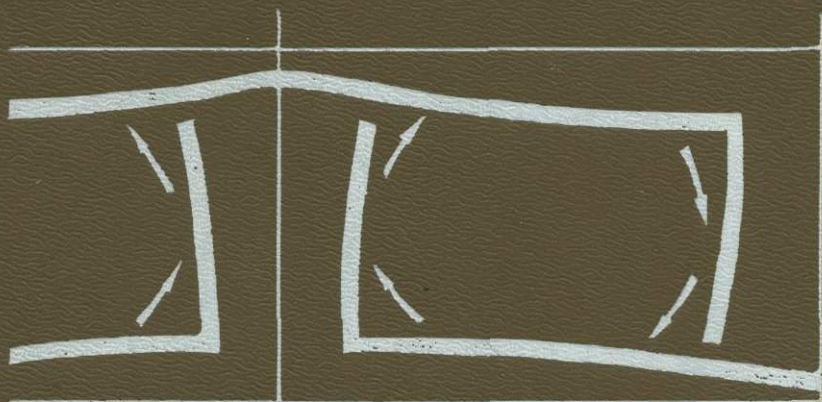


Д. Тёркот
Дж. Шуберт

ГЕОДИНАМИКА

Геологические
приложения
физики
сплошных
сред



GEODYNAMICS

Applications of Continuum Physics to Geological Problems

Donald L. Turcotte

Professor of Geological Sciences
Cornell University

Gerald Schubert

Professor of Geophysics and Planetary Physics
University of California, Los Angeles

John Wiley & Sons

NEW YORK • CHICHESTER • BRISBANE • TORONTO • SINGAPORE

Д. Тёркот
Дж. Шуберт

ГЕОДИНАМИКА

Геологические
приложения
физики
сплошных
сред

В 2-х частях

2

Перевод с английского
канд. физ.-мат. наук С.В. Гаврилова

под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, проф. В.Н. Жаркова

МОСКВА «МИР» 1985



4477

ББК 26.2

Т 35

УДК 53 + 55

Тёркот Д., Шуберт Дж.

Т 35 Геодинамика: Геологические приложения физики сплошных сред.
Ч. 2: Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 360 с., ил.

Книга двух ведущих американских специалистов построена на основе лекций, читавшихся на протяжении ряда лет студентам геологам, физикам, математикам, химикам, инженерам, и представляет собой современное учебное пособие по геодинамике — отрасли знания, изучающей глобальные движения поверхности и недр Земли и их теоретическое описание.

Книга выходит в 2-х частях. В ч. 2 (гл. 6 — 9 и приложения) последовательно излагаются механика жидкостей и конвекция в мантии, пластические деформации горных пород, механика разломов и течение жидкости через пористую среду.

Для студентов и преподавателей вузов — геологов, физиков, геофизиков, математиков. В книгу включены дополнительная литература, а также свыше 250 задач; в конце книги для многих из них приведены решения.

Т 1903010000 — 156 108 — 85, ч. 1
041(01) — 85

ББК 26.2
551.4

*Редакция литературы по космическим исследованиям,
астрономии и геофизике*

© 1982, by John Wiley & Sons, All Rights Reserved. Authorized translation from English language edition by John Wiley & Sons, Inc.
© Перевод на русский язык, "Мир", 1985

Механика жидкости

6.1. Введение

Мы уже знаем, что под действием приложенной нагрузки в твердых телах возникают конечные смещения (деформации); именно с последними связаны напряжения в твердых телах. Те среды, которые в противоположность твердым телам под действием приложенного напряжения испытывают не конечную деформацию, а деформируются непрерывно (как говорят, текут), называются *жидкими* или *текучими*. Тогда как в твердых телах напряжения связаны с деформациями, в жидкостях они связаны со *скоростями деформации*. Деформации твердых тел возникают при наличии пространственных неоднородностей (градиентов) поля смещений элементов среды из положений равновесия. В жидкости же скорости деформации появляются тогда, когда имеются градиенты скорости перемещения элементов жидкости. Поскольку градиенты скорости эквивалентны скоростям деформации, можно сказать, что напряжения в жидкостях связаны с градиентами скорости. Уравнение, связывающее напряжения с градиентами скорости в жидкости, называется *реологическим законом жидкости*. В простейшем и поэтому наиболее часто рассматриваемом случае так называемой *ньютоновской*, или *линейной*, жидкости скорость деформации или градиент скорости прямо пропорциональны приложенному напряжению; коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом вязкости*. В этой главе мы будем иметь дело только с ньютоновской вязкой жидкостью; неньютоновская жидкость будет рассмотрена в гл. 7.

Механика жидкости — это дисциплина, изучающая движение жидкости. Для описания движения жидкости под действием приложенных сил в гидродинамике используются законы *сохранения массы*, *импульса (количества движения)* и *энергии* совместно с реологическим, или *определяющим*, Законом жидкости.

Механика жидкости необходима для решения многих задач геодинамики. Очевидными примерами могут служить задачи о течении грунтовых вод и магмы. Грунтовые воды текут по подземным каналам, называемым *водоносными* горизонтами. Если такие горизонты расположены достаточно глубоко и проходят через достаточно горячие породы, то возможно возникновение горячих источников. В областях активного *вулканизма* грунтовые воды могут нагреваться до температуры, превышающей точку кипения, в результате чего образуются *гейзеры*. В некоторых случаях пар или очень горячие воды находятся на большой глубине в замкнутом объеме, и тогда могут создаваться естественные резервуары для геотермальных электростанций. В *океанической коре* происходит циркуляция *морской воды*, во многих отношениях сходная с движением грунтовых вод на суше. Проходя через горячие породы коры вблизи океанических хребтов, морская вода может нагреваться настолько, что образуются *подводные горячие источники*.

Другим примером задачи, решаемой механикой жидкости, является течение магмы. Как показывают геохимические исследования, магмы, изливающиеся на поверхность из *вулканов*, во многих случаях образуются на глубинах 100 км и более. Изучение потухших вулканов указывает на то, что магма вытекает через *вулканические каналы*, пролегающие на небольшой глубине. В одних случаях эти каналы имеют форму почти правильных цилиндрических трубок, в других — форму двумерных полостей. Механизмы перемещения магмы на больших глубинах (более ~ 5 км) в значительной мере неясны, и на их счет высказываются самые различные предположения, часто совершенно противоречивые. К числу таких предположений относятся гипотезы о распространяющихся разрушениях, больших поднимающихся магматических телах и непрерывных подземных каналах.

Однако важнейшим для геодинамики приложением механики жидкости является задача о *конвекции в мантии*. Это связано с тем, что именно жидкоподобными свойствами мантии объясняются процессы *тектоники плит* и *дрейфа континентов*. Течения в мантии играют важнейшую роль в создании термической структуры Земли. *Тепловая конвекция* — ключ к пониманию фундаментальных геодинамических процессов. Суть тепловой конвекции, возникающей при нагревании жидкости изнутри или снизу и охлаждении сверху, заключается в возникновении *гравитационной неустойчивости* более горячей жидкости, находящейся на глубине, по отношению к более холодной, находящейся вблизи верхней границы. Таким образом, движущими силами конвекции являются *силы плавучести*.

Еще одно геологическое явление, относящееся к компетенции механики жидкости, — это *складкообразование*. Во многих случаях породы земной коры смяты в складки самого различного масштаба. Образование складок можно объяснить способностью пород течь. Неустойчивость пород, рассматриваемых как жидкость, также может объяснить формирование *соляных куполов* при *диатировых поднятиях* (поднятиях с разрывом перекрывающих слоев. — *Черев*.) погребенного соляного слоя. В этом случае имеет место гравитационная неустойчивость соли как менее плотного материала.

6.2. Одномерные течения в канале

Движение литосферных плит по подстилающему материалу мантии, по существу, представляет собой течение мантийных пород в направлении от зоны наращивания плит к зоне субдукции. Понятно, что на глубине должен существовать и возвратный поток вещества мантии от зоны субдукции к зоне наращивания. В одной из моделей возвратного потока предполагается, что он целиком сосредоточен в астеносфере, находящейся непосредственно под литосферой. О существовании под океанической литосферой тонкого (толщиной ~ 100 км) слоя с малой вязкостью (астеносферы) свидетельствуют последледниковые поднятия. Кроме того, сейсмические исследования указывают на то, что под литосферой имеется *слой пониженных скоростей* сейсмических волн, в котором происходит заметное поглощение сейсмических волн, особенно

поперечных. Толщина этого слоя, называемого также зоной пониженных скоростей, составляет ~ 200 км. Хотя наличие зоны пониженных сейсмических скоростей само по себе не является доказательством существования слоя пониженной вязкости, тем не менее физические условия, приводящие к уменьшению скоростей сейсмических волн и их поглощению (высокая температура и небольшое количество расплавленных пород), благоприятствуют образованию слоя пониженной вязкости. Ввиду того что горизонтальные размеры астеносферы (размеры литосферных плит составляют тысячи километров) значительно превышают ее толщину, всякий поток в астеносфере приблизительно можно считать горизонтальным. Поэтому в качестве модели астеносферного потока достаточно рассмотреть одномерное течение ньютоновской вязкой жидкости в канале между параллельными стенками.

Схема одномерного течения в канале показана на рис. 6.1. Жидкость движется со скоростью u в направлении оси x в канале толщиной h . Горизонтальная скорость u зависит только от вертикальной координаты: $u = u(y)$, где y отсчитывается от верхней границы $y = 0$. Течение может вызываться либо внешним горизонтальным градиентом давления $(p_0 - p_1)/l$ (l — горизонтальный размер рассматриваемого участка канала, p_1 и p_0 — давления соответственно на входе и выходе данного участка), либо заданным движением одной из стенок канала. Здесь мы будем предполагать, что верхняя граница $y = 0$ движется с заданной скоростью $u = u_0$, а нижняя граница $y = h$ неподвижна. Поток может двигаться также под действием комбинации градиента давления и заданного движения стенки. В сдвиговом течении, т.е. течении, имеющем градиент профиля скорости, возникает сдвиговое напряжение τ (сила, приходящаяся на единицу площади), приложенное к горизонтальным поверхностям в жидкости и к стенкам канала. Для ньютоновской жидкости с постоянным коэффициентом вязкости μ сдвиговое напряжение в любой точке потока определяется выражением

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (6.1)$$

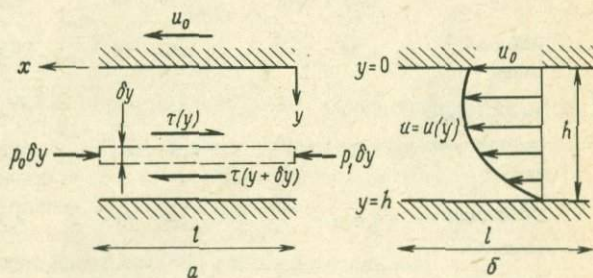


РИС. 6.1. а — баланс сил, действующих на слой жидкости в канале с заданным градиентом давления, б — типичное распределение скорости.

Сдвиговое напряжение, определяемое этой формулой, представляет собой касательное напряжение, действующее на поверхность, внешняя нормаль к которой направлена вдоль оси y . Коэффициент вязкости ньютоновской жидкости есть коэффициент пропорциональности между сдвиговым напряжением и скоростью деформации или градиентом скорости. Чем более вязкой является жидкость, тем большее напряжение требуется для того, чтобы поддерживать данное сдвиговое течение. Коэффициенты вязкости некоторых жидкостей приведены в табл. 6.1. В системе СИ единицей вязкости служит $\text{Па} \cdot \text{с}$ (в системе СГС единицей вязкости служит пуаз; $10 \text{ П} = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$). В гидродинамике часто встречается отношение μ/ρ (ρ — плотность). Оно называется *кинематической вязкостью* ν :

$$\nu = \mu/\rho, \quad (6.2)$$

а величина μ называется также *динамической вязкостью*. Единицей кинематической вязкости в системе СИ является $\text{м}^2/\text{с}$ ($\text{см}^2/\text{с}$ в системе СГС). По своему смыслу кинематическая вязкость является коэффициентом диффузии, аналогичным коэффициенту температуропроводности χ . В то время как χ описывает диффузию тепла из-за молекулярных столкновений, ν характеризует

Таблица 6.1. Коэффициенты переноса и число Прандтля некоторых хорошо известных жидкостей при 15°C и атмосферном давлении

Жидкость	Динамическая вязкость μ , $\text{Па} \cdot \text{с}$	Кинематическая вязкость ν , $\text{м}^2/\text{с}$	Коэффициент температуропроводности χ , $\text{м}^2/\text{с}$	Число Прандтля Pr
Воздух	$1,78 \cdot 10^{-5}$	$1,45 \cdot 10^{-6}$	$2,02 \cdot 10^{-5}$	0,72
Вода	$1,14 \cdot 10^{-3}$	$1,14 \cdot 10^{-6}$	$1,40 \cdot 10^{-7}$	8,1
Ртуть	$1,58 \cdot 10^{-3}$	$1,16 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^{-6}$	0,028
Этиловый спирт	$1,34 \cdot 10^{-3}$	$1,70 \cdot 10^{-6}$	$9,9 \cdot 10^{-8}$	17,2
Четырехлористый углерод	$1,04 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-7}$	$8,4 \cdot 10^{-8}$	7,7
Оливковое масло	0,099	$1,08 \cdot 10^{-4}$	$9,2 \cdot 10^{-8}$	1170
Глицерин	2,33	$1,85 \cdot 10^{-3}$	$9,8 \cdot 10^{-8}$	18 880

диффузию импульса, или количества движения. Отношение v к χ есть безразмерная величина, называемая числом *Прандтля* Pr :

$$Pr \equiv v/\chi. \quad (6.3)$$

Жидкость, в которой число Прандтля мало, более проницаема для тепловых возмущений, чем для механических; при большом числе Прандтля справедливо обратное. Кинематическая вязкость ν , коэффициент температуропроводности χ и число Прандтля Pr для ряда жидкостей также приведены в табл. 6.1.

Чтобы количественно описать движение в канале, показанное на рис. 6.1, нужно воспользоваться *уравнением движения*. Последнее представляет собой математическую формулировку условия *равновесия сил*, действующих на слой жидкости толщиной δy и длиной l , верхняя граница которого расположена на глубине y (рис. 6.1). Суммарная *сила давления*, действующая на элемент жидкости в направлении x , равна

$$(p_1 - p_0)\delta y.$$

Эта величина представляет собой силу, приходящуюся на единичную ширину элемента в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Поскольку сдвиговое напряжение и скорость течения зависят только от вертикальной координаты y , касательная сила, действующая на верхнюю грань элемента в направлении x , равна

$$-\tau(y)l,$$

а касательная сила, действующая в этом же направлении на нижнюю грань, есть

$$\tau(y + \delta y)l = \left[\tau(y) + \frac{d\tau}{dy} \delta y \right] l. \quad (6.4)$$

Поскольку сумма сил, действующих на элемент, должна быть равна нулю, то

$$(p_1 - p_0)\delta y + \left[\tau(y) + \frac{d\tau}{dy} \delta y \right] l - \tau(y)l = 0, \quad (6.5)$$

откуда в пределе $\delta y \rightarrow 0$ мы имеем

$$\frac{d\tau}{dy} = - \frac{p_1 - p_0}{l}. \quad (6.6)$$

Но правая часть уравнения (6.6) представляет собой горизонтальный градиент давления в канале

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{p_1 - p_0}{l}, \quad (6.7)$$

и, следовательно, уравнение движения (6.6) можно записать как

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{dp}{dx}. \quad (6.8)$$

При $p_1 > p_0$ перепад давлений стремится заставить жидкость течь в положительном направлении оси x ; градиент давления dp/dx при этом отрицателен. Перепад давления в канале часто выражается через *гидростатический напор* H , определяемый как

$$H = \frac{(p_1 - p_0)}{\rho g}. \quad (6.9)$$

Гидростатический напор равен высоте столба жидкости, гидростатическое давление в основании которого равно приложенному перепаду давления $p_1 - p_0$.

Уравнение для скорости можно получить, подставив в (6.8) выражение (6.1) для τ :

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx}. \quad (6.10)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + c_1 y + c_2. \quad (6.11)$$

Постоянные интегрирования c_1 и c_2 определяются из граничных условий $u = 0$ при $y = h$ и $u = u_0$ при $y = 0$. Такие граничные условия называются *условиями прилипания*. На границе с твердым телом вязкая жидкость должна иметь ту же скорость, что и граница. В соответствии с этими граничными условиями решение (6.11) запишется в виде

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) - \frac{u_0 y}{h} + u_0. \quad (6.12)$$

Если приложенный градиент давления равен нулю, т.е. $p_1 = p_0$ или $dp/dx = 0$, то решение (6.12) сводится к линейной функции

$$u = u_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (6.13)$$

В этом простом случае течение называется *течением Куэтта* (рис. 6.2, а). Если же скорость верхней границы равна нулю ($u_0 = 0$) и течение вызывается только градиентом давления, то профиль скорости имеет вид

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy). \quad (6.14)$$

Это выражение можно переписать в симметричном виде, если ввести координату y' , отсчитываемую от срединной плоскости:

$$y' = y - h/2. \quad (6.15)$$

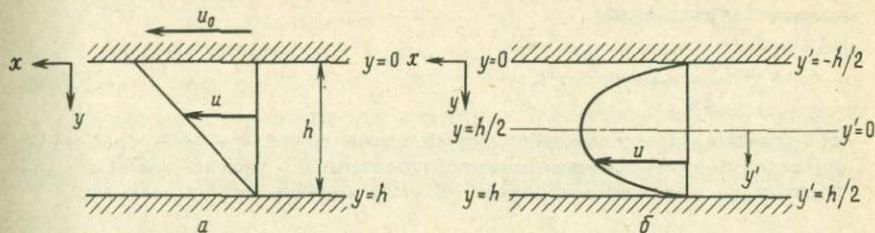


РИС. 6.2. Одномерное течение жидкости с постоянным коэффициентом вязкости в канале: а — течение Куэтта, $dp/dx = 0$, $u_0 \neq 0$; б — $dp/dx \neq 0$, $u_0 = 0$.

В этом случае (6.14) переписывается в виде

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(y'^2 - \frac{h^2}{4} \right), \quad (6.16)$$

Отсюда видно (рис. 6.2 б), что распределение скорости описывается параболой, симметричной относительно середины канала.

ЗАДАЧА 6.1. Покажите, что средняя скорость в канале равна

$$\bar{u} = - \frac{h^2}{12\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{u_0}{2}. \quad (6.17)$$

ЗАДАЧА 6.2. Выведите общее выражение для сдвигового напряжения $\tau(y)$ в канале. Упростите выражение для $\tau(y)$ в случае течения Куэтта и течения, вызываемого только градиентом давления.

ЗАДАЧА 6.3. В каком месте скорость жидкости в потоке максимальна?

ЗАДАЧА 6.4. Рассмотрите стационарный одномерный поток вязкой жидкости, стекающей вниз по наклонной плоскости. Считайте, что жидкость стекает ровным слоем толщиной h (рис. 6.3). Покажите, что распределение скорости по сечению потока

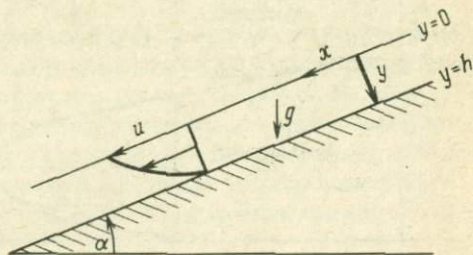


РИС. 6.3. Плоскопараллельный поток вязкой жидкости, стекающей с наклонной плоскости.

определяется выражением

$$u = \frac{\rho g \sin \alpha}{2 \mu} (h^2 - y^2), \quad (6.18)$$

где координата y отсчитывается от верхней границы потока по нормали к наклонной плоскости ($y = h$ есть уравнение наклонной плоскости), α — угол наклона плоскости к горизонту, g — ускорение силы тяжести. Сначала покажите, что

$$\frac{d\tau}{dy} = -\rho g \sin \alpha, \quad (6.19)$$

а затем проинтегрируйте это уравнение при условии прилипания на нижней границе $y = h$ и условии свободной поверхности $y = 0$, на которой $\tau = 0$. Определите среднюю скорость в потоке. Какова толщина слоя жидкости, если расход жидкости через площадку единичной ширины в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, равен Q ?

6.3. Возвратный поток в астеносфере

В одной из моделей течения в мантии, связанного с движением литосферных плит, предполагается, что непосредственно под литосферой имеется *возвратный поток* (рис. 6.4). Литосфера считается жесткой пластиной толщиной h_L , движущейся со скоростью u_0 . Под литосферой расположена астеносфера толщиной h с постоянным коэффициентом вязкости μ . Будем предполагать, что материал мантии в основании астеносферы покоится, т.е. $u = 0$ при $y = h$. Граничные условия прилипания $u = u_0$ при $y = 0$ удовлетворяются решением (6.12), которое, следовательно, описывает астеносферный поток. Величина градиента давления определяется из условия *сохранения массы*. Согласно этому условию, поток вещества в положительном направлении оси x в литосфере должен быть равен суммарному возвратному потоку вещества в астеносфере. Таким образом, в данной модели общий поток в горизонтальном направлении равен нулю (рис. 6.4). Это усло-

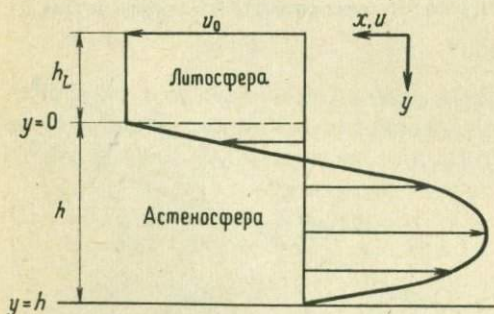


РИС. 6.4. Распределение скорости в модели астеносферного возвратного потока.

вие можно записать в виде

$$u_0 h_L + \int_0^h u dy = 0, \quad (6.20)$$

где первый член описывает поток вещества в литосфере, а второй член равен потоку вещества в астеносфере (через сечение единичной длины в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка). Подставляя (6.12) в (6.20) и интегрируя, получим

$$u_0 h_L - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{u_0 h}{2} = 0, \quad (6.21)$$

где dp/dx — горизонтальный градиент давления в астеносфере. Разрешая равенство (6.21) относительно градиента давления, обеспечивающего возвратный поток:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{12\mu u_0}{h^2} \left(\frac{h_L}{h} + \frac{1}{2} \right), \quad (6.22)$$

и подставляя этот результат в (6.12), мы получим распределение скорости в астеносфере в виде

$$u = u_0 \left\{ 1 - \frac{y}{h} + 6 \left(\frac{h_L}{h} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) \right\}. \quad (6.23)$$

Это распределение показано на рис. 6.4; отметим, что оно не зависит от коэффициента вязкости.

Сдвиговое напряжение τ_{LA} , действующее на подошву литосферы со стороны возвратного астеносферного потока, можно вычислить с помощью равенств (6.1) и (6.23); мы найдем

$$\tau_{LA} = - \frac{2\mu u_0}{h} \left(2 + 3 \frac{h_L}{h} \right). \quad (6.24)$$

Знак минус в правой части (6.24) показывает, что со стороны астеносферы на подошву литосферы действует сила сопротивления, направленная навстречу движению плиты. При $\mu = 4 \cdot 10^{19}$ Па · с (вероятное значение коэффициента вязкости в астеносфере), $h_L = 100$ км, $h = 200$ км и $u_0 = 50$ мм/год из (6.24) получаем $\tau_{LA} = - 2,2$ МПа ($- 22$ бар).

Рассмотренный возвратный астеносферный поток создается перепадом давления, возрастающего в положительном направлении оси x . Это означает, что p увеличивается в направлении *раздвигания океанического дна*. Единственной причиной нарастания давления с увеличением расстояния от хребта может быть гидростатический напор, порождаемый топографией. В соответствии с этим по мере отодвигания от хребта океаническое дно должно было бы подниматься (рис. 6.5). Давление в астеносфере на глубине b под хребтом определяется гидростатической формулой

$$p = \rho_w g w + \rho g (w_r - w + b), \quad (6.25)$$

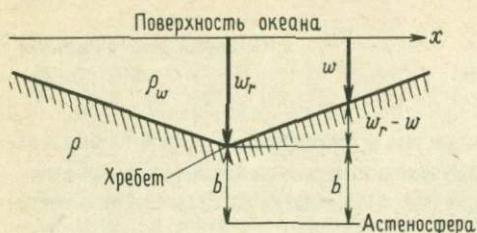


РИС. 6.5. Изменение глубины океана w с удалением x от оси хребта в модели астеносферного возвратного потока. Подъем дна с удалением от оси хребта обеспечивает нарастание давления, вызывающее возвратный (направленный к хребту) астеносферный поток.

где ρ_w — плотность морской воды, w — глубина океана на расстоянии x от хребта, ρ — плотность мантии, w_r — глубина океана над хребтом. Дифференцируя равенство (6.25) по x , мы можем связать наклон океанического дна с горизонтальным градиентом давления в астеносфере

$$\frac{dp}{dx} = -(\rho - \rho_w)g \frac{dw}{dx} \quad (6.26)$$

Из положительности dp/dx следует, что dw/dx отрицательно, т.е. глубина океана уменьшается с увеличением x . Из (6.22) и (6.26) можно определить наклон океанического дна в рамках модели астеносферного возвратного потока:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{12\mu u_0}{(\rho - \rho_w)gh^2} \left(\frac{h_L}{h} + \frac{1}{2} \right). \quad (6.27)$$

При $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho = 3300 \text{ кг/м}^3$, $g = 10 \text{ м/с}^2$ и приведенных выше значениях других параметров из (6.27) получается $dw/dx = -7,2 \cdot 10^{-4}$. Поскольку ширина Тихого океана равна $x = 10\,000 \text{ км}$, полученному значению dw/dx соответствует уменьшение глубины океана на 7,2 км. Однако в действительности никакого систематического уменьшения глубины Тихого океана в северо-западном направлении не наблюдается.

Градиент давления, необходимый для приведения в движение астеносферного возвратного потока, одновременно должен был бы привести к возникновению аномалии силы тяжести. Величину аномалии Δg можно найти с помощью формулы Буге (5.111) и равенства (6.27):

$$\frac{d(\Delta g)}{dx} = \frac{24\pi G\mu u_0}{gh^2} \left(\frac{h_L}{h} + \frac{1}{2} \right). \quad (6.28)$$

В рассматриваемом примере мы находим $d(\Delta g)/dx = 10^{-10} \text{ с}^{-2}$. При пересечении Тихого океана этому соответствовала бы аномалия силы тяжести в $7,2 \text{ мм/с}^2$, которая также не наблюдается в действительности. Из всего этого можно сделать вывод о неприменимости модели неглубокого возвратного потока для описания конвекции в мантии. Значительные конвективные потоки существуют на глубине по крайней мере 700 км.

ЗАДАЧА 6.5. Предполагая, что в астеносфере с коэффициентом вязкости $\mu = 4 \cdot 10^{19}$ Па · с и толщиной $h = 200$ км возвратного потока нет ($\partial p / \partial x = 0$), определите величину сдвигового напряжения в подошве литосферы. Считайте, что $u_0 = 50$ мм/год, а скорость в основании астеносферы равна нулю.

ЗАДАЧА 6.6. Предположим, что напряжение в подошве литосферы, найденное в задаче 6.5, действует на длине 6000 км при толщине литосферы 100 км. Каким должно быть напряжение, тянущее литосферу у желоба, чтобы оно могло преодолеть силу трения, действующую на подошву литосферы?

6.4. Течение в трубе

Теория течения вязкой жидкости по цилиндрической трубе может найти применение при расчетах течения воды в водоносных горизонтах и магмы в вулканических каналах. Рассмотрим трубу радиуса R и длины l (рис. 6.6). Будем считать, что движение жидкости в трубе происходит за счет перепада давлений $p_1 - p_0$, приложенного к участку трубы длиной l . Предположим, что скорость u течения жидкости вдоль трубы зависит только от расстояния r от оси трубы. Распределение скорости $u(r)$ по сечению трубы можно найти из условия равновесия сил, приложенных к цилиндрическому *контрольному объему* радиуса r и длины l (рис. 6.6). Суммарная сила давления, действующая на торцевые грани контрольного объема, равна $(p_1 - p_0) \pi r^2$; эта сила действует вдоль оси цилиндра в направлении движения потока. При *стационарном* течении полная сила, действующая на контрольный объем, должна быть равна нулю. Следовательно, вычисленная сила давления должна быть уравновешена силой *вязкого трения*, действующей на боковую поверхность контрольного объема. Сдвиговое напряжение $\tau(r)$ на боковой поверхности создает силу вязкого трения $-2\pi r l \tau(r)$, действующую на контрольный объем (величина τ отрицательна). Условие равновесия сил дает

$$\pi r^2 (p_1 - p_0) = -2\pi r l \tau, \quad (6.29)$$

или

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{dp}{dx}, \quad (6.30)$$

где dp/dx — градиент давлений вдоль трубы, определяемый равенством (6.7).

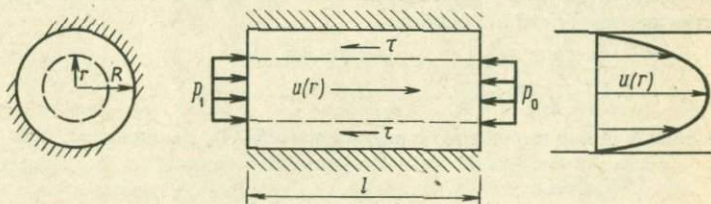


РИС. 6.6. Течение Пуазейля в трубе кругового сечения.

В цилиндрически-симметричном течении (рис. 6.6) сдвиговое напряжение τ прямо пропорционально радиальному градиенту скорости u :

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}, \quad (6.31)$$

где коэффициент пропорциональности μ есть, как в (6.1), коэффициент вязкости. Подставив (6.31) в (6.30), мы получим выражение для радиальной производной скорости

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (6.32)$$

которое после интегрирования дает

$$u = - \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2), \quad (6.33)$$

где для определения постоянной интегрирования мы использовали граничное условие $u = 0$ при $r = R$. Профиль скорости в трубе представляет собой параболюид вращения. Течение вязкой жидкости в трубе под действием градиента давления называется *течением Пуазейля*.

Скорость в трубе имеет максимум $u = u_{\max}$ при $r = 0$. Согласно (6.33), максимальное значение скорости равно

$$u_{\max} = - \frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (6.34)$$

Поскольку при $p_1 > p_0$ величина dp/dx отрицательна, u_{\max} положительно.

Объемный расход Q жидкости в потоке определяется как полный объем жидкости, протекающей через любое поперечное сечение трубы в единицу времени. Расход через элемент сечения в виде кольца радиусом r и шириной dr равен $2\pi r u(r) dr$, поэтому величина Q определяется как

$$Q = \int_0^R 2\pi r u dr. \quad (6.35)$$

Подставляя сюда выражение (6.33) для скорости u и интегрируя, получим

$$Q = - \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (6.36)$$

Разделив величину Q на площадь πR^2 поперечного сечения трубы, мы найдем среднюю скорость \bar{u} в потоке

$$\bar{u} = - \frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (6.37)$$

Сравнивая это выражение с равенством (6.34), мы находим, что

$$\bar{u} = u_{\max}/2. \quad (6.38)$$

Средняя и максимальная скорости в потоке прямо пропорциональны градиенту давления и обратно пропорциональны коэффициенту вязкости. Этот результат

справедлив до тех пор, пока поток остается *ламинарным*.

В задачах гидродинамики часто бывает удобно переходить к *безразмерным переменным*. Например, соотношение (6.37) между средней скоростью в трубе и градиентом давления можно привести к стандартной безразмерной форме посредством введения двух величин: безразмерного градиента давления или *коэффициента сопротивления трубы* f и числа Рейнольдса Re . Коэффициент сопротивления определяется как

$$f \equiv - \frac{4R}{\rho \bar{u}^2} \frac{dp}{dx}, \quad (6.39)$$

а число Рейнольдса — как

$$Re \equiv \rho \bar{u} D / \mu, \quad (6.40)$$

где $D = 2R$ — диаметр трубы. В переменных f и Re равенство (6.37) переписывается в виде

$$f = 64 / Re. \quad (6.41)$$

Мы видим, что коэффициент сопротивления обратно пропорционален числу Рейнольдса; эта зависимость, справедливая для ламинарного потока, показана на рис. 6.7.

При достаточно больших числах Рейнольдса наблюдаемое падение давления в потоке становится значительно большим, чем предсказывает теория ламинарного течения. Поток в трубе становится нестационарным, и в нем появляются хаотические вихри. Такой поток называется *турбулентным*. Качественное отличие ламинарного потока от турбулентного иллюстрирует рис. 6.8. Главным преимуществом перехода к безразмерным координатам в настоящей задаче является то, что условие перехода ламинарного потока в турбулентный формулируется в универсальном виде: переход происходит при $Re \approx 2200$ независимо от радиуса трубы, скорости потока или вида жидкости (ее плотности и вязкости). Для воды коэффи-

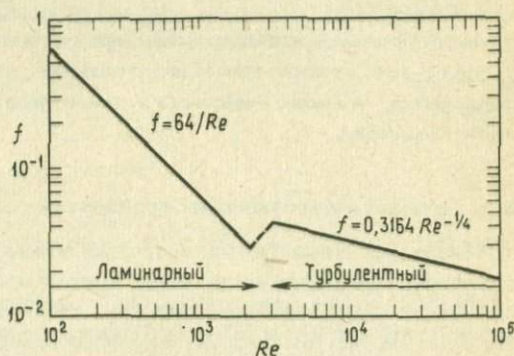


РИС. 6.7. Зависимость коэффициента сопротивления f от числа Рейнольдса Re . Для ламинарного потока функция $f(Re)$ задается равенством (6.41), для турбулентного — равенством (6.42). Показаны области ламинарного и турбулентного режимов течения.

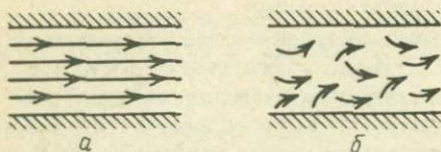


РИС. 6.8. Качественное различие между ламинарным (а) и турбулентным (б) потоками. В ламинарном потоке течение жидкости стационарно и направлено параллельно стенкам; поперечный перенос импульса происходит на молекулярном уровне. В турбулентном потоке течение нестационарно, появляется и исчезает много вихрей и водоворотов. Поперечный перенос импульса за счет этих вихрей происходит значительно более эффективно, чем при молекулярном механизме. В результате коэффициент сопротивления (падение давления) в турбулентном потоке при заданном числе Рейнольдса (скорости течения) оказывается большим, чем в ламинарном потоке.

циент вязкости которой составляет 10^{-3} Па · с), текущей по трубе диаметром 0,1 м, средняя скорость, соответствующая переходному числу Рейнольдса $Re \approx 2200$, равна 22 мм/с. Мы приходим к выводу, что потоки большинства обычных жидкостей и газов, как правило, турбулентны.

Для турбулентного течения не существует теоретического соотношения, эквивалентного соотношениям (6.1) или (6.31) между сдвиговым напряжением и скоростью деформации в ньютоновской жидкости. Имеется эмпирическая зависимость

$$f = 0,3164 Re^{-1/4}, \quad (6.42)$$

пригодная для описания турбулентного режима. Зависимость (6.42) и переходная зависимость $f(Re)$ в области между ламинарным и турбулентным режимами также представлены на рис. 6.7.

ЗАДАЧА 6.7. Определите число Рейнольдса для астеносферного потока, рассмотренного в задаче 6.5. В качестве характерных величин линейного размера и скорости возьмите толщину слоя, в котором сосредоточен поток, и скорость u_0 ($u_0 = 50$ мм/год, $\rho = 3200$ кг/м³). Решение этой задачи показывает, что вязкость мантийных пород настолько велика, что число Рейнольдса в общем случае мало. Таким образом, течения в мантии ламинарны.

6.5. Течения в артезианских горизонтах

Самопроизвольно бьющие источники обычно возникают оттого, что грунтовые воды перетекают из более высокого места в более низкое. Перетекание происходит через водоносный горизонт, представляющий собой пласт, проницаемый для воды. На рис. 6.9 показана идеализированная модель водоносного горизонта – водовода, имеющего форму полукруга радиуса R' . Такая форма соответствует геометрии пористых слоев в осадочных породах, смятых в складки. Будем предполагать, что вход в водоносный горизонт расположен на высоте b относительно выхода, а сам канал имеет круговое поперечное сечение ради-

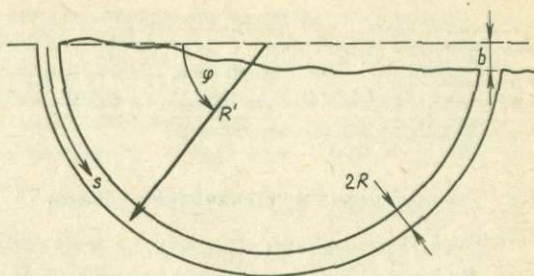


РИС. 6.9. Полукруглый водоносный горизонт кругового поперечного сечения (тор). Течение воды вызывается гидростатическим напором b .

уся R . Гидростатический напор, обеспечивающий движение воды в этом слое, равен ρgb , где ρ — плотность воды. Поскольку полная длина водовода равна $\pi R'$ ($R' \gg b$), то величина градиента давления, движущего поток, есть

$$\frac{dp}{ds} = - \frac{\rho gb}{\pi R'} \quad (6.43)$$

где s — расстояние вдоль слоя. Если считать, что поток ламинарен, то объемный расход жидкости, соответствующий градиенту давления (6.43), можно вычислить, пользуясь равенством (6.36). Подставляя в (6.36) вместо dp/dx выражение (6.43) для dp/ds , находим

$$Q = \rho gb R^4 / 8 \mu R' \quad (6.44)$$

Если поток турбулентен, то величину Q можно определить, пользуясь эмпирическим соотношением (6.42) между f и Re . Для этого с помощью определенных величин f и Re перепишем формулу (6.42) в размерной форме:

$$- \frac{4R}{\rho \bar{u}^2} \frac{dp}{dx} = 0,3164 \left(\frac{\mu}{\rho \bar{u} \cdot 2R} \right)^{1/4} \quad (6.45)$$

Отсюда можно выразить среднюю скорость \bar{u} :

$$\bar{u} = \left(\frac{4 \cdot 2^{1/4}}{0,3164} \right)^{4/7} \left(- \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right)^{1/7} R^{5/7} \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{1/7} \quad (6.46)$$

Поскольку $Q = \pi R^2 \bar{u}$, то объемный расход через водовод в случае турбулентного течения получается умножением равенства (6.46) на πR^2 и подстановкой выражения (6.43) для $(-1/\rho)(dp/dx)$. В результате получим

$$Q = 7,686 \left(\frac{gb}{R'} \right)^{4/7} \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{1/7} R^{19/7} \quad (6.47)$$



ЗАДАЧА 6.8. Объемный расход источника равен 100 л/мин. Вход в водоносный слой находится на расстоянии 2 км от выхода и по высоте на 50 м выше. Найдите радиус поперечного сечения этого слоя, моделируя его описанным выше образом (рис. 6.9). Какова средняя скорость жидкости в водоносном горизонте? Каким является поток — ламинарным или турбулентным?

6.6. Течение через вулканические каналы

Другим примером происходящего в естественных условиях течения по трубе является течение магмы через вулканические каналы почти кругового сечения. Подъем по каналу происходит за счет естественной плавучести магмы, имеющей меньшую плотность, чем окружающая природа. *Литостатическое давление*, создаваемое породой на глубине h , равно $\rho_s gh$, где ρ_s — плотность породы. *Гидростатическое давление*, создаваемое на той же глубине h столбом магмы, находящейся в состоянии стационарного движения, равно $\rho_l gh$, где ρ_l — плотность магмы. Предполагая, что литостатическое и гидростатическое давления в трубе равны, мы найдем, что градиент давления, движущий поток магмы к поверхности, равен $-(\rho_s - \rho_l)g$. Предположение о равенстве литостатического и гидростатического давлений в трубе эквивалентно допущению о свободной деформируемости стенок трубы при движении магмы к поверхности. Согласно (6.36), объемный расход магмы Q при найденной величине градиента давления равен

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{(\rho_s - \rho_l)gR^4}{\mu}, \quad (6.48)$$

где R — радиус канала (поток считается ламинарным). Из формулы (6.48) и равенства $Q = \pi R^2 \bar{u}$ в случае турбулентного потока для объемного расхода находим

$$Q = 14,8 \frac{R^{19/7} [(\rho_s - \rho_l)g]^{4/7}}{\rho_l^{3/7} \mu^{1/7}}. \quad (6.49)$$

ЗАДАЧА 6.9. Определите скорость подъема магмы в двумерном канале шириной d под действием градиента давления $-(\rho_s - \rho_l)g$, возникающего из-за естественной плавучести магмы. Поток считайте ламинарным.

6.7. Двумерное уравнение неразрывности

Выше рассматривались одномерные потоки вязкой жидкости, в которых скорость была направлена вдоль одной из координатных осей. Теперь мы перейдем к двумерным течениям. Будем считать, что жидкость движется в плоскости xu , а компоненты скорости вдоль осей x и y равны соответственно $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Пространственные изменения компонент скорости связаны

между собой условием сохранения количества жидкости. Чтобы сформулировать это условие математически, рассмотрим прямоугольный контрольный объем со сторонами длиной δx и δy (рис. 6.10). Через единицу площади поверхности x в единицу времени в направлении увеличения x в контрольный объем втекает объем жидкости u . Через единицу площади поверхности $x + \delta x$ в том же направлении вытекает объем

$$u(x + \delta x) = u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x. \quad (6.50)$$

Отсюда суммарный объем жидкости, вытекающей из контрольного объема в направлении x через единицу площади граней, перпендикулярный этому направлению, равен

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x - u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x. \quad (6.51)$$

Аналогичным образом записывается суммарный объемный расход жидкости, вытекающей из контрольного объема в направлении y (вертикально вниз) через единицу площади граней, нормальных к оси y :

$$v + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y - v = \frac{\partial v}{\partial y} \delta y. \quad (6.52)$$

Определим общий объемный расход жидкости, вытекающей из прямоугольного контрольного объема в обоих направлениях x и y (рис. 6.10). Чтобы получить общий расход в направлении x , надо умножить величину $(\partial u / \partial x) \delta x$ на площадь грани, перпендикулярной оси x . Считая, что размер контрольного объема в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 6.10, равен единице, мы найдем, что площадь грани, перпендикулярной оси x , равна δy . Поэтому общий объемный расход жидкости, вытекающей из контрольного объема в направлении оси x , равен $(\partial u / \partial x) \delta x \delta y$. Подобными же рассуждениями можно показать, что об-

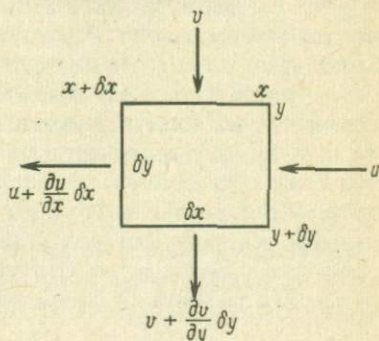


РИС. 6.10. Потоки жидкости через грани бесконечно малого прямоугольного элемента.

ший объемный расход жидкости, вытекающей из контрольного объема в направлении y , равен $(\partial v / \partial y) \delta y \delta x$. Общий объемный расход жидкости, вытекающей через единицу площади поверхности контрольного объема, равен

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Для стационарного (не зависящего от времени) потока, в котором не происходит изменения плотности, общий расход жидкости, вытекающей из произвольного прямоугольного объема или втекающей в этот объем, должен быть равен нулю. Отсюда мы получаем *уравнение сохранения количества жидкости, или уравнение неразрывности*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6.53)$$

В такой форме уравнение неразрывности справедливо только для *несжимаемой жидкости*.

6.8. Двумерное уравнение движения

Силы, действующие на контрольный объем, изображенный на рис. 6.10, в стационарном случае должны уравновешивать друг друга. При этом надо учесть силы давления, силы *вязкости* и силу *тяжести*. Мы будем пренебрегать *силами инерции*, связанными с *ускорением* элемента жидкости. Это допустимо в тех случаях, когда очень вязкая жидкость движется очень медленно или имеет большое число Прандтля.

Мантия Земли в геологических масштабах времени ведет себя как сильно вязкая жидкость. Коэффициент вязкости мантии составляет $\sim 10^{21}$ Па · с (10^{22} П), а ее плотность и коэффициент температуропроводности равны ~ 4000 кг/м³ (4 г/см³) и 1 мм²/с (10^{-2} см²/с) соответственно. Отсюда следует, что число Прандтля для мантии Земли составляет $\sim 10^{23}$. Условие равновесия сил давления, вязкости и тяжести без учета силы инерции означает, что ускорением элемента жидкости во *втором законе движения Ньютона* можно пренебречь (условие сохранения импульса).

На рис. 6.11 показаны силы давления, действующие на бесконечно малый прямоугольный элемент жидкости. Поскольку давление представляет собой силу, приходящуюся на единицу площади, величина $p\delta y$ (умноженная на единичную длину в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 6.11) равна силе, направленной влево и приложенной к грани элемента с координатой x . Силы давления действуют перпендикулярно граням и направлены внутрь объема, ограниченного поверхностью. Суммарная сила давления, действующая на единицу площади элемента в направлении x , есть

$$\frac{p(x)\delta y - p(x + \delta x)\delta y}{\delta x \delta y} = - \frac{p(x + \delta x) - p(x)}{\delta x}. \quad (6.54)$$

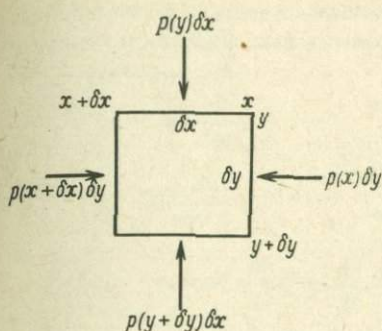


РИС. 6.11. Силы давления, действующие на бесконечно малый прямоугольный элемент жидкости.

С помощью формулы Тейлора это выражение можно переписать как

$$-\frac{\partial p}{\partial x}$$

Таким образом, в направлении x на элемент жидкости будет действовать сила давления только в том случае, если градиент давления в этом направлении не равен нулю. Если давление не меняется, то силы давления, действующие на противоположные стороны элемента жидкости, взаимно компенсируются и не создают результирующего действия. Результирующая сила давления, действующая на единицу площади элемента в направлении y , очевидно, будет иметь вид

$$-\frac{\partial p}{\partial y}$$

Гравитационная массовая сила, действующая на элемент жидкости, равна его массе, умноженной на *ускорение силы тяжести*. Масса элемента жидкости, изображенного на рис. 6.11, равна $\rho \delta x \delta y$ (умноженному на единичную длину в направлении третьего измерения), и, следовательно, приходящаяся на единицу площади элемента (и на единицу длины в направлении третьего измерения) сила тяжести равна ρg . Эта сила действует в положительном направлении оси y . Поэтому результирующая гравитационная сила, приходящаяся на единицу площади элемента, направлена вдоль оси y и по величине равна

$$\rho g$$

Остается определить силы вязкого сопротивления, действующие на элемент жидкости на рис. 6.11. Они показаны на рис. 6.12. Силы вязкости приложены к граням элемента и имеют как касательные, так и нормальные составляющие. Величины τ_{xy} и τ_{yx} представляют собой *вязкие сдвиговые напряжения*, т.е. силы вязкости, приходящиеся на единицу площади поверхности и направленные по касательной. Величины τ_{xx} и τ_{yy} суть *вязкие нормальные на-*

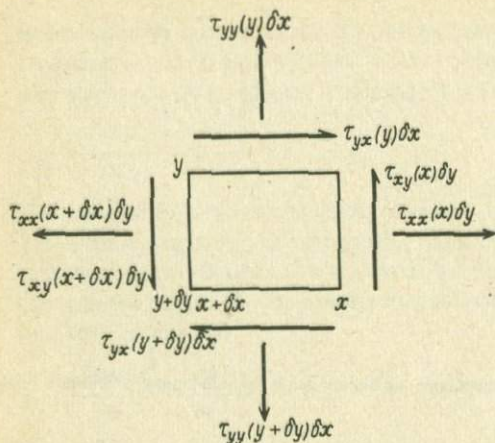


РИС. 6.12. Силы вязкости, действующие на бесконечно малый двумерный прямоугольный элемент жидкости.

пряжения, т.е. силы вязкости, действующие на единицу площади поверхности и направленные нормально к ней. Положительными считаются напряжения, имеющие направления, изображенные на рисунке. Принятый здесь выбор знака напряжений является общепринятым в гидродинамике; он противоположен выбору знака, сделанному в гл. 2 и 3 для напряжений φ .

Из отсутствия нескомпенсированного момента сил относительно центра элемента жидкости следует, что

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (6.55)$$

Результирующая сила вязкости, действующая на единицу поперечного сечения элемента и направленная вдоль оси x , равна

$$\frac{\tau_{xx}(x + \delta x)\delta y - \tau_{xx}(x)\delta y}{\delta x \delta y} + \frac{\tau_{yx}(y + \delta y)\delta x - \tau_{yx}(y)\delta x}{\delta x \delta y}.$$

С помощью разложения в ряд Тейлора и упрощений это выражение сводится к виду

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}.$$

Подобным же образом получается выражение для результирующей силы вязкости, действующей на единицу площади элемента в направлении y :

$$\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.$$

В ньютоновской вязкой жидкости вязкие напряжения связаны с градиентами скорости линейным соотношением. Обобщение формулы (6.1) на двумерный случай имеет вид

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (6.56)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (6.57)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (6.58)$$

где μ — динамический коэффициент вязкости. В одномерном потоке, т.е. при $v = 0$ и $u = u(y)$, мы имеем $\tau_{xx} = \tau_{yy} = 0$, а

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy}, \quad (6.59)$$

что совпадает с (6.1). Полные нормальные напряжения являются суммой давления и вязких нормальных напряжений:

$$\sigma_{xx} = p - \tau_{xx} = p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (6.60)$$

$$\sigma_{yy} = p - \tau_{yy} = p - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (6.61)$$

Знак минус перед τ_{xx} и τ_{yy} в равенствах (6.60) и (6.61) возникает вследствие того, что условия выбора знака напряжений σ и τ противоположны друг другу. Сдвиговые напряжения σ_{xy} и σ_{yx} создаются только сдвиговыми вязкими напряжениями τ .

С помощью соотношений (6.56) — (6.58) можно переписать полученные выше выражения для сил вязкости, действующих в направлениях x и y и пересчитанных на единицу площади поперечного сечения малого прямоугольного элемента жидкости, в следующем виде:

$$2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right),$$

$$2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right)$$

для направлений x и y соответственно. [Дифференцируя равенства (6.56) — (6.58), мы считали $\mu = \text{const.}$] Оба этих выражения можно еще более упростить, если воспользоваться уравнением неразрывности. Дифференцируя (6.53), находим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.62)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} . \quad (6.63)$$

Используя соотношения (6.62) – (6.63) для смешанных частных производных компонент скорости, можно переписать формулы для x - и y -составляющих силы вязкости, приходящейся на единицу площади поперечного сечения элемента, в виде

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) ,$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

соответственно для направлений x и y .

Для вывода уравнений равновесия сил в стационарном двумерном потоке несжимаемой, сильно вязкой жидкости нужно приравнять к нулю сумму сил давления, тяжести и вязкости. В проекции на ось x мы получим

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) , \quad (6.64)$$

и в проекции на ось y будем иметь

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) . \quad (6.65)$$

Сила тяжести дает проекцию только на ось y . Чтобы исключить из уравнения (6.65) гидростатическое давление, перейдем к переменной

$$P = p - \rho g y . \quad (6.66)$$

Величина P представляет собой давление, создаваемое потоком жидкости. Подставляя (6.66) в (6.64) и (6.65), находим

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) , \quad (6.67)$$

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) . \quad (6.68)$$

6.9. Функция тока

Двумерное уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости будет удов-

летворяться тождественно, если ввести функцию тока ψ , определяемую таким образом, что

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (6.69)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6.70)$$

Действительно, если подставить (6.69) и (6.70) в (6.53), то мы получим тождество

$$- \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0, \quad (6.71)$$

которое удовлетворяется в силу перестановочности частного дифференцирования. Подставляя (6.69) и (6.70) в уравнения (6.67) и (6.68), получим

$$0 = \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right), \quad (6.72)$$

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial x} \right). \quad (6.73)$$

Из этой системы уравнений можно исключить давление P . Для этого продифференцируем (6.72) по y и прибавим к результату уравнение (6.73), продифференцированное по x . В результате получится одно уравнение для ψ :

$$0 = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}, \quad (6.74)$$

которое представляет собой *бигармоническое уравнение*. Действительно, легко видеть, что правую часть уравнения (6.74) можно выразить через оператор Лапласа ∇^2 :

$$\nabla^4 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (6.75)$$

тогда равенство (6.74) принимает вид

$$\nabla^4 \psi = 0. \quad (6.76)$$

Итак, мы приходим к выводу, что функция тока для двумерного течения очень вязкой жидкости удовлетворяет бигармоническому уравнению.

Функция тока имеет смысл объемного расхода жидкости через промежуток между двумя произвольными точками несжимаемого стационарного двумерного потока. Рассмотрим две точки A и B в потоке, разделенные бесконечно

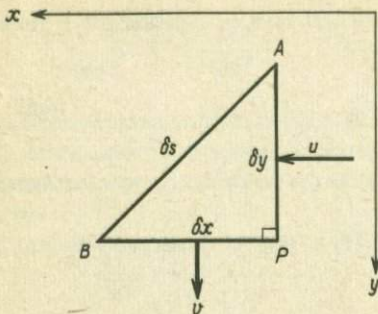


РИС. 6.13. Объемный расход жидкости через промежуток между точками A и B .

малым расстоянием δs (рис. 6.13). Поскольку, согласно закону сохранения массы, суммарный поток, вытекающий в бесконечно малый треугольник ABP , должен быть равен нулю, поток жидкости, пересекающей отрезок AB , можно вычислить по величине потоков жидкости, пересекающих стороны AP и BP . Объемный расход жидкости, вытекающей в треугольник через площадку со стороны AP , имеющей единичную ширину в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, равен $u\delta y$. Расход жидкости, вытекающей через площадку единичной ширины с боковой стороной BP , равен $v\delta x$. Полный расход жидкости, вытекающей из треугольника через стороны AP и BP , равен, следовательно, $-u\delta y + v\delta x$; эта величина должна быть равна объемному расходу жидкости, вытекающей в треугольник ABP через площадку со стороной AB , имеющей единичную ширину в направлении третьего измерения. Величину $-u\delta y + v\delta x$ можно выразить через функцию тока следующим образом:

$$u\delta y + v\delta x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\psi}{\partial x} \delta x = d\psi. \quad (6.77)$$

Отсюда следует, что разность $d\psi$ значений функции тока в двух бесконечно близких точках, находящихся на расстоянии δs друг от друга, равна объемному расходу жидкости через площадку единичной ширины с боковой стороной δs . Если две точки A и B в потоке разделены произвольным конечным расстоянием, то объемный расход жидкости, протекающей через промежуток между этими точками, равен интегралу от $d\psi$, взятому между точками:

$$\int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A, \quad (6.78)$$

Таким образом, объемный расход выражается через разность значений функции тока и в случае конечного расстояния между точками. Абсолютное значение функции тока может быть произвольным; физический смысл имеют только разности значений функции тока в различных точках потока.

ЗАДАЧА 6.10. Определите функцию тока для общего случая одномерного течения в канале, описанного в разд. 6.2. Найдите ψ для модели астеносферного возвратного потока, построенной в разд. 6.3. Каков физический смысл ψ в этих случаях?

6.10. Последледниковое поднятие

Свойство текучести мантии весьма ярко проявляется в динамической реакции мантии на приложение или снятие поверхностной нагрузки. В разд. 2.2 мы уже рассмотрели прогибание границы между корой и мантией, возникающее под тяжестью горных массивов. Однако процесс горообразования происходит настолько медленно, что динамические эффекты перемещения материала мантии пренебрежимо малы, и можно считать, что мантия под горной системой находится в состоянии гидростатического равновесия в течение всего жизненного цикла гор. С другой стороны, такие процессы, как нарастание и таяние ледяных щитов, происходят достаточно быстро, и динамические эффекты перестройки мантии в соответствии с новой величиной поверхностной нагрузки становятся существенными. Величина вертикального смещения при этом может быть очень большой; так, мощный ледяной щит, покрывающий Гренландию, вызвал опускание поверхности на несколько километров, в результате чего в некоторых местах она находится ниже уровня моря. Опускание поверхности, оказывающейся подо льдом, возможно вследствие того, что мантийные породы "выдаввливаются" и перетекают в горизонтальном направлении.

Во время последнего крупного оледенения Скандинавия была покрыта толстым слоем льда, который вызвал значительное опускание поверхности. Когда приблизительно 10 000 лет назад ледник растаял, поверхность Скандинавии начала подниматься. С помощью датирования испытанных поднятие пляжей оказалось возможным восстановить скорость поднятия поверхности и по этим данным определить коэффициент твердотельной вязкости мантии. На рис. 6.14 изображен процесс опускания и поднятия поверхности при наложении и снятии ледовой нагрузки.

Покажем, каким образом можно вычислить реакцию мантии на снятие ледовой нагрузки. Для этого рассмотрим течение вязкой жидкости в полупространстве $y > 0$, поверхность которого в начальный момент имеет периодическое смещение w_m :

$$w_m = w_{m0} \cos(2\pi x/\lambda), \quad (6.79)$$

где λ — длина волны ($w_m \ll \lambda$). Смещение w поверхности приводит к появлению горизонтального градиента давления, определяемого равенством типа (6.26). Если смещение направлено вверх (отрицательное w), то давление положительно. Смещение, направленное вверх, соответствует положительной нагрузке, под действием которой жидкость вытесняется из тех областей, где абсолютная величина смещения уменьшается со временем. Если смещение направлено вниз (положительное w), то давление отрицательно. Положительное w соответ-

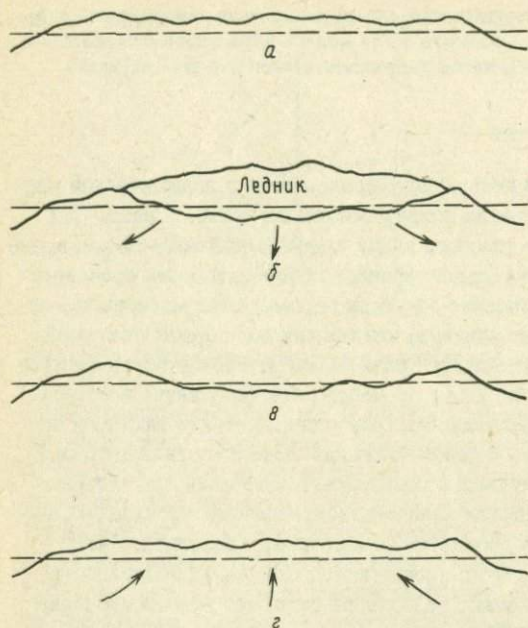


РИС. 6.14. Опускание поверхности при оледенении и поднятие (восстановление первоначального положения) после исчезновения ледникового покрова. а — до оледенения; б — опускание поверхности, вызванное ледовой нагрузкой; в — форма поверхности после таяния ледника, но до начала послеледникового поднятия; г — полное восстановление.

ствует случаю, когда поверхностная нагрузка снята и жидкость подтекает в те области, где положительная величина смещения уменьшается.

Возвращение поверхности к невозмущенному состоянию ($w = 0$) обеспечивается перетеканием вязкой жидкости в полупространстве. Течение можно описать, определив функцию тока из бигармонического уравнения. Исходное смещение поверхности описывается функцией $\cos(2\pi x/\lambda)$, и естественно предположить, что ψ зависит от x аналогичным образом по периодическому гармоническому закону. Поскольку ψ и w не связаны друг с другом непосредственно, мы не знаем заранее, какой именно функцией — $\cos(2\pi x/\lambda)$, $\sin(2\pi x/\lambda)$ или, может быть, некоторой их комбинацией — определяется зависимость ψ от x . Мы примем без доказательства, что ψ следует искать пропорциональным $\sin(2\pi x/\lambda)$. [Это, впрочем, было бы несложно показать, предположив, что ψ выражается через произвольную комбинацию $\sin(2\pi x/\lambda)$ и $\cos(2\pi x/\lambda)$.]

Следуя методу разделения переменных, будем искать решение в виде

$$\psi = \sin \frac{2\pi x}{\lambda} Y(y), \quad (6.80)$$

где $Y(y)$ — неизвестная функция. Подставляя (6.80) в бигармоническое уравнение (6.74), получим

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 Y = 0. \quad (6.81)$$

Мы пришли к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами; его решение имеет вид

$$Y \propto \exp(m y). \quad (6.82)$$

Уравнение (6.81) дает следующее уравнение для m :

$$m^4 - 2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 m^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 = [m^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2]^2 = 0, \quad (6.83)$$

откуда

$$m = \pm 2\pi/\lambda. \quad (6.84)$$

Эти два значения m определяют два возможных решения Y :

$$\exp\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right) \text{ и } \exp\left(-\frac{2\pi y}{\lambda}\right).$$

Поскольку уравнение (6.81) есть уравнение 4-го порядка, то должны существовать еще два независимых решения. Непосредственной подстановкой можно проверить, что функции

$$y \exp\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right) \text{ и } y \exp\left(-\frac{2\pi y}{\lambda}\right)$$

также удовлетворяют уравнению (6.81). Общее решение уравнения (6.81) является линейной комбинацией четырех перечисленных решений:

$$\psi = \sin \frac{2\pi x}{\lambda} (A e^{-2\pi y/\lambda} + B y e^{-2\pi y/\lambda} + C e^{2\pi y/\lambda} + D y e^{2\pi y/\lambda}), \quad (6.85)$$

где четыре произвольные постоянные A , B , C , D должны определяться из соответствующих граничных условий.

Потребуем, во-первых, чтобы решение оставалось конечным при $y \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $C = D = 0$, и выражение (6.85) для функции тока упрощается следующим образом:

$$\Psi = \sin \frac{2\pi x}{\lambda} e^{-2\pi y/\lambda} (A + B y). \quad (6.86)$$

Компоненты скорости u и v выражаются через производные ψ по формулам (6.69) и (6.70):

$$u = \sin \frac{2\pi x}{\lambda} e^{-2\pi y/\lambda} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (A + By) - B \right], \quad (6.87)$$

$$v = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} e^{-2\pi y/\lambda} (A + By). \quad (6.88)$$

Часть мантии, проявляющая в геологических масштабах времени свойства жидкости, ограничена сверху жесткой литосферой; подошва литосферы задается уравнением $y = w$. Потребуем, чтобы на этой границе выполнялось условие прилипания, т.е. условие обращения в нуль горизонтальной компоненты скорости. Вследствие того что вертикальное смещение этой границы мало ($w \ll \lambda$), можно приписать это граничное условие поверхности $y = 0$. Полагая в (6.87) $u = 0$ при $y = 0$, находим

$$B = 2\pi A/\lambda, \quad (6.89)$$

откуда

$$\psi = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} e^{-2\pi y/\lambda} \left(1 + \frac{2\pi y}{\lambda} \right), \quad (6.90)$$

$$u = A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 y e^{-2\pi y/\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad (6.91)$$

$$v = A \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} e^{-2\pi y/\lambda} \left(1 + \frac{2\pi y}{\lambda} \right). \quad (6.92)$$

Для того чтобы найти постоянную A , приравняем гидростатическое давление, создаваемое поднятием w , величине нормального напряжения в жидкости на верхней границе полупространства. Эти величины равны соответственно $-\rho g w$ и, согласно (6.61), $p - 2\mu(\partial v/\partial y)$. Ввиду малости смещения w мы можем приравнять эти величины при $y = 0$:

$$-\rho g w = p - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{при } y = 0. \quad (6.93)$$

Чтобы определить из этого равенства постоянную A , надо сначала вычислить давление и смещение при $y = 0$.

Давление можно определить, подставляя выражение (6.91) для u в условие (6.64) равновесия сил в горизонтальном направлении. Мы получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2\mu A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (6.94)$$

при $y = 0$. Интегрируя по x , находим

$$p = 2\mu A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (6.95)$$

при $y = 0$. В уравнение (6.93) входит также $\partial v / \partial y$ при $y = 0$. Эту величину можно определить, дифференцируя равенство (6.92) по y и подставляя затем $y = 0$. В результате получаем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} = 0, \quad (6.96)$$

и условие (6.93) упрощается следующим образом:

$$w_{y=0} = - \frac{2\mu A}{\rho g} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad (6.97)$$

Производная смещения w поверхности по времени есть вертикальная компонента скорости поверхности

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{y=w} = v_{y=w}, \quad (6.98)$$

или, поскольку вертикальное смещение поверхности мало ($w \ll \lambda$), мы можем написать

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{y=0} = v_{y=0}. \quad (6.99)$$

Из равенства (6.92) мы имеем

$$v_{y=0} = \frac{2\pi A}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad (6.100)$$

так что

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{y=0} = \frac{2\pi A}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (6.101)$$

Из равенств (6.97) и (6.101) следует, что величина w при $y = 0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -w \frac{\lambda \rho g}{4\pi \mu} = -w \frac{\lambda g}{4\pi \nu}, \quad (6.102)$$

интегрирование которого с начальным условием $w = w_m$ при $t = 0$ дает

$$w = w_m \exp \left(- \frac{\lambda \rho g t}{4\pi \mu} \right) = w_m \exp \left(- \frac{\lambda g t}{4\pi \nu} \right), \quad (6.103)$$

Отсюда видно, что смещение поверхности экспоненциально убывает со временем по мере того, как жидкость перетекает из областей, где имелись поднятия поверхности, в области, где поверхность была понижена. Равенство (6.103) можно переписать в виде

$$w = w_m \exp(-t/\tau_r), \quad (6.104)$$

введя характерное время τ_r релаксации исходного смещения, определяемое как

$$\tau_r = \frac{4 \pi \mu}{\rho g \lambda} = \frac{4 \pi \nu}{g \lambda}. \quad (6.105)$$

Если известно *время релаксации*, т.е. время послеледникового поднятия, то с помощью формулы (6.105) можно оценить вязкость мантии.

ЗАДАЧА 6.11. Покажите, что постоянная интегрирования A в полученном решении задачи о послеледниковом поднятии равна

$$A = -\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{\rho g w_{m0}}{2\mu} \exp(-t/\tau_r). \quad (6.106)$$

Количественная информация о скорости послеледникового поднятия получается с помощью измерения высот испытанных *поднятия береговых террас*. Образование каждой такой террасы происходит за время, достаточное для размывания берега до уровня моря. Если в какой-то момент уровень моря понижается или, наоборот, поднимается поверхность суши, то над поверхностью моря остается *прибрежная терраса*, сохраняющаяся с момента поднятия (рис. 6.15). Возраст отдельных террас определяется методом радиоуглеродной датировки до содержанию элемента ^{14}C в раковинах и древесных остатках. Измеряя высоту каждой террасы и зная ее возраст, можно определить временной закон поднятия суши. На рис. 6.16 приведены результаты таких измерений, произведенных в устье реки Ангерман в Швеции. Повышение уровня суши здесь связано с послеледниковым поднятием всей Скандинавии, начавшимся после таяния ледникового покрова. При этом учитывалось изменение самого уровня моря. Для сравнения с экспериментальными данными на рисунке сплошной кривой нанесена экспоненциальная временная зависимость (6.104). При вычислении по формуле (6.104) предполагалось, что поднятие началось 10 000 лет назад, так что t отсчитывается от момента начала поднятия к настоящему времени. Было принято, что полная величина поднятия составляет $w_{m0} = 300$ м, из которых к настоящему времени уже пройдено 270 м, а подъем еще на 30 м произойдет в будущем. Сплошная кривая на рис. 6.16 построена при $\tau_r = 4400$ лет; мы видим, что при сделанных предположениях имеется хорошее согласие теоретической кривой с фактическими данными, за исключением самых древних террас.

Указанную величину времени релаксации можно использовать для определения коэффициента вязкости мантии из уравнения (6.105). Принимая для оле-

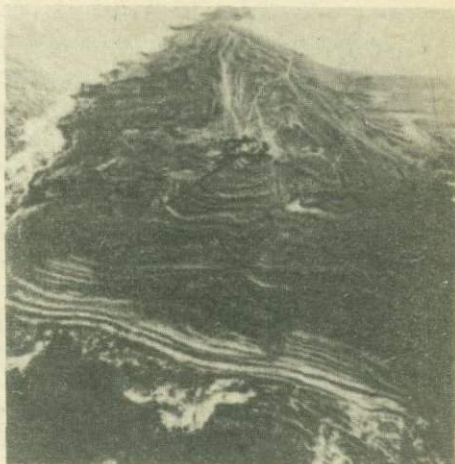


РИС. 6.15. Испытавшие поднятие береговые террасы в Остергрансхольме (восточное побережье о. Готланд, Швеция). Современная скорость поднятия составляет ~ 2 мм/год. (Фотограф и владелец авторских прав — Арне Филип, Висби, Швеция; фотография любезно предоставлена организаторами международного экостратиграфического проекта IGCP).

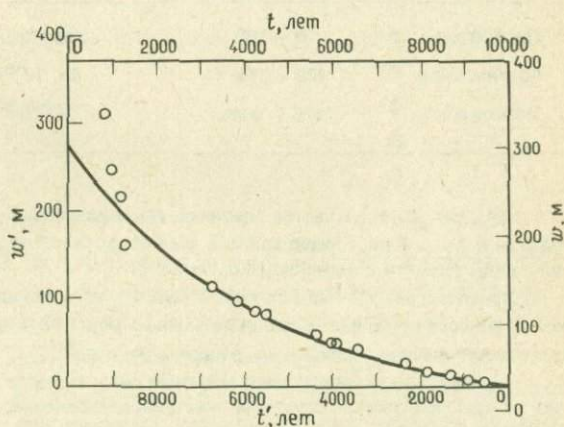


РИС. 6.16. Поднятие w устья р. Ангерман, Швеция, в функции времени t (t' — время, отсчитываемое в прошлое; шкала w' сдвинута на 30 м, соответствующие поднятию, которое еще должно произойти в будущем). Сплошной кривой показана зависимость (6.104), вытекающая из экспоненциальной модели релаксации при $w_{m0} = 300$ м, $\tau_r = 4400$ лет для подъема, начавшегося 10 тыс. лет назад.

денения Фенноскандии длину волны $\lambda = 3000$ км, при $\rho = 3300$ кг/м³, $g = 10$ м/с² и $\tau_r = 4400$ лет находим $\mu = 1,1 \cdot 10^{21}$ Па · с.

Мы рассмотрели релаксацию пространственно-периодического возмущения поверхности; однако, поскольку задача линейна, решения, соответствующие другим начальным распределениям смещений поверхности, можно получить в виде суперпозиции решений, соответствующих элементарным периодическим возмущениям поверхности в начальный момент. При более детальном исследовании послеледникового восстановления необходимо учитывать изгибную жесткость упругой литосферы и зависимость коэффициента вязкости мантии от глубины. Если в процессе поднятия продолжается таяние ледников, то надо учитывать связанное с этим повышение уровня моря. Поэтому имеющиеся данные о послеледниковых поднятиях содержат в себе изменения уровня моря в масштабе всего земного шара. Такие исследования требуют численных расчетов; результаты одного из них сведены в табл. 6.2. Из таблицы видно, что средний коэффициент вязкости мантии хорошо согласуется со значением, полученным нами выше при помощи приближенного аналитического решения.

Таблица 6.2. Распределение коэффициента вязкости в мантии по данным исследований послеледниковых поднятий (из [40])

Область	Глубина, км	Динамическая вязкость	
		Па · с	П
Литосфера	0 — 100	Упругая	—
Астеносфера	100 — 175	$4 \cdot 10^{19}$	$4 \cdot 10^{20}$
Мезосфера	175 — 2848	10^{21}	10^{22}

ЗАДАЧА 6.12. Толщина ледника, покрывавшего Гудзонов залив в Канаде, оценивается в 2 км. В настоящее время в этой области наблюдается отрицательная аномалия силы тяжести с амплитудой 0,3 мм/с².

а) Предполагая, что лед (плотность 1000 кг/м³) находился в состоянии изостатического равновесия, а плотность вытесненных мантийных пород равна 3300 кг/м³, определите величину $w_{т0}$ депрессии поверхности суши.

б) Считая, что отрицательная аномалия силы тяжести в свободном воздухе возникает за счет неполного послеледникового восстановления, определите величину w в настоящее время.

в) С помощью формул, полученных выше для периодического возмущения поверхности, определите коэффициент вязкости мантии. Считайте, что ледовый щит растаял 10 000 лет назад. Длину волны ледового покрова Гудзонова залива примите равной 5000 км.

г) Обсудите причину различия коэффициентов вязкости, полученных на основе данных о послеледниковом поднятии Скандинавии и Гудзонова залива.

6.11. Угол субдукции

В разд. 3.17 мы рассмотрели изгиб и субдукцию литосферы в области океанического желоба. Мы видели, что этот процесс происходит без разрыва литосферы, причем важнейшей движущей силой является вертикальная массовая сила тяготения, действующая на погружающуюся часть литосферы. Под действием этой силы литосфера, казалось бы, должна изгибаться под углом 90° и погружаться в мантию вертикально. Однако наблюдения свидетельствуют о том, что после изгиба и погружения на некоторый угол θ литосфера перестает изгибаться и входит в мантию, оставаясь прямой. Мы уже говорили об этом в разд. 1.4 и подробно проиллюстрировали субдукцию различных плит на рис. 1.10. Примерные значения углов падения плит при субдукции у некоторых океанических желобов приведены в табл. 6.3.

Таблица 6.3. Приблизительные значения углов субдукции у некоторых островных дуг

Островная дуга	Угол субдукции, градусы
Центрально-Чилийская	5
Северо-Чилийская	30
Южно-Чилийская	30
Хонсю	30
Идзу-Бонинская	60
Яванская	70
Ново-Гибридская	70
Рюкю	45
Антильская	50

Одним из объяснений того факта, что литосфера входит в мантию под углом, отличным от 90° , служит уравнивание гравитационной массовой силы силами давления в мантийном потоке, вызываемом движением плиты. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 6.17. Силы давления обусловлены течением вещества мантии, вызванным движением погружающейся литосферы. Динамическое давление представляет собой добавку к гидростатическому давлению. Таким образом, угол падения погружающейся литосферы определяется равновесием моментов сил гравитационного притяжения и давления, поднимающего плиту.

Силы давления, действующие на погружающийся блок литосферы, можно вычислить с помощью двумерной модели обтекания клина вязкой жидкостью

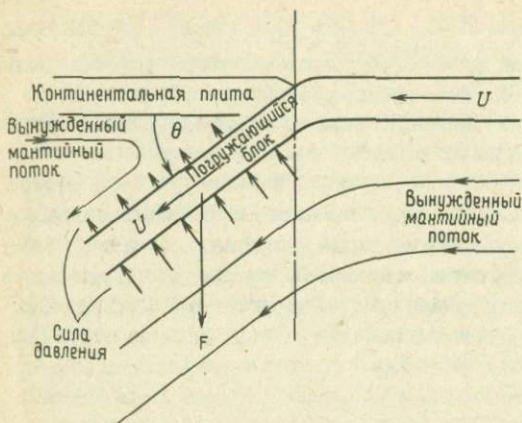


РИС. 6.17. Силы, действующие на погружающуюся литосферу. F — массовая гравитационная сила, θ — угол субдукции.

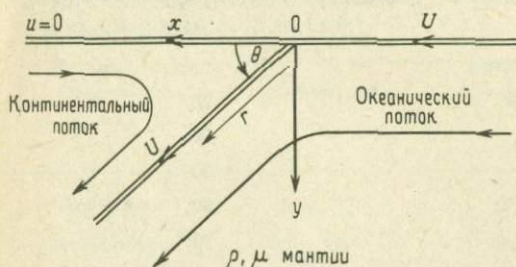


РИС. 6.18. Модель обтекания клина вязкой жидкостью, применяемая для вычисления сил давления, действующих на погружающуюся литосферу со стороны вынужденных мантийных потоков. θ — угол субдукции.

(рис. 6.18). Рассмотрим движение поверхности $y = 0$, $x < 0$, происходящее с постоянной скоростью U в направлении к желобу, положение которого задается равенством $x = 0$; поверхность $y = 0$, $x > 0$ при этом покоится. Опускающаяся литосфера в этой модели представлена прямой, направленной из начала координат вниз под углом θ по отношению к положительному направлению оси x ; скорость течения вдоль этой прямой также равна U . Обозначим через r расстояние, отсчитываемое вдоль погружающейся поверхности, которая делит мантию (моделируемую вязкой жидкостью) на две части: континентальную и океаническую (рис. 6.18). Движение вязкой жидкости, образующей океанический поток (под погружающейся литосферой), вызывается движением границы $y = 0$, $x < 0$ и плоскости, погружающейся в мантию, а движение жидкости, образующей континентальный поток (над погружающейся литосферой), вызывается только дви-

жением самой этой плоскости. Нашей задачей будет определение движения жидкости внутри обоих потоков и вычисление давления, создаваемого движущейся жидкостью с обеих сторон погружающейся плоскости.

Функции тока для случая обтекания клиньев (или течения внутри клиньев) удовлетворяют бигармоническому уравнению (6.74). Для течений такой геометрии ψ следует искать в виде

$$\psi = (Ax + By) + (Cx + Dy)\arctg(y/x), \quad (6.107)$$

где A , B , C и D – постоянные, определяемые из граничных условий. Мы должны определить две функции тока для течений под и над погружающейся литосферой, каждую вида (6.107) со своим набором постоянных A , B , C и D . Значения постоянных для этих двух функций тока будут различны, поскольку углы, внутри которых заключены потоки, не равны друг другу, и граничные условия на их сторонах различны. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция вида (6.107) действительно удовлетворяет бигармоническому уравнению (6.74). При этом следует воспользоваться равенствами

$$\frac{\partial}{\partial y} \arctg \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + y^2/x^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (6.108)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctg \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + y^2/x^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (6.109)$$

Компоненты скорости, соответствующие функции тока (6.107), вычисляются с помощью (6.69) и (6.70):

$$u = -B - D \arctg \frac{y}{x} + (Cx + Dy) \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad (6.110)$$

$$v = A + C \arctg \frac{y}{x} + (Cx + Dy) \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right). \quad (6.111)$$

Для определения давления подставим (6.110) в (6.67) и проинтегрируем полученное выражение для $\partial P/\partial x$. Можно было бы воспользоваться равенствами (6.111) и (6.68) и вычислить давление интегрированием выражения для $\partial P/\partial y$. В результате получим

$$P = -\frac{2\mu(Cx + Dy)}{x^2 + y^2}. \quad (6.112)$$

Найденное давление P представляет собой негидростатическую добавку к гидростатическому давлению. Величина P есть, следовательно, динамическое давление, возникающее за счет течения.

Поскольку общие выражения для постоянных интегрирования являются весьма громоздкими, мы вычислим их для конкретного значения угла погруже-

ния литосферы. Рассмотрим, например, угол $\pi/4$, соответствующий плите, которая погружается вдоль дуги Рюкю. Граничные условия для района мантии над погружающейся литосферой имеют вид

$$u = v = 0 \text{ при } y = 0, \quad x > 0, \text{ или } \arctg(y/x) = 0, \quad (6.113)$$

$$u = v = U\sqrt{2}/2 \text{ при } y = x, \text{ или } \arctg(y/x) = \pi/4. \quad (6.114)$$

Из этих условий определяются постоянные C и D для течения внутри континентального угла:

$$C = - \frac{\pi U \sqrt{2}}{2(2 - \pi^2/4)}, \quad (6.115)$$

$$D = - \frac{U \sqrt{2} (2 - \pi/2)}{2 - \pi^2/4}. \quad (6.116)$$

Распределение давления внутри континентального угла есть

$$P_{\text{cont}} = \frac{\mu U \sqrt{2} [\pi x + (4 - \pi)y]}{(2 - \pi^2/4)(x^2 + y^2)}. \quad (6.117)$$

На поверхности погружающейся плиты $x = y$ и

$$x = y = r\sqrt{2}/2, \quad (6.118)$$

откуда давление на верхней грани погружающегося блока равно

$$P = \frac{4\mu U}{(2 - \pi^2/4)r} = -8,558 \frac{\mu U}{r}. \quad (6.119)$$

Отрицательное значение давления в потоке на верхней границе опускающегося блока означает, что на верхнюю грань действует *подсасывающая сила*, противодействующая силе тяжести и стремящаяся поднять блок. Сила давления меняется с расстоянием r вдоль блока по закону $1/r$ и имеет в данной идеализированной модели особенность при $r \rightarrow 0$. Однако *момент подъемной силы*, равный интегралу от произведения rP по верхней грани блока, не содержит в подынтегральном выражении особенности. Момент подъемной силы, действующей на границу длины блока, есть величина постоянная, а полный момент, действующий на блок, пропорционален длине блока.

Выясним теперь распределение давления на нижней поверхности блока. Граничные условия для течения под погружающейся литосферой имеют вид

$$u = U, \quad v = 0 \text{ при } y = 0, \quad x < 0, \text{ или } \arctg(y/x) = \pi, \quad (6.120)$$

$$u = v = U\sqrt{2}/2 \text{ при } y = x, \text{ или } \arctg(y/x) = \pi/4. \quad (6.121)$$

Подставляя (6.110) и (6.111) в (6.120) и (6.121), получаем

$$C = \frac{U}{9\pi^2/4 - 2} \left[2 - \frac{\sqrt{2}}{1 + 3\pi/2} \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{9\pi^2}{4} \right) \right], \quad (6.122)$$

$$D = \frac{U}{9\pi^2/4 - 2} \left[\sqrt{2} \left(2 + \frac{3\pi}{2} \right) - 2 \left(1 + \frac{3\pi}{2} \right) \right]. \quad (6.123)$$

Чтобы найти распределение давления под погружающейся литосферой, нужно подставить полученные выражения для C и D в равенство (6.112). Распределение давления на нижней поверхности погружающегося блока получается из (6.112) при x и y , удовлетворяющих условию (6.118):

$$P = \frac{\mu U}{r} \frac{3\pi\sqrt{2} - 4}{9\pi^2/4 - 2} = 0,462 \frac{\mu U}{r}. \quad (6.124)$$

Положительная величина P означает, что негидростатическое давление, действующее на нижнюю поверхность блока, также создает подъемный момент. Момент, приходящийся на единицу длины блока, отсчитываемой вдоль направления r , есть величина постоянная. Полный подъемный момент, действующий на блок, равен сумме моментов сил давления, приложенных к верхней и нижней поверхностям блока. Из сравнения выражений (6.119) и (6.124) видно, что момент подсасывающих сил давления, действующих на блок сверху, намного превосходит момент подпирающих сил, действующих снизу.

ЗАДАЧА 6.13. Вычислите распределение скоростей в потоке над и под погружающейся литосферой. Считайте, что движение жидкости вызывается блоком, опускающимся в глубь мантии со скоростью U под углом $\pi/4$.

ЗАДАЧА 6.14. Выведите выражения для моментов подъемных сил, действующих на верхнюю и нижнюю поверхности блока, опускающегося в мантию со скоростью U под углом 60° к горизонту.

6.12. Диapiroизм

В двух предыдущих разделах мы применили уравнения медленного течения вязкой жидкости для расчета течений в мантии. Рассмотрим теперь несколько задач о течении пород коры. Первым явлением, которое мы рассчитаем, будет *диapiroизм*, или поднятие относительно легких пород за счет сил плавучести. Когда более легкая порода поднимается в область, занятую вышележащей более тяжелой породой, то из легкой породы образуется *диапир*. Одним из примеров диapiroизма является формирование *соляных куполов*, происходящее за счет того, что соль обладает меньшей плотностью, чем другие типичные осадочные породы. Процесс образования соляных куполов показан на рис. 6.19. Вначале на поверхности происходит отложение соли, остающейся после испарения морской воды (рис. 6.19, а). В результате последующего осадконакопления соляной слой покрывается другими, более тяжелыми осадочными породами,

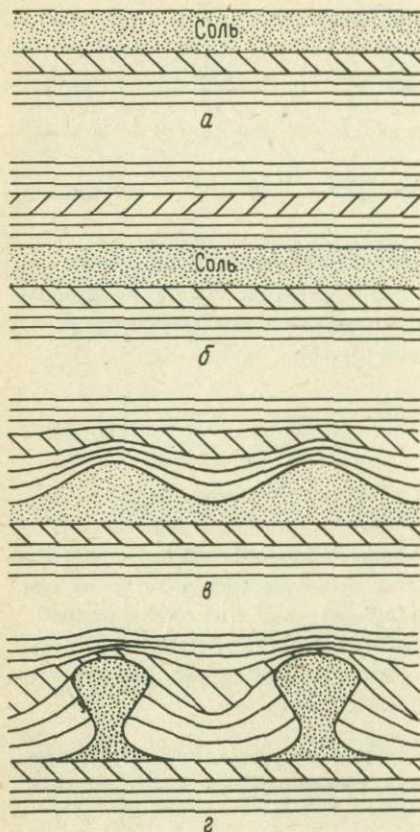


РИС. 6.19. Диализм: образование соляных куполов благодаря гравитационной неустойчивости соляного слоя малой плотности, погребенного под более тяжелыми осадочными породами. *а* — отложение соляного слоя; *б* — погребение соляного слоя под осадочными породами; *в* — развитие неустойчивости соляного слоя; *г* — образование соляных куполов.

такими, как глины и песчаники (рис. 6.19, *б*). Пока глубина залегания соли невелика и его предел текучести превышает давление вышележащих слоев, гравитационная неустойчивость не развивается. Но по мере того, как из-за продолжающегося осадконакопления глубина залегания соли увеличивается, происходит рост температуры соли за счет геотермического градиента. Вследствие этого термически активизируются процессы ползучести, которые обуславливают возможность перетекания соли вверх и замещения ее более тяжелыми вышележащими осадочными породами. В конце концов направленный вверх поток соли образует ряд соляных куполов.



РИС. 6.20. Спутниковая фотография соляных куполов (темные округлые области) в горах Загрос в Иране.

На рис. 6.20 приведена фотография соляных куполов в горах Загрос в Иране. В местах образования соляных куполов облегчается поиск газа и нефти. Это связано с тем, что поднимающиеся соляные купола деформируют вышележащие слои пород, и в них образуются непроницаемые ловушки для поднимающихся вверх газа и нефти. Над соляными куполами открыто много нефтяных и газовых месторождений.

Имеются и другие примеры диапиризма в породах земной коры. За счет повышения теплового потока и вулканизма в горных поясах происходит нагревание коровых пород до температур, достаточных для возникновения в них процессов твердотельной ползучести, благодаря которым породы приобретают свойство текучести. Если породы, нагреваемые на достаточной глубине, оказываются легче вышележащих пород, то нагретые породы будут течь вверх и образовывать диапиры точно так же, как образуются соляные купола. Если в дальнейшем происходит эрозия горного пояса, то диапиризм обнаруживается на поверхности по наличию метаморфических пород.

Для количественного исследования диапиризма можно применить тот же метод, который мы уже использовали при расчете послеледниковых поднятий. Геометрия решаемой задачи показана на рис. 6.21. Слой жидкости толщиной b и плотностью ρ_1 лежит на слое другой жидкости, толщина которого тоже равна b , но плотность ρ_2 . Жидкости имеют одинаковый коэффициент вязкости μ . Верхняя граница верхнего слоя и нижняя граница нижнего представляют собой жесткие поверхности. Поскольку нас интересует случай неустойчивости, то мы будем предполагать, что $\rho_1 > \rho_2$. Гравитационная неустойчивость тя-

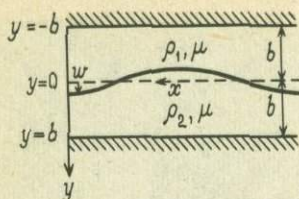


РИС. 6.21. Неустойчивость Рэлея – Тэйлора плотной жидкости, находящейся над более легкой жидкостью.

желой жидкости, лежащей на более легкой, называется *неустойчивостью Рэлея – Тэйлора*.

Пусть уравнение невозмущенной поверхности раздела жидкостей имеет вид $y = 0$. Тогда уравнение верхней и нижней жестких границ есть $y = -b$ и $y = b$ соответственно. Вследствие гравитационной неустойчивости равновесного состояния системы происходит искажение формы поверхности раздела, и жидкость приходит в движение. Обозначим смещение границы раздела жидкостей в возмущенном состоянии через w . Будем предполагать, что функция w имеет вид (6.79). Функцию тока ψ_1 , описывающую движение верхней жидкости, можно взять в форме (6.85), в которой мы заменим экспоненциальные функции гиперболическими:

$$\begin{aligned} \psi_1 = \sin \frac{2\pi x}{\lambda} & \left(A_1 \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{\lambda} + B_1 \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{\lambda} + \right. \\ & \left. + C_1 y \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{\lambda} + D_1 y \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (6.125)$$

Аналогично записывается функция тока ψ_2 для нижнего слоя:

$$\begin{aligned} \psi_2 = \sin \frac{2\pi x}{\lambda} & \left(A_2 \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{\lambda} + B_2 \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{\lambda} + \right. \\ & \left. + C_2 y \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{\lambda} + D_2 y \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (6.126)$$

Компоненты скорости в слоях жидкости определяются через производные функций тока (6.125) и (6.126) по формулам (6.69) и (6.70):

$$\begin{aligned} u_1 = - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} & \left[\left(A_1 + C_1 y + \frac{\lambda D_1}{2\pi} \right) \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{\lambda} + \right. \\ & \left. + \left(B_1 + D_1 y + \frac{\lambda C_1}{2\pi} \right) \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{\lambda} \right], \end{aligned} \quad (6.127)$$

$$v_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} [(A_1 + C_1 y) \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{\lambda} + (B_1 + D_1 y) \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{\lambda}], \quad (6.128)$$

$$u_2 = -\frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} [(A_2 + C_2 y + \frac{\lambda D_2}{2\pi}) \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{\lambda} + (B_2 + D_2 y + \frac{\lambda C_2}{2\pi}) \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{\lambda}], \quad (6.129)$$

$$v_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} [(A_2 + C_2 y) \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{\lambda} + (B_2 + D_2 y) \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{\lambda}], \quad (6.130)$$

В качестве граничных условий для определения постоянных интегрирования используем условия прилипания на поверхностях $y = \pm b$:

$$u_1 = v_1 = 0 \quad \text{при} \quad y = -b, \quad (6.131)$$

$$u_2 = v_2 = 0 \quad \text{при} \quad y = b \quad (6.132)$$

и условие непрерывности компонент u и v на границе раздела. Для малых смещений границы ($\omega \ll \lambda$) можно поставить условие непрерывности u и v на невозмущенной поверхности $y = 0$:

$$u_1 = u_2 \quad \text{и} \quad v_1 = v_2 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (6.133)$$

Перечисленные граничные условия применительно к решению вида (6.127) – (6.130) дают

$$B_1 + \frac{\lambda C_1}{2\pi} = B_2 + \frac{\lambda C_2}{2\pi}, \quad (6.134)$$

$$A_1 = A_2, \quad (6.135)$$

$$(A_1 - bC_1 + \frac{\lambda D_1}{2\pi}) \operatorname{th} \frac{2\pi b}{\lambda} = B_1 - bD_1 + \frac{\lambda C_1}{2\pi}, \quad (6.136)$$

$$(B_1 - bD_1) \operatorname{th} \frac{2\pi b}{\lambda} = A_1 - bC_1, \quad (6.137)$$

$$(A_2 + bC_2 + \frac{\lambda D_2}{2\pi}) \operatorname{th} \frac{2\pi b}{\lambda} = -B_2 - bD_2 - \frac{\lambda C_2}{2\pi}, \quad (6.138)$$

$$(B_2 + bD_2) \operatorname{th} \frac{2\pi b}{\lambda} = -A_2 - bC_2. \quad (6.139)$$

Помимо компонент скорости на границе раздела слоев жидкости должно быть непрерывно сдвиговое напряжение. При $w \ll \lambda$ и равенстве коэффициентов вязкости обеих жидкостей условие непрерывности сдвигового напряжения записывается в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad \text{при } y = 0, \quad (6.140)$$

где для сдвигового напряжения мы использовали выражение (6.58). Поскольку из непрерывности v при $y = 0$ следует непрерывность производной $\partial v / \partial x$, мы можем переписать (6.140) в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y} \quad \text{при } y = 0, \quad (6.141)$$

откуда следует, что

$$\left(A_1 + \frac{\lambda D_1}{2\pi} \right) + \frac{\lambda D_1}{2\pi} = \left(A_2 + \frac{\lambda D_2}{2\pi} \right) + \frac{\lambda D_2}{2\pi}, \quad (6.142)$$

или, при $A_1 = A_2$,

$$D_1 = D_2. \quad (6.143)$$

Вычитая равенство (6.137) из (6.139), а (6.136) из (6.138) и объединяя полученные результаты, мы получим

$$0 = (C_1 + C_2) \left[1 + \frac{2\pi b}{\lambda} \left(\operatorname{th} \frac{2\pi b}{\lambda} - \operatorname{cth} \frac{2\pi b}{\lambda} \right) \right]. \quad (6.144)$$

Условие (6.144) должно выполняться при произвольных $2\pi b / \lambda$; это возможно только в том случае, если

$$C_1^1 = -C_2. \quad (6.145)$$

Складывая равенства (6.137) и (6.139), с учетом (6.145) имеем

$$B_1 = -B_2. \quad (6.146)$$

Подставляя (6.145) и (6.146) в (6.134), находим

$$B_1 = -\lambda C_1 / 2\pi. \quad (6.147)$$

Теперь все постоянные интегрирования можно выразить через A_1 посредством равенств (6.136), (6.137) и (6.147). После некоторых алгебраических преобразований мы получим функцию тока в верхнем слое в виде

$$\begin{aligned} \psi_1 = & A_1 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{\lambda} + \\ & + A_1 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \left[\frac{y}{b} \left(\frac{\lambda}{2\pi b} \right) \operatorname{th} \frac{2\pi b}{\lambda} \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{\lambda} + \right. \\ & + \left. \left(\frac{y}{b} \operatorname{ch} \frac{2\pi y}{\lambda} - \frac{\lambda}{2\pi b} \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{\lambda} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(\frac{\lambda}{2\pi b} + \frac{1}{\operatorname{sh}(2\pi b/\lambda) \operatorname{ch}(2\pi b/\lambda)} \right) \right] \times \\ & \times \left[\frac{1}{\operatorname{sh}(2\pi b/\lambda) \operatorname{ch}(2\pi b/\lambda)} - \left(\frac{\lambda}{2\pi b} \right)^2 \operatorname{th} \frac{2\pi b}{\lambda} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (6.148)$$

Выражение для ψ_2 получается из формулы (6.148) заменой y на $-y$.

С помощью найденных выражений для функций тока можно получить уравнение, описывающее движение границы раздела жидкостей. Для этого следует воспользоваться условием отсутствия промежутка между слоями. Согласно этому условию, скорость $\partial w / \partial t$ перемещения границы должна быть равна вертикальной компоненте скорости жидкости. Для малых смещений границы это условие можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = v_y = 0. \quad (6.149)$$

Вертикальная компонента скорости v вычисляется из выражения (6.148) как производная функции тока по x . Производная дифференцирование и подставляя $y = 0$, из (6.149) получаем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{2\pi A_1}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (6.150)$$

Чтобы исключить из уравнения движения границы раздела постоянную A_1 , обратимся к физическому механизму развития неустойчивости. Движущей силой, приводящей к реализации неустойчивости, является сила плавучести, возникающая при смещении границы. Рассмотрим два столба жидкости: один — с невозмущенным положением границы и второй — с границей, смещенной вниз (рис. 6.22). Благодаря смещению границы жидкость плотности ρ_2 в интервале между плоскостями $y = 0$ и $y = w$ замещается жидкостью плотности ρ_1 . Дополнительный вес $(\rho_1 - \rho_2)gw$ создает нормальное напряжение, или

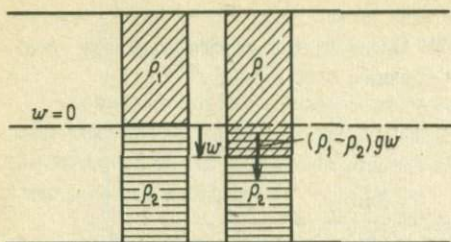


РИС. 6.22. Сила плавучести, возникающая при смещении границы двух жидкостей.

давление, на возмущенной поверхности. Это давление должно уравновешиваться разностью нормальных напряжений, действующих на границу в верхней и нижней средах и обусловленных давлением в жидкости, и разностью нормальных вязких напряжений. Вследствие малости смещения границы можно вычислить эти напряжения при $y = 0$. Согласно формуле (6.57), нормальное вязкое напряжение при $y = 0$ равно $2\mu (\partial v / \partial y)_{y=0}$. Дифференцируя выражение (6.148) по x и по y и вычисляя производную при $y = 0$, можно убедиться в том, что эта величина равна нулю. Следовательно, сила плавучести, возникающая из-за смещения поверхности раздела, уравновешивается только разностью сил давления, приложенных к поверхности. Это условие можно записать как

$$(\rho_1 - \rho_2)gw = (P_2 - P_1)_{y=0} \quad (6.151)$$

Равенство (6.151) устанавливает вторую связь между w и полем скорости, которая позволяет выразить w через A_1 и таким образом получить из (6.150) уравнение для w .

Давление в потоке жидкости в верхнем слое при $y = 0$ получается с помощью выражений (6.148) и (6.72):

$$(P_1)_{y=0} = \frac{2\mu A_1}{b} \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{\lambda}{2\pi b} + \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)} \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)} - \left(\frac{\lambda}{2\pi b}\right)^2 \operatorname{th} \frac{2\pi b}{\lambda} \right]^{-1} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (6.152)$$

Выполняя те же вычисления для ψ_2 , находим

$$(P_2)_{y=0} = - (P_1)_{y=0} \quad (6.153)$$

Равенство (6.151) принимает вид

$$(\rho_1 - \rho_2)gw = - 2(P_1)_{y=0} \quad (6.154)$$

Соотношение (6.154) показывает, что направленное вниз смещение границы раздела двух жидкостей, из которых верхняя тяжелее нижней ($\rho_1 > \rho_2$), вызывает появление в верхней жидкости отрицательного давления. Это способствует дальнейшему опусканию границы раздела, в результате чего развивается неустойчивость. Подставляя (6.152) в (6.154), мы получаем

$$\begin{aligned}
 (\rho_1 - \rho_2)gw = & - \frac{4\mu A_1}{b} \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \times \\
 & \times \left[\frac{\lambda}{2\pi b} + \frac{1}{\text{sh}(2\pi b/\lambda)\text{ch}(2\pi b/\lambda)} \right] \times \\
 & \times \left[\frac{1}{\text{sh}(2\pi b/\lambda)\text{ch}(2\pi b/\lambda)} - \left(\frac{\lambda}{2\pi b} \right)^2 \text{th} \frac{2\pi b}{\lambda} \right]^{-1} \quad (6.155)
 \end{aligned}$$

Выражая отсюда A_1 и подставляя его в уравнение (6.150), мы приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial t} = & \frac{(\rho_1 - \rho_2)gb}{4\mu} \times \\
 & \left(\frac{\lambda}{2\pi b} \right)^2 \text{th} \frac{2\pi b}{\lambda} - \frac{1}{\text{sh}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)\text{ch}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)} \quad (6.156) \\
 & \times \frac{\frac{\lambda}{2\pi b} + \frac{1}{\text{sh}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)\text{ch}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)}}{\frac{\lambda}{2\pi b} + \frac{1}{\text{sh}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)\text{ch}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)}} w,
 \end{aligned}$$

решение которого имеет вид

$$w = w_0 \exp(t/\tau_a), \quad (6.157)$$

где

$$\begin{aligned}
 \tau_a = & \frac{4\mu}{(\rho_1 - \rho_2)gb} \frac{\frac{\lambda}{2\pi b} + \frac{1}{\text{sh}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)\text{ch}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)}}{\left(\frac{\lambda}{2\pi b} \right)^2 \text{th} \frac{2\pi b}{\lambda} - \frac{1}{\text{sh}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)\text{ch}\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)}}. \quad (6.158)
 \end{aligned}$$

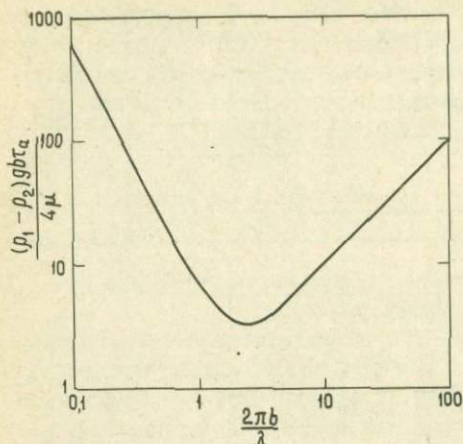


РИС. 6.23. Безразмерное время нарастания возмущения как функция безразмерного волнового числа для неустойчивости Рэлея – Тэйлора.

Величина τ_a представляет собой характерное время нарастания (при $\rho_1 > \rho_2$) возмущения. Значение τ_a зависит от длины волны λ возмущения границы раздела. Зависимость безразмерного времени нарастания $(\rho_1 - \rho_2) g b \tau_a / 4\mu$ от безразмерного волнового числа $2\pi b / \lambda$ показана на рис. 6.23. При $\rho_1 > \rho_2$, т.е. в том случае, если сверху находится тяжелая жидкость, а снизу – легкая, величина τ_a положительна и граница раздела всегда неустойчива. Если сверху находится легкая жидкость ($\rho_1 < \rho_2$), то $\tau_a < 0$ при всех λ и граница раздела устойчива. Из равенства (6.158) видно, что в пределе большой длины волны

$$\tau_a \rightarrow \frac{24\mu}{(\rho_1 - \rho_2) g b} \left(\frac{\lambda}{2\pi b} \right)^2 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad (6.159)$$

а в пределе малой длины волны

$$\tau_a \rightarrow \frac{4\mu}{(\rho_1 - \rho_2) g b} \frac{2\pi b}{\lambda} \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0. \quad (6.160)$$

Асимптотическое стремление τ_a к степенным функциям при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ видно на рис. 6.23.

В случае если сверху расположен слой тяжелой жидкости и равновесное состояние неустойчиво, наиболее быстро растет возмущение с наименьшим временем нарастания τ_a . Длина волны, соответствующая минимальному значению τ_a , равна

$$\lambda = 2,568 b. \quad (6.161)$$

Величину времени нарастания преобладающего возмущения можно вычислить по формуле (6.158) при λ , определяемом равенством (6.161):

$$\tau_a^{(\min)} = \frac{13,04\mu}{(\rho_1 - \rho_2)gb} \quad (6.162)$$

Отсюда видно, что, чем более вязки жидкости и чем меньше различаются их плотности, тем больше $\tau_a^{(\min)}$, т.е. тем медленнее нарастает неустойчивость.

Хотя мы рассмотрели задачу о неустойчивости для малых возмущений границы, тем не менее можно ожидать, что длина волны наиболее быстро растущего малого возмущения окажется близка к расстоянию между ближайшими, полностью сформировавшимися диапирами. Действительно, на карте распределения соляных куполов в северной Германии (рис. 6.24) видно, что расстояния между соседними соляными куполами составляют $\sim 10 - 15$ км, а глубина залегания соляного слоя там ~ 5 км, в хорошем согласии с равенством (6.161).

ЗАДАЧА 6.15. Слой соли плотностью 2150 кг/м^3 залегает на глубине 3 км под толщей осадков плотностью 2600 кг/м^3 . Известно, что амплитуда неустойчивости слоя соли удваивается за 100 000 лет. Каков эквивалентный коэффициент вязкости системы?

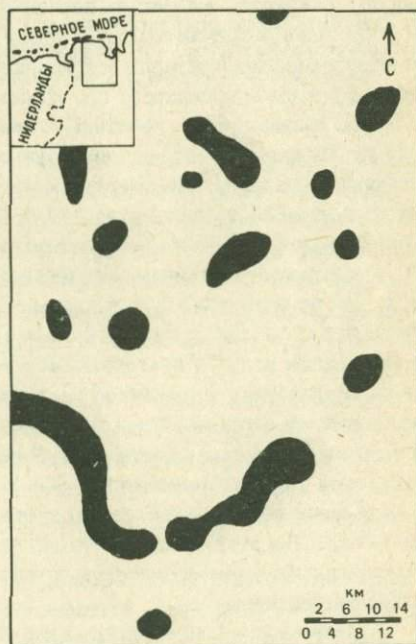


РИС. 6.24. Распределение соляных куполов в северной Германии.

ЗАДАЧА 6.16. Предположим, что разрыв плотности в мантии на глубине 650 км соответствует изменению состава, причем более легкие породы расположены над более тяжелыми. Оцените минимальное время, за которое затухает возмущение положения этой границы. Примите $\rho = 4000 \text{ кг/м}^3$, $\Delta\rho = 100 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 3 \cdot 10^{20} \text{ Па} \cdot \text{с}$

ЗАДАЧА 6.17. Каким образом следует изменить вычисления, проведенные в настоящем разделе, чтобы учесть различие в коэффициентах вязкости двух слоев жидкости?

6.13. Складкообразование

Образование складок в породах земной коры может происходить в самых различных масштабах. Складки наибольшего масштаба образуют ряды параллельных горных хребтов (см. рис. 1.41). В этом наибольшем масштабе складка, направленная вогнутостью вверх, называется *синклинорием*. Породы, смятые в складки такого типа, как правило, являются осадочными породами, причем более молодые породы обычно залегают в изгибе, образованном более древними породами. Складки такого же масштаба, но с выпуклостью, направленной вверх, называются *антиклинориями*. В результате эрозии крупномасштабных складок часто образуется топография, состоящая из *долин и хребтов*, какая, например, имеется в штатах Пенсильвания и Западная Виргиния (см. рис. 1.42). Долины в этом случае образуются вследствие эрозии глинистых пород, а хребты состоят из песчаника, более устойчивого к эрозии.

Складки встречаются как в осадочных, так и в метаморфических породах, а их минимальные размеры могут составлять несколько сантиметров. Образование складок происходит при самых разнообразных условиях, но в основном они возникают под действием *сжимающих тектонических сил*. Процесс складкообразования ставит два важных вопроса: во-первых, почему происходит деформация пород, а во-вторых, почему порода деформируется именно так, что при этом образуются складки? Действительно, тот факт, что относительно холодные осадочные породы текут и сминаются в складки, а не разрушаются, кажется удивительным. Реология смятых в складки осадочных пород еще до конца не ясна, однако можно думать, что важную роль здесь играет *компрессионная ползучесть при растворении*. Дело в том, что осадочные породы часто насыщены водой. *Растворимость* минералов (например, кварца) в воде зависит от давления и температуры. Если к породе приложены неоднородные напряжения, то в тех местах, где напряжения велики, минералы растворяются, а там, где они малы, осаждаются. В результате происходит деформация породы. Такой тип ползучести осадочных пород приводит к линейному соотношению между напряжением и скоростью деформации, т.е. к ньютоновскому поведению жидкости. Для этой жидкости можно ввести понятие коэффициента вязкости. Более подробно компрессионную ползучесть при растворении мы рассмотрим в следующей главе.

Смятые в складки осадочные или метаморфические породы обычно имеют предварительно сформированную слоистую структуру. При складкообразова-

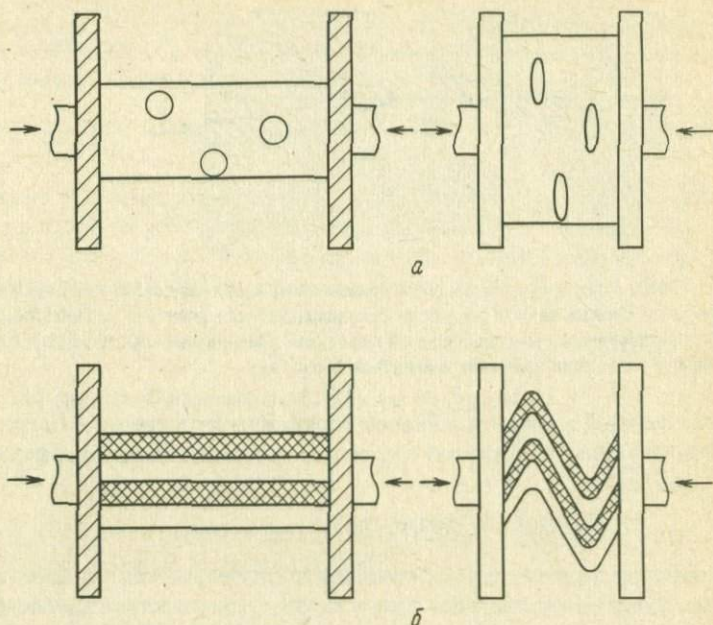


РИС. 6.25. а — сжатие однородной среды. Сжатие такого типа часто можно распознать по уплощению сферических включений в породах. б — складкообразование при сжатии слоистой среды, состоящей из жестких (компетентных) и более слабых (некомпетентных) пород.

нии, как правило, проявляются значительные различия материальных свойств смежных слоев. При сжатии однородной среды происходит однородная деформация (рис. 6.25, а). Однако если среда состоит из последовательности более жестких и более мягких слоев, то при сжатии образуются складки (рис. 6.25, б). Более жесткие слои называют *компетентными*; они могут быть сложены, например, известняком. Более мягкие слои называют *некомпетентными*; примером служит песчаник. Заметим, что прочность и устойчивость к эрозии не обязательно взаимосвязаны.

С целью количественного исследования складкообразования рассмотрим *упругий* (компетентный) слой толщиной h , заключенный между двумя полубесконечными слоями ньютоновской вязкой жидкости (некомпетентными). Под действием нагрузки \bar{P} , приложенной к концам упругого слоя, он начнет выгибаться, но его деформация будет при этом ограничиваться окружающей его жидкостью (рис. 6.26).

В разд. 3.11 мы уже рассмотрели деформацию тонкой упругой пластины, нагруженной с концов. Изгиб пластины описывается уравнением (3.74). Распределенная нагрузка $q(x)$, приложенная к единице поверхности пластины, в нашем случае обусловлена нормальными напряжениями, возникающими за

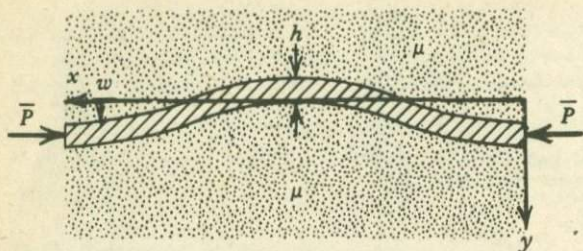


РИС. 6.26. Упругая пластина толщиной h , заключенная между двумя полубесконечными слоями вязкой жидкости с коэффициентом вязкости μ . Продольная нагрузка P , приложенная к концам упругой пластины, увеличивается, и при достаточном значении P пластина начинает сминаться в складку.

счет течений в верхнем и нижнем слоях. Жидкость сверху и снизу заполняет полупространство с каждой стороны от пластины. Запишем деформацию пластины в виде

$$w = w_m \cos(2\pi x/\lambda) \exp(t/\tau_a). \quad (6.163)$$

Поскольку пластина служит границей полупространств, заполненных жидкостью, смещения на границах жидкости тоже описываются гармоническим законом. Математически задача о течении жидкости в данной постановке тождественна задаче о последельниковом восстановлении, рассмотренной в разд. 6.10. Поэтому мы можем непосредственно воспользоваться полученными там результатами.

Из соображений симметрии понятно, что решения над и под пластиной совпадают. Поэтому мы рассмотрим только течение жидкости под пластиной. Введем систему координат с осью y , начинающейся на нижней границе пластины и направленной вниз. Решение бигармонического уравнения, соответствующее поставленному граничному условию, имеет вид (6.85). Из условия конечности значений скорости при $y \rightarrow \infty$ опять следует, что $C = D = 0$. Жесткость упругой пластины означает, что на ее поверхности $u = 0$, а поскольку мы снова будем предполагать, что $w \ll \lambda$, то это граничное условие можно поставить на поверхности $y = 0$. Поэтому для течения жидкости под пластиной справедлива формула (6.90). Согласно равенству (6.95), для давления P_b в основании пластины (вычисленном при $y = 0$) можно написать

$$P_b = 2A\mu \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cos \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (6.164)$$

С помощью (6.101) величину P_b можно выразить через w как

$$P_b = 2\mu \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (6.165)$$

Давление P_T , действующее на верхнюю грань пластины и направленное вниз, связано с давлением P_b , действующим на нижнюю грань пластины и направленным вверх, следующим соотношением:

$$P_T(x) = -P_b(x), \quad (6.166)$$

которое вытекает из симметрии течений над и под пластиной; в предыдущем разделе мы уже получили этот результат [формула (6.153)]. В соответствии с (6.96) величина $\partial v / \partial y$ при $y = 0$ обращается в нуль, и, следовательно, нормальное вязкое напряжение, действующее на пластину, равно

$$q = P_T - P_b = -2P_b. \quad (6.167)$$

Подставляя в это равенство выражение (6.165) для P_b , получим

$$q(x, t) = -4\mu \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t}. \quad (6.168)$$

Отклонение упругой пластины теперь может быть найдено как решение уравнения (3.74) с распределенной нагрузкой (6.168):

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \bar{P} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -4\mu \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (6.169)$$

где D — изгибная жесткость пластины, определяемая равенством (3.72). Подставляя (6.163) в (6.169), находим

$$\tau_a = - \frac{4\mu}{(2\pi/\lambda)[D(2\pi/\lambda)^2 - \bar{P}]} \quad (6.170)$$

Длину волны λ_c , соответствующую минимальному значению τ_a , можно найти приравняв производную от τ_a по λ к нулю; в результате получается

$$\lambda = 2\pi \left(\frac{3D}{\bar{P}} \right)^{1/4}. \quad (6.171)$$

Это есть длина волны наиболее быстро растущего возмущения. Подставляя в (6.171) выражение (3.72) для D и записывая \bar{P} в виде

$$\bar{P} = \sigma h, \quad (6.172)$$

где σ — напряжение в упругом слое, обусловленное приложенной к концам нагрузкой, мы находим

$$\lambda = \pi h \left[\frac{E}{\sigma(1-\nu^2)} \right]^{1/4}. \quad (6.173)$$

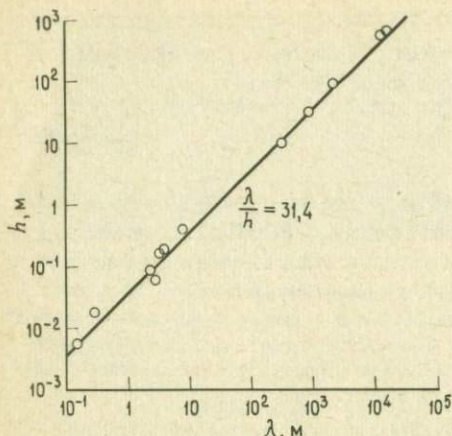


РИС. 6.27. Зависимость толщины преобладающего слоя складки от длины волны. Кружки — данные из [41]; прямая — зависимость (6.173).

Можно ожидать, что при смятии слоя упругой породы, окруженной текучей породой, возникают складки, исходная длина волны которых зависит от толщины упругого слоя и приложенной нагрузки по закону (6.173).

Зависимость между длиной волны и толщиной слоя, наблюдаемая для широкого многообразия складок, показана на рис. 6.27. Мы видим, что имеется прекрасное согласие наблюдений с зависимостью (6.173) при $\sigma(1 - \nu^2)/E = 10^{-2}$. Для осадочных пород с $E = 50$ ГПа и $\nu = 0,25$ отсюда следует, $\sigma = 530$ МПа. Хотя это напряжение велико, оно, по-видимому, близко к пределу прочности при сжатии многих осадочных пород, погребенных на глубинах от 2 до 5 км.

При увеличении амплитуды складки ее длина волны несколько уменьшается, и изгибающее напряжение в упругой компоненте постепенно достигает предела прочности породы. В результате в точках, характеризующихся наибольшим изгибающим моментом, т.е. при $x = \pm \frac{1}{2}n\lambda$, $n = 0, 1, 2, \dots$, происходит либо хрупкое разрушение, либо пластическое течение упругой компоненты. В тех случаях, когда имеет место пластический изгиб, может возникнуть *угловатая*, или *стрельчатая*, складка (рис. 6.28, а). Такие складки с почти прямыми крыльями встречаются весьма часто. В следующей главе мы подробнее проанализируем пластический изгиб такого типа.

Хотя многие доступные наблюдению складки, по-видимому, возникли благодаря пластической деформации преобладающего или компетентного слоя, имеется много других случаев, когда образуются округлые складки (рис. 6.28, б). Такие складки, вероятно, возникают тогда, когда доминирующая компонента также испытывает жидкоподобную деформацию. На этом предположении основана *теория складчатости Био*, в которой считается, что компетентный слой представляет собой ньютоновскую жидкость с коэффициентом вязкости μ_1 , окружен-



РИС. 6.28. Формы складок. а — угловатые, или стрельчатые, складки около Копьяпо в провинции Атакама на севере Чили. Смятые в складки прочные слои алевролитистого известняка перемежаются с менее прочными, но более компетентными слоями песчаника (К. Сагерстром, Геологическая служба США, 563). б — округлые складки в амфиболите вблизи р. Салмон, шт. Айдахо, США (В.Б. Гамильтон, Геологическая служба США, 377).

ную двумя заполняющими полупространства жидкостями с коэффициентом вязкости μ_0 , причем $\mu_1 \gg \mu_0$.

Чтобы решить задачу вязкого складкообразования, необходимо сначала развить теорию изгиба свободной пластины с коэффициентом вязкости μ . Используем вывод уравнения изгиба свободной упругой пластины (см. разд. 3.9). Главным в предлагавшейся схеме было выражение (3.61) изгибающего момента

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} y dy, \quad (6.174)$$

В вязкой пластине продольное напряжение σ_{xx} определяется равенством (6.60). Напряжение σ_{yy} на поверхностях свободной пластины должно обращаться в нуль, и, если пластина тонкая, мы можем считать, что, как и в случае упругой пластины, условие $\sigma_{yy} = 0$ выполняется во всем объеме пластины. Из равенства (6.61) с $\sigma_{yy} = 0$ получаем

$$p = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (6.175)$$

Из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости (6.53) следует, что $\partial v / \partial y = -\partial u / \partial x$, так что равенство (6.175) может быть переписано в виде

$$p = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6.176)$$

Исключая с помощью (6.176) из равенства (6.60) давление p , можно получить следующее соотношение между изгибающим напряжением σ_{xx} и скоростью продольной деформации $\partial u / \partial x$ в тонкой вязкой пластине:

$$\sigma_{xx} = -4\mu \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6.177)$$

Оно является аналогом соотношения между напряжением σ_{xx} в волокнах и деформацией ϵ_{xx} тонкой упругой пластины.

Теперь выражение (6.174) для изгибающего момента в вязкой пластине принимает вид

$$M = -4\mu \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial u}{\partial x} y dy, \quad (6.178)$$

а выражение для скорости деформации $\partial u/\partial x$ можно написать, пользуясь прямой аналогией с равенством (3.70):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}. \quad (6.179)$$

По сравнению с (3.70) это уравнение имеет другой знак, поскольку скорости деформации $\partial u/\partial x$ и $\dot{\epsilon}_{xx}$ имеют противоположные знаки. Подставляя (6.179) в (6.178) и интегрируя, получим

$$M = -\frac{\mu h^3}{3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}. \quad (6.180)$$

Дважды дифференцируя это равенство по x и подставляя полученное выражение в уравнение (3.60), мы приходим к общему уравнению изгиба тонкой вязкой пластины

$$\frac{\mu h^3}{3} \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = q - \bar{P} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6.181)$$

Это уравнение позволяет определить вертикальное смещение w вязкой пластины в функции времени.

В качестве характерного примера рассмотрим свободную вязкую пластину длиной L , заделанную с одного конца и нагруженную с другого конца сосредоточенной нагрузкой V_a (рис. 3.17). В этом случае $\bar{P} = q = 0$, и уравнение (6.181) сводится к

$$\frac{\mu h^3}{3} \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0. \quad (6.182)$$

После двукратного интегрирования по x находим

$$\frac{\mu h^3}{3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = -M = f_1(t)x + f_2(t), \quad (6.183)$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — произвольные функции времени. Поскольку условие (3.78) общего равновесия моментов

$$M = V_a(x - L) \quad (6.184)$$

должно выполняться и в случае вязкой пластины, мы можем положить

$$f_1 = -V_a, \quad f_2 = V_a L \quad (6.185)$$

и переписать уравнение (6.183) в виде

$$\frac{\mu h^3}{3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = -V_a x + V_a L. \quad (6.186)$$

Вновь дважды интегрируя это уравнение по x с граничными условиями $w = \partial w / \partial x = 0$ при $x = 0$, соответствующими заделанному концу, получаем

$$\frac{\mu h^3}{3} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{V_a x^2}{2} \left(L - \frac{x}{3} \right). \quad (6.187)$$

Наконец, интегрируя по времени с начальным условием $w = 0$ при $t = 0$, находим

$$w = \frac{3}{2} \frac{V_a x^2}{\mu h^3} \left(L - \frac{x}{3} \right) t. \quad (6.188)$$

Сравнивая равенства (6.188) и (3.83), мы убеждаемся в том, что форма вязкой и упругой пластин описывается одной и той же функцией координаты x . Этот результат является частным случаем общего закона соответствия в поведении вязкой и упругой пластин. Однако, тогда как смещение упругой пластины не зависит от времени, смещение вязкой пластины линейно растет со временем.

Вернемся теперь к задаче о складкообразовании в вязкой слоистой среде. Рассмотрим прогиб вязкой пластины, окруженной с обеих сторон двумя полубесконечными слоями вязкой жидкости. Если мы хотим, чтобы приближение $\sigma_{yy} = 0$, сделанное при выводе выражения для изгибающего момента в свободной вязкой пластине, было применимо в рассматриваемом случае ограниченной пластины, то следует считать, что коэффициент вязкости μ_1 материала пластины значительно превышает коэффициент вязкости μ_0 окружающей жидкости. Тогда нестационарное смещение пластины, которое мы запишем в виде (6.163), будет определяться уравнением (6.181). Ясно, что движение окружающей жидкости, возникающее при деформации вязкой пластины, будет при одинаковой деформации тем же, что и в случае упругой пластины. Следовательно, мы можем воспользоваться выражением (6.168) для поверхностной нагрузки, приходящейся на единицу площади поверхности пластины. Подставляя (6.168) в (6.181), получаем

$$\frac{\mu_1 h^3}{3} \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = - \frac{8\pi \mu_0}{\lambda} \frac{\partial w}{\partial t} - \bar{p} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6.189)$$

Для ω , определяемого равенством (6.163), находим

$$\tau_a = \frac{1}{P} \left(\frac{2\lambda}{\pi} \mu_0 + \frac{4\pi^2}{3\lambda^2} \mu_1 h^3 \right). \quad (6.190)$$

Длина волны λ_c , соответствующая наименьшему значению τ_a , определяется из условия равенства нулю производной τ_a по λ ; в результате находим

$$\lambda_c = 2\pi h \left(\frac{1}{6} \frac{\mu_1}{\mu_0} \right)^{1/3}. \quad (6.191)$$

Это длина волны наиболее быстро растущей моды. Ее зависимость от толщины компетентного слоя при $\mu_1/\mu_0 = 750$ хорошо согласуется с полученной из наблюдений и показанной на рис. 6.27.

ЗАДАЧА 6.18. В рассмотренных примерах складкообразования предполагалось, что компетентная порода жестко сцеплена с некомпетентной. Покажите, что в том случае, если слои могут свободно проскальзывать друг относительно друга, длина волны наиболее быстро растущего возмущения границы упругого слоя, окруженного полубесконечными слоями вязкой жидкости, определяется как

$$\lambda = \pi h [E/\sigma_0(1-\nu^2)]^{1/2}. \quad (6.192)$$

Условие свободного проскальзывания эквивалентно условию отсутствия сдвигового напряжения на границе упругого слоя.

ЗАДАЧА 6.19. Покажите, что при условии свободного проскальзывания длина волны наиболее быстро растущего возмущения в положении слоя вязкой жидкости с коэффициентом вязкости μ_1 , находящегося между полубесконечными слоями жидкости с коэффициентом вязкости $\mu_0 \ll \mu_1$, определяется как

$$\lambda = 2\pi h (\mu_1/6\mu_0)^{1/3}. \quad (6.193)$$

Условие свободного проскальзывания означает, что на границах между слоями сдвиговые напряжения равны нулю.

ЗАДАЧА 6.20. Мраморная плита толщиной 0,1 м и длиной 2 м свободно оперта на концах (рис. 6.29). За 150 лет ее середина "просела" на 2 мм. Предполагая, что плиту можно рассматривать как ньютоновскую жидкость, определите коэффициент вязкости мрамора ($\rho = 2300 \text{ кг/м}^3$).

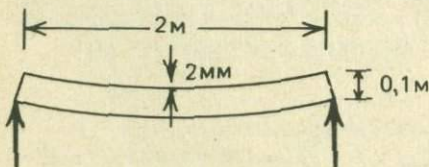


РИС. 6.29. К задаче 6.20.

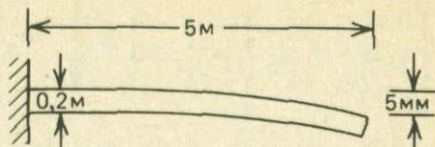


РИС. 6.30. К задаче 6.21.

ЗАДАЧА 6.21. Мраморная плита толщиной 0,2 м и длиной 5 м заделана с одного конца (рис. 6.30). За 200 лет ее свободный конец опустился на 5 мм. Рассматривая плиту как слой ньютоновской вязкой жидкости, определите коэффициент вязкости мрамора ($\rho = 2300 \text{ кг/м}^3$).

6.14. Формула Стокса

Рассмотрим твердое тело, движущееся в вязкой жидкости под действием собственного веса и архимедовой выталкивающей силы. Если плотность тела меньше плотности жидкости, то выталкивающая сила будет превышать силу тяжести, и тело будет всплывать. Если плотность тела больше плотности жидкости, тело будет погружаться. Предположим, что коэффициент вязкости μ жидкости очень велик, так что число Рейнольдса (6.40), в котором \bar{v} и D есть соответственно скорость движения тела и его размер, будет мало. В этом случае, т.е. при $Re \ll 1$, силы инерции пренебрежимо малы и применимы уравнения (6.53), (6.67) и (6.68).

В пределе больших коэффициентов вязкости течение вокруг тела сферической формы описывается относительно простыми формулами и называется в этом случае *течением Стокса*. Задача Стокса имеет целый ряд геологических приложений. Одно из них позволяет оценить скорость подъема магм через литосферу. Часто потоки базальтовой лавы содержат *ксенолиты* — включения твердой породы, захваченные магмой при ее подъеме через литосферу. При извержениях твердые ксенолиты выносятся потоком магмы на поверхность Земли. Поскольку вязкость магмы и разность плотностей магмы и ксенолита известны из независимых измерений, то по размеру наибольших наблюдаемых ксенолитов оценивается скорость поднятия магмы.

С помощью решения Стокса также можно оценить размер неоднородностей в мантии, которые могут вовлекаться в мантийные потоки. Еще одним применением формулы Стокса является оценка скорости подъема "пузырей" магмы в зависимости от их размера в модели подъема магмы под действием силы плавучести.

Выведем выражение для скорости U подъема или погружения сферического тела для случая постоянных значений коэффициента вязкости и разности плотностей. Для этого приравняем силу сопротивления, действующую на тело со стороны жидкости, и силу плавучести, приводящую тело в движение. Чтобы найти силу сопротивления, возникающую при равномерном движении тела че-

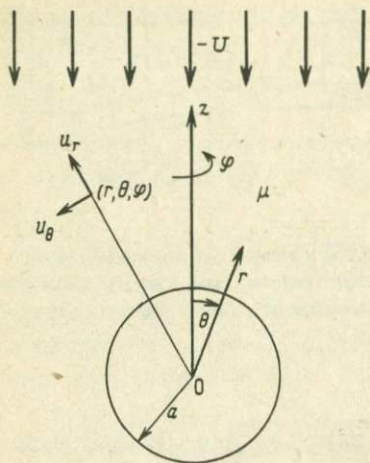


РИС. 6.31. Стационарное обтекание сферы вязкой жидкостью.

рез жидкость, удобно считать тело покоящимся и рассмотреть его обтекание жидкостью. При этом мы не рассматриваем промежуточный переходный процесс (до установления стационарного движения), во время которого сфера движется с ускорением,

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом в центре сферы (радиусом a) и осью z , направленной против набегающего потока жидкости (рис. 6.31). На бесконечности (при $z = \infty$) скорость жидкости имеет только z -компоненту, равную $-U$. Коэффициент вязкости жидкости обозначим μ . Очевидно, что поток будет осесимметричным относительно оси z . Следовательно, ни скорость, ни давление p жидкости не будут зависеть от азимутального угла φ . Кроме того, будет отсутствовать азимутальная компонента скорости жидкости ($u_\varphi = 0$) и, следовательно, отличными от нуля будут только радиальная u_r и меридиональная u_θ компоненты (рис. 6.31). Уравнение неразрывности и уравнения движения для медленного стационарного осесимметричного потока вязкой несжимаемой жидкости в сферических координатах запишутся соответственно в виде

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta), \quad (6.194)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta}) - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) \right], \quad (6.195)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right],$$

где мы учли, что $u_\varphi = 0$. Уравнения (6.194) – (6.196) представляют собой соответственно уравнения (6.53), (6.67) и (6.68), написанные в сферических координатах при условии осевой симметрии ($\partial/\partial\varphi = 0$). Граничными условиями являются условие невозмущенности потока (т.е. наличие только z-компоненты скорости, равной $-U$) на больших расстояниях от сферы:

$$u_r \rightarrow -U \cos \theta, \quad u_\theta \rightarrow U \sin \theta \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (6.197)$$

При равной $-U$ z-компоненте скорости радиальная и меридиональная компоненты скорости равны соответственно $-U \cos \theta$ и $U \sin \theta$ и условие прилипания на поверхности сферы радиуса $r = a$ имеет вид

$$u_r = u_\theta = 0 \quad \text{при} \quad r = a. \quad (6.198)$$

Форма записи граничных условий наводит на мысль, что можно попытаться искать решение системы уравнений (6.194 – (6.196) в виде

$$u_r = f(r) \cos \theta, \quad u_\theta = g(r) \sin \theta. \quad (6.199)$$

Подставляя (6.199) в (6.194) – (6.196), находим

$$g = -\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 f), \quad (6.200)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu \cos \theta}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) - 4(f + g) \right], \quad (6.201)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu \sin \theta}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg}{dr} \right) - 2(f + g) \right]. \quad (6.202)$$

Чтобы исключить давление, продифференцируем уравнение (6.201) по θ и вычтем уравнение (6.202), продифференцированное по r . Будем иметь

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) - \frac{4(f + g)}{r^2} + \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg}{dr} \right) - \frac{2(f + g)}{r} \right]. \quad (6.203)$$

Решения уравнений (6.200) и (6.203) для функций f и g могут быть найдены в виде степенных функций r . Полагая

$$f = cr^n, \quad (6.204)$$

где c — постоянная, из уравнения (6.200) получаем

$$g = -\frac{c(n+2)}{2} r^n, \quad (6.205)$$

откуда с помощью (6.203) находим, что n должно удовлетворять уравнению

$$n(n+3)(n-2)(n+1) = 0, \quad (6.206)$$

или

$$n = 0, -3, 2, -1. \quad (6.207)$$

Таким образом, функции f и g являются линейными комбинациями степеней r^0 , r^{-3} , r^2 и r^{-1} :

$$f = c_1 + \frac{c_2}{r^3} + \frac{c_3}{r} + c_4 r^2, \quad (6.208)$$

$$g = -c_1 + \frac{c_2}{2r^3} - \frac{c_3}{2r} - 2c_4 r^2, \quad (6.209)$$

где c_1 , c_2 , c_3 и c_4 — постоянные. Компоненты скорости u_r и u_θ выражаются как

$$u_r = (c_1 + \frac{c_2}{r^3} + \frac{c_3}{r} + c_4 r^2) \cos \theta, \quad (6.210)$$

$$u_\theta = (-c_1 + \frac{c_2}{2r^3} - \frac{c_3}{2r} - 2c_4 r^2) \sin \theta. \quad (6.211)$$

Из условия (6.197) при $r \rightarrow \infty$ следует, что

$$c_1 = -U, \quad c_4 = 0, \quad (6.212)$$

а из условия прилипания (6.198) при $r = a$ получаем

$$c_2 = -a^3 U/2, \quad c_3 = 3aU/2. \quad (6.213)$$

Окончательные выражения для u_r и u_θ имеют вид

$$u_r = U \left(-1 - \frac{a^3}{2r^3} + \frac{3a}{2r} \right) \cos \theta, \quad (6.214)$$

$$u_{\theta} = U \left(1 - \frac{a^3}{4r^3} - \frac{3a}{4r} \right) \sin \theta. \quad (6.215)$$

Распределение давления в потоке можно найти, подставляя выражения (6.214) и (6.215) в уравнение (6.196) и интегрируя по θ :

$$p = \frac{3\mu a U}{2r^2} \cos \theta. \quad (6.216)$$

На поверхность сферы действуют силы давления и силы вязкости. Из соображений симметрии ясно, что общая сила, действующая на сферу, должна быть направлена в отрицательном направлении оси z . Эта суммарная сила есть испытываемая сферой сила сопротивления D . Сила давления действует на каждый элемент поверхности сферы и направлена по радиусу внутрь сферы. Компонента силы давления, действующая на единицу площади поверхности и направленная против оси z , равна

$$p \cos \theta = \frac{3\mu U}{2a} \cos^2 \theta. \quad (6.217)$$

Сопротивление, обусловливаемое силами давления D_p и испытываемое сферой, получается интегрированием величины $p \cos \theta$, умноженной на элемент поверхности $2\pi a^2 \sin \theta d\theta$, по всей поверхности сферы:

$$D_p = 3\pi a \mu U \int_0^{\pi} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = 2\pi \mu a U. \quad (6.218)$$

Вычислим теперь силу D_v вязкого сопротивления, действующую на сферу. Вязкие напряжения действующие на единичный элемент поверхности сферы, это, во-первых, радиальное вязкое напряжение τ_{rr} :

$$(\tau_{rr})_{r=a} = 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)_{r=a} \quad (6.219)$$

и, во-вторых, касательное вязкое напряжение $\tau_{r\theta}$:

$$(\tau_{r\theta})_{r=a} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_{\theta}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]_{r=a}. \quad (6.220)$$

Подставляя в эти формулы выражения (6.214) и (6.215), мы получим следующие выражения вязких напряжений на поверхности сферы:

$$(\tau_{rr})_{r=a} = 0, \quad (6.221)$$

$$(\tau_{r\theta})_{r=a} = 3\mu U \sin \theta / 2a. \quad (6.222)$$

Отличное от нуля касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ представляет собой силу, действующую на единицу площади сферы в направлении увеличения угла θ . Компонента этой силы, направленная в отрицательном направлении оси z , равна

$$\tau_{r\theta} \sin\theta = 3\mu U \sin^2\theta/2a, \quad (6.223)$$

а сила D_v вязкого сопротивления получается интегрированием величины (6.223), умноженной на элемент площади $2\pi a^2 \sin\theta d\theta$, по всей поверхности сферы:

$$D_v = 3\pi\mu a U \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = 4\pi\mu a U. \quad (6.224)$$

Полная сила сопротивления D есть сумма сил сопротивления, создаваемых давлением и вязким сопротивлением:

$$D = D_p + D_v = 6\pi\mu a U. \quad (6.225)$$

Это известная формула Стокса для силы сопротивления, которую испытывает сфера, движущаяся в вязкой несжимаемой жидкости с малой постоянной скоростью. Эта формула часто записывается в безразмерной форме. Для этого в качестве единицы измерения силы сопротивления выбирается произведение давления $\rho_f U^2/2$ (ρ_f — плотность жидкости) на площадь πa^2 поперечного сечения сферы. Формула (6.225) приобретает вид

$$c_D \equiv \frac{D}{\rho_f U^2 \pi a^2/2} = \frac{12}{\rho_f U a / \mu} = \frac{24}{\text{Re}}, \quad (6.226)$$

где c_D — коэффициент (лобового) сопротивления, а число Рейнольдса Re определяется как

$$\text{Re} = \rho_f U(2a)/\mu. \quad (6.227)$$

Формула Стокса позволяет найти скорость всплывания сферического тела в жидкости большей плотности. Для этого надо приравнять силу сопротивления (6.225) и выталкивающую архимедову силу F . Последняя в случае, если плотность ρ_s сферы меньше плотности ρ_f окружающей жидкости, равна

$$F = (\rho_f - \rho_s)g \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right). \quad (6.228)$$

Приравнявая F величине $6\pi\mu a U$ и разрешая полученное равенство относительно скорости всплывания U , получим

$$U = 2(\rho_f - \rho_s)ga^2/9\mu. \quad (6.229)$$

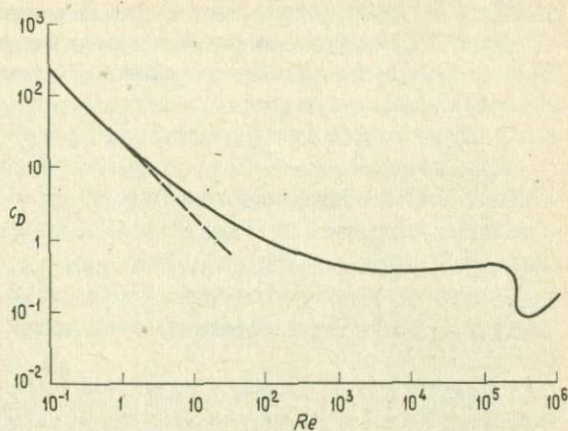


РИС. 6.32. Зависимость коэффициента сопротивления сферы c_D от числа Рейнольдса. Сплошная кривая — результаты измерений, пунктир — расчет по безразмерной формуле Стокса (6.226).

Следует подчеркнуть, что полученный результат справедлив только в том случае, если число Рейнольдса меньше или порядка единицы.

При больших числах Рейнольдса поток жидкости, обтекающей сферу, становится более сложным: в нем появляются вихри и течение становится нестационарным. На рис. 6.32 приведена полученная из наблюдений зависимость коэффициента сопротивления сферы от числа Рейнольдса. Эта зависимость универсальна в том смысле, что остается неизменной для любой несжимаемой жидкости. На рисунке также показана зависимость (6.226), вытекающая из формулы Стокса. Видно, что формула Стокса обеспечивает хорошее приближение при $Re < 1$. При $Re = 3 \cdot 10^5$ происходит резкое уменьшение коэффициента сопротивления, связанное с переходом к турбулентному режиму. Зависимость $c_D(Re)$, показанная на рис. 6.32, похожа на зависимость $f(Re)$ для течения в трубе, приведенную на рис. 6.7. Скорость U , согласно (6.226), (6.227) и (6.5.23), выражается через коэффициент сопротивления c_D следующим образом:

$$U = \left[\frac{8}{3} \frac{a g (\rho_f - \rho_s)}{c_D \rho_f} \right]^{1/2}. \quad (6.230)$$

Коэффициент сопротивления можно найти из графика на рис. 6.32 по значению числа Рейнольдса.

Покажем, как с помощью полученных соотношений можно определить скорость подъема магмы через литосферу. Будем исходить из того, что максимальный размер тугоплавких перидотитовых ксенолитов, обнаруженных в базальтовых лавах, изверженных в 1801 г. из вулкана Гуалалай на Гавайских

островах, составляет 0,3 м. Эти твердые ксенолиты были захвачены и вынесены лавовым потоком, поднимающимся через литосферу. Верхний предел размера ксенолитов, которые еще могут быть захвачены лавой, получается из условия равенства скорости U и скорости подъема лавы. Принимая в качестве оценки коэффициента вязкости магмы величину $10 \text{ Па} \cdot \text{с}$ и полагая $\rho_s - \rho_m = 600 \text{ кг/м}^3$, $a = 0,15 \text{ м}$, с помощью равенства (6.229) находим $U = 3 \text{ м/с}$ (10,8 км/ч). Соответствующее этой скорости число Рейнольдса (6.227) при $\rho_f = 2700 \text{ кг/м}^3$ равно 243, и, следовательно, формулу Стокса можно считать верной лишь приближенно. На основе эмпирической зависимости (рис. 6.32) и формулы (6.230) получаем $U = 0,87 \text{ м/с}$ и $Re = 70$. Эта скорость тоже весьма велика. Двигаясь с такой скоростью, магма может пройти через литосферу толщиной 100 км за 32 ч.

Рассмотрим теперь вопрос о вовлечении тела с плотностью, отличной от плотности мантии, в мантийную конвекцию. Принимая в качестве типичного значения скорости мантийного потока величину 10 мм/год , $\Delta\rho = 100 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 10^{21} \text{ Па} \cdot \text{с}$ и $g = 10 \text{ м/с}^2$, в соответствии с равенством (6.229) находим, что сферические тела радиусом менее 38 км будут вовлекаться в мантийные потоки. Отсюда можно сделать вывод, что в мантийных конвекционных потоках вместе с породами мантии движутся неоднородные тела достаточно большого размера.

Согласно одной из моделей миграции магмы через мантию, в последней благодаря различию в плотности жидкостей движутся значительные магматические тела. Скорость всплывания сферического "пузыря" из жидкости с низкой вязкостью, движущегося через жидкость с высокой вязкостью под действием архимедовой силы, равна

$$U = (\rho_f - \rho_b) g a^2 / (3\mu_f), \quad (6.231)$$

где ρ_b — плотность жидкости в пузыре, а ρ_f и μ_f — соответственно плотность и коэффициент вязкости окружающей жидкости. [О различии формул (6.231) и (6.229) см. задачу 6.23.] Принимая $a = 0,5 \text{ км}$, $\rho_f - \rho_b = 600 \text{ кг/м}^3$ и $\mu = 10^{21} \text{ Па} \cdot \text{с}$, находим $U = 0,016 \text{ мм/год}$. Мы видим, что даже для относительно большого магматического тела скорость миграции оказывается на 13 порядков величины меньше, чем получается из расчетов, основанных на максимальных размерах захватываемых ксенолитов.

Следующая оценка, справедливая по порядку величины, также указывает, на то, что полученное значение $0,016 \text{ мм/год}$ является сильно заниженным. При движении магмы со скоростью $0,016 \text{ мм/год}$ для преодоления расстояния 100 км магматическому телу понадобилось бы порядка 10^9 лет. Понятно, что это чрезмерно большое время. Чтобы могли происходить поверхностные излияния, магма должна достигать поверхности Земли, не успевая затвердеть. Время, достаточное для полного затвердевания магматического тела с мини-

мальным размером a , по порядку величины равно времени температуропроводности a^2/χ . Принимая эту величину равной времени движения магмы через литосферу (32 ч), выведенному из условия захвата ксенолитов, и полагая $\chi = 1 \text{ мм}^2/\text{с}$, мы получим для минимального размера магматического тела, проходящего через литосферу, оценку $a \approx 10 \text{ см}$.

Если прохождение магмы через литосферу не основано на явлении диапиризма, то должен существовать какой-то альтернативный механизм. Возможно, таким механизмом является гидроразрыв, т.е. разрушение породы жидкостью, находящейся под давлением. Предполагается, что за счет давления, обусловленного плавучестью магмы относительно литосферы, может происходить распространение разрыва в литосфере и миграция магмы через образовавшиеся трещины.

ЗАДАЧА 6.22. Единственными параметрами, от которых может зависеть сила сопротивления D , испытываемая сферой в потоке Стокса, являются скорость сферы U , ее радиус a , коэффициент вязкости μ и плотность ρ жидкости. Пользуясь анализом размерностей, покажите, что имеет место соотношение

$$\frac{D}{\rho U^2 a^2} = f\left(\frac{\rho U a}{\mu}\right), \quad (6.232)$$

где f — произвольная функция. Поскольку уравнения, определяющие медленное течение вязкой жидкости, являются линейными, D может быть только прямо пропорционально U . На основе этого соображения и равенства (6.232) покажите, что

$$D \propto \mu U a. \quad (6.233)$$

ЗАДАЧА 6.23. Рассмотрите сферический "пузырь" слабовязкой жидкости с плотностью ρ_b , который движется вверх или вниз в намного более вязкой жидкости с плотностью ρ_f и коэффициентом вязкости μ_f под действием силы плавучести. В этом случае граничные условия на поверхности сферы $r = a$ записываются в виде

$$u_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = a.$$

С помощью уравнений (6.210), (6.211) и (6.220) покажите, что

$$u_r = U\left(-1 + \frac{a}{r}\right) \cos \theta, \quad (6.234)$$

$$u_\theta = U\left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{r}\right) \sin \theta. \quad (6.235)$$

Интегрируя уравнение (6.196), покажите, что распределение давления на сфере ($r = a$) имеет вид

$$p = \mu_f U \cos \theta / a. \quad (6.236)$$

Сила сопротивления получается в результате вычисления интеграла

$$D = 2\pi a^2 \int_0^\pi \left(f - 2\mu_f \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)_{r=a} \cos \theta \sin \theta \, d\theta. \quad (6.237)$$

Покажите, что

$$D = 4\pi\mu_f a U, \quad (6.238)$$

и выведите следующее выражение для установившейся скорости пузыря в жидкости:

$$U = (\rho_f - \rho_b) g a^2 / 3\mu_f. \quad (6.239)$$

6.15. Течение в трубе с подводом тепла

Рассмотрим несколько задач, в которых существенны не только перенос массы, но и теплоперенос. В качестве первого примера рассчитаем течение в трубе с подводом или отводом тепла. Эта задача может представлять интерес как модель подогрева воды в водоносном горизонте. Рассмотрим условие баланса тепла в тонкой цилиндрической оболочке, которую мы выделим в жидкости, текущей по трубе. Пусть толщина оболочки равна δr , а длина δx (рис. 6.33). Количество тепла, теряемое в единицу времени через внешнюю поверхность оболочки радиуса $r + \delta r$, равно

$$2\pi(r + \delta r)\delta x q_r(r + \delta r),$$

где $q_r(r + \delta r)$ — радиальный тепловой поток на расстоянии $r + \delta r$ от оси трубы. Количество тепла, получаемое оболочкой в единицу времени через внутреннюю поверхность, есть

$$2\pi r \delta x q_r(r).$$

Разлагая $q_r(r + \delta r)$ в ряд Тейлора при малых δr :

$$q_r(r + \delta r) = q_r(r) + \frac{\partial q_r}{\partial r} \delta r + \dots$$

и пренебрегая высшими степенями δr , мы можем записать суммарное количество тепла, получаемое оболочкой в единицу времени за счет молекулярного

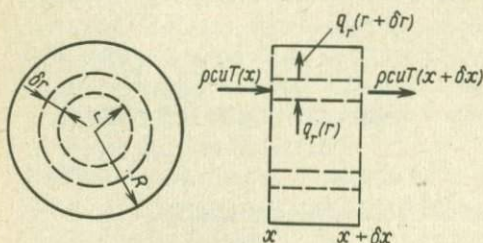


РИС. 6.33. Тепловой баланс для бесконечно малой цилиндрической оболочки в трубе кругового сечения.

теплопереноса через внутреннюю и внешнюю поверхности, в виде

$$2\pi\delta x [r q_r(r) - (r + \delta r) q_r(r + \delta r)] = -2\pi\delta x \left(r \frac{\partial q_r}{\partial r} + q_r \right) \delta r. \quad (6.240)$$

Радиальный тепловой поток q_r связан с радиальным градиентом температуры $\partial T/\partial r$ законом теплопроводности Фурье, который в цилиндрических координатах записывается в виде (см. задачу 4.21)

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (6.241)$$

где k — коэффициент теплопроводности жидкости. С помощью этого соотношения выражение (6.240) для количества тепла, приобретаемого оболочкой в единицу времени за счет радиального теплопереноса, можно переписать в виде

$$2\pi\delta x \delta r k \left(r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Количество тепла, выносимого из оболочки в единицу времени через поперечное сечение $x + \delta x$ за счет движения жидкости со скоростью $u(r)$, равно

$$2\pi r \delta r u \rho c T(x + \delta x),$$

а количество тепла, попадающего в оболочку в единицу времени через сечение x , равно

$$2\pi r \delta r u \rho c T(x).$$

Разлагая $T(x + \delta x)$ в ряд Тейлора с линейной точностью по δx , можно записать суммарную скорость потерь тепла из оболочки за счет движения жидкости в виде

$$2\pi r \delta r u \rho c [T(x + \delta x) - T(x)] = 2\pi r \delta r u \rho c \frac{\partial T}{\partial x} \delta x. \quad (6.242)$$

При условии стационарности течения и распределения температуры, если пренебречь продольным (вдоль скорости) молекулярным теплопереносом по сравнению с адвекцией тепла в потоке, должно выполняться равенство скоростей потери тепла в продольном направлении и подвода тепла в радиальном направлении. Приравнявая правую часть равенства (6.242) и выраженную через температуру правую часть равенства (6.240), находим

$$\rho u c \frac{\partial T}{\partial x} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (6.243)$$

Приравнявая осевую адвекцию тепла и молекулярный теплоперенос в радиальном направлении, мы неявно предполагаем, что эффекты *вязкой диссипации или фрикционного нагрева* в жидкости пренебрежимо малы.

С помощью уравнения (6.243) можно найти распределение температуры в ламинарном потоке жидкости, рассмотренном в разд. 6.4. Радиальное распределение скорости $u(r)$ выражается через среднюю скорость \bar{u} посредством равенств (6.33) и (6.37):

$$u = 2\bar{u} [1 - (r/R)^2]. \quad (6.244)$$

Рассмотрим случай линейного распределения температуры стенки T_w по длине трубы x

$$T_w = C_1 x + C_2, \quad (6.245)$$

где C_1 и C_2 – постоянные. Температуру в потоке запишем в виде

$$T = C_1 x + C_2 + \theta(r) = T_w + \theta(r), \quad (6.246)$$

т.е. будем пренебрегать вкладом молекулярной теплопроводности в осевом направлении в тепловой баланс тонкой цилиндрической оболочки. Величина θ представляет собой разность температур жидкости и стенки. Подставляя (6.244) и (6.246) в (6.243), получим

$$2\rho c \bar{u} [1 - (r/R)^2] C_1 = k \left(\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \right). \quad (6.247)$$

Граничные условия имеют вид

$$T = T_w \quad \text{при} \quad r = R, \quad (6.248)$$

$$q_r = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \quad (6.249)$$

Последнее условие означает, что на оси трубы нет источников или стоков тепла. Условие (6.248) эквивалентно условию

$$\theta_{r=R} = 0, \quad (6.250)$$

а условие (6.249) с помощью закона Фурье (6.241) можно переписать как

$$\left(\frac{d\theta}{dr} \right)_{r=0} = 0. \quad (6.251)$$

Решение уравнения (6.247), удовлетворяющее перечисленным граничным условиям, имеет вид

$$\theta = - \frac{\rho c \bar{u} C_1 R^2}{8k} \left[3 - 4 \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} \right]. \quad (6.252)$$

Тепловой поток q_w от жидкости к стенке можно найти, подставляя выра-

жение (6.252) в закон Фурье (6.241) и вычисляя результат при $r = R$. Получим

$$q_w = - \frac{1}{2} \rho c \bar{u} R C_1. \quad (6.253)$$

Видно, что тепловой поток есть величина постоянная, не зависящая от x . При положительном C_1 температура стенки увеличивается в направлении потока и тепло передается от стенки трубы к жидкости. При отрицательном C_1 температура стенки уменьшается в направлении потока и тепло отводится от жидкости в стенку. Тепловой поток в направлении стенки трубы удобно выражать через коэффициент теплопередачи h , связывающий величину направленного в сторону стенки теплового потока q_w и избыточную температуру жидкости:

$$q_w = h(\bar{T} - T_w) = h\bar{\theta}, \quad (6.254)$$

где черта над буквой означает усреднение по сечению потока. При усреднении вычисляется средневзвешенное по величине скорости значение температуры, которое для осесимметричного потока есть

$$\bar{\theta} = \frac{2\pi \int_0^R \theta u r dr}{\pi R^2 \bar{u}} = - \frac{11 \rho c \bar{u} C_1 R^2}{48 k}. \quad (6.255)$$

Сопоставляя равенства (6.253) – (6.255), мы приходим к следующему выражению для коэффициента теплопередачи в ламинарном потоке в трубе кругового сечения:

$$h = 48k/11D, \quad (6.256)$$

где $D = 2R$ – диаметр трубы. Равенство (6.256) справедливо только для чисел Рейнольдса, меньших чем ~ 2200 . При больших значениях числа Рейнольдса поток становится турбулентным.

В механике жидкости обычно вводят число Нуссельта, представляющее собой безразмерный эквивалент коэффициента теплопередачи. Для течения в трубе при наличии подвода тепла число Нуссельта определяется как

$$Nu = hD/k = 48/11 = 4,36. \quad (6.257)$$

Число Нуссельта – мера эффективности процесса теплопереноса. Действительно, если бы мы имели стационарный слой жидкости толщиной D с коэффициентом теплопроводности k и перепадом температур между жидкостью и стенкой, равным $\bar{T} - T_w$, то молекулярный тепловой поток q_c через этот слой был бы равен

$$q_c = k(\bar{T} - T_w)/D = q_w k / Dh. \quad (6.258)$$

Отсюда следует, что число Нуссельта можно записать как

$$Nu = q_w / q_c, \quad (6.259)$$

и, значит, перенос тепла с потоком жидкости по трубе оказывается в 4,36 раза более эффективным, чем молекулярный теплоперенос через эквивалентный стационарный слой жидкости при той же самой разности температуры.

ЗАДАЧА 6.24. Рассмотрим плоскопараллельный поток в канале между неподвижными параллельными стенками, движимый постоянным горизонтальным градиентом давления (см. разд. 6.2). Предполагая, как и в рассмотренном выше течении по трубе, что температура обеих стенок и жидкости линейно меняется с расстоянием x вдоль потока, найдите распределение температуры в канале, тепловой поток в направлении стенки, коэффициент теплопередачи и число Нуссельта. Воспользуйтесь двумерным уравнением теплопроводности (4.149), устанавливающим баланс горизонтального переноса тепла движущейся жидкостью и вертикального молекулярного потока тепла.

6.16. Модель подводящего канала (водовода) для горячих источников

С помощью результатов, полученных в предыдущем разделе, можно исследовать нагрев воды, протекающей через водовод, окруженный горячими породами. Рассмотрим опять полукруглый водовод с круговым поперечным сечением, изображенный на рис. 6.9. Приравнивая конвективный тепловой поток вдоль водовода и тепловой поток, подводимый или отводимый за счет молекулярного теплообмена со стенками, мы можем написать

$$\pi R^2 \rho c \bar{u} \frac{d\bar{T}}{ds} = 2\pi R h (T_w - \bar{T}), \quad (6.260)$$

где s — расстояние, измеряемое вдоль водовода от его начала, \bar{u} — средняя скорость течения в водоводе, \bar{T} — температура жидкости в водоводе, усредненная по потоку, а T_w — температура породы, слагающей стенки водовода. Будем считать поток ламинарным; коэффициент теплопередачи в этом случае определится равенством (6.256). Координата s выражается через угол ϕ (рис. 6.9) как

$$s = R' \phi. \quad (6.261)$$

Предположим, что температура стенок водовода выражается через локальный геотермический градиент β в виде

$$T_w = R' \beta \sin \phi + T_0, \quad (6.262)$$

где T_0 — температура на поверхности Земли, а $\beta = \text{const}$. Записывая температуру стенок в виде (6.262), мы предполагаем, что поток в водоводе не искажает распределение температуры в окружающих породах. Подставляя (6.256), (6.261) и (6.262) в (6.260), получим

$$\frac{R^2 \rho c \bar{u}}{R'} \frac{d\bar{T}}{d\phi} = \frac{48}{11} k (R' \beta \sin \phi + T_0 - \bar{T}). \quad (6.263)$$

Это уравнение можно привести к более простой форме, если ввести *число Пекле* Pe , определяемое как

$$Pe = \rho c \bar{u}R/k. \quad (6.264)$$

Число Пекле — это безразмерная средняя скорость течения в водоводе. Его можно выразить через введенные выше безразмерные параметры Re и Pr . Поскольку коэффициент температуропроводности χ равен $k/\rho c$, то Pe можно записать как

$$Pe = \bar{u}R/\chi. \quad (6.265)$$

Вспоминая определения (6.40) и (6.3) чисел Рейнольдса Re и Прандтля Pr соответственно, мы можем переписать равенство (6.265) в виде

$$Pe = \frac{1}{2} \frac{\bar{u} \cdot 2R}{\nu} \frac{\nu}{\chi} = \frac{1}{2} Re Pr. \quad (6.266)$$

Для упрощения уравнения (6.263) удобно также ввести безразмерную температуру θ , определяемую следующим образом:

$$\theta = \frac{(\bar{T} - T_0)}{\beta R'}. \quad (6.267)$$

С помощью равенств (6.264) и (6.267) можно привести уравнение (6.263) к виду

$$\frac{11}{48} \frac{R}{R'} Pe \frac{d\theta}{d\varphi} + \theta = \sin \varphi. \quad (6.268)$$

Полученное линейное дифференциальное уравнение первого порядка можно решить, вводя интегрирующий множитель. Если средняя температура воды, поступающей в водовод, равна температуре T_0 поверхности ($\bar{T} = T_0$ или $\theta = 0$ при $\varphi = 0$), то решение уравнения (6.268) имеет вид

$$\theta = \left[\frac{48 R'}{11 R Pe} \sin \varphi - \cos \varphi + \exp\left(-\frac{48}{11} \frac{R'}{R Pe} \varphi\right) \right] \times \\ \times \left(\frac{48}{11} \frac{R'}{R Pe} \right) \left[1 + \left(\frac{48}{11} \frac{R'}{R Pe} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (6.269)$$

Безразмерная температура θ_e на выходе из водовода, т.е. при $\varphi = \pi$, равна

$$\theta_e = \frac{[\exp(-\frac{48}{11} \frac{R'}{R Pe} \pi) + 1] \frac{48}{11} \frac{R'}{R Pe}}{1 + (\frac{48}{11} \frac{R'}{R Pe})^2}. \quad (6.270)$$

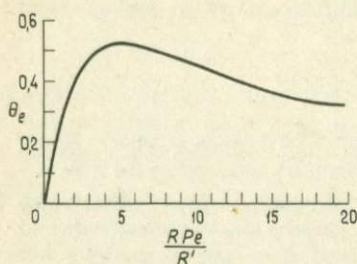


РИС. 6.34. Зависимость безразмерной температуры воды на выходе горячего источника от безразмерной скорости течения через водовод.

Величина θ_e в функции RPe/R' приведена на рис. 6.34. Видно, что температура горячего источника на выходе из водовода имеет максимум при $RPe/R' = 5$. Следовательно, при фиксированных прочих параметрах температура воды на выходе имеет максимальное значение при вполне определенной скорости течения \bar{u} . Максимальное значение выходной температуры составляет приблизительно половину максимального значения температуры стенки в основании водовода. Действительно, из формулы (6.270) видно, что $\theta_e = 1/2$ соответствует $T_e = T_0 + \frac{1}{2}\beta R'$, а T_w при $\varphi = \pi/2$, согласно (6.272), равно $T_0 + \beta R'$ ($T_0 \ll \beta R'$).

Чтобы лучше понять причину возникновения максимума выходной температуры при определенном значении скорости, построим графики зависимости средней температуры воды от положения в водоводе для трех значений скорости течения (рис. 6.35). На этом же рисунке показано распределение безразмерной температуры θ_w породы, слагающей стенки водоподводящего канала:

$$\theta_w = (T_w - T_0)/\beta R'. \quad (6.271)$$

Мы видим, что при малой скорости течения, например при $RPe/R' = 1$, ход температуры воды благодаря высокой теплопередаче практически повторяет ход температуры стенок и температура на выходе оказывается низкой. В пределе очень малых скоростей при $RPe/R' \rightarrow 0$ температура воды равна температуре стенок ($\theta = \theta_w = \sin \varphi$), температура на выходе равна температуре на входе и горячий источник не образуется. При высокой скорости, например при $RPe/R' = 15$, теплопередача очень мала и вода, проходя по водоводу, не успевает нагреваться. В пределе $RPe/R' \rightarrow \infty$ температура воды во всем водоводе равна температуре на входе и горячий источник также не образуется. На рис. 6.35 изображен и тот промежуточный случай ($RPe/R' = 5$), когда достигается максимальное значение температуры на выходе и $\theta_e = 0,52$.

Хотя приведенный здесь расчет в значительной мере упрощен, тем не менее его результаты применимы к более общему случаю, когда распределение температуры стенок водовода не задается заранее, а вычисляется в процессе решения задачи. Для этого необходимо решить уравнение Лапласа. Кроме того,

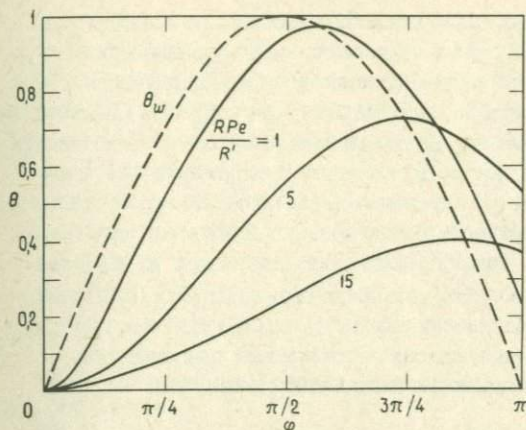


РИС. 6.35. Зависимость средней по сечению безразмерной температуры воды в водоводе от расстояния φ от начала водовода при трех значениях безразмерной скорости течения. Пунктир — безразмерная температура стенок водовода.

нужно учесть возможность перехода течения в водоводе к турбулентному режиму. Более полные решения требуют привлечения численных методов. Однако результаты численных расчетов показывают, что максимальная температура на выходе горячего источника составляет приблизительно половину температуры, получаемой при экстраполяции регионального геотермического градиента до глубины основания водовода.

ЗАДАЧА 6.25. Непосредственной подстановкой убедитесь, что функция (6.269) является решением уравнения (6.268).

ЗАДАЧА 6.26. Результаты, полученные в настоящем разделе, основаны на предположении о ламинарности потока, нагреваемого во время течения по водоводу. Это предположение означает, что число Рейнольдса должно быть достаточно малым ($Re < 2200$). Каким при этом должно быть число Пекле?

6.17. Тепловая конвекция

Мы уже говорили, что тектоника плит есть поверхностное проявление тепловой конвекции, происходящей в мантии главным образом благодаря действию радиоактивных источников тепла и охлаждению Земли (см. разд. 1.13). Конвекция возникает потому, что вследствие теплового расширения плотность жидкости при нагревании обычно уменьшается. Если слой жидкости нагревается снизу или изнутри и охлаждается сверху, то вблизи верхней границы слоя жидкости будет холодной и плотной, а в глубине — нагретой и легкой. В результате возникает гравитационная неустойчивость, когда холодная жидкость стремится погрузиться, а нагретая — всплыть. Это и есть тепловая конвекция (см. рис. 1.59).

Для количественного исследования конвекции необходимо вывести уравнения неразрывности, равновесия сил и сохранения энергии в двумерном случае. Движущими силами тепловой конвекции являются силы плавучести, обусловленные изменениями плотности за счет теплового расширения. Следовательно, в уравнении движения в форме закона сохранения импульса или равновесия сил необходимо учесть то, что плотность, входящая в выражение для гравитационной массовой силы, является переменной величиной. Во всех остальных членах уравнений изменения плотности можно считать достаточно малыми, так что ими можно пренебречь. Такое приближение называется *приближением Буссинеска*. При его использовании уравнение неразрывности (6.53) остается неизменным. Уравнения равновесия сил (6.64) и (6.65) также остаются справедливыми, но в уравнении равновесия вертикальных компонент сил (6.65) необходимо учесть малые вариации плотности, считая, что

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad (6.272)$$

где ρ_0 — значение, от которого отсчитывается плотность, а $\rho' \ll \rho_0$. Уравнение (6.65) записывается как

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho_0 g + \rho' g + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (6.273)$$

Исключая гидростатическое давление $\rho_0 g y$ посредством введения, как и в (6.66), величины

$$P = p - \rho_0 g y, \quad (6.274)$$

мы можем записать горизонтальную и вертикальную проекции уравнения движения, т.е. соответственно уравнения (6.64) и (6.273), в следующем виде:

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (6.275)$$

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho' g + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (6.276)$$

Изменение плотности при изменении температуры определяется формулой (4.172):

$$\rho' = - \rho_0 \alpha_v (T - T_0), \quad (6.277)$$

где α_v — коэффициент объемного расширения, а T_0 — значение, от которого отсчитывается температура. При $T = T_0$ плотность ρ равна ρ_0 . Подставляя (6.277) в (6.276), получаем

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - g \rho_0 \alpha_v (T - T_0). \quad (6.278)$$

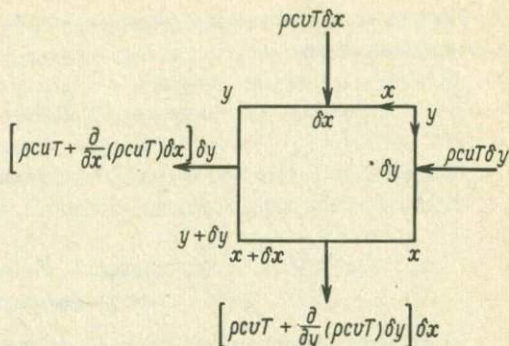


РИС.6.36. Конвективный перенос тепла через грани бесконечно малого прямоугольного элемента.

Последний член в уравнении (6.278) представляет собой объемную силу плавучести. Величина этой силы зависит от температуры, и поэтому поле скоростей и распределение температуры необходимо определять совместно. Выведем уравнение для пространственного и временного распределения температуры.

В законе сохранения энергии мы должны теперь учесть перенос тепла как молекулярным, так и конвективным механизмом.

Рассмотрим малый двумерный элемент объема (рис. 6.36). Будем считать, что размер этого элемента в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, равен единице. Поскольку тепловая энергия единицы объема жидкости равна $\rho c T$, количество тепла, вносимое в элемент объема в единицу времени в направлении x через его правую грань, равно $\rho c T u \delta y$, где u — компонента скорости среды в направлении x . Поскольку поток энергии, вытекающей из элемента через левую грань $x + \delta x$, равен $\rho c T u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c T u) \delta x$, то общее количество энергии, выносимое из выделенного элемента в единицу времени в направлении x , равно

$$\begin{aligned} & \left\{ \rho c T u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c T u) \delta x \right\} - \rho c T u \delta y = \\ & = \frac{\partial}{\partial x}(\rho c T u) \delta x \delta y. \end{aligned} \quad (6.279)$$

Рассуждая подобным же образом, можно показать, что скорость потерь энергии за счет потока в направлении y есть

$$\begin{aligned} & \left\{ \rho c T v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho c T v) \delta y \right\} - \rho c T v \delta x = \\ & = \frac{\partial}{\partial y}(\rho c T v) \delta x \delta y. \end{aligned} \quad (6.280)$$

Общее количество тепла, уносимое потоком из элемента объема в единицу времени, равно

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho c T u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho c T v) \right] \delta x \delta y.$$

Общее количество тепла, теряемое элементом объема в единицу времени за счет молекулярной теплопроводности, определяется выражением (4.49):

$$-k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \delta x \delta y.$$

В соответствии с законом сохранения энергии общая скорость потерь энергии элементом объема за счет конвекции и молекулярной теплопроводности должна быть равна скорости изменения количества содержащейся в нем энергии. В связи с тем что тепловая энергия единицы объема жидкости равна $\rho c T$, скорость изменения ее содержания в элементе есть

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) \delta x \delta y.$$

(Напомним, что размер выделенного элемента объема в третьем измерении равен единице.) Суммарный эффект молекулярного и конвективного теплопереноса и *тепловой инерции* выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) - k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} (\rho c u T) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho c v T) = 0. \end{aligned} \quad (6.281)$$

Считая ρ и c постоянными, вынося их из-под знака производной и преобразуя сумму двух последних членов в (6.281) как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (u T) + \frac{\partial}{\partial y} (v T) = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \\ + T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \quad (6.282)$$

(последнее равенство справедливо ввиду уравнения неразрывности), мы приходим к следующей форме двумерного уравнения энергии для движущейся среды:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (6.283)$$

где $\chi = \kappa/\rho c$. При выводе этого уравнения мы пренебрегли некоторыми факторами, которые в общем случае дают вклад в баланс энергии, но в наших расчетах могут считаться пренебрежимо малыми. Такими факторами, в частности, являются фрикционный нагрев, который связан с сопротивлением, оказываемым потоку, и компрессионный нагрев, связанный с работой сил давления в движущейся жидкости. В упрощенной форме уравнение энергии уже выводилось в разд. 4.19.

6.18. Линейный анализ начальной стадии тепловой конвекции в слое жидкости, нагреваемом снизу

Рассмотрим горизонтальный слой жидкости, нагреваемой снизу (рис. 6.37). Пусть температура T_0 верхней поверхности $y = -b/2$ относительно низка, а температура T_1 нижней поверхности $y = b/2$ более высока ($T_1 > T_0$; T_0 — значение, от которого отсчитывается температура). Будем предполагать, что тепловые источники в слое жидкости отсутствуют. Силы плавучести стремятся вызвать конвективное перемешивание жидкости: вблизи более горячей нижней границы жидкость нагревается, становится легче вышележащих слоев и стремится всплыть. В то же время жидкость, находящаяся вблизи верхней, более холодной границы, становится плотнее жидкости, находящейся ниже, и стремится погрузиться. Однако из-за вязкого сопротивления среды при малом перепаде температур между границами слоя движения жидкости не возникает. В настоящем разделе с помощью полученных выше уравнений мы выясним, при каких условиях (и, в частности, при какой минимальной разности температур T_0 и T_1) в слое возникает конвекция.

При отсутствии конвекции, т.е. при достаточно малом значении $T_1 - T_0$, жидкость находится в состоянии покоя ($u = v = 0$), и в ней происходит стационарная ($\partial/\partial t = 0$) одномерная ($\partial/\partial x = 0$) молекулярная теплопередача.

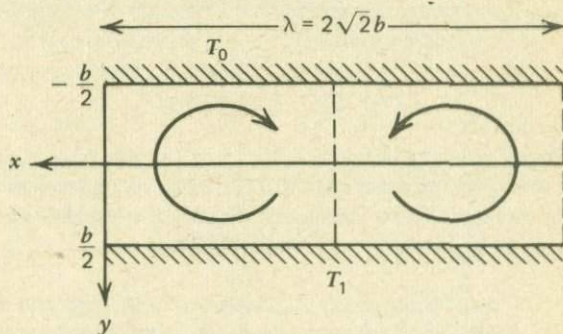


РИС. 6.37. Двумерные ячейки конвекции в слое жидкости, нагреваемой снизу.

Уравнение энергии (6.283) в таком случае имеет простой вид

$$\frac{d^2 T_c}{dy^2} = 0, \quad (6.284)$$

где индекс c указывает на то, что это уравнение описывает стационарное распределение, соответствующее молекулярной теплопроводности в покоящейся жидкости. Решение уравнения (6.284), удовлетворяющее граничным условиям $T = T_0$ при $y = -b/2$ и $T = T_1$ при $y = b/2$ имеет вид

$$T_c = \frac{T_1 + T_0}{2} + \frac{T_1 - T_0}{b} y. \quad (6.285)$$

Представим себе, что разность $T_1 - T_0$ температур на границах слоя постепенно увеличивается. При этом стационарное распределение температуры T_c будет изменяться в соответствии с (6.285) до тех пор, пока величина $T_1 - T_0$ не достигнет некоторого критического значения. При дальнейшем возрастании $T_1 - T_0$ нарушится устойчивое состояние покоя жидкости и возникнет конвекция. Таким образом, в самом начале возникновения конвекции распределение температуры T в жидкости близко к стационарному распределению (6.285), т.е.

$$T' \equiv T - T_c = T - \frac{T_1 + T_0}{2} - \frac{T_1 - T_0}{b} y, \quad (6.286)$$

где T' сколь угодно мало. Скорости u' , v' конвективного движения на его начальной стадии также будут бесконечно малы.

Уравнение энергии для начальной стадии конвекции получается подстановкой величины T , выраженной из (6.286), в уравнение (6.283). В результате мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} + u' \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{\partial T'}{\partial y} + v' \frac{T_1 - T_0}{b} &= \\ &= \chi \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (6.287)$$

Ввиду малости величин T' , u' и v' нелинейные члены $u' \partial T' / \partial x$ и $v' \partial T' / \partial y$ в левой части уравнения (6.287) малы по сравнению с остальными линейными членами этого уравнения. Поэтому нелинейными членами можно пренебречь и переписать уравнение (6.287) в виде

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v' \frac{T_1 - T_0}{b} = \chi \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right). \quad (6.288)$$

Отбрасывание нелинейных членов, содержащих произведения малых величин u' , v' и T' , является стандартной математической процедурой, используемой в задачах устойчивости. Исследование поведения жидкости на стадии возникновения конвекции называется *линейным анализом устойчивости*. Результаты линейного анализа отражают картину нарастания возмущений в жидкости на стадии возникновения конвекции, когда скорости движения и возмущение температуры бесконечно малы.

Приведем систему уравнений, определяющих изменения малых возмущений температуры T' , скоростей u' , v' и давления P' в процессе развития неустойчивости:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad (6.289)$$

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right), \quad (6.290)$$

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial y} - \rho_0 \alpha_v g T' + \mu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right), \quad (6.291)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{v'}{b} (T_1 - T_0) = \chi \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right). \quad (6.292)$$

Второй член в правой части уравнения баланса вертикальных сил (6.291) представляет собой силу плавучести, которая в каждой точке слоя зависит только от отклонения T' температуры жидкости от стационарного распределения (6.285), соответствующего молекулярному механизму теплопереноса. Стационарное распределение температуры определяет в каждой точке температуру отсчета T_c , относительно которой вычисляются изменения температуры, обеспечивающие появление сил плавучести.

Будем искать решение уравнений (6.289) – (6.292) при следующих граничных условиях. Предполагая, что поверхности $y = \pm b/2$ изотермичны и поток вещества через них отсутствует, пишем

$$T' = v' = 0 \text{ при } y = \pm b/2. \quad (6.293)$$

Если слой жидкости ограничен жесткими стенками, то на них ставятся условия прилипания

$$u' = 0 \text{ при } y = \pm b/2, \quad (6.294)$$

отражающие невозможность относительного движения ("проскальзывания") жидкости и ограничивающей ее твердой стенки на границе соприкосновения. Если поверхности $y = \pm b/2$ свободны, т.е. на них нет ничего, что могло бы

служить источником сдвиговых напряжений в жидкости, то u' не должно обращаться в нуль на границах. Вместо этого в качестве граничного условия используется условие равенства нулю сдвигового напряжения τ'_{yx} . В соответствии с (6.58) это означает, что

$$\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = \pm b/2. \quad (6.295)$$

Условие (6.295) можно упростить. Действительно, замечая, что $v' = 0$ при $y = \pm b/2$ для всех x и, следовательно, $\partial v'/\partial x = 0$ при $y = \pm b/2$, мы можем переписать условия на свободной границе в виде

$$\frac{\partial u'}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm b/2. \quad (6.296)$$

Для случая граничных условий (6.296) можно найти простое аналитическое решение линейной задачи устойчивости.

Введем функцию тока, определяемую равенствами (6.69) и (6.70). При этом уравнение неразрывности (6.289) будет удовлетворяться тождественно, а уравнения (6.290) – (6.292) перепишутся следующим образом:

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y^3} \right), \quad (6.297)$$

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial y} - \rho_0 g \alpha_v T' + \mu \left(\frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y^2 \partial x} \right), \quad (6.298)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{1}{b} (T_1 - T_0) \frac{\partial \psi'}{\partial x} = \chi \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right). \quad (6.299)$$

Исключая давление P' из уравнений (6.297) и (6.298), получаем

$$0 = \mu \left(\frac{\partial^4 \psi'}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi'}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi'}{\partial y^4} \right) - \rho_0 g \alpha_v \frac{\partial T'}{\partial x}. \quad (6.300)$$

Таким образом, задача сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений в частных производных (6.299) и (6.300) для двух неизвестных функций ψ' и T' .

Поскольку эти уравнения представляют собой линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, можно искать их решения методом разделения переменных. Граничные условия (6.293) и (6.296) будут удовлетворяться автоматически, если выбрать решения в виде

$$\psi' = \psi'_0 \cos \frac{\pi y}{b} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} e^{\alpha' t}, \quad (6.301)$$

$$T' = T'_0 \cos \frac{\pi y}{b} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} e^{\alpha' t}. \quad (6.302)$$

Возмущения функции тока и температуры, описываемые выражениями (6.301) – (6.302), представляют собой волны с горизонтальной длиной волны λ и максималь-

ными амплитудами ψ_0^* и T_0^* . Величина α^* определяет временную зависимость возмущений. При положительном α^* возмущения усиливаются со временем и нагреваемый слой оказывается конвективно неустойчивым. При отрицательном α^* возмущения затухают со временем и слой оказывается устойчивым относительно конвекции. Величину α^* можно определить, подставляя выражения (6.301), (6.302) в уравнения (6.299), (6.300). Будем иметь

$$\left(\alpha^* + \frac{\chi \pi^2}{b^2} + \frac{\chi 4\pi^2}{\lambda^2} \right) T_0^* = - \frac{2\pi \cdot (T_1 - T_0)}{\lambda b} \psi_0^*, \quad (6.303)$$

$$\mu \left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) \psi_0^* = - \frac{2\pi}{\lambda} \rho_0 g \alpha_v T_0^*. \quad (6.304)$$

Разделив одно из этих уравнений на другое и исключив тем самым амплитуды возмущений ψ_0^* и T_0^* , мы приходим к уравнению, из которого можно найти *инкремент* α^* нарастания неустойчивости:

$$\alpha^* = \frac{\chi}{b^2} \left\{ \frac{\rho_0 g \alpha_v b^3 (T_1 - T_0)}{\mu \chi} \frac{4\pi^2 b^2 / \lambda^2}{(4\pi^2 b^2 / \lambda^2 + \pi^2)^2} - \left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} \right) \right\}. \quad (6.305)$$

Видно, что безразмерный инкремент $\alpha^* b^2 / \chi$ зависит только от двух величин: безразмерного волнового числа $2\pi b / \lambda$ и безразмерного *числа Рэлея* Ra:

$$Ra = \rho_0 g \alpha_v (T_1 - T_0) b^3 / \mu \chi. \quad (6.306)$$

Подставляя выражение (6.306) для числа Рэлея в равенство (6.305), мы получим

$$\frac{\alpha^* b^2}{\chi} = \frac{Ra \cdot 4\pi^2 b^2 / \lambda^2 - (\pi^2 + 4\pi^2 b^2 / \lambda^2)^3}{(\pi^2 + 4\pi^2 b^2 / \lambda^2)^2}. \quad (6.307)$$

Отсюда следует, что инкремент неустойчивости положителен при

$$Ra > \frac{(\pi^2 + 4\pi^2 b^2 / \lambda^2)^3}{4\pi^2 b^2 / \lambda^2}. \quad (6.308)$$

При этом возмущения растут со временем. Если же Ra меньше правой части неравенства (6.308), то величина инкремента отрицательна и состояние равновесия устойчиво. Граница устойчивости соответствует случаю $\alpha^* = 0$, т.е. когда

$$Ra = Ra_{cr} = \frac{(\pi^2 + 4\pi^2 b^2 / \lambda^2)^3}{4\pi^2 b^2 / \lambda^2} \quad (6.309)$$

Критическое значение числа Рэлея Ra_{cr} соответствует началу возникновения конвекции. При $Ra < Ra_{cr}$ возмущения затухают со временем, а при $Ra > Ra_{cr}$ они экспоненциально растут.

Согласно (6.309), критическое число Рэлея является функцией длины волны возмущения. График функции Ra_{cr} ($2\pi b / \lambda$) приведен на рис. 6.38. Если длина волны возмущения и число Рэлея таковы, что соответствующая им точка лежит

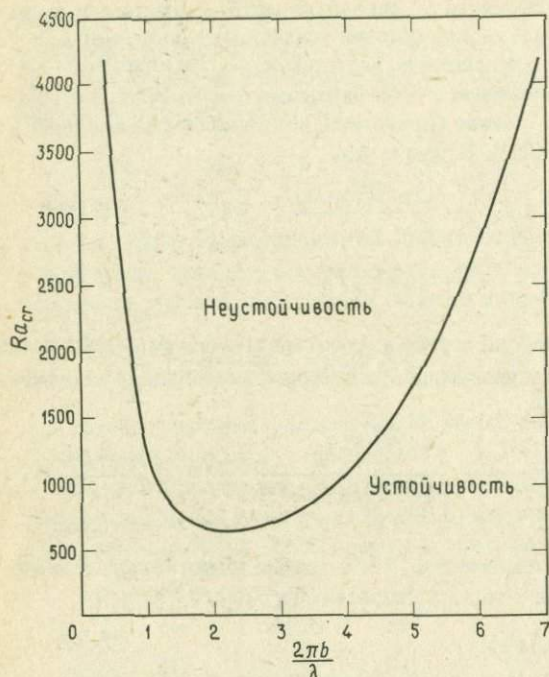


РИС. 6.38. Критическое число Рэлея Ra_{cr} в функции безразмерного волнового числа в задаче о возникновении конвекции в слое жидкости со свободными границами при нагреве снизу.

выше кривой Ra_{cr} , то это означает, что возмущение с данной длиной волны нарастает, т.е. исходное состояние покоя неустойчиво относительно этого возмущения. Если точка лежит под кривой, то конвективное возмущение с данной длиной волны λ не развивается. Например, при $Ra = 2000$ развиваются все конвективные возмущения, для которых $0,8 \leq 2\pi b/\lambda \leq 5,4$, а возмущения с $2\pi b/\lambda \leq 0,8$ и $2\pi b/\lambda \geq 5,4$ затухают. Поскольку кривая $Ra_{cr}(2\pi b/\lambda)$ имеет минимум, то при Ra , меньших минимального значения Ra_{cr} , все возмущения затухают со временем, т.е. слой жидкости с таким числом Рэлея (меньшим Ra_{cr}^{min}) устойчив относительно конвекции.

Величину $2\pi b/\lambda$, соответствующую минимуму Ra_{cr} , можно найти, приравняв производную по $2\pi b/\lambda$ от правой части равенства (6.309) к нулю. В результате получается

$$\frac{\partial Ra_{cr}}{\partial (2\pi b/\lambda)} = \left[\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2} - 3\left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2}\right)^2 2\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right) - \left(\pi^2 + \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2}\right)^3 2\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right) \right] \left(\frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2}\right)^{-2} = 0, \quad (6.310)$$

или

$$2\pi b / \lambda = \pi / \sqrt{2}. \quad (6.311)$$

Размерная длина волны, отвечающая наименьшему критическому значению числа Рэлея Ra_{cr}^{min} , равна

$$\lambda = 2\sqrt{2}b. \quad (6.312)$$

Подставляя это значение длины волны в равенство (6.309), мы найдём величину минимального критического числа Рэлея

$$Ra_{cr}^{min} = 27\pi^4/4 = 657,5, \quad (6.313)$$

Требование превышения числом Рэлея Ra критического значения Ra_{cr} как условие возникновения конвекции можно сформулировать несколькими способами. Оно означает, например, что для того, чтобы началась конвекция, перепад температуры на толщине слоя при прочих фиксированных условиях должен превышать некоторое минимальное значение или же коэффициент вязкости жидкости должен быть меньше критического. Если при заданных прочих параметрах жидкости число Рэлея увеличивается от нуля за счет роста разности $T_1 - T_0$, то конвекция в жидкости начнется тогда, когда Ra достигнет значения 657,5 (при нагреве снизу и при свободных граничных условиях). При этом отношение сторон конвективной ячейки будет равно $\sqrt{2}$ (см. рис. 6.37). При условии прилипания на границах слоя решение должно определяться численно; в этом случае минимальное критическое значение числа Рэлея и отвечающая ему длина волны равны $Ra_{cr}^{min} = 1707,8$ и $\lambda = 2,016b$ соответственно.

Линейный анализ устойчивости относительно начала конвекции можно провести также для слоя жидкости, охлаждаемого сверху, но нагреваемого изнутри однородно распределенными источниками тепла. Нижняя граница слоя при этом считается теплоизолированной, т.е. не пропускающей теплового потока. В этом случае жидкость у верхней границы также будет охлаждаться и станет более плотной, чем жидкость, находящаяся в глубине. Если возникающие силы плавучести достаточно велики для преодоления сил вязкого сопротивления, то жидкость придет в движение. Такая модель неустойчивости непосредственно применима к случаю конвекции в мантии Земли, где внутренний подогрев обеспечивается распадом радиоактивных элементов, а охлаждение поверхности происходит за счет молекулярной теплопроводности. В результате приповерхностные породы оказываются холоднее и плотнее мантийных пород на глубине. Число Рэлея для слоя, нагреваемого изнутри, определяется как

$$Ra = \alpha_v \rho_0^2 g N b^5 / k \mu \chi, \quad (6.314)$$

где N — удельное внутреннее тепловыделение. При условии прилипания на границах минимальное критическое число Рэлея равно 2772, а соответствующая величина $2\pi b / \lambda$ равна 2,63; для условий на свободной границе эти значения составляют соответственно 867,8 и 1,79.

Оценим величину числа Рэлея (6.314) для мантии Земли. Коэффициент вязкости, согласно данным послеледниковых поднятий, примем равным $\mu = 10^{21}$ Па·с.

Другие характеристики пород будут иметь следующие значения: $k = 4 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \times \text{К}^{-1}$, $\chi = 1 \text{ мм}^2/\text{с}$, $\alpha_v = 3 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$. Ускорение силы тяжести и среднюю плотность положим равными $g = 10 \text{ м/с}^2$ и $\rho_0 = 4000 \text{ кг/м}^3$. Распределение мощности тепловых источников в соответствии с тем, что говорилось в гл. 4, примем однородным: $H = 9 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/кг}$. Если считать, что конвекция охватывает только верхнюю мантию, то следует положить $b = 700 \text{ км}$, и тогда мы найдем, что $Ra = 2 \cdot 10^6$. Считая приведенные значения параметров пригодными для всей мантии и полагая $b = 2880 \text{ км}$, мы получим $Ra = 2 \cdot 10^9$. В обоих случаях найденное число Рэлея существенно превышает минимальное критическое значение. Именно этот расчет заставил Холмса в 1931 г. предложить конвекцию в мантии в качестве движущей силы дрейфа континентов.

ЗАДАЧА 6.27. Оцените значения числа Рэлея для мантий Меркурия, Венеры, Марса и Луны. Считайте, что интенсивность тепловыделения там такая же, как в мантии Земли. Значения параметров μ , k , χ и α_v примите равными соответствующим значениям в земной мантии. Значения ρ_0 , g и b найдите в гл. 1.

ЗАДАЧА 6.28. Вычислите точные значения минимальной и максимальной длины волны неустойчивых конвективных возмущений при $Ra = 2000$ для слоя, нагреваемого снизу. Используйте условия на свободной границе.

ЗАДАЧА 6.29. Дайте математическую формулировку линейной задачи о возникновении конвективной неустойчивости в слое жидкости, нагреваемом изнутри. Используйте свободные граничные условия. Верхнюю границу считайте изотермичной, нижнюю — адиабатичной (не пропускающей поток тепла). Сведите задачу к интегрированию одного обыкновенного дифференциального уравнения для функции тока, удовлетворяющей требуемым граничным условиям.

6.19. Развитая тепловая конвекция (конечной амплитуды) в приближении погранслоя

Приведенная в предыдущем разделе линейная теория устойчивости позволяет ответить на вопрос, будет ли при данных условиях происходить тепловая конвекция. Однако линейный анализ не позволяет найти структуру конвективных движений в том случае, если число Рэлея превышает критическое значение. В силу линейности уравнений теории малоамплитудной конвекции с их помощью нельзя вычислить *амплитуды развитых конвективных потоков*.

Для исследования структуры конвективных ячеек при больших числах Рэлея можно применить *приближение погранслоя*. Рассмотрим опять слой жидкости толщиной b , нагреваемый снизу. Пусть верхняя и нижняя границы слоя поддерживаются при температурах T_0 и T_1 соответственно. Введем систему координат, как показано на рис. 6.39. Конвективное движение разделяется на ячейки шириной $\lambda/2$, в которых сосредоточены *двумерные вали*. Смежные вали вращаются в противоположных направлениях. В целом течение является в высшей степени вязким. На верхней холодной границе образуется тонкий тепловой погранслоя. Когда два таких холодных погранслоя смежных ячеек сталкиваются, они отделяются от границы и образуют холодную нисходящую *тепловую струю* (*thermal plume*). Подобно этому при столкновении двух горячих теп-

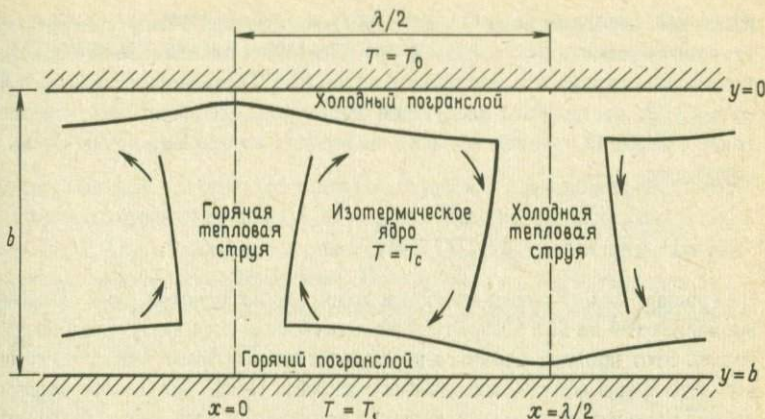


РИС. 6.39. Рассчитанная в приближении погранслоя структура ячеек двумерной тепловой конвекции в слое жидкости, нагреваемой снизу.

ловых погранслоев, образующихся на нижней границе ячеек, образуется горячая восходящая струя. Все течение вызывается силами плавучести, действующими в восходящем и нисходящем потоках вещества. Ядро каждой ячейки при этом вращается и остается практически изотермичным. Из соображений симметрии следует, что температура T_c практически *изотермического ядра* является средней из двух граничных температур:

$$T_c = T_0 + (T_1 - T_0)/2. \quad (6.315)$$

Вычислим скорости течения в слое жидкости и количество переносимого при этом тепла. Точное решение задачи в рамках теории погранслоя требует привлечения численных методов. Однако, делая ряд приближений, можно получить аналитическое решение и затем сравнить его с более строгими решениями. Рассмотрим вначале структуру холодного теплового погранслоя, прилегающего к верхней границе слоя жидкости. Уравнение верхней границы слоя имеет вид $y = 0$, где ось y направлена вниз. Начало горизонтальной координатной оси x выберем над центром восходящей струи и будем считать, что горизонтальная скорость движения жидкости на верхней границе слоя постоянна и равна u_0 . На самом деле горизонтальная скорость при $x = 0$ и $\lambda/2$ равна нулю, а при $x = \lambda/4$ имеет максимум. Постоянное значение скорости u_0 представляет собой среднее из реальной переменной скорости у верхней границы. Решение, определяющее структуру такого теплового погранслоя, уже было найдено в разд. 4.16. Распределение температуры в холодном погранслое, согласно (4.124), описывается функцией

$$\frac{T_c - T}{T_c - T_0} = \operatorname{erfc} \left[\frac{y}{2} \left(\frac{u_0}{\chi x} \right)^{1/2} \right]. \quad (6.316)$$

Выше мы уже упоминали о непосредственной связи между холодным погранслоем тепловой конвективной ячейки и утолщающейся океанической литосферой. Интегрируя поверхностный тепловой поток (4.127) по ширине ячейки, т.е. от $x = 0$ до $x = \lambda/2$, мы получим следующее выражение для общей интенсивности Q потерь тепла с верхней границы ячейки в пересчете на единицу длины вдоль конвективного вала:

$$Q = 2k(T_c - T_0) \left(\frac{u_0 \lambda}{2\pi\chi} \right)^{1/2}. \quad (6.317)$$

На границе между двумя ячейками холодные погранслои двух смежных ячеек поворачиваются на 90° и образуют холодную симметричную нисходящую тепловую струю. Этот процесс является непосредственной аналогией субдукции океанической литосферы вблизи океанического желоба. Поскольку во время перехода теплового погранслоя в тепловую струю происходят очень незначительные потери тепла за счет теплопроводности, распределение температуры в верхней части нисходящего потока вещества будет таким же, как и в погранслое. Как и для движения горизонтального холодного погранслоя, мы будем предполагать, что направленная вниз вертикальная скорость v_0 холодного потока есть величина постоянная. Однако v_0 может отличаться от u_0 . Поскольку количество тепла, переносимого конвекцией в только что сформировавшейся нисходящей струе, должно быть равно теплу, переносимому на конечном участке горизонтального погранслоя, отношение толщины опускающегося потока к толщине погранслоя будет равно u_0/v_0 . Следовательно, распределение температуры T в вертикальной струе непосредственно после ее образования будет иметь вид

$$\frac{T_c - T}{T_c - T_0} = \operatorname{erfc} \left[\frac{v_0}{2u_0} \left(\frac{\lambda}{2} - x \right) \left(\frac{2u_0}{\chi\lambda} \right)^{1/2} \right]. \quad (6.318)$$

Аналогичным образом записывается выражение для температуры в образующейся в смежной ячейке второй половине потока, симметричного относительно плоскости $x = \lambda/2$.

Распределение температуры в мантийной струе, опускающейся вдоль границы между двумя смежными ячейками, можно найти как решение Лапласа (4.150) нестационарной задачи теплопроводности, в которой начальное распределение температуры задается равенством (6.318), а время t определяется как y/v_0 . Такая процедура решения вполне аналогична использованной в разд. 4.16 для определения структуры холодного поверхностного погранслоя из нестационарного уравнения теплопроводности. Там мы вместо t подставляли x/u_0 .

Зная распределение температуры в нисходящем потоке мантийного вещества, можно вычислить полную направленную вниз массовую гравитационную силу, действующую на этот поток вследствие его отрицательной плавучести по отношению к изотермическому ядру ячейки. Сила плавучести, действующая в положительном направлении оси y на единицу объема нисходящей тепловой струи равна

$$\rho_0 g \alpha_v (T_c - T),$$

и, следовательно, сила, действующая на половину нисходящей струи в пересчете на единичный интервал глубин и единичное расстояние вдоль конвективного вала, равна

$$f_b = -\rho_0 g \alpha_v \int_{\lambda/2}^{-\infty} (T_c - T) dx. \quad (6.319)$$

В интеграле по конечной полуширине тепловой струи мы заменили предел интегрирования, соответствующий границе с ядром, бесконечностью, поскольку на этом пределе $T \rightarrow T_c$ [ср., например, с равенством (4.199), где мы проделали аналогичную замену предела интегрирования]. Полная сила F_b , действующая на нисходящий поток, получается интегрированием f_b по вертикальной координате в пределах от $y = 0$ до $y = b$:

$$F_b = \int_0^b f_b dy, \quad (6.320)$$

где F_b — сила, приходящаяся на единицу длины конвективного вала (т.е. на единичную длину в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 6.39) и направленная вниз.

Интеграл в выражении (6.319) пропорционален количеству тепла, содержащегося в элементе нисходящей струи толщиной dy . Поскольку тепло к такой струе на ее длине не передается, количество тепла, содержащееся в каждом ее элементе, сохраняется неизменным. Это вытекает также из того факта, что интеграл от температурного распределения, задаваемого решением Лапласа, есть постоянная, не зависящая от t (см. разд. 4.20). Следовательно, массовая сила плавучести f_b , приходящаяся на единичный интервал глубин, не зависит от y и

$$F_b = f_b b. \quad (6.321)$$

Поскольку f_b есть величина постоянная, мы можем вычислить ее в любой точке нисходящего потока (на любой глубине y), вычисляя интеграл в (6.319). Это удобно сделать при малых y , где поток еще только сформировался и распределение температуры в нем описывается формулой (6.318). Подставляя (6.318) в (6.319) и переходя к новой переменной интегрирования $x^* = \lambda/2 - x$, мы получим

$$\begin{aligned} f_b &= \rho_0 g \alpha_v (T_c - T_0) \int_0^{\infty} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{v_0 x^*}{2u_0} \left(\frac{2u_0}{\chi \lambda} \right)^{1/2} \right\} dx^* = \\ &= 2\rho_0 g \alpha_v (T_c - T_0) \frac{u_0}{v_0} \left(\frac{\chi \lambda}{2u_0} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} \operatorname{erfc} z dz = \\ &= 2\rho_0 g \alpha_v (T_c - T_0) \frac{u_0}{v_0} \left(\frac{\chi \lambda}{2\pi u_0} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.322)$$

Отсюда следует, что полная гравитационная сила F_b , тянущая вниз половину

симметричного нисходящего потока, равна

$$F_b = f_b b = 2\rho_0 g \alpha_v b (T_c - T_0) \frac{u_0}{v_0} \left(\frac{\chi \lambda}{2\pi u_0} \right)^{1/2}. \quad (6.323)$$

Выше мы рассмотрели только холодный тепловой погранслоя и нисходящую тепловую струю. Поскольку задача полностью симметрична, структура горячего теплового погранслоя и восходящей тепловой струи будет описываться выражениями, полученными соответственно для холодного погранслоя и нисходящей струи, но с заменой $T_c - T_0$ на $T_c - T_1$. Полная выталкивающая сила, действующая на восходящий поток, равна отрицательной силе плавучести (6.323), действующей на нисходящий поток.

Вязкое течение в изотермическом ядре можно рассчитать путем решения бигармонического уравнения. Однако при поставленных в данной задаче граничных условиях аналитического решения получить не удастся. Поэтому мы будем аппроксимировать течение в ядре посредством линейных распределений скорости

$$u = u_0 (1 - 2y/b), \quad (6.324)$$

$$v = -v_0 (1 - 4x/\lambda) \quad (6.325)$$

и в соответствии с условием сохранения массы потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$v_0 \lambda / 2 = u_0 b. \quad (6.326)$$

Это распределение скоростей показано на рис. 6.40. Следует подчеркнуть, что принятое распределение не удовлетворяет граничным условиям, налагаемым на компоненты скорости. Не удовлетворяется, например, условие $u = 0$ при $x = 0$ и $x = \lambda/2$. Однако указанные распределения являются достаточно хорошим приближением реального течения вблизи центра ячейки.

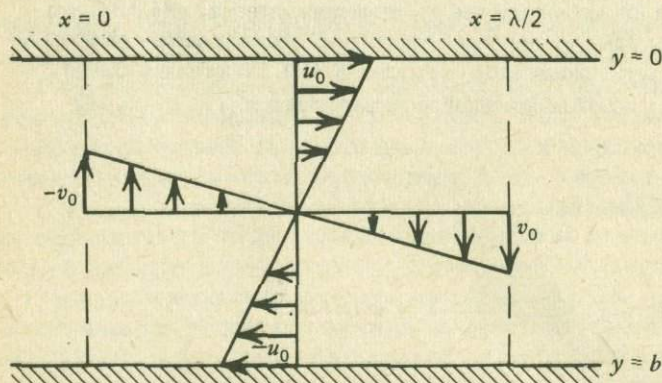


РИС. 6.40. Линейные модельные распределения скорости в ядре конвективной ячейки. Площади треугольников со стрелками равны друг другу (сохранение массы жидкости).

Сдвиговое напряжение, действующее на вертикальную границу ядра ячейки, в соответствии с (6.58) равно

$$\tau_{cv} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{4v_0}{\lambda}, \quad (6.327)$$

а сдвиговое напряжение на горизонтальных границах есть

$$\tau_{ch} = \mu \frac{\partial u}{\partial (-y)} = \mu \frac{2u_0}{b}, \quad (6.328)$$

В равенстве (6.328) стоит производная по $-y$, так как производная должна вычисляться в направлении внешней нормали к поверхности. Для верхней горизонтальной границы ячейки внешняя нормаль направлена против оси y . Мощность вязких сдвиговых сил, действующих на каждую вертикальную границу, в пересчете на единицу длины в направлении оси конвективного вала равна $b\tau_{cv}v_0$. Мощность есть произведение силы на скорость; см. также формулу (4.224). Мощность вязких сил, действующих на каждую горизонтальную границу, равна $(\lambda/2)\tau_{ch}u_0$. Мощность сил плавучести, приложенных к каждому потоку, есть $F_b v_0$. Поскольку мощность гравитационных массовых сил, действующих на вертикальные потоки, должна быть равна мощности вязких сил, мы можем написать

$$2F_b v_0 = 2b\tau_{cv}v_0 + \lambda\tau_{ch}u_0. \quad (6.329)$$

Подставляя в это равенство выражения (6.323), (6.327) и (6.328), получаем

$$\rho_0 g \alpha_v u_0 (T_c - T_0) \left(\frac{\chi \lambda}{2\pi u_0} \right)^{1/2} = \frac{2v_0^2 \mu}{\lambda} + \frac{u_0^2 \mu \lambda}{2b^2}. \quad (6.330)$$

Исключая отсюда температуру ядра с помощью (6.315) и вертикальную скорость с помощью (6.326) и разрешая полученное равенство относительно горизонтальной скорости, мы находим

$$u_0 = \frac{\chi}{b} \frac{(\lambda/2b)^{7/3}}{(1 + \lambda^4/16b^4)^{2/3}} \left(\frac{Ra}{2\sqrt{\pi}} \right)^{2/3}, \quad (6.331)$$

где Ra — число Рэлея (6.306) для слоя, нагреваемого снизу.

Зная среднюю скорость на верхней границе ячейки, мы можем с помощью формулы (6.317) определить общую интенсивность тепловых потерь Q :

$$Q = \frac{k(T_1 - T_0)}{2^{1/3} \pi^{2/3}} \frac{(\lambda/2b)^{5/3}}{(1 + \lambda^4/16b^4)^{1/3}} Ra^{1/3}. \quad (6.332)$$

Мы уже видели, что число Нуссельта Nu определяется как отношение конвективного теплового потока Q к теплому потоку Q_c , передаваемому за счет молекулярной теплопроводности при отсутствии конвекции:

$$Nu = Q/Q_c, \quad (6.333)$$

где

$$Q_c = \frac{k(T_1 - T_0)}{b} \frac{\lambda}{2}. \quad (6.334)$$

Подставляя (6.332) и (6.334) в (6.333), находим

$$Nu = \frac{1}{2^{1/3} \pi^{2/3} (1 + \lambda^4/16 b^4)^{1/3}} (\lambda/2b)^{2/3} Ra^{1/3}. \quad (6.335)$$

Относительное удлинение ячеек $\lambda/2b$, т.е. отношение горизонтального размера ячейки к вертикальному, остается неопределенным. Согласно линейной теории устойчивости, относительное удлинение ячейки для наиболее быстро растущего возмущения есть $\lambda/2b = \sqrt{2}$ [см. равенство (6.312)]. В нелинейной теории конвекции удлинение определяется по максимуму числа Нуссельта, т.е. исходя из условия максимальной эффективности переноса тепла через слой жидкости при заданном значении числа Рэлея. Таким образом, из требования

$$\frac{\partial Nu}{\partial (\lambda/2b)} = 0 \quad (6.336)$$

мы находим, что

$$\lambda/2b = 1. \quad (6.337)$$

При таком значении относительного удлинения ячейки горизонтальная скорость равна

$$u_0 = 0,271 \frac{\chi}{b} Ra^{2/3}, \quad (6.338)$$

а число Нуссельта есть

$$Nu = 0,294 Ra^{1/3}. \quad (6.339)$$

Хотя это соотношение получено на основе приближенного решения, тем не менее вид зависимости числа Нуссельта от числа Рэлея является точным. Численные расчеты показывают, что постоянная 0,294 в соотношении между числом Нуссельта и числом Рэлея на самом деле равна 0,225.

Интересно попытаться применить развитое приближение погранслоя к проблеме тепловой конвекции в верхней мантии. Глубина очагов глубокофокусных землетрясений, связанных с субдукцией литосферы у океанических желобов, доходит до 700 км. Это служит прямым указанием на то, что конвекция охватывает мантию по крайней мере до этой глубины. Если предположить, что конвекция ограничена верхними 700 км мантии, то приближение погранслоя в случае слоя, нагреваемого снизу, должно обеспечить хорошую точность.

Определяя число Рэлея (6.306) для верхней мантии при $b = 700$ км, $\rho_0 = 3700$ кг/м³, $g = 10$ м/с², $\alpha_v = 3 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹, $T_1 - T_0 = 1500$ К, $\chi = 1$ мм²/с и $\mu = 10^{21}$ Па·с, получаем $Ra = 5,7 \cdot 10^5$. Средний поверхностный тепловой поток \bar{q} равен

$$\bar{q} = \frac{2Q}{\lambda} = \frac{2Q_c}{\lambda} Nu = \frac{k(T_1 - T_0)}{b} Nu = \frac{k(T_1 - T_0)}{b} 0,294 Ra^{1/3}. \quad (6.340)$$

Подставляя сюда $k = 4 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ и приведенные выше значения остальных параметров, мы найдем, что $\bar{q} = 200 \text{ мВт/м}^2$. Это примерно в 3 раза больше среднего наблюдаемого теплового потока. Согласно (6.338), средняя горизонтальная скорость составляет $u_0 = 84 \text{ мм/год}$, что приблизительно в 2 раза превышает скорость движения плит.

Теория погранслоя применима также к слою, нагреваемому изнутри и охлаждаемому сверху. В этом случае течение также разделяется на вращающиеся навстречу друг другу двумерные ячейки с размерами b и $\lambda/2$. Вблизи верхней границы каждой ячейки образуется холодный тепловый погранслой. При столкновении двух холодных погранслоев смежных ячеек происходит их отделение от верхней границы и формирование холодной нисходящей тепловой струи. Однако поток тепла через нижнюю границу слоя, нагреваемого изнутри, отсутствует, и потому горячий погранслой на нижней границе не образуется. Нет в этом случае и восходящих струй между ячейками. Структура течения для такого случая показана на рис. 6.41. В приближении погранслоя можно считать, что вся жидкость, не входящая в холодные тепловые погранслои и нисходящие струи, имеет одну и ту же температуру T_c . Величина этой температуры заранее неизвестна и должна определяться в результате решения задачи конвекции.

Для распределения температуры в верхнем холодном погранслое и общей интенсивности Q потерь тепла через верхнюю границу ячейки остаются справедливыми выражения (6.316) и (6.317) соответственно. При однородном распределении удельного тепловыделения H общая теплогенерация в ячейке равна $\rho_0 H b \lambda / 2$. В стационарном состоянии эта величина должна быть равна теплогенерации Q :

$$\frac{\rho_0 H b \lambda}{2} = 2K(T_c - T_0) \left(\frac{u_0 \lambda}{2\pi\chi} \right)^{1/2}. \quad (6.341)$$

Вычисление общей силы плавучести, действующей на нисходящую холодную мантийную струю, приводит к тому же результату, что и в предыдущей задаче: сила F_b определяется равенством (6.323). Мощность сил вязкости и плавучести

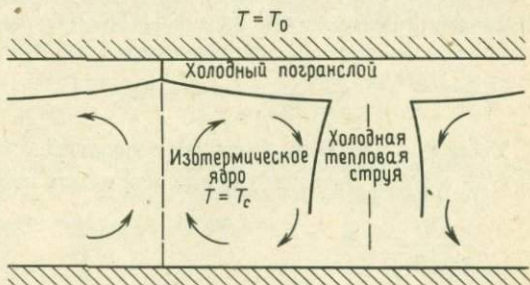


РИС. 6.41. Приближение погранслоя для структуры ячеек двумерной тепловой конвекции в слое, нагреваемом изнутри и охлаждаемом сверху.

на границах та же, что и в предыдущей задаче. Однако теперь приток энергии связан с опусканием только одной струи. Приравнявая мощность, подводимую к ячейке, и мощность, расходуемую на преодоление вязкого сопротивления, находим

$$\rho_0 g \alpha_v (T_c - T_0) u_0 \left(\frac{\chi \lambda}{2 \pi u_0} \right)^{1/2} = \frac{4 v_0^2 \mu}{\lambda} + \frac{u_0^2 \mu \lambda}{b^2}. \quad (6.342)$$

Подставляя сюда выражения для v_0 и $T_c - T_0$ из равенств (6.326) и (6.341) соответственно, получаем

$$u_0 = \frac{\chi}{2b} \frac{(\lambda/2b)^2}{(1 + \lambda^4/16b^4)^{1/2}} \text{Ra}^{1/2}, \quad (6.343)$$

где число Рейлея для слоя, нагреваемого изнутри, определено равенством (6.314).

Подставляя (6.343) в (6.341), мы можем найти температуру T_c ядра:

$$T_c - T_0 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{\rho_0 H b^2}{k} \frac{(1 + \lambda^4/16b^4)^{1/2}}{(\lambda/2b)^{1/2}} \text{Ra}^{-1/4}, \quad (6.344)$$

где $T_c - T_0$ есть перепад температур на толщине слоя. Эффективность конвективного охлаждения слоя можно оценить, сопоставляя перепад температур (6.344) и перепад $T_{c1} - T_0$, который установился бы между границами слоя, если бы все генерируемое в нем тепло выводилось за счет теплопроводности. Безразмерная температура

$$\theta \equiv \frac{T_c - T_0}{T_{c1} - T_0} \quad (6.345)$$

является мерой эффективности конвекции в слое внутренним тепловыделением. Чем меньше θ , тем эффективнее происходит конвективный вынос тепла, выделяемого в жидкости. При отсутствии конвекции перепад температур в слое был бы равен (см. разд. 4.6)

$$T_{c1} - T_0 = \rho H b^2 / 2k. \quad (6.346)$$

Подставляя (6.344) и (6.346) в (6.345), находим

$$\theta = (2\pi)^{1/2} \frac{(1 + \lambda^4/16b^4)^{1/2}}{(\lambda/2b)^{1/2}} \text{Ra}^{-1/4}. \quad (6.347)$$

Мы видим, что безразмерная температура θ является функцией удлинения $\lambda/2b$ ячейки. Последнее можно определить из условия минимума θ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial (\lambda/2b)} = 0, \quad (6.348)$$

откуда

$$\lambda/2b = 1, \quad (6.349)$$

т.е. относительное удлинение ячейки то же, что и в случае нагрева снизу. При этом значении удлинения ячейки горизонтальная скорость и безразмерная температура равны

$$u_0 = 0,354 \frac{\chi}{b} Ra^{1/2}, \quad (6.350)$$

$$\theta = 2,98 Ra^{-1/4}. \quad (6.351)$$

Отсюда видно, что с усилением конвекции (с увеличением числа Рэлея) безразмерная разность температур между изотермическим ядром и верхней границей слоя уменьшается.

Теорию погранслоя для тепловой конвекции в жидкости с однородным внутренним подогревом и охлаждением на верхней границе можно применить для расчета конвекции, охватывающей всю мантию. Принимая в этом случае $b = 2880$ км, $H = 9 \cdot 10^{-12}$ Вт/кг (см. гл. 4), $\alpha_v = 3 \cdot 10^{-5}$ К $^{-1}$, $\rho_0 = 4700$ кг/м 3 , $g = 10$ м/с 2 , $k = 4$ Вт \cdot м $^{-1}$ \cdot К $^{-1}$, $\chi = 1$ мм 2 /с и $\mu = 10^{21}$ Па \cdot с, из формулы (6.314) получаем $Ra = 3 \cdot 10^9$. Равенства (6.345), (6.346) и (6.351) дают $T_c - T_0 = 550$ К. Это примерно в 4 раза меньше реально наблюдаемого перепада температур. Из (6.350) мы находим $u_0 = 210$ мм/год, что в ~ 4 раза превышает среднюю скорость плит.

Число Нуссельта и безразмерная температура как характеристики эффективности конвекции были введены для случая условий на свободной границе. Однако в большинстве лабораторных экспериментов реально выполняются условия прилипания, так как для удержания слоя жидкости требуются стенки. Эксперименты показывают, что для слоя жидкости, нагреваемого снизу, при граничных условиях, соответствующих прилипанию, число Нуссельта равно

$$Nu = 0,131 Ra^{0,3}, \quad (6.352)$$

а для слоя, нагреваемого изнутри и охлаждаемого сверху, получается

$$\theta = 5,95/Ra^{0,23}. \quad (6.353)$$

Эти результаты близки к тем, которые мы получили выше.

ЗАДАЧА 6.30. Для соотношения (6.352) между числом Нуссельта и числом Рэлея в случае слоя жидкости, нагреваемого снизу, можно найти очень точное приближение, если воспользоваться соотношением (6.353) между θ и Ra , относящимися к слою, нагреваемому изнутри. Для этого запишем число Нуссельта как

$$Nu = \frac{\bar{q}}{k(T_1 - T_0)/b} \quad (6.354)$$

и будем понимать под тепловым потоком \bar{q} через верхнюю границу величину $\rho H b$ полного тепловыделения в слое. Считая $T_1 - T_0$ равным удвоенному перепаду температур между границами слоя с конвекцией, перепишем (6.354) в виде

$$Nu = \frac{\rho H b^2}{2k(T_c - T_0)}. \quad (6.355)$$

Исключая отсюда H с помощью (6.345), (6.346) и (6.353) и вводя число Рэлея для слоя,

нагреваемого снизу и имеющего перепад температур $T_c - T_0$, получите соотношение

$$Nu = 0,12 Ra^{0,3} \quad (6.356)$$

которое практически совпадает с (6.352).

ЗАДАЧА 6.31. Рассмотрим конвекцию в слое жидкости, нагреваемом снизу. Для среднего поверхностного теплового потока \bar{q} , который передается через холодный тепловой погранслои посредством теплопроводности, можно написать

$$\bar{q} = k(T_c - T_0)/\delta, \quad (6.357)$$

где δ — характерная толщина теплового погранслоя. Покажите, что

$$\delta/b = 1,7 Ra^{-1/3}. \quad (6.358)$$

Вычислите δ для конвективной ячейки в верхней мантии. Используйте значения параметров, приведенные в этом разделе.

ЗАДАЧА 6.32. Чем отличаются реальные поверхностные плиты и погружающиеся литосферные блоки от тепловых погранслоев и нисходящих мантийных струй в двумерных конвективных ячейках в слоях обычных вязких жидкостей, нагреваемых снизу или изнутри?

ЗАДАЧА 6.33. Предположим, что конвекция охватывает всю мантию и 10% среднего поверхностного теплового потока генерируется в земном ядре. Пусть тепловые погранслои на поверхности и на границе между ядром и мантией имеют одинаковую толщину. Каков перепад температур на погранслое, расположенном в нижней мантии, по сравнению с перепадом температур на погранслое у поверхности?

ЗАДАЧА 6.34. Применяя модель двумерного погранслоя к задаче конвекции через всю мантию, нагреваемую снизу, вычислите средний поверхностный тепловой поток, среднюю горизонтальную скорость и среднюю толщину поверхностного погранслоя. Примите $T_1 - T_0 = 3000$ К, $b = 2880$ км, $k = 4$ Вт \cdot м $^{-1}$ \cdot К $^{-1}$, $\chi = 1$ мм 2 /с, $\alpha_v = 3 \cdot 10^{-6}$ К $^{-1}$, $g = 10$ м/с 2 и $\rho_0 = 4000$ кг/м 3 .

6.20. Движущий механизм тектоники плит

В предыдущем разделе мы видели, что тепловая конвекция в слое, нагреваемом изнутри, имеет много общего с конвекцией в мантии. Тепловой погранслои на холодной верхней границе жидкости является прямой аналогией океанической литосферы. Отделение погранслоя от поверхности с образованием нисходящего потока вещества подобно процессу субдукции литосферы у океанического желоба. Точно так же, как гравитационная массовая сила, действующая на холодную струю, вызывает конвективное течение вязкой жидкости, так и гравитационная массовая сила, действующая на литосферу, погружающуюся в районе желоба, по-видимому, является важной движущей силой тектоники плит.

Гравитационную массовую силу F_{b1} , возникающую вследствие низкой температуры литосферы относительно окружающей ее мантии, можно вычислить по формуле (6.323). В силу жесткости литосферы мы имеем $u_0 = v_0$. Это следует также из равенства (6.326) при $\lambda/2b \approx 1$. Тогда равенство (6.323) дает

$$F_{b1} = 2\rho_0 g \alpha_v b (T_c - T_0) \left(\frac{\chi \lambda}{2\pi u_0} \right)^{1/2}. \quad (6.359)$$

При выводе этого соотношения мы пренебрегли фрикционным нагревом погружающейся литосферы (см. разд. 4.26). Главная трудность, возникающая при вычислении гравитационной массовой силы, связана с неопределенностью вертикального размера конвективной ячейки, т.е. с неопределенностью длины опускающихся под желоб литосферных блоков. Основываясь на глубинах очагов землетрясений, достигающих 700 км, мы примем $b = 700$ км. Принимая $\rho_0 = 3300$ кг/м³, $g = 10$ м/с², $\alpha_v = 3 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹, $T_c - T_0 = 1200$ К, $\chi = 1$ мм²/с, $u_0 = 50$ мм/год и $\lambda = 4000$ км, мы найдем, что $F_{b1} = 3,3 \cdot 10^{13}$ Н/м. Это сила, тянущая плиту и приходящаяся на единицу ее длины в направлении желоба.

Кроме F_{b1} на погружающуюся литосферу действует сила, возникающая вследствие подъема фазовой границы между оливином и шпинелью (см. разд. 4.28). Положение границы фазового перехода в опускающейся литосфере схематически показано на рис. 6.42. В окружающей мантии фазовая граница расположена на глубине, где температура равна T_{os} . Поскольку погружающаяся литосфера холоднее мантии, фазовый переход в ней происходит при меньшем давлении, или на меньшей глубине. Поскольку температура T_s на фазовой границе в опускающейся литосфере связана с расстоянием x^* от боковой поверхности литосферы, т.е. $T_s = T_s(x^*)$, то смещение h_{os} фазовой границы также есть функция x^* , т.е. $h_{os} = h_{os}(x^*)$. Гравитационная массовая сила тяги F_{b2} , действующая на опускающийся блок и возникающая вследствие подъема фазовой границы, равна

$$F_{b2} = g \Delta \rho_{os} \int_{x^*=0}^{x^*=x'_s} h_{os}(x^*) dx^*, \quad (6.360)$$

где $\Delta \rho_{os}$ — абсолютная величина разности плотностей контактирующих фаз. Смещение фазовой границы равно

$$h_{os} = \frac{\gamma(T_{os} - T_s)}{\rho_0 g}, \quad (6.361)$$

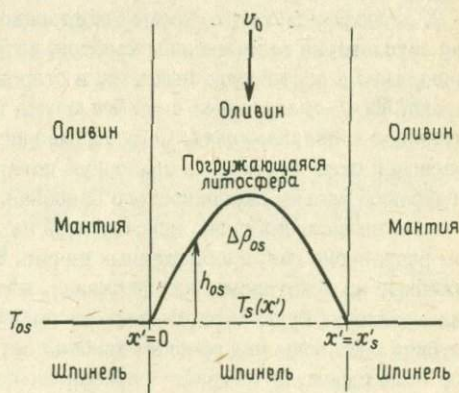


РИС. 6.42. Смещение вверх фазовой границы оливин — шпинель в погружающейся литосфере увеличивает отрицательную массовую силу плавучести.

где $\gamma = dp/dT$ — наклон кривой Клапейрона. Подставляя (6.361) в (6.360), получаем

$$F_{b2} = \frac{\gamma \Delta \rho_{os}}{\rho_0} \int_{x'=0}^{x'=x'_s} (T_{os} - T_s) dx' \quad (6.362)$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (6.362), есть проинтегрированная по толщине опускающегося блока разность температур между ним и мантией на глубине фазового перехода оливин — шпинель. Эту величину можно вычислить в приближении погранслоя. Находя f_b из (6.322), мы видели, что проинтегрированная по толщине блока разность температур в пересчете на единичный интервал глубин в нисходящем потоке есть величина постоянная. Согласно (6.322), значение этой постоянной при $u_0 = v_0$ равно $f_b/\rho_0 g \alpha_v$, или

$$2(T_c - T_0)(\chi\lambda/2\pi u_0)^{1/2}.$$

Подставляя это значение интеграла в формулу (6.362), находим

$$F_{b2} = \frac{2(T_c - T_0)\gamma \Delta \rho_{os}}{\rho_0} \left(\frac{\chi\lambda}{2\pi u_0} \right)^{1/2}. \quad (6.363)$$

При $\Delta \rho_{os} = 270 \text{ кг/м}^3$, $\gamma = 4 \text{ МПа/К}$ и приведенных выше значениях остальных параметров мы получаем $F_{b2} = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ Н/м}$. Мы видим, что массовая сила, обусловленная смещением фазовой границы, достигает приблизительно половины значения массовой силы, возникающей вследствие теплового сжатия пород. Суммарная сила, действующая на опускающуюся литосферу вследствие ее отрицательной плавучести, равна $F_b = 4,9 \cdot 10^{13} \text{ Н/м}$. Эту силу часто называют силой *втягивания в желоб*. Если предположить, что она полностью передается поверхностной части плиты как растягивающее напряжение в упругой литосфере (толщиной 50 км), то величина такого напряжения составит 1 ГПа, что очень велико.

К литосферной плите, кроме того, приложена сила, действующая у хребта. Она обусловлена возвышением хребтов, которое создает *избыточное давление*, приводящее к растеканию вещества в стороны от восходящего вертикального потока. Силу *сталкивания с хребта* можно также интерпретировать как *гравитационное соскальзывание*. Соскальзывание поверхности плиты вызывается проекцией силы тяжести на наклонную поверхность, идущую от гребня хребта к глубоким частям океанического бассейна.

Для вычисления силы, действующей на литосферную плиту у хребта, рассмотрим равновесие сил, изображенных на рис. 6.43. Это горизонтальные силы, приложенные на некотором участке океана, литосферы и подстилающей мантии. Силы давления будем отсчитывать от значения давления на гребне хребта ($y = 0$). Глубина слоя воды над гребнем хребта постоянна, так что давление, создаваемое этим слоем, не изменяет горизонтального баланса сил. Суммарную горизонтальную силу F_1 , действующую на подошву литосферы, можно определить из условия равновесия участка *RCD* мантии. Полная горизонтальная сила F_b ,

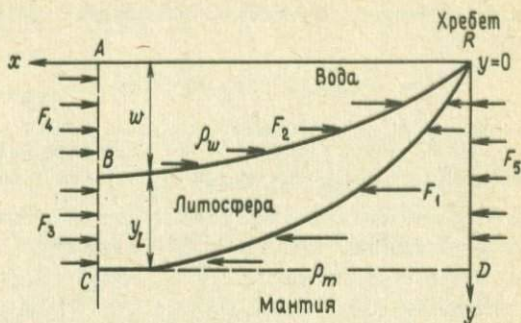


РИС. 6.43. Горизонтальные силы, действующие на океан и литосферу в сечении AC и на мантию в сечении RD , проходящем через океанический хребет.

действующая на сечение RD , должна быть равна силе F_1 . Величину F_5 легко найти, интегрируя литостатическое давление под гребнем хребта:

$$F_5 = F_1 = \int_0^{w+y_L} \rho_m g y dy, \quad (6.364)$$

где ρ_m — плотность материала мантии. Это равенство можно переписать в виде

$$F_1 = g \int_0^w \rho_m y dy + g \int_0^{y_L} \rho_m (w + \bar{y}) d\bar{y}, \quad (6.365)$$

где

$$\bar{y} = y - w. \quad (6.366)$$

Суммарная сила давления F_2 , действующая на поверхность литосферы (т.е. на океаническое дно), должна быть равна силе давления F_4 , приложенной к сечению AB (согласно условию равновесия водной массы $RA B$). Интегрируя гидростатическое давление, мы получим

$$F_2 = F_4 = \int_0^w \rho_w g y dy, \quad (6.367)$$

где ρ_w — плотность воды. Горизонтальная сила F_3 , действующая на сечение литосферы BC , определяется интегралом от давления P_L в литосфере:

$$F_3 = \int_0^{y_L} P_L d\bar{y}, \quad (6.368)$$

где P_L есть

$$P_L = \rho_w g w + \int_0^{\bar{y}} \rho_L g d\bar{y}', \quad (6.369)$$

а ρ_L — плотность литосферы. Подставляя (6.369) в (6.368), получаем

$$F_3 = \int_0^{y_L} \left\{ \rho_w g w + \int_0^{\bar{y}} \rho_L g d\bar{y}' \right\} d\bar{y}. \quad (6.370)$$

Общая горизонтальная сила F_R , действующая на литосферу со стороны океанического хребта, получается из равенств (6.365), (6.367) и (6.370) как

$$F_R = F_1 - F_2 - F_3 = g \int_0^w (\rho_m - \rho_w) y dy + \\ + g \int_0^{y_L} \left\{ (\rho_m - \rho_w) w + \rho_m \bar{y} - \int_0^{\bar{y}} \rho_L d\bar{y}' \right\} d\bar{y}. \quad (6.371)$$

Подставляя сюда равенство (4.197), выражающее условие изостатического равновесия, и тождество

$$\rho_m \bar{y} = \int_0^{\bar{y}} \rho_m d\bar{y}', \quad (6.372)$$

мы получим

$$F_R = g(\rho_m - \rho_w) \frac{w^2}{2} + g \int_0^{y_L} \left\{ \int_0^{\infty} (\rho_L - \rho_m) d\bar{y}' - \right. \\ \left. - \int_0^{\bar{y}} (\rho_L - \rho_m) d\bar{y}' \right\} d\bar{y} = \\ = g(\rho_m - \rho_w) \frac{w^2}{2} + g \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} (\rho_L - \rho_m) d\bar{y}' \right\} d\bar{y}, \quad (6.373)$$

где, как и в равенстве (4.199), мы заменили предел интегрирования y_L на ∞ , поскольку интегралы быстро сходятся. С помощью равенств (4.198), (4.124) и

$$z = \frac{1}{2} \bar{y} \left(\frac{u_0}{\chi x} \right)^{1/2} \quad (6.374)$$

мы получаем

$$F_R = g(\rho_m - \rho_w) \frac{w^2}{2} + g \rho_m \alpha_v (T_m - T_0) \times \\ \times \frac{4\chi x}{u_0} \int_0^{\infty} \left(\int_z^{\infty} \operatorname{erfc} z' dz' \right) dz, \quad (6.375)$$

где T_m — температура мантии. Повторный интеграл от дополнительной функции ошибок равен $1/4$. Подставляя выражение (4.202) для w , окончательно имеем

$$F_R = g \rho_m \alpha_v (T_m - T_0) \left[1 + \frac{2}{\pi} \frac{\rho_m \alpha_v (T_m - T_0)}{\rho_m - \rho_w} \right] \frac{\chi x}{u_0} =$$

$$= g \rho_m \alpha_v (T_m - T_0) \left[1 + \frac{2}{\pi} \frac{\rho_m \alpha_v (T_m - T_0)}{\rho_m - \rho_w} \right] \chi t, \quad (6.376)$$

где t — возраст океанического дна.

Итак, сила, обусловленная поднятием океанического хребта, пропорциональна возрасту литосферы. Полагая $g = 10$ м/с², $\rho_m = 3300$ кг/м³, $\rho_w = 1000$ кг/м³, $\chi = 1$ мм²/с, $T_m - T_0 = 1200$ К и $\alpha_v = 3 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, мы найдем, что полная сталкивающая сила, действующая в направлении от хребта на океаническую литосферу с возрастом 100 млн. лет, равна $3,9 \cdot 10^{12}$ Н/м (в пересчете на единицу длины в направлении хребта). Мы видим, что сила столкновения с хребта на порядок величины меньше силы втягивания в желоб. Однако сила втягивания в желоб может быть в большой степени скомпенсирована значительными силами сопротивления, действующими на литосферу при ее внедрении в мантию. В результате эффект втягивания в желоб, вероятно, сравним по величине с гравитационным соскальзыванием с хребта.

6.21. Диссипативный нагрев

В настоящей главе мы повсюду пренебрегали эффектами *вязкой диссипации*, т.е. фрикционного нагрева. Теперь мы рассчитаем увеличение температуры и тепловой поток, возникающие за счет вязкой диссипации в простом течении Куэтта (см. разд. 6.2) между плоскими параллельными стенками (рис. 6.44).

Распределение скорости

$$u = u_0 (1 - y/h) \quad (6.377)$$

соответствует постоянному по сечению канала сдвиговому напряжению

$$\tau = \mu \frac{du}{d(-y)} = \frac{\mu u_0}{h} = \tau_0, \quad (6.378)$$

приложенному к верхней границе ($y = 0$). Производная по $-y$ в (6.378) возникает

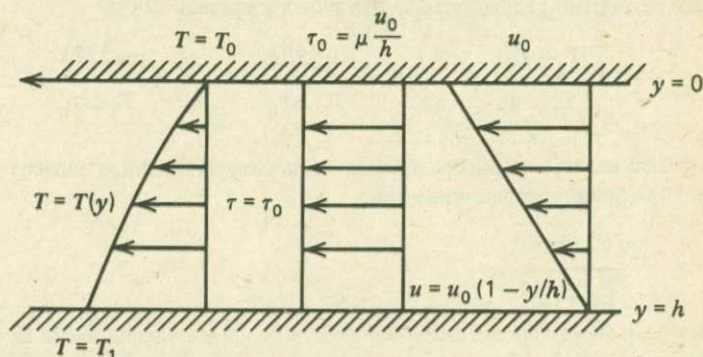


РИС. 6.44. Фрикционный нагрев в течении Куэтта.

из-за того, что внешняя нормаль к горизонтальной верхней поверхности жидкости направлена против оси y .

Мощность сдвиговых сил, действующих в объеме всего слоя с единичным горизонтальным основанием и высотой, равной толщине слоя, дается произведением сдвигового напряжения τ_0 и скорости u_0 движения верхней границы:

$$\mu u_0^2 / h .$$

Усредняя эту величину по всему объему жидкости, мы получим следующее значение объемного диссипативного тепловыделения:

$$\mu u_0^2 / h^2 .$$

Поскольку распределение скорости в слое линейно, а сдвиговое напряжение постоянно, величина объемного диссипативного тепловыделения в слое постоянна. Действительно, мы могли бы, например, вычислить мощность сдвиговых сил, действующих в нижней половине канала, и в результате получили бы $\mu u_0^2 / 2h$. Усредняя затем эту величину по соответствующему объему жидкости (имеющему единичное горизонтальное сечение и высоту, равную $h/2$), мы опять получили бы прежнее значение $\mu u_0^2 / h^2$ объемного диссипативного тепловыделения. Объемную мощность тепловыделения можно отождествить с внутренней объемной теплогенерацией ρH , фигурирующей в (4.12). Тогда мы получим следующее уравнение, которому удовлетворяет распределение температуры T в канале:

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} = - \frac{\mu u_0^2}{h^2} . \quad (6.379)$$

Интегрирование этого уравнения с граничными условиями $T = T_0$ при $y = 0$ и $T = T_1$ при $y = h$ дает

$$T = T_0 + \frac{y}{h} \left\{ T_1 - T_0 + \frac{\mu u_0^2}{2k} \right\} - \frac{\mu u_0^2}{2k} \frac{y^2}{h^2} . \quad (6.380)$$

Это равенство удобно переписать в безразмерной форме

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{h} \left\{ 1 + \frac{\mu u_0^2 / 2k}{T_1 - T_0} \right\} - \frac{y^2}{h^2} \left(\frac{\mu u_0^2 / 2k}{T_1 - T_0} \right) . \quad (6.381)$$

Отсюда видно, что распределение температуры в канале зависит от единственного безразмерного параметра

$$\frac{\mu u_0^2 / 2k}{T_1 - T_0} ,$$

который можно представить как половину произведения числа Прандтля Pr и безразмерного числа Эккерта E .

$$E = \frac{u_0^2}{c_p (T_1 - T_0)}, \quad (6.382)$$

где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Мы можем написать

$$\frac{1}{2} Pr E = \frac{\mu u_0^2 / 2k}{T_1 - T_0}, \quad (6.383)$$

$$\theta = \frac{y}{h} \left(1 + \frac{Pr E}{2}\right) - \frac{y^2}{h^2} \frac{Pr E}{2}. \quad (6.384)$$

Графики распределения безразмерной температуры θ при нескольких значениях $Pr E$ приведены на рис. 6.45. При отсутствии фрикционного нагрева распределение температуры определяется молекулярной теплопроводностью с $Pr E = 0$ и описывается линейной функцией. Превышение температуры над линейным распределением при $Pr E \neq 0$ объясняется эффектом вязкой диссипации. Из наклона температурных профилей видно, что уже при $Pr E = 4$ диссипативное тепловыделение настолько велико, что тепловой поток через обе границы слоя направлен наружу. Обычно при $T_1 > T_0$ тепло через нижнюю границу поступает в канал. Обусловленный фрикционным нагревом рост температуры θ_e можно найти, если вычесть линейное распределение температуры из распределения (6.34). Будем иметь

$$\theta_e = \frac{Pr E}{2} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (6.385)$$

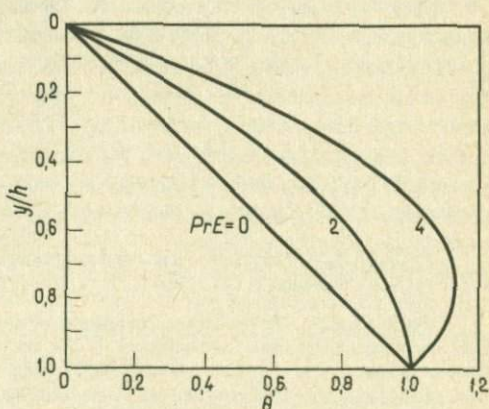


РИС. 6.45. Распределение безразмерной температуры θ жидкости в течении Кузта с фрикционным нагревом.

Дифференцируя θ_e по y/h и приравнивая производную нулю, мы найдем, что θ_e достигает максимума при $y/h = 1/2$, причем

$$\theta_e^{\max} = \text{Pr} E / 8. \quad (6.386)$$

Тепловой поток q_0 через верхнюю границу направлен вверх и, согласно закону Фурье (4.1) и равенству (6.380), равен

$$q_0 = k \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = \frac{k}{h} \left(T_1 - T_0 + \frac{\mu u_0^2}{2k} \right). \quad (6.387)$$

Отсюда видно, что диссипативная поправка q_e к тепловому потоку, вытекающему через верхнюю границу ($y = 0$), равна

$$q_e = \mu u_0^2 / 2h. \quad (6.388)$$

Если бы все выделяющееся в слое диссипативное тепло вытекало через верхнюю границу, то q_e было бы равно $\mu u_0^2 / h$. На самом деле половина диссипативного тепла уходит через нижнюю границу. Отношение избыточного теплового потока q_e , вытекающего через верхнюю границу, к тепловому потоку $q_c = k(T_1 - T_0)/h$ в отсутствие вязкой диссипации равно

$$q_e / q_c = \frac{1}{2} \text{Pr} E. \quad (6.389)$$

Примером использования результатов настоящего раздела может служить расчет эффектов фрикционного нагрева в астеносферном сдвиговом потоке. При $\mu = 4 \cdot 10^{19}$ Па · с, $u_0 = 50$ мм/год, $k = 4$ Вт · м⁻¹ · К⁻¹ и $T_1 - T_0 = 300$ К мы получаем $\text{Pr} E / 2 = 0,04$. Согласно (6.386), это означает, что температурный эффект диссипации составляет 1% перепада температуры между границами слоя, т.е. в данном примере 3 К. Избыточный поверхностный тепловой поток в рамках данной модели равен 4% теплового потока через астеносферу при отсутствии диссипации. Мы видим, что эффекты фрикционного нагрева в мантийных сдвиговых потоках в общем малы. Они могут быть существенны при больших значениях вязкости, чем то, которое мы приняли в нашем численном примере. В гл. 8 мы еще раз вернемся к вопросу о фрикционном нагреве в связи с термически активированной ползучестью в зоне разлома.

ЗАДАЧА 6.35. Покажите, что половина диссипативного тепла, генерируемого в рассмотренном примере с течением Куэтта, уходит через нижнюю границу слоя.

ЗАДАЧА 6.36. Рассмотрим фрикционный нагрев в течении Куэтта между стенками, верхняя из которых изотермична, а нижняя теплоизолирована. Найдите распределение температуры в канале и избыточный тепловой поток из слоя через верхнюю границу, обусловленный диссипативным тепловыделением. Каково влияние фрикционного нагрева на температуру нижней границы? Сравните распределение по сечению потока избыточной (обусловленной диссипацией) температуры в данной задаче и максимальную избыточную температуру в потоке с изотермическими стенками.

Дополнительная литература

Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. — London: Cambridge University Press, 1967, 615 pp. [русский перевод: Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973, 758 с.]. Современный курс основ механики жидкости, предназначенный для студентов с хорошей подготовкой в области прикладной математики. Для пользования учебником необходимо знание векторного анализа и тензорных обозначений. В книге рассмотрены физические свойства жидкостей, кинематика полей скорости, уравнения, определяющие движение жидкостей, течения однородной несжимаемой вязкой жидкости, течение при больших числах Рейнольдса (теория погранслоя) и теория потоков без вращения. С точки зрения геологических приложений особенно ценно изложение теории течения жидкости при малых числах Рейнольдса. Во многих разделах имеются контрольные упражнения для студентов.

Busse F.H. Nonlinear Properties of Thermal Convection. Rep. Progr. Phys., 41, 1929 — 1967, 1978. Обзор теоретических и экспериментальных исследований конечноамплитудной тепловой конвекции в слое жидкости. Описываются основные уравнения, линейная теория, слабо нелинейная теория конвекции, данные лабораторных измерений, сильно нелинейная конвекция, численные исследования, приближение погранслоя, теории усредненных полей, неустойчивость конвективных ячеек и конвекция в системах с вращением.

Cathles L.M. The Viscosity of the Earth's Mantle. — Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1975, 386 pp. Научная монография по методам восстановления профиля вязкости в мантии на основе геологических данных о поднятии и опускании поверхности Земли вследствие таяния крупных ледниковых покровов в Канаде, Фенноскандии и Сибири после окончания последнего ледникового периода и добавления образовавшейся воды в океаны. Дается теория построения моделей изостатической перестройки Земли как самогравитирующей вязкоупругой сферы при изменении ледовой нагрузки в плейстоценовый период. Дан обзор геологических данных и показано, что в рамках построенных моделей эти данные приводят к почти однородному распределению коэффициента вязкости 10^{21} Па · с.

Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. — London: Oxford University Press, 1961, 652 pp. Классический трактат по теории устойчивости жидкости с неблагоприятными (для устойчивости) распределениями температуры и плотности при наличии момента импульса, угловой скорости, сдвигового течения и капиллярности. С особой полнотой и строгостью рассмотрено возникновение тепловой конвекции в слоях жидкости, нагреваемых снизу. Для понимания изложения требуется высокая математическая подготовка. Необходимо знание векторного анализа, тензорных обозначений, теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Johnson A.M. Physical Processes in Geology. — San Francisco: Cooper and Company, 1970, 577 pp. Фундаментальный учебник по механике и ее геологическим приложениям. Особое внимание уделено построению теории изгиба исходя

из основных принципов, определяющих поведение упругих материалов. Рассматриваются приложения теории изгиба пластин и балок к геологической задаче складкообразования. Приводятся критерии разрушения под действием напряжений; показано, как на основе этих критериев можно объяснить системы разломов, трещин и даек. Заключительная глава посвящена реологии и течению льда, лавы и обломочного материала. Имеются упражнения для студентов. Изложение ведется на доступном математическом уровне с упором на разъяснение природы рассматриваемого предмета.

Johnson A.M. Styles of Folding: Mechanics and Mechanisms of Folding of Natural Elastic Materials. — Amsterdam: Elsevier, 1977, 406 pp. Специальная книга, посвященная выполненному автором с сотрудниками детальному исследованию процессов складкообразования. Многие главы представляют собой самостоятельные научно-исследовательские работы, публиковавшиеся в различных журналах. В гл. 1 дается обзор литературы по складкообразованию. В гл. 2 рассматривается складчатость слоистых песчаников в заповеднике Арчес (шт. Юта) и делается попытка объяснить эту складчатость на основе теории Био прогиба вязкого слоя. В последующих нескольких главах предприняты попытки моделирования наблюдаемых характеристик складок (в частности, петлеобразную и стрельчатую формы) на основе более сложных моделей.

Lamb H. Hydrodynamics, 6th ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 1932, 738 pp. [русский перевод: Ламб Г. Гидродинамика. — М.: ГТТИ, 1947]. Классический трактат по основам гидродинамики и динамики невязких жидкостей. В качестве главных вопросов рассматриваются уравнения движения, течение без вращения, двух- и трехмерное движение жидкости, движение твердых тел в жидкости, движение вихрей, приливные волны, поверхностные волны, волны разрежения, эффекты вязкости и вращение жидких масс. Книга написана на высоком математическом уровне.

Langlois W.E. Slow Viscous Flow. — New York: The Macmillan Company, 1964, 229 pp. Предназначенная для математиков-прикладников книга по динамике жидкости с низким числом Рейнольдса. Предполагается, что читатель владеет аппаратом теории дифференциальных уравнений и кратных интегралов. В гл. 1 вводятся ортогональные тензоры, которые широко используются в дальнейшем. В гл. 2 рассматриваются основные уравнения и граничные условия теории течения вязкой жидкости. Остальные главы посвящены точным решениям уравнений, расчетам течения в трубе, обтекания сферы, плоского течения, течения с вращением и теории смазки.

Oxburgh E.R., Turcotte D.L. Mechanisms of Continental Drift. Rep. Progr. Phys., 41, 1249 — 1312, 1978. Обзор тектоники плит и конвекции в мантии. В статье рассмотрены: наблюдательные данные, свидетельствующие в пользу дрейфа континентов; тепловые и механические источники энергии; реология мантии; тепловая конвекция и теоретическая интерпретация результатов геологических и геофизических наблюдений.

Palm E. Nonlinear Thermal Convection. Ann. Rev. Fluid Mech., 7, 39 — 61, 1975. Обзорная статья по теории тепловой конвекции в горизонтальном слое с

однородным нагревом снизу и, возможно, охлаждением сверху. Рассмотрены основные уравнения и граничные условия, линейная теория, слабо нелинейная теория, конвекция в виде двумерных валов и гексагональных ячеек, подкритическая неустойчивость.

Peltier W.R. Mantle Convection and Viscosity. — В кн.: *Proceedings of the Enrico Fermi International School of Physics, Course LXXVIII, Physics of the Earth's Interior*, Dziewonski A.M. and Boschi E., ed., Amsterdam, North Holland, p. 362 — 431, 1980. Обзорная статья по конвекции в мантии и определению коэффициента вязкости по данным о послеледниковых поднятиях. В качестве доказательства существования мантийной циркуляции приводятся палеомагнитные, сейсмологические и гравиметрические данные, а также результаты измерений теплового потока, распределение глубин океана и скорости послеледникового поднятия. Дается теоретическая интерпретация эффектов мантийной конвекции с точки зрения распределения коэффициента вязкости, результатов лабораторных экспериментов, простейшей теории конвекции и теории погранслоя при больших числах Рэлея. Рассматриваются приложение теории к конвекции в Земле, эффекты фазовых переходов и неньютоновской реологии, тепловая история.

Ramberg H. Gravity, Deformation and the Earth's Crust. — London: Academic Press, 1967, 214 pp. Учебник по лабораторному и теоретическому моделированию геологических структур, возникающих в результате тектонических деформаций земной коры. Особое внимание уделяется роли силы тяжести в тектонике. Рассмотрены образование куполовидных структур, прогиб горизонтальных слоев, прогиб коры, раздвигание участков коры и складкообразование, подъем магмы под действием сил плавучести, погружение тел, изостатическая перестройка. Приводится доступное и относительно мало математизированное изложение динамики гравитационной тектоники.

Schlichting H. Boundary Layer Theory, 6th edition. — New York: McGraw-Hill Book Company, 1968, 747 pp. [русский перевод: *Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.* — М.: Наука, Физматгиз, 1974]. Классическое руководство по теории явлений в погранслое, рассчитанное преимущественно на инженеров. В первой части книги рассматриваются основные понятия теории течения вязкой жидкости и вводится понятие погранслоя. Для течений в трубках, каналах и объемах другой геометрии даются точные решения уравнений движения Навье — Стокса. Отдельная глава посвящена очень медленным течениям; в ней развиваются гидродинамические теории смазки и течения Хили — Шоу, имеющие геофизические приложения. Ряд глав посвящен весьма подробно изложению теории погранслоя, в частности тепловым погранслоям в вынужденных и естественных течениях. В остальных разделах книги рассматриваются турбулентность и турбулентные погранслои. Изложение ведется на математическом уровне средней сложности.

Schubert G. Subsolidus Convection in the Mantles of Terrestrial Planets. — *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 7, 289 — 342, 1979. Обзорная статья по конвекции в мантии. Основные разделы посвящены термодинамике, явлениям переноса, реологическим свойствам мантии, природе и распределению источников тепла

в мантии, теоретическому и экспериментальному подходам к исследованию мантийной конвекции, ее природе и, в частности, глубине проникновения, тому, каким образом конвекция контролирует температуру в мантии, влиянию конвекции на тепловую эволюцию. Рассматривается конвекция в мантиях других планет.

Stevenson D.J., Turner J.S. Fluid Models of Mantle Convection. В кн.: *The Earth, Its Origin, Evolution and Structure.* M.W. McElhinny, ed., New York: John Wiley, p. 227 – 263, 1979. Обзорная статья, посвященная моделям конвекции в мантии и тепловому состоянию земных недр. Рассматриваются реология мантии, основные понятия теорий слабой и конечноамплитудной конвекции, соотношения теории погранслоя, распределение и природа источников энергии, вязкая диссипация, сжимаемость, неоднородность распределения коэффициента вязкости, неньютоновская реология, фазовые переходы, химическое расслоение, доказательства конвекции в мантии, механизм движения плит, лабораторное моделирование.

Tritton D.J. Physical Fluid Dynamics. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1977, 362 pp. Прекрасное введение в механику жидкости с упором на физическую интерпретацию данных лабораторных экспериментов и естественных геофизических и астрофизических явлений. Изложение сравнительно мало математизировано. Основное внимание уделено течению в трубе и канале, конвекции в горизонтальных слоях, уравнениям движения, свободной конвекции, стратифицированным потокам, пограничным слоям, возникновению подъемных сил и сил сопротивления, течению во вращающихся жидкостях, устойчивости и турбулентности. В конце книги собрано 75 задач, предназначенных для проверки усвоения материала.

Turner J.S. Buoyancy Effects in Fluids. – London: Cambridge University Press, 1973, 367 pp. (русский перевод: *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. – М.: Мир, 1977). Книга посвященная исключительно механике жидкости, движущейся под действием сил плавучести. Основное внимание сосредоточено на конвекции и перемешивании в устойчиво-стратифицированных жидкостях, т.е. на тех процессах, которые играют весьма важную роль в атмосфере и океане. Главные темы, затрагиваемые в книге, относятся к теории внутренних волн в стратифицированных жидкостях, неустойчивости и возникновению турбулентности, турбулентному сдвиговому течению в стратифицированной жидкости, конвекции под действием сил плавучести, обусловленных изолированными источниками и нагретыми поверхностями, конвекции при двойной диффузии и явлениям перемешивания. Изложение опирается на сравнительно простой математический аппарат и в значительной мере объясняет физическую сущность рассматриваемых проблем.

White F.M. Viscous Fluid Flow. – New York: McGraw-Hill, 1974, 725 pp. Учебник по динамике вязкой жидкости, предназначенный для студентов-старшекурсников и аспирантов первого года обучения, специализирующихся по техническим дисциплинам. Предполагается, что читатель знаком с основами механики жидкости, векторного анализа и дифференциальными уравнениями. В двух

первых главах говорится о свойствах жидкостей и основных уравнениях, определяющих их поведение. Гл. 3 и 4 посвящены методам исследования ламинарных течений. В гл. 5 рассматривается устойчивость ламинарных течений и переход к турбулентности. Гл. 6 посвящена турбулентному течению несжимаемой жидкости, а в последней главе рассматриваются ламинарный и турбулентный пограничные слои в сжимаемой жидкости. В конце каждой главы помещены задачи.

Whitten E.H.T. Structural Geology of Folded Rocks. — Chicago: Rand McNally, 1966, 678 pp. Руководство по полевым исследованиям складчатых пород и ассоциируемых с ними второстепенных структур, предназначенное для старшекурсников и выпускников, специализирующихся в области структурной геологии. Отдельные главы посвящены записи и представлению структурных взаимоотношений, цилиндрическим и нецилиндрическим складкам, отбору образцов и их размерам, S-образным структурам, тектонитам, осям деформации, концепциям симметрии, дисгармоничным складкам и текстуре переноса, листоватости, линейным структурам, поперечным складкам, микротекстурам в петроструктурном анализе, характерным осадочным породам, сохранившимся в складчатых и метаморфических породах, количественным моделям складок.

Реология горных пород

7.1. Введение

При нормальных условиях (атмосферном давлении и комнатной температуре) большинство пород являются хрупкими. Это означает, что они ведут себя практически как упругие тела до тех пор, пока не происходит их хрупкого разрушения. Трещины или разрывы в породах, между краями которых не происходит (или происходят незначительные) относительные смещения, называются *отдельностями*. Отдельности встречаются как в осадочных, так и в изверженных породах и могут иметь самые разнообразные размеры. Обычно они группируются в последовательности параллельных или пересекающихся трещин, расположение которых связано с ориентацией локальных напряжений. Вдоль систем отдельностей, где породы ослаблены и особенно легко поддаются разрушению, часто происходит размельчение и удаление поверхностных пород в результате процессов выветривания и эрозии. Эти процессы в свою очередь усиливают видимое проявление отдельностей. В изверженных породах трещины часто возникают под действием температурных напряжений, связанных с охлаждением и тепловым сжатием породы. Примерами могут служить столбчатые отдельности в базальтовых лавах (рис. 7.1) и параллельные отдельности в гранитных породах (рис. 7.2). Осадочные породы иногда оказываются расколотыми почти регулярно расположенными трещинами, перпендикулярными плоскостям напластования (рис. 7.3).

Разломы представляют собой разрывы, вдоль которых происходит относительное смещение. Разломы также бывают самых разных размеров (примеры уже приводились на рис. 1.56 и 4.34, б). Механическая сторона образования разломов рассматривается в следующей главе.

Хотя на небольших глубинах в пределах земной коры, где температура и давление малы, поведение пород является хрупким, во многих случаях породы проявляют свойство пластичности. Переход от хрупкости к пластичности зависит от давления, температуры и скорости деформации. Если давление всестороннего сжатия породы по порядку величины равно пределу хрупкого разрушения, то происходит переход от хрупкого поведения к пластическому. Для модельного описания перехода свойств коровых и мантийных пород от упругих к пластическим часто используется идеализированная *упругая — идеально пластическая реология*. При напряжениях, меньших предела упругости, материалы с такими реологическими свойствами являются линейно-упругими, а затем при напряжении, равном пределу упругости, начинается их пластическая деформация, неограниченно нарастающая во времени.

При температурах, составляющих значительную часть температуры плавления, атомы и дислокации в кристаллическом твердом теле приобретают подвижность, достаточную для того, чтобы под действием девиаторных напряжений на-

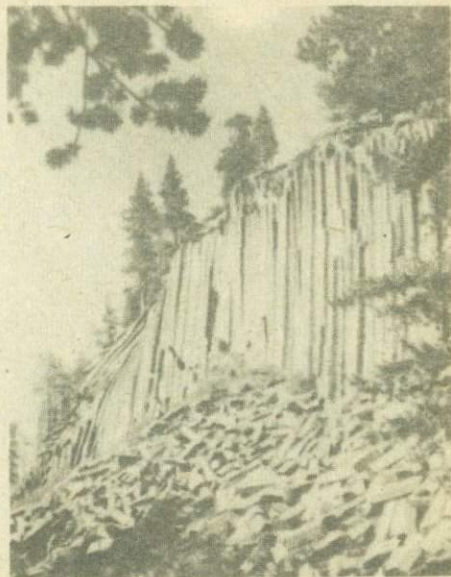


РИС. 7.1. Вертикальные многогранные базальтовые столбы в Национальном памятнике природы "Столб дьявола" (компания "Юнион Пасифик").

чался процесс твердотельной ползучести. При очень низком напряжении преобладают процессы диффузии и кристаллическое твердое тело ведет себя как ньютоновская жидкость, коэффициент вязкости которой зависит экспоненциально от давления и величины, обратной абсолютной температуре. При более высоком напряжении доминирующим процессом ползучести ставится движение дислокаций, благодаря чему твердое тело ведет себя как неьютоновская (или нелинейная) жидкость. Коэффициент вязкости такой жидкости также экспоненциально зависит от давления и обратной абсолютной температуры. Именно тепловая активация процессов ползучести и обусловливаемая ими способность пород к пластическому течению делают возможными конвекцию в мантии и дрейф континентов.

Экспоненциальная зависимость от обратной абсолютной температуры является важной особенностью реологии, позволяющей понять роль мантийной конвекции в процессе переноса тепла. Зависимость реологии от температуры действует как термостат, регулирующий температуру мантии. Повышение средней температуры мантии компенсируется соответствующим уменьшением вязкости, увеличением интенсивности конвекции и, следовательно, более эффективным выносом тепла наружу. И наоборот, уменьшение температуры мантии приводит к увеличению вязкости, уменьшению скоростей конвективных течений и умень-

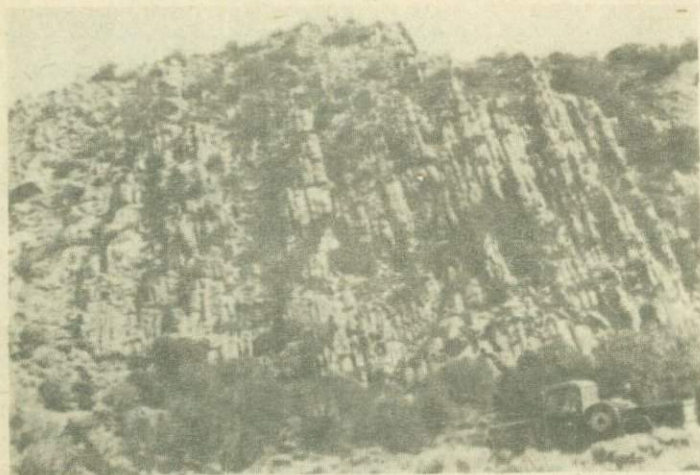


РИС. 7.2. Параллельные отдельности в гранитных породах. (Фотография любезно предоставлена проф. К.А. Нельсоном, Калифорнийский университет, Лос-Анджелес).



РИС. 7.3. Горизонтально-стратифицированные пермские песчаники, расчлененные прямоугольной системой почти равноотстоящих друг от друга вертикальных трещин. (Из коллекции Мензелла.)

шению скорости теплопереноса. Благодаря сильной обратной связи между средней температурой мантии и реологией относительно малые изменения температуры могут привести к большим изменениям величины теплового потока. В результате оказывается, что температура мантии практически постоянна.

Процессы ползучести также играют существенную роль в нижней литосфере, где они могут приводить к релаксации упругих напряжений. Свойства пород здесь можно описать реологическим законом, который одновременно учитывает линейную упругость и линейную (ньютоновскую) или нелинейную вязкость. Материалы, обладающие и упругостью, и вязкостью, называются *вязкоупругими*. Вязкоупругая релаксация определяет толщину упругой верхней части литосферы.

Существование складчатости свидетельствует о том, что находящиеся под напряжением коровые породы также могут проявлять пластические свойства. Примеры складок были приведены на рис. 6.28. Пластичность пород земной коры при относительно низких температурах и давлениях может объясняться действием механизма *компрессионной ползучести при растворении*. В этом процессе происходит растворение минералов в тех местах, где давление велико, и выпадение их в осадок там, где оно мало. В результате наблюдается ползучесть пород.

7.2. Упругость

При низких уровнях напряжений и относительно высоких скоростях деформации порода ведет себя как упругое тело. В этом случае справедливы линейные соотношения (3.1) — (3.3) или (3.4) — (3.6) между компонентами напряжений и упругих деформаций. Упругие свойства кристаллических твердых тел обусловлены действием межатомных сил, удерживающих каждый атом в определенном положении в кристаллической решетке. Эти силы препятствуют всякому внешнему воздействию, стремящемуся сблизить атомы или отдалить их друг от друга. Если кристаллическая решетка сжимается, межатомные силы противодействуют сжатию; если на кристаллическую решетку действуют растягивающие напряжения, то межатомные силы противодействуют ее расширению. Такой характер поведения упругого тела можно понять, если рассмотреть зависимость энергии U кристаллической решетки от межатомного расстояния (периода решетки) b (рис. 7.4). Если атомы бесконечно удалены друг от друга, то энергия решетки равна нулю. Благодаря дальнедействующим силам притяжения (например, электростатическим силам между противоположно заряженными ионами) происходит сокращение межатомных расстояний; эти силы приводят к уменьшению энергии решетки с уменьшением ее периода. Неограниченному сближению атомов препятствуют действующие на малых расстояниях силы отталкивания, обуславливающие увеличение энергии с уменьшением периода решетки. Общая энергия решетки U есть сумма энергий, создаваемых теми и другими силами. Она имеет минимум U_0 , отвечающий равновесному расположению атомов на расстояниях b_0 друг от друга. На атомы решетки, находящиеся в положениях равновесия, не действуют никакие си-

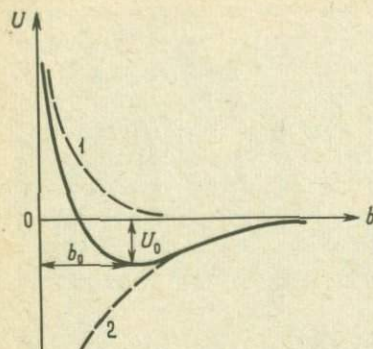


РИС. 7.4. Сплошная кривая — энергия U решетки в функции периода b решетки. Пунктир: 1 — энергия отталкивания; 2 — энергия притяжения.

лы. Энергия $-U_0$ называется энергией *связи или сцепления решетки*. Это та энергия, которая необходима для разрушения решетки и разнесения ее атомов на бесконечные расстояния.

Непосредственной мерой межатомных сил служит коэффициент сжимаемости β твердого тела. Он показывает, какое давление требуется для изменения объема решетки, т.е. изменения межатомных расстояний. Для ионных кристаллов, таких, как хлористый натрий NaCl , можно получить простую формулу, связывающую период решетки, ее энергию и коэффициент сжимаемости. Это обусловлено тем, что структура кристаллической решетки таких твердых тел относительно проста и характер энергии притяжения, создаваемой взаимодействием ионов, известен. Конфигурация решетки NaCl показана на рис. 7.5. Видно, что каждый ион окружен шестью ближайшему к нему ионами противоположного знака; число таких ионов (в данном случае шесть) составляет *координационное число* решетки. Расстояние между ближайшими ионами Na^+ и Cl^- есть b , а атомный объем, т.е. объем, приходящийся на один атом, равен b^3 . Поскольку в каждую молекулу NaCl входят два атома, молекулярный объем V , или объем, приходящийся на одну молекулу, равен

$$V = 2b^3. \quad (7.1)$$

Как правило, решетку принято характеризовать молекулярными или молярными величинами.

Чтобы вывести формулу, связывающую β , b_0 и U_0 , вспомним определение (3.50) коэффициента сжимаемости. Последний есть частное от деления относительного изменения объема dV/V на вызывавшее его изменение давления dp :

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (7.2)$$

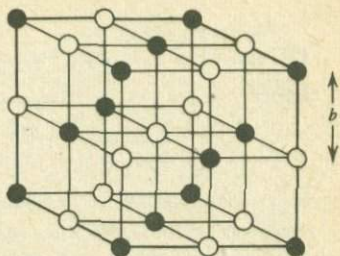


РИС. 7.5, Структура решетки NaCl.

Обратная величина есть модуль всестороннего сжатия K :

$$K \equiv \frac{1}{\beta} = V \frac{dp}{dV} \quad (7.3)$$

Напомним, что уменьшение объема мы считаем величиной положительной. Таким образом, при $dp > 0$ изменение объема dV также положительно и β оказывается положительным. Работа сил давления, совершаемая при сжатии упругого тела на величину dV , равна $p dV$; эта работа запасается в кристаллической решетке как энергия dU упругой деформации:

$$p dV = dU, \quad (7.4)$$

или

$$p = \frac{dU}{dV}. \quad (7.5)$$

Подставив это выражение для давления в равенство (7.3), находим

$$\frac{1}{\beta} = V \frac{d^2U}{dV^2}, \quad (7.6)$$

где U и V — соответственно энергия и объем решетки, приходящиеся на одну молекулу. Дифференцируя (7.6) по периоду решетки b , получаем

$$dV = 6 b^2 db \quad (7.7)$$

и

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{18b} \frac{d^2U}{db^2}. \quad (7.8)$$

Пусть β_0 — коэффициент сжимаемости β при $p = 0$ (равновесный период решетки при этом равен b_0). Тогда

$$\frac{1}{\beta_0} = \frac{1}{18b_0} \left(\frac{d^2U}{db^2} \right)_{b=b_0}. \quad (7.9)$$

Отсюда видно, что равновесный модуль всестороннего сжатия пропорционален второй производной энергии решетки, приходящейся на одну молекулу, по периоду.

Чтобы вычислить d^2U/db^2 , нужно задаться конкретной моделью взаимодействия атомов в решетке. Для ионного кристалла, такого, как NaCl, можно написать

$$U = - \frac{z^2 e^2 A}{4\pi\epsilon_0 b} + B \exp\left(-\frac{b}{s}\right), \quad (7.10)$$

где z — заряд иона, измеренный величиной e заряда электрона; ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума; A , B и s — постоянные. Первый член в (7.10) представляет собой *кулоновскую энергию* притяжения, а второй приближенно выражает энергию отталкивания близкогодействующих сил. Заряд e электрона по величине равен $1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл, а $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. *Постоянная Маделунга* A зависит только от структуры решетки и должна вычисляться для каждой ионной решетки отдельно. Для NaCl $A = 1,7476$ и $z = 1$. Вычисление A сводится к простому суммированию кулоновских потенциальных энергий взаимодействия каждого иона с другими ионами решетки по всем ионам. Кулоновская энергия ионов Na^+ и Cl^- , находящихся на расстоянии b друг от друга, равна $-e^2/4\pi\epsilon_0 b$, и энергия взаимодействия любой пары ионов записывается в аналогичном виде со знаками "+" для одноименных и "-" для разноименных ионов. (Расстояния между ионами для регулярной решетки могут быть выражены через b .) Поэтому полная кулоновская энергия имеет вид $-e^2 A/4\pi\epsilon_0 b$.

Дифференцируя равенство (7.10) дважды по периоду решетки b , находим

$$\left(\frac{d^2U}{db^2}\right)_{b=b_0} = - \frac{2z^2 e^2 A}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b_0^3} + \frac{B}{s^2} \exp\left(-\frac{b_0}{s}\right). \quad (7.11)$$

Из этого соотношения можно исключить постоянные B и s , если воспользоваться условиями равенства нулю производной dU/db при равновесном значении периода решетки $b = b_0$:

$$\left(\frac{dU}{db}\right)_{b=b_0} = 0 = \frac{z^2 e^2 A}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b_0^2} - \frac{B}{s} \exp\left(-\frac{b_0}{s}\right) \quad (7.12)$$

и равенства $U = U_0$ приходящейся на молекулу потенциальной энергии U решетки при $b = b_0$:

$$U_0 = - \frac{z^2 e^2 A}{4\pi\epsilon_0 b_0} + B \exp\left(-\frac{b_0}{s}\right). \quad (7.13)$$

Из (7.13) находим

$$B \exp\left(-\frac{b_0}{s}\right) = U_0 + \frac{z^2 e^2 A}{4\pi\epsilon_0 b_0}, \quad (7.14)$$

что совместно с (7.12) дает

$$s = \frac{4\pi\epsilon_0 b_0^2}{z^2 e^2 A} \left(U_0 + \frac{z^2 e^2 A}{4\pi\epsilon_0 b_0} \right). \quad (7.15)$$

Из равенств (7.9), (7.11), (7.14) и (7.15) находим

$$\beta_0 = -18b_0^4 \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{z^2 e^2 A} \right) \frac{U_0 + z^2 e^2 A / 4\pi\epsilon_0 b_0}{2U_0 + z^2 e^2 A / 4\pi\epsilon_0 b_0}, \quad (7.16)$$

что после некоторых преобразований дает

$$-U_0 = \frac{9V_0 + \beta_0 (z^2 e^2 A / 4\pi\epsilon_0 b_0)}{2\beta_0 + 9V_0 (4\pi\epsilon_0 b_0 / z^2 e^2 A)}, \quad (7.17)$$

где V_0 — равновесный молекулярный объем $2b_0^3$ (7.1).

С помощью формулы (7.17) можно вычислить приходящуюся на молекулу энергию связи ионного кристалла, исходя из общих сведений о структуре кристаллической решетки и измеренных значений плотности и коэффициента сжимаемости. Поскольку энергия связи равна энергии, необходимой для разрушения решетки, величину $-U_0$ (7.17) можно сравнить с результатом независимого термодинамического расчета величины $-U_0$. Для NaCl $A = 1,7476$, $z = 1$ и $\beta_0 = 4,26 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$. Поскольку плотность NaCl составляет 2163 кг/м^3 , а молекулярная масса равна $58,448$, то его молярный объем равен $2,702 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$. (1 моль есть количество килограммов вещества, равное его молекулярной массе, умноженной на 10^{-3} .) Как известно, в 1 моль NaCl содержится N_0 молекул (N_0 — число Авогадро, равно $6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$); поэтому молекулярный объем NaCl равен $V_0 = 4,486 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$. Приравнявая эту величину произведению $2b_0^3$, находим $b_0 = 2,82 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Подставляя приведенные значения β_0 , V_0 , b_0 , z и A в равенство (7.17), находим $-U_0 = 1,262 \cdot 10^{-18} \text{ Дж/молекула} = 7,6 \cdot 10^5 \text{ Дж/моль} = 760 \text{ кДж/моль}$. Известная из термодинамики энергия связи NaCl составляет 773 кДж/моль .

На этом примере мы убедились в том, что мы можем вычислять энергию связи ионных кристаллов с точностью, обеспечивающей хорошее согласие с результатами измерений. Это связано с тем, что природа сил взаимодействия между ионами решетки, представляющих собой близкодействующие силы отталкивания и кулоновские силы притяжения, достаточно хорошо изучена. Не так обстоит дело в тех случаях, когда существенно становятся не учтенные нами силы взаимодействия другой природы (как, например, у оксидов и силикатов). Такими силами, в частности, являются вандерваальсовы силы, силы ковалентной связи, силы дипольного (и высшей мультипольности) взаимодействия. Наиболее важными из неионных сил обычно являются силы, осуществляющие ковалентную связь. Энергию этих связей необходимо учитывать в теоретических расчетах энергии решетки.

ЗАДАЧА 7.1. Вычислите энергию связи CsCl. Примите $\beta_0 = 5,95 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$, $\rho_0 = 3988 \text{ кг/м}^3$, $A = 1,7627$. Молекулярная масса CsCl равна $168,36$. (Термодинамические измерения дают $-U_0 = 660 \text{ кДж/моль}$.)

ЗАДАЧА 7.2. Пользуясь данными, приведенными в табл. 7.1, вычислите энергии связи оксидов BeO , MgO , CaO и ZnO . Примите во внимание только кулоновские силы и силы отталкивания.

Таблица 7.1. Упругие и структурные характеристики кристаллических решеток некоторых оксидов для вычисления энергии связи.

Кристалл	$V, 10^{-30}\text{м}^3$	A	$\beta, 10^{-12}\text{Па}^{-1}$
BeO	13,77	1,886	4,636
MgO	18,67	1,748	6,254
CaO	27,83	1,748	9,532
ZnO	23,74	1,905	7,199

ЗАДАЧА 7.3. Теоретические расчеты показывают, что предел прочности кристаллического твердого тела можно оценить как энергию связи, приходящуюся на единицу объема кристалла. Вычислите предел прочности форстерита, если его энергия связи по порядку величины равна 10^3 кДж/моль, а его средний атомный объем есть $6,26 \cdot 10^{-6}$ м³/моль. Из-за наличия границ зерен и дислокаций прочность кристаллического твердого тела существенно понижается по сравнению с теоретическим значением.

Понятно, что в реальном кристаллическом веществе атомы не занимают фиксированных положений в узлах кристаллической решетки. Узлы решетки представляют собой средние положения равновесия, около которых колеблются атомы. Энергия колебательного движения атомов есть внутренняя тепловая энергия твердого тела. Температура кристаллического твердого тела является мерой его внутренней энергии и интенсивности колебаний атомов. Колебания возникают вследствие действия межатомных сил, стремящихся удержать атомы в узлах решетки. В положении равновесия результирующая сила, действующая на данный атом со стороны всех остальных атомов, равна нулю. Однако если атом смещается из положения равновесия, то на него начинает действовать сила, стремящаяся возвратить его на прежнее место. При малых смещениях атома из положения равновесия в первом приближении можно считать, что восстанавливающая сила прямо пропорциональна величине смещения атома. Под действием этой силы возникают простые гармонические колебания атома около положения равновесия. Тепловую энергию решетки можно представить себе как кинетическую энергию движения атомов и потенциальную энергию упругой деформации соединяющих их "пружинок", действием которых можно мысленно заменить межатомные взаимодействия в рамках простейшей модели решетки.

Уравнение простого гармонического колебания атома около положения равновесия в одномерном случае имеет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \kappa x = 0, \quad (7.18)$$

где m — масса атома, x — смещение из положения равновесия ($x = 0$), а κ — жесткость "пружинки", являющаяся мерой мощности межатомных восстанавливающих сил. Сила, действующая на атом, равна $-\kappa x$; она всегда направлена к положению равновесия $x = 0$. Решая уравнение (7.18), мы получим следующие выражения для координаты x и скорости $v = dx/dt$ движения атома:

$$x = x_0 \sin(2\pi t/\tau), \quad (7.19)$$

$$v = v_0 \cos(2\pi t/\tau), \quad (7.20)$$

где τ — период колебаний, равный

$$\tau = 2\pi(m/\kappa)^{1/2}, \quad (7.21)$$

а максимальное значение скорости v_0 и амплитуда x_0 колебаний связаны соотношением

$$v_0 = \frac{2\pi}{\tau} x_0 = \left(\frac{\kappa}{m}\right)^{1/2} x_0. \quad (7.22)$$

Период колебаний атома τ называется *эйнштейновским периодом*, а обратная ему величина — *эйнштейновской частотой*.

Мгновенная кинетическая энергия атома равна $mv^2/2$; она меняется от нуля в точках наибольшего отклонения атома от положения равновесия до $mv_0^2/2$, когда атом проходит положение равновесия. Средняя по периоду колебаний кинетическая энергия атома есть

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \overline{v^2} &= \frac{m}{2\tau} \int_0^\tau v^2 dt = \frac{mv_0^2}{2\tau} \int_0^\tau \cos^2 \frac{2\pi t}{\tau} dt = mv_0^2/4 = \\ &= \kappa x_0^2/4. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Средняя кинетическая энергия равна половине максимальной кинетической энергии. Чтобы вычислить потенциальную энергию атома, нужно проинтегрировать произведение силы $-\kappa x$, действующей на атом, на бесконечно малое смещение dx атома из положения равновесия в произвольное положение x . Мгновенная потенциальная энергия атома тогда равна

$$-\int_0^x (-\kappa x) dx = \kappa x^2/2, \quad (7.24)$$

где знак "—" перед интегралом появляется из-за того, что сила и смещение направлены в противоположные стороны. Потенциальная энергия меняется от нуля, когда атом проходит через положение равновесия, до $\kappa x_0^2/2$ в точках наибольшего удаления атома от начала координат. Средняя по периоду колебаний потенциальная энергия атома равна

$$\frac{1}{2} \kappa \overline{x^2} = \frac{\kappa}{2\tau} \int_0^\tau x^2 dt = \frac{\kappa x_0^2}{2\tau} \int_0^\tau \sin^2 \frac{2\pi t}{\tau} dt = \frac{\kappa x_0^2}{4}. \quad (7.25)$$

Средняя потенциальная энергия равна половине максимальной. Сравнивая равенства (7.23) и (7.25), можно убедиться в том, что средние значения кинетической и потенциальной энергии одномерного гармонического осциллятора равны друг другу. Мгновенная полная энергия атома есть

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 &= \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{1}{2} k x_0^2 \sin^2 \frac{2\pi t}{\tau} = \\ &= \frac{1}{2} k x_0^2 \left(\cos^2 \frac{2\pi t}{\tau} + \sin^2 \frac{2\pi t}{\tau} \right) = \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Равенство (7.26) есть выражение закона сохранения энергии.

Какой бы момент колебательного движения мы не рассмотрели, сумма кинетической и потенциальной энергий атома будет равна одной и той же постоянной величине — полной энергии.

В реальной кристаллической решетке колебания атома неоднородны. Атом может колебаться в любом из трех взаимно ортогональных направлений, причем колебание в каждом направлении имеет свою кинетическую и потенциальную энергию. Следовательно, полная энергия атома состоит из шести слагаемых; говорят, что атом имеет шесть степеней свободы. Колебания атомов происходят с различными амплитудами. Спектр амплитуд колебаний (или энергетический спектр) подробнее будет рассмотрен в следующем разделе. Согласно принципу *равнораспределения*, средняя по всем атомам решетки энергия, приходящаяся на одну степень свободы, равна $kT/2$, где $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура. Доказательство теоремы о равнораспределении основывается на решении уравнения Шредингера, описывающего движение атомов с позиций квантовой механики.

Внутреннюю энергию e единицы массы твердого тела можно записать как

$$e = \frac{6(kT/2)}{m} = \frac{3kT}{m} = \frac{3(kN_0)T}{mN_0} = \frac{3RT}{M_a}, \quad (7.27)$$

где $R = kN_0 = 8,314$ Дж·моль⁻¹·К⁻¹ — универсальная газовая постоянная, $M_a = mN_0$ — средняя атомная масса, т.е. средняя масса числа N_0 (N_0 — число Авогадро) атомов кристалла. Удельная теплоемкость твердого тела c определяется как производная внутренней энергии по температуре:

$$c = \frac{de}{dT}. \quad (7.28)$$

Согласно (7.27) и (7.28), удельная теплоемкость c кристаллического твердого тела равна

$$c = 3R/M_a. \quad (7.29)$$

Это соотношение, называемое *законом Дюлонга и Пти*, позволяет с достаточной точностью вычислять теплоемкость кристаллических твердых тел при умеренных температурах.

В качестве примера определим удельную теплоемкость форстерита Mg_2SiO_4 . Молекулярная масса форстерита равна 140,73, а масса его моля составляет $140,73 \cdot 10^{-3}$ кг. Поскольку 1 моль форстерита содержит $7N_0$ атомов, то средняя масса N_0 атомов равна $20,1 \cdot 10^{-3}$ кг, т.е. $M_a = 20,1 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Согласно (7.29), удельная теплоемкость c равна $1,24 \cdot 10^3$ Дж·кг⁻¹·К⁻¹. На самом деле значение удельной теплоемкости, измеренной при нормальных условиях, равно 840 Дж·кг⁻¹·К⁻¹.

ЗАДАЧА 7.4. Согласно закону Дюлонга и Пти, удельные теплоемкости твердых тел отличаются только из-за различия в величине M_a . Вычислите M_a и c для $MgSiO_3$ и MgO . Измеренные значения c при нормальных условиях составляют 815 Дж·кг⁻¹·К⁻¹ для $MgSiO_3$ и 924 Дж·кг⁻¹·К⁻¹ для MgO .

ЗАДАЧА 7.5. Исходя из соотношения $\kappa \sim Eb$, где E — модуль Юнга, а b — средний период решетчатой ячейки, оцените по порядку величины жесткость κ "упругой" межатомной связи в кристалле силиката типа форстерита. Модуль Юнга форстерита равен $1,5 \cdot 10^{11}$ Па. Значение b определите, приравняв величину b^3 среднему атомному объему. Плотность форстерита 3200 кг/м³. Оцените максимальную амплитуду колебаний атомов в кристалле форстерита при температуре 300 К. Сравните найденное значение амплитуды со средним межатомным расстоянием. Какова эйнштейновская частота при этой температуре? Жесткость κ также можно оценить исходя из условия $\kappa \sim 3b/\beta$, где β — коэффициент сжимаемости (множитель 3 представляет собой коэффициент пропорциональности между объемной и линейной деформациями). Как эта оценка величины κ соотносится с предыдущей? Коэффициент сжимаемости форстерита равен $0,8 \cdot 10^{-11}$ Па⁻¹.

Если бы атомы кристаллического твердого тела колебались как идеальные гармонические осцилляторы, то амплитуда колебаний увеличивалась бы с температурой, но среднее расстояние между атомами оставалось неизменным. Иными словами, это означало бы, что объем тела не зависит от температуры. Следовательно, тепловое расширение кристаллического твердого тела можно рассматривать как прямое следствие агармоничности колебаний атомов. Последняя в свою очередь возникает из-за асимметрии потенциальной энергии атома относительно положения равновесия в решетке. Качественно явление теплового расширения можно уяснить из рис. 7.6, на котором показана потенциальная энергия U атома в функции межатомного расстояния b в решетке (как на рис. 7.4). Величина b_0 , соответствующая минимуму потенциальной энергии, равна периоду решетки при нулевой температуре. При температуре, отличной от нуля, каждый атом в среднем обладает энергией $3kT$, которая распределяется поровну между кинетической и потенциальной энергиями атома. Следовательно, средняя потенциальная энергия атома при $T \neq 0$ превышает ее значение U_0 при нулевой температуре на величину $3kT/2$. При этом межатомное расстояние будет в среднем заключено в промежутке между значениями b_A и b_B , при которых потенциальная энергия атома в решетке обращается в $U_0 + (3/2)kT$ (рис. 7.6), а сред-

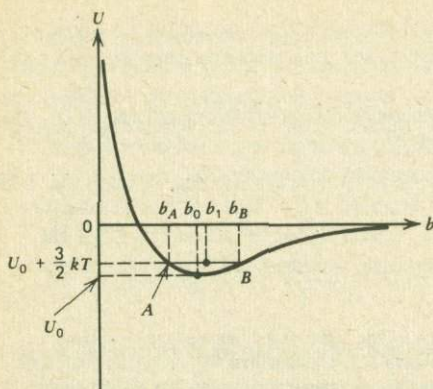


РИС. 7.6₂. Асимметрия кривой потенциальной энергии решетки относительно точки минимума обуславливает явление теплового расширения и сжатия.

нее значение b_1 межатомного расстояния определится как

$$b_1 = (b_A + b_B)/2. \quad (7.30)$$

Поскольку кривая потенциальной энергии несимметрична относительно точки минимума, величина b_1 превышает b_0 . Это означает, что с увеличением температуры решетка расширяется. Если бы зависимость потенциальной энергии атома в решетке была симметрична относительно точки минимума, то b_1 равнялось бы b_0 , т.е. среднее межатомное расстояние (а значит, и объем кристаллического твердого тела) не менялось бы с температурой.

Можно получить простое соотношение между средним межатомным расстоянием, температурой и "перекосом" кривой $U(b)$. Зависимость $U(b)$ вблизи точки минимума можно представить в виде разложения

$$U = U_0 + a\delta^2 - f\delta^3 \quad (7.31)$$

по степеням отклонения

$$\delta = b - b_0 \quad (7.32)$$

от положения равновесия. При $f > 0$ кривая U слева от минимума будет идти круче, чем справа. Подставляя в (7.31) $U = U_0 + \frac{1}{2} kT$, мы получим следующее уравнение для определения $\delta_A = b_A - b_0$ и $\delta_B = b_B - b_0$:

$$\frac{3}{2} kT = a\delta^2 - f\delta^3. \quad (7.33)$$

Предполагая асимметрию кривой $U(b)$ малой (т.е. $f \ll 1$), в линейном приближении по f из (7.33) находим

$$\delta_A = \left(\frac{3kT}{2a}\right)^{1/2} + f\left(\frac{3kT}{4a^2}\right), \quad (7.34)$$

$$\delta_B = -\left(\frac{3kT}{2a}\right)^{1/2} + f\left(\frac{3kT}{4a^2}\right), \quad (7.35)$$

откуда среднее межатомное расстояние b_1 можно записать как

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2} (b_A + b_B) = \frac{1}{2} (b_A - b_0 + b_B - b_0) + b_0 = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_A + \delta_B) + b_0 = \frac{3fkT}{4a^2} + b_0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Из этого соотношения видно, что при $f > 0$ (положительное f соответствует изображенному на рис. 7.6 виду потенциальной энергии) решетка при увеличении температуры расширяется. Коэффициент линейного расширения

$$\alpha_l = \frac{1}{b_0} \left(\frac{\partial b_1}{\partial T} \right) \quad (7.37)$$

равен одной трети коэффициента α_v объемного теплового расширения [см. (4.175)], т.е.

$$\alpha_v = \frac{3}{b_0} \left(\frac{\partial b_1}{\partial T} \right). \quad (7.38)$$

Подставляя (7.36) в (7.38), находим

$$\alpha_v = 9kf / (4a^2 b_0). \quad (7.39)$$

Отсюда видно, что коэффициент объемного расширения кристаллического твердого тела прямо пропорционален перекошу кривой потенциальной энергии относительно точки минимума; кроме того, в этом приближении он не зависит от температуры.

Для ионных кристаллов коэффициенты α и f разложения величины U около ее равновесного значения U_0 можно определить, исходя из точного выражения (7.10) для потенциальной энергии атома в решетке. Разлагая правую часть равенства (7.10) в ряд Тейлора по степеням смещения $b - b_0$ и используя равенство (7.13), получаем

$$\begin{aligned} U &= U_0 + (b - b_0)^2 \left\{ -\frac{z^2 e^2 A}{4\pi\epsilon_0 b_0^3} + \frac{B \exp(-b_0/s)}{2s^2} \right\} + \\ &+ (b - b_0)^3 \left\{ \frac{z^2 e^2 A}{4\pi\epsilon_0 b_0^4} - \frac{B \exp(-b_0/s)}{6s^3} \right\}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Сравнивая выражения (7.31), (7.32) и (7.40), находим, что

$$\alpha = -\frac{z^2 e^2 A}{4\pi\epsilon_0 b_0^3} + \frac{B \exp(-b_0/s)}{2s^2}, \quad (7.41)$$

$$f = -\frac{z^2 e^2 A}{4\pi\epsilon_0 b_0^4} + \frac{B \exp(-b_0/s)}{6s^3}. \quad (7.42)$$

Подставляя сюда выражения (7.14) и (7.15) для $B \exp(-b_0/s)$ и s соответственно и выражения (7.16) и (7.17) для β_0 и U_0 , имеем

$$a = 9b_0/\beta_0, \quad (7.43)$$

$$f = \frac{z^2 e^2 A}{24\pi\epsilon_0 b_0^4 \beta_0^2} \left\{ [2\beta_0 + 9V_0 \left(\frac{4\pi\epsilon_0 b_0}{z^2 e^2 A} \right)]^2 - 6\beta_0^2 \right\}. \quad (7.44)$$

С помощью этих выражений a и f из (7.39) находим окончательное выражение для коэффициента объемного расширения ионного кристалла

$$\alpha_v = \frac{z^2 e^2 k A}{216\pi\epsilon_0 b_0 V_0^2} \left\{ [2\beta_0 + 9V_0 \left(\frac{4\pi\epsilon_0 b_0}{z^2 e^2 A} \right)]^2 - 6\beta_0^2 \right\}. \quad (7.45)$$

Подставляя для NaCl значения $z = 1$, $A = 1,7476$, $b_0 = 2,82 \cdot 10^{-10}$ м, $V_0 = 4,486 \cdot 10^{-29}$ м³ и $\beta_0 = 4,26 \cdot 10^{-11}$ Па⁻¹, находим следующее оценочное значение коэффициента объемного расширения при нулевой температуре: $\alpha_v = 2,26 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹. Измерения при $T = 300$ К дают примерно в 5 раз большую величину; при 100 К значение α_v оказывается уже только в 3 раза больше теоретического.

ЗАДАЧА 7.6. С помощью данных, приведенных в задаче 7.1, вычислите коэффициент теплового расширения CsCl.

Твердые кристаллические тела проявляют свойство упругости только при относительно низких температурах T и давлениях p . При более высоких значениях T и p начинают играть роль новые, происходящие на атомном уровне процессы, ведущие к возникновению ползучести.

7.3. Диффузионная ползучесть

При очень низких уровнях напряжений преобладающим механизмом деформации пород путем ползучести является диффузия. *Диффузионная ползучесть* происходит благодаря диффузии атомов через внутренние области кристаллических зерен, когда к последним приложены напряжения. В результате диффузии происходят деформации зерен и возникает деформация породы. Выведем формулу зависимости скорости деформации от напряжения в рамках простой модели кристаллического твердого тела. Мы убедимся в том, что диффузионная ползучесть приводит к такой деформации твердой среды, которую можно рассматривать как течение ньютоновской вязкой жидкости, и выведем выражение для коэффициента вязкости. Диффузия также может происходить вдоль границ зерен. В некоторых случаях этот процесс преобладает над диффузией сквозь внутренние области зерен. Деформация

кристалла, происходящая по механизму диффузии вдоль границ зерен, называется *ползучестью Кобле*.

В предыдущем разделе мы показали, что в соответствии с законом равномерного распределения кинетическая энергия теплового движения атома в кристаллической решетке в среднем равна $\frac{3}{2}kT$ (по $\frac{1}{2}kT$ на колебание в каждом из трех взаимно перпендикулярных направлений). В действительности кинетическая энергия атома не равна в точности среднему значению $\frac{3}{2}kT$, а распределена вокруг него по некоторому закону: часть атомов обладает большей кинетической энергией, часть — меньшей. Число dn_φ атомов в единице объема, обладающих кинетической энергией от φ до $\varphi + d\varphi$, определяется формулой

$$dn_\varphi = \frac{2\pi n \varphi^{1/2}}{(\pi kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\varphi}{kT}\right) d\varphi \quad (7.46)$$

(n — полное число атомов в единице объема), которая называется энергетическим *распределением Максвелла — Больцмана*. Это распределение применимо в широком диапазоне условий к любым веществам.

ЗАДАЧА 7.7. Интегрируя равенство (7.46) по энергии от 0 до ∞ , покажите, что полное число атомов в единице объема при условии справедливости распределения Максвелла — Больцмана равно n .

ЗАДАЧА 7.8. Средняя кинетическая энергия $\bar{\varphi}$ атома в кристаллическом твердом теле вычисляется как

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{n} \int_0^\infty \varphi dn_\varphi. \quad (7.47)$$

Интегрируя по распределению Максвелла — Больцмана, покажите, что $\bar{\varphi} = \frac{3}{2}kT$.

Благодаря действию межатомных сил, рассмотренных в предыдущем разделе, атомы кристаллического твердого тела "привязаны" к узлам кристаллической решетки. Каждый атом находится в эффективной потенциальной яме; если кинетическая энергия атома превышает энергетический барьер, препятствующий его уходу из окрестности данного узла решетки, то он может покинуть "свое" положение в решетке и произвольно перемещаться в ней. В рамках одномерной модели простого гармонического осциллятора освободившись из своих положений в решетке следует считать те атомы, амплитуда x_0 колебаний которых сравнима с периодом b решетки. Исходя из этого, величину φ_0 потенциального энергетического барьера можно положить равной максимальной потенциальной энергии $\frac{1}{2} \kappa b^2$ колеблющегося атома:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \kappa b^2. \quad (7.48)$$

Видно, что мерой величины φ_0 потенциального энергетического барьера является "жесткость" межатомных сил κ . Подставляя в равенство (7.21) выражение для κ из (7.48), можно найти связь величины φ_0 с эйнштейновским

периодом τ атома, энергия которого достаточна для того, чтобы он мог покинуть свое положение в решетке:

$$\tau = 2\pi b \left(\frac{m}{2\varphi_0} \right)^{1/2}. \quad (7.49)$$

Число n_{φ_0} атомов в единице объема кристалла, обладающих кинетической энергией, большей φ_0 , можно найти, интегрируя распределение (7.46) в пределах от $\varphi = \varphi_0$ до $\varphi = \infty$:

$$n_{\varphi_0} = \int_{\varphi_0}^{\infty} dn_{\varphi} = \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{1/2}} \int_{\varphi_0}^{\infty} \varphi^{1/2} \exp\left(-\frac{\varphi}{kT}\right) d\varphi. \quad (7.50)$$

Вводя новую переменную интегрирования $s = (\varphi/kT)^{1/2}$, перепишем равенство (7.50) в форме

$$n_{\varphi_0} = \frac{4\pi}{\pi^{1/2}} \int_{(\varphi_0/kT)^{1/2}}^{\infty} s^2 \exp(-s^2) ds, \quad (7.51)$$

удобной для интегрирования по частям. Выполнив интегрирование, находим

$$\begin{aligned} n_{\varphi_0} &= \frac{2n}{\pi^{1/2}} \left\{ (-s \exp(-s^2)) \Big|_{(\varphi_0/kT)^{1/2}}^{\infty} + \int_{(\varphi_0/kT)^{1/2}}^{\infty} \exp(-s^2) ds \right\} = \\ &= n \left\{ 2 \left(\frac{\varphi_0}{\pi kT} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\varphi_0}{kT}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{\varphi_0}{kT}\right)^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Величина n_{φ_0}/n есть относительная доля атомов кристалла, энергия которых достаточна для преодоления потенциального барьера, разделяющего узлы решетки. Величина φ_0 потенциального барьера велика по сравнению со средней кинетической энергией атома ($\frac{1}{2} kT$), благодаря чему большинство атомов находится в кристалле на "своих" местах. Воспользовавшись при $\varphi_0/kT \gg 1$ асимптотическим разложением

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{\varphi_0}{kT}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{kT}{\pi\varphi_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\varphi_0}{kT}\right), \quad (7.53)$$

справедливым при больших (по сравнению с единицей) значениях аргумента функции erfc , можно убедиться в том, что второй член в равенстве (7.52) намного меньше первого, и, следовательно, при $\varphi_0/kT \gg 1$ им можно пренебречь. В результате формула (7.52) для n_{φ_0} упрощается следующим образом:

$$n_{\varphi_0} = 2n \left(\frac{\varphi_0}{\pi kT} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\varphi_0}{kT}\right). \quad (7.54)$$

Мы видим, что относительная доля высокоэнергичных атомов зависит от обратной абсолютной температуры по экспоненциальному закону, т.е. очень чувствительна к температурным вариациям.

При любой конечной температуре в кристалле имеется определенная доля атомов с энергией, достаточной для того, чтобы покинуть свои положения в решетке. Поэтому часть узлов решетки оказывается незанятой; такие узлы называются *вакансиями*. Вакансии представляют собой одну из форм *точечного дефекта* в кристалле. Другими типами точечных дефектов являются атомы, скользящие в промежутках между узлами и не находящие себе места в ряду регулярно расположенных атомов решетки, а также примесные атомы. Вакансии играют существенную роль в процессах диффузии. Естественно предположить, что число n_v вакансий в единице объема кристалла равно числу атомов, обладающих энергией, достаточной для преодоления потенциального барьера Φ_0 . Согласно (7.54), имеем

$$n_v = n_{\Phi_0} = 2n \left(\frac{\Phi_0}{\pi k T} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\Phi_0}{k T} \right). \quad (7.55)$$

Если имеется незанятый узел решетки, рядом с которым находится атом с энергией, большей энергии Φ_0 потенциального барьера, то такой атом может перескочить в соседнее (незанятое) положение, а его прежнее место станет вакантным. Этот процесс можно рассматривать как перемещение вакансии на величину межатомного расстояния. Найдем скорость, с которой вакансии мигрируют, или диффундируют, через решетку; ниже мы увидим, что процесс диффузии вакансий из одной части кристалла в другую может вызвать деформацию кристалла и привести к ползучести. Частота $\Gamma_{v, +x}$ перемещений данной вакансии на величину периода решетки в направлении $+x$ равна произведению вероятности $w = n_{\Phi_0}/n$ того, что соседний с вакансией атом имеет энергию, большую величины потенциального барьера, на частоту $1/6\tau$, с которой атом движется в направлении к вакансии (τ — эйнштейновский период, в течение которого атом может двигаться в любом из шести направлений):

$$\Gamma_{v, +x} = n_{\Phi_0} / 6\tau n. \quad (7.56)$$

Подставляя сюда выражения (7.55) и (7.49) для n_{Φ_0} и τ соответственно, находим

$$\Gamma_{v, +x} = \frac{\Phi_0}{6\pi b} \left(\frac{2}{\pi m k T} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\Phi_0}{k T} \right). \quad (7.57)$$

На самом деле наличие вакансии снижает величину потенциального барьера, отделяющего ее от соседних атомов; однако в нашем приближенном анализе мы не учитываем этого эффекта.

Предположим, что в кристалле в направлении оси x имеется малый градиент концентрации вакансий. Если $n_v(x)$ — число вакансий в единице объема, то число

вакансий на единице площади атомной плоскости с координатой x есть $n_v(x)b$, а число вакансий на единице площади соседней плоскости $x + b$ есть $n_v(x+b)b$. Результирующая плотность потока вакансий с плоскости x на плоскость $x + b$ равна

$$J_{v, x} = \Gamma_{v, +x} n_v(x)b - \Gamma_{v, -x} n_v(x+b)b. \quad (7.58)$$

Вывод выражения (7.57) для $\Gamma_{v, +x}$ в равной мере применим к частоте $\Gamma_{v, -x}$ перемещения вакансии в соседний узел решетки в направлении $-x$, т.е.

$\Gamma_{v, +x} = \Gamma_{v, -x}$, и равенство (7.58) можно переписать как

$$J_{v, x} = -b^2 \Gamma_{v, +x} \left\{ \frac{n_v(x+b) - n_v(x)}{b} \right\}. \quad (7.59)$$

Поскольку расстояние b между атомными плоскостями мало по сравнению с характерным масштабом изменения величины n_v , то с хорошей точностью можно положить

$$\frac{n_v(x+b) - n_v(x)}{b} = \frac{dn_v}{dx} \quad (7.60)$$

и переписать выражение для плотности потока вакансий в виде

$$J_{v, x} = -b^2 \Gamma_{v, +x} \frac{dn_v}{dx}. \quad (7.61)$$

Плотность диффузионного потока вакансий прямо пропорциональна градиенту концентрации вакансий. Знак "-" в равенстве (7.61) указывает, что вакансии диффундируют из областей высокой концентрации вакансий в области низкой концентрации (градиент плотности вакансий направлен в сторону увеличения концентрации вакансий). Величина коэффициента пропорциональности в равенстве (7.61) есть коэффициент диффузии D_v вакансий:

$$D_v = b^2 \Gamma_{v, +x}. \quad (7.62)$$

Используя определение коэффициента диффузии, (7.61) можно переписать в форме первого закона диффузии Фика

$$J_{v, x} = -D_v \frac{dn_v}{dx}. \quad (7.63)$$

С учетом формулы (7.57) коэффициент диффузии (7.62) можно записать в виде

$$D_v = \frac{\varphi_0 b}{6\pi} \left(\frac{2}{\pi m k T} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\varphi_0}{kT}\right). \quad (7.64)$$

До сих пор, говоря о диффузии в кристаллической решетке, мы рассматривали только диффузию вакансий. Однако наличие вакансий делает возможным

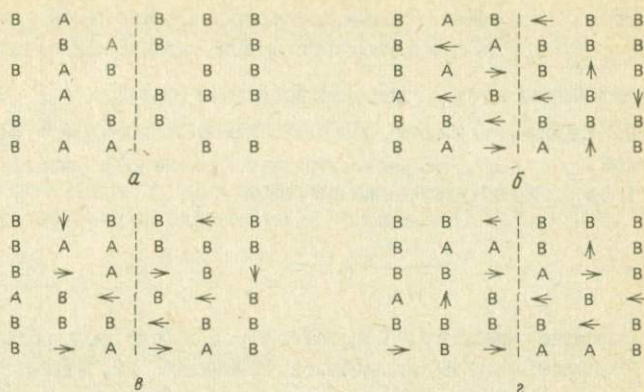


РИС. 7.7. Диффузия примеси в кристаллическом твердом теле. Первоначально все примесные атомы вида A расположены слева от пунктирной прямой (a). Вакансиям соответствуют пустые места в решетке. За время порядка эйнштейновского периода, умноженного на n_v/n , значительная доля атомов случайным образом перескакивает в соседние вакантные узлы. В результате возникает конфигурация b ; стрелки в вакантных узлах указывают направления перемещений атомов, на месте которых образовались вакансии. β, γ — дальнейшие перемещения атомов в вакантные узлы решетки. В конце концов атомы вида A становятся случайным образом перемешаны по всей решетке.

и другой процесс — диффузию примесных атомов. Если решетка состоит преимущественно из атомов вида B , но в ней есть небольшое количество неравномерно распределенных атомов вида A , то при наличии вакансий последние смогут мигрировать, или диффундировать, через решетку. Этот процесс изображен на рис. 7.7. Примесные атомы вида A первоначально (рис. 7.7, a) находились в решетке слева от пунктирной линии. (Вакансии показаны как пустые пробелы.) По истечении времени, по порядку величины равного произведению эйнштейновского периода на отношение n_v/n , значительная часть вакансий будет заполнена атомами, случайным образом перескочившими из соседних узлов решетки. Качественно этот процесс иллюстрируют рис. 7.7, b – $г$, где стрелки в местах расположения образовавшихся вакансий указывают, куда переместился атом. В результате случайной миграции атомов примесь A более равномерно распределяется по кристаллу. На рис. 7.7, $г$ число атомов вида A слева и справа от пунктирной прямой уже совпадает. Мы видим, что первоначально упорядоченное распределение примесных атомов A (все атомы вида A — слева от пунктирной линии) стало неупорядоченным (атомы вида A случайно распределены по всей решетке). При этом энтропия системы увеличивается. Это означает, что рассмотренный процесс диффузии необратим.

Чтобы количественно описать диффузию неравномерно распределенных примесных атомов вида A , выведем выражение для частоты $\Gamma_A, +x$ перемещения данного атома вида A на соседнее вакантное место в направлении $+x$.

Эта частота дается произведением трех сомножителей — вероятности (равной $n_{A, \varphi_0} / n_A$) того, что энергия атома достаточна для преодоления потенциального барьера (n_A — концентрация атомов вида A , n_{A, φ_0} — число атомов вида A в единице объема, обладающих энергией, большей φ_0), вероятности (равной n_v / n) того, что располагающийся рядом узел решетки пуст, и частоты $1/6 \tau$ движения атома в направлении $+x$:

$$\Gamma_{A, +x} = \left(\frac{n_{A, \varphi_0}}{n_A} \right) \left(\frac{n_v}{n} \right) \left(\frac{1}{6\tau} \right). \quad (7.65)$$

Согласно равенству (7.55), доля атомов любого вида, обладающих энергией, превышающей энергию потенциального барьера φ_0 , зависит только от температуры. Тогда мы можем написать следующее равенство отношений концентраций:

$$\frac{n_{A, \varphi_0}}{n_A} = \frac{n_{\varphi_0}}{n}, \quad (7.66)$$

откуда для величины $\Gamma_{A, +x}$ получаем

$$\Gamma_{A, +x} = \frac{n_v}{n} \left(\frac{n_{\varphi_0}}{6\tau n} \right). \quad (7.67)$$

Сравнивая равенства (7.56) и (7.67), мы видим, что частоты $\Gamma_{A, +x}$ и $\Gamma_{v, +x}$ связаны между собой следующим образом:

$$\Gamma_{A, +x} = \frac{n_v}{n} \Gamma_{v, +x}. \quad (7.68)$$

Частота, с которой атом примеси перескакивает в направлении $+x$, в n_v/n раз меньше частоты перескакиваний вакансии. Причина этого заключается в том, что атом примеси может переместиться в направлении $+x$ только в том случае, если рядом с ним в этом направлении есть вакансия, тогда как вакансия может переместиться на место любого атома. Вероятность же соседства с вакансией намного меньше, чем с атомом.

Предположим, что в кристалле в направлении x имеется градиент концентрации примесных атомов A . Число атомов вида A , находящихся на единице площади атомных плоскостей x и $x+b$, есть $n_A(x)b$ и $n_A(x+b)b$ соответственно. Результирующая плотность потока атомов примеси A с плоскости x на плоскость $x+b$ есть

$$\begin{aligned} J_{A, x} &= \Gamma_{A, +x} n_A(x)b - \Gamma_{A, -x} n_A(x+b)b = \\ &= -b \Gamma_{A, +x} \{ n_A(x+b) - n_A(x) \}, \end{aligned} \quad (7.69)$$

где мы учли, что $\Gamma_{A, +x} = \Gamma_{A, -x}$, подобно тому как $\Gamma_{v, +x} = \Gamma_{v, -x}$.

С помощью равенства (7.68) плотность потока примесных атомов можно переписать в виде

$$J_{A, x} = - \frac{b^2 n_v}{n} \Gamma_{v, +x} \left\{ \frac{n_A(x+b) - n_A(x)}{b} \right\}. \quad (7.70)$$

Если межплоскостное расстояние b мало по сравнению с характерным масштабом изменения n_A , то с хорошей точностью можно положить

$$\frac{n_A(x+b) - n_A(x)}{b} = \frac{dn_A}{dx}. \quad (7.71)$$

Равенство (7.70) с учетом (7.71) принимает вид

$$J_{A, x} = - \frac{b^2 n_v}{n} \Gamma_{v, +x} \frac{dn_A}{dx}. \quad (7.72)$$

Мы видим, что диффузионный поток примесных атомов направлен против градиента концентрации и записывается в форме первого закона Фика. Коэффициент диффузии D атомов дается выражением

$$D = \frac{b^2 n_v}{n} \Gamma_{v, +x} = \frac{n_v}{n} D_v. \quad (7.73)$$

Выраженный через коэффициент диффузии D поток примесных атомов есть

$$J_{A, x} = -D \frac{dn_A}{dx}. \quad (7.74)$$

Собирая вместе равенства (7.55), (7.64) и (7.73), получим

$$D = \frac{\varphi_0 b}{3\pi^2 k T} \left(\frac{2\varphi_0}{m} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2\varphi_0}{k T}\right). \quad (7.75)$$

Это выражение можно представить в другом виде, если ввести универсальную газовую постоянную R , среднюю атомную массу M_a и молярную энергию потенциального барьера $E_0 = N_0 \varphi_0$:

$$D = \frac{E_0 b}{3\pi^2 R T} \left(\frac{2E_0}{M_a} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2E_0}{R T}\right). \quad (7.76)$$

В общем случае коэффициент диффузии зависит как от температуры T , так и от давления p ; эта зависимость часто выражается в форме

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{E_a + pV_a}{R T}\right), \quad (7.77)$$

где E_a и V_a — молярные энергия и объем активации, а D_0 — частотный

множитель. Член pV_a учитывает влияние давления, сводящееся к уменьшению числа вакансий и увеличению величины потенциального барьера, разделяющего узлы решетки. Выражение (7.77) не учитывает температурную зависимость предэкспоненциального частотного множителя. Другая формула, позволяющая учесть зависимость коэффициента диффузии от температуры и давления, имеет вид

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{a T_m}{T}\right), \quad (7.78)$$

где T_m — температура плавления кристаллического твердого тела. Отношение T/T_m называется *приведенной температурой*. Зависимость коэффициента диффузии от давления входит в формулу (7.78) через зависимость температуры плавления от давления.

Параметры E_a , V_a и D_0 , входящие в равенство (7.77), или a , T_m и D_0 , входящие в (7.78), обычно определяются эмпирически. Для многих кристаллических твердых тел оказывается возможным определить коэффициент диффузии с использованием радиоактивных изотопов в качестве *меченых атомов*. Регистрируя диффузию радиоактивного изотопа через кристалл, можно определить коэффициент диффузии. Параметры, от которых зависит коэффициент диффузии, приведены для некоторых элементов в табл. 7.2.

Таблица 7.2. Параметры D_0 и E_a коэффициентов диффузии и другие характеристики некоторых радиоактивных изотопов

	Алюминий	Медь	Магний	Кремний
Атомная масса	26,98	63,55	24,30	28,09
Плотность, кг/м ³	2700	8960	1740	2330
Температура плавления, К	933	1356	922	1683
Удельная теплоемкость, Дж·кг ⁻¹ ·К ⁻¹	900	385	1017	703
Коэффициент изотермической сжимаемости, 10 ⁻¹¹ Па ⁻¹	1,38	0,73	3,0	1,0
Объемный коэффициент теплового расширения, 10 ⁻⁵ К ⁻¹	7,5	5	7,5	0,9
Диффундирующий радиоактивный изотоп	²⁷ Al	⁶⁷ Cu	²⁸ Mg	³¹ Si
Частотный множитель D_0 , м ² /с	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$7,8 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$
Энергия активации E_a , кДж/моль	142	211	136	460

ЗАДАЧА 7.9. Рассмотрим одномерную диффузию радиоактивных меченых атомов, в начальный момент $t = 0$ сосредоточенных на поверхности $x = 0$ кристаллического твердого тела, заполняющего полупространство. Начальная поверхностная концентрация радиоактивных атомов равна C . Покажите, что объемная концен-

трация n радиоактивных атомов удовлетворяет уравнению диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (7.79)$$

Это уравнение можно получить, дифференцируя уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial x}, \quad (7.80)$$

выражающее сохранение меченых атомов, диффундирующих только в направлении x . Уравнение (7.80) баланса массы не учитывает естественной радиоактивности меченых атомов. Покажите, что решение $n(x, t)$ уравнения (7.79), удовлетворяющее граничным условиям

$$n(x, t = 0) = 0, \quad (7.81)$$

$$\int_0^{\infty} n(x, t) dx = C, \quad (7.82)$$

имеет вид

$$n(x, t) = \frac{C}{(\pi D t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4 D t}\right). \quad (7.83)$$

Подобную задачу диффузии тепла мы уже решали в разд. 4.20. Определите коэффициент диффузии на основе модельных данных, приведенных в табл. 7.3. В эксперименте радиоактивные атомы наносились тонким слоем на поверхность алюминия, образец отжигался в течение 30 ч, после чего разделялся на пластинки; измерялась скорость счета (пропорциональная общему содержанию радиоактивных атомов в пластинке) от каждой пластинки.

Таблица 7.3. Модельные данные для определения коэффициента диффузии в эксперименте с мечеными атомами

Скорость счета, s^{-1}	Толщина пластинки, 10^{-6} м
5020	104
3980	110
2505	101
1395	98
570	96

Выясним, каким образом диффузия атомов в кристалле при наличии дифференциального напряжения может привести к ползучести. Процесс диффузионной ползучести проиллюстрируем следующим образом (рис. 7.8). Пусть к кристаллу, первоначально представляющему собой куб с ребром h , прикладывается сжимающее напряжение σ в направлении оси x и равное ему растягивающее напряжение $-\sigma$ в направлении оси y . Под действием этих напря-

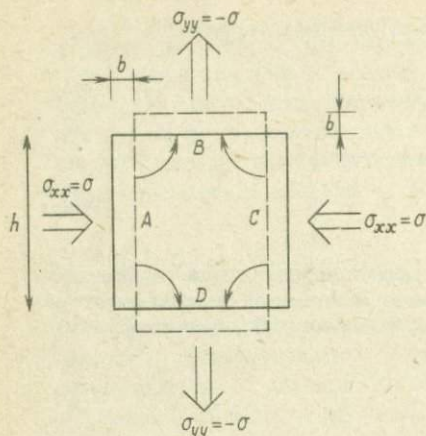


РИС. 7.8. Диффузия атомов в кубическом кристалле с ребром h под действием приложенных напряжений — горизонтального сжимающего и вертикального растягивающего. Пунктиром показана форма, приобретаемая кристаллом после того, как в результате диффузии поверхностные вертикальные слои атомов переместятся на горизонтальные грани.

жений происходит диффузия атомов с граней A и C кристалла на грани B и D . Мы можем рассматривать этот процесс и иначе — как диффузию вакансий, идущую в обратном направлении. Когда с каждой из граней A и C удаляется по одному слою атомов, а к граням B и D добавляется по одному слою, то это означает, что в направлениях x и y произошли деформации, равные $\epsilon_{xx} = 2b/h$ и $\epsilon_{yy} = -2b/h$ соответственно. Следует отметить, что с граней A и C атомы диффундируют также на грани E и F (к которым не приложено напряжений, $\sigma_{zz} = 0$), а с граней E и F — на грани B и D . В результате на грани E и F не добавляются (и не удаляются с них) атомы, так что $\epsilon_{zz} = 0$.

Вследствие того что к грани A (и к грани C) приложено сжимающее напряжение, концентрация вакансий уменьшается с n_v до n_{vA} . На грань B (и D) действует растягивающее напряжение, и концентрация вакансий увеличивается с n_v до n_{vB} . Концентрация вакансий на гранях E и F остается равной n_v , так как к этим граням не приложено напряжений. Разность концентраций вакансий на гранях куба приводит к появлению потока вакансий, направленного от граней B и D к граням A и C , и соответственно к потоку атомов, направленному от граней A и C к граням B и D .

Потоки вакансий (через единицу площади в единицу времени) от граней A и C к граням B и D , согласно (7.63), равны

$$J_{v, AB} = J_{v, AD} = J_{v, CD} = J_{v, CB} = \frac{D_v \sqrt{2}}{h} (n_{vB} - n_{vA}), \quad (7.84)$$

где мы использовали условия $n_{vD} = n_{vB}$ и $n_{vC} = n_{vA}$ и подставили среднее расстояние $h/\sqrt{2}$ между смежными гранями куба. Аналогично записываются потоки вакансий с граней A и C к граням E и F и с граней E и F к граням B и D :

$$J_{v, AE} = J_{v, AF} = J_{v, CE} = J_{v, CF} = \frac{D_v \sqrt{2}}{h} (n_v - n_{vA}), \quad (7.85)$$

$$J_{v, EB} = J_{v, ED} = J_{v, FB} = J_{v, FD} = \frac{D_v \sqrt{2}}{h} (n_{vB} - n_v). \quad (7.86)$$

Площадь, через которую течет каждый из этих потоков, равна $h^2/\sqrt{2}$, а деформация, связанная с перемещением каждой вакансии, есть $-b^3/h^3$. Следовательно, скорости деформаций в направлениях x и y можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{yy} = & -\frac{b^3}{h^3} \frac{h^2}{\sqrt{2}} (J_{v, AB} + J_{v, AD} + J_{v, CB} + J_{v, CD} + \\ & + J_{v, EB} + J_{v, ED} + J_{v, FB} + J_{v, FD}), \end{aligned} \quad (7.87)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx} = & \frac{b^3}{h^3} \frac{h^2}{\sqrt{2}} (J_{v, AB} + J_{v, AD} + J_{v, CB} + J_{v, CD} + \\ & + J_{v, AE} + J_{v, AF} + J_{v, CE} + J_{v, CF}). \end{aligned} \quad (7.88)$$

Воспользовавшись равенствами (7.84) – (7.86), из полученных выражений для скоростей деформации можно исключить потоки. Подставляя также $n = 1/b^3$, находим

$$\dot{\epsilon}_{yy} = -\frac{4D_v}{nh^2} (2n_{vB} - n_{vA} - n_v), \quad (7.89)$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{4D_v}{nh^2} (n_v + n_{vB} - 2n_{vA}). \quad (7.90)$$

Выразим теперь концентрации n_{vA} и n_{vB} вакансий, "движущих" процесс диффузии, через приложенные напряжения. В отсутствие приложенных напряжений вакансии распределены изотропно с плотностью n_v , определяемой равенством (7.55). Исходя из прямой аналогии между зависимостью (7.77) коэффициента диффузии от давления и зависимостью концентрации вакансий на гранях кристалла от приложенного напряжения, запишем

$$n_{vA} \cong 2n \left(\frac{E_0}{\pi RT} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{E_0 + \sigma V_a}{RT} \right), \quad (7.91)$$

$$n_{vB} = 2n \left(\frac{E_0}{\pi RT} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{E_0 - \sigma V_a}{RT} \right). \quad (7.92)$$

Если приложенное напряжение достаточно мало, так что $\sigma V_a / RT \ll 1$, то можно написать

$$\frac{n_{vA}}{n_v} = \exp(-\sigma V_a / RT) \approx 1 - \frac{\sigma V_a}{RT}, \quad (7.93)$$

$$\frac{n_{vB}}{n_v} = \exp(-\sigma V_a / RT) \approx 1 + \frac{\sigma V_a}{RT}. \quad (7.94)$$

Подставляя (7.73), (7.93) и (7.94) в (7.89) и (7.90), находим

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{12V_a D}{RT h^2} \sigma. \quad (7.95)$$

Диффузионная ползучесть, также называемая ползучестью Херринга — Наббаро, приводит к линейному соотношению между скоростью деформации и напряжением. Это означает, что кристаллическое твердое тело ведет себя как ньютоновская жидкость с коэффициентом вязкости [см. равенство (6.56)]

$$\mu = RT h^2 / 24 V_a D. \quad (7.96)$$

Подставляя сюда выражение (7.77) для коэффициента диффузии, можно переписать выражение для коэффициента диффузионной вязкости в виде

$$\mu = \frac{RT h^2}{24 V_a D_0} \exp\left(\frac{E_a + p V_a}{RT}\right), \quad (7.97)$$

или при D , определяемом равенством (7.78),

$$\mu = \frac{RT h^2}{24 V_a D_0} \exp\left(\frac{a T_m}{T}\right). \quad (7.98)$$

Коэффициент диффузионной вязкости очень сильно изменяется с температурой и давлением. По сравнению с очень быстро меняющейся экспоненциальной функцией обратной абсолютной температуры температурная зависимость, задаваемая предэкспоненциальными множителями в (7.97) и (7.98), несущественна. Благодаря этому с увеличением температуры μ заметно падает. Из равенства (7.97) видно, что μ — возрастающая функция давления. Поскольку T_m увеличивается с давлением, то зависимость μ от p входит также и в формулу (7.98).

До сих пор в нашем рассмотрении диффузионной ползучести мы предполагали, что атомы диффундируют сквозь кристаллические зерна. Однако на самом деле диффузия идет и вдоль границ зерен. В тех случаях, когда коэффициент диффузии D_{vb} вакансий в направлении границ зерен значительно превышает коэффициент диффузии вакансий сквозь зерна, диффузия вдоль границ зерен может стать основой ползучести. Направленные вдоль границ зерен диффузионные потоки вакансий с граней A и C к граням B и D (см. рис. 7.8), согласно (7.63), равны

$$J_{v, AB} = J_{v, AD} = J_{v, CB} = J_{v, CD} = \frac{D_{vb}}{h} (n_{vB} - n_{vA}), \quad (7.99)$$

где h — среднее расстояние, на которое вакансии диффундируют вдоль границы. Значения n_{vB} , n_{vA} и т.д. концентрации вакансий на границах зерен мы приближенно считаем постоянными, хотя на самом деле они переменны, и именно их неоднородности приводят к диффузии вдоль каждой из границ. Потoki вакансий с граней A и C к граням E и F и с граней E и F к граням B и D , согласно (7.63), равны

$$J_{v, AE} = J_{v, AF} = J_{v, CE} = J_{v, CF} = \frac{D_{vb}}{h} (n_v - n_{vA}), \quad (7.100)$$

$$J_{v, EB} = J_{v, ED} = J_{v, FB} = J_{v, FD} = \frac{D_{vb}}{h} (n_{vB} - n_v). \quad (7.101)$$

Площадь, через которую течет каждый из этих потоков, равна $h\delta$, где δ — ширина границы зерна. Поскольку деформация, вызываемая переползанием одной вакансии, равна, как и выше, $-b^3/h^3$, то мы можем записать результирующие скорости деформаций следующим образом [ср. с равенствами (7.87) — (7.88)]:

$$\dot{\epsilon}_{yy} = -\frac{b^3}{h^3} h\delta (J_{v, AB} + J_{v, AD} + J_{v, CB} + J_{v, CD} + J_{v, EB} + J_{v, ED} + J_{v, FB} + J_{v, FD}), \quad (7.102)$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{b^3}{h^3} h\delta (J_{v, AB} + J_{v, AD} + J_{v, CB} + J_{v, CD} + J_{v, AE} + J_{v, AF} + J_{v, CE} + J_{v, CF}). \quad (7.103)$$

Подставляя выражения (7.99) — (7.101) в равенства (7.102) — (7.103), мы получим выражения для скоростей деформации в форме, аналогичной (7.89) и (7.90):

$$\dot{\epsilon}_{yy} = -\frac{4\delta D_{vb}}{h^3 n} (2n_{vB} - n_{vA} - n_v), \quad (7.104)$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{4\delta D_{vb}}{h^3 n} (n_v + n_{vB} - 2n_{vA}). \quad (7.105)$$

Эти формулы можно еще более упростить, если выразить, как и ранее, величины n_{vA}/n_v и n_{vB}/n_v с помощью равенств (7.93) и (7.94). Кроме того, введем коэффициент D_b диффузии атомов вдоль границ зерен [ср. с формулой (7.73)]:

$$D_b = \frac{n_v}{n} D_{vb}. \quad (7.106)$$

Скорости деформации тогда запишутся как

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{12V_a \delta D_b}{RT h^3} \sigma. \quad (7.107)$$

Ползучесть вдоль границ зерен, известная также как ползучесть Кoble, снова приводит к линейному соотношению между напряжением и скоростью деформации. Коэффициент вязкости, согласно (6.56), равен

$$\mu = \frac{RT h^3}{24V_a \delta D_b}. \quad (7.108)$$

Коэффициент D_b диффузии вдоль границ зерен также можно записать в виде (7.77):

$$D_b = D_{b0} \exp\left(-\frac{E_a + pV_a}{RT}\right), \quad (7.109)$$

так что коэффициент вязкости, обусловленной ползучестью вдоль границ зерен, запишется как

$$\mu = \frac{RT h^3}{24V_a \delta D_{b0}} \exp\left(\frac{E_a + pV_a}{RT}\right). \quad (7.110)$$

Зависимость коэффициента вязкости от температуры и давления в том случае, если диффузия идет вдоль границ зерен, остается такой же, как и в случае диффузии сквозь зерна. Относительная роль этих двух механизмов диффузии — вдоль границ зерен и сквозь внутренние области зерен — определяется величиной отношения $\delta D_b / hD$.

7.4. Дислокационная ползучесть

В предыдущем разделе мы видели, каким образом перемещение вакансий в кристаллическом теле приводит к деформации ползучести. Теперь мы рассмотрим миграцию дислокаций и покажем, что при этом тоже происходит субсолидусная ползучесть. *Дислокации* представляют собой нарушения порядка в расположении атомов кристаллической решетки. Хотя существует большое многообразие сложных форм дислокаций, все они могут быть представлены в виде суперпозиции дислокаций двух основных типов: краевых и винтовых дислокаций.

На рис. 7.9 показана краевая дислокация в кубической решетке. Атомная плоскость, которая оканчивается рядом (перпендикулярным плоскости рисунка) атомов, отмеченным черным кружком и представляющим собой *краевую дислокацию*, "вставлена" между "нормальными" плоскостями атомов решетки. Из-за наличия дислокации кристаллическая решетка оказывается деформированной. Смежные плоскости атомов над дислокацией сближены друг с другом (деформация сжатия), а под дислокацией отодвинуты друг от друга (деформация растяжения).

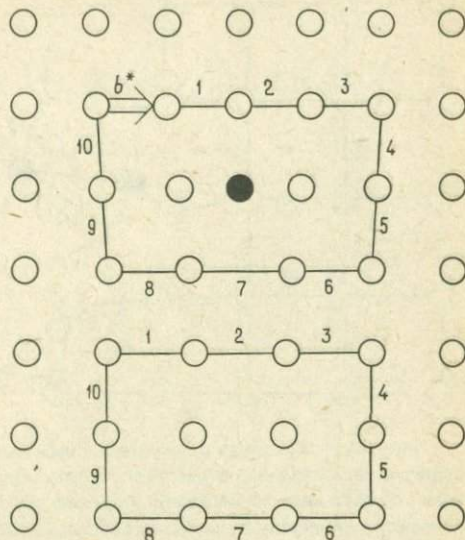


РИС. 7.9. Вид сбоку на краевую дислокацию в кубической решетке. Краевая дислокация представляет собой край атомной полуплоскости, вдвинутой сверху между "нормальными" атомными плоскостями. Краевая дислокация обозначена черным кружком; она перпендикулярна плоскости рисунка. Показаны контуры Бюргерса: контур, не охватывающий дислокацию, замкнут (нижняя часть рисунка), а контур, охватывающий краевую дислокацию, разомкнут (верхняя часть рисунка). Цифрами обозначены 10 звеньев каждого контура. Вектор b^* , замыкающий верхний контур, называется вектором Бюргерса данной дислокации.

Дислокации определяются *векторами Бюргерса*. Вектор Бюргерса в свою очередь задается контуром Бюргерса. В нижней части рис. 7.9 показан контур Бюргерса, не охватывающий дислокацию. Контур, десять звеньев которого пронумерованы числами от 1 до 10, замкнут. Контур Бюргерса, охватывающий дислокацию, показан в верхней части рис. 7.9. Теперь замкнуть контур десятью звеньями уже не удастся и для замыкания необходимо добавить вектор b^* . Этот вектор называется вектором Бюргерса. Для одиночной краевой дислокации в простой кубической решетке $|b^*| = b$. Вектор Бюргерса краевой дислокации лежит в плоскости контура Бюргерса.

Винтовая дислокация возникает тогда, когда атомы уходят из атомной плоскости (рис. 7.10). На рис. 7.10 также показан соответствующий контур Бюргерса. Видно, что для замыкания полного контура Бюргерса, охватывающего винтовую дислокацию, необходим вектор b^* , перпендикулярный плоскости контура. Следовательно, вектор Бюргерса в данном случае перпендикулярен плоскости контура Бюргерса. Если продолжить контур Бюргерса, то он образует второй виток, который почти целиком (за исключением последней точки) лежит в атомной плоскости, расположенной позади атомной плос-

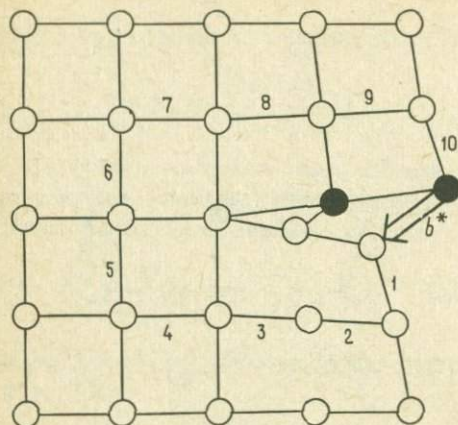


РИС. 7.10. Винтовая дислокация в кубической решетке создает деформацию, выходящую из показанной атомной плоскости. Два атома, изображенные черными кружками, по сути дела принадлежат уже следующей плоскости. Контур Бюргерса, звенья которого занумерованы числами, переходит с одной атомной плоскости на другую. Поэтому вектор Бюргерса b^* , необходимый для замыкания контура, должен быть перпендикулярен изображенной атомной плоскости.

кости, изображенной на рисунке, и оканчивается на третьей атомной плоскости. При дальнейшем продолжении контура Бюргерса образуется винтовая линия, каждый виток которой соединяет два смежных слоя атомов. По этой причине дислокация, связанная с выходом из атомных плоскостей в кристалле, называется винтовой.

Два основных процесса, которые реализуют дислокационную ползучесть, — это *скольжение* и *переползание* дислокаций. Рассмотрим сначала переползание дислокаций, показанное на примере двух краевых дислокаций на рис. 7.11, а-г. Для краевых дислокаций процесс переползания сводится либо к удлинению, либо к укорачиванию лишней атомной плоскости, край которой является дислокацией. Если в горизонтальном направлении на кристалл действуют сжимающие напряжения, а в вертикальном — растягивающие, то вертикальная плоскость, вклинивающаяся между нормальными плоскостями атомов и определяющая краевую дислокацию, стремится укоротиться, а лишняя горизонтальная плоскость, — наоборот, удлиниться. (На рис. 7.11, а эти плоскости оканчиваются соответственно атомами b и a , или, точнее, рядами атомов, проходящими через b и a в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка.) В результате в горизонтальном направлении происходит деформация сжатия, а в вертикальном — деформация растяжения. Процесс деформаций осуществляется благодаря диффузии атомов b , c и d с лишней вертикальной полуплоскости на лишнюю горизонтальную (рис. 7.11, а-г). В результате этого процесса дислокация, определяемая избыточной вертикальной плоскостью, переползает благодаря миграции вакансий, рассмотренной в предыдущем разделе. Поэтому деформацию

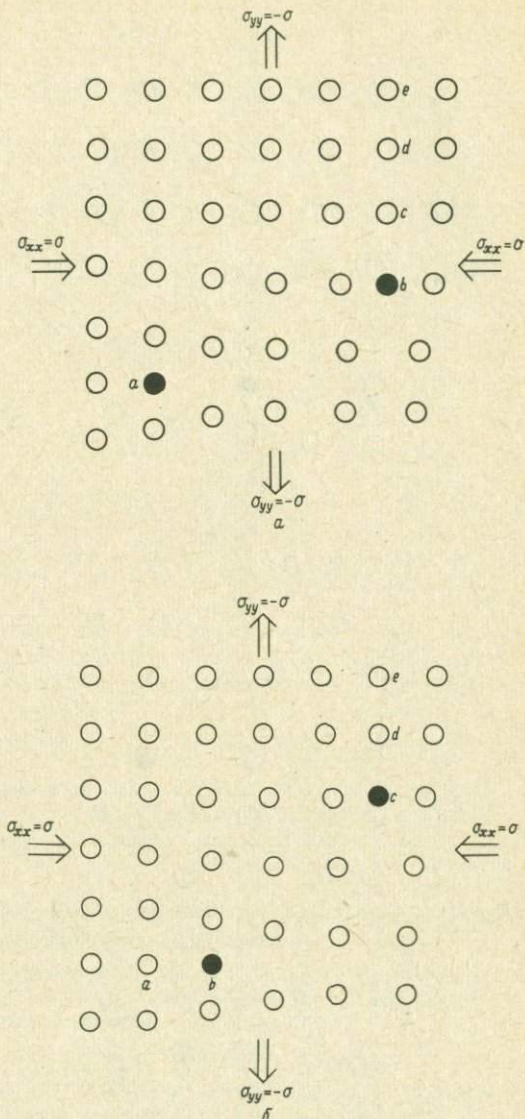


РИС. 7.11, а – г. Процесс переползания дислокаций. Благодаря диффузии атомов b , c и d с лишней вертикальной атомной плоскости на лишнюю горизонтальную кристалл укорачивается в направлении x и удлиняется в направлении y . Это происходит под действием растягивающего напряжения, приложенного в направлении y , и сжимающего напряжения, приложенного в направлении x ; напряжения являются движущей силой процесса диффузии атомов от одной дислокации к другой.

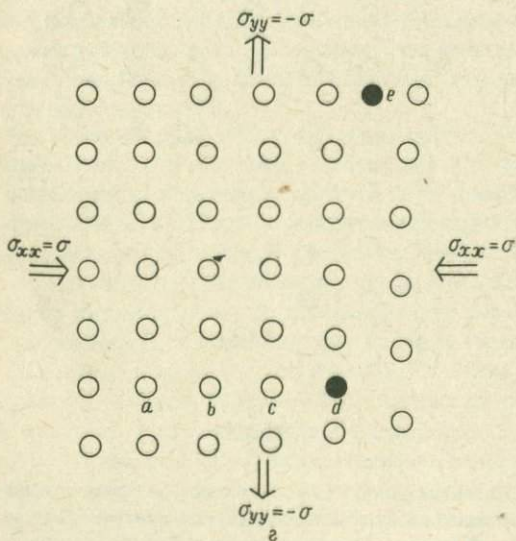
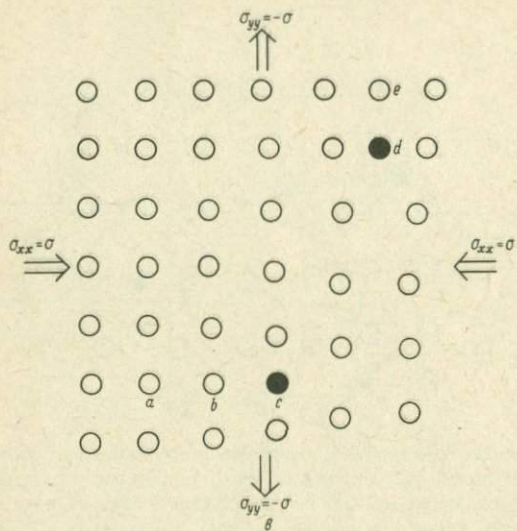


РИС. 7.11 (продолжение).

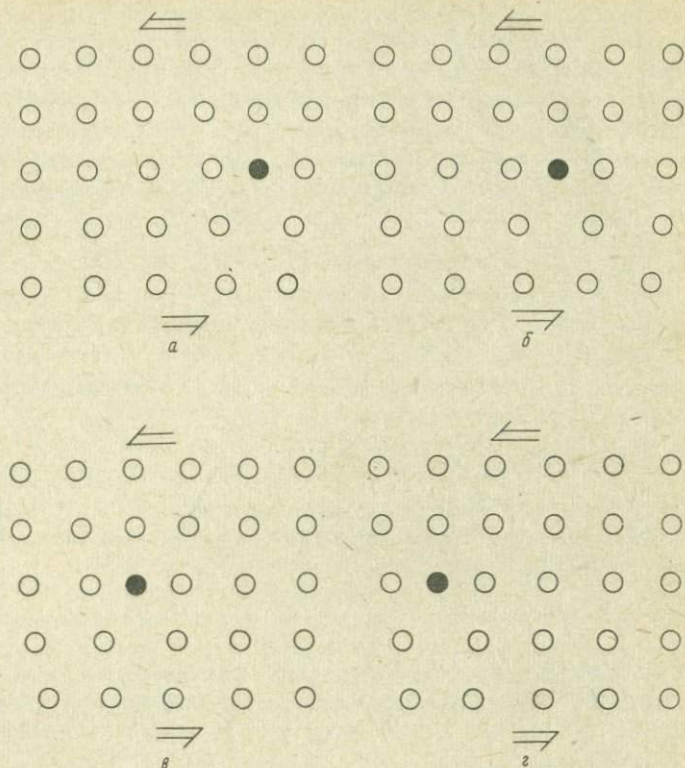


РИС. 7.12. Процесс скольжения дислокаций: в случае краевой дислокации этот процесс сводится к перемещению дислокации в промежуток между соседней парой атомных плоскостей под действием приложенного сдвигового напряжения.

кристалла, происходящую по механизму переползания дислокаций, можно рассчитывать на основе теории диффузионной ползучести.

Скольжение краевой дислокации показано на рис. 7.12. Этот процесс представляет собой перемещение краевой дислокации в промежуток между соседней парой атомных плоскостей под действием приложенного к кристаллу сдвигового напряжения. Когда дислокация, перемещаясь с одной атомной плоскости на другую, пройдет через всю решетку, это будет означать, что произошла некоторая сдвиговая деформация кристалла. Скольжение дислокаций — термически активируемый процесс, возникающий в результате воздействия на дислокацию сдвигового напряжения. Поскольку для этого не требуется диффузии атомов через решетку, скольжение дислокаций является более быстрым процессом, чем переползание дислокаций.

Для количественного описания дислокационной ползучести предложено много различных формул. Поскольку все типы дислокационной ползучести являются термически активируемыми процессами, реология, определяемая такой пол-

зучестью, зависит экспоненциально от давления и обратной абсолютной температуры. Различные формулы дают различную степенную связь между скоростью деформации и напряжением; однако всякая такая связь соответствует ньютоновской реологии. В качестве примера рассмотрим один из подходов, в котором предполагается, что дислокации играют роль источников и стоков вакансий, подобную роли границ зерен в процессе диффузионной ползучести. В этом случае для связи скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{xx}$ и $\dot{\epsilon}_{yy}$ с напряжением σ можно воспользоваться формулой (7.95), в которой размер зерна h нужно заменить на среднее расстояние h_d между дислокациями. Мы получим

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{12V_a D}{RT h_d^2} \sigma. \quad (7.111)$$

Среднее расстояние между дислокациями можно выразить через объемную концентрацию дислокаций n_d как

$$h_d = n_d^{-1/2}. \quad (7.112)$$

Концентрация дислокаций (и, следовательно, величина h_d) зависит от напряжения и многих других факторов. Оказывается, что для широкого диапазона условий справедливо соотношение

$$h_d = b^* G / \sigma, \quad (7.113)$$

где b^* — величина вектора Бюргера для дислокаций, а G — модуль сдвига. Подставляя (7.113) в (7.111), мы приходим к следующему соотношению между скоростью деформации и напряжением в случае дислокационной ползучести:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{12V_a D}{RT b^{*2} G^2} \sigma^3. \quad (7.114)$$

Хотя дислокационная ползучесть приводит к неньютоновскому реологическому закону, мы можем определить коэффициент эффективной вязкости μ_{eff} опять как отношение напряжения к удвоенной скорости деформации:

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\sigma}{2\dot{\epsilon}_{xx}} = \frac{RT b^{*2} G^2}{24V_a D} \frac{1}{\sigma^2}. \quad (7.115)$$

Подставляя сюда выражение (7.77) для коэффициента диффузии, мы можем переписать μ_{eff} в виде

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{RT b^{*2} G^2}{24V_a D_0} \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{E_a + pV_a}{RT}\right). \quad (7.116)$$

Коэффициент эффективной вязкости для дислокационной ползучести обратно пропорционален квадрату напряжения и прямо пропорционален экспоненциаль-

ной функции давления, деленного на абсолютную температуру. Зависимость μ_{eff} от напряжения приводит к тому, что породы легче деформируются в тех областях, где концентрируются напряжения.

7.5. Сдвиговые течения жидкостей, реологические свойства которых зависят от температуры и напряжения

В предыдущих разделах мы видели, что как для диффузионной, так и для дислокационной ползучести коэффициент вязкости пропорционален экспоненциальной функции от обратной абсолютной температуры. Поэтому коэффициент вязкости мантии характеризуется сильной (экспоненциальной) зависимостью от температуры независимо от того, какой механизм ползучести определяет субсолидусную деформацию мантии. Кроме того, если преобладает дислокационная ползучесть (а именно к такому выводу мы придем в следующем разделе), то коэффициент эффективной вязкости в мантии будет зависеть и от напряжения. Поэтому необходимо учесть влияние сильной температурной зависимости (и возможной зависимости от напряжения) коэффициента вязкости на конвекцию и сдвиговые течения в мантии. Прежде чем это делать, полезно предварительно рассмотреть, каким образом зависимость реологии от температуры и напряжения влияет на некоторые простые течения, которые мы рассчитали в гл. 6. Обратимся сначала к плоскопараллельному течению жидкости с коэффициентом вязкости, зависящим от напряжения, а затем перейдем к более важным эффектам сильной зависимости коэффициента вязкости от температуры.

Реологический закон (7.114) является частным случаем неньютоновского закона деформации, известного как степенной закон ползучести; согласно этому закону, скорость деформации пропорциональна n -й степени напряжения. То, каким образом такая неньютоновская реология влияет на движение жидкости, можно понять на простом примере плоскопараллельного течения жидкости, подчиняющейся степенному реологическому закону. Рассмотрим канал толщиной h с неподвижными стенками, расположенными при $y = \pm h/2$. Допустим, что течение вызывается разностью давлений $p_1 - p_0$, действующей на длине L канала. Сдвиговое напряжение τ в жидкости удовлетворяет уравнению (6.6):

$$\frac{d\tau}{dy} = - \frac{p_1 - p_0}{L}. \quad (7.117)$$

В жидкости, подчиняющейся степенному реологическому закону, связь между сдвиговым напряжением и градиентом скорости (или скоростью деформации) имеет вид

$$\frac{du}{dy} = C_1 \tau^n, \quad (7.118)$$

где $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, а C_1 — положительная постоянная. Поскольку градиент du/dy скорости в потоке может быть как положительным, так и отрицательным,

n не может принимать четных значений. Разрешая равенство (7.118) относительно τ и подставляя его в уравнение (7.117), находим

$$\frac{1}{C_1^{1/n}} \frac{d}{dy} \left\{ \left(\frac{du}{dy} \right)^{1/n} \right\} = - \frac{P_1 - P_0}{L}, \quad (7.119)$$

или после однократного интегрирования при условии симметрии $du/dy = 0$ при $y = 0$ получаем

$$\frac{du}{dy} = -C_1 \left(\frac{P_1 - P_0}{L} \right)^n y^n. \quad (7.120)$$

Интегрируя еще раз с граничными условиями $u = 0$ при $y = \pm h/2$, получаем

$$u = \frac{C_1}{n+1} \left(\frac{P_1 - P_0}{L} \right)^n \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^{n+1} - y^{n+1} \right\}, \quad (7.121)$$

Средняя скорость в канале есть

$$\bar{u} = \frac{2}{h} \int_0^{h/2} u dy = \frac{C_1}{n+2} \left(\frac{P_1 - P_0}{L} \right)^n \left(\frac{h}{2} \right)^{n+1}, \quad (7.122)$$

а отношение скорости к среднему значению равно

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{n+2}{n+1} \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^{n+1} \right\}. \quad (7.123)$$

Безразмерные профили скорости (7.123) приведены при $n = 1$ (ньютоновский профиль), 3 и 5 на рис. 7.13. Видно, что с увеличением n градиенты скорости у стенок (где сдвиговое напряжение максимально) увеличиваются. Там, где напряжения малы, течение имеет практически жесткое ядро. Коэффициент эффективной вязкости для жидкости со степенным реологическим законом пропорционален τ^{1-n} . При больших n коэффициент вязкости велик там, где τ мало, и наоборот. В центре канала τ мало, и жидкость здесь очень вязка. У стенок τ велико, μ_{eff} мало и градиенты скорости значительны. Следовательно, тупой профиль скорости при больших n возникает вследствие зависимости коэффициента эффективной вязкости от напряжения.

ЗАДАЧА 7.10. Покажите, что коэффициент эффективной вязкости μ_{eff} в рассмотренном плоскопараллельном течении жидкости со степенной реологией равен

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\tau}{du/dy} = \frac{P_1 - P_0}{L} \frac{h^2}{4(n+2)\bar{u}} \left(\frac{2y}{h} \right)^{1-n} \quad (7.124)$$

или

$$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu_{\text{eff, wall}}} = \left(\frac{2y}{h} \right)^{1-n}, \quad (7.125)$$

где $\mu_{\text{eff, wall}}$ — значение μ_{eff} при $y = \pm h/2$. Начертите графики функции $\mu_{\text{eff}}/\mu_{\text{eff, wall}}$ от y/h при $n = 1, 3$ и 5 .

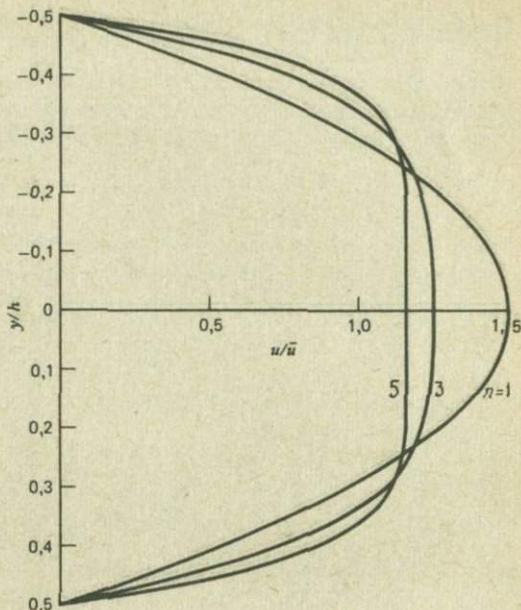


РИС. 7.13. Профили скорости течения в канале для жидкости, подчиняющейся степенному реологическому закону с $n = 1$ (ньютоновская жидкость), 3 и 5.

Посмотрим теперь, какое влияние на течение Куэтта (см. разд. 6.2) оказывает экспоненциальная зависимость коэффициента вязкости от обратной абсолютной температуры. Решение этой задачи может служить моделью сдвигового течения в астеносфере. Напомним, что течение Куэтта есть течение жидкости в бесконечно длинном канале с неподвижной нижней границей $y = h$ и движущейся со скоростью u_1 верхней границей $y = 0$. Градиент давления вдоль канала отсутствует. Предположим, что верхняя и нижняя стенки канала поддерживаются соответственно при температурах T_0 и T_1 ($T_1 > T_0$). Благодаря нагреву, происходящему из-за вязкой диссипации в сдвиговом потоке, распределения температуры $T(y)$ и скорости $u(y)$ оказываются связанными друг с другом через зависимость коэффициента вязкости от температуры. Поэтому оба распределения — $T(y)$ и $u(y)$ — должны определяться одновременно. Скорость u зависит от температуры T благодаря зависимости μ от T , а T зависит от u потому, что фрикционный нагрев зависит от градиента скорости. Для простоты рассмотрим сначала случай, когда диссипативный нагрев пренебрежимо мал. При этом температура жидкости будет распределена линейно по сечению канала:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{y}{h} \quad (7.126)$$

независимо от вида функции $u(y)$.

Пусть коэффициент вязкости определяется выражением (7.97), а канал достаточно тонок, так что влияние давления на скорость незначительно. Кроме того, будем пренебрегать температурной зависимостью предэкспоненциального множителя по сравнению с экспоненциальной зависимостью от температуры и запишем коэффициент вязкости в виде

$$\mu = C e^{E_a/RT}, \quad (7.127)$$

где C — постоянная. Сдвиговое напряжение τ в отсутствие горизонтального градиента давления будет величиной постоянной; оно выражается как

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = C e^{E_a/RT} \frac{du}{dy}. \quad (7.128)$$

Подставляя сюда выражение (7.126) для T и делая некоторые преобразования, мы приходим к соотношению

$$\frac{du}{dy} = \frac{\tau}{C} \exp \left\{ - \frac{E_a/R}{T_0 + (T_1 - T_0) y/h} \right\}, \quad (7.129)$$

интегрирование которого позволяет найти распределение скорости $u(y)$.

Уравнение (7.129) можно проинтегрировать аналитически, если считать, что разность температур $T_1 - T_0$ мала по сравнению с температурой T_0 . В этом случае аргумент показательной функции в равенстве (7.129) можно приближенно записать как

$$\frac{E_a/RT_0}{1 + \frac{T_1 - T_0}{T_0} \frac{y}{h}} \approx - \frac{E_a}{RT_0} \left\{ 1 - \frac{T_1 - T_0}{T_0} \frac{y}{h} \right\}. \quad (7.130)$$

и преобразовать уравнение (7.129) следующим образом:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\tau}{C} \exp \left\{ - \frac{E_a}{RT_0} \right\} \exp \left\{ \frac{E_a(T_1 - T_0)}{RT_0^2} \frac{y}{h} \right\}. \quad (7.131)$$

Интегрируя полученное уравнение с граничным условием $u = 0$ при $y = h$, находим

$$u = \frac{\tau h R T_0^2}{C E_a (T_1 - T_0)} \exp \left\{ \frac{-2 E_a T_0 + E_a T_1}{R T_0^2} \right\} \times \\ \times \left[\exp \left\{ \frac{E_a (T_1 - T_0)}{R T_0^2} \left(\frac{y}{h} - 1 \right) \right\} - 1 \right]. \quad (7.132)$$

Потребовав равенства $u = u_1$ при $y = 0$, мы можем упростить выражение для скорости следующим образом:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{\exp \left\{ -\frac{E_a (T_1 - T_0)}{RT_0^2} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \right\} - 1}{\exp \left\{ -\frac{E_a (T_1 - T_0)}{RT_0^2} \right\} - 1}. \quad (7.133)$$

Связь между сдвиговым напряжением и скоростью движения верхней границы имеет вид

$$u_1 = \frac{\tau h RT_0^2}{CE_a (T_1 - T_0)} \exp \left(-\frac{E_a}{RT_0} \right) \times \\ \times \left\{ 1 - \exp \left[\frac{E_a (T_1 - T_0)}{RT_0^2} \right] \right\}. \quad (7.134)$$

Профили скорости u/u_1 в зависимости от y/h показаны при $(T_1 - T_0)/T_0 = 0,5$ и $E_a/RT_0 = 0, 10, 20$ и 30 на рис. 7.14. Ниже мы увидим, что для верхней мантии характерны большие значения E_a/RT_0 ; под T_0 можно понимать температуру подошвы жесткой литосферы, а под T_1 — температуру в основании астеносферы. Характерные для верхней мантии значения $T_0 = 1073^\circ\text{C}$ и $T_1 = 1573^\circ\text{C}$ дают $(T_1 - T_0)/T_0 = 500/1073 \approx 0,5$. Если коэффициент вязкости жидкости не зависит от температуры ($E_a/RT_0 = 0$), то профиль скорости описывается линейной функцией. С увеличением зависимости коэффициента вязкости от температуры (т.е. с увеличением E_a/RT_0) сдвиговое течение вытесняется во все более узкую зону вблизи нижней границы, где жидкость наиболее горячая, а коэффициент вязкости минимален. При больших значениях E_a/RT_0 , типичных для мантии, большая часть жидкости в канале движется со скоростью, равной скорости верхней границы, а уменьшение скорости до нуля происходит в относительно горячем маловязком слое, примыкающем к нижней границе. В верхней части канала жидкость представляет собой как бы жесткое продолжение вышележащей литосферы, т.е. на самом деле и является частью литосферы, тогда как в нижней части канала располагается характеризующаяся большим поперечным градиентом скорости маловязкая астеносфера.

Распределение коэффициента вязкости в канале можно определить из равенств (7.126) и (7.127). Относя коэффициент вязкости μ к его значению μ_0 на верхней границе,

$$\mu_0 = C \exp(E_a/RT_0) \quad (7.135)$$

и исключая тем самым постоянную C ,

$$C = \mu_0 \exp(-E_a/RT_0), \quad (7.136)$$

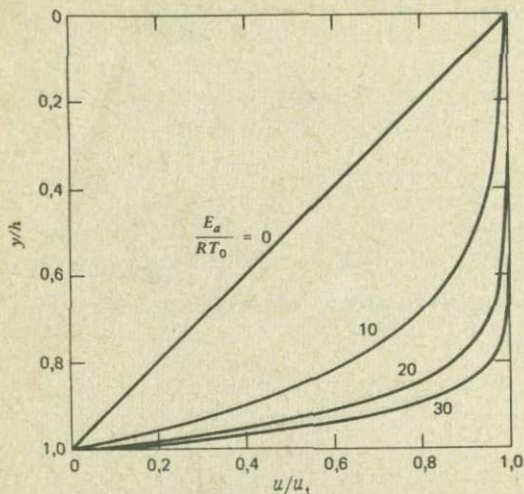


РИС. 7.14. Профили скорости для течения Куэтта в канале с линейным распределением температуры. Коэффициент вязкости жидкости пропорционален экспоненциальной функции обратной абсолютной температуры. Безразмерная разность температур $(T_1 - T_0)/T_0$ между стенками канала равна 0,5. Около кривых указаны значения безразмерной энергии активации E_a/RT_0 . Верхняя стенка ($y = 0$) холодная ($T = T_0$), а нижняя ($y = h$) горячая ($T = T_1$).

из равенства (7.127) находим

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 \exp \left\{ \frac{E_a}{RT_0} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) \right\} = \\ &= \mu_0 \exp \left\{ \frac{E_a}{RT_0} \left[\left(1 + \frac{T_1 - T_0}{T_0} \frac{y}{h} \right)^{-1} - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.137)$$

Профили безразмерного коэффициента вязкости μ/μ_0 в зависимости от y/h показаны при $(T_1 - T_0)/T_0 = 0,5$ и $E_a/RT_0 = 10, 20$ и 30 на рис. 7.15. На рисунке видно значительное уменьшение коэффициента вязкости, происходящее в горячей нижней части канала при больших значениях E_a/RT_0 .

ЗАДАЧА 7.11. Определите величину сдвигового напряжения в канале. Положите $E_a/RT_0 = 20$, $(T_1 - T_0)/T_0 = 0,5$, $u_1 = 50$ мм/год, $h = 100$ км и $\mu_0 = 10^{24}$ Па·с.

ЗАДАЧА 7.12. Рассмотрим ледяной покров толщиной h , лежащий на коренной подстилающей породе, поверхность которой наклонена под углом α к горизонту (рис. 7.16). Под действием собственного веса лед будет медленно ползти вниз по склону. Определите профиль скорости $u(y)$ в толще льда. Считайте, что коэффициент вязкости льда зависит от температуры по закону (7.127), а температура меняется линейно от значения T_0 на поверхности $y = 0$ до T_1 на границе $y = h$ льда и подстилающей породы. Допустим, что плавления в основании ледяного покрова не происходит, так что выполняется условие прилипания $u = 0$ при $y = h$. Воспользуйтесь приближением (7.130).

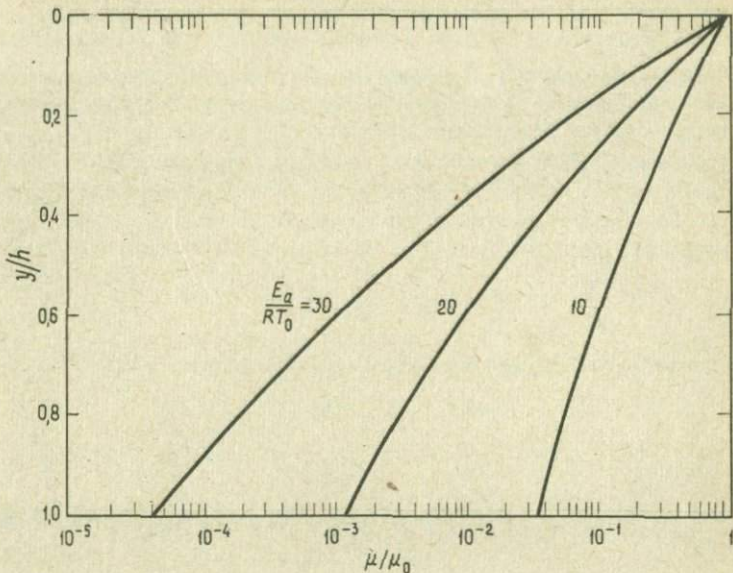


РИС. 7.15. Профили коэффициента вязкости для куэттовского течения жидкости с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры.

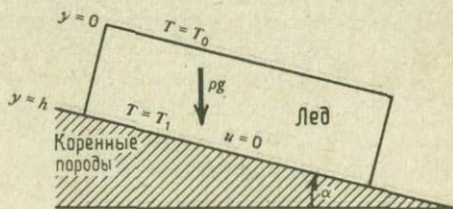


РИС. 7.16. Ледник толщиной h лежит на коренных породах, поверхность которых наклонена к горизонту под углом α . Под действием собственного веса лед ползет вниз по склону.

Сдвиговое течение жидкости, характеризуемой сильной зависимостью коэффициента вязкости от температуры, может коренным образом измениться при наличии фрикционного нагрева. В этом можно убедиться на примере простой модели течения в канале. Рассмотрим опять течение, вызываемое сдвиговым напряжением τ , которое приложено к верхней перемешивающейся границе $y = 0$ потока с неподвижной нижней границей $y = h$. Как и выше, при отсутствии градиента давления вдоль канала величина τ будет постоянной, т.е.

независимой от γ . Будем считать, что нижняя граница канала теплонепроницаема и все тепло, приобретаемое жидкостью, генерируется внутри нее исключительно за счет вязкой диссипации. Это тепло выделяется в жидкости благодаря внутреннему трению и уходит через верхнюю границу канала; температура последней поддерживается равной T_0 . Температура T удовлетворяет уравнению (6.379) для температуры среды с диссипативным тепловыделением также и в том случае, когда коэффициент вязкости зависит от температуры. Таким образом, температура в канале может быть найдена как решение уравнения

$$k \frac{d^2 T}{d\gamma^2} + \frac{\tau^2}{\mu} = 0, \quad (7.138)$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$T = T_0 \quad \text{при} \quad \gamma = 0, \quad (7.139)$$

$$\frac{dT}{d\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = h. \quad (7.140)$$

Для μ , определяемого равенством (7.127), уравнение (7.138) переписывается как

$$\frac{d^2 T}{d\gamma^2} + \frac{\tau^2}{kC} \exp(-E_a/RT) = 0. \quad (7.141)$$

Задача (7.139) – (7.141) представляет собой нелинейную граничную задачу. Нелинейность обусловливается экспоненциальной зависимостью члена, описывающего фрикционный нагрев, от температуры. Задача допускает аналитическое решение только в том случае, если фрикционный нагрев вызывает малое увеличение температуры. Полагая

$$T = T_0 + T', \quad (7.142)$$

где $T' \ll T_0$, и записывая $1/T$ приближенно как

$$T^{-1} = (T_0 + T')^{-1} = T_0^{-1} \left(1 + \frac{T'}{T_0}\right)^{-1} \approx T_0^{-1} \left(1 - \frac{T'}{T_0}\right), \quad (7.143)$$

мы можем переписать уравнение (7.141) в виде

$$\frac{d^2 T'}{d\gamma^2} + \frac{\tau^2}{kC} \exp(-E_a/RT_0) \exp(-E_a T'/RT_0^2) = 0. \quad (7.144)$$

Хотя увеличение температуры, вызываемое фрикционным нагревом, по предположению мало ($T'/T_0 \ll 1$), соответствующее уменьшение коэффициента вязкости, задаваемое множителем $\exp(-E_a T'/RT_0^2)$, может быть весьма большим, поскольку $(E_a/RT_0)(T'/T_0)$ может быть велико. Это имеет место, например, в случае, когда $T'/T_0 = 0,5$, а $E_a/RT_0 = 30$. Граничные условия для величины T' дают

$$T' = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = 0, \quad (7.145)$$

$$\frac{dT'}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad y = h. \quad (7.146)$$

Решение задачи удобнее искать в безразмерном виде. Введем безразмерные переменные

$$\theta = \frac{E_a T'}{RT_0^2}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}. \quad (7.147)$$

Уравнение для безразмерной температуры θ и соответствующие граничные условия принимают вид

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{y}^2} + \frac{\tau^2 h^2 E_a}{kCRT_0^2} \exp(-E_a/RT_0) e^\theta = 0, \quad (7.148)$$

$$\theta = 0 \quad \text{при} \quad \bar{y} = 0, \quad (7.149)$$

$$\frac{d\theta}{d\bar{y}} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{y} = 1. \quad (7.150)$$

Безразмерный коэффициент перед e^θ в уравнении (7.148), называется *числом Бринкмана* B_r :

$$B_r = \frac{\tau^2 h^2 E_a \exp(-E_a/RT_0)}{kCRT_0^2}. \quad (7.151)$$

Вводя это число в уравнение (7.148), получаем

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{y}^2} + B_r e^\theta = 0. \quad (7.152)$$

Отсюда видно, что распределение температуры в сдвиговом течении с frictionным нагревом полностью определяется единственным безразмерным параметром B_r .

Число Бринкмана имеет простой физический смысл. Количество тепла, генерируемого в потоке при температуре T_0 , в пересчете на единицу горизонтальной площади равно

$$\tau^2 h / [C \exp(E_a/RT_0)],$$

а тепловой поток, переносимый путем теплопроводности при разности температур между стенками канала, равной RT_0^2/E_a , есть

$$k(RT_0^2/E_a)/h,$$

где RT_0^2/E_a — увеличение температуры, достаточное для уменьшения коэффициента вязкости в e раз. Число Бринкмана, которое иногда называют также *числом Грунтфеста*, равно отношению этих двух тепловых потоков. Число Бринкмана B_r есть мера возможности потока освободиться от диссипативного тепла посредством теплопроводности.

Чтобы решить уравнение (7.152) относительно θ , сделаем замену переменной

$$\varphi = e^{\theta}. \quad (7.153)$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$\frac{d\varphi}{d\bar{\gamma}} = e^{\theta} \frac{d\theta}{d\bar{\gamma}} = \varphi \frac{d\theta}{d\bar{\gamma}}, \quad (7.154)$$

или

$$\frac{d\theta}{d\bar{\gamma}} = \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\bar{\gamma}}. \quad (7.155)$$

Теперь уравнение (7.152) переписывается в виде

$$\frac{d}{d\bar{\gamma}} \left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\bar{\gamma}} \right) = -\text{Br} \varphi \quad (7.156)$$

или, после некоторых преобразований,

$$\left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\bar{\gamma}} \right) \frac{d}{d\bar{\gamma}} \left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\bar{\gamma}} \right) = -\text{Br} \frac{d\varphi}{d\bar{\gamma}}. \quad (7.157)$$

Интегрируя по $\bar{\gamma}$, получаем

$$\left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\bar{\gamma}} \right)^2 = -2\text{Br} \varphi + c_1, \quad (7.158)$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Поскольку, согласно условию (7.150), при $\bar{\gamma} = 1$ $d\theta/d\bar{\gamma} = 0$, то

$$c_1 = 2\text{Br} \varphi(1), \quad (7.159)$$

где $\varphi(1)$ есть значение функции φ при $\bar{\gamma} = 1$. Уравнение для φ имеет вид

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\bar{\gamma}} = \{ 2\text{Br} [\varphi(1) - \varphi] \}^{1/2}. \quad (7.160)$$

Неотрицательность аргумента квадратного корня, т.е. справедливость неравенства $\varphi(1) \geq \varphi$, следует из неравенства $\theta(1) \geq \theta$, справедливость которого вытекает из граничного условия для θ и уравнения (7.152). Согласно равенству (7.152), кривизна кривой $\theta(\bar{\gamma})$ всегда отрицательна. Таким образом, θ увеличивается от 0 при $\bar{\gamma} = 0$ до максимального значения $\theta(1)$ при $\bar{\gamma} = 1$, где $d\theta/d\bar{\gamma} = 0$.

Уравнение (7.160) можно проинтегрировать, если записать его в виде

$$d\bar{\gamma} = \frac{d\varphi}{\varphi \{ 2\text{Br} [\varphi(1) - \varphi] \}^{1/2}}. \quad (7.161)$$

Интегрируя, получаем

$$\bar{y} = \frac{1}{[2\text{Br} \varphi(1)]^{1/2}} \times \ln \left\{ c_2 \frac{\{2\text{Br} [\varphi(1) - \varphi]\}^{1/2} - \{2\text{Br} \varphi(1)\}^{1/2}}{\{2\text{Br} [\varphi(1) - \varphi]\}^{1/2} + \{2\text{Br} \varphi(1)\}^{1/2}} \right\}, \quad (7.162)$$

где c_2 — постоянная. Согласно граничному условию (7.149) и равенству (7.153), мы имеем $\varphi = 1$ при $\bar{y} = 0$. Отсюда следует, что аргумент логарифма при $\varphi = 1$ должен быть равен 1. Определяя из этого условия c_2 и подставляя его в (7.162), находим

$$\begin{aligned} \bar{y} &= [2\text{Br} \varphi(1)]^{-1/2} \times \\ &\times \ln \left\{ \frac{\{2\text{Br} [\varphi(1) - \varphi]\}^{1/2} - \{2\text{Br} \varphi(1)\}^{1/2}}{\{2\text{Br} [\varphi(1) - \varphi]\}^{1/2} + \{2\text{Br} \varphi(1)\}^{1/2}} \right\} \times \\ &\times \frac{\{2\text{Br} [\varphi(1) - 1]\}^{1/2} + \{2\text{Br} \varphi(1)\}^{1/2}}{\{2\text{Br} [\varphi(1) - 1]\}^{1/2} - \{2\text{Br} \varphi(1)\}^{1/2}} \}. \end{aligned} \quad (7.163)$$

Полагая в этом равенстве $\bar{y} = 1$ и $\varphi = \varphi(1)$, мы приходим к следующему уравнению относительно $\varphi(1)$:

$$\begin{aligned} [2\text{Br} \varphi(1)]^{1/2} &= \\ &= \ln \frac{\{2\text{Br} [\varphi(1) - 1]\}^{1/2} + \{2\text{Br} \varphi(1)\}^{1/2}}{\{2\text{Br} \varphi(1)\}^{1/2} - \{2\text{Br} [\varphi(1) - 1]\}^{1/2}}. \end{aligned} \quad (7.164)$$

Его можно преобразовать к виду

$$\varphi(1) = \left\{ 1 - \left[\frac{\exp(\sqrt{2\text{Br} \varphi(1)} - 1)}{\exp(\sqrt{2\text{Br} \varphi(1)} + 1)} \right]^2 \right\}^{-1} \quad (7.165)$$

или

$$\{\varphi(1)\}^{1/2} = \text{ch} \left\{ \frac{\text{Br} \varphi(1)}{2} \right\}^{1/2}. \quad (7.166)$$

Уравнение (7.166) есть трансцендентное уравнение для $\varphi(1)$, в которое как параметр входит число Бринкмана Br . Максимальное увеличение температуры в канале $\theta(1)$ равно просто $\ln \varphi(1)$. Самым простым способом вычисления $\varphi(1)$ будет следующий. Перепишем уравнение (7.166) в виде

$$\text{Br} = \frac{2[\text{Br} \varphi(1)/2]}{\{\text{ch} [\text{Br} \varphi(1)/2]\}^2}. \quad (7.167)$$

Задаваясь значениями параметра $[\text{Br} \varphi(1)/2]^{1/2}$, вычислим по (7.167) число Br , а по этому числу и значению $[\text{Br} \varphi(1)/2]^{1/2}$ определим величины $\varphi(1)$ и $\theta(1)$. График вычисленной таким образом зависимости $\theta(1)$ от Br показан на рис. 7.17.

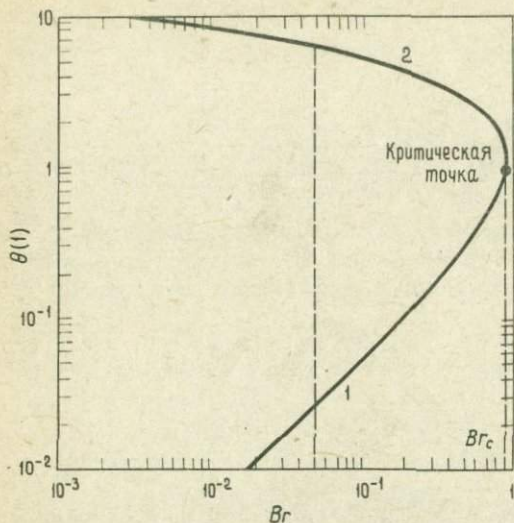


РИС. 7.17. Максимальная по сечению потока температура $\theta(1)$ жидкости в течении Куэтта с учетом вязкой диссипации и зависимости коэффициента вязкости от температуры в функции числа Бринкмана Br . Нижняя граница потока адиабатична. Каждому значению Br в промежутке между 0 и 0,88 соответствуют два решения: одно — лежащее на подкритической ветви 1 и второе — на надкритической ветви 2.

При $Br = 0$ течение в канале отсутствует и $\theta(1) = 0$. С увеличением Br от нуля, например, за счет увеличения сдвигового напряжения, приложенного к верхней границе канала, $\theta(1)$ увеличивается. Исходя из равенства (7.166), с помощью разложений функций ch и ln в ряд Тейлора можно показать, что $\theta(1)$ возрастает как

$$\theta(1) \approx \frac{1}{2} Br \quad (7.168)$$

при $Br \ll 1$. С увеличением Br или приложенного сдвигового напряжения жидкость вблизи верхней стенки канала начинает двигаться быстрее, в результате чего градиент скорости и фрикционный нагрев возрастают. Однако при все большем увеличении скорости верхней границы наступает такой момент, что дальнейшего увеличения приложенного сдвигового напряжения не требуется. Напротив, большие скорости и температуры можно будет получить, если начать уменьшать приложенное напряжение или Br . Таким образом, в канале возможны два различных типа сдвигового течения. При так называемом подкритическом течении $\theta(1)$ увеличивается с ростом Br . При надкритическом течении $\theta(1)$ увеличивается с уменьшением Br . Критическая точка, в которой Br достигает максимального значения Br_c , отделяет состояния, принадлежащие подкритической ветви зависимости $\theta(1)$ от Br , от решений надкритической ветви.

Из рис. 7.17 видно, что при данном Bg , заключенном между нулем и $Bg_c = 0,88$, имеются два решения, описывающие куэттовское течение жидкости с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры; одно из них лежит на подкритической, а второе — на надкритической ветви. При одном и том же приложенном сдвиговом напряжении возможны два течения, одно из которых происходит со значительно большими температурой и скоростью, чем другое. Однако если задана скорость движения верхней границы или температура на нижней границе, то решение определяется однозначно. Из рис. 7.17, кроме того, видно, что при $Bg > Bg_c$, т.е. при достаточно больших приложенных напряжениях, стационарного течения в канале не может быть. Более строгий анализ показывает, что в действительности при высоких температурах имеется вторая критическая точка, после которой начинается третья ветвь, характеризующаяся возрастанием $\theta(1)$ с увеличением Bg . Поэтому течение возможно при любом значении Bg . Следует, однако, отметить, что температуры, соответствующие третьей (так называемой горячей) ветви, настолько высоки, что соответствующие решения физически неосуществимы, поскольку материал в канале расплавился бы задолго до того, как температура достигла значений, соответствующих горячей ветви. Поэтому если к верхней границе приложить слишком большое напряжение, при котором $Bg > Bg_c$, то это приведет к неустойчивости, называемой *перегревной неустойчивостью*. При $Bg > Bg_c$ фрикционный нагрев вызывает столь значительное повышение температуры, что начинается плавление. Высказывались предположения, что перегревающая неустойчивость могла бы в определенных ситуациях иметь место в мантии, например в астеносфере или в зоне скольжения на верхней границе опускающегося литосферного блока. Однако такие предположения в настоящее время, видимо, следует считать слишком умозрительными.

Можно дать следующее объяснение существованию подкритического и надкритического решений задачи о сдвиговом течении при наличии вязкой диссипации и зависимости коэффициента вязкости от температуры. На подкритической ветви фрикционный нагрев относительно мал и увеличение температуры незначительно. Поэтому на возрастание приложенного напряжения подкритический поток реагирует так, как будто коэффициент вязкости есть величина постоянная, — и градиент скорости du/dy , и интенсивность диссипативного тепловыделения увеличиваются. С увеличением нагрева температура жидкости повышается, а ее вязкость падает. Это приводит к некоторому уменьшению нарастания сдвигового напряжения $\tau = \mu du/dy$, но уменьшение коэффициента вязкости невелико, и рост градиента скорости du/dy преобладает. На надкритической ветви температура значительно увеличивается вследствие фрикционного нагрева. При этом с увеличением сдвигового напряжения и вязкая диссипация, и температура уменьшаются, так как главным фактором становится изменение коэффициента вязкости с температурой, и для того, чтобы τ увеличивалось, μ должно уменьшаться. Это возможно только при уменьшении температуры.

ЗАДАЧА 7.13. Вычислите напряжение, соответствующее значению числа Бринкмана в критической точке (рис. 7.17). Положите $E_p/RT_0 = 20$, $R = 100$ км, $\eta_0 = 10^{24}$ Па·с, $T_0 = 1073$ К и $k = 4$ Вт·м⁻¹·К⁻¹. Какова температура нижней границы при этом значении напряжения?

ЗАДАЧА 7.14. Найдите тепловой поток через движущуюся изотермическую верхнюю границу канала при условии, что нижняя граница неподвижна и теплоизолирована. Постройте график теплового потока в зависимости от числа Бринкмана. Тепловой поток через верхнюю границу целиком определяется теплом, генерируемым в канале за счет фрикционного нагрева. Происхождение этого тепла связано с работой, затрачиваемой на перемещение верхней границы. Основываясь на этом соображении, выведите формулу для скорости верхней границы. Постройте график скорости верхней границы в функции числа Бринкмана. Выведите выражения для теплового потока через верхнюю границу, скорости движения верхней границы и температуры нижней границы в критической точке. Определите численные значения этих величин для параметров из предыдущей задачи.

7.6. Реология мантии

В разд. 7.3 и 7.4 мы рассмотрели два главных механизма субсолидусной деформации пород — диффузионную и дислокационную ползучести. Мы не знаем, какой из этих механизмов управляет течениями в мантии, но увидим, что на этот счет можно строить некоторые более или менее обоснованные предположения. Если преобладает диффузионная ползучесть, то мантия ведет себя как ньютоновская жидкость; если же дислокационная, то поведение ее соответствует жидкости со степенной реологией при $n = 3$. Хотя понимать реологию мантии весьма важно, для построения качественно верной картины течения в мантии нет особой необходимости различать реологические уравнения с $n = 1$ и $n = 3$. Если бы коэффициент вязкости определялся как коэффициент эффективной вязкости для дислокационной ползучести, то течения в мантии лишь количественно отличались бы от течения ньютоновской жидкости. Оказывается, однако, что с точки зрения влияния на мантийные течения намного более существенной является одинаковая для обоих видов ползучести зависимость коэффициента вязкости от температуры и давления, а не та или иная возможная зависимость от напряжения.

Информацию о реологии мантии мы получаем, исследуя данные о послеледниковых поднятиях. Как было показано в разд. 6.10, эти данные находятся в соответствии с предположением о том, что вещество мантии является ньютоновской жидкостью; тогда коэффициент вязкости имеет порядок 10^{21} Па·с. Однако, хотя это и приводит к большим математическим трудностям, данные о послеледниковых поднятиях можно интерпретировать и на основе неньютоновской степенной реологии. При этом надлежит определить коэффициент эффективной вязкости (7.116), зависящий от напряжения. Следует учесть, что течение в мантии, связанное с послеледниковым поднятием, происходит на фоне циркуляции, связанной с мантийной конвекцией. Наложение полей скорости деформации и напряжения для линейного и кубического реоло-

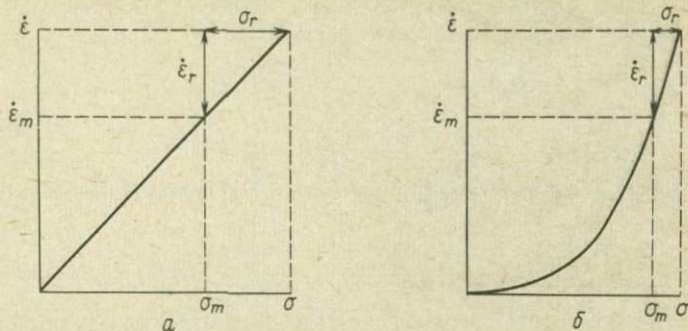


РИС. 7.18. Наложение скоростей деформации $\dot{\epsilon}_r$ и $\dot{\epsilon}_m$ и напряжений σ_r и σ_m , связанных соответственно с послеледниковыми поднятиями (индекс r) и конвекцией в мантии (индекс m), для линейного (а) и кубического (б) реологических законов.

гических законов показано на рис. 7.18. Скорость деформации и напряжение, соответствующие мантийной конвекции, обозначены как $\dot{\epsilon}_m$ и σ_m , а эти же величины, соответствующие послеледниковому восстановлению, — как $\dot{\epsilon}_r$ и σ_r . Полные скорость деформации $\dot{\epsilon}$ и напряжение σ равны

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_m, \quad (7.169)$$

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_m. \quad (7.170)$$

Для линейного реологического закона

$$\sigma = \mu \dot{\epsilon}, \quad (7.171)$$

так что

$$\sigma_r + \sigma_m = \mu (\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_m). \quad (7.172)$$

Но скорость деформации и напряжение, соответствующие конвекции в мантии, связаны также соотношением

$$\sigma_m = \mu \dot{\epsilon}_m. \quad (7.173)$$

Вычитая (7.173) из (7.172), находим

$$\sigma_r = \mu \dot{\epsilon}_r, \quad (7.174)$$

или

$$\mu = \sigma_r / \dot{\epsilon}_r. \quad (7.175)$$

Таким образом, в случае ньютоновской реологии коэффициент вязкости, получаемый как отношение напряжения и скорости деформации, соответствующих послеледниковому восстановлению, является истинным коэффициентом вязкости мантии.

Для степенного реологического закона с $n = 3$ полная скорость деформации и напряжение связаны равенством

$$\dot{\epsilon} = C \sigma^3, \quad (7.176)$$

или

$$\epsilon_m + \dot{\epsilon}_r = C(\sigma_m + \sigma_r)^3 = C\sigma_m^3 (1 + \sigma_r/\sigma_m)^3. \quad (7.177)$$

При $\sigma_r \ll \sigma_m$ правую часть равенства (7.177) можно приближенно записать как

$$\dot{\epsilon}_m + \dot{\epsilon}_r = C\sigma_m^3 (1 + 3\sigma_r/\sigma_m) = C\sigma_m^3 + 3C\sigma_m^2 \sigma_r. \quad (7.178)$$

Скорость деформации и напряжение, соответствующие мантийной конвекции, сами удовлетворяют реологическому закону (7.176):

$$\dot{\epsilon}_m = C\sigma_m^3. \quad (7.179)$$

Вычитая (7.179) из (7.178), находим

$$\dot{\epsilon}_r = (3C\sigma_m^2)\sigma_r. \quad (7.180)$$

Коэффициент эффективной вязкости $\mu_{\text{eff}, m}$ для конвекции в мантии равен

$$\mu_{\text{eff}, m} = \sigma_m / \dot{\epsilon}_m = 1/C\sigma_m^2, \quad (7.181)$$

а для послеледникового поднятия

$$\mu_{\text{eff}, r} = \sigma_r / \dot{\epsilon}_r = 1/3C\sigma_m^2 = \mu_{\text{eff}, m}/3. \quad (7.182)$$

Отсюда видно, что в неньютоновском случае отношение напряжения и скорости деформации, соответствующих послеледниковому поднятию, определяет коэффициент эффективной вязкости, равный $1/3$ коэффициента эффективной вязкости для конвекции в мантии.

Типичная скорость деформации для конвекции в мантии получится, если разделить скорость 50 мм/год на глубину 700 км; в результате получается $\dot{\epsilon}_m = 2,3 \cdot 10^{-15} \text{ с}^{-1}$. Умножая эту величину на ньютонский коэффициент вязкости $10^{21} \text{ Па} \cdot \text{с}$, получаемый на основе анализа данных о послеледниковых поднятиях, мы находим, что напряжение, обусловленное конвекцией в мантии, равно 2,3 МПа. Если реология мантии неньютонова и $\mu_{\text{eff}, r} = 10^{21} \text{ Па} \cdot \text{с}$, то коэффициент эффективной вязкости для конвекции будет превышать $\mu_{\text{eff}, r}$ в три раза, и напряжение, обусловленное конвективным течением, окажется равным 6,9 МПа. Учитывая, что вывод коэффициента вязкости и уровня напряжений в мантии связан с рядом неопределенностей, множитель 3, характеризующий неопределенность реологии, следует признать не слишком существенным. Поэтому, хотя данные о послеледниковых поднятиях дают важные сведения о реологии мантии, весьма сомнительно, чтобы на их основе можно было сделать выбор в пользу линейного или кубического реологического уравнения.

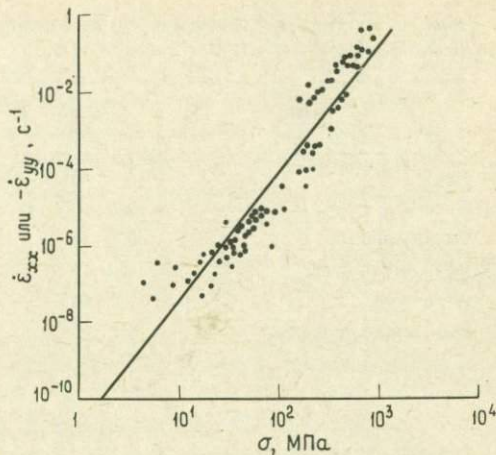


РИС. 7.19. Экспериментально наблюдаемая зависимость скорости деформации от напряжения для оливина при температуре 1400°C [42].

Другим важным источником информации о реологии мантии являются лабораторные исследования ползучести. Поскольку основным минералом мантии является оливин, исследования его высокотемпературной ползучести представляют особый интерес. На рис. 7.19 показана полученная в результате измерений зависимость скорости деформации $\dot{\epsilon}_{xx}$ или $-\dot{\epsilon}_{yy}$ сухого оливина от напряжения при температуре 1400°C. Сплошной прямой изображена зависимость

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} = C_1 \sigma^3 \exp(-E_a/RT) \quad (7.183)$$

при $C_1 = 4,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ и $E_a = 523 \text{ кДж/моль}$. Видно, что данные измерений хорошо описываются реологическим законом с $n = 3$. Оказывается, что и другие геологические материалы в лабораторных условиях деформируются при высоких температурах в соответствии с нелинейным законом ползучести. Параметры реологического уравнения

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} = C_1 \sigma^n \exp(-E_a/RT) \quad (7.184)$$

для льда, галита и еще нескольких пород, слагающих земную кору (таких, как кварцит в сухих и влажных условиях, известняк и мэрилендский диабаз), приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4. Значения реологических параметров для геологических материалов

Материал	C_1 , МПа ⁻ⁿ · с ⁻¹	n	E_a , кДж/моль
Лед	$8,8 \cdot 10^5$	3	60,7
Галит	$9,5 \cdot 10^{-1}$	5,5	98,3
Сухой кварцит	$6,7 \cdot 10^{-12}$	6,5	268
Влажный кварцит	$4,4 \cdot 10^{-2}$	2,6	230
Известняк	$4,0 \cdot 10^3$	2,1	210
Мэрилендский диабаз	$5,2 \cdot 10^2$	3	356

ЗАДАЧА 7.15. Найдите напряжения, необходимые для деформирования оливина и пород земной коры, перечисленных в табл. 7.4, с постоянной скоростью $\dot{\epsilon}_{xx} = 10^{-15} \text{ с}^{-1}$ при температурах от 700 до 1300°C. Рассмотрите ряд значений температуры и постройте график зависимости σ от T . Вычислите коэффициенты эффективной вязкости этих материалов и постройте график зависимости μ_{eff} от T . Считайте, что деформация с заданной очень малой скоростью (10^{-15} с^{-1}) подчиняется закону (7.184), в котором можно использовать значения параметров, определенные в лабораторных экспериментах.

Подставив в теоретическое соотношение (7.114) между скоростью деформации, обусловленной дислокационной ползучестью, и напряжением выражение для D из (7.77), мы получим равенство

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{12V_a D_0}{RTb^* G^2} \sigma^3 \exp\left(-\frac{E_a + pV_a}{RT}\right), \quad (7.185)$$

имеющее форму эмпирического соотношения (7.183) для сухого оливина. (Экспериментальные данные, приведенные на рис. 7.19, аппроксимировались выражением, в котором не учитывались малосущественная температурная зависимость предэкспоненциального множителя и влияние давления на ползучесть.) Как видим, экспериментальные данные согласуются с теоретической зависимостью для дислокационной ползучести. Это можно считать доказательством того, что при скоростях деформации, достигаемых в лаборатории, доминирующим механизмом деформации является дислокационная ползучесть. Однако следует подчеркнуть, что минимальная исследованная в лаборатории скорость деформации составляет приблизительно 10^{-8} с^{-1} , что на семь порядков величины превышает скорости деформации в мантии. Тем не менее теоретическая обоснованность соотношения (7.183) достаточно надежна для того, чтобы считать оправданной экстраполяцию до скоростей, характерных для мантии.

Хотя экстраполяция закона дислокационной ползучести, установленного на основе лабораторных измерений, к условиям мантии, по-видимому, обоснованна, остается вопрос о том, какой из механизмов ползучести — диффузионный или дислокационный — преобладает при характерных для мантии скоростях деформации. При коэффициенте вязкости (7.97) соотношение между скоростью деформации и напряжением для диффузионной ползучести имеет вид

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{12 V_a D_0}{RT h^2} \sigma \exp\left(-\frac{E_a + pV_a}{RT}\right), \quad (7.186)$$

где h — типичный размер зерна. Подставляя имеющиеся численные оценки параметров, входящих в это равенство, мы можем сравнить напряжения, необходимые для обеспечения скоростей деформации, характерных для мантии, в случаях диффузионной и дислокационной ползучести [для последней см. равенство (7.183)]. Предпочтительным механизмом, определяющим ползучесть, будет тот, который требует минимального напряжения для обеспечения данной скорости деформации. Иначе можно сказать, что при данном напряжении доминирующий механизм ползучести обеспечит большую скорость деформации.

Считается, что для диффузионной ползучести оливина процессом, определяющим скорость, является диффузия атомов кислорода. Посредством прямых измерений диффузии методом протонной активации и определения скорости с помощью отжига дислокаций найдены значения параметров $D_0 = 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}$ и $E_a = 523 \text{ кДж/моль}$. Заметим, что эта же энергия активации была измерена при лабораторных исследованиях ползучести сухого оливина и использована в законе дислокационной ползучести (7.183). В лабораторных исследованиях, выполненных в некотором интервале значений давления, также измерялся активационный объем для ползучести сухого оливина. Предположим, что измеренное значение $1,34 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ применимо и для диффузионной ползучести оливина. Величина среднего размера зерна в мантии крайне неопределенна. Основываясь на исследованиях образцов из кимберлитовых трубок, можно принять $h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Предэкспоненциальный множитель примем равным его значению при 1600°C и будем пренебрегать его изменениями с температурой. При давлениях, типичных для верхней мантии, член pV_a составляет только $\sim 10 - 20\%$ величины E_a . Поскольку эффект давления в верхней мантии непостоянен и мал, лучше сравнивать формулы (7.186) и (7.183), пренебрегая членом pV_a . Итак, теоретическая формула для диффузионной ползучести, которую мы будем сравнивать с формулой (7.183), имеет вид

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} = C_2 \sigma \exp(-E_a/RT), \quad (7.187)$$

где $C_2 = 3 \cdot 10^2 \text{ МПа}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ и $E_a = 523 \text{ кДж/моль}$.

Из сравнения равенств (7.183) и (7.187) становится ясно, что при достаточно низких напряжениях преобладает диффузионная ползучесть, а при достаточно высоких — дислокационная. Переходное напряжение σ_T , при котором оба механизма дают одинаковую скорость деформации, можно определить, приравняв два реологических уравнения. В результате получаем

$$\sigma_T = (C_2/C_1)^{1/2}, \quad (7.188)$$

откуда $\sigma_T = 2,7 \cdot 10^{-2}$ МПа. Учитывая существенную неопределенность, связанную с выводом σ_T , не следует придавать слишком большого смысла полученному числовому значению. Однако можно с уверенностью заключить, что дислокационная ползучесть является доминирующим механизмом деформации мантии при напряжениях, заметно превышающих $\sim 0,1$ МПа, а диффузионная ползучесть определяет характер течений в мантии при напряжениях, намного меньших $0,01$ МПа. В результате мы приходим к выводу, что доминирующим механизмом ползучести в мантии в большинстве случаев является дислокационная ползучесть.

Зависимости (7.183) и (7.187) скорости деформации от напряжения изображены для нескольких значений температуры на рис. 7.20. Переходное напряжение σ_T , определяемое равенством (7.188), показано вертикальной пунктир-

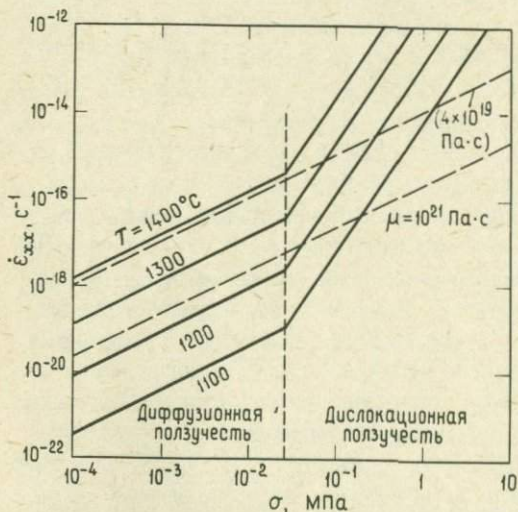


РИС. 7.20. Зависимости (7.183) и (7.187) скорости деформации от напряжения при температурах, указанных на рисунке. Вертикальная пунктирная прямая разделяет области напряжения, соответствующие диффузионному и дислокационному механизмам ползучести. Наклонные пунктирные прямые — линии постоянного коэффициента вязкости в астеносфере (верхняя) и основном объеме мантии (нижняя).

ной линией. Наклонные пунктирные прямые соответствуют постоянным значениям коэффициента вязкости $4 \cdot 10^{19}$ и 10^{21} Па·с в астеносфере и большей части мантии; они построены на основе данных о послеледниковых поднятиях (см. табл. 6.2). При скорости деформации 10^{-15} с⁻¹ коэффициенту вязкости $4 \cdot 10^{19}$ Па·с соответствует температура $\sim 1300^\circ\text{C}$, коэффициенту вязкости 10^{21} Па·с — температура $\sim 900^\circ\text{C}$. Следует подчеркнуть, что это приповерхностные значения температуры, поскольку в формулах (7.183) и (7.187) не учитывалось влияние давления.

В разд. 7.3 мы говорили, что зависимость коэффициента диффузии (а следовательно, и скорости деформации) от температуры и давления можно записать, введя вместо множителя

$$\exp[-(E_a + pV_a)/RT]$$

множитель

$$\exp(-aT_m/T).$$

Приравняв аргументы экспоненциальных функций, находим

$$aT_m = (E_a + pV_a)/R \quad (7.189)$$

или, поскольку $p = \rho g y$, имеем

$$aRT_m = E_a + \rho g V_a y. \quad (7.190)$$

Дифференцируя это равенство по глубине при постоянных E_a и V_a , находим

$$V_a = \frac{aR}{\rho g} \frac{dT_m}{dy}. \quad (7.191)$$

Подставив выражение (7.191) в (7.189) и разрешая полученное равенство относительно a , находим

$$a = \frac{E_a}{R(T_m - y \frac{dT_m}{dy})}. \quad (7.192)$$

Если приближенно представить профиль температуры плавления линейной функцией

$$T_m = T_{m0} + y \frac{dT_m}{dy}, \quad (7.193)$$

где T_{m0} — температура плавления на поверхности, то параметр a приближенно можно выразить как

$$a \approx E_a / RT_{m0}. \quad (7.194)$$

Для оливина $E_a = 523$ кДж/моль, $T_{m0} = 2140$ К, так что $a = 29,4$. Градиент температуры плавления оливина в верхней мантии можно приближенно считать

равным 2 К/км . Тогда при $\rho = 3500 \text{ кг/м}^3$ из равенства (7.191) находим для верхней мантии $V_a = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$, что находится в хорошем согласии с эмпирическим значением $1,34 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ для оливина.

ЗАДАЧА 7.16. Предполагая, что $\mu \propto \exp\{E_a + pV_a / RT\}$, найдите распределение коэффициента вязкости в мантии с глубиной. Примите $E_a = 523 \text{ кДж/моль}$ и $V_a = 1,34 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$. Нормируйте профиль вязкости на значение $10^{21} \text{ Па} \cdot \text{с}$ на глубине 150 км . Считайте, что во всем диапазоне глубин в мантии справедлив единый реологический закон и все реологические параметры и напряжения в мантии не изменяются с глубиной. Предположим также, что изменения коэффициента вязкости при фазовых переходах отсутствуют. Распределения T и p по глубине возьмите согласно моделям, построенным в разд. 4.27. Согласуется ли вычисленное вами распределение μ с выводом об отсутствии существенного возрастания μ с глубиной в мантии, сделанным на основе исследований последднеиковых поднятий? Если нет, то какие из сделанных выше допущений следует изменить, чтобы распределение вязкости с глубиной получилось более близким к постоянному?

7.7. Влияние реологии на конвекцию в мантии

В гл. 6 мы рассмотрели тепловую конвекцию в однородной ньютоновской жидкости. В рамках развитой там теории погранслоя, применимой при больших числах Рэлея, мы показали, что погранслоя, формирующийся у верхней холодной границы жидкости, по своей структуре подобен океанической литосфере.

В настоящей главе мы показали, что мантия, по-видимому, ведет себя как ньютоновская жидкость с коэффициентом эффективной вязкости, экспоненциально зависящим от давления и обратной абсолютной температуры. Поэтому важно рассмотреть, каким образом такая реология влияет на конвекцию в мантии. В предыдущих разделах было показано, что степенной реологический закон с $n = 3$, видимо, оказывает относительно небольшое влияние на конвекцию, тогда как эффекты сильной температурной зависимости, несомненно, важны. Так, например, именно благодаря зависимости реологии от температуры возможно формирование литосферных плит, обладающих свойством жесткости, — это происходит из-за того, что температура поверхностного теплового погранслоя низка. Однако жесткость литосферы учитывалась при анализе ее тепловой эволюции в разд. 4.16 и полученное там нестационарное распределение температуры использовалось при расчете жидкого погранслоя (разд. 6.18). Поэтому зависимость реологии от температуры непосредственно не изменит характер зависимостей от возраста таких экспериментально измеряемых параметров, как тепловой поток с океанического дна, рельеф океанического дна и аномалии геоида над океаном.

Одним из важных для мантийной конвекции следствий жесткости литосферы оказывается то, что это свойство литосферы препятствует субдукции. Понятно, что холодный жидкий погранслоя будет отделяться от верхней границы и погружаться с большей легкостью, чем упругая плита. Поэтому относи-

тельные удлинения конвективных ячеек в мантии обычно больше, чем в жидкости с постоянным коэффициентом вязкости. В гл. 6 мы видели, что отношения сторон конвективных ячеек в жидкости с постоянным коэффициентом вязкости близки к единице. Отношения сторон конвективных ячеек, находящихся под основными литосферными плитами, приведены (для случаев конвекции в верхней и во всей мантии) в табл. 7.5. Видно, что благодаря жесткости плит, препятствующей развитию гравитационной неустойчивости, относительные удлинения конвективных ячеек в мантии оказываются больше единицы.

Таблица 7.5. Приближенные значения отношения сторон конвективных ячеек в мантии

Плита	Для конвекции в верхней мантии	Для конвекции через всю мантию
Тихоокеанская	14	3,3
Северо-Американская	11	2,6
Южно-Американская	11	2,6
Индийская	8	2,1
Наска	6	1,6

На любых тепловых погранслоях, возможно формирующихся в мантии (например, на границе между ядром и мантией), зависимость μ от температуры приводит к заметному изменению вязкости поперек этих слоев. Поскольку погранслою между мантией и ядром должен быть горячее вышележащей мантии, вязкость в таком погранслое будет значительно уменьшена. Другим примером возможных вариаций вязкости мантии, обусловленных перепадами температуры, являются изменения коэффициента вязкости в мантийных струях. Понижение коэффициента вязкости в горячей узкой мантийной струе облегчает подъем материала в окружающей более вязкой мантии. Мантийные струи могут возникать благодаря гравитационной (или Рэлея – Тэйлора) неустойчивости горячего легкого и относительно невязкого материала погранслоя, расположенного между ядром и мантией.

Возможно, что в мантии существуют верхняя и нижняя системы конвекции. Такое подразделение могло возникнуть благодаря изменению состава мантии в переходной зоне на глубинах 650 – 700 км. Граница, разделяющая среды разного состава, в этом случае служила бы барьером для тепловой конвекции, и можно ожидать, что в результате образуются верхняя и нижняя системы конвекции. Между ними образовался бы тепловой погранслою, и нижняя мантия должна была бы иметь значительно большую температуру и, следовательно, меньшую вязкость, чем верхняя. Однако данные исследования

последних поднятий, согласно которым коэффициент вязкости является почти постоянным во всей мантии, свидетельствуют против гипотезы об отдельных системах конвекции в верхней и нижней мантии.

Практическое постоянство коэффициента вязкости в мантии можно понять, рассмотрев его сильную зависимость от температуры и давления. Увеличение температуры мантии с глубиной стремится уменьшить коэффициент вязкости. Однако нарастание давления с глубиной, наоборот, стремится увеличить его. Эти два противоборствующих эффекта могут взаимно скомпенсироваться и сохранить коэффициент вязкости почти постоянным.

Распределение вязкости также станет ясным, если рассмотреть отношение температуры солидуса и температуры на мантийной геотерме (7.98). На рис. 7.21 схематически изображены геотерма, температура солидуса и профиль коэффициента вязкости. Быстрый рост температуры в пределах поверхностного теплового погранслоя сближает геотерму с кривой солидуса по мере увеличения глубины. Связанное с этим значительное уменьшение коэффициента вязкости с глубиной соответствует понижению вязкости при переходе от высоковязкой, по существу жесткой литосферы к подстилающей мантии. При дальнейшем увеличении глубины T возрастает по адиабате, которая идет несколько менее круто, чем кривая солидуса. Поэтому отношение T_m/T , как и μ , связанное с ним формулой (7.98), имеют в верхней мантии слабый минимум. Область слабого минимума коэффициента вязкости можно отождествить с астеносферой, т.е. зоной с большим градиентом скорости, разъединяющим литосферу и подстилающую мантию. Наличие большого градиента скорости при постоянном сдвиговом напряжении является прямым следствием уменьшения коэффициента вязкости.

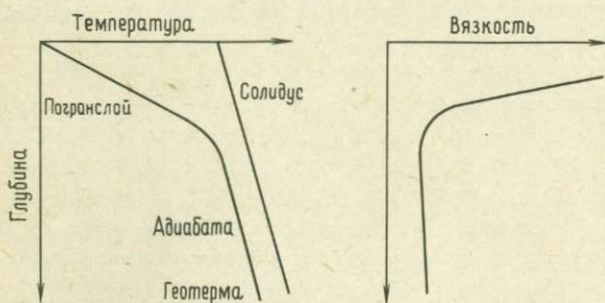


РИС. 7.21. Соответствие слабого минимума коэффициента вязкости глубине наибольшего приближения геотермы верхней мантии к температуре солидуса.

7.8. Конвекция в мантии и остывание Земли

Тепловой поток, который в настоящее время теряется с поверхности Земли, обусловлен распадом радиоактивных изотопов, продолжающимся в ее недрах, и общим остыванием Земли. Уменьшение температуры земных недр со временем есть следствие распада радиоактивных элементов, служащих источниками тепла. Так, 3 млрд. лет назад интенсивность тепловыделения в Земле была примерно вдвое большей, чем сейчас (см. разд. 4.5). С уменьшением генерации тепла уменьшается температура в охваченной конвекцией мантии. Из-за сильной температурной зависимости реологии мантии уменьшение температуры приводит к увеличению вязкости и ослаблению интенсивности конвекции, которая начинает выносить меньшее количество тепла, генерируемого в глубине. В настоящем разделе мы рассмотрим конвективное охлаждение мантии в рамках простой модели конвекции в жидкости с сильной температурной зависимостью коэффициента вязкости. Эта модель позволит нам оценить скорость уменьшения температуры мантии и относительные вклады охлаждения Земли и выделения радиогенного тепла в наблюдаемый в настоящее время тепловой поток с поверхности.

Верхний предел для скорости уменьшения температуры Земли можно определить, если весь наблюдаемый поверхностный тепловой поток приписать остыванию Земли. Общая теплотеря Земли есть произведение площади ее поверхности $4\pi a^2$ (a — радиус Земли) на средний поверхностный тепловой поток \bar{q} . Тепловая энергия Земли равна произведению ее массы $\frac{4}{3}\pi a^3\bar{\rho}$, где $\bar{\rho}$ — средняя плотность Земли, на среднюю теплоемкость \bar{c} и среднюю температуру \bar{T} . Приравнявая скорость потерь тепла через поверхность и скорость уменьшения тепловой энергии Земли, находим

$$4\pi a^2\bar{q} = -\frac{4}{3}\pi a^3\bar{\rho}\bar{c} \frac{dT}{dt}, \quad (7.195)$$

или

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{3\bar{q}}{a\bar{\rho}\bar{c}}. \quad (7.196)$$

Подставляя $\bar{q} = 75$ мВт/м², $\bar{\rho} = 5520$ кг/м³, $\bar{c} = 920$ Дж·кг⁻¹·К⁻¹ и $a = 6371$ км, из (7.196) получаем, что $d\bar{T}/dt = -220$ К/млрд. лет. На самом деле скорость охлаждения меньше, так как значительная доля поверхностного теплового потока объясняется выделением тепла за счет радиоактивных источников.

Чтобы найти истинную скорость охлаждения Земли, нужно связать температуру T_1 мантии, охваченной конвекцией, с объемным тепловыделением H . Распределение температуры в слое с конвекцией, нагреваемом изнутри, было рассмотрено в разд. 6.19. Если считать, что приведенные там рассуждения при-

менимы к мантии, то из равенств (6.314), (6.345), (6.346) и (6.351) получим

$$\frac{2k(T_1 - T_0)}{\rho H b^2} = 2,98 \left(\frac{k \chi \mu}{\alpha \rho^2 g H b^5} \right)^{1/4}, \quad (7.197)$$

где T_0 — температура поверхности, а b — мощность мантии. Равенство (7.197) представляет собой искомое соотношение между температурой мантии и интенсивностью тепловыделения. Однако эта связь не столь проста, как кажется на первый взгляд, так как μ , согласно (7.127), есть сильно убывающая функция температуры:

$$\mu = \mu_r \exp(E_a / RT_1), \quad (7.198)$$

где μ_r — коэффициент пропорциональности. Подставляя (7.198) в (7.197), получаем

$$\frac{2k(T_1 - T_0)}{\rho H b^2} = 2,98 \left(\frac{k \chi \mu_r}{\alpha \rho^2 g H b^5} \right)^{1/4} \exp \left(\frac{E_a}{4RT_1} \right). \quad (7.199)$$

Тепловыделение радиогенной природы в мантии экспоненциально убывает со временем по закону

$$H = H_0 \exp[-\lambda(t - t_0)], \quad (7.200)$$

где H_0 — современная интенсивность тепловыделения, t_0 — современное значение времени t , а λ — средняя постоянная распада для смеси радиоактивных изотопов, существующей в мантии [см. формулу (1.3)]. Из равенства тепловыделения и конвективного теплопереноса, определяемого формулой (7.199), следует, что с уменьшением H величина T_1 также должна уменьшаться. Подставляя выражение (7.200) для H в (7.199), находим

$$\begin{aligned} \frac{2k(T_1 - T_0)}{\rho H_0 b^2} &= 2,98 \left(\frac{k \chi \mu_r}{\alpha \rho^2 g H_0 b^5} \right)^{1/4} \times \\ &\times \exp \left(\frac{E_a}{4RT_1} \right) \exp \left[-\frac{3\lambda(t - t_0)}{4} \right]. \end{aligned} \quad (7.201)$$

Это уравнение определяет температуру мантии в функции времени. Его можно значительно упростить, если воспользоваться условием

$$\frac{2k(T_{10} - T_0)}{\rho H_0 b^2} = 2,98 \left(\frac{k \chi \mu_r}{\alpha \rho^2 g H_0 b^5} \right)^{1/4} \exp \left(\frac{E_a}{4RT_{10}} \right) \quad (7.202)$$

равенства температуры его современному значению T_{10} при $t = t_0$. Разделив (7.201) на (7.202), получим

$$\frac{T_1 - T_0}{T_{10} - T_0} = \exp \left\{ \frac{E_a}{4R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_{10}} \right) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{3\lambda}{4} (t - t_0) \right\}. \quad (7.203)$$

Дифференцируя это равенство по времени, определим скорость охлаждения мантии

$$\frac{dT_1}{dt} \left(\frac{1}{T_{10} - T_0} \right) = \exp \left\{ \frac{E_a}{4R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_{10}} \right) \right\} \times \\ \times \left(- \frac{E_a}{4RT_1^2} \right) \frac{dT_1}{dt} \exp \left\{ - \frac{3\lambda}{4} (t - t_0) \right\} + \\ + \exp \left\{ \frac{E_a}{4R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_{10}} \right) \right\} \left(- \frac{3\lambda}{4} \right) \exp \left\{ - \frac{3\lambda}{4} (t - t_0) \right\}. \quad (7.204)$$

Исключая экспоненциальные множители посредством равенства (7.203), находим

$$\frac{dT_1}{dt} \left(\frac{1}{T_{10} - T_0} \right) = \left(\frac{T_1 - T_0}{T_{10} - T_0} \right) \left(- \frac{E_a}{4RT_1^2} \right) \frac{dT_1}{dt} - \\ - \frac{3\lambda}{4} \left(\frac{T_1 - T_0}{T_{10} - T_0} \right), \quad (7.205)$$

или после некоторых упрощений

$$\frac{dT_1}{dt} \left\{ 1 + \frac{E_a}{4RT_1^2} (T_1 - T_0) \right\} = - \frac{3\lambda}{4} (T_1 - T_0). \quad (7.206)$$

При $T_0 \ll T_1$ второй член в фигурных скобках приблизительно равен $E_a / 4RT_1$, что в соответствии со сделанными оценками равно ~ 10 , т.е. значительно больше 1. Поэтому, пренебрегая 1 в (7.206), получаем следующее приближенное выражение для скорости охлаждения мантии:

$$\frac{dT_1}{dt} = - 3\lambda \left(\frac{RT_1^2}{E_a} \right). \quad (7.207)$$

Современная скорость охлаждения равна

$$\left. \frac{dT_1}{dt} \right|_{t=t_0} = -3\lambda \left(\frac{RT_{10}^2}{E_a} \right). \quad (7.208)$$

Мы видим, что скорость охлаждения мантии не зависит от ее толщины, современной интенсивности тепловыделения и величины коэффициента вязкости.

Численные значения параметров λ , T_{10} и E_a/RT_{10} , от которых зависит современная скорость (7.208) охлаждения мантии, известны с достаточной точностью. В соответствии с тем, что говорилось в разд. 7.6, мы примем $E_a/RT_{10} = 30$, а для средней температуры мантии и постоянной λ примем значения $T_{10} = 2250$ К и $\lambda = 2,77 \cdot 10^{-10}$ лет⁻¹ (см. разд. 4.27 и 4.5). При этом скорость охлаждения оказывается равной 62 К/млрд. лет. Согласно равенству (7.196), остывание Земли обеспечивает тепловой поток на поверхности, равный 21 мВт/м², или 25 – 30% среднего поверхностного теплового потока, составляющего 75 мВт/м². Остальные 70 – 75% теплового потока имеют радиогенное происхождение. Сделанный вывод, по-видимому, можно считать, весьма точным. Мантия охлаждается именно с той скоростью, которая получилась в результате нашего расчета и которая относительно мала потому, что температура мантии ограничена как сверху, так и снизу вследствие сильной температурной зависимости коэффициента вязкости. С уменьшением генерации тепла в мантии уменьшается интенсивность конвекции, требуемой для выноса тепла к поверхности Земли, и в результате необходимое число Рэлея становится меньше. Однако число Рэлея обратно пропорционально коэффициенту вязкости мантии, а коэффициент вязкости экспоненциально зависит от обратной абсолютной температуры. Поэтому для обеспечения требуемого увеличения коэффициента вязкости, уменьшения числа Рэлея и уменьшения конвективного теплового потока достаточно относительно малого уменьшения температуры.

ЗАДАЧА 7.17. Чтобы количественно оценить регулирующее действие субсолидусной конвекции на тепловую историю Земли при условии зависимости коэффициента вязкости от температуры, используем следующую простую модель. Предположим, что Землю можно характеризовать средней температурой \bar{T} и что скорость остывания определяется равенством (7.196). Пусть начиная с момента времени $t = 0$ Земля охлаждается от первоначальной высокой температуры $T(0)$. Пренебрегая нагревом за счет распада радиоактивных элементов и считая, что охлаждение Земли идет за счет интенсивной субсолидусной конвекции, покажите, что средний тепловой поток с поверхности выражается как

$$\bar{q} = 0,74 k \left(\frac{\rho g \alpha_v}{\mu \chi} \right)^{1/3} (\bar{T} - T_0)^{4/3}. \quad (7.209)$$

Вспользуйтесь соотношениями (6.306) и (6.340) и считайте, что полный движущий конвекцию перепад температур равен удвоенной разности между средней температурой \bar{T} и температурой поверхности T_0 .

В соответствии с формулой (7.1 10) запишите коэффициент вязкости в виде

$$\mu = C\bar{T} \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right), \quad (7.210)$$

а формулу охлаждения как

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = -\frac{2,2\chi}{a} \left(\frac{\rho g \alpha v}{C\chi}\right)^{1/2} \bar{T} \exp\left(-\frac{E_a}{3RT}\right). \quad (7.211)$$

Уравнение (7.211) получается в предположении $(\bar{T} - T_0)^{4/3} \approx \bar{T}^{4/3}$, которое выполняется ввиду того, что $T_0 \ll \bar{T}$. Интегрируя формулу охлаждения, покажите, что

$$\text{Ei}\left(\frac{E_a}{3R\bar{T}}\right) - \text{Ei}\left(\frac{E_a}{3R\bar{T}(0)}\right) = \frac{2,2\chi}{a} \left(\frac{\rho g \alpha v}{C\chi}\right)^{1/2} t, \quad (7.212)$$

где Ei — интегральная показательная функция. Вычислите и нанесите на график величины $\bar{T}/\bar{T}(0)$ в функции t для характерных значений параметров, входящих в (7.212). Рассмотрите роль температурной зависимости коэффициента вязкости в тепловой истории Земли.

Замечание. Интегральная показательная функция Ei отлична от интегральной показательной функции E_1 , определенной в задаче 4.35 и протабулированной в

табл. 8.4. $\text{Ei}(x)$ есть $\int_{-x}^{\infty} (e^{-t}/t) dt$, где f — интеграл, взятый по пути, не проходя-

щему через начало координат и не пересекающему отрицательную часть вещественной оси, а $x > 0$. Значения функции $\text{Ei}(x)$ приведены в табл. 7.6.

Таблица 7.5. Значения интегральной показательной

функции $\text{Ei}(x) = -\int_{-x}^{\infty} (e^{-t}/t) dt$

x	$\text{Ei}(x)$	$xe^{-x}\text{Ei}(x)$	x	$\text{Ei}(x)$	$xe^{-x}\text{Ei}(x)$
0	$-\infty$		1,2	2,44209	
0,01	-4,01793		1,4	3,00721	
0,02	-3,31471		1,6	3,60532	
0,03	-2,89912		1,8	4,24987	
0,04	-2,60126		2,0	4,95423	
0,05	-2,36788		2,5	7,07377	
0,10	-1,62281		3,0	9,93383	
0,20	-0,82176		3,5	13,92533	
0,30	-0,30267		4,0	19,63087	
0,40	0,10477		4,5	27,93370	
0,50	0,45422		5,0	40,18524	
0,60	0,76988		6	85,98976	
0,70	1,06491		7		1,22241
0,80	1,34740		8		1,18185
0,90	1,62281		9		1,15276
1,0	1,89512		10		1,13147

7.9. Реология пород земной коры

Приповерхностные породы проявляют не только свойство хрупкости, обуславливающее образование отдельностей и разломов, но и, как об этом свидетельствует существование складок самого различного пространственного размера, деформируются жидкоподобным образом. Складкообразование можно приписать либо пластической деформации, либо жидкообразному течению; имеются наблюдательные данные, свидетельствующие о возможности обоих этих процессов. Пластические деформации будут рассмотрены в разд. 7.11. Здесь же мы покажем, как относительно холодные породы коры могут течь наподобие жидкости.

Микроструктура многих смятых в складки пород указывает на то, что деформация, приведшая к образованию складок, была результатом переноса массы путем диффузии. Однако исследования метаморфических реакций в породах свидетельствуют о том, что температура во время складкообразования составляла лишь малую долю температуры солидуса. Поэтому деформация не могла вызываться термически активируемой диффузией атомов, которую мы рассмотрели выше. В данном случае скорость диффузионного переноса массы увеличивается благодаря *растворению под давлением* в жидкой пленке, присутствующей между зернами породы. В этом процессе материал растворяется в тех областях, где давление или напряжение велико, и выпадает в осадок там, где оно низко. Компрессионная ползучесть при растворении подобна ползучести Кобле в том отношении, что в обоих случаях перенос массы происходит вдоль границ зерен.

Примером деформации, обусловленной растворением под давлением, может служить уплотнение осадков. Рассмотрим совокупность зерен кварцевого песка (рис. 7.22, а). Будем предполагать, что промежутки между песчинками заполнены водой. Поскольку песчинки плотнее воды, их избыточный вес должен поддерживаться в местах их соприкосновения друг с другом, и, значит, давление в этих местах будет превышать давление воды. Величина давления в местах соприкосновения зависит от площади и упругих деформаций зерен. Поскольку давление в местах соприкосновения больше, кварц здесь может раствориться и откладываться на свободных поверхностях зерен, где давление ниже. В результате происходит диффузия кремнезема через межзерновую пленку воды из мест соприкосновения зерен, где он растворяется, на свободные поверхности, где он осаждается. В результате возникает структура, показанная на рис. 7.22, б. Такая структура ясно видна в песчинках.

Считается, что растворение под давлением играет важную роль при непрерывных деформациях самых разных пород земной коры. Исследования смятых в складки пород показали, что во многих из них действительно происходит такой процесс. Пока на границах зерен присутствует вода, она может действовать как растворитель минералов, слагающих зерна. Растворенные минераль-

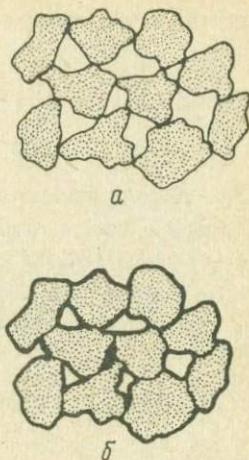


РИС. 7.22. Уплотнение песка за счет деформации песчинок при растворении под давлением. а — первоначальный вид недеформированных зерен (площадь соприкосновения зерен мала, соприкосновение практически в отдельных точках), б — деформированные зерна, прилегающие друг к другу значительной большей частью своих поверхностей (деформация произошла за счет растворения острых углов зерен, упавшихся в соседние зерна). Участки границ, показанные жирными линиями, выросли за счет выпадения минерала в осадок.

ные частицы диффундируют вдоль границ зерен из областей высокого давления, где растворимость велика, в области низкого давления, где она мала. Диффузия растворенных минералов приводит к ползучести.

Количественный расчет компрессионной ползучести при растворении можно выполнить подобно тому, как в разд. 7.3 мы рассчитывали ползучесть, обусловленную диффузией вдоль границ зерен. Рассмотрим опять кристалл в форме куба с начальным размером h , на который в направлении x действует сжимающее напряжение σ , а в направлении y — растягивающее напряжение $-\sigma$ (см. рис. 7.8). Будем считать, что кристалл полностью окружен пленкой воды, в которой могут растворяться минералы кристалла. При отсутствии девиаторного напряжения концентрация минералов в растворе равна равновесному значению C_{s_0} (в килограммах растворенного вещества на 1 кг раствора); величина C_{s_0} зависит как от давления, так и от температуры. Поскольку доля растворенных минералов по массе мала, то равновесное значение их концентрации n_{s_0} можно вычислить по формуле

$$n_{s_0} = \rho_e C_{s_0} / M_s, \quad (7.213)$$

где ρ_e — плотность растворителя (воды), а M_s — масса молекулы растворенного минерала. При наличии приложенного девиаторного напряжения σ кон-

центрация растворенного вещества равна

$$C_s = C_{s0} + C_s', \quad (7.214)$$

где зависимость C_s' от напряжения дается эмпирическим соотношением

$$C_s' = \sigma / \sigma_s (T). \quad (7.215)$$

Для раствора кремнезема в воде приближенное значение функции $\sigma_s (T)$ при $T = 500^\circ \text{C}$ составляет 300 МПа. Равенство (7.215) показывает, что растворимость увеличивается при сжатии, вследствие чего минералы растворяются, и уменьшается при растяжении, благодаря чему они выпадают в осадок. Концентрация растворенного вещества при наличии приложенного напряжения равна

$$n_s = n_{s0} + n_s' = \frac{\rho_e}{M_s} (C_{s0} + C_s') = n_{s0} + \frac{\rho_e \sigma}{M_s \sigma_s}. \quad (7.216)$$

Отсюда следует, что концентрации растворенного вещества на гранях кристалла, показанного на рис. 7.8, можно записать в виде

$$n_A = n_C = n_{s0} + \rho_e \sigma / M_s \sigma_s, \quad (7.217)$$

$$n_B = n_D = n_{s0} - \rho_e \sigma / M_s \sigma_s, \quad (7.218)$$

$$n_E = n_F = n_{s0}. \quad (7.219)$$

Потоки молекул растворенного вещества через жидкую пленку от граней A и C к граням B и D запишем в форме, аналогичной равенству (7.99):

$$\begin{aligned} J_{AB} = J_{AD} = J_{CB} = J_{CD} &= \frac{D_s}{h} (n_A - n_B) = \\ &= \frac{D_s}{h} \left\{ \left(n_{s0} + \frac{\rho_e \sigma}{M_s \sigma_s} \right) - \left(n_{s0} - \frac{\rho_e \sigma}{M_s \sigma_s} \right) \right\} = \\ &= \frac{D_s}{h} \frac{2 \rho_e \sigma}{M_s \sigma_s}, \end{aligned} \quad (7.220)$$

где D_s — коэффициент диффузии растворенного вещества в растворителе. Подобным же образом записываются потоки растворенного вещества с граней A и C на грани E и F и с граней E и F на грани B и D [ср. с равенствами (7.100) и (7.101)]:

$$\begin{aligned} J_{AE} = J_{AF} = J_{CE} = J_{CF} &= \frac{D_s}{h} (n_A - n_E) = \\ &= \frac{D_s}{h} \left\{ n_{s0} + \frac{\rho_e \sigma}{M_s \sigma_s} - n_{s0} \right\} = \frac{D_s}{h} \frac{\rho_e \sigma}{M_s \sigma_s}, \end{aligned} \quad (7.221)$$

$$J_{EB} = J_{ED} = J_{FB} = J_{FD} = \frac{D_s}{h} (n_E - n_B) =$$

$$= \frac{D_s}{h} \left\{ n_{s0} - \left(n_{s0} - \frac{\rho_e \sigma}{M_s \sigma_s} \right) \right\} = \frac{D_s}{h} \frac{\rho_e \sigma}{M_s \sigma_s}. \quad (7.222)$$

Площадь, через которую течет каждый поток, равна $h\delta$, где δ — толщина границы зерна. Деформация, связанная с перемещением каждого атома, равна $b^3/h^3 = 1/n_s h^3$, где n_s — концентрация растворенного вещества. По аналогии с равенствами (7.102) и (7.103) можно записать скорости деформации в виде

$$\dot{\epsilon}_{yy} = - \frac{h\delta}{n_s h^3} (J_{AB} + J_{AD} + J_{CB} + J_{CD} + J_{EB} + J_{ED} + J_{FB} + J_{FD}), \quad (7.223)$$

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{h\delta}{n_s h^3} (J_{AB} + J_{AD} + J_{CB} + J_{CD} + J_{AE} + J_{AF} + J_{CE} + J_{CF}). \quad (7.224)$$

Подставляя равенства (7.220) — (7.222) в формулы (7.223) и (7.224), находим

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{12\delta \rho_e D_s}{h^3 \rho_s \sigma_s} \sigma, \quad (7.225)$$

где $\rho_s = M_s n_s$ — плотность растворенного вещества.

Мы видим, что в случае компрессионной ползучести при растворении скорость деформации пропорциональна приложенному напряжению. Следовательно, деформация, осуществляемая этим механизмом, эквивалентна течению ньютоновской жидкости с коэффициентом вязкости

$$\mu_{ps} = \frac{h^3 \rho_s \sigma_s}{24\delta \rho_e D_s}. \quad (7.226)$$

Принимая для кварца при 500°C $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $D_s = 2,4 \cdot 10^{-8}$ м²/с, $\delta = 10^{-9}$ м, $\rho_s = 2700$ кг/м³, $\rho_e = 1000$ кг/м³ и $\sigma_s = 300$ МПа, из (7.226) находим $\mu_{ps} = 1,1 \cdot 10^{16}$ Па·с. Такое значение коэффициента вязкости для пород земной коры при 500°C является очень низким. Следует подчеркнуть, что, применяя равенство (7.226), мы привносим в коэффициент вязкости целый ряд неопределенностей. Использованное значение коэффициента диффузии определялось в экспериментах по диффузии в объеме, и поэтому остается неопределенным, насколько правомерно использовать это значение для случая диффузии в жидких пленках, покрывающих границы зерен. Значение толщины границы зерна,

которое мы использовали, тоже представляет собой только оценку. Тем не менее ясно, что компрессионная ползучесть при растворении является важным механизмом деформации пород коры, на основе которого может происходить вязкое складкообразование при весьма низких температурах.

7.10. Вязкоупругость

Известно, что затухание поперечных сейсмических сдвиговых волн при распространении в мантии относительно мало. Это позволяет сделать вывод, что мантия представляет собой упругое твердое тело. Однако выше мы видели, что в геологических масштабах времени, начиная уже с интервалов $\sim 10^4$ лет, характерных для послеледниковых поднятий, кристаллические твердые породы ведут себя как вязкая жидкость. Следовательно, в процессах с характерными временами $1 - 10^4$ с мантия ведет себя как упругое тело, а в процессах с характерными временами $10^{11} - 10^{17}$ с — как вязкая жидкость.

Среды, в течение коротких интервалов времени проявляющие упругие свойства, а в течение длительных обладающие вязкостью, называются вязкоупругими. В одной из моделей вязкоупругой среды скорость деформации представляется суперпозицией линейной скорости упругой деформации $\dot{\epsilon}_e$, вызываемой скоростью $\dot{\sigma}$ изменения напряжения, и линейной скорости вязкой деформации $\dot{\epsilon}_f$, вызываемой напряжением σ . Такая среда называется вязкоупругим телом Максвелла. Предположим, что на нее действует одноосное напряжение σ . Упругая деформация, согласно равенству (3.14), равна

$$\epsilon_e = \sigma / E, \quad (7.227)$$

где E — модуль Юнга. Скорость деформации среды как ньютоновской вязкой жидкости, находящейся под действием девиаторного нормального напряжения σ , в соответствии с формулой (6.60) определяется как

$$\frac{d\epsilon_f}{dt} = - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\mu}. \quad (7.228)$$

Знак минус в соотношении между $\dot{\epsilon}_f$ и $\partial u / \partial x$ написан в соответствии с условием о выборе знака деформаций, согласно которому положительными считаются деформации сжатия. Полная деформация ϵ есть сумма упругой и жидкоподобной деформаций:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_f. \quad (7.229)$$

Поэтому полная скорость деформации равна сумме $\dot{\epsilon}_f$, определяемого равенством (7.228), и $\dot{\epsilon}_e$, которое можно найти, дифференцируя равенство (7.227) по времени:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{2\mu} \sigma + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (7.230)$$

Это основное реологическое уравнение связывает скорость деформации, напряжение и скорость изменения напряжения в максвелловском вязкоупругом теле.

Рассмотрим напряженное состояние вязкоупругой среды, возникающее после того, как при $t = 0$ она испытывает внезапную деформацию ϵ_0 , которая при $t > 0$ сохраняется постоянной. Процесс быстрого деформирования описывается законом (7.230), в котором главными являются члены с производными (среда ведет себя как упругое тело). Поэтому напряжение σ_0 , достигаемое в начальный момент, равно

$$\sigma_0 = E\epsilon_0. \quad (7.231)$$

В дальнейшем деформация остается неизменной ($d\epsilon/dt = 0$), и равенство (7.230) сводится к виду

$$0 = \frac{1}{2\mu} \sigma + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (7.232)$$

или

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{2\mu} dt. \quad (7.233)$$

Интегрируя с начальным условием $\sigma = \sigma_0$ при $t = 0$, находим

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-Et/2\mu). \quad (7.234)$$

Время, за которое начальное напряжение уменьшается в e раз, равно

$$\tau_{ve} = 2\mu/E. \quad (7.235)$$

Оно называется *временем вязкоупругой релаксации*. Чтобы оценить время релаксации для астеносферы, положим в (7.235) $\mu = 4 \cdot 10^{19}$ Па·с и $E = 70$ ГПа; в результате мы найдем $\tau_{ve} = 36$ лет. Как и следовало ожидать, это время по величине занимает промежуточное положение между периодами сейсмических волн и временами, связанными с последними поднятиями.

Примером мгновенной деформации может служить смещение бортов разлома, происходящее при землетрясении. Смещение происходит в течение нескольких секунд, и в результате изменяется напряженное состояние целого региона. При достаточно высокой температуре пород возникающее напряжение релаксирует благодаря процессу твердотельной ползучести.

ЗАДАЧА 7.18. Определите реакцию вязкоупругой среды Максвелла на напряжение σ_0 , внезапно приложенное при $t = 0$ и в дальнейшем при $t > 0$ поддерживаемое неизменным. Какова начальная деформация ϵ_0 ? Решите задачу также в случае, если при $t = t_1 > 0$ напряжение снимается.

ЗАДАЧА 7.19. Другая модель вязкоупругой среды — модель Кельвина — строится в предположении, что при данных деформации ϵ и скорости деформации $\dot{\epsilon}$ напряжение σ есть суперпозиция линейного упругого и линейного вязкого напряжений σ_e и σ_f соответственно. Покажите, что реологический закон вязкоупругого тела Кельвина имеет вид

$$\sigma = \epsilon E + 2\mu \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (7.236)$$

Покажите также, что реакция вязкоупругой среды Кельвина на напряжение σ_0 , внезапно приложенное при $t = 0$, есть

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} [1 - \exp(-t/\tau_{ve})] \quad (7.237)$$

(считайте, что при $t > 0$, $\sigma = \sigma_0$). Вы можете убедиться, что, тогда как в теле Максвелла, находящемся в состоянии постоянной деформации, напряжение экспоненциально уменьшается со временем, в теле Кельвина, к которому приложено постоянное напряжение, по такому же (экспоненциальному) закону убывает деформация.

ЗАДАЧА 7.20. Обобщите реологическое уравнение (7.230) для максвелловского вязкоупругого тела на случай трехмерного напряженного и деформированного состояния. Для этого нужным образом скомбинируйте уравнения (3.4) — (3.6) линейной теории упругости и уравнения (6.60) и (6.61) гидродинамики линейной жидкости [кроме (6.60) и (6.61) используйте аналогичное уравнение для третьего измерения]. Считая, что упругие и вязкие деформации, определяемые из уравнений теории упругости и динамики вязкой жидкости для одного и того же напряженного состояния, складываются, покажите, что

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\sigma}_1}{E} - \frac{\nu}{E} (\dot{\sigma}_2 + \dot{\sigma}_3) + \frac{1}{2\mu} (\sigma_1 - p), \quad (7.238)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}_2}{E} - \frac{\nu}{E} (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_3) + \frac{1}{2\mu} (\sigma_2 - p). \quad (7.239)$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = \frac{\dot{\sigma}_3}{E} - \frac{\nu}{E} (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2) + \frac{1}{2\mu} (\sigma_3 - p), \quad (7.240)$$

где

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (7.241)$$

Определите напряжения и деформации в максвелловской вязкоупругой среде, находящейся в состоянии одноосной деформации $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 \equiv 0$. Считайте, что напряжение $\sigma_2 = \sigma_0$ внезапно приложено при $t = 0$ и при $t > 0$ поддерживается неизменным. Считайте также, что ввиду отсутствия горизонтального выделенного направления $\sigma_1 = \sigma_3$. Докажите, что

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_0 \left\{ 1 + \frac{2\nu - 1}{1 - \nu} \exp\left(-\frac{Et}{6\mu(1 - \nu)}\right) \right\}, \quad (7.242)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_0}{E} (1 - 2\nu) \left\{ 3 + 2 \frac{2\nu - 1}{1 - \nu} \exp\left(-\frac{Et}{6\mu(1 - \nu)}\right) \right\}. \quad (7.243)$$

Каково поведение максвелловской среды при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$?

Чтобы определить, происходит ли в литосфере релаксация упругих напряжений посредством субсолидуемой ползучести, можно воспользоваться простой вязкоупругой моделью. Будем предполагать, что релаксация напряжений

в литосфере осуществляется механизмом дислокационной ползучести, и соответственно этому перепишем реологическое уравнение для максвелловского тела с использованием коэффициента эффективной вязкости μ_{eff} , который в случае дислокационной ползучести зависит от напряжения. Из соотношения (7.183) между скоростью деформации и напряжением следует, что коэффициент эффективной вязкости можно записать в виде

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{1}{2C_1\sigma^2} \exp(E_a/RT). \quad (7.244)$$

Подставляя это выражение в равенство (7.230), получим следующее соотношение для неньютоновской вязкоупругой среды:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_1\sigma^3 \exp(-E_a/RT) + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (7.245)$$

Рассмотрим опять случай, когда при $t = 0$ внезапно "включается" постоянная деформация, в результате которой в начальный момент возникает напряжение σ_0 . Для постоянной деформации соотношение (7.245) упрощается следующим образом:

$$0 = C_1\sigma^3 \exp(-E_a/RT) + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}, \quad (7.246)$$

или

$$\frac{d\sigma}{\sigma^3} = -EC_1 \exp(-E_a/RT) dt. \quad (7.247)$$

В такой форме оно легко интегрируется, и в результате мы находим

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} + 2EC_1 t \exp(-E_a/RT) \right\}^{-1/2}. \quad (7.248)$$

Время τ_r релаксации напряжения σ_0 до половины первоначальной величины равно

$$\tau_r = \frac{3}{2EC_1\sigma_0^2} \exp(E_a/RT). \quad (7.249)$$

Величина μ_{eff} при напряжении, равном первоначальному значению σ_0 , есть

$$\mu_{\text{eff},0} = \frac{1}{2C_1\sigma_0^2} \exp(E_a/RT). \quad (7.250)$$

Время τ_r релаксации напряжения можно записать в форме

$$\tau_r = 3\mu_{\text{eff},0}/E, \quad (7.251)$$

внешне сходной с выражением (7.235) для времени вязкоупругой релаксации напряжений в среде Максвелла.

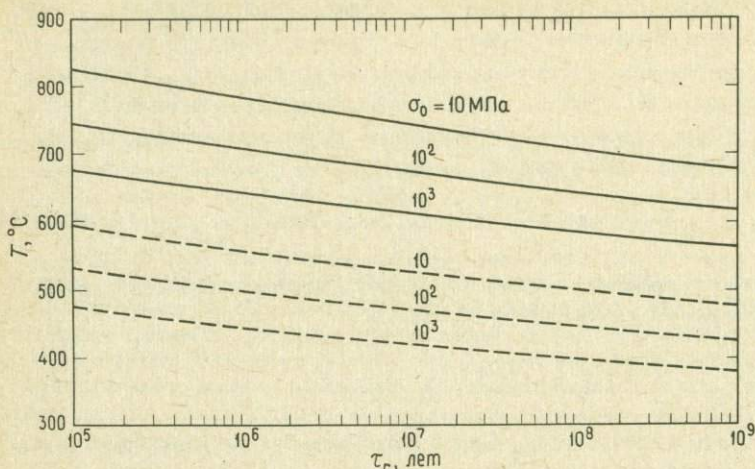


РИС. 7.23. Температура T породы в функции времени τ_r , за которое исходное напряжение σ_0 уменьшается вдвое. Сплошные кривые — для сухого оливина, пунктирные — для влажного оливина.

Согласно формуле (7.249), время релаксации напряжений сильно зависит от температуры, реологических параметров и исходного напряжения. Эти зависимости показаны на рис. 7.23 для двух наборов реологических параметров, соответствующих сухому оливину, для которого $C_1 = 4,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$, $E_a = 523 \text{ кДж/моль}$, и влажному оливину, для которого $C_1 = 5,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$, $E_a = 398 \text{ кДж/моль}$. В обоих случаях мы приняли $E = 7 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Видно, что для характерных геологических промежутков времени (скажем, 10^7 лет) и уровней напряжений (например, 100 МПа) значительной релаксации напряжений в сухом оливине не происходит при температурах ниже $\sim 675^\circ\text{C}$, а во влажном — при температурах ниже $\sim 475^\circ\text{C}$. Поэтому, если процесс ползучести определяется в основном реологией сухого оливина, подошва упругой литосферы совпадает с изотермой 675°C , а в том случае, если ползучесть контролируется реологией влажного оливина, подошва литосферы определяется изотермой 475°C . Отсюда следует, что толщину γ_{EL} океанической упругой литосферы в функции возраста $t (= x/u)$ можно определить с помощью формулы (4.125), характеризующей тепловую структуру мантии, полагая в ней температуру равной указанным выше значениям (675 и 475°C). Принимая $T_s = 0^\circ\text{C}$ и $T_m = 1300^\circ\text{C}$, получаем

$$\gamma_{EL} = 2(\chi t)^{1/2} \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{675}{1300} \right) = 1,0 (\chi t)^{1/2} \quad (7.252)$$

для сухого оливина и

$$\gamma_{EL} = 2(\chi t)^{1/2} \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{475}{1300} \right) = 0,68 (\chi t)^{1/2} \quad (7.253)$$

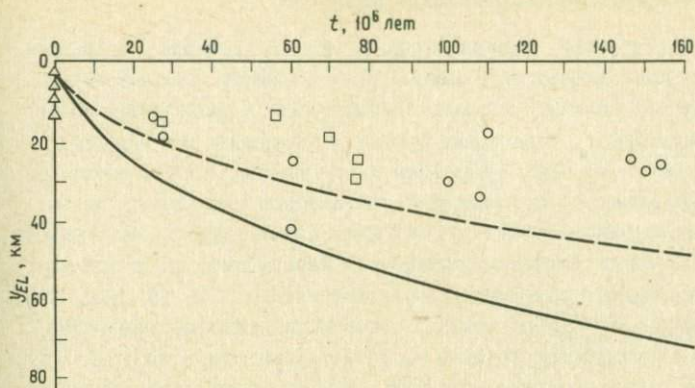


РИС. 7.24. Толщина u_{EL} океанической упругой литосферы в функции возраста t , установленная с помощью измерений величины изгиба литосферы у океанических желобов (кружки), островов (квадратики) и хребтов (треугольники). Сплошная кривая — глубина подошвы упругой литосферы для сухого оливина согласно формуле (7.252), пунктир — то же для влажного оливина [формула (7.253)].

для влажного оливина. В неупругой литосфере, т.е. на глубинах, превышающих u_{EL} , упругие напряжения в геологических масштабах времени снимаются благодаря процессу твердотельной ползучести. Однако и там жесткость пород оказывается достаточной для того, чтобы деформации были малы по сравнению с единицей и нижняя неупругая литосфера сохраняла свою целостность.

Толщина упругой океанической литосферы, предсказываемая формулами (7.252) и (7.253) для двух наборов реологических параметров, приведена вместе с данными наблюдений на рис. 7.24. Последние получены в результате исследований изгиба литосферы у океанических желобов и изгиба ее под действием нагрузки, создаваемой островами, а также из корреляции рельефа океанического дна в районе хребтов с силой тяжести. Хотя данные наблюдений характеризуются значительным разбросом, из них видно, что реальная толщина упругой литосферы, по-видимому, не увеличивается с возрастом. Предсказываемая толщина упругой литосферы превышает наблюдаемые значения, особенно для очень древней литосферы. Результаты вычислений по модели, соответствующей реологии влажного оливина, гораздо ближе к данным наблюдений, чем предсказания модели, соответствующей реологии сухого оливина. Релаксация упругих напряжений в литосфере, очевидно, происходит даже при более низких температурах, чем предсказывает реологическое уравнение для влажного оливина.

7.11. Упругая — идеально пластическая реология

При низких всесторонних давлениях горные породы проявляют хрупкость, т.е. при больших приложенных напряжениях раскалываются. Однако, когда всестороннее (литостатическое) давление приближается к пределу прочности при хрупком разрушении σ_0 , происходит переход от хрупкого, или упругого, поведения к пластическому (рис. 7.25). Переход от упругости к пластичности происходит при напряжениях, превышающих критическое значение σ_0 , называемое напряжением пластического течения или пределом упругости. В пластическом режиме материал течет и деформируется необратимо; после наложения нагрузки напряжение и деформация изменяются вдоль пути AB (рис. 7.26), а после снятия нагрузки — вдоль пути BC , который практически параллелен начальному отрезку, соответствующему упругой деформации, пути ABC . В результате после снятия нагрузки возникает остаточная пластическая деформация AC . В общем случае деформация среды, в которой происходит переход от упругости к пластичности, зависит от всей предыстории нагружения. На упругопластическую деформацию сильное влияние оказывает также температура. В частности, с ростом температуры величина предела упругого поведения обычно уменьшается. В большинстве исследований упругопластических деформаций предполагается, что кривые напряжение — деформация не зависят от скорости приложения нагрузки. Таким образом, соотношение между напряжением и деформацией считается не зависящим от времени.

Идеализированное представление описанного поведения среды дает *упругая — идеально пластическая* реология, в соответствии с которой при напряжениях, меньших предела упругости σ_0 , материал деформируется упруго, а по

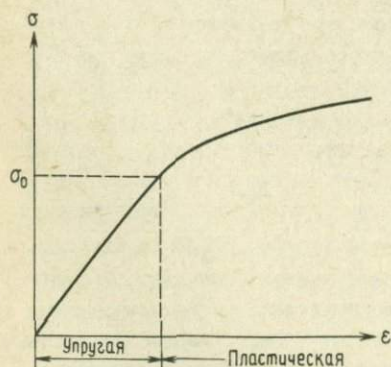


РИС. 7.25. Деформация ϵ твердой среды, в которой происходит переход от упругого поведения к пластическому; σ_0 — предел упругости.

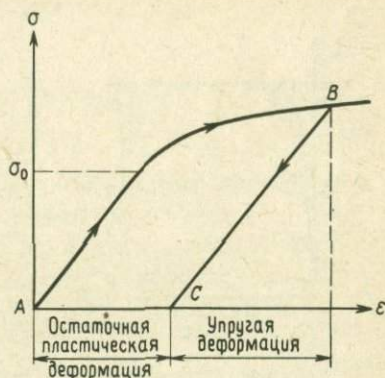


РИС. 7.26. История нагружения и разгрузки упругопластического материала.

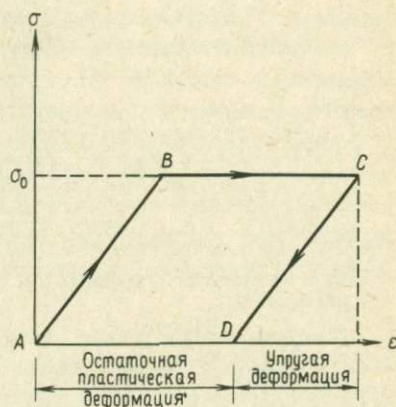


РИС. 7.27. Связь напряжения и деформации упругого — идеально пластического материала.

его достижении деформируется неограниченно (рис. 7.27). При нагружении деформация идет вдоль пути ABC , причем на отрезке AB справедливо соотношение $\sigma = E\epsilon$ линейной теории упругости. На отрезке BC мы имеем $\sigma = \sigma_0$ и ϵ может быть сколь угодно большим. После снятия нагрузки материал деформируется упруго независимо от пластического течения, т.е. вдоль пути CD , параллельного AB . Когда приложенное напряжение уменьшается до нуля, то упругая деформация $\epsilon = \sigma_0/E$ исчезает, а пластическая деформация AD остается.

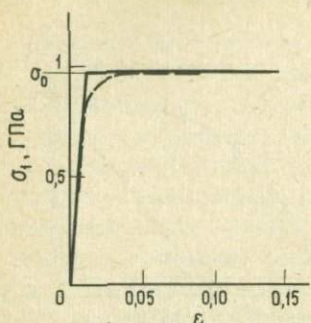


РИС. 7.28. Сплошной ломаной изображена упругая — идеально пластическая реология, пунктир — экспериментальная зависимость девиаторного напряжения σ_1 от деформации ϵ для дунита при всестороннем сжатии 500 МПа и температуре 800 °С [43].

На рис. 7.28 проводится сравнение упругой — идеально пластической реологии с результатами лабораторных исследований деформации дунита при всестороннем сжатии 500 МПа и температуре 800 °С. Дунит — характерный представитель мантии. Это порода, реологические свойства которой хорошо описываются упругой — идеально пластической реологической моделью. Типичная величина всестороннего давления, необходимого для перехода от хрупкого поведения к пластическому, составляет 500 МПа. При средней плотности породы 3000 кг/м³ такое давление соответствует глубине 17 км. На больших глубинах при значительных девиаторных напряжениях следует ожидать пластической деформации.

В случае одноосного нагружения условие перехода к пластическому режиму имеет вид $\sigma = \sigma_0$. Однако в случае трехмерных напряжений условие перехода более сложно. Обычно используют два критерия. Согласно критерию максимального сдвигового напряжения Треска, твердое тело начинает течь, если максимальное сдвиговое напряжение достигает критического значения σ^* . В разд. 2.4 мы показали, что максимальное сдвиговое напряжение в трехмерном случае равно полуразности максимального и минимального главных напряжений, т.е. $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Следовательно, критерий пластичности Треска имеет вид

$$\sigma^* = (\sigma_1 - \sigma_3)/2. \quad (7.254)$$

Поскольку в одноосном напряженном состоянии, например при $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, это условие должно сводиться к приведенному выше в тексте, мы должны положить

$$\sigma^* = \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma_0, \quad (7.255)$$

так что окончательный вид критерия Треска таков:

$$\sigma_0 = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (7.256)$$

Согласно критерию Мизеса, пластическая деформация начинается при

$$\sigma^{*2} = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2. \quad (7.257)$$

Правая часть равенства (7.257) представляет собой инвариант напряженного состояния, т.е. величину, остающуюся неизменной при замене σ_1 , σ_2 и σ_3 соответственно на σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{zz} , вычисленные в произвольной системе координат. При $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ этот критерий также должен сводиться к условию $\sigma_0 = \sigma_1$, откуда

$$\sigma^{*2} = 2\sigma_1^2 = 2\sigma_0^2. \quad (7.258)$$

Окончательно критерий Мизеса записывается как

$$2\sigma_0^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2. \quad (7.259)$$

ЗАДАЧА 7.21. Определите сдвиговое напряжение, при котором упругая — идеально пластическая среда переходит к пластическому режиму. Воспользуйтесь а) критерием Треска и б) критерием Мизеса.

ЗАДАЧА 7.22. Рассмотрите такое нагружение упругой — идеально пластической среды, под действием которого происходит плоская деформация (см. разд. 3.6) с $\epsilon_3 = 0$ и $\sigma_2 = 0$. Воспользовавшись критерием Мизеса, определите значение σ_1 , при котором происходит переход к пластической деформации. Определите значение ϵ_1 .

ЗАДАЧА 7.23. Рассмотрите напряженное состояние $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0$. Выведите условия перехода к пластическому режиму деформации, исходя из критериев Мизеса и Треска. Каково влияние гидростатической нагрузки на условие перехода?

Применим упругую — идеально пластическую реологию к задаче об изгибе пластины. Чисто упругий изгиб рассматривался в гл. 3. Мы видели, что распределение напряжений в упругой пластине определяется равенствами (3.64) и (3.70):

$$\sigma_{xx} = - \frac{E y}{1 - \nu^2} \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (7.260)$$

Напряжение увеличивается линейно с расстоянием y от срединной плоскости пластины. Пластина будет изгибаться упруго до тех пор, пока напряжения на ее поверхностях $y = \pm h/2$ не станут достаточными для того, чтобы произошел переход к пластичности. Значение σ_{xx} , при котором начинается пластическая деформация, обозначим $\sigma_{xx, 0}$. Величину $\sigma_{xx, 0}$ можно найти с помощью критерия Треска или Мизеса. Главными напряжениями в пластине являются σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{zz} . Напомним, что для двумерного изгиба пластины $\sigma_{yy} = 0$ и $\epsilon_{zz} = 0$. Из этих условий следует, что $\sigma_{zz} = \nu\sigma_{xx}$, и, значит, три главных

напряжения, перечисленные в порядке убывания ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), равны

$$\sigma_1 = \sigma_{xx}, \quad \sigma_2 = \sigma_{zz} = \nu \sigma_{xx}, \quad \sigma_3 = \sigma_{yy} = 0. \quad (7.261)$$

Подставляя равенства (7.261) в критерий Треска (7.256), находим

$$\sigma_{xx, 0} = \sigma_0. \quad (7.262)$$

С помощью критерия Мизеса находим

$$\sigma_{xx, 0} = \frac{\sigma_0}{(1 - \nu + \nu^2)^{1/2}}. \quad (7.263)$$

При $\nu = 0,25$ значение $\sigma_{xx, 0}$, соответствующее критерию Мизеса, лишь на 8% превышает значение $\sigma_{xx, 0}$, получаемое из критерия Треска.

Кривизна пластины в момент начала пластической деформации, согласно (7.260), есть

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{2 \sigma_{xx, 0} (1 - \nu^2)}{Eh}, \quad (7.264)$$

а соответствующее значение изгибающего момента (3.71) равно

$$M_0 = \sigma_{xx, 0} h^2 / 6. \quad (7.265)$$

Если изгибающий момент в пластине превышает M_0 , то упругое решение неприменимо, так как происходит пластическая деформация.

Рассмотрим напряженное состояние пластины при $M > M_0$. Будем считать, что поперечные сечения пластины при деформации остаются плоскими (гипотеза плоских сечений). При этом деформация будет по-прежнему линейной функцией расстояния y от срединной плоскости пластины, и соотношение (3.70), следующее из чисто геометрических соображений, останется справедливым. Во внутренней части пластины, где деформации малы, они будут упругими, но во внешней части деформации будут пластическими. В упругой части пластины, при $|y| < y_0$, продольные нормальные напряжения пропорциональны продольной деформации, которая в свою очередь пропорциональна y . В той части пластины, где деформации пластические, т.е. при $|y| > y_0$, напряжение равно постоянному значению $\sigma_{xx, 0}$. Таким образом, распределение напряжений σ_{xx} описывается равенствами

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} \sigma_{xx, 0} & \text{при } y_0 \leq y \leq \frac{h}{2}, \\ \sigma_{xx, 0} \left(\frac{y}{y_0} \right) & \text{при } -y_0 \leq y \leq y_0, \\ -\sigma_{xx, 0} & \text{при } -\frac{h}{2} \leq y \leq -y_0. \end{cases} \quad (7.266)$$

Подставляя (7.266) в равенство (3.61) и интегрируя, мы приходим к следующему выражению для изгибающего момента:

$$M = 2 \left\{ \int_0^{y_0} \sigma_{xx, 0} \left(\frac{y}{y_0} \right) y dy + \int_{y_0}^{h/2} \sigma_{xx, 0} y dy \right\} = \\ = \frac{\sigma_{xx, 0} h^2}{4} \left(1 - \frac{4y_0^2}{3h^2} \right). \quad (7.267)$$

При $y_0 = 0$ пластина целиком пластична. Соответствующий этому случаю максимальный (или критический) изгибающий момент M_c равен

$$M_c = \sigma_{xx, 0} h^2 / 4, \quad (7.268)$$

Это максимальный изгибающий момент, который может передать пластина. Изгибающий момент M_0 , при котором происходит переход к пластичности, соответствует $y_0 = h/2$ и связан с максимальным изгибающим моментом M_c следующим образом:

$$M_0 = \frac{2}{3} M_c. \quad (7.269)$$

Изгибающий момент можно увеличить еще на 50% по сравнению с моментом, соответствующим переходу к пластичности, и в результате мы получим максимальный изгибающий момент. Распределения напряжений в пластине при различных значениях изгибающего момента показаны на рис. 7.29.

Кривизна пластины связана с полутолщиной y_0 центрального упругого слоя и пределом упругости $\sigma_{xx, 0}$ равенством (7.260), которое дает

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{\sigma_{xx, 0} (1 - \nu^2)}{E y_0} \quad (7.270)$$

Исключая отсюда ν_0 с помощью равенства (7.267), мы приходим к следующей связи между кривизной пластины и изгибающим моментом:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{\sigma_{xx, 0} (1 - \nu^2)}{E \left(\frac{3}{4} h^2 - \frac{3M}{\sigma_{xx, 0}} \right)^{1/2}} \quad (7.271)$$

Это равенство представляет собой упругий — идеально пластический эквивалент формулы (3.71). Кривизна, соответствующая переходу к пластичности, равна

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_0 = - \frac{2\sigma_{xx, 0} (1 - \nu^2)}{E h} = - \frac{\sigma_{xx, 0} h^2}{6D}, \quad (7.272)$$

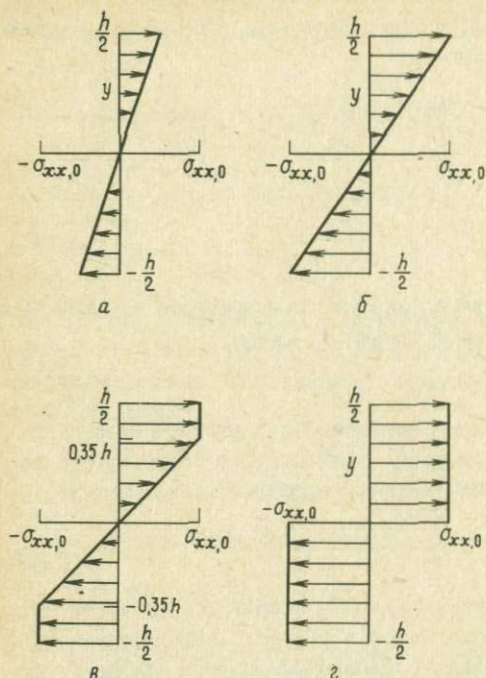


РИС. 7.29. Профили напряжения в изогнутой пластине при различных значениях изгибающего момента. а — упругий изгиб; б — переход к пластическому режиму, $\sigma_{xx} = \sigma_{xx,0}$ при $y = h/2$; в — частично пластический изгиб, $y_0 = 0,35h$; г — полностью пластический изгиб, $y_0 = 0$.

где D — изгибная жесткость, определенная равенством (3.72). Используя (7.272), соотношение (7.271) можно привести к следующей более удобной форме:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} / \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_0 = \left(3 - \frac{2M}{M_0} \right)^{-1/2}. \quad (7.273)$$

Эта зависимость кривизны пластины от изгибающего момента показана на рис. 7.30. Когда изгибающий момент приближается к критическому значению $M_c = 1,5 M_0$, кривизна стремится к бесконечности. Эффект быстрого нарастания кривизны называется *пластическим шарниром*.

На рис. 3.35 видно, что профили рельефа океанического дна в районе океанических желобов иногда хорошо согласуются с теоретическими профилями упругой изогнутой пластины. Однако, как показано на рис. 7.31, некоторые профили, например поперечный профиль поверхности дна у желоба Тонга, нельзя

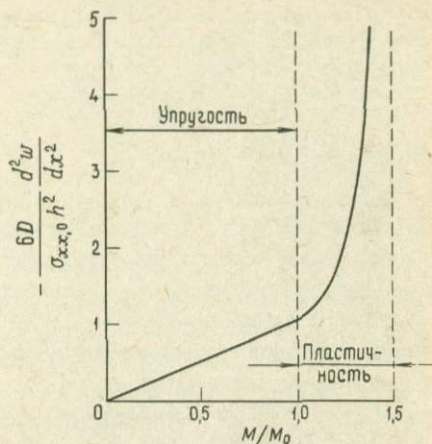


РИС. 7.30. Безразмерная кривизна пластины как функция отношения изгибающего момента M к моменту M_0 , соответствующему переходу к пластичности.

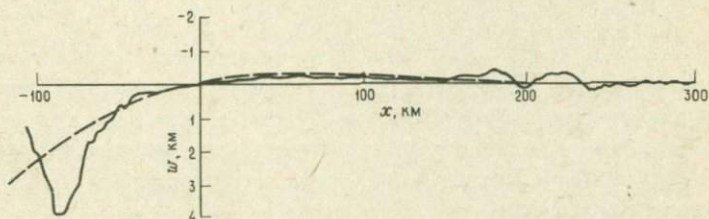


РИС. 7.31. Сплошная кривая — поперечный разрез через желоб Тонга, пунктир — упругий профиль при $x_b = 60$ км и $w_b = 0,2$ км.

объяснить на основе теории упругого изгиба. На рис. 7.31 реальный профиль сравнивается с теоретическим упругим профилем (3.159) при $x_b = 60$ км и $w_b = 0,2$ км. Видно, что кривизна реального профиля в желобе намного больше, чем предсказывает теория упругого изгиба. Если считать, что "лишняя" кривизна обусловлена эффектом пластического шарнира, то на основе проведенного анализа мы должны заключить, что добавочный изгиб должен быть там, где изгибающий момент максимален. Согласно равенству (3.160), это имеет место при $x = 2x_0 - x_b$, так что предсказываемое место пластического шарнира есть $x = -60$ км. Такой вывод хорошо согласуется с наблюдениями.

ЗАДАЧА 7.24. Рассмотрим длинный круговой цилиндр из упругого — идеально пластического материала, на внешнюю поверхность $r = a$ которого действует момент сил T . Напряженное состояние в цилиндре можно охарактеризовать азимуталь-

ным сдвиговым напряжением τ . Определите момент сил, при котором упругим остается ядро радиусом c . Считайте, что предел упругости при сдвиге равен σ_0 . Сдвиговое напряжение в упругой части цилиндра пропорционально расстоянию r от оси. Какова величина момента, соответствующего переходу к пластичности? Какой максимальный момент сил может выдержать цилиндр?

Дополнительная литература

Carter N.L. Steady State Flow of Rocks. Rev. Geophys. Space Phys., **14**, 301 – 360, 1976. Обзор экспериментально установленных законов течения металлов, керамик и пород, включающих такие минералы, как кальцит, доломит, кварц, оливин и пироксен. Рассмотрены экстраполяция лабораторных данных к физическим условиям в земной коре и верхней мантии, а также применение законов течения к внедрению диапиров, образованию соляных куполов, складкообразованию и течениям в верхней мантии.

Durney D.W. Pressure-Solution and Crystallization Deformation. Phil. Trans. Roy. Soc., **A283**, 229 – 240, 1976. Научная статья по термодинамике компрессионной ползучести при растворении. Описано, каким образом происходит диффузионный перенос массы через раствор, находящийся на границах зерен и в порах. Показано, как в результате этого процесса возникает деформация. Приводятся зависимости скорости деформации от напряжения и температуры.

Gueguen Y., Nicolas A. Deformation of Mantle Rocks. Ann. Rev. Earth Planet. Sci., **8**, 119 – 144, 1980. Обзор экспериментальных и теоретических исследований по деформации минералов верхней мантии. Изучение течений в верхней мантии проводится по результатам лабораторных и теоретических исследований в сочетании с наблюдениями и измерениями деформаций перидотитов в естественных условиях. Описываются механизмы деформации и перекристаллизации оливина, клинопироксена, ортопироксена и шпинелей, а также петрологические исследования структуры естественно деформированных перидотитов.

Heard H.C. Comparison of the Flow Properties of Rocks at Crustal Conditions. Phil. Trans. Roy. Soc., **A283**, 173 – 186, 1976. Описание ползучести в породах земной коры при температуре, скорости деформации и касательных напряжениях, характерных для земных недр. Суммированы данные лабораторных исследований по текучести льда, галита, мрамора, доломита, кварцита и дунита. Приведены данные как для влажных, так и для сухих пород, на основе которых можно оценивать влияние воды на ползучесть. Найденные законы ползучести каждой породы используются для оценки напряжений и коэффициентов эффективной вязкости при температурах и скоростях деформации, которых можно ожидать на различных глубинах в коре.

Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. London: Oxford University Press, 1967, 355 pp. [русский перевод изд. 1950 г.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956]. Фундаментальный учебник по теории пластичности, предназначенный для инженеров и математиков-

прикладников. Предполагается, что читатель знаком с теорией упругости и такими разделами математики, как теории ортогональных тензоров и гиперболических дифференциальных уравнений. В книге даны основы теории пластичности, решение задач на упругопластическое поведение тел, включая изгиб и кручение стержней и балок, плоские деформации и теорию линий скольжения. Рассмотрены стационарные двумерные задачи, в частности растяжения и сжатия пластин, нестационарные двумерные задачи, такие, как задачи об испытаниях на образование вмятин и на твердость, задачи с осевой симметрией и пластической анизотропией.

Hull D. Introduction to Dislocations. — Oxford: Pergamon Press, 2nd ed., 1975, 271 pp. Обзор геометрии, физических свойств и поведения дислокаций в кристаллах, предназначенный для хорошо успевающих старшекурсников, специализирующихся в металлургии, технике и физике. Первая часть книги посвящена геометрии, движению дислокаций и их влиянию на упругие свойства тел, рассмотрены также методы наблюдения и исследования дислокаций. Затем следует описание более тонких характеристик дислокаций в некоторых типах решеток: кубической гранецентрированной, гексагональной плотноупакованной, кубической объемноцентрированной, ионной, слоистой и структур с подрешетками. Рассмотрены переползание и пересечение дислокаций, их возникновение и размножение, скопления дислокаций и границы кристаллитов, прочность отожженных кристаллов и упрочнение из-за взаимодействия между дислокациями.

Morner N.A. (editor). Earth Rheology, Isostasy and Eustasy. — Chichester: John Wiley and Sons, 1980, 560 pp. Сборник докладов на симпозиуме по реологии Земли, установленной по наблюдениям изостазии ледниковых областей. В книге подробно рассматриваются вертикальные движения покрытых ледниками областей в Северной Америке и Фенноскандии и свободных от ледников континентальных, прибрежных и океанических регионов. Кроме того, анализируются данные об эвстатических и относительных изменениях уровня моря и изменениях высот геоида в зависимости от перераспределения ледниковых масс.

Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, vol. 2. — New York: McGraw-Hill Book Company, 1963, 705 pp. [русский перевод: *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. — М.: Мир, 1969]. Классический труд по деформации твердых тел, где особое внимание уделяется задачам, в которых важна роль температуры и скорости непрерывного деформирования. 1-я часть, посвященная принципам механики сплошной среды, состоит из трех глав, в которых рассматриваются термоупругость, механическая работа, производимая при малых конечных деформациях, и вариационные энергетические принципы. В следующих шести главах, составляющих 2-ю часть, рассматриваются упругость и вязкость, плоские деформации и напряжения, изгиб пластин и вязкоупругих стержней. 3-я часть, состоящая из пяти глав, посвящена опусканию при нагрузке и послеледниковому поднятию, температурным напряжениям

и деформациям, остаточным напряжениям, течению в цилиндрической трубе веществ с произвольной вязкостью. В следующих двух частях представлена теория идеально сыпучих и обобщенно пластических сред, а также ползучести металлов при повышенных температурах. В заключительной части рассмотрены некоторые задачи геомеханики.

Nicolás A., Poirier J.P. Crystalline Plasticity and Solid State Flow in Metamorphic Rocks. — London: John Wiley and Sons, 1976, 444 pp. Учебник по механике деформирования минералов и пород. Наиболее важны главы, посвященные структурному анализу метаморфических пород, элементам механики твердых сред и металловедения, процессам течения и отжига кристаллов, пластической деформации порообразующих минералов, образованию микроструктур и предпочтительных ориентаций при пластическом течении и перекристаллизации, анализу деформаций минералов и горных пород в натуральных условиях, интерпретации структур, текстур и предпочтительных ориентаций в перидотитах, крупномасштабному течению в перидотитах и геодинамике верхней мантии.

Prager W., Hodge P.G., Jr. Theory of Perfectly Plastic Solids. — New York: John Wiley and Sons, 1951, 264 pp. [русский перевод: *Прагер В., Ходж Ф.Г.* Теория идеально пластических тел. — М.: ИЛ, 1956]. Введение в математическую теорию идеально пластических сред, предназначенное для старшекурсников и выпускников, специализирующихся по технике и прикладной математике. После ознакомления с основными понятиями теории пластичности читателю предлагаются расчеты ферм и стержней, в том числе изгиб упруго-пластичных стержней, кручение цилиндрических и призматических балок, задачи, включающие плоские деформации, вариационные принципы. В конце каждой главы помещены задачи.

Reiner M. Lectures on Theoretical Rheology. — Amsterdam: North Holland Publishing Company, 3rd ed., 1960., 158 pp. Сборник из 15 лекций автора, посвященных деформации и течению материалов. Рассмотрены такие вопросы, как реологические кинематика и динамика, идеальная жидкость (тело Паскаля), идеально упругая твердая среда (тело Гука), ньютоновская жидкость, изгиб стержней, размерный анализ и реологическое подобие, реологическое тело Максвелла, реологическое тело Кельвина, пластическое течение, среда Сен-Венана, вязкость растворов, тело Бингама и теория конечных деформаций.

Rutter E.H. The Kinetics of Rock Deformation by Pressure Solution. Phil. Trans. Roy. Soc., **A283**, 202 — 219, 1976. Статья по компрессионной ползучести при растворении. Автор описывает модель деформации породы за счет растворения под давлением. Модель строится в предположении, что определяющим фактором процесса является диффузионный перенос массы вдоль границ зерен. Показано, что предложенная модель приводит к тому же закону течения, что и модель ползучести Кобле. Вычисляются модельные скорости деформа-

ции, происходящей за счет компрессионной ползучести при растворении; они сравниваются со скоростями деформации за счет других высокотемпературных диффузионных процессов. Найдено, что предсказываемые условия перехода между различными механизмами деформации согласуются с условиями перехода, установленными по исследованию микроструктуры пород, деформированных в естественных условиях.

Weertman J., Weertman J.R. Elementary Dislocation Theory. — New York: The Macmillan Company, 1964, 213 pp. Книга по теории дислокаций, предназначенная для студентов старших курсов. Для понимания изложения необходимо знание основ высшей математики и векторного анализа. Дается большое количество задач. Основное содержание книги посвящено описанию дислокаций, полю напряжений вокруг дислокаций, силам, действующим на дислокации, дислокационным реакциям в кристаллах, размножению дислокаций, двойникованию, силе Пайерлса, силам изображений и взаимодействию с точечными дефектами.

Wert C.A., Thomson R.M. Physics of Solids. — New York: McGraw-Hill, 2nd ed., 1970, 522 pp. [русский перевод 1-го изд.: *Уэрт Ч., Томсон Р. Физика твердого тела.* — М.: Мир, 1969]. Книга посвящена основам физики твердого тела и предназначена для хорошо успевающих студентов старших курсов, специализирующихся в данной дисциплине. Дается количественное изложение предмета на математическом уровне средней сложности. В 1-й части книги рассматриваются структура кристаллических решеток твердых тел и те свойства твердых тел, которые зависят от строения решетки. Затрагиваются вопросы, связанные с геометрией идеальных кристаллов, дефектами в кристаллах, теплоемкостью, вакансиями, атомами и ионами в междоузлиях, точечными дефектами, диффузией, фазовыми диаграммами и дислокациями. В 2-й части речь идет об электронной структуре твердых тел, рассматриваются металлы, ионные, ковалентные и молекулярные кристаллы и физические свойства полупроводников. В остальных главах теория электронной структуры применяется в расчетах электрических и магнитных свойств металлов, полупроводников и ионных кристаллов. Выводятся коэффициенты переноса и удельные теплоемкости металлов; рассматриваются полупроводниковые приборы, электромагнитные и диэлектрические свойства твердых тел, диамагнетизм, парамагнетизм и ферромагнетизм. В конце каждой главы имеются задачи.

Образование разломов

8.1. Введение

При низких температурах и давлениях породы хрупки и при достаточно больших напряжениях раскалываются. Сколы широко распространены в поверхностных породах всех типов. Если в плоскости скола происходит смещение, то он называется разломом. Разломы на поверхности бывают самых разных размеров. Смещения на мельчайших из них, представляющих собой свежие сколы, могут составлять лишь несколько миллиметров. Поверхностным проявлением наибольших разломов является широкая зона разрушенных пород, называемых *линкой трения*; ширина такой зоны может достигать 1 км и более, а относительное смещение бортов разлома – сотен километров.

Со смещениями по многим разломам связаны землетрясения. Когда стороны разлома смыкаются и перестают проскальзывать, а относительные смещения на расстоянии продолжают, то поперек разлома нарастает напряжение. Когда оно достигнет достаточной величины, происходит вспарывание и резкое смещение бортов разрыва. Такое явление называется *прерывистым (скачкообразным) скольжением*. После сцепления бортов разлома друг с другом в породах вокруг разлома накапливается энергия упругой деформации, поскольку относительное смещение пород, удаленных на разные расстояния от разлома, продолжается. Когда напряжение на разломе достигает критического значения, борта разлома проскальзывают и происходит землетрясение. При этом упругая энергия, запасенная в окружающих породах, частично переходит в тепло, а частично уносится сейсмическими волнами. Это явление называется *упругой отдачей*. Смещения, происходящие во время сильнейших землетрясений, достигают ~30 м.

Именно вдоль разломов часто происходят относительные перемещения жестких литосферных плит. В области океанических желобов океаническая литосфера пододвигается под смежную океаническую или континентальную плиту вдоль плоскости разлома, внедряющегося глубоко в Землю. Схождение двух литосферных плит приводит к образованию надвигов, с которыми связаны крупнейшие на планете землетрясения. Землетрясения повторяются периодически, так как процесс субдукции идет непрерывно. Плоскости таких разломов выходят на поверхность на дне океанических желобов, вследствие чего их подробное изучение затруднительно.

На границах наращивания плит по обе стороны океанического хребта происходит интенсивное сбросообразование. Поскольку литосфера у океанических хребтов тонкая и непрочная, возникающие здесь землетрясения слабы. Сег-

менты океанических хребтов соединяются трансформными разломами; на них происходит образование разломов со смещением по простиранию (сдвигов). Одним из крупных разломов такого рода в континентальной литосфере является служащий границей плит разлом Сан-Андреас. Этот разлом хорошо обнажается на поверхности и тщательно изучен (подробнее см. разд. 8.7). Интенсивное образование разломов всех типов наблюдается в зонах столкновения континентов. Сильные землетрясения, происходящие на всей территории Китая, связаны с обширной зоной деформации, обусловленной своим происхождением столкновению Индийской и Евразийской плит. Продолжение этой зоны столкновения континентов к западу обуславливает значительную сейсмичность в Турции (см. разд. 8.8).

8.2. Классификация разломов

В разд. 1.12 мы уже рассмотрели классификацию разломов. Здесь будут даны количественные определения типов разломов, основанные на относительной величине главных напряжений. Поскольку в недрах Земли не может возникать пустот, смещения на разломах должны происходить параллельно поверхностям разлома. Для простоты будем предполагать, что поверхность разлома является плоской; на самом деле разломы часто образуются вдоль искривленной поверхности или вдоль ряда поверхностей, смещенных друг относительно друга.

Рассмотрим сначала разлом типа надвига. Такой разлом возникает в случаях, когда океаническая литосфера пододвигается под соседнюю континентальную (или океаническую) плиту у океанического желоба. Образование надвигов также играет важную роль в процессе сжатия литосферы при столкновениях континентов. Идеализированная схема надвигов приведена на рис. 8.1. Смещения по плоскости разлома, падающей под углом β к горизонту, происходят за счет сжимающих напряжений. В результате возникает горизонтальная дефор-

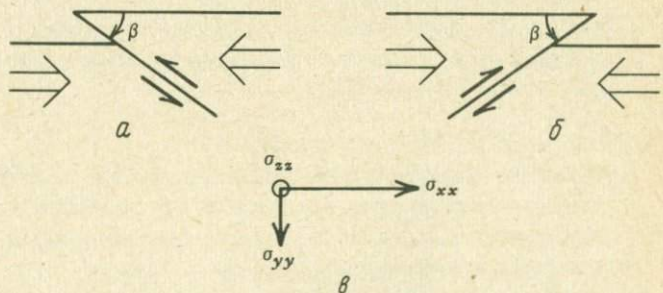


РИС. 8.1. Образование надвигов. а, б — два сопряженных надвига с углом падения β ; в — главные напряжения являются сжимающими (их величины $\sigma_{xx} > \sigma_{zz} > \sigma_{yy}$).

маша сжатия. Надвиги могут иметь одну из двух сопряженных геометрических форм, показанных на рис. 8.1, *а* и *б*. Приподнятый блок называется *висячим боком*, а опустившийся вниз — *лежачим боком*. Если по висячему боку происходит движение вверх, то разлом называют также *взбросом*.

Предположим, что главными осями напряжений являются x , y и z . Вертикальную компоненту напряжения σ_{yy} создает литостатическое давление вышележащих пород:

$$\sigma_{yy} = \rho g y. \quad (8.1)$$

Вертикальное девиаторное напряжение $\Delta\sigma_{yy}$ равно нулю. Для того чтобы обеспечить надвиг в ситуации, изображенной на рис. 8.1, требуется сжимающее девиаторное напряжение $\Delta\sigma_{xx}$, приложенное в направлении x :

$$\Delta\sigma_{xx} > 0. \quad (8.2)$$

Следовательно, горизонтальное сжимающее напряжение

$$\sigma_{xx} = \rho g y + \Delta\sigma_{xx} \quad (8.3)$$

превышает вертикальное литостатическое напряжение σ_{yy} , т.е.

$$\sigma_{xx} > \sigma_{yy}. \quad (8.4)$$

Естественно предположить, что для геометрии разлома, изображенной на рис. 8.1, деформация в направлении оси z отсутствует. Тогда деформированное состояние будет плоским и связь девиаторных компонент напряжений $\Delta\sigma_{zz}$ и $\Delta\sigma_{xx}$ определится равенством (3.44):

$$\Delta\sigma_{zz} = \nu \Delta\sigma_{xx}. \quad (8.5)$$

Мы видим, что девиаторное напряжение в направлении оси z также является сжимающим, но его величина оказывается меньшей (с коэффициентом пропорциональности ν) приложенного девиаторного напряжения. Горизонтальное сжимающее напряжение σ_{zz} равно

$$\sigma_{zz} = \rho g y + \Delta\sigma_{zz} = \rho g y + \nu \Delta\sigma_{xx}. \quad (8.6)$$

Оно превышает вертикальное напряжение σ_{yy} , но оказывается меньше горизонтального напряжения σ_{xx} . Таким образом, напряжения, приводящие к образованию надвига, удовлетворяют условию

$$\sigma_{xx} > \sigma_{zz} > \sigma_{yy}. \quad (8.7)$$

Вертикальное напряжение есть наименьшее главное сжимающее напряжение.

Подобно тому как надвиг образуется в результате горизонтальной деформации сжатия, нормальный сброс связан с горизонтальной деформацией растяжения. Образование нормальных сбросов происходит на склонах океанического хребта, где возникает новая литосфера. Сбросообразование имеет место также в континентальных рифтовых долинах, где литосфера растягивается. Под действием приложенных растягивающих напряжений нормальные сбросы

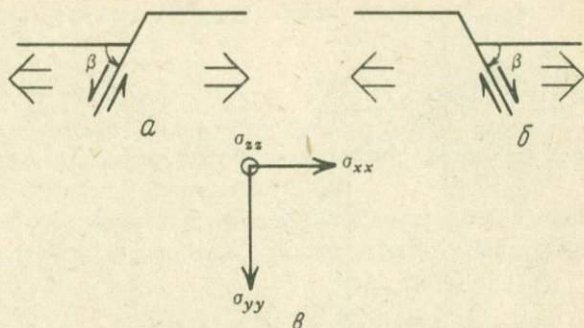


РИС. 8.2. Образование нормальных сбросов. a , b — два сопряженных сброса с углом падения плоскости сбрасывателя β ; ν — главные напряжения $\sigma_{yy} > \sigma_{zz} > \sigma_{xx}$.

возникают в одной из двух сопряженных геометрий, иллюстрируемых рис. 8.2. Смещения в плоскостях разлома, составляющих угол β с горизонтом, приводят к горизонтальной деформации растяжения. Нормальный сброс связан с таким напряженным состоянием, при котором вертикальная компонента напряжения представляет собой литостатическое давление $\sigma_{yy} = \rho g y$, а приложенное горизонтальное девиаторное напряжение $\Delta \sigma_{xx}$ является растягивающим:

$$\Delta \sigma_{xx} < 0. \quad (8.8)$$

Таким образом, горизонтальное напряжение σ_{xx} равно

$$\sigma_{xx} = \rho g y + \Delta \sigma_{xx}. \quad (8.9)$$

Оно меньше вертикального напряжения σ_{yy} :

$$\sigma_{yy} > \sigma_{xx}. \quad (8.10)$$

Деформированное состояние, изображенное на рис. 8.2, также можно считать плоским, и соотношение (8.5) остается справедливым. Следовательно, девиаторное напряжение $\Delta \sigma_{zz}$ в направлении оси z тоже является растягивающим, но по величине в ν раз меньшим, чем приложенное девиаторное напряжение $\Delta \sigma_{xx}$. Полное напряжение

$$\sigma_{zz} = \rho g y + \nu \Delta \sigma_{xx} \quad (8.11)$$

меньше, чем σ_{yy} , но больше, чем σ_{xx} . Напряжения в области нормального сброса удовлетворяют условию

$$\sigma_{yy} > \sigma_{zz} > \sigma_{xx}. \quad (8.12)$$

Вертикальное напряжение σ_{yy} является наибольшим сжимающим напряжением. Как надвиг, так и нормальный сброс представляют собой разломы со смещением по падению, поскольку смещение при их образовании направлено вдоль наклонной плоскости разлома.

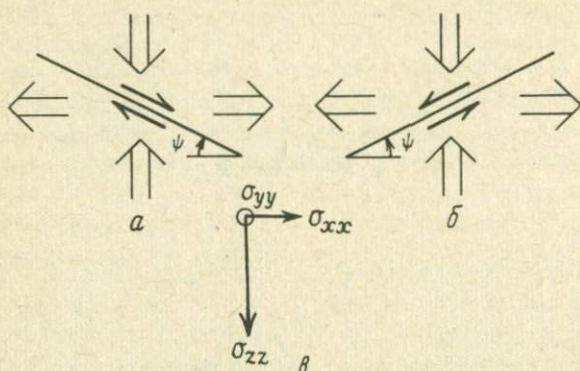


РИС. 8.3. Образование разломов со смещением по простиранию (сдвигов). а, б — два сопряженных сдвига, направленных под углом ψ к направлению главного напряжения σ_{xx} , в — главные напряжения $\sigma_{zz} > \sigma_{yy} > \sigma_{xx}$.

В случае разлома со смещением по простиранию (сдвига) смещение строго горизонтально. Поэтому в направлении y деформация отсутствует. Ситуация здесь та же, что и при плоской деформации с горизонтальными ненулевыми компонентами. На рис. 8.3 показан вид сверху на два сопряженных сдвига. Угол между плоскостью разлома и направлением главного напряжения σ_{xx} равен ψ . На рис. 8.3, а изображен правосторонний, а на рис. 8.3, б — левосторонний сдвиг.

Напряженное состояние в области геологического сдвига характеризуется вертикальным литостатическим напряжением $\sigma_{yy} = \rho g y$ и горизонтальными девиаторными главными напряжениями сжатия в одном направлении и растяжения — в другом. Для случая, показанного на рис. 8.3, мы имеем

$$\Delta \sigma_{xx} < 0, \quad \Delta \sigma_{zz} > 0. \quad (8.13)$$

Возможна другая ситуация:

$$\Delta \sigma_{xx} > 0, \quad \Delta \sigma_{zz} < 0. \quad (8.14)$$

В любом случае одно горизонтальное напряжение будет больше, чем σ_{yy} , а другое меньше, чем σ_{yy} . Если выполнены условия (8.13), то

$$\sigma_{zz} > \sigma_{yy} > \sigma_{xx}, \quad (8.15)$$

тогда как условие (8.14) приводит к неравенству

$$\sigma_{xx} > \sigma_{yy} > \sigma_{zz}. \quad (8.16)$$

Для разлома со смещением по простиранию вертикальное напряжение всегда имеет промежуточное значение по отношению к горизонтальным напряжениям.

Частным случаем разлома со смещением по простиранию является случай, когда

$$|\Delta\sigma_{xx}| = |\Delta\sigma_{zz}| = \tau_0, \quad (8.17)$$

т.е. когда напряженное состояние соответствует чистому сдвигу, рассмотренному в разд. 3.7. Напряжение τ_0 есть сдвиговое напряжение, приложенное поперек разлома. В этом случае угол ψ равен 45° .

Смещения на реальных разломах почти всегда представляют собой комбинацию смещений по простиранию и по падению, но одно из них обычно преобладает.

8.3. Трение на разломах

Рассмотрим простую модель механического движения бортов разлома (рис. 8.4, а). На блок породы, лежащий на поверхности, действуют две силы: нормальная F и параллельная V , передаваемая через пружину. Нормальное напряжение σ_n , действующее на поверхность A соприкосновения блока поро-

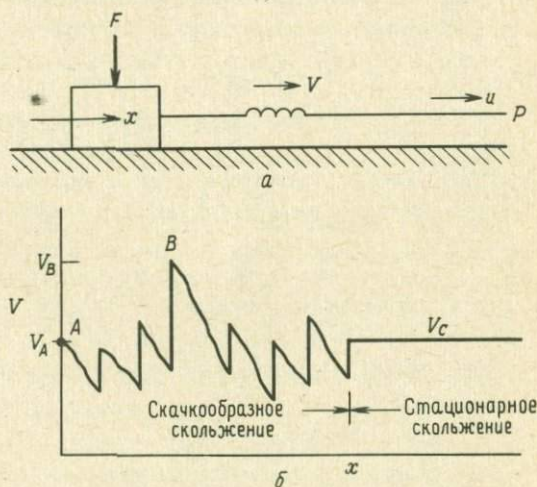


РИС. 8.4. Простейший опыт по исследованию трения. а — блок породы прижимается к поверхности силой F ; равномерное перемещение точки P создает силу V , действующую на блок через пружину. б — зависимость силы V от смещения блока x . Скольжение начинается в точке A , где сила $V = V_A$ достаточна для преодоления трения покоя (отношение V_A/F определяет коэффициент трения покоя). Максимальная горизонтальная сила V_B в точке B соответствует максимальному коэффициенту трения покоя, меняющемуся из-за неоднородности поверхности. Горизонтальная сила V_C , действующая после установления режима стационарного скольжения, определяет остаточный коэффициент трения (скольжения).

ды и горизонтальной поверхности, по которой он движется, равно $\sigma_n = F/A$ (тяжесть блока мы пренебрегаем), а сдвиговое напряжение τ , действующее на площадь A , есть $\tau = V/A$ (без учета инерции блока). Пусть конец нити P перемещается с постоянной скоростью u . Сначала трение между блоком и поверхностью не позволяет блоку двигаться, и сила, передаваемая блоку через пружину, нарастает со временем. Когда она достигнет значения V_A , достаточного для преодоления трения покоя, блок начнет скользить. Горизонтальная сила, необходимая для того чтобы сдвинуть блок, дается выражением

$$V = V_A = f_s F, \quad (8.18)$$

где f_s — коэффициент трения покоя. Чем больше сила F , прижимающая блок к поверхности, тем труднее его сдвинуть с места. Коэффициент трения зависит от типов пород, прижимаемых друг к другу, и от состояния соприкасающихся поверхностей, но не зависит от действующей по нормали силы F . Равенство (8.18) выражает так называемый закон Амонтона. Обычно он выполняется, когда в контакте находятся шероховатые поверхности или когда в промежутке между ними находится гранулированный материал, например глина трения. Разделив равенство (8.18) на площадь контакта A , находим

$$|\tau| = f_s \sigma_n, \quad (8.19)$$

где $|\tau| = |V|/A$ — абсолютная величина τ , а σ_n считается положительным. В форме (8.19) закон Амонтона применим в случаях почти плоских сколов или разломов. Из рис. 8.5 видно, что для того, чтобы началось скольжение сторон разлома, прижимаемых друг к другу нормальным напряжением σ_n , нужно приложить параллельно разлому сдвиговое напряжение величиной $|\tau| = f_s \sigma_n$.

После того как блок, изображенный на рис. 8.4, а, придет в движение, сила V , параллельная поверхности, может уменьшиться до такой величины, что трение о поверхность остановит блок. Возникнет скачкообразное скольжение: сила V в функции смещения x для этого случая изображена на



РИС. 8.5. Чтобы по разлому с приложенным нормальным сжимающим напряжением σ_n началось проскальзывание, нужно приложить сдвиговое напряжение величиной $|\tau| = f_s \sigma_n$.

рис. 8.4, б. Параллельная сила, не приводя к смещению блока, нарастает до тех пор, пока не будет превышено трение покоя и опять не начнется скольжение. Из-за неровностей и зернистости поверхности коэффициент трения покоя каждый раз, когда начинается скольжение, оказывается различным. Обозначим через V_B максимальную параллельную силу, отвечающую максимуму коэффициента трения покоя: $\max f_s = V_B/F$. Выступающие участки поверхностей, оказывающие влияние на скольжение, называются *шероховатостями*. При умеренных и больших нормальных напряжениях шероховатости разрушаются и из них образуется глина трения. Через некоторое время скачкообразное скольжение может прекратиться и начнется режим стационарного скольжения со скоростью u . Сила V_C , при которой скольжение стационарно, определяет остаточный коэффициент трения $f_r = V_C/F$ (который по смыслу соответствует коэффициенту трения скольжения. — *Ред.*).

Для определения коэффициентов трения проводилось много лабораторных экспериментов. Наиболее воспроизводимыми, по-видимому, являются результаты измерений максимального коэффициента трения. На рис. 8.6 приведены данные лабораторных измерений максимального сдвигового напряжения, при котором начинается скольжение для широкого класса пород, в том числе гранитов, габбро, известняков и песчаников, при нормальных напряжениях до 100 МПа. Хотя разброс данных значителен, они хорошо ложатся на прямую с $\max f_s = 0,85$.

На характер трения в разломах заметное влияние оказывает вода, присутствующая в большей части объема земной коры. Давление воды, оказываемое на разлом, называется поровым давлением и обозначается p_w . Эффективное нормальное напряжение, действующее во влажном разломе, равно истинному нормальному напряжению минус поровое давление. Поэтому во влажном разломе закон Амонтона можно записать в виде

$$|\tau| = f_s (\sigma_n - p_w). \quad (8.20)$$

Если вода свободно сообщается с поверхностью и потерь потока нет, то давление воды равно гидростатическому давлению: $p_w = \rho_w g y$. Поскольку плотность воды ρ_w значительно меньше плотности пород, гидростатическое давление обычно составляет 35 – 50% литостатического давления, создаваемого весом вышележащих пород. Однако в некоторых случаях вода находится в замкнутом объеме, и тогда ее давление может почти сравняться с давлением вышележащих пород или даже превзойти его. В этих случаях сдвиговое напряжение, препятствующее движению по разлому, мало.

Из равенства (8.20) видно, что введение жидкости может уменьшить силу трения, при которой начинается проскальзывание, т.е. возникает землетрясение. Известно много примеров, когда жидкости, закачиваемые при высоком давлении в скважины для захоронения отходов, вызывали слабые землетрясения. После прекращения подачи жидкости землетрясения прекращались. Вы-

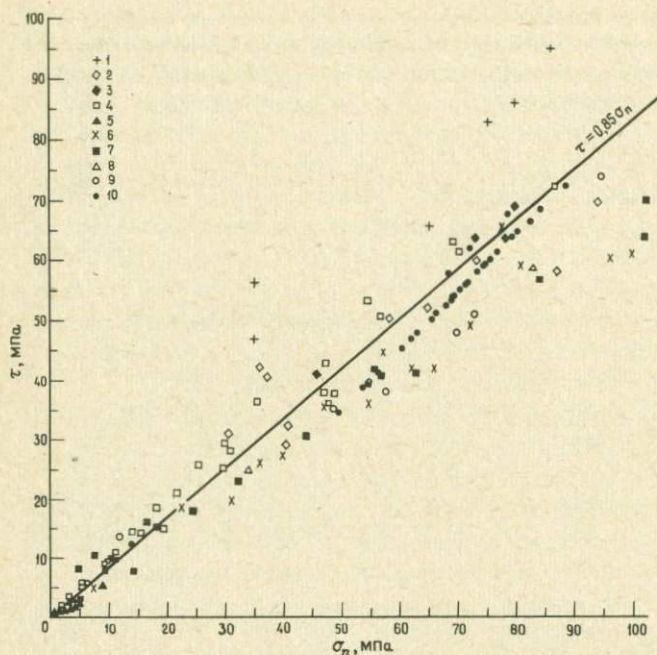


РИС. 8.6. Результаты лабораторных измерений максимального сдвигового напряжения τ , при котором начинается скольжение, в функции нормального напряжения σ_n для пород различных типов. Прямая — линейная аппроксимация результатов измерений, соответствующая максимальному коэффициенту трения покоя $\max f_s = 0,85$ [44]. 1 — известняк, габбро; 2 — песчаник Вебер трещиноватый; 3 — песчаник Вебер выпиленный; 4 — граувакка, песчаник, кварцит, гранит; 5 — гранит, габбро; 6 — цемент в жилах кварцевого монзонита; 7 — жилы кварцевого монзонита; 8 — гранит; 9 — градиорит; 10 — гнейс и милонит.

сказывались предположения, что и сильные землетрясения можно было бы предотвратить нагнетанием жидкости в крупные разломы. Давление жидкости снизит величину максимального сдвигового напряжения, требуемого для возникновения землетрясения, и смещение по разлому будет осуществляться путем многочисленных слабых землетрясений, а не редких сильных землетрясений. Однако опасение вызвать сильное землетрясение со всеми вытекающими последствиями пока удерживает нас от широкомасштабного эксперимента по проверке этой идеи.

ЗАДАЧА 8.1. Для аналитического описания периодического, скачкообразного скольжения можно использовать механическую модель, изображенную на рис. 8.4, а. Допустим, что сопротивление трения между блоком и поверхностью характеризуется постоянными коэффициентами f_{s1} и f_d статического (покоя) и динамического трения

соответственно. Тогда для приведения покоящегося блока в движение к нему нужно приложить горизонтальную силу $f_s F$. Однако на движущийся блок действует сила трения, равная $f_d F$. Покажите, что перед началом первого проскальзывания правый конец пружины смещается на величину

$$\xi_0 = f_s F / \kappa, \quad (8.21)$$

где κ — жесткость пружины. Найдите, что дальнейшее смещение блока происходит по закону

$$x = u \left\{ t - \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \sin \sqrt{\frac{\kappa}{m}} t \right\} + \frac{(f_s - f_d) F}{\kappa} \left\{ 1 - \cos \sqrt{\frac{\kappa}{m}} t \right\}, \quad (8.22)$$

где $t = 0$ — момент первого проскальзывания блока, а m — масса блока. Покажите, что в момент времени

$$\begin{aligned} t_1 &= 2 \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \arctg \left\{ - \frac{(f_s - f_d) F}{u \sqrt{m \kappa}} \right\} = \\ &= 2 \pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}} - 2 \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \arctg \left\{ \frac{(f_s - f_d) F}{u \sqrt{m \kappa}} \right\}, \end{aligned} \quad (8.23)$$

пройдя путь

$$x_1 = u t_1 + 2(f_s - f_d) F / \kappa, \quad (8.24)$$

блок остановится, а спустя время

$$t_2 = 2(f_s - f_d) F / \kappa u, \quad (8.25)$$

опять придет в движение. После этого весь цикл, имеющий период $t_1 + t_2$, повторяется.

8.4. Теория разломообразования Андерсона

Опираясь на результаты, полученные в двух предыдущих разделах, мы можем теперь определить угол β падения плоскости разлома типа сброса или надвига как функцию коэффициента трения f_s . Как и в разд. 8.2, будем предполагать, что горизонтальные σ_{xx} и σ_{zz} и вертикальное σ_{yy} напряжения являются главными напряжениями, а разлом представляет собой плоскость, падающую под углом β (см. рис. 8.1 и 8.2). Вновь предположим, что вертикальное напряжение σ_{yy} есть литостатическое давление, а σ_{xx} — сумма литостатического давления и тектонического девиаторного напряжения $\Delta \sigma_{xx}$:

$$\sigma_{yy} = \rho g y, \quad (8.26)$$

$$\sigma_{xx} = \rho g y + \Delta \sigma_{xx}. \quad (8.27)$$

Для надвига $\Delta \sigma_{xx}$ положительно, а для нормального сброса отрицательно.

Чтобы применить закон Амонтона, нужно связать σ_{xx} и σ_{yy} с σ_n и τ . Сравнивая геометрическое построение на рис. 8.7 с рис. 2.11, мы видим, что

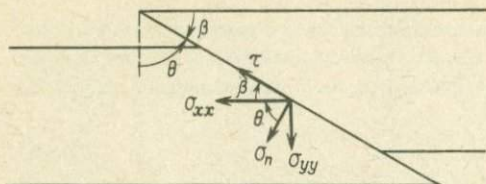


РИС. 8.7. Главные, нормальное и касательное напряжения на разломе со смещением по падению.

σ_n и τ можно определить из равенств (2.45) и (2.46), если приравнять стоящие в этих равенствах величины σ_1 и σ_2 величинам σ_{xx} и σ_{yy} ; в результате получается

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta, \quad (8.28)$$

$$\tau = -\frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\theta, \quad (8.29)$$

где $\theta = \pi/2 - \beta$ есть угол между плоскостью разлома и вертикалью. Подставляя выражения (8.26) и (8.27) в равенства (8.28) и (8.29), находим, что нормальное и касательное напряжения на разломе равны

$$\sigma_n = \rho gy + \frac{\Delta\sigma_{xx}}{2} (1 + \cos 2\theta), \quad (8.30)$$

$$\tau = -\frac{\Delta\sigma_{xx}}{2} \sin 2\theta. \quad (8.31)$$

С учетом порового давления связь между этими напряжениями дается законом Амонтона в форме (8.20). Подставляя равенства (8.30) и (8.31) в формулу (8.20), находим

$$\pm \frac{\Delta\sigma_{xx}}{2} \sin 2\theta = f_s \left\{ \rho gy - p_w + \frac{\Delta\sigma_{xx}}{2} (1 + \cos 2\theta) \right\}, \quad (8.32)$$

где верхний знак соответствует надвигу ($\Delta\sigma_{xx} > 0$), а нижний – нормальному сбросу ($\Delta\sigma_{xx} < 0$). Разрешая равенство (8.32) относительно тектонического напряжения $\Delta\sigma_{xx}$, получаем его выражение через угол θ между плоскостью разлома и вертикалью:

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{2f_s (\rho gy - p_w)}{\pm \sin 2\theta - f_s (1 + \cos 2\theta)}. \quad (8.33)$$

В породах континентальной коры имеется много уже прежде образовавшихся трещин и разрывов, которые представляют собой зоны пониженной прочности.

Мы будем предполагать, что под действием тектонического напряжения эти ослабленные зоны вновь активизируются и образуют разломы со смещением по падению, положение плоскости которых определяется из условия минимума тектонического напряжения, необходимого для образования разрыва. Иными словами, надвиги и сбросы образуются под углами, отвечающими минимуму $|\Delta\sigma_{xx}|$. Угол θ , который минимизирует величину $|\Delta\sigma_{xx}|$, определяемую формулой (8.33), можно определить из условия $d\Delta\sigma_{xx}/d\theta = 0$, откуда следует, что

$$\operatorname{tg} 2\theta = \mp 1/f_s. \quad (8.34)$$

Это равенство можно переписать как условие для β :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \pm 1/f_s. \quad (8.35)$$

Верхние знаки в этих равенствах соответствуют надвигу, а нижние – сбросу. Зависимость угла падения плоскости надвига или сброса от коэффициента трения показана на рис. 8.8. Видно, что плоскости надвигов падают более полого, чем плоскости нормальных сбросов.

Тектонические напряжения, соответствующие найденным углам заглубления, можно получить, если подставить равенство (8.34) в (8.33). Мы находим

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{\pm 2f_s (\rho g y - p_w)}{(1 + f_s^2)^{1/2} \mp f_s}, \quad (8.36)$$

где, как и выше, верхние знаки относятся к надвигам, а нижние – к сбросам. Зависимости тектонических напряжений (8.36) на сбросах и надвигах от коэф-

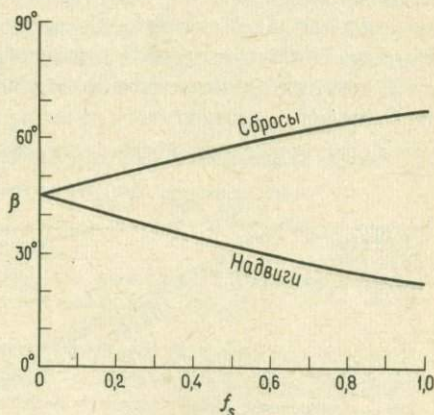


РИС. 8.8. Зависимость угла падения β от коэффициента трения f_s для сбросов и надвигов.

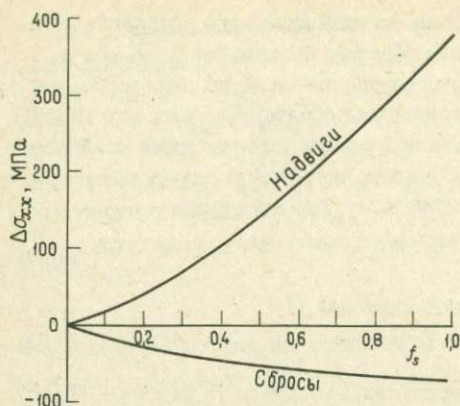


РИС. 8.9. Зависимость девиаторного напряжения от коэффициента трения покоя для сбросов и надвигов при $\rho_w = \rho_w g y$, $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$, $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$, $g = 10 \text{ м/с}^2$, $y = 5 \text{ км}$.

коэффициента трения показаны на рис. 8.9 для случая $\rho_w = \rho_w g y$, $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$, $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$, $g = 10 \text{ м/с}^2$ и $y = 5 \text{ км}$. Для образования надвига требуется несколько большая абсолютная величина напряжения, чем для образования сброса. Типичное значение коэффициента трения, полученное на основе лабораторных измерений, равно 0,85 (рис. 8.6). Согласно равенству (8.35), оно соответствует углу падения $\beta = 24,8^\circ$ для надвига и $\beta = 65,2^\circ$ для сброса. Соответствующие значения $\Delta\sigma_{xx}$ на глубине 5 км получатся равными 305 МПа для надвига и -65 МПа для сброса. Приведенный вывод угла падения плоскости разломов для разломов со смещением по падению разработан Андерсоном, и его часто называют теорией разломообразования Андерсона.

В качестве примера крупного надвига рассмотрим надвиг Уинд-Ривер в шт. Вайоминг. Строение этого разлома, выявленное методом профилирования путем регистрации отраженных сейсмических волн, иллюстрирует рис. 8.10;

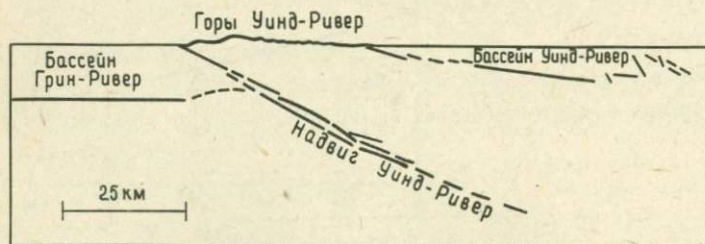


РИС. 8.10. Глубинное строение надвига Уинд-Ривер (шт. Вайоминг), найденное в результате исследования глубоких слоев коры методом отраженных волн [45].

найденная структура, по существу, идентична изображенной на рис. 8.1. Движение надвинутого блока привело к воздыманию гор Уинд-Ривер, представляющих собой горный пояс длиной 220 км и шириной 70 км; высота наивысшей точки здесь равна 4267 м. Ядро горной системы сложено докембрийскими породами возрастом 2,7 млрд. лет, что указывает на их происхождение из глубинных областей земной коры. Понятно, что здесь произошли значительные подъем и эрозия. Опускание блока, расположенного к западу от надвига Уинд-Ривер, привело к образованию бассейна Грин-Ривер — осадочного бассейна, содержащего большие запасы нефти. Максимальная глубина этого бассейна — около 12 км. Горы Уинд-Ривер — один из элементов в последовательности хребтов ларамийской складчатости в шт. Вайоминг, имеющих возраст 50 — 70 млн. лет. Они явно возникли в результате сжатия земной коры, когда деформация сжатия привела к возникновению последовательности крупных надвигов, ответственных за появление горных хребтов и смежных осадочных бассейнов. Сокращение горизонтальных размеров земной коры в области надвига Уинд-Ривер оценивается по меньшей мере в 21 км, а поднятие по вертикали — в 13 км.

Разлом, показанный на рис. 8.10, ясно прослеживается сейсмическим методом до глубины 24 км и, возможно, уходит вниз до глубины 36 км. Во всем этом диапазоне глубин угол падения плоскости разлома почти не меняется и составляет в среднем 35° . Если предположить, что в данном случае применима теория разломообразования Андерсона, то соответствующий такому углу коэффициент трения, согласно равенству (8.35), оказывается равным $f_s = 0,36$. Хотя это значение коэффициента трения значительно меньше полученного из лабораторных экспериментов, весьма вероятно, что для крупномасштабных деформаций, с которыми связано образование крупных надвигов, характерен именно такой небольшой коэффициент трения. Пониженное значение f_s вполне может объясняться значительной величиной порового давления. При $f_s = 0,36$ угол падения нормального сброса, согласно равенству (8.35), равен 55° . Типичные углы падения обнажающихся на поверхности нормальных сбросов составляют $55 - 65^\circ$.

ЗАДАЧА 8.2. Применяя теорию разломообразования Андерсона к разлому со смещением по простиранию, изображенному на рис. 8.3, покажите, что

$$\operatorname{tg} 2\psi = \pm f_s, \quad (8.37)$$

где верхний знак соответствует случаю $\Delta\sigma_{xx} > 0$, а нижний — случаю $\Delta\sigma_{xx} < 0$. Покажите, что этот результат не зависит от отношения $\Delta\sigma_{zz} / \Delta\sigma_{xx}$.

ЗАДАЧА 8.3. Предложен ряд критериев хрупкого разрушения породы, сформулированных в виде условий для напряженного состояния, при котором происходит разрушение. Согласно одному из них, критерию Кулона — Навье, разрушение происходит вдоль плоскости, на которой сдвиговое напряжение τ достигает величины

$$|\tau| = s + \mu\sigma_n, \quad (8.38)$$

где S — предел прочности породы на сдвиг, а μ — коэффициент внутреннего трения. Рассмотрим двумерное напряженное состояние, характеризуемое главными напряжениями σ_1 и σ_2 , и покажите, что $|\tau| - \mu\sigma_n$ достигает максимума на плоскости, нормаль к которой составляет угол θ с направлением большего главного напряжения; этот угол определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\theta = -1/\mu. \quad (8.39)$$

Покажите, что на этой плоскости $|\tau| - \mu\sigma_n$ равно

$$|\tau| - \mu\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)(1 + \mu^2)^{1/2} - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)\mu. \quad (8.40)$$

Согласно критерию Кулона — Навье, разрушение происходит тогда, когда правая часть равенства (8.40) достигнет величины S . Поэтому критерий разрушения запишется в виде формулы

$$\sigma_1 \{ (1 + \mu^2)^{1/2} - \mu \} - \sigma_2 \{ (1 + \mu^2)^{1/2} + \mu \} = 2S. \quad (8.41)$$

Выразите предел прочности породы на сжатие через μ и S . Из равенства (8.39) видно, что угол θ должен превышать 45° , т.е. направление разрушения при сдвиге составляет острый угол с σ_1 . Критерий Кулона — Навье с неплохой точностью выполняется для изверженных пород в состоянии сжатия.

8.5. Тектонические покровы и гравитационное соскальзывание

Смещение по надвигам представляет собой важный механизм сокращения континентальной коры. Другим механизмом ее сокращения является образование протяженных тонких тектонических покровов (рис. 8.11), когда континентальная кора разделяется на два слоя, причем верхний хрупкий слой A надвигается на смежный хрупкий слой B , а нижняя часть континентальной коры C испытывает приблизительно двукратное утолщение при пластическом сжатии. Надвинутый хрупкий слой коры (A) образует *тектонический покров*.

Для исследования механизма формирования тектонического покрова воспользуемся идеализированной моделью вбивания клина (рис. 8.12). Предположим, что покров изостатически скомпенсирован. Тогда углы γ и β связаны соотношением

$$\beta = \left(\frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c} \right) \gamma, \quad (8.42)$$

где мы считаем углы малыми, так что $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$ и $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$. Условие статического равновесия горизонтальных сил, действующих на участок тектонического покрова длиной l , означает, что полная горизонтальная сила, приложенная к основанию покрова, равна сумме F_1 литостатического давления и тектонического напряжения $\Delta\sigma_{xx}$, проинтегрированным по толщине покрова при $x = l$

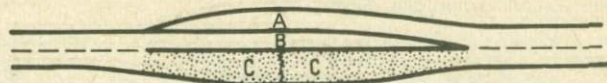


РИС. 8.11. Сокращение земной коры, осуществляемое путем формирования тектонического покрова *A* на смежной хрупкой верхней коре *B*. Затененный точками слой *C* нижней коры испытывает при этом пластическую деформацию приблизительно с двукратным утолщением.

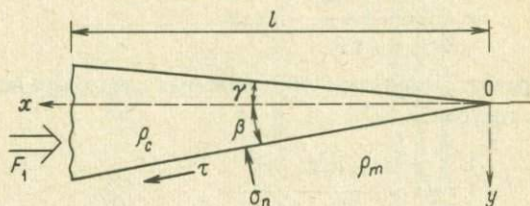


РИС. 8.12. Клинообразная модель тектонического покрова.

(рис. 8.12). Величина F_1 равна

$$F_1 = \int_{-\gamma l}^{\beta l} (\gamma l + y) \rho_c g dy + \int_{-\gamma l}^{\beta l} \Delta \sigma_{xx} dy =$$

$$= \frac{\rho_c g}{2} (\gamma + \beta)^2 l^2 + \Delta \sigma_{xx} (\gamma + \beta) l. \quad (8.43)$$

Подставляя соотношение (8.42) в равенство (8.43), находим

$$F_1 = \frac{\rho_c g}{2} \left(\frac{\rho_m}{\rho_m - \rho_c} \right)^2 \gamma^2 l^2 + \Delta \sigma_{xx} \left(\frac{\rho_m}{\rho_m - \rho_c} \right) \gamma l. \quad (8.44)$$

Чтобы вычислить горизонтальную силу, действующую на основание тектонического покрова, нужно сначала определить нормальное и сдвиговое напряжения на разрыве в основании покрова. Литостатическое давление на эту базальную плоскость на расстоянии x от острия клина равно $\rho_c g (\gamma + \beta) x$. Поскольку углы γ и β малы, σ_n в базальной плоскости приблизительно равно литостатическому давлению:

$$\sigma_n = \rho_c g (\gamma + \beta) x = \frac{\rho_c \rho_m}{\rho_m - \rho_c} \gamma g x. \quad (8.45)$$

Горизонтальная компонента силы, обусловленной нормальным напряжением

в базальной плоскости, равна

$$\int_0^l \sigma_n \beta \, dx = \frac{\rho_c^2 \rho_m g \gamma^2 l^2}{2(\rho_m - \rho_c)^2} \quad (8.46)$$

(мы положили $\sin \beta \approx \beta$, так как угол β мал). Согласно закону Амонтона в форме (8.19), сдвиговое напряжение, действующее на разлом в основании покрова при становлении последнего, равно

$$\tau = \frac{f_s \rho_c \rho_m}{\rho_m - \rho_c} \gamma g x. \quad (8.47)$$

Горизонтальная сила, обусловленная сдвиговым напряжением в базальной плоскости, равна

$$\int_0^l \tau \, dx = \frac{f_s \rho_c \rho_m \gamma g l^2}{2(\rho_m - \rho_c)}, \quad (8.48)$$

где при малых β мы положили $\cos \beta \approx 1$. В соответствии с условием равновесия сил, приложенных к тектоническому покрову, мы должны приравнять выражение (8.44) к сумме правых частей равенств (8.46) и (8.48). В результате находим

$$\Delta \sigma_{xx} = l g \rho_c (f_s - \gamma) / 2. \quad (8.49)$$

Отсюда видно, что если коэффициент трения f_s больше угла γ надвига, то для его формирования требуется сжимающее тектоническое напряжение. Однако если коэффициент трения меньше угла γ , то для формирования покрова достаточно гравитационной массовой силы, действующей на основание покрова. Этот эффект называется *гравитационным соскальзыванием*.

Примером надвигового покрова может служить большой тектонический покров шириной 250 км или более, который, по-видимому, составляет сердцевину Аппалачских гор, расположенных на юго-востоке США. Аппалачи представляют собой остатки огромного горного пояса, образовавшегося в результате столкновения континентов, когда закрывался прото-Атлантический океан (Япетус). Этот океан возник в позднекембрийское время после раскола некогда существовавшего суперконтинента. В раннем кембрии в том месте, где сейчас расположено восточное побережье США, образовалась система глубоководных желобов. Возникла и островная дуга, остатки которой можно видеть сейчас в сланцевом поясе Каролина (рис. 8.13). Замыкание прото-Атлантического океана завершилось в каменноугольный и пермский периоды (примерно 250 – 300 млн. лет назад). Считается, что линия сочленения прото-Африки и прото-Северной Америки проходит к востоку от сланцевого пояса Каролина.

Во время столкновения континентов кристаллические породы прото-Африки и островные дуги оказались надвинуты в северо-западном направлении на

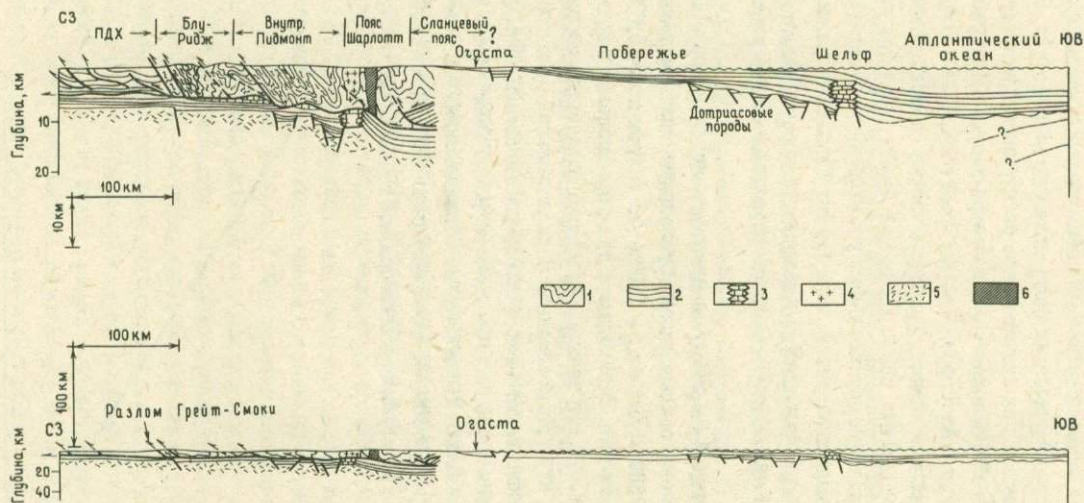


РИС. 8.13. Поперечный разрез Аппалачских гор (юго-восток США) — формирование аллохтонного покрова с юго-востока [46]. ПДХ — провинция Долин и Хребтов. 1 — метаморфический комплекс, 2 — осадки, 3 — рифовый (?) комплекс, 4 — гранит, 5 — докембрийский фундамент, 6 — пояс Кингс-Маунтин.

прото-Северную Америку в виде гигантского надвига. Строение этого региона, установленное на основе глубинного сейсмического профилирования с помощью отраженных сейсмических волн, показано на рис. 8.13. В данном случае надвиг был перемещен на значительное расстояние и поэтому называется *аллохтонным покровом*. Расположенная к северо-западу провинция Долин и Хребтов сложена осадочными породами, которые соскребал и толкал перед собой при своем движении надвиг. Кристаллические породы провинции Блу-Ридж отделены от осадочных пород провинции Долин и Хребтов надвигом Грейт-Смоки. Этот разлом, опускающийся у поверхности относительно круто, на глубине быстро выполаживается; он и служит базальным разрывом покрова. Разлом Бревард, разделяющий кристаллические породы провинций Внутренний Пидмонт и Блу-Ридж, представляет собой надвиг в рассматриваемом тектоническом покрове.

Для покрова шириной $l = 250$ км и максимальной толщиной 15 км угол при вершине клина в модели, описывающей образование покрова, равен $\gamma + \beta = 3,43^\circ$. Из (8.42) при $\rho_c = 2600$ кг/м³ и $\rho_m = 3300$ кг/м³ получается $\gamma = 0,73^\circ$ и $\beta = 2,70^\circ$. Тектоническое напряжение, необходимое для формирования покрова, можно найти из формулы (8.49); его зависимость от коэффициента трения приведена на рис. 8.14. Видно, что гравитационное соскальзывание будет происходить при $f_s < 0,0127$; коэффициент трения при предполагаемых здесь уровнях напряжения оказывается очень мал. Он действительно может быть очень малым, поскольку, как показывают сейсмические исследования, под большей частью тектонического покрова в южных Аппалачах располагается тонкий слой осадочных пород, вероятно служивших своеобразной смазкой (так как это — ослаб-

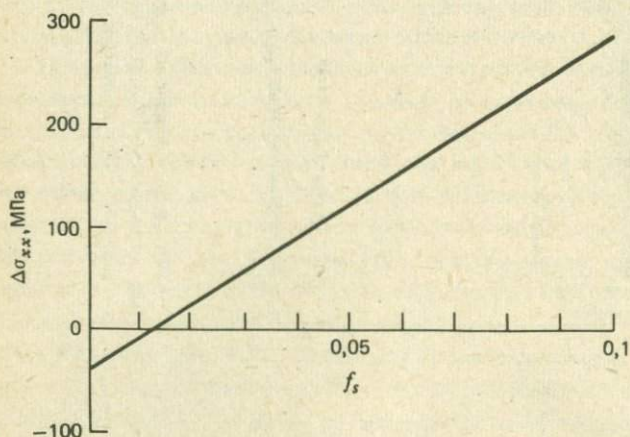


РИС. 8.14. Тектоническое напряжение, необходимое для образования Аппалачского покрова, как функция коэффициента трения.

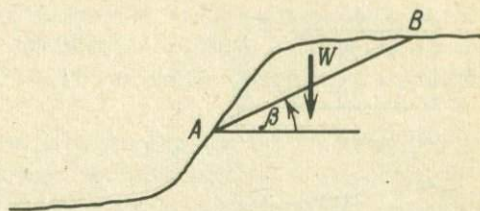


РИС. 8.15. Наклон β поверхности AB потенциального оползания пород.

ленные легкодеформируемые породы) под движущимся покровом. Покров, надвинутый на зону ослабленных пород, называется также *складкой срыва*.

ЗАДАЧА 8.4. Рассмотрим устойчивость склона (рис.8.15) по отношению к соскальзыванию вдоль плоскости AB . Предполагая, что справедлив закон Амонта, покажите, что условие устойчивости имеет вид

$$\operatorname{tg} \beta < f_s . \quad (8.50)$$

8.6. Скачкообразное скольжение и упругая отдача

Посредством смещений по разломам реализуется значительная доля деформаций в верхней части земной коры. Иногда эти смещения происходят непрерывно при скоростях тектонических движений порядка десятков миллиметров в год. Смещения такого типа, называемые *ползучестью по разлому*, соответствуют стационарному режиму скольжения (см. рис. 8.4). Сдвиговое напряжение, передаваемое поперек разлома, определяется коэффициентом трения скольжения: $f_\tau = V_c / F$. Однако гораздо чаще смещения на разломах происходят во время землетрясений, а в остальное время стороны разлома остаются сцепленными между собой (разлом заперт). Такое явление называется скачкообразным скольжением; его механический аналог мы рассмотрели в задаче 8.1.

На рис. 8.16 показана простая модель периодического проскальзывания по разлому. Предположим, что деформации не зависят от глубины, и будем пренебрегать силами, действующими на подошвы плит. На рис. 8.16, *a* показан разлом сразу же после сильного землетрясения, после которого он запирается. Напряжение τ_{fd} между краями разлома является динамическим напряжением трения, которое действовало на разломе в конце вспарывания. Относительная скорость участков смежных плит, отстоящих на расстояние b от разлома, равна u_0 , так что нарастание сдвиговой деформации происходит по закону $u_0 t / (4b)$ — см., например, равенство (2.94) и рис. 8.16, *б*. Согласно равенству (3.49), сдвиговое напряжение на разломе в функции времени t , отсчитываемого от момента последнего смещения, есть

$$\tau = \tau_{fd} + \frac{G u_0 t}{2b} , \quad (8.51)$$

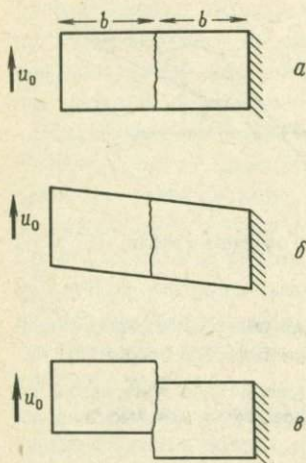


РИС. 8.16. Скачкообразное скольжение и упругая отдача на разломе. а — склеивание разлома после сильного землетрясения; б — деформированное состояние непосредственно перед следующим сильным землетрясением; в — запираение разлома после этого сильного землетрясения и начало очередного цикла.

где G — модуль сдвига. В запертом состоянии разлом может передать сдвиговое напряжение, не превышающее напряжение трения покоя τ_{fs} . По достижении этого напряжения происходит проскальзывание. Следовательно, промежуток времени между проскальзываниями по разлому равен

$$t^* = \frac{2b}{Gu_0} (\tau_{fs} - \tau_{fd}). \quad (8.52)$$

Смещение или проскальзывание происходит за несколько секунд, так что удаленные края плит в течение этого времени можно считать неподвижными. Восстановление первоначального состояния плит, в процессе которого снимается накопленная сдвиговая деформация $\epsilon = u_0 t^*/(4b)$, называется *упругой отдачей*. Согласно (2.94), смещение Δw по разлому равно $2\epsilon \cdot 2b$, или

$$\Delta w = 2\epsilon \cdot 2b = 4b \frac{u_0 t^*}{4b} = \frac{2b}{G} (\tau_{fs} - \tau_{fd}). \quad (8.53)$$

Разность $\tau_{fs} - \tau_{fd}$ представляет собой сброшенное напряжение на разломе во время землетрясения. После землетрясения разлом запирается и цикл повторяется (рис. 8.16, в).

Смещение по разрыву, происходящее во время землетрясения, можно измерить по нарушению поверхности. Типичное значение смещения при сильном землетрясении равно 5 м. Определить величину сброшенного напряжения

при землетрясении трудно. Оценки показывают, что при сильных землетрясениях она лежит в диапазоне $10 - 100 \text{ МПа}$ ($100 - 1000 \text{ бар}$). Принимая для кристаллических пород $G = 30 \text{ ГПа}$, из (8.53) находим, что расстояние b находится в пределах от 750 м до $7,5 \text{ км}$.

Как уже говорилось, смещение по разлому происходит при землетрясении за несколько секунд. Оно распространяется вдоль разлома со скоростью, по порядку величины равной скорости звука в породе (несколько километров в секунду). В результате смещения по разлому в окружающих породах возбуждаются сейсмические волны, которые уносят значительную долю накопленной упругой энергии. Остальная энергия переходит в тепло при трении на разломе.

Сейсмические волны вызывают движение почвы, которое является основной причиной разрушений при землетрясениях. Мерой силы землетрясения является, в частности, интенсивность его проявлений в баллах (балльность), типичная шкала которой приведена в табл. 8.1. Максимальные интенсивности обычно наблюдаются вблизи разлома, на котором происходит землетрясение, и с удалением от разлома они уменьшаются. Интенсивность также зависит от типа и толщины почвенного слоя; на рыхлых грунтах большой толщины она обычно больше. Поскольку интенсивность землетрясения устанавливается субъективно, пользоваться шкалой балльности надо с осторожностью.

Таблица 8.1. Типичная шкала интенсивности (балльности) землетрясений

I	Не ощущается
II	Ощущается немногими
III	Качаются висящие предметы
IV	Дрожат окна и двери
V	Спящие просыпаются
VI	Разбиваются окна и стеклянные предметы
VII	Трудно удерживаться на ногах
VIII	Ломаются ветви деревьев
IX	Трещины в грунте — общая паника
X	Большие оползни — разрушаются самые прочные каменные строения
XI	Почти полное разрушение

С изобретением сейсмографа появилась возможность ввести количественную меру величины землетрясений. *Магнитуда* M землетрясения определяется на основе измерений смещения поверхности на сейсмических станциях. Магнитуда связана с общей упругой энергией E , излученной в виде сейсмических волн, следующим образом:

$$\lg E = 1,44 M + 5,24, \quad (8.54)$$

где E измеряется в джоулях. Это соотношение носит приближенный характер, поскольку затухание сейсмических волн в различных областях различно. Кроме того, землетрясения различных типов создают различные типы смещений поверхности. В табл. 8.2 дается связь магнитуды землетрясения с балльностью и расстоянием, на котором она проявляется. Эта связь опять-таки приближена, поскольку интенсивность в баллах зависит от глубины землетрясения и его магнитуды. Кроме того, расстояние, на котором проявляется землетрясение данной магнитуды, меняется от места к месту.

Таблица 8.2. Типичные максимальные балльности и радиусы зоны проявления для землетрясений данной магнитуды M

Магнитуда M	Максимальная балльность	Радиус зоны с соответствующей балльностью, км
2	I – II	0
3	III – IV	15
4	V	80
5	VI – VII	150
6	VIII	220
7	IX – X	400
8	XI	600

ЗАДАЧА 8.5. Вычислите сейсмическую энергию, выделившуюся при землетрясении с магнитудой 8,5, и сравните ее с количеством тепла, теряемого через поверхность Земли в течение года.

ЗАДАЧА 8.6. Данные о частоте повторяемости землетрясений данной магнитуды можно описать формулой

$$\frac{dN}{dM} = 5,25 \cdot 10^7 \exp(-2,07 M), \quad (8.55)$$

где dN – число землетрясений с магнитудой от M до $M + dM$, происходящих в течение года. С помощью формул (8.54) и (8.55) покажите, что скорость выделения сейсмической энергии \dot{E}_{12} при землетрясениях с магнитудами, заключенными между M_1 и M_2 , равна

$$\dot{E}_{12} \text{ (Дж/год)} = 7,35 \cdot 10^{12} (e^{1,25 M_2} - e^{1,25 M_1}). \quad (8.56)$$

Каково ежегодное общее выделение сейсмической энергии, если магнитуда сильнейших землетрясений равна 8,5? Сравните эту энергию с энергией, выделяющейся в результате единичного землетрясения с магнитудой 8,5. Какой вывод можно сделать об относительных вкладах большого числа слабых землетрясений и редких сильных землетрясений в общее годовое выделение сейсмической энергии?

8.7. Разлом Сан-Андреас

Рассмотрим подробнее два крупных разрыва со смещением по простиранию. Сначала обратимся к разлому Сан-Андреас, протянувшемуся почти по всей длине штата Калифорния (рис. 8.17). Вдоль большей части длины разлома движение направлено преимущественно по простиранию. Установлено, что разлом Сан-Андреас является важной границей, разделяющей Тихоокеанскую и Северо-Американскую плиты. Если посредством смещения по простиранию разлома осуществляется относительное перемещение двух упомянутых плит, то разлом должен лежать на малом круге с центром в полюсе вращения, характеризующем относительное движение двух плит. На рис. 8.17 проведены два малых круга с центром в полюсе вращения, координаты которого указаны в табл. 1.5. Видно, что направление разлома, заключенного между построенными кругами, вдоль большей части его длины вполне совпадает с направлением кругов. Это веский аргумент в пользу того, что относительное движение Тихоокеанской и Северо-Американской плит в большой мере происходит по разлому Сан-Андреас. Исследования относительного движения двух плит показывают, что их относительная скорость равна 55 мм/год (см. разд. 1.7).

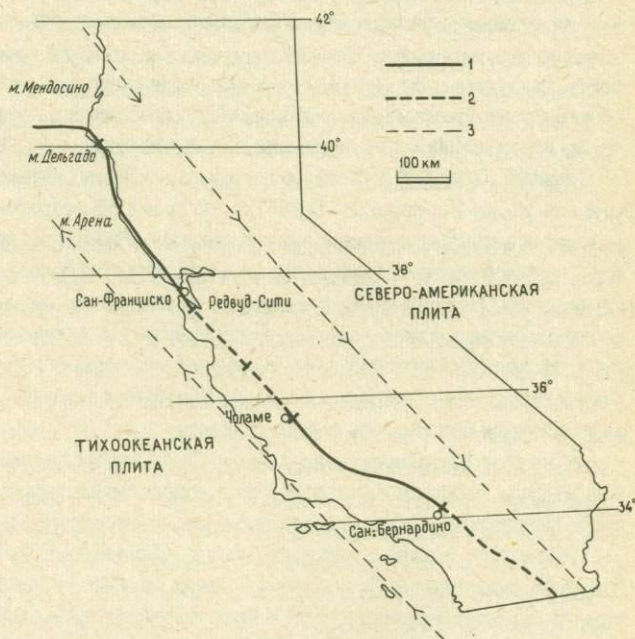


РИС. 8.17. Выход на поверхность запертых участков (1) и участков свободного скольжения (2) разлома Сан-Андреас. Тонким пунктиром (3) показаны два малых круга, описанных вокруг полюса вращения для движения Тихоокеанской плиты относительно Северо-Американской.

Разлом Сан-Андреас состоит из четырех четко разделенных участков, на протяжении которых его поведение совершенно различно. На одних участках сейсмическая активность мала, разлом, по-видимому, заперт, и здесь идет накопление деформаций. Накапливающиеся на этих участках деформации снимаются при сильных землетрясениях. На других участках разлома происходят частые слабые землетрясения и накапливаемые напряжения, по крайней мере частично, снимаются за счет асейсмичной ползучести.

Северная оконечность разлома находится около мыса Мендосино в точке тройного сочленения плит Тихоокеанской, Северо-Американской и Хуан-де-Фука. К югу от этой точки протягивается примерно 300-км северный запертый участок разлома (от мыса Мендосино до Редвуд-Сити). Во время землетрясения 1906 г. в Сан-Франциско на этом участке произошло смещение поверхности приблизительно на 4 м. С тех пор ползучести по разлому и землетрясений на этом участке не отмечалось.

Центральный участок свободного скольжения простирается примерно на 300 км от Редвуд-Сити почти до Чоламе. На этом участке регулярно происходят медленные смещения поверхности и слабые землетрясения. Во время землетрясения 1906 г. нарушения поверхности захватили, помимо северного, примерно 100 км этого участка, но величина смещения была значительно меньшей, чем на северном запертом участке. Скорость ползучести по разлому на этом участке разлома равна 20 — 30 мм/год, т.е. меньше, чем относительная скорость движения плит (55 мм/год). Различие скоростей может объясняться тем, что во время сильных землетрясений, происходящих на соседних участках разлома, возникающие там смещения захватывают и этот участок.

Южный запертый участок тянется на ~350 км, начинаясь у Чоламе и оканчиваясь у Сан-Бернардино. В 1857 г. во время землетрясения в южной Калифорнии здесь зарегистрировано нарушение поверхности по всей длине этого участка. С тех пор ни землетрясений, ни ползучести на этом участке разлома не отмечалось. Важную роль в поведении разлома здесь, вероятно, играет искривление разлома к северу от Сан-Бернардино. На искривленном участке разлома происходит сближение плит, в результате которого появляется надвиговая компонента. Она приводит к подъему, с которым связаны Поперечные хребты — ряд расположенных здесь горных поясов.

К югу от Сан-Бернардино разлом Сан-Андреас разбивается на ряд разломов. На них происходят слабые и умеренные землетрясения, а также ползучесть по разлому. Этот участок разлома, по-видимому, не заперт.

Насколько можно судить исходя из современных знаний о разломе Сан-Андреас, смещения на запертых участках разлома возникают во время сильных землетрясений. Землетрясения в двух запертых зонах происходят в разное время, возможно, поочередно, а центральный участок свободного скольжения служит переходной зоной между двумя запертыми зонами.

Документированные наблюдения сильных землетрясений на разломе Сан-Андреас относительно непродолжительны. Одним из действительно силь-

ных зафиксированных землетрясений было землетрясение 18 апреля 1906 г. в Сан-Франциско. Среднее смещение по разлому, составившее 4 м, произошло на длине 200 км. При скорости накопления деформаций 55 мм/год это соответствует 73 годам накопления. Следовательно, приблизительно за 73 года до землетрясения 1906 г. также должно было иметь место сильное землетрясение. Действительно, имеется письменное свидетельство о том, что в 1838 г. в северной Калифорнии произошло сильное землетрясение. Однако было ли оно связано со значительными смещениями на северном запертом участке разлома, осталось неотмеченным.

Другое сильное землетрясение произошло 9 января 1857 г. вблизи Лос-Анджелеса. Принято считать, что оно было связано с южным запертым участком, хотя прямых наблюдений смещения поверхности не было. Исследование смещений русел, которые, видимо, произошли при этом землетрясении, указывает на среднее смещение порядка 7 м. Несколько лет назад в работе [47] был определен возраст смещенных слоев осадочных пород речного ложа вблизи южного запертого участка. Там сделан вывод, что сильные землетрясения на этом участке происходили также в 1745 ± 24 , 1470 ± 40 , 1245 ± 45 , 1190 ± 45 , 965 ± 50 , 860 ± 35 , 665 ± 80 и 545 ± 45 гг. При скорости смещения 55 мм/год за период между 1745 и 1857 гг. на южном участке должно было накопиться общее смещение 6,2 м. Эта величина хорошо согласуется с оценкой смещения во время землетрясения 1857 г. Средний промежуток времени между десятью документированными землетрясениями составил 164 года, а максимальный и минимальный промежутки — 275 и 55 лет соответственно. Если бы в 1980 г. на южном запертом участке произошло сильное землетрясение, то при скорости накопления деформации 55 мм/год оно вызвало бы подвижку величиной 6,5 м.

На рис. 8.18 в функции широты приведена балльность землетрясений, связанных с системой разломов Сан-Андреас, для периода с 1880 по 1972 г. На графике отражены землетрясения с балльностью ≥ 5 , происшедшие на расстояниях не более 100 км от разлома. Показано широтное простираание разрыва поверхности, возникшего в 1906 г., и разделение разлома на участки. На рисунке видна неоднородность распределения данных по времени. Это объясняется значительным увеличением числа сейсмографов в последние 20 лет, благодаря чему регистрация землетрясений стала значительно более полной. Несмотря на то что качество данных сильно варьирует, некоторые тенденции вполне ясны. Наиболее очевидной из них является тенденция к уменьшению количества слабых и умеренных землетрясений в районе, примыкающем к северному участку, после землетрясения 1906 г. Оно является убедительным доказательством того, что в результате землетрясения 1906 г. в упругой литосфере этого региона произошло значительное снижение уровня напряжений.

Наоборот, в области южного запертого участка заметно систематическое увеличение количества землетрясений средней силы, что, вероятно, свидетель-

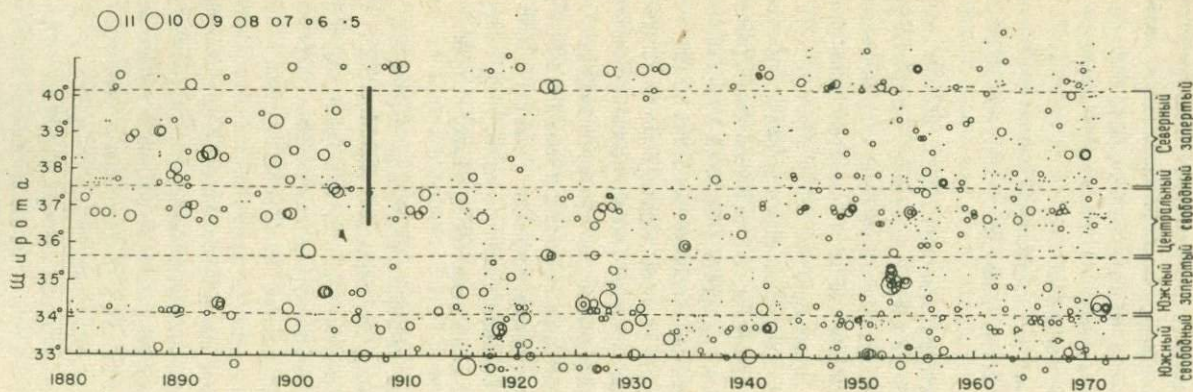


РИС. 8.18. Балльность землетрясений, происшедших в пределах 100км от разлома Сан-Андреас, в функции широты и времени с 1880 по 1972 г. Вертикальным сплошным отрезком показано нарушение поверхности во время землетрясения 1906 г., горизонтальные пунктирные прямые — границы запертых и свободных участков разлома.

ствует о повышении уровня напряжений на этом участке разлома. С накоплением деформации происходит концентрация напряжений и как результат — землетрясение. Это в особенности относится к области севернее Лос-Анджелеса, где разлом изгибается. Вследствие изгиба накопленная деформация не может полностью сниматься при простом смещении по простиранию, и возникает деформация, связанная с системой разломов в Поперечных хребтах.

Примерами деформации такого типа являются землетрясения 1952 г. в Керн-Каунти и 1971 г. в Сан-Фернандо.

8.8. Северо-Анатолийский разлом

Другим крупным разломом со смещением по простиранию является Северо-Анатолийский разлом в Турции. Начиная с 1939 г. почти вдоль всей 1000-км длины разлома с востока на запад с поразительной последовательностью прошел ряд сильных землетрясений. По сравнению с разломом Сан-Андреас тектоническая обстановка в районе Северо-Анатолийского разлома значительно более сложная. Турция составляет часть обширной зоны столкновения, простирающейся от южной Европы через всю Азию до Индии. Тектонику Турции можно, по крайней мере частично, понять, если принять, что основная часть ее территории образует малую плиту — Анатолийскую (рис. 8.19). Столкновение Европейской и Аравийской плит выклинивает Анатолийскую плиту к западу. Северо-Анатолийский разлом образует северную границу Анатолийской плиты, а Восточно-Анатолийский разлом — ее юго-восточную границу. Движение плиты к западу приводит к правостороннему смещению по простиранию на Северо-



РИС. 8.19. Сложная тектоническая обстановка в Турции. Северную и восточную границы Анатолийской плиты образуют соответственно Северо-Анатолийский и Восточно-Анатолийский разломы.

Анатолийском разломе и к левостороннему смещению по простиранию на Восточно-Анатолийском. У южной границы Анатолийской плиты по серии дугообразных желобов происходит субдукция Африканской плиты. Опускание Африканской плиты может создать растягивающие напряжения в Анатолийской плите с континентальной стороны от желобов. Эти напряжения также могут способствовать движению Анатолийской плиты к западу. Западнее и восточнее Анатолийской плиты тектоника обширной зоны столкновения становится еще сложнее. К востоку от Анатолийской плиты расположена широкая зона сжатия, возникающая в результате сближения Аравийской и Евразийской плит. Западная часть Анатолийской плиты переходит в обширную зону тектоники растяжения в западной Турции и Греции. Вследствие чрезвычайной сложности тектонических процессов ограничения, налагаемые тектоникой плит на относительную скорость бортов Северо-Анатолийского разлома, довольно слабы. По оценкам относительная скорость составляет ~ 15 мм/год.

На рис. 8.20 в функции долготы приведена бальность землетрясений, связанных с Северо-Анатолийским разломом, для промежутка времени с 1880 по 1970 г. Горизонтальными отрезками показаны нарушения поверхности, происшедшие на разломе при ряде сильных землетрясений начиная с 1939 г. Даты, магнитуды, длины участков, на которых отмечены нарушения поверхности, и амплитуды смещений для этих землетрясений приведены в табл. 8.3.

Таблица 8.3. Характеристики землетрясений с магнитудой выше 7, происшедших на Северо-Анатолийском разломе

Дата	<i>M</i>	Длина поверхностного нарушения, км	Амплитуда смещения бортов разлома, м
26 декабря 1939 г.	8	350	4,2
20 декабря 1942 г.	7,3	50	2
26 ноября 1943 г.	7,6	265	1,5
1 февраля 1944 г.	7,6	190	3,6
18 марта 1953 г.	7,4	60	4,3
26 мая 1957 г.	7,1	40	1,6
22 июля 1967 г.	7,2	80	2,3

Первым и сильнейшим из этих землетрясений было Эрзинджанское землетрясение 26 декабря 1939 г. с магнитудой 8. Разрыв поверхности простирался почти от точки сочленения Северо- и Восточно-Анатолийского разломов на ~ 350 км к западу. За этим землетрясением 20 декабря 1942 г. последовало землетрясение на другой ветви разлома, расположенной несколько севернее, вблизи западной оконечности разрыва 1939 г. Следующее сильное землетрясе-

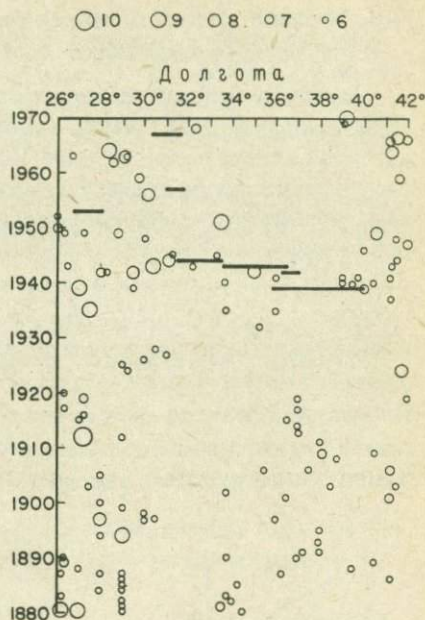


РИС. 8.20. Балльность землетрясений на Северо-Анатолийском разломе и вблизи него в функции долготы и времени с 1880 по 1970 г. Отрезками прямых показаны нарушения поверхности, возникшие во время серии сильных землетрясений на Северо-Анатолийском разломе между 1939 и 1967 гг.

ние произошло на северной ветви 26 ноября 1943 г., и разрыв продлился на запад еще на 265 км (см. рис. 8.20), а 1 февраля 1944 г. во время следующего сильного землетрясения смещение затронуло еще 190 км к западу. В 1957 и 1967 гг. у западного конца разрыва 1944 г. произошли еще два сильных землетрясения. Распространяющуюся вдоль разлома сейсмическую активность можно объяснить передачей напряжения от участка разлома, на котором произошло землетрясение, к соседнему участку. Такое поведение разлома коренным образом отличается от того, что мы наблюдали на разломе Сан-Андреас.

В Исетпаше на Северо-Анатолийском разломе, приблизительно в середине участка, на котором произошла подвижка 1 февраля 1944 г., вызвавшая землетрясение с магнитудой 7,6, происходит ползучесть по разлому. В период с 1970 по 1980 г. скорость ползучести была близка к 10 мм/год. Наблюдаемая здесь ползучесть по разлому резко отличается от поведения системы разломов Сан-Андреас, где ползучесть наблюдается только там, где не происходит сильных землетрясений. Ползучести по Северо-Анатолийскому разлому и разлому Сан-Андреас – единственные документально установленные примеры асейсмического скольжения на разломах, известные в настоящее время.

8.9. Решения уравнений теории упругости для образования разломов со смещением по простираанию

В этом разделе мы рассмотрим два решения уравнений теории упругости, которые пригодны для описания смещений во время землетрясений на разломе со смещением по простираанию. Мы воспользуемся моделями, которые, хотя и являются сильно идеализированными, позволяют понять некоторые важные стороны этой проблемы. В первом примере мы определим поле деформаций, возникающее в результате смещения на разломе. Рассмотрим полупространство $y > 0$, в котором первоначально имеется однородное сдвиговое напряжение $\sigma_{xz,0}$ (рис. 8.21,а). Допустим, что в плоскости $x = 0$ возникает двумерная трещина, идущая от поверхности до глубины $y = a$. Из-за появления трещины в полупространстве происходят смещения, показанные на рис. 8.21,б. Возникающее поле деформации может служить моделью деформации, обусловленной землетрясением на разломе со смещением по простираанию. Предположим, что имеется только одна ненулевая компонента w_z смещения в направле-

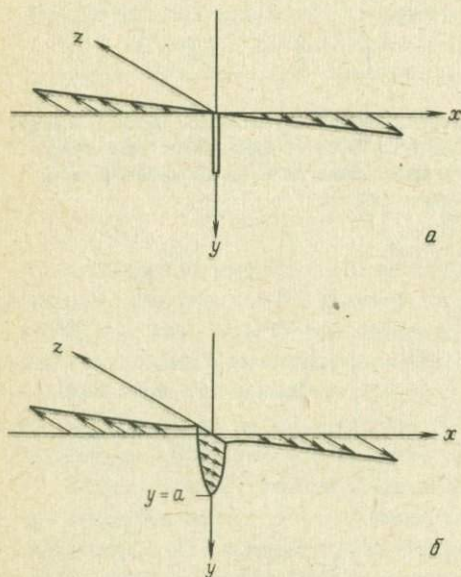


РИС. 8.21. Поле смещений, возникающее из-за образования разлома в модели разлома со смещением по простираанию. Поверхность Земли есть плоскость $y = 0$, поверхность разлома — участок плоскости $x = 0$, $0 < y \leq a$. Смещения происходят в направлении оси z , a — первоначально полупространство $y > 0$ находится в однородном напряженном состоянии сдвига (сдвиговое напряжение $\sigma_{xz,0}$). б — после образования трещины сдвиговое напряжение на трещине равно нулю ($\sigma_{xz} = 0$), а края трещины смещены друг относительно друга.

нии оси z . После образования трещины появятся две ненулевые компоненты сдвигового напряжения: σ_{xz} (и σ_{zx}) и σ_{yz} (и σ_{zy}). Для простоты будем пренебрегать напряжением трения на разломе после землетрясения и положим $\sigma_{xz} = 0$ при $x = 0, 0 \leq y \leq a$. Поля смещений и напряжений в данной двумерной задаче не зависят от z .

Для определения напряжений, деформаций и смещений в полупространстве $y > 0$ нужно вывести дифференциальное уравнение, выражающее равновесие сил, действующих на малый элемент среды. На рис. 8.22 показан малый прямоугольный параллелепипед, выделенный в полупространстве, в котором имеются напряжения, создающие силы в направлении оси z . Поскольку сумма сил, действующих на элемент в направлении оси z , должна быть равна нулю, мы можем написать

$$\begin{aligned} & \{\sigma_{xz}(x + \delta x, y) - \sigma_{xz}(x, y)\} \delta y \delta z + \\ & + \{\sigma_{yz}(x, y + \delta y) - \sigma_{yz}(x, y)\} \delta x \delta z = 0. \end{aligned} \quad (8.57)$$

Разлагая $\sigma_{xz}(x + \delta x, y)$ и $\sigma_{yz}(x, y + \delta y)$ в ряд Тейлора, приводя подобные члены и деля на $\delta x \delta y \delta z$, мы приходим к следующей форме уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (8.58)$$

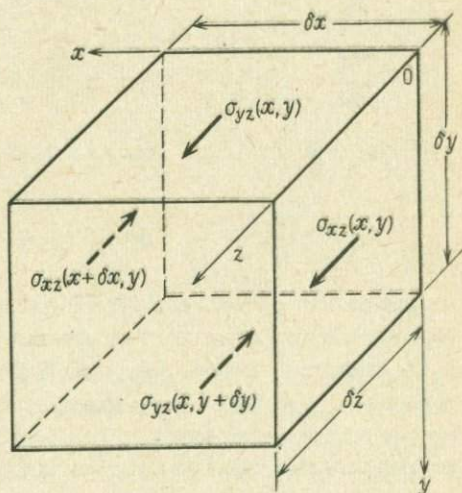


РИС. 8.22. Отличные от нуля компоненты напряжения, которые создают силы в направлении оси z и действуют на малый прямоугольный параллелепипед, выделенный в полупространстве $y > 0$ в модельной задаче о разломе со смещением по прослаиванию (рис. 8.21).

Величины σ_{xz} и σ_{yz} можно выразить через производные смещения w_z . Согласно равенствам (2.94) и (3.49), запишем

$$\sigma_{xz} = G \frac{\partial w_z}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = G \frac{\partial w_z}{\partial y}. \quad (8.59)$$

Подставляя выражения (8.59) в уравнение (8.58), получаем

$$\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} = 0. \quad (8.60)$$

Таким образом, смещение w_z удовлетворяет уравнению Лапласа.

Решение, описывающее смещение перед образованием трещины, имеет простой вид:

$$w_z = \frac{\sigma_{xz,0}}{G} x. \quad (8.61)$$

После образования трещины смещение описывается решением уравнения Лапласа со следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (8.62)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad 0 < y < a, \quad (8.63)$$

$$w_z = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad a < y. \quad (8.64)$$

$$w_z \rightarrow \frac{\sigma_{xz,0}}{G} x \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (8.65)$$

Первое из этих условий вытекает из второго равенства (8.59) и требования обращения в нуль сдвигового напряжения σ_{yz} на поверхности $y = 0$. Условие (8.63) следует из первого равенства (8.59) и обращения в нуль сдвигового напряжения σ_{xz} на поверхности трещины. Условие (8.64) есть следствие симметрии задачи и того факта, что глубина трещины не превышает $y = a$. И наконец, последнее граничное условие (8.65) соответствует требованию равенства смещения его первоначальному значению на большом расстоянии от трещины.

Решение уравнения Лапласа с граничными условиями (8.62) – (8.65) можно найти с помощью методов теории функций комплексного перемен-

ного. Введем комплексную переменную Z , определенную как

$$Z = y + ix, \quad (8.66)$$

где $i = \sqrt{-1}$. Вещественная и мнимая части любой функции аргумента Z являются решениями уравнения Лапласа. Для того чтобы найти решение задачи о моделировании образования разлома со смещением по простираанию, нужно построить такую функцию от Z , вещественная или мнимая часть которой удовлетворяла бы условиям (8.62) – (8.65). Такой функцией является

$$w_z = \frac{\sigma_{xz,0}}{G} \operatorname{Im} \{ (Z^2 - a^2)^{1/2} \}, \quad (8.67)$$

где Im означает, что берется мнимая часть комплексной функции. Можно проверить непосредственно, что условия (8.64) и (8.65) удовлетворяются. Действительно, на плоскости $x = 0$ мы имеем $Z = y$ и w_z есть

$$w_z = \frac{\sigma_{xz,0}}{G} \operatorname{Im} \{ (y^2 - a^2)^{1/2} \}. \quad (8.68)$$

Отсюда видно, что при $y > a$ $w_z = 0$, так как $(y^2 - a^2)^{1/2}$ вещественно.

Смещение поверхности получится, если в (8.67) положить $Z = ix$:

$$\begin{aligned} w_z &= \pm \frac{\sigma_{xz,0}}{G} \operatorname{Im} \{ (-x^2 - a^2)^{1/2} \} = \\ &= \pm \frac{\sigma_{xz,0}}{G} \operatorname{Im} \{ i (x^2 + a^2)^{1/2} \} = \\ &= \pm \frac{\sigma_{xz,0}}{G} \operatorname{Re} \{ (x^2 + a^2)^{1/2} \} = \\ &= \pm \frac{\sigma_{xz,0}}{G} (x^2 + a^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (8.69)$$

где при $x > 0$ берется знак "+", при $x < 0$ – знак "-", а Re означает вещественную часть комплексной функции. В пределе $x \rightarrow \infty$ равенство (8.69) дает

$$w_z \rightarrow \frac{\sigma_{xz,0}}{G} x. \quad (8.70)$$

Итак, мы убедились, что функция (8.67) удовлетворяет граничным условиям (8.64) и (8.65). Чтобы проверить, удовлетворяются ли условия (8.62) и (8.63),

продифференцируем w_z по x и y . Производная комплексной функции $(Z^2 - a^2)^{1/2}$ получается по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x} (Z^2 - a^2)^{1/2} = \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{d}{dZ} (Z^2 - a^2)^{1/2} = \frac{iZ}{(Z^2 - a^2)^{1/2}}, \quad (8.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (Z^2 - a^2)^{1/2} = \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{d}{dZ} (Z^2 - a^2)^{1/2} = \frac{Z}{(Z^2 - a^2)^{1/2}}. \quad (8.72)$$

С помощью равенства (8.67), (8.71) и (8.72) находим

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{\sigma_{xz,0}}{G} \operatorname{Im} \left\{ \frac{Z}{(Z^2 - a^2)^{1/2}} \right\}, \quad (8.73)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial x} = \frac{\sigma_{xz,0}}{G} \operatorname{Re} \left\{ \frac{Z}{(Z^2 - a^2)^{1/2}} \right\}. \quad (8.74)$$

При $y = 0$ мы имеем $Z = ix$, и равенство (8.73) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_z}{\partial y} &= \frac{\sigma_{xz,0}}{G} \operatorname{Im} \left\{ \frac{ix}{(-x^2 - a^2)^{1/2}} \right\} = \\ &= \frac{\sigma_{xz,0}}{G} \operatorname{Im} \left\{ \frac{ix}{i(x^2 + a^2)^{1/2}} \right\} = \frac{\sigma_{xz,0}}{G} \operatorname{Im} \left\{ \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8.75)$$

Мы видим, что условие (8.62) удовлетворяется. При $x = 0$ имеем $Z = y$ и из равенства (8.74) получаем

$$\frac{\partial w_z}{\partial x} = \frac{\sigma_{xz,0}}{G} \operatorname{Re} \left\{ \frac{y}{(y^2 - a^2)^{1/2}} \right\}. \quad (8.76)$$

При $0 < y < a$ правая часть равенства (8.76) обращается в нуль, так как $(y^2 - a^2)^{1/2}$ — чисто мнимая функция. Таким образом, и условие (8.63) удовлетворяется.

Сдвиговые напряжения в полупространстве после образования трещины вычисляются с помощью равенств (8.59), (8.73) и (8.74):

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz,0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{Z}{(Z^2 - a^2)^{1/2}} \right\}, \quad (8.77)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{xz,0} \operatorname{Im} \left\{ \frac{Z}{(Z^2 - a^2)^{1/2}} \right\}. \quad (8.78)$$

В плоскости трещины $x = 0$ напряжения равны

$$\sigma_{xz} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq y < a, \\ \frac{\sigma_{xz,0} y}{(y^2 - a^2)^{1/2}} & \text{при } y > a, \end{cases} \quad (8.79)$$

$$\sigma_{yz} = \begin{cases} -\frac{\sigma_{xz,0} y}{(a^2 - y^2)^{1/2}} & \text{при } 0 \leq y < a, \\ 0 & \text{при } y > a. \end{cases} \quad (8.80)$$

При $y \rightarrow \infty$ в плоскости трещины имеем $\sigma_{yz} \rightarrow 0$ и $\sigma_{xz} \rightarrow \sigma_{xz,0}$. На кончике трещины, т.е. при $x = 0$, $y = a$, обе компоненты сдвигового напряжения обращаются в бесконечность. Эта особенность напряженного состояния типична для задач трещинообразования. На поверхности $y = 0$, $Z = ix$ и напряжения, согласно формулам (8.77), (8.78), равны

$$\sigma_{xz} = \frac{\pm \sigma_{xz,0} x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}, \quad (8.81)$$

$$\sigma_{yz} = 0. \quad (8.82)$$

При $x \rightarrow \pm \infty$ мы опять находим $\sigma_{xz} = \sigma_{xz,0}$.

Найденное решение можно использовать для определения смещений поверхности, обусловленных смещением по простираанию разлома. До образования трещины смещение поверхности дается равенством (8.61), а после образования трещины — равенством (8.69). Таким образом, смещение Δw_z поверхности, обусловленное образованием трещины, можно найти, вычитая равенство (8.61) из (8.69):

$$\Delta w_z = \pm \frac{\sigma_{xz,0}}{G} [(x^2 + a^2)^{1/2} - |x|]. \quad (8.83)$$

Отсюда следует, что относительное смещение бортов разлома есть

$$\Delta w_{z0} = 2a \sigma_{xz,0} / G, \quad (8.84)$$

а сопровождающее землетрясение смещение поверхности в функции расстояния x от разлома можно записать как

$$\Delta w_z = \pm \frac{\Delta w_{z0}}{2} \left[\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} - \frac{|x|}{a} \right]. \quad (8.85)$$

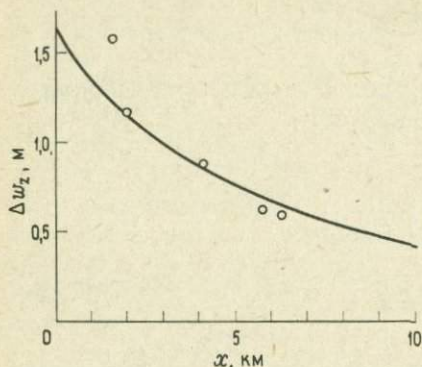


РИС. 8.23. Кружки — измеренные смещения поверхности во время землетрясения 1906 г. в Сан-Франциско как функция расстояния от разлома Сан-Андреас; кривая — смещение поверхности, вычисленное по формуле (8.85) при $\Delta w_{z0} = 3,2$ м и $a = 6$ км.

На рис. 8.23 приведены смещения, измеренные во время землетрясения 1906 г. в Сан-Франциско, которые можно сравнить с результатами расчета по формуле (8.85), описывающей смещение поверхности при землетрясении в зависимости от расстояния x от разлома. Результаты измерений смещения на нескольких расстояниях x от разлома Сан-Андреас изображены кружками, а зависимость (8.85) с $\Delta w_{z0} = 3,2$ м и $a = 6$ км — сплошной кривой. При $G = 30$ ГПа эти значения Δw_{z0} и a соответствуют сдвиговому напряжению $\sigma_{xz,0} = 8$ МПа. Поскольку очаги землетрясений, происходящих на разломе Сан-Андреас, располагаются до глубин 12 — 15 км, то приведенное значение a , вероятно, занижено примерно в 2 раза. Это несоответствие частично можно объяснить допущением, что после землетрясения $\sigma_{xz} = 0$ по всей глубине разлома. Выше говорилось, что в действительности на разломе, вероятно, остается некоторое напряжение, связанное с трением. Хотя сброшенное напряжение при землетрясении получилось весьма небольшим, этот результат, очевидно, довольно точен.

Приведенный пример показывает, каким образом можно найти смещение при проскальзывании на данном разломе в функции глубины. Смещения поверхности, происходящие при землетрясении, часто можно измерить геодезическими методами. Если из расположения очагов землетрясений известно положение плоскости разлома, то распределение смещений на разломе можно установить из условия совпадения теоретического (вычисляемого по пробному смещению на разломе) и наблюдаемого распределений смещения поверхности. Распределенные смещения по разлому называются дислокациями. Применение данного метода требует огромного объема численного счета. Только для землетрясений, связанных с локализованными смещениями, такую процедуру можно бо-

лее или менее успешно использовать для выяснения распределения деформации и изменения напряжения при землетрясении. Однако при сильных землетрясениях, приуроченных к границам плит, как, например, в Сан-Франциско в 1906 г., смещения, по-видимому, происходят во всей литосфере.

Рассмотрим теперь двумерную модель циклического накопления и релаксации напряжений и деформаций на разрыве со смещением по простиранию, расположенном в плоскости $x = 0$. Пусть по нему происходит горизонтальное движение в направлении z между двумя литосферными плитами толщиной b (рис. 8.24). Исходное положение, показанное на рис. 8.24, *a*, соответствует моменту времени, когда сдвиговое напряжение и сдвиговая деформация, обусловленные взаимодействием смежных плит, уменьшились до нуля после главного толчка землетрясения и афтершоков. Плиты находятся в состоянии од-

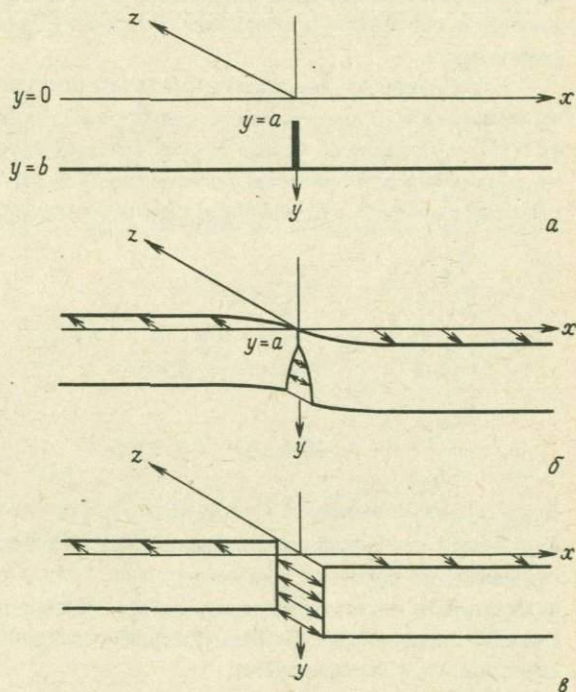


РИС. 8.24. Поле смещений, вызываемое скачкообразным скольжением двух литосферных плит толщиной b друг относительно друга. *a* — первоначально напряжение отсутствует, но разлом, расположенный в плоскости $x = 0$, заперт до глубины a ; *b* — плиты смещаются, но на запертом участке разлома смещение равно нулю; *в* — на запертой части разлома происходит проскальзывание, и плиты оказываются равномерно смещенными друг относительно друга по глубине y , и напряжение обращается в нуль. Далее цикл повторяется.

народного относительного движения, параллельного разлому. Предположим, что до глубины a разлом заперт и на больших глубинах через него не передается никакого напряжения. Примем также, что подошвы плит свободны от напряжений. В результате относительного движения плит в окрестности разлома концентрируются сдвиговое напряжение и сдвиговая деформация (рис. 8.24, б). Когда на запертом участке разлома достигается предел прочности, происходит землетрясение, напряжение в непосредственной близости от запертого участка снимается и передается в нижний пластический участок. В более глубокой зоне напряжения исчезают в последующем процессе пластического течения, который, возможно, порождает затухающую серию афтершоков, сопровождающих главный толчок. В нашей модели мы будем предполагать, что после серии афтершоков накопленные напряжения полностью исчезают (рис. 8.24, в). С точностью до конечного смещения на границе плит, возникающее ненапряженное и недеформированное состояние тождественно состоянию, изображенному на рис. 8.24, а. Далее весь процесс повторится.

Как и в предыдущем примере, отличны от нуля единственная компонента смещения w_z и две компоненты сдвигового напряжения: σ_{xz} (и σ_{zx}) и σ_{yz} (и σ_{zy}). Смещение w_z удовлетворяет уравнению Лапласа (8.60). Первоначально смещение и сдвиговые напряжения равны нулю; граничные условия, описывающие состояние среды после накопления деформации, имеют вид

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, b, \quad (8.86)$$

$$w_z = 0 \quad \text{при } x = 0, 0 < y < a, \quad (8.87)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, a < y < b. \quad (8.88)$$

Первое условие вытекает из отсутствия сдвигового напряжения σ_{yz} на поверхности и в подошве плиты. Равенство (8.87) выражает обращение в нуль смещения на запертом участке разлома. Третье условие соответствует исчезновению сдвигового напряжения σ_{xz} на пластическом участке разлома. Решение задачи (8.60), (8.86) – (8.88), выраженное через комплексную переменную $Z = y + ix$, имеет вид

$$w_z = A \operatorname{Re} \left\{ \ln \left[\frac{\sin \frac{\pi Z}{2b} + \left(\sin^2 \frac{\pi Z}{2b} - \sin^2 \frac{\pi a}{2b} \right)^{1/2}}{\sin \frac{\pi a}{2b}} \right] \right\}, \quad (8.89)$$

где A — постоянная интегрирования. Вещественная и мнимая части функции $\sin Z$, $\cos Z$ и $\ln Z$ даются выражениями

$$\sin Z = \sin y \operatorname{ch} x + i \cos y \operatorname{sh} x, \quad (8.90)$$

$$\cos Z = \cos y \operatorname{ch} x - i \sin y \operatorname{sh} x, \quad (8.91)$$

$$\ln Z = \frac{1}{2} \ln (y^2 + x^2) + i \operatorname{arctg} (x/y). \quad (8.92)$$

На поверхности мы имеем $y = 0$, $Z = ix$ и смещение определяется как

$$w_z = A \ln \left\{ \frac{\operatorname{sh} (\pi x/2b) + [\operatorname{sh}^2 (\pi x/2b) + \sin^2 (\pi a/2b)]^{1/2}}{\sin (\pi a/2b)} \right\} \quad (8.93)$$

На больших расстояниях от разлома, при $\pi x/(2b) \gg 1$, смещение поверхности равно

$$w_z \approx A \ln \left\{ \frac{2 \operatorname{sh} (\pi x/2b)}{\sin (\pi a/2b)} \right\} = A \left\{ \ln e^{\pi x/2b} - \ln \sin (\pi a/2b) \right\} = A \frac{\pi x}{2b}. \quad (8.94)$$

Дифференцируя выражение (8.89), находим две компоненты сдвигового напряжения:

$$\sigma_{xz} = G \frac{\partial w_z}{\partial x} = - \frac{\pi G A}{2b} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\cos (\frac{\pi Z}{2b})}{[\sin^2 (\frac{\pi Z}{2b}) - \sin^2 (\frac{\pi a}{2b})]^{1/2}} \right\}, \quad (8.95)$$

$$\sigma_{yz} = G \frac{\partial w_z}{\partial y} = \frac{\pi G A}{2b} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\cos (\pi Z/2b)}{[\sin^2 (\pi Z/2b) - \sin^2 (\pi a/2b)]^{1/2}} \right\}. \quad (8.96)$$

На поверхности $y = 0$, $Z = ix$ и сдвиговое напряжение есть

$$\sigma_{xz} = \frac{\pi G A}{2b} \frac{\operatorname{ch} (\pi x/2b)}{[\operatorname{sh}^2 (\pi x/2b) + \sin^2 (\pi a/2b)]^{1/2}}. \quad (8.97)$$

При $y = 0$ имеем $\sigma_{yz} = 0$, как этого и требует граничное условие (8.86). На больших расстояниях от разлома, $\pi x/(2b) \gg 1$, сдвиговое напряжение равно

$$\sigma_{xz} \approx \frac{\pi G A}{2b} \operatorname{cth} \frac{\pi x}{2b} \approx \frac{\pi G A}{2b} = \sigma_{xz, 0}. \quad (8.98)$$

Таким образом, на больших расстояниях от разлома поверхностное сдвиговое напряжение постоянно. Постоянную интегрирования A можно выразить через сдвиговое напряжение, действующее между точками, удаленными от разлома на большое расстояние. На разломе, при $x = 0$, поверхностное сдвиговое напряжение равно

$$\sigma_{xz} = \frac{\pi G A}{2b \sin(\pi a/2b)} = \frac{\sigma_{xz, 0}}{\sin(\pi a/2b)} \quad (8.99)$$

При малых значениях отношения a/b происходит значительная концентрация напряжения у разлома.

Интересно сравнить результаты проведенного расчета и измерений накопления сдвиговой деформации вблизи разлома Сан-Андреас. На рис. 8.25 в функции расстояния от разлома приведены скорости деформации, измеренные в окрестности Сан-Франциско методом триангуляции и с помощью геодинетра. Теоретическое выражение скорости деформации через смещение имеет вид

$$\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial t} \quad (8.100)$$

С помощью равенств (8.96), (8.97) и (8.100) получим следующее выражение

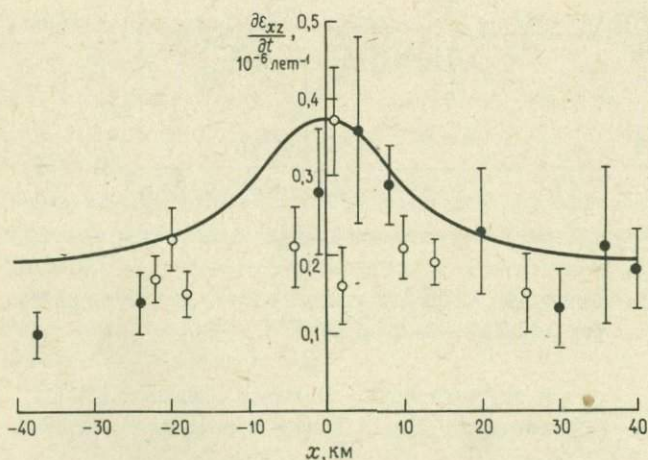


РИС. 8.25. Скорость накопления сдвиговой деформации вблизи Сан-Франциско как функция расстояния от разлома Сан-Андреас, измеренная методом триангуляции (черные кружки) и с помощью геодинетра (светлые кружки) [48]. Кривая — расчет по формуле (8.103) при $a = 10$ км, $b = 30$ км, $x_r = 37,5$ км, $u_r = 55$ мм/год.

для скорости поверхностной сдвиговой деформации:

$$\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial t} = \frac{1}{2G} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \frac{\pi}{4b} \frac{\operatorname{ch}(\pi x/2b)}{[\operatorname{sh}^2(\pi x/2b) + \sin^2(\pi a/2b)]^{1/2}} \frac{dA}{dt} \quad (8.101)$$

Параметр dA/dt можно выразить через относительную скорость u_r смещения бортов разлома Сан-Андреас, потребовав равенства скорости смещения $\partial w_z/\partial t$ величине $u_r/2$ на расстоянии x_r от разлома. Предполагая x_r достаточно большим и пользуясь равенством (8.94), запишем

$$\frac{u_r}{2} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial t} \right)_{x=x_r} = \frac{\pi x_r}{2b} \frac{dA}{dt} \quad (8.102)$$

Подставляя отсюда dA/dt в равенство (8.101), находим

$$\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial t} = \frac{u_r}{4x_r} \frac{\operatorname{ch}(\pi x/2b)}{[\operatorname{sh}^2(\pi x/2b) + \sin^2(\pi a/2b)]^{1/2}} \quad (8.103)$$

Для сравнения этого результата с данными измерений на разломе Сан-Андреас примем толщину упругой литосферы равной $b = 30$ км, а глубину запертого участка разлома равной $a = 10$ км. Предположим, что относительная скорость 55 мм/год бортов разлома Сан-Андреас, определенная из исследований тектоники плит, наблюдается на расстоянии $x_r = 37,5$ км от разлома. Теоретическое распределение скорости накопления деформации, получающееся при этих значениях параметров из формулы (8.103), нанесено на рис. 8.25 сплошной кривой. Видно, что между теорией и наблюдениями имеется достаточно близкое согласие. Циклическое накопление и снятие деформации происходят в зоне, непосредственно примыкающей к разлому. Напомним, что в разд. 8.6 мы уже пришли к такому выводу на основе более приближенного анализа. В следующем разделе мы покажем, что подобного рода концентрация деформации обусловлена взаимодействием упругой литосферы с вязкой астеносферой.

8.10. Диффузия напряжения

Из-за взаимодействия вязкой астеносферы и вышележащей упругой литосферы циклические деформации вокруг крупных разломов со смещением по простиранию сильно ослабляются с расстоянием. Этот эффект демонстрирует следующая простая модель (рис. 8.26). Упругая литосфера толщиной h_L лежит на ньютоновской вязкой астеносфере толщиной h_a . Простирание разлома, лежащего в плоскости $x = 0$, направлено по оси z . В качестве модели циклического процесса вспарывания и запираания разлома примем смещение упругой литосферы, происходящее при $x = 0$ по периодическому закону. Для простоты

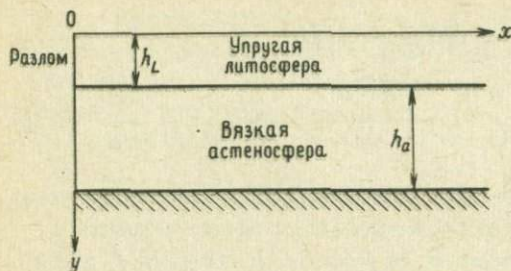


РИС. 8.26. Модель для определения затухания циклических деформаций вокруг разлома за счет взаимодействия упругой литосферы толщиной h_L с ньютоновской вязкой астеносферой толщиной h_a . Разлом расположен в плоскости $x = 0$ и простирается в направлении оси z .

будем пренебрегать вертикальной неоднородностью смещения w_{zL} в литосфере. Предположим также, что в направлении оси z задача однородна, т.е. $\partial/\partial z = 0$. Таким образом, будем считать, что $w_{zL} = w_{zL}(x)$.

Поведение литосферы описывается дифференциальным уравнением в частных производных, которое можно вывести из условия равновесия сил, действующих на участок литосферы ширины dx и единичной длины в направлении z (рис. 8.27). Смещение литосферы в направлении простираения разлома приводит к появлению на вертикальных границах элемента среды упругого сдви-

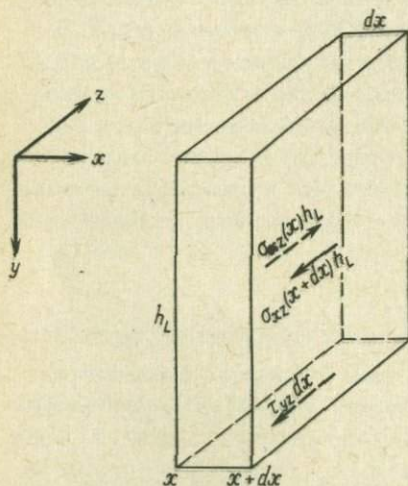


РИС. 8.27. Равновесие сил, действующих на участок литосферы ширины dx и единичной длины в направлении простираения.

гового напряжения σ_{xz} и вязкого сдвигового напряжения τ_{yz} на основании. Баланс сил, действующих на элемент в направлении оси z , дает

$$\tau_{yz} dx + \{\sigma_{xz}(x+dx) - \sigma_{xz}(x)\} h_L = 0, \quad (8.104)$$

или

$$\tau_{yz} = -h_L \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}. \quad (8.105)$$

Выражая упругое сдвиговое напряжение через продольное смещение как

$$\sigma_{xz} = G \frac{\partial w_{zL}}{\partial x} \quad (8.106)$$

[см. равенства (2.94), (3.49)], где G — модуль сдвига литосферы, можно переписать условие баланса сил в виде

$$\tau_{yz} = -h_L G \frac{\partial^2 w_{zL}}{\partial x^2}. \quad (8.107)$$

Чтобы выразить вязкое сдвиговое напряжение в атмосфере через w_{zL} , предположим, что скорость в основании астеносферы равна нулю, а течение в толще астеносферы можно аппроксимировать линейным течением Куэтта, рассмотренным в разд. 6.2. С помощью равенств (6.1) и (6.13) τ_{yz} можно выразить как

$$\tau_{yz} = -\frac{\mu}{h_a} \frac{\partial w_{zL}}{\partial t}, \quad (8.108)$$

где μ — коэффициент вязкости астеносферы. Подставляя это выражение в равенство (8.107), находим

$$\frac{\partial w_{zL}}{\partial t} = \frac{h_a h_L G}{\mu} \frac{\partial^2 w_{zL}}{\partial x^2}. \quad (8.109)$$

Мы видим, что смещение в литосфере удовлетворяет тому же одномерному уравнению диффузии, что и температура в нестационарной одномерной задаче теплопроводности (разд. 4.13). Эффективный коэффициент диффузии смещения в литосфере равен $h_a h_L G/\mu$.

Обусловленное взаимодействием литосферы и астеносферы пространственное затухание циклических смещений на разломе (по мере удаления от разлома) можно получить, если решить уравнение (8.109) для приложенного периодического смещения при $x = 0$:

$$w_{zL}(x=0) = w_{zL,0} \cos \omega t, \quad (8.110)$$

где ω — круговая частота приложенного смещения. В разд. 4.14 мы уже решали аналогичную задачу теплопроводности. Переходя в формуле (4.89) к новым обозначениям, соответствующим рассматриваемому случаю, мы можем записать решение задачи (8.109) — (8.110) в виде

$$w_{zL} = w_{zL,0} \exp \left\{ -x \left(\frac{\omega \mu}{2h_a h_L G} \right)^{1/2} \right\} \cos \left\{ \omega t - x \left(\frac{\omega \mu}{2h_a h_L G} \right)^{1/2} \right\}. \quad (8.111)$$

Отсюда видно, что амплитуда смещения литосферы экспоненциально затухает с расстоянием от разлома; расстояние, на котором смещение уменьшается в e раз, равно

$$d_s = \left(\frac{2h_a h_L G}{\omega \mu} \right)^{1/2}. \quad (8.112)$$

Оценим величину d_s при следующих значениях параметров: $h_a = 100$ км, $h_L = 30$ км, $G = 30$ ГПа, $\mu = 4 \cdot 10^{19}$ Па · с; круговую частоту $\omega = 2\pi/\tau$ (τ — период) приложенного смещения на разломе вычислим по типичному значению $\tau = 150$ лет промежутка времени между сильными землетрясениями: $\omega = 1,33 \cdot 10^{-9}$ с $^{-1}$. Из равенства (8.112) находим $d_s = 58$ км в хорошем согласии с оценками, полученными выше в этой главе. Мы нашли приближенное решение задачи о смещении литосферы, вызываемом периодическим смещением по разлому. Однако, как показывают и более точные численные расчеты, смещения по разлому не распространяются далеко в литосфере, а из-за взаимодействия упругой литосферы и вязкой астеносферы затухают в пределах нескольких сотен километров от разлома. Поэтому землетрясение, происшедшее в одной части границы плиты, не вызовет значительных изменений напряжений на разломах в других частях границы плиты. Таким образом, сильные землетрясения, по всей вероятности, не могут явиться спусковым механизмом и вызвать другие сильные землетрясения на больших расстояниях.

8.11. Термически активируемая ползучесть по разломам

Пока речь идет о зонах, лежащих на небольших глубинах от поверхности Земли, трение на разломах можно характеризовать с помощью коэффициента трения. Однако многие разломы уходят очень глубоко в литосферу, где существенную роль играет пластическое течение пород. В этом разделе мы рассмотрим установившуюся ползучесть в глубоких зонах разломов. В разд. 4.26 было показано, что в таких зонах может быть существенным фрикционный нагрев. Поэтому в нашем расчете необходимо учитывать нагрев за счет вязкой диссипации.

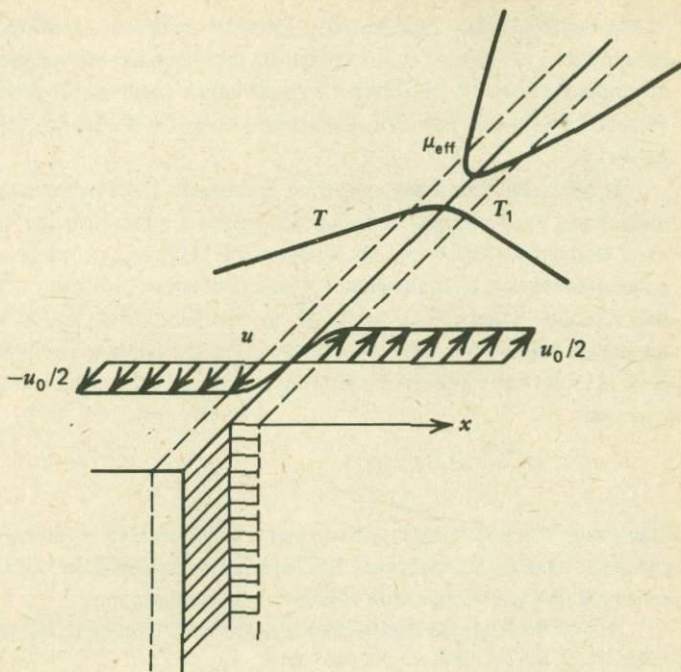


РИС. 8.28. Одномерная модель структуры зоны разлома, в которой происходит установившаяся ползучесть.

Рассмотрим одномерную модель зоны сдвига между двумя полупространствами, смещающимися параллельно плоскости раздела $x = 0$ противоположно друг другу с относительной скоростью u_0 (рис. 8.28). Центром зоны сдвига является плоскость $x = 0$, так что $|x|$ есть расстояние по нормали от разлома. На больших расстояниях x от разлома скорость u стремится к $\pm u_0/2$. Нагрев из-за трения приводит к росту температуры в зоне сдвига. Вдали от плоскости разлома температура T должна спадать линейно с расстоянием от разлома, так чтобы теплопроводность обеспечила отвод тепла, выделяющегося при трении в зоне сдвига. В центре зоны сдвига температура будет иметь максимальное значение T_1 . Из симметрии модели следует, что распределение температуры T должно быть симметричным, а распределение скорости u — антисимметричным относительно плоскости $x = 0$; в рассматриваемом одномерном случае T и u зависят только от x . Будем предполагать, что деформация в зоне сдвига определяется дислокационной ползучестью с коэффициентом эффективной вязкости μ_{eff} , задаваемым равенством (7.116). Вследствие фрикционного повышения температуры в зоне сдвига и того обстоятельства, что коэффициент вязкости сильно зависит от температуры, μ_{eff} в зоне

сдвига существенно меньше, чем вдали от разлома. Пониженная вязкость в зоне сдвига облегчает относительное, противоположно направленное движение полупространств и приводит к концентрации сдвигового течения, в котором имеется градиент скорости, в относительно узкой области, примыкающей к разлому.

В разд. 7.5 уже было выведено уравнение для температуры и скорости в сдвиговом потоке с фрикционным нагревом и зависящим от температуры коэффициентом вязкости. Из равенства (7.117) видно, что в отсутствие градиента давления, направленного вдоль плоскости разлома, сдвиговое напряжение τ в зоне сдвига есть величина постоянная. Обозначая все предэкспоненциальные множители, кроме сдвигового напряжения и температуры, в формуле (7.116) для коэффициента вязкости через C , перепишем выражение для μ_{eff} как

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{CT}{\tau^2} \exp(E_a/RT). \quad (8.113)$$

Поскольку τ — постоянная, изменение коэффициента эффективной вязкости связано только с изменением T и определяется главным образом экспоненциальной функцией обратной абсолютной температуры.

Дифференциальное уравнение для температуры есть уравнение (7.138); при $\tau = \mu_{\text{eff}} du/dx$ оно принимает вид

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + \tau \frac{du}{dx} = 0, \quad (8.114)$$

Интегрируя это уравнение при $\tau = \text{const}$, находим

$$k \frac{dT}{dx} + \tau u = 0 \quad (8.115)$$

(постоянная интегрирования положена равной нулю, так как при $x = 0$ $u = 0$ и из условия симметрии следует, что $dT/dx = 0$). Подставляя в уравнение (8.115) $\tau = \mu_{\text{eff}} du/dx$, находим

$$u du = -k dT / \mu_{\text{eff}}. \quad (8.116)$$

Это уравнение с помощью выражения (8.113) для μ_{eff} можно переписать в виде

$$d\left(\frac{u^2}{2}\right) = -\frac{k\tau^2}{CT} \exp(-E_a/RT) dT. \quad (8.117)$$

Аналитическое решение этого уравнения выражается через интегральную показательную функцию E_1 , которая рассматривалась в задаче 4.35. Мы находим

$$u^2 = \frac{2k\tau^2}{C} \left\{ E_1\left(\frac{E_a}{RT_1}\right) - E_1\left(\frac{E_a}{RT}\right) \right\}, \quad (8.118)$$

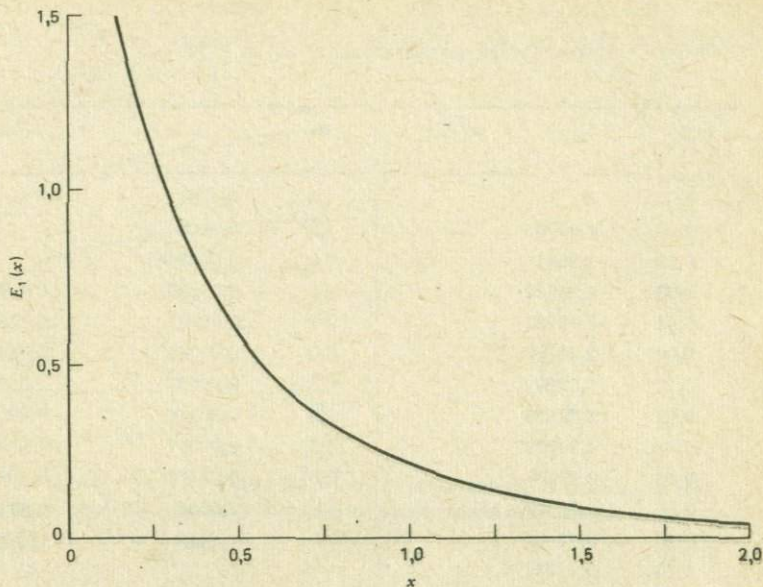


РИС. 8.29. График интегральной показательной функции $E_1(x)$.

где постоянная интегрирования определена из условия $u = 0$ и $T = T_1$ в центре зоны сдвига. Интегральная показательная функция E_1 протабулирована в табл. 8.4, а ее график приведен на рис. 8.29.

В пределе $x \rightarrow \infty$ мы имеем $u \rightarrow u_0/2$, T уменьшается и $E_1(E_a/RT) \rightarrow E_1(\infty) = 0$ (табл. 8.4). Таким образом, из (8.118) получаем

$$u_0^2 = \frac{8k\tau^2}{C} E_1\left(\frac{E_a}{RT_1}\right). \quad (8.119)$$

Это соотношение устанавливает связь между максимальной температурой в центре зоны сдвига, полной относительной скоростью бортов разлома, сдвиговым напряжением и реологическими параметрами. В гл. 7 мы видели, что $E_a/RT_1 \gg 1$. Пользуясь асимптотическим выражением интегральной показательной функции при больших значениях аргумента

$$E_1\left(\frac{E_a}{RT_1}\right) \approx \frac{RT_1}{E_a} \exp(-E_a/RT_1) \quad (8.120)$$

Таблица 8.4. Интегральная показательная функция $E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

x	$E_1(x)$	$xe^x E_1(x)$	x	$E_1(x)$	$xe^x E_1(x)$
0	∞		1,4	0,11622	
0,01	4,03793		1,6	0,08631	
0,02	3,35471		1,8	0,06471	
0,03	2,95912		2,0	0,04890	0,72266
0,04	2,68126		2,5	0,02491	0,75881
0,05	2,46790		3,0	0,01305	0,78625
0,10	1,82292		3,5	0,00697	0,80787
0,20	1,22265		4,0	0,00378	0,82538
0,30	0,90568		4,5	0,00207	0,83989
0,40	0,70238		5,0	0,00115	0,85211
0,50	0,55977		6	$3,6008 \cdot 10^{-4}$	0,87161
0,60	0,45438		7	$1,1548 \cdot 10^{-4}$	0,88649
0,70	0,37377				
0,80	0,31060		8	$3,7666 \cdot 10^{-5}$	0,89824
0,90	0,26018		9	$1,2447 \cdot 10^{-5}$	0,90776
1,0	0,21938		10	$4,1570 \cdot 10^{-6}$	0,91563
1,2	0,15841		20	$9,8355 \cdot 10^{-11}$	0,95437

(см. табл. 8.4), можно переписать равенство (8.119) в виде

$$u_0^2 = \frac{8k\tau^2 RT_1}{CE_a} \exp(-E_a/RT_1). \quad (8.121)$$

Это равенство определяет зависимость максимальной температуры T_1 в центре мантийной зоны сдвига от относительной скорости u_0 сторон разлома. На рис. 8.30 приведены зависимости $T_1(u_0)$ для нескольких значений сдвигового напряжения τ и следующих значений параметров: $k = 4,2 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$, $R = 8,314 \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$, $C = 10^9 \text{ Па}^3 \cdot \text{с/К}$ и $E_a = 523 \text{ кДж/моль}$. Видно, что для того, чтобы механизм дислокационной ползучести мог осуществить деформацию, соответствующую скорости относительного движения в десятки миллиметров в год при приложенном сдвиговом напряжении $\sim 1 \text{ МПа}$, требуются температуры $\sim 1300 \text{ К}$.

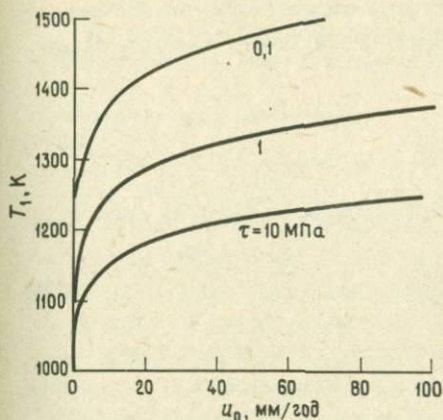


РИС. 8.30. Зависимость температуры в центре зоны сдвига от относительной скорости сторон разлома для указанных на рисунке значений приложенного сдвигового напряжения.

Подставляя выражение (8.118) в уравнение (8.115), приходим к уравнению для распределения температуры в зоне сдвига:

$$\frac{dT}{dx} = -\tau^2 \left(\frac{2}{kC} \right)^{1/2} \left\{ E_1 \left(\frac{E_a}{RT_1} \right) - E_1 \left(\frac{E_a}{RT} \right) \right\}^{1/2}. \quad (8.122)$$

Это уравнение должно решаться при условии $T = T_1$ при $x = 0$. Его можно проинтегрировать численно или, если выполнены следующие два условия, аналитически. Первое условие — большая величина аргументов интегральных показательных функций по сравнению с единицей; тогда применимы асимптотические выражения вида (8.120), и уравнение (8.122) можно приближенно записать как

$$\frac{dT}{dx} = -\tau^2 \left(\frac{2}{kC} \right)^{1/2} \times \left\{ \frac{RT_1}{E_a} \exp(-E_a/RT_1) - \frac{RT}{E_a} \exp(-E_a/RT) \right\}^{1/2}. \quad (8.123)$$

Второе условие — малость величины $\theta = T_1 - T$ по сравнению с T_1 , т.е. $\theta \ll T_1$. В этом случае уравнение (8.123) можно аппроксимировать следующим образом:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau}{k} \left\{ \frac{2kRT_1\tau^2 \exp(-E_a/RT_1)}{CE_a} \right\}^{1/2} (1 - \exp(-E_a\theta/RT_1^2))^{1/2}. \quad (8.124)$$

Член в фигурных скобках в правой части этого выражения, согласно равенству (8.121), равен $u_0^2/4$; поэтому уравнение (8.124) можно упростить следующим образом:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau u_0}{2k} \{1 - \exp(-E_a \theta / RT_1^2)\}^{1/2} \quad (8.125)$$

Это уравнение можно проинтегрировать аналитически, переходя к новой переменной

$$s = \exp(-E_a \theta / RT_1^2). \quad (8.126)$$

Мы находим

$$\frac{ds}{s(1-s)^{1/2}} = -\frac{\tau u_0 E_a}{2kRT_1^2} dx. \quad (8.127)$$

После интегрирования уравнения (8.127) получаем

$$T = T_1 + \frac{RT_1^2}{E_a} \ln \left\{ \operatorname{sch}^2 \left(\frac{\tau u_0 E_a x}{4kRT_1^2} \right) \right\}, \quad (8.128)$$

где постоянная интегрирования выбрана так, чтобы удовлетворялось условие $T = T_1$, $\theta = 0$, $s = 1$ при $x = 0$. Подставляя выражение (8.128) в уравнение (8.115), мы получаем распределение скорости в зоне сдвига:

$$u = \frac{u_0}{2} \operatorname{th} \left(\frac{\tau u_0 E_a x}{4kRT_1^2} \right). \quad (8.129)$$

В пределе $x \rightarrow \infty$ мы имеем

$$\operatorname{sch} \left(\frac{\tau u_0 E_a x}{4kRT_1^2} \right) \rightarrow 2 \exp(-\tau u_0 E_a x / 4kRT_1^2),$$

$$\frac{dT}{dx} \rightarrow -\frac{\tau u_0}{2k}.$$

Кроме того, при $x \rightarrow \infty$

$$\operatorname{th} \left(\frac{\tau u_0 E_a x}{4kRT_1^2} \right) \rightarrow 1$$

и $u \rightarrow u_0/2$.

ЗАДАЧА 8.7. Полуширину x_s зоны сдвига можно определить как значение x , при котором $u = 0,9$ ($u_0/2$). Пользуясь этим определением, найдите

а) выражение для полуширины зоны сдвига из равенства (8.129);

б) численное значение полуширины зоны сдвига при $u_0 = 100$ мм/год, $\tau = 10$ МПа и приведенных выше значениях параметров C , E_a и k .

Дополнительная литература

Bullen K.E. An Introduction to the Theory of Seismology, 3rd edition. — London: Cambridge University Press, 1963, 381 pp [русский перевод: Буллен К.Е. Введение в теоретическую сейсмологию. — М.: Мир, 1969]. Классический учебник по основам сейсмологии. В первых восьми главах даются необходимые теоретические сведения по механике деформируемых сред и распространению сейсмических волн при различных граничных условиях. Затем следуют три главы, посвященные получению и обработке инструментальных данных по землетрясениям. В остальной части книги описываются приложения теоретических и наблюдательных результатов к различным задачам, в частности о строении земных недр, долгопериодных колебаниях Земли, повторяемости землетрясений, ядерных взрывах, сейсмологии планет.

Ryerlee J. Friction of Rocks. Pure Appl. Geophys., **116**, 615 — 626, 1978.

Обзор и синтез экспериментальных данных о сдвиговом напряжении, необходимом для скольжения одной породы по другой. Автор указывает, что при малых нормальных напряжениях сдвиговое напряжение меняется от эксперимента к эксперименту в широких пределах, так как трение пород сильно зависит от степени шероховатости поверхности. При больших нормальных напряжениях эффект шероховатостей уменьшается и трение почти не зависит от типа породы. Если скользящие поверхности разделены определенными типами глинки трения, то трение может быть очень малым. Журнал, в котором помещена статья, представляет собой специальный выпуск, посвященный трению в породах и прогнозу землетрясений.

Dieterich J.H. Earthquake Mechanisms and Modeling. Ann. Rev. Earth Planet. Sci., **2**, 275 — 301, 1974. Обзорная статья по теориям механики землетрясений с особым упором на лежащие в основе явлений механизмы неустойчивости. Автор приходит к выводу, что механизмом неустойчивости, ответственным за землетрясения на неглубоких разломах, является процесс скачкообразного скольжения, однако механизм промежуточных и глубокофокусных землетрясений предположительно, но с некоторой долей обоснованности связывается с увеличением хрупкости (охрупчиванием) из-за высокого давления поровой жидкости и неустойчивостью, вызываемой ползучестью. Рассматривается численное моделирование образования разрывов при землетрясениях, которое позволяет путем сравнения предсказанных и наблюдаемых деформаций, возникающих при последовательности землетрясений на некотором разломе, определить характеристики источника землетрясения.

Hobbs B.E., Means W.D., Williams P.F. An Outline of Structural Geology. — New York: John Wiley and Sons, 1976, 571 pp. Предназначенный для студентов-старшекурсников вводный курс структурной геологии, охватывающий механические аспекты деформации пород, теорию напряженного и деформированного состояний, реакцию пород на приложенное напряжение, микроструктуру деформированных пород, дефекты в кристаллах, микроскопические механизмы деформации, структуры недеформированных пород, складкообразование и формы складчатости, расщепление на плоские и линейные структуры, хрупкую деформацию, трещины отдельности, разломы, полевые методы и структурные ассоциации Земли. Некоторые главы содержат задачи, ответы к которым помещены в приложении.

Jaeger C. Rock Mechanics and Engineering. — London: Cambridge University Press, 1979, 523. Учебник по физическим и механическим характеристикам пород и техническим приложениям механики пород. Часть 1 книги посвящена развитию механики пород и связи геологии с этой наукой. В части 2 рассматриваются свойства пород, остаточные напряжения в породах в естественном залегании, деформации и разрушение масс пород, теоретические методы определения напряжений и деформаций, влиянию воды в трещинах. В части 3 даны приложения к расчетам склонов и скольжения пород, галерей, туннелей, шахт, подземных выемок и дамб. В части 4 детально описываются случаи аварий, разрушений дамб и оползней.

Ramsay J.G. Folding and Fracturing of Rocks. — New York: McGraw-Hill, 1967, 568 pp. Обзор применяемых в геологии основных теорий, касающихся напряжений, деформаций, свойств пород и их деформаций. В гл. 1 вводятся методы, применяемые при анализе ориентации структур. В гл. 2 — 6, исходя из первоначальных принципов, выводятся уравнения теорий напряженного и деформированного состояний. В гл. 7 описываются различные типы складчатости, дается анализ образования складок, рассматривается их общее тектоническое окружение. Заключительные три главы посвящены анализу деформирования линейных структур, складкообразования косо наклоненных поверхностей и сложных структур, связанных с наложением двух систем складок.

Reid H.F. The Mechanics of the Earthquake. In: The California Earthquake of April 18, 1906, Report of the State Earthquake Investigation Commission, vol. 2. Washington D.C.: Carnegie Institution of Washington, 1910, 192 pp. Подробный отчет о катастрофическом землетрясении и его сейсмической записи. В части 1 описываются характеристики толчка, время его возникновения, постоянные смещения почвы, природа действующих сил, сдвиговые движения в зоне разлома, колебательные движения и их эффекты, влияние характера грунта на кажущуюся интенсивность. В часть 2 сведены инструментальные записи землетрясения, полученные сейсмическими станциями на земном шаре. В приложении дана теория сейсмографа.

Richter C.F. Elementary Seismology. — San Francisco: W.H. Freeman, 1958, 768 pp. [русский перевод: *Рихтер Ч.Ф. Элементарная сейсмология.* — М.: ИЛ, 1963]. Фундаментальный, относительно мало математизированный учебник по сейсмологии, предназначенный для геологов и инженеров. В части 1 рассматривается природа землетрясений и их наблюдения. Основными рассматриваемыми темами являются характер движения почвы при землетрясении, описание наиболее характерных землетрясений, форшоки, афтершоки, рои землетрясений, действие землетрясений на строения, на грунтовые и поверхностные воды, интенсивность сотрясений, вулканические и тектонические землетрясения, образование разрывов, теория сейсмографа, упругость, сейсмические волны, глубокофокусные землетрясения, магнитуда, статистика и энергия землетрясений, микросейсмы, сейсмическая опасность. В части 2 описываются землетрясения в Калифорнии, Новой Зеландии, Японии, на Тайване и в других районах. Имеется большое количество таблиц, в которые сведены подробные математические формулы и полезные сейсмические данные.

Voight B. (editor). Mechanics of Thrust Faults and Décollement. — Stroudsburg, Pa: Dowden, Hutchinson & Ross, 1976, 471 pp. Сборник из 47 этапных оригинальных исследовательских статей по геологии, посвященных в основном надвигообразованию. Перепечатаны с комментариями редактора.

Течения в пористых средах

9.1. Введение

Явление миграции флюидов весьма распространено в земной коре. Если потоки флюидов — воды, пара, нефти или природного газа — движутся через имеющиеся в породах открытые трещины, то для их изучения можно использовать теорию течения по каналу, которая рассматривалась в гл. 6. Однако во многих случаях потоки текут в земной коре либо по лабиринту капилляров, образованных соединенными друг с другом микротрещинами, либо через пустоты в естественно пористых породах. В этих случаях, т.е. когда характерный размер системы течения велик по сравнению с размером взаимосвязанных капилляров, часто можно считать, что поток течет в однородной *пористой среде*.

Примером естественно пористой среды является песок. Благодаря неправильной форме песчинок возникают значительные пустоты или поры. Относительная доля объема породы, занятая породами, называется *пористостью* ϕ . Особенно пористым является рыхлый песок ($\phi \approx 40\%$), тогда как нефтеносные пески значительно менее пористы ($\phi \approx 10 \div 20\%$). Значения ϕ некоторых пористых пород, например песчаника и известняка, приведены в табл. 2.2. Как мы отметили выше, те породы, которые не являются естественно пористыми, но сильно трещиноваты, приближенно можно также считать пористыми средами. Нужно только, чтобы распределение трещин было достаточно однородным, а разделяющие их промежутки были малы по сравнению с характерным размером потока в целом.

Обычно флюиды текут через пористую среду под действием приложенного градиента давления. В гл. 6 мы показали, что скорость ламинарного течения в канале или трубе прямо пропорциональна коэффициенту вязкости. Этот закон во многих случаях применим и к пористым средам. Сопротивление, оказываемое потоку пористой средой, зависит от размера, числа и "извилистости" каналов, по которым жидкость течет через твердую матрицу породы. Мерой сопротивления является *коэффициент проницаемости* среды k . Для определения коэффициента проницаемости некоторых идеализированных пористых сред можно использовать изложенную в гл. 6 теорию течения вязкой жидкости. Однако коэффициент проницаемости реальных пород нужно определять в лаборатории или при полевых экспериментах.

В этой главе мы опишем теорию течения через пористые среды и рассмотрим ряд ее геологических приложений. Особое значение имеют расчеты течения грунтовых вод. Так, вода, текущая в непосредственной близости от

охлаждающейся интрузии, может закипеть и образовать горячие источники, гейзеры и геотермальные резервуары. Эти процессы ответственны за образование многих минеральных скоплений, поскольку минералы хорошо растворяются в горячей грунтовой воде и выпадают в осадок там, где температура падает или происходит кипение. Модели течения в пористых средах применимы также к задачам о миграции магмы.

9.2. Закон Дарси

Во многих прикладных расчетах с хорошей точностью можно считать, что поток через пористую среду прямо пропорционален приложенному градиенту давления и обратно пропорционален коэффициенту вязкости жидкости. Эта эмпирическая зависимость называется *законом Дарси* по имени исследователя, выполнившего в 1856 г. эксперименты с протеканием воды через вертикальные гомогенные песчаные фильтры. В одномерном случае объемного расхода u через единицу площади, перпендикулярной потоку, движение которого вызвано приложенным градиентом давления dp/dx , закон Дарси записывается в форме

$$u = - \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (9.1)$$

где k — коэффициент проницаемости среды, а μ — коэффициент динамической вязкости жидкости (в общем случае флюида).

Объемный расход u через единицу площади имеет размерность скорости и называется *скоростью Дарси*. Поскольку эта величина равна объему жидкости, пересекающему единичную площадь среды в единицу времени, а суммарная площадь сечения всех пор и трещин выделенной единичной поверхностью значительно меньше единицы, то u не есть истинная скорость жидкости в микроканалах. Величина u — это скорость, усредненная по единичной площади. Проницаемость характеризует сопротивление, оказываемое потоку, текущему через пористую среду. Чем больше коэффициент проницаемости k среды, тем меньший градиент давления требуется для того, чтобы обеспечить данный поток жидкости. В системе СИ коэффициент проницаемости измеряется в m^2 ; единицей, используемой при расчетах резервуаров, является дарси (Д). Коэффициентом проницаемости в 1 Д обладает среда, у которой скорость Дарси для воды равна 1 см/с при градиенте давления 1 атм/с ($1 \text{ Д} = 9,8697 \cdot 10^{-13} m^2$). Типичные значения коэффициента проницаемости некоторых геологических материалов в естественных условиях приведены в табл. 9.1. Высокопроницаемым является крупный гравий, а однородный нетрещиноватый гранит практически непроницаем. Иногда в закон Дарси вводится гидростатический напор H , определяемый равенством (6.9). Тогда мы имеем

$$u = - \frac{k\rho g}{\mu} \frac{dH}{dx} = -K \frac{dH}{dx}, \quad (9.2)$$

где $K \equiv k_{pg}/\mu$ – коэффициент гидравлической проводимости. В форме (9.2) закон Дарси часто применяется при расчетах течения грунтовых вод.

Таблица 9.1. Типичные проницаемости геологических материалов в естественном залегании

Коэффициент проницаемости k , m^2	Класс	Материал
10^{-7}	Проницаемый	Гравий
10^{-8}		
10^{-9}		
10^{-10}		
10^{-11}	Полупроницаемый	Песок
10^{-12}		
10^{-13}		
10^{-14}		
10^{-15}		
10^{-16}		
10^{-17}	Непроницаемый	Известняк
10^{-18}		
10^{-19}		
10^{-20}		
		Гранит

Закон фильтрации Дарси правильно описывает течение через твердую среду только при выполнении определенных условий. Первым условием является малость размеров пор по сравнению со всеми остальными характерными размерами потока. Например, если осадочный пласт толщиной h сложен частицами со средним диаметром b , то закон Дарси справедлив при условии $b \ll h$. Если же пористость пласта обусловлена взаимосвязанными трещинами, то для выполнения закона Дарси необходимо, чтобы размеры трещин были малы по сравнению с величиной h . Вторым условием является ламинарность течения в каждом отдельном канале. Это условие, рассмотренное в разд. 6.4, устанавливает верхний предел размеров пор и скорости течения жидкости. Хотя закон Дарси представляет собой эмпирическое соотношение, для некоторых простых моделей конфигурации каналов в твердой породе его можно вывести теоретически.

ЗАДАЧА 9.1. Чтобы жидкость могла подниматься сквозь пористую среду, необходимо более быстрое нарастание давления с глубиной y , чем в том случае, когда жидкость покоится. Основываясь на этом соображении, докажите, что закон Дарси для вертикального потока в пористой среде должен записываться в виде

$$v = - \frac{k}{\mu} \left(\frac{dp}{dy} - \rho g \right), \quad (9.3)$$

где v — вертикальная скорость Дарси (положительная в направлении роста глубины), ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести. Рассмотрим случай, когда пористая среда лежит на непроницаемой поверхности, наклоненной под углом θ к горизонту. Покажите, что закон Дарси для объемного расхода q жидкости, протекающей параллельно непроницаемому основанию через единичную площадь, записывается как

$$q = - \frac{k}{\mu} \left(\frac{dp}{ds} - \rho g \sin \theta \right), \quad (9.4)$$

где s — расстояние, отсчитываемое вниз вдоль наклонной поверхности, а q положительно в направлении увеличения s .

ЗАДАЧА 9.2. Рассмотрим слой неуплотненной (неспцементированной) почвы, полностью насыщенной грунтовой водой, уровень которой доходит до поверхности. Покажите, что направленная вверх скорость Дарси $|v|$, требуемая для флюидизации почвы, равна

$$|v| = (1 - \phi) k g (\rho_s - \rho_w) / \mu, \quad (9.5)$$

где ϕ — пористость, ρ_s — плотность частиц почвы, ρ_w — плотность воды. Условие флюидизации почвы означает, что давление на глубине в почве достаточно для того, чтобы полностью поддерживать вес вышележащего материала. Если давление превысит это критическое значение, то поток может поднять почвенный слой.

9.3. Модели проницаемости

С помощью теории движения вязкой жидкости можно вывести закон Дарси для идеализированных моделей пористых сред, в которых система каналов имеет правильную геометрическую конфигурацию. При этом получают явные выражения для коэффициента проницаемости. Для аппроксимации структур из различных материалов используются разнообразные модели. Так, песчаник можно представить в виде матрицы из плотноупакованных сфер, а трещиноватую вулканическую породу — в виде регулярной (или случайной) системы тонких каналов. Мы не будем подробно анализировать различные модели микроструктуры, которые различаются только геометрически и, следовательно, по существу тождественны друг другу.

В качестве типичной модели микроструктуры пористого материала рассмотрим кубическую решетку, составленную из круглых трубок. Пусть длина каждой трубки и расстояние между ними равны b , а диаметр δ (рис. 9.1). Каждый куб решетки имеет вдоль всех своих 12 ребер по одной трубке: поскольку одна трубка принадлежит одновременно четырем смежным кубам, то данному кубу принадлежит по $1/4$ диаметра δ и длины b трубки, лежащей на каждом из его ребер. Иными словами, каждый куб эффективно обладает тремя труб-

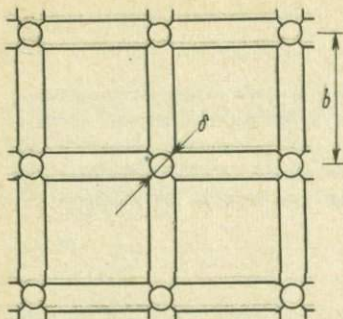


РИС. 9.1. Идеализированная модель пористой среды: круглые трубки диаметром δ образуют кубическую решетку с периодом b .

ками диаметром δ и длиной b , так что пористость среды равна

$$\phi = 3\pi \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \frac{b}{b^3} = \frac{3\pi}{4} \frac{\delta^2}{b^2}. \quad (9.6)$$

Предположим, что ребра кубов направлены вдоль осей x , y и z . Под действием приложенного градиента давления dp/dx жидкость будет течь по трубкам, параллельным оси x . Если течение в трубках ламинарно, то средняя скорость жидкости определится равенством (6.37):

$$\bar{u}_c = - \frac{\delta^2}{32\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (9.7)$$

Чтобы вычислить среднюю скорость протекания жидкости через единицу площади среды, т.е. скорость Дарси u , рассмотрим квадрат со стороной b , перпендикулярный оси x , вершины которого лежат на осях четырех трубок. Внутри квадрата будет лежать $1/4$ площади поперечного сечения каждой трубки. Следовательно, через площадь b^2 сечения среды будет протекать поток, эквивалентный потоку через одну трубку, и расход составит $\pi(\delta^2/4)\bar{u}_c$. Отсюда скорость Дарси равна

$$u = \frac{\pi\delta^2}{4b^2} \bar{u}_c = \frac{\phi \bar{u}_c}{3}, \quad (9.8)$$

где для исключения δ^2/b^2 использовано равенство (9.6). Из формул (9.6) – (9.8) получаем

$$u = - \frac{b^2 \phi^2}{72\pi\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (9.9)$$

В рамках нашей простой модели мы получили линейную связь между скоростью Дарси и градиентом давления, т. е. пришли к закону Дарси. Сравнивая равенства (9.1) и (9.9), мы находим выражение для коэффициента проницаемости k :

$$k = \frac{b^2 \varphi^2}{72\pi} = \frac{\pi}{128} \frac{\delta^4}{b^2}. \quad (9.10)$$

Коэффициент проницаемости есть функция геометрии взаимосвязанных пор. Принимая $\delta = 1$ мм и $b = 0,1$ м, мы находим, что $k = 2,45 \cdot 10^{-12}$ м² (2,49 Д). При этом пористость равна только $2,36 \cdot 10^{-2}\%$, а средняя скорость в отдельной трубке превышает скорость Дарси в $1,27 \cdot 10^4$ раз.

ЗАДАЧА 9.3. Предположим, что пористую среду можно моделировать кубической решеткой со стороной ячейки b ; стенки каждого куба представляют собой канал толщиной δ . Найдите: а) выражения для пористости и проницаемости через b и δ ; б) коэффициент проницаемости при $b = 0,1$ м и $\delta = 1$ мм.

9.4. Течение в замкнутых водоносных пластах

Часто бывает так, что течение грунтовых вод происходит в пласте пористой осадочной породы, ограниченном сверху и снизу непроницаемыми слоями. Образующийся таким образом канал называется *замкнутым водоносным горизонтом* или пластом. Рассмотрим одномерный поток в замкнутом водоносном горизонте постоянного поперечного сечения A (рис. 9.2). Будем считать, что давление p постоянно по сечению потока: $p = p(x)$. Согласно (9.1), скорость Дарси u также однородна по сечению водоносного пласта: $u = u(x)$. На скорость Дарси не накладывается условие прилипания на границах канала — этому условию удовлетворяют скорости течения жидкости в каждом отдельном микроканале, но не скорость движения жидкости в пласте в целом.



РИС. 9.2. Горизонтальный одномерный поток в замкнутом пористом водоносном пласте. Показан перепад напора, движущий поток.

Объемный расход Q через водоносный горизонт равен произведению скорости Дарси на площадь поперечного сечения:

$$Q = uA = - \frac{kA}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (9.11)$$

Поскольку Q — величина постоянная, не зависящая от x , градиент давления также есть (отрицательная) постоянная. Следовательно, давление линейно убывает с ростом x . Для пористого водовода кругового поперечного сечения, изогнутого в форме дуги (см. разд. 6.5), градиент давления определяется равенством (6.43) и объемный расход жидкости через этот пласт можно записать как

$$Q = kR^2 \rho g b / \mu R^*, \quad (9.12)$$

где πR^* — длина водоносного горизонта, а b — превышение высоты входа в водоносный горизонт над высотой выхода.

ЗАДАЧА 9.4. Предполагая, что данная модель применима для описания действия артезианского источника (источника, действующего за счет разности высот рельефа), определите коэффициент проницаемости водоносного горизонта с площадью поперечного сечения 2 м^2 , если топографический напор составляет 60 м , расстояние от входа до выхода 2 км , а объемный расход Q воды через этот пласт равен $8,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$.

ЗАДАЧА 9.5. Рассмотрим одномерный поток через замкнутый пористый водоносный горизонт общей толщиной b и поперечным сечением A . Водоносный пласт состоит из N слоев с толщиной b_i ($i = 1, \dots, N$) и коэффициентом проницаемости k_i ($i = 1, \dots, N$) каждый. Определите общий объемный расход жидкости через водоносный горизонт, если во всех слоях действует одинаковый движущий градиент давления. Какова проницаемость однородного пласта толщиной b , расход через который при том же самом градиенте давления равен расходу через слоистую водоносную толщину?

Рассчитаем теперь втягивание воды в скважину, пронизывающую всю толщину замкнутого водоносного пласта (рис. 9.3). Скважина служит стоком жидкости из пласта; поток из водоносного горизонта к боковым стенкам скважины будем считать однородным, горизонтальным и направленным строго по радиусу к скважине. Радиальную скорость Дарси такого цилиндрически-симметричного потока обозначим u_r , а радиальное расстояние от оси скважины r . Величина u_r положительна в направлении увеличения r . Закон Дарси (9.1) для одномерного потока можно обобщить на случай рассматриваемого радиального течения, если заменить градиент давления, входящий в (9.1), радиальным градиентом давления dp/dr . В результате мы получим

$$u_r = - \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr}, \quad (9.13)$$

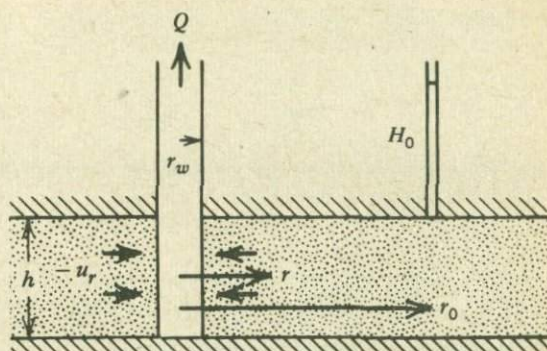


РИС. 9.3. Модель откачки воды через скважину, понизывающую замкнутый водоносный пласт.

или, если выразить давление через гидростатический напор H ,

$$u_r = - \frac{k\rho g}{\mu} \frac{dH}{dr}. \quad (9.14)$$

Объемный расход воды Q_r через цилиндрическую поверхность радиуса r равен

$$Q_r = 2\pi r h u_r, \quad (9.15)$$

где h — толщина водоносного пласта. Отметим, что для потока, направленного к скважине, величина Q_r отрицательна. Подставляя (9.14) в (9.15), находим

$$Q_r = - \frac{2\pi h k \rho g r}{\mu} \frac{dH}{dr}, \quad (9.16)$$

В соответствии с законом сохранения массы Q_r не должно зависеть от r , т.е. любую цилиндрическую оболочку в единицу времени должно пересекать одинаковое количество жидкости. Таким образом, $|Q_r|$ — это объемный расход жидкости, поступающей в скважину. Интегрируя дифференциальное уравнение первого порядка (9.16), связывающее гидростатический напор H с расстоянием r , находим

$$H - H_0 = - \frac{\mu Q_r}{2\pi h k \rho g} \ln \frac{r}{r_0}, \quad (9.17)$$

где H_0 — заданный гидростатический напор на расстоянии r_0 ($H = H_0$ при $r = r_0$; см рис. 9.3). Поскольку правая часть равенства (9.17) логарифмически расходится при $r \rightarrow \infty$, задать внешний гидростатический напор на бесконечности не удастся. Радиальное расстояние r_0 есть то, до которого наполнен водовод. Полагая в (9.17) $r = r_w$ (радиус скважины), получим следующее

выражение для гидростатического напора H_w в рассматриваемой скважине:

$$H_w = H_0 - \frac{\mu Q_r}{2\pi h k \rho g} \ln \frac{r_w}{r_0} \quad (9.18)$$

Преобразуя это выражение, мы можем определить Q_r как функцию гидростатических напоров H_0 и H_w :

$$Q_r = \frac{2\pi h k \rho g (H_0 - H_w)}{\mu \ln (r_w / r_0)} \quad (9.19)$$

Принимая в качестве типичных следующие численные значения: $H_0 - H_w = 10$ м, $h = 1$ м, $r_w = 0,1$ м, $r_0 = 1$ км, $k = 10^{-11}$ м² (~ 10 Д), коэффициент вязкости воды $\mu = 10^{-3}$ Па · с (10^{-2} П), плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³ и $g = 10$ м/с², приходим к следующему значению объемного расхода жидкости, текущей к скважине:

$$|Q_r| = 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}.$$

ЗАДАЧА 9.6. Рассмотрим скважину, пронизывающую замкнутый пористый слой, насыщенный газом. Геометрия задачи такая же, как на рис. 9.3. Закон Дарси (9.13) справедлив для однородного потока газа, текущего к скважине. Вследствие сжимаемости плотность ρ и давление p газа меняются с расстоянием r от оси скважины. Условие сохранения массы требует, чтобы массовый расход M_r газа, пересекающего цилиндрическую поверхность радиуса r и высоты h , не зависел от r . Предполагая, что газ подчиняется уравнению состояния идеального газа $p = \rho RT$, где T — абсолютная температура, а R — газовая постоянная, и что течение изотермично, покажите, что давление в газовом резервуаре распределено по закону

$$p^2 - p_0^2 = - \frac{M_r \mu RT}{\pi h k} \ln \frac{r}{r_0} \quad (9.20)$$

а массовый расход газа, поступающего в скважину, равен

$$M_r = \frac{(p_0^2 - p_w^2) \pi h k}{\mu RT \ln (r_w / r_0)} \quad (9.21)$$

Считайте, что давления p_0 при $r = r_0$ и p_w при $r = r_w$ в процессе эксплуатации скважины поддерживаются постоянными. Учтите, что для потока, направленного к скважине, величина M_r отрицательна.

9.5. Течение в незамкнутых водоносных пластах

Поток в водоносном пласте с непроницаемой нижней границей во многих случаях имеет свободную верхнюю границу (т.е. границу, не доходящую до верхнего водоупора), которая в этом случае представляет собой *зеркало*, или *уровень грунтовых вод*. Пласт, в котором находится жидкость со свободной

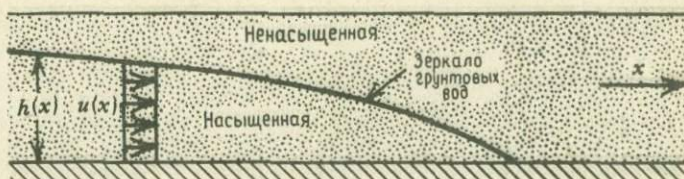


РИС. 9.4. Одномерное течение в незамкнутом водоносном пласте.

верхней границей, называется *незамкнутым водоносным пластом*. Рассмотрим одномерное течение в незамкнутом водоносном пласте с горизонтальной нижней границей (рис. 9.4). Ниже уровня грунтовых вод пористые породы насыщены водой, а над ним грунтовых вод нет. Обозначим высоту пьезометрического уровня водоносного горизонта относительно нижнего водоупорного слоя $h(x)$ и будем предполагать, что она является медленно меняющейся функцией x , т.е. $dh/dx \ll 1$. В этом случае горизонтальный градиент давления в насыщенном водой участке водовода можно выразить через производную от h следующим образом:

$$\frac{dp}{dx} = \rho g \frac{dh}{dx} \quad (9.22)$$

Это соотношение называется *приближением Дюпюи*. Гидростатический напор равен толщине слоя, насыщенного водой. Приближение перестает быть справедливым, когда поток в водонасыщенной части слоя становится двумерным. Это происходит в том случае, когда наклон dh/dx зеркала грунтовых вод по порядку величины сравнивается с единицей.

Подставляя выражение (9.22) в формулу (9.1), находим скорость Дарси в насыщенной водой области

$$u = - \frac{k \rho g}{\mu} \frac{dh}{dx} \quad (9.23)$$

Поскольку h есть функция x , скорость Дарси зависит от x , но не зависит от вертикальной координаты. Общий расход Q жидкости через площадку x единичной ширины равен

$$Q = u(x)h(x) = - \frac{k \rho g}{\mu} h \frac{dh}{dx} \quad (9.24)$$

Условие сохранения массы требует, чтобы величина Q в водоводе была постоянной. Соответственно этому равенство (9.24) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для h . Интегрируя его с начальным условием

$h = h_0$ при $x = 0$, находим

$$h = \left(h_0^2 - \frac{2Q\mu x}{k\rho g} \right)^{1/2}. \quad (9.25)$$

Таким образом, в приближении Дюпюи зеркало грунтовых вод есть парабола. Высота пьезометрического уровня обращается в нуль на расстоянии x_0 до стока:

$$x_0 = k\rho gh_0^2/2\mu Q. \quad (9.26)$$

Однако в окрестности точки x_0 мы имеем $dh/\partial x \rightarrow \infty$, так что приближение Дюпюи становится неприменимым.

В качестве характерного примера рассмотрим фильтрацию воды сквозь прямоугольную пористую дамбу (рис. 9.5). Коэффициент проницаемости материала дамбы обозначим через k , ширину дамбы — через w , а высоту уровня воды перед дамбой и позади нее — через h_0 и h_1 соответственно. Будем считать, что сама дамба и резервуары, которые она разделяет, подстилаются водоупорным слоем. Согласно формуле (9.25), расход воды через дамбу равен

$$Q = \frac{k\rho g}{2\mu w} (h_0^2 - h_1^2). \quad (9.27)$$

Это соотношение называется *формулой расхода Дюпюи — Фухлаймера*. Поскольку при ее выводе использовалось приближение Дюпюи, она, казалось бы, должна быть справедлива только при $(h_0 - h_1) \ll h_0$; однако мы покажем, что на самом деле этот результат верен при произвольном значении h_1 .

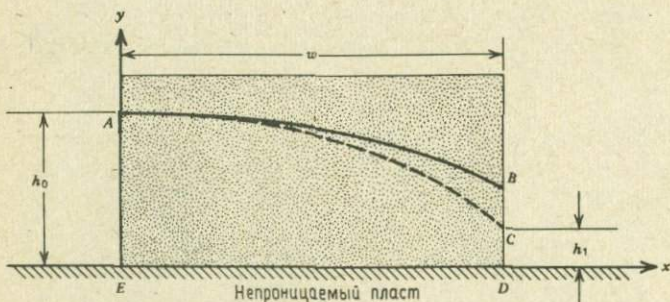


РИС. 9.5. Поток со свободной поверхностью, просачивающийся сквозь пористую дамбу. AC — парабола Дюпюи, описывающая свободную поверхность при $(h_0 - h_1)/h_0 \ll 1$. Реальное зеркало-грунтовых вод AB лежит выше параболы Дюпюи, так что возникает поверхность просачивания BC .

Если h_1 мало по сравнению с h_0 , то реальная поверхность воды AB лежит над параболой Дюпюи (рис. 9.5). Это приводит к тому, что на поверхности дамбы, через которую вода вытекает, образуется фронт просачивания BC . При $h_1 \ll h_0$ компоненты u_x и u_y скорости Дарси в пористом материале одного порядка, но каждая компонента подчиняется закону Дарси. Так, для горизонтальной компоненты u_x можем написать

$$u_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (9.28)$$

где $p = p(x, y)$. Интегрируя это равенство по поперечному сечению дамбы $0 < x < w$, $0 < y < h_0$, находим

$$\int_0^w \int_0^{h_0} u_x dy dx = -\frac{k}{\mu} \int_0^w \int_0^{h_0} \frac{\partial p}{\partial x} dx dy, \quad (9.29)$$

где в правой части мы изменили порядок интегрирования. Замечая, что расход воды через плоскость x

$$Q = \int_0^{h_0} u_x dy \quad (9.30)$$

есть величина постоянная, не зависящая от x , и что

$$\int_0^w \frac{\partial p}{\partial x} dx = p_1(y) - p_0(y), \quad (9.31)$$

где $p_1(y)$ и $p_0(y)$ — распределения давления соответственно при $x = w$ и $x = 0$, из равенства (9.29) находим

$$Q = \frac{k}{\mu w} \left(\int_0^{h_0} p_0 dy - \int_0^{h_0} p_1 dy \right). \quad (9.32)$$

Распределения давления даются выражениями

$$p_0 = \rho g (h_0 - y), \quad (9.33)$$

$$p_1 = \begin{cases} \rho g (h_1 - y) & \text{при } 0 < y < h_1 \\ 0 & \text{при } h_1 < y < h_0, \end{cases} \quad (9.34)$$

откуда интегралы в правой части (9.32) равны

$$\int_0^{h_0} p_0 dy = \frac{1}{2} \rho g h_0^2, \quad (9.35)$$

$$\int_0^{h_0} \rho_1 dy = \frac{1}{2} \rho g h_1^2. \quad (9.36)$$

Подставляя выражения (9.35) – (9.36) в формулу (9.32), мы опять приходим к равенству (9.27). Таким образом, формула расхода Дюпюи – Фухгаймера верна при всех значениях h_1/h_0 .

ЗАДАЧА 9.7. Подошва незамкнутого водоносного пласта наклонена под углом θ к горизонту. Пользуясь равенством (9.4) и приближением Дюпюи, выведите выражение для объемного расхода Q , если свободная поверхность находится на постоянной высоте h над подошвой.

ЗАДАЧА 9.8. Рассмотрим поток, имеющий зеркало грунтовых вод и текущий через стратифицированную пористую дамбу (рис. 9.6). Пусть уровень h_1 воды перед дамбой превышает толщину a слоя с коэффициентом проницаемости k_2 , а зеркало грунтовых вод целиком лежит в слое с коэффициентом проницаемости k_1 . Покажите, что объемный расход воды через дамбу равен

$$Q = \frac{k_1 \rho g}{2\mu w} (h_0^2 - h_1^2) \left\{ 1 + \frac{2a}{h_0 + h_1} \left(\frac{k_2}{k_1} - 1 \right) \right\}. \quad (9.37)$$

Приближением Дюпюи не пользуйтесь.

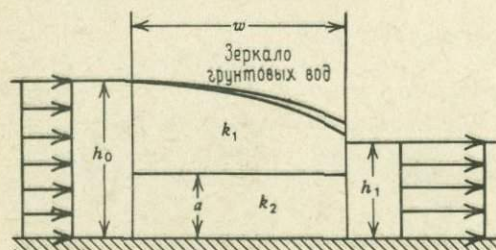


РИС. 9.6. Течение через стратифицированную пористую дамбу; поверхностью является зеркало грунтовых вод.

С помощью приближения Дюпюи можно рассчитать всасывание жидкости в скважину, пронизывающую незамкнутый водоносный пласт (рис. 9.7). Обобщение равенства (9.23) приводит к следующему выражению для радиальной скорости Дарси u_r в приближении Дюпюи:

$$u_r = - \frac{k \rho g}{\mu} \frac{dh}{dr}. \quad (9.38)$$

Объемный расход через цилиндрическую поверхность высотой $h(r)$ и радиу-

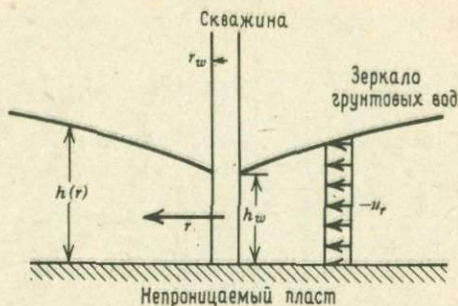


Рис. 9.7. Всасывание воды в скважину, проходящую через незамкнутый водоносный пласт.

сом r равен

$$Q_r = 2\pi r h u_r = -\frac{2\pi k \rho g}{\mu} (r h \frac{dh}{dr}), \quad (9.39)$$

где Q_r положительно для потока, направленного по радиусу наружу. Сохранение массы требует постоянства Q_r . Интегрируя равенство (9.39) с начальным условием $h = h_0$ при $r = r_0$, получаем

$$h^2 - h_0^2 = -\frac{\mu Q_r}{\pi k \rho g} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (9.40)$$

Если радиус скважины равен r_w , а высота Зеркала грунтовых вод в скважине h_w , то из равенства (9.40) для расхода жидкости, втекающей в скважину, находим

$$Q_r = \frac{\pi k \rho g (h_0^2 - h_w^2)}{\mu \ln (r_w / r_0)}, \quad (9.41)$$

где r_0 опять есть расстояние, в пределах которого происходит подпитка скважины.

ЗАДАЧА 9.9. Определите расход жидкости, втекающей в скважину, если $h_0 = 10$ м, $h_w = 1$ м, $k = 10^{-12}$ м², $\mu = 10^{-3}$ Па · с, $r_0 = 5$ км и $r_w = 0,1$ м. Рассчитайте форму зеркала грунтовых вод.

Выше мы говорили только о стационарных течениях. Чтобы рассчитывать течения с переменными во времени t высотой зеркала грунтовых вод и скоростью в водоносном пласте необходимо вывести уравнение неразрывности или сохранения массы в нестационарном случае. Предположим, что справедливо приближение Дюпюи, и рассмотрим одномерный поток через элемент водоносного пласта с переменным уровнем грунтовых вод, ограниченный поверх-

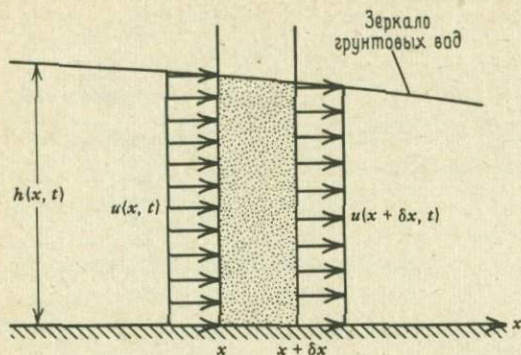


РИС. 9.8. Одномерное течение через элемент незамкнутого водоносного пласта.

ностями x и $x + \delta x$ (рис. 9.8). Объемный расход жидкости, втекающей в элемент через сечение единичной длины в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 9.8, равен $u(x, t) h(x, t)$, а объемный расход жидкости, вытекающей из элемента, есть $u(x + \delta x, t) h(x + \delta x, t)$. Результирующий поток жидкости, вытекающей из элемента, равен

$$u(x + \delta x, t) h(x + \delta x, t) - u(x, t) h(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} (uh) \delta x.$$

Если считать, что жидкость несжимаема, то вытекание жидкости из элемента больше, чем втекание, должно приводить к понижению уровня грунтовых вод. Изменение высоты уровня с $h(t, x)$ до $h(t + \delta t, x)$ за время δt означает, что изменение объема жидкости в элементе равно

$$\varphi [h(t + \delta t, x) - h(t, x)] \delta x = \varphi \frac{\partial h}{\partial t} \delta x \delta t.$$

Множитель φ появляется вследствие того, что жидкость заполняет только поры в матрице породы. Условие сохранения жидкости требует, чтобы общее количество жидкости, вытекшей из элемента за время δt , было равно уменьшению объема жидкости, содержащейся в элементе. Отсюда следует, что

$$\varphi \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uh) = 0. \quad (9.42)$$

Подставляя сюда выражение (9.23) для скорости Дарси, находим

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k \rho g}{\mu \varphi} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right). \quad (9.43)$$

Это нелинейное уравнение диффузии часто называют *уравнением Буссинеска*.

Для малых изменений h мы можем написать

$$h = h_0 + h', \quad (9.44)$$

где h_0 — постоянная, а $|h'| \ll h_0$. Подставляя это выражение в уравнение (9.43) и пренебрегая членами, квадратичными по h' , находим

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = \frac{k \rho g h_0}{\mu \phi} \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \quad (9.45)$$

Процедура линеаризации здесь такая же, как использованная нами в разд. 6.18. Уравнение (9.45) формально совпадает с одномерным нестационарным уравнением теплопроводности (4.68). Поэтому многие решения уравнения диффузии (9.45) могут быть получены с помощью методов, описанных в гл. 4.

Рассчитаем, например, какое возмущение зеркала грунтовых вод на расстояниях $x > 0$ от края полубесконечного незамкнутого водовода вызовет периодическое изменение h' , происходящее при $x = 0$ по закону

$$h' = h'_s \cos \omega t. \quad (9.46)$$

Такое изменение h' может возникнуть у зеркала грунтовых вод в безводной или пустынной области за счет ежегодного таяния снега и схода воды с ближайшего горного хребта. Замечая, что параметр $k \rho g h_0 / \mu \phi$ задачи о течении в пористой среде представляет собой эквивалент параметра χ в уравнении теплопроводности, мы можем получить решение задачи (9.45) — (9.46), переходя к новым обозначениям в формуле (4.89):

$$h' = h'_s \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega \mu \phi}{2k \rho g h_0}} \right\} \cos \left\{ \omega t - x \sqrt{\frac{\omega \mu \phi}{2k \rho g h_0}} \right\}. \quad (9.47)$$

Амплитуда колебания уровня грунтовых вод в плоскости $x = 0$ на расстоянии

$$x_e = \left(\frac{2k \rho g h_0}{\omega \mu \phi} \right)^{1/2} \quad (9.48)$$

уменьшается в e раз. Подставляя $\phi = 0,1$, $k = 10^{-11} \text{ м}^2$, $\omega = 2 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$ (частота, соответствующая периоду в 1 год), $\mu = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ и $h_0 = 100 \text{ м}$, мы находим, что $x_e = 1 \text{ км}$. Мы видим, что эффект колебания гидростатического напора в данном месте затухает уже на достаточно коротком расстоянии.

ЗАДАЧА 9.10. В момент времени $t = 0$ гидростатический напор на границе $x = 0$ внезапно увеличивается от h_0 до $h_0 + \Delta h$ ($\Delta h \ll h_0$). Найдите распределение скорости в незамкнутом водоносном пласте, занимающем полупространство $x > 0$.

ЗАДАЧА 9.11. При $t = 0$ высота зеркала грунтовых вод в незамкнутом водоносном пласте при $x > 0$ равна h_0 . При $t > 0$ с поверхности $x = 0$ пласта с постоянным

расходом Q (на единицу длины) вытекает вода. Предполагая, что $|\Delta h| \ll h_0$, покажите, что высота зеркала грунтовых вод в функции t и x есть

$$h = h_0 - 2Q_0 \left(\frac{k\rho g h_0 \Phi}{\mu t} \right)^{1/2} \left[\xi \operatorname{erf} \xi - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erfc}(-\xi^2) \right], \quad (9.49)$$

где

$$\xi = \frac{x}{2} \left(\frac{\mu \Phi}{k\rho g h_0 t} \right)^{1/2}.$$

ЗАДАЧА 9.12. При $t = 0$ высота зеркала грунтовых вод в незамкнутом водоносном пласте равна $h = h_1$ при $-L \leq x \leq L$ и $h = h_0$ при $|x| > L$ ($h_1 - h_0 \ll h_0$). Покажите, что при $t > 0$ высота уровня грунтовых вод в функции x и t определяется как

$$h - h_0 = \frac{h_1 - h_0}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{L - x}{2} \left(\frac{\mu \Phi}{k\rho g h_0 t} \right)^{1/2} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{L + x}{2} \left(\frac{\mu \Phi}{k\rho g h_0 t} \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (9.50)$$

ЗАДАЧА 9.13. При $t \leq 0$ в области $x > 0$ незамкнутого водовода имеется стационарный поток Q_0 . Согласно равенству (9.25), высота зеркала грунтовых вод определяется как

$$h^2 = h_0^2 - 2\mu Q_0 x / k\rho g, \quad (9.51)$$

где h_0 — высота этой поверхности при $x = 0$. В момент $t = 0$ высота поверхности при $x = 0$ внезапно изменяется с h_0 до h_1 , $|h_0 - h_1| \ll h_0$. Покажите, что в дальнейшем высота ее определяется равенством

$$h^2 = h_1^2 + (h_0^2 - h_1^2) \operatorname{erf} \xi - \frac{2\mu Q_0 x}{k\rho g}, \quad (9.52)$$

где $\xi = (1/2)x(\mu\Phi/k\rho g\bar{h}t)^{1/2}$, а \bar{h} — подходящим образом определенная средняя высота. Покажите, что при малых изменениях квадрата высоты зеркала грунтовых вод h^2 также удовлетворяет линеаризованному уравнению диффузии. Ввиду того что начальное условие (9.51) сформулировано через величину h^2 , удобнее решать уравнение для h^2 , а не для h . Покажите, что расход Q жидкости, втекающей в канал при $x = 0$, равен

$$Q = Q_0 - \frac{1}{2} (h_0^2 - h_1^2) \left(\frac{k\rho g \Phi}{\pi \mu \bar{h} t} \right)^{1/2}. \quad (9.53)$$

В ряде случаев можно найти решения нелинейного уравнения Буссинеска (9.43). В качестве первого примера рассмотрим задачу об осушении пористого берега канала (рис. 9.9). Предположим, что в момент времени $t = -0$ уровни воды в канале и в толще прилегающего пористого берега находятся на одинаковой высоте h_0 над горизонтальным водоупорным слоем (рис. 9.9,а). В

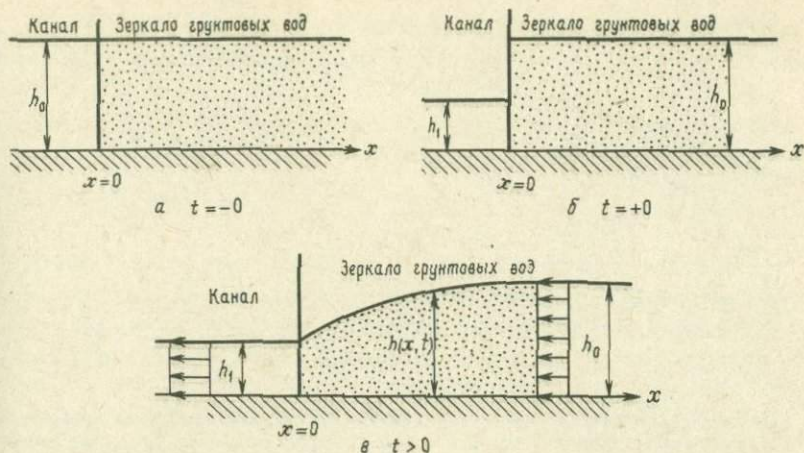


Рис. 9.9. Понижение уровня грунтовых вод на берегу вследствие резкого понижения уровня воды в канале.

момент времени $t = +0$ уровень воды в канале внезапно снижается до высоты h_1 (рис. 9.9,б) и в дальнейшем при $t > 0$ остается неизменным. В результате происходит дренирование берега, и высота уровня грунтовых вод в водоносном пласте уменьшается (рис. 9.9,в). Начальные и граничные условия для этой задачи имеют вид

$$h(0, t) = h_1, \quad h(\infty, t) = h_0, \quad h(x, 0) = h_0. \quad (9.54)$$

Выше мы отметили, что линеаризованное уравнение Буссинеска формально совпадает с одномерным нестационарным уравнением теплопроводности. Граничные условия (9.54) также тождественны условиям, использованным в задаче об охлаждении полупространства при мгновенном изменении температуры границы (см. разд. 4.15). Это наводит на мысль, что переменную подобия (4.96), которая с учетом эквивалентности параметров χ и $k\rho gh_0/\mu\phi$ имеет вид

$$\xi = \left(\frac{\mu\phi}{k\rho gh_0 t} \right)^{1/2} \frac{x}{2}, \quad (9.55)$$

можно использовать и в задаче (9.43), (9.54). Вводя, кроме того, безразмерную высоту поверхности воды

$$f = h/h_0, \quad (9.56)$$

мы можем переписать уравнение Буссинеска (9.43) в виде

$$-2\xi \frac{df}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(f \frac{df}{d\xi} \right). \quad (9.57)$$

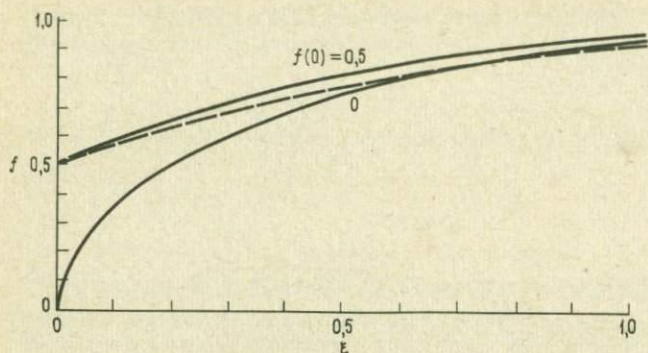


РИС. 9.10. Численное безразмерное решение нелинейного уравнения Буссинеска для просачивания воды в канал из примыкающего к нему берега после резкого понижения уровня воды в канале. Безразмерная высота f поверхности воды показана в функции переменной подобия ξ при $f(0) = 0$ и $0,5$ (сплошные кривые). Пунктир — решение (9.59) линеаризованного уравнения Буссинеска при $f(0) = 0,5$.

Граничные условия, согласно (9.54) и (9.55), запишутся как

$$f(0) = h_1/h_0, \quad f(\infty) = 1. \quad (9.58)$$

Аналитического решения уравнения (9.57) получить не удастся; однако его можно проинтегрировать численно. Численные решения, полученные при $f(0) = 0$ и $0,5$, показаны на рис. 9.10.

Решение уравнения, получаемого линеаризацией уравнения (9.57), имеет вид

$$f = f(0) \operatorname{erfc} \xi. \quad (9.59)$$

В пределе $f(0) \rightarrow 1$ этот результат является точным (см. задачу 9.10). Решение (9.59) линеаризованной задачи при $f(0) = 0,5$ также приведено на рис. 9.10. Видно, что приближенное решение, несмотря на существенную нелинейность [величина $f(0) = h_1/h_0 = 0,5$ значительно меньше 1], оказывается довольно хорошим.

Найденное решение зависит от x и t в комбинации (9.55), так что форма зеркала грунтовых вод меняется с расстоянием и временем, оставаясь подобной самой себе, т.е. h зависит только от $x/t^{1/2}$. Следует отметить, однако, что это верно только для достаточно больших времен. При малых временах dh/dx оказывается порядка единицы, так что приближение Дюпюи, использованное при выводе уравнения (9.43), перестает быть справедливым.

ЗАДАЧА 9.14. Покажите, что расход Q воды, просачивающейся через единицу длины канала, изображенного на рис. 9.9, равен

$$Q = - \frac{\varphi h_1}{2t^{1/2}} \left(\frac{k \rho g h_0}{\mu \varphi} \right)^{1/2} f'(0), \quad (9.60)$$

где $f'(0) = df/d\xi$ при $\xi = 0$.

Решение (9.59) уравнения Буссинеска, зависящее только от параметра подобия, можно получить для случая горизонтального растекания сосредоточенного объема воды. Вода будет диффундировать в стороны подобно тому, как происходит диффузия тепла, первоначально сосредоточенного в ограниченном объеме. Последняя задача исследовалась в разд. 4.20. Условие сохранения количества жидкости записывается в форме, аналогичной выражению (4.152) для сохранения количества тепла:

$$\int_0^{x_0} h dx = V_1 / 2\varphi, \quad (9.61)$$

где V_1 — начальный объем жидкости, приходящийся на единицу длины в направлении, перпендикулярном растеканию жидкости, $h = h(x, t)$ — высота свободной поверхности над водоупорным слоем, $x_0(t)$ — полуширина объема, занятого водой. Покажем, что растекающаяся жидкость имеет резкий фронт, положение которого мы обозначим через x_0 ; при $|x| > x_0$ имеем $h \equiv 0$. Растекание жидкости происходит симметрично в обе стороны, так что область $0 < x < x_0$ занимает ровно половина жидкости.

Эта задача, подобно задаче о диффузии тепла, решается посредством введения переменных подобия. Переменные подобия, в которых удобно описывать растекание грунтовых вод из первоначально ограниченного объема, имеют вид

$$f = \left(\frac{12k \rho g \varphi t}{\mu V_1^2} \right)^{1/2} h, \quad (9.62)$$

$$\xi = \left(\frac{2\mu \varphi^2}{3k \rho g V_1 t} \right)^{1/2} x. \quad (9.63)$$

Чтобы переписать уравнение Буссинеска (9.43) в этих переменных, вычислим частные производные

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{1}{3t} \left(\frac{\mu V_1^2}{12k \rho g \varphi t} \right)^{1/2} \left(\xi \frac{df}{d\xi} + f \right), \quad (9.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \left(\frac{\mu V_1^2}{12k\rho g\phi t} \right)^{2/3} \left(\frac{2}{3} \frac{\mu\phi^2}{k\rho g V_1 t} \right)^{1/3} \frac{d}{d\xi} \left(f \frac{df}{d\xi} \right). \quad (9.65)$$

Подставляя найденные выражения в уравнение (9.43), получаем

$$f \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + \xi \frac{df}{d\xi} + f = 0. \quad (9.66)$$

Условие (9.61) сохранения количества жидкости в переменных f и ξ записывается как

$$\xi_0 \int_0^{\xi_0} f d\xi = 1, \quad (9.67)$$

где ξ_0 определяется выражением (9.63) при $x = x_0$. Аналитическое решение задачи (9.66) — (9.67) имеет вид

$$f = \frac{3^{2/3}}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{3^{2/3}} \right), \quad |\xi| \leq \xi_0 = 3^{1/3}. \quad (9.68)$$

Отсюда следует, что форма зеркала грунтовых вод в любой фиксированный момент времени описывается параболой. Из равенства (9.68) видно, что $f = 0$ при $|\xi| = \xi_0 = 3^{1/3}$. Следовательно, уравнение фронта жидкости, т.е. координата полуширины основания растекающегося объема, имеет вид $\xi = \xi_0$. При $|\xi| > \xi_0$ жидкости нет. Согласно определению (9.63), уравнение фронта в размерных переменных есть

$$x_0 = \left(\frac{9k\rho g V_1 t}{2\mu\phi^2} \right)^{1/3}. \quad (9.69)$$

Объединяя выражения (9.62), (9.63) и (9.68), находим высоту поверхности грунтовых вод в функции координаты и времени:

$$h = \left(\frac{3\mu V_1^2}{32k\rho g\phi t} \right)^{1/3} \left\{ 1 - \left(\frac{2\mu\phi^2}{9k\rho g V_1 t} \right)^{1/3} x^2 \right\}. \quad (9.70)$$

При $t = 0$ жидкость сосредоточена в объеме, имеющем нулевую толщину и бесконечно большую высоту. Однако общее количество жидкости, приходящееся на единицу длины в направлении, перпендикулярном растеканию жидкости, равно V_1 и при $t = 0$.

ЗАДАЧА 9.15. Покажите, что максимальная высота зеркала грунтовых вод в функции x есть

$$h_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{V_1}{\phi x}, \quad (9.71)$$

а время прохождения максимума равно

$$t_{\max} = \frac{2\mu\phi^2 x^3}{\sqrt{3k\rho g V_1}}. \quad (9.72)$$

ЗАДАЧА 9.16. Пусть в момент времени $t = t_0$ при $x = 0$ высота и полуширина основания растекающегося объема грунтовой воды равны соответственно $h_0 = h(0, t_0)$ и l_0 . Покажите, что высота этого объема при $x = 0$ в момент $t = t_0 + t^*$ дается выражением

$$h_0 \left(1 + \frac{6k\rho g h_0 t^*}{\mu\phi l_0^2}\right)^{-1/2}.$$

Кроме того, покажите, что полуширина основания растекающегося объема в момент времени $t = t_0 + t^*$ равна

$$l_0 \left(1 + \frac{6k\rho g h_0 t^*}{\mu\phi l_0^2}\right)^{1/2}.$$

Определим теперь высоту h уровня грунтовых вод в функции x и t в случае, когда вода закачивается в полупространство $x > 0$ через поверхность $x = 0$ с постоянным объемным расходом Q_1 на единицу ширины поверхности. При $t < 0$ высота h равна нулю, а при $t > 0$ вода вводится через плоскость $x = 0$. При этом в область $x > 0$ попадает половина закачиваемой воды (вторая половина попадает в область $x < 0$). В соответствии с равенством (9.24) расход жидкости при $x = +0$ запишется как

$$-\frac{k\rho g}{\mu} \left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right)_{x=+0} = \frac{1}{2} Q_1. \quad (9.73)$$

Высота $h(x, t)$ зеркала грунтовых вод есть решение уравнения Буссинеска (9.43), удовлетворяющее условию (9.73).

Для решения мы опять введем переменные подобия. В этой задаче их удобно определить как

$$f = \left(\frac{k\rho g\phi}{Q_1^2\mu t}\right)^{1/2} h, \quad (9.74)$$

$$\xi = \left(\frac{\phi^2\mu}{k\rho g Q_1 t^2}\right)^{1/2} x. \quad (9.75)$$

С точностью до числовых множителей и замены V_1/t на Q_1 эти переменные совпадают с теми, которые определяются формулами (9.62) и (9.63). Уравне-

ние Буссинеска в новых переменных принимает вид

$$f \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + \frac{2}{3} \xi \frac{df}{d\xi} - \frac{1}{3} f = 0. \quad (9.76)$$

Граничное условие (9.73) при $x = +0$ записывается как

$$\left(f \frac{df}{d\xi} \right)_{\xi=+0} = - \frac{1}{2}. \quad (9.77)$$

Эта задача в отличие от предыдущей может быть решена только численно. Как и в случае растекания из первоначального ограниченного объема, в этом случае имеется резкий фронт и $f = 0$ при $\xi > \xi_0$. В плоскости фронта, согласно уравнению (9.76), имеем

$$\left(\frac{df}{d\xi} \right)_{\xi = \xi_0} = - \frac{2}{3} \xi_0. \quad (9.78)$$

Численное решение уравнения (9.76) при условиях (9.77) и (9.78) показано на рис. 9.11. Значение ξ_0 равно 1,18, а размерная форма закона перемещения фронта, исходя из (9.75), имеет вид

$$x_0 = 1,18 \left(\frac{k \rho g Q_1 t^2}{\varphi^2 \mu} \right)^{1/2}. \quad (9.79)$$

Высота зеркала грунтовых вод при $x = 0$ есть

$$h_{x=0} = 0,82 \left(\frac{Q_1^2 \mu t}{k \rho g \varphi} \right)^{1/2}. \quad (9.80)$$

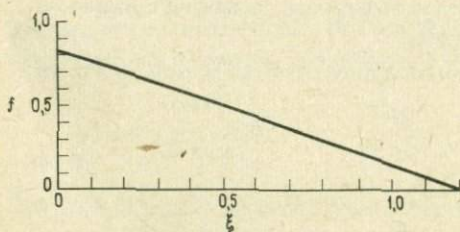


РИС. 9.11. Безразмерная высота f зеркала грунтовых вод в функции переменной подобия ξ в случае закачки воды с постоянной скоростью через плоскость $x = 0$.

ЗАДАЧА 9.17. Жидкость закачивается через плоскость $x = 0$ со скоростью $0,1 \text{ м}^2/\text{с}$. Какова высота зеркала грунтовых вод в плоскости закачки при $t = 10^5 \text{ с}$ и насколько далеко за это время продвигнется фронт жидкости, если $\mu = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\varphi = 0,1$, $k = 10^{-11} \text{ м}^2$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$?

Чтобы можно было решать задачи с нестационарным горизонтальным потоком, направленным по радиусу к вертикальной оси или от нее, следует записать уравнение Буссинеска в цилиндрических или полярных координатах. Мы сделаем это, снова исходя из условия сохранения количества жидкости при наличии радиального потока. Изменение объема жидкости, заключенной между поверхностями радиусов r и $r + \delta r$, происходит за счет изменения высоты зеркала грунтовых вод с $h(t)$ до $h(t + \delta t)$ за интервал времени от t до $t + \delta t$. Изменение объема есть

$$2\pi r \varphi \{ h(t + \delta t) - h(t) \} \delta r = 2\pi r \varphi \frac{\partial h}{\partial t} \delta r \delta t.$$

Объем жидкости, вытекающей из цилиндрического элемента за время δt , равен

$$\{ Q_r(r + \delta r) - Q_r(r) \} \delta t = \frac{\partial Q_r}{\partial r} \delta r \delta t,$$

где Q_r — общий расход жидкости через поверхность радиуса r и высоты h . Условие сохранения количества жидкости требует равенства объема жидкости, вытекающей из элемента, и уменьшения объема жидкости в элементе за счет понижения высоты уровня грунтовых вод. Отсюда можно написать

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + 2\pi r \varphi \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (9.81)$$

Подставляя выражение (9.39) для Q_r , находим

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k \rho g}{\mu \varphi r} \frac{\partial}{\partial r} (r h \frac{\partial h}{\partial r}). \quad (9.82)$$

В качестве первого решения этого уравнения рассмотрим решение, зависящее от параметров подобия и описывающее радиальное растекание первоначально ограниченного объема воды. Пусть в момент времени $t = 0$ вдоль прямой $r = 0$ мгновенно распределяется объем жидкости V_0 . При $t > 0$ жидкость растекается по радиусу в стороны; в каждый момент времени общее количество жидкости, содержащейся в области $r > 0$, должно равняться исходному количеству V_0 . Условие сохранения жидкости можно записать как

$$2\pi \varphi \int_0^{r_0} r h dr = V_0. \quad (9.83)$$

Верхний предел интегрирования $r = r_0$ конечен, поскольку, как и выше, жидкость растекается резким фронтом, т.е. при $r > r_0$ $h = 0$.

Переменные подобия в этой задаче имеют вид

$$f = \left(\frac{4k\rho g t}{\mu V_0} \right)^{1/2} h, \quad (9.84)$$

$$\eta = \left(\frac{\mu \Phi^2}{4k\rho g V_0 t} \right)^{1/4} r. \quad (9.85)$$

В этих переменных уравнение (9.82) переписывается в виде

$$f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 + \frac{f}{\eta} \frac{df}{d\eta} + \eta \frac{df}{d\eta} + 2f = 0, \quad (9.86)$$

а условие (9.83) сохранения жидкости в безразмерной форме есть

$$\int_0^{\eta_0} \eta f d\eta = 1/2\pi, \quad (9.87)$$

где η_0 — значение η при $r = r_0$. Оказывается, что, как и при растекании линейного объема грунтовых вод, в случае осесимметричного растекания можно найти аналитическое решение уравнения (9.86), удовлетворяющее условию (9.87). Это решение имеет вид

$$f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\eta^2 \sqrt{\pi}}{2} \right), \quad |\eta| \leq \eta_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2}. \quad (9.88)$$

Уравнение $\eta = \eta_0$ движения фронта в размерном виде записывается как [см. (9.85)]

$$r_0 = \left(\frac{16k\rho g V_0 t}{\pi \mu \Phi^2} \right)^{1/4}. \quad (9.89)$$

Высота зеркала грунтовых вод в функции координаты и времени получается с помощью соотношений (9.84), (9.85), и (9.88):

$$h = \left(\frac{\mu V_0}{4\pi k \rho g t} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \left(\frac{\pi \mu \Phi^2}{16k\rho g V_0 t} \right)^{1/2} r^2 \right\}. \quad (9.90)$$

ЗАДАЧА 9.18. Покажите, что максимальная высота зеркала грунтовых вод в функции r есть

$$h_{\max} = \frac{V_0}{2\pi \Phi r^2}, \quad (9.91)$$

а время прохождения волны максимальной амплитуды равно

$$t_{\max} = \frac{\pi \mu \Phi^2 r^4}{4k\rho g V_0}. \quad (9.92)$$

ЗАДАЧА 9.19. Пусть в момент времени $t = t_0$ высота и максимальный радиус основания растекающегося осесимметричного объема грунтовой воды равны

$h_0 = h(0, t_0)$ и b_0 соответственно. Покажите, что высота уровня свободной поверхности в точке $r = 0$ в момент времени $t = t_0 + t'$ равна

$$h_0 \left(1 + \frac{8k\rho g h_0 t'^2}{\mu \Phi b_0^2} \right)^{-1/2}.$$

Кроме того, покажите, что максимальный радиус основания занятого водой объема в момент времени $t = t_0 + t'$ есть

$$b_0 \left(1 + \frac{8k\rho g h_0 t'^2}{\mu \Phi b_0^2} \right)^{1/4}.$$

Точное решение нелинейного уравнения диффузии для высоты уровня грунтовых вод можно получить также в задаче о закачке воды через ось $r = 0$ с постоянным объемным расходом Q_0 . При $t < 0$ для всех r $h = 0$; при $t > 0$ от оси $r = 0$ с постоянной скоростью поступает вода. В соответствии с формулой (9.39) граничное условие при $r \rightarrow 0$ можно записать как

$$-\frac{2\pi k\rho g r h}{\mu} \frac{\partial h}{\partial r} \rightarrow Q_0 \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (9.93)$$

В этой задаче удобно перейти к следующим переменным подобия:

$$f = \left(\frac{k\rho g}{\mu Q_0} \right)^{1/2} h, \quad (9.94)$$

$$\eta = \left(\frac{\mu \Phi^2}{k\rho g Q_0 t^2} \right)^{1/4} r. \quad (9.95)$$

С точностью до числовых множителей эти переменные получаются из переменных (9.84) – (9.85) путем замены V_0/t на Q_0 . В новых переменных уравнение (9.82) запишется в виде

$$f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 + \frac{f}{\eta} \frac{df}{d\eta} + \frac{\eta}{2} \frac{df}{d\eta} = 0, \quad (9.96)$$

а граничное условие (9.93) при $r = 0$ переписывается как

$$\eta f \frac{df}{d\eta} \rightarrow -\frac{1}{2\pi} \quad \text{при } \eta \rightarrow 0. \quad (9.97)$$

Задача (9.96) – (9.97) может быть решена только численно. Уравнение фронта жидкости имеет вид $\eta = \eta_0$; при $\eta > \eta_0$ $f = 0$. Из уравнения (9.96) на

поверхности фронта (на которой $f = 0$) имеем

$$\left(\frac{df}{d\eta}\right)_{\eta=\eta_0} = -\frac{1}{2}\eta_0. \quad (9.98)$$

Численное решение уравнения (9.96), удовлетворяющее граничным условиям (9.97) и (9.98), изображено на рис. 9.12. Значение η_0 равно 1,16, и размерная форма закона перемещения фронта есть

$$r_0 = 1,16 \left(\frac{k\rho g Q_0 t^2}{\mu \varphi^2}\right)^{1/4}. \quad (9.99)$$

При $r \rightarrow 0$ высота зеркала грунтовых вод логарифмически расходится. Эта особенность того же рода, что и содержащаяся в формуле (9.40) задачи о стационарном течении.

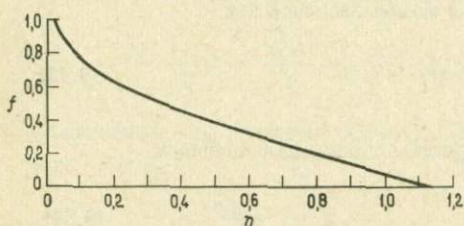


РИС. 9.12. Безразмерная высота f зеркала грунтовых вод в функции переменной подобия η в задаче о линейном источнике жидкости, имеющем постоянную мощность и расположенном при $r = 0$.

9.6. Геометрическая форма вулканов

Многие вулканы имеют удивительно сходную осесимметричную форму. У многих слоистых вулканов, входящих в параллельные океаническим желобам вулканические цепи, внешние склоны опускаются почти под постоянным углом, а на вершине имеется кратер. В качестве примера можно привести вулкан Фудзияма, Япония (рис. 9.13). Однако целый ряд явлений может приводить к образованию несимметричных вулканических построек. К ним относятся, например, паразитные центры вулканизма на склонах вулкана, ледниковая и другого типа эрозия, извержения взрывного характера.

В рамках одной из моделей геометрической формы вулканов предполагается, что вулканический конус сложен однородной пористой средой, а поверхность вулкана является поверхностью постоянного гидростатического напора. Вулкан образуется в результате насаивания большого количества лавовых потоков. Каждый поток проходит через внутренние поры вулканической постройки, изливается на поверхность и, застывая, увеличивает объем конуса.



РИС. 9.13. Вулкан Фудзияма (Япония).

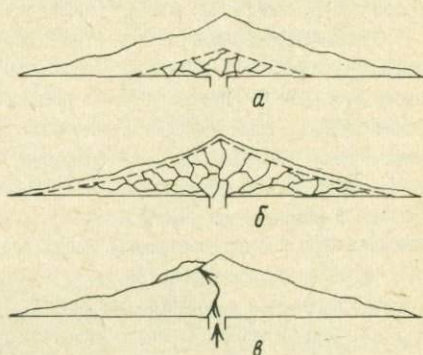


РИС. 9.14. Механизм разрастания тела вулкана за счет лав, изливающихся и отвердевающих с поверхности. а — магма движется через вулканическую постройку к поверхности по пути наименьшего сопротивления; б — магма достигает поверхности в точке выхода пути наименьшего сопротивления; в — излившаяся на поверхность и затвердевшая магма увеличивает объем вулканического конуса.

Процесс роста вулкана схематически изображен на рис. 9.14. В начале извержения магма через вулканический канал достигает центра основания конуса. Исследования движения грунтовых вод показывают, что вулканы пронизаны трещинами, которые возникают, по-видимому, из-за теплового сжатия при затвердевании отдельных лавовых потоков. В некоторых вулканах преобладают радиальные рифтовые зоны, через которые происходит большая часть излияний.

Предположим, что магма движется к поверхности вулкана через уже существующую систему каналов (рис. 9.14, а). На рис. 9.14, б видно, что магма достигает поверхности, двигаясь по пути наименьшего гидростатического сопротивления. В результате в том месте, где она выходит на поверхность, образуется нарост (рис. 9.14, в), который, затвердевая, увеличивает сопротивление вдоль этого пути. Поэтому при следующем извержении магма пойдет по другому пути и выйдет на поверхность в другой точке. Если вулкан станет слишком высоким, то извержения на его сторонах будут стремиться расширить его, а если он станет слишком широким, его высота будет увеличиваться за счет излияний у вершины. Благодаря равному сопротивлению потоку вулкан разрастается осесимметрично.

Течение магмы через тело вулкана, по существу, идентично течению грунтовой воды по незамкнутому водоносному слою. Предположим, что поверхность вулкана, подобно зеркалу грунтовых вод в незамкнутом водоносном пласте, является поверхностью постоянного гидростатического напора и что склоны вулкана достаточно пологи, так что справедливо приближение Дюпюи. Следует учесть, что, достигая поверхности, магма покидает пористую среду и сама образует новые элементы объема вулканического конуса. Это означает, что в уравнении (9.81) сохранения массы и нелинейном уравнении диффузии (9.82) следует положить $\varphi = 1$.

Рассматриваемая задача формально совпадает с задачей о форме зеркала грунтовых вод в случае равномерного (с расходом Q_0) нагнетания жидкости при $r = 0$. Поэтому здесь непосредственно применимо соответствующее решение подобия, показанное на рис. 9.12; следовательно, он описывает и теоретическую форму вулканов. Переход к размерному уравнению формы вулканов $h=h(r)$ осуществляется умножением на коэффициенты, фигурирующие в равенствах (9.94) и (9.95); с помощью этих коэффициентов задача приводилась к безразмерному виду. Эти множители можно использовать как подгоночные параметры, для того чтобы добиться наилучшего совпадения с формой реальных вулканов. На рис. 9.15 дано сравнение предсказываемой формы вулкана и поперечного разреза вулкана Фудзияма. Видно, что имеется в общем удовлетворительное согласие теории и наблюдений. У подошвы реальный профиль более пологий; возможно, это связано с аллювиальными отложениями. Теоретический профиль не пригоден также вблизи вершины, где он имеет особенность и где неприменимо приближение Дюпюи.

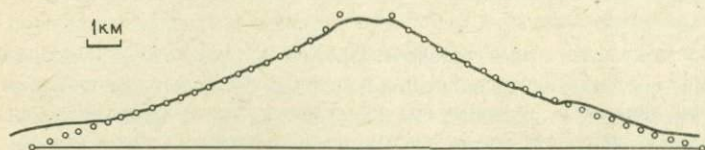


РИС. 9.15. Кружки — безразмерное решение, описывающее форму поверхности жидкости, закачиваемой через ось вулкана с постоянным гидростатическим напором; сплошная кривая — поперечный разрез вулкана Фудзияма, Япония.

Радиус основания вулкана есть радиальная координата фронта растекающейся магмы; следовательно, его можно определить из формулы (9.99) при $\Phi = 1$. Для наклона боковой поверхности у подошвы имеем

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=r_0} = -0,58 \left(\frac{\mu}{k\rho g}\right)^{3/4} \frac{Q_0^{1/4}}{t^{1/2}}. \quad (9.100)$$

Произведение равенств (9.99) и (9.100), взятое с обратным знаком, определяет относительную высоту вулкана h_r :

$$h_r = 0,673 \left(\frac{\mu Q_0}{k\rho g}\right)^{1/2}. \quad (9.101)$$

Получается, что относительная высота не зависит от времени: этот теоретический результат означает, что рост вулкана происходит в основном за счет увеличения радиуса. Действительно, из рис. 9.16, на котором приведены теоретические профили и профили реальных вулканов вулканической цепи на западе США, видно, что имеется хорошее согласие теории и наблюдений и что рост вулканов идет в основном в направлении увеличения радиуса.

Мы убедились, что безразмерное решение задачи о линейном источнике жидкости в незамкнутом водоносном слое может объяснять форму вулканов. Точно так же можно поступить и при объяснении геометрической формы вулканических хребтов. Безразмерная форма поперечного сечения вулканического хребта определится приведенным на рис. 9.11 безразмерным решением, найденным в задаче о плоском источнике жидкости. Чтобы получить размерные профили $h = h(x)$ следует воспользоваться формулами перехода (9.74)

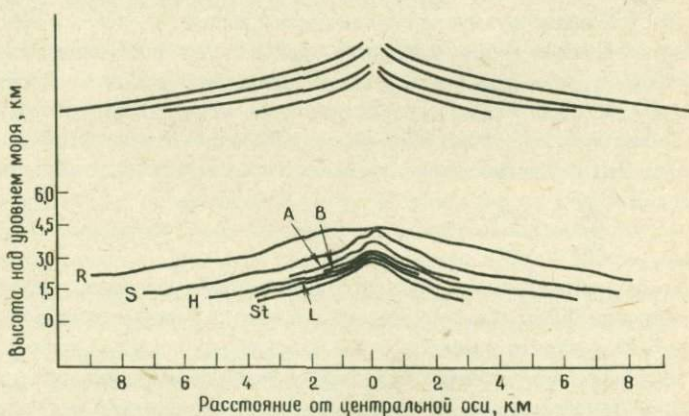


Рис. 9.16. Профили рельефа семи вулканов, принадлежащих вулканической цепи на западе США: R — Рейнир, S — Шаства, A — Адамс, B — Бейкер, H — Худ, L — Лассен-Пик, St — Сент-Хеленс. Показаны также четыре теоретических профиля.

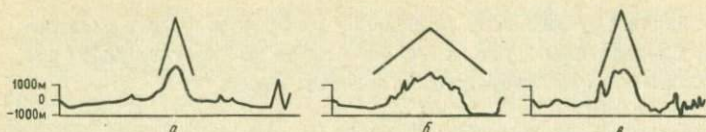


РИС. 9.17. Батиметрические профили через подводные хребты Гавайский (а) и Китовый (б) и через Юго-Восточное Индийское поднятие (в). Показаны и теоретические профили, полученные из безразмерного решения нелинейного уравнения Буссинеска для плоского источника.

и (9.75). Масштабные множители в этих формулах определяются из условия наилучшего соответствия $h(x)$ и конкретного наблюдаемого профиля. Ряд линейных вулканических цепей поднимается с океанического дна. На рис. 9.17 показаны типичные батиметрические профили в районе хребтов Гавайского и Китового и Юго-Восточного Индийского поднятия, над которыми изображены теоретические профили, полученные из безразмерного решения. Как видим, имеется довольно хорошее согласие теории и наблюдений.

9.7. Уравнения сохранения массы, количества движения и энергии для течений в пористых средах

До сих пор мы рассматривали простейшие одномерные и осесимметричные течения, для расчета которых достаточно было закона Дарси и простого уравнения баланса массы. В этом и последующих разделах мы будем иметь дело с одно- и двумерными течениями, в которых также происходит перенос тепла. Поэтому кроме закона Дарси нам понадобятся двумерные дифференциальные уравнения сохранения массы и энергии. В гл. 6 мы уже вывели такие уравнения для вязкой несжимаемой жидкости; здесь с некоторыми видоизменениями мы применим их для расчета течений в пористых средах.

Условие сохранения массы вязкой несжимаемой жидкости, вовлеченной в двумерное течение, требует, чтобы удовлетворялось уравнение (6.53). В случае если жидкость несжимаема, а твердая матрица породы недеформируема, это уравнение можно применить и к течениям в пористой среде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (9.102)$$

Компоненты скорости, фигурирующие в этом уравнении, представляют собой скорости Дарси. Хотя компоненты скорости Дарси отличны от истинных скоростей жидкости в микроскопических каналах пористой среды, именно они играют роль составляющих скорости обычной вязкой жидкости в явлениях массо- и теплопереноса. Это очевидно уже из определения скорости Дарси как объемного расхода жидкости через единицу площади среды в целом. Скорость Дарси — это скорость, усредненная по площади элемента пористой среды. При таком усреднении наряду с переносом массы учитывается и перенос тепла через площадь элемента.

Двумерное уравнение энергии для течения несжимаемой жидкости в пористой среде получается обобщением уравнения (6.283):

$$\rho_m c_{pm} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f c_{pf} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (9.103)$$

Предполагается, что жидкость и твердая матрица имеют одинаковую температуру T . Молекулярный теплоперенос представляет собой диффузию тепла в среде в целом, и поэтому в правой части уравнения (9.103) должен стоять коэффициент теплопроводности, усредненный по объему пор, заполненных жидкостью, и твердой матрицы. Для усредненного таким образом коэффициента теплопроводности мы используем обозначение λ_m , чтобы не путать его с коэффициентом проницаемости. Существенную часть объема среды занимает твердая матрица, которая, как правило, является лучшим, чем жидкость, проводником тепла. Поэтому с хорошей точностью можно считать, что λ_m равно коэффициенту теплопроводности матрицы. Тепловая энергия содержится и в заполняющей поры жидкости, и в твердой матрице. Поэтому член в левой части уравнения (9.103), описывающий тепловую инерцию, также является средним по объему. Члены, описывающие адвекцию тепла, содержат плотность жидкости ρ_f и удельную теплоемкость жидкости c_{pf} , поскольку адвективный теплоперенос осуществляет только жидкость.

Дополняют систему уравнения Дарси для горизонтальной и вертикальной компонент скорости Дарси. Ими являются уже выписанные уравнения (9.1) и (9.3).

9.8. Одномерная адвекция тепла в пористой среде

Значительное количество наблюдательных данных свидетельствует о том, что магматические тела вызывают крупномасштабные движения грунтовых вод в окружающих породах. Прямым следствием гидротермальной циркуляции такого типа, по-видимому, является значительная доля горячих источников с температурой на выходе более $\sim 50^\circ\text{C}$. Грунтовые воды нагреваются интрузией, становятся менее плотными и поднимаются вверх. Вблизи поверхности Земли вода охлаждается и становится более плотной. Вследствие этого она может опуститься и вновь заполнить водоносные пласты и пористые породы вблизи интрузии. Вода опять нагревается, и цикл повторяется. Анализ полного процесса гидротермальной конвекции требует решения системы взаимосвязанных нелинейных дифференциальных уравнений по меньшей мере в двух измерениях. Эта задача будет рассмотрена в последующих разделах. Здесь же мы рассмотрим только восходящее течение над интрузией. Полученное одномерное решение позволит установить зависимость температуры от глубины, которую мы сравним с результатами измерений температуры в гидротермальной системе Стимбот-Спрингс в шт. Невада.

Упрощая уравнения (9.102) и (9.103) на случай стационарного восходящего потока, получаем

$$\frac{dv}{dy} = 0, \quad (9.104)$$

$$\rho_f c_{pf} v \frac{dT}{dy} = \lambda_m \frac{d^2 T}{dy^2}. \quad (9.105)$$

Из первого уравнения следует, что v — постоянная. Поэтому уравнение (9.105) интегрируется непосредственно и дает

$$\rho_f c_{pf} v T = \lambda_m \frac{dT}{dy} + c_1. \quad (9.106)$$

Постоянную интегрирования c_1 можно определить из условия равенства температуры поднимающейся жидкости однородной температуре T_r резервуара на большой глубине. Таким образом, при $y \rightarrow \infty$ мы должны иметь $dT/dy \rightarrow 0$ и $T \rightarrow T_r$. Отсюда следует, что

$$c_1 = \rho_f c_{pf} v T_r \quad (9.107)$$

и
$$\rho_f c_{pf} v (T - T_r) = \lambda_m \frac{d}{dy} (T - T_r). \quad (9.108)$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{d(T - T_r)}{T - T_r} = \frac{\rho_f c_{pf} v}{\lambda_m} dy. \quad (9.109)$$

Интегрируя, получаем

$$\ln \frac{T - T_r}{c_2} = \frac{\rho_f c_{pf} v}{\lambda_m} y, \quad (9.110)$$

или

$$T - T_r = c_2 \exp\left(\frac{\rho_f c_{pf} v}{\lambda_m} y\right). \quad (9.111)$$

Поскольку для восходящего потока v отрицательно, при $y \rightarrow \infty$ правая часть этого равенства стремится к нулю и $T \rightarrow T_r$. Постоянная интегрирования c_2 определяется из условия равенства температуры T значению T_0 на поверхности $y = 0$. Мы имеем

$$c_2 = T_0 - T_r. \quad (9.112)$$

Окончательно получаем следующую зависимость температуры от глубины:

$$T = T_r - (T_r - T_0) \exp\left(\frac{\rho_f c_{pf} v}{\lambda_m} y\right) \quad (9.113)$$

Попытаемся сравнить этот результат с данными измерений распределения температуры по глубине в гидротермальной системе Стимбот-Спрингс, шт. Невада.

Стимбот-Спрингс на юге Уошу-Каунти (шт. Невада) представляет собой область, где имеется много горячих источников и некоторое количество гейзеров. Поскольку в последнее время в непосредственной близости от этого места происходили интенсивные вулканические извержения, можно предположить, что эта термальная система связана с отвердевающим магматическим телом (хотя прямых доказательств наличия магматического тела нет). Лучшую информацию о горизонтальной протяженности гидротермальной системы, вероятно, могут дать измерения температуры зеркала грунтовых вод. На рис. 9.18 приведена соответствующая карта изотерм в области Стимбот-Спрингс. Хорошо видна резко очерченная аномалия температуры с горизонтальным размером 5 — 10 км. Черным цветом закрашены области, где из источников вытекает кипящая вода.

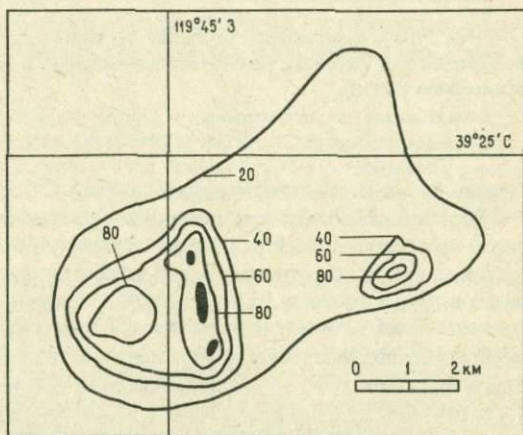


РИС. 9.18. Распределение температуры (в °С) зеркала грунтовых вод в гидротермальной системе Стимбот-Спрингс, шт. Невада. Зачернены области кипящих горячих источников и гейзеров.

На рис. 9.19 показаны результаты измерений температуры в функции глубины, которые были сделаны в забое при бурении скважины вблизи горячих источников. Скважина находилась на расстоянии приблизительно 60 м от ближайшего кипящего источника. Сплошной кривой изображен профиль температуры, определяемый формулой (9.113) при $T_0 = 10^\circ\text{C}$, $T_r = 165^\circ\text{C}$, $\lambda_m = 3,35 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$, $\rho_f = 1000 \cdot \text{кг}/\text{м}^3$, $c_{pf} = 4,185 \cdot 10^3 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ и $v = -6,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}/\text{с}$. Последнее значение скорости Дарси выбрано таким образом, чтобы теоретическое распределение температуры вблизи поверхности наилучшим образом соответствовало наблюдениям. Интересно сравнить эту скорость с наблюдаемой скоростью истечения из термальных источников. Расход воды приблизительно 70 горячих ис-

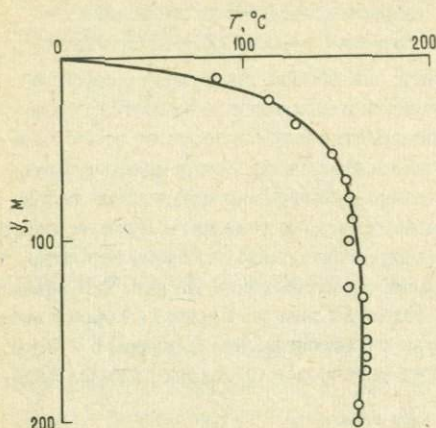


РИС. 9.19. Зависимость температуры воды в гидротермальной системе Стимбот-Спрингс от глубины. Измерения проводились в скважине GS-3 [49]. Кривая — распределение (9.113).

точников, входящих в термальную систему Стимбот-Спрингс, составляет $\sim 3,33 \cdot 10^{-3}$ м³/с. Однако, как показывают геохимические исследования, это число не отражает всей разгрузки системы, так как значительная доля термальных вод не изливается на поверхность через горячие источники, а переходит прямо в систему Стимбот-Крик. Согласно этим геохимическим исследованиям, общий расход системы оценивается в $7,12 \cdot 10^{-2}$ м³/с. Если считать верной установленную нами на основе косвенных данных величину скорости Дарси $6,7 \cdot 10^{-8}$ м/с, то общая площадь, с которой "собирается" расход $7,12 \cdot 10^{-2}$ м³/с, окажется равной 1,1 км². Это означает, что восходящее течение заключено в относительно тонких тепловых струях, расположенных под областями кипящих источников.

Если предположить, что течение вызывается силой плавучести горячей воды, то, исходя из найденного значения скорости Дарси, можно оценить проницаемость системы. Напомним, что сила плавучести возникает при нагревании благодаря малому уменьшению плотности ρ_f , которую можно записать как

$$\rho_f = \rho_{f0} - \alpha_f \rho_{f0} (T_r - T_0), \quad (9.114)$$

где ρ_{f0} — плотность воды при температуре T_0 , α_f — коэффициент объемного расширения воды. Подставляя выражение (9.114) в закон Дарси (9.3), получаем

$$v = -\frac{ck}{\mu} \left(\frac{dp}{dy} - \rho_{f0} g \right) - \frac{k}{\mu} \alpha_f \rho_{f0} g (T_r - T_0). \quad (9.115)$$

Предполагая, что избыточный негидростатический градиент давления в восходящем потоке пренебрежимо мал по сравнению с гидростатическим значением, мы можем написать

$$v = -\frac{k}{\mu} \alpha_f \rho_f g (T_r - T_0). \quad (9.116)$$

Выше мы нашли, что $v = -6,7 \cdot 10^{-8}$ м/с; при $T_r - T_0 = 155$ К, $\alpha_f = 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, $\mu = 1,33 \cdot 10^{-4}$ Па·с мы находим $k = 5,75 \cdot 10^{-15}$ м² ($5,75$ мД), что является довольно низким коэффициентом проницаемости. Из этого расчета видно, что сила плавучести горячей воды может легко привести поток в движение.

Подчеркнем, что выполненные выше расчеты имеют приближенный характер. Это объясняется, во-первых, тем, что с системой Стимбот-Спрингс связано несколько крупных зон разломов, и поэтому применимость модели течения в пористой среде остается под вопросом. Во-вторых, мы рассмотрели только восходящий поток, который представляет собой лишь часть гидротермальной системы. В следующем разделе мы рассматриваем полную картину гидротермальной конвективной циркуляции в нагреваемом снизу пористом слое, насыщенном жидкостью.

ЗАДАЧА 9.20. Вычислите тепловой поток с поверхности пористой среды, в которой имеется стационарный одномерный восходящий поток жидкости. Считайте, что на большой глубине поток изотермичен. Как соотносится тепловой поток на поверхности с тепловым потоком, переносимым жидкостью вверх на большой глубине? Используя приведенные выше значения параметров, оцените общую скорость, с которой геотермальная система Стимбот-Спрингс переносит тепло к поверхности.

ЗАДАЧА 9.21. Рассмотрим восходящее течение смеси воды и пара в пористой среде. У поверхности температура низка, и на определенном уровне весь пар внезапно конденсируется. Имеется поверхность раздела, на которой происходит фазовый переход: над поверхностью восходящий поток состоит из воды, а под поверхностью — из воды и пара. Покажите, что градиент температуры непосредственно над поверхностью $(dT/dy)_2$ превышает градиент температуры непосредственно под поверхностью $(dT/dy)_1$ на величину $-L \rho_s v_s / \lambda_m$, где L — скрытая теплота фазового перехода вода — пар, λ_m — коэффициент теплопроводности среды, ρ_s и $-v_s$ — плотность и скорость Дарси поднимающегося пара.

9.9. Тепловая конвекция в пористом слое

В разд. 6.18 мы рассмотрели возникновение тепловой конвекции в слое жидкости, нагреваемом снизу. Здесь мы рассмотрим аналогичную задачу для насыщенного жидкостью слоя пористой среды, который заключен между непроницаемыми изотермичными границами. Температура верхней границы $y = 0$ равна T_0 , а температура нижней границы $y = b$ равна T_1 ($T_1 > T_0$). Для того чтобы в слое могла начаться конвекция, градиент температуры должен превысить критическое значение. Непосредственно перед началом конвекции распределение температуры описывается решением (6.285) уравнения молекулярной

теплопроводности:

$$T_c = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{b} y. \quad (9.117)$$

В начальной фазе конвекции возмущение $T' \equiv T - T_c$ температуры, равно как и компоненты u' и v' скорости Дарси, сколь угодно малы.

Как и в разд. 6.18, воспользуемся приближением Буссинеска, т.е. будем считать жидкость несжимаемой и учтем изменение плотности только в члене, описывающем силу плавучести в законе Дарси для вертикальной компоненты скорости Дарси. В этом приближении уравнение энергии (9.103) для T' дает

$$\begin{aligned} \rho_m c_{pm} \frac{\partial T'}{\partial t} + \rho_f c_{pf} (u' \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{\partial T'}{\partial y}) + \\ + \rho_f c_{pf} v' \frac{T_1 - T_0}{b} = \lambda_m \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (9.118)$$

При малых T' , u' и v' нелинейными членами $u' \partial T' / \partial x$ и $v' \partial T' / \partial y$ в левой части уравнения (9.118) можно пренебречь. Уравнения (9.1), (9.3), (9.102) и (9.118), линеаризованные относительно малых возмущений температуры T' , скорости u' и v' и давления p' , можно записать как

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad (9.119)$$

$$\rho_m c_{pm} \frac{\partial T'}{\partial t} + \rho_f c_{pf} v' \frac{T_1 - T_0}{b} = \lambda_m \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right), \quad (9.120)$$

$$u' = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (9.121)$$

$$v' = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p'}{\partial y} + \alpha_f \rho_f g T' \right). \quad (9.122)$$

Эти уравнения должны решаться с граничными условиями $v' = T' = 0$ при $y = 0, b$, соответствующими изотермичности и непроницаемости границ.

В разд. 6.18 мы показали, что критические условия, отвечающие возникновению конвекции, получаются, если положить $\partial/\partial t = 0$. При этом уравнение (9.120) можно переписать в виде

$$\rho_f c_{pf} v' \frac{T_1 - T_0}{b} = \lambda_m \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right). \quad (9.123)$$

Дифференцируя уравнение (9.121) по y и вычитая уравнение (9.122), продифференцированное по x , мы можем исключить из этих уравнений возмущение

давления. Находим

$$\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{k\alpha_f \rho_f g}{\mu} \frac{\partial T'}{\partial x}. \quad (9.124)$$

С помощью той же процедуры перекрестного дифференцирования уравнений (9.119) и (9.124) исключаем u' :

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} = - \frac{k\alpha_f \rho_f g}{\mu} \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}. \quad (9.125)$$

Разрешая уравнение (9.123) относительно v' и подставляя полученное выражение в уравнение (9.125), мы приходим к уравнению, содержащему только T' :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 T'}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 T'}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 T'}{\partial y^4} = \\ = - \frac{k\alpha_f \rho_f^2 g c_{pf} (T_1 - T_0)}{\mu \lambda_m b} \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (9.126)$$

Граничные условия также можно записать с использованием одной только величины T' . Поскольку при $y = 0, b$ имеем $T' = 0$, на этих границах обращается в нуль также $\partial^2 T' / \partial x^2$. Если $v' = 0$, $\partial^2 T' / \partial x^2 = 0$ при $y = 0, b$, то из уравнения (9.118) следует, что $\partial^2 T' / \partial y^2 = 0$ при $y = 0, b$. Таким образом, полный набор граничных условий, достаточных для решения дифференциального уравнения четвертого порядка относительно T' , есть

$$T' = \partial^2 T' / \partial y^2 = 0 \text{ при } y = 0, b.$$

Решение уравнения (9.126), удовлетворяющее перечисленным граничным условиям, имеет следующий простой вид:

$$T' = T_0' \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad (9.127)$$

где T_0' — амплитуда возмущения температуры, а λ — длина волны возмущения. Для решения такого вида граничные условия удовлетворяются автоматически. Амплитуда возмущения в рамках линейного анализа остается неопределенной, а длина волны определяется с помощью подстановки решения (9.127) в уравнение (9.126). Мы находим

$$\frac{\{(2\pi b / \lambda)^2 + \pi^2\}^2}{(2\pi b / \lambda)^2} = \frac{\alpha_f g \rho_f^2 c_{pf} k b (T_1 - T_0)}{\mu \lambda_m}. \quad (9.128)$$

Безразмерная комбинация параметров в правой части равенства (9.128) представляет собой число Рэлея, возникающее в задаче тепловой конвекции в слое

пористой среды при нагреве снизу:

$$Ra \equiv \frac{\alpha_f \rho_f^2 c_{pf} kb (T_1 - T_0)}{\mu \lambda_m} \quad (9.129)$$

Подставляя в равенство (9.128) определенное таким образом число Рэлея, получаем

$$\frac{\{ (2\pi b/\lambda)^2 + \pi^2 \}^2}{(2\pi b/\lambda)^2} = Ra = Ra_{cr} \quad (9.130)$$

Числа Рэлея в функции длины волны, определяемые равенством (9.130), являются критическими числами Рэлея Ra_{cr} для возникновения конвекции [см. равенство (6.309)]. График зависимости Ra_{cr} от $2\pi b/\lambda$ приведен на рис. 9.20. Имеется минимальное значение Ra_{cr} , представляющее собой низшее число Рэлея, при котором возможна конвекция. Дифференцируя левую часть равенства (9.130) по $2\pi b/\lambda$ и приравнявая производную к нулю, находим длину волны, соответствующую $\min(Ra_{cr})$:

$$\lambda = 2b. \quad (9.131)$$

Минимальное значение Ra_{cr} получается из выражения (9.130) при $\lambda = 2b$:

$$\min(Ra_{cr}) = 4\pi^2 = 39,4784. \quad (9.132)$$

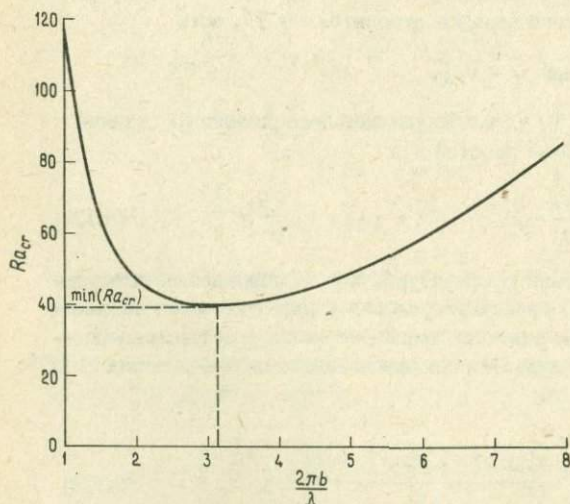


РИС. 9.20. Число Рэлея, соответствующее возникновению конвекции в нагреваемом снизу слое пористого материала, как функция безразмерного волнового числа $2\pi b/\lambda$.

Теперь мы можем определить условия, при которых в однородном пористом слое будет происходить тепловая конвекция грунтовых вод. При $Ra = 4\pi^2$, $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\alpha_f = 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, $\mu = 1,33 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $c_{pf} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$, $\lambda_m = 3,3 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ и $g = 10 \text{ м/с}^2$ равенство (9.129) переписывается как

$$\frac{dT_c}{dy} = \frac{4,2 \cdot 10^{-10}}{kb^2}, \quad (9.133)$$

где все переменные выражены в системе СИ. Формула (9.133) определяет минимальное значение градиента температуры, при котором в пористом слое с коэффициентом проницаемости k и толщиной b возникает конвекция. Графики зависимости (9.133) dT_c/dy от k при нескольких значениях b приведены на рис. 9.21. Из графиков видно, что при типичном значении геотермического градиента 20 К/км и толщине слоя 1 км для возникновения конвекции необходимо, чтобы коэффициент проницаемости породы превышал $2,1 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$ ($\sim 21 \text{ мД}$). Чем выше геотермические градиенты и больше проницаемости, тем легче возникает гидротермальная конвекция. Условия в областях геотермальных источников на континентах и вблизи океанических хребтов в океанической коре в общем случае таковы, что число Рэлея превышает минимальное критическое значение и, значит, критерий возникновения гидротермальной конвекции выполняется. Требуемая проницаемость обычно обеспечивается наличием обширных зон расколов или разломов, а высокие градиенты температуры обычно связаны с приповерхностными магматическими телами.

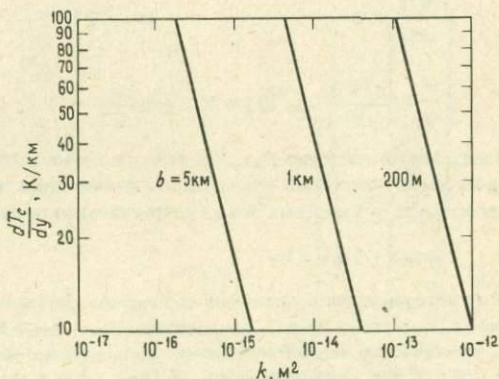


РИС. 9.21. Градиент температуры, соответствующий возникновению гидротермальной конвекции в пористом слое толщиной b , указанной на рисунке, в зависимости от коэффициента проницаемости k .

ЗАДАЧА 9.22. Определите минимальное критическое число Рэлея для возникновения конвекции в нагреваемом снизу слое пористой среды с изотермической непроницаемой нижней границей и изотермической изобарической верхней. Верхнее граничное условие соответствует проницаемой границе раздела насыщенного пористого слоя и перекрывающей жидкости. Какова горизонтальная длина волны, отвечающая минимальному значению Ra_{cr} ? Считайте, что толщина слоя равна b , температура верхней границы $y = 0$ равна T_0 , а температура нижней границы $y = b$ равна T_1 . Примите, что при возникновении конвекции возмущение температуры T' имеет вид

$$T' = T'_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} Y(y), \quad (9.134)$$

и покажите, что $Y(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^4 Y}{d\bar{y}^4} - 2a^2 \frac{d^2 Y}{d\bar{y}^2} + (a^4 - a^2 Ra) Y = 0, \quad (9.135)$$

где

$$a \equiv 2\pi b/\lambda, \quad \bar{y} \equiv y/b. \quad (9.136)$$

Покажите, что общее решение уравнения (9.135) можно записать в виде

$$Y = c_1 e^{Y\bar{y}} + c_2 e^{-Y\bar{y}} + c_3 \sin \delta\bar{y} + c_4 \cos \delta\bar{y}, \quad (9.137)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — постоянные интегрирования, а

$$\gamma^2 = a^2 + a\sqrt{Ra}, \quad (9.138)$$

$$\delta^2 = a\sqrt{Ra} - a^2. \quad (9.139)$$

Покажите, что граничные условия формулируются как

$$Y = 0 \quad \text{при } \bar{y} = 0 \text{ и } 1, \quad (9.140)$$

$$\frac{d^2 Y}{d\bar{y}^2} = 0 \quad \text{при } \bar{y} = 1, \quad (9.141)$$

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left(\frac{d^2 Y}{d\bar{y}^2} - a^2 Y \right) = 0 \quad \text{при } \bar{y} = 0. \quad (9.142)$$

Подставляя выражение (9.137) в эти граничные условия, получите систему из четырех однородных уравнений относительно неизвестных постоянных c_1, c_2, c_3 и c_4 . Покажите, что эта система имеет нетривиальное решение при условии

$$\gamma \operatorname{tg} \delta + \delta \operatorname{th} \gamma = 0. \quad (9.143)$$

Это трансцендентное уравнение определяет собственное значение Ra_{cr} задачи в функции a , поскольку γ и δ посредством соотношений (9.138) и (9.139) связаны с Ra и a . Критическое число Рэлея может быть найдено численным решением уравнений (9.138), (9.139) и (9.143). Оказывается, что $\min(Ra_{cr}) = 27,1$. Процедура решения может быть, например, следующей. Для выбранного значения a (каждому a соответствует свое Ra_{cr}) выбирается пробное значение δ и вычисляются $\gamma^2 = 2a^2 + \delta^2$, γ , $\operatorname{tg} \delta/\delta$ и $-\operatorname{th} \gamma/\gamma$. Величина δ варьируется до тех пор, пока отношения $\operatorname{tg} \delta/\delta$ и $-\operatorname{th} \gamma/\gamma$ не станут равны. Затем по найденному δ из равенства (9.139) определяется Ra_{cr} . Процесс повторяют для других значений a и находят $\min(Ra_{cr})$.

ЗАДАЧА 9.23. Результаты измерений теплового потока представляют собой приблизительно периодическую функцию (с длиной волны ~ 7 км) расстояния от галапагосского центра раздвигания. Если считать, что этот эффект объясняется гидротермальной конвекцией в океанической коре, то какой будет примерная глубина циркуляции? Оцените коэффициент проницаемости пород коры, если число Рэлея для конвективной системы равно ~ 100 , а перепад температур между границами слоя составляет несколько сотен градусов. Коэффициенты проницаемости океанических базальтов оцениваются величиной $\sim 10^{-16}$ м² ($\sim 0,1$ мД).

9. 10. Тепловые струи в пористых средах, насыщенных жидкостью

Восходящий поток горячих грунтовых вод, нагреваемых интрузией ограниченной пространственной протяженности, имеет форму струи. Такие достаточно узкие струи можно сравнить с дымом, который в безветренный день "столбом" поднимается из трубы. Рассмотрим двумерную струю, поднимающуюся над интрузией малого поперечного сечения и бесконечной длины в направлении оси z (рис. 9.22). Будем считать интрузию линейным источником тепла, обладающим мощностью тепловыделения Q с единицы длины в направлении z . Допустим, что интрузия внедрена в пористую среду с коэффициентом проницаемости k , полностью насыщенную грунтовой водой. Введем систему координат с вертикальной координатой $-y$, отсчитываемой от интрузии вверх, и началом, совпадающим с источником тепла.

Для определения структуры струи воспользуемся уравнениями (9.1), (9.3), (9.102) и (9.103). Будем считать поток стационарным и положим в уравнении

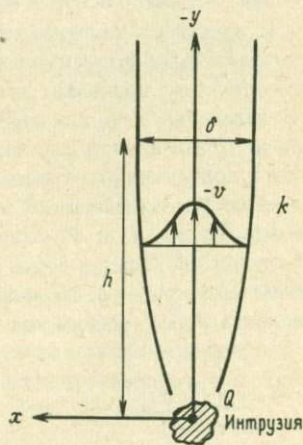


РИС. 9.22. Двумерная струя горячих грунтовых вод, поднимающаяся над интрузией малого поперечного сечения, с единицы длины которой в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, выделяется в единицу времени количество тепла Q .

(9.103) $\partial/\partial t = 0$. Мы получим

$$\rho_f c_{\rho f} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (9.144)$$

Как и выше, ограничимся приближением Буссинеска. Уравнения Дарси запишутся в виде

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (9.145)$$

$$v = -\frac{k}{\mu} \left\{ \frac{\partial p}{\partial y} + \rho_f \alpha_f g (T - T_0) \right\}, \quad (9.146)$$

где гидростатическое давление исключено использованием соотношения (6.274), а ρ_f и T_0 — постоянные плотность и температура окружающих грунтовых вод.

Если струя поднимающейся воды остается узкой, то можно воспользоваться приближением погранслоя и упростить уравнения. Условие узости струи означает, что ее толщина δ на расстоянии h от интрузии должна быть мала по сравнению с h , т.е. $\delta \ll h$. Степень узости струи зависит от мощности тепловыделения линейного источника. Если Q достаточно велико, то грунтовая вода в струе будет очень легкой и будет подниматься относительно быстро. Благодаря этому материал струи успевает подняться достаточно высоко, не "расплывшись" в горизонтальном направлении. Это и означает, что струя узка. Ниже мы выведем уравнение для толщины струи в функции расстояния от интрузии и сможем найти количественное ограничение на мощность теплового источника, при которой струя остается тонкой.

В тонкой струе градиенты таких величин, как скорость и температура, будут существенно большими в направлении поперек струи, чем вдоль нее. Это обстоятельство позволяет применить приближение погранслоя и упростить задачу наподобие того, как мы это делали в разд. 4.16 при исследовании структуры неупругой литосферы, являющейся, по существу, погранслоем. Чтобы перейти к приближенным уравнениям, оценим относительные величины членов уравнений рассматриваемой задачи и отбросим те из них, которые окажутся малыми. Пусть U и V — характерные величины горизонтальной и вертикальной скоростей Дарси в струе на расстоянии h от ее начала, а толщина струи в этом месте равна δ . Величины поперечного градиента $\partial u/\partial x$ и продольного градиента $\partial v/\partial y$ оценим как

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U}{\delta}, \quad (9.147)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{V}{h}. \quad (9.148)$$

Согласно уравнению неразрывности (9.102), эти члены должны быть равны, откуда следует, что

$$\frac{U}{\delta} \approx \frac{V}{h}, \quad \text{или} \quad U \approx V \frac{\delta}{h}. \quad (9.149)$$

Мы видим, что при $\delta \ll h$ величина горизонтальной скорости в струе значительно меньше величины вертикальной скорости.

Закон Дарси для горизонтальной скорости позволяет выразить характерную величину P давления в потоке через величину вертикальной скорости. Согласно уравнению (9.145), запишем

$$U \approx \frac{k}{\mu} \frac{P}{\delta}, \quad (9.150)$$

или, используя соотношение (9.149),

$$P \approx \frac{\mu}{k} U \delta \approx \frac{\mu}{k} \frac{\delta^2}{h} V. \quad (9.151)$$

Член $-(k/\mu) (\partial p/\partial y)$ с вертикальным градиентом давления в уравнении Дарси для вертикальной скорости имеет, следовательно, порядок величины $V(\delta^2/h^2)$. Ввиду условия $\delta \ll h$ этот член намного меньше вертикальной скорости, и, значит, подъем жидкости в струе осуществляется силой плавучести. Таким образом, в уравнении (9.146) можно пренебречь членом с градиентом давления и написать

$$v = - \frac{k \rho_f \alpha_f g}{\mu} (T - T_0). \quad (9.152)$$

Вертикальная скорость в струе прямо пропорциональна избытку температуры.

Члены в левой части уравнения энергии (9.103) сравнимы между собой.

Действительно, мы имеем

$$u \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{UT}{\delta} \approx \frac{VT}{h} \approx v \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (9.153)$$

В то же время, поскольку

$$\frac{\partial^2 T / \partial y^2}{\partial^2 T / \partial x^2} \approx \frac{T/h^2}{T/\delta^2} = \frac{\delta^2}{h^2} \ll 1, \quad (9.154)$$

члены в правой части уравнения энергии оказываются разного порядка. В направлении вдоль потока теплопроводность значительно меньше, чем поперек потока. Поэтому уравнение энергии можно записать как

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda_m}{\rho_f c_{pf}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (9.155)$$

Структуру струи определяют уравнения погранслоя (9.102), (9.152) и (9.155). Поскольку эффекты давления потока пренебрежимо малы, закон Дарси для горизонтальной скорости не нужен.

Как и в случае тепловой струи, рассмотренной в разд. 6.19, вертикальный тепловой поток при любом значении γ должен быть равен подводимому теплу Q . Учитывая симметрию струи относительно плоскости симметрии $x = 0$, это условие можно записать в виде

$$Q = -2 \int_0^{\infty} \rho_f c_{pf} v (T - T_0) dx, \quad (9.156)$$

где знак минус написан потому, что скорость v отрицательна. Из симметрии струи также следует, что

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (9.157)$$

Температура на больших расстояниях от струи равна температуре T_0 невозмущенной среды, а скорость жидкости равна нулю. Поэтому

$$T \rightarrow T_0, \quad v \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (9.158)$$

Введем функцию тока, определяемую равенствами (6.69) и (6.70); тогда уравнение (9.102) неразрывности будет удовлетворяться автоматически, а уравнение (9.152) запишется как

$$T - T_0 = -\frac{\mu}{k\rho_f \alpha_f g} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (9.159)$$

Подставляя в уравнение (9.155) выражения (6.69), (6.70) и (9.159), мы приходим к уравнению для ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\lambda_m}{\rho_f c_{pf}} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}. \quad (9.160)$$

Интегральное условие (9.156) принимает вид

$$\frac{k\alpha_f g Q}{2\mu c_{pf}} = \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (9.161)$$

а граничные условия (9.157) и (9.158) записываются как

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (9.162)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (9.163)$$

Нам нужно найти решение уравнения (9.160), удовлетворяющее условиям (9.161) – (9.163). Перейдем к безразмерным переменным

$$f = \left(\frac{\mu c_{pf} P f}{k \alpha_f g \lambda_m Q y} \right)^{1/2} \psi, \quad (9.164)$$

$$\eta = \left(\frac{k \alpha_f g \rho_f^2 c_{pf} Q}{\mu \lambda_m^2 y^2} \right)^{1/2} x. \quad (9.165)$$

Задача (9.160) – (9.163) в этих переменных формулируется как

$$f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 + 3 \frac{d^3 f}{d\eta^3} = 0, \quad (9.166)$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^{\infty} \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 d\eta, \quad (9.167)$$

$$f = \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad (9.168)$$

$$\frac{df}{d\eta} \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty. \quad (9.169)$$

Уравнение (9.166) можно проинтегрировать непосредственно. В результате получаем

$$f \frac{df}{d\eta} + 3 \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0. \quad (9.170)$$

Постоянная интегрирования равна нулю, так как, согласно граничному условию (9.168), и f , и ее вторая производная при $\eta = 0$ обращаются в нуль. Интегрируя уравнение (9.170), находим

$$f^2 + 6 \frac{df}{d\eta} = c_1^2, \quad (9.171)$$

или

$$\frac{df}{c_1^2 - f^2} = \frac{1}{6} d\eta, \quad (9.172)$$

где постоянную интегрирования мы записали в виде c_1^2 . Интегрируя вновь, имеем

$$f = c_1 \operatorname{th}(c_1 \eta / 6), \quad (9.173)$$

где третья постоянная интегрирования равна нулю, поскольку $f = 0$ при $\eta = 0$. Отметим, что решение вида (9.173) автоматически удовлетворяет граничному условию (9.169).

Постоянная интегрирования c_1 определяется из интегрального условия (9.167). Подставляя выражение (9.173) в равенство (9.167), находим

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{c_1^4}{18} \int_0^\infty \operatorname{sch}^4 \left(\frac{c_1 \eta}{6} \right) d\eta = \frac{c_1^3}{3} \int_0^\infty \operatorname{sch}^4 s ds = \\ &= \frac{c_1^3}{3} \left[\operatorname{th} s - \frac{1}{3} \operatorname{th}^3 s \right] \Big|_0^\infty = \frac{2}{9} c_1^3, \end{aligned} \quad (9.174)$$

или

$$c_1 = \left(\frac{9}{2} \right)^{1/3}. \quad (9.175)$$

Подставляя найденное значение c_1 в равенство (9.173), получаем

$$f = \left(\frac{9}{2} \right)^{1/3} \operatorname{th} \left(\frac{\eta}{48^{1/3}} \right). \quad (9.176)$$

Собирая вместе выражения (6.70), (9.159), (9.164), (9.165) и (9.176), мы находим, что вертикальная скорость Дарси и температура в двумерном потоке грунтовых вод выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} v &= - \frac{k \rho_f \alpha_f g}{\mu} (T - T_0) = \\ &= \left(\frac{k \alpha_f g Q}{\mu c_{pf}} \right)^{2/3} \left(\frac{3 \rho_f c_{pf}}{32 \gamma \lambda_m} \right)^{1/3} \operatorname{sch}^2 \left(\frac{\eta}{48^{1/3}} \right). \end{aligned} \quad (9.177)$$

Пользуясь этой формулой, следует помнить, что вертикальная координата есть $-y$, а прямая $y = 0$ совпадает с линейным источником тепла. Таким образом, мы получаем, что v отрицательно, как это и должно быть для восходящей струи, а $T - T_0$ положительно, т.е. поток действительно получается горячим. Распределение скорости и температуры показано на рис. 9.23.

ЗАДАЧА 9.24. Покажите, что ширина δ струи, определяемая как ширина области, в которой $(T - T_0)/(T - T_0)_{\max} > 0,1$, дается выражением

$$\delta = 13,2 \left(\frac{\mu \lambda_m^2 y^2}{k \alpha_f \rho_f^2 c_{pf} Q} \right)^{1/3}. \quad (9.178)$$

Какому условию должно удовлетворять Q , чтобы было оправданным приближение погранслоя?

Рассмотрим, далее, осесимметричную струю, поднимающуюся над малым интрузивным телом, которое мы будем считать точечным источником тепла мощностью Q . Введем цилиндрическую систему координат с началом, помещенным в точке расположения источника, направленной вертикально вверх координатой $-y$ и расстоянием r , отсчитываемым от оси y (рис. 9.24). В случае осе-

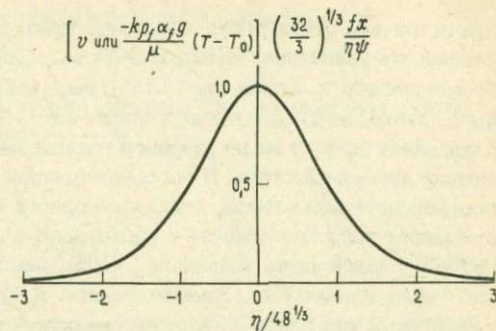


РИС. 9.23. Распределение скорости и температуры в двумерном восходящем потоке. Согласно равенствам (9.164) и (9.165),

$$\eta/48^{1/3} = \frac{x}{y^{2/3}} \left(\frac{k \alpha_f g \rho_f^2 c_p f Q}{48 \mu \lambda^2 m} \right)^{1/3},$$

$$\left(\frac{32}{3} \right)^{1/3} \frac{f x}{\eta \psi} = \left(\frac{32 \mu^2 c_p f y \lambda m}{3 k^2 \alpha_f^2 g^2 Q^2 \rho_f} \right)^{1/3}.$$

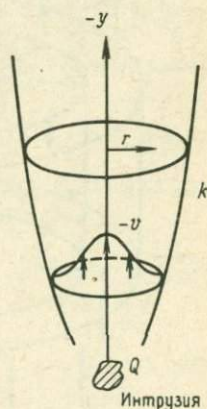


РИС. 9.24. Осесимметричная струя, поднимающаяся над малой интрузией, охлаждение которой обеспечивает тепловыделение Q .

симметричной струи также применимо приближение погранслоя; нужно только переписать уравнения (9.102), (9.152) и (9.155) применительно к цилиндрической геометрии струи. Уравнение (9.152), выражающее закон Дарси для вертикального потока, не нуждается ни в каком изменении. Правая часть уравнения (9.155) определяет эффект молекулярного теплопереноса по нормали к плоскости симметрии двумерной струи. В осесимметричном случае этот член следует заменить соответствующим членом, стоящим в правой части уравнения (6.243), который описывает теплопроводность в радиальном направлении. Кроме того, член $u \partial T / \partial x$ в левой части уравнения (9.155), описывающий горизонтальную адвекцию тепла, должен быть заменен членом $u_r \partial T / \partial r$, описывающим радиальную адвекцию тепла, где u_r — радиальная скорость Дарси. Таким образом, мы приходим к следующей форме уравнения энергии для осесимметричной струи:

$$u_r \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda_m}{\rho_f c_{pf}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (9.179)$$

Для вывода стационарного уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах рассмотрим баланс количества жидкости, содержащейся в тонкой цилиндрической оболочке (рис. 9.25). Объем жидкости, втекающей в оболочку в единицу времени, равен произведению $v(y)$ на площадь $2\pi r \delta r$ плюс произведение $u_r(r)$ на площадь $2\pi r \delta y$.

$$v(y) 2\pi r \delta r + u_r(r) 2\pi r \delta y.$$

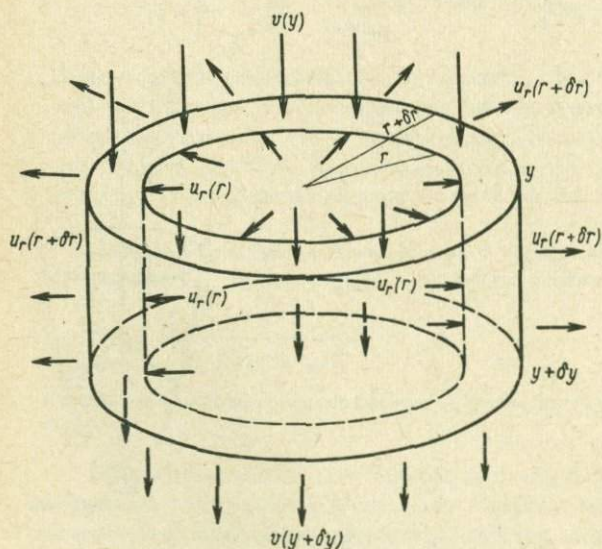


РИС. 9.25. Втекание и вытекание жидкости через поверхности бесконечно малого цилиндрического объема пористой среды.

Объем жидкости, вытекающей из оболочки в единицу времени, есть

$$v(\gamma + \delta\gamma) 2\pi r \delta r + u_r(r + \delta r) 2\pi(r + \delta r) \delta\gamma.$$

Для стационарного потока несжимаемой жидкости эти две величины должны быть равны друг другу; отсюда следует, что

$$0 = \frac{v(\gamma + \delta\gamma) - v(\gamma)}{\delta\gamma} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{(r + \delta r) u_r(r + \delta r) - r u_r(r)}{\delta r} \right\}. \quad (9.180)$$

Переходя к пределу при $\delta\gamma, \delta r \rightarrow 0$ в равенстве (9.180), получаем уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial v}{\partial \gamma} = 0. \quad (9.181)$$

Итак, осесимметричную струю описывают уравнения (9.152), (9.179) и (9.181).

Вертикальный поток тепла при любом значении γ должен быть равен подводимой мощности Q :

$$Q = -2\pi \int_0^{\infty} \rho_f c_{pf} r v (T - T_0) dr. \quad (9.182)$$

Знак минус возникает от того, что величины Q и $T - T_0$ положительны, тогда как v отрицательно. Условие симметрии струи относительно оси записывается как

$$u_r = \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \quad (9.183)$$

На больших расстояниях от оси струи температура окружающей среды равна T_0 и жидкость неподвижна. Следовательно, мы имеем

$$T \rightarrow T_0, \quad v \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (9.184)$$

Как и при расчете двумерной струи, введем функцию тока ψ , которая для осесимметричного потока несжимаемой жидкости определяется как

$$v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (9.185)$$

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}. \quad (9.186)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что при определенных таким образом компонентах скорости уравнение неразрывности (9.181) удовлетворяется тождественно. С помощью равенств (9.152) и (9.185) можно выразить

температуру в струе через ψ :

$$T - T_0 = - \frac{\mu}{k_{pf} \alpha_f g r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (9.187)$$

Подставляя выражения (9.185) – (9.187) в (9.179), получаем уравнение относительно ψ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial y} = \\ = \frac{\lambda_m}{\rho_f c_{pf}} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \right\}. \end{aligned} \quad (9.188)$$

Интегральное условие (9.182) записывается в виде

$$Q = \frac{2\pi c_{pf} \mu}{k_{\alpha f} g} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 dr, \quad (9.189)$$

а граничные условия (9.183) и (9.184) – как

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (9.190)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (9.191)$$

Будем вновь искать решение, выраженное через переменные подобия, которые в случае осесимметричной струи удобно ввести следующим образом:

$$f = \rho_f c_{pf} \psi / \lambda_m y, \quad (9.192)$$

$$\eta = - \left(\frac{k c_{pf} \alpha_f g Q}{\mu} \right)^{1/2} \frac{\rho_f r}{\lambda_m y}. \quad (9.193)$$

Знак минус введен в равенство (9.193) для того, чтобы η было положительным. Переходя в уравнениях (9.188) – (9.191) к переменным подобия, находим

$$\eta f \frac{d^2 f}{d\eta^2} - f \frac{df}{d\eta} + \eta \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 = - \frac{df}{d\eta} + \eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} - \eta^2 \frac{d^3 f}{d\eta^3}, \quad (9.194)$$

$$1 = 2\pi \int_0^{\infty} \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 \frac{d\eta}{\eta}, \quad (9.195)$$

$$\frac{f}{\eta} - \frac{df}{d\eta} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\eta} \frac{d^2 f}{d\eta^2} - \frac{1}{\eta^2} \frac{df}{d\eta} \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow 0, \quad (9.196)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{df}{d\eta} \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty. \quad (9.197)$$

Интегрируя уравнение (9.194), находим

$$\frac{f}{\eta} \frac{df}{d\eta} = \frac{1}{\eta} \frac{df}{d\eta} - \frac{d^2f}{d\eta^2} + c_1. \quad (9.198)$$

Из граничного условия (9.196) следует, что постоянная интегрирования c_1 определяется как

$$c_1 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2. \quad (9.199)$$

Из равенств (9.185), (9.192) и (9.193) получаем, что df/dy пропорционально rv . Поскольку при $r = 0$ значение v остается конечным, то $rv \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и $df/d\eta \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$. Таким образом, $c_1 = 0$ и уравнение (9.198) принимает вид

$$\frac{f}{\eta} \frac{df}{d\eta} = \frac{1}{\eta} \frac{df}{d\eta} - \frac{d^2f}{d\eta^2}. \quad (9.200)$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим граничным условиям (9.196) и (9.197), является

$$f = \frac{4c_2\eta^2}{1 + c_2\eta^2}. \quad (9.201)$$

Постоянную интегрирования c_2 находим, подставляя решение (9.201) в интегральное соотношение (9.195):

$$c_2 = 3/64\pi. \quad (9.202)$$

Решение (9.201) с постоянной c_2 вида (9.202) есть

$$f = \frac{3}{16\pi} \frac{\eta^2}{1 + 3\eta^2/64\pi}. \quad (9.203)$$

Собирая вместе выражения (9.185), (9.187), (9.192), (9.193) и (9.203), находим размерные выражения для вертикальной скорости и температуры в струе:

$$v = - \frac{k_{pf} \alpha_f \kappa}{\mu} (T - T_0) =$$

$$= \frac{3}{8\pi\gamma} \frac{k_{\alpha_f} \rho_f Q}{\mu \lambda_m} \left\{ 1 + \frac{3}{64\pi} \frac{r^2}{\gamma^2} \frac{k_{\alpha_f} \rho_f^2 c_{pf} Q}{\mu \lambda_m^2} \right\}^{-2}.$$

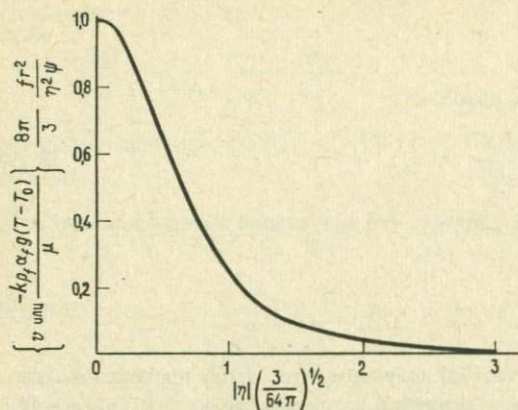


РИС. 9.26. Распределение безразмерных скорости и температуры в осесимметричной струе. Согласно равенствам (9.192) и (9.193),

$$\left(\frac{3}{64\pi}\right)^{1/2} |\eta| = \frac{r}{|y|} \left(\frac{3}{64\pi} \frac{k\alpha_f g \rho_f^2 c_p f Q}{\mu \lambda_m^2}\right)^{1/2},$$

$$\frac{8\pi}{3} \frac{f r^2}{\eta^2 \psi} = \frac{8\pi y}{3} \frac{\mu \lambda_m}{k \alpha_f g \rho_f Q}.$$

Распределение безразмерных скорости и температуры в осесимметричной струе показано на рис. 9.26.

ЗАДАЧА 9.25. Покажите, что диаметр δ осесимметричной струи, определяемый как диаметр области, в которой $(T - T_0)/(T - T_0)_{\text{max}} > 0,1$, дается выражением

$$\delta = \frac{24|y|\lambda_m}{\rho_f} \left(\frac{\mu}{k\alpha_f g c_p f Q}\right)^{1/2}. \quad (9.205)$$

Какому условию должно удовлетворять Q , чтобы было справедливым приближение погранслоя?

9.11. Миграция магмы как течение в пористой среде

Значительная доля вулканизма Земли приурочена к океаническим хребтам. Это связано с тем, что по мере подъема мантийных пород под хребтом их давление уменьшается и происходит частичное плавление (см. рис. 1.6). Возникающая магма мигрирует через мантию вверх и образует базальтовую океаническую кору. Частичное плавление при декомпрессии объясняет образование магмы в недрах Земли под океаническими хребтами; однако подъем магмы через мантию, прежде чем она образует перекрывающую океаническую кору, этим механизмом не объясняется.

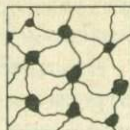


РИС. 9.27. Первая стадия частичного плавления: образование магмы на пересечениях нескольких границ зерен.

Начальные порции магмы, образовавшиеся при частичном плавлении, собираются вдоль пересечений границ зерен (рис. 9.27). Когда накопится достаточно расплава, магма коагулирует и образует систему взаимосвязанных каналов. За счет этих каналов и обеспечивается проницаемость, достаточная для того, чтобы магма могла мигрировать через матрицу нерасплавленных кристаллических зерен. Поскольку магма легче остальной кристаллической породы, она поднимается по связанным между собой вертикальным каналам под действием гравитационной массовой силы.

Для количественного рассмотрения вертикального подъема магмы можно воспользоваться моделью течения в пористой среде. При этом жидкость, заполняющая поры, есть магма, а матрицей служит кристаллическая твердая порода мантии. Для наших целей достаточно будет ограничиться приближенной моделью пористой среды, микроструктура которой описана в разд. 9.3 и изображена на рис. 9.1. Градиент давления, движущий магму вверх, создается разностью сил плавучести магмы и твердого кристаллического вещества, т.е.

$$\frac{dp}{dy} = (\rho_s - \rho_l) g, \quad (9.206)$$

где ρ_l — плотность магмы, ρ_s — плотность твердой породы. При написании формулы (9.206) предполагалось, что давления жидкой и твердой фаз одинаковы. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы твердая матрица могла деформироваться и быстро сжиматься, пропуская через себя магму. Механизмом, обеспечивающим такую деформацию, являются процессы твердотельной ползучести, которые при температурах, связанных с частичным плавлением, идут достаточно быстро.

Относительная скорость магмы, движущейся в системе соединенных между собой вертикальных каналов, и деформируемой матрицы получается подстановкой выражений (9.6) и (9.206) в формулу (9.7):

$$v_l - v_s = - \frac{b^2 \phi (\rho_s - \rho_l) g}{24 \pi \mu}, \quad (9.207)$$

где b — размер зерен, v_l — истинная скорость движения магмы в вертикальных каналах, v_s — истинная скорость твердой матрицы (скорости, направленные вверх, считаются отрицательными), ϕ — доля магмы по объему, μ —

коэффициент вязкости магмы. Магма, движущаяся в горизонтальных каналах, поднимается с той же скоростью v_s , что и твердая матрица. Величины v_l , v_s и ϕ являются функциями глубины y в зоне плавления. Скорость $v_l - v_s$ миграции магмы относительно окружающей твердой матрицы при $b = 2$ мм, $\rho_s \sim \rho_l = 600$ кг/м³, $g = 10$ м/с² и $\mu = 10$ Па·с показана в функции доли ϕ магмы по объему на рис. 9.28. Вязкость магм сильно зависит от температуры и меняется в значительных пределах в зависимости от состава магмы. Типичный коэффициент вязкости базальтовой магмы равен 1 Па·с; коэффициенты вязкости андезитовых магм составляют приблизительно 100 Па·с

Применим модель миграции магмы для расчета генерации и подъема магмы под океаническим хребтом. Предположим, что мантийная порода поднимается вертикально со скоростью $-v_0$, которая достаточно велика для того, чтобы ниже глубины начала плавления можно было пренебречь теплопроводностью и считать температуру породы постоянной. Порода начинает плавиться на глубине y_0 , где профиль температуры породы пересекается с профилем температуры плавления T_m . Зависимость температуры плавления T_m от давления выражается через наклон кривой Клапейрона

$$\gamma_m = \left(\frac{dp}{dT} \right)_m, \quad (9.208)$$

который мы будем считать постоянным. Поскольку $dp/dy = \rho_s g$, то градиент температуры плавления dT_m/dy равен $\rho_s g / \gamma_m$ и T_m в функции глубины определяется как

$$T_m = T_{m0} + \frac{\rho_s g}{\gamma_m} y, \quad (9.209)$$

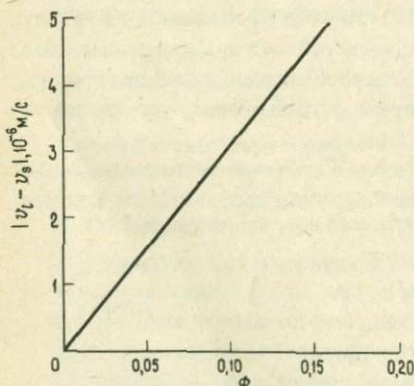


РИС. 9.28. Скорость $v_l - v_s$ миграции магмы относительно твердой матрицы в функции объемной доли магмы ϕ

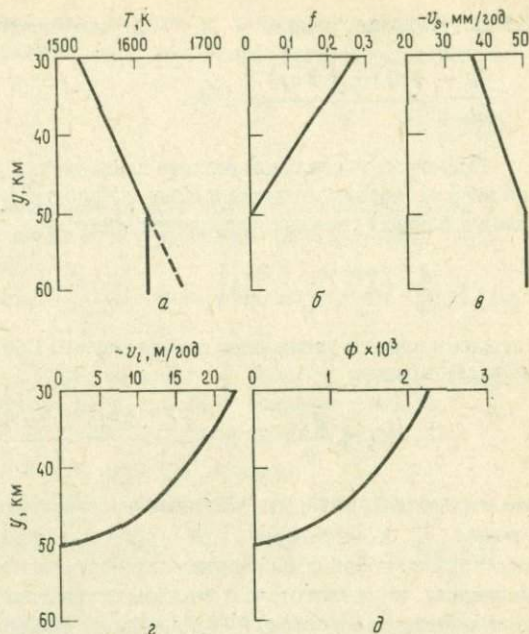


РИС. 9.29. Зависимости от глубины y в зоне плавления под океаническим хребтом: а — температуры T , б — доли f расплава, в — скорости $-v_s$ подъема твердой матрицы, г — скорости $-v_l$ подъема магмы по системе взаимосвязанных вертикальных каналов, д — объемной доли магмы ϕ .

где T_{m0} — значение температуры плавления на поверхности. На рис. 9.29, а показаны профиль температуры плавления и изотерма поднимающейся нерасплавленной мантийной породы при $y_0 = 50$ км, $\gamma_m = 7,5$ МПа/К, $g = 10$ м/с², $\rho_s = 3300$ кг/м³ и $T_{m0} = 1400$ К. В этом примере температура поднимающейся мантийной породы ниже глубины начала плавления принята равной 1620 К.

С началом плавления температуры поднимающейся мантийной породы и магмы описываются профилем температуры плавления. По мере подъема породы и магмы их температура уменьшается по закону (9.209), и за счет высвобождающейся тепловой энергии происходит плавление новых порций породы. Определим долю f расплава как отношение общего вертикального массового потока магмы к поднимающемуся потоку $-\rho_s v_0$ массы породы до начала плавления. Согласно соотношению (9.8), восходящий поток магмы в системе вертикальных каналов равен $-\phi \rho_l v_l / 3$, а восходящий поток магмы в горизонтальных каналах есть $-2\phi \rho_l v_s / 3$. Таким образом, доля расплава выражается как

$$f \equiv \frac{\phi \rho_l v_l + 2\phi \rho_l v_s}{3\rho_s v_0} \quad (9.210)$$

Между уровнями глубины y и $y - dy$ поток магмы изменяется на величину

$$\frac{d}{dy} \left\{ \frac{\varphi \rho_l (v_l + 2v_s)}{3} \right\} dy.$$

При скрытой удельной теплоте плавления L за счет уменьшения внутренней энергии породы и магмы в объеме высоты dy и единичной площади основания в единицу времени выделяется энергия

$$L \frac{d}{dy} \left\{ \frac{\varphi \rho_l (v_l + 2v_s)}{3} \right\} dy,$$

которая и идет на увеличение потока магмы. Поэтому баланс энергии можно записать в виде

$$(-\rho_s v_0) c_p \frac{dT}{dy} = L \frac{d}{dy} \left\{ \frac{\varphi \rho_l (v_l + 2v_s)}{3} \right\}, \quad (9.211)$$

где мы предположили, что удельные теплоемкости породы и магмы одинаковы и равны c_p . Коэффициент при $c_p (dT/dy)$ в левой части уравнения (9.211) представляет собой общий вертикальный поток массы породы и магмы в зоне плавления; в соответствии с законом сохранения массы этот коэффициент должен быть равен потоку $(-\rho_s v_0)$ массы породы до начала плавления. Подставляя выражение (9.210) в уравнение (9.211), находим

$$c_p \frac{dT}{dy} = -L \frac{df}{dy}. \quad (9.212)$$

В зоне плавления $dT/dy = \rho_s g / \gamma_m$. Подставляя это выражение для градиента температуры в уравнение (9.212) и интегрируя его с граничным условием $f = 0$ при $y = y_0$ имеем

$$f = \frac{c_p \rho_s g}{\gamma_m L} (y_0 - y). \quad (9.213)$$

Таким образом, в зоне плавления доля расплава увеличивается линейно с уменьшением глубины. Зависимость доли расплава от глубины при $c_p = 1 \text{ кДж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$, $L = 320 \text{ кДж/кг}$ и приведенных выше значениях других параметров показана на рис. 9.29, б. Мы видим, что 25%-ное частичное плавление происходит на протяжении 18 км.

Объединяя уравнение (9.210) с уравнением

$$\rho_s v_0 = \frac{\rho_l \varphi (v_l + 2v_s)}{3} + \rho_s v_s (1 - \varphi) \quad (9.214)$$

сохранения массы, можно определить скорость v_s как функцию глубины. Для этого разделим уравнение (9.214) на $\rho_s v_0$ и вычтем уравнение (9.210); мы получим

$$1 - f = \frac{v_s}{v_0} (1 - \phi). \quad (9.215)$$

Поскольку обычно $\phi \ll 1$ (в приводимом ниже примере мы увидим, что ϕ меньше $\sim 10^{-3}$), мы можем пренебречь ϕ в уравнении (9.215) и найти v_s как

$$v_s = v_0 (1 - f) = v_0 \left\{ 1 - \frac{c_p \rho_s g}{\gamma_m L} (y_0 - y) \right\}. \quad (9.216)$$

При $y = y_0$ v_s совпадает с v_0 ; с уменьшением y скорость подъема твердой матрицы $-v_s$ также уменьшается. На рис. 9.29, σ показана скорость $-v_s$ в функции глубины при значениях параметров, приведенных выше.

Исключая ϕ из уравнений (9.207) и (9.210), находим

$$v_l^2 + v_l v_s - 2v_s^2 + \frac{3f\rho_s g(\rho_s - \rho_l)b^2 v_0}{24\pi\mu\rho_l} = 0. \quad (9.217)$$

Разрешая полученное квадратное уравнение относительно v_l , получаем

$$|v_l| = -\frac{|v_s|}{2} + \left\{ \frac{9v_s^2}{4} + \frac{f\rho_s g(\rho_s - \rho_l)b^2 |v_0|}{8\pi\mu\rho_l} \right\}^{1/2}, \quad (9.218)$$

откуда после подстановки выражений (9.213) и (9.216) имеем

$$\begin{aligned} |v_l| = & -\frac{|v_0|}{2} \left\{ 1 - \frac{c_p \rho_s g}{\gamma_m L} (y_0 - y) \right\} + \\ & + \left\{ \frac{9v_0^2}{4} \left[1 - \frac{c_p \rho_s g}{\gamma_m L} (y_0 - y) \right]^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\rho_s^2 g^2 (\rho_s - \rho_l) b^2 |v_0| c_p (y_0 - y)}{8\pi\mu\rho_l \gamma_m L} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (9.219)$$

При $y = y_0$, $v_l = v_0$; с уменьшением y величина $|v_l|$ увеличивается. Зависимость скорости подъема магмы в соединенных вертикальных каналах от глубины показана на рис. 9.29, ϵ . Кроме уже приведенных значений параметров мы использовали $v_0 = -50$ мм/год, $\rho_l = 2700$ кг/м³, $b = 2$ мм и $\mu = 1$ Па·с. Скорость магмы в соединенных вертикальных каналах по порядку величины составляет десятки метров в год. Это означает, что вылавлившаяся магма доволь-

но легко поднимается вдоль границ зерен. Магма, достигающая поверхности, представляет собой смесь расплавов, образовавшихся на различных глубинах.

Объемную долю магмы можно найти, если выразить ϕ из формулы (9.207) и подставить выражения (9.216) и (9.218) для v_l и v_s соответственно. В результате получаем

$$\phi = \frac{24\pi\mu}{b^2(\rho_s - \rho_l)g} \left\{ -\frac{3|v_0|}{2} \left[1 - \frac{c_p \rho_s g}{\gamma_m L} (y_0 - y) \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{9v_0^2}{4} \left(1 - \frac{c_p \rho_s g}{\gamma_m L} (y_0 - y) \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c_p \rho_s^2 g^2 (y_0 - y) (\rho_s - \rho_l) b^2 |v_0|}{8\pi\gamma_m L \mu \rho_l} \right]^{1/2} \right\}. \quad (9.220)$$

При $y = y_0$ $\phi = 0$; с уменьшением y величина ϕ возрастает. Однако, как видно из рис. 9.29, ∂ , на котором при использованных выше значениях параметров построен график функции $\phi = \phi(y)$, ϕ не превосходит нескольких десятых процента. Хотя объемная доля магмы в зоне плавления мала, скорость ее подъема в системе связанных вертикальных каналов настолько высока, что масса поднимающейся магмы составляет существенную долю f потока массы поднимающейся мантийной породы.

ЗАДАЧА 9.26. Допустим, что плавление в слое толщиной h вызывается однородным удельным тепловыделением H .

а) Покажите, что скорость миграции магмы через верхнюю границу слоя равна hH/L .

б) Выразите объемную долю магмы через глубину y в слое, размер зерен b , коэффициент вязкости магмы μ и плотности ρ_s и ρ_l .

9.12. Двухфазная конвекция

При достаточном нагреве грунтовые воды закипают. О кипении, происходящем на глубине, свидетельствуют, например, гейзеры. Если вода и пар сосуществуют вместе, температура смеси равна температуре кипения, и пар в таком случае называется *влажным*. Если же в пар переходит вся вода, то температура может превышать точку кипения, и пар называется *сухим*. Так, истечение сухого пара происходит из скважин геотермальных электростанций в районе геотермального поля Гейзеры к северу от Сан-Франциско и в в Лардаредло в Италии. Однако в главных резервуарах этих геотермальных систем, характеризующимся преобладанием пара, пар оказывается влажным.

Для того чтобы лучше разобраться в сущности работы таких геотермальных резервуаров, вновь рассмотрим горизонтальный слой насыщенной водой непроницаемой среды. Пусть непроницаемые верхняя ($y = 0$) и нижняя ($y = b$) границы слоя поддерживаются соответственно при температурах T_0 и T_1

($T_1 > T_0$). В разд. 9.9 мы уже рассматривали устойчивость такого слоя относительно тепловой конвекции. Здесь мы будем считать, что число Рэлея для слоя меньше минимального критического значения $4\pi^2$, определяемого выражением (9.132).

До тех пор, пока температура нижней границы T_1 остается ниже температуры кипения T_b , тепло через слой передается механизмом теплопроводности, а распределение температуры описывается формулой (9.117). Когда температура нижней границы достигнет точки кипения, вблизи нижней границы образуется, по существу, изотермическая зона сосуществования двух фаз (рис. 9.30). В двухфазной зоне легкий пар поднимается через более плотную воду под действием силы плавучести. На нижней границе слоя идет кипение, а конденсация пара происходит на границе, разделяющей расположенный сверху слой воды и нижележащую двухфазную зону. Обозначим глубину этой границы через y_b . Изотермическая область, в которой перенос тепла осуществляется за счет противотока двух фаз, называется теплопроводом. Измерения температуры и давления в скважинах, пробуренных в области геотермальных систем с преобладанием пара, показали, что структура этих систем действительно сходна с моделью, изображенной на рис. 9.30: вблизи поверхности имеется слой воды толщиной в несколько сотен метров, под которым расположен основной двухфазный резервуар с преобладанием пара.

На рис. 9.31 показаны некоторые результаты лабораторных измерений переноса тепла в слое с противотоком пара и воды. Общая толщина слоя, в котором проводились измерения, равнялась $b = 0,159$ м, его пористость была $\phi = 0,37$, коэффициент проницаемости $k = 8,5 \cdot 10^{-12}$ м², а коэффициент теплопроводности насыщенной среды составлял $\lambda_m = 0,92$ Вт м⁻¹ К⁻¹. На рис. 9.31, а показаны профили температуры для различных значений теплового потока q . Ясно видны изотермическая нижняя зона и верхняя область молекулярной теплопроводности с линейным распределением температуры. Глубину y_b верхней границы двухфазной зоны легко выразить через тепловой поток, используя за-

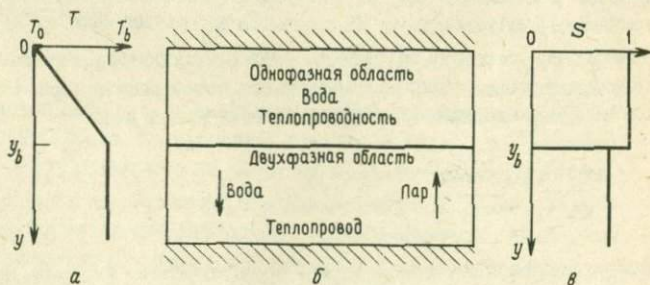


РИС. 9.30. Двухфазная гидротермальная конвекция. а — профиль температуры; б — механизм теплопровода, обеспечивающий вертикальный перенос тепла в изотермическом слое сосуществования двух фаз; в — распределение водонасыщенности S .

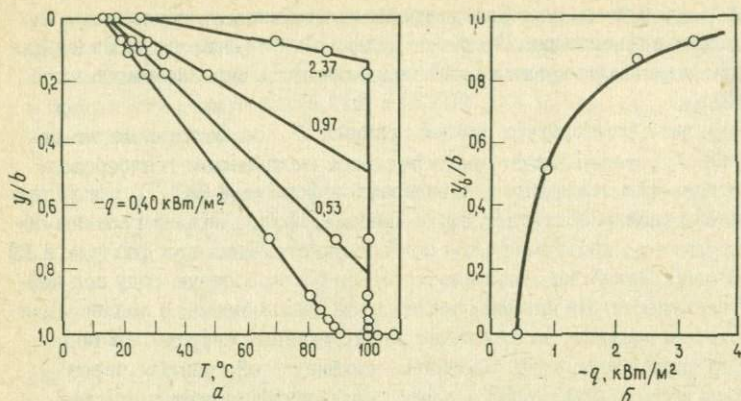


РИС. 9.31. Лабораторные измерения тепловых характеристик двухфазной конвекции в пористой среде. а — распределения температуры в насыщенном водой пористом слое, нагреваемом снизу, при значениях теплового потока, указанных на рисунке [50]; б — результаты измерений глубины верхней границы двухфазной области, отнесенной к толщине слоя, при различных значениях теплового потока (кружки); кривая — зависимость (9.221).

кон Фурье для теплопроводности в верхнем слое. Мы находим

$$y_b = -\lambda_m(T_b - T_0)/q. \quad (9.221)$$

(Напомним, что тепловой поток, направленный вверх, отрицателен.) На рис. 9.31, б видно, что теоретические значения y_b/b , хорошо согласуются с результатами измерений.

Рассмотрим теперь перенос тепла в двухфазной зоне, осуществляемый механизмом теплопровода. Пар образуется на нижней границе и течет вверх, причем скорость переноса массы пара через горизонтальную поверхность единичной площади составляет dm_v/dt (скорости и потоки массы, направленные вверх, считаем отрицательными). На верхней границе двухфазной зоны пар конденсируется в воду, которая опускается вниз с массовым расходом dm_w/dt , в точности компенсирующим направленный вверх поток массы пара. Условие сохранения массы в стационарном одномерном потоке имеет вид

$$\frac{dm_v}{dt} + \frac{dm_w}{dt} = 0. \quad (9.222)$$

Внутри двухфазной зоны не может происходить ни кипения, ни конденсации, так как эта зона изотермична и теплопроводность в ней отсутствует. Энтальпии поднимающегося пара и опускающейся воды различаются на величину скрытой теплоты парообразования воды. Следовательно, результирующий конвективный поток

тепла в слое направлен вверх и по величине равен

$$q = L \frac{dm_v}{dt} = L \rho_v v_v = -L \rho_w v_w = -L \frac{dm_w}{dt}, \quad (9.223)$$

где L — скрытая теплота парообразования, ρ_v и ρ_w — плотности соответственно пара и воды, v_v и v_w — их скорости Дарси. При написании выражения (9.223) мы воспользовались соотношениями

$$\frac{dm_v}{dt} = \rho_v v_v, \quad \frac{dm_w}{dt} = \rho_w v_w \quad (9.224)$$

между потоками массы и скоростями Дарси.

Закон Дарси (9.3) для вертикального потока применительно к двухфазному потоку в пористой среде можно переписать как

$$v_v = - \frac{k(1-S)}{\mu_v} \left(\frac{dp}{dy} - \rho_v g \right), \quad (9.225)$$

$$v_w = - \frac{kS}{\mu_w} \left(\frac{dp}{dy} - \rho_w g \right), \quad (9.226)$$

где μ_v и μ_w — коэффициенты динамической вязкости пара и воды, S — *водонасыщенность*, равная доле объема пор, заполненных водой. Доля объема пор, заполненных паром, есть $1-S$. Формулы (9.225) и (9.226) легко получить в рамках модели параллельного потока, в котором S -я часть площади горизонтального сечения взаимосвязанных пор занята водой, а $(1-S)$ -я часть — паром.

Из уравнений (9.222) — (9.226) можно вывести следующее выражение для безразмерного теплового потока:

$$\Gamma = \frac{q \mu_v}{k L g \rho_v (\rho_v - \rho_w)} = \frac{S(1-S)}{(1-S) \frac{\mu_w \rho_v}{\mu_v \rho_w} + S}. \quad (9.227)$$

Безразмерный тепловой поток Γ есть функция водонасыщенности S . Поскольку в двухфазной области S постоянно (см. рис. 9.30, θ), то Γ также постоянно. График (9.227) зависимости Γ от S приведен на рис. 9.32 для величины $\mu_v \rho_w / \mu_w \rho_v = 70$ при атмосферном давлении. На рисунок также нанесены данные описанного выше лабораторного эксперимента; видно, что между теорией и экспериментом имеется очень хорошее согласие.

Величина теплового потока через слой достигает максимума $|q|_{\max}$ при значении водонасыщенности S_{\max} (рис. 9.32). Значение S_{\max} можно найти, дифференцируя функцию (9.227) и приравнявая $d\Gamma/dS$ к нулю. В ре-

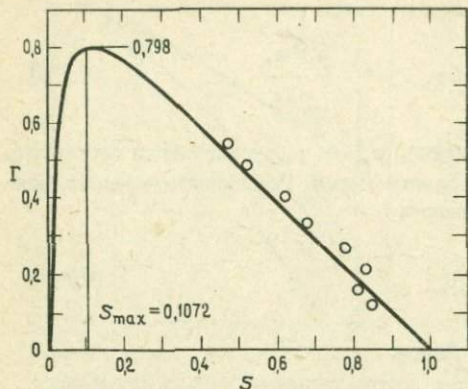


РИС. 9.32. Результаты лабораторных измерений (кружки) и теоретическая зависимость (9.227) водонасыщенности S от безразмерного теплового потока Γ .

зультате получается

$$S_{\max} = \frac{(\mu_w \rho_w / \rho_w \mu_v)^{1/2} - \mu_w \rho_w / \rho_w \mu_v}{1 - \mu_w \rho_w / \rho_w \mu_v} \quad (9.228)$$

Для воды и пара при $\mu_w \rho_w / \mu_w \rho_w = 70$ из равенства (9.228) следует, что $S_{\max} = 0,1072$. Подставляя выражение (9.228) в формулу (9.227), получаем величину максимального теплового потока Γ_{\max} :

$$\Gamma_{\max} = \left\{ 1 + \left(\frac{\mu_w \rho_w}{\mu_v \rho_w} \right)^{1/2} \right\}^{-2} \quad (9.229)$$

При $\mu_w \rho_w / \mu_w \rho_w = 70$ $\Gamma_{\max} = 0,798$. Если тепловой поток превышает это значение, то происходит выкипание воды. При этом значительная часть слоя насыщается сухим паром и тепло переносится конвекцией сухого пара и теплопроводностью в матрице. Для обеспечения небольшого дополнительного теплопереноса требуется значительное увеличение температуры. Максимальный теплоперенос, осуществляемый механизмом "теплопровода", не зависит от толщины слоя — это видно из формул (9.227) и (9.229). При значениях параметров $L = 2500$ кДж/кг, $\rho_w = 1000$ кг/м³, $\rho_v = 0,598$ кг/м³, $\mu_w = 0,284 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\mu_v = 1,25 \cdot 10^{-5}$ Па·с, соответствующих кипению воды при атмосферном давлении, мы находим, что механизм теплопровода обеспечивает тепловой поток $q = 0,95$ Вт/м² при коэффициенте проницаемости $k = 10^{-15}$ м².

ЗАДАЧА 9.27. Рассмотрим пористый слой, насыщенный водой, температура которой на всех глубинах равна температуре кипения. Покажите, что зависимость тем-

пературы от глубины дается выражением

$$\frac{1}{T_{b0}} - \frac{1}{T} = \frac{R_v}{L} \ln \left(1 + \frac{\rho_l g y}{p_0} \right), \quad (9.230)$$

где T_{b0} — температура кипения воды при атмосферном давлении p_0 ; ρ_l — плотность воды в жидком состоянии, предполагаемая постоянной; R_v — газовая постоянная водяного пара. Запишите вначале гидростатическое выражение давления и выведите уравнение для dT/dy с помощью формулы Клапейрона для воды и пара

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L \rho_l \rho_v}{T(\rho_l - \rho_v)} \approx \frac{L \rho_v}{T}, \quad (9.231)$$

где ρ_v — плотность водяного пара. Считайте, что пар подчиняется уравнению состояния идеального газа

$$\rho_v = p/R_v T. \quad (9.232)$$

Подставьте $p = p_0 + \rho_l g y$ с постоянным ρ_l . Какова температура на глубине 1 км? Примите $R_v = 0,462 \text{ кДж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$, $L = 2500 \text{ кДж/кг}$, $T_{b0} = 373 \text{ К}$, $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, $\rho_l = 1000 \text{ кг/м}^3$, $g = 10 \text{ м/с}^2$.

ЗАДАЧА 9.28. Вычислите распределение давления по глубине в геотермальной системе с преобладанием пара, которая состоит из приповерхностного жидкого слоя толщиной 400 м, перекрывающего резервуар с влажным паром, причем фазой, определяющей давление, является пар. Считайте, что справедливо условие гидростатичности, слой жидкости находится при температуре кипения, а паровой резервуар изотермичен.

Дополнительная литература

Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. — New York: American Elsevier, 1972, 764 pp. Учебник по теоретическим основам динамики жидкостей в пористых средах, предназначенный для старшекурсников и выпускников, специализирующихся по гидрологии грунтовых вод, механике почвы, физике почвы, технике мелиорации и ирригации, технике очистных сооружений, проектированию нефтяных и химических сооружений. Для понимания изложения необходимо свободное владение прикладной математикой, включая такие разделы, как векторный анализ, ортогональные тензоры и дифференциальные уравнения в частных производных. Гл. 1 служит введением, в котором описываются водоносные горизонты, резервуары грунтовых вод и нефти, пористые среды, дается рассмотрение пористой среды как сплошной. В гл. 2 рассматриваются свойства флюидов и пористой матрицы. В гл. 3 вводятся понятия давления и пьезометрического напора. Последующие главы посвящены основным уравнениям движения жидкости в пористых средах, реологическим уравнениям, закону Дарси, гидравлической проводимости, слоистым средам, анизотропной проницаемости, обоснованиям закона Дарси, методам решения краевых задач и задач с начальными условиями, течению со свободной поверхностью и приближению Дюпюи, течению несмешивающихся жидкостей, дисперсии волн в жидкости, моделям и

аналогам типа ячейки Хили — Шоу. В конце каждой главы помещены задачи, ответы к которым даются в приложении.

Cheng P. Heat Transfer in Geothermal Systems. — *Adv. Heat Transfer*, **14**, 1 — 105, 1978. Обзорная статья, охватывающая основные уравнения конвективного теплопереноса в геотермальных системах, закон Дарси и его модификации, законы сохранения, начальные и граничные условия, теоретические и экспериментальные исследования переноса тепла в геотермальных системах с горячей водой, модели переноса тепла в водо-паровых двухфазных гидротермальных системах, перенос тепла в системах, расположенных в недрах Земли, и в буровых скважинах.

Combarous M.A., Bories E.A. Hydrothermal Convection in Saturated Porous Media. — *Adv. Hydrosci.*, **10**, 231 — 307, 1975. Обзор теоретических и экспериментальных исследований тепловой конвекции в пористой среде. Затронуты такие темы, как математическое обоснование теории конвекции в пористой среде, критерий возникновения конвекции, форма конвекции, средний перенос тепла, экспериментальные результаты, относящиеся к горизонтальным слоям, эксперименты Хили — Шоу, свободная конвекция в наклонных слоях, численные методы, комбинационная свободно-вынужденная конвекция, конвекция в анизотропных и неоднородных водоносных пластах, термогалинная конвекция.

de Wiest R.J.M. (editor). Flow Through Porous Media. — New York: Academic Press, 1969, 530 pp. Сборник очень полезных статей по течению жидкости в пористых средах. Статьи написаны достаточно сложно с точки зрения математики, доступны студентам-выпускникам. Некоторые статьи посвящены фундаментальным принципам течения грунтовых вод, пористости и проницаемости природных материалов, дисперсии волн в жидкости, течению в ненасыщенных почвах, переходному свободно-поверхностному течению в пористых средах, течению несмешивающихся жидкостей в пористых средах.

Di Pippo R. Geothermal Energy as a Source of Electricity. — Washington D.C.: U.S. Department of Energy, 1980, 370 pp. Справочник, в который сведены мировые данные о геотермальных источниках и их использовании. В гл. 1 рассматриваются разнообразные типы геотермальных ресурсов и различные системы преобразования энергии. В гл. 2 — 13 на основе анализа конкретных региональных условий подробно рассматриваются многие геотермальные системы.

Donaldson I.G. Heat and Mass Circulation in Geothermal Systems. — *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, **10**, 1982. Обзор исследований циркуляции воды и пара в природных геотермальных системах на суше и эффективности их эксплуатации. Статья начинается общим описанием геотермальных систем и рассмотрением теоретических трубчатых и губчатых моделей этих систем. Далее подробно рассматривается циркуляция смеси с преобладанием жидкости или пара в коллекторах в невозмущенном состоянии. В заключительной главе анализируются возмущения, возникающие в системах циркуляции вследствие эксплуатации.

Fife W.S., Price N.J., Thompson A.B. Fluids in the Earth's Crust. — Amsterdam: Elsevier, 1978, 383 pp. [русский перевод: Файф У., Прайс Н., Томпсон А.

Флюиды в земной коре. — М.: Мир, 1981]. Предназначенный для старшекурсников и выпускников учебник по образованию и миграции флюидов в земной коре, их влиянию на структуры земной коры, концентрации и накоплению их в коллекторах в экономически значимых количествах. Основные главы книги включают ознакомление с ролью флюидов в геохимических и тектонических процессах, химию природных флюидов, летучие вещества в минералах, растворимость минералов и химию растворов, скорости метаморфических реакций, высвобождение флюидов из пород при метаморфизме, контроль состава флюидов, плавление, экспериментальное исследование деформации пород, характерных для земной коры температуру, давление и скорость деформации, проницаемость, гидроразрыв, упругость, обезвоживание коры, диапиры и диапиризм с участием флюидов, тектонику и химический перенос.

Garg S.K., Kasso D.R. Convective Heat and Mass Transfer in Hydrothermal Systems. — В кн.: Geothermal Systems: Principles and Case Histories. Rybach L. and Muffler L.J.P., editors. — London: John Wiley and Sons, 1981, p. 37 — 76. Обзор математических моделей тепло- и массопереноса на основе течения в насыщенных пористых средах в гидротермальных системах, неустойчивых относительно конвекции. Опираясь на анализ конвекции в идеализированных и, по-видимому, более близких к реальным моделям геотермальных систем, авторы исследуют влияние геологического строения и материальных характеристик на геотермальные процессы. Для объяснения физики явлений, происходящих во внутренних областях, даются основанные на полевых данных наглядные модели работы геотермальных систем.

Goguel J. Geothermics. — New York: McGraw-Hill, 1976, 200 pp. [русский перевод: Гогель Ж. Геотермия. — М.: Мир, 1978]. Перевод с французского на английский книги "La Geothermie". Книга начинается с рассмотрения теплового режима приповерхностных областей Земли и влияния, оказываемого на них циркуляцией грунтовых вод. Затем автор переходит к проблеме извлечения полезного тепла из запасов геотермальной энергии. Описывается действие геотермальных электростанций на влажном и сухом паре и излагаются методы оценки выходной мощности и полезного времени жизни геотермального источника. Последние главы посвящены более общим задачам, представляющим интерес для изучающих физику Земли: тепловым эффектам, связанным с магматическими интрузиями и эффузивными телами, тепловыделению при деформации и образовании разломов, тепловым напряжениям в породах, источнику экзотермических метаморфических реакций, охлаждению Земли, тепловым эффектам радиоактивного распада, конвекции в мантии. Изложение нематематизировано, используется лишь несколько решений дифференциальных уравнений.

Kruger P., Otte C. (editors). Geothermal Energy, Resources, Production, Stimulation. — Stanford, California: Stanford University Press, 1973, 360 pp. Подборка из 18 научных статей по исследованию производственной технологии и методов использования потенциальных запасов геотермальной энергии. Рассматриваются такие вопросы, как оценка геотермальных ресурсов США, характеристики источ-

ников геотермальной энергии, их разведка, производство пара и электроэнергии на станции района Гейзерс, стимулирование деятельности геотермальных систем, извлечение энергии из горячих сухих пород, вынужденное возникновение и рост трещин в породах, нагретых до высоких температур, взрывное стимулирование деятельности гидротермальных резервуаров, коррозия и образование накипи на геотермальных электростанциях, экологические аспекты эксплуатации геотермальных источников.

Lister C. R. B. Heat Flow and Hydrothermal Circulation. — *Ann. Rev. Earth Planet Sci.*, **8**, 95 — 118, 1980. Обзор исследований теплового потока с океанического дна и роли гидротермальной циркуляции через океаническую кору в процессе теплопереноса. Рассматриваются методы измерения теплового потока и результаты таких измерений. Описываются теории гидротермальной циркуляции и полевые наблюдения по их проверке. В заключение затронуты геохимические процессы, связанные с циркуляцией морской воды в океанической коре.

Muskat M. The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media. — *Ann Arbor, Michigan: J. W. Edwards*, 1946, 763 pp. Классический учебник по теории течения через пористые среды. Часть 1 в основном представляет собой математическое введение в теорию течения жидкости в пористой среде. В нее включено подробное описание тех физических явлений, к которым применима теория, — движения грунтовых вод и миграции нефти и газа; в других главах рассматриваются закон Дарси, измерение коэффициента проницаемости, уравнения гидродинамики. В части 2 рассматриваются стационарные течения жидкостей с упором на двумерные задачи и методы теории потенциала; рассмотрены также трехмерные задачи системы течений, обусловленных силой тяжести, среды с неоднородной проницаемостью, системы двух флюидов и многоскважинные системы. Часть 2 посвящена течению сжимаемых жидкостей в пористых средах, а в части 5 рассматривается течение газов.

Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977, 644 с. Классический учебник по математической теории течения грунтовых вод. Книга предназначена главным образом для гидроинженеров и написана на высоком математическом уровне. Две главные части книги посвящены стационарным и нестационарным течениям. В наиболее важных главах рассмотрены физические и математические основы теории, двумерные течения в вертикальной плоскости, просачивание грунтовых вод без свободной поверхности под гидросооружениями, метод инверсии и его приложения, просачивание в гетерогенных и анизотропных почвах, естественные и искусственные скважины, трехмерные задачи фильтрации, влияние инерции в нестационарных течениях, нелинейные нестационарные течения со свободной поверхностью, линейные уравнения нестационарного течения грунтовых вод, двумерные нестационарные течения, численные и графические методы решения задач, касающихся стационарных и нестационарных течений.

Scheidegger A. E. The Physics of Flow through Porous Media. — Toronto, Canada: University of Toronto Press, 1960, 313 pp. Фундаментальный учебник по физическим основам гидродинамики в пористых средах. Рассмотрены такие

вопросы, как описание и характеристики пористых материалов, физические свойства жидкостей, уравнения движения жидкости, гидростатика пористых сред, закон Дарси и решения уравнения Дарси, физические характеристики проницаемости, многофазные течения в пористых средах.

Waring G.A. Thermal Springs of the United States and Other Countries of the World. — A Summary. — U.S. Geological Survey Professional Paper, No. 492, 1965, 383 pp. Подробный обзор информации о расположении источников, температуре воды, расходе, химическом составе, содержании газа и практическом использовании. Данные протабулированы по странам или географическим областям, снабжены кратким описанием геологической обстановки и картами, на которых указаны положения источников. Приведен большой аннотированный список литературы по термальным источникам.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Обозначения и единицы

А. Единицы системы СИ

Величина	Единица, название	Обозначение	Выражение через основные единицы
Основные единицы			
Длина	метр	м	
Время	секунда	с	
Масса	килограмм	кг	
Температура	кельвин	К	
Сила электрического тока	ампер	А	
Производные единицы			
Сила	ньютон	Н	$\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$
Энергия	джоуль	Дж	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$
Мощность	ватт	Вт	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^3$
Давление	паскаль	Па	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Частота	герц	Гц	с^{-1}
Электрический заряд	кулон	Кл	$\text{А} \cdot \text{с}$
Электрическая емкость	фарада (фарад)	Ф	$\text{Кл}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$
Магнитная индукция	тесла	Т	$\text{кг} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Степени 10			
10^{-3}	милли	м	
10^{-6}	микро	мк	
10^{-9}	нано	н	
10^{-12}	пико	п	
10^3	кило	к	
10^6	мега	М	
10^9	гига	Г	
10^{12}	тера	Т	

Б. Переводные множители

Исходная единица измерения величины	Единица, в которой должна быть измерена величина	Переводной множитель, на который следует умножить величину, измеренную в исходных единицах
акр	кв. фут	43 560
	м^2	4046,9
ангстрем, Å	см	10^{-8}
	нм	10
астрономическая единица, а.е.	см	$1,496 \cdot 10^{13}$
	Тм	0,1496
бар	атм	0,98692
	дин/см ²	10^6

Продолжение табл. Б

Исходная единица измерения величины	Единица, в которой должна быть измерена величина	Переводной множитель, на который следует умножить величину, измеренную в исходных единицах
	фунт/кв.дюйм	14,5038
	мм рт. ст.	750,06
	МПа	10^{-1}
баррель (нефтяной)	галлон США	42
	л	158,98
британская тепловая единица, Б.Т.Е.	кал	251,996
	Дж	1054,35
калория (малая), кал	Дж	4,184
сантиметр, см	дюйм	0,39370
	м	10^{-2}
дарси, Д	м^2	$9,8697 \cdot 10^{-13}$
дина, дин	$\text{г} \cdot \text{см}/\text{с}^2$	1
	Н	10^{-5}
эрг	кал	$2,39006 \cdot 10^{-8}$
	дин \cdot см	1
	Дж	10^{-7}
морская сажень	фут	6
фут	дюйм	12
	м	0,3048
восьмая часть мили	ярд	220
гал, Гал	$\text{см}^3/\text{с}^2$	1
	$\text{м}^3/\text{с}^2$	10^{-2}
галлон США	куб. дюйм	231
	л	3,78541
галлон английский	куб. дюйм	277,419
	л	4,54608
гамма, γ	Гс	10^{-5}
	Т	10^{-9}
гаусс, Гс	Т	10^{-4}
грамм, г	фунт	0,0022046
	кг	10^{-3}
единица теплового потока, е.т.п.	кал \cdot см $^{-2} \cdot$ с $^{-1}$	10^{-6}
	МВт/м 2	41,84
гектар, га	акр	2,47105
	см 2	10^8
лошадиная сила, л.с.	Вт	745,700
дюйм	см	2,54

Продолжение табл. Б

Исходная единица измерения величины	Единица, в которой должна быть измерена величина	Переводной множитель, на который следует умножить величину, измеренную в исходных единицах
джоуль, Дж	эрг	10^7
	кал	0,239006
килограмм, кг	г	10^3
	фунт	2,20462
километр, км	м	10^3
	фут	3280,84
	миля	0,621371
км/ч	миля/ч	0,621371
киловатт, кВт	Вт	10^3
	л.с.	1,34102
узел	миля/ч	1,150779
литр, л	см ³	10^3
	галлон США	0,26417
	куб. дюйм	61,0237
метр, м	фут	3,28084
микрон, мкм	см	10^{-4}
миля	фут	5280
	км	1,60934
мм рт.ст.	дин/см ²	1333,22
ньютон, Н	дин	10^5
унция	фунт	0,0625
пинта	галлон	0,125
пуаз, П	г · см ⁻¹ · с ⁻¹	1
	кг · м ⁻¹ · с ⁻¹	0,1
фунт	кг	0,453592
фунт · фут/с ²	Н	0,138255
кварта	галлон	0,25
стокс, Ст	см ² /с	1
слаг	кг	14,594
тесла, Т	Гс	10^4
тонна (короткая)	фунт	2000
	кг	907,185
ватт, Вт	Дж/с	1
	л.с.	0,00134102
ярд	дюйм	36
	м	0,9144
год (календарный)	сут	365
	с	$3,1536 \cdot 10^7$

В. Список обозначений

Обозначение	Величина	Формула, определяющая величину	Единица СИ
a	экваториальный радиус Земли	(1.24)	м
	радиус	(6.213)	м
A	экваториальный момент инерции	(5.29)	кг · м ²
	площадь	(3.36)	м ²
	постоянная Маделунга	(7.10)	
b	расстояние	(2.2)	м
b^*	вектор Бюргерса	(7.113)	м
B	напряженность магнитного поля	(1.20)	Т
	экваториальный момент инерции	(5.31)	кг · м ²
B_r	число Бринкмана	(7.151)	
c	удельная теплоемкость	(4.67)	Дж · кг ⁻¹ · К ⁻¹
	полярный радиус Земли	(5.55)	м
c_D	коэффициент сопротивления	(6.226)	
C	степень компенсации	(3.116)	
	концентрация	(4.6)	
	полярный момент инерции	(5.26)	кг · м ²
d	расстояние	(2.141)	м
D	магнитное склонение	(1.22)	
	изгибная жесткость	(3.72)	Н · м
	сила трения	(6.218)	Н
	диаметр трубы	(6.256)	м
	коэффициент диффузии	(7.62)	м ² /с
e	изотропная деформация	(2.124)	
	эксцентриситет	(5.65)	
	заряд электрона	(7.10)	Кл
	удельная внутренняя энергия	(7.27)	Дж/кг
E	модуль Юнга	(3.4)	Па
	число Эккерта	(6.382)	
	энергия	(8.54)	Дж
E_a	энергия активации	(7.77)	Дж/моль
E_0	высота энергетического барьера	(7.76)	Дж/моль
f	коэффициент трения	(2.15)	
	частота	(4.73)	с ⁻¹
	сила	(5.1)	Н
	сжатие Земли	(5.56)	
	коэффициент сопротивления трубы	(6.39)	
F	сила на единицу ширины	(2.6)	Н/м
g	ускорение силы тяжести	(1.1)	м/с ²
Δg	гравитационная аномалия	(5.100)	м/с ²
G	гравитационная постоянная	(2.58)	м ³ · кг ⁻¹ · с ⁻²
	модуль сдвига	(3.1)	Па

Продолжение табл. В.

Обозначение	Величина	Формула, определяющая величину	Единица СИ
<i>h</i>	глубина	(2.2)	м
	высота топографического поднятия	(3.101)	м
	коэффициент теплопередачи	(6.254)	$\text{Вт} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^{-1}$
	высота зеркала грунтовых вод	(9.22)	м
<i>H</i>	тепловыделение	(4.5)	Вт/кг
	толщина коры без поднятий	(5.148)	м
	гидростатический напор	(6.9)	м
<i>I</i>	магнитное наклонение	(1.20)	
<i>J</i>	плотность потока атомов	(7.58)	$\text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$
<i>J₂</i>	гравитационный момент	(5.43)	
<i>k</i>	коэффициент теплопроводности	(4.1)	$\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$
	постоянная Больцмана	(7.27)	Дж/К
	коэффициент проницаемости	(9.1)	м^2
<i>K</i>	модуль всестороннего сжатия	(3.50)	Па
	коэффициент гидравлической проводимости	(9.2)	м/с
<i>L</i>	длина	(2.14)	м
	скрытая теплота перехода	(4.131)	Дж/кг
<i>m</i>	магнитный дипольный момент	(1.24)	$\text{А} \cdot \text{м}^2$
	масса	(5.1)	кг
<i>M</i>	масса планетного тела	(2.58)	кг
	изгибающий момент на единицу длины	(3.58)	Н
	магнитуда землетрясения	(8.54)	
<i>M_a</i>	атомная масса	(7.27)	кг/моль
<i>n</i>	число атомов в единице объема	(7.46)	м^{-3}
<i>N</i>	число атомов	(1.2)	
ΔN	аномалия геоида	(5.69)	м
<i>N₀</i>	число Авогадро	(7.27)	
<i>Nu</i>	число Нуссельта	(6.257)	
<i>p</i>	давление	(1.1)	Па
<i>P</i>	горизонтальная сила на единицу длины	(3.58)	Н/м
	давление потока	(6.66)	Па
<i>Pe</i>	число Пекле	(6.264)	
<i>Pr</i>	число Прандтля	(6.3)	
<i>q</i>	нагрузка	(3.56)	Па
	тепловой поток через единицу площади	(4.1)	$\text{Вт}/\text{м}^2$

Продолжение табл. В.

Обозначение	Величина	Формула, определяющая величину	Единица СИ
Q	тепловой поток	(4.5)	Вт
	объемный расход жидкости	(6.35)	м ³ /с
	интегральный тепловой поток	(4.117)	Дж/м ²
	линейная плотность тепловыделения	(4.119)	Вт/м
	количество тепла на единицу площади	(4.151)	Дж/м ²
r	радиальная координата	2.57	м
R	радиус Земли	(2.66)	м
	радиус трубы	(6.33)	м
	радиус кривизны	(3.66)	м
	универсальная газовая постоянная	(7.27)	Дж · моль ⁻¹ · К ⁻¹
Ra	число Раэля	(6.306)	
Re	число Рейнольдса	(6.40)	
S	предел прочности на сдвиг	(8.38)	Па
	водонасыщенность	(9.225)	
s	расстояние вдоль поверхности	(1.37)	м
	расстояние до оси вращения	(5.46)	м
	удельная энтропия	(4.233)	Дж · кг ⁻¹ · К ⁻¹
t	время	(1.2)	с
T	температура	(4.1)	К
u	горизонтальная скорость	(1.35)	м/с
U	скорость	(4.144)	м/с
	геопотенциал	(5.53)	м ² /с ²
	энергия решетки	(7.4)	Дж
v	вертикальная скорость	(6.52)	м/с
	удельный объем	(4.166)	м ³ /кг
V	объем	(3.51)	м ³
	вертикальная сила на единицу длины	(3.56)	Н/м
	гравитационный потенциал	(5.51)	м ² /с ²
V _a	объем активации	(7.77)	м ³
w	смещение	(2.67)	м
	вертикальное отклонение	(3.58)	м
W	глубина компенсации	(5.151)	м
x	горизонтальная координата	(2.67)	м
y	вертикальная координата	(1.1)	м
Z	комплексное расстояние	(8.66)	м
z	горизонтальная координата	(2.77)	м
	заряд иона относительно заряда электрона	(7.10)	

Продолжение табл. В.

Обозначение	Величина	Формула, определяющая величину	Единица СИ
α	угол	(1.40)	
	параметр изгиба	(3.127)	м
	коэффициент теплового расширения	(4.169)	K^{-1}
β	коэффициент сжимаемости	(3.50)	Pa^{-1}
	геотермический градиент	(4.61)	K/m
	угол	(5.19)	
γ	наклон кривой Клапейрона	(4.237)	Pa/K
	постоянная Эйлера	(4.120)	
Γ	частота перемещений вакансии	(7.56)	s^{-1}
	безразмерный тепловой поток	(9.227)	
δ	диаметр трубки	(9.6)	м
Δ	угол, под которым видна дуга	(1.35)	
	дилатация	(2.78)	
ϵ	деформация	(2.66)	
	малая величина	(5.22)	
$\dot{\epsilon}$	скорость деформации	(2.127)	s^{-1}
ϵ_D	диэлектрическая проницаемость вакуума	(7.10)	F/m
ζ	расстояние	(4.19)	м
η	расстояние	(4.19)	м
	переменная подобия	(4.96)	
θ	коширота	(1.24)	
	угол	(2.20)	
θ	безразмерная температура	(4.93)	
k	жесткость пружины	(7.18)	H/m
χ	коэффициент температуропроводности	(4.68)	m^2/c
λ	постоянная распада	(1.2)	s^{-1}
	параметр Ламе	(3.1)	Pa
	длина волны	(3.107)	м
λ_m	коэффициент теплопроводности	(9.103)	$Вт \cdot м^{-1} \cdot K^{-1}$
μ	коэффициент вязкости	(6.1)	$Pa \cdot c$
	коэффициент внутреннего трения	(8.38)	
μ_0	магнитная проницаемость вакуума	(1.24)	$T \cdot м/А$
ν	коэффициент Пуассона	(3.4)	
	коэффициент кинематической вязкости	(6.2)	m^2/c
	расстояние	(4.144)	м
ρ	плотность	(1.1)	$кг/м^3$
σ	напряжение	(2.1)	Pa
	постоянная Стефана — Больцмана	(4.223)	$Вт \cdot м^{-2} \cdot K^{-4}$
	поверхностная плотность	(5.106)	$кг/м^2$

Продолжение табл. В.

Обозначение	Величина	Формула, определяющая величину	Единица СИ
τ	сдвиговое напряжение	(4.224)	Па
	период колебаний	(4.74)	с
	время релаксации	(6.104)	с
	время нарастания	(6.157)	с
T _{1/2}	период полураспада	(1.4)	с
φ	широта	(1.29)	
	угол	(2.79)	
	кинетическая энергия	(7.46)	Дж
ψ	пористость	(9.5)	
	долгота	(1.32)	
ω	функция тока	(6.69)	м ² /с
	угловая скорость	(1.35)	с ⁻¹
	функция вращения	(2.85)	
	круговая частота	(4.72)	с ⁻¹

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Физические постоянные и характеристики

А. Физические постоянные

Величина	Обозначение	Числовое значение
Скорость света	c	$2,9979246 \cdot 10^8$ м/с
Заряд электрона	e	$-1,6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл
Магнитная проницаемость вакуума	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Т · м/А
Диэлектрическая проницаемость вакуума	ϵ_0	$8,8541878 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Постоянная Планка	h	$6,62618 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Больцмана	k	$1,38066 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Гравитационная постоянная	G	$6,6732 \cdot 10^{-11}$ Н · м ² /кг ²
Постоянная Стефана — Больцмана	σ	$5,6703 \cdot 10^{-8}$ Вт · м ⁻² · К ⁻⁴
Масса покоя электрона	m_e	$0,910956 \cdot 10^{-30}$ кг
Атомная единица массы	а.е.м.	$1,660531 \cdot 10^{-27}$ кг
Число Авогадро	N_0	$6,02217 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Универсальная газовая постоянная	R	$8,3144$ Дж · моль ⁻¹ · К ⁻¹

Б. Характеристики Земли

Величина	Обозначение	Числовое значение
Экваториальный радиус	a	$6,378139 \cdot 10^6$ м
Полярный радиус	c	$6,35675 \cdot 10^6$ м
Объем	V	$1,083 \cdot 10^{21}$ м ³
Объем ядра	V_c	$1,77 \cdot 10^{20}$ м ³
Объем мантии	V_m	$9,06 \cdot 10^{20}$ м ³
Радиус сферы эквивалентного объема		$6,3708 \cdot 10^6$ м
Радиус ядра	r_c	$3,486 \cdot 10^6$ м
Радиус внутреннего ядра	r_{ic}	$1,217 \cdot 10^6$ м
Масса	M	$5,973 \cdot 10^{24}$ кг
Средняя плотность	ρ	$5,515 \cdot 10^3$ кг/м ³
Масса ядра	M_c	$1,883 \cdot 10^{24}$ кг
Масса мантии	M_m	$4,060 \cdot 10^{24}$ кг
Масса коры	M_{cr}	$2,6 \cdot 10^{22}$ кг
Ускорение силы тяжести на поверхности:		
на экваторе	g_e	$9,78031846$ м/с ²
на полюсе	g_p	$9,7803715$ м/с ²

Продолжение табл. Б.

Величина	Обозначение	Числовое значение
Площадь поверхности		$5,10 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$
Площадь суши		$1,48 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$
Площадь континентов, включая континентальные окраины		$2,0 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$
Площадь поверхности воды		$3,63 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$
Площадь океанов без континентальных окраин		$3,1 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$
Средняя высота суши	\bar{h}	825 м
Средняя глубина океанов	\bar{w}	3770 м
Средний поверхностный тепловой поток	\bar{q}_s	75 мВт/м ²
Полный тепловой поток с поверхности	Q_s	38 ТВт
Гравитационный момент	J_2	$1,08270 \cdot 10^{-3}$
Сжатие	f	$3,35282 \cdot 10^{-3}$
Полярный момент инерции	C	$8,0378 \cdot 10^{37} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
Экваториальный момент инерции	A	$8,0115 \cdot 10^{37} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
Возраст Земли		$4,45 \cdot 10^9$ лет

В. Характеристики планет

	Меркурий	Венера	Земля
Большая полуось орбиты, 10^6 км	57,9	108,2	149,6
Сидерический период обращения, сут	87,969	224,701	365,256
Эксцентриситет	0,205614	0,006821	0,016721
Наклонение к эклиптике, градусы	7,003	3,39	—
Экваториальный радиус, км	2439	6050	6378
Сжатие	0	0	0,0034
Масса, 10^{24} кг	0,3303	4,870	5,973
Плотность, $кг/м^3$	5420	5250	5515
Ускорение силы тяжести на поверхности, $м/с^2$	3,78	8,60	9,78
Сидерический период вращения, сут	58,65	— 243,0	0,997270
C/MR^2	—	0,34	0,3335

Г. Характеристики спутников планет

Планета	Спутник	Расстояние от центра планеты, 10^3 км	Сидерический период, сут	Радиус, км	Масса, 10^{21} кг
Земля	Луна	384	27,322	1738	73,5
Марс	Фобос	9,38	0,3189	11	$9,6 \cdot 10^{-6}$
	Деймос	23,5	1,26244	6	$2 \cdot 10^{-6}$
Юпитер	Амальтея	181,3	0,489	120	—
	Ио	412,6	1,769	1816	89,16
	Европа	670,9	3,551	1563	48,73
	Ганимед	1070	7,155	2638	149
	Каллисто	1880	16,689	2410	106,4
	Леда	11 110	240	1 — 7	—
	Гималия	11 470	250,6	85	—
	Лиситея	11 710	260	3 — 16	—
	Элара	11 740	260,1	40	—
	Ананке	20 700	617	3 — 14	—
	Карме	22 350	692	4 — 20	—
	Пасифе	23 300	735	4 — 23	—
	Синопе	23 700	758	3 — 18	—

Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
227,9	778,3	1427,0	2869,6	4496,6	5900
686,980	4332,589	10 759,22	30 685,4	60 189	90 465
0,093313	0,04845	0,05565	0,04724	0,00858	0,250
1,850	1,300	2,49	0,767	1,767	17,17
3398	71900	60 000	26 145	24750	~ 1300
0,0059	0,0637	0,102	0,024	0,0266	—
0,642	1899	568,6	86,6	102,9	~ 0,007
3940	1314	690	1190	1660	~ 1000
3,72	22,9	9,05	7,77	11	~ 4,3
1,025956	0,413538	0,42638	0,646	0,758	6,38
0,365	0,26	0,25	0,23	0,23	—

Продолжение табл. Г.

Планета	Спутник	Расстояние от центра планеты, 10^3 км	Сидеричес- кий период, сут	Масса, 10^{21} кг	
Сатурн	Мимас	185	0,942	195	0,0376
	Энцелад	238	1,370	250	0,074
	Тетфия	295	1,888	525	0,626
	Диона	377	2,737	560	1,05
	Рея	527	4,518	765	2,28
	Титан	1222	15,945	2560	135,9
	Гиперион	1481	21,277	145	0,1
	Япет	3560	79,331	720	1,93
Уран	Феба	12930	550,4	70	—
	Миранда	130	1,414	160	0,034
	Ариэль	192	2,520	430	0,67
	Умбриэль	267	4,144	450	0,76
	Титания	438	8,706	520	1,2
Нептун	Оберон	586	13,463	460	8,2
	Тритон	355	5,877	1900	57
Плутон	Нереида	5562	359,88	470	—
	Чарон	~ 17	6,388	—	—

Д. Характеристики пород

	ρ , кг/м ³	E , 10 ¹¹ Па	G , 10 ¹¹ Па	ν	k , Вт · м ⁻¹ · К ⁻¹	α , 10 ⁻⁵ К ⁻¹
<i>Осадочные</i>						
Глина	2100 – 2700	0,1 – 0,3	0,14		1,2 – 3	
Песчаник	2200 – 2700	0,1 – 0,6	0,04 – 0,3	0,2 – 0,3	1,5 – 4,2	3
Известняк	2200 – 2800	0,6 – 0,8	0,2 – 0,3	0,25 – 0,3	2 – 3,4	2,4
Доломит	2200 – 2800	0,5 – 0,9	0,3 – 0,5		3,2 – 5	
Мрамор	2200 – 2800	0,3 – 0,9	0,2 – 0,35	0,1 – 0,4	2,5 – 3	
<i>Метаморфические</i>						
Гнейс	2700	0,04 – 0,7	0,1 – 0,35	0,04 – 0,15	2,1 – 4,2	
Амфиболит	3000		0,5 – 1,0	0,4	2,5 – 3,8	
<i>Изверженные</i>						
Базальт	2950	0,6 – 0,8	0,3	0,25	1,3 – 2,9	
Гранит	2650	0,4 – 0,7	0,2 – 0,3	0,1 – 0,25	2,4 – 3,8	2,4
Диабаз	2900	0,8 – 1,1	0,3 – 0,45	0,25	1,7 – 2,5	
Габбро	2950	0,6 – 1,0	0,2 – 0,35	0,15 – 0,2	1,9 – 2,3	1,6
Диорит	2800	0,6 – 0,8	0,3 – 0,35		2,8 – 3,6	
Пироксенит	3250				4,1 – 5	
Анортозит	2750	0,83	0,35	0,25	1,7 – 2,1	
Гранодиорит	2700				2,6 – 3,5	
<i>Мантийные</i>						
Перидотит	3250				2,3 – 3	2,4
Дунит	3250	1,4 – 1,6	0,6 – 0,7		3,7 – 4,6	
<i>Смешанные</i>						
Галит			0,3	0,15	5,4 – 7,2	13
Лед			0,092	0,033	2,2	5

Е. Характеристики мантии

y , км	ρ , 10^3 кг/м^3	ρ_p , 10^{11} Па	ρ_s , м/с^2	T , К	E , 10^{11} Па	G , 10^{11} Па	β , 10^{-12} Па^{-1}	ν
✓ 100	3,359	0,0314	9,864	1610	1,618	0,631	8,065	0,282
200	3,420	0,0649	9,898	1610	1,647	0,642	7,918	0,283
300	3,479	0,0988	9,931	1680	1,883	0,725	6,411	0,299
400	3,540	0,1332	9,968	1750	2,076	0,799	5,805	0,299
400	3,742	0,1332	9,968	1910	2,459	0,940	4,694	0,308
500	3,866	0,171	9,990	1975	2,702	1,039	4,430	0,300
650	4,051	0,231	10,009	2075	3,088	1,197	4,078	0,290
650	4,365	0,231	10,009	2375	4,126	1,622	3,318	0,272
800	4,454	0,295	9,992	2412	4,384	1,720	3,089	0,274
1000	4,570	0,386	9,966	2462	4,718	1,846	2,826	0,278
1250	4,712	0,502	9,941	2525	5,133	2,002	2,548	0,282
1500	4,850	0,621	9,935	2587	5,537	2,152	2,314	0,286
1750	4,985	0,743	9,950	2650	5,932	2,298	2,117	0,291
2000	5,116	0,869	10,003	2712	6,249	2,409	1,949	0,297
2250	5,242	0,999	10,101	2775	6,691	2,576	1,804	0,315
2500	5,365	1,134	10,264	2838	7,057	2,709	1,680	0,302
2885	5,550	1,354	10,638	2934	7,611	2,911	1,519	0,307

1,54

9,40

Ответы к избранным задачам

- 1.1. 56 млн. лет
 1.2. 25 км
 1.3. 870 м
 1.7. $3,74 \cdot 10^{-4} \text{ Т}$
 1.8. 1660 км
 1.9. $51^\circ \text{ С.Ш.}, 78^\circ \text{ В.Д.}$
 1.10. $75^\circ \text{ С.Ш.}, 123^\circ \text{ В.Д.}$
 1.11. $70^\circ \text{ С.Ш.}, 186^\circ \text{ В.Д.}$
 1.14. $1^\circ, 70^\circ$
 1.15. $5,5^\circ, 69^\circ$
 1.16. 1890 км, 2446 км
 1.17. 1028 км, 2080 км
 1.20. 10,4 мм/год
 1.21. 100 мм/год
 1.22. 49 мм/год
 1.23. $210^\circ, 120 \text{ мм/год}; 0^\circ, 104 \text{ мм/год}$
 1.25. $260^\circ, 43 \text{ мм/год}$
 1.26. $200^\circ, 83 \text{ мм/год}; 180^\circ, 78 \text{ мм/год}$
 1.27. $250^\circ, 92,4 \text{ мм/год}; 50 \text{ мм/год}$
 1.28. $91^\circ, 51 \text{ мм/год}$

2.1. 220 МПа (2,2 кбар)

2.2. 6,6 км

2.3. 68 км

2.4. 290 м

2.5. - 150 МПа

2.7. $4,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}, 41 \text{ МПа}$

2.8. $8,6 \cdot 10^4 \text{ Н}$

2.12. 166,5 МПа, - 23,5 МПа

2.15. 4,6 ГПа

2.16. 13 200 кг/м³, 433 ГПа, 129 ГПа, 12,9 м/с²

2.17. 47 и 63 МПа, 75° и 165°

2.18. 0,5; 3; 5; 5,5 МПа

2.24. $x_c - x_a = [(x_b - x_a)^2 + (z_b - z_a)^2]^{1/2} \frac{\sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \times$

$$\times \left\{ -\cos \left[\theta_1 + \arctg \left(\frac{z_b - z_a}{x_b - x_a} \right) \right] \right\};$$

$$z_c - z_a = [(x_b - x_a)^2 + (z_b - z_a)^2]^{1/2} \frac{\sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \times$$

$$\times \sin \left[\theta_1 + \arctg \left(\frac{z_b - z_a}{x_b - x_a} \right) \right]$$

3.1. 180 МПа

3.2. 42 МПа, 125 МПа

3.3. $\nu\sigma_1, -\nu(1+\nu)\sigma_1/E$

3.4. $(2\nu^2 + \nu - 1)\rho g y/E, (1 - 2\nu)\rho g y$

3.7. $x(L-x)M_0/2D$

3.8. $x(3L^2 - 4x^2)V_a/12D$

3.9. $q(L-x), -q(L-x)^2/2$

3.10. 32,4 МПа, 0,27 МПа

3.11. $-x^3L \cdot q/12D + 3x^2L^2q/16$ при $0 < x < L/2,$

$(16x^4 - 64x^3L + 96x^2L^2 - 8xL^3 + L^4)q/384D$ при $L/2 < x < L$

3.12. $(9Lx^2 - 4x^3)V_a/12D$ при $0 < x < L/2,$

$(24Lx^2 - 8x^3 + 6L^2x - L^3)V_a/48D$ при $L/2 < x < L$

3.13. $(x^4 - 2x^3L + xL^3)q/D, L/2, 3L^2q/4h^2$

3.14. 0,405 м

3.15. $(L^4q_0/\pi^4D)\sin(\pi x/L)$

3.17. $(p - \rho gh)(L^2 - 12x^2)/24, \pm L/2$

3.18. $(p - \rho gh)(12x^2 - L^2)/4h^2, \pm L/2$

4.3. $15 \cdot 10^{-9}, 60 \cdot 10^{-9}, 0,09\%$

4.4. $6,3 \cdot 10^{-12}$ Вт/кг, $2,3 \cdot 10^{-12}$ Вт/кг, $2,6 \cdot 10^{-11}$ Вт/кг,

$9,6 \cdot 10^{-10}$ Вт/кг, $5,1 \cdot 10^{-12}$ Вт/кг

4.5. $9,4 \cdot 10^{-11}$ Вт/кг

4.7. 16 мВт/м², 10 км

4.8. $q^* = q_m + \rho h_r H^*$

4.9. 137 км, 0,52 мкВт/м³

4.10. $q_s = q_m + \frac{1}{2} \rho H_s b$

$$T = T_0 + \frac{1}{k} (q_m y + \frac{1}{2} \rho H_s b y - \frac{1}{2} \rho H_s y^2 + \frac{1}{6} \frac{\rho H_s y^3}{b})$$

4.11. 55,5 мВт/м², 608,5°C

4.14. 58 400 К

4.15. $T_0 + \frac{\rho H}{6k} (a^2 - b^2) + \Gamma b$

4.16. $T_0 + \frac{q_s a}{k} (\frac{3}{2} \frac{a}{b} - 1)$

4.17. $T_0 + \frac{\rho H}{6k} (a^2 - r^2) + \frac{1}{3} \frac{\rho H b^3}{k} (\frac{1}{a} - \frac{1}{r}), a > r > b$

4.19. 733 м

4.20. 43,8 мВт/м²

4.23. $1,3 \cdot 10^{12}$ лет, 10^{11} , $3,6 \cdot 10^{11}$, $1,2 \cdot 10^{12}$, $1,9 \cdot 10^{11}$

4.24. $6,2 \cdot 10^{-15}$ K/c

4.25. $9,3 \cdot 10^{-15}$ K/c

4.26. 3,16 м, 9,94 м

4.27. 950 м

4.28. 1,14 м

4.29. $5,2 \cdot 10^{-3}$ К

4.30. $\pi/4 + n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$

4.31. $3,64(\chi t)^{1/2}$

4.32. $3 \cdot 10^5$ с

4.34. $T_0 + \beta y - \Delta T_0 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{\chi(t+\tau)}}$ при $-\tau < t < 0$,

$$T_0 + \beta y - \Delta T_0 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{\chi(t+\tau)}} + \Delta T_0 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{\chi t}} \quad \text{при } t > 0$$

4.37. 0,32 м

4.38. 26 млн. лет

4.39. 65,9 млн. лет

4.40. $\frac{\chi(T_m - T_0)}{(\pi\chi t)^{1/2} \operatorname{erf} \lambda_1} e^{-\lambda_1^2}$

4.41. $T_0 + \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf} \lambda_3} \operatorname{erf} \left(\frac{y - y_s}{2\sqrt{\chi t}} \right)$ при $0 < y < y_s$,

$$T_v - \frac{T_v - T_m}{\operatorname{erfc} \lambda_3} \operatorname{erfc} \left(\frac{y - y_s}{2\sqrt{\chi t}} \right) \quad \text{при } y > y_s,$$

$$\frac{T_m - T_0}{\operatorname{erfc} \lambda_3} - \frac{T_v - T_m}{\operatorname{erfc} \lambda_3} = \frac{\sqrt{\pi} L \lambda_3 e^{-\lambda_3^2}}{c}$$

4.42. 32 км

4.43. 140 км

4.44. 1,29 сут

4.46. $T_0 + (T_\infty - T_0) \exp(-U\xi/\chi)$

4.47. $\frac{T_0 - T_\infty \operatorname{erf}(\alpha/2\sqrt{\chi})}{1 - \operatorname{erf}(\alpha/2\sqrt{\chi})} + \frac{T_\infty - T_0}{1 - \operatorname{erf}(\alpha/2\sqrt{\chi})} \operatorname{erf} \frac{y}{2\sqrt{\chi t}}$

4.48. $\frac{q_m}{\rho[L + c(T_m - T_0)]}$

4.49. 16,5 МПа

4.50. 6,4 км

4.51. 500 м, 200 м

4.52. 0,04 мм/год

4.53. $\frac{x(\rho_m - \rho_l)y_L}{\rho_m - \rho_w}$, 0,6

4.54. 320 м

4.55. 4,2 км

4.56. 2 - 3 км

4.57. 68 К

4.58. 17 000 К

4.59. 2,7 К

5.1. $1,67 \cdot 10^{-3}$

5.2. $3,4367 \cdot 10^{-3}$

5.3. а) $6,25 \cdot 10^7$ Дж, б) $1,12 \cdot 10^4$ м/с, в) 61000 К

5.4. Нет

5.5. 9,78031846 м/с², 9,832177 м/с²

9,7804629 м/с², 9,832011 м/с²

5.7. $g_e + 2Gb/a^3$

5.8. 4140 кг/м³, 12 410 кг/м³

5.9. 4460 кг/м³

5.10. 3,74 сут

5.11. 21 ч

5.12. 13 млн. т

5.16. 3,98 мм/с²

5.18. 8,1 км

5.19. $4,3 \cdot 10^6$ кг/м²

5.20. 0,044978 мм/с², - 0,56184 мм/с²

5.22. $\frac{\pi G}{g} \rho_{cu} \left\{ 2h \left[H + \left(\frac{\rho_m - \rho_{cl}}{\rho_m - \rho_{cu}} \right) b_L \right] + \frac{h^2 \rho_m}{\rho_m - \rho_{cu}} \right\}$

5.23. 14,4 км

6.2. $\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (2y - h) - \mu \frac{u_0}{h}$, $-\mu \frac{u_0}{h}$, $\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (2y - h)$

6.3. $\frac{h}{2} + \frac{\mu_0 u_0}{h(dp/dx)}$

6.4. $\frac{\rho g h^2 \sin \alpha}{3\mu}$, $\left(\frac{3\mu Q}{\rho g \sin \alpha} \right)^{1/3}$

6.5. 0,317 МПа

6.6. 19,2 МПа

6.7. $1,27 \cdot 10^{-20}$

6.8. 0,025 м, 0,84 м/с, $4 \cdot 10^4$

6.9. $(\rho_s - \rho_l)gd^3/12\mu$

$$6.10. -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{hy^2}{2} \right) + \frac{u_0 y^2}{2h} - u_0 y,$$

$$-u_0 \left[y - \frac{y^2}{2h} + 6 \left(\frac{h_L}{h} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{y^3}{3h^2} - \frac{y^2}{2h} \right) \right]$$

6.12. 0,61 км, 0,22 км, $4 \cdot 10^{21}$ Па · с

$$6.13. u = -\frac{\sqrt{2}U}{2 - \pi^2/4} \left\{ \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\pi x}{2} + \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) y \right] \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \right\},$$

$$v = -\frac{\sqrt{2}U}{2 - \pi^2/4} \left\{ \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \left[\frac{\pi x}{2} + \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) y \right] \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right\},$$

$$u = \frac{U}{9\pi^2/4 - 2} \left\{ \left(\frac{9\pi^2}{4} - 2 \right) + \pi(2\sqrt{2} - 3\pi) - \right.$$

$$\left. - \left[\sqrt{2} \left(2 + \frac{3\pi}{2} \right) - 2 \left(1 + \frac{3\pi}{2} \right) \right] \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \right.$$

$$\left. - \left[\left(2 - \sqrt{2} \frac{3\pi}{2} \right) x + \left(\sqrt{2} \left(2 + \frac{3\pi}{2} \right) - 2 \left(1 + \frac{3\pi}{2} \right) \right) y \right] \frac{x}{x^2 + y^2} \right\},$$

$$v = \frac{U}{9\pi^2/4 - 2} \left\{ \left(2 - \sqrt{2} \frac{3\pi}{2} \right) \pi + \left(2 - \sqrt{2} \frac{3\pi}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \right.$$

$$\left. - \left[\left(2 - \sqrt{2} \frac{3\pi}{2} \right) x + \left(\sqrt{2} \left(2 + \frac{3\pi}{2} \right) - 2 \left(1 + \frac{3\pi}{2} \right) \right) y \right] \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}$$

6.15. $4,6 \cdot 10^{18}$ Па · с

6.16. 195000 лет

6.20. $3,3 \cdot 10^{18}$ Па · с

6.21. $8,96 \cdot 10^{20}$ Па · с

$$6.24. T = C_1 x + C_2 + \frac{C_1}{4\chi\mu} \left(-\frac{1}{6} y^4 - \frac{1}{4} d^2 y^2 + \frac{5}{96} d^4 \right),$$

$$q = \frac{c_1 k d^3}{24\chi\mu}, \quad k = \frac{70}{17} \cdot \frac{k}{d}, \quad Nu = \frac{70}{17}$$

6.27. $2,4 \cdot 10^5$, $2,9 \cdot 10^9$, $4,2 \cdot 10^7$, $1,2 \cdot 10^6$

6.28. $1,16b$, $7,85b$

6.31. $14,4$ км

6.33. $0,32$

$$6.36. T_0 + \frac{\mu u_0^2}{k h^2} (h y - \frac{1}{2} y^2), \quad \frac{\mu u_0^2}{h}, \quad \frac{\mu u_0^2}{2k}$$

7.1. 547 кДж/моль

7.3. $1,6 \cdot 10^8$ Па

7.4. $1,24 \cdot 10^3$ Дж · кг⁻¹ · К⁻¹

7.11. -72 бар

7.13. 137 МПа, 860 К

7.21. σ_* , $\sigma_*/\sqrt{6}$

7.22. $\sigma_0 / [(1 - \nu)^2 + 1]^{1/2}$, $(1 - \nu^2) \sigma_0 / E [(1 - \nu)^2 + \nu]^{1/2}$

7.23. 2τ , $\sqrt{3}\tau$

$$7.24. \frac{a^2 \sigma_0}{2} \left(1 - \frac{c^2}{3a^2} \right), \quad \frac{\sigma_0 a^2}{3}, \quad \frac{\sigma_0 a^2}{2}$$

Литература

1. *Taylor F.B.* Bearing of the Tertiary Mountain Belt on the Origin of the Earth's Plan. *Bull. Geol. Soc. Am.*, **21**, 179 – 226, 1910.
2. *Wegener A.* The Origin of Continents and Oceans. – New York: Dover, 1966.
3. *Du Toit A.* Our Wandering Continents. – Edinburgh: Oliver and Boyd, 1937.
4. *Hess H.* History of Ocean Basins. – В кн.: *Petrologic Studies. A Volume in Honour of A.E. Buddington.* *A.E.J. Engle*, ed. – Geological Society of America, p. 599 – 620, 1962.
5. *Haskell N.A.* The Motion of a Viscous Fluid under a Surface Load. *Physics*, **6**, 265 – 269; **7**, 56 – 61, 1935.
6. *Gordon R.B.* Diffusion Creep in the Earth's Mantle. *J. Geophys. Res.*, **70**, 2413 – 2418, 1965.
7. *Jeffreys H.* The Earth. – Cambridge: Cambridge University Press, 1st edition: 1924, 5th edition 1970. [Имеется перевод 4-го изд. *Джеффрис Г.* Земля, ее происхождение, история и строение. – М.: ИЛ, 1960.]
8. *Holmes A.* Radioactivity and Earth Movement, XVIII. *Trans. Geol. Soc. Glasgow*, **18**, 559 – 606, 1931.
9. *Runcom K.* Paleomagnetic Comparisons between Europe and North America. *Proc. Geol. Ass. Can.*, **8**, 77 – 85, 1956.
10. *Vine F., Matthews D.* Magnetic Anomalies over Ocean Ridges. *Nature*, **199**, 947, 1963.
11. *Morgan J.* Rises, Trenches, Great Faults and Crustal Blocks. *J. Geophys. Res.*, **73**, 1959 – 1982, 1968.
12. *Isacks B.L., Barazangi M.* Geometry of Benioff Zones: Lateral Segmentation and Downwards Bending of the Subducted Lithosphere. – В кн.: *Island Arcs, Deep Sea Trenches and Back-Arc Basins.* *M. Talwani, W.C. Pitman*, eds. – Washington, D.C.: American Geophysical Union, Maurice Ewing Series 1, 99 – 114, 1977.
13. *Moorbath S., O'Nions R.K., Pankhurst R.J., Gale N.H., McGregor V.R.* Further Rubidium Strontium Age Determination on Very Early Precambrian Rocks of the Godthaab District, West Greenland. *Nat. Phys. Sci.*, **240**, 78 – 82, 1972.
14. *Cohee G.V., Glaessner M.F., Hedberg H.D.* (editors). Contributions to the Geologic Time Scale. – Studies in Geology, No. 6, Tulsa, Oklahoma: American Association of Petroleum Geologists, 1978.
15. *Makinen E.A., Dalrymple G.B.* Revised Geomagnetic Polarity Time Scale for the Interval 0 – 5 m.y. B.P. *J. Geophys. Res.*, **84**, 615 – 626, 1979.
16. *McElhinny M.W.* Paleomagnetism and Plate Tectonics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1973.
17. *Heirtzler J.R., LePichon W., Baron J.G.* Magnetic Anomalies over the

Reykjanes Ridge. Deep-Sea Res., **13**, 427 – 443, 1966.

18. *Minster J.B., Jordan T.H.* Present-Day Plate Motions. – J. Geophys. Res., **83**, 5331 – 5354, 1978.

19. *Smith A.G., Briden J.C., Drewry G.E.* Phanerozoic World Maps. – В кн.: Organisms and Continents through Time. *N.E. Hughes*, ed. – London: The Paleontological Association, p. 1 – 42, 1974.

20. *Ananda M.P., Sjogren W.L., Phillips R.J., Wimberly R.N., Bills B.G.* A Low-Order Global Gravity Field of Venus and Dynamical Implications. J. Geophys. Res., **85**, 8303 – 8318, 1980.

21. *McGarr A.* Some Constraints on Levels of Shear Stress in the Crust. J. Geophys. Res., **78**, 832 – 845, 1973.

22. *Thatcher W.* Strain Accumulation and Release Mechanism of the 1906 San Francisco Earthquake. J. Geophys. Res., **80**, 4862 – 4872, 1975.

23. *Savage J.C., Burford R.O.* Geodetic Determination of Relative Plate Motion in Central California. – J. Geophys. Res., **78**, 832 – 845, 1973.

24. *Savage J.C., Prescott W.H.* Geodolite Measurements near the Briones Hills, California, Earthquake Swarm of January 8, 1977. – Seismol. Soc. Amer. Bull., **68**, 175 – 180, 1978.

25. *Bieniawski Z.T.* Mechanism of Brittle Fracture of Rock: Part II. Experimental Studies. Int. J. Rock. Mech. Min. Sci., **4**, 407 – 423, 1976.

26. *Sclater J.G., Jaupart C., Galson D.* The Heat Flow through Oceanic and Continental Crust and the Heat Loss of the Earth. Rev. Geophys. Space Phys., **18**, 289 – 311, 1980.

27. *Leeds A.R., Knopoff L., Kausel E.G.* Variations of Upper Mantle Structure under the Pacific Ocean. Science, **186**, 141 – 143, 1974.

28. *Stefan J.* Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere. Annalen der Physik und Chem., **42**, 269 – 286, 1891.

29. *Wright T.L., Peck D.L., Shaw H.R.* Kilauea Lava Lakes: Natural Laboratories of Study of Cooling, Crystallization and Differentiation of Basaltic Magma. – В кн.: The Geophysics of the Pacific Ocean Basin and its Margin. *C.H. Sutton, M.H. Manghani, R. Moberly*, eds. – Washington D.C.: American Geophysical Union, p. 375 – 390, 1976.

30. *Parsons B., Sclater J.G.* An Analysis of the Variation of Ocean Floor Bathymetry with Age. J. Geophys. Res., **82**, 803 – 827, 1977.

31. *Vail P.R., Mitchum R.M., Thompson S.* Seismic Stratigraphy and Global Changes of Sea Level. – В кн.: Seismic Stratigraphy: Applications to Hydrocarbon Exploration. *C.F. Payton*, ed. – American Association of Petroleum Geologists, Memoir 26, 83 – 97, 1978. [Имеется перевод в кн.: Сейсмическая стратиграфия/ Под ред. Ч. Пейтона, ч. 1. – М.: Мир, 1982].

32. California Oil and Gas Fields, **2**, California Division of Oil and Gas, Report TR12, Sacramento, 1947.

33. *Dwight H.B.* Tables of Integrals and Other Mathematical Data. – New York: The MacMillan Company, 1947.

34. *Nettleton L.L.* Gravity Survey over a Gulf Coast Continental Shelf Mound. *Geophysics*, **22**, 630 – 642, 1957.
35. *Seigel H.O., Hill H.L., Baird J.G.* Discovery Case History of the Pyramid Ore Bodies Pine Point, Northwest Territories, Canada. – *Geophysics*, **33**, 645–656, 1968.
36. *Sjogren W.L.* Lunar Gravity Determinations and their Implications. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **285**, 219 – 226, 1977.
37. *Dorman L.M., Lewis B.T.R.* Correlation of Bouguer Gravity Anomalies with Topography for the United States. *J. Geophys. Res.*, **77**, 3068 – 3077, 1972.
38. *Crough S.T.* Thermal Origin of Midplate, Hot-Spot Swells. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **55**, 451 – 469, 1978.
39. *Haxby W.F., Turcotte D.L.* On Isostatic Geoid Anomalies. *J. Geophys. Res.* **83**, 5473 – 5478, 1978.
40. *Cathles L.M.* The Viscosity of the Earth's Mantle. – Princeton: Princeton University Press, 1975.
41. *Currie J.B. et al.* *Geol. Soc. Amer. Bull.*, **73**, 655, 1962.
42. *Ashby M.F., Verall R.A.* Micromechanisms of Flow and Fracture and their Relevance to the Rheology of the Upper Mantle. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **288A**, 59 – 95, 1977.
43. *Griggs D.T., Turner F.J., Heard H.C.* Deformation of Rocks at 500°C to 800°C. – *Geol. Soc. Amer. Memoir*, **79**, 39 – 104, 1960.
44. *Byerlee J.D.* Friction of Rocks. – В кн.: *Experimental Studies of Rock Friction with Application to Earthquake Prediction. J.F. Evernden, ed.* – U.S. Geological Survey, Menlo Park, Calif., p. 55 – 77, 1977.
45. *Brewer J.A., Smithson S.B., Oliver J.E., Kaufman S., Brown L.D.* The Laramide Orogeny: Evidence from COCORP Deep Crustal Seismic Profiles in the Wind River Mountains, Wyoming. *Tectonophysics*, **62**, 165 – 189, 1980.
46. *Cook F.A., Albaugh D.S., Brown L.D., Kaufman S., Oliver J.E., Hatcher R.D.* Thin-Skinned Tectonics in the Crystalline Southern Appalachians; COCORP Seismic Reflection Profiling of the Blue Ridge and Inner Piedmont. *Geology*, **7**, 563 – 567, 1979.
47. *Sieh K.* Prehistoric Large Earthquakes Produced by Slip on the San Andreas Fault at Pallett Creek, California. *J. Geophys. Res.*, **83**, 3907 – 3919, 1978.
48. *Thatcher W.* Crystal Movements and Earthquake-Related Deformation. *Rev. Geophys. Space Phys.*, **7**, 1403 – 1411, 1979.
49. *White D.E.* Hydrology, Activity and Heat Flow of the Steamboat Springs Thermal System, Washoe County, Nevada. U.S. Geological Survey, Professional Paper 458-C, 1968.
50. *Bau H.H.* Experimental and Theoretical Studies of Natural Convection in Laboratory-Scale Models of Geothermal Systems, Ph. D. Thesis. – Ithaca, New York: Cornell University.

Предметный указатель

- Абляции метеорита модель 285
Авлакоген 84
Адвекция тепла 284, 447
— — в пористой среде 659
Адиабата в мантии 310, 546
Адиабатическая сжимаемость 310, 312
Адиабатические условия 310, 313
Аккреционная призма 26
Аккреционный нагрев 98, 116
Активации объем 509
Апхотонный покров 592
Альbedo 114, 116
Амальтея 113
Амонта закон 580, 581, 592
Ангармоничность колебаний атомов 499
Андерсона теория разломообразования 583
Аномалии геоида 334, 336, 339, 359, 362
— гравитационные 321, 337, 343, 352 — 356
— магнитные 18, 54, 299
— плавления 79
— потенциала силы тяжести 336, 362
— силы тяжести см. Аномалии гравитационные
Аномальная масса 344
Антиклиналь 74, 205
Антиклинорий 74, 428
Аппалачский бассейн 76, 216, 590
Артезианский горизонт 394, 634
Архимеда закон 123
Астеносфера 13, 382, 546
Астеносферы возвратный поток 382, 388
Афтершоки 612
Базальт 22, 23, 235, 489
— лунный 98
Безразмерные переменные 213, 287, 393, 452, 472, 480, 528, 531
Бенъоффа зона 13
Бигармоническое уравнение 403
Био теория складчатости 432
Бринкмана число 531 — 535
Буге аномалия 352 — 354, 357 — 359
— формула 350, 352 — 355
Буссинеска приближение 454, 664, 670
— уравнение 643 — 651
Бюргерса вектор 517
— контур 517
Вакансии 505
Венера 96, 110
Вильсона цикл 68
Водонасыщенность 689
Водоносный горизонт 222, 381, 394, 634
Возраст Земли 258, 264, 278, 705
— Луны 99
— метеоритов 38
— океанического дна 58, 270, 297, 300, 368
— пород континентальной коры 15
— субдукции 300
Возраста определение 33 — 41
Время нарастания неустойчивости 426
Всестороннего сжатия модуль 184, 493
Вулканизм 28, 78, 381
— в зоне субдукции 28, 92, 308
— Венеры 113
— внутриллитовый 79 — 85
— горячих точек 82
— Ио 96, 114
— Луны 99
— Марса 103
— межлитовый 85
— океанических хребтов 78
— островных дуг 28, 308
Вулканов геометрическая форма 654
Вязкие напряжения 399, 424, 441

- Вязких напряжений связь с градиентом скорости 401
- Вязкое трение 391
- Вязкость 381, 516, 522, 546
- динамическая 384, 629
 - диффузионная 514
 - кинематическая 384
 - коры 555
 - магмы 682
 - мантии 17, 96, 412, 537, 545
 - эффективная 536, 620
- Вязкоупругость 491, 556
- Галилевы спутники Юпитера 96, 113
- Ганимед 96, 113
- Гейзеры 87, 381, 661, 886
- Геодезические измерения 159
- Геодиметр 163
- Геоид 333, 359
- Геоида аномалии см. Аномалии геоида
- Геотерма 235
- континентальная 237, 241
 - мантийная 272, 310, 313, 546
 - океаническая 271
- Геотермальный резервуар 381, 686
- Геохронология 34
- Гидравлическая проводимость 630
- Гидроразрыв 141, 445
- Гидростатический напор 386, 395, 629, 635
- Гидростатическое давление см. Давление гидростатическое
- напряжение 138
 - равновесие 16, 123, 126, 202
- Гидротермальная циркуляция 88, 269, 659
- Глинка трения 89, 580
- Глубина компенсации 295, 365
- Гондвана 16, 73
- Горячие источники 87, 381, 450, 659, 661
- точки 82, 85
- Грабен 68, 93
- Гравитационная потенциальная энергия 331
- эквипотенциальная поверхность 332
- Гравитационное поле Венеры 112, 113
- Земли 322
 - Луны 99, 343, 350
 - Марса 343
 - соскальзывание 21, 90, 130, 476, 588, 590
 - ускорение 323 - 329
- Гравитационный момент J_2 330, 333, 342
- потенциал 331, 355, 359
- Границы плит 11, 66
- деструктивные 11
 - конструктивные 11, 20, 84
- Грунтовые воды 381, 394, 647, 659, 669
- Грунтфеста число см. Бринкмана число
- Гука закон 174
- Давление 121, 138
- в астеносфере 389
 - мантии 21, 311
 - недрах планет 139
 - гидростатическое 21, 396
 - жидкости 385, 415
 - литостатическое 123, 126, 396
 - поровое 130, 581
- Дайка 23, 279
- Дарси закон 629 - 634, 670, 689
- скорость 629 - 633, 637, 640, 658, 674
- Движущие силы в тектонике плит 17, 25, 26
- дрейфа континентов 464
 - конвекции 382, 454
- Движущий механизм тектоники плит 17, 94, 474
- Дефекты кристаллической решетки 505
- Деформации главные оси 156
- накопление 165, 614
 - связь с землетрясениями 157, 601
 - скорость 95, 159, 164, 434, 503, 513, 516, 522, 556
- Деформация 95, 121, 144
- в жидкости 381
 - двумерная 145

- девиаторная 156
 - изотропная 156
 - нормальная 121, 144, 156
 - одноосная 176
 - пластическая 170, 488, 562
 - плоская 181
 - растяжения 174, 516, 576
 - сдвиговая 121, 148 — 156, 182
 - сжатия 173, 516, 556
 - тектоническая 175
 - температурная 281
 - трехмерная 147, 151
 - упругая 170, 488, 491
- Диапиризм** 417
- Диапировые поднятия** 382, 417
- Дилатация** 145, 148, 175
- Динамо** 49, 102
- Дислокации** 95, 516, 610
- Диссипация вязкая** 479, 618
- приливная 115
- Диффузии коэффициент** 506, 509 — 511, 514, 515
- уравнение 511, 643
- Диффузия атомов** 502, 507, 512
- — кислорода 541
 - вакансий 506, 512, 514
 - напряжения 615
 - при растворении под давлением 552
 - тепла 286, 511
- Длина волны возмущения** 460 — 463
- — складчатости 431 — 432, 436
- Дрейф континентов** 15, 18, 54, 464
- Дюлонга и Пти закон** 499
- Дюлюи приближение** 637
- Дюлюи — Фухгаймера формула расхода** 638, 640
- Европа** 113
- Жидкость неньютоновская** 95, 489, 522, 538
- ньютоновская 95, 381, 383, 428, 489, 524, 536, 555, 559
- Землетрясений интенсивность (балльность)** 595, 599, 602
- магнитуда 595
 - частота повторяемости 596
 - энергия 595
- Землетрясения** 574, 582, 594
- в зоне субдукции 28, 88, 92
 - внутриплитовые 13, 93
 - глубокофокусные 28, 315, 475, 625
 - сильные 28, 93, 597, 601
- Зеркало грунтовых вод** 636
- Изгиб вязкой пластины** 433 — 435
- двумерный 185
 - литосферы 19, 172, 201, 205, 210, 215, 356. *См. также Литосферы изгиб*
 - пластины 185, 191, 429, 433
 - пластический 432, 568
 - под тяжестью цепи островов 205
 - у океанического желоба 210, 569
 - упругий 568
 - цилиндрический 185
- Изгиба параметр** 206, 215
- Изгибающий момент** 187, 188, 190, 432 — 435, 567
- Изгибная жесткость** 190, 568
- Изостазия** 124, 295, 321, 353, 356, 359
- Изостатические модели** 362
- Изостатическая компенсация см. Изостазия**
- Изохрона** 36, 39
- Инверсии геомагнитного поля** 49
- Инкремент нарастания неустойчивости** 461
- Интегральная показательная функция** 265, 551, 621
- Интрузии** 279
- Ио** 96, 113
- Каллисто** 96, 113
- Кельвина тело** 557
- Клапейрона кривая** 318, 476, 682, 691
- Кoble ползучесть** 503, 516, 552
- Компетентные и некомпетентные породы** 429
- Конвективных ячеек относительное удлинение** 470, 472
- Конвекция в верхней мантии** 316, 545
- во всей мантии 315, 545
 - в мантии 17, 219, 228, 269, 315, 463, 470, 489, 544

- в пористой среде 663
- вторичная 31, 269, 273
- гидротермальная 224, 269, 667
- двухфазная 686
- твердотельная 116
- тепловая *см.* Тепловая конвекция
- Конкордия 38
- Континентальные щиты 42
- Координационное число решетки 492
- Кора континентальная 14, 15, 28, 33
 - океаническая 14, 21
- Косинусов теорема 63, 324
- Кристаллическая решетка 491 — 507, 517
- Критерии перехода к пластическому режиму 564
 - разрушения 587
- Ксенолиты 437, 444
- Кулона — Навье критерий *см.* Критерии разрушения
- Куэтта течение 386, 479, 525

- Павразия 16, 73
- Лакколит 198
- Ламе параметры 172
- Лапласа решение 286
 - уравнение 247
- Ликвидус 235
- Литосфера 11, 19, 408
 - как тепловой погранслои 94, 474, 544
 - континентальная 33, 271, 314
 - неупругая 19, 561, 670
 - океаническая 15, 23, 266, 269, 284, 313, 366, 560
 - погружающаяся 25, 413
 - упругая 19, 171, 217, 561
- Литосферы взаимодействие с астеносферой 615
 - жесткость 544
 - изгиб 19, 172
 - — — вблизи океанических желобов 172
 - — — островов 172
 - — — в области осадочных бассейнов 172
 - — — под периодической нагрузкой 201
- потеря устойчивости *см.* Прогиб литосферы
- Луна 97
- Луны возраст пород 98, 99
 - вулканизм 99
 - гравитационное поле 99, 350
 - кора 98
 - литосфера 96, 100
 - магнитное поле 99
 - момент инерции 340
 - морфология поверхности 97, 98
 - океан магмы 98
 - происхождение и эволюция 98, 100
 - температура 245
 - тепловой поток 99, 242, 245
 - ядро 99, 340
- Магма 22, 30
- Магматическая камера 20, 22, 279
- Магмы затвердевание 273, 279
 - миграция *см.* Магмы течения
 - скорость подъема 437, 443, 444, 681
 - течение 382, 396, 437, 444, 655, 680
- Магнитного полюса миграция 15, 51
- Магнитное поле Венеры 110
 - — Земли 42, 44 — 57
 - — Луны 99
 - — Марса 108
 - — Меркурия 102
- Магнитные аномалии *см.* Аномалии магнитные
- Маделунга постоянная 494
- Мак-Кулло формула 330
- Максвелла — Больцмана распределение 503
 - вязкоупругое тело 556, 558
- Мантийные струи 269
- Марс 103
- Марса вулканизм 96, 104
 - литосфера 104
 - магнитное поле 108
 - момент инерции 108, 340
 - спутники 109
 - ядро 108
- Масконы (лунные) 100, 350
- Материалы вязкоупругие 491
 - упругие 488

- Межатомные расстояния 491, 499 — 501
 — силы 491, 495, 496, 503
 Меркурий 96, 100
 Меркурия литосфера 96
 — магнитное поле 102
 — эволюция 102
 — ядро 102
 Метаморфизм 35, 290
 Мизеса критерий *см.* Критерии перехода к пластическому режиму
 Модули упругости 172, 173, 183, 184, 493
 Молекулярный теплоперенос *см.* Теплопроводность
 Момент инерции 328, 339
 Мохо 14
 — смещение 356
 Надвиги 73, 90, 129, 575, 585
 Напряжений оси 134, 576
 — релаксация 19, 491, 557
 — связь с деформациями 172
 Напряжения 121
 — в литосфере 90, 179
 — вязкие *см.* Вязкие напряжения
 — главные 134, 138, 143, 183
 — двумерные 131
 — девиаторные 127, 138, 143, 283, 578
 — изотропные 138, 184
 — касательные *см.* Напряжения сдвиговые
 — литостатические 123, 125, 138, 578
 — мембранные 91
 — на разломе 583
 — нормальные 121, 125, 129, 131, 138
 — при осадконакоплении 176, 293
 — эрозии 178, 294
 — растягивающие 90, 93, 127
 — сброшенные 594, 610
 — сдвиговые 121, 128, 129, 131, 138, 143, 183, 383, 389, 527, 579
 — сжимающие 90, 127
 — тектонические 129, 179
 — термические (температурные) 90, 280, 292
 — трехмерные 137
 — упругие 294
 Напряженное состояние одноосное 173
 — — плоское 179
 Нейтральная поверхность 187
 Неразрывности уравнение 398, 438
 — — в пористой среде 676
 Неустойчивость гравитационная 13, 17, 25, 104, 382, 419, 545
 — перегреваемая 535
 Нуссельта число 449, 469 — 470, 473
 Объемный расход жидкости 392, 395, 396, 404
 Океаническая кора 14, 21 — 25, 279
 — литосфера 15, 266
 Океанические желоба 13, 26 — 28, 69
 — хребты 16, 20, 21, 32, 68
 Окраинные бассейны 31
 Орогенез 73
 Осадочные бассейны 41, 74, 215, 302
 Островные дуги 14, 28, 308
 Офиолиты 22
 Охлаждение Земли 86, 94, 547
 — мгновенное границы 258
 — океанической литосферы 13, 226, 266
 — полупространства 258, 306
 Палеомагнетизм 18, 42
 Пангея 15, 73
 Пекле число 451
 Переменные подобия 259, 647, 649, 651, 653
 Периферийное поднятие 206, 210, 212
 Пиролит 24
 Плавление при декомпрессии 22, 680
 — частичное 22, 24, 81, 98, 236, 680
 Плавуности силы 13, 382, 423, 442, 463, 465, 475, 663
 Пластический шарнир 568
 Плит скорость движения 58 — 68, 79, 91, 92, 473, 598
 — тектоника 11, 17, 94, 474
 Плотности зависимость от давления 122
 — — — пористости 122
 — аномалии 359
 — компенсация 362

- Плотность 122
 — в мантии 311
 Погранслой 94, 262, 316, 544
 Погранслоя приближение 464, 470, 476
 — — для струй 670
 — структура (тепловой конвекции) 466, 471
 — теория 464, 670
 — толщина 262
 Подобия метод 259
 — переменная 259, 645
 Ползучести степенной закон 523
 Ползучесть асейсмичная 597
 — в нижней литосфере 491
 — дислокационная 516, 540, 542, 559
 — диффузионная 502, 511, 514, 541, 542
 — компрессионная при растворении 428, 491, 552
 — оливина 539
 — по разлому 593, 603, 618
 — твердотельная 11, 17, 19, 95, 489, 681
 Полюс вращения 59
 Пониженной вязкости слой 383
 Пониженных скоростей слой 382
 Пористая среда 628
 Пористость пород 146, 628
 Послеледниковое поднятие 17, 405, 536, 546
 Потеря устойчивости см. Прогиб
 Прандтля число 385
 Пратта компенсация см. Изостазии модели
 Прилипания условия 386, 439, 473
 Прогиб литосферы 171, 199, 205
 — пластины 195, 196, 435
 Проницаемость пород 628 — 631, 633, 667
 Пуазейля течение 391, 392

Равнораспределение энергии 498, 503
 Радиоактивного распада закон 229
 Радиоактивные изотопы 34
 Радиологическое датирование 34
 — — лунных пород 98
 Разгрузки керна метод 141

 Раздвигание океанического дна 11, 16, 389
 Разлом 68, 89, 488, 574
 — Сан-Андреас 89, 92, 158, 183, 598, 614
 — Северо-Анатолийский 601
 — со смещением по простиранию (сдвиг) 90, 159, 578, 598, 601, 604
 — трансформный 12, 32, 59
 Разлома зоны 32, 89, 619
 Разломов виды 90, 574, 575
 Рейнольдса число 393, 442
 Релаксации время 410, 557, 559
 Реологии влияние на конвекцию 544
 Реологические законы 381, 523, 525, 537, 538
 Реология вязкоупругая 491
 — зависящая от температуры и напряжения 523
 — земной коры 552
 — мантии 536
 — оливина 539
 — упругая — идеально пластическая 488, 562, 567
 Референц-эллипсоид 334
 Рифт Рио-Гранде 68, 93
 Рифтовая долина 68, 576
 Рифты Восточно-Африканские 68, 83
 Рэлея — Тэйлора неустойчивость 420, 426, 545
 Рэлея число 461 — 463, 470, 550, 665
 — числа критическое значение 461, 666

Сброс 68, 90, 576, 585
 Свободного проскальзывания условие 436
 Сдвиговое течение 523, 529, 620
 — — надкритическое 534
 — — подкритическое 534
 — — с вязкой диссипацией 530, 535
 — — — зависимостью от напряжения 523
 — — — — температуры 523, 529
 Сейсмичность 88, 91, 93. См. также Землетрясения
 Сжатие всестороннее 184, 493
 — геоида 333

- фигуры Земли 325, 333, 340, 342
- — Луны 340, 342
- — Марса 340, 343
- Сжимаемость 121, 184, 492
 - адиабатическая 310
 - изотермическая 290
- Сила архимедова см. Плавуности сила
 - втягивания в желоб 476
 - гравитационная 171, 414
 - дополнительная тянущая 319
 - перерезывающая 186, 213
 - подсасывающая 416
 - сталкивания с хребта 476
 - тяжести 122, 139, 321, 330, 399
 - — нормальная 337
 - тянущая погружающегося блока 26
- Силы вязкости 398, 400, 669
 - давления 398, 414, 477
 - массовые 122, 171, 399
 - объемные см. Силы массовые
 - поверхностные 122, 125, 128, 131
 - тяжести горизонтальные неоднородности 121
 - — потенциал 332
- Синклиналь 74, 205
- Синклинорий 74, 428
- Синусов теорема 47
- Складка срыва 593
- Складкообразование 74, 76, 382, 428
 - вязкое 433, 556
- Скольжение асейсмичное 92, 603
 - гравитационное см. Гравитационное соскальзывание
 - прерывистое см. Скольжение скачкообразное
 - скачкообразное 574, 579, 582, 593, 625
 - стационарное 579, 581, 593
- Скорость в модели возвратного потока 388
 - течения жидкости 386, 391
- Смещения 145
 - поверхности 594, 606, 607, 609
 - по разлому 89, 574, 593, 598, 604
 - при землетрясении 89, 157, 594, 604, 609
- Собственное значение 197
- Солидус 21, 22, 235, 546
- Соляные купола 322, 345, 382, 417, 427
- Сопротивления коэффициент 393, 442
- Сохранение жидкости в пористой среде 642, 647, 651, 658
 - импульса 381, 397
 - количества тепла 287
 - массы 381, 388, 658
 - энергии 381, 498, 659
- Спрединг см. Раздвигание океанического дна
 - тыловой 30
- Спрединга скорость 56
- Степень изостатической компенсации 202
- Стефана задача 274
- Стокса течение 437
 - формула 442
- Столкновение континентов 69, 73, 91, 93, 129, 590, 601
- Субдукция океанической литосферы 11, 25, 68, 94, 308
 - осадков 33
 - хребта 69
- Субдукции скорость 65, 69
 - угол 413
- Суперпозиции принцип 249
- Тектонический покров 75, 588
- Температура блокирующая 42, 55
 - в гидротермальной системе 660
 - — континентальной коре 21, 241, 251
 - — мантии 235, 491
 - — океанической литосфере 267
 - — осадочных бассейнах 304
 - — погранслое 465
 - — подошве литосферы 19
 - — горячего источника 452
 - ликвидуса 235
 - литосферы, погружающейся при субдукции 317
 - на разломах 265
 - плавления 17, 682

- приведенная 510
- солидуса 21, 22, 235, 546
- точки Кюри см. Температура блокирующая
- Температуропроводности длина 259
- коэффициент 252
- Температуры градиент 220, 222, 310, 313, 667
- горизонтальные неоднородности 317
- зависимость от глубины 219
- — — осадконакопления 283
- — — эрозии 264, 283
- периодические возмущения 253
- связь с оледенением 253, 256, 264
- Тепла выделение 227 — 233, 237, 548
- — в зависимости от глубины 238
- — — континентальной коре 238
- — — мантии 227, 229, 550
- — — сферической оболочке 243
- источники 226 — 230, 236, 237
- Тепловая конвекция 17, 94, 382, 453
- — в пористой среде 663
- — конечной амплитуды 464
- струя 464, 466
- — в пористой среде 662, 669
- Теплового потока связь с возвратом пород 226, 272
- — уравнение 306
- Тепловое расширение 290 — 292, 499 — 502
- Тепловой конвекции линейный анализ 457, 459, 664
- погранслою см. Погранслою
- поток 86, 222
- — безразмерный 689
- — в океанах 224 — 226, 269, 300
- — осадочных бассейнах 303
- — — сферической оболочке 242
- — — трубе 448
- — конвективный 547, 688
- — на континентах 222, 225, 237, 271
- — поверхностный 225, 239, 263, 270, 550
- — — полный из недр Земли 226
- — — приведенный 239, 271
- Теплопередачи коэффициент 449
- Теплоперенос 219. См. также Конвекция, Теплопроводность
- Теплопровод 687, 688
- Теплопроводности задача 242, 251, 273, 280, 286
- коэффициент 220, 222— 224, 264
- уравнение 231, 242, 251, 280, 283, 664
- Теплопроводность 219, 235
- анизотропная 234, 248
- в пористой среде 659
- Термоупругость 292
- Тетис океан 16, 73
- Течение в водоносных пластах 394, 450, 633, 636, 656
- в канале 383, 529
- — пористой среде 628, 680
- — трубе 391, 446
- жидкости под пластиной 430
- ламинарное 393, 628, 632
- магмы см. Магмы течение
- нестационарное 393, 443
- одномерное 383
- сдвиговое 383
- турбулентное 393
- Трение и тектоническое напряжение 592
- на разломах 579, 583
- Трения коэффициент 130, 579, 580, 583, 592
- Треска критерий см. Критерии перехода к пластическому режиму
- Трехлучевая структура 84
- Трещины образование 604
- Триангуляция 160, 614
- Тройное сочленение 33, 62, 84
- Удельная теплоемкость твердого тела 251, 312, 498
- Универсальный профиль изгиба 213, 215
- Уплотнение осадков 552
- Упругая отдача 594
- Упругости предел 562
- теория 172, 491, 502, 604

- Уравнение движения 385, 438, 454
— — двумерное 398
- Ускорение силы тяжести 21, 139,
321, 325, 330, 336. *См. также*
Сила тяжести
— центробежное 330
- Фазовый переход 319
— — в мантии 312
— — оливин — шпинель 312, 314,
318
- Фика закон диффузии 506
- Флюидов миграция 628
- Фракционирование 24
- Фрикционный нагрев 30, 308, 318,
447, 457, 479, 529, 618
- Функция вращения 149, 151, 155
— ошибок 261, 281
— тока 402, 406, 415, 420, 672
- Фурье закон 220, 243, 275, 447
- Херринга — Наббаро ползучесть 514
- Хрупкое и пластическое поведение
73, 170, 488, 562, 574
- Щероховатость 581
- Эйпера теорема 58
- Эйнштейновские периоды частота
497, 503
- Эквипотенциальные поверхности 332
- Эккерта число 481
- Эллиптичность геоида *см.* Сжатие
геоида
- Энергии уравнение 456, 458, 659,
664, 671
- Энергия активации 509, 510, 543
— атома 496, 499, 503
— внутренняя 496, 498
— кулоновская 494
— связи 492, 495
- Эрозия 34, 41, 74, 176, 264, 283, 293,
428
- Ядро Земли 44, 49, 316

Оглавление
Часть 2

Глава 6. Механика жидкости	381
6.1. Введение	381
6.2. Одномерные течения в канале	382
6.3. Возвратный поток в астеносфере	388
6.4. Течение в трубе	391
6.5. Течения в артезианских горизонтах	394
6.6. Течение через вулканические каналы	396
6.7. Двумерное уравнение неразрывности	396
6.8. Двумерное уравнение движения	398
6.9. Функция тока	402
6.10. Последледниковое поднятие	405
6.11. Угол субдукции	413
6.12. Диализм	417
6.13. Складкообразование	428
6.14. Формула Стокса	437
6.15. Течение в трубе с подводом тепла	446
6.16. Модель подводящего канала (водовода) для горячих источников	450
6.17. Тепловая конвекция	453
6.18. Линейный анализ начальной стадии тепловой конвекции в слое жидкости, нагреваемом снизу	457
6.19. Развита тепловая конвекция (конечной амплитуды) в приближении погранслоя	464
6.20. Движущий механизм тектоники плит	474
6.21. Диссипативный нагрев	479
Дополнительная литература	483
Глава 7. Реология горных пород	488
7.1. Введение	488
7.2. Упругость	491
7.3. Диффузионная ползучесть	502
7.4. Дислокационная ползучесть	516
7.5. Сдвиговые течения жидкостей, реологические свойства которых зависят от температуры и напряжения	523
7.6. Реология мантии	536
7.7. Влияние реологии на конвекцию в мантии	544
7.8. Конвекция в мантии и остывание Земли	547

7.9. Реология пород земной коры	552
7.10. Вязкоупругость	556
7.11. Упругая – идеально пластическая реология	562
Дополнительная литература	570
Глава 8. Образование разломов	574
8.1. Введение	574
8.2. Классификация разломов	575
8.3. Трение на разломах	579
8.4. Теория разломообразования Андерсона	583
8.5. Тектонические покровы и гравитационное соскальзыва- ние	588
8.6. Скачкообразное скольжение и упругая отдача	593
8.7. Разлом Сан-Андреас	597
8.8. Северо-Анатолийский разлом	601
8.9. Решения уравнений теории упругости для образования разломов со смещением по простиранию	604
8.10. Диффузия напряжения	615
8.11. Термически активируемая ползучесть по разломам	618
Дополнительная литература	625
Глава 9. Течения в пористых средах	628
9.1. Введение	628
9.2. Закон Дарси	629
9.3. Модели проницаемости	631
9.4. Течение в замкнутых водоносных пластах	633
9.5. Течение в незамкнутых водоносных пластах	636
9.6. Геометрическая форма вулканов	654
9.7. Уравнения сохранения массы, количества движения и энергии для течений в пористых средах	658
9.8. Одномерная адвекция тепла в пористой среде	659
9.9. Тепловая конвекция в пористом слое	663
9.10. Тепловые струи в пористых средах, насыщенных жидко- стью	669
9.11. Миграция магмы как течение в пористой среде	680
9.12. Двухфазная конвекция	686
Дополнительная литература	691
Приложение 1. Обозначения и единицы	696
А. Единицы системы СИ	696
Б. Переводные множители	696
В. Список обозначений	699
Приложение 2. Физические постоянные и характеристики	704
А. Физические постоянные	704
Б. Характеристики Земли	704

В. Характеристики планет	706
Г. Характеристики спутников планет	706
Д. Характеристики пород	708
Е. Характеристики мантии	709
Ответы к избранным задачам	710
Литература	716
Предметный указатель	719

Дональд Л. Тёркот, Джеральд Шуберт

ГЕОДИНАМИКА
ГЕОЛОГИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ ФИЗИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Часть 2

Научный редактор *В. А. Пангаева*

Мл. науч. редакторы: *В. Н. Соколова, Н. В. Корниенко*

Художник *А. Н. Савельев*

Художественный редактор *М. Н. Кузьмина*

Технический редактор *Т. А. Алюлина, В. Н. Ефросимова*

Корректор *Т. Е. Луганова*

ИБ № 3779

Подписано к печати 5.05.85

Формат 60х90/16 Бумага офсетная № 2

Печать офсетная.

Объем 11,25 бум. л. Ус. печ. л. 22,50

Усл. кр.-отт. 22,50 Уч. —изд. л. 21,47

Изд. № 27/3645 Тираж 2150 экз. Зак. 413.

Цена 3 р. 50 к.

Тульская типография Союзполиграфпрома при
Государственном комитете СССР по делам
издательств полиграфии и книжной торговли.
300600, Тула, проспект им. В. И. Ленина, 109.

Уважаемый читатель

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, изд-во "Мир".

Издательство "Мир"
в 1986 г.
выпускает книгу

Спутники Юпитера: в 3-х частях. /Под ред. Д. Моррисона. Пер. с англ. 71 л., ил. — М.: Мир, 1985 г. (ч. 1) и 1986 г. (ч. 2 и 3).

Коллективная монография ученых США, посвященная результатам научных исследований спутников Юпитера с помощью американских космических аппаратов "Вояджер". В ч. 1 рассмотрены общие проблемы физики внешних и внутренних спутников и колец Юпитера, а также особенности их поверхностей; в ч. 2 — проблемы кратерообразования и геология галилеевых спутников; в ч. 3 — особенности вулканической деятельности и атмосферы Ио, а также магнитосферы Юпитера. Приведены цветные фотографии и карты.

Для астрономов, геологов, планетологов — специалистов и студентов старших курсов. Будет полезна всем интересующимся новыми данными о Солнечной системе.

Заказы на книгу принимают все магазины, торгующие научно-технической литературой.

Издательство "Мир"
в 1986 г.
выпускает книгу

Анализ и выделение сейсмических сигналов: Пер. с англ. / Под ред. Ч. Чжания. 12 л., ил. Цена 2 р. 20 к.

Небольшая по объему коллективная монография, посвященная наиболее актуальным вопросам теории обработки сейсмических сигналов на ЭВМ. В числе авторов — видные американские и западноевропейские специалисты — Е. Робинсон, А. Виглейн, Д. Хаген и др. Описаны широко применяемые на практике методы деконволюции и миграции, многовариантный статистический анализ сейсмических данных, применение методов распознавания образов и других классификационных процедур для расшифровки сейсмических сигналов.

Для специалистов — геофизиков, геологов, математиков-прикладников, разработчиков геофизической аппаратуры, преподавателей вузов и работников центров по обработке геофизических данных.

Заказы на книгу принимают все магазины, торгующие научно-технической литературой.

Издательство "Мир"
в 1986 г.
выпускает книгу

Шерифф Р., Гелдарт Л. Сейсморазведка : В 2-х томах. Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 33 л. (т.1) и 26 л. (т. 2), ил. — Цена 5 р. 30 к. и 4 р. 20 к.

В первом томе рассмотрены основы сейсмического метода исследований земных недр и поисков полезных ископаемых: исторические сведения, теория сейсмических волн, геометрия сейсмических лучей, полевые методы отраженных волн и соответствующая аппаратура, методы преломленных волн. К каждой главе даны задачи для самостоятельного решения. Книгу отличает четкость изложения, умелое использование практического материала. Красной нитью через всю книгу авторы проводят мысль о практическом использовании разведочной сейсмоки.

Во втором томе изложены обработка сейсмических данных и их интерпретация: скорости сейсмических волн, обработка результатов измерений, геологическая интерпретация данных по отраженным волнам, вопросы прикладной математики. В каждой главе даны задачи для самостоятельного решения.

Для студентов, преподавателей и специалистов по разведочной геофизике. Может служить учебным пособием.

Заказы на книгу принимают все магазины, торгующие научно-технической литературой.

Издательство "Мир"

в 1986 г.

выпускает книгу

Паркинсон У. Д. Введение в геомагнетизм: Пер. с англ. 29 л., ил.
Цена 4 р. 60 к.

Книга видного австралийского ученого, профессора Тасманийского университета, задумана как современное руководство по геомагнетизму с детальным рассмотрением четырех основных составляющих магнитного поля Земли; главного, локального внешнего и индуцированного. Большое внимание уделено измерениям составляющих поля, интерпретации его наблюдаемых вариаций, происхождению отдельных составляющих поля. В заключительной главе изложена история развития геомагнетизма и биологические эффекты геомагнитного поля.

Для геофизиков, магнитологов, астрофизиков, а также биологов — научных работников, преподавателей и студентов. Может служить учебным пособием.

Заказы на книгу принимают все магазины, торгующие научно-технической литературой.

4477