}\overline{5}4]$ следует считать одинаковым с символом $[25\overline{4}]$. Он отвечает направлению, параллельному $[25\overline{4}]$ в противоположную сторону.

При помощи формулы (11), можно доказать, что индексы символов ребер (и рядов) не могут выражаться иррациональными числами, но должны быть числами целыми.

Действительно, индексы p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 — числа целые. Поэтому и их попарные произведения — числа целые. Отсюда и разности этих попарных произведений должны быть числами целыми (положительными или отрицательными). Поэтому правая часть формула (11) является отношением целых чисел. Таким образом индексы $r_1r_2r_3$ — числа всегда целые.

2. Символы рядов и ребер гексагирных (гексагональных) кристаллов

Из определения символа ребра, данного в начале предыдущего раздела, следует, что индексы ребра пропорциональны трем векторам *OR*, *RS* и *SN* (фиг. 316), которые замыкают направление *ON*, параллельное данному ребру. Векторы по *OR*, *RS* и *SN* должны быть проведены параллельно кристаллографическим осям.

Если кристаллографических осей не три, но четыре, как в гексагирной (гексагональной) сингонии, следует замкнуть направление *ON* не тремя, но четырьмя векторами, параллельными четырем кристаллографическим осям. На фиг. 317 дан пример одного из бесчисленных множеств способов замкнуть ребро *ON* при помощи четырех векторов *OR*, *RS*, *ST* и *TN*, параллельных четырем кристаллографическим осям *I*, *II*, *III* и *IV* (установка Браве). Четыре числа $[r_1r_2r_3r_4]$, пропорциональные проведенным векторам и

измеренные соответственными параметрами единичной грани, и называются символами ребра для гексагирной (гексагональной) сингонии:

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = \frac{OR}{a_0} : \frac{RS}{a_0} : \frac{ST}{a_0} : \frac{TN}{c_0}; \tag{1}$$

Ввиду неоднозначности такого определения принимают дополнительное условие, аналогичное условию для символа граней гексагирной (гексагональной) сингонии (см. стр. 259):

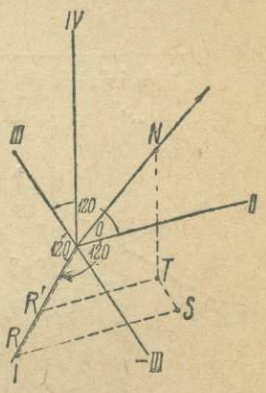
$$r_1 + r_2 + r_3 = 0. \tag{2}$$

Теорема 47. *Если символ грани $(p_1p_2p_3p_4)$ и символ ребра, в ней лежащего, — $[r_1r_2r_3r_4]$, то тогда между индексами символов имеет место соотношение*

$$(p_1 - p_3)\, r_1 + (p_2 - p_3)\, r_2 + p_4 r_4 = 0.$$

Если отбросить ось *III*, то символ нашей грани определится трехчленным символом $(p_1p_2p_4)$. Пусть трехчленный символ ребра при такой установке (без оси *III*) будет $[v_1v_2v_3]$. Числа v_1v_2, и v_3 пропорциональны координатам точки N ребра ON (фиг. 318 изображает то же, что и фиг. 317, но в плане: плоскость чертежа совпадает с плоскостью, в которой лежат оси *I*, *II* и *III*)

$$v_1 : v_2 : v_3 = \frac{OR'}{a_0} : \frac{R'T}{a_0} : \frac{TN}{c_0}. \tag{3}$$



Фиг. 317.

Найдем связь между символом $[v_1v_2v_3]$ и $[r_1r_2r_3r_4]$: $OR' = OR - R'R = OR - TR''$.

В треугольнике $TR''S$ все углы равны 60°, поэтому он равносторонний:

$TR'' = TS$. Поэтому $OR' = OR - TS$.

Далее имеем:

$$R'T = RS - R''S = RS - TS.$$

Отсюда

$$v_1 : v_2 : v_3 = \left(\frac{OR}{a_0} - \frac{TS}{a_0}\right) : \left(\frac{RS}{a_0} - \frac{TS}{a_0}\right) : \frac{TN}{c_0}.$$

Принимая во внимание выражение (1), получим

$$v_1 : v_2 : v_3 = (r_1 - r_3) : (r_2 - r_3) : r_4. \tag{4}$$

Связь между индексами $v_1v_2v_3$ и индексами $p_1p_2p_4$ определяется формулой

$$v_1p_1 + v_2p_2 + v_3p_3 = 0.$$

Подставляя в эту формулу, вместо $v_1v_2v_3$, числа, им пропорциональные, из выражения (4), получим:

$$(r_1 - r_3)\, p_1 + (r_2 - r_3)\, p_2 + r_4p_4 = 0. \tag{5}$$

Преобразуем выражение (5), пользуясь для этого принятым соотношением (2), из которого следует, что

$$\begin{gathered} r_1 + r_2 = -r_3. \\ (2r_1 + r_2)\, p_1 + (2r_2 + r_1)\, p_2 + r_4p_4 = 0 \\ 2r_1p_1 + r_2p_1 + r_1p_2 + r_4p_4 = 0 \\ (2p_1 + p_2)\, r_1 + (2p_2 + p_1)\, r_2 + r_4p_4 = 0. \end{gathered}$$

Но, ввиду того, что $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ (или $p_1 + p_2 = -p_3$) (см. стр. 259), имеем:

$$(p_1 - p_3)\, r_1 + (p_2 - p_3)\, r_2 + p_4r_4 = 0, \tag{6}$$

что и требовалось доказать.

Эта формула позволяет находить символы ребра по символам двух граней, линией пересечения которых является данное ребро.

Пусть мы имеем две грани: $(p_1p_2p_3p_4)$ и $(q_1q_2q_3q_4)$. Каков символ ребра параллельного обеим граням?

Согласно (6) имеем:

$$\begin{gathered} (p_1 - p_3)\, r_1 + (p_2 - p_3)\, r_2 + p_4r_4 = 0 \\ (q_1 - q_3)\, r_1 + (q_2 - q_3)\, r_2 + q_4r_4 = 0. \end{gathered}$$

Решим совместно оба эти уравнения:

$$\begin{array}{c|cc|c} (p_1 - p_3) & (p_2 - p_3) & p_4 & (p_1 - p_3) & (p_2 - p_3) & p_4 \\ (q_1 - q_3) & (q_2 - q_3) & q_4 & (q_1 - q_3) & (q_2 - q_3) & q_4 \end{array}$$

$$[(p_2 - p_3)\, q_4 - (q_2 - q_3)\, p_4] : [p_4 (q_1 - q_3) - q_4 (p_1 - p_3)] : [(p_1 - p_3)\, (q_2 - q_3)] - (q_1 - q_3)\, (p_2 - p_3)] = r_1 : r_2 : r_4;\ r_3 = -(r_1 + r_2).$$

Таким образом нахождение четырехчленных символов ребер делается совершенно так же как и при случае трехчленных символов с индексами не $(p_1p_2p_4)$, но $(p_1 - p_3)$, $(p_2 - p_3)$, p_4. Таким образом можно дать следующее правило:

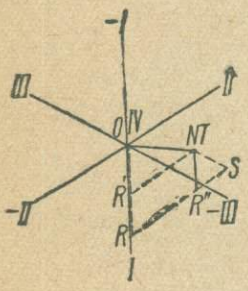
Чтобы по двум четырехчленным символам граней найти четырехчленный символ ребра, переводят символы в трехчленные, вычитая третий индекс из первого и второго. По полученным редуцированным индексам (суб-индексам) по обычному способу находят первый, второй и четвертый индексы искомого символа ребра. Третий индекс находится как отрицательная сумма первых двух.

Пример.

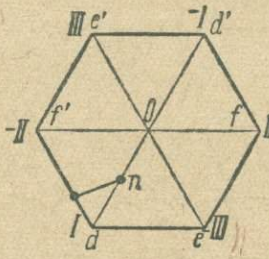
Найти символ ребра пересечения граней $(11\bar{2}\bar{2})$ и $(\bar{2}112)$. Находим редуцированные символы:
$(1\text{—}\bar{2})$, $(1\text{—}\bar{2})$, 2 иначе (332) и $(\bar{2}\text{—}1)$, $(1\text{—}1)$, 2 иначе $(\bar{3}02)$. Пользуясь полученными символами (332) и $(\bar{3}02)$, находим три индекса искомого символа:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} 3 & 3 & & 2 & & 3 & 3 & 2 \\ & & \times & & \times & & \times & \\ \bar{3} & 0 & & 2 & & \bar{3} & 0 & 2 \end{array}$$

$r_1 : r_2 : r_4 = (6\text{—}0) : (\bar{6}\text{—}6) : (0\text{—}\bar{9}) = 6 : \bar{12} : 9 = 2 : \bar{4} : 3$; $r_3 = -(2\text{—}4) = 2$.



Фиг. 318.



Фиг. 319.

Искомый символ: $[2\bar{4}23]$.

Найдем символы кристаллографических осей.

Первую кристаллографическую ось следует рассматривать как прямую, параллельную граням (0001) и $(01\bar{1}0)$ (след этой грани изображается отрезком *ef* на фиг. 319). Редуцированные символы: (001) и (120). Отсюда:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 2 & 0 & & 1 & & 2 & 0 \\ & & & \times & & \times & & \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & & 0 & 1 \end{array}$$

$r_1 : r_2 : r_4 = 2 : \bar{1} : 0$; $r_3 = -(2 + \bar{1})$

Искомый символ: $[2\bar{1}\bar{1}0]$.

Аналогично находятся символы и других кристаллографических осей.

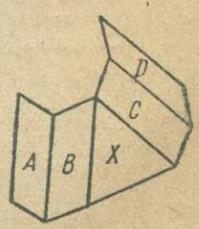
Для гексагональной сингонии, при установке Браве, первая кристаллографическая ось имеет символ $2\bar{1}\bar{1}0$; *вторая имеет символ* $\bar{1}2\bar{1}0$, *третья имеет символ* $[\bar{1}\bar{1}20]$; *четвертая ось имеет символ* [0001].

На нахождении символов ребер для гексагирной (гексагональной) сингонии при установке Федорова мы останавливаться не будем.

3. Закон Вейсса и метод поясов

Пусть мы имеем на кристалле две пары граней AB и CD (фиг. 320).

Пусть первая пара пересекается по ребру A/B, не параллельному ребру C/D между гранями второй пары. Мы знаем (см. закон плоскогранности и прямореберности) что параллельно двум непараллельным ребрам располагаются плоские сетки. Таким образом должны быть плоские сетки, параллельные одновременно ребрам A/B и C/D. Рассмотрим грань, параллельную этим плоским сеткам. Такая грань будет или действительной, или возможной гранью кристалла (грань X на фиг. 320). Эта грань пересечет грани первой пары по ребрам, параллельным их ребру A/B (ребро X/B параллельно A/B). Таким образом грань X образует с гранями A и B пояс граней (или зону). С другой стороны, грань X пересечет вторую пару граней по ребрам, параллельным их ребру C/D (ребро X/C параллельно C/D). Таким образом эта грань лежит в одном поясе и с гранями C и D. Отсюда видно, что



Фиг. 320.

грани кристалла располагаются поясами; каждая грань может принадлежать одновременно нескольким поясам.

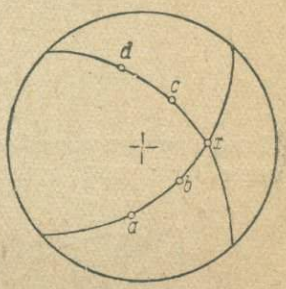
Это положение впервые было сформулировано немецким кристаллографом Вейссом (в 1804 г.) и носит название закона Вейсса.

Рассмотрим, каким образом этот закон сказывается на стереографических проекциях кристалла.

Мы знаем, что (см. замечание к задаче 5 по стереографическим проекциям) стереографические проекции нормалей к граням одного пояса располагаются на проекциях дуг больших кругов (могут совмещаться с меридианами сетки Вульфа). Так как каждая грань может принадлежать нескольким поясам, то стереографическая проекция нормали располагается одновременно на нескольких проекциях дуг больших кругов, т. е. является точкой пересечения этих дуг.

Если, например, грань X лежит в поясе граней A и B, то проекция нормали x (фиг. 321) должна лежать на одной дуге с проекциями a и b. Так как грань X лежит еще и в поясе граней C и D, то проекция x должна лежать и на одной дуге с проекциями c и d. Таким образом x должна лежать на пересечении дуг ab и cd.

Отсюда вытекает способ нахождения возможных граней кристалла по двум парам заданных. Проводя дуги через проекции одной пары и через проекции второй пары, получим в точке пересечения проведенных дуг точку, изображающую нормаль к грани, лежащей в поясах обеих заданных пар.



Фиг. 321.

На указанных соотношениях базируется один из важнейших методов определения символов граней и ребер кристаллов при помощи стереографических проекций.

Пусть требуется определить символ грани X $(x_1x_2x_3)$, лежащей в пересечении дуг ab и cd. Пусть символ граней A, B, C и D соответственно будет $(a_1a_2a_3)$, $(b_1b_2b_3)$, $(c_1c_2c_3)$ и $(d_1d_2d_3)$.

Прежде всего находим символ ребра A/B $[r_1r_2r_3]$:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} a_1 & a_2 & & a_3 & a_1 & & a_2 & a_3 \\ & \times & & \times & & \times & & \\ b_1 & b_2 & & b_3 & b_1 & & b_2 & b_3 \end{array}$$

$$r_1 : r_2 : r_3 = (a_2b_3 - b_2a_3) : (a_3b_1 - b_3a_1) : (a_1b_2 - b_1a_2).$$

Символ ребра C/D — $[s_1s_2s_3]$:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} c_1 & c_2 & & c_3 & c_1 & & c_2 & c_3 \\ & \times & & \times & & \times & & \\ d_1 & d_2 & & d_3 & d_1 & & d_2 & d_3 \end{array}$$

$$s_1 : s_2 : s_3 = (c_2d_3 - d_2c_3) : (c_3d_1 - d_3c_1) : (c_1d_2 - d_1c_2).$$

Символ $[r_1r_2r_3]$, являясь символом ребра A/B, является вместе с тем и символом любого ребра, параллельного ребру A/B (и называется символом всего пояса). Поэтому и ребро X/B имеет символ $[r_1r_2r_3]$.

Символ $[s_1s_2s_3]$ относится не только к ребру C/D, но является символом любого ребра пояса этих граней, а потому является и символом ребра X/C. Зная символы двух ребер, нетрудно найти символ грани, параллельный одновременно обоим ребрам.

Так как ребро X/B лежит в грани X, то имеем:

$$x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3 = 0. \qquad (1)$$

Так как ребро X/C лежит в грани X, то имеем

$$x_1s_1 + x_2s_2 + x_3s_3 = 0. \qquad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} r_1 & r_2 & r_3 & r_1 & r_2 & r_3 \\ & \times & \times & \times & & \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = (r_2 s_3 - s_2 r_3) : (r_3 s_1 - s_3 r_1) : (r_1 s_2 - s_1 r_2)$$

Таким образом символ грани находится по символам двух ребер совершенно так же, как символ ребра по символам двух граней.

Определение символа грани X выполнено.

Пусть для примера символы грани A, B, C и D будут соответственно $(\bar{1}11)$, (101), (011), $(\bar{1}11)$.

Ребро A/B (пояс граней ABX):

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & 1 \\ & \times & \times & \times & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$[\bar{1}01]$$

Ребро C/D (пояс граней CDX):

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & \times & \times & \times & & \\ \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & 1 & 1 \end{array}$$

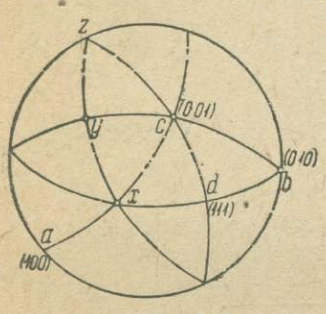
$$[01\bar{1}]$$

Искомый символ грани X:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 \\ & \times & \times & \times & & \\ 0 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} & 1 \end{array}$$

$$(111)$$

Итак, для нахождения символа любой грани X следует расположить проекцию нормали к этой грани на пересечении двух дуг, которые проходят через пары проекций с уже известными символами.



Фиг. 322.

Таким образом для применения метода необходимо, чтобы символы по крайней мере четырех граней были заранее известны. Это всегда имеет место, так как, производя установку кристалла, мы одну из граней принимаем за единичную (111), а три — за основные (100), (010) и (001). Следовательно, четыре грани имеют уже известные символы. Проводя дуги через проекции их нормалей, будем получать в точках пересечения этих дуг проекции нормалей к действительным или возможным граням, символы которых можно определить по вышеуказанному способу. Проводя через новые точки новые дуги, мы сможем определить символы и других граней. Необходимо суметь так расположить проводимые дуги, чтобы по две из них проходили через проекции нормалей к граням, символы которых подлежат определению.

Пусть, например, требуется определить символы граней X и Y кристалла, изображенного в стереографической проекции на фиг. 322. Пусть мы выбрали основными гранями грани A, B и C (100), (010) и (001). Единичная грань — грань D (111).

Проще всего найти символ грани X. Проводим дуги ac и bd. Убеждаемся, что точка x лежит в месте пересечения этих дуг.

Символ пояса ac:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & \times & \times & \times & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$[010]$$

Символ пояса bd:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \times & \times & \times & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$[10\bar{1}]$$

Символ грани X:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} \\ & \times & \times & \times & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

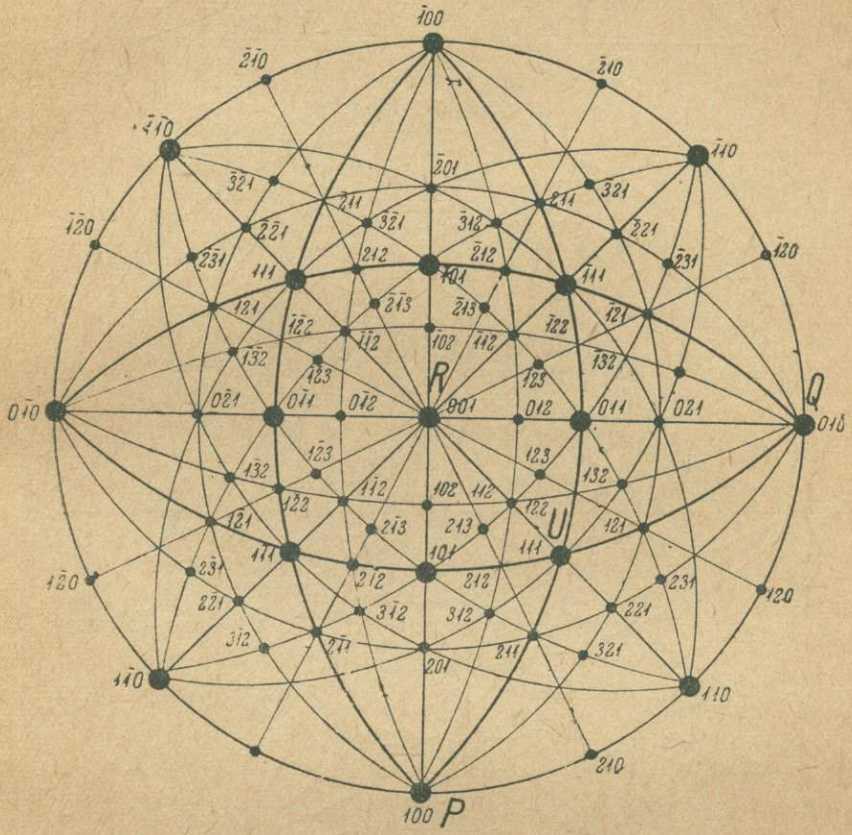
$$(101)$$

или же

$$\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} \\ \hline & & (\bar{1}0\bar{1}) & & & \end{array}.$$

В каком из найденных двух символов знаки правильны, а в каком — обратные, решаем по относительной ориентировке граней относительно основных. В нашем случае проекция x располагается между первой и третьей основной гранью и очевидно должна иметь положительные индексы по этим осям.

Таким образом искомый символ X — (101).



Фиг. 323.

Проекция y не лежит на дугах, соединяющих точки a, b, c и даже x.

Для определения ее символа придется прибегнуть к нахождению символа вспомогательной возможной грани. Действительно, из чертежа видно, что, если бы был известен символ Z, то символ Y было бы возможно определить (так как точка y лежит в месте пересечения дуг bc и xz). Поэтому необходимо предварительно определить z. Точка z лежит в месте пересечения дуг dc и ab (окружность проекции).

Символ пояса dc:

$$\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & [\bar{1}10] & & & \end{array}$$

Символ пояса ab:

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & [001] & & & \end{array}.$$

Символ грани Z:

0	0	1	0	0	1
	×	×	×		
$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$	1	0

$(\bar{1}\bar{1}0)$.

(Символ (110) не подходит, что следует из расположения проекции).

После того как символ вспомогательной грани определен, можно определить и символ Y.

Символ пояса bc:

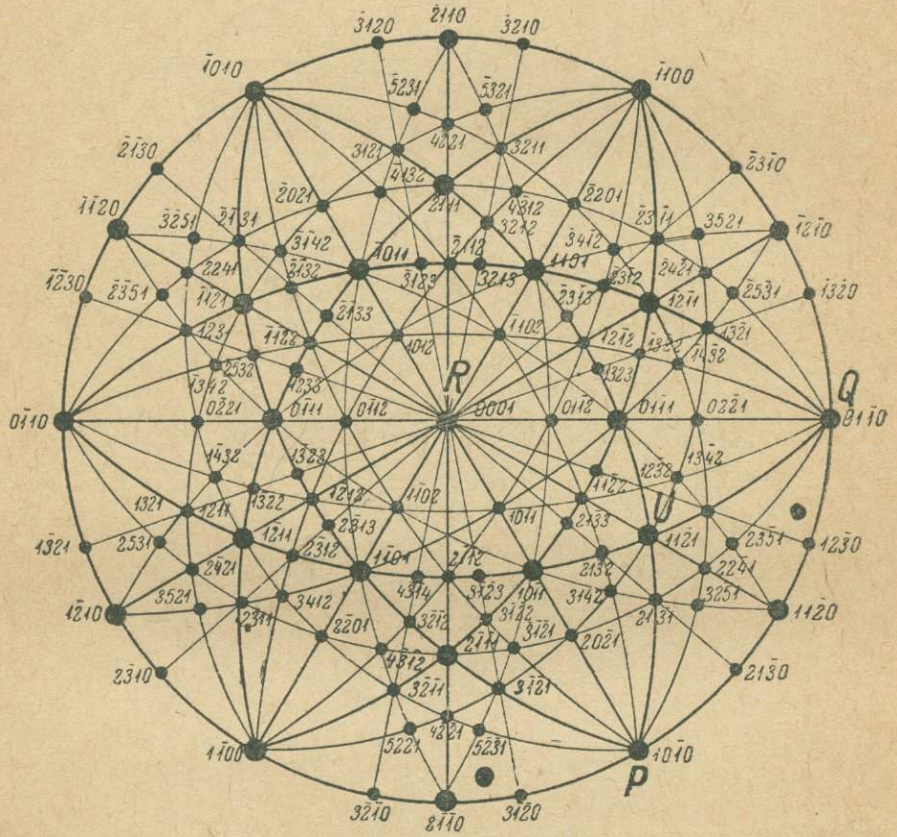
0	1	0	0	1	0
	×	×	×		
0	0	1	0	0	1

[100]

Символ пояса xz:

1	0	1	1	0	1
	×	×	×		
$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	0

$[1\,\bar{1}\,\bar{1}]$.



Фиг. 324.

Символ грани Y:

1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$
	×	×	×		
1	0	0	1	0	0

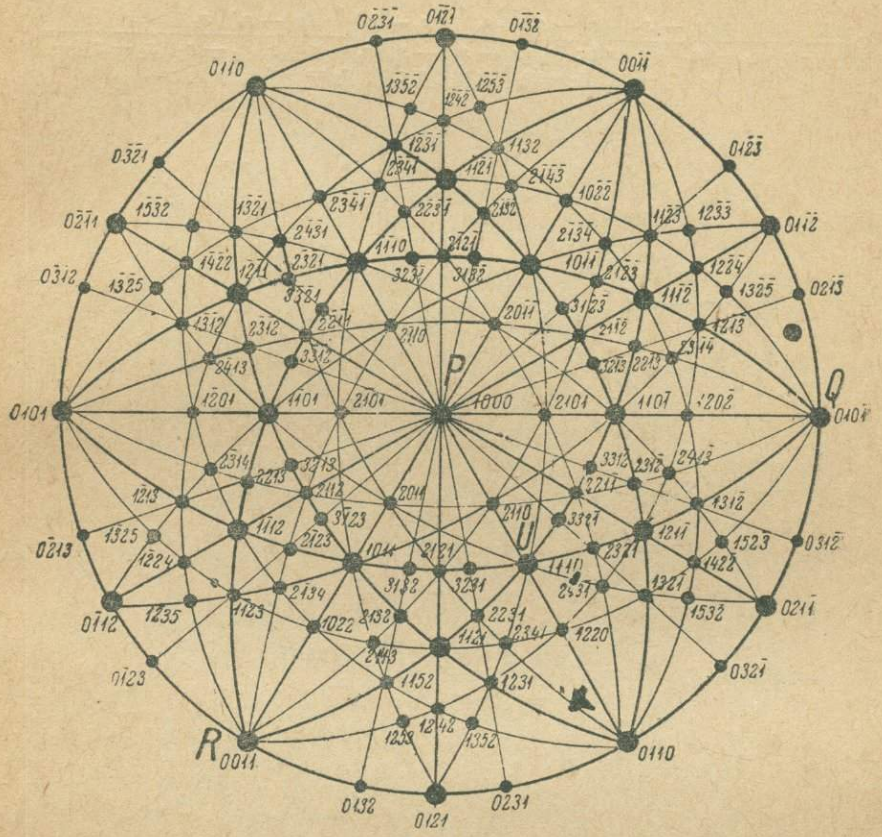
$(0\bar{1}1)$.

(Символ $(0\bar{1}\bar{1})$ не подходит, так как грань Y пересекает третью кристаллографическую ось над чертежом, а не под ним).

Составленные раз и навсегда стереографические проекции с проведенными дугами и с надписанными у точек пересечения символами этих дуг чрезвычайно упрощают применение описанного метода.

На фиг. 323 изображена такая проекция. Хотя она изображает кристалл в полигирной (кубической) сингонии, но вполне применима и к кристаллам других сингоний. Например, легко видеть, что эта проекция позволяет вполне точно найти символы X и Y фиг. 322.

Действительно, из фиг. 322 видим, что грань X лежит в пересечении дуг (100)/(001) и (010)/(111). Пользуясь фиг. 323, убеждаемся (не определяя символов поясов), что в пересечении дуг (100)/(001) и (010)/(111) лежит точка, намеченная символом (101). Отсюда символ X будет (101).



Фиг. 325.

Аналогично сразу же определится и символ Y ($0\bar{1}1$). Таким образом, имея перед собой фиг. 323, можно и не вычислять символ поясов, а прямо разыскивать значения нескольких символов.

Предлагаем занимающимся самостоятельно найти символы для кристаллов, приведенных в качестве примеров на стр. 90—91. В более сложных случаях для определения символов заданных граней приходится предварительно находить символы целого ряда вспомогательных граней. Применение метода становится затруднительным и кропотливым. При этом часто делается трудным уложить данную проекцию на пересечении дуг, проходящих через пары проекций с уже определенными символами. В этих случаях лучше всего прибегнуть к другим методам.

Для гексагирной (гексагональной) сингонии определение символа грани по символам двух ребер производится совершенно так же, как и определение символа ребра по символам двух граней. Действительно, выше (стр. 269) была

выведена формула, дающая связь между символом ребра $[r_1r_2r_3r_4]$ и символом грани $(p_1p_2p_3p_4)$, которая проходит через это ребро:

$$(r_1 - r_3)\,p_1 + (r_2 - r_3)\,p_2 + r_4 p_4 = 0.$$

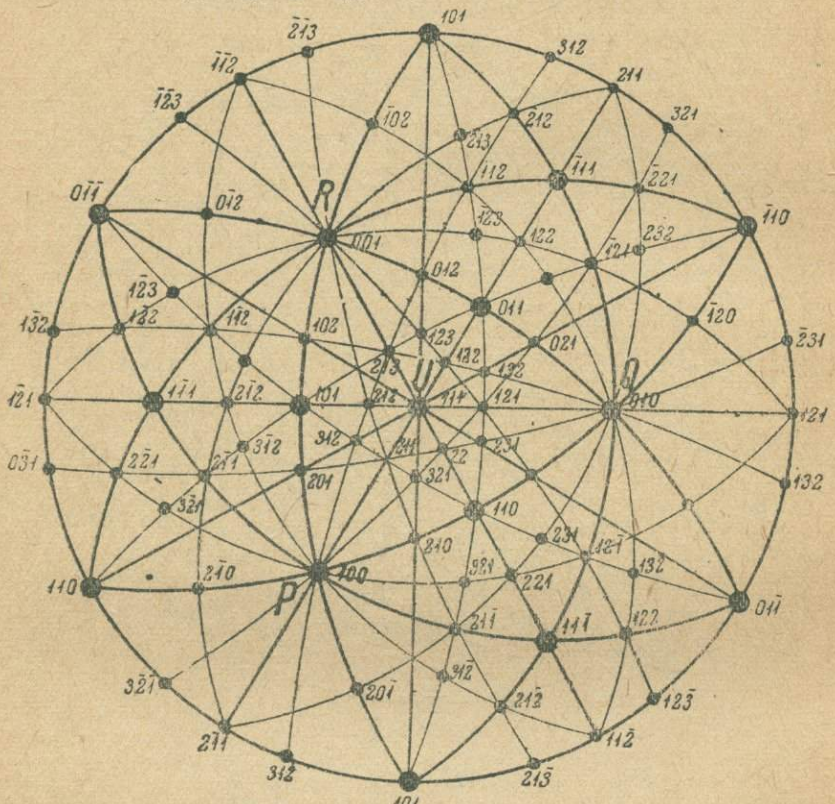
Если грань $(p_1p_2p_3p_4)$ проходит также через ребро $[s_1s_2s_3s_4]$, то будем иметь еще такое уравнение:

$$(s_1 - s_3)\,p_1 + (s_2 - s_3)\,p_2 + s_4 p_4 = 0.$$

Решая эти два уравнения совместно, найдем:

$$\begin{vmatrix} (r_1 - r_3) & (r_2 - r_3) & r_4 \\ (s_1 - s_3) & (s_2 - s_3) & s_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} (r_1 - r_3) & (r_2 - r_3) & r_4 \\ (s_1 - s_3) & (s_2 - s_3) & s_4 \end{vmatrix}$$

$$[(r_2 - r_3)\,s_4 - (s_2 - s_3)\,r_4] : [r_4\,(s_1 - s_3) - s_4\,(r_1 - r_3)] : [(r_1 - r_3)\,(s_2 - s_3) - (s_1 - s_3)\,(r_2 - r_3)] = p_1 : p_2 : p_4;\ p_3 = -(p_1 + p_2)$$



Фиг. 326.

Отсюда видно, что для нахождения символа грани по двум четырехчленным символам ребер необходимо прежде всего найти „редуцированные" индексы (субиндексы), вычитая третий индекс из первого и второго. По полученным редуцированным трехчленным символам находят по обычному способу индексы искомой грани. Третий индекс находится как отрицательная сумма первых двух.

Таким образом, метод поясов вполне применим и для гексагональных кристаллов.

Здесь еще бóльшую услугу оказывает готовая стереографическая проекция, на которой раз и навсегда расставлены символы у точек пересечений тех или иных дуг (фиг. 324). Пользование такой проекцией часто делает совершенно излишним нахождение символов ребер.

В заключение, приводим проекции с расставленными символами для кристаллов гексагирной (гексагональной) сингонии (установка Браве — фиг. 324, установка Федорова — фиг. 325) и тригональной сингонии (фиг. 326).

ОСНОВНЫЕ КРИСТАЛЛОФИЗИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

Глава XVII

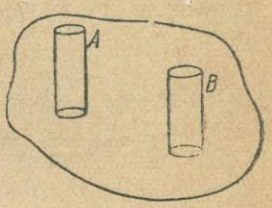
ЗАКОН КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ОДНОРОДНОСТИ

Перейдем теперь к рассмотрению таких следствий решетчатого строения кристаллов, которые обусловливают не столько геометрические, сколько физические свойства кристаллической материи.

Мы знаем, что вследствие существования трансляций различные участки кристаллического вещества построены совершенно тождественно. Если взять любую точку пространственной решетки (например, узел B_2, фиг. 16), то в каком угодно другом участке (который по своему объему превышает объем примитивного параллелепипеда решетки) найдется соответственная точка (например, узел D_4), вокруг которой все узлы пространственной решетки расположатся совершенно так же, как и узлы вокруг первой взятой точки.

Различные участки кристаллического вещества имеют одинаковое строение и ориентировку слагающих частиц и таким образом ничем не отличаются друг от друга.

Следствием этого является одно из фундаментальных свойств кристаллического вещества — закон кристаллической однородности.



Фиг. 327.

Кристаллическое вещество однородно, т. е. во всех своих частях обладает одинаковыми свойствами.

Если мы вырежем из двух любых участков кристаллического вещества два одинаковых по форме и ориентировке в пространстве кусочка, то оба будут обладать абсолютно одинаковыми свойствами.

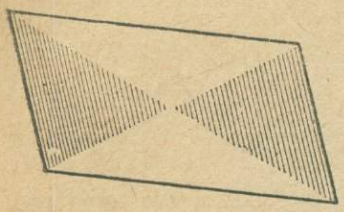
Цилиндры A и B (фиг. 327) имеют одинаковые цвет, удельный вес, теплопроводность, электропроводность, твердость и другие свойства.

Здесь следует заметить, что части кристаллического вещества, о которых говорится в законе (цилиндры A и B, фиг. 327), только в том случае будут обладать действительно одинаковыми свойствами, если их величина сильно превосходит величину примитивного параллелепипеда решетки. В противном случае, взяв для примера два участка — один с узлом пространственной решетки, а другой между узлами, мы, конечно, не можем ожидать, что свойства этих участков будут одинаковы. Только в участках, величина которых значительно превосходит величину примитивного параллелепипеда решетки, разница в строении двух любых равных и одинаково ориентированных в пространстве участков делается настолько незначительной, что не может отразиться на их свойствах. Однородность описываемого типа называется „прерывной однородностью“ (Ниггли).

С одним из частных проявлений этого закона мы уже сталкивались при рассмотрении явлений роста и регенерации кристаллов. Мы видели, что в соответствующем растворе кристаллы растут вокруг любого кусочка данного кристал-

лического вещества, независимо от того — будет ли это маленький кристаллик или осколок, взятый из любой, хотя бы пограничной части кристалла. Это показывает, что центральная часть, откуда начался рост, не отличается от своих периферических частей, и при медленном и спокойном росте кристалла последний во всех своих частях совершенно одинаков по своим свойствам.

Однако следует оговориться, что закон кристаллической однородности справедлив только для идеально-хорошо образованных кристаллов, в большинстве же случаев все кристаллы, хотя бы частично, обнаруживают некоторую неоднородность. Образование неоднородности обусловлено внешними причинами, из которых наиболее важными являются причины, связанные с условиями роста кристалла.



Фиг. 328.

Так, при быстром росте некоторых граней, последние, зарастая, захватывают частицы маточного раствора и тем самым создают внутри кристалла муть. При этом образуются своеобразные фигуры (фиг. 328) — фигура песочных весов в кристалле сернокислого цинка $ZnSO_4 \cdot 7H_2O$ и пирамиды зарастания в кристаллах квасцов $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$.

Часто включения, образующие муть, располагаются только по некоторым плоскостям (если включения образуются на определенных ребрах кристалла) или по некоторым прямым в виде цепочек или трубок (если включения образуются на определенных вершинах кристалла).

Кроме включений неоднородность кристаллов может обусловливаться еще и другими причинами (изменение давления, температуры, химического состава раствора и пр.).

Глава XVIII

ЗАКОН АНИЗОТРОПИИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА

(закон векториальности)

1. Закон анизотропии кристаллов

При изучении основных свойств пространственной решетки мы видели, что параллельные друг другу ряды решетки ничем не отличаются друг от друга. Ряды же разных направлений в общем случае различны. Примитивные промежутки таких рядов, вообще говоря, не одинаковы.

Таким образом,

строение кристаллического вещества по различным направлениям в общем случае различно.

Если же различно строение, то и свойства вещества, определяемые по различным направлениям, не будут одинаковы. Это утверждение и составляет второй фундаментальный закон, закон анизотропии кристаллов.

Кристаллическое вещество анизотропно, т. е. свойства его в общем случае различны по различным направлениям.

С одним из частных проявлений этого закона мы уже сталкивались при изучении явлений роста кристаллов. Мы видели, что на одном и том же кристалле одни грани растут быстрее, другие — медленнее, причем разница в скоростях роста обнаруживается даже при одинаковых внешних условиях роста. Таким образом скорости роста граней кристалла различны по различным направлениям. То же относится и к другим свойствам вещества: различны скорости распространения теплоты, электричества, света, различны по различным направлениям и силы

упругости кристаллов и силы сцепления. Ко всем этим проявлениям закона анизотропии мы сейчас и перейдем.

Предварительно, однако, для правильного понимания закона анизотропии кристаллов оговоримся, что не обязательно решительно все свойства кристаллического вещества должны обладать анизотропностью. Некоторые могут быть и „изотропны" (равносвойственны). Например, цвет и прозрачность очень многих кристаллов одинаковы во всех направлениях. Скорость распространения света также для целого ряда веществ не обнаруживает разницы по различным направлениям (оптически-изотропные кристаллы). Однако другие свойства этих же кристаллов показывают резкую анизотропию (например, сопротивление разрыву различно по различным направлениям).

Аморфное вещество в большинстве случаев изотропно. Однако оно может обнаруживать и анизотропность. Например, у сжатого с двух сторон стеклянного кубика вдоль сжатия скорости света иные, чем поперек сжатия.

Впервые обратил внимание на анизотропию свойств кристаллического вещества, повидимому, Гюйгенс (1728 г.), изучавший явления прохождения света через кристаллы. Однако только по мере накопления исследований других свойств этот закон был формулирован в общей форме.

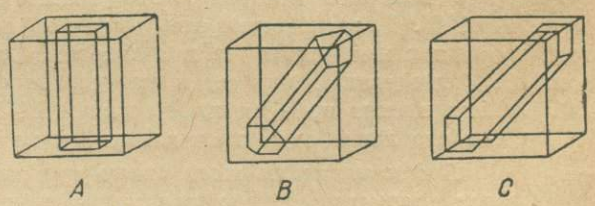
2. Проявления закона анизотропии на тепловых свойствах кристаллов

Покроем грань кристалла слоем воска, защищенного сверху изолятором от лучистой теплоты. Затем, через этот изолятор и слой воска посредством нагретой проволоки сообщим кристаллу некоторое количество теплоты в точке *C*. Благодаря теплопроводности, теплота будет распространяться от точки *C* во все стороны, и нагретый кристалл будет расплавлять воск. Оказывается, что воск при этом расплавится вокруг точки *C* чаще всего не в виде круга, но в виде эллипса. Это показывает, что теплота распространяется в кристалле по различным направлениям с различной скоростью.

Более точные опыты показали, что, например, для кварца (SiO_2), кристаллизующегося в тригирной сингонии, параллельно G_3 коэфициент теплопроводности равен 0,032, перпендикулярно же G_3 он равен только 0,017 (при 0°C) (коэфициент теплопроводности есть количество теплоты в калориях, передаваемого через 1 *см*² поперечного сечения в течение одной секунды при падении температуры в 1° на 1 *см*).

Расширение кристаллов от нагревания также различно по различным направлениям. Если вырезать из кристалла шар и его нагреть, то он из шара превратится в эллипсоид. Точные измерения и вычисления показали, что, например, кварцевый шар диаметром в 1 *см* при нагревании на 1° превращается в сплющенный эллипсоид вращения с размерами по оси вращения ($\parallel G_3$) 1,000007, а в перпендикулярном направлении ($\perp G_3$)— 1,0000137 (при 20°C).

3. Проявление закона анизотропии на механических свойствах кристаллов

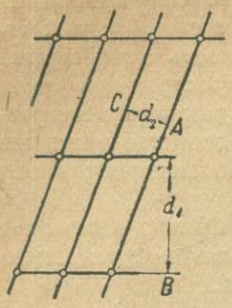


Фиг. 329.

Если взять кристалл каменной соли (NaCl) (фиг. 329) и вырезать из него три одинаковых призмы *A*, *B* и *C*, то для того, чтобы их разорвать, потребуется неодинаковое усилие. Призма *A* разрывается, если приложить силу в 571 *г/мм*² ее поперечного сечения (эта величина называется напряжением). Призма *B* разрывается при напряжении в 1150 *г/мм*², призма *C* — при напряжении в 2150 *г/мм*².

Эти опыты показывают, что очевидно силы сцепления в кристалле различны по различным направлениям. Наименьшей величины эти силы сцепления дости-

гают по направлениям, нормальным к плоским сеткам с относительно большими межплоскостными расстояниями d (фиг. 330). По плоскостям, нормальным к направлениям минимальных сил сцепления, кристаллы часто легко раскалываются.



Фиг. 330.

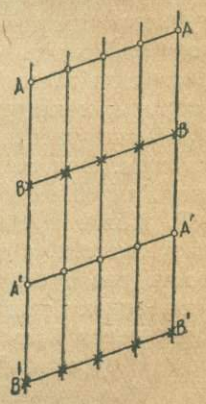
Способность кристаллов раскалываться по плоскостям определенного направления называется спайностью.

Впервые Браве высказал предположение, что

плоскости спайности суть плоские сетки, наиболее удаленные друг от друга, а потому с минимальными силами сцепления между собою.

В решетке, изображенной на фиг. 330, возможна спайность по плоскостям, перпендикулярным направлению AB, т. е. по плоским сеткам, наиболее отдаленным друг от друга. Если в направлении, перпендикулярном к AC, тоже наблюдается спайность, то, по правилу Браве, она будет менее совершенной.* Когда при помощи рентгеновых лучей научились непосредственно измерять межплоскостные расстояния d, то оказалось, что правило Браве далеко не всегда подтверждается опытом. Для многих кристаллов оказалось, что спайность проявляется не по наиболее отдаленным друг от друга плоским сеткам. Объяснение этих фактов, противоречащих правилу Браве, было дано Г. В. Вульфом. Он указал, что

спайность определяется не только силами механического сцепления, как это предполагал Браве, но и силами химического сродства.



Фиг. 331.

Предположим, что наша решетка, изображенная на фиг. 331, сложена двумя сортами ионов: A, помеченными кружками, и B, помеченными крестиками (химическая формула вещества, слагающего эту решетку, — AB). По правилу Браве мы должны были бы ожидать проявления спайности по плоскостям AA, BB, $A'A'$, $B'B'$, так как именно эти плоскости наиболее отдалены друг от друга. Однако, кроме механического сцепления, здесь незначительного, эти плоскости притягиваются друг к другу силами химического сродства, так как построены ионами разного сорта. Поэтому, несмотря на большие межплоскостные расстояния, спайность по этим плоскостям не проявляется. Следующее по величине межплоскостное расстояние принадлежит плоским сеткам серии $ABA'B'$. Плоские сетки этой серии не связаны друг с другом химическим сродством, так как каждая из них содержит ионы обоих сортов: и ионы A и ионы B. В пределах одной сетки химические связи насыщены. Спайность может наблюдаться именно по этим плоскостям $ABA'B'$.

Силы сцепления оказывают влияние и на твердость кристаллов.

*Будем называть твердостью противодействие или сопротивление, которое оказывает данное вещество проникновению в него другого тела.***

---

* По степени совершенства спайность делят на 5 ступеней: 1) весьма совершенная спайность — кристаллы колятся на тончайшие листочки (например, слюда); 2) совершенная спайность — наряду с расколами по плоскостям спайности, изредка наблюдаются и неправильные неровные изломы (кальцит); 3) средняя спайность — как расколы по спайности, так и неправильные изломы наблюдаются одинаково часто (полевой шпат); 4) несовершенная спайность — неправильные изломы наблюдаются чаще расколов по спайности (апатит); 5) весьма несовершенная — расколы по спайности наблюдаются только при особо благоприятных условиях. Обычно получается неправильный раковистый излом (кварц).

** Среди множества принципиально-различных методов измерения твердости наиболее простым является метод царапания, предложенный, немецким минералогом Моосом. Этот метод основан на сравнении твердости данного образца с десятью эталонами. За

При прочих равных условиях, чем больше межплоскостные расстояния данной решетки, тем меньше твердость. Если мы будем испытывать царапанием твердость изоморфного ряда одновалентных галоидов, то их можно расположить в ряд, в котором каждый последующий оставляет царапину на предыдущем и вместе с тем не царапает следующих за ним. Все они имеют структуру типа NaCl, изображенную на фиг. 24. Межплоскостные расстояния между плоскими сетками куба даны в ангстремах для каждого вещества:

вещество и твердость относительно соседей	KJ	KBr	RbCl	KCl	NaJ	NaBr	LiBr	NaCl
межплоскостные расстояния в ангстремах	3,53	3,29	3,29	3,14	3,23	2,98	2,75	2,81

вещество и твердость относительно соседей	KF	LiCl	NaF	LiF
межплоскостные расстояния в ангстремах	2,66	2,57	2,31	2,02

Как видно из таблицы, за редкими исключениями, чем больше твердость, тем меньше межплоскостные расстояния, тем плотнее структура вещества.

Аналогично с явлениями спайности на твердость оказывает влияние и химическое сродство — в первую очередь валентность ионов, слагающих решетку. При прочих равных условиях, чем больше валентность слагающих решетку частиц, тем больше твердость. Возьмем для примера четыре вещества, имеющие структуры типа NaCl: NaF, MgO, ScN и TiC. Межплоскостные расстояния у этих веществ почти одинаковы, но валентности слагающих частиц резко различны: NaF представлен одновалентными элементами, MgO — двухвалентными, ScN — трехвалентными, TiC — четырехвалентными. Табл. 23 показывает зависимость твердости от валентности.

Таблица 23

Зависимость твердости от валентности частиц, слагающих решетку

Вещество	NaF	MgO	ScN	TiC
Валентность	1	2	3	4
Межплоскостное расстояние сеток куба	2,31	2,10	2,23	2,23
Твердость по Моосу	3,2	6,5	7—8	8—9

После этих предварительных замечаний о характере твердости кристаллов ясно, что, царапая кристалл по различным направлениям, мы будем пересекать ряды решетки на различных расстояниях, а потому и твердость царапания по различным направлениям должна быть различна.

Чтобы обнаружить эту анизотропию твердости, сконструированы специальные приборы.

Приборы для точного определения твердости царапанием называются склерометрами.

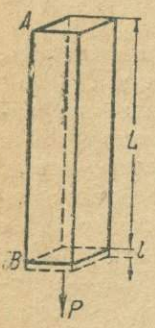
Склерометром Мартенса точно определяется нагрузка в граммах, которая действует на острие, царапающее исследуемую грань кристалла. Однако очевидно,

эталоны приняты: 1) тальк ($H_2Mg_3Si_4O_{12}$); 2) каменная соль (NaCl); 3) кальцит ($CaCO_3$); 4) флюорит (CaF_2); 5) апатит ($Ca_5F[PO_4]_3$); 6) ортоклаз ($KAlSi_3O_8$); 7) кварц (SiO_2); 8) топаз ($Al_2SiO_4F_2$); 9) корунд (Al_2O_3); 10) алмаз (С). Каждый эталон оставляет царапину на всех предыдущих, но не чертит всех следующих за ним эталонов. Для определения твердости какого-либо образца царапают этим образцом эталоны шкалы (или наоборот). Если, допустим, кварц не царапает наш образец, а топаз оставляет царапину, то твердость образца больше семи, но меньше восьми.

чем больше будет нагрузка, тем получаемая царапина будет шире и глубже. За меру твердости условно принимают нагрузку, при которой получается царапина в 0,01 *мм* толщины.

Процарапывая грань кристалла в различных направлениях, нетрудно убедиться в резкой анизотропии твердости. У некоторых кристаллов анизотропия твердости достигает такой значительной величины, что может быть подмечена и без помощи склерометра. Кристаллы дистена (Al_2SiO_5) принадлежат к агирной сингонии и представляют собою сильно удлиненные таблицы. Стальной нож легко процарапывает грань $(\bar{1}00)$ поперек удлинения (вдоль штриховатости) и не оставляет черты при царапании вдоль удлинения (поперек штриховатости).

Анизотропия сил сцепления проявляется и на упругих свойствах кристаллического вещества. Вырежем из кристаллического вещества столбик AB (фиг. 332). Приложим к нему некоторую силу P (нагрузку, меньшую, чем при вышеописанных опытах с разрывом столбиков хлористого натрия).



Фиг. 332.

Тогда под влиянием приложенной силы столбик будет деформирован, растянется. Его первоначальная длина L изменится на некоторую величину l. Как известно, величина $i = \frac{l}{L}$ носит название относительной деформации (l называется абсолютной деформацией).

Очевидно, что относительная деформация будет тем больше, чем больше приложенная сила. Но, с другой стороны, эта деформация будет при одной и той же силе тем меньше, чем толще наш столбик. Поэтому, приложенную силу рассчитывают на единицу площади поперечного сечения столбика. Если площадь сечения столбика ω, то сила s, приходящаяся на единицу площади сечения, будет $s = \frac{P}{\omega}$; величина s называется напряжением.

Согласно закону Гука (1676 г.), основному закону теории сопротивления материалов, относительная деформация i пропорциональна напряжению:

$$i = e \cdot s,$$

где e — коэфициент пропорциональности, „коэфициент растяжения". Он равен относительной деформации столбика AB при напряжении в 1 *кг/см²*.*

Стерженьки AB, вырезанные из одного и того же кристаллического вещества по различным направлениям, деформируются при одинаковом напряжении в общем случае различно.

Таким образом коэфициенты растяжения кристаллического вещества различны по различным напразлениям. Так, например, для трех призм кристалла NaCl, которыми мы пользовались при описании опытов на разрыв (фиг. 329), коэфициенты растяжения соответственно будут: для призмы A — $\frac{1}{4187}$ *кг/мм²*, для призмы B — $\frac{1}{3490}$ *кг/мм²*, для призмы C — $\frac{1}{3026}$ *кг/мм²*.

Если из точки O (фиг. 329) по направлениям OA, OB и OC в каком-либо масштабе отложить полученные величины и по всем остальным также откладывать соответственные коэфициенты растяжения, то концы построенных таким образом векторов образуют некоторую поверхность. Эта поверхность называется поверхностью коэфициентов растяжения и наглядно показывает, как с изменением направления меняются упругие свойства кристаллов.

---

* В теории упругости чаще рассматривают величину, обратную коэфициенту растяжения: $E = \frac{1}{e}$ — так называемый модуль Юнга.

4. Проявление закона анизотропии на магнитных и электрических свойствах кристаллов

Как известно, сопротивление проводника прямо пропорционально длине проводника l и обратно пропорционально площади поперечного сечения s:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{s}.$$

Коэфициент пропорциональности ρ зависит от вещества проводника и называется удельным сопротивлением. Величина σ, обратная ρ, называется удельной электропроводностью

$$\left(\sigma = \frac{1}{\rho}\right).$$

Если из куска кристаллического вещества вырезать два одинаковых по величине и ориентировке цилиндра A и A', то, в силу закона кристаллической однородности, при пропускании электрического тока оба эти цилиндра обнаружат одинаковую проводимость. Если же вырезать такой же цилиндр B, но в другом направлении, то он обнаружит другую электропроводность. Так, сопротивление стерженька длиной в 1 *см* и площадью поперечного сечения 1 $см^2$ (удельное сопротивление) для кристалла гематита (Fe_2O_3, тригирной сингонии), вырезанного параллельно G_3, — $\rho = 0{,}687$ Ω (при 17°); в перпендикулярном же направлении — $\rho = 0{,}351$ Ω. Для кристаллов висмута (Bi той же сингонии) удельное сопротивление в направлении, параллельном G_3, — $\rho = 0{,}0348$ Ω, в направлении под углом в 60° к первому — 0,0272 Ω, для направления, перпендикулярного к первому — 0,0223 Ω. Анизотропия электрических свойств кристаллов проявляется и в электростатических явлениях.

Известно, что два количества электричества e_1 и e_2 притягиваются друг к другу с силою f, прямо пропорциональной их количествам и обратно-пропорциональной квадрату их расстояния r друг от друга. Для пустоты:

$$f = \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

Не в пустоте эта сила взаимодействия изменяется и может быть выражена формулой

$$f = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

Коэфициент ε называется диэлектрической постоянной и зависит от вещества среды.

В диэлектриках сила притяжения f уменьшается по сравнению с пустотой ($\varepsilon > 1$). Оказывается, что диэлектрическая постоянная ε в какой-либо среде зависит от ориентировки кристаллической решетки.

Так, для кристаллов берилла ($[SiO_2]_6Al_2Be_3$) [гексагирной сингонии] в направлении параллельном G_6 $\varepsilon \approx 6{,}3$ (среднее из определений различных авторов); в направлении перпендикулярном — $\varepsilon \approx 6{,}8$. Аналогично электрическим свойствам проявляется анизотропия и магнитных свойств кристаллов.

Как известно, две магнитные массы m_1 и m_2 взаимно притягиваются (или, если они одного знака, то взаимно отталкиваются) с силою f, которая определяется формулой Кулона:

$$f = \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где r — расстояние магнитных масс друг от друга. Написанная формула определяет действие магнитных масс в пустоте. Для выражения силы их взаимодействия в какой-либо среде следует ввести коэфициент, зависящий от вещества среды:

$$f = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

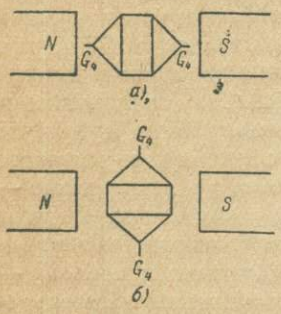
Коэфициент μ называется магнитной проницаемостью среды. Сила взаимодействия магнитов увеличивается по сравнению с пустотой для так называемых

диамагнитных тел ($\mu < 1$). Если, наоборот, данная среда уменьшает, по сравнению с пустотой, силы взаимодействия магнитов, то такая среда называется парамагнитной ($\mu > 1$).

Если между двумя магнитами среда кристаллическая, то и она, как и всякая среда, изменяет, по сравнению с пустотой, силу взаимодействия магнитов. Однако оказывается, что это изменение зависит от ориентировки кристаллической среды относительно магнитов.

Отсюда следует, что магнитная проницаемость μ у кристаллов различна по различным направлениям.

Приведем значения μ для некоторых кристаллических веществ. Для рутила (TiO_2), кристаллы которого принадлежат к тетрагирной сингонии, в направлении, параллельном G_4, $\mu = 1{,}00000889$; в перпендикулярном направлении — $\mu = 1{,}00000833$.



Фиг. 333.

Для кальцита ($CaCO_3$), кристаллизующегося в тригональной сингонии, в направлении, параллельном G_3, $\mu = 0{,}9999998900$; в перпендикулярном направлении $\mu = 0{,}9999999013$. Для циркона ($ZrSiO_4$) (тетрагирной сингонии) для направления, параллельного G_4, $\mu = 1{,}00000337$, для перпендикулярного направления $\mu = 0{,}999999216$. Последний пример показывает, что μ для одного и того же вещества может быть как больше, так и меньше единицы. Отсюда следует, что если кристалл циркона поместить между полюсами магнита так, чтобы G_4 совпадала с линией, соединяющей эти полюса, то сила взаимодействия этих магнитов, по сравнению с пустотой, уменьшается (фиг. 333*а*). Если же кристалл ориентировать, как показано на фиг. 333*б*, то сила взаимодействия этих магнитов увеличивается. Таким образом один и тот же кристалл может играть роль как парамагнитного, так и диамагнитного тела.

Анизотропия магнитных свойств кристаллов изучалась многими исследователями (впервые Плюккером и Фарадеем в 1847—1848 гг.). Непосредственно удобнее определять не магнитную проницаемость μ, но некоторые другие величины, с нею связанные. Так, Фойгт, Киношита, Финк опытным путем определяли *„магнитную восприимчивость x“* — величину, пропорциональную μ:

$$\mu = 1 + 4\pi x$$

П. Вейсс определял *„степень намагничивания I“*, также величину пропорциональную μ:

$$\mu = 1 + \frac{4\pi}{H} I$$

(здесь H — напряжение магнитного поля, т. е. сила, действующая в данной точке на единицу массы положительного магнетизма).

Чтобы закончить рассмотрение воздействия электромагнитной энергии на кристаллическое вещество, следует еще остановиться на явлениях прохождения света через кристаллы.* Ввиду исключительной практической важности этих явлений, их рассмотрение должно быть сделано более подробно и более детально, чем рассмотрение вышеописанных других явлений. Поэтому изучение вопросов, связанных с прохождением света через кристаллы, нами выделено в особую главу.

5. Законы кристаллической однородности и анизотропии, как основа теории структуры кристаллов

Указанные выше фундаментальные законы однородности и анизотропности кристаллического вещества важны тем, что считаются основой всех теорий строения кристаллического вещества. Однако для построения теории необходимо

* Свет, как известно, является одним из видов электромагнитной энергии.

эти законы распространить не только на различные физические и химические свойства вещества, но и на распределение вещества в пространстве. Необходимо считать, что в разных участках кристаллическое вещество построено тождественно, причем в параллельных направлениях строение одинаково, в непараллельных может быть различно.

Если к этому допущению присоединить молекулярную гипотезу, то получим все необходимые предпосылки для создания теории структуры кристаллов, для доказательства того, что кристаллическое вещество слагается пространственными решетками.

Действительно, согласно молекулярной гипотезе, всякое вещество, в том числе и кристаллическое, имеет не сплошное строение, но построено молекулами и атомами, слагается отдельными единицами.

Для вывода нам не нужно будет углубляться в вопросы о том, что собой представляют эти отдельные единицы (молекулы или атомы), каковы их форма и строение.

Будем рассматривать и изображать на чертеже для простоты только, например, центры тяжести молекул.

Возьмем какую-нибудь молекулу кристаллического вещества. В силу нашего допущения об однородном строении кристаллического вещества, можно утверждать, что в других частях этого вещества найдутся совершенно такие же тождественные и одинаково ориентированные молекулы.

Возьмем ближайшую к первой молекуле A, молекулу B. Пусть она расположена на расстоянии a вправо от молекулы A. Тогда, в силу того, что вокруг молекулы B вещество построено так же, как и вокруг молекулы A, вправо на том же расстоянии a должна находиться еще такая же молекула C. Применяя это же рассуждение к молекуле C, придем к молекуле D, затем E, F и т. д.

Получим ряд молекул, расположенных по прямой линии на равных расстояниях друг от друга.

Но очевидно, что, кроме выведенных, найдутся еще молекулы, тождественные с молекулой A, не лежащие в нашем ряду. Пусть такой молекулой, ближайшей к A, но не лежащей в ряду $ABCD\ldots$, будет молекула A_1. Если в направлении AA_1 через промежуток b лежит молекула (A_1), то и дальше в том же направлении должна лежать еще такая же молекула A_2. Продолжая то же рассуждение, придем к новому ряду молекул $AA_1A_2A_3A_4\ldots$, который, как и предыдущий, можно продолжать в обе стороны.

Так как строение вокруг B, C, D и т. д. одинаково со строением A, то на расстояниях b в направлениях, параллельных $AA_1A_2\ldots$, должны располагаться ряды $BB_1B_2B_3B_4\ldots$, $CC_1C_2C_3C_4\ldots$, $DD_1D_2D_3\ldots$.

Таким образом получим *„плоскую сетку“* или *„плоскую решетку“* с точками, расположенными в вершинах системы равных и параллельно ориентированных параллелограммов.

Кристаллическое вещество, однако, не представляет собою плоскости, но имеет три измерения.

Поэтому, кроме молекул, лежащих в плоскости нашего чертежа, найдутся в кристаллическом веществе такие же вне плоскости чертежа.

Пусть ближайшей к A такой молекулой, не лежащей в нашей плоской сетке, будет молекула A_I, отстоящая от A на расстоянии c по направлению AA_I. На том же расстоянии c, по тому же направлению должна располагаться и следующая молекула A_{II}, далее найдем A_{III} и другие, образующие новый ряд $AA_IA_{II}A_{III}A_{IV}\ldots$.

Около каждой из этих молекул A_I, A_{II}, A_{III} и т. д. мы можем найти ряды, параллельные рядам с промежутками a и b. Таким образом получим ряд плоских сеток, параллельных и тождественных первой построенной нами плоской сетке.

Совокупность всех этих плоских сеток и образует пространственную решетку с точками, расположенными в вершинах системы равных и параллельно-ориентированных параллелепипедов.

Слабым местом приведенного вывода является недоказуемое распространение закона кристаллической однородности и анизотропности на распределение вещества в пространстве.

Мы сделали предположение, что если кристаллическое вещество по параллельным направлениям имеет одинаковые свойства, а по непараллельным — разные, то и построено оно по параллельным направлениям одинаково, а по непараллельным — различно. Однако аморфное вещество также может иметь по параллельным направлениям одинаковые свойства, а по непараллельным — различные (например, сжатое стекло и однородно и анизотропно), но вместе с тем для него мы не можем сделать предыдущего предположения о строении. Причина такой разницы логически ничем не обусловливается.

Поэтому в нашем курсе учение о пространственных решетках мы и предпослали всем изучаемым законам и законы однородности и анизотропности рассматривали как следствия, а не как основные предпосылки этого учения.

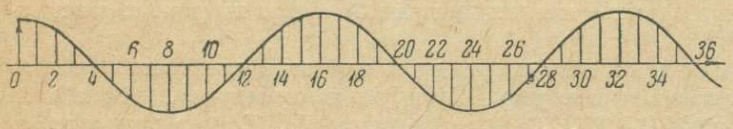
Глава XIX

ЗАКОНЫ КРИСТАЛЛООПТИКИ

1. Некоторые сведения из оптики

Четкое знание основ учения о свете является совершенно необходимой предпосылкой для изучения оптических свойств кристаллов. Поэтому прежде всего напомним некоторые основные явления, известные из физики.

По современной электромагнитной теории свет является одним из видов лучистой энергии, т. е. энергии, распространяющейся лучами. Каждый луч есть прямая линия, представляющая собою направление распространения света от данного источника. Каждая точка луча характеризуется определенным напряжением электрического (и магнитного) поля. Если это напряжение изобразить вектором, то этот вектор будет перпендикулярен к лучу (вектор *1*, фиг. 334). Вектор *2*, выражающий напряжение электрического поля в соседней точке луча, будет несколько отличаться от предыдущего. Вектор *3*, в свою очередь, будет отличаться по величине от своего соседа *2*. Если все такие векторы отложить в плоскости чертежа, то концы этих векторов образуют синусоиду. Однако такая синусоида будет отвечать напряжениям только для определенного момента времени. Величина каждого вектора непрерывно изменяется от некоторого максимума до нуля, затем в обратную сторону до такого же максимума, снова до нуля и возрастает затем до первоначального максимума. После этого весь цикл повторяется снова и снова таким образом, что конец вектора совершает гармонические колебания. При этом, если вектор *O* в момент *t* достиг своего максимума, то векторы *1*, *2*, *3*, *4* еще будут расти, векторы *5*, *6*, *7*, *8* — будут уменьшаться, *9*, *10*, *11*, *12* по абсолютной величине будут еще возрастать, стремясь к своему максимуму и т. д. Благодаря этому, в следующий момент времени *t'*, когда максимума достигнет уже точка *1*, вся синусоида окажется смещенной вправо. Таким образом с течением времени синусоида непрерывно будет перемещаться по направлению луча.



Фиг. 334.

Максимальная величина вектора, достигаемая им в течение каждого цикла колебания, называется амплитудой колебания. Сила света пропорциональна квадрату амплитуды колебания.

Если две точки луча характеризуются векторами, одинаково изменяющимися, то говорят, что их колебания принадлежат к одной фазе. Так, колебания точек

2 и *18* принадлежат к одной фазе, так как оба вектора равны, одинаково направлены и оба уменьшаются.

Колебания *2* и *14* не принадлежат к одной фазе, так как хотя они и имеют равные величины и направления, однако вектор *2* уменьшается, вектор же *14* возрастает по своей величине.

Фазы колебаний *4* и *20* — одинаковы; *4* и *12* — противоположны.

Расстояние вдоль луча между точками одинаковых фаз называется длиной волны λ. Длина волны играет очень существенную роль в лучистой энергии и ею определяется весь характер лучистой энергии.

В начале нашего курса уже упоминалось, что рентгеновы лучи представляют собою один из видов лучистой энергии с очень короткой длиной волны (0,1—20 Å). Наоборот, электромагнитные лучи радиотелеграфии имеют длину волны, измеряемую метрами и даже километрами. Лучи видимого света занимают промежуточное положение и имеют длину волны от 4000 Å (400 $\mu\mu$*) до 7600 Å (760 $\mu\mu$). В этих пределах длина волны определяет цвет света.

Цвет лучей	Длина волны, в $\mu\mu$
Фиолетовые лучи	400 — 450
Голубые	450 — 480
Синие	480 — 500
Зеленые	500 — 550
Желтые	550 — 590
Оранжевые	590 — 650
Красные	650 — 760

Конечно никаких точных границ между различными цветами не существует, они постепенно переходят друг в друга, так что указанные выше пределы длин волн для каждого цвета имеют лишь приближенные значения. Белый свет является сложным и состоит из смеси всех перечисленных выше цветов. В отличие от сложного смешанного света, различают свет монохроматический — все лучи которого одной определенной длины волны. Например, если в бесцветное пламя газовой горелки ввести поваренную соль (NaCl), то присутствующий в ней Na окрасит пламя в желтый цвет. Полученный монохроматический свет будет иметь длину волны в 589 $\mu\mu$.

Время, в течение которого совершается один полный цикл изменений напряжений электрического поля в данной точке, называется периодом колебания T. За это время электрический вектор возвращается к своей исходной фазе, а синусоида смещается на одну длину волны λ. Таким образом можно определить период колебания T как время, в течение которого луч распространяется на одну длину волны.

Отсюда следует, что скорость распространения колебаний (скорость света v), равная проходимому пути в единицу времени, выражается отношением:

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

Скорость света в пустоте $C = 300\,000$ *км*/сек. В любой среде скорость света меньше, чем в пустоте:

$$v = \frac{C}{N}.$$

Коэфициент N, показывающий во сколько раз скорость света в данной среде меньше, чем в пустоте, называется коэфициентом (или показателем) преломления данной среды. Таким образом показатель преломления есть величина, обратно пропорциональная скорости света в данной среде. Так как скорость света в пустоте C мало отличается от скорости света в воздухе v_0, то коэфициент преломления

---

* $\mu\mu$ — микромикрон $= 10^{-7}$ *см*; Å — ангстрем $= 10^{-8}$ *см* $= 0{,}1$ $\mu\mu$.

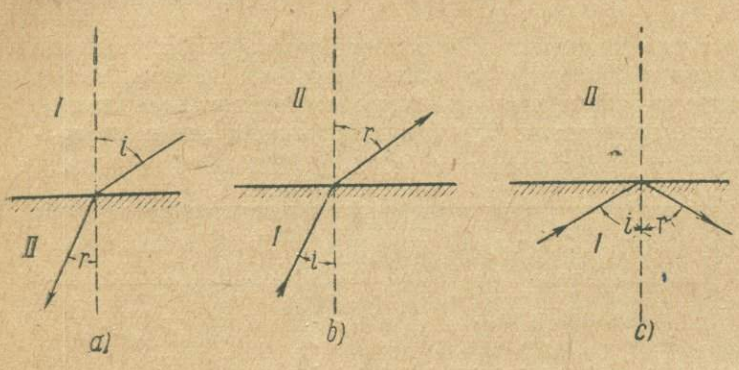
N обычно определяют относительно воздуха:

$$N = \frac{C}{v} \approx \frac{v_0}{v}.$$

При проникновении света из одной среды в другую, ввиду разных скоростей распространения света в этих средах, возникают явления преломления.

Пусть скорость света в среде I равна v_1, а в среде II — v_2, причем $v_1 > v_2$. Тогда луч, идущий из среды I в среду II, преломляясь, приблизится к нормали OO' — к поверхности раздела обеих сред. По закону Снеллиуса—Декарта имеем

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_2}{N_1}.$$

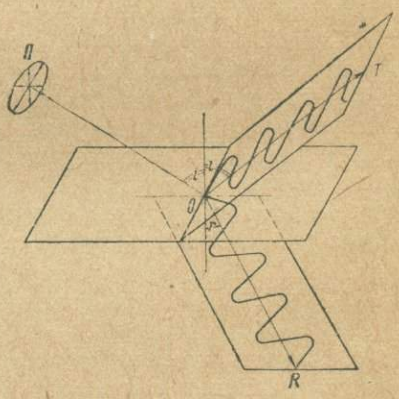


Фиг. 335.

Здесь i — угол падения луча, r — угол преломления, N_1 и N_2 — показатели преломления сред I и II. Очевидно, что если $v_1 > v_2$, то $N_1 < N_2$.

Обратно, если $v_1 < v_2$, то луч, войдя в среду II, отклонится от нормали OO' к плоскости раздела. В этом случае $N_1 > N_2$. Если угол падения i подобрать достаточно большим $\left(\sin i \geqslant \frac{N_2}{N_1}\right)$, то преломления не происходит, и луч целиком отражается от плоскости раздела (явление полного внутреннего отражения). Минимальный угол, при котором наблюдается явление полного внутреннего отражения, называется углом полного внутреннего отражения j. Он легко определяется из формулы Снеллиуса — Декарта подстановкой в нее $r = 90°$: $\sin j = \frac{N_2}{N_1}$.

Синусоида, изображенная на фиг. 334, представляет собою схему колебаний так называемого *„поляризованного"* луча. Все электрические векторы *0*, *1*, *2*, *3*, и т. д. изображены здесь лежащими в одной плоскости (в плоскости чертежа). У естественного (неполяризованного) луча эти векторы не лежат в одной плоскости. Так, если вектор *0* лежит в плоскости чертежа, вектор *1* образует уже некоторый угол α с плоскостью чертежа. Вектор *2* образует угол 2α с плоскостью чертежа, вектор *3* — 3α и т. д. Таким образом у естественного луча векторы располагаются вокруг направления луча подобно ступеням винтовой лестницы. При этом каждый вектор непрерывно меняет свое направление, вращаясь вокруг направления луча.



Фиг. 336.

В поляризованном свете все векторы находятся в одной плоскости, проходящей через направление луча. Будем ее называть *плоскостью колебаний*. Плоскость, проходящая через этот же луч и перпендикулярная к плоскости колебаний, называется *плоскостью поляризации*.

Поляризованный свет можно получить различными способами. Частичная поляризация наблюдается при явлениях отражения и преломления естественного света.

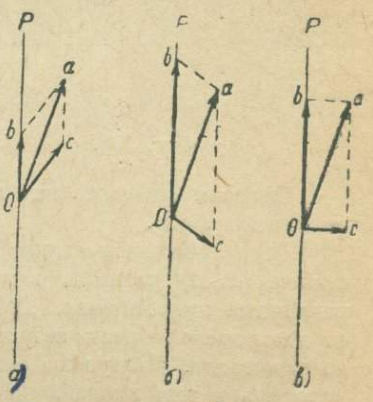
Пусть $П$ — падающий (фиг. 336), T — отраженный и R преломленный луч. Оказывается, что колебания луча h совершаются преимущественно в плоскости падения луча. Отраженный луч также будет частично поляризован, причем колебания этого луча совершаются преимущественно в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения луча. Если подобрать угол падения i таким, чтобы вместе с углом преломления r он составил 90° ($i + r = 90°$), то поляризация отраженного света получится полная* (закон Брюстера). Для обыкновенного стекла этот угол падения (угол полной поляризации) приблизительно равен 56°.

Ниже мы познакомимся с более сложными, но зато и более совершенными способами получения поляризованного света (при помощи кристаллов).

Чтобы вполне закончить с беглым перечнем вопросов оптики, необходимых нам для дальнейшего, следует упомянуть о явлениях интерференции. Однако, ввиду того, что с этими явлениями нам уже приходилось встречаться при рассмотрении рентгенометрии кристаллов (глава I), описание сущности их мы повторять здесь не будем.

2. Распространение света в кристаллическом веществе

Пусть в кристаллическое вещество попадает некоторый луч света (фиг. 337). Плоскость чертежа проведена перпендикулярно к направлению луча, который проектируется точкой O. Для простоты (это не обязательно) будем считать наш луч поляризованным; пусть плоскостью его колебаний является плоскость Oa (Oa изображает один из электрических векторов).



Фиг. 337.

Кристаллическое вещество, в которое вступил наш луч — вещество анизотропное. Свойства его различны по различным направлениям. Поэтому мы вправе ожидать, что и сопротивление световым колебаниям в кристаллическом веществе будет также различно по различным направлениям. Среди различных направлений, перпендикулярных к нашему лучу, найдется одно такое, которое оказывает наименьшее сопротивление световым колебаниям. Пусть это направление будет OP, не совпадающее с направлением Oa, в котором совершаются колебания электрического вектора Oa. Очевидно, для того, чтобы колебания происходили в направлении наименьшего сопротивления OP, а не в направлении Oa, вектор Oa необходимо разложить по правилу разложения всяких векторов, т. е. по правилу параллелограма. Вектор Oa должен при этом составить диагональ параллелограма, одной из сторон которого будет служить направление OP. Вторая составляющая, — Oc — вторая сторона параллелограма — может быть направлена как угодно (фиг. 337*а* и *б*), но минимальное свое значение она получит, если будет перпендикулярна к направлению OP (фиг. 337*в*).

Совершенно избавиться от второй составляющей, от второго колебания, совершающегося не в направлении наименьшего сопротивления (а может быть в частном случае даже в направлении наибольшего сопротивления), невозможно. Вектор можно только разложить, но не повернуть. Поэтому,

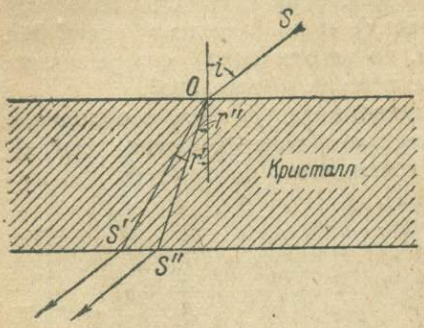
луч света, войдя в кристалл, разлагается на два полностью поляризованных луча, плоскости колебаний которых взаимно перпендикулярны.

Во избежание недоразумений подчеркнем, что на фиг. 337 оба направления лучей проектируются в точке O. Oc и Ob изображают не направления распространения лучей, но направления колебаний; оба же луча идут в одну и ту же сторону, из-под плоскости чертежа на читателя.

---

* В луче преломленном при этом поляризация достигает своего максимума, однако в изотропной среде преломленный луч полностью не поляризуется.

Ввиду того, что сопротивление колебаниям различно для обоих полученных нами лучей, скорость распространения колебаний также будет различна. Луч с колебаниями *Ob* будет распространяться по кристаллическому веществу быстрее луча с колебаниями *Oc*, так как сопротивление колебаниям *Ob* меньше сопротивления колебаниям *Oc*. Если же скорости распространения этих лучей различны, то и величины им обратно пропорциональные, т. е. величины их показателей преломления, будут также различны. Показатель преломления луча с колебаниями *Ob* будет меньше показателя преломления луча с колебаниями *Oc*.



Фиг. 338.

Два поляризованных луча, на которые распадается луч света, вошедший в кристалл, обладают различными скоростями и имеют различные показатели преломления.

Описанные свойства являются наиболее характерными особенностями распространения света в кристаллах и лежат в основе всей кристаллооптики.

Укажем сразу же на одно из важных следствий, непосредственно вытекающих из предыдущего.

Два луча, на которые распался луч света в кристалле, при выходе из кристалла, ввиду разницы в показателях преломления лучей, должны претерпеть различные преломления. Действительно, как мы знаем, углы преломления зависят от показателей преломления (закон Снеллиуса — Декарта). Поэтому лучи, выйдя из кристалла, пойдут по различным направлениям. Такое же явление должно происходить и при входе луча в данный кристалл.

Пусть луч света *SO* падает на кристалл (фиг. 338, где *SO* изображает уже не направление колебаний, но направление луча). Войдя в кристалл, этот луч разделится на два луча с различными показателями преломления. Благодаря этому, углы преломления этих лучей r' и r'' должны быть различны.

Поэтому в кристалле два полученных луча OS' и OS'', распространяясь под некоторым углом друг к другу, будут постепенно отдаляться один от другого. Если кристалл достаточно велик, то расхождение обоих лучей будет настолько значительно, что делается заметным простым глазом: предметы, рассматриваемые через такой кристалл, двоятся.


Фиг. 339.

Указанное явление называется „двойным лучепреломлением“ и впервые было открыто в 1669 г. Эразмом Бартолином у кристаллов исландского шпата ($CaCO_3$).

У этого вещества показатели преломления обоих лучей очень сильно разнятся друг от друга, а потому двойное лучепреломление обнаружить очень легко. Достаточно взять сравнительно небольшой (0,5 *см* толщины) кристаллик и положить на страницу книги, чтобы убедиться в том, что каждая буква при рассматривании через кристалл будет казаться удвоенной (фиг. 339).

У кристаллов большинства веществ двойное лучепреломление непосредственно обнаружить труднее, так как разница в показателях преломления для обоих лучей невелика. Расхождение путей этих лучей настолько незначительно, что необходимы очень большие кристаллы, чтобы оно стало заметным.

Особенностями распространения света через кристаллы пользуются для полу-

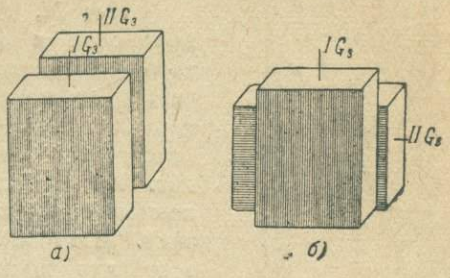
чения поляризованного света. При проникновении света в кристалл получаются два луча, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. Если уничтожить один из них, то свет, вышедший из кристалла, будет поляризованным в одной определенной плоскости. В некоторых случаях уничтожение второго луча производится самой природой.

Дело в том, что все тела хотя бы незначительно поглощают проникающие в них световые лучи.

Часто один из поляризованных лучей, образующихся в кристалле, поглощается больше другого. У некоторых кристаллических веществ поглощение одного из лучей настолько значительно, что последний нацело поглощается даже в сравнительно тонком кристаллике.

В кристаллах минерала турмалина это явление выражено очень резко.

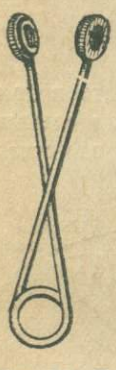
Луч, колеблющийся вдоль главной оси симметрии (G_3), поглощается гораздо меньше, чем луч с перпендикулярным направлением колебаний. Кристаллик зеленого турмалина в 3—4 *мм* толщины нацело поглощает второй луч, так что через такой кристаллик смогут пройти лучи, колеблющиеся только в одном направлении.



Фиг. 340.

Таким образом кристаллы турмалина могут служить для получения поляризованного света. Для этого из этих кристаллов выпиливают прямоугольные пластинки, длинное ребро которых параллельно G_3.

Очевидно, что если взять не одну, но две таких турмалиновые пластинки и ориентировать их параллельно, то (фиг. 340*а*) лучи света будут проходить как через первую, так и через вторую пластинку и выйдут из второй пластинки с колебаниями, параллельными $/\, G_3$ и $//\, G_3$.



Фиг. 341. Турмалиновые щипцы.

Повернем теперь вторую пластинку на 90° по отношению к первой, как показано на фиг. 340*б*. Очевидно, что лучи света, пройдя через первую пластинку, будут колебаться параллельно $/\, G_3$. Войдя во вторую пластинку эти лучи, как лучи, колеблющиеся перпендикулярно $//\, G_3$, будут поглощены. Таким образом через две такие пластинки лучи света совершенно не пройдут.

Указанные выводы легко проверяются при помощи „турмалиновых щипцов“ (фиг. 341). В этом приборе две турмалиновые пластинки могут вращаться одна относительно другой. Смотря через обе пластинки на свет и вращая одну из них, легко убедиться, что при некотором (определенном) относительном расположении пластинок свет через „турмалиновые щипцы“ не пропускается.

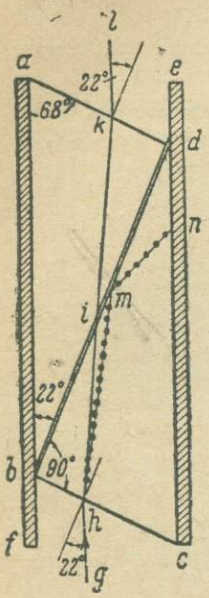
Недостатком метода получения поляризованного света при помощи турмалиновой пластинки является невозможность получить бесцветный поляризованный свет (он оказывается зеленым).

Для получения бесцветного (белого) поляризованного света обычно пользуются кристаллами знакомого нам исландского шпата. Однако у этих кристаллов поглощение незначительно, и через кристаллы свободно проходят оба поляризованных луча. Необходимо один из этих лучей уничтожить искусственно. Наибольшее распространение получил способ, предложенный Николем в 1828 г. Построенный им прибор для получения поляризованного света называется „призмой Николя“ или просто николем и является неотъемлемой частью всякого микроскопа, предназначенного для исследования кристаллического вещества.

Для устройства николя берут кристалл исландского шпата *abcd* (фиг. 342), распиливают его по плоскости *bd* на две части *abd* и *bdc*, затем склеивают полученные части в одно целое. Николь готов, остается только вделать его в специальную оправу *afec*, пропускающую лучи света в направлении *gl*.

Рассмотрим, каким образом эти лучи будут проходить через николь.

Луч *gh*, войдя в кристалл исландского шпата, разложится на два луча, *hi* и *hm*, которые, как мы знаем, будут иметь различные показатели преломления. Луч *hi* будет иметь показатель преломления $n_1 = 1{,}54$, луч *hm* будет иметь показатель преломления $n_2 = 1{,}66$. Оба они дойдут в кристалле до плоскости *bd*, по которой кристалл был первоначально распилен, а затем склеен.



Фиг. 342. Призма Николя.

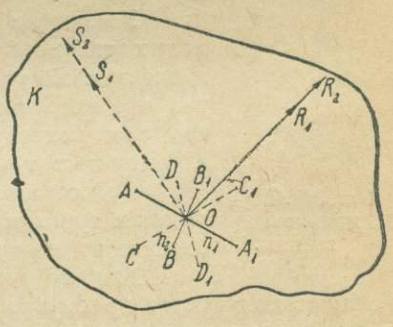
В качестве клея употребляется древесная смола, известная под названием канадского бальзама. Это — аморфное вещество, с показателем преломления $n = 1{,}54$.

Луч *hi*, дойдя до тонкого слоя бальзама, войдет в этот слой и пройдет дальше по направлению *ikl*. Ввиду того, что показатель преломления этого луча (n_1) не отличается от показателя преломления канадского бальзама (n), никаких явлений преломления при переходе из среды исландского шпата в среду канадского бальзама не происходит. Иначе обстоит дело с лучом *hm*. Его показатель преломления n_2 много больше показателя преломления бальзама. При переходе из среды шпата в среду бальзама этот луч должен испытывать преломление. Однако плоскость *bd* проводится таким образом, чтобы луч *hm* не преломлялся, но претерпевал бы явление полного внутреннего отражения. Это вполне возможно, поскольку $n_2 > n_1$. Отражаясь от поверхности *bd*, луч *hm* пойдет по направлению *mn* и будет поглощен черной оправой николя. Таким образом через николь сможет пройти только один луч *ghikl*, причем этот луч будет поляризованный.

3. Эллипсоид показателей преломления (оптическая индикатриса)

Для того чтобы охарактеризовать особенности распространения света в том или ином кристаллическом веществе, прибегают к построению вспомогательных поверхностей, наглядно изображающих оптические свойства данного вещества и различия этих свойств в зависимости от направления.

Представим себе, что по некоторому направлению OR_2 в кристаллическом веществе распространяется свет. Мы знаем, что каждый луч, идущий по этому направлению, будет разложен на два луча — OR_2 и OR_1, колеблющиеся во взаимно-перпендикулярных плоскостях (фиг. 343).



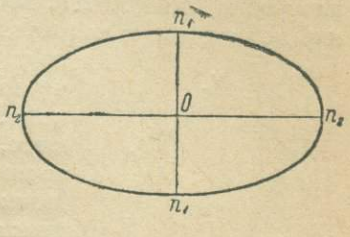
Фиг. 343. Схема, поясняющая построение эллипсоида показателей преломления.

Отложим на направлениях колебаний этих лучей AA_1, BB_1 не амплитуды этих колебаний, как это обычно делается, но показатели преломления данных лучей. Затем возьмем лучи, распространяющиеся по какому-нибудь другому направлению OS_2. Пусть взаимно-перпендикулярные направления колебаний этих лучей будут CC_1 и DD_1. Отложим на направлениях колебаний этих лучей соответственные величины их показателей преломления (в выбранном нами масштабе). Получим четыре новых вектора (OC, OC_1 и OD, OD_1), изображающих показатели преломления лучей, распространяющихся вдоль OS_2.

Если аналогичное построение проделать для всех лучей, распространяющихся из точки O во все стороны, то полученные векторы показателей преломления образуют пучок, причем их концы расположатся на некоторой поверхности.

Опыт и теория показывают, что эта поверхносхь является поверхностью эллипсоида. Построенный таким образом эллипсоид показателей преломления (оптическая индикатриса) наглядно изображает оптические свойства кристаллического вещества и позволяет легко разбираться в очень многих вопросах кристаллооптики.

Если эллипсоид известен, то нетрудно ответить на вопрос, на какие два луча распадается свет, идущий по заданному направлению через кристалл. Для этого, принимая во внимание, что в плоскости, перпендикулярной к распространению лучей, были отложены их показатели преломления, следует рассечь эллипсоид плоскостью, перпендикулярной к заданному направлению распространения лучей. Полученное сечение, как всякое сечение эллипсоида, будет представлять собою эллипс (фиг. 344). Направления диаметров этого эллипса — наибольшего n_2n_2 и наименьшего — n_1n_1 показывают направления колебаний лучей, распространяющихся в направлении, перпендикулярном к плоскости эллипса. Величины этих диаметров (или их половины On_2 и On_1) показывают показатели преломления этих лучей. Таким образом эллипсоид позволяет разобраться на какие два луча распадается свет при прохождении через кристалл, каковы будут направления колебаний этих лучей и каковы будут их показатели преломления.



Фиг. 344.

Четкое представление о решении указанной задачи очень важно, поэтому резюмируем еще раз „правило эллипсоида".

Для того чтобы разобраться на какие два луча распадается луч света данного направления, нужно найти сечение эллипсоида показателей преломления (оптической индикатрисы), нормальное к направлению распространения данного луча. В общем случае это будет эллипс с двумя диаметрами — наибольшим и наименьшим. Направления этих диаметров указывают на направления колебаний искомых лучей, а величины их равны (в некотором масштабе) соответственным показателям преломления искомых лучей.*

Ввиду большой роли, которую играет эллипсоид показателей преломления в вопросах кристаллооптики, следует подробно изучить его свойства.

Эллипсоид представляет собою тело, ограниченное замкнутой поверхностью, дающей во всяком сечении плоскостью эллипс (и в частных случаях — окружность).

В общем случае эллипсоид обладает тремя взаимно-перпендикулярными дигирами, тремя плоскостями симметрии и центром инверсии (дигирно-планаксиальный вид симметрии). Одна из дигир совпадает с наибольшим диаметром эллипсоида. Такой диаметр (или его половина) представляет собою коэфициент преломления лучей, распространяющихся нормально к этому диаметру. Это будет максимальный наибольший показатель преломления среди всех остальных; он называется N_g (от французского слова grand) или обозначается буквой γ.

Другая дигира совпадает с наименьшим диаметром эллипсоида. Этот диаметр (или его половина) является минимальным или наименьшим показателем преломления; он называется N_p (от слова petit) или обозначается буквой α. Третья дигира совпадает с некоторым диаметром (показателем преломления), который меньше N_g, но больше N_p. Этот средний показатель преломления называется N_m (от слова moyen) или обозначается буквой β.

Указанными тремя „главными показателями преломления" вполне определяется все тело эллипсоида.

* В дальнейшем будут рассматриваться только эти, наибольший и наименьший, диаметры эллипсов. Поэтому, чтобы не делать каждый раз оговорок, только они одни будут называться диаметрами эллипса.

Действительно, как известно из аналитической геометрии, уравнением эллипсоида является следующее:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

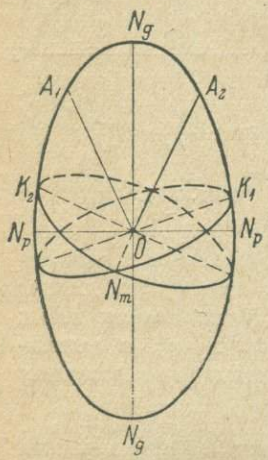
где a, b и c — отрезки, отсекаемые поверхностью эллипсоида на прямоугольных осях координат. Эти оси и являются как раз дигирами эллипсоида, а потому имеем:

$$\frac{x}{N_g}+\frac{y}{N_m}+\frac{z}{N_p}=1.$$

Отсюда видно, что N_g, N_m и N_p вполне определяют собою все тело эллипсоида.

Как было указано, в общем случае сечение эллипсоида представляет собою эллипс. Однако среди сечений, проходящих через N_m, найдутся два не эллиптических, но круговых сечения (фиг. 345).

Рассмотрим, как будут вести себя лучи света, распространяющиеся нормально к круговому сечению (например, вдоль направления OA_2 перпендикулярно плоскости N_mOK_1). Для этого, согласно правилу эллипсоида, следует взять сечение нормальное к направлению распространения луча. В данном случае это будет круг N_mOK_1. Наибольший и наименьший диаметры полученного сечения указывают на направления колебаний лучей. Но все диаметры круга одинаковы — нет ни наибольшего, ни наименьшего. Лучи, идущие нормально круговому сечению, не разлагаются на два луча, поляризованных во взаимно-перпендикулярных плоскостях. Они проходят через кристаллическое тело, так же, как и через изотропное, так же, как, например, через стекло, воду, воздух.



Фиг. 345. Трехосный эллипсоид показателей преломления.

Поэтому круговые сечения эллипсоида называются *„изотропными сечениями“*;

Направления, вдоль которых лучи света распространяются через кристалл как через изотропное тело, называются оптическими осями.

Оптические оси суть нормали к круговым изотропным сечениям эллипсоида.

В общем случае у эллипсоида есть два изотропных сечения и, следовательно, две оптические оси. Поэтому описываемый эллипсоид называется оптически-двуосным эллипсоидом (по количеству осей симметрии он является трехосным).

В частных случаях у эллипсоида может быть $N_g=N_m$ или $N_p=N_m$. В этих случаях тело эллипсоида получает более симметричную форму. Такие эллипсоиды (эллипсоиды вращения) обладают осью вращения с бесконечным множеством плоскостей симметрии через нее проходящих и бесконечным множеством дигир, нормальных к оси вращения. Кроме того присутствуют центр инверсии и плоскость симметрии, нормальная к оси вращения (n — гирно-планаксиальный вид симметрии при $n=\infty$).

У таких эллипсоидов круговое сечение только одно, нормальное к оси вращения. Следовательно, и оптическая ось будет только одна (она совпадает с осью вращения). Поэтому такие эллипсоиды называются оптически одноосными.

Наконец, мыслим еще один частный случай, когда все три главных показателя равны друг другу: $N_g=N_m=N_p$.

В этом случае эллипсоид превращается в шар.

У шара любой диаметр является осью вращения, любая плоскость, проходящая через центр, является плоскостью симметрии. Любое сечение есть круговое изотропное сечение, а следовательно и оптических осей (нормалей к круговым сечениям) бесконечное множество.

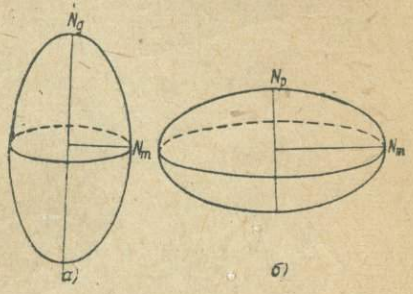
Указанные типы оптических индикатрис делятся на „отрицательные“ и „положительные“.

Если в оптически-двуосном эллипсоиде увеличивать N_p до величины N_m, то получим вытянутый по оси вращения одноосный эллипсоид. У него нет N_p, есть только N_m и N_g (N_g совпадает с осью вращения и с оптической осью) (фиг. 346 *а*). Этот эллипсоид условно называется положительным одноосным эллипсоидом.

Если в оптически-двуосном эллипсоиде укорачивать N_g до величины N_m, то получим сплюснутый по оси вращения одноосный эллипсоид. У него нет N_g; есть только N_m и N_p (N_p совпадает с осью вращения и с оптической осью). Этот эллипсоид условно называется отрицательным одноосным эллипсоидом.

Таким образом,

если в оптическом одноосном эллипсоиде оптическая ось совпадает с N_g — эллипсоид называется положительным (фиг. 346*а*), *если она совпадает с N_p — эллипсоид называется отрицательным* (фиг. 346*б*).



Фиг. 346.

Аналогичное правило имеет место и для оптически-двуосных эллипсоидов.

Однако в последних оптические оси не совпадают ни с N_g, ни с N_p.

Если в оптически-двуосном эллипсоиде оптические оси расположены под меньшим углом к N_g, чем к N_p — эллипсоид называется положительным, если же они расположены под меньшим углом к N_p, чем к N_g — эллипсоид называется отрицательным.

Это же правило можно формулировать еще следующим образом: если биссектрисой острого угла между оптическими осями является N_g — оптически двуосный эллипсоид называется положительным. Если биссектрисой острого угла между оптическими осями является N_p — эллипсоид называется отрицательным.

Как было указано, эллипсоид вполне определяется величинами его N_g, N_m и N_p. Однако при изучении оптических свойств того или иного вещества рассматриваются еще некоторые другие „оптические константы“, характеризующие собою эллипсоид.

Угол между оптическими осями A_1 и A_2 (фиг. 345) обозначается $2V$ и выражается в градусах (измеряется обычно острый угол). При увеличении N_p до величины N_m в оптически двуосном эллипсоиде острый угол $2V$ уменьшается до нуля. Поэтому получающийся при этом положительный одноосный эллипсоид имеет $2V = +0°$. При уменьшении N_g до величины N_m в двуосном эллипсоиде острый угол $2V$ также уменьшается до нуля, поэтому получающийся при этом отрицательный одноосный эллипсоид имеет $2V = -0°$.

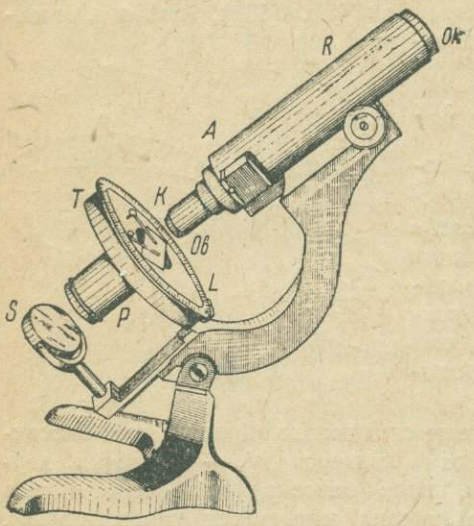
Величиной двупреломления называется разность между показателями преломления.

Величина наибольшего двупреломления — $N_g - N_p$. Второстепенными величинами двупреломления являются $N_g - N_m$ и $N_m - N_p$. Эти величины показывают насколько показатели преломления отличаются друг от друга, а потому являются мерою двойного лучепреломления. Двупреломлением данного сечения называется разность показателей преломления лучей, распространяющихся нормально данному сечению.

Для четкого понимания изложенного выше учения об эллипсоиде следует рекомендовать упражнения с моделями эллипсоидов на нахождение N_g, N_m, N_p, $2V$, типа и знака эллипсоида. Для уяснения правила эллипсоида полезно рассмотреть, на какие лучи, с какими направлениями колебаний и с какими показателями преломления распадается свет, проходящий через кристалл параллельно N_g, параллельно N_m и параллельно N_p.

4. Поляризационный микроскоп, препараты для оптического исследования и простейшие наблюдения над кристаллами без анализатора.

При исследовании оптических свойств кристаллических веществ чаще всего применяется так называемый поляризационный микроскоп (фиг. 347). Он отличается от обыкновенного микроскопа (биологического) обязательным присутствием двух николей. Один из николей — поляризатор *P* — помещается внизу, под столиком микроскопа *T*. Его назначение — превращать обыкновенный свет, отражающийся от зеркала *S*, в поляризованный. Таким образом кристалл *K*, лежащий на столике микроскопа, пронизывается параллельным пучком поляризованных лучей,* имеющих определенное направление колебаний (направление колебаний лучей, вышедших из поляризатора, или совпадает с плоскостью симметрии микроскопа, или перпендикулярно этой плоскости).



Фиг. 347.

Второй николь — анализатор *A* — помещается в тубусе микроскопа *R* между объективом *Ob* и окуляром *Ok*. Этот николь легко выдвигается из тубуса, так что исследования можно вести только с одним николем. Анализатор обычно ориентируется так относительно микроскопа, чтобы направление колебаний лучей, вышедших из него, было перпендикулярно к направлению колебаний лучей, вышедших из поляризатора. Если кристалла на столике микроскопа нет, то при вдвинутом анализаторе, когда николи, как говорят, скрещены, поле зрения микроскопа будет темным. Действительно, все лучи, вышедшие из поляризатора, в анализаторе претерпят явление полного внутреннего отражения и из него не выйдут (см. устройство николя). Лучи же, которые могли бы быть пропущены анализатором, задерживаются еще в поляризаторе и в анализатор не поступают.

В некоторых случаях вместо анализатора, вдвигаемого в тубус микроскопа, пользуются накладным анализатором, который накладывается на верхний конец тубуса микроскопа, под окуляром.

С направлениями колебаний в поляризаторе и в анализаторе в правильно установленном микроскопе должны совпадать взаимно-перпендикулярные нити, натянутые в окуляре крестом.

Исследуемое кристаллическое вещество помещается на столике микроскопа на предметном стекле, представляющем собою пластинку около 1 *мм* толщины. Для удобства исследований, чтобы избавиться от нежелательных явлений преломления и отражения, подлежащее исследованию вещество погружают или в канадский бальзам, или в глицерин, или в какую-либо иную жидкость. Сверху полученный препарат прикрывают покровным стеклом около 0,1—0,15 *мм* толщины. Во многих случаях исследование возможно только при очень малой толщине кристаллов. Поэтому исследования минералов и особенно горных пород производятся почти всегда не над отдельными кристалликами или их обломками, а над шлифами. Шлиф представляет собою пришлифованную пластинку исследуемого объекта в 0,02—0,04 *мм* толщины, заключенную между предметным и покровным стеклами. В качестве скрепляющих прослоек употребляется канадский бальзам.

* О применении сходящегося света см. ниже.

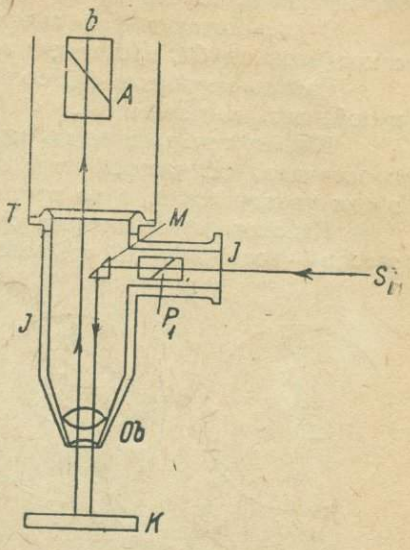
Положим препарат, например шлиф горной породы, на столик микроскопа.

Движением тубуса вверх и вниз при помощи кремальеры устанавливаем препарат на фокус. Анализатор выдвинут. Различные видимые в микроскоп кристаллы, благодаря явлениям поглощения, могут выглядеть различно.

Одни кажутся совершенно черными (непрозрачные кристаллы), другие, наоборот, выглядят совершенно прозрачными и бесцветными, третьи оказываются окрашенными в тот или иной цвет.

Очевидно, что непрозрачные кристаллы исследовать в проходящем свете невозможно.

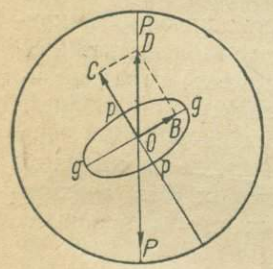
Для их исследования прибегают к отраженному свету, для чего обычный поляризационный микроскоп дополняется специальным прибором — поляризационным вертикальным иллюминатором. Последний вставляется между объективом и тубусом микроскопа (фиг. 348). Лучи света направляются от сильной лампы S_1 в иллюминатор, где они поляризуются и, отражаясь от призмы, падают на кристалл K не снизу, но сверху, через объектив *Ob*. Отражаясь от гладко отполированной поверхности кристалла, они дальнейший свой путь проходят так же, как и при обыкновенном исследовании прозрачных кристаллов.



Фиг. 348. Вертикальный поляризационный иллюминатор.

Исследованиями непрозрачных кристаллов мы заниматься не будем.

Перейдем к кристаллам прозрачным, но окрашенным. Эта естественная окраска кристалла зависит от того, что лучи различных длин волн (лучи белого света) поглощаются веществом кристалла в различной степени. Если, например, кристалл выглядит желтым, это значит, что лучи не желтого цвета, но различных других длин волн поглотились веществом кристалла. Лучи же с длиной волны, отвечающей желтому цвету, беспрепятственно прошли через кристалл. Так как кристаллическое вещество—анизотропно, то следует ожидать, что и способность к поглощению лучей различных цветов по различным направлениям, вообще говоря, различна.



Фиг. 349.

Свойство кристаллического вещества изменять свой цвет в зависимости от направления лучей, называется плеохроизмом (полиохроизмом — по более рациональной терминологии Бекмана).

Пусть *PP* (фиг. 349) — направление колебаний лучей, вышедших из поляризатора (в микроскопе оно фиксируется нитью окулярного креста). Лучи света распространяются нормально рисунку — снизу вверх.

С такими колебаниями *PP* лучи подойдут к кристаллу. Воспользуемся правилом эллипсоида, чтобы решить вопрос, что произойдет с нашими лучами в кристалле. Пусть сечение эллипсоида показателей преломления изображается эллипсом с диаметрами *gg* и *pp*. Эти диаметры показывают: 1) направления колебания лучей, идущих нормально к плоскости эллипса, и 2) показатели преломления этих лучей. Направление колебаний лучей *PP*, подошедших к кристаллу, не совпадает ни с *pp*, ни с *gg*. С такими колебаниями луч войти в кристалл не может. Очевидно, колебание, изображаемое вектором *OD*, должно будет разложиться на два колебания — на *OB* и на *OC*. Через кристалл пойдут два луча:

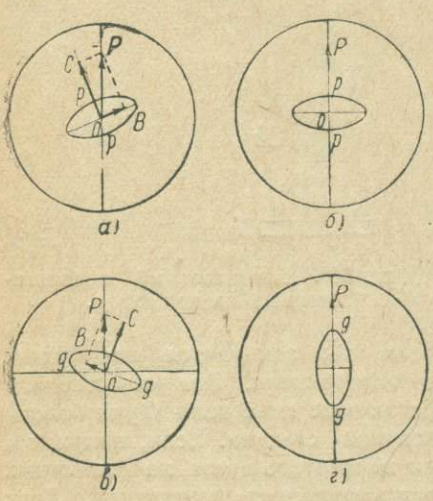
с колебаниями *OB* и *OC* и с показателями преломления *Og* и *Op*. Поглощение этих двух лучей может и не быть одинаковым. Пусть, например, лучи с колебаниями *OB* поглощаются в кристалле таким образом, что из кристалла выходят только зеленые лучи. С колебаниями же *OC* выходят из кристалла не зеленые, но, например, только желтые лучи.*

В глаз попадут как зеленые лучи с колебаниями *OB*, так и желтые лучи с колебаниями *OC* и создадут впечатление желто-зеленой окраски кристалла.

Однако колебание *OC* больше колебания *OB*. Поэтому желтые тона должны преобладать над зелеными.

Начнем теперь вращать кристалл на столике микроскопа. Если вращение производить по часовой стрелке, то очевидно, что колебание *OC* будет все время увеличиваться, в то время как колебание *OB* — уменьшаться (фиг. 350 *а*).

Наконец, когда диаметр *pp* совпадает с направлением колебаний в поляризаторе — колебание *OB* сделается равным 0 (фиг. 350 *б*). Луч, вышедший из поляризатора с колебаниями *OP*, сможет проходить через кристаллы с этими же колебаниями, не разлагаясь на два луча. Так как этот луч выходит из кристалла желтым, зеленого же луча совсем не будет, то кристалл окажется окрашенным в желтый цвет.



Фиг. 350.

Дальнейший поворот приведет к появлению и увеличению колебания *OB*. Колебание же *OC* будет уменьшаться (фиг. 350 *в*). Наконец, при повороте на 90° от положения, при котором проходили одни желтые лучи (фиг. 350 *г*), кристалл займет ориентировку при которой будут проходить только лучи с колебанием вдоль *gg*, т. е. из кристалла выйдут только зеленые лучи. Кристалл будет выглядеть зеленым. Таким образом при вращении на столике микроскопа в общем случае желто-зеленый кристалл будет постепенно менять свою окраску от желтого до зеленого. Очевидно, что при одном полном обороте кристалла на 360° два раза будет наблюдаться наиболее интенсивная окраска одного цвета (в нашем примере — желтая) и два раза — интенсивная окраска другого цвета (в нашем примере—зеленая).

Максимальные различия в окраске разделены поворотами на 90°.

Важно отметить, что плеохроизм следует наблюдать с одним николем (обычно наблюдение ведется с одним поляризатором без анализатора). Плеохроизм проявляется при этом в изменении окраски кристалла при его вращении на столике микроскопа.

Без николей плеохроизм наблюдать затруднительно, так как в наш глаз одновременно попадут и лучи с колебаниями вдоль *gg* и лучи с колебаниями вдоль *pp*. В глазу будет возникать суммарное впечатление от обоих лучей, как бы мы ни вращали кристалл на столике микроскопа. В сокращенных николях наблюдению плеохроизма мешают различные другие явления, с которыми мы познакомимся в следующих разделах.

5. Четырехкратное погасание кристаллов в скрещенных николях и связанные с этим явления

Явления плеохроизма, далеко не всегда наблюдаемые, дают, в общем, немного для познания оптических свойств кристаллов. Гораздо резче проявляется

* Для упрощения предполагаем, что эллипсы как для лучей зеленого цвета, так и для лучей желтого цвета и для всех остальных лучей совпадают своими диаметрами *pp* и *gg*. На самом деле это не всегда имеет место (см. ниже раздел 13 „Дисперсия").

оптическая анизотропия при исследовании в скрещенных николях. К описанию важнейших явлений, обнаруживаемых при введенном анализаторе, мы и перейдем.

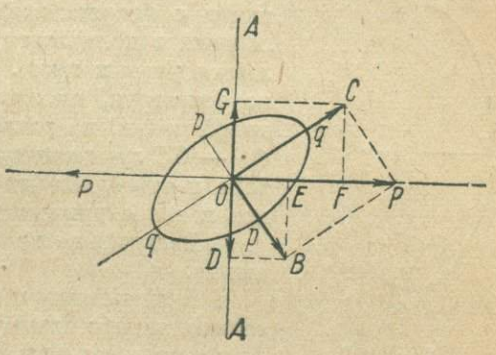
Если исследуемый кристалл характеризуется индикатрисой в виде шара или если он так расположен на столике микроскопа, что его оптическая ось совпадает с оптической осью микроскопа, то поле зрения микроскопа при скрещенных николях будет оставаться таким же темным, как и в том случае, когда кристалла на столике микроскопа вообще нет. Действительно, в указанных случаях лучи света идут вдоль оптической оси кристалла, а потому проходят через него как через изотропное тело (например через стекло). Лучи света, вышедшие из поляризатора, пройдут через кристалл, не изменяя направления своих колебаний, дойдут до анализатора и там будут уничтожены. Вращение кристалла на столике микроскопа ничего не изменит.

Действительно, ось вращения столика совпадает с оптической осью микроскопа, а последняя совпадает с оптической осью кристалла. Поэтому при вращении кристалла совпадение оптической оси микроскопа и оптической оси кристалла не нарушится, и кристалл все время будет оставаться темным, погашенным. Назовем этот случай погасания — сплошным погасанием кристалла.

Итак:

Если оптическая ось кристалла совпадает с оптической осью микроскопа, то в скрещенных николях такой кристалл будет темным: темнота не нарушается и при вращении его на столике микроскопа.

Иная картина наблюдается, если кристалл расположен на столике микроскопа таким образом, что ни одна из его оптических осей не совпадает с оптической осью микроскопа.



Фиг. 351.

Рассмотрим этот случай подробно.

Пусть *PP* (фиг 351) — направление колебаний лучей, вышедших из поляризатора (лучи света распространяются нормально к рисунку снизу вверх). С колебаниями *PP* лучи подойдут к кристаллу. Пусть сечение эллипсоида показателей преломления, нормальное к линии распространения лучей, изображается эллипсом с диаметрами *pp* и *qq*. Как мы знаем, эти диаметры показывают направления колебаний лучей, на которые разложатся по правилу параллелограма векторов лучи с колебаниями *PP*. Очевидно, что луч с показателем преломления *Op* быстрее пройдет через кристалл, чем луч с показателем преломления *Oq* ($Op < Oq$), скорости же распространения обратно-пропорциональны показателям преломления.

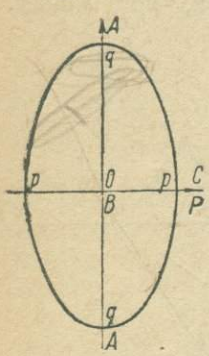
Выйдя из кристалла, луч с колебаниями *OB* дойдет до анализатора. В анализаторе колебания возможны по направлениям *OA* и *OP*, но отнюдь не по направлению *OB*. Поэтому колебание *OB* разложится на два — на *OD* и *OE*. Колебание *OD* пройдет через анализатор, колебание *OE* претерпит явление полного внутреннего отражения и через анализатор не пройдет.

Аналогичное явление произойдет и с колебанием *OC*. Составляющая *OG* этого колебания пройдет через анализатор; составляющая *OF* будет анализатором задержана.

Таким образом через анализатор все же пройдут два луча, с колебаниями *OD* и с колебаниями *OG*, и эти два луча попадут в глаз наблюдателя. Вместо темноты скрещенных николей глаз увидит освещенный кристалл. Заметим тут же, что через анализатор проходят два луча, колеблющиеся в одной плоскости, отмеченной в окуляре одной из нитей, протягивающихся через поле зрения. Один из лучей (в нашем примере с колебаниями *OD*) опередит несколько второй луч

(с колебаниями *OG*) ввиду того, что скорость двух лучей при прохождении их через кристалл была различна (луч с колебаниями *OB* проходил через кристалл быстрее, чем луч с колебаниями *OC*). Мы знаем, что при указанных условиях полученные нами лучи должны интерферировать. Если пользоваться белым (не монохроматическим) светом, то в результате такой интерференции получим не простое усиление или ослабление силы света интерферирующих лучей, но окрашивание лучей в тот или иной цвет (хроматическая интерференция). Подробное исследование этого явления будет дано ниже. (§ 7, „Интерференционная окраска кристаллов"). Сейчас же нам важно отметить лишь то, что в результате прохождения света через систему *поляризатор — кристалл — анализатор* кристалл оказывается освещенным. Остальное поле зрения, не занятое кристаллом, будет оставаться темным.

Начнем теперь вращать исследуемый кристалл на столике микроскопа. Аналогично тому, как и при исследовании плеохроизма, если вращение будет происходить по часовой стрелке, то колебание *OC* будет все время увеличиваться, в то время как колебание *OB* уменьшаться (фиг. 351).



Фиг. 352.

Наконец, когда диаметры *pp* и *qq* нашего эллипса совпадут с направлениями *OP* и *OA*, т. е. с направлениями колебаний в поляризаторе и в анализаторе, колебание *OB* сделается равным нулю. Луч с колебаниями *OP*, вышедшими из поляризатора, сможет проходить через кристалл с этими же колебаниями, не разлагаясь на два луча. С этими колебаниями *OP — OC* луч света пройдет через кристалл, дойдет до анализатора и там будет нацело погашен. Кристалл окажется темным, как и все окружающее свободное поле зрения.

Дальнейшее вращение кристалла снова вызовет его освещение.

При повороте на 90° от положения затемнения кристалла эллипс нашего эллипсоида примет ориентировку, изображенную на фиг. 352. Кристалл снова окажется затемненным. Очевидно, что при одном полном обороте кристалла (при повороте на 360°) кристалл четыре раза будет затемняться и погасать. Чтобы от одного положения затемнения перейти к следующему, необходимо кристалл повернуть на 90°.

Резюмируем наши выводы:

Если оптическая ось кристалла не совпадет с оптической осью микроскопа, то кристалл оказывается, в общем случае, освещенным; при вращении на столике микроскопа на 360° наблюдается четырехкратное погасание; моменты погасания отвечают совпадению направлений колебаний в николях (отмеченных нитями окуляра) с диаметрами эллипса, образованного сечением оптического эллипсоида плоскостью, перпендикулярной к оси микроскопа.

Таким образом явление четырехкратного погасания позволяет легко находить положение диаметров любого сечения оптического эллипсоида. Однако не только абсолютные, но даже относительные величины этих диаметров непосредственно по погасаниям определить невозможно.

Наблюдения над моментами погасания кристаллов позволяют устанавливать одинаковость ориентировок эллипсоида относительно оси микроскопа. Так, например, в пегматитах имеют место закономерные прорастания кварцем кристаллов полевого шпата. При этом все вростки кварца одинаково ориентируются относительно кристаллов полевого шпата, а следовательно, находятся в параллельной ориентировке друг к другу. Поэтому и оптические эллипсоиды ориентированы у них одинаково, а следовательно, все вростки кварца будут погасать на столике микроскопа одновременно (фиг. 353). Наоборот, разновременное погасание свидетельствует о различии в ориентировках эллипсоидов. Иногда, вследствие неодно-

родности кристалла, различные его части имеют несколько различную ориентировку оптического эллипсоида. Такой кристалл не будет целиком погасать одновременно. В то время как в одной его части погасание уже наступит, в некоторых других частях оси сечения эллипсоида еще не будут совпадать с направлениями колебаний в николях. Когда дальнейшим вращением кристалла на столике микроскопа мы достигнем погасания этих частей, первые части уже снова начнут освещаться (так называемое „облачное" или „волнистое" погасание, наблюдаемое часто у того же кварца).

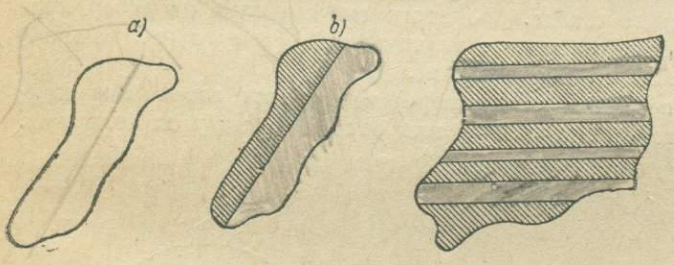


Фиг. 353. Шлиф из письменного гранита (пегматит) под микроскопом.

Иногда можно наблюдать, что в то время, как одна часть кристаллического зерна нацело погашена, вторая часть, обычно отделенная от первой прямой линией, оказывается освещенной. При полном затемнении этой второй части, освещена будет первая часть. Такое попеременное погасание частей зерна, разделенных резкой границей, свидетельствует о том, что наблюдаемое зерно представляет собою „двойник" (фиг. 354*а*). Граница между отдельными индивидами является двойниковым швом.

Как мы знаем (см. отдел V, стр. 206), в полисинтетических двойниках индивиды расположены таким образом, что, если их подряд пронумеровать, то все четные будут ориентированы в параллельном положении друг к другу, но в двойниковом — по отношению ко всем нечетным; нечетные, в свою очередь, параллельны друг другу, но находятся в двойниковой ориентировке по отношению ко всем четным индивидам. В скрещенных николях будут одновременно погасать или все четные индивиды, или все нечетные. Поэтому полисинтетические двойники в скрещенных николях выглядят полосатыми (фиг. 354 *б*) (полисинтетические двойники характерны для плагиоклазов).

В общем случае, если кристаллическое зерно установить таким образом, чтобы двойниковый шов был параллелен направлению колебаний в поляризаторе или в анализаторе, ни один из индивидов погашен не будет. * Установить двойниковый шов в такое положение очень легко, так как направления колебаний в поляризаторе и в анализаторе у правильно выверенного микроскопа отмечены крестом нитей окуляра. Поэтому поворотом препарата на столике микроскопа нетрудно привести двойниковый шов в положение, параллельное одной из нитей (см. фиг. 355*а*). Чтобы от полученного положения перейти к положению, при котором один из индивидов (например *I*) будет нацело погашен, придется кристалл повернуть на столике на некоторый угол в $\alpha°$. Этот угол называется *углом погасания* данного индивида относительно двойникового шва. Для его измерения берут отсчет по лимбу столика в первом положении (изображенном на фиг. 355*а*) и отсчет в положении затемнения исследуемого индивида (изображенном на фиг. 355*б*). Разность полученных отсчетов и будет отвечать углу погасания. Очевидно, что если положение затемнения достигается при повороте на угол погасания α, то при повороте на угол $(90° - \alpha)$ в другую сторону затемнение также будет достигнуто (так как,



Фиг. 354. Простой двойник под микроскопом.
а—без анализатора, *b*—с поляризатором и с анализатором.

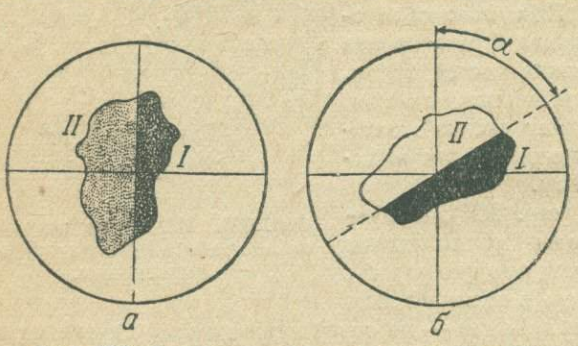
* Сказанное относится также и к полисинтетическим двойникам.

чтобы перейти от одного затемнения к следующему, следует кристалл повернуть на 90°).

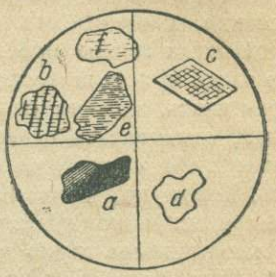
Второй индивид двойника (индивид *II*, фиг. 355) может, вообще говоря, иметь другой угол погасания.

Углы погасания измеряют не только относительно двойниковых швов, но и других кристаллографических направлений, например, относительно плоскостей спайности. Спайность в шлифах проявляется в виде ряда параллельных черточек (трещинок) на кристалле, видимых и при наблюдениях без николей в микроскоп (фиг. 356).

Для измерения угла погасания относительно плоскостей спайности, устанавливают кристалл таким образом, чтобы трещинки спайности заняли положение,



Фиг. 355. Двойник под микроскопом между скрещенными николями.



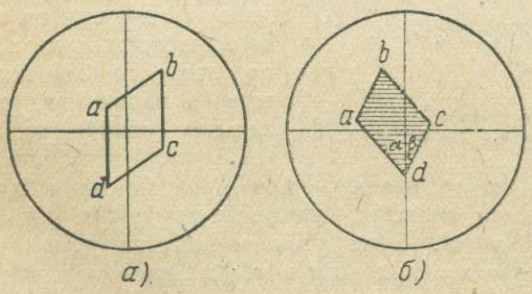
Фиг. 356. Спайность под микроскопом.

Зерна *a*, *e* и *f* имеют спайность по одному направлению: зерна *a* — весьма совершенную, зерна *e* и *f* — среднюю. В зернах *c* и *b* наблюдаются 2 системы плоскости спайности, перекрещивающихся под определенными углами; в зернах *d* спайности не наблюдается.

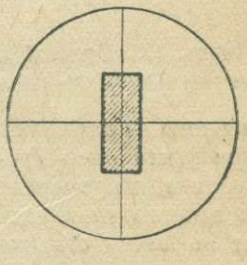
параллельное вертикальной (или горизонтальной) нити окулярного креста нитей (фиг. 356, зерно *e*). Замечают отсчет по лимбу столика. Вводят анализатор (если он выведен) и вращают кристалл в ту или иную сторону до тех пор, пока он не погаснет. В этом положении берут второй отсчет по лимбу. Разность отсчетов дает угол погасания.

Если кристалл имеет ясно выраженную огранку, то измеряют углы погасания относительно различных ребер кристалла. Для этого сначала одно из ребер кристалла приводят в положение, параллельное вертикальной (или горизонтальной) нити окулярного креста (фиг. 357*а*). Берут отсчет.

Затем вращением (при введенном анализаторе) добиваются затемнения кристалла (фиг. 357*б*) и берут второй отсчет. Разность отсчетов дает угол погасания.



Фиг. 357.



Фиг. 358.

Если относительно двух различных ребер (например *ad* и *ab*) получаются одинаковые углы погасания ($\alpha = \beta$), то погасание относительно этих ребер называется *симметричным* (то же для двух систем плоскостей спайности).

Таким образом углы погасания измеряются относительно различных кристаллографических направлений в кристалле: двойниковых швов, плоскостей спайности, ребер кристалла, и пр.

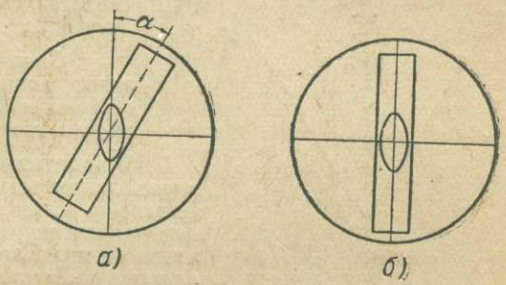
Следовательно,

углом погасания называется угол, образованный каким-либо кристаллографическим направлением с одной из нитей окулярного креста, в момент затемнения кристалла в скрещенных николях.

Нередко наблюдается при измерении углов погасания, что при первоначальной установке кристаллографического направления в положение, параллельное нити окуляра, достигается одновременно и затемнение кристалла. Очевидно, что угол погасания при этом будет 0° (фиг. 358).

Если угол погасания не равен 0°, — *имеет место так называемое косое погасание. Если угол погасания равен* 0° *(и следовательно* 90°*), погасание называется прямым.*

Очевидно, что в случае косого погасания диаметры сечения эллипсоида не параллельны кристаллографическому направлению, относительно которого измеряется угол погасания (фиг. 359*а*). При прямом погасании диаметры эллиптического сечения обязательно параллельны кристаллографическому направлению (фиг. 359*б*).



Фиг. 359.

Прямое погасание, таким образом, свидетельствует о том, что оптический эллипсоид ориентирован относительно кристаллографических направлений не случайно, а вполне закономерно. Прямое погасание, так же, как и симметричное, показывает закономерную связь между ориентировкой эллипсоида и кристаллографическими направлениями в кристалле. Этому, конечно, не следует удивляться. Расположение кристаллографических направлений подчиняется законам симметрии кристаллов. Очевидно и оптические направления (например N_g, N_m и N_p оптического эллипсоида) также должны подчиняться законам симметрии. Поэтому ориентировка оптического эллипсоида в кристалле не может быть случайной, она не должна противоречить симметрии кристаллической решетки.

6. Типы и ориентировки эллипсоидов в кристаллах разных сингоний

Теорема 48. *С главной гирой кристалла всегда совпадает ось вращения его оптической индикатрисы.*

Существование главной гиры кристалла влечет за собою то, что при повороте вокруг этой оси (на 60° для G_6, 90° для G_4 или 120° для G_3) весь кристалл должен совмещаться сам с собою. Его оптическая индикатриса также должна при этом приходить в совмещение сама с собой, и для всякого сечения, перпендикулярного к оси симметрии, также должно иметь место совмещение со своим первоначальным местом.

Эллипс не может совместиться сам с собою при вращении в своей плоскости на 60°, 90° или 120°. Поэтому нельзя предположить, что перпендикулярно оси симметрии с элементарным углом поворота 60°, 90° и 120° может быть расположено эллиптическое сечение оптической индикатрисы. Но, кроме эллиптических, у оптической индикатрисы могут быть еще только круговые сечения. Таким образом *всякое сечение оптической индикатрисы, перпендикулярное главной оси симметрии, есть круг.* Круг же совмещается сам с собою при бесконечно малом угле поворота. Если же любое сечение фигуры, нормальное к некоторому напра-

влению, совмещается само с собою при бесконечно малом вращении вокруг этого направления, то такое направление является осью вращения данной фигуры. Таким образом *с главной гирой кристалла должна совпадать ось вращения его оптической индикатрисы.*

Следствия.

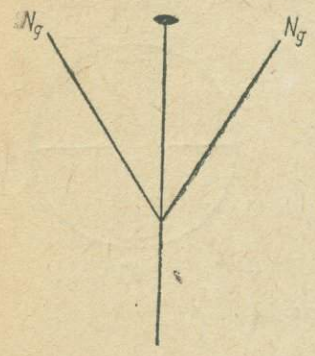
1) В кристаллах высшей категории (полигирной, кубической сингонии), как известно, всегда присутствует не менее четырех главных гир ($4G_3$). По доказанному, с каждой из них должна совпадать ось вращения оптической индикатрисы. Таким образом оптическая индикатриса кристалла полигирной кубической сингонии должна иметь минимум четыре оси вращения. Ни оптически двуосный, ни одноосный эллипсоид такими осями не обладают. Только шар, у которого осей вращения бесконечное множество, может удовлетворить этому требованию.

Таким образом

Оптическая индикатриса кристаллов полигирной (кубической) сингонии представляет собою шар.

Поэтому в скрещенных николях все кристаллы кубической сингонии будут всегда погашены (сплошное погасание).

2) Кристаллы средней категории имеют одну главную гиру (G_3, G_4 или G_6). С этой гирой должна совпадать ось вращения оптической индикатрисы. Оптически двуосные эллипсоиды не имеют оси вращения. Следовательно, оптические свойства кристаллов средней категории должны характеризоваться одноосным эллипсоидом.



Фиг. 360.

Оптическая индикатриса кристаллов средней категории (три-, тетра- и гексагирной сингонии) представляет собою одноосный эллипсоид (эллипсоид вращения), ось которого совпадает с главной гирой кристалла (фиг. 346).

В частных случаях иногда для лучей какой-либо определенной длины волны λ эллипсоид вращения превращается в шар. Однако с изменением термодинамических условий (например, при нагревании) этот шар не будет оставаться шаром, но, в отличие от индикатрисы кубической сингонии, превратится в эллипсоид вращения.

Если кристалл средней категории положить на столик микроскопа гранью, перпендикулярной главной гире (например на пинакоид), то, очевидно, с осью микроскопа совпадает оптическая ось кристалла. В скрещенных николях будет наблюдаться сплошное погасание. При других ориентировках будет наблюдаться только четырехкратное погасание. При этом, если у кристалла выражены какие-либо кристаллографические направления, параллельные главной гире (например ребра призмы), то, очевидно, относительно этих ребер должно наблюдаться прямое погасание.

В случае присутствия „косых" граней (например, граней тетрагональной пирамиды) наблюдается симметричное погасание относительно ребер, ограничивающих эти „косые" грани.

В кристаллах низшей категории нет главных гир, а потому нет оснований предполагать там присутствие симметричного эллипсоида вращения. Опыт подтверждает, что

оптическая индикатриса кристаллов низшей категории представляет собою трехосный эллипсоид.

Для выяснения его расположения докажем еще две теоремы.

Теорема 49. *С дигирой кристалла всегда совпадает дигира его оптической индикатрисы.*

Для доказательства предположим, что один из главных диаметров эллипсоида, или наибольший N_g, или наименьший N_p (или оба), будет расположен косо по отношению к дигире кристалла.

При повороте на 180° вокруг этой дигиры, весь кристалл, а следовательно, и его оптическая индикатриса должны совмещаться сами с собою. Это значит, что и любой диаметр индикатрисы должен совмещаться с таким же, равным ему диаметром (фиг. 360). Таким образом и наибольший диаметр (N_g) и наименьший диаметр (N_p) должен совпасть при этом с такими же равным ему наибольшим (N_g) или наименьшим (N_p).

Следовательно у нашей оптической индикатрисы неминуемо должно быть два наибольших (N_g) или два наименьших (N_p) диаметра. Однако мы знаем, что эллипсоиды имеют только один наибольший или только один наименьший диаметр. Таким образом, нельзя предполагать, что один из подобных диаметров расположен косо по отношению к дигире кристалла. Отсюда следует, что или N_g, или N_p должны совпадать с дигирой или

быть ей перпендикулярны. Но в последнем случае, если оба они будут перпендикулярны дигире, то с дигирой совпадает ось N_m.

Следовательно, с дигирой всегда совпадает или N_g, или N_p, или N_m эллипсоида. Так как каждая из них является дигирой этого эллипсоида, то с дигирой кристалла обязательно должна совпадать дигира эллипсоида.

Теорема. 50. *С плоскостью симметрии кристалла всегда совпадает плоскость симметрии его оптической индикатрисы.*

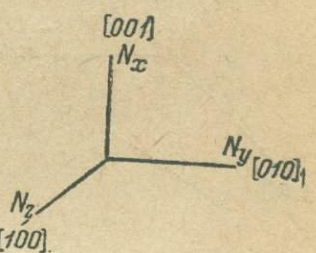
Для доказательства предположим, что один из главных его диаметров, или наибольший (N_g), или наименьшей (N_p), будет расположен косо (не перпендикулярно и не параллельно) к плоскости симметрии кристалла. При отражении в этой плоскости весь кристалл, а следовательно, и его оптическая индикатриса должны совмещаться сами с собою. Следовательно, и любой диаметр индикатрисы должен совмещаться при этом с таким же равным ему диаметром. Таким образом наибольший диаметр N_g или наименьший N_p также должен совмещаться с таким же равным ему диаметром: наибольшим N_g или наименьшим N_p. Однако, как мы знаем, эллипсоиды могут иметь только одно N_g или одно N_p. Отсюда следует, что нельзя предполагать, что диаметр N_g или N_p расположен косо по отношению к плоскости симметрии кристалла. Следовательно, в случае трехосного эллипсоида N_g и N_p или оба лежат в плоскости симметрии кристалла или один из них лежит в этой плоскости, а другой ей перпендикулярен. В первом случае с плоскостью симметрии кристалла окажется совмещенной плоскость, проходящая через N_g и N_p, а эта плоскость, как известно, является одной из плоскостей симметрии эллипсоида. Во втором случае, с плоскостью симметрии кристалла совпадает плоскость, перпендикулярная N_g или N_p (а такая плоскость, как известно, также является плоскостью симметрии эллипсоида).

Следствия

1) В кристаллах дигирной (ромбической) сингонии всегда присутствуют или 3 взаимноперпендикулярных дигиры или одна дигира и две взаимноперпендикулярных плоскости симметрии, через нее проходящие. С дигирами кристалла должны совпадать дигиры эллипсоида, с плоскостями симметрии кристалла — плоскости симметрии эллипсоида. Вспомним, что кристаллографические оси в дигирной сингонии также располагаются по дигирам и по плоскостям симметрии, так что получается прямоугольная система координат.

Отсюда следует, что

три взаимноперпендикулярные дигиры эллипсоида N_g, N_m и N_p должны совпадать с тремя кристаллографическими осями.



Фиг. 361. Расположение осей трехосного эллипсоида в ромбической сингонии.

Однако какая именно дигира эллипсоида совпадает с первой [100], какая совпадает со второй [010] и какая дигира совпадает с третьей кристаллографической осью [001] без опыта решить нельзя (фиг. 361).

Читателю предлагается самому рассчитать число различных возможных ориентировок: N_g, N_m и N_p (дигир эллипсоида) относительно первой, второй и третьей кристаллографической оси.

2) Если у кристалла выражены какие-либо кристаллографические направления или плоскости, параллельные кристаллографическим осям (например, грани или ребра ромбических призм и пинакоидов), то погасание относительно этих направлений будет прямое.

3) В кристаллах моногирной (моноклинной) сингонии всегда присутствует или дигира, или плоскость симметрии, или то и другое вместе. По дигире или по нормали к плоскости симметрии проводится, как мы знаем, вторая кристаллографическая ось [010]. Очевидно, что с этой осью должна совпадать одна из дигир эллипсоида (или N_g или N_p или N_m). Две другие дигиры лежат в плоскости, перпендикулярной ко второй кристаллографической оси, т. е. в той же плоскости, в которой лежат первая и третья кристаллографические оси. Однако с этими осями дигиры эллипсоида не должны совпадать.

Они могут образовать с ними любые углы β (фиг. 362). Обычно третья (а также первая) ось проводится в кристаллах параллельно каким-либо ясно выра-

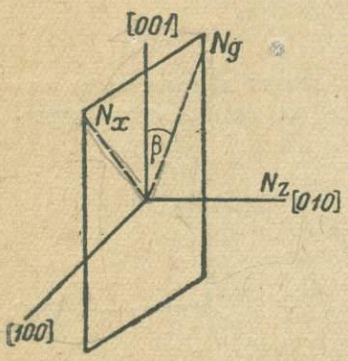
женным кристаллографическим направлениям или плоскостям (например, параллельно грани пинакоидов, плоскости спайности, ребрам ромбических призм и т. д.). Если измерять углы погасания относительно этих направлений (т. е. относительно третьей или первой кристаллографической оси), то, как видно из фиг. 362, погасание будет косое (с углом погасания β).

Угол между третьей кристаллографической осью [001] *и одной из дигир эллипсоида* N_g, N_p *или* N_m *в плоскости, нормальной ко второй оси* [010], *называется главным углом погасания моногирных кристаллов.*

Очевидно, что угол погасания β (или 90° — β) у кристалла (фиг. 362) будет главным углом погасания этого кристалла.

Для того чтобы измерить главный угол погасания моноклинного кристалла, необходимо, чтобы вторая кристаллографическая ось совпадала с осью микроскопа.

Если вторая кристаллографическая ось параллельна столику микроскопа [если, например, кристалл лежит на первом пинакоиде (100)], то погасание относительно кристаллографических осей будет прямым.



Фиг. 362. Расположение осей трехосного эллипсоида в моноклинной сингонии.

3) В агирной (триклинной) сингонии нет ни дигир, ни плоскостей симметрии. Поэтому нельзя указать никаких правил для расположения дигир эллипсоида в кристаллах этой сингонии.

Все три дигиры эллипсоида N_g, N_m *и* N_p *могут образовывать различные углы со всеми тремя кристаллографическими осями и вовсе не должны с ними совпадать.*

Поэтому и погасание у кристаллов агирной (триклинной) сингонии наблюдается всегда косое.

Точное знание ориентировки оптической индикатрисы во многих случаях чрезвычайно важно.

Например, выработаны специальные методы, позволяющие определять состав плагиоклазов, исследуя ориентировку их оптических эллипсоидов относительно двойниковых осей (т. е. некоторых кристаллографических направлений).

Резюмируем наши выводы относительно типов и ориентировок в кристаллах разных сингоний в таблице (см. табл. 24).

7. Интерференционная окраска кристаллов и связанные с нею явления

Прежде чем перейти к описанию практических методов определения типов оптических индикатрис, остановимся на явлениях окраски кристаллов и, прежде всего, на явлениях „интерференционной“ окраски кристаллов, наблюдаемой в скрещенных николях.

При исследовании явлений четырехкратного погасания (раздел 4) вкратце говорилось о причинах этого явления. Остановимся теперь на этом более подробно.

Напомним, что луч света, войдя в кристалл, разлагается на два луча, распространяющиеся с различной скоростью. По выходе из кристалла у этих лучей получится некоторая разность хода. Явлений интерференции непосредственно по выходе лучей из кристалла не наблюдается только потому, что направления колебаний у них взаимно перпендикулярны. Анализатор сводит колебания обоих лучей в одну плоскость. Такие лучи должны интерферировать. Если свет монохроматический, то результатом интерференции явится простое усиление или ослабление силы этого света. Сложнее обстоит дело с белым светом, состоящим из лучей различных длин волн. Разность хода, возникшая в результате прохождения лучей

Классификация кристаллов по оптическим свойствам

Таблица 24

Оптические свойства	Оптически изотропные	Оптически анизотропные						
	Оптически многоосные	Оптически одноосные			Оптически двуосные			
	Оптическая индикатриса—шар	Оптическая индикатриса — одноосный эллипсоид (эллипсоид вращения)			Оптическая индикатриса — двуосный эллипсоид (эллипсоид с тремя дигирами), положительный или отрицательный			
Отвечающие им сингонии	Высшая категория	Средняя категория			Низшая категория			
	Полигирная (кубическая) сингония	Гексагирная (гексагональная) сингония	Тригирная (тригональная) сингония	Тетрагирная (тетрагональная) сингония	Дигирная (ромбическая) сингония	Моногирная (моноклинная) сингония	Агирная (триклинная) сингония	
Ориентировка эллипсоида	Любое направление совпадает с N_m шара	Ось вращения эллипсоида [оптическая ось и диаметр N_g (у положительных) или N_p (у отрицательных)] совпадает с главной гирой кристалла (G_6, G_3, G_4)			Три дигиры эллипсоида (N_g, N_m и N_p) совпадают с тремя кристаллографическими осями (с G_2 или $\perp P$)	Одна из дигир эллипсоида (N_g, N_m или N_p) совпадает со второй кристаллографической осью [010] (или $\perp P$). Две другие лежат в плоскости первой [100] и третьей [001] кристаллографических осей, но не совпадают с ними	Ни одна из дигир эллипсоида (ни N_g, ни N_m, ни N_p) не совпадает с кристаллографическими осями кристалла	

через кристалл, для лучей всех длин волн одинакова и может быть выражена некоторым определенным числом $\mu\mu$. Пусть, например, разность хода лучей, вышедших из анализатора, равна 400 $\mu\mu$. Если бы свет был фиолетовым, то при такой разности хода мы бы получили усиление света. Действительно, длина волны фиолетового света равна 400—450 $\mu\mu$, т. е. разность хода Δ составляет приблизительно одну длину волны: $\Delta = \lambda_{фиол.}$

При такой разности хода имеем усиление света. Если бы свет был красным, то при той же разности хода мы получили бы ослабление света. Действительно, длина волны λ красного света достигает 760 $\mu\mu$, т. е. разность хода Δ составляет приблизительно половину длины волны — $\Delta = {}^1/_2\lambda_{кр}$. При такой разности хода имеем ослабление света. В белом свете присутствуют как фиолетовые, так и красные лучи (и еще всякие другие). Очевидно, что в то время как фиолетовые лучи будут друг друга усиливать, красные будут ослаблять друг друга — вместо белого света получим свет, в котором будут усилены фиолетовые цвета за счет красных.* Также при всякой другой разности хода Δ, в то время как лучи одного цвета будут друг друга усиливать, лучи другого света, с другой длиной волны, будут друг друга ослаблять. Вместо белого цвета получим свет, в котором лучи одних цветов будут преобладать за счет отсутствия лучей других цветов. Таким образом:

в результате интерференции белого (не монохроматического) света возникает так называемая интерференционная окраска (явление хроматической интерференции).

При наблюдении в скрещенных николях, в результате хроматической интерференции, кристаллы оказываются окрашенными в ту или иную интерференционную окраску.

Возникающий вследствие явлений хроматической интерференции цвет обусловлен разностью хода интерферирующих лучей.

Таблица 25

Разность хода, в $\mu\mu$	Интерференц. окраска	Разность хода, в $\mu\mu$	Интерференц. окраска	Разность хода, в $\mu\mu$	Интерференц. окраска
0	черная	575	резкая фиолетовая	1100	фиолетовая
150	серовато-серая	600	синяя	1150	синяя
230	белая	800	зеленая	1350	зеленая
350	желтая	900	желтая	1450	зеленовато-желтая
450	оранжевая	950	желтовато-оранжевая	1500	оранжевая
536	красная	1000	красная	1550	розово-красная

* На самом деле явление — сложнее. Разность хода лучей разных длин волн одинакова только по выходе этих лучей из кристалла. По выходе их из анализатора в скрещенных николях разность хода увеличивается на $\lambda/_2$ для луча каждого цвета. Последнее обстоятельство вызывает различие в разности хода для лучей различных длин волн, что, впрочем, мало осложняет вычисление результирующей окраски.

Для любой, заранее заданной разности хода можно теоретически найти отвечающую этой разности интерференционную окраску. Стоит только, зная длины волн белого цвета, рассчитать — какие лучи будут ослаблены, какие усилены и просуммировать цвета лучей, усиливающих друг друга. Такие расчеты приводят к определенной зависимости интерференционной окраски от разности хода.

В табл. 25 сопоставлена интерференционная окраска в зависимости от разности хода лучей, вышедших из кристалла.

Как видно из табл. 25, с возрастанием разности хода лучей, вышедших из кристалла, наблюдается определенная периодичность смены окрасок. Первая колонна цветов (от 0 до 575 μμ) называются цветами первого порядка; фиолетовый цвет с $\lambda = 575$ μμ называется „чувствительным фиолетовым", так как малейшие отклонения от этой разности хода приводят к изменению его в красный или в синий.

Цвета средней колонны таблицы (от 575 до 1100 μμ) называются цветами второго порядка. „Чувствительный фиолетовый" второго порядка (в 1100 μμ) служит границей между цветами второго порядка и третьего. Блеклые цвета четвертого, пятого и высших порядков улавливаются с трудом и представляют собою смену зеленовато- и розовато-серых тонов, переходящих при еще больших разностях хода в серые, почти белые тона.

Цвета интерференции, отвечающие малым разностям хода, называются низкими, отвечающие большим разностям хода — высокими.

Интерференционную окраску кристаллов, наблюдаемую в скрещенных николях, не следует смешивать с естественной окраской кристаллов, с цветами плеохроизма, которые наблюдаются без анализатора. Интерференционная окраска наблюдается как у окрашенных и плеохроизирующих кристаллов, так и у совершенно прозрачных и бесцветных. Однако естественная окраска, в особенности густоокрашенных кристаллов, может мешать наблюдениям над интерференционной окраской. Последняя суммируется с первой, а потому цвета, наблюдаемые в скрещенных николях при данной разности хода, могут и не соответствовать цветам, указанным в табл. 25. Это обстоятельство не следует забывать при работе с кристаллами, имеющими естественную окраску.

Найдем отчего зависит разность хода лучей, вышедших из кристалла.

Пусть через кристалл толщиною ε (фиг. 363) проходят лучи света. В кристалле, как мы знаем, пройдут два луча X и Y с разными скоростями. Обозначим скорость одного из них v_x, скорость другого — v_y. Соответственно показатели преломления этих лучей будут $N_x = \frac{v_0}{v_x}$...(1) и $N_y = \frac{v_0}{v_y}$...(2), где v_0 — скорость света в воздухе. Пусть луч X проходит всю толщу кристалла ε за время t_x, луч Y — за время t_y. Если $t_x > t_y$, то за время $(t_x - t_y)$ луч Y успеет пройти еще какой-то отрезок Δ уже по воздуху. Величина Δ, показывающая на какой отрезок луч Y опередил луч X, и называется разностью хода. Таким образом разность хода есть путь, проходимый лучом Y в воздухе со скоростью v_0 в течение времени $(t_x - t_y)$:

$$\Delta = v_0 \cdot (t_x - t_y). \tag{3}$$

За время t_x луч X проходит путь ε со скоростью v_x:

$$t_x = \frac{\varepsilon}{v_x}. \tag{4}$$

За время t_y луч Y проходит путь ε со скоростью v_y:

$$t_y = \frac{\varepsilon}{v_y}. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получим

$$\Delta = v_0 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{v_x} - \frac{\varepsilon}{v_y}\right) = \varepsilon \cdot \left(\frac{v_0}{v_x} - \frac{v_0}{v_y}\right). \tag{6}$$

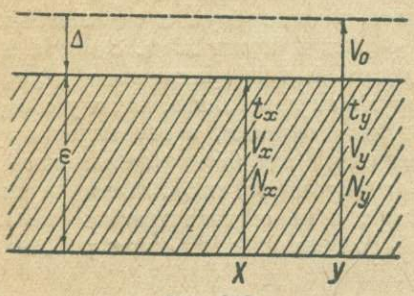
Подставляя теперь выражения (1) и (2) в (6), получим

$$\boxed{\Delta = \varepsilon (N_x - N_y)}.$$

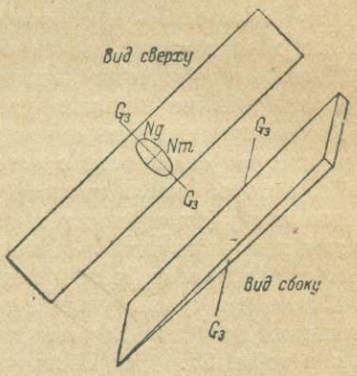
Разность хода лучей, прошедших через кристалл, прямо пропорциональна длине ε *их пути по кристаллу и разности показателей преломления этих лучей* $(N_x - N_y)$, *т. е. величине двупреломления сечения, нормального данным лучам.*

Таким образом при прочих равных условиях, чем толще кристалл, тем больше получаемая разность хода лучей. С другой стороны, при прочих равных условиях, чем больше двупреломление, тем больше получаемая разность хода лучей.

Зависимость разности хода от толщины кристаллической пластинки удобно проследить при помощи кварцевого клина.



Фиг. 363.



Фиг. 364.

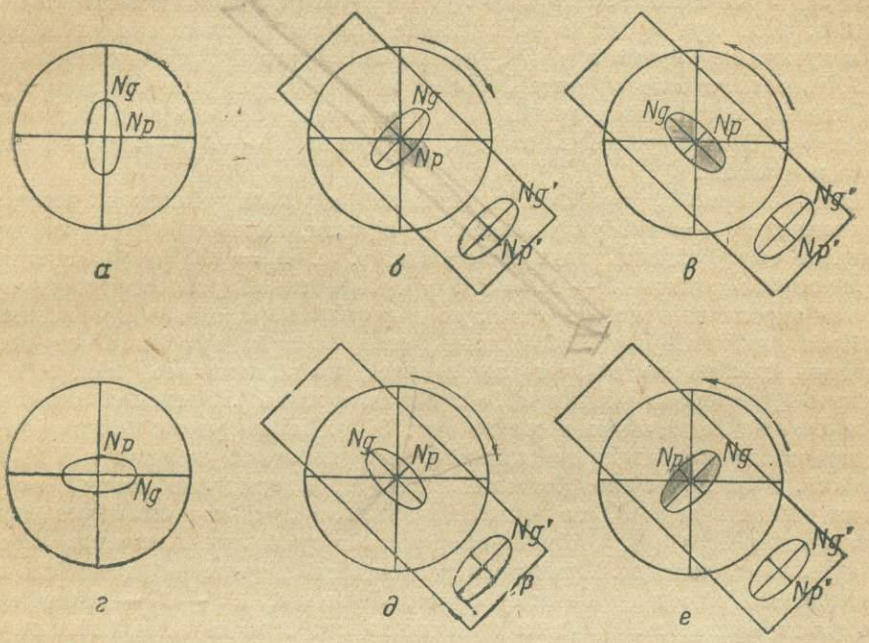
Кварцевый клин (фиг. 364) представляет собою вытянутую прямоугольную пластинку из кварца, около 5 *см* длины, верхняя и нижняя грани которой не параллельны, но клином сходятся в одну сторону. Для защиты клина от поломок он заклеивается канадским бальзамом между двумя стеклянными пластинками. Из кристалла кварца клин обычно вырезается таким образом, чтобы его оптическая ось (а следовательно, и совпадающая с нею G_3 кварца) была бы параллельна короткому ребру клина (см. фиг. 364). Если кристалл кварца, из которого вырезан клин, однороден, то в любом месте клина сечение оптического эллипсоида гранями клина представляется эллипсом, вытянутым поперек вытянутости клина. Двупреломление $N_g - N_m$ — одинаково в любом месте клина и постоянно (для кварца оно равно 0,009). Толщина же клина в разных частях различна. Устанавливая такой клин между скрещенными николями (длинное ребро клина под углом 45° к направлениям колебаний в николях), получим в разных частях различную разность хода, а следовательно, и различную интерференционную окраску. Если клин вставить в специальный прорез над объективом и постепенно передвигать от тонкого конца к толстому, легко проследить постепенную смену интерференционных цветов, начиная от низких цветов первого порядка, до радужных зеленых и розовых тонов третьего порядка. При этом очень полезно сверять наблюдаемые цвета с цветами, указанными в табл. 25, проверяя таким образом правильность приведенного в таблице чередования цветов.

Гипсовая пластинка имеет плоскопараллельные грани, а потому во всех своих частях в скрещенных николях дает одинаковую разность хода и, следо-

вательно, интерференционную окраску. Толщина гипсовой пластинки подбирается таким образом, чтобы лучи света, прошедшие через нее, получали бы разность хода около 550 μμ (иногда до 575 μμ). Такая разность хода отвечает в скрещенных николях красному (иногда чувствительному фиолетовому) цвету первого порядка. Обычная ориентировка эллиптического сечения гипсовой пластинки такая же, как и у кварца: длинный диаметр сечения параллелен короткому ребру пластинки.

Описание кварцевого клина и гипсовой пластинки мы привели здесь не только потому, что с их помощью удобно ознакомиться с явлениями хроматической интерференции, но и потому, что эти „пробные пластинки" могут служить для определения ориентировки эллиптического сечения в том или ином кристалле (и даже для определения знака эллипсоида).

Пусть на столике микроскопа расположен кристалл, оптическая ось которого не совпадает с осью микроскопа.



Фиг. 365.

Такой кристалл в скрещенных николях будет в общем случае освещен и окрашен в тот или иной цвет. Мы знаем каким образом найти расположение диаметров сечения оптического эллипсоида этого кристалла. Для этого следует кристалл повернуть на столике до положения затемнения. В этом положении диаметры эллиптического сечения будут параллельны направлениям колебаний в николях, и, следовательно, должны совпадать с нитями окуляра. Однако мы не можем еще сказать, какой из диаметров эллипса — наибольший N_g или наименьший N_p — совпадает с вертикальной нитью окуляра; мы не можем еще сказать расположен ли эллипс как указано на фиг. 365*а* или же он ориентирован, как на фиг. 365*г*.

Для отличия этих ориентировок, для отличия N_g от N_p эллиптического сечения и служат „пробные пластинки". Пусть эллипс исследуемого кристалла расположен так, как указано на фиг. 365*а*, т. е. длинный диаметр N_g совпадает с вертикальной нитью окуляра. Повернем кристалл по часовой стрелке на 45°. Эллипс примет положение, указанное на фиг. 365*б*.

В этом положении в скрещенных николях кристалл уже не будет затемнен, но, наоборот, ярко окрашен в тот или иной цвет, обусловленный разностью

хода лучей, идущих через кристалл. Пусть для примера кристалл будет окрашен в желтый цвет первого порядка, благодаря разности хода лучей в 400 μμ. В специальный прорез над объективом (или у окуляра, если работа ведется с накладным анализатором) вдвигаем пробную пластинку. Прорез устраивается таким образом, чтобы длинная сторона пластинки располагалась по диагонали от верхнего левого угла к нижнему правому. При такой ориентировке пробной пластинки эллипс сечения этой пластинки будет так же ориентирован, как и эллипс сечения кристалла: длинный диаметр эллипса кристалла параллелен длинному диаметру эллипса пластинки. Очевидно, что теперь лучи света, пройдя через кристалл, должны будут проходить еще и через пробную пластинку. При этом луч света, колеблющийся вдоль N_g кристалла, будет продолжать колебаться в этом же направлении вдоль N_g' пробной пластинки. Луч с колебаниями вдоль N_p кристалла будет продолжать колебаться в этом же направлении и в пластинке (вдоль N_p'). В кристалле первый луч (N_g) распространялся медленнее второго. Очевидно, этот луч будет и в пластинке распространяться медленнее луча N_p'. Если в кристалле первый луч (N_g) отстал от второго (N_p) на некоторую разность хода Δ, то в пластинке он еще отстанет на некоторую разность хода Δ_1. К разности хода Δ, создаваемой кристаллом, прибавится разность хода Δ_1, создаваемая пластинкой. Общая разность хода будет равна $(\Delta + \Delta_1)$ — интерференционная окраска повысится.

Если, например, пробной пластинкой служила гипсовая пластинка, то к разности хода $\Delta = 400$ μμ у нашего кристалла, окрашенного в желтый цвет, прибавится еще разность хода пластинки, т. е. $\Delta_1 = 575$ μμ. Общая разность хода сделается равной $\Delta + \Delta_1 = 975$ μμ. При такой разности хода кристалл окажется окрашенным не в желтый, но в оранжевый цвет второго порядка.

Иная картина будет наблюдаться, если поворот кристалла от положения затемнения сделать не по часовой стрелке, но против нее (или, что то же, повернуть кристалл из предыдущего положения на 90°). Эллипс сечения кристалла примет положение, изображенное на фиг. 365*в*. Теперь уже с длинным диаметром (N_g) кристалла совпадает не длинный, но короткий диаметр (N_p') пробной пластинки. Если луч с колебаниями вдоль N_g в кристалле отстал от второго луча на разность хода Δ, то в пластинке этот луч, как колеблющийся вдоль короткого диаметра (N_p'), будет опережать второй луч пластинки и опередит его на разность хода Δ_1. Суммарная разность хода после прохождения лучей и через кристалл и через пластинку будет, очевидно, $(\Delta_1 - \Delta)$ — интерференционная окраска понизится. В нашем примере вместо первоначальной желтой окраски, отвечающей разности хода в $\Delta = 400$ μμ, получим серую окраску, отвечающую разности хода $\Delta_1 - \Delta = 575 - 400 = 175$ μμ (пробная пластинка — попрежнему гипсовая).

Таким образом,

если соответственные диаметры эллиптических сечений кристалла и пробной пластинки параллельны ($N_g \parallel N_g'$; $N_p \parallel N_p'$), то наблюдается повышение интерференционной окраски. Если соответственные диаметры взаимно перпендикулярны ($N_g \perp N_g'$; $N_p \perp N_p'$), то наблюдается понижение интерференционной окраски.

Предположим теперь, что эллипс сечения исследуемого кристалла располагается при затемнении не как на фиг. 365*а*, но как на фиг. 365*д*, т. е. с вертикальной нитью совпадает его короткий диаметр.

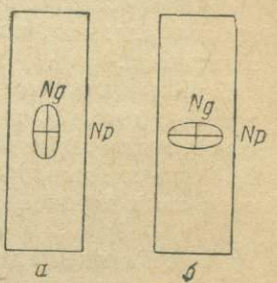
При вращении на 45° от положения затемнения по часовой стрелке получим ориентировку, изображенную на фиг. 365*д*. Соответственные диаметры пластинки будут перпендикулярны диаметрам кристалла. Должно наблюдаться понижение окраски. При повороте от положения затемнения на 45° против часовой стрелки придем к положению, изображенному на фиг. 365*е*. Соответственные диаметры эллипсов параллельны, — должно наблюдаться повышение интерференционной окраски.

Формулируем теперь правило для отличия длинного диаметра N_g от короткого диаметра N_p данного эллиптического сечения:

Если с вертикальной нитью окуляра совпадает длинный диаметр (N_g) эллиптического сечения, то после поворота на 45° по часовой стрелке и введения пробной пластинки должно наблюдаться повышение интерференционной окраски; после же поворота на 45° против часовой стрелки и введения пробной пластинки должно наблюдаться понижение интерференционной окраски. Если с вертикальной нитью окуляра совпадает короткий диаметр (N_p) эллиптического сечения, то наблюдаются обратные явления.

Если первоначально кристалл имеет низкие интерференционные цвета (отвечающие разности хода не свыше 270 μμ), удобно пользоваться в качестве пробной пластинки гипсовой пластинкой. Преимущество клиньев перед простыми пластинками состоит в том, что мы по произволу, вдвигая и выдвигая клин, можем менять разность хода, им создаваемую.

Однако самое большое преимущество клина состоит в том, что, если введение клина приводит к понижению интерференционной окраски, то дальнейшим перемещением клина можно добиться полного уничтожения окраски. Действительно, если разность хода, создаваемая кристаллом, равна Δ, то при расположении клина, при котором соответственные диаметры сечений эллипсов кристалла и клина будут взаимно перпендикулярны, разность хода клина будет уменьшать, компенсировать первоначальную разность хода. Передвижением клина можно достичь того, чтобы $\Delta_1 = \Delta$. Тогда создаваемая клином разность хода Δ_1 будет нацело уничтожать разность хода Δ, создаваемую кристаллом.



Фиг. 366.

При постепенном вдвигании клина (тонким концом вперед) будет наблюдаться постепенное изменение (понижение) интерференционной окраски от первоначальной окраски кристалла через все более низкие цвета, перечисленные в табл. 25, до серых и черных тонов начала первого порядка. После полной компенсации дальнейшее передвижение клина вызовет уже повышение интерференционной окраски.

Определение того, как расположены большой и малый диаметры эллиптического сечения оптической индикатрисы бывает особенно важным в том случае, когда в исследуемом кристалле выражены какие-либо кристаллографические направления. Тогда расположение эллиптического сечения определяют относительно него. Так, например, если кристалл вытянут по какому-нибудь направлению, то определяют так называемый „знак удлинения" или „знак главной зоны".

Знак удлинения или знак главной зоны называется положительным, если длинный диаметр (N_g) эллиптического сечения параллелен направлению удлинения кристалла (фиг. 366а).

Знак удлинения или знак главной зоны называется отрицательным, если длинный диаметр (N_g) эллиптического сечения перпендикулярен направлению удлинения кристалла (фиг. 366б).

После всех предыдущих замечаний, нетрудно сформулировать правила для определения знака удлинения кристалла при помощи пробных пластинок:

Если удлинение кристалла совпадает с удлинением пробной пластинки и наблюдается повышение интерференционной окраски или, если удлинение кристалла перпендикулярно удлинению пробной пластинки и наблюдается понижение интерференционной окраски — знак главной зоны отрицательный.

Если удлинение кристалла совпадает с удлинением пробной пластинки и наблюдается понижение окраски интерференционной пластинки или, если удлинение кристалла перпендикулярно удлинению пробной пластинки и

наблюдается повышение интерференционной окраски — знак главной зоны положительный.

Определение знака главной зоны играет особенно важную роль при исследовании кристаллов средней категории. В этих случаях определение знака главной зоны часто ведет к определению и знака всего эллипсоида. Как мы знаем, у кристаллов этой категории эллипсоид — одноосный вытянутый (+) или сплюснутый (—).

Допустим, например, что некоторые кристаллы средней категории имеют призматический габитус — вытянуты вдоль главной оси симметрии. Тогда с направлением удлинения кристалла будет совпадать ось вращения эллипсоида. Если эллипсоид — вытянутый по оси вращения (положительный), то и знак главной зоны будет положительным (фиг. 366*а*).

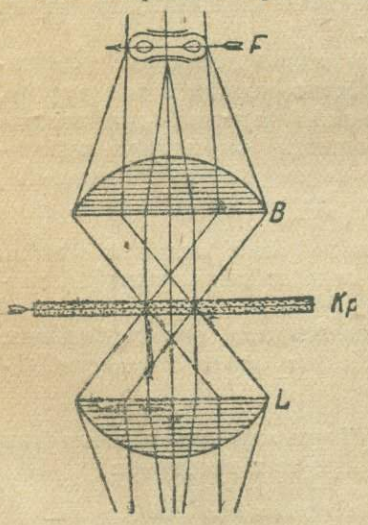
Если эллипсоид — сплюснутый по оси вращения (отрицательный), то и знак главной зоны будет отрицательным (фиг. 366*б*). Наоборот, если опытом установлено, что знак главной зоны такого кристалла положительный, то и знак всего одноосного эллипсоида положительный. Если знак зоны — отрицательный, то и знак эллипсоида — отрицательный. Таким образом, в этом случае знак главной зоны определяет собою и знак всего эллипсоида.

В кристаллах низшей категории определение знака зоны не определяет еще знака эллипсоида, но играет существенную роль при определении ориентировки эллипсоида.

Все вышеприведенные правила определения диаметров эллиптического сечения верны только в том случае, если в пробных пластинках параллельно длинной стороне пластинки располагается короткий диаметр N_p эллипса пластинки и если пробную пластинку ориентировать в микроскопе в направлении от нижней правой стороны к верхней левой. В противных случаях правила меняются на обратные.

8. Главнейшие оптические явления при исследовании кристаллов в сходящемся свете

Исследования кристаллов, описанные в предыдущих разделах, производились на столике микроскопа при освещении кристалла пучком параллельных или почти параллельных лучей (метод исследования в параллельном свете, ортоскопический метод).



Фиг. 367.

Для определения типа, знака, а также ориентировки эллипсоида прибегают обычно к методу исследования в сходящемся свете (коноскопический метод).

При этом методе исследования кристалл помещается в центре пучка сходящегося света (фиг. 367). Для получения такого пучка, внизу, под кристаллом устанавливают специальный „короткофокусный конденсор" (линзу Лазо — *L*).

Для возможности собрать в поле зрения микроскопа расходящиеся лучи этого пучка после их прохождения через кристалл следует пользоваться короткофокусным объективом (объективом большого увеличения).

При этом методе исследования наблюдается не самый кристалл *Kp*, а „интерференционная фигура", получающаяся в главном фокусе объектива *F*. Для ее наблюдения следует просто убрать окуляр. При этом получается мелкая, но резкая картина. Чтобы увеличить эту картину, ее рассматривают не простым глазом, но через как бы добавочный микроскоп. Как и всякий микроскоп, он состоит из окуляра и объектива. Окуляром служит обыкновенный окуляр микроскопа, в качестве объектива этого добавочного микроскопа в тубус (над анализатором) вставляется особая специальная линза — „линза Бертрана". Линза Бертрана вместе с окуляром позволяет увидеть полученную интерференционную фигуру в увеличенном, хотя и в менее резком виде.

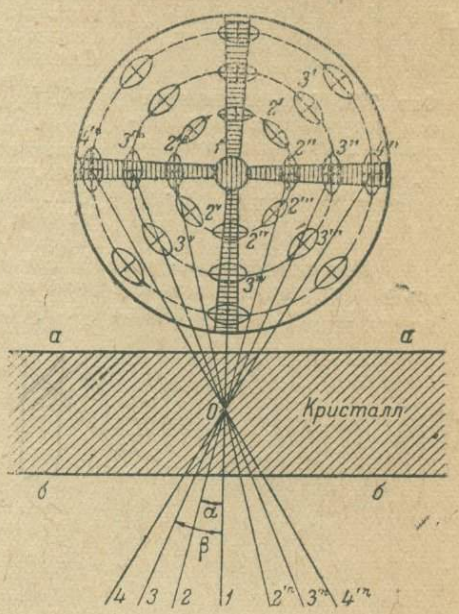
Таким образом

для исследования кристаллов в сходящемся свете, необходимо: 1) под столиком микроскопа установить линзу Лазо, 2) взять объектив большого увели-

чения и 3) ввести в тубус микроскопа линзу Бертрана или вынуть из тубуса окуляр.

Рассмотрим сначала тот простой частный случай, который получается при рассматривании одноосного кристалла, оптическая ось которого совпадает с оптической осью микроскопа.

В параллельном свете в скрещенных николях мы наблюдали бы просто темноту. В сходящемся свете темнота будет наблюдаться только для лучей центральных, идущих через кристалл не наклонно, но по оптической оси кристалла (лучи *1 — 1′* фиг. 368). Для этих лучей, проектирующихся в главной фокусной плоскости, в центре поля зрения должна наблюдаться темнота (для них сечение эллипсоида — круговое сечение *1′*). Наклонные лучи, например, лучи *2*, *3* и *4*, будут проходить через кристалл, распространяясь не вдоль оптической оси кристалла. Сечения эллипсоида, нормальные направлениям распространения этих лучей, будут уже не круговыми, но эллиптическими (эллипсы *2″*, *3″*, *4″*). Рассмотрим лучи, идущие под некоторым углом α к оси микроскопа. Очевидно, что кроме луча *2* (для которого эллипс сечения изображается эллипсом *2″*), под таким же углом α будет распространяться и луч *2′*. Для него эллипс нормального сечения будет такой же, как и *2″*. Под таким же углом α будет распространяться целый конус лучей, проектирующихся в фокусной плоскости на одной окружности. Для всех этих лучей соответственные нормальные сечения индикатрисы будут изображаться одинаковыми эллипсами (*2′*, *2″*, *2‴*,... *2′ⁿ*). Длины путей всех лучей этого конуса в кристалле также будут одинаковыми (при условии, если кристалл ограничен плоскопараллельными сторонами *аа* и *бб*, нормальными к оси микроскопа). Поэтому лучи нашего конуса будут характеризоваться одинаковыми разностями хода, а следовательно, и одинаковой интерференционной окраской в скрещенных николях. Лучи *3*, распространяющиеся под каким-либо иным углом β к оптической оси, образуют другой конус, проектирующийся в фокусной плоскости окружностью другого радиуса. Все лучи этого конуса проходят через кристалл нормально одинаковым эллиптическим сечениям индикатрисы (*3′*, *3″*, *3‴*..... *3′ⁿ*) и имеют одинаковую длину пути.



Фиг. 368.

Эллиптические сечения *3′*, *3″*, *3‴*..... *3′ⁿ* будут иные, чем для эллиптического сечения *2′*, *2″*, *2‴*.... *2′ⁿ*, и длины путей для лучей *3* иные, чем для лучей *2*.

Поэтому интерференционная окраска в скрещенных николях для всех лучей конуса *3* будет одинакова, но отлична от интерференционной окраски лучей *2*. Конус лучей *4* в скрещенных николях будет характеризоваться своей, отличной от предыдущих, интерференционной окраской. При этом, чем больше угол наклона лучей, проходящих через кристалл, тем больше будет длина пути этих лучей по кристаллу, тем, следовательно, больше будет и разность хода лучей, прошедших через кристалл, тем, следовательно, выше интерференционная окраска этих лучей. Таким образом, цвета интерференции лучей, идущих под углом α (кольцо *2′*, *2″*, *2‴*.... *2′ⁿ*), будет ниже цветов интерференции лучей, идущих под углом β (кольцо *3′*, *3″*, *3‴*..... *3′ⁿ*). В свою очередь лучи *4* получат еще более высокую интерференционную окраску. Таким образом видимая в фокусной плоскости интерференционная фигура представляет ряд концентрических колец различной интерференционной окраски; цвета интерференции тем выше, чем больше радиус кольца (эти кольца называются „изохроматическими"). Выяснив характер изменения интерференционной окраски, рассмотрим теперь еще одно важное обстоятельство, накладывающее характерный отпечаток на всю картину. При изучении явления четырехкратного погасания кристаллов, мы установили, что если диаметры эллиптического сечения параллельны направлениям колебаний в поляризаторе и в анализаторе (параллельны нитям окулярного креста), то наблюдается темнота. Из фиг. 368 мы видим, что для всех наклонных лучей, лежащих в плоскостях колебаний поляризатора и анализатора, диаметры эллиптических сечений как раз совпадают с направлениями колебаний николей (эллипсы *2″*, *3″*, *4″*, *2ⁱⁿ*, *3ⁱⁿ*, *4ⁱⁿ*, а также эллипсы 2^{IV}, 3^{IV}, 4^{IV}...). Поэтому лучи, идущие в этих направлениях, будут погашены, в результате чего интерференционная фигура окажется пересеченной черным крестом.

В сходящемся свете интерференционная фигура одноосного кристалла в препарате, вырезанном нормально к оптической оси, представляется рядом концен-

трических изохроматических колец, окрашенных различными цветами интерференции. Интерференционные цвета последовательно возрастают от центра колец (выхода оптической оси). Фигура пересечена черным крестом, стороны которого совпадают с направлениями колебаний в николях. При вращении кристалла на столике микроскопа никаких изменений не происходит (фиг. 369).



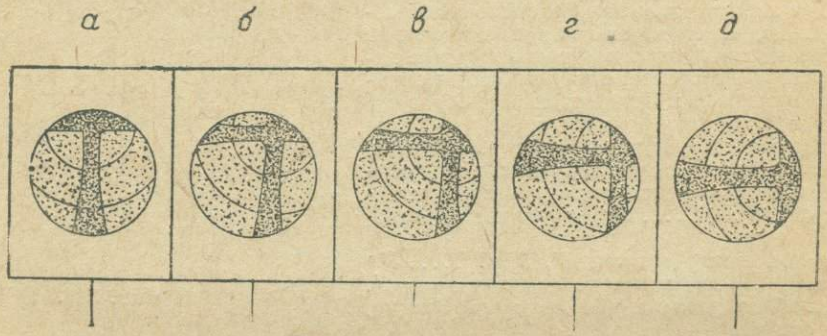
Фиг. 369. Интерференционная фигура одноосного кристалла в сходящемся свете. Препарат вырезан нормально к оптической оси.

Характер фигуры, наблюдаемой в сходящемся свете, зависит от оптической системы микроскопа и от разности хода.

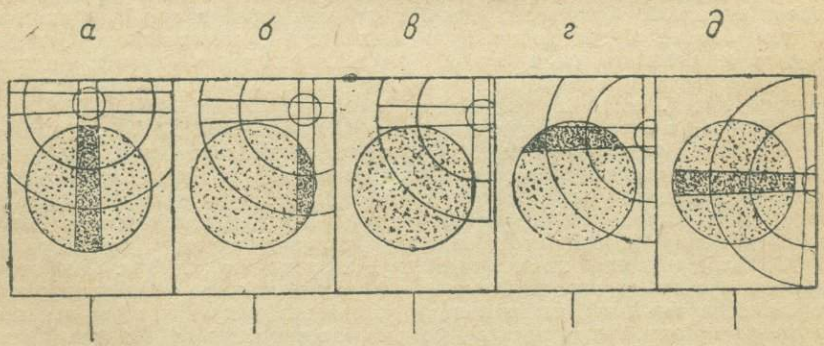
Чем больше увеличение объектива, тем ближе он будет придвинут к кристаллу и тем, следовательно, большее количество расходящихся над кристаллом лучей попадет в поле зрения микроскопа. Благодаря этому, чем больше увеличение (или, точнее, так называемая „апертура" микроскопа), тем при прочих равных условиях большее количество изохроматических колец можно будет наблюдать в микроскоп. Слабые объективы позволяют наблюдать только центральную часть фигуры с низкими цветами интерференции.

Если оптическая ось кристалла не совпадает с осью микроскопа, но наклонена к ней, то очевидно, что изображение оптической оси, совпадающее с центром всех изохроматических колец, будет смещено с центра поля зрения (фиг. 370). При вращении кристалла на столике микроскопа изображение оптической оси (центр темного креста) будет перемещаться по полю зрения по дуге окружности (фиг. 370).

При еще большем наклоне оптической оси кристалла к оси микроскопа, оптическая ось уже не попадет в поле зрения микроскопа (фиг. 371*а*). В поле зрения могут попадать только ветви темного креста (см. фиг. 371).



Фиг. 370.



Фиг. 371.

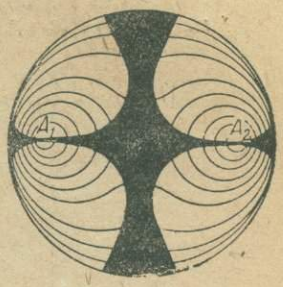
При вращении на столике микроскопа будет видима то одна из ветвей (вертикальная) (фиг. 371*а*), то вторая (горизонтальная) ветвь креста. В некоторых положениях могут исчезать обе ветви или, наоборот, могут быть видимы обе (если оптическая ось не очень далеко выходит за поле зрения микроскопа).

В сходящемся свете в препаратах, вырезанных наклонно к оптической оси, ветви темного креста у одноосного кристалла при вращении на столике микроскопа поступательно перемещаются параллельно направлениям колебаний в николях.

Мало характерные фигуры получаются в том случае, когда оптическая ось кристалла перпендикулярна оси микроскопа.

При вращении на столике микроскопа, когда оптическая ось кристалла занимает положение, параллельное направлению колебаний в николях — все поле зрения темнеет.

В диагональных положениях наблюдаются просветление и интерференционная окраска, повышающаяся от центра в сторону оптической оси кристалла и понижающаяся от центра вдоль оптической оси.



Фиг. 372. Схема интерференционной фигуры двуосного кристалла в сходящемся свете.

Рассмотрение интерференционных фигур двуосных кристаллов начнем также с простейших случаев. Пусть кристаллическая пластинка вырезана нормально к острой биссектрисе угла оптических осей. В этом случае обычно обе оптические оси оказываются в поле зрения микроскопа.

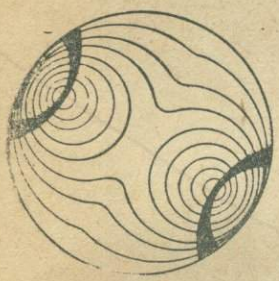
На фиг. 372 изображена схема интерференционной фигуры такого кристалла, ориентированного таким образом, что его оптические оси (A_1) и (A_2) лежат в плоскости колебаний одного из николей. Вокруг каждой из оптических осей наблюдаются изохроматические кольца, которые, сливаясь, образуют более сложные кривые (напоминающие восьмерки — „лемнискаты").

Темный крест имеет более широкие очертания, особенно его ветвь, расположенная в направлении перпендикулярном плоскости, в которой лежат оптические оси.

При вращении кристалла на столике микроскопа будут вращаться по дугам окружности и изображения оптических осей A_1 и A_2; не меняя своей формы, будут вращаться и связанные с ними изохроматические кривые. Темный крест при этом разрывается в средней своей части, превращаясь в гиперболу (фиг. 373).

В сходящемся свете интерференционная фигура двуосного кристалла в препарате, вырезанном нормально к острой биссектрисе угла оптических осей, представляется рядом лемнискатообразных изохроматических кривых. Интерференционные цвета последовательно возрастают от фокусов лемнискат (выходов оптических осей). Если оптические оси расположены в плоскости колебаний одного из николей, фигура пересечена черным крестом.

Ветви креста совпадают с направлениями колебаний в николях. При вращения на столике микроскопа крест разрывается, превращаясь в гиперболу, ветви которой проходят через оптические оси; ассимптотами являются направления колебаний в николях. *



Фиг. 373. То же, что на фиг. 372, но после поворота плоскости оптических осей вокруг оси микроскопа на 45°.

Наряду с увеличением на характер фигуры влияет и угол оптических осей.

Чем больше угол оптических осей, тем дальше друг от друга располагаются их изображения в интерференционной фигуре.

Иногда оптические оси могут и вовсе выходить из поля зрения. Это наблюдается в том случае, когда препарат вырезан нормально не к острой, но к тупой биссектрисе угла оптических осей.

Если препарат вырезан нормально к одной из оптических осей, то очевидно, что эта ось будет изображаться в центре поля зрения (фиг. 374 *а*).

Интерференционная фигура будет напоминать фигуру соответственного разреза одноосного кристалла. Однако вместо двух ветвей черного креста видна только одна (вторая ветвь, расположенная между изображениями обеих оптических осей, обычно не попадает в поле зрения).

При вращении на столике микроскопа ветвь креста превращается в ветвь гиперболы (фиг. 374*б*).

На фиг. 375 изображены картины трех „косых" разрезов и последовательные изменения этих картин при вращении на столике микроскопа на 90°.

В сходящемся свете в препаратах, вырезанных наклонно (косо) к оптическим осям двуосного кристалла, прямые ветви при вращении на столике микроскопа превращаются в изгибающиеся ветви гиперболы.

---

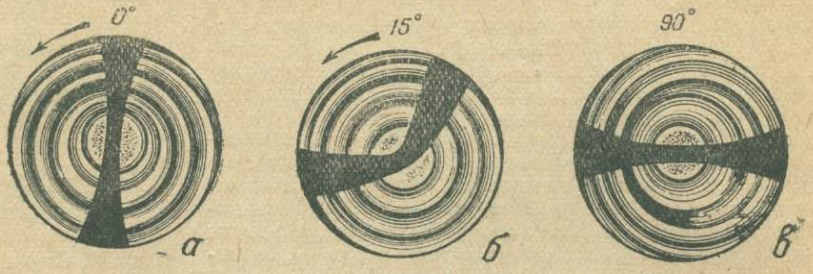
* Подробный вывод этой фигуры см. Белянкин, „Кристаллооптика", 1934.

В препаратах двуосных кристаллов, вырезанных параллельно обеим оптическим осям, наблюдаются такие же фигуры, как и у соответственных разрезов одноосных кристаллов. Такие разрезы характеризуются максимальными интерференционными цветами.

9. Определение типа и знака оптической индикатрисы

После всего сказанного в предыдущем разделе ясно, что для определения типа оптической индикатрисы следует воспользоваться сходящимся светом.

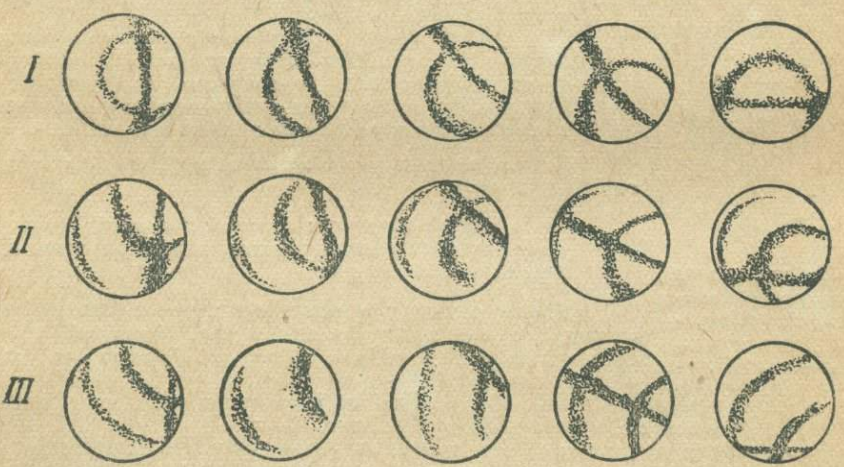
Если в сходящемся свете в скрещенных николях при вращении кристалла на столике микроскопа никакой интерференционной фигуры не наблюдается и



Фиг. 374. Двуосный минерал в сходящемся свете (разрез, перпендикулярный оптической оси).

поле зрения остается все время темным, то оптическая индикатриса — шар [кристалл полигирной (кубической) сингонии]; если наблюдаются ветви темного креста, все время остающиеся параллельными направлениям колебаний в николях, то индикатриса — одноосный эллипсоид (кристалл средней категории); если наблюдаются ветви креста, превращающиеся в кривые ветви гиперболы, то индикатриса — двуосный эллипсоид (кристалл низшей категории).

Как одноосные, так и двуосные эллипсоиды могут быть положительными (+) и отрицательными (—). Для определения знака пользуются пробными пластинками, которые вставляются в тубус микроскопа.



Фиг. 375. Косые разрезы.

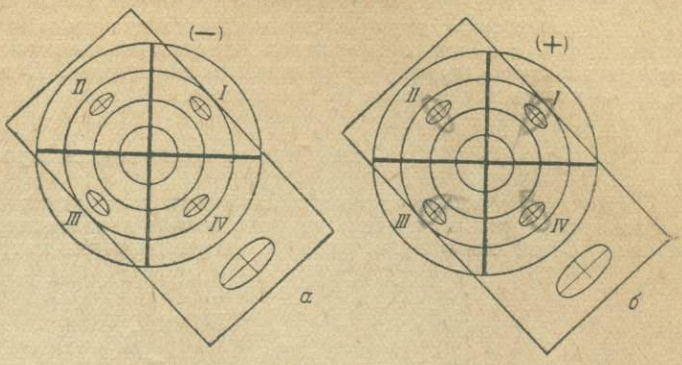
Оптический знак одноосных кристаллов определяется обычно в разрезах, перпендикулярных оптической оси. В таких разрезах сечение индикатрисы, нормальное к лучам, наклонным к оптической оси, представляет собою эллипс (см. схему фиг. 376).

Как нетрудно сообразить, если эллипсоид сплюснутый (отрицательный), то короткие диаметры эллиптического сечения будут направлены в сторону оптической оси (фиг. 376*а*)

Из рассмотрения приведенной фиг. 376 ясно, что в случае отрицательного эллипсоида при введении пробной пластинки в квадрантах *II* и *IV*, т. е. в квадрантах, расположен-

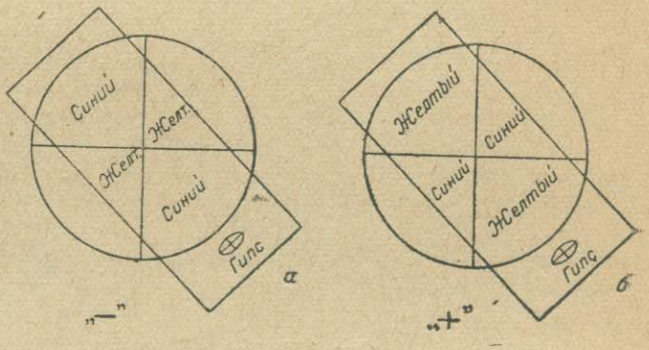
ных вдоль длины пластинки, соответственные диаметры эллипсов кристалла и пластинки будут параллельны. Поэтому в этих квадрантах должно наблюдаться повышение интерференционной окраски. В квадрантах *I* и *III*, т. е. в квадрантах, расположенных поперек длины пластинки, соответственные диаметры эллипсов кристалла и пластинки взаимно перпендикулярны. Поэтому в этих квадрантах должно наблюдаться понижение окраски.

В случае же вытянутого (положительного) эллипсоида (фиг. 376*б*) при введении пробной пластинки в квадрантах *II* и *IV* оси соответственных диаметров кристалла и пластинки будут взаимноперпендикулярны. Поэтому в этих квадрантах будет наблюдаться понижение окраски. Наоборот, в квадрантах *I* и *III* соответственные диаметры будут параллельны, что вызовет повышение интерференционной окраски.



Фиг. 376.

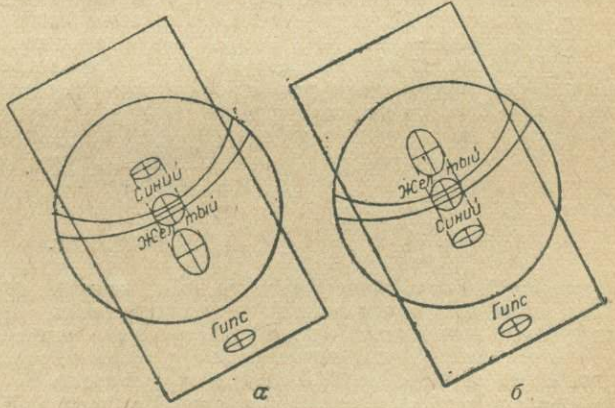
Если в качестве пробной взята гипсовая пластинка, то при повышении окраски вместо красного цвета гипсовой пластинки наблюдается синий цвет, при понижении — желтый цвет.



Фиг. 377.

Если при определении знака одноосного эллипсоида в сходящемся свете в скрещенных николях, в разрезах, нормальных к оптической оси, введение гипсовой пластинки приводит в центре поля зрения к синей окраске квадрантов, расположенных вдоль длины пластинки, и к желтой окраске квадрантов, расположенных поперек пластинки, то знак эллипсоида — отрицательный (фиг. 377а).

Наоборот, если синяя окраска возникает в квадрантах, расположенных поперек длины пластинки, а желтая — в квадрантах, расположенных вдоль длины, то знак эллипсоида — положительный (фиг. 377б).



Фиг. 378.

Определение знака двуосных кристаллов обычно ведется в разрезах, нормальных к оптической оси, или же в разрезах, нормальных к острой биссектрисе угла оптических осей.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, приводят к следующим правилам определения знака двуосных эллипсоидов.

Для определения знака двуосного эллипсоида в сходящемся свете, в скрещенных николях, в разрезах, нормальных к оптической оси, ориентируют препарат таким образом, чтобы плоскость, в которой лежат оптические оси, заняла диагональное положение и совпала с направлением длинной стороны вставляемой в микроскоп пробной пластинки.

Если при пользовании гипсовой пластинкой со стороны вогнутости ветви гиперболы наблюдается синяя окраска, а со стороны выпуклости — желтая, то эллипсоид — отрицательный (фиг. 378а). Наоборот, если синяя окраска возникает со стороны выпуклости ветви гиперболы, а желтая со стороны вогнутости — эллипсоид положительный (фиг. 378б).

Все вышеприведенные правила определения знака эллипсоида верны только в том случае, если в пробных пластинках параллельно длинной стороне пластинки располагается короткий диаметр ее эллиптического сечения. При обратном расположении диаметров эллипса все правила изменяются на обратные.

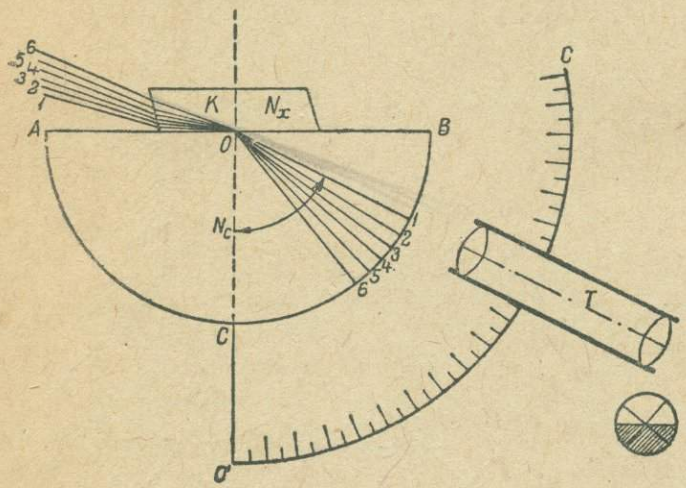
10. Определение показателей преломления

После определения типа и знака оптической индикатрисы перейдем к определению важнейших оптических констант показателей преломления. Как указывалось выше, для вполне точной характеристики всей оптической индикатрисы достаточно знать только „главные" показатели преломления: N_g, N_m и N_p — для двуосного эллипсоида и два из них — для одноосного.

Различных методов определения показателей преломления существует довольно много. Остановимся только на двух.

Рефрактометрический метод, как и все другие, основан на явлениях преломления и отражения.

Для простоты предположим сначала, что исследуемое тело изотропное (твердое или даже жидкое).



Фиг. 379.

Для определения его показателя преломления N_x устанавливают тело на стеклянную полусферу ACB, показатель преломления которой заведомо больше показателя преломления данного тела (фиг. 379). Лучи света, пронизывая исследуемое тело K, проходят в стеклянную полусферу. При этом, так как показатель преломления N_c полусферы больше показателя N_x данного тела, то преломленные лучи приближаются к нормали OO' поверхности раздела AB. Чем больше будет угол падения луча на границу AB между средой N_x и средой N_c, тем больше будет и угол преломления. Максимального своего значения угол преломления r может достигнуть при угле падения в 90°. Тогда по закону Снеллиуса — Декарта имеем

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin r} = \frac{N_c}{N_x}; \tag{1}$$

отсюда

$$N_x = N_c \sin r. \tag{2}$$

Полученная формула показывает, что, если известно N_c (показатель преломления стекла) и если определить максимальный угол преломления r (он равен, как показывает формула, углу полного внутреннего отражения), то можно определить показатель преломления N_x.

Максимальный угол преломления r определяется наблюдением лучей, максимально отклоненных от нормали OO'. Эти лучи наблюдаются через специальную трубу и представляются как граница между освещенной областью $O'O1$ и темной областью $1OB$.

Поднятием и опусканием зрительной трубы устанавливают видимую в нее границу точно на пересечение нитей окуляра. В этом случае угол наклона трубы T к нормали OO' ($\angle O'OT$) и будет равен искомому углу $O'OT$. Угол же наклона трубы ($\angle O'OT$) непосредственно отсчитывается по лимбу $O'C$. Умножая показатель преломления N_c стекла рефрактометра на синус измеренного угла $O'OT$, определяют искомый показатель.

Определение можно вести и несколько иначе, направляя лучи света не сверху, но снизу на испытуемое тело (фиг. 380). Тогда все те лучи, которые падают на границу AB под углом, меньшим угла полного внутреннего отражения $j = O/O1$, будут преломляться в среду N_x (лучи *9*, *8*, *7*).

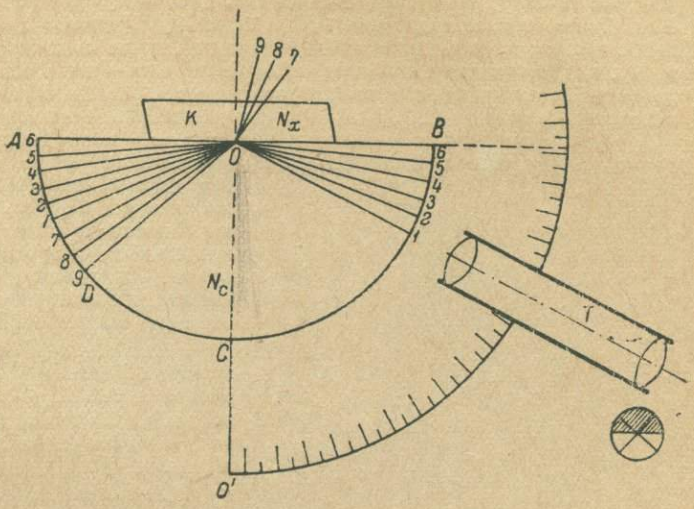
Лучи же, падающие под углом, бóльшим угла полного внутреннего отражения, будут целиком отражаться (лучи *1, 2, 3, 4, 5, 6*). Таким образом в области *1OB* будем иметь освещенную часть, в области *1OO′* — затемненную.

Угол полного внутреннего отражения $j = O'O1$ предопределяется формулой

$$\sin j = \frac{N_x}{N_c};$$

отсюда

$$N_x = N_c \sin j.$$



Фиг. 380.

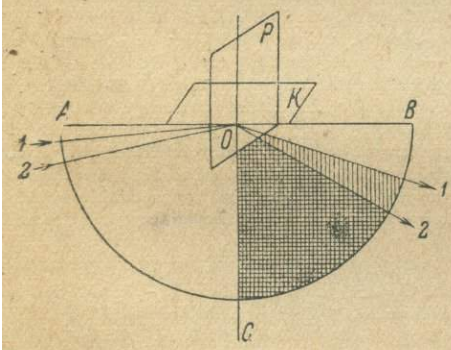
Получим уже знакомую нам формулу для определения показателя преломления. Угол полного внутреннего отражения j практически определяется так же, как и равный ему угол максимального преломления r.

Разница состоит только в том, что при освещении сверху освещенной будет нижняя часть полусферы, а темной — верхняя, при освещении же снизу, наоборот, верхняя часть полусферы будет освещена, нижняя будет темна (так как зрительная труба дает перевернутые изображения, соотношения между светом и тенью в трубе кажутся обратными); при этом темнота, наблюдаемая при нижнем освещении, не будет полной, вследствие частичного отражения лучей *7, 8, 9*...., преломляющихся в исследуемое тело.

Рассмотрим усложнения, вызываемые исследованием не изотропного, но оптически анизотропного вещества.

Пусть лучи, пронизывающие кристалл K, направлены сверху (фиг. 381).

Максимально отклоненные лучи определятся, как мы видели, лучами с углом падения в 90°, т. е. лучами *AB*, скользящими вдоль границы раздела *AB*.



Фиг. 381.

В кристалле K вдоль этой границы, как и вдоль всякого направления, будут распространяться два луча с различными показателями преломления. Величины этих показателей N_x и N_y можно построить по правилу индикатрисы (если эту индикатрису считать заданной, то N_x и N_y равны диаметрам эллипса сечения индикатрисы плоскостью P, нормальной к лучу *1O*). Пусть луч с показателем N_x по выходе из кристалла пойдет по направлению *O1*. Тогда луч с показателем N_y пойдет по некоторому другому направлению *O1′*. Таким образом в общем случае для вещества с двойным лучепреломлением будет наблюдаться не одна, но две границы, отвечающие двум различным показателям преломления двупреломляющего вещества. Устанавливая зрительную трубу сначала на одну границу, затем на вторую, можно определить два показателя преломления исследуемого кристалла. Однако нас должны интересовать главные показатели преломления, N_g, N_m и N_p, а не два показателя N_x и N_y, величины которых определяются ориентировкой оптического эллипсоида относительно падающего луча.

Для того чтобы от случайных показателей N_x и N_y перейти к главным показателям N_g, N_m и N_p, полусфера *ACB* устраивается в рефрактометрах вращающейся вокруг оси *OC*. Вращая полусферу, а вместе с тем и кристалл K, мы тем самым меняем ориентировку оптического эллипсоида кристалла относительно неподвижно падающего луча *1O*. Показатели N_x и N_y каждый раз являются диаметрами эллипса, получаемого в сечении эллипсоида вертикальной плоскостью P, нормальной к *1O*. Очевидно, что, как бы эллипсоид ни был ориентирован при вращении вокруг вертикальной оси *OC*, все его три главных диаметра и N_g, и N_m, и N_p пройдут через сечение P (фиг. 381).

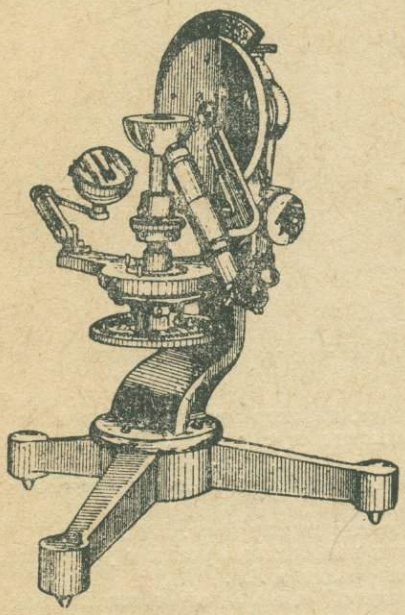
Нетрудно доказать следующую теорему:

Диаметры N_g, N_m и N_p эллипсоида являются диаметрами любых плоских сечений эллипсоида, через них проходящих.

Диаметры N_g, N_m и N_p являются, как известно, дигирами эллипсоида.

Но если весь эллипсоид совмещается сам с собою при повороте на 180°, то и его плоское сечение, проходящее через ось поворота, тоже совместится при этом само с собою. Таким образом диаметры N_g, N_m и N_p являются дигирами плоских сечений, т. е. наибольшими и наименьшими диаметрами любых эллипсов, через них проходящих. Поэтому, когда тот или иной главный диаметр эллипсоида совместится с плоскостью P, этот диаметр будет являться и диаметром эллипса. Таким образом при вращении кристалла в некоторые моменты N_x и N_y будут принимать значения N_g, N_m и N_p.

Каким же образом можно уловить эти моменты? Для этого решим, что будет происходить с обеими границами $O1$ и $O1'$ при вращении. Очевидно, что при этом они не могут оставаться в покое, но будут перемещаться вверх и вниз. Пусть верхняя граница, отмечавшая первоначально показатель преломления N_x луча $O1$, при полном обороте кристалла будет смещаться от некоторого максимального самого верхнего положения до некоторого своего минимального самого нижнего положения.



Фиг. 382. Рефрактометр Аббе.

Так как при полном обороте N_g в некоторый момент обязательно будет являться N_x или N_y, и вместе с тем N_g — максимальный показатель преломления из всех, то самое высокое (максимальное) положение верхней границы и будет отвечать $N_x = N_g$.

Аналогично, нетрудно сообразить, что самое нижнее положение нижней границы будет отвечать самому меньшему из всех показателей преломления, т. е. будет отвечать $N_y = N_p$. Можно доказать, что N_m должно отвечать самому нижнему положению верхней границы или же самому верхнему положению нижней границы.

Таким образом, вращая полусферу и наводя зрительную трубу последовательно на верхнее положение верхней границы, на нижнее положение верхней границы, на верхнее положение нижней границы и, наконец, на нижнее положение нижней границы, беря соответственно четыре отсчета по лимбу рефрактометра, можно, пользуясь формулой (2), вычислить четыре показателя преломления. Первый будет равен N_g, последний — N_p, один из двух средних — N_m. Четвертый показатель преломления будет некоторым случайным N_z, для нас не имеющим значения. Решение вопроса, как отличить N_m от N_z, возможно различными способами.

Приведем способ, контролирующий вместе с тем и проделанные определения N_g, N_p и N_m. Этот способ сводится к переходу к новой плоскости раздела между кристаллом K и полусферой ACB. Если кристалл положить на полусферу другой гранью (не параллельной первоначальной), то его эллипсоид окажется ориентированным относительно оси вращения и относительно падающего луча уже по другому.

Вращая полусферу с кристаллом в новой ориентировке, снова наблюдают верхние и нижние положения как верхней, так и нижней границы.

Отсюда находят четыре показателя. Три из них — N_g, N_p и N_m должны совпасть с тремя определенными первоначально. Четвертый — случайный показатель $N_z' \neq N_z$. Этим самым решается вопрос об отличии N_m от N_z, причем каждый из трех главных показателей оказывается определенным по два раза.

В случае одноосного эллипсоида указанного вторичного измерения показателей можно и не производить. Действительно, одноосный эллипсоид характеризуется только двумя главными показателями — максимальным из всех и минимальным из всех. Этим показателям, очевидно, должны отвечать самая верхняя и самая нижняя граница, получающиеся при вращении кристалла в любом его положении. На фиг. 382 изображен рефрактометр Аббе, дающий возможность определять показатели преломления с точностью до 0,0001.

Для подробного ознакомления с этим рефрактометром можно рекомендовать специальную книгу о нем проф. А. К. Болдырева, в которой приведена и соответствующая литература.

Так называемый иммерсионный метод основан на следующих предпосылках.

Если мы видим то или иное прозрачное само по себе тело (например, кусок бесцветного стекла), то это обусловлено тем, что показатель преломления взятого прозрач-

ного тела отличается от показателя преломления окружающей среды. Разница в показателях преломления вызывает явления преломления и отражения лучей, падающих на данное тело, и тем самым делает это тело видимым. Если бы показатель преломления взятого тела в точности был равен показателю преломления окружающей среды, прозрачное бесцветное тело сделалось бы невидимым. Лучи света, попадая на данное тело, беспрепятственно пронизывали бы его, и никаких границ этого тела простым глазом было бы невозможно обнаружить.

Иммерсионный метод определения показателей преломления состоит в том, что опытным путем подбирается жидкость, при погружении в которую данное тело перестает быть видимо. В этом случае очевидно, что показатель преломления жидкости в точности равен показателю преломления исследуемого тела. Если показатель преломления жидкости заранее известен, то тем самым определяется и показатель преломления исследуемого тела.

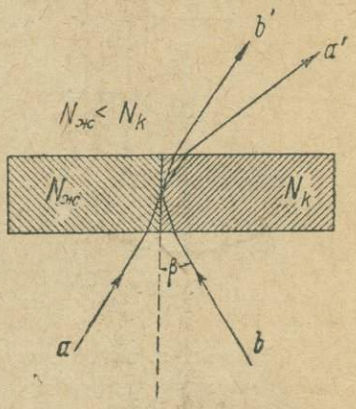
Таким образом для применения иммерсионного метода необходимо иметь набор жидкостей, показатели преломления которых заранее известны. Для проверки и установления коэфициентов преломления жидкостей пользуются рефрактометром.

Рассмотрим сначала определение показателя преломления некоторого оптически изотропного вещества.

Исследуемое тело раздробляется, и его тончайшие зернышки (порошок) помещаются на предметное стекло, заливаются сверху каплей иммерсионной жидкости и прикрываются покровным стеклом.

Наблюдение ведется на столике микроскопа. Вероятность того, что взятая нами жидкость окажется как раз требуемой, т. е. с показателем преломления, отвечающим показателю преломления порошка, конечно ничтожна. Поэтому обычно границы отдельных зернышек оказываются ясно видимыми в микроскопе (наблюдение ведется без анализатора). Это доказывает неравенство показателя преломления взятой жидкости и показателя преломления N_k исследуемых зерен

$$N_{ж} \neq N_{к} .$$



Фиг. 383. Схема получения бекковской линии.

При этом, чем резче будут видны очертания зерен, тем больше отличаются показатели преломления.

Однако пока мы не знаем

$$N_{эю} > N_{к} \text{ или } N_{к} > N_{эю} , \qquad (1)$$

поэтому неизвестно, с какой жидкостью следует произвести следующий опыт — взять ли новую жидкость с $N_{эю}' > N_{эю}$ или с $N_{эю}' < N_{эю}$.

Для определения неравенств (1) употребляется метод Бекке (F. Becke). Этот метод основан на наблюдении светлой полоски (полоски Бекке), появляющейся у краев зернышка при незначительном дефокусировании микроскопа. При этом при поднятии и опускании тубуса микроскопа полоска перемещается или к зерну, или от зерна наружу.

При поднятии тубуса вверх полоска Бекке бежит в сторону более высокого показателя преломления; при опускании вниз — в сторону более низкого показателя преломления.

Таким образом, если $N_{эю} > N_{к}$, то полоска Бекке при поднятии тубуса будет бежать от кристалла на жидкость; если $N_{к} > N_{эю}$, то полоска Бекке при поднятии тубуса будет бежать от жидкости на кристалл, и следовательно, можно установить, какое из двух неравенств имеет место. Пусть, например, $N_{эю} < N_{к}$. Очевидно, что нужно взять другую жидкость, с бо́льшим показателем, чем $N_{эю}$ (с показателем $N_{эю}' > N_{эю}$), и с нею проделать тот же опыт и определить величину показателя новой жидкости по сравнению с показателем $N_{к}$. Пусть теперь окажется, что $N_{эю}' > N_{к}$.

Таким образом $N_{эю}' > N_{к} > N_{эю}$

Следующую жидкость придется взять с показателем $N_{эю}''$

$$N_{эю}' > N_{эю}'' > N_{эю}$$

и определить, располагается ли $N_{к}$ между $N_{эю}'$ и $N''_{эю}$ или между $N_{эю}''$ и $N_{эю}$.

Продолжая такие наблюдения и дальше, придем к двум жидкостям с близкими показателями $N_{эю}'$ и $N_{эю}''$, причем

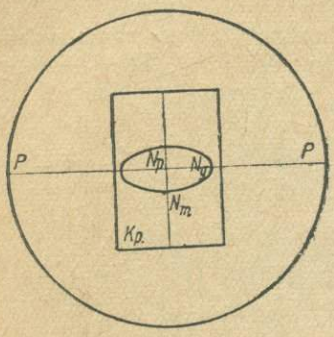
$$N_{эю}' > N_{к} > N_{эю}'' ,$$

а если пользоваться смесями жидкостей, то в конце концов можно будет подобрать такую, показатель преломления которой $N_{эю} = N_{к}$.

При исследовании оптически анизотропных кристаллов для различных зернышек получаются разные значения в зависимости от ориентировки эллипсоидов относительно падающего луча.

Необходимый нам главный показатель преломления будет измерен нами в том случае, если параллельно направлению колебания в поляризаторе будет расположен отвечающий этому показателю диаметр эллипсоида.

Пусть, например, PP — направление колебаний в поляризаторе (фиг. 384). Кристаллик Kp расположен таким образом на столике микроскопа, что биссектриса угла оптических осей — диаметр N_p — совпадает с осью микроскопа. Тогда диаметры N_g и N_m будут лежать в плоскости препарата. Если кристаллик повернуть таким образом, что N_g будет совпадать с направлением PP, то иммерсионным методом мы определим N_g этого кристаллика.



Фиг. 384.

Действительно, лучи света при такой ориентировке эллипсоида проходят через кристалл, имея показатель N_g.

Если кристаллик повернуть на 90°, то с направлением PP совпадет N_m. Для определения N_p, очевидно, придется найти другое зернышко, у которого N_p является одним из диаметров эллиптического сечения, нормального к оси микроскопа.

Таким образом для определения главных показателей преломления следует среди массы зернышек выбирать такие, которые ориентированы так, что с направлениями колебаний в поляризаторе совпадает их N_g, N_m или N_p. Такие ориентировки находятся в сходящемся свете. Просматривая различные зернышки, находят среди их массы такие, которые дают картину совпадения с осью микроскопа биссектрисы угла оптических осей. В этих зернышках определяется N_m и, после поворота на 90°, N_p или N_g (если наблюдается острая биссектриса, то N_g у отрицательных и N_p у положительных кристаллов).

Зернышки, оптическая ось которых совпадает с осью микроскопа, позволяют определить N_m. Зернышки, оптические оси которых нормальны к оси микроскопа, позволяют определить N_g и N_p.

Точность иммерсионного метода около 0,002, т. е. значительно ниже рефрактометрического метода. Однако отсутствие необходимости иметь гладко отполированные грани и возможность определять показатели очень мелких кусочков кристаллического вещества создали иммерсионному методу большую популярность. Отсутствие жидкостей с показателями преломления свыше 1,8 обходится заменой жидкостей легкоплавкими сплавами. Порошок насыпается в нагретый жидкий сплав, который после этого охлаждается и затвердевает. Полоска Бекке наблюдается уже в твердом препарате.

Показатели преломления можно определять как в белом, так и в монохроматическом свете.

11. Определение угла оптических осей

Как уже указывалось раньше, главные показатели преломления являются важнейшими константами, характеризующими оптические свойства кристаллов. Величины двупреломления и угол оптических осей являются функциями главных показателей и могут быть вычислены, если последние определены.

Величины двупреломления находятся как простые арифметические разности величин главных показателей ($N_g - N_p$, $N_g - N_m$, $N_m - N_p$).

Угол оптических осей связан с показателями преломления более сложной зависимостью. Обозначим половину угла оптических осей, биссектрисой которых является N_p, через V_p (этот угол у положительных кристаллов будет больше 45°, у отрицательных — меньше 45°). Пользуясь формулами аналитической геометрии, нетрудно вывести, что

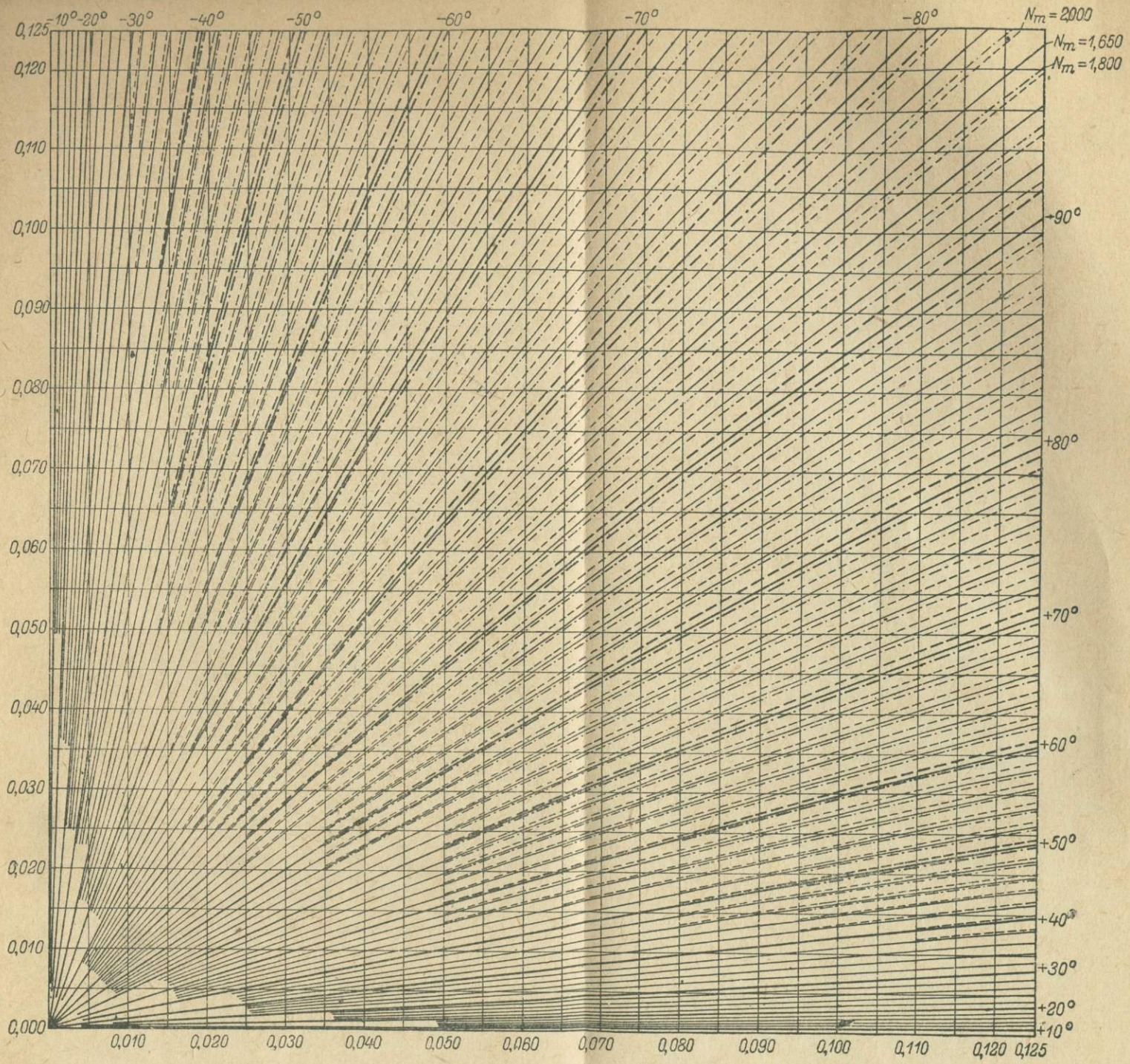
$$\operatorname{tg}^2 V_p = \frac{N_p^2 (N_g^2 - N_m^2)}{N_g^2 (N_m^2 - N_p^2)}.$$

Вычисление угла оптических осей $2V$ по приведенной формуле довольно кропотливо.

Проф. А. К. Болдырев составил простые диаграммы, пользуясь которыми можно графически определять $2V$.

Для этого предварительно находят величины двупреломления $(N_g - N_m)$ и $(N_m - N_p)$ (фиг. 385).

Диаграммы проф. А. К. Болдырева связывают эти величины с углом оптических осей. По оси абсцисс отложены величины $(N_g - N_m)$, по оси ординат — $(N_m - N_p)$ (см. диаграмму фиг. 385). Для определения $2V$ находят точку с координатами $x = (N_g - N_m)$ и $y = (N_m - N_p)$. Полученная точка окажется лежащей на какой-либо кривой. В конце найденной кривой прочитываем величину угла $2V$.



Фиг. 385. Диаграмма А. К. Болдырева.

Зак. 2288. Доливо-Добровольский.

Если у конца кривой надписи нет, отсчитываем соответственное значение $2V$ от ближайшей кривой с надписью, имея в виду, что кривые проведены через каждые 2°.

Если полученная точка окажется лежащей между двумя соседними кривыми, находим величину $2V$ интерполяцией.

Если коэфициент преломления $N_m = 1{,}65$ (или близок этому), следует пользоваться сплошными кривыми. Под каждой сплошной кривой проведена пунктирная (из черточек с точками), которой следует пользоваться, если коэфициент преломления $N_m = 1{,}50$ (или близок этому). Наконец, пунктирной кривой (из черточек), расположенной над каждой сплошной, следует пользоваться, если коэфициент преломления $N_m = 2{,}0$ (или близок этому).

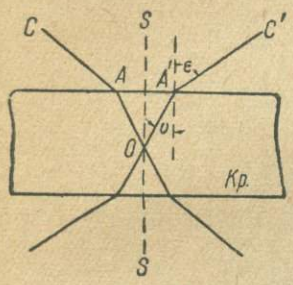
Пример. Дано: $N_g = 1{,}682$; $N_g = 1{,}627$; $N_p = 1{,}542$;

находим $N_g - N_m = 1{,}682 - 1{,}627 = 0{,}055$,

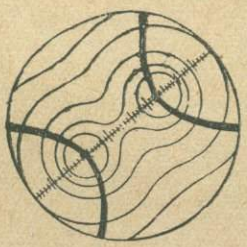
$N_m - N_p = 1{,}627 - 1{,}542 = 0{,}085$;

откладываем по оси абсцисс 0,055, затем по ординате 0,085.

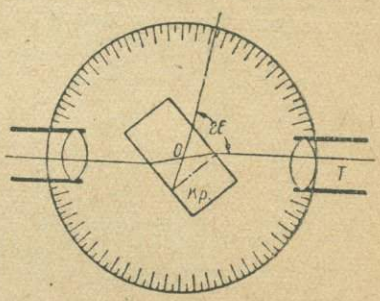
Следует пользоваться сплошными кривыми диаграммы, так как $N_g = 1{,}65$. Точка с координатами $x = 0{,}055$, $y = 0{,}085$ как раз и лежит на сплошной кривой. Эта кривая отвечает $2V = -74°$.



Фиг. 386.



Фиг. 387.



Фиг. 388. Схема углоосного аппарата.

Угол оптических осей можно определять и непосредственно опытным путем. Напомним, что при описании явлений в сходящемся свете указывалось, что в препаратах, нормальных к биссектрисе угла $2V$, чем больше угол оптических осей, тем дальше друг от друга располагаются их изображения на интерференционной фигуре в сходящемся свете. По расстоянию между этими изображениями и можно определить угол оптических осей. Однако следует иметь в виду, что здесь мы наблюдаем в сущности не истинный угол между оптическими осями в кристалле, но кажущийся, видимый в воздухе.

Действительно, лучи, идущие вдоль оптических осей OA и OA' (фиг. 386), в кристалле Kp при выходе из него в воздух претерпят явления преломления и пойдут по направлениям AC и $A'C'$. Угол между этими двумя направлениями и будет кажущимся в воздухе углом оптических осей. Он обозначается, в отличие от $2V$, через $2E$.

Так как показатель преломления воздуха N всегда меньше показателя преломления кристалла N_m, то лучи OA и OA' будут при выходе из кристалла отклоняться от нормали SS. Поэтому

видимый в воздухе угол оптических осей $2E$ всегда больше истинного угла $2V$.

Так как $\angle SAO' = \angle AOS = V$ ($V = {}^1/_2 2V$), то по закону Декарта — Снеллиуса имеем:

$$\frac{\sin V}{\sin E} = \frac{N}{N_m}.$$

Для воздуха $N = 1$, поэтому

$$\sin V = \frac{\sin E}{N_m}.$$

$2E$ определяется измерением расстояния между изображениями оптических осей в сходящемся свете. При диагональном расположении плоскости оптических осей по отношению к направлениям колебаний в николях это расстояние равно расстоянию между ветвями гиперболы (фиг. 387).

Измерение производится при помощи специального окуляра, в котором вместо сетки нитей нанесена шкала с делениями. Располагая шкалу между ветвями гиперболы, как показано на фиг. 387, просчитываем число делений шкалы. Более точно можно измерить требуемое расстояние специальным окуляр-микрометром с передвигающейся сеткой нитей.

$2E$ определяется по формуле Маллара

$$2E = KD.$$

Здесь D — найденное число делений, а K — некоторый коэфициент, зависящий от оптической системы (от объектива и цены деления шкалы). Этот коэфициент удобнее всего получить при помощи наблюдения над кристаллом, угол $2E$ которого заранее известен.

Когда E найдено, следует найти V по формуле (3).

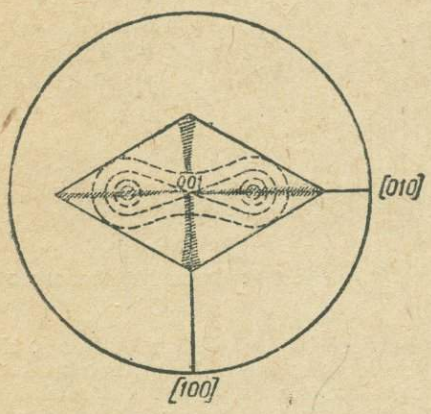
Более точно угол оптических осей $2V$ (или вернее $2E$) измеряется не под микроскопом, но при помощи специального „углоосного" аппарата. В этом аппарате кристалл может вращаться вокруг оси O (фиг. 388) таким образом, что с осью специальной зрительной трубы T совмещается видимое изображение в сходящемся свете как одной оптической оси, так и другой.

Угол поворота между положениями обоих совмещений отсчитывается по лимбу и непосредственно является углом $2E$.

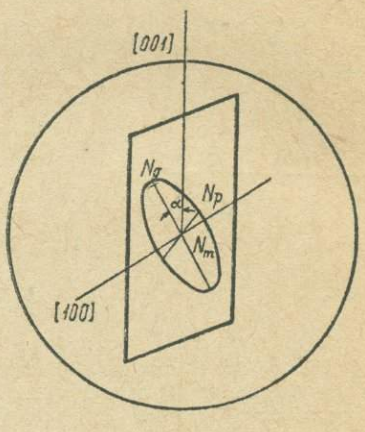
Определение угла оптических осей производится как в белом, так и в монохроматическом свете.

12. Определение ориентировки оптической индикатрисы

Практическое определение ориентировки оптической индикатрисы требуется только для кристаллов низшей категории. Действительно, в кристаллах полигирной (кубической) сингонии оптическая индикатриса — шар.



Фиг. 389.



Фиг. 390.

Говорить об ориентировке шара относительно направлений кристалла не приходится. В кристаллах средней категории оптическая индикатриса — одноосный эллипсоид. Его ориентировка предопределяется расположением главной оси симметрии: с нею совпадает оптическая ось (см. табл. 24).

Только у кристаллов низшей категории следует опытным путем определять расположение N_g, N_m, N_p относительно кристаллографических направлений (относительно кристаллографических осей).

В дигирной (ромбической) сингонии дигиры эллипсоида (N_g, N_m и N_p) совпадают с тремя кристаллографическими осями. Требуется определить, только с которой из них совпадает N_g, с которой — N_m и с которой — N_p. Очень часто это легко выполнить при помощи сходящегося света. Ограничимся одним примером: пусть кристалл дигирной сингонии (фиг. 389) лежит на третьем пинакоиде (001) таким образом, что первая кристаллографическая ось [100] направлена к наблюдателю, а вторая вправо.

В сходящемся свете обнаружено, что нормально к пластинке выходит острая биссектриса угла оптических осей, причем знак эллипсоида отрицательный.

Отсюда следует, что с этой биссектрисой и, следовательно, с третьей кристаллографической осью [001] совпадает N_p. Далее, фигура в сходящемся свете показывает, что обе оптические оси лежат в плоскости, нормальной к оси [100]. Так как оптические оси лежат всегда в плоскости, нормальной к N_m, то отсюда следует, что с первой кристаллографической осью [100] совпадает N_m. Очевидно, что со второй кристаллографической осью [010] может совпадать только N_g. Таким образом ориентировка определена:

$$[010] \parallel N_g; \quad [100] \parallel N_m; \quad [001] \parallel N_p.$$

В кристаллах моногирной (моноклинной) сингонии для выяснения ориентировки эллипсоида следует найти: 1) какая ось индикатрисы совпадает со второй кристаллографической осью [010], 2) каков главный острый угол погасания, 3) является ли N_g, N_m или N_p одной из его сторон, 4) как расположена эта сторона: между [001] и [100] или между [001] и [100], или, другими словами, в остром или в тупом угле расположена эта сторона.

В простейших случаях и здесь применение сходящегося света сильно упрощает решение задачи. Ограничимся, опять-таки, только одним примером. Пусть кристаллик лежит на втором пинакоиде (010). (С осью микроскопа совпадает, следовательно, [010]) (фиг. 390). Вертикально расположена [001]·[100] протягивается влево вниз. Применение сходящегося света дает картину совпадения с плоскостью препарата (010) плоскости обеих оптических осей.

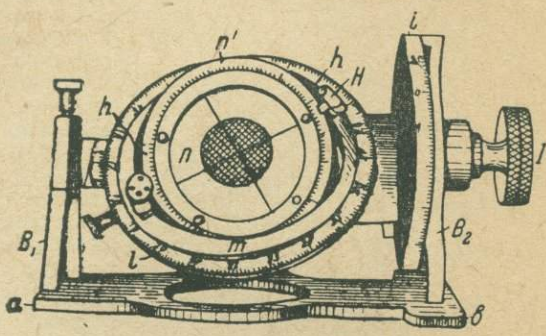
Отсюда следует, что N_m совпадает с осью микроскопа, и, следовательно, с осью (010). Для определения расположения двух других осей, проще и точнее всего перейти к параллельному свету. Измеряя углы погасания относительно удлинения (001), находим острый главный угол погасания.

Из чертежа видно, что сторона этого угла погасания расположена между [001] и [100], т. е. в тупом угле β.

Остается определить, является ли эта сторона диаметром N_g или диаметром N_p. Отличить наибольший диаметр эллипса от наименьшего, как нам известно, вполне возможно при помощи пробных пластинок. Пусть гипсовая пластинка показала, что сторона острого угла погасания образована наибольшим диаметром эллипса. Отсюда следует, что этот диаметр есть N_g. Ориентировка определена полностью: [001] : $N_g = \alpha^\circ$ в тупом угле β; [010] ‖ N_m. Определение ориентировки значительно усложняется, если кристалл расположен на столике микроскопа не параллельно грани (010).

В кристаллах агирной (триклинной) сингонии непосредственное определение ориентировки эллипсоида всегда представляет значительные затруднения. И N_g, и N_m, и N_p расположены косо по отношению ко всем трем кристаллографическим осям.

В этом случае, так же, как и во всех сложных случаях других сингоний, ориентировку эллипсоида удобнее всего находить при помощи „универсального столика Федорова".



Фиг. 391. Универсальный столик Федорова.

Изобретенный Е. С. Федоровым „столик", устанавливаемый на столик микроскопа, позволяет производить наклоны плоскости препарата к оси микроскопа и таким образом исследовать один и тот же кристалл в различной по отношению к оси микроскопа ориентировке.

Наклоняя столик, мы можем совместить любое направление в кристалле с осью микроскопа или поставить к ней перпендикулярно. Поэтому в любом кристалле, как бы он ни был ориентирован относительно плоскости препарата, можно получать характерные ориентировки относительно оптической оси микроскопа.

Благодаря этому возможно найти расположение N_g, N_m и N_p относительно плоскости препарата и, если ориентировка препарата известна, то и относительно кристаллографических осей кристалла.

Чтобы разобраться в этом вопросе, остановимся на конструкции столика несколько подробнее.

Металлическая пластинка *ab* столика (фиг. 391) привинчивается к столику микроскопа винтами. Для свободного прохождения лучей, вышедших из поляризатора, пластинка имеет посредине отверстие. На стойках B_1 и B_2, поддерживается горизонтальная ось вращения *l* с лимбом *i*. Лимб снабжен нониусом, позволяющим брать отсчеты с точностью до пяти минут.

Эта ось (immobile Axe = неподвижная ось) во время работы почти все время остается неподвижно расположенной, параллельно направлению колебаний в одном из николей (нормально плоскости симметрии микроскопа) и несет на себе два концентрических кольца *m'* и *m*. Внешнее кольцо *m'* неподвижно скреплено с осью *l*, внутреннее может вращаться в собственной плоскости и в плоскости наружного кольца вокруг воображаемой оси *M* (не показанной на чертеже).

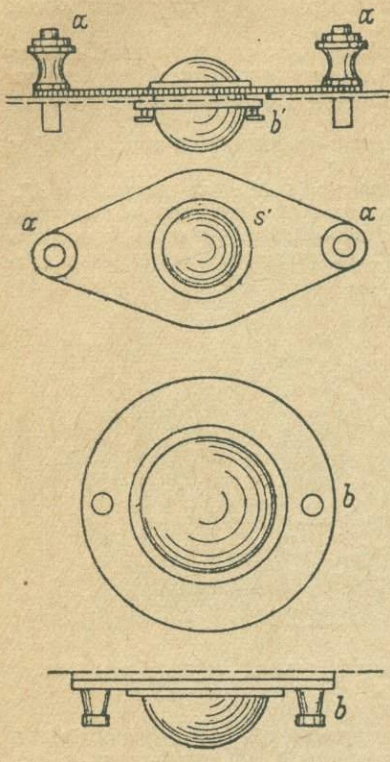
Углы поворота кольца *m* относительно кольца *m'* фиксируются при помощи лимба на кольце *m* и — нониуса на кольце *m'*.

Если плоскости *m* и *m'* горизонтальны (вернее, параллельны плоскости столика микроскопа), ось *M* будет совпадать с осью микроскопа. При наклонах вокруг оси *l*, ось *M* будет приходить в движение и получать различные наклоны к оси микроскопа. Отсюда ее название — подвижная ось (mobile Axe) (углы наклона этой подвижной оси фиксируются лимбом *i*).

Внутреннее кольцо *m* несет на себе „вспомогательную" ось („Hilfsaxe") *H*, лежащую в плоскости колец *m* и *m'*. Эта вспомогательная ось *H* позволяет наклонять кольцо *n'*, с которым ось *H* связана. Углы наклона плоскости кольца *n* относительно плоскости колец *m* могут быть отсчитаны по градусным делениям на специальных дужках.

Совершенно подобно тому, как внутри кольца m' может вращаться кольцо m, внутри кольца n', может вращаться кольцо n. Воображаемая ось вращения этого кольца, нормальная к плоскости колец n' и n, называется осью N (normale Axe).

Углы поворотов кольца n относительно кольца n' фиксируются при помощи лимба на кольце n' и черточки на кольце n.



Фиг. 392.

Внутри кольца n вставляется круглое стекло, на которое и помещается исследуемый препарат.

Для того чтобы избавиться от нежелательных явлений преломления и отражения от воздушных прослоек между стеклом столика и препаратом, последний прикрепляют к стеклу столика при помощи капли глицерина.

Сверху препарат накрывается стеклянным шаровым сегментом. Его металлическая оправа s' привинчивается винтами a и a к кольцу n (фиг. 392). Между стеклом сегмента и препаратом воздух также заменяется глицерином. Снизу (под стекло столика) глицерином же прикрепляется еще один шаровой сегмент в металлической оправе.

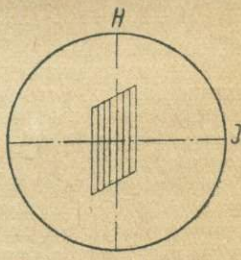
Таким образом, исследуемый кристалл оказывается в центре стеклянной сферы, образованной верхним и нижним сегментами. Благодаря сегментам лучи света, идущие из поляризатора, входят в стекла, окружающие препарат, без преломления, как бы препарат ни был наклонен.

После установки препарата на федоровском столике, последний приводят в „основное положение". Для этого вращением всего федоровского столика на столике микроскопа располагают ось I параллельно направлению колебаний в анализаторе (слева направо) (фиг. 391). Плоскости всех колец столика m и n располагают нормально к оси микроскопа, так что оси федоровского столика M и N будут совпадать с осью вращения столика микроскопа (ось A) и с оптической осью микроскопа. Будем считать, что микроскоп стоит вертикально, тогда все эти оси (M, N и A) будут вертикальны, а оси I и H горизонтальны. Ось H устанавливается параллельно направлениям колебаний в поляризаторе, т. е. перпендикулярно к оси I.

Описанное положение столика и называется основным. Примем шар, образованный сегментами, за шар проекций, плоскость препарата (плоскость кольца n) — за экваториальную плоскость (плоскость проекции), нормаль к ней (ось N) — за ось проекций, вертикальную плоскость, проходящую через эту ось и отмеченную на кольце 0°, — за плоскость нулевого меридиана.

Каждое направление в кристалле может быть охарактеризовано некоторыми полярными координатами φ и ρ относительно выбранной нами системы координат.

Для того чтобы определить координаты φ и ρ любого направления в кристалле, поворотами около осей N и H совмещают данное направление с осью I — [отсчет по лимбу n — долгота φ, отсчет по дужкам n — широта $(90° - \rho)$].



Фиг. 393.

Действительно, поворотом около оси N на угол φ мы совмещаем данное направление с плоскостью меридиана, в котором лежит ось I. Наклоняя теперь данное направление на угол $90° - \rho$, мы совместим его с осью I.

Для определения ориентировки оптической индикатрисы, последовательно совмещают N_g, N_m и N_p с осью I столика и тем самым определяют их полярные координаты φ и ρ.

Аналогично определяют полярные координаты и различных других кристаллографических направлений (нормали к граням, к плоскостям спайности, к двойниковым швам, ребра кристалла и т. д.). Эти измерения и определяют ориентировку эллипсоида.

Рассмотрим сначала, каким образом можно совместить данное кристаллографическое направление с осью I столика. Пусть, для примера, в препарате обнаруживается спайность, в виде параллельных черточек, идущих по одному направлению через кристалл (фиг. 393). Поворотом около оси N нетрудно поставить эти черточки, являющиеся следами плоскостей спайности, на плоскости препарата в положение, параллельное оси H (при

правильной установке столика ось H расположена параллельно вертикальной нити окулярного креста).

Очевидно, что теперь нормаль к плоскостям спайности или уже совмещена с осью I (если плоскости спайности перпендикулярны к плоскости препарата), или же эта нормаль лежит в меридиональной плоскости оси I. В последнем случае наклоны около оси H могут совместить эту нормаль с осью I. Наклоняя препарат около оси H, следим за тем, чтобы ширина черточек спайности стала минимальной. Очевидно, что при этом плоскости спайности займут вертикальную ориентировку и будут проектироваться в поле зрения микроскопа в виде линий. В найденном положении нормаль к плоскостям спайности очевидно совпадет с осью I.

Взяв отсчеты по лимбу n и по дужкам h, получаем полярные координаты плоскостей спайности: φ и $90° - \rho$.

Сложнее совмещать оптические направления N_g, N_m и N_p с осью столика. Контрольным испытанием является следующее.

Если с осью I совмещена одна из дигир эллипсоида (N_g, N_m или N_p), то в скрещенных николях кристалл будет темным, причем при наклонах около оси I темнота не нарушается (ось I в основном положении).

Для доказательства этого очень важного для федоровского метода положения, рассмотрим сначала общий случай, когда ни одна из дигир эллипсоида не совпадает с осью I и не лежит в плоскости препарата.

Вращением препарата вокруг оси n мы можем, конечно, получить темноту. Этим самым мы совместим один из диаметров эллиптического сечения эллипсоида плоскостью препарата с направлением колебаний в анализаторе и, тем самым, с осью I. По нашему предположению этот диаметр не есть дигира всего эллипсоида. *

Если теперь произвести наклон около оси I, то мы перейдем к другому сечению эллипсоида, нормальному к оптической оси микроскопа. Диаметры полученного нового сечения не будут совпадать с диаметрами сечения эллипсоида плоскостью препарата. Полученные диаметры не будут поэтому совпадать с направлениями колебаний в николях. Вместо темноты, получим освещение кристалла.

Иное должно наблюдаться, если с осью I совпадает один из главных диаметров эллипсоида. Главный диаметр эллипсоида должен, как мы знаем (см. теорему на стр. 304), являться диаметром также и всякого сечения эллипсоида, через него проходящего.

Поэтому, если с осью I совпадает один из этих диаметров, то, при любом наклоне около оси I, мы будем переходить от одного сечения эллипсоида к другому, с диаметрами эллипсов, совпадающими с первоначальными, т. е. с диаметрами эллипсов, совпадающими с осью I. Совпадение же диаметров эллипсов с осью I влечет за собою темноту. Следовательно, при наклонах около оси I в этом случае должна неизменно сохраняться темнота.

Таким образом, если только какой-либо диаметр N_g, N_m или N_p совпадает с осью I, то в этом легко убедиться (наклонами около оси I) и легко найти тогда φ и ρ этого диаметра.

Возникает задача о приведении препарата в положение, при котором темнота, при наклонах около оси I, сохраняется.

Е. С. Федоровым и его учениками была дана детальная методика работы с федоровским столиком. В частности, была решена и эта задача. Здесь на решении ее и на других деталях федоровского метода мы останавливаться не будем. **

Совместив ось индикатрисы с осью I и найдя ее координаты, можно с помощью пробных пластинок определить и наименование оси. Определив положение осей индикатрисы, наносим их на стереографическую проекцию. На нее же наносятся и кристаллографические направления. Расположение дигир эллипсоида относительно кристаллографических направлений вполне определяет ориентировку эллипсоида.

Федоровский столик, оказывающий такие неоценимые услуги при определении ориентировки эллипсоида, позволяет просто решать и другие кристаллоптические задачи. Так, при помощи федоровского столика можно определять (не прибегая к сходящемуся свету) и тип эллипсоида, и его знак, и угол оптических осей, и показатель преломления, и величину двупреломления. Поэтому ученик Е. С. Федорова проф. В. В. Никитин, много потрудившийся над разработкой методики работы со столиком, назвал эту работу „Универсальным методом Федорова".

Этот изящный метод получил в настоящее время большое распространение как в СССР, так и заграницей.

---

* Здесь, как и выше, для краткости под диаметрами эллипса мы понимаем только наибольший и наименьший диаметры эллипса, т. е. только те диаметры, которые в аналитической геометрии называются осями эллипса.

** Федоровский метод детально изложен на русском языке в следующих руководствах:

1. Никитин, В. В., Универсальный метод Федорова, 1911.
2. Усов, М. А., Федоровский или универсально-оптический метод исследования породообразующих минералов, Томск, 1911.
3. Подногин, А. К., Микроскопическое исследование породообразующих минералов по методу Федорова, 1937.

13. Дисперсия

Лучи белого света являются, как мы знаем, совокупностью лучей разных длин волн. Поэтому оптическая индикатриса, изученная нами для белого света, по существу представляет собою совокупность оптических индикатрис для разных длин волн.

Из классических опытов Ньютона над разложением белого света призмою при получении спектра известно, что лучи разных длин волн имеют различные показатели преломления. Поэтому и оптические индикатрисы кристаллов для лучей разных длин волн не могут быть одинаковыми.

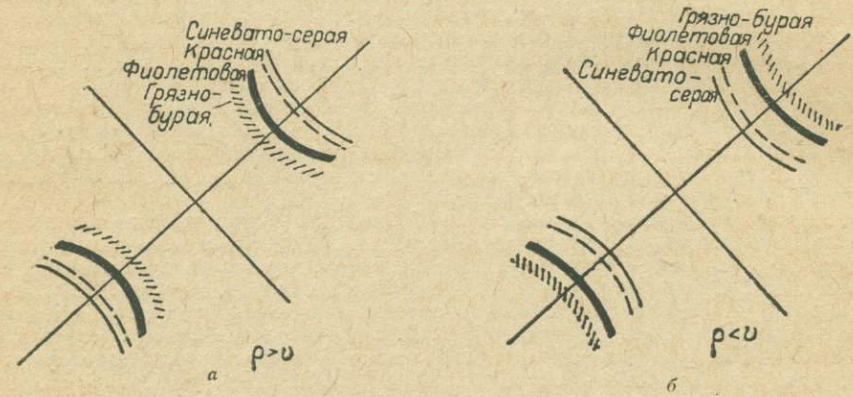
Расхождение оптических индикатрис одного и того же вещества для лучей разных длин волн называется *дисперсией.*

Рассмотрим различные возможные случаи дисперсии у кристаллов.

Полигирная (кубическая) сингония. В отношении дисперсии одинакова с аморфными изотропными телами, жидкостями, газами и агрегатами твердых тел.

Оптические индикатрисы для лучей разных длин волн представляются шарами различного радиуса.

Обыкновенно („нормальная дисперсия"), чем больше длина волны, тем меньше показатель преломления (таким образом, красная индикатриса имеет короткий радиус, фиолетовая — длинный радиус).



Фиг. 394.

Гекса-, три- и тетрагирные (гекса-, три- и тетрагональные) сингонии. Оптические индикатрисы обязательно ориентированы так, что их оптические оси совпадают с главными гирами кристаллов. Однако величины N_m и второго главного показателя преломления для разных лучей различны. Например, для кальцита:

	n_F	n_{Tl}	n_C	n_{Li}
N_p	1,4907	1,4883	1,4838	1,4842
N_m	1,6681	1,6628	1,6530	1,6538

Это — пример нормальной дисперсии. Однако встречаются и более сложные случаи. Так, у идокраза эллипсоид фиолетовых лучей — вытянутый (положительный), красный же эллипсоид — сплюснутый (отрицательный). Очевидно, что должна существовать индикатриса для каких-то промежуточных, например, зеленых лучей, имеющая форму шара.

Под микроскопом в скрещенных николях такая сильная дисперсия проявляется в аномальной интерференционной окраске.

Дигирная (ромбическая) сингония. Всегда совпадающие с тремя кристаллографическими осями три диаметра двуосного эллипсоида N_g, N_m и N_p для лучей разных цветов имеют разные длины. В связи с этим может меняться величина угла оптических осей.

Если угол оптических осей для красных лучей больше, чем для фиолетовых, то этот случай обозначается

$$\rho > \upsilon.$$

Примечание: ρ — от греческого — „ροδεος" — розовый;
υ — от „υακινθινος" — фиолетовый

(υ — греческий „ипсилон", но не „ню" (ν) и не латинское *v*, как ошибочно пишут во многих учебниках и справочниках).

В разрезе, перпендикулярном к острой биссектрисе угла оптических осей, в фиолетовом сходящемся свете ветви гиперболы будут располагаться ближе друг к другу, чем ветви гиперболы в красном сходящемся свете (фиг. 394*а*). В белом свете гипербола представится размытой и окрашенной. С внутренней стороны (выпуклой) будут погашены фио-

летовые лучи, красные будут проходить, и, наоборот, с внешней стороны (вогнутой) красные гасятся, фиолетовые проходят. Благодаря этому, во внутренней части (выпуклой) возникает грязно-бурая окраска, а внешние стороны (вогнутые) окрашиваются в синевато-серые цвета.

Если угол оптических осей для красных лучей меньше, чем для фиолетовых, то этот случай обозначается

$$\rho < \upsilon.$$

Внутренние части гиперболы (выпуклые) получают синевато-серую окраску, а внешние (вогнутые) — грязно-бурую (фиг. 394*б*).

Встречаются и более сложные случаи дисперсии. Так, у брукита (TiO_2), если его рассматривать на грани (100) в красном сходящемся свете, получим фигуру с углом оптических осей $2\varepsilon_{671} = 58°$, причем оптические оси располагаются в плоскости (001) (иными словами, $[001] \parallel N_m$).

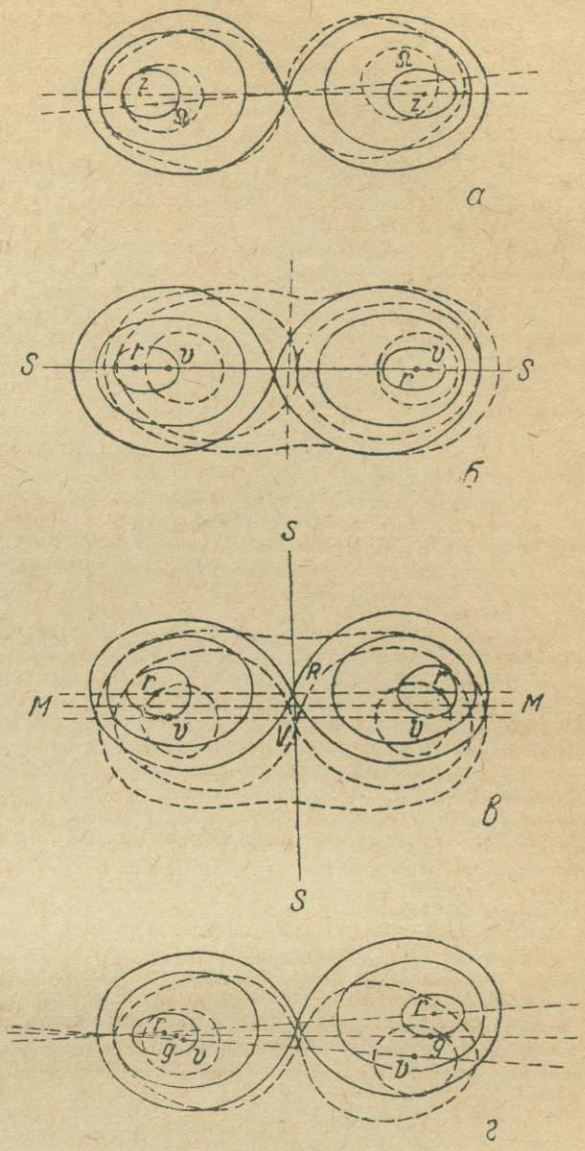
С укорочением длины волны угол оптических осей уменьшается. Так, для оранжево-желтых лучей он равен только уже $2\varepsilon_{589} = 38°$.

Это уменьшение продолжается до зелено-желтых лучей, для которых $2\varepsilon_{555} = 0°$. Затем угол оптических осей снова начинает расти, однако обе оптические оси располагаются уже в другой плоскости. Плоскостью оптических осей служит уже грань (010) (иными словами $[010] \parallel N_m$). Так, для зеленых лучей $2\varepsilon_{535} = 22°$, для фиолетовых еще больше — $2\varepsilon_{486} = 60°$.

Рассматривая препарат брукита в белом сходящемся свете, получим сложную картину расположенных накрест друг к другу гипербол, окрашенных в яркие зеленые и желтые цвета.

Таким образом для брукита меняется не только угол оптических осей, но и величины диаметров эллипсоида, совпадающих с той или иной кристаллографической осью.

Моногирная (моноклинная) сингония. Кроме указанной для дигирных кристаллов дисперсии угла оптических осей, здесь наблюдается и дисперсия дигир двуосного эллипсоида.



Фиг. 395.

Действительно, в моногирной сингонии только дигира эллипсоида, совпадающая со второй кристаллографической осью, имеет строго определенную ориентировку для лучей любой длины волны. Две другие дигиры эллипсоида не совпадают ни с первой, ни с третьей кристаллографической осью и могут с ними образовывать различные углы („главный угол погасания"). Поэтому из трех дигир, две для лучей разных длин воли не совпадают друг с другом (дисперсия элементов эллипсоида).

Эта дисперсия обнаруживается даже в параллельном свете в препаратах, параллельных грани (010). На таких препаратах, как мы знаем, можно непосредственно измерять „главный угол погасания". У кристаллов с сильной дисперсией это измерение вызывает затруднения: вместо полного четырехкратного погасания, наблюдается смена неопределенных тонов. Это происходит благодаря тому, что диаметры эллиптического сечения для фиолетовых лучей не совпадают с диаметрами эллиптического сечения для красных лучей. В то время, когда одни лучи погашены, другие проходят. Полного погасания всех лучей получить невозможно.

В сходящемся свете, в зависимости от того, каким образом расположена острая биссектриса угла оптических осей относительно второй кристаллографической оси, могут представляться различные картины.

1) Острая биссектриса совпадает со второй кристаллографической осью [010]. В препаратах $\perp$ [010] наблюдается так называемая перекрещенная дисперсия (фиг. 395*а*).

В белом свете фигура симметрична относительно своего центра. Удобным объектом для наблюдения перекрещенной дисперсии может служить бура: $Na_2B_4O_7 \cdot 10\,H_2O$.

2) С осью [010] совпадает ось N_m эллипсоида. В препаратах, нормальных острой биссектрисе, наблюдается наклонная дисперсия (фиг. 395*б*).

В белом свете фигура симметрична по отношению к плоскости $\perp$ [010]. В качестве примера наклонной дисперсии может служить гипс: $CaSO_4 \cdot 2H_2O$.

3) С осью [010] совпадает тупая биссектриса. В препаратах, нормальных острой биссектрисе ($\parallel$ [010]), наблюдается горизонтальная дисперсия. В белом свете фигура симметрична по отношению к плоскости $\perp$ [010]. Такая дисперсия наблюдается на адуляре [(K, Na) $AlSi_2O_8$].

Агирная (триклинная) сингония. Эллипсоиды разных цветов могут иметь как различную длину своих диаметров (а отсюда и величину $2V$), так и различную ориентировку относительно всех трех кристаллографических осей.

В препаратах, нормальных к острой биссектрисе, в общем случае наблюдается *несимметричная перекрещенная дисперсия* (фиг. 395*г*). В отличие от симметричной перекрещенной дисперсии (фиг. 395*а*), интерференционная фигура не обладает центром инверсии.

14. Вращение плоскости поляризации

Вернемся к нашим исходным представлениям о световом луче.

Как нам известно, в поляризованном луче все векторы, изображающие напряжение электрического поля, имеют одинаковое направление, которое остается все время неизменным. В естественном луче направление каждого вектора отлично от направлений соседних векторов, причем эти направления непрерывно изменяются (векторы как бы вращаются вокруг луча).

Но мыслим еще один промежуточный случай. Векторы могут иметь направления, отличные от своих соседей, как в неполяризованном луче, но вместе с тем эти направления могут, как в луче поляризованном, не изменяться с течением времени.

Лучи с таким типом колебаний возникают при попадании поляризованного луча в некоторые кристаллические вещества, обладающие двумя особенностями своего симметрического строения. Во-первых, эти вещества не обладают никакими гироидами (в том числе ни центром инверсии, ни плоскостями симметрии) и, во-вторых, принадлежат к асимморфным системам, т. е. к таким системам, у которых гиры кристаллов внутри вещества заменены геликогирами (винтовыми осями). *

Таким образом вещества, в которых могут возникать указанные особенные лучи, во всяком случае относятся к видам симметрии, в которых встречаются энантиоморфные формы, т. е. правые и левые многогранники.

Рассмотрим простейший пример распространения таких особенных лучей вдоль главной геликогиры кристаллического вещества. Для конкретности представим себе кристалл кварца (SiO_2), относящийся к тригирноаксиальному виду симметрии, у которого тригира кристалла заменена в веществе тригеликогирами. Оптической осью у кристалла кварца, следовательно, будет направление, совпадающее с тригеликогирой. Мы знаем, что лучи света, распространяющиеся вдоль оптической оси, проходят через кристалл без изменения. Казалось бы, что поляризованный луч света, направленный вдоль тригеликогиры, должен пройти через кристалл с теми же направлениями колебаний, с какими он вошел в кристалл.

Однако, очевидно, винтовое расположение узлов пространственной решетки каким-то образом поворачивает направления колебаний вошедшего луча.

Направления колебаний, как ступени винтовой лестницы, располагаются вокруг луча, и луч света, выходя из кристалла, будет колебаться уже в направлении последней „ступени" лестницы.

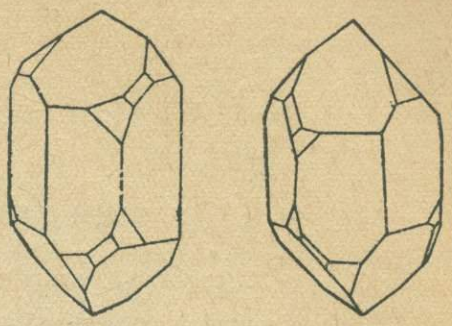
Таким образом в результате прохождения поляризованного света вдоль оптической оси кварца направления колебаний поворачиваются на некоторый угол. Поэтому описанное явление называется вращением плоскости поляризации (плоскостью поляризации называется плоскость, нормальная к направлению колебаний и проходящая по лучу).

Очевидно, в связи с тем, что могут быть правые и левые геликогиры, вращение может быть как в правую, так и в левую сторону. Поэтому различают право- и левовращающие кристаллы.

---

* Странное исключение представляет иоднокислый калий $KJO_4 \cdot 3H_2O$, который, по данным рентгенометрии, относится к симморфной системе тригирно-примитивного или даже тригирно-планального вида симметрии. Последнее противоречит симметрии его внешних форм.

Правовращающие кристаллы отличаются от левовращающих не только характером своих геликогир, но часто и внешней огранкой. Правовращающим свойственны правые энантиоморфные многогранники, левовращающим — левые (фиг. 396).

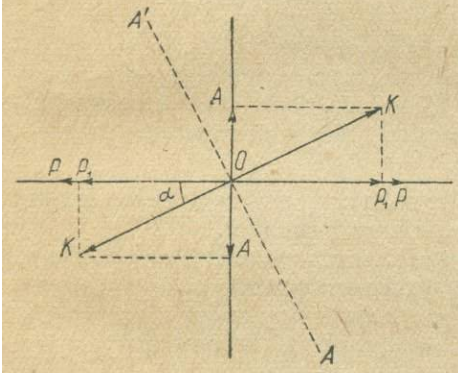


Фиг. 396. Кристаллы правого и левого кварца.

Угол, на который поворачиваются направления колебаний при прохождении поляризованного света через вещество, вращающее плоскость поляризации, называется углом вращения плоскости поляризации.

Очевидно, что чем больше будет путь луча по кристаллу, тем больше будет и угол вращения плоскости поляризации. Обычно угол вращения определяют для луча, прошедшего по кристаллу путь в 1 *мм*. Если, например, известно, что кристалл в $^1/_2$ *см* = 5 *мм* вращает плоскость поляризации на 50°, то пластинка в 1 *мм* толщины будет иметь угол вращения, равный $\frac{50°}{5} = 10°$.

Кроме того, угол вращения плоскости поляризации зависит от самого вещества — при прочих равных условиях у различных веществ этот угол бывает различен. Так например, у киновари (HgS), кристаллизующейся в той же группе симметрии, как и кварц (D_3^4 — тригирноаксиального вида симметрии), угол вращения плоскости поляризации в семнадцать раз больше, чем у кварца.



Фиг. 397.

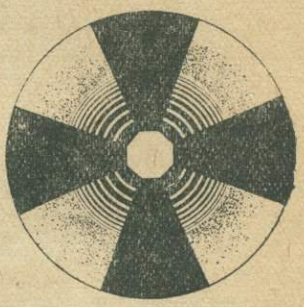
Наконец, угол вращения плоскости поляризации зависит от длины волны. При прочих равных условиях, чем больше длина волны света, применяемого для освещения препарата, тем меньше угол вращения. Поэтому нельзя говорить об угле вращения белого света.

Итак:

Угол вращения плоскости поляризации зависит от вещества, от толщины пластинки (прямая пропорциональность) и от длины волны применяемого света (обратная зависимость).

Вращение плоскости поляризации обнаруживается в препаратах, нормальных к оптической оси.

Наблюдения можно вести как в параллельном, так и в сходящемся свете. Так, если взять не очень тонкую пластинку кварца, вырезанную нормально оптической оси, то в скрещенных николях в параллельном свете вместо ожидаемой темноты кристалл оказывается освещенным. Вращение на столике микроскопа показывает отсутствие даже четырехкратных погасаний. Все время кристалл остается одинаково освещенным. То же самое наблюдается и в монохроматическом свете. Однако в монохроматическом свете возможно добиться погасания, если вращать не кристалл на столике микроскопа, но анализатор относительно поляризатора.



Фиг. 398.

Действительно, пусть лучи монохроматического света, выходя из поляризатора, имеют направления колебания *PP* (фиг. 397). Войдя в кристаллическое вещество, лучи постепенно изменяют направления своих колебаний, так что вышедший из кристалла луч колеблется уже по направлению *KK* ($\angle \alpha = KOP$ будет, очевидно, углом вращения плоскости поляризации).

Лучи с колебаниями *KK* частично смогут пройти через анализатор (составляющая *OA*). Поэтому темноты в скрещенных николях и не видно. Если же повернуть анализатор на угол α, т. е. как раз на угол вращения плоскости поляризации *POK*, то направления колебаний анализатора сделаются перпендикулярными направлениям колебаний луча, вышедшего из кристалла, и анализатор их не пропустит.

Для измерения угла вращения плоскости поляризации следует вращать анализатор до получения темноты. Угол поворота анализатора, деленный на толщину пластинки в миллиметрах, равен углу вращения (или его дополнению до 180° или 360°) для данного монохроматического света.

В белом свете как ни вращать анализатор темноту получить невозможно. Действительно, повернув анализатор на угол *РОК* (угол, отвечающий углу вращения для красных лучей), мы пропустим лучи желтые, синие, фиолетовые и другие.

Таким образом никогда полного затемнения не получить. Частично же мы будем погашать то одни, то другие цвета спектра.

В сходящемся свете явление вращения плоскости поляризации сказывается на лучах, идущих вдоль оптической оси, или близких, проектирующихся в центре интерференционной фигуры. Эти центральные лучи не будут гаситься анализатором: ветви темного креста не доходят до середины поля зрения (фиг. 398).

Глава XX

ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЗАЦИИ КРИСТАЛЛОВ

1. Явления, вызывающие электризацию кристаллов

В предыдущем изложении (отдел 4 „Симметрия", раздел 4) мы уже встречались с явлениями электризации кристаллов. Остановимся теперь на этих явлениях несколько подробнее.

Электрические заряды на кристаллах могут возникать вследствие воздействия различных факторов.

Электризация, возникающая на кристаллах в результате трения, называется трибоэлектризацией.

Явления трибоэлектричества кристаллов вполне аналогичны явлениям трибоэлектричества некристаллических тел. Одно из тел, подвергаемых трению, заряжается положительно, другое — отрицательно. Например, при трении алмаза (C) кристаллом топаза $[SiO_4Al_2(F, OH)_2]$, первый заряжается положительно, второй — отрицательно.

Электризация, возникающая на кристаллах в результате освещения инфракрасными лучами, называется актиноэлектризацией.

Электризация, возникающая на кристаллах в результате освещения ультрафиолетовыми лучами, называется фотоэлектризацией.

Электризация, возникающая на кристаллах в результате нагревания места соприкосновения двух различных кристаллов, называется термоэлектризацией.

Электризация, возникающая на кристалле в результате нагревания, называется пироэлектризацией.

Электризация, возникающая на кристаллах в результате давления или растяжения, называется пьезоэлектризацией.

С пиро- и пьезоэлектричеством мы уже познакомились при изучении вопроса о точном определении вида симметрии. Ввиду большого практического значения явлений пьезоэлектризации, остановимся на них несколько подробнее.

2. Пьезоэлектризация

Обнаружить пьезоэлектричество можно различными способами. В разделе 4 главы был уже описан метод Кундта.

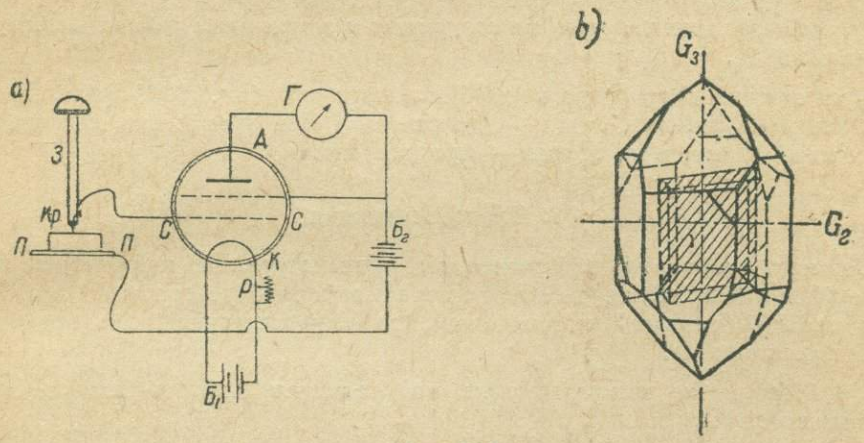
„Ламповый зонд" Мейсснера, применяемый в лаборатории проф. А. В. Шубникова и др., так же, как и метод Кундта, позволяет не только обнаружить пьезоэлектричество, но и определить его знак.

Катод (фиг. 399*а*) электронной лампы накаливается при помощи электрической батареи $Б_1$. Выделяющиеся электроны устремляются к аноду *А*, и чувствительный гальванометр *Г* указывает прохождение тока по цепи $АГБ_2К$. Сила этого тока регулируется реостатом *Р*, при помощи которого можно изменять накал катода.

Между катодом и анодом в электронную лампу вводится сетка *СС*, соединенная проволокой с металлическим острием „зонда" *З*. Этим зондом от руки

производится давление на исследуемый кристалл *Кр*. Кристалл помещается на металлическую пластинку *пп*, соединенную проволокой с цепью $Б_1$ и $Б_2$. Допустим, что при надавливании на верхней поверхности кристалла возникает положительный заряд. Этот заряд при помощи зонда будет передан сетке *СС*. Поле вблизи катода будет усилено, и вылетающие из катода электроны с большей скоростью устремляются через сетку к аноду. Стрелка гальванометра *Г* покажет увеличение силы тока. Наоборот, если верхняя поверхность кристалла, а с ним и зонд и сетка зарядятся отрицательно, то вылетающие из катода электроны будут отталкиваться обратно к катоду, и гальванометр покажет уменьшение силы тока.

Возьмем кристалл кварца (SiO_2) (фиг. 399*b*), принадлежащий к тригирной сингонии, аксиальному виду симметрии). Он обладает тригирной и тремя перпендикулярными к ней дигирами. Как мы знаем (отдел II, раздел 4), в результате изменения температуры или давления, электрические заряды возникают на концах G_2. Поэтому это направление называется электрической осью. Для опытов



Фиг. 399.

обычно употребляются не целые кристаллы, но из них вырезаются специальные пластинки (пьезокварцевые пластинки) — пьезокварцы. Вырежем пластинку из нашего кристалла так, чтобы одна пара ее граней была перпендикулярна G_2, вторая пара была бы перпендикулярна G_3 (верхняя и нижняя грань), наконец, третья пара граней пластинки (передняя и задняя грани) была бы перпендикулярна первой и второй граням. Полученный прямоугольный параллелепипед будем сжимать силою *f*, параллельной G_2. На гранях, перпендикулярных G_2 (на боковых гранях нашего параллелепипеда), появятся электрические заряды $+q$ и $-q$, причем тем большие, чем больше будет сжимающая сила *f*:

$$q_{G_2} = k \cdot f, \text{ т. е.}$$

количество электричества q, возникающее в результате действия силы, параллельной G_2, пропорционально этой силе f и не зависит от размеров пластинки. Коэфициент пропорциональности k называется пьезоэлектрической постоянной кварца и показывает то количество электричества, которое возникает на кристалле при действии единицы силы.

Если действующая сила *f* перпендикулярна G_2 и G_3 (перпендикулярна передней и задней граням параллелепипеда), то электрические заряды будут наблюдаться так же, как и в предыдущем случае и, на тех же гранях, нормальных G_2 (на боковых гранях параллелепипеда). Однако количество возникшего электричества будет зависеть не только от величины приложенной силы, но и от размеров пластинки. Заряды будут тем больше, чем длиннее параллелепипед в направлении сжимающей силы и тем больше, чем тоньше параллелепипед по направле-

нию G_2. Если обозначить длину параллелепипеда по направлению N через a, а его размер по направлению G_2 через b, то получим:

$$q_{\parallel N} = k \cdot \frac{a}{b} \cdot f.$$

Количество электричества q, возникающее в результате действия силы, перпендикулярной G_2 и G_3, пропорционально этой силе f, длине a пластинки вдоль направления силы и обратно пропорционально толщине b пластинки вдоль оси G_2. Коэфициент пропорциональности k — пьезоэлектрическая постоянная кварца.

Если действующая сила f направлена вдоль оси G_3 (нормально верхней и нижней граням параллелепипеда), то электрические заряды не обнаруживаются:

$$q_{\parallel G_3} = 0.$$

Пьезоэлектричество не возникает в результате действия силы, параллельной G_3.

При сжатии правая грань изображенного на фиг. 399*b* параллелепипеда заряжается положительно, левая — отрицательно. При растяжении, наоборот, левая заряжается положительно, правая — отрицательно.

3. Электрострикция

Возьмем кварцевый параллелепипед, рассмотренный нами в предыдущем разделе (фиг. 399*b*). Если, не подвергая его деформации, сообщить его боковым граням заряды (разность потенциалов), то параллелепипед сам сожмется или, наоборот, расширится.

Изменение размеров тела под влиянием электричества называется электрострикцией.

Явления электрострикции аналогичны обратным явлениям пьезоэлектризации.

При сообщении разности потенциалов V граням, перпендикулярным G_2, параллелепипед удлинится или укоротится вдоль G_2 на величину, пропорциональную разности потенциалов и не зависящую от размеров параллелепипеда.

$$\delta_{G_2} = kV.$$

Вместе с тем параллелепипед укоротится (или удлинится, если вдоль G_2 имело место укорочение) по направлению $N \perp G_2$ и $\perp G_3$ на величину, пропорциональную разности потенциалов, длине a параллелепипеда вдоль этого направления N и обратно пропорциональную толщине b вдоль G_2:

$$\delta_N = -k \cdot \frac{a}{b} \cdot V.$$

В направлении вдоль G_3 параллелепипед не деформируется.

Здесь k — попрежнему пьезоэлектрическая постоянная.

Если правой грани нашего параллелепипеда сообщить положительный заряд, а левой — отрицательный, то параллелепипед сожмется; при обратном расположении зарядов параллелепипед будет расширяться. Если попеременно менять знаки зарядов, то параллелепипед будет то сжиматься, то расширяться.

Кварцевая пластинка, включенная в цепь, в которой проходит переменный ток, будет „вибрировать", т. е. то расширяться, то сжиматься.

Из теории упругости известно, что возможные механические колебания пластинки определяются размерами и веществом этой пластинки. Если размеры пластинки таковы, что период возможных ее колебаний будет отвечать „периоду

вибрации", вызываемой электрострикцией, то пластинка действительно будет вибрировать. Если же размеры кварцевой пластинки таковы, что периоды возможных ее колебаний не будут отвечать „периоду вибрации", вызываемой электрострикцией, то вибрация не сможет осуществляться; колебания, вызываемые электрическими зарядами, не будут, как говорят, в резонансе с механическими колебаниями и будут мгновенно затухать.

Описанные свойства вибрирующих пьезокварцевых пластинок находят широкие практические применения в радиотехнике.

Аппараты радиостанций снабжаются пьезокварцевыми пластинками (вибраторами) для того, чтобы посылаемые ими волны имели строго определенную длину волны. Длина излучаемой волны (а, следовательно, и период колебаний $T = \frac{\lambda}{v}$) таких аппаратов (вибраторов) приходит в полное соответствие с периодом механических колебаний включенного в цепь пьезокварца.

Аналогично этому и принимающие радиоустановки, снабженные пьезокварцем (резонаторы), способны обнаруживать радиоволны строго определенной длины волны; период колебания принимаемых волн должен вполне отвечать периоду механических колебаний включенного в цепь пьезокварца.

Вибрирующая пьезокварцевая пластинка является источником также других явлений, среди которых отметим возникновение так называемых ультразвуковых волн. Технические колебания большой частоты, совершаемые вибрирующей пьезокварцевой пластинкой, передаются окружающей среде в виде продольных колебаний, отличающихся от обычных звуковых колебаний своей частотой. Ввиду большой частоты колебаний ультразвуковых волн (100 000—700 000 колебаний в секунду), наше ухо их не воспринимает в виде звука; обладая некоторыми необычайными свойствами, они обнаруживаются косвенными методами. Ультразвуковые волны начинают находить свое применение в технике.

Так, например, мощными установками, посылающими и воспринимающими ультразвуковые волны, снабжаются морские суда, посылающие эти волны в воду. Ультразвуковые волны, отражаясь от различных предметов, возвращаются обратно и дают возможность обнаруживать подводные рифы, затонувшие суда, неприятельские подводные лодки и даже присутствие рыбы.

Кристаллы кварца, идущие на изготовление пьезокварцевых пластинок, должны быть вполне совершенными в отношении однородности, отсутствия включений и двойников. В последнее время пьезокварцевые пластинки стали заменяться пьезотурмалиновыми.

ОТДЕЛ VIII

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВА

1. Кристаллографический диагноз

В предыдущих главах мы познакомились со всеми наиболее существенными свойствами кристаллического вещества. Изученные нами свойства не только характеризуют особенности кристаллической материи, но позволяют также обнаруживать различия между отдельными кристаллическими веществами. Выше были выявлены наиболее существенные свойства, которыми могут отличаться друг от друга различные кристаллы. Принадлежность кристаллов к различным сингониям, различная твердость, различная поглощаемость световых лучей (а отсюда и окраска кристаллов) и множество других признаков позволяют обнаруживать нетождественность различных кристаллических веществ. Различные свойства могут быть охарактеризованы, как мы видели, некоторыми „постоянными", „константами", величины которых бывают вполне определенными для каждого вещества (например, показатели преломления N_g, N_m, N_p у каждого вещества имеют вполне определенные величины).

Если измеренные константы неизвестного вещества не отличаются от констант того или иного известного кристаллического вещества, то этим самым устанавливается тождество и самих веществ. Таким образом путем сравнения измеренных констант с константами уже известными для определенных веществ можно „определять" неизвестное вещество.

Как мы знаем, в настоящее время изучено довольно большое количество кристаллов. Их кристаллографические константы собраны в прекрасные сводки. Наиболее фундаментальной является пятитомное сочинение Грота „Chemische Krystallographie", которое включает очень полные и разносторонние данные о кристаллографических свойствах почти всех веществ, изученных до 1919 г. Несколько более односторонними являются справочники Гольдшмидта (Гейдельбергского), в которых даются сведения только о минералах. В его „Krystallographische Winkeltabellen" приведены очень подробные данные об угловых величинах всех граней всех минералов. В гигантском 18-томном „Atlas der Krystallformen" (9 томов атласа и 9 томов текста) Гольдшмидтом собраны все сведения о габитусах кристаллов и перечислены все формы, когда-либо наблюдавшиеся у тех или иных минералов. Книги Гольдшмидта не содержат в себе сведений об оптических и других свойствах веществ. Наоборот, в справочники Винчелла включены почти исключительно данные о кристаллооптических свойствах минералов и некоторых неминералов.

„Strukturberichte" Эвальда и Германа представляет собою систематическую сводку сведений о структурах и о кристаллических решетках всех веществ, изученных в настоящее время при помощи рентгеновых лучей.

Указанные сводки и им аналогичные сильно помогают при установлении диагноза неизвестного вещества.

Особенно широко используются кристаллографические данные при минералогических, петрографических и минераграфических исследованиях (петрография — наука о горных породах, минераграфия — о составе руд). Определение того или иного минерала основано в очень большой степени на изучении его кристаллографических свойств. Петрографами разработаны методики определения минералов

исключительно при помощи изучения их кристаллооптических свойств, совершенно без помощи химического или иного анализа. Но и при химическом анализе (полном или частичном, при помощи паяльной трубки и особенно при микрохимическом анализе) для проверки правильности определения постоянно прибегают к данным кристаллографии. При этом используются не только кристаллооптические константы, но и данные о габитусе и формах кристаллов. Наиболее же надежной проверкой всякого определения является установление тождества угловых величин определяемого вещества с угловыми величинами, приводимыми для него в справочниках. Для этого необходимо измерить кристалл при помощи гониометра и сравнить полученные данные измерения с данными, приводимыми в литературе (например, в „Химической кристаллографии" Грота). Однако для практической возможности такого сравнения необходимо знать, какое именно вещество нами измерено. Действительно, в справочнике Грота описываемые кристаллические вещества расположены в порядке химической системы (у Гольдшмидта в алфавитном порядке). Если состав или название вещества неизвестны, то мы не будем знать, где, в каком томе и на какой странице помещено описание определяемых кристаллов. Перелистывать же все страницы подряд и пересматривать данные измерения каждого кристаллического вещества в отдельности представляет собою гигантскую работу, практически совершенно невыполнимую. Таким образом данные о кристаллографических свойствах, помещенные в справочниках Грота или Гольдшмидта или им аналогичных, могут быть использованы для определения неизвестных веществ только как вспомогательные средства при химическом или ином анализе. Самое точное и подробное кристаллографическое исследование может только или подтверждать, или, наоборот, опровергать уже предварительно сделанное определение. В крайнем случае определение возможно по указанным справочникам, если имеются хотя бы некоторые, но определенные сведения о составе определяемого вещества (например, данные качественного анализа). Только в таком случае можно не остановиться перед трудностями систематического просмотра сведений о кристаллографии всех двадцати-тридцати веществ приблизительно подходящего состава и выбрать среди них вещество, тождественное определяемому. На ненормальность этого положения было обращено внимание еще Е. С. Федоровым, который был первым изобретателем и творцом самостоятельного систематического метода определения вещества при помощи кристаллографических исследований.

Определение вещества при помощи измерения его кристаллов гониометром называется кристаллографическим диагнозом.

Кристаллографический диагноз по методу Е. С. Федорова называется кристаллографическим анализом.

Согласно идее Е. С. Федорова, самостоятельное использование кристаллографических данных для определения вещества сделается возможным в том случае, если описания веществ расположить не в порядке химической системы, как это сделал Грот, и не в алфавитном порядке, как это сделал Гольдшмидт, но в порядке кристаллографической системы, в порядке естественной классификационной системы мира кристаллов. Создание такой естественной классификации принадлежит, как мы знаем, также Е. С. Федорову (см. главу о формах кристаллов). Им же, совместно с четырьмя его сотрудниками (Д. Н. Артемьевым, Т. В. Баркером, Б. П. Орелкиным и В. И. Соколовым), был создан капитальный труд „Das Krystallreich", в котором все кристаллографически изученные вещества расположены в порядке этой классификации.

При помощи измерения кристалла неизвестного вещества гониометром мы определяем по полученным данным его место в этой классификации.

В „Das Krystallreich" находим это место и читаем название неизвестного вещества. Идея определения, как мы видим, чрезвычайно простая; однако процесс отнесения измеренного кристалла к той или иной рубрике классификации Е. С. Федорова и точное определение места вещества среди других в найденной

рубрике представляют подчас значительные трудности. Действительно, как мы знаем, естественная классификация Е. С. Федорова базируется на типах структур пространственных решеток кристаллов. Таким образом, для того чтобы правильно найти место данного вещества в классификации, необходимо знать тип структуры этого вещества. Е. С. Федоровым была разработана методика такого определения по данным гониометрических измерений. Решение этой добавочной задачи сильно осложняет определение вещества методом кристаллохимического анализа.

Это обстоятельство было учтено учениками Федорова проф. А. К. Болдыревым (в 1924 г. в Ленинграде) и проф. Т. В. Баркером (в 1928 г. в Оксфорде), которые, независимо один от другого, разработали два новых метода кристаллографического диагноза. Остановимся на методе А. К. Болдырева, как на наиболее простом.

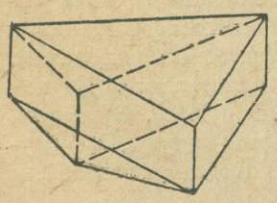
Как и при всяком кристаллографическом диагнозе кристалл определяемого вещества необходимо измерить на гониометре (для этого предварительно иногда приходится перекристаллизовать данное вещество с целью получения хороших кристаллов). Журнал измерений и составленная по его данным стереографическая проекция позволяют точно определить сингонию и формы измеренного кристалла. После этого находят и выписывают углы, которые образуют нормали к присутствующим граням с осью симметрии наибольшего наименования. По найденным углам, которые мы будем дальше называть определяющими углами, и ведется определение. Полезно, но далеко не обязательно, найти еще символы граней присутствующих форм, спайность, твердость и главнейшие оптические константы. Эти сведения могут сильно упростить и ускорить определение.

Определение ведется по „определителю", представляющему собою несколько томов книг, в которых приведены описания кристаллов. Кристаллы каждой сингонии сгруппированы в особый том определителя. Каждый том распадается на две части: ключ и собственно описание кристаллов (текст), при этом в одних частях минералы для удобства пользования отделены от неминералов. Текст представляет собою систематическое изложение свойств кристаллических веществ данной сингонии, расположенных в порядке химической системы. Описание каждого вещества дано по определенной схеме. Приведем для примера описание одного из веществ тетрагирной (тетрагональной) сингонии:

106. Цианистая ртуть (Mercuricyanid) — $Hg[CN]_2$

Тетрагироидо-планальный	1 : 0,4596	
Призматический или тетраэдрический $a = 9{,}67$ Å;	a — 100	90°
$c = 8{,}92$ Å	o — 111	33°01′
	w — 111	33°01′
Сп. (100) несов. $D = 4{,}00$. Белый. Мутный	s — 201	42°35′
Двупр. отриц. G. 1. 223. — E. H. 270, 282, 774	c — 001	0°

Как видно из приведенного примера, каждому веществу приписывается определенный порядковый номер, который ставится рядом с названием и химической формулой вещества. Описание начинается указанием на сингонию, вид симметрии и пространственную группу симметрии. Далее, в левой части описания приводятся рисунки внешнего облика кристаллов, указывается габитус, штриховатость, если она характерна, фигуры травления, двойники, иногда характер агрегатов.



Фиг. 400.

Далее приводятся кристаллофизические сведения: спайность (Сп.); твердость; удельный вес (D); излом; прочие механические свойства. Оптические свойства, по возможности, даются следующие: цвет (и цвет черты), блеск, прозрачность, плеохроизм, характер двупреломления (Двупр.), N_g, N_m, N_p, 2 V, 2 E. Иногда упоминаются электрические, магнитные и другие свойства.

Иногда приводятся и некоторые физико-химические свойства, как например, расплываемость или выветриваемость кристаллов на воздухе, температура пере-

хода в другую модификацию, температура плавления или разложения. Для справок приводятся еще краткие сведения о рентгенометрии кристаллов с ссылками на научную литературу, откуда почерпнуты все приводимые сведения. Наиболее важной, однако, является правая часть описания, в которой приводится так называемый „гранеугловой комплекс", т. е. список граней, наблюдавшихся у кристаллов данного вещества и их определяющие углы (для тетрагирных кристаллов с G_4 или совпадающей с нею [001])*. Этот список составлен в порядке важности наблюденных форм — наиболее часто встречающиеся грани приведены в начале списка, редкие грани помещены в конце.

При этом грани, встречающиеся как габитусные, приведены жирным шрифтом, грани средней величины — простым, грани мелкие, никогда не встречающиеся как средние или габитусные, указаны мелким шрифтом. По углам „гранеуглового комплекса" собственно и ведется определение. Все углы гранеугловых комплексов всех кристаллов данной сингонии собраны вместе в ключе определителя, где они расположены в простом порядке возрастания значений этих углов от 0° до 90°. Рядом со значением определяющего угла данной грани в ключе указывается название вещества и номер, под которым он значится в тексте.

Для определения следует в первую очередь обратиться к „ключу" и найти в нем значения углов, близких к определяющим углам измеренного неизвестного кристалла. Пусть, например, при измерении было найдено, что кристаллы имеют два определяющих угла: $\rho_a = 33°05'$ и $\rho_b = 42°30''$. Тогда находим в ключе страницу, на которой приведены определяющие углы гранеугловых комплексов данной сингонии от $\rho_1 = 33°05' - 30'$ до $\rho_1' = 33°05' + 30'$, и страницу, на которой приведены определяющие углы гранеугловых комплексов данной сингонии от $\rho_2 = 42°30' - 30'$ до $\rho_2' = 42°30' + 30'$. Составляем списки номеров веществ, имеющие ρ_a и ρ_b в указанных пределах.

Среди веществ в составленных списках находится и искомое. При этом искомое вещество будет фигурировать и в списке, составленном по углу $\rho_a \pm 30'$, и в списке, составленном по углу $\rho_b \pm 30'$. Поэтому отбираем из обоих списков вещества, общие им обоим. При этом отборе получаем в общем ограниченное число веществ, среди которых должно быть и искомое. Если измеренные нами определяющие углы — углы, образованные нормалями к габитусным или средним граням, отбрасываем в полученном списке вещества, набранные в ключе мелким шрифтом; затем отбрасываем вещества, у которых близкие определяющие углы относятся к формам иным, чем формы, для которых были измерены определяющие углы (формы в ключе даются при помощи символов граней). В результате такого отбора получаем небольшой список номеров веществ, подлежащих детальному просмотру уже по тексту (при этом просмотре часто бывают очень полезные добавочные сведения о спайности, о твердости, об оптических константах определяемых кристаллов; они очень упрощают операцию последнего отбора). Когда найдено описание, вполне отвечающее определяемому веществу, прочитываем название и его химическую формулу. Определение закончено.

Главнейшими отличительными достоинствами всех методов кристаллографического диагноза являются следующие:

1) Ничтожность количества вещества, необходимого для диагноза. Для измерения гониометром, а следовательно, и для определения достаточно иметь кристаллик в четверть булавочной головки (а иногда и меньше). Совершенно очевидно, что определить химический состав такого кристаллика методом химического анализа почти невозможно.

---

* Для три- и гексагирных кристаллов определяющими углами являются углы нормалей к граням с G_3 и G_6, т. е. с осью [0001]. Для моногирной сингонии определяющими углами являются углы, образованные нормалями к граням с осью G_2 (или с нормалью к p) (или иначе с осью [010]). В дигирной сингонии каждая грань имеет три определяющих угла, соответственно с тремя G_2, здесь присутствующими (иначе определяющими углами являются углы с [100], [010[и [001]). В агирной сингонии определяющими углами являются непосредственно углы между нормалями к граням.

2) Неуничтожаемость вещества при диагнозе. При химическом или ином анализе вещество в результате анализа расходуется и уничтожается. При кристаллографическом же диагнозе кристаллик после измерения может быть сохранен и служит для контроля определения (что особенно ценно при исследовании редких музейных образцов — уников).

3) Одинаковая простота определения как веществ простого состава, так и самых сложных веществ. Существование изомерных и полиморфных модификаций нисколько не осложняет определения. Искомая модификация находится без всяких добавочных опытов.

4) Сравнительная быстрота определения. Полное определение, вместе с гониометрическим измерением, отнимает у неспециалиста 5—8 часов времени, у специалиста-кристаллографа — 1—4 часа. Произвести полный химический анализ, особенно какого-либо сложного соединения с определением его точной структурной формулы в указанное время — невозможно.

Существенными недостатками всякого метода кристаллографического диагноза являются:

1) Необходимость иметь вещество в кристаллах, годных для измерений гониометром.

2) Трудность определения кристаллов, все определяющие углы которых равны 0° и 90° (т. е. кристаллы без „косых" граней). Например, без добавочных опытов почти невозможно определить кристалл, представляющий собою комбинацию тетрагональной призмы с димоноэдром (пинакоидом) без каких-либо косых граней дипирамид или пирамид с $\rho \neq 0° \neq 90°$.

3) Почти полная невозможность определять кристаллы полигирной (кубической) сингонии. Действительно, гранеугловые комплексы кристаллов полигирной (кубической) сингонии, представленные одинаковыми формами, совершенно тождественны. Так, например, для граней октаэдра всех веществ полигирной сингонии определяющие углы всегда равны 54°44′, грани пентагон-додекаэдра (012) для всех веществ, будь то пирит FeS_2 или квасцы $K_2SO_4 \cdot Al_2[SO_4]_3 \cdot 24H_2O$, определяется углами 26°34′ и т. д. Поэтому измерение определяющих углов кристаллов полигирной сингонии совершенно не дает однозначного определения вещества. Можно только указать на целый ряд веществ, у которых встречаются такие же определяющие углы. Среди этих веществ только по габитусу и другим физико-кристаллографическим свойствам можно попытаться определить данное вещество. Таким образом детальный отбор веществ, подходящих по своим углам к определяемому, для кристаллов полигирной сингонии чрезвычайно затрудняется большим количеством одинаковых по углам кристаллов.

4) Аналогичное затруднение имеет место при диагнозе кристаллов, принадлежащих к той или иной группе изоморфных веществ. Как мы знаем, кристаллы изоморфных веществ бывают очень близки по своим кристаллографическим свойствам. Поэтому и их гранеугловые комплексы почти неотличимы. По данным измерения легко найти к какой изоморфной группе относится определяемое вещество. Если только кристаллы не позволяют произвести очень точные измерения гониометром, то детальное определение кристаллов среди всех веществ найденной группы должно быть основано уже не на угловых, но на второстепенных физических или химических признаках. Это может осложнить определение, заставив прибегнуть к дополнительным оптическим или химическим пробам.

2. Другие кристаллографические методы определения вещества

Указанные выше недостатки всякого метода кристаллографического диагноза отпадают, если за основу для определения взять не внешнюю огранку кристаллов, но базироваться на геометрических свойствах решеток. Действительно:

1) Решетка присутствует у всех кристаллических веществ, независимо от того — образует ли вещество годные для измерения кристаллы или никаких кристаллов вовсе не образует.

2) Затруднение в кристаллографическом диагнозе, связанное с отсутствием

„косых" граней, также отпадает, так как „косые" плоские сетки присутствуют у всякой кристаллической решетки.

3) Решетки кристаллов полигирной (кубической) сингонии отличаются абсолютными размерами своих элементарных ячеек, а потому легко отличимы друг от друга, а следовательно, могут быть и определены.

4) На первый взгляд кажется, что осложнения, связанные с определением изоморфных веществ, остаются в силе и при изучении решеток. Решетки изоморфных веществ в большинстве так же мало отличимы друг от друга, как и кристаллы этих веществ. Однако, если мы учтем, что методика изучения решеток базируется на рентгенометрии кристаллов, причем рентгеновы лучи реагируют различно на атомы различных, даже близких по свойствам элементов, то станет ясным, что в результате рентгенографического исследования изоморфных веществ в большинстве случаев получаются достаточно отличимые друг от друга результаты.

В настоящее время, когда рентгеновы лучи дают нам твердую опору для изучения кристаллических решеток, очевидно, что назрела необходимость создания определителя кристаллического вещества не только по гранеугловым комплексам кристаллов, но и по данным рентгеноанализа. К сожалению, число кристаллических решеток, изученных в настоящее время, еще недостаточно велико. Однако с каждым месяцем быстро растет количество веществ, решетки которых исследованы при помощи рентгеновых лучей. Создание определителя по данным рентгеноанализа — дело самого ближайшего будущего.

Но уже и сейчас рентгеноанализ широко применяется для целей диагноза вещества. Для того, чтобы разобраться, например, в составе какой-либо руды, сравнивают дебаеграммы этой руды с дебаеграммами различных минералов, существование которых предполагается в исследуемой руде. Путем таких сравнений находят все минералы, слагающие данную руду.

Наконец, следует упомянуть и о необходимости создания определителя вещества, основанного на изучении оптических свойств. Для изучения оптических свойств не требуется правильная внешняя огранка вещества, так же, как при рентгеноанализе. Правда, определение оптических свойств не может быть выполнено на столь мелкокристаллических образцах, какие поддаются исследованию методом Дебая — Шеррера — Хелла. Однако кристаллографический диагноз требует еще более значительных образцов. Поэтому определители минералов, основанные на оптических свойствах, созданы уже давно. Наибольшим распространением пользуются таблицы Лярсена и Винчелла, составленные по показателям преломления N_g, N_m, N_p. Лярсеном составлены таблицы только для минералов, Винчеллем — и для некоторых неминералов. Для огромного множества органических веществ аналогичные определители, к сожалению, не составлены.

Пользование кристаллооптическими определителями чрезвычайно просто. В них все кристаллы прежде всего разбиваются на оптически-изотропные, одноосные отрицательные, одноосные положительные, двуосные отрицательные и двуосные положительные. Кристаллы каждой части расположены в порядке возрастания их показателя N_m. Найдя иммерсионным методом или рефрактометром N_g, N_m, N_p, оптический знак и осность определяемого вещества, мы в соответственной части таблиц находим вещества с N_m, близким к найденному. Среди этих веществ отбрасываем такие, N_g и N_p которых не соответствуют найденным. Вещества, у которых и N_g, и N_m, и N_p близки к совпадению с найденными опытом, сравниваем с определяемым веществом по другим кристаллографическим свойствам: по сингонии, по спайности, по твердости, по удельному весу, по цвету и по некоторым химическим реакциям. Обычно эти сравнения служат только для подтверждения определения, сделанного по показателям преломления. Коренным недостатком метода является невозможность определять непрозрачные кристаллы.

Подводя итоги всему вышесказанному, видим, что в настоящее время кристаллография позволяет определять вещество по трем основам: 1) по гранеугловым комплексам (кристаллографический диагноз), 2) по данным рентгеноанализа и 3) по кристаллооптическим константам.

Каждый из существующих методов определения имеет как свои достоинства, так и свои недостатки. Нельзя думать, что какой-либо из кристаллографических методов определения вещества должен считаться универсальным и может заменить все другие методы определения (например, химический анализ, спектроскопию, физико-химический анализ и т. д.). В каждом конкретном отдельном случае необходимо уметь выбрать тот метод изучения, который проще всего и точнее всего приведет к решению задачи. И если применение одного из кристаллографических методов быстрее позволит разобраться в том или ином вопросе, то нельзя игнорировать этот метод.

Автор будет считать свой труд достигшим цели, если читатель, до конца изучивший настоящую книгу, сумеет воспользоваться кристаллографией в тех случаях, когда ее применение является объективно целесообразным.

БИБЛИОТЕКА
Геофизической станции
Арм. Фил. АН СССР

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Введение 5
1. Кристаллическое вещество и кристаллы . . . . . —
2. Предмет, задачи и методы кристаллографии 6

Отдел I

ОСНОВЫ УЧЕНИЯ О СТРОЕНИИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА

Глава I. **Рентгенометрия кристаллов** 10
1. Получение и главнейшие свойства рентгеновских лучей . . . . . —
2. Закон отражения рентгеновских лучей от плоских сеток кристаллов 12
3. Методы определения углов отблеска 15

а) Метод Браггов (15). б) Метод Поляни (метод кристалловращения) (15). в) Метод Дебая, Шерера и Хелла (метод порошка) (17). г) Метод Лауэ (18). д) Сравнительные достоинства и недостатки описанных методов (19).

4. Основные выводы рентгенометрии кристаллов 20

Глава II. **Пространственная решетка** . . . . . —

Глава III. **Кристаллическая решетка** 24
1. Природа узлов пространственных решеток . . . . . —
2. Радиусы атомов и ионов и кристаллохимический закон Гольдшмидта 25
3. Влияние поляризационных свойств на характер кристаллической решетки . . 29
4. Влияние атомных (и ионных) радиусов на характер кристаллической решетки 30
5. Изоморфизм 31
6. Полиморфизм 33

Отдел II

ЗАКОНЫ КРИСТАЛЛООБРАЗОВАНИЯ

Глава IV. **Законы возникновения кристаллического вещества** 36
1. Зависимость кристаллообразования от температуры и давления . . . . . —
2. Способность веществ к кристаллизации 38
3. Зависимость кристаллообразования от концентрации 41
4. Перекристаллизация 44
5. Пути образования кристаллического вещества в природе и в технике 45

а) Кристаллизация в газообразной среде (45). б) Кристаллизация в жидкой среде (46). в) Кристаллизация в твердой среде (46).

Глава V. **Законы самограняемости кристаллического вещества** 47
1. Основной закон самограняемости кристаллического вещества (закон плоскогранности и прямореберности кристаллов). . . . . —
2. Явления роста кристаллов 49
3. Концентрационные потоки 51
4. Другие факторы, влияющие на скорости роста различных граней 52
5. Фигуры роста 53
6. Регенерация кристаллов 54
7. Кристаллизация изоморфных солей и закономерные срастания веществ различного состава . . . . . —

Отдел III

Закон постоянства углов кристаллов, их измерение и изображение

Глава VI. **Закон Стенона** 56
Глава VII. **Измерение кристаллов** 58
1. Прикладные гониометры . . . . . —
2. Принципы устройства однокружных отражательных гониометров 59
3. Принципы устройства двукружных (теодолитных) гониометров 60
4. Двукружный (теодолитный) гониометр Е. С. Федорова и работа с ним 63
5. Ход измерения кристалла 65
Глава VIII. **Изображение кристаллов** 69
1. Стереографические проекции . . . . . —
2. Стереографическая сетка А. К. Болдырева 72
3. Стереографическая сетка Вульфа 77
4. Изображение кристалла в ортогональных проекциях 94
5. Некоторые заключительные замечания о стереографических проекциях 101

Отдел IV

Законы симметрии кристаллического вещества

Глава IX. **Элементы симметрии** 103
1. Общие замечания . . . . . —
2. Равные фигуры . . . . . —
3. Симметричные фигуры 108
4. Отражение в одной плоскости 109
5. Последовательное отражение в двух пересекающихся плоскостях 110
6. Понятие о сложении симметрических преобразований и элементов симметрии 117
7. Последовательное отражение в двух параллельных плоскостях 122
8. Отражение в трех пересекающихся плоскостях 126
9. Отражение в трех плоскостях, не пересекающихся в одной точке 134
10. Отражение в четырех плоскостях 137
11. Сводка результатов выводов предыдущих разделов 145
Глава X. **Сингонии и виды симметрии** 149
1. Вывод 32 видов симметрии . . . . . —
а) Виды симметрии с одной главной осью или вовсе без главной оси (150). б) Виды симметрии с несколькими главными осями (153).
2. Классификация 32 видов симметрии кристаллов 155
Глава XI. **Пространственные группы (разновидности) симметрии** 162
1. Сложение переносов с различными другими элементами симметрии . . . . . —
2. Понятие о сходственности симметрических преобразований и элементов симметрии 168
3. Пространственные группы симметрии 169
4. Классификация пространственных групп 173
5. Определение симметрии на реальных кристаллах 174

Отдел V

Законы о формах кристаллического вещества

Глава XII. **Формы кристаллических многогранников** 181
1. Общая теория учения о формах . . . . . —
2. Простые формы кристаллов низшей категории 184
3. Простые формы кристаллов средней категории 189
4. Простые формы кристаллов высшей категории полигирной (кубической) сингонии 197
5. Формы реальных кристаллов 201
Глава XIII. **Формы кристаллических решеток** 207
1. Форма элементарной ячейки кристаллической решетки . . . . . —
2. 14 решеток Браве 212
3. Структуры Е. С. Федорова 218
4. Сводка различных понятий о клетках пространственных решеток 223
5. Правильные системы точек 224
6. Кристаллохимический закон А. В. Шубникова 226
7. Кристаллохимический закон Грота 227
8. Распределение изученных кристаллов по симметрии 229

Стр.

Отдел VI

Законы Аюи и Вейсса и учение о символах

Глава XIV. **Символы плоских сеток** 233
1. Закон рациональности параметров плоских сеток кристалла. Главнейшие определения . . . . . —
2. Сериальные символы и символы плоских сеток, ближайших к началу координат 237
3. Зависимость межплоскостных расстояний от символов плоских сеток и от сериальных символов 241

Глава XV. **Символы граней** 243
1. Закон рациональности отношений параметров (закон Аюи) . . . . . —
2. Основные понятия и определения в учении о символах граней кристалла . . 247
3. Установка кристаллов и определение символов граней различных сингоний . 252
4. Метод косинусов 261

Глава XVI. **Символы рядов и ребер** 265
1. Основные понятия и определения . . . . . —
2. Символы рядов и ребер гексагирных (гексагональных) кристаллов 268
3. Законы Вейсса и метод поясов 270

Отдел VII

Основные кристаллофизические законы

Глава XVII. **Закон кристаллической однородности** 277

Глава XVIII. **Закон анизотропии кристаллического вещества (закон векториальности)** 278
1. Закон анизотропии кристаллов . . . . . —
2. Проявление закона анизотропии на тепловых свойствах кристаллов 279
3. Проявление закона анизотропии на механических свойствах кристаллов . . . —
4. Проявление закона анизотропии на магнитных и электрических свойствах кристаллов 283
5. Законы кристаллической однородности и анизотропии как основа теории структуры кристаллов 284

Глава XIX. **Законы кристаллооптики** 286
1. Некоторые сведения из оптики . . . . . —
2. Распространение света в кристаллическом веществе 289
3. Эллипсоид показателей преломления (оптическая индикатриса) 292
4. Поляризационный микроскоп, препараты для оптического исследования и простейшие наблюдения над кристаллами без анализатора 296
5. Четырехкратное погасание кристаллов в скрещенных николях и связанные с этим явления 298
6. Типы и ориентировки эллипсоидов в кристаллах разных сингоний 303
7. Интерференционная окраска кристаллов и связанные с нею явления 306
8. Главнейшие оптические явления при исследовании кристаллов в сходящемся свете 314
9. Определение типа и знака оптической индикатрисы 318
10. Определение показателей преломления 320
11. Определение угла оптических осей 324
12. Определение ориентировки оптической индикатрисы 326
13. Дисперсия 330
14. Вращение плоскости поляризации 332

Глава XX. **Законы электризации кристаллов** 334
1. Явления, вызывающие электризацию кристаллов . . . . . —
2. Пьезоэлектризация . . . . . —
3. Электрострикция 336

Отдел VIII

Кристаллографические методы определения вещества

1. Кристаллографический диагноз 338
2. Другие кристаллографические методы определения вещества 342

БИБЛИОТЕКА
Геол[illegible]
Арм[illegible]

Отв. редактор *И. И. Шафрановский.* Техн. редактор *Р. А. Аронс*

Сдано в набор 15/VII 1937 г. Корректор *А. И. Исакова* Подписано к печати 18/IX 1937 г.
Уч.-авт. л. 37,27 Печатных л. $2^{3}/_{4}+1$ вклейка Бум. л. $10^{7}/_{8}$ Тираж 3000
Тип. зн. в 1 бум. л. 146944 Формат бумаги $72\times110^{1}/_{16}$ ТКК № 115 от 17/IX 1937 г.
Ленгорлит № 4164 Заказ № 2288

2-я типография ОНТИ им. Евгении Соколовой. Ленинград, проспект Красных Командиров, 29.

Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать	По вине
306	фиг. 362	*Ng*	*Ny*	редакции
313	фиг. 366*б*	*Ng*	*Np*	»
	»	*Np*	*Ng*	»
319	фиг. 376*а*	—	I и III квадранты — желтые	»
			II и IV » — синие	»
	фиг. 376*б*	—	I и III » — синие	»
			II и IV » — желтые	»

Доливо-Добровольский.

111