



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

**ВСЕСОЮЗНЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

Кафедра месторождений полезных ископаемых

А. А. БЕУС, С. В. ГРИГОРЯН

УТВЕРЖДЕНО
проректором по учебной работе
2 апреля 1973 г.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИ ГЕОХИМИЧЕСКИХ ПОИСКАХ

ЛЕКЦИЯ

для студентов специальностей

- 0101 — ГЕОЛОГИЯ И РАЗВЕДКА МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ;
- 0105 — ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКОВ И РАЗВЕДКИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ.

РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ОТДЕЛ

МОСКВА 1973

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
ВСЕСОЮЗНЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра месторождений полезных ископаемых

519.2+530.84

А. А. БЕУС, С. В. ГРИГОРЯН

1013
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ
ПРИ ГЕОХИМИЧЕСКИХ ПОИСКАХ

ЛЕКЦИЯ



РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ОТДЕЛ

МОСКВА 1973

I. МЕТОДЫ И ЗАДАЧИ ГЕОХИМИЧЕСКИХ ПОИСКОВ*

Геохимические методы поисков впервые зародились в Советском Союзе более 35 лет тому назад. Особенно широко за этот период использовались методы поисков по вторичным геохимическим ореолам рассеяния. Применение их на обширной и геологически разнообразной территории СССР привело к обнаружению большого числа новых месторождений полезных ископаемых.

Научными основами геохимических методов поисков являются ведущие принципы учения о миграции, рассеянии и концентрации химических элементов в земной коре, заложенные основателями советской геохимической школы — В. И. Вернадским и А. Е. Ферсманом.

Геохимическими критериями, используемыми этими методами, служат закономерности распределения химических элементов, выявляемые в различных типах горных пород, почвах, природных водах и растениях.

Возможность использования при поисках полезных ископаемых строгих геохимических закономерностей, основанных на данных количественной оценки распределения химических элементов в природных образованиях, позволила совершенно по-новому подойти к разработке научных основ поисков и организации поисковых работ. В настоящее время геологическая служба во многих странах переживает период, когда на смену традиционным визуальным методам поисков рудных месторождений приходят геохимические и геофизические методы поисков, основанные на использовании данных количественных химических и физических измерений. Математическая обработка этих данных с учетом выявленных геохимических и геологических закономерностей позволяет обосновать объективные поисковые критерии, использование которых резко повышает эффективность поисков, превращая поисковые работы в строгий исследовательский процесс.

* Эта глава в основном построена на материале лекции А. А. Беуса и Е. М. Янишевского, прочитанной в 1965 г. на Международном семинаре по геохимическим поискам, организованном ООН.

Возможность использования объективных закономерностей распределения элементов в различных геологических образованиях, позволяющая с помощью сравнительно дешевых и высокопроизводительных приемов выявлять площади и участки, перспективные для обнаружения месторождений и отдельных рудных тел, обуславливает высокую эффективность геохимических методов поисков.

Следует также особо подчеркнуть, что применение геохимических методов позволяет резко повысить эффективность поисковых работ, направленных на решение одной из наиболее важных геологических проблем нашего времени — поисков скрытых месторождений.

Таким образом, геохимические методы поисков в настоящее время следует рассматривать как современные ведущие поисковые методы, применяемые в весьма различных геологических и климатических условиях для решения самых различных задач.

В СССР эти методы успешно привлекаются к поискам широкого комплекса полезных ископаемых, в том числе новых видов минерального сырья, и в настоящее время являются неотъемлемой составной частью геолого-съёмочных, поисковых и разведочных работ всех видов и масштабов.

Как известно, средние содержания химических элементов, характеризующие состав различных типов пород в масштабе коры в целом (литосфера), а также состав других геосфер (гидросферы, атмосферы), по предложению А. Е. Ферсмана получили название кларков. В настоящее время для большинства химических элементов определены достаточно точные значения кларков, позволяющие, в частности, обоснованно судить о среднем содержании этих элементов в различных породах земной коры.

Учитывая, что особенности распределения химических элементов в пределах конкретных регионов различаются довольно существенно, А. Е. Ферсман ввел понятие о геохимической провинции, предложив обозначить этим термином «области, геохимически однородные и характеризующиеся определенными ассоциациями химических элементов». Своеобразие сочетаний элементов в пределах определенной геохимической провинции, являющееся результатом специфики исторического развития конкретного участка земной коры, должно, по мнению А. Е. Ферсмана, отличать данную геохимическую провинцию от соседних районов и от распределения элементов, свойственного литосфере в целом. Эти отличия, ясно проявляющиеся в распределении петрогенных элементов, особенно четко выступают при сравнении оценок параметров распределения аксессуарных, в том числе рудных элементов.

Специфические особенности распределения химических элементов присущи также продуктам гипергенного разрушения этих пород, почвам и произрастающим на них растениям. Выявление и изучение этих особенностей позволяет давать обоснованную оценку перспектив рудоносности отдельным регионам и различным геологическим образованиям.

При этом следует иметь в виду некоторые важные геохимические предпосылки.

Локальные особенности распределения химических элементов в конкретных породах, не затронутых детальною каких-либо рудообразующих процессов, а также в рыхлых отложениях, водах и растениях, химический состав которых свободен от влияния эндогенных или экзогенных рудных концентраций, определяют **местный геохимический фон**. Это понятие широко применяется в практике геохимических поисков. В результате математической обработки аналитических данных о содержании элементов в подобных образованиях могут быть получены статистические оценки локальных параметров распределения химических элементов, характеризующие геохимический фон. В зависимости от статистического закона распределения содержаний химического элемента в природных образованиях оценками параметров его распределения являются: среднее арифметическое, дисперсия и среднее квадратическое отклонение содержаний (в случае нормального закона распределения) или среднее арифметическое, дисперсия и среднее квадратическое отклонение логарифмов содержаний (в случае логарифмически-нормального закона распределения).

В результате проявления ряда локальных геологических процессов, преимущественно связанных с магматической и гидротермальной деятельностью, в частности при взаимодействии пород с эндогенными растворами и различного типа. происходит перераспределение элементов в локальных участках пород, подвергающихся воздействию растворов, сопровождающееся привнесом одних и выносом других химических элементов. Подобные участки пород, характеризующиеся аномальными особенностями распределения элементов по сравнению с геохимическим фоном, образуют так называемые **эндогенные геохимические аномалии**.

Участки рыхлых отложений и почв, по тем или иным причинам характеризующиеся аномальными особенностями распределения химических элементов, по сравнению с геохимическим фоном, образуют **экзогенные геохимические аномалии**. Образование подобных аномалий обычно связано с явлением гипергенного разрушения рудных концентраций различного генезиса.

Наличие аномально повышенных содержаний микроэлементов (в том числе рудных элементов) в пределах эндогенной или экзогенной геохимической аномалии, как правило, определяет появление аномальных (по сравнению с геохимическим фоном) содержаний этих элементов в растениях, произрастающих на этой площади. **В результате образуются биогеохимические аномалии**, в контурах которых все растения или только отдельные их виды отличаются повышенными содержаниями некоторых микроэлементов.

Различают также **гидрогеохимические аномалии**, определяющиеся изменением (по сравнению с геохимическим фоном) элементного состава природных вод и донных осадков в определенных участках изучаемой площади.

Количественным показателем интенсивности (контрастности) проявления геохимических аномалий является величина коэффициента концентрации данного химического элемента в пределах аномалии (по сравнению со средним значением геохимического фона).

Геохимические методы поисков месторождений полезных ископаемых основаны на принципе выявления геохимических аномалий, образование которых связано с явлениями первичной концентрации или вторичного рассеяния рудных химических элементов и их спутников, путем проведения специального геохимического опробования природных образований.

Среди геохимических методов поисков в зависимости от объектов опробования (генетического типа геохимических аномалий) различают литохимические, гидрогеохимические, биогеохимические, атмогеохимические методы поисков.

Наибольшее значение для поисков полезных ископаемых имеет литохимический метод, основанный на изучении распределения химических элементов в коренных породах, рыхлых отложениях и почвах.

Основной задачей геохимических поисков является выявление месторождений полезных ископаемых. Наряду с этим интересную и ценную информацию дает систематическое геохимическое опробование геологических образований, генетически связанных с процессами магматизма, метаморфизма, осадконакопления, гипергенеза и т. д. По характеру распределения химических элементов в ряде случаев устанавливается комагматичность пород в пределах интрузивных и эффузивных серий, последовательность осадконакопления в немых свитах, характер развития послемагматических процессов в пределах интрузивных и метаморфических пород и т. д. Данные геохимического опробования, обработанные с помощью методов математической статистики, служат для обоснования выводов, используемых при металлогенических прогнозах и оценке потенциальной рудоносности территорий.

При помощи геохимических методов могут решаться следующие практические задачи:

1) региональное геохимическое прогнозирование на основе анализа закономерностей распределения химических элементов — индикаторов рудоносности в магматических, метаморфических и осадочных геологических комплексах;

2) поиски месторождений, вскрытых эрозией и перекрытых рыхлыми отложениями, по вторичным геохимическим ореолам рассеяния в донных осадках (потоки рассеяния), элювиально-делювиальных отложениях, растительности и природных водах;

3) поиски месторождений и рудных тел, не выходящих на поверхность (скрытых) по эндогенным геохимическим ореолам, а также оценка перспектив рудоносности глубоких горизонтов и флангов разведываемых и эксплуатируемых месторождений;

4) поиски нефтяных и газовых месторождений по газовым ореолам.

Региональное геохимическое прогнозирование на основе анализа закономерностей распределения химических элементов-индикаторов рудоносности в геологических комплексах пород различного генезиса выполняется путем геохимического картирования, проводимого совместно с геологической съемкой масштаба 1:200000—1:50000. При этом используются специфические геохимические особенности распределения ряда химических элементов в магматических, метаморфических и осадочных породах, с которыми связано образование практически интересных рудных месторождений. Наличие этих особенностей позволяет по характерным ассоциациям химических элементов и закономерностям их распределения отличать потенциально рудоносные и безрудные геологические комплексы. По результатам геохимического картирования составляются прогнозные геолого-геохимические карты, на которых выделяются потенциально рудоносные геологические комплексы и оконтуриваются районы, перспективные для постановки детальных поисковых работ.

Создание карт прогноза на основе геолого-структурных, геохимических и геофизических исследований в настоящее время является важной задачей, решение которой позволяет научно обоснованно оценить перспективы рудоносности малоисследованных регионов и заново переоценить уже освоенные промышленностью районы, в особенности с точки зрения возможности обнаружения в их пределах скрытого оруденения.

Поиски по экзогенным вторичным геохимическим ореолам являются важной задачей комплекса геологопоисковых работ, решаемой при помощи геохимических методов.

Вторичные ореолы рассеяния, образование которых связано с явлениями гипергенеза рудных месторождений и их эндогенных ореолов, обнаруживаются в различных природных образованиях поверхностей земной коры: аллювии, элювиально-делювиальных отложениях, почвах, растительном покрове, подземных и поверхностных водах. Геохимические ореолы некоторых элементов фиксируются также в газовой фазе, циркулирующей по трещинам и присутствующей в поровых пространствах пород. В связи с этим геохимические методы поисков по вторичным ореолам рассеяния основываются на опробовании и изучении особенностей распределения химических элементов во всех образованиях зоны гипергенеза.

В связи с тем, что миграция химических элементов в условиях зоны гипергенеза всецело зависит от геоморфологических и климатических условий конкретного района, большое значение для эффективного проведения геохимических поисков по вторичным ореолам рассеяния имеет изучение и классификация поверхности земной коры и отдельных регионов с целью выделения областей, характеризующихся сходными условиями геохимической миграции. Эта ветвь геохимии, получившая название геохимии ландшафта, широко используется при планировании и проведении геохимических поисков рудных месторождений по вторичным ореолам рассеяния. При этом производится ландшафтно-геохимическое районирование изучаемых территорий с последующим составлением ландшафтно-геохимических карт, четко определяющих оптимальные условия проведения геохимических поисков тех или иных видов полезных ископаемых в пределах данного региона.

Изучение вторичных ореолов рассеяния дает возможность решать различные поисковые задачи. Так, изучение особенностей распределения элементов в донных осадках (потоки рассеяния) позволяет давать оценку общих перспектив рудоносности крупных районов как в части обнаружения вскрытых эрозией месторождений, так и в отношении возможности выявления экзогенных и эндогенных ореолов скрытых рудных тел.

Изучение особенностей распределения химических элементов-индикаторов оруденения в элювиально-делювиальных отложениях и почвах позволяет обнаруживать месторождения и рудные тела, вскрытые эрозией и перекрытые рыхлыми отложениями. При помощи этого метода могут также обнаруживаться находящиеся под покровом элювиально-делювиальных отложений эндогенные геохимические ореолы скрытых месторождений и, следовательно, связанные с ними скрытые рудные тела.

Наиболее эффективная глубинность литохимического метода поисков по вторичным ореолам рассеяния обычно ограничивается несколькими метрами. Однако при использовании простейшей буровой техники глубинность этого метода может быть существенно увеличена до пределов, оправдываемых с экономической точки зрения. Глубинный вариант литохимического метода поисков может быть использован при поисках погребенных вторичных ореолов рассеяния в особо перспективных районах, в которых коренные рудовмещающие породы перекрыты мощной толщей рыхлых отложений.

В ландшафтно-геохимических условиях, где опробование элювиально-делювиальных отложений и почв является затруднительным или неэффективным, геохимические поиски могут производиться на основе изучения особенностей распределения химических элементов-индикаторов оруденения в растениях (биогеохимический и геоботанический методы). Подобные условия, в частности, могут иметь место на участках со значительной мощностью рыхлых отложений или в заболоченных районах. С помощью биогеохимического и геоботанического методов могут производиться поиски вскрытых эрозией и перекрытых рыхлыми отложениями месторождений и рудных тел, а также эндогенных геохимических ореолов скрытых месторождений.

Достоинством биогеохимического метода поисков является его повышенная глубинность, достигающая в некоторых условиях десяти и более метров. Однако, по сравнению с другими геохимическими методами биогеохимический метод более дорогостоящий и трудоемкий, что не позволяет рекомендовать его использование в условиях, где геохимическое опробование почв или рыхлых отложений дает удовлетворительные результаты.

Гидрогеохимический метод поисков может применяться для оценки общих перспектив рудоносности района там, где по каким-либо причинам нельзя использовать более эффективный метод донных осадков. Этот метод в отдельных случаях может также использоваться для обнаружения слепых рудных тел и рудных тел, вскрытых эрозией и перекрытых рыхлыми отложениями.

В комплексе более детальных поисково-разведочных работ с каждым годом увеличивается значение метода поисков скрытых рудных тел и месторождений по их эндогенным геохимическим ореолам.

Еще в 1939 г. А. Е. Ферсман в своей работе о геохимических методах поисков обратил внимание на то, что около максимальной концентрации вещества наблюдается первичный ореол повышенных концентраций тех же элементов. В дальнейшем наблюдения, проведенные многими исследова-

телями, подтвердили выводы А. Е. Ферсмана. Детальное изучение эндогенных геохимических ореолов показало, что они являются важными критериями для обнаружения скрытых рудных тел, существенно дополняющими комплекс геологических поисковых критериев.

Геохимические методы поисков скрытых месторождений и рудных тел по эндогенным (первичным) геохимическим ореолам исходят из предпосылки, что продвижение рудоносных растворов по трещинам в верхние горизонты земной коры сопровождается взаимодействием растворов с околотрещинными породами, следствием чего является изменение состава последних в пределах локальных околотрещинных зон. Изменение состояния и состава растворов по мере продвижения в верхние горизонты определяет различные геохимические особенности околотрещинных измененных пород на различных этапах эволюции растворов. С этой точки зрения для каждого типа рудообразующих растворов в каждой конкретной геологической обстановке можно различать подрудную, околорудную и надрудную зоны измененных пород. Зональность в этом случае может выявляться по распределению как петрогенных элементов, так и ряда рудных элементов. Выявление специфических геохимических особенностей таких зон для различных типов месторождений в различных геологических условиях позволяет по данным изучения характера распределения химических элементов в рудовмещающих породах, взаимодействующих с рудообразующими растворами, прогнозировать вероятность обнаружения скрытого оруденения.

Таким образом, основными задачами, решаемыми с помощью этого метода, являются:

а) поиски скрытых рудных тел, эндогенные ореолы которых вскрыты эрозией или обнажаются в горных выработках или буровых скважинах;

б) определение уровня эрозионного среза месторождения, а также отдельных рудных тел с целью оценки перспектив оруденения на глубину.

Использование геохимических закономерностей распределения рудных элементов и их спутников (элементов-индикаторов рудоносности) в эндогенных ореолах рудных тел и месторождений в ряде случаев позволяет прогнозировать наличие рудных концентраций на значительной глубине, достигающей 200 и более метров.

В дальнейшем имеется перспектива увеличения глубины метода путем разработки и обоснования критериев, использующих закономерности распределения в надрудной зоне месторождений некоторых легкоподвижных химических элементов (ртуть, йод, хлор, и др.).

Специфика решаемых поисковых задач определяет рациональное комплексирование геохимических методов на различных этапах поисковых работ в зависимости от задач и масштаба поисков, а также от геологических и ландшафтных особенностей исследуемой территории. В свою очередь геохимические методы должны строго сочетаться с геологическими наблюдениями и комплексироваться с геофизическими методами.

Следует подчеркнуть недопустимость отрыва геохимических поисков от геологических исследований. Механический подход к проведению геохимического опробования при поисках резко снижает эффективность поисковых работ и приводит к пропуску месторождений.

Схематично эти задачи, а также характер комплексирования геохимических методов на различных стадиях геологопоисковых и геологоразведочных работ представлены ниже.

НА СТАДИИ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ И ПОИСКОВ

Региональное геохимическое прогнозирование и рекогносцировочные поисковые работы в масштабе 1:500000 — 1:200000 проводятся с целью выявления и оконтуривания районов для постановки более детальных поисковых работ на конкретные виды полезных ископаемых. Геохимические работы этой стадии, включающие поиски по донным осадкам (потоки рассеяния), а также геохимическое картирование по коренным породам проводятся совместно с геологической съемкой соответствующего масштаба или же на готовой геологической основе.

В условиях хорошо развитой гидрографической сети, особенно в относительно слабо обнаженных районах, преимущество должно быть отдано методу донных осадков, который для районов со слабой обнаженностью является единственным методом, позволяющим получить систематическую геохимическую информацию о районе работ. Опробованию коренных пород в этих случаях представляется вспомогательная роль получения дополнительной геохимической информации, касающейся особенностей химического состава наиболее интересных с поисковой или геологической точек зрения типов пород, встречаемых в обнажениях. Геохимическое картирование по коренным породам при рекогносцировочных поисковых работах приобретает ведущее значение в условиях, когда опробование донных осадков по тем или иным причинам не может быть осуществлено. Подобные условия возникают в ряде случаев в аридных областях, в высокогорье и т. д. При этом следует иметь в виду, что геохимическое кар-

тирование по коренным породам дает ценную информацию о геохимической специализации геологических комплексов, однако при мелкомащтабных работах этот метод не является средством выявления на опоскованной площади локальных геохимических аномалий. В то же время картирование по донным осадкам позволяет судить как о геохимической специализации различных типов пород, так и о присутствии в районе поисков геохимических аномалий.

Результатом геохимического картирования в масштабе 1:200000—1:100000 являются геолого-геохимические карты прогноза, определяющие рациональное направление дальнейших поисковых работ на изученной территории. На этих картах в первую очередь должны быть оконтурены участки, которые, исходя из особенностей распределения аномальных содержаний элементов-индикаторов в донных осадках, заслуживают более детального изучения с целью выявления вероятных геохимических аномалий. Для районов, в которых проводилось геохимическое картирование по коренным породам, на картах выделяются также массивы и комплексы пород, которые по особенностям геохимической специализации являются перспективными на тот или иной тип оруденения и с этой точки зрения заслуживают более детального опоскования.

НА СТАДИИ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО КАРТИРОВАНИЯ И ПОИСКОВ В МАСШТАБЕ 1:50 000

Геохимические поиски в масштабе 1:50000 отличаются от работ масштаба 1:200000—1:100000 большей детальностью выполняемого геохимического картирования по донным осадкам (или коренным породам), а также постановкой на перспективных участках изучаемой территории, выделенных в процессе мелкомащтабных работ, площадной геохимической съемки с целью выявления первичных и вторичных геохимических ореолов рудных месторождений.

Комплексирование геохимических методов в этих случаях всецело определяется ландшафтно-геохимическими условиями района работ, в частности соотношением обнаженных и закрытых участков на площади проведения поисков. В соответствующих ландшафтно-геохимических условиях, исключающих эффективное использование литохимических методов (например, в заболоченных районах), на этом этапе поисковых работ в пределах перспективных участков могут проводиться биогеохимические поиски, а также используется гидрхимическое опробование.

В ряде случаев в процессе поисковых работ масштаба 1:50000 в пределах отдельных перспективных участков, вы-

деленных при проведении регионального геохимического прогнозирования, целесообразно детализировать поисковые работы до масштаба 1 : 25000— 1 : 10000.

Результатом геохимического картирования масштаба 1 : 50000 являются прогнозные геолого-геохимические карты соответствующего масштаба, на которых выделяются первичные и вторичные (в том числе биогеохимические и гидрогеохимические) геохимические аномалии, выявленные в процессе проведения поисков, а также массивы магматических пород, метаморфические и осадочные геологические комплексы, признанные потенциально перспективными по характеру геохимической специализации.

НА СТАДИИ ДЕТАЛЬНЫХ ПОИСКОВ

Геохимические поиски и съемка в масштабах 1 : 10000— 1 : 5000 проводятся с целью систематического геохимического изучения перспективных площадей, выделенных в процессе работ масштаба 1 : 50000 и частично 1 : 200000, и выявления всех развитых в пределах этих площадей первичных и вторичных геохимических аномалий.

В зависимости от ландшафтно-геохимических условий района производится комплексирование литохимических методов поисков по первичным и вторичным ореолам с биогеохимическим и гидрохимическим методами.

Результатом работ этой стадии являются структурно-геохимические карты масштаба 1 : 10000 и крупнее, на которых нанесены все выявленные аномалии и выделены наиболее перспективные участки для производства детальных исследований.

Последние на стадии детальных поисков заключаются в оконтуривании и всестороннем изучении выделенных первичных и вторичных геохимических аномалий в масштабе 1 : 2000 и крупнее с поверхности и по имеющимся горным выработкам и скважинам с целью их предварительной оценки.

Изучение вторичных аномалий в почвах и элювиально-делювиальных отложениях при этом сопровождается проходкой неглубоких шурфов или скважин с целью выяснения, является ли данная аномалия вторичным ореолом рассеяния рудного месторождения (или его эндогенного ореола).

Опробование выработок позволяет получить дополнительный материал для изучения природы аномалии и локализации вероятного оруденения.

Данные, полученные на основании изучения вторичных ореолов рассеяния, уточняются путем опробования вскрытых выработками или скважинами коренных горных пород и изучения эндогенных ореолов. Последнее особенно необходимо,

если обнаруженная в рыхлых отложениях аномалия обусловлена разрушением эндогенного ореола скрытых рудных тел.

Результатом заключительной части детальных геохимических поисков, являются геохимические планы ореолов соответствующего масштаба, а также их разрезы по горным выработкам или буровым скважинам, вскрывающим аномалию. На основании документации и анализа геохимических данных даются конкретные рекомендации по проведению горных работ или бурения для проверки выявленной аномалии и вскрытия рудного тела.

Следует подчеркнуть, что геохимические методы поисков на всех стадиях должны комплексироваться не только с геологическими наблюдениями, но также и с геофизическими исследованиями. Характер последних выбирается в зависимости от задач и масштабов поисков. При региональных исследованиях используются различные вариации аэрогеофизических методов. В процессе более детальных поисковых работ производится комплексирование геохимических исследований с разнообразными видами радиометрических и геофизических методов, которые имеются на вооружении геологической службы.

Геохимические методы с успехом применяются также в процессе разведки месторождений, в том числе при разведочных работах на эксплуатируемых месторождениях.

Основными задачами, решаемыми с помощью геохимических методов, на этой стадии геологоразведочных работ являются направление разведочных работ, поиски скрытого оруденения на флангах рудного поля и оценка перспектив рудности глубоких горизонтов. Осуществляются эти работы путем изучения эндогенных геохимических ореолов. Горно-разведочные выработки и буровые скважины подвергаются систематическому геохимическому опробованию. Полученные данные после соответствующей обработки позволят выяснить закономерности распределения химических элементов в эндогенных ореолах, рационально направлять разведочные выработки, а также прогнозировать скрытое оруденение.

II. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИ ГЕОХИМИЧЕСКИХ ПОИСКОВЫХ РАБОТАХ

Современный период в учении о поисках месторождений полезных ископаемых отличается широким развитием геохимических исследований, позволяющих на строго количественной основе подойти к решению ряда сложных проблем прикладной геологии, включая проблему научного прогноза и

поисков месторождений полезных ископаемых, в том числе месторождений, не выходящих на современную поверхность.

Резкое увеличение объема геохимической информации, являющееся следствием качественного и количественного совершенствования технических средств и методов исследования химического состава вещества, в свою очередь потребовало использования специального математического аппарата, без которого невозможно осмыслить и подвергнуть строгому научному анализу обширный цифровой материал, накапливаемый в процессе теоретических, и особенно прикладных геохимических исследований.

Основу методов математической статистики, используемых в геологии и геохимии так же, как и в других областях знания, составляет теория вероятностей. Таким образом, знакомство с основными положениями теории вероятностей является необходимой предпосылкой применения статистических методов, позволяющей правильно использовать закономерности математической статистики в приложении к анализу природных явлений.

При этом необходимо всегда иметь в виду, что использование статистических методов в геологии и геохимии на современном уровне состояния этой проблемы в первую очередь должно служить повышению достоверности и точности выводов, основанных на всестороннем анализе конкретного фактического материала, полученного у природы. Статистические методы не могут применяться без четкого представления о сущности геологических или геохимических задач, для решения которых предполагается их использование. Являясь мощным оружием в руках квалифицированного геолога или геохимика, математическая статистика может привести к грубым просчетами ошибкам при формальном ее использовании без учета всего комплекса природных факторов.

Важнейшим положением теории вероятностей, используемым математической статистикой, является понятие о функции распределения случайной величины. Функция распределения, являющаяся универсальной характеристикой случайной величины, позволяет дать полное математическое описание любой совокупности случайных величин, объединенных каким-либо общим признаком качественного или количественного характера. Поскольку совокупности, обладающие одинаковыми свойствами, имеют и равные функции распределения, последние могут использоваться как объективный критерий при оценке однородности или разнородности различных совокупностей.

При использовании методов математической статистики в геохимических исследованиях и поисковых работах полезным

является использование понятий о геохимической совокупности и геохимической выборке.

Геохимической совокупностью называется совокупность значений содержания химического элемента, отражающая статистические закономерности распределения этого элемента в конкретных природных образованиях. В практике исследованию подвергаются отдельные выборки из общей геохимической совокупности, содержащие ограниченное (конечное) число членов (результатов определения содержания химического элемента) и отвечающие понятию о «**геохимической выборке**».

В зависимости от статистического закона распределения случайной величины функция ее распределения описывается определенным числом и типом статистических параметров. Выявление закона (вида) распределения и вычисление параметров распределения случайной величины в исследуемой геохимической совокупности является первой и главной задачей статистической обработки геохимической информации. При этом, поскольку исследователь всегда имеет дело лишь с геохимическими выборками, с той или иной степенью достоверности представляющими изучаемую геохимическую совокупность, в процессе статистической обработки выборки могут быть получены лишь приближенные оценки (характеристики) соответствующих параметров распределения. Эти оценки параметров тем более отличаются от истинных, чем меньше объем геохимической выборки. Однако, возможность определения в каждом конкретном случае точности вычисленных оценок позволяет успешно использовать их для общей характеристики данной совокупности в целом. Таким образом, с помощью вычисленных оценок параметров распределения на основе известной функции распределения может решаться целый ряд геологических и геохимических задач, основанных на использовании закономерностей распределения химических элементов в природных образованиях. Ниже перечислены главнейшие из этих задач, имеющие прямое отношение к проблеме поисков месторождений полезных ископаемых.

1. Определение статистических оценок параметров распределения содержаний химических элементов с целью математического обоснования геохимических выводов, полученных в процессе исследования конкретных природных объектов.

2. Оценка колебания содержаний и определение максимальных (критических) содержаний элементов-индикаторов в пределах геохимического фона.

3. Выявление аномальных содержаний в исследуемых геохимических выборках.

4. Математическое обоснование поисковых геохимических критериев.

5. Обоснование геохимической общности или различия конкретных геохимических объектов при разработке поисковых критериев или проведении поисковых работ.

6. Выявление статистической зависимости между варьирующими геохимическими признаками, характеризующими определенный природный объект (задача корреляции и регрессии).

Решение поставленных, достаточно простых с точки зрения математической статистики, задач требует лишь элементарных знаний из области теории вероятностей и математической статистики.

Учитывая, что студенты знакомы с основными положениями теории вероятностей из курса высшей математики, в приведенных ниже примерах практического применения методов математической статистики в геохимии опущена характеристика элементарных статистических понятий.

Определение статистических оценок параметров распределения содержаний химических элементов в природных образованиях с целью обоснования геохимических выводов

1015
При исследовании конкретных геохимических выборок, характеризующих определенные природные образования, первым этапом статистического анализа является установление закона (вида функции) распределения содержаний химического элемента, определенных путем анализа соответствующих проб.

Распределению содержаний можно придать большую наглядность, выразив его графически. Для этого на оси X следует отложить в выбранном масштабе содержания, а по оси Y — соответствующие количества проб, имеющих данные содержания. Для наглядности полученные точки соединяются отрезками прямых. Такая фигура называется многоугольником распределения (полигоном). Распределение содержаний можно представить и в виде столбиковой диаграммы (гистограмма).

Предположим теперь, что мы увеличиваем число наблюдений. В этом случае, по мере увеличения числа наблюдений, и полигоны и гистограммы распределений будут все более приближаться к плавной кривой. Такая кривая будет являться пределом многоугольника распределения при неограниченном возрастании количества измерений. Этот предел называется кривой распределения рассматриваемой нами совокупности, а аналитическое выражение, задающее кривую в выбранной системе координат, называется функцией распределения, или законом распределения величины x .

С помощью функции распределения мы можем определить вероятность появления любой интересующей нас величины,

в том числе определить вероятность встречи и тех содержаний, которые не были установлены в изученной серии проб. Для этого достаточно вычислить соответствующую ординату кривой распределения. При этом не приходится производить сложные вычисления, так как специальные таблицы, в которых эти вычисления приведены, имеются во всех курсах математической статистики и теории вероятностей.

Каждый из статистических законов распределения характеризуется специфическим типом вариационной кривой и определенными параметрами, позволяющими всесторонне описать совокупность, распределенную в соответствии с данным законом. Из достаточно большого разнообразия вариационных кривых (рис. 1) в практике геохимических исследований наиболее часто встречаются кривые первых двух типов. Симметричная кривая I типа (гауссова кривая) характеризует нормальный закон распределения вероятностей, наиболее замечательной особенностью которого является равная вероятность положительных и отрицательных отклонений от среднего значения (рис. 2). Последнее, в случае нормального распределения, соответствует наиболее часто встречающемуся в данной геохимической совокупности содержанию (мода статистической кривой).

Параметрами нормального распределения являются среднее арифметическое μ , дисперсия σ^2 и среднее квадратичное отклонение σ . Уравнение, описывающее кривую нормального распределения, имеет вид:

$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

Случайная величина x может принимать любое значение в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Вся площадь, ограниченная сверху нормальной кривой, принимается равной единице. В этом случае вероятность того, что x находится между двумя определенными значениями a и a_1 , равна части площади под этой кривой, ограниченной ординатами точек a и a_1 , и выражается в долях единицы.

Одним из важнейших свойств нормального распределения, используемого в статистике, является математическая закономерность, позволяющая определить количество членов статистической совокупности, расположенных в интервале

$$\mu - z \cdot \sigma_x; \quad \mu + z \cdot \sigma_x, \quad (2)$$

где μ — средняя любой нормально распределенной величины;
 σ_x — ее стандартное отклонение;
 z — коэффициент, выбираемый в зависимости от нужной доверительной вероятности.

Например, интервал $\mu - \sigma_x$; $\mu + \sigma_x$ (3) охватывает 68,3% членов статистической совокупности;

$\mu - 2\sigma_x$; $\mu + 2\sigma_x$ (4) — соответственно 95,4% членов статистической совокупности;

$\mu - 3\sigma_x$; $\mu + 3\sigma_x$ (5) — соответственно 99,73% членов статистической совокупности.

На этом свойстве нормального распределения основано одно из важных положений математической статистики — так называемое правило «трех сигм»: размах колебаний любой нормально распределенной величины x не должен превышать с вероятностью $p = 0,9973$ (или 99,73%) утроенное среднее квадратическое (стандартное) отклонение этой величины σ_x . В соответствии с правилом «трех сигм» любая величина статистической совокупности, отклонение которой от среднего не превышает утроенное стандартное отклонение, считается практически вероятной.

На практике в процессе статистического анализа конкретных геохимических выборок используются приближенные оценки перечисленных параметров: оценка среднего арифметического (\bar{x}), оценка дисперсии (s^2) и оценка среднего квадратического отклонения (s) содержаний.

Таким образом, если мы хотим в статистической совокупности определить доверительный интервал колебания случайной величины x , в котором практически были бы заключены все значения x , необходимо пользоваться выражением $x - 3\sigma$; $x + 3\sigma$.

Конечно, выражение «все значения x » условно (не все, а 99,97% всех значений x). Чаще всего доверительные интервалы в статистических расчетах определяются с вероятностью 0,05, или, что то же самое, с 5%-ным уровнем значимости. Коэффициент z для 5%-ного уровня значимости составляет 1,96.

Нормальный закон распределения имеет очень важное значение в теории вероятностей и математической статистике. На основе этого закона составлен ряд статистических таблиц, широко используемых при статистическом анализе совокупностей, подчиняющихся нормальному закону.

Нормальное распределение вероятностей образуется в условиях, когда распределение случайной величины определяется достаточно большим количеством взаимонезависимых и примерно равнодействующих факторов. Однако, в природе подобные условия выполняются далеко не всегда. В результате эмпирические кривые, характеризующие распределение в конкретных геохимических выборках, в большинстве случаев имеют асимметричный вид, отличный от кривой нормального распределения. Естественно, что для описания этих распределений, существенно отличающихся от нормального,

формулы, основанные на нормальном законе, а также расчетные статистические таблицы, в основу которых положен нормальный закон распределения вероятностей, использованы быть не могут.

Наибольшее распространение среди статистических кривых асимметричного вида в геохимии имеют кривые II типа (см. рис. 1), отличающиеся левосторонней или так называемой положительной асимметрией. Характерным свойством подобных распределений является изменение формы кривой на симметричную при замене содержаний, составляющих распределение, их логарифмами. В результате оказалось возможным и в этом случае использовать все закономерности, основанные на функции нормального распределения. Только все статистические операции следует производить не с содержаниями, а с их логарифмами.

Таким образом, возникло представление о весьма важном для геохимических построений законе логарифмически-нормального (логнормального) распределения. Оценками параметров логнормального распределения (в отличие от распределений, подчиняющихся нормальному закону) являются среднее арифметическое, дисперсия и среднее квадратическое отклонение логарифмов содержаний (или других численных значений). Таким образом, логарифмически-нормальный закон распределения является янормальным законом распределения логарифмов содержаний.

Следует отметить, что нормальным и логнормальным законами распределения не исчерпывается разнообразие распределений химических элементов в природных объектах. Так, например, в совокупностях, отличающихся весьма неравномерным распределением содержаний, в ряде случаев имеют место вариационные кривые III типа (см. рис. 1) с положительной асимметрией, превышающей асимметрию логнормального распределения.

Наблюдаются также распределения, вариационная кривая которых отличается правосторонней (отрицательной) асимметрией. Описание распределений, характеризующихся вариационными кривыми III и IV типа (см. рис. 1), по сравнению с распределениями подчиняющимися нормальному или логнормальному закону, представляет значительно более сложную задачу, которая не рассматривается в настоящем курсе.

Таким образом, операции по статистической обработке конкретных геохимических выборок практически сводятся к проверке соответствия эмпирических распределений тому или иному закону распределения и вычислению оценок параметров распределения случайной величины x в данной геохимической совокупности. Известные оценки параметров распре-

деления в дальнейшем служат основой для решения ряда геологических и геохимических задач и оценки представительности выводов, основанных на анализе конкретной геохимической информации.

В качестве первого этапа математической обработки аналитического материала рекомендуется данные о содержаниях химических элементов в пробах разнести по интервалам содержаний, т. е. составить ряды распределений. При выборе интервала следует руководствоваться следующими условиями:

1) возможность без большой ошибки приравнять все значения содержания элемента в пробах, отнесенных к данному интервалу, среднему значению интервала;

2) для удобства обработки интервал содержаний следует выбрать возможно большим, однако не нарушая при этом первое условие.

Практика показывает, что в большинстве случаев наиболее рациональным является число интервалов содержаний порядка 10—15 (минимальное число интервалов — пять). Интервалы содержаний могут быть как одинаковыми, так и различными. Проще, разумеется, брать их одинаковыми.

В каждом интервале различают нижнюю и верхнюю границы: нижняя граница обозначается x_{\min} , верхняя — x_{\max} . Величина интервала $K = x_{\max} - x_{\min}$. Среднее значение каждого интервала определяется как полусумма его граничных значений.

$$x_1 = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}. \quad (7)$$

Рекомендуется интервал выбирать так, чтобы среднее его значение было представлено целой цифрой. Это облегчает вычисления.

Обычно границы интервалов содержаний последовательно записываются в столбец и производится подсчет проб по интервалам. При этом нужно иметь в виду, что нижней границей каждого интервала целесообразно ограничивать значения содержаний, численно равные граничному значению. Все значения, хотя бы незначительно превышающие верхнее граничное, включаются в следующий интервал. Например, имеем два интервала: 62—64 и 64—66. Все значения содержаний равные и меньше 64, но большие 62, включаются в первый интервал. Значения большие 64, но меньше или равные 66, включаются во второй интервал и т. д.

При подсчете содержаний пометки удобно делать в виде конверта. Сначала ставят четыре точки в виде прямоугольника (четыре пробы), соединяют их прямыми линиями, проводят две диагонали (еще шесть проб) и получают фигуру,

напоминающую обратную сторону конверта и соответствующую десяти пробам.

Общее число проб, включенных в каждый интервал, называется частотой данного интервала. Частное от деления частоты на общее число проб представляет собой относительную частоту (или частность) $W_1 = \frac{n_1}{N}$, где n_1 — число проб, включенных в данный интервал, N_1 — общее количество проб данной выборки. Сумма относительных частот всех интервалов должна равняться единице. Последнее может быть использовано для контроля за правильностью разности проб по интервалам содержания.

Ниже (табл. 1) в качестве примера приводится разность результатов опробования гранитов из различных районов земного шара на литий.

Т а б л и ц а 1

Разность результатов анализа гранитов на литий

L_i (г/т)	n (частоты)
5	1
10	7
15	13
20	20
25	15
30	26
35	8
40	9
45	12
50	8
55	4
60	8
65	1
70	6
75	2
80	1
95	2
100	3
120	3

149

Приведенная в качестве примера геохимическая выборка невелика по объему и, в случае необходимости получения особо точных данных, может быть обчислена без группировки. Однако, в целях упрощения расчета она, как будет показано ниже, может быть сгруппирована без существенного ущерба для точности.

Выберем величину интервала, равную 16 г/т. В результате получим восемь интервалов (табл. 2).

После составления ряда распределения вычисляют основные оценки параметров распределения содержаний элемента: средне-арифметическое содержание, выборочные дисперсии и среднее квадратическое (стандартное) отклонение содержаний.

Таблица 2

Интервалы	Средина интервала x_1	n	$x_1 \cdot n$	$\Delta x = \frac{x_1 - \bar{x}}{x_1}$	Δx^2	$\Delta x^2 \cdot n$	Δx^3	$\Delta x^3 \cdot n$
0—16	8	21	168	-29	841	17661	-24389	-512169
16—32	24	61	1464	-13	169	10309	-2197	-134017
32—48	40	29	1160	3	9	261	27	783
48—64	56	20	1120	19	361	7220	6859	137180
64—80	72	10	720	35	1225	12250	42875	428750
80—96	88	2	176	51	2601	5202	132651	265302
96—112	104	3	312	67	4489	13467	300763	902289
120	120	3	360	93	8649	25947	804357	2413171

$$N = 149 \quad \Sigma 5480$$

$$\Sigma 92317$$

$$\Sigma 3501289$$

Среднее арифметическое содержаний вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_1}{N}, \quad (8)$$

где x_1 — значения содержания элемента;

N — общее количество проб.

Для сгруппированных данных формула примет вид

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_n n_n}{N} = \frac{\Sigma x_1 n_1}{N}, \quad (9)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — средние значения интервалов содержаний;

n_1, n_2, \dots, n_n — частоты соответствующих интервалов;

N — общее количество проб, равное сумме частот всех интервалов.

Обращаясь к таблице 2, найдем

$$\bar{x} = \frac{5480}{149} = 36,77 \approx 37 \text{ г/т};$$

(обсчет несгруппированного ряда, представленного в таблице 1, дает $\bar{x} = 38 \text{ г/т}$).

Второй важной оценкой параметров распределения является оценка выборочной дисперсии, которая обозначается s^2 ;

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (10)$$

или, для сгруппированного ряда

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 n_i. \quad (11)$$

Среднее квадратическое (стандартное) отклонение s представляет собой корень квадратный из выборочной дисперсии. Выборочная дисперсия и стандартное отклонение характеризуют меру рассеивания содержаний элемента вокруг средней.

Из приведенного в табл. 2 примера

$$s^2 = \frac{92317}{148} = 623,76; s = 24,97.$$

Для характеристики относительного рассеивания содержаний в практике широко пользуются коэффициентом вариации, который показывает, насколько велико рассеивание по сравнению со средним значением. Коэффициент вариации вычисляется по формуле

$$V = \frac{s}{\bar{x}} 100. \quad (12)$$

Или для нашего примера

$$V = \frac{24,97}{37} \cdot 100 = 67,5\%.$$

На практике среднее содержание химических элементов определяется, как правило, по ограниченному числу проб, поэтому возникает необходимость в установлении точности вычисления среднего содержания.

В математической статистике для оценки точности среднего арифметического определяют его вероятностную ошибку, пользуясь выражением

$$\pm \lambda = \frac{zs}{\sqrt{N}}, \quad (13)$$

где $\pm \lambda$ — ошибка среднего арифметического, определенная с заданной вероятностью;

s — среднее квадратическое отклонение содержаний;

N — количество проб в выборке;

z — аргумент нормированной функции Лапласа, изменяющийся в зависимости от заданной вероятности, с которой определяют ошибку.

В практике вычисления ошибки среднего арифметического обычно ограничиваются 5%-ным уровнем значимости, что соответствует вероятности 0,95 (95%). В этом случае $z = 1,96$ или, округленно, $z = 2$.

$$\pm \lambda_{5\%} = \frac{2s}{\sqrt{N}}. \quad (14)$$

В приведенном примере

$$\pm \lambda_{5\%} = \frac{24,97}{149} = \frac{49,84}{12,2} = 4,09,$$

т. е. $x = 37 \pm 4 \text{ г/т}$.

Ошибка среднего арифметического, определенная с 5%-ным уровнем значимости, в данном случае позволяет судить, что для распределений лития с гранитах, аналогичных исследованному, вероятность появления средних содержаний более 41 г/т и менее 22 г/т составляет не более 5%.

Очень часто в практике поисковых и разведочных работ геологи еще пользуются оценками среднего арифметического содержания элементов, не имея представления об их истинной точности. При этом возможно составление ошибочных суждений и выводов, которые, будучи приняты на веру, могут оказать отрицательное влияние на направление поисковых работ.

Необходимость оценки точности вычисленных характеристик, в частности точности средних содержаний каких-либо элементов, при анализе результатов геохимических исследований может быть иллюстрирована на следующем примере.

В метасоматически измененных гранитах массива Майкуль (Ц. Казахстан) по 12 систематически отобраным пробам было определено среднее содержание тория ($\bar{x}_{\text{Th}} = 26 \text{ г/т}$) и меди ($\bar{x}_{\text{Cu}} = 52 \text{ г/т}$).

В информации об этой работе можно ограничиться только изложением полученных средних цифр, как это часто и делается, предоставив читателю самому судить о представительности сообщенных данных. Однако, легко показать, что таким образом можно ввести в заблуждение и себя и читателя в вопросе определения ценности публикуемой информации.

В табл. 3 приведены оценки параметров распределения тория и меди в апогранитах Майкульского массива.

Оценки параметров распределения содержаний тория и меди в биотит-амазонит-альбитовых апогранитах Майкульского массива ($N = 12$)

Элемент	Среднее арифметическое содержаний, г/т	Стандартное отклонение содержаний, г/т	Коэффициент вариации, %
горий	26	4,05	16
медь	52	72,6	140

По формуле (14) определим с вероятностью 0,95 (или, что то же, с 5%-ным уровнем значимости) ошибку вычисленного среднего арифметического:

$$\text{для тория } \pm \lambda_{5\%} = \frac{2 \cdot 4,05}{\sqrt{12}} = 2,3; \text{ для меди } \pm \lambda_{5\%} = \frac{2 \cdot 72,6}{\sqrt{12}} \approx 42,0$$

Таким образом, ошибка среднего арифметического содержания для тория ($\bar{x}_{\text{Th}} = 26 \pm 2,3$ г/т) составляет менее 10% относительных, в то время как для меди ($\bar{x}_{\text{Cu}} = 52 \pm 42$ г/т) относительная ошибка превышает 80%.

В 95 случаях из 100 \bar{x}_{Cu} в аналогичных выборках может колебаться от 10 до 92 г/т, что свидетельствует о малой достоверности полученной нами оценки среднего арифметического содержания меди в изученной породе. Причиной малой достоверности \bar{x}_{Cu} в данном случае является большая дисперсия (неравномерность) распределения содержаний меди в изученном массиве апогранитов ($V = 140\%$) и относительно малое количество отобранных проб*.

Если мы хотим получить более точную оценку среднего содержания меди в породе (хотя бы с относительной ошибкой $\pm 20\%$ или $\pm 30\%$), следует отобрать дополнительное количество проб. Пользуясь формулой (14) и зная оценку коэффициента вариации содержаний меди в апогранитах, легко вычислить необходимое количество проб в выборке.

При заданной относительной ошибке $\pm 20 \frac{\bar{x}}{\lambda} = 5$. Оценивая N на 5%-ном уровне значимости ($z_{5\%} = 1,96 \approx 2$), получим

$$N_{20\%} = \left(\frac{10V}{100} \right)^2 = \frac{V^2}{100} = \frac{140^2}{100} = \frac{19600}{100} = 196 \text{ проб.}$$

* Причиной высокой дисперсии распределения содержаний может быть также недостаточная точность (воспроизводимость) аналитического метода.

При заданной относительной ошибке $\pm 30\% \frac{\bar{x}}{\lambda} = 3,3$,

$$N_{30\%} = \left(\frac{6,6V}{100} \right)^2 = \frac{V^2}{220} = \frac{19600}{220} = 89 \text{ проб.}$$

Формула (14) при известном коэффициенте вариации позволяет быстро оценить оптимальное количество геохимических проб, необходимых для оценки параметров распределения с заданной точностью. Для элементов примесей в неизменяемых магматических и осадочных породах, большинство которых имеет коэффициент вариации содержаний не выше 60%, объем выборки 30 проб обычно позволяет оценить параметры распределения с относительной ошибкой не выше $\pm 20\%$.

Во избежании серьезных ошибок оценка точности вычисляемых геохимических параметров является совершенно необходимой при определении качества руд, выявленных в процессе поисковых работ. Как известно, перспективная оценка значимости рудопроявлений, обнаруженных при поисках, обычно производится по результатам анализа ограниченного количества проб на основании среднего арифметического, определенного с весьма малой точностью. Оценка вероятной ошибки среднего значения в этом случае значительно увеличивает объективность выводов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Следующие две характеристики используются для оценки принадлежности статистического ряда к нормальному или логнормальному закону распределения. Сюда относятся асимметрия и эксцесс распределения. Асимметрия является численной характеристикой, выражающей меру скошенности кривой т. е. отклонения ее от нормального вида вправо или влево. Величина ее вычисляется по формуле $A = \frac{m_3}{s^3}$, где m_3 — так называемый центральный выборочный момент третьего

порядка, определяющийся из выражения $m_3 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3}{N}$,

откуда
$$A = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3}{s^3 N} \quad (15)$$

Теоретически асимметрия кривой нормального распределения должна быть равна нулю.

В качестве характеристики большего или меньшего подъема, или понижения графика эмпирической кривой распределения, по сравнению с нормальной кривой, используется показатель, носящий название эксцесса $E = \frac{m_4}{s^4} - 3$.

В «нормальном» случае эксцесс равен нулю, так как для нормального распределения отношение $\frac{m_4}{s^4} = 3$.

$$m_4 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^4}{N}; \quad E = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^4}{s^4 N} - 3. \quad (16)$$

При построении многоугольника или гистограммы распределения мы можем определить, насколько они близки или далеки от симметрического вида, т. е. можем ориентировочно предположить, будет или нет кривая распределения, сглаживающая наш эмпирический многоугольник, относиться к типу нормальных кривых. Однако, подобная оценка является лишь качественной и может привести к ошибочному заключению.

Поэтому при определении соответствия данного распределения нормальному закону пользуются оценками асимметрии и эксцесса. Учитывая возможную колеблемость этих оценок, зависящую в первую очередь от количества проб, вычисляют, является ли отклонение A и E от нулевого значения случайным или значимым. Стандартное отклонение A и E вычисляется по формулам

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6}{N}}; \quad \sigma_E = 2 \sqrt{\frac{6}{N}}. \quad (17, 18)$$

Предположим, что вычисленные для имеющейся совокупности данных опробования фактические величины асимметрии и эксцесса соответственно равны A_1 и E_1 . Тогда, исходя из основного правила математической статистики (правило «трех сигм»), отклонения этих эмпирических величин от их теоретического нулевого значения в случае соответствия нормальному распределению (по абсолютной величине) не должны превосходить $3\sigma_A$ и $3\sigma_E$ (утроенного стандартного отклонения этих величин).

Таким образом, условиями нормальности распределения будут соблюдения неравенств

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{6}{N}}} \leq 3 \quad \text{и} \quad \frac{E}{2\sqrt{\frac{6}{N}}} \leq 3. \quad (19, 20)$$

Если эти условия соблюдаются, то можно считать, что имеющиеся асимметрия и эксцесс кривой не существенны, и

распределение подчинено нормальному закону. В учебниках математической статистики и теории вероятностей излагаются и другие, обычно более трудоемкие методы оценки соответствия распределений нормальному закону. При геохимических исследованиях проверка соответствия распределения содержаний нормальному закону часто показывает существенную положительную асимметрию, которая обычно может быть уже замечена при визуальной оценке табличных данных и четко выступает при построении кривой распределения. В этом случае изучаемое нами распределение не согласуется с нормальным законом и использовать его для статистического анализа оценки параметров распределения содержаний элемента нельзя (при четкой положительной асимметрии кривой распределения оценки дисперсии и стандартного отклонения содержаний можно и не вычислять).

В этом случае вычисляется среднее арифметическое логарифмов содержаний

$$\overline{\lg x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lg x_i \cdot n_i, \quad (21)$$

а также выборочная дисперсия и среднее квадратическое (стандартное) отклонение логарифмов содержаний

$$s_{\lg}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\lg x_i - \overline{\lg x})^2 n_i; \quad (22)$$

$$s_{\lg} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\lg x_i - \overline{\lg x})^2 n_i}. \quad (23)$$

Коэффициент вариации содержаний при логнормальном распределении определяется из выражения

$$V = (e^{\frac{M^2 \sigma^2}{\lg^2}} - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

для которого рассчитаны таблицы, исходящие из величины стандартного отклонения логарифмов.

С целью проверки соответствия распределения логнормальному закону асимметрия и эксцесс вычисляются по формулам:

$$A_{\lg} = \frac{\sum_{i=1}^N (\lg x_i - \overline{\lg x})^3 n_i}{N \cdot s_{\lg}^3}; \quad E_{\lg} = \frac{\sum_{i=1}^N (\lg x_i - \overline{\lg x})^4 n_i}{N \cdot s_{\lg}^4} - 3. \quad (25, 26)$$

Стандартное отклонение A_{lg} и E_{lg} вычисляется так же, как и при обработке статистического ряда содержаний.

Условием логнормального распределения будет соблюдение неравенств:

$$\frac{A_{lg}}{\sqrt{\frac{\sigma}{N}}} \leq 3; \quad \frac{E_{lg}}{2\sqrt{\frac{\sigma}{N}}} \leq 3. \quad (27, 28)$$

Таким образом, статистическими оценками параметров логнормального распределения являются:

$$\overline{\lg x}; \quad s_{lg}^2; \quad s_{lg}; \quad A_{lg}; \quad E_{lg}.$$

В приведенном выше примере асимметрия (скошенность) кривой распределения содержаний лития ясно видна уже при группировке выборки, исходя из частот интервалов содержаний. В подобных случаях оценку асимметрии содержаний можно было бы и не производить, а сразу после вычисления среднего арифметического содержаний переходить к операциям с логарифмами содержаний. Однако в качестве примера вычислим эту оценку:

$$s^3 = 12813; \quad A = \frac{350 \cdot 289}{12813 \cdot 149} = 1,8; \quad \frac{1,8}{\sqrt{\frac{6}{149}}} = \frac{1,8}{\sqrt{0,04}} = 9.$$

Как видим, распределение содержаний лития в гранитах имеет резкую положительную асимметрию, свидетельствующую, что исследуемое распределение не согласуется с нормальным законом.

С целью определения согласованности распределения содержаний лития в гранитоидах с логарифмически-нормальным законом и вычисления соответствующих оценок параметров распределения найдем десятичные логарифмы для крайних членов выборки, представленной в табл. 4. Это будут 0,6990 и 2,0792. Разность между этими значениями составляет около 1,4. Следовательно, если мы хотим получить сгруппированную выборку минимум из 8 интервалов, величина интервала должна быть принята равной 0,2 (табл. 4).

Таблица 4

Интервал $\lg x$	Средина интервала $\lg x_i$	n	$n \lg x$	$\Delta \lg x =$ $\lg x - \lg x_i$	$(\Delta \lg x)^2$	$(\Delta \lg x)^2 n$	$(\Delta \lg x)^3$	$(\Delta \lg x)^3 n$	$(\Delta \lg x)^4$	$(\Delta \lg x)^4 n$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,6—0,8	0,7	1	0,7	-0,79	0,62	0,62	-0,49	-0,49	0,39	0,39
0,8—1,0	0,9	7	6,3	-0,59	0,35	2,45	-0,21	-1,47	0,12	0,84

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,0—1,2	1,1	13	14,3	-0,39	0,15	1,95	-0,06	-0,78	0,02	0,26
1,2—1,4	1,3	35	45,5	-0,19	0,04	1,40	-0,01	-0,35	0,00	—
1,4—1,6	1,5	34	51,0	0,01	0,00	—	0,00	—	0,00	—
1,6—1,8	1,7	42	71,4	0,21	0,04	1,68	0,01	0,42	0,00	—
1,8—2,0	1,9	14	26,6	0,41	0,17	2,38	0,07	0,98	0,03	0,42
2,0—2,2	2,1	3	6,3	0,6	0,37	1,11	0,23	0,69	0,14	0,42
$N - 149 \sum 222,1$				$\sum 11,59$			$\sum 1,00$		$\sum 2,33$	

Вычислим оценки среднего арифметического дисперсии и стандартного отклонения логарифмов содержаний:

$$\overline{\lg x} = \frac{222,1}{149} = 1,49; \quad s_{1g}^2 = \frac{11,59}{149} = 0,0783; \quad s_{1g} = 0,280,$$

Заметим, что оценки параметров распределения лития, полученные по той же выборке без предварительной группировки, равны $\overline{\lg x} = 1,504$ и $s_{1g} = 0,256$, что практически не отличается от оценок, полученных по сгруппированной выборке.

Проведем проверку согласованности распределения логарифмов содержаний лития с нормальным законом:

$$s_{1g}^3 = 0,0219; \quad A_{1g} = \frac{-1,0}{0,219 \cdot 149} = -0,306;$$

$$\frac{-0,306}{\sqrt{\frac{6}{149}}} = \frac{-0,306}{0,2} = -1,52;$$

$$s_{1g}^4 = 0,0061; \quad E_{1g} = \frac{2,33}{0,0061 \cdot 149} - 3 = -0,443;$$

$$\frac{-0,443}{2 \sqrt{\frac{6}{149}}} = -1,102.$$

Как видим, асимметрия и эксцесс распределения логарифмов содержаний лития в гранитоидах не существенны, поскольку отношение оценок асимметрии и эксцесса к их стандартным отклонениям значительно меньше трех. Таким образом, распределение лития в гранитоидах удовлетворительно согласуется с логарифмически нормальным законом, что позволяет использовать оценки среднего арифметического, дисперсии и стандартного отклонения логарифмов содержаний лития в качестве оценок параметров распределения при статистических расчетах.

Ниже приводятся примеры вычисления вероятностных пределов колебания содержаний элементов в геохимической совокупности и вероятностей появления в данной геохимической совокупности содержаний больших или меньших, чем интересующее исследователя заданное содержание. Эти операции широко используются при характеристике геохимического фона и геохимической специализации геологических комплексов и должны быть освоены в первую очередь.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ КОЛЕБАНИЯ СОДЕРЖАНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ

В практике геохимического картирования и поисков часто приходится решать задачу оценки размаха колебания содержаний элемента-индикатора в данном типе пород.

Выше были рассмотрены основные параметры, характеризующие распределение содержаний элементов в различных геологических образованиях (среднее арифметическое, дисперсия, стандартное отклонение) и способы вычисления их оценок. В качестве дополнительной оценки целесообразно вычислить пределы колебаний содержаний элементов с вероятностью 0,01 для граничных значений. Этот параметр, являясь производным от основных параметров распределения, наглядно иллюстрирует дисперсию содержаний интересующих элементов.

При этом используются следующие уравнения:

$$a_{\min}^{\max} = \bar{x} \pm ts \text{ для нормального закона; } \quad (29)$$

$$\lg a_{\min}^{\max} = \overline{\lg x} \pm t_{\lg} s \text{ для логарифмически нормального закона.} \quad (30).$$

a_{\max} и a_{\min} представляют собой оценки минимального и максимального граничных значений содержания данного элемента в выборке, определяемые с заданной вероятностью (или логарифмы содержаний в случае логнормального распределения).

\bar{x} ; $\overline{\lg x}$ — соответственно средние арифметические содержаний и логарифмов содержаний;

s , s_{\lg} — стандартные отклонения содержаний и логарифмов содержаний.

Теоретическое значение коэффициента t для односторонней вероятности 0,01 равна 2,33. Значения t для конечных выборок объемом менее 500 проб, существенно отличающиеся от теоретического, находятся из таблиц критерия Стьюдента, имеющихся во всех учебниках математической статистики и теории вероятностей.

Определим размах колебания содержаний лития с вероятностью 0,01 для граничных значений в приведенной выше совокупности, представляющей распределение лития в гранитах различных континентов.

Оценками параметров логарифмически-нормального распределения лития являются $\overline{\lg x} = 1,49$ и $s_{\lg} = 0,280$.

$\lg a = 1,49 \pm t 0,280$; t для выборки из 149 проб = 2,35.

$\lg a = 1,49 + 2,35 \cdot 0,280 = 1,49 \pm 0,658 = 2,148$.

Из таблицы антилогарифмов находим $a_{\max} = 141$ г/т, $\lg a_{\min} = 1,49 - 0,658 = 0,832$, откуда $a_{\min} = 6,79 \approx 7$ г/т.

Размах колебаний 7—141 г/т.

Таким образом, мы вычислили, что в совокупности, представляющей граниты различных континентов, на каждую сотню проб лишь одна—две могут содержать меньше, чем 7 г/т и более, чем 141 г/т лития.

На практике вероятностные пределы колебания содержания элементов в геохимических совокупностях используются для выбора критериев отличия разнородных геологических комплексов. Рассмотрим это также на примере лития.

Для одного из регионов Сибири были определены колебания содержаний лития с вероятностью 0,01 для граничных значений для двух типов развитых в пределах этого региона гранитоидов. Граниты одного из этих типов (колебания содержаний лития 20—500 г/т) являются потенциально-перспективными с точки зрения связанных с ними месторождений редких элементов; граниты другого типа (колебания содержаний лития 5—50 г/т) практически безрудные. В данном случае в качестве критерия может быть выбрано содержание 50 г/т, вероятность появления которого в безрудных гранитах составляет всего одну—две пробы на сто.

Для того, чтобы не спутать перспективные гранитоиды с безрудными, нужно знать также вероятность появления содержаний лития 50 г/т и более в пределах потенциально перспективных комплексов гранитоидов.

Вычисление вероятности появления содержаний, больших (меньших) заданного, производится при помощи интегральной функции Лапласа $\Phi(z)$, таблицы которой также имеются во всех учебниках математической статистики и теории вероятностей. При этом используются следующие формулы:

$$z = \frac{a - \bar{x}}{s} \quad \text{и} \quad P_{x > a} = 0,5 - \Phi_{(z)}, \quad (31, 32)$$

где a — заданное содержание, интересующее исследователя (или логарифм заданного содержания при логарифмически нормальном распределении)

\bar{x} и s — соответственно оценки среднего арифметического и стандартного отклонения содержаний (или логарифмов содержаний);

$\Phi(z)$ — интегральная функция Лапласа;

$P_{x>a}$ — вероятность появления значений содержаний больших, чем заданное a .

Для нашего примера заданным содержанием является 50 г/т. В связи с тем, что литий в гранитах распределен логарифмически-нормально, для расчета следует использовать оценки параметров распределения логарифмов содержаний лития в потенциально-перспективных гранитоидах ($\lg x = 2,005$ и $s_{\lg} = 0,296$).

$$\lg 50 = 1,699; z = \frac{1,699 - 2,005}{0,296} = -1,04.$$

Из таблиц интегральной функции Лапласа находим

$$\Phi(z) = - (0,351), \text{ отсюда } P_{x>50} = 0,5 - (-0,35), P_{x>50} = 0,85.$$

Таким образом, из ста проб в исследованной геохимической совокупности 85 проб должно содержать 50 г/т лития и более, т. е. в каждой серии из десяти проб, отобранных по гранитному массиву в процессе картирования, должно быть встречено несколько этих критических для непродуктивных гранитов содержаний лития. Выбранный критерий является достаточно контрастным (1 проба на сто и 85 проб на сто) и может быть рекомендован для составления прогнозной карты.

Аналогичным образом решается задача выявления аномальных содержаний элементов-индикаторов, вошедших по результатам опробования в ту или иную геохимическую выборку. С точки зрения математической статистики, аномальным является каждое содержание химического элемента, не принадлежащее к данной геохимической выборке. Присутствие подобных содержаний в геохимической выборке является случайным и эта случайность может быть однозначно обоснована путем статистического анализа, который в данном случае, заключается в оценке вероятности появления «аномального» содержания в рассматриваемой геохимической совокупности.

В процессе статистического анализа геохимической выборки проверке в отношении «аномальности» должны подвергаться максимальные встреченные значения содержаний, если они отделены от соседнего более низкого содержания существенным разрывом.

Оценка вероятности появления в данной совокупности подозреваемого «аномального» содержания производится по намеченной выше схеме. Аномальными считаются пробы, произведение вероятности появления которых на количество проб в выборке ($P N$) значительно меньше единицы.

Предположим, что в исследованной нами ранее выборке имеется еще одно 150-е значение содержания лития, равное 500 г/т. Между этим значением и следующим за ним 120 г/т существует значительный разрыв, который позволяет предполагать, что содержание 500 г/т лития является аномальным.

Включение содержания 500 г/т очень незначительно изменит оценки параметров распределения лития в приведенной ранее выборке ($\lg x = 1,50$; $s_{\lg} = 0,296$), что связано с ее довольно значительным объемом (150 членов).

Однако оценка вероятности появления содержания 500 г/т в данной совокупности однозначно указывает на его аномальный характер.

$$\lg 500 = 2,699; \quad z = \frac{2,699 - 1,50}{0,286} = 4,0; \quad \Phi_{(z)} = 0,4999;$$

$$P_{x>a} = 0,5 - 0,4999 = 0,0001.$$

Таким образом, вероятность появления содержаний 500 г/т и более в данной совокупности составляет всего одну пробу на десять тысяч. Произведение $PN = 0,015$ значительно меньше единицы, что свидетельствует об аномальном характере содержания 500 г/т лития, не свойственного данной геохимической выборке.

Проверим теперь, является ли аномальным для рассматриваемой геохимической выборки содержание 150 г/т лития.

$$\lg 150 = 2,176; \quad z = \frac{2,176 - 1,49}{0,280} = 2,45; \quad \Phi_{(z)} = 0,4928;$$

$$P_{x>a} = 0,5 - 0,4928 = 0,0072.$$

Вероятность появления проб с содержанием 150 г/т лития и более в данном случае оценивается около семи проб на тысячу. Произведение $PN = 1,06$. Таким образом, содержание лития 150 г/т для изученной выборки, содержащей 149 проб, не является аномальным (теоретически может быть встречена одна проба с таким содержанием) и, то что оно не было встречено в данном конкретном примере, объясняется случайностью отбора проб.

Формулы (29, 30) используются также для оценки с заданной вероятностью пределов колебания содержаний элементов-индикаторов в пределах геохимического фона.

Коэффициент t определяется, исходя из заданной вероятности, с которой желательно произвести оценку минимального и максимального отклонения от среднего значения фонового содержания.

При этом максимальное значение фонового содержания, определяемое с вероятностью от 0,05 до 0,003, в практике поисковых работ обычно используется в качестве поискового критерия (так называемое «минимально-аномальное содержа-

ние»). Следует подчеркнуть, что выбор уровня значимости оценки уклонения в значительной мере определяется объемом выборок, отбираемых в процессе геохимического опробования.

Так, например, при поисках эндогенных геохимических ореолов, обычно осуществляемых путем отбора серий проб, включающих от нескольких десятков до первых сотен проб, целесообразно максимальное фоновое содержание оценивать с вероятностью 0,05 (один случай на 20 проб) или с вероятностью 0,01 (один случай на 100 проб), что исключит возможность пропуска слабых аномалий. При систематическом опробовании рыхлых отложений, когда число проб в ряде случаев измеряется тысячами, максимальные фоновые содержания должны оцениваться с вероятностью 0,001. Соответственно теоретическое значение критерия t изменяется от 1,65 (для $P=0,05$) до 2,33 (для $P=0,01$) и 3,0 (для $P=0,001$) *. Для всесторонней характеристики фоновой совокупности бывает полезным оценивать максимальные значения для всех трех вероятностей (табл. 5).

Таблица 5

Оценки локальных параметров распределения бериллия и лития в неизмененном породе, вмещающих редкометалльные месторождения (геохимический фон), в пределах двух регионов

Район и тип пород	Элемент	Среднее арифметическое		Стандартное отклонение		Максимальное фоновое содержание с вероятностью		
		содерж. г/т	логарифмов со-держаний	содерж. г/т	логарифмов со-держаний	0,05	0,01	0,001
Ц. Казахстан Кварц-хлоритовые сланцы (40 проб)	Be*	2	—	0,71	—	3,2	3,6	5,0
	Li	63	1,807	—	0,095	92	107	126
В. Забайкалье Метаморфические сланцы и песчаники (40 проб)	Be	3	0,357	—	0,217	5,5	7,0	8,0
	Li	35	1,500	—	0,200	68	92	126

* Значения для малых выборок (менее 30), как уже отмечалось, определяются из таблиц — критерия Стьюдента.

* Согласуется с нормальным законом распределения (прочие с лог-нормальным).

В практике геохимического картирования и поисков с целью определения общности или различия тех или иных геологических образований часто приходится сравнивать выборки, отобранные по литологически близким типам пород. При этом устанавливается существенность или несущественность различия в средних и дисперсиях, которое имеет место в сравниваемых выборках. Без такого сравнения можно ошибочно посчитать разнородными выборки, различия между которыми являются случайными, незначущими и, наоборот, оценить, как аналогичные, выборки, между которыми имеются хотя и незначительные, но существенные различия.

Для того чтобы сравнить средние двух выборок, первоначально устанавливают однородность дисперсий s_1^2 и s_2^2 (или s_{1lg}^2 и s_{2lg}^2). Для этого используют так называемый критерий Фишера — F , таблицы критических значений которого для 5 и 1%-ного уровня значимости имеются во всех учебниках математической статистики и теории вероятностей.

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (\text{в числителе всегда берется большая дисперсия}).$$

Для каждой выборки определяется число степеней свободы, равное числу проб минус единица ($k = N - 1$)

Если полученное значение F меньше, чем найденное в таблице для заданного уровня значимости, расхождение между дисперсиями является незначущим.

В последнем случае приступают к сравнению средних \bar{x}_1 и \bar{x}_2 (или $\lg \bar{x}_1$ и $\lg \bar{x}_2$). Для этого вычисляют значение критерия Стьюдента, пользуясь выражением

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N} + \frac{s_2^2}{N}}}. \quad (35)$$

Если вычисленное значение t превышает 1,96, то различие между средними считается существенным (что соответствует 5%-ному уровню значимости). В противном случае гипотеза о различии между сравниваемыми средними отвергается.

Доказанное равенство дисперсий и средних обычно принимается как показатель однородности сравниваемых выборок.

В практике геолого-поисковых и разведочных работ, а также в геологической литературе до последнего времени отмечаются случаи, когда серьезные теоретические или практические выводы делаются на основании ограниченного количества аналитических данных или даже с использованием

единичных определений. При этом исследователь, не учитывая случайный характер используемых им аналитических данных, часто может сделать неправильный или малодостоверный вывод, даже не подозревая, что он совершает ошибку. Поясним это на конкретных примерах.

При изучении распределения тантала в слюдах из пегматитов Восточного Забайкалья с целью обоснования геохимических критериев поисков танталосных пегматитов в одном из пегматитовых месторождений были оценены параметры распределения Та в мусковите и биотите (табл. 6).

Таблица 6

Оценки параметров распределения тантала в биотите и мусковите из пегматитов (Вост. Забайкалье) *

Слюда	Кол-во проб	Среднее арифметическое		Дисперсия логарифмов содержан.	Стандартное отклонен. логарифм. содержаний	Кэфф. вариаций содерж., %
		содерж. г/г	логарифм. содержан.			
Биотит	10	55	1,600	0,205	0,453	59
Мусковит	12	37	1,416	0,190	0,436	55

Учитывая, что на поздних стадиях пегматитообразования биотит замещается мусковитом, можно (основываясь на средних содержаниях тантала в слюдах) сделать заключение о выносе тантала в процессе мусковитизации биотита и даже предположить, что этот вынос сопровождается образованием колумбита-танталита, характерного для пегматитов, содержащих мусковит. Однако будут ли эти выводы, исходящие из впечатляющей разницы в определенном нами среднем содержании тантала в биотите и мусковите, достаточно обоснованы фактическим материалом? Действительно ли разница в 18 г/т тантала в данном случае является существенной, обусловленной различным характером распределения элемента в биотите и мусковите?

Оценка существенности различия в распределении тантала в мусковите и биотите в данном случае также может быть произведена при помощи F — критерия Фишера и критерия Стьюдента по формулам (34) и (35).

* Закон распределения логнормальный.

Оценка существенности различия в распределении тантала в биотитах и мусковитах из пегматитов (Вост. Забайкалье)

Слюда	<i>F</i> -критерий Фишера (5%)		<i>t</i> -критерий Стьюдента (5%)	
	из выборки	табличное значение	из выборки	теоретическое значение
Биотит (<i>N</i> —10)				
Мусковит (<i>N</i> —12)	1,08	2,90	1,0	1,96

Как видно из табл. 7, вычисленные значения *F* и *t* значительно ниже теоретических (с 5%-ным уровнем значимости), что позволяет оценить наблюдаемые различия между средними и дисперсиями распределения тантала в биотитах и мусковитах как не существенные. Они обусловлены случайностью отбора. Таким образом, имеющиеся в нашем распоряжении данные недостаточны для доказательства выноса тантала при мусковитизации биотита, хотя и противоположного вывода, в данном случае, в связи с недостаточным количеством проб сделать нельзя. Учитывая, что при относительной ошибке средних, не превышающей $\pm 20\%$, представительность выводов значительно повысится, можно, пользуясь формулой (14), оценить с 5%-ным уровнем значимости оптимальное количество проб, которое необходимо проанализировать для достижения требуемой точности среднего арифметического. Для биотита это оказывается 35 проб, а для мусковита — 30 проб.

Ошибки аналогичного рода достаточно часто имеют место в процессе опробования месторождений, отличающихся весьма неравномерным распределением полезного компонента. При сравнении подобных объектов несущественные различия в средних арифметических, обусловленные естественной случайностью отбора проб, могут быть приняты за существенные с вытекающей отсюда ошибочной оценкой того или иного объекта. Примером в данном случае могут служить три рудопроявления ртути, одно из которых на стадии поисковых работ было оценено ошибочно (табл. 8).

Несмотря на кажущееся резкое различие средних содержаний в рассматриваемом случае также отсутствуют основания для того, чтобы признать распределение ртути в исследованных рудопроявлениях существенно различным. Подоб-

Оценки параметров распределения ртути в трех месторождениях локализованных в известняках Pz (закон распределения — логнормальный)

Рудопроявления	Кол-во проб	Среднее арифметическое		Дисперсия логарифмов	Стандартное отклонение логарифмов содержаний
		содержаний %	логарифмов содержаний		
I	150	0,24	-0,830	0,210	0,46
II	20	0,09	-1,097	0,370	0,61
III	60	0,16	-0,950	0,230	0,48

ный вывод может быть сделан на основании статистического сравнения различия дисперсии и среднего арифметического логарифмов содержаний (табл. 9).

Таблица 9

Оценка существенности различия в распределении ртути в трех месторождениях, локализованных в известняках

Рудопроявления	F — критерий Фишера (1%)		t — критерий Стьюдента	
	из выборки	табличное значение	из выборки	теоретическое значение (%)
I—II	1,77	2,00	1,84	1,96
I—III	1,10	1,60	1,67	1,96

В обоих случаях теоретические значения F — критерия Фишера, а также критерия Стьюдента превышают эмпирические оценки, полученные из выборок, что свидетельствует о несущественности наблюдаемых различий. Характерно, что отбор дополнительного количества проб (100 проб) по второму объекту позволил уточнить среднее содержание ртути, которое повысилось до 0,19. Таким образом, отрицательная оценка рудопроявления, проведенная без соответствующей математической обработки данных опробования, в данном случае оказалась преждевременной и необъективной.

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ И ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

Кроме описанного выше аналитического метода определения функции и оценок параметров распределения данных

геохимических исследований существуют также графические методы, из которых наиболее удобен способ вероятностного трафарета, впервые примененный в геохимии Н. К. Разумовским.

На этом трафарете по оси абсцисс отложены содержания элементов: внизу в линейном масштабе, а наверху — в логарифмическом. По оси ординат откладываются накопленные относительные частоты, которые получаются путем суммирования частот последовательно по возрастанию интервала содержания. Линия, соединяющая отложенные на вероятностном трафарете точки, представляет собой график накопленных частот.

Прямолинейный характер этого графика свидетельствует о нормальном (если содержания отложены в линейном масштабе) или логарифмически-нормальном (содержания отложены в логарифмическом масштабе) распределении данных наблюдений.

После того как установлена функция распределения, графически можно определить основные оценки параметров распределения: среднее арифметическое (\bar{x}) и стандартное отклонение (s).

Для иллюстрации техники графических построений рассмотрим ранее разобранный С. В. Григоряном пример («Разведка и охрана недр», № 2, 1963), характеризующий распределение в гранитах содержаний сравнительно легкоизвлекаемых форм урана, так называемого «подвижного урана».

Распределение урана в гранитах характеризуется следующими частотами (табл. 10).

Таблица 10

Интервалы содержаний (по арифметической прогрессии), $n \cdot 10^{-5}\%$	Частоты	Накопленные частоты	Интервалы содержаний (в геомет. прогрессии)* $n \cdot 10^{-5}\%$	Частоты	Накопленные частоты
до 2	16,129	16,129	до 1	2,127	2,127
2—4	25,806	41,935	1—2	13,776	15,903
4—6	16,129	58,064	2—4	24,468	40,371
6—8	17,204	75,268	4—8	32,977	73,348
8—10	10,752	86,020	8—16	21,276	94,624
10—12	5,376	91,396	16—32	4,255	98,879
12—14	1,075	92,471	32—64	1,063	99,942
14—16	2,688	95,159	—	—	—
16—18	2,688	97,847	—	—	—
18—20	1,075	98,922	—	—	—
20—22	1,075	99,997	—	—	—

* Выделение интервалов содержаний в геометрической прогрессии равнозначно выделению интервалов логарифмов содержаний в арифметической прогрессии.

Сумма частот всех интервалов содержаний (накопленная частота последнего интервала содержаний) равна 100%. Это может быть использовано для проверки правильности вычислений.

В рассмотренном примере функция распределения содержаний урана согласуется с логарифмически нормальным законом, на что указывает прямолинейный характер графика, построенного в логарифмическом масштабе.

По кумулятивным графикам можно помимо функции распределения графически определить также:

1) Оценки параметров распределения — среднее арифметическое и стандартное отклонение. В нашем случае среднее арифметическое логарифмов содержаний будет соответствовать точке на графике накопленных частот с ординатой 50%. Величина среднего квадратического отклонения в масштабе равна абсциссе, соответствующей накопленной частоте 84,3% (значение вероятности среднего квадратического отклонения при одностороннем уровне значимости) минус среднее (накопленная частота 50%);

2) Вероятность появления в данной совокупности содержаний больше заданного. Определение производится по формуле $P = 100 - \alpha$, где α — накопленная частота, соответствующая заданному содержанию.

Поставленная задача имеет прямое отношение к методике определения аномальных концентраций с различными уровнями значимости. Для определения аномальных концентраций по существу следует решить задачу, обратную поставленной выше. Так, например, для определения минимального аномального содержания с 1%-ным односторонним уровнем значимости по кумулятивному графику достаточно отыскать значение абсциссы, соответствующей кумулятивной частоте 99%, для 5%-ного уровня значимости — кумулятивной частоте 95% и т. д. *

Для рассмотренного нами примера величины аномальных содержаний урана для 1,5 и 10%-ных уровней значимости, как показало графическое определение, равны соответственно $22 \cdot 10^{-5}\%$, $12 \cdot 10^{-5}\%$; $9,5 \cdot 10^{-5}\%$ (см. рис. 3).

Таким образом, графический метод определения функции и оценок параметров распределения данных наблюдения является весьма простым. По сравнению с описанным выше аналитическим способом, графический является менее точным, поэтому аналитический способ должен применяться в качестве контрольного, а также при необходимости получения точных значений интересующих величин.

* Нужную кумулятивную частоту можно определить по формуле $\alpha = 100 - P$, где P — заданный уровень значимости, %.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ВАРЬИРУЮЩИМИ ВЕЛИЧИНАМИ (КОРРЕЛЯЦИЯ)

При геохимических исследованиях часто возникает задача определения связи между различными варьирующими величинами, в частности, между содержаниями различных элементов в тех или иных геологических образованиях.

Корреляционная зависимость может быть прямолинейной (линейной) или криволинейной. В первом случае изменение одной из исследуемых величин сопровождается прямопропорциональными изменениями другой. При криволинейной корреляции условие прямопропорциональной зависимости нарушается, и между связанными случайными величинами имеет место более сложная зависимость.

Мерой зависимости между случайными величинами x и y является коэффициент корреляции ρ . Однако использование коэффициента корреляции в качестве меры зависимости оправдано лишь тогда, когда доказано, что случайные величины x и y распределены по одному закону: нормальному или логнормальному. Коэффициент корреляции колеблется от -1 до ± 1 . Знак плюс свидетельствует о положительной корреляционной связи, означающей, что возрастание одной из сравниваемых величин сопровождается возрастанием другой. В случае отрицательной корреляционной связи (знак минус) возрастание (убывание) одной из величин сопровождается убыванием (возрастанием) другой. Чем ближе коэффициент корреляции к единице, тем больше сила корреляционной связи между зависимыми величинами.

В практике геохимических исследований в силу ограниченности числа членов выборки вычисляется не истинный коэффициент корреляции ρ , а его оценка r . Последняя может быть вычислена по формуле

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y},$$

где

$$s_x = \sqrt{(\overline{x^2}) - (\bar{x})^2};$$

$$s_y = \sqrt{(\overline{y^2}) - (\bar{y})^2}.$$

Приведенная формула применима в случае нормального распределения данных наблюдения. В случае логнормального распределения в указанные формулы вместо значений x_i , \bar{x} , y_i , \bar{y} — соответственно входят $\lg x_i$, $\overline{\lg x}$, $\lg y_i$, $\overline{\lg y}$.

В качестве примера рассмотрим вычисление коэффициента корреляции между содержаниями калия и рубидия в трахитах. Распределение этих элементов в трахитах нормальное. В табл. 11 приведены содержания калия и рубидия в 12 пробах трахита и ход вычислений.

Расчет коэффициента корреляции

Содержание калия, % x	Содержание рубидия, г/т y	x^2	y^2	xy
3,3	100	10,89	10000	330
3,6	250	12,96	62500	900
3,9	150	15,21	22500	585
4,1	150	16,81	22500	615
4,2	300	17,64	90000	1260
4,2	350	17,64	122500	1470
4,4	450	19,36	202500	1980
4,6	150	21,16	22500	600
4,6	450	21,16	202500	2070
4,5	400	20,25	160000	1800
5,0	350	25,00	122500	1750
5,2	500	27,04	250000	2800
51,6	3600	225,12	1290000	16050

$$\bar{x} = \frac{51,6}{12} = 4,3; \quad \bar{y} = \frac{3600}{12} = 300;$$

$$(\bar{x}^2) = \frac{225,12}{12} = 18,76; \quad (\bar{y}^2) = \frac{1290000}{12} = 107500;$$

$$\bar{xy} = \frac{16050}{12} = 1337,5; \quad s_x = \sqrt{18,76 - 18,49} = \sqrt{0,27} = 0,52;$$

$$s_y = \sqrt{107500 - 90000} = \sqrt{17500} = 132,3;$$

$$r = \frac{1337,5 - 1290}{0,52 \cdot 132,3} = \frac{47,5}{68,793} = + 0,69.$$

После того как вычислен выборочный коэффициент корреляции, нужно оценить его значимость. Это делается по таблицам, содержащим критические значения коэффициента корреляции для различных степеней свободы $f = n - 2$, где n — количество проб. Подобные таблицы имеются в приложениях к учебникам и руководствам по математической статистике. Для нашего примера $f = 12 - 2 = 10$.

Табличное критическое значение коэффициента корреляции для 5%-ного уровня значимости при $f = 10$ равно 0,576, что меньше вычисленного нами. Следовательно, положительную корреляционную связь содержаний калия и рубидия можно считать доказанной.

ПОРЯДКОВАЯ (РАНГОВАЯ) КОРРЕЛЯЦИЯ

Как известно, при геохимических поисках месторождений полезных ископаемых широко применяются полуколичественные анализы и, в частности, полуколичественный спектральный

анализ. Данные такого анализа в силу дискретности не подчиняются нормальному (логнормальному) закону, поэтому описанная выше методика к ним обычно не применима.

Для выяснения корреляционной зависимости между содержаниями различных элементов по данным полуколичественного анализа может быть использована методика вычисления коэффициента так называемой порядковой, или ранговой корреляции.

Эта методика отличается простотой вычислений и ее применение не ограничено законом распределения данных наблюдения. Для примера рассмотрим порядок вычисления коэффициента порядковой корреляции между содержаниями свинца и цинка в эндогенных ореолах вокруг полиметаллических рудных тел.

Для расчета в первую графу таблицы заносятся номера проб по журналу опробования, во вторую — содержание любого из интересующих нас двух элементов (в нашем примере — свинца). Затем в графе 3 пробы нумеруются по возрастанию содержания рассматриваемого элемента (свинца) от 1 (проба с минимальным содержанием элемента) до n , где n — количество проб, участвующих в подсчете.

В случае, когда встречаются несколько проб с одинаковым содержанием, что весьма характерно для полуколичественного спектрального анализа, в силу дискретности данных последнего каждой из них присваивается одинаковый порядковый номер, равный среднему арифметическому из предварительных номеров. Например, из приведенных в табл. 12 значений содержания в трех пробах (№№ 1, 6, 8) с предварительными порядковыми номерами 2, 3 и 4 отмечается одинаковое содержание (0,01—0,03%) свинца. Среднее арифметическое из них, равное $3 \frac{(2+3+4)}{3}$, и будет исправленным порядковым номером каждой из них (графа 4).

Таблица 12

№№ проб.	Содержание свинца, %	Порядковый номер		Содержание цинка, %	Порядковый номер		Разность порядковых номеров Δ	Квадрат разн. Δ^2
		предварительный	исправленный		предварительный	исправленный		
1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0,01—0,03	4	3	0,03—0,1	8	8,5	5,5	30,25
2	0,03—0,1	9	9	0,03—0,1	9	8,5	0,5	0,25
3	0,03	5	6,5	0,3	11	11	4,5	20,25

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	1,0	12	12	1,0	12	12	0	0
5	0,03	6	6,5	0,03	7	6,5	0	0
6	0,01—0,03	3	3	0,01	3	2,5	0,5	0,25
7	0,1	10	10,5	0,01	4	4	6,5	42,25
8	0,01—0,03	2	3	не обн.	1	1	2,0	4,0
9	0,03	7	6,5	0,01—0,03	5	5	1,5	2,25
10	0,03	8	6,5	0,03	6	6,5	0	0
11	0,1	11	10,5	0,1	10	10	10,5	0,25
12	0,01	1	1	0,01	2	2,5	1,5	2,25
							$\Sigma(\Delta^2)$	102

Аналогичным образом определяются порядковые номера для другого элемента — цинка (графы 6 и 7). Затем вычисляются разности порядковых номеров (графа 8) и их квадраты (графа 9). Коэффициент порядковой корреляции определяется по формуле

$$r_n = 1 - \frac{6 \Sigma(\Delta^2)}{n(n^2 - 1)},$$

где

$\Sigma(\Delta^2)$ — сумма квадратов разностей порядковых номеров;
 n — количество проб, участвующих в подсчете.

Однако, в рассмотренном нами примере имеют место повторения содержаний, поэтому формула примет другой вид:

$$r_n = 1 - \frac{6[\Sigma(\Delta^2) + T_x + T_y]}{n(n^2 - 1)}, \quad (\text{Юл и Кэндэл, 1960})$$

где T_x и T_y — соответствующие поправки на повторяющиеся содержания каждого из рассматриваемой пары элементов. Эти поправки определяются выражением

$$T_x = \sum_1^i \frac{[t_1^3 - t_1]}{12}.$$

В рассматриваемом нами примере для свинца повторение установлено для трех содержаний ($i = 3$): 0,01 — 0,03 (в трех пробах $t = 3$), 0,03 ($t = 4$), 0,01 ($t = 2$).

$$T_x = \frac{(3^3 - 3) + (4^3 - 4) + (2^3 - 2)}{12} = \frac{94}{12} \approx 8.$$

Для цинка аналогичным способом получили

$$T_y = \frac{(2^3-2) + (2^3-2) + (2^3-2)}{12} = \frac{18}{12} = 1,5.$$

Величина коэффициента порядковой корреляции для нашего примера с учетом указанных поправок будет равна:

$$r_n = 1 - \frac{6(102 + 8 + 1,5)}{12 \cdot 143} = 1 - 0,39 = + 0,61.$$

Оценка значимости корреляционной связи производится по величине суммы квадратов разностей порядковых номеров $\Sigma(\Delta^2)$ и поправок на повторяемость содержаний.

Критические значения указанной суммы в зависимости от количества проб для уровней значимости 5% и 1% имеются в соответствующих таблицах (с вероятностью 95 и 99%). Если вычисленная сумма меньше нижнего предела табличных значений, то коэффициент корреляции является значимым и существенно положительным. Если она больше верхнего предела, то коэффициент корреляции свидетельствует о значимой отрицательной связи. В случае, когда сумма находится в интервале табличных значений, корреляционная связь признается несущественной.

Для разобранного примера сумма квадратов разностей порядковых номеров плюс поправки равна 111,5 м. Как видно из таблиц критических значений, эта сумма свидетельствует о существенно положительной корреляционной связи содержаний свинца и цинка, но только при 5%-ном уровне значимости, тогда как для уровня значимости в 1% эта связь уже не может считаться значимой. Как показывает опыт, при интерпретации данных геохимических исследований 5%-ный уровень значимости (вероятность 95%) вполне приемлем.

Использование методов корреляционного анализа в процессе геохимических поисковых и исследовательских работ позволяет решать следующие основные задачи:

а) выявлять элементы-индикаторы рудоносности путем оценки силы корреляционной связи между содержаниями промышленных элементов и сопутствующих им элементов в различных природных объектах, а также зависимости содержаний элементов в ряду: растение — почва, почва — коренная порода, растение — почва — коренная порода;

б) оценивать изменение пространственного положения исследуемого объекта по отношению к рудному телу по характеру изменения корреляционной связи между элементами-индикаторами;

в) характеризовать на основе анализа характера корреляционной связи между элементами особенности генезиса некоторых геологических образований.

Наличие корреляционной связи между промышленным (рудным) элементом и сопутствующими ему элементами-спутниками позволяет успешно использовать последние в качестве индикаторов рудоносности при проведении поисковых работ.

Хорошо проявленная корреляционная связь между ураном, молибденом и свинцом в эндогенных и геохимических ореолах ряда ураноносных рудных тел (табл. 13) может быть использована для замены при поисках трудоемких химико-люминесцентных анализов на уран полуколичественными спектральными анализами на свинец и молибден.

Таблица 13

**Корреляционная связь между ураном, молибденом и свинцом
в эндогенном геохимическом ореоле ураноносного рудного тела**

Пары элементов	уран-свинец	уран-молибден	молибден-свинец
Коэффициент корреляции	0,76	0,71	0,79

Существенный интерес представляет использование изменения характера корреляционной связи между элементами в пределах эндогенных ореолов для оценки глубины эрозионного среза рудного тела (табл. 14). Применение подобных геохимических критериев в ближайшем будущем несомненно позволит однозначно оценивать перспективы вновь открываемых месторождений и рационально направлять геологоразведочные работы на наиболее интересные объекты.

В настоящей лекции приведены лишь наиболее простые приемы использования методов математической статистики для обработки геохимической информации, получаемой при геохимических поисках. Для более глубокого математического анализа геохимических данных следует пользоваться соответствующими руководствами и учебниками. Для счетных работ в целях экономии времени и средств рекомендуется использовать автоматические или полуавтоматические электрические счетные машины, или же ЭВМ.

Изменение коэффициента порядковой корреляции между содержаниями элементов-индикаторов в эндогенных ореолах скарново-полиметаллических рудных тел с глубиной

Части ореолов		Свинец—цинк	Свинец—медь	Свинец—мышьяк
Надрудные		0,80	—	—
Рудные	Верхние	+0,73 +0,70 +0,95 +0,72	— — +0,70 +0,76	— — +0,40 +0,55 +0,70
	Нижние	н. с. 0,64 +0,48 н. с.	н. с. н. с. +0,47 н. с.	н. с. — н. с. н. с.
Подрудные		н. с. н. с. н. с. н. с. -0,70	н. с. н. с. +0,61 н. с. н. с.	н. с. н. с. н. с. н. с. -0,55

В заключение следует отметить, что использование статистических методов оказывает существенную помощь при обработке данных геохимических исследований. Опыт показывает, что пренебрежение статистическими методами обработки цифровых данных может привести к принципиально ошибочным выводам. Однако нужно остерегаться и другой крайности — формального увлечения математическими методами обработки цифровых данных без надлежащего тщательного анализа геологических и геохимических предпосылок, определяющих рациональность применения того или иного метода в практике геохимических исследований.

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Методы и задачи геохимических поисков	3
На стадии мелкомасштабной геологической съемки и поисков	11
На стадии геологического картирования и поисков в масштабе 1 : 50 000	12
На стадии длительных поисков	13
II. Использование методов математической статистики при геохими- ческих поисковых работах	14
Определение статистических оценок параметров распределения со- держаний химических элементов в природных образованиях с целью обоснования геохимических выводов	17
Определение закона распределения	27
Вычисление пределов колебания содержаний элементов	32
Сравнение рядов распределения	37
Графический способ определения функции и параметров распре- деления элементов	40
Определение связи между варьирующими величинами (корреляция)	43
Порядковая (ранговая) корреляция	44

БЕУС Алексей Александрович

ГРИГОРЯН Сергей Вагаршакович

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ
ПРИ ГЕОХИМИЧЕСКИХ ПОИСКАХ**

Лекция

Отв. редактор **И. И. Гусельников**

Редактор **М. М. Эшкинд**

Техн. редактор **Л. Ш. Давыдова**

Корректор **А. Д. Лукачи**

Л-53792 от 27-11-74. Объем 3,25 п. л. Зак. 1395. Тираж 1000. Цена 22 коп.

Типография № 5 Управления издательств
полиграфии и книжной торговли Мосгорисполкома.
Москва. Таганская, 58

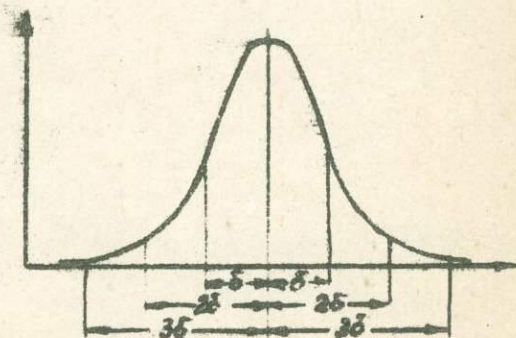
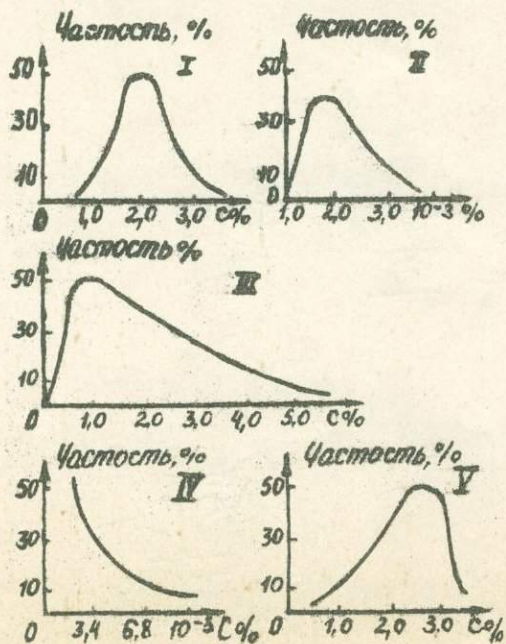


Рис. 2. Кривая нормального распределения вероятностей.

Рис. 1. Типы вариационных кривых

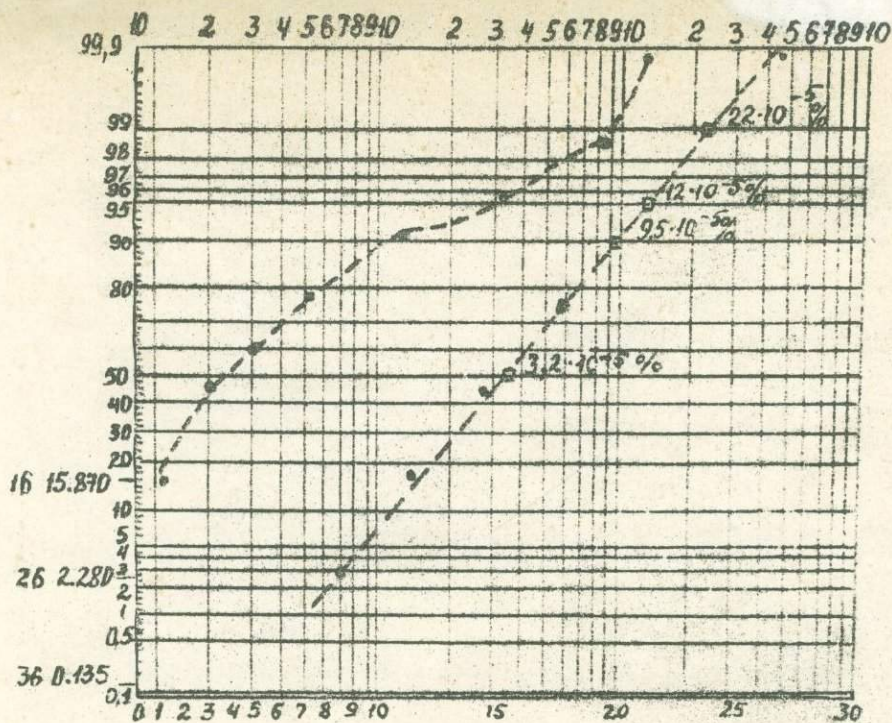


Рис. 3. Кумулятивный график распределения вероятностей

Цена 22 коп.

1013