

К. Аки

П. Ричардс

# 1 КОЛИЧЕСТВЕННАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ



QUANTITATIVE SERPICOLOGY

Theory and Methods

MATHEMATICAL STATISTICS

VOLUME I

Translated from the Russian



1968

Published by the USSR Academy of Sciences

Paul G. Hirsch

Editor

1968

W. H. Freeman and Co.

San Francisco

# **QUANTITATIVE SEISMOLOGY**

## **Theory and Methods**

Volume I

**Keiiti Aki**

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

**Paul G. Richards**

COLUMBIA UNIVERSITY

**W. H. FREEMAN AND COMPANY**

SAN FRANCISCO

К. Аки, П. Ричардс

# КОЛИЧЕСТВЕННАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

Теория и методы

550.34.

В ДВУХ ТОМАХ

1

Перевод с английского

д-ра физ.-мат. наук А. Л. Левшина

МОСКВА «МИР» 1983



4151

ББК 26.21  
А39  
УДК 53+55

Аки К., Ричардс П.

А39 Количественная сейсмология: Теория и методы. Т. 1. Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. — 520 с., ил.

Монография двух видных американских сейсмологов, посвященная современной теории распространения возбуждаемых землетрясениями сейсмических волн и новейшим методам интерпретации и обработки данных наблюдений. На достаточно строгом математическом уровне и с постоянным вниманием к физической сущности рассматриваются прямые и обратные задачи в геофизике.

В 1-ом томе излагается фундаментальный материал по теории возбуждения и распространения упругих колебаний, принципы сейсмометрии.

Для специалистов в области теоретической и экспериментальной сейсмологии, сейсморазведки и инженерной сейсмологии. Может служить учебным пособием для аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

1903020000 — 230  
А ————— 78 — 83, ч.1  
041 (01) — 83

ББК 26.21  
551.42

*Редакция литературы по космическим исследованиям,  
астрономии и геофизике*

## От переводчиков

Современная сейсмология является важной составной частью наук о Земле. Она решает две основные задачи. С одной стороны, это наука о землетрясениях — грозных стихийных явлениях, приносящих человечеству огромные потери и бедствия. Усилия сейсмологов направлены на количественное описание, классификацию и в конечном счете на предсказание землетрясений и приносимого ими ущерба. Эти усилия могут стать по-настоящему плодотворными только тогда, когда удастся глубоко понять сложные физико-механические процессы, приводящие к землетрясениям.

С другой стороны, сейсмические волны, возбуждаемые естественным или искусственным путем, по сей день являются для нас главным источником информации о глубинном строении земных недр, недоступных для прямого изучения, — от нижних этажей осадочного покрова Земли до ее внутреннего ядра. При помощи сейсмических измерений с большой точностью установлены распределения упругих модулей, плотности, диссипативных параметров вещества Земли в радиальном направлении, выявлены и изучены региональные различия коры и верхней мантии Земли в районах различного тектонического строения. Сейсмические наблюдения приоткрыли тайну внутреннего строения Луны и Марса. Сейсмическая разведка является главным методом изучения осадочных толщ, благоприятных для образования скоплений нефти и газа, она с успехом применяется при поисках и детальном исследовании угольных и рудных месторождений, в инженерно-геологических и гидрогеологических изысканиях.

Развитие сейсмологии из практически описательной дисциплины в сложный комплекс современных методов обнаружения, регистрации, анализа и интерпретации сейсмических сигналов произошло не более чем за сто лет, причем последние десять — пятнадцать лет ознаменовались качественным скачком практически во всех разделах сейсмологии и сейсморазведки. Этот скачок связан с переходом от традиционной ручной обработки визуальных данных — сейсмограмм — к анализу цифровой информации на электронных вычислительных машинах. Ему способствовали появление средств преобразования аналоговой информации в цифровую, широкое распространение цифровых систем регистрации, расширение на несколько порядков динамического и частотного диапазонов регистрируемых сейсмических сигналов на базе достижений современной электронно-измерительной техники, измерения качественно новых характеристик сейсмических волновых полей (ускорений, напряжений, деформаций, наклонов), использование групп сейсмических приборов, распределенных по площади, скважинных наблюдений, контролируемых сейсмических источников (вибраторов, пневмопушек, механических и электромеханических ударных устройств) и т. п.

Одновременно в корне изменились методы обработки информации. Цифровая фильтрация, многократное накопление сигналов с автоматизированным внесением поправок, учитывающих различия путей распространения волн от источников к приемникам, спектральный, спектрально-временной, поляризационный,

энергетический анализ, автоматическое выделение и прослеживание сигналов стали стандартными операциями не только в достаточно хорошо оснащенной современной техникой сейсморазведке на нефть и газ, но в значительной степени и в чистой сейсмологии. Практически полностью поручена ЭВМ подготовка сейсмологических бюллетеней, содержащих подробную информацию о тысячах землетрясений в год. Определения механизма очага землетрясений и сейсмического момента на ЭВМ выполняются для сотен землетрясений в год. Создаются и становятся важным средством для обмена данными банки сейсмологической информации. Все в большей степени формализуются и автоматизируются такие традиционно «ручные» элементы геофизической интерпретации, как подбор моделей среды или источника, наиболее полно удовлетворяющих имеющимся сейсмическим результатам, оценка разрешающей способности разных выборов данных и доверительных уровней получаемых по ним решений. Большой размах получило численное моделирование волновых процессов в реальных средах, позволяющее выявлять физические эффекты, связанные с тонкими особенностями строения среды или спецификой источников.

Для столь широкого внедрения в сейсмологию количественных подходов потребовалось существенно развить ее теоретическую базу, и прежде всего теорию распространения сейсмических волн. Этой цели послужили многочисленные исследования сейсмологов-теоретиков по решению так называемых прямых задач сейсмологии — расчету волновых полей в заданной модели среды при заданном способе возбуждения колебаний. Фундаментальные результаты получены и в решении обратных задач сейсмологии: отыскании характеристик среды и источника по сейсмическим наблюдениям. Теоретические методы сейсмологии обогатились за счет широкого использования современной математики (функционального анализа, спектральной теории дифференциальных операторов, математической статистики, методов регуляризации, численных методов линейной алгебры и математической физики и др.). На основе представлений современной механики существенно продвинулась вперед теория очага землетрясения.

Достижения теоретической и вычислительной сейсмологии нашли свое отражение в многочисленных статьях, опубликованных в разнообразных геофизических журналах, и ряде монографий. Однако до недавнего времени отсутствовали книги, достаточно полно и систематично излагающие теоретические основы современной сейсмологии, что затрудняло подготовку новых специалистов. Отсутствовали также учебники и руководства, в которых теория сейсмических волн и интерпретации наблюдений излагались бы достаточно строго и последовательно и в то же время оставалась доступной не только математикам, но и физикам и геофизикам.

Этим требованиям удовлетворяет предлагаемая читателю книга, написанная двумя крупными сейсмологами, работающими сейчас в США, — профессором факультета наук о Земле Массачусетского технологического института Кэйити Аки и профессором Геологической обсерватории Ламонт-Догерти Колумбийского университета Полом Ричардсом. В ней последовательно, на достаточном уровне математической строгости и с постоянным вниманием к физической сущности решаемых задач излагаются теоретические основы современной сейсмологии и сейсмометрии. Книга состоит из двух томов, первый из которых (гл. 1 — 10) содержит фундаментальный материал по теории возбуждения и распространения упругих колебаний, а второй (гл. 11 — 15) посвящен используемым в настоящее время методам интерпретации сейсмологических наблюдений.

Теоретический материал, содержащийся в гл. 2 — 4, существенно более фундаментален, чем сведения по теории возбуждения и распространения волн, приводимые в большинстве руководств по сейсмологии и сейсморазведке. Важную

роль играют приводимые здесь (с полным выводом) теоремы взаимности и представления, а также формулы, описывающие излучение сейсмических колебаний точечными источниками, которые моделируют различные возбуждающие силы, включая разрыв сплошности среды при землетрясении. Для освоения этого материала читателю потребуется определенная подготовка в области тензорного анализа. В последующих главах (гл. 5 — 9) рассмотрены вопросы распространения волн в средах с различной степенью неоднородности при наличии поглощения и анизотропии; большое внимание уделено количественным методам получения теоретических сейсмограмм объемных волн, включая такие методы, как метод Каньяра — де Хоопа и его модификации, мало знакомые советским сейсмологам. Здесь широко используются операционное исчисление, методы линейной алгебры и уравнения математической физики, теория дифференциальных уравнений.

Последняя глава 1-го тома (гл. 10) посвящена современной теории и практике сейсмометрии; большое внимание уделено здесь оценкам динамического и частотного диапазонов сейсмических сигналов и микросейсмических помех.

Второй том можно условно разделить на две части. Одна часть (гл. 11 — 13) посвящена современным подходам к обработке сейсмологической информации, методам решения обратных задач и представляет интерес как для сейсмологов, так и для сейсморазведчиков. В другой подробно рассматриваются кинематические и динамические проблемы очагов землетрясений. В узком смысле эта часть является чисто сейсмологической. Однако методы изучения механизма очага по сейсмологическим данным представляют непосредственный интерес не только для специалистов в области сейсмологии, но и для широкого круга геофизиков и геологов, занимающихся тектоникой и сейсмическим районированием.

Важной особенностью книги является наличие в тексте дополнений, содержащих детали тех или иных выводов или суммирующих необходимые читателю сведения из соответствующих разделов математической теории упругости, теории функций комплексного переменного и др. Это позволяет читать книгу, почти не обращаясь к другим источникам. Закреплению материала будет способствовать решение приводимых в конце каждой главы задач. Книга снабжена обширной библиографией. С любезного согласия авторов мы добавили в конце глав ряд важных работ в библиографические списки рекомендуемой для дальнейшего чтения литературы (дополнительные ссылки снабжены звездочками). Более подробно ознакомиться с работами советских ученых по теоретической и вычислительной сейсмологии можно по соответствующим публикациям в Докладах АН СССР, журнале «Известия АН СССР, сер. Физика Земли», а также в регулярно выходящих тематических сборниках.

Книгу Аки и Ричардса найдут интересной и полезной все исследователи, работающие в теоретической и экспериментальной сейсмологии, а также специалисты в области разведочной сейсмики. Книгу можно рекомендовать также как учебное пособие для аспирантов и студентов-старшекурсников, специализирующихся в области общей и прикладной геофизики.

*А. Л. Левшин  
А. В. Калинин*

## *Предисловие к русскому изданию*

В развитии наук о Земле вообще и сейсмологии в частности весьма значительную роль сыграло международное сотрудничество. Многие важные результаты в теоретической сейсмологии, в сейсмометрии, сборе сейсмологических данных и их интерпретации (теории обратных задач) были впервые получены нашими советскими коллегами.

Поскольку при написании книги мы не рассчитывали на читателей, владеющих русским языком, в ней недостает ссылок на литературу, написанную по-русски. Мы глубоко признательны за работу по переводу этой книги, а также за дополнительные ссылки на советскую литературу (в конце глав) д-ру А. Левшину (т. 1) и проф. А. Калинин (т. 2).

июль 1982 г.

*Кэйити Аки  
Пол Ричардс*

# Предисловие

В последнее десятилетие благодаря совместным усилиям теоретиков и экспериментаторов сейсмология сложилась как количественная наука. Достигнутые результаты зафиксированы на тысячах страниц научно-исследовательских статей, опубликованных в ряде специальных журналов. Однако эти публикации не дают систематического изложения ключевых концепций. Многие студенты старших курсов вузов давно нуждаются в учебнике по данному предмету. Кроме того, различные методы анализа сейсмограмм, применяемые в настоящее время в повседневной практике небольшими группами сейсмологов, никогда не были надлежащим образом объяснены более широкой аудитории ученых и инженеров, работающих в областях, в той или иной степени связанных с сейсмологией. В этой книге мы попытались дать единое теоретическое рассмотрение тех методов сейсмологии, которые наиболее широко применяются при интерпретации поступающих в настоящее время данных.

Здесь изложена теория распространения сейсмических волн в реалистичных моделях Земли, рассмотрены теории распространения трещин и разрывов как моделей землетрясения; эти теоретические задачи дополнены описаниями основ сейсмометрии, анализа и интерпретации наблюдений.

Текст разделен на два тома. В 1-м томе дается систематическое развитие теории распространения сейсмических волн в рамках классических моделей Земли, в которых свойства среды меняются только с глубиной. Завершается он изложением теории сейсмометрии. Предполагается, что этот том будет использоваться в качестве учебного пособия в основных курсах для наиболее подготовленных студентов-сейсмологов. Во 2-м томе суммируются успехи, сделанные на передних рубежах сейсмологии за прошедшее десятилетие. Он охватывает ряд специальных вопросов, включая главы по анализу данных и обратным задачам, по эффективным методам количественного описания распространения волн в средах со свойствами, меняющимися по горизонтали (как и с глубиной), и по кинематическим и динамическим задачам, касающимся движений вблизи плоскости разрыва. Второй том может быть использован в качестве учебника для аспирантов в курсах по тектонофизике, механике землетрясений, обратным задачам геофизики и цифровой обработке геофизических данных.

В работе над книгой нам помогли многие коллеги. А. Цистернас, работая над первоначальным планом текста, предложил ряд тем из того перечня, на котором мы в конце концов остановились. Работа над книгой была начата благодаря поддержке и одобрению Ф. Пресса. Гл. 12, посвященная обратным задачам, возникла из курса лекций, читаемых в Массачусетском технологическом институте одним из авторов совместно с Т. Р. Мэдденом, которому мы благодарны за многочисленные и полезные для нас обсуждения. Многому из того, что мы теперь знаем, научили нас исследования по темам работ наших аспирантов, и мы свободно распорядились этим материалом. Мы использовали доведенные до конца идеи и результаты сотен исследователей, многие из которых — наши

коллеги, и мы надеемся, что их вклад точно отражен в тексте. А здесь мы выражаем им нашу искреннюю признательность.

В критическом прочтении всей рукописи или отдельных ее частей приняли участие Р. Биллэм, Дж. Боатрайт, Д. Бур, Р. Бочерд, М. Бушон, А. Ченг, Т. Чен, Ванг-Пинг Чен, Б. Шу, Дж. Чой, В. Кормье, А. Кокс, Ш. Дас, Дж. Дьюн, Б. Элсворт, М. Фелер, Н. Фрейзер, Ф. Гилберт, Н. Гойнс, Э. Хэйлс, Д. Харкрайдер, Л. Джонсон, Б. Джулиан, Дж. Ла Торрака, В. Ли, К. Кейт, Д. Морган, Б. Менке, Г. Мюллер, А. Недж, Г. Паттон, С. Рекер, Т. Шейкал, Э. Смит, Тенг-Фонг Вонг, Мей Йанг, Дж. Занд. Мы глубоко ценим их внимание, советы и поддержку.

Более четырех лет, в течение которых мы писали эту книгу, пятнадцать машинисток печатали для нас текст. Основную нагрузку вынесла Линда Мэрфи из обсерватории Ламонт-Догерти, помогавшая нам сохранять самообладание в те моменты, когда наступали сроки сдачи рукописи.

Мы также благодарим редактора нашей рукописи Д. Джонсона за его длительный труд и искусство делать понятным первоначальный текст.

Мы признательны за поддержку руководством фонда Альфреда П. Слоана и мемориального фонда Джона Саймона Гугенхейма. Эта книга не могла бы быть написана без помощи, оказываемой нашим исследовательским работам в течение ряда лет государственными учреждениями: Геологической службой и Министерством энергетики США, Агентством перспективных исследовательских проектов, управляемым Службой научных исследований Военно-воздушных сил и Национальным научным фондом.

*Кэйити Аки  
Пол Дж. Ричардс*

# Введение

Сейсмология — это наука, в которой фактические данные представляют собой записи механических колебаний Земли, называемые сейсмограммами. Колебания могут быть вызваны искусственными взрывами или естественными причинами — землетрясениями и извержениями вулканов. Оба этих природных явления привлекали внимание человечества в течение многих веков, и даже сегодня они вызывают наравне с научным интересом чувство мистического страха.

Огромный прогресс, достигнутый сейсмологией за последние сто лет, был стимулирован главным образом получением постоянно улучшающихся данных. Наиболее важные шаги в этом направлении были сделаны учеными, хорошо владеющими методами математической физики. Каждое поколение сейсмологов продвигалось к получению количественных данных, преодолевая барьеры на пути расчетов сначала с помощью механических калькуляторов, а в последнее время благодаря достижениям в области цифровых микропроцессоров. В течение прошедших двух десятилетий электронно-вычислительные машины стали достаточно эффективны, чтобы с их помощью извлекать большую долю информации, содержащейся в сейсмограммах. Таким образом, количественная картина современной сейсмологии складывается из тесного взаимодействия высококачественного исходного материала, детальных моделей механизма источников сейсмических волн и моделей внутреннего строения Земли.

Результаты современной сейсмологии используются в инженерном деле для проектирования сейсмостойких сооружений, в разведке полезных ископаемых и при поиске месторождений нефти и природного газа. Другая область использования сейсмологических данных связана с важными политическими, экономическими и социальными проблемами, касающимися обнаружения ядерных взрывов (и распознавания их среди естественных землетрясений), и с сокращением возможного сейсмического риска путем выявления сейсмически опасных участков при строительстве крупных промышленных сооружений и плотин. В самое последнее время сейсмология достигла такого уровня развития, что надежный прогноз землетрясений становится доступной целью обозримого будущего. Острая необходимость развивать этот последний аспект исследований ясна уже из упоминания некоторых фактов: более 240 тысяч человек погибло при землетрясении 28 июля 1976 г. в Китайской Народной Республике; стоимость ущерба, нанесенного землетрясением 4 февраля 1976 г. в Гватемале, сравнима с годовым валовым национальным продуктом этой страны; даже сравнительно слабое землетрясение 9 февраля 1971 г. в Сан-Фернандо, Калифорния, вызвало убытки на сумму более 550 миллионов долларов. Подобные цифры делают надежное прогнозирование землетрясений столь важным, что в ближайшее десятилетие

сам предмет сейсмологии, вероятно, претерпит значительные изменения и значимость его возрастет, подобно тому как она возросла в 60-е годы в ответ на необходимость контролировать любое соглашение о запрещении испытаний ядерного оружия, которое могло бы быть заключено между США и СССР. (Первая глобальная сеть калиброванных сейсмографов, а также несколько групп станций с большой апертурой были созданы первоначально для того, чтобы улучшить возможности обнаружения и распознавания подземных ядерных взрывов по данным сейсмологии.) Список литературы, помещенный в конце данной главы, включает книги и статьи, которые охватывают этот широкий диапазон применения современных сейсмологических методов.

Сейсмология занимает особое место во всем спектре наук о Земле. Прежде всего, она имеет дело только с механическими свойствами и динамикой процессов в Земле. Во-вторых, она предлагает инструмент, с помощью которого можно изучать внутреннее строение Земли до самых больших глубин и с большей разрешающей способностью и надежностью, чем можно достичь в любой другой области геофизики. Высокая разрешающая способность и надежность достижимы по той причине, что из всех типов волн, которые могут наблюдаться после ослабления при прохождении через различные структуры внутри Земли, сейсмические волны являются наиболее короткими. Они подвержены наименьшим искажениям формы и наименьшему затуханию амплитуд по сравнению с другими объектами геофизических наблюдений, как, например, тепловой поток, статическое смещение, деформация, сила тяжести или электромагнитные поля.

Третьей отличительной особенностью сейсмологии является то, что она позволяет нам узнать *современное* состояние недр Земли. Сейсмология привлекает непосредственный интерес общества благодаря тому, что она нацелена на изучение тектонической активности, протекающей в *настоящее* время.

Методы сейсмологии, подобно другим геофизическим методам, применимы в громадном диапазоне масштабов. Эти масштабы можно классифицировать по размерам сейсмических источников (как искусственных, так и естественных) и по размерам сейсмологической сети наблюдений. Взрывные заряды, применяемые при сейсмологических наблюдениях, варьируют по величине от менее одного грамма до более одной мегатонны (диапазон  $10^{12}$ ). Диапазон естественных землетрясений еще больше — от самых слабых из регистрируемых микроземлетрясений до таких грандиозных событий, как Чилийское землетрясение 22 мая 1960 г., — и достигает множителя примерно  $10^{18}$  по силе эквивалентного точечного источника (сейсмическому моменту). Линейные размеры сети сейсмографов меняются от десятков метров при исследовании оснований промышленных сооружений до 10 000 км у глобальной сети сейсмических станций, т.е. в  $10^6$  раз.

Интерпретация сейсмограмм развивалась обычным в науке путем, начиная с исходных догадок, которые позднее подтверждались или корректировались проверкой их соответствия новым данным. Мы упростим задачу интерпретации сейсмограмм, искусственно отделяя влияние источника от влияния среды. Исторически наши знания об источниках сейсмических волн и о строении Земли как среды, в которой эти волны распространяются, развивались способом «качелей». Например, на некоторой стадии источник может быть лучше изучен, чем среда, — в этом случае новые данные используются для уточнения знаний о среде в предположении, что источник известен. На следующей стадии новые дан-

ные объединяют с уточненными знаниями о среде, чтобы пересмотреть первоначальные знания об источнике.

В сейсмологии, как и во всех остальных областях геофизики, влияние источника и влияние среды тесно связаны между собой. Двойная ошибка — одна в отношении источника и другая в отношении среды — может привести к результату, согласующемуся с наблюдениями. Требуется глубоко понимать физические принципы, чтобы не соблазниться видимым соответствием. Поучительным примером такой двойной ошибки служит история идентификации *P*- и *S*-волн. На заре сейсмологии велись споры о том, которые из волн — сжатия или сдвига — вызывают основное смещение в случае локального землетрясения. Основное смещение было вызвано *S*-фазой, потому что оно наблюдалось вторым (*second*) и следовало за более слабой *P*-фазой, названной так потому, что она вступала первой (*prime*). В 1906 г. Ф. Омори, основоположник сейсмологии в Японии, исследовал эту проблему, используя сейсмограммы одного землетрясения, записанные с помощью лучшей в то время местной сети станций. Пользуясь своими формулами, связывающими время между вступлениями *S*- и *P*-волн с расстоянием между сейсмографом и эпицентром землетрясения, а также зная относительные времена вступления волн по данным нескольких станций, он определил, что эпицентр расположен примерно в 500 км южнее острова Хонсю. Затем он обнаружил, что движение частиц у *S*-фазы имеет преобладающее направление север — юг, т.е. казалось очевидным, что *S*-фаза продольно поляризована. Если бы при этом он принял, что *S*-фаза должна быть сдвиговой волной, в которой частицы смещаются по перпендикуляру к направлению распространения волны, тогда он смог бы правильно поместить очаг землетрясения на глубину около 500 км под островом Хонсю и тем самым разрешить наблюдавшееся несоответствие. Вместо этого он сделал ошибочный вывод, что *S*-фаза не представляет собой сдвиговых волн. Действительно, эта двойная ошибка не противоречила господствующим тогда представлениям об очагах землетрясений и сейсмических волнах. В то время уже достаточно хорошо была известна концепция изостазии, которая использовалась при объяснении гравитационных наблюдений, и никто не предполагал, что очаги землетрясений могут существовать глубоко внутри зоны, которая считалась тогда пластичной. Вывод по поводу *S*-фазы находился в согласии также с так называемой доктриной Маллета, по которой считалось, что основное смещение в эпицентральной области вызвано продольными волнами. Роберт Маллет (который, кстати, первым измерил скорость сейсмических волн в полевых условиях при использовании взрывчатых веществ) пришел к этому выводу на основе проведенного им первого научного полевого исследования сооружений, поврежденных землетрясением, в эпицентральной области Неаполитанского землетрясения 1857 г.

В 1906 г. было хорошо известно существование волн сжатия и волн сдвига в твердом веществе. Со времени открытия закона Гука в 1660 г. основными достижениями в теории упругости можно считать проведенные в 1821 г. Навье исследования общего уравнения равновесия и колебаний, а также эксперименты Френеля, показавшие, что свет состоит из поперечно-поляризованных волн, проходящих через эфир. До этих экспериментов обычно считалось, что в безграничной сплошной среде могут распространяться только продольные волны. Успехи в теории распространения упругих волн были достигнуты благодаря исследовани-

ям Коши (который к 1822 г. развил концепцию шести независимых компонент напряжения и шести компонент деформации) и Пуассона (который использовал ньютоновское представление о межмолекулярных силах в твердом веществе и предположил, что сила притяжения между любой парой молекул пропорциональна отклонению от их положения равновесия). Пуассон обнаружил два типа волн, которые мы знаем теперь как  $P$  и  $S$ , и на основе принятой им частной модели сделал вывод, что скорость  $P$ -волн в  $\sqrt{3}$  раз больше скорости  $S$ -волн. Более общую теорию дал Грин, который ввел функцию упругой энергии для произвольно анизотропного тела с 21 независимым коэффициентом. Для изотропного тела число коэффициентов сводится к двум.

В введении к своему классическому учебнику (вышедшему в 1892 г. и переизданному в 1944 г.) Ляв дал блестящий исторический обзор развития теории упругости. Что касается ранней истории наблюдательной сейсмологии, то она хорошо описана Дьюи и Байерли [104].

Объяснение рэлеевских волн [263], которые могут распространяться вдоль свободной поверхности упругого тела, было дано позже получения первой записи волн землетрясений. Первая теоретическая сейсмограмма была рассчитана Лэмбом [203] для точечного импульсного источника, помещенного в однородное полупространство. Рассчитанная на поверхности сейсмограмма состоит из последовательности трех импульсов, соответствующих  $P$ -,  $S$ - и рэлеевской волнам, и она гораздо проще наблюдаемых записей.

Когда в начале 80-х годов прошлого века были записаны первые сейсмограммы землетрясений, сейсмологи поразились, почему колебания длятся так долго. Мы увидим, что рэлеевские волны обладают свойством дисперсии (поэтому волны, имеющие различную частоту, распространяются с разной скоростью), и это является одной из причин длительных колебаний. Но, кроме того, наблюдаются колебания после вступления  $P$ - и  $S$ -волн и перед приходом поверхностных (например, рэлеевских) волн. Джеффрис [179] изучил и отверг множество объяснений, сделав вывод, что «единственное предположение, которое выдерживает критику, состоит в том, что колебания вызваны отражениями первоначального импульса внутри приповерхностных слоев». В 1969 г., когда была получена первая сейсмограмма с Луны, сейсмологи снова были поражены большой длительностью интервала времени, в течение которого продолжались колебания. И снова объяснение, вероятнее всего, лежит в рассеянии волн на неоднородностях.

Приложение методов Лэмба к реальным землетрясениям и взрывам внутри Земли пришлось отложить приблизительно до 1960 г., когда благодаря работам Беньоффа, М. Юинга, Ф. Пресса и других стали доступны высококачественные записи длиннопериодных сейсмических волн. Длиннопериодные волны усредняют мелкомасштабные неоднородности Земли, и в этом случае Земля ведет себя как эквивалентное однородное тело. Процесс в очаге землетрясения также проще для длинных периодов. По этой причине чрезвычайно простая модель задачи Лэмба может принести практическую пользу при интерпретации сейсмограмм длиннопериодных волн.

В этой книге рассматриваются очень простые модели Земли. В большинстве случаев среда однородна или же неоднородна только в одном направлении. Например, рассматривается слоистое полупространство или шар, в которых материальные свойства меняются только по вертикали, т.е. вдоль радиуса.

Модели в сейсмологии являются математическим каркасом, в пределах которого наблюдаемые сейсмограммы связываются с внутренним строением Земли при помощи модельных параметров. Например, если при интерпретации сейсмограмм в качестве модели Земли используется однородное, безграничное, изотропное упругое тело, получаемыми в результате интерпретации параметрами будут в лучшем случае постоянные Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  и постоянное значение плотности  $\rho$ . В том случае, когда модель неоднородна в вертикальном направлении, мы можем определить эти параметры  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$  и  $\rho(z)$  как функции глубины. Конечно, самой лучшей моделью была бы трехмерно неоднородная и произвольно анизотропная модель среды, однако расчеты для таких сред становятся слишком затруднительными и их осуществить практически невозможно. Кроме того, в этом случае требуется большее число параметров, чем мы можем получить из доступных в настоящее время экспериментальных данных. Поэтому наиболее продуктивной моделью считается модель вертикально-неоднородного полупространства или шара. Центральные главы этой книги посвящены поверхностным волнам (гл. 7), собственным колебаниям (гл. 8) и объемным волнам (гл. 9) для таких моделей.

Чтобы подготовить читателя к восприятию этих глав, мы начнем с основных и практически важных теорем в общих проблемах динамики упругого тела — таких, как теорема взаимности и теорема представления (гл. 2). В гл. 3 в качестве отправной точки для развития теории сейсмических колебаний в Земле мы сформулируем представление о локализованных внутренних сейсмических источниках. Более специальные вопросы, касающиеся механизма сейсмических источников, вынесены в гл. 14 и 15.

Наиболее продуктивной моделью источника в случае землетрясения, называемой моделью теории дислокаций, является разрыв со смещением по внутренней поверхности. Мы рассмотрим также объемный источник, в котором внутри некоторого объема происходит трансформационная деформация.

Полное описание сейсмических колебаний от точечного дислокационного источника в однородной среде дано в гл. 4. Анализ обобщен на среду с плавно меняющимися свойствами путем использования криволинейных координат, определяемых геометрическими траекториями лучей. В этой главе рассмотрены также принципы определения механизма землетрясения по наблюдениям объемных волн.

Свойства плоских волн, такие как отражение и преломление на плоской поверхности, фазовые сдвиги, неоднородные (быстрозатухающие) волны, ослабление и физическая дисперсия волн подробно изучены в гл. 5. В гл. 6 решается задача Лэмба, в которой сферическая волна от точечного источника взаимодействует с плоской поверхностью. В результате этого возникают три основных типа волн: 1) волны, которые непосредственно отражаются от границы или проходят сквозь нее; 2) волны, которые распространяются от источника к приемнику вдоль границы (головные волны), и 3) волны Рэлея или волны Стоуни, амплитуды которых экспоненциально убывают с удалением от границы. Изучение этих волн ведется с помощью метода Каньяра, а также методов преобразования Фурье, чтобы подготовить почву для гл. 7 — 9, где описываются практические методы расчета сейсмограмм в случае вертикально-неоднородных структур.

Порядок следования этих трех глав, относящихся к вертикально-

неоднородным средам (поверхностные волны, собственные колебания, объемные волны), отражает развитие во времени теоретического волнового анализа сейсмограмм, а также степень сложности такого анализа. Основные моды волн Лява и Рэлея — это первые волны, полные записи которых были количественно объяснены и увязаны с параметрами моделей Земли и землетрясений. Анализ объемных волн более сложен; в какой-то мере это связано с тем, что мы не можем установить сейсмическую станцию в любой желаемой точке вдоль траектории волны, а лишь в ее конечной точке. Полный анализ собственных колебаний также более сложен, чем в случае поверхностных волн, но здесь причиной является необходимость обработки длинных записей, которые содержат многие сотни видов колебаний. Методы расчета сейсмограмм для одномерно неоднородных моделей Земли, описанные в этих трех главах, в настоящее время хорошо отработаны.

Заключительным вопросом, рассмотренным в конце тома 1, является проблема получения сейсмических данных. В соответствии с этим в гл. 10 описываются принципы сейсмометрии наряду с обзором свойств сейсмических сигналов и шумов в широком диапазоне частот, источников и расстояний между источниками и приемниками с целью помочь создателям аппаратуры для конкретного эксперимента. Эта заключительная глава доступна каждому, кто знаком с основными положениями классической физики (свойствами маятников и элементарной теорией электрических цепей).

Том 1 задуман как законченное описание основ современной сейсмологии. Пять последующих глав составляют том 2, в котором рассмотрены различные специальные вопросы. Они базируются на материале тома 1 и включают основные методы, используемые в настоящее время для обработки наблюдений, в теории обратных задач, при анализе распространения волн в средах с трехмерной неоднородностью, кинематики и динамики сейсмических источников.

## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ

### ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

- Lomnitz C., Rosenblueth E.* Seismic Risk and Engineering Decisions. Amsterdam: Elsevier, 1976.
- Newmark N. M., Rosenblueth E.* Fundamentals of Earthquake Engineering. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice-Hall, 1971.
- Dix C. H.* Seismic Prospecting for Oil. New York: Harpet & Row, 1952.
- Grant F. S., West G. F.* Interpretation Theory in Applied Geophysics. New York: McGraw-Hill, 1965.
- Telford W. M., Geldart L. P., Sheriff R. E., Keys D. A.* Applied Geophysics. Cambridge Univ. Press, 1976.

### ОБНАРУЖЕНИЕ ЯДЕРНЫХ ВЗРЫВОВ СЕЙСМИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

- Bolt B. A.* Nuclear Explosions and Earthquakes: The Parted Veil. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1976.
- Dahlman O., Israelson H.* Monitoring Underground Nuclear Explosions. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Co., 1977.

- Rodean H. C.* Nuclear-Explosion Seismology. Washington, D. C.: U.S. Atomic Energy Comm., 1971.
- Thirlaway H. I. S.* Forensic seismology. Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society, 14, 297 — 310, 1973.

## ПРОГНОЗ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

- Panel on Earthquake Prediction of the Committee of Seismology. Predicting Earthquakes: A Scientific and Technical Evaluation — With Implications for Society. Washington, D. C.: National Academy of Sciences, 1976.
- Panel on the Public Policy Implications of Earthquake Prediction. Earthquake Prediction and Public Policy. Washington, D. C.: National Academy of Sciences, 1975.
- Press F.* Earthquake prediction. Scientific American, May 1975.
- Rikitake T.* Earthquake Prediction. Amsterdam, Elsevier Scientific Publishing Co, 1976. [Имеется перевод: *Т. Рикитаки*. Предсказание землетрясений. — М.: Мир, 1979.]
- White G. F., Haas J. E.* Assessment of Research on Natural Hazards. Cambridge: MIT Press, 1975.

4151



## Основные теоремы динамической теории упругости

Аналитический подход к исследованию сейсмических колебаний в Земле должен содержать по крайней мере три следующие компоненты: описание сейсмических источников, уравнения движения, распространяющегося в среде после того, как в каком-либо месте оно возникло, и теорию, связывающую описание источника с частным решением, найденным для уравнений движения. Было бы полезно упростить теорию, максимально используя наши допущения о характере сейсмических движений (хотя такая теория может привести к ошибочным выводам, если эти допущения неверны). Например, существует положение, что два малых колебания накладываются друг на друга без нелинейного взаимодействия. Другое допущение заключается в том, что сейсмические колебания, вызванные некоторым физическим источником, должны однозначно определяться комбинацией свойств этого источника и среды, в которой распространяются волны. Эти положения, как и многие другие, обычно принимаемые сейсмологами за истинные, являются свойствами бесконечно малых колебаний в классической механике сплошных сред при рассмотрении упругих тел с линейной связью между напряжением и деформацией; именно такая теория является математической основой почти всей этой книги.

Сейсмология — в значительной степени наблюдательная дисциплина, и залогом ее развития является умение интерпретировать сейсмограммы. Поэтому нам необходимо знать, какой именно информации о движениях в одной части среды достаточно для однозначного определения движений, которые можно наблюдать в другой ее части. В качестве примера из практики укажем, что нам часто нужно знать, как описать сейсмический источник (взрыв или мгновенное смещение по разрыву) и каким образом учесть граничные условия на свободной поверхности Земли, для того чтобы определить движение, достигающее группы приемников. К счастью, для упругой среды эта проблема имеет определенное решение, т.е. условия в источнике (описываемые объемными силами) и граничные условия легко можно представить в форме, обеспечивающей единственность результирующего движения. После того, как мы сформулируем задачу (т.е. введем определения смещения, деформации, напряжения, объемной силы и ограничения на характер движений), мы докажем две основные теоремы: единственности и взаимности. Взаимность вместе с функцией Грина будет использована для представления движения в произвольной точке среды через объемные силы и информацию о граничных условиях. Этот метод представления сравнительно нов в динамике упругих сред, где он развит Кноповым [198] и де Хоопом [169]; однако существуют его многочисленные аналоги в теории функций комплексного переменного, в теории потенциалов, в теории скалярного волнового уравнения для однородной среды.

дополнение 2.1

*Примеры теорем представления*

1. Если  $f(z)$  — аналитическая функция комплексного переменного  $z$ , то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где интегрирование ведется против часовой стрелки по любому замкнутому контуру  $C$  вокруг точки  $z$ . (Особенностей  $f$  внутри  $C$  не допускается.) Эта формула является *представлением* функции  $f$ , позволяющим оценить  $f$  всюду внутри  $C$  по известным значениям  $f$  на самом  $C$ .

2. Если  $\phi(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению Пуассона  $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$ , то

$$\phi(\mathbf{x}) = \iiint_V \frac{\rho(\xi) dV(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|},$$

где  $V$  — объем, включающий все распределение  $\rho$ , создающее  $\phi$ . Это также *представление*  $\phi$ , но такое, в которое само  $\phi$  не входит.

Теорема представления динамической теории упругости объединяет оба типа приведенных выше представлений и учитывает также зависимость движений от времени.

Часто полезно выписывать уравнения упругих колебаний в произвольных системах ортогональных криволинейных координат, так как во многих случаях именно на (криволинейных) координатных поверхностях естественно постулировать граничные условия. Мы выведем уравнения, связывающие смещения и напряжения, а также деформации и смещения, используя физические компоненты смещений, напряжений и деформаций в ортогональной системе произвольного вида.

На первый взгляд может показаться, что эта глава содержит в основном формальные результаты — доказательства, которые должны быть получены один раз, одним человеком, в оправдание специфических методов решения задач, используемых в последующих главах. Однако читатель, желающий развить в себе способность решать задачи прикладной сейсмологии по собственному выбору, скоро встретится с вопросом о том, как «поставлена» задача. Иными словами, как перевести физическое описание сейсмического источника — и общую задачу вычисления вызванных им движений у приемников вблизи и вдали от источника — в конкретную математическую задачу? Способность сформулировать такую задачу в значительной степени опирается на владение теоремой представления, выраженной в различных формах уравнениями (2.41) — (2.43) и (3.1) — (3.3). В последующих главах мы будем часто ссылаться на эти уравнения.

## 2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для описания движений и механики движения в сплошной среде широко используются два различных метода. Первый — это подход Лагранжа, в котором рассматривается конкретная частица, первоначальное положение которой задается

ее координатами в некоторый опорный момент времени; второй — метод Эйлера, исследующий, что происходит с произвольными частицами при прохождении ими заданной точки пространства. Для большинства сейсмологических задач линейную теорию упругости значительно проще применить на основе подхода Лагранжа, и мы почти всегда будем действовать в его рамках. Ведь в конце концов сейсмограмма — это запись движения конкретной части Земли (а именно частиц, к которым прикреплен сейсмометр во время его установки), так что она представляет собой непосредственную запись лагранжева движения.

В этой главе мы будем использовать декартову систему координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и все тензоры будут декартовыми тензорами. Мы используем термин *смещение* и будем рассматривать его как функцию пространства и времени, обозначая как  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , чтобы описать векторное расстояние частицы в момент времени  $t$  от точки  $\mathbf{x}$ , в которой она находилась в некий начальный момент времени  $t_0$ . Поскольку  $\mathbf{x}$  не изменяется со временем, отсюда следует, что *скорость частицы* равна  $\partial \mathbf{u} / \partial t$ , а *ускорение*  $\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ .

Для анализа искажений среды независимо от того, является ли она твердой или жидкой, упругой или неупругой, мы используем *тензор деформаций*. Пусть частица, первоначально находившаяся в положении  $\mathbf{x}$ , передвинулась в положение  $\mathbf{x} + \mathbf{u}$ ; тогда для описания поля смещений используется выражение  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Чтобы исследовать искажение части среды, первоначально находившейся в окрестности  $\mathbf{x}$ , мы должны знать новое положение частицы, которая первоначально была в точке  $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ . Это новое положение будет  $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x})$ . Любое искажение будет изменять относительное положение концов линейного элемента  $\delta \mathbf{x}$ . Если это изменение равно  $\delta \mathbf{u}$ , то  $\delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}$  — новый векторный линейный элемент, и, найдя расстояние между его конечными точками, мы получим

$$\delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u} = \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - (\mathbf{x} + \mathbf{u}).$$

Поскольку  $|\delta \mathbf{x}|$  произвольно мало, мы можем представить  $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x})$  как  $\mathbf{u} + (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  плюс пренебрежимо малый член порядка  $|\delta \mathbf{x}|^2$ . Отсюда следует, что  $\delta \mathbf{u}$  выражается через градиент  $\mathbf{u}$  и начальный линейный элемент  $\delta \mathbf{x}$  как

$$\delta \mathbf{u} = (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad \text{или} \quad \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j. \quad (2.1)$$

Однако не все девять независимых компонент тензора  $u_{i,j}$  нужны, чтобы определить истинное искажение среды вблизи  $\mathbf{x}$ , так как часть движения — это просто бесконечно малое вращение тела как целого в окрестности  $\mathbf{x}$ . Это можно увидеть из тождества

$$(u_{i,j} - u_{j,i}) \delta x_j = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} u_{m,l} \delta x_k,$$

которое позволяет переписать уравнение (2.1) в виде

$$\delta u_i = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{u} \times \delta \mathbf{x})_i, \quad (2.2)$$

где  $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}$  описывает вращение. Интерпретация второго члена в (2.2) как вращения допустима, если  $|u_{i,j}| \ll 1$ . Если градиенты смещений не бесконечно малы в смысле этого неравенства, мы должны анализировать вклад в  $\delta \mathbf{u}$  от *конечного* вращения. Это существенно более трудная задача, так как конечные вращения не коммутативны и не могут быть описаны как векторы.

## ДОПОЛНЕНИЕ 2.2

## Обозначения

Мы используем жирные буквы (например,  $\mathbf{u}$ ,  $\tau$ ) для векторных и тензорных полей, а буквы с нижними индексами ( $u_i$ ,  $\tau_{kl}$ ) — для обозначения векторных и тензорных компонент в декартовой системе координат. Полезные сведения о свойствах декартовых тензоров даны Джеффрисом в книге [182] и в гл. 3 книги [183]. Для единичных векторов (кроме  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ ) используется значок  $\hat{\mathbf{x}}$  (например,  $\hat{\mathbf{x}}$ ). Скалярное произведение записывается как  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , а векторное  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Точки над буквами означают дифференцирование по времени (например,  $\mathbf{u} = d\mathbf{u}/dt$ ,  $\ddot{\mathbf{u}} = d^2\mathbf{u}/dt^2$ ), а запятая между нижними индексами указывает на дифференцирование по пространственным координатам (например,  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ ).

Всюду применяется правило суммирования для повторяющихся индексов (например,  $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ); часто используется символ Кронекера  $\delta_{ij}$  и антисимметрический тензор с компонентами  $\varepsilon_{ijk}$ :

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j \quad \text{и} \quad \delta_{ij} = 1 \quad \text{при } i = j;$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0, \quad \text{если два любых } i, j, k \text{ равны,}$$

в остальных случаях

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{321} = -\varepsilon_{132} = 1.$$

Наиболее важные свойства этих символов:

$$a_i = \delta_{ij} a_j, \quad \varepsilon_{ijk} a_j b_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i,$$

и они связаны свойствами

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}.$$

Тензор второго ранга  $\dagger$  симметричен тогда и только тогда, когда

$$\varepsilon_{ijk} \dagger_{jk} = 0.$$

Определим тензор бесконечно малых деформаций как

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.3)$$

Эффект истинных искажений любого линейного элемента  $\delta \mathbf{x}$ , выраженных при помощи такого тензора, заключается в изменении относительного положения концов этого элемента на  $e_{ij} \delta x_j$ . Вращение не влияет на длину элемента, и новая длина равна

$$|\delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}| = (\delta \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x} + 2 \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{x})^{1/2}$$

$$= (\delta x_i \delta x_i + 2 e_{ij} \delta x_i \delta x_j)^{1/2}$$

(мы пренебрегли здесь членом  $\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}$ ). Из (2.2) и тождества  $(\text{rot } \mathbf{u} \times \delta \mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{x} = 0$  получаем

$$|\delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}| = |\delta \mathbf{x}| (1 + e_{ij} v_i v_j),$$

где  $\mathbf{v}$  — единичный вектор  $\delta \mathbf{x} / |\delta \mathbf{x}|$ . Отсюда следует, что деформация растяжения линейного элемента, первоначально направленного вдоль  $\mathbf{v}$ , равна  $e_{ij} v_i v_j$ .

Чтобы исследовать внутренние силы взаимодействия между соседними частями сплошной среды, мы используем понятия *вектора и тензора*

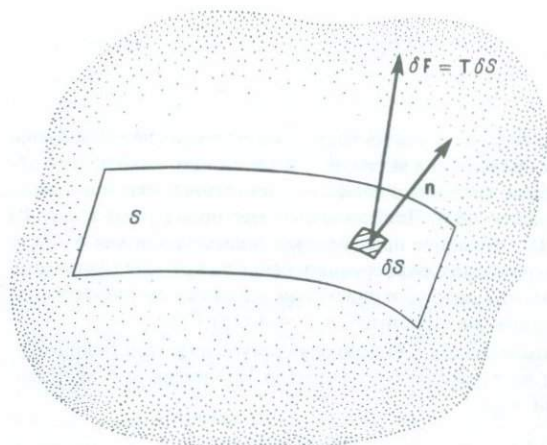
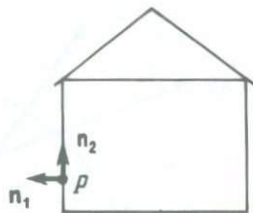


Рис. 2.1. Определение напряжения  $T$ , действующего в точке внутренней поверхности  $S$  с нормалью  $n$ . Для жидкой среды давление было бы равно  $-n \cdot T$ .

**напряжений\***. Векторное напряжение — это сила, действующая на единичную площадку внутренней поверхности в сплошной среде; оно является мерой контактных сил (действующих на единичную площадку), с которыми частицы по одну сторону поверхности действуют на частицы, расположенные по другую сторону поверхности. Для данной точки внутренней поверхности вектор напряжения определен предельным переходом (рис. 2.1): пусть бесконечно малая сила  $\delta F$  действует на бесконечно малую площадь  $\delta S$ ; тогда вектор напряжения — это предел  $\delta F / \delta S$  при  $\delta S \rightarrow 0$ . Обозначим через  $n$  единичную нормаль к поверхности  $S$ ;  $\delta F$  имеет направление силы, вызванной той частью среды, в сторону которой указывает нормаль, и действует на материал в той части, из которой исходит  $n$ . Соответствующее напряжение обозначим  $T(n)$ . Таким образом, в жидкости давление равно  $-n \cdot T(n)$ . В твердом теле на внутренние поверхности могут действовать срезающие силы и  $T$  не обязательно будет параллельно  $n$ . Далее, величина и направление напряжения зависят от ориентации элемента поверхности  $\delta S$ , на который действуют контактные силы (тогда как давление в жидкости одно и то же во всех направлениях). Чтобы оценить эту зависимость напряжения в данной точке от ориентации площадки, рассмотрим точку  $P$  на внешней стене дома (рис. 2.2). Для элемента площади на поверхности стены в точке  $P$  напряжение  $T(n_1)$  равно нулю (если пренебречь атмосферным давлением и ветром); для горизонтального элемента площади внутри стены в точке  $P$  напряжение  $T(n_2)$  может быть значительным.

На частицы в твердой и жидкой среде действуют не только контактные силы между соседними частицами, но и 1) силы между частицами, не примыкающими

\* Авторы терминологически различают векторное напряжение (*traction* — буквально «тянущее усилие»), которое действует на единичный плоский элемент поверхности, содержащий данную точку, и тензор напряжений (*stress tensor*), полностью характеризующий напряженное состояние среды в этой точке. Следуя традиции, установившейся в отечественной литературе по теории упругости, мы оба эти понятия переводим словом «напряжение», так как конкретное содержание термина вполне очевидно из контекста и применяемых обозначений. — *Прим. перев.*

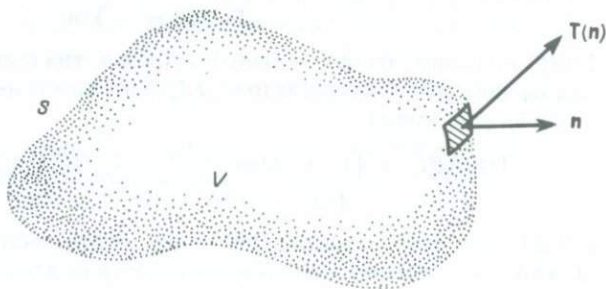
Рис. 2.2.  $T(n_1) \neq T(n_2)$ .

друг к другу, и 2) силы, обусловленные физическими процессами, внешними по отношению к данной среде. В качестве примера сил первого типа назовем гравитационные силы, действующие между частицами Земли. Второму типу отвечают силы, возникающие на заключенных в теле частицах железа, когда около этого тела движется магнит. Эти неконтактные силы будем называть *объемными* и использовать выражение  $f(x, t)$  для обозначения таких сил, действующих в единице объема на частицу, находившуюся в точке  $x$  в некоторый начальный момент времени  $t$ . Будет рассматриваться и частный случай силы, приложенной в виде короткого импульса к одной конкретной частице в точке  $x = \xi$  в момент  $t = \tau$ . Если эта сила действует в направлении оси  $x_n$ , то  $f_i(x, t)$  пропорционально трехмерной дельта-функции Дирака  $\delta(x - \xi)$ , указывающей на пространственное положение, одномерной дельта-функции Дирака  $\delta(t - \tau)$ , указывающей момент приложения импульса, и дельта-функции Кронекера  $\delta_{in}$ , характеризующей направление силы:  $f_i = 0$  при  $i \neq n$ . Следовательно, распределение объемных сил имеет вид

$$f_i(x, t) = A \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \delta_{in}, \quad (2.4)$$

где  $A$  — константа, определяющая амплитуду импульса. Заметим, что размерности  $f_i$ ,  $\delta(x - \xi)$  и  $\delta(t - \tau)$  — соответственно сила/единица объема, (единица объема) $^{-1}$  и (единица времени) $^{-1}$ . Символ Кронекера  $\delta_{in}$  безразмерен, так что  $A$  действительно имеет правильную физическую размерность количества движения (сила  $\times$  время).

Теперь мы уже можем наложить ограничения на ускорения, объемные силы и напряжения, действующие на объем вещества  $V$ , заключенный внутри поверхности  $S$  (рис. 2.3). Приравнявая скорость изменения количества движения частиц,

Рис. 2.3. Материальный объем  $V$  сплошной среды с поверхностью  $S$ .

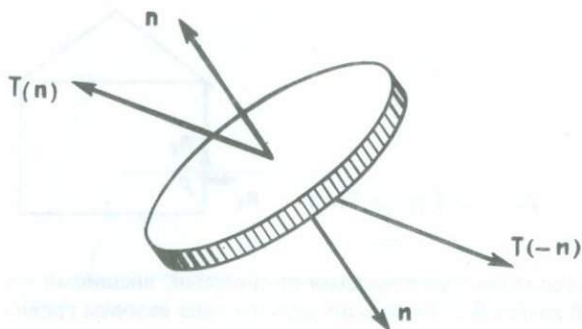


Рис. 2.4. Малый диск внутри напряженной среды.

образующих  $V$ , к силам, действующим на эти частицы, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV = \iiint_V \mathbf{f} dV + \iint_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS. \quad (2.5)$$

Это соотношение основано на подходе Лагранжа; и  $V$ , и  $S$  перемещаются вместе с частицами. Поэтому левую часть (2.5) можно записать в виде  $\iiint_V \rho (\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2) dV$ , так как масса частицы  $\rho dV$  постоянна во времени.

Мы используем (2.5) прежде всего для получения в явном виде функционального соотношения  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{n})$  и для введения тензора напряжений. Рассмотрим частицу  $P$  внутри среды, в которой ускорение, объемные силы и напряжение не имеют особенностей. Окружим частицу малым объемом  $\Delta V$  и рассмотрим относительную величину трех членов (2.5) при сжатии  $\Delta V$  к точке  $P$ . Объемные интегралы имеют порядок  $\Delta V$ , а поверхностный интеграл — порядок  $\iint_S dS$ , где  $S$  — поверхность, окружающая  $\Delta V$ . В общем такие интегралы имеют порядок  $(\Delta V)^{2/3}$ , стремясь к нулю медленнее, чем  $\Delta V$ . Поделив все члены (2.5) на  $\iint_S dS$ , получим

$$\frac{|\iint_S \mathbf{T} dS|}{\iint_S dS} = O(\Delta V^{1/3}) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta V \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Предположим теперь, что  $\Delta V$  — диск, имеющий внешние нормали  $\mathbf{n}$  и  $-\mathbf{n}$  (рис. 2.4) при незначительной толщине. Тогда из (2.6) следует

$$\mathbf{T}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{T}(\mathbf{n}). \quad (2.7)$$

Теперь положим, что  $\Delta V$  — малый тетраэдр, три грани которого расположены на координатных плоскостях (рис. 2.5), а четвертая имеет внешнюю нормаль  $\mathbf{n}$ . Тогда из (2.6) имеем

$$\frac{\mathbf{T}(\mathbf{n})ABC + \mathbf{T}(-\hat{\mathbf{x}}_1)OBC + \mathbf{T}(-\hat{\mathbf{x}}_2)OCA + \mathbf{T}(-\hat{\mathbf{x}}_3)OAB}{ABC + OBC + OCA + OAB} \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

при  $\Delta V \rightarrow 0$ . Здесь символы  $ABC$  и т.п. обозначают площади треугольников. Можно показать с помощью законов геометрии, что компоненты  $\mathbf{n}$  определяют-

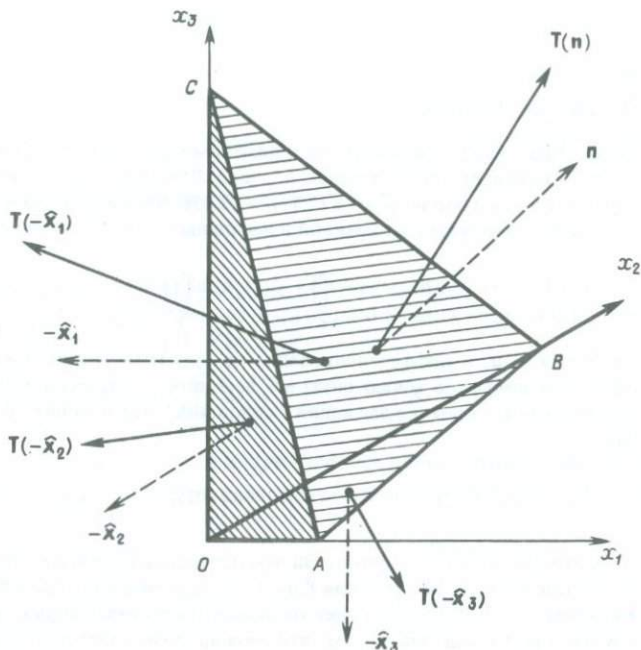


Рис. 2.5. Малый тетраэдр  $OABC$ , три грани которого лежат в координатных плоскостях и имеют внешние нормали  $-\hat{x}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), а четвертая грань имеет нормаль  $\mathbf{n}$ .

ся как  $(n_1, n_2, n_3) = (OBC, OCA, OAB)/ABC$ . Тогда из (2.7) и (2.8) следует

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\hat{x}_j)n_j. \quad (2.9)$$

Это важное специальное соотношение связывает напряжение  $\mathbf{T}(\mathbf{n})$  и нормаль  $\mathbf{n}$  с помощью трех напряжений, действующих на координатные плоскости. Свойства (2.7) и (2.9) для покоящейся среды тривиальны, но мы показали, что они верны даже при наличии ускорений.

Тензор напряжений вводится определением девяти величин:

$$\tau_{kl} = T_l(\hat{x}_k),$$

так что  $\tau_{kl}$  — это  $l$ -я компонента вектора напряжений, действующего на плоскость, нормальную к оси  $k$ , благодаря воздействию материала с большим  $x_k$  на материал с меньшим  $x_k$ . Отсюда

$$T_i = \tau_{ji}n_j. \quad (2.10)$$

Теперь используем (2.5) для вывода уравнения движения произвольной частицы. Применяя (2.10) и формулу Остроградского — Гаусса для дивергенции, получаем

$$\iint_S T_i dS = \iint_S \tau_{ji}n_j dS = \iiint_V \tau_{ji,j} dV \quad (2.11)$$

ДОПОЛНЕНИЕ 2.3

*Эйлер или Лагранж?*

Более тщательное рассмотрение применимости формулы Остроградского — Гаусса в (2.11) показывает, что в рамках подхода Лагранжа нельзя дифференцировать по пространственным координатам в (2.11) — (2.13). Частицы, образующие  $S$  в момент  $t$ , вообще говоря, сдвинуты с их позиций в начальный момент времени  $t_0$ , так что

$$\iint_S \tau_{ji} n_j dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial X_j} \tau_{ji} dV,$$

где  $\mathbf{X} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ , и дифференцирование по пространственным координатам, которое должно выполняться в точках внутри  $V$  во время  $t$ , имеет вид  $\partial/\partial X_j$ . Для конечных перемещений точное уравнение движения в сплошной среде в наших обозначениях должно иметь вид

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i = f_i + \frac{\partial}{\partial X_j} \tau_{ji}. \quad (2.13, \text{точная форма})$$

В отличие от этого в методе Эйлера переменные, описывающие поле, рассматриваются непосредственно как функция  $\mathbf{X}$  и  $t$  ( $\mathbf{u}$  — смещение частицы в  $\mathbf{X}$  в момент  $t$  из положения  $\mathbf{x}$  в момент  $t_0$ ), при этом  $\tau_{ji}$  будет компонентой тензора напряжений в точке  $(\mathbf{X}, t)$ . Преимущество такого подхода в том, что можно пользоваться независимыми переменными, естественными при физической интерпретации правой части уравнения движения. Недостаток этого подхода — в громоздких выражениях для скорости изменения свойств, переносимых частицами. Например, трудно выразить скорость частицы  $\mathbf{v}$  в точке  $(\mathbf{X}, t)$  через поле смещений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ . С учетом расстояния, пройденного за время  $\delta t$ , получаем

$$\mathbf{v} \delta t = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{v} \delta t, t + \delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$$

и, следовательно,

$$v_i = \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{\mathbf{x} = \text{const}} + v_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right)_{t = \text{const}}$$

— неявное уравнение, которое нужно разрешить, чтобы найти  $\mathbf{v}$  (компоненты  $\mathbf{v}$  появляются в обеих частях уравнения). Как только скорость частицы найдена, ускорение в положении  $(\mathbf{X}, t)$  можно получить как полную производную  $\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ .

В сейсмологии редко возникает необходимость различать подходы Лагранжа и Эйлера, так как пространственные флуктуации смещений, деформаций, ускорений и напряжений имеют гораздо большие длины волн, чем амплитуды смещений частиц. В этом случае несущественно, оценивается ли пространственный градиент в фиксированной позиции (Эйлер) или для конкретной частицы (Лагранж). Мы выбрали подход Лагранжа отчасти потому, что здесь скорость и смещение частицы связаны простой зависимостью:  $\mathbf{v} = \partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) / \partial t$ . В гидромеханике, где смещение частицы как переменная в описании поля не представляет интереса, более полезен подход Эйлера.

И последняя ремарка исторического характера: как подход «Эйлера», так и подход «Лагранжа» были развиты Леонардом Эйлером.

и находим, что для произвольного объема  $V$

$$\iiint_V (\rho \ddot{u}_i - f_i - \tau_{ji,j}) dV = 0. \quad (2.12)$$

Подынтегральное выражение должно равняться нулю всюду, где оно непрерывно; в противном случае можно найти объем  $V$ , в котором (2.12) нарушается. Отсюда получаем первый вид уравнения движения:

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + \tau_{ji,j}. \quad (2.13)$$

Другое ограничение на механику движения получаем, приравняв скорость изменения момента количества движения относительно начала координат моменту сил, действующих на частицы в  $V$ . Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{X} \times \rho \dot{\mathbf{u}} dV = \iiint_V \mathbf{X} \times \mathbf{f} dV + \iint_S \mathbf{X} \times \mathbf{T} dS, \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{X} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ . Поскольку  $\partial \mathbf{x} / \partial t$ ,  $\mathbf{u} \times \mathbf{u}$  и  $\partial(\rho dV) / \partial t$  все равны нулю, левая сторона (2.14) равна  $\iiint_V \mathbf{X} \times \rho \ddot{\mathbf{u}} dV$ . Придерживаясь строгой интерпретации (2.13), дан-

ной в дополнении 2.3, получаем

$$\iiint_V \varepsilon_{ijk} X_j \frac{\partial}{\partial X_i} \tau_{lk} dV = \iiint_V \varepsilon_{ijk} X_j (\rho \ddot{u}_k - f_k) dV$$

Используя (2.14), правую часть запишем в виде

$$\iint_S \varepsilon_{ijk} X_j T_k dS,$$

или, обратившись к (2.10), будем иметь

$$\iint_S \varepsilon_{ijk} X_j \tau_{lk} n_l dS.$$

Применяя к этому поверхностному интегралу формулу для дивергенции и используя соотношение  $\partial X_j / \partial X_l = \delta_{jl}$ , получаем

$$\iiint_V \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} dV = 0 \quad \text{для любого } V,$$

что указывает на равенство нулю  $\varepsilon_{ijk} \tau_{jk}$  всюду в объеме  $V$  и, следовательно, на симметрию тензора напряжений:

$$\tau_{kj} = \tau_{jk}. \quad (2.15)$$

Получив этот фундаментальный результат, мы можем вывести окончательные формулы для компонент напряжения:

$$T_i = \tau_{ij} n_j \quad (2.16)$$

и уравнение движения примет вид

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + \tau_{ij,j}. \quad (2.17)$$

Пространственное дифференцирование здесь нужно выполнять по  $X_j$ , но (как указано в дополнении 2.3) замена его дифференцированием по  $x_j$  обычно достаточно аккуратна для сейсмологических приложений и будет использоваться в дальнейшем.

## 2.2. СВЯЗ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ; УПРУГАЯ ЭНЕРГИЯ

Среду называют *упругой*, если она обладает естественным состоянием (когда деформации и напряжения равны нулю), к которому возвращается, если устранить приложенные силы. Под влиянием приложенных нагрузок происходит изменение и напряжений, и деформаций; связь между ними, называемая «определяющим соотношением», является важной характеристикой среды. То, что такая связь существует, мы покажем далее, пользуясь соображениями из термодинамики. Вид этой зависимости должен определяться из эксперимента, и проведенные Гуком измерения «пружинящих» тел привели его около 300 лет назад к выводу о том, что напряжение пропорционально деформации. Его утверждения по этому вопросу были несколько туманными, поскольку современные концепции напряжения как вектора и тензора тогда не существовали. Коши в начале XIX в. впервые развил многие из современных идей о векторном напряжении, и ясно, что он понимал многие результаты, которые сегодня легче объяснить, используя тензорный аппарат, нашедший широкое применение лишь в начале нашего столетия. Современное обобщение закона Гука заключается в утверждении, что каждая компонента тензора напряжений есть линейная комбинация всех компонент тензора деформаций, т.е. существуют такие константы  $c_{ijkl}$  что

$$\tau_{ij} = c_{ijpq} e_{pq}. \quad (2.18)$$

Тело, подчиняющееся определяющему соотношению (2.18), называют *линейно-упругим*. Величины  $c_{ijkl}$  — компоненты тензора четвертого ранга и обладают симметрией:

$$c_{jipq} = c_{ijpq} \quad (\text{так как } \tau_{ji} = \tau_{ij}), \quad (2.19)$$

$$c_{ijqp} = c_{ijpq} \quad (\text{так как } e_{qp} = e_{pq}). \quad (2.20)$$

Из термодинамических соображений также следует, как мы сейчас покажем, что  $c_{rpqij} = c_{ijrpq}$ .

Положим, что упругое тело занимает объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Первый закон термодинамики утверждает, что тело обладает внутренней (или собственной) энергией, которая может изменяться при его деформировании. Баланс энергии имеет вид

скорость выполнения механической работы + скорость разогрева = скорость увеличения (кинетической + внутренней) энергии. (2.21)

Рассмотрим отдельно каждый член уравнения баланса энергии.

1) Скорость механической работы равна

$$\iiint_V \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \iint_S \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS = \iiint_V [f_i \dot{u}_i + (\tau_{ij} \dot{u}_i)_{,j}] dV$$

согласно (2.16) и формуле Остроградского — Гаусса. Согласно (2.17), это равно

$$\iiint_V (\rho \dot{u}_i \ddot{u}_i + \tau_{ij} \dot{u}_{i,j}) dV,$$

а из симметрии  $\tau_{ij}$  и  $e_{ij}$  находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \iiint_V \tau_{ij} \dot{e}_{ij} dV. \quad (2.22)$$

2) Пусть  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  — поток тепла такой, что  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$  — скорость теплового потока (через единицу поверхности) в направлении  $\mathbf{n}$  через элементы поверхности, нормальные к  $\mathbf{n}$ . Пусть приток тепла в единицу объема  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{x}, t)$ . Тогда скорость разогрева равна

$$-\iint_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathcal{Q} dV, \quad (2.23)$$

и с очевидностью  $\dot{\mathcal{Q}} = -\nabla \cdot \mathbf{h}$ .

3) Скорость увеличения кинетической энергии равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV. \quad (2.24)$$

4) Пусть  $\mathcal{U}$  — внутренняя энергия единицы объема. Тогда из (2.21) — (2.24) вытекает

$$\dot{\mathcal{U}} = -h_{i,i} + \tau_{ij} \dot{e}_{ij}, \quad \text{или} \quad \dot{\mathcal{U}} = \dot{\mathcal{Q}} + \tau_{ij} \dot{e}_{ij}. \quad (2.25)$$

Если  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{Q}$  и  $e_{ij}$  измеряются как малые возмущения состояния термодинамического равновесия, то (2.25) эквивалентно

$$\begin{aligned} d\mathcal{U} &= d\mathcal{Q} + \tau_{ij} de_{ij} \\ &= \mathcal{T} d\mathcal{S} + \tau_{ij} de_{ij} \end{aligned} \quad (2.26)$$

для обратимых процессов.

Здесь  $\mathcal{S}$  — энтропия в единице объема и  $\mathcal{T}$  — абсолютная температура. Из уравнения (2.26) вытекает, что энтропия и компоненты деформаций являются переменными состояния, полностью и единственным образом определяющими внутреннюю энергию. В частности, внутренняя энергия не зависит от характера изменения во времени процесса деформирования.

Иногда удобнее иметь дело с функцией  $\mathcal{W}$  компонент деформаций, через которую напряжения выражаются как

$$\tau_{ij} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial e_{ij}}. \quad (2.27)$$

Функция с этими свойствами называется *функцией упругой энергии*. Заметим, что формальным результатом (2.26) будет

$$\tau_{ij} = \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial e_{ij}} \right)_g. \quad (2.28)$$

Верно также, что  $\tau_{ij} = (\partial \mathcal{F} / \partial e_{ij})_{\mathcal{F}}$ , где  $\mathcal{F} = \mathcal{U} - \mathcal{T}\mathcal{S}$  — свободная энергия в единице объема (для которой  $d\mathcal{F} = -\mathcal{S}d\mathcal{T} + \tau_{ij}de_{ij}$ ). Если процесс деформации происходит так медленно, что является изотермическим (как некоторые тектонические процессы), естественно находить  $\tau_{ij}$  по изменениям свободной энергии и выбирать  $\mathcal{W} = \mathcal{F}$ .

Однако, если процессы деформации адиабатические, так что  $\dot{\mathbf{h}} = 0$  и  $\dot{\mathcal{Q}} = 0$ , фактические изменения  $\mathcal{U}$  связаны с изменениями деформаций при постоянной энтропии; поэтому можно выбрать  $\mathcal{W} = \mathcal{U}$  и использовать (2.28). Такова обычно ситуация в сейсмологии для всех волн с длиной более нескольких миллиметров, поскольку постоянная времени тепловой диффузии в горных породах ((расстояние)<sup>2</sup>/коэффициент диффузии) значительно больше периода сейсмических волн (длина волны/скорость). Если не оговорено иное, мы всегда будем предполагать наличие адиабатических условий, при которых гарантировано существование функции упругой энергии.

Объединяя свойства функции упругой энергии с законом Гука, находим

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial e_{ij}} = \tau_{ij} = c_{ijpq}e_{pq} \quad (2.29)$$

и, поскольку

$$\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial e_{ij} \partial e_{pq}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial e_{pq} \partial e_{ij}},$$

приходим к равенству

$$c_{pqij} = c_{ijpq}. \quad (2.30)$$

Поскольку все первые производные  $\mathcal{W}$  — однородные (первого порядка) функции компонент деформации и естественным состоянием  $\mathcal{W}$  можно считать нулевое,  $\mathcal{W}$  само должно быть однородной (второго порядка) функцией вида

$$\mathcal{W} = d_{ijpq}e_{ij}e_{pq}. \quad (2.31)$$

Эта квадратичная форма идентична  $(1/2)(d_{ijpq} + d_{pqij})e_{ij}e_{pq}$ ; дифференцирование (2.31) для получения  $\tau_{ij}$  показывает, что  $(d_{ijpq} + d_{pqij}) = c_{ijpq}$ ; отсюда функция упругой энергии выражается явно как

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}c_{ijkl}e_{ij}e_{kl} = \frac{1}{2}\tau_{ij}e_{ij}. \quad (2.32)$$

В адиабатических и изотермических условиях функция упругой энергии положительна, за исключением естественного состояния (где  $\mathcal{W} = 0$ ), так что  $\frac{1}{2}c_{ijkl}e_{ij}e_{kl}$  — положительно-определенная квадратичная форма. ( $\mathcal{W} \geq 0$ , так как мы предполагаем, что естественное состояние устойчиво.)

Величины  $c_{ijkl}$  независимы от деформаций; поэтому их называют упругими постоянными, но они — изменяющиеся функции положения точки в Земле. Теория упругости, используемая в сейсмологии, в большой степени посвящена неоднородным средам, в особенности полностью изотропной сферически-симметричной среде. В общем симметрия в (2.19), (2.20) и (2.30) уменьшает число независимых компонент  $c_{ijkl}$  с 81 до 21. В случае изотропной среды происходит существенное упрощение, поскольку  $\mathbf{c}$  должно быть изотропным.

Можно показать [183], что наиболее общий изотропный тензор четвертого ранга, обладающий свойствами симметрии  $\mathbf{c}$ , имеет вид

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.33)$$

Здесь фигурируют только две независимые постоянные  $\lambda$  и  $\mu$ , известные под названием постоянных Ламе.

Заметим, что результаты, полученные в этом разделе, относятся к случаю малых возмущений относительно опорного состояния, в котором и напряжения и деформации равны нулю. В недрах Земли сила тяжести создает давление до 1 Мбар. Даже если постулировать состояние нулевых деформаций и напряжений в земном веществе, ясно, что результаты этого раздела нельзя непосредственно применять в сейсмологии, так как деформации благодаря таким давлениям не могут быть малыми. Используя нулевое опорное состояние, необходимо иметь дело с теорией конечных деформаций, в которой связь напряжений и деформаций нелинейна. В качестве альтернативы можно выбрать в качестве опорного состояния статически-равновесную конфигурацию Земли перед землетрясением. Так обычно и поступают в сейсмологии. По определению опорное состояние — это состояние с нулевыми деформациями, но начальные напряжения теперь ненулевые и сейсмические колебания исследуются в рамках линейной связи между деформациями и *приращениями напряжений*. Тогда напряжение равно  $\sigma^0$  при нулевых деформациях и равно  $\sigma^0 + \tau$  при ненулевых деформациях, где  $\tau_{ij} = c_{ijk} e_{kl}$ , и компоненты  $\sigma_{ij}^0$  могут быть того же порядка, что и компоненты  $c_{ijk}$ , т.е.  $\sim 1$  Мбар.

Далее мы будем пренебрегать эффектами начальных напряжений  $\sigma^0$ . Это упрощение обосновано в гл. 8, где начальные напряжения учитываются должным образом и где дан краткий обзор тех аспектов теории, которые нуждаются в пересмотре (дополнение 8.5). Чтобы количественно выразить эффекты силы тяжести, мы применим в гл. 8 подход Эйлера.

### 2.3. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И ВЗАИМНОСТИ

Рассмотрение вопросов единственности (для поля смещений  $\mathbf{u}$  в теле с объемом  $V$  и поверхностью  $S$ ) естественно начать с нескольких общих замечаний о способах определения движений. Поскольку рассматриваемые смещения всюду в объеме  $V$  должны подчиняться условию (2.17), приложение объемных сил, так же как и напряжений на поверхности  $S$ , будет генерировать поле смещений. Мы покажем, что достаточно задать объемные силы внутри  $V$  и напряжения по всей  $S$ , чтобы единственным образом определить поле смещений, возникающих в  $V$ , относительно заданных начальных условий. Другой возможный способ оценить влияние  $S$  на поле смещений состоит в задании граничных условий для самих смещений (на поверхности  $S$ ) вместо напряжений. Например,  $S$  может быть абсолютно жесткой. Может показаться, что напряжения на  $S$  и смещение на  $S$  — независимые характеристики поля смещений в объеме  $V$ . Однако это не так, и для общего понимания разд. 2.3 — 2.5 важно осознать, что напряжения на  $S$  определяют смещения на  $S$ , и наоборот.

## ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Смещение  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  внутри объема  $V$  с поверхностью  $S$  однозначно определяется начиная с момента  $t_0$  начальными значениями смещения и скорости частиц в момент  $t_0$  в  $V$  и значениями на всех временах  $t \geq t_0$  следующих величин:

- 1) объемных сил  $\mathbf{f}$  и тепла  $\mathcal{Q}$ , поступающего в  $V$ ;
- 2) напряжений  $\mathbf{T}$  в любой части  $S_1$  поверхности  $S$ ;
- 3) смещений на  $S_2$  (оставшейся части  $S$ , т.е.  $S_1 + S_2 = S$ ) ( $S_1$  или  $S_2$  может совпадать с  $S$ ).

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Положим, что  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  — два решения  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям и вызванные одними и теми же значениями величин, перечисленных в п. «1» — «3». Тогда разность  $\mathbf{U} \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  представляет собой поле смещений с нулевыми начальными условиями, вызванное нулевыми объемными силами, нулевым притоком тепла, нулевыми напряжениями на  $S_1$ , и  $\mathbf{U} = 0$  на  $S_2$ . Остается доказать, что  $\mathbf{U} = 0$  для  $t > t_0$  всюду в  $V$ .

Скорость выполнения механической работы в поле смещений  $\mathbf{U}$  с очевидностью равна нулю внутри  $V$ , на  $S_1$  и  $S_2$  [см. (2.22)] при  $t \geq t_0$ . Третье равенство в (2.22) можно проинтегрировать от  $t_0$  до  $t$ . Учет нулевых начальных условий и вида функции упругой энергии ( $U$  испытывает адиабатические измене-

## ДОПОЛНЕНИЕ 2.4

*Использование термина «однородный» применительно к уравнениям и граничным условиям*

Уравнение упругих смещений имеет вид  $\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}$ , где  $\mathbf{L}$  — векторный дифференциальный оператор, определенный для компонент  $\mathbf{u}$  следующим образом:

$$(\mathbf{L}(\mathbf{u}))_i \equiv \rho \ddot{u}_i - (c_{ijkl} u_{k,l})_{,j}.$$

Если объемные силы отсутствуют, уравнение  $\mathbf{L}(\mathbf{u}) = 0$  для  $\mathbf{u}$  называют *однородным*. *Однородные граничные условия* на поверхности  $S$  таковы, что или напряжения, или смещения в каждой точке поверхности равны нулю.

Эта терминология — отголосок линейной алгебры, в которой систему  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными вида  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  также называют однородной. Здесь  $\mathbf{x}$  — вектор-столбец и  $\mathbf{A}$  — некая матрица размером  $n \times n$ . Известно, что нетривиальные решения ( $\mathbf{x} \neq 0$ ) могут существовать только в том случае, если  $\mathbf{A}$  имеет некое особое свойство (а именно нулевой определитель). Соответствующий результат в динамической теории упругости состоит в том, что в конечном упругом объеме  $V$  при отсутствии любых объемных сил и наличии однородных граничных условий на поверхности  $S$  могут существовать колебания. Это — *собственные колебания* (или *нормальные моды*) тела, которые могут происходить только на определенных частотах (см. гл. 8).

ния) приводит к соотношению

$$\iiint_V \frac{1}{2} \rho \dot{U}_i \dot{U}_i dV + \iiint_V \frac{1}{2} c_{ijkl} U_{i,j} U_{k,l} dV = 0.$$

Как кинетическая, так и упругая энергия — положительно-определенные квадратичные формы, так что  $\dot{U}_i = 0$  при  $t \geq t_0$ . Но  $U_i = 0$  в момент  $t = t_0$ , и, следовательно,  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$  всюду в  $V$  при  $t \geq t_0$ .

### ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ

Сформулируем и докажем несколько общих соотношений между парой решений для смещений в упругом теле объемом  $V$ .

Положим, что  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  — одно из этих полей смещений, вызванное объемными силами  $\mathbf{f}$ , граничными условиями на  $S$  и начальными условиями в момент  $t = 0$ . Пусть  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  — другое поле смещений, порожденное объемными силами  $\mathbf{g}$  при граничных условиях на  $S$  и начальных условиях при  $t = 0$ , в общем отличных от условий для  $\mathbf{u}$ . Чтобы различить напряжения на поверхностях, нормальных к  $\mathbf{n}$  в этих двух случаях, мы будем использовать обозначения  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{n})$  для напряжений при смещениях  $\mathbf{u}$  и, аналогичным образом,  $\mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{n})$  для напряжений при смещениях  $\mathbf{v}$ .

Первое соотношение взаимности между  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \iiint_V (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} dV + \iint_S \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS \\ = \iiint_V (\mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{u} dV + \iint_S \mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Этот результат получен Бетти. Он легко доказывается подстановкой в (2.34), (2.17) и (2.16) и применением формулы Остроградского — Гаусса для сведения левой части к выражению  $\iiint_V c_{ijkl} v_{i,j} u_{k,l} dV$ . Подобным же образом правая часть сводится к интегралу  $\iiint_V c_{ijkl} u_{i,j} v_{k,l} dV$ , и симметрия  $c_{ijkl} = c_{klij}$

превращает (2.34) в тождество.

Заметим, что теорема Бетти не использует начальных условий для  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Далее, она верна и в том случае, когда величины  $\mathbf{u}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{n})$  и  $\mathbf{f}$  оцениваются в момент времени  $t_1$ , но  $\mathbf{v}$ ,  $\ddot{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{n})$  и  $\mathbf{g}$  оцениваются в другой момент времени  $t_2$ . Если мы примем  $t_1 = t$  и  $t_2 = \tau - t$  и проинтегрируем (2.34) по временному интервалу от 0 до  $\tau$ , то члены, содержащие ускорение, сведутся к выражениям, зависящим только от начальных и конечных условий, так как

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \rho \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(\tau - t) - \mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\tau - t) \} dt \\ = \rho \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(\tau - t) + \mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\tau - t) \} dt \\ = \rho \{ \dot{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \mathbf{v}(0) - \dot{\mathbf{u}}(0) \cdot \mathbf{v}(\tau) + \mathbf{u}(\tau) \cdot \dot{\mathbf{v}}(0) - \mathbf{u}(0) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\tau) \}. \end{aligned}$$

ДОПОЛНЕНИЕ 2.5

*Аналогии*

Перестановка членов в уравнении Бетти (2.34) позволяет получить

$$\iiint_V \{v_i(c_{ijkl}u_{k,l})_{,j} - u_i(c_{ijkl}v_{k,l})_{,j}\} dV = \iint_S \{v_i T_i(\mathbf{u}, \mathbf{n}) - u_i T_i(\mathbf{v}, \mathbf{n})\} dS.$$

Это — векторная теорема для производных второго порядка по пространственным координатам, появляющихся в волновом уравнении теории упругости. Она аналогична теореме Грина

$$\iiint_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \iint_S \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$

для скаляров и лапласиана. Теорема Грина — это инструмент для изучения неоднородных уравнений, таких как  $\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$ . Мы применим теорему Бетти для уравнений теории упругости, в которых неоднородность представлена членом, описывающим объемные силы.

Имеется много других аналогий между задачами Дирихле (для потенциалов, равных нулю на  $S$ ) и задачами теории упругости для жестких границ, а также между задачами Неймана ( $\partial\phi/\partial n = 0$  на  $S$ ) и задачами для свободных от напряжений границ.

Если существует такой момент времени  $\tau_0$ , до которого  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  равняются нулю по всему  $V$  (и, следовательно,  $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$  при  $\tau \leq \tau_0$ ), то свертка

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho \{ \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(\tau - t) - \mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(\tau - t) \} dt$$

равна нулю. Мы получаем из теоремы Бетти важный результат для полей смещений в среде, покоившейся в прошлом:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \iiint_V \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, \tau - t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau - t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \} dV = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dt \iint_S \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau - t) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau - t), \mathbf{n}) \} dS. \end{aligned} \quad (2.35)$$

## 2.4. ВВЕДЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА В ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Главная цель этой и следующей главы — получение математического представления для смещений, типичных в задачах сейсмологии. Представление будет получено в виде формулы, выражающей смещение (в произвольной точке пространства и времени) через величины, вызвавшие движение. Мы видели (теорема единственности), что таковыми являются объемные силы, напряжения, приложенные к поверхности рассматриваемого упругого тела, или смещения на этой поверхности. В разрывных движениях, связанных с землетрясениями, сейсмический источник сложный: он охватывает конечную часть плоско-

сти разрыва (или конечный объем) и действует в течение конечного времени. В общем случае ему соответствуют движения (в очаге) различного направления и величины. Мы обнаружим, что теорема представления — не что иное, как технический прием, при помощи которого смещение от реалистической модели источника синтезируется из смещений, вызванных простейшим из источников, а именно однонаправленным единичным импульсом, точно локализованным в пространстве и времени.

Смещение от такого простого источника — функция Грина динамической теории упругости. Если единичный импульс приложен в  $\mathbf{x} = \xi$  и  $t = \tau$  в  $n$ -м направлении [см. (2.4)], где мы принимаем, что  $A$  равно единице и имеет размерность количества движения), то мы обозначаем  $i$ -ю компоненту смещения в произвольных  $(\mathbf{x}, t)$  как  $G_{in}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)$ . Очевидно, что эта функция Грина — тензор (мы будем пользоваться декартовыми тензорами, не различая в связи с этим тензоры и диадики). Она зависит от координат приемника и источника и удовлетворяет в  $V$  уравнению

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{in} = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t - \tau) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_l} G_{kn} \right) \quad (2.36)$$

Мы будем всегда принимать в качестве начальных условий, что  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)$  и  $\partial\{\mathbf{G}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)\}/\partial t$  равны нулю при  $t \leq \tau$  и  $\mathbf{x} \neq \xi$ . Чтобы однозначно определить  $\mathbf{G}$ , необходимо только задать граничные условия на  $S$ ; в различных приложениях мы будем использовать набор различных граничных условий.

Если граничные условия не зависят от времени (например,  $S$  всегда абсолютно жестко), то начало отсчета времени можно произвольно сдвигать и мы видим из (2.36), что  $\mathbf{G}$  зависит от  $t$  и  $\tau$  только в комбинации  $(t - \tau)$ . Отсюда

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, -\tau; \xi, -t), \quad (2.37)$$

что является соотношением взаимности для времен источника и приемника.

Если  $\mathbf{G}$  удовлетворяет на  $S$  однородным граничным условиям, можно использовать (2.35), чтобы получить важные соотношения взаимности для пространственных положений источника и приемника. Пусть  $\mathbf{f}$  — единичный импульс, приложенный в  $m$ -м направлении в  $\mathbf{x} = \xi_1$  в момент времени  $t = \tau_1$ , и  $\mathbf{g}$  — единичный импульс, приложенный в  $n$ -м направлении в  $\mathbf{x} = \xi_2$  в момент времени  $t = -\tau_2$ . Тогда

$$u_i = G_{im}(\mathbf{x}, t; \xi_1, \tau_1) \quad \text{и} \quad v_i = G_{in}(\mathbf{x}, t; \xi_2, -\tau_2),$$

так что из (2.35) непосредственно вытекает

$$G_{nm}(\xi_2, \tau + \tau_2; \xi_1, \tau_1) = G_{mn}(\xi_1, \tau - \tau_1; \xi_2, -\tau_2). \quad (2.38)$$

Пусть  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ . Тогда

$$G_{nm}(\xi_2, \tau; \xi_1, 0) = G_{mn}(\xi_1, \tau; \xi_2, 0), \quad (2.39)$$

что указывает на чисто пространственную взаимность. Принимая в (2.38)  $\tau = 0$ , получаем

$$G_{nm}(\xi_2, \tau_2; \xi_1, \tau_1) = G_{mn}(\xi_1, -\tau_1; \xi_2, -\tau_2), \quad (2.40)$$

что устанавливает пространственно-временную взаимность.

Практическое вычисление функции Грина динамической теории упругости может быть связано с большими трудностями. Мы рассмотрим этот вопрос в гл. 4 для простейших упругих тел (однородных, изотропных, неограниченных), а также для случая больших расстояний между источником и приемником в неоднородных средах.

## 2.5. ТЕОРЕМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Если интегральная форма теоремы Бетти — уравнение (2.25) — используется так, что одно из полей смещений описывается функцией Грина, можно получить представление для второго поля смещений.

Предположим, что мы хотим найти выражение для поля смещений  $\mathbf{u}$ , вызванного объемными силами  $\mathbf{f}$ , действующими в  $V$ , и эффектом граничных условий на  $S$ . Мы подставляем в (2.35) объемную силу  $g_i(\mathbf{x}, t) = \delta_{in}\delta(\mathbf{x} - \xi)\delta(t)$ , для которой решением будет  $v_i(\mathbf{x}, t) = G_{in}(\mathbf{x}, t; \xi, 0)$ , и находим

$$\begin{aligned} u_n(\xi, \tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} dt \iiint_V f_i(\mathbf{x}, t) G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \xi, 0) dV \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} dt \iint_S \{ G_{in}(\mathbf{x}, \tau - t; \xi, 0) T_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n}) \\ & - u_i(\mathbf{x}, t) c_{ijkl} n_j G_{kn,l}(\mathbf{x}, \tau - t; \xi, 0) \} dS. \end{aligned}$$

Прежде чем давать физическую интерпретацию этого уравнения, полезно поменять местами буквы  $\mathbf{x}$  и  $\xi$ ,  $t$  и  $\tau$ . При этом  $(\mathbf{x}, t)$  будет соответствовать произвольному положению в пространстве-времени, для которого оценивается смещение; это смещение будет интегралом по объемным и поверхностным элементам с переменным  $\xi$  и интегралом свертки по времени. В результате

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x}, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V f_i(\xi, \tau) G_{in}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0) dV(\xi) \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_S \{ G_{in}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0) T_i(\mathbf{u}(\xi, \tau), \mathbf{n}) \\ & - u_i(\xi, \tau) c_{ijkl}(\xi) n_j G_{kn,l}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0) \} dS(\xi). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Это наша первая теорема представления. Она показывает, каким образом смещение  $\mathbf{u}$  в некоторой точке можно представить суммой членов, обусловленных силами  $\mathbf{f}$  внутри  $V$ , напряжениями  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{n})$  и самими смещениями  $\mathbf{u}$  на  $S$ . Однако выражения для весовых коэффициентов вкладов этих членов неудобны, так как каждое включает функцию Грина с источником в  $\mathbf{x}$  и точкой наблюдения в  $\xi$ . (Заметим, что в последнем члене в (2.41) имеется дифференцирование по  $\xi_j$ .) Мы же хотим, чтобы  $\mathbf{x}$  было точкой наблюдения, так чтобы наблюдаемое в ней суммарное смещение было суммой (интегралом) смещений в  $\mathbf{x}$ , вызванных каждым элементом объема и поверхности. Поэтому необходимо воспользоваться теоремой взаимности для  $\mathbf{G}$ , но это потребует дополнительных условий для функции Грина, поскольку уравнение  $G_{in}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0) = G_{ni}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0)$  [(см. (2.39)] было доказано только для функции  $\mathbf{G}$ , удов-

летворяющей однородным граничным условиям на  $S$ . В то же время (2.41) справедливо для *любой* функции Грина, возбужденной импульсной силой в  $n$ -м направлении при  $\xi = \mathbf{x}$  и  $\tau = t$ .

Исследуем два случая. Сначала положим, что функция Грина определена при условии, что  $S$  — абсолютной жесткая граница. Будем обозначать эту функцию  $\mathbf{G}^{\text{жестк}}$ , и  $G_{in}^{\text{жестк}}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0) = 0$  для точек  $\xi$ , лежащих на  $S$ . Тогда (2.41) принимает вид

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V f_i(\xi, \tau) G_{ni}^{\text{жестк}}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) dV - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_S u_i(\xi, \tau) c_{ijkl} n_j \frac{\partial}{\partial \xi_l} G_{nk}^{\text{жестк}}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) dS. \quad (2.42)$$

Введем теперь функцию Грина  $\mathbf{G}^{\text{CB}}$  для случая, когда напряжение  $c_{ijkl} n_j (\partial/\partial \xi_l) \mathbf{G}_{kn}^{\text{CB}}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0)$  равно нулю для  $\xi$ , принадлежащих  $S$ , и найдем, что

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V f_i(\xi, \tau) G_{ni}^{\text{CB}}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) dV + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_S G_{ni}^{\text{CB}}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) T_i(u(\xi, \tau), \mathbf{n}) dS. \quad (2.43)$$

Уравнения (2.41) — (2.43) — различные формы теоремы представления, и каждая имеет специфическое назначение. Взятые вместе, они создают кажущееся противоречие в вопросе о том, зависит ли  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  от смещения на  $S$  [см. (2.42)], от напряжения на  $S$  [см. (2.43)] или от того и другого [см. (2.41)]. Но поскольку напряжения и смещения не могут в упругой среде быть определены независимо, противоречия здесь нет.

Поверхность, на которой должны быть заданы значения напряжений (или смещений), в этой главе взята внешней по отношению к объему  $V$ . Часто полезно считать, что внутри этой поверхности имеются две внутренние поверхности, являющиеся противоположными сторонами погребенного разрыва. Тогда можно получить специфическую форму теоремы представления, позволяющую изучать землетрясения, вызванные активностью на этом разрыве. Это центральный вопрос теории очага землетрясений; он будет рассмотрен в следующей главе.

До сих пор мы рассматривали только декартову систему координат. На практике сейсмологам часто приходится использовать другие координатные системы, позволяющие упростить физические соотношения между компонентами смещений, напряжений и деформаций в соответствии с геометрическими свойствами рассматриваемой задачи. В частности, нередко оказывается, что граничные условия должны быть заданы на поверхности, которую можно определить как поверхность с постоянным значением одной из обобщенных криволинейных координат. Векторные операции grad, div, rot и  $\nabla^2$  вводятся для обобщенных ортогональных координат во многих учебниках; однако в теории упругости для анализа векторных операций требуется знать значительно больше.

## ДОПОЛНЕНИЕ 2.6

*Общие свойства ортогональных криволинейных координатных систем*

Рассмотрим точку с векторным положением  $\mathbf{x}$ , определяемую тремя параметрами  $c^1, c^2, c^3$ . Это означает, что каждая из трех компонент  $\mathbf{x}$  (в некоторой декартовой системе координат) — скалярная функция  $c^p$ :

$$x_i = x_i(c^1, c^2, c^3) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Положим, что функции  $x_i$  имеют непрерывные производные и что существуют обратные функции

$$c^p = c^p(x_1, x_2, x_3) \quad (p = 1, 2, 3) \quad \text{или} \quad c^p = c^p(\mathbf{x}),$$

так что уравнение  $c^p = \text{const}$  можно трактовать как координатную поверхность для каждого  $p$ , и эти три поверхности пересекаются по линиям, вдоль которых изменяется только одна из величин  $c^1, c^2, c^3$ . Мы будем использовать верхние индексы для величин, связанных с обобщенной криволинейной системой координат.

Пусть  $\mathbf{n}^p$  — единичная нормаль к координатной поверхности  $c^p = \text{const}$ , и положим, что  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  лежат на этой поверхности. Тогда  $c^p(\mathbf{x}) = c^p(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ , и, следовательно,  $d\mathbf{x} \cdot \nabla c^p = 0$  (мы использовали разложение в ряд Тейлора для  $c^p(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ ). Поскольку  $d\mathbf{x}$  — произвольный линейный элемент на поверхности, это означает, что  $\nabla c^p$  нормально к  $c^p = \text{const}$  и  $\nabla c^p$  параллельно  $\mathbf{n}^p$ .

Пусть длина вектора  $\nabla c^p$  равна  $1/h^p$  (масштабный множитель). Тогда

$$\mathbf{n}^p = h^p \nabla c^p. \quad (1)$$

(Мы отказываемся от правила суммирования для верхних индексов, но сохраняем его для нижних, относящихся к первоначальной декартовой системе.)

Будем считать, что  $c^1, c^2, c^3$  образуют *правостороннюю ортогональную систему координат*, т.е. что

$$\mathbf{n}^p \cdot \mathbf{n}^q = \delta^{pq} \quad (\text{символ Кронекера}) \quad (2)$$

и

$$\mathbf{n}^3 = \mathbf{n}^1 \times \mathbf{n}^2.$$

Используя обозначение  $n_i^p$  для  $i$ -й декартовой компоненты  $\mathbf{n}^p$ , мы можем получить теперь важное соотношение между  $\mathbf{n}^p$  и  $\partial \mathbf{x} / \partial c^q$ , а именно

$$\mathbf{n}^p = n_i^p \hat{\mathbf{x}}_i = n_i^p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i} = \sum_q n_i^p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial c^q} \frac{\partial c^q}{\partial x_i}$$

(мы применили здесь цепное правило). Тогда из (1) следует

$$\mathbf{n}^p = \sum_q n_i^p \frac{n_i^q}{h^q} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial c^q}$$

и из (2) получаем

$$\mathbf{n}^p = \sum_q \frac{\delta^{pq}}{h^q} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial c^q}.$$

Отсюда

$$\mathbf{n}^p = \frac{1}{h^p} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial c^p}. \quad (3)$$

Малое изменение положения  $d\mathbf{x}$  связано с малыми изменениями каждой из координат  $c^1, c^2, c^3$  на  $d\mathbf{x} = \sum_p (\partial \mathbf{x} / \partial c^p) dc^p$ , и величина этого изменения равна

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 &= dx \cdot dx = \sum_p \frac{\partial x}{\partial c^p} dc^p \cdot \sum_q \frac{\partial x}{\partial c^q} dc^q \\
 &= (h^1 dc^1)^2 + (h^2 dc^2)^2 + (h^3 dc^3)^2,
 \end{aligned} \tag{4}$$

что следует из (3) и (2). Этот результат указывает на один из способов быстрого нахождения масштабных функций: евклидово расстояние, связанное с приращением  $dc^1$  вдоль  $\mathbf{n}^1$ , равно  $h^1 dc^1$ ; аналогичные равенства имеются для  $h^2$  и  $h^3$ .

В разд. 2.6 нам потребуются формулы для производных вида  $\partial \mathbf{n}^p / \partial c^q$ , выраженные через недифференцируемые нормали. Из (2) и (3) следует, что эти производные должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}^p \cdot \frac{\partial \mathbf{n}^q}{\partial c^r} + \mathbf{n}^q \cdot \frac{\partial \mathbf{n}^p}{\partial c^r} &= 0 \quad (18 \text{ разных скалярных уравнений}), \\
 \frac{\partial}{\partial c^q} (h^p \mathbf{n}^p) &= \frac{\partial}{\partial c^p} (h^q \mathbf{n}^q) \quad (3 \text{ нетривиальных векторных уравнения}).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, мы имеем 27 различных скалярных уравнений для 27 скалярных неизвестных  $\partial \mathbf{n}^p / \partial c^q$ , и, следовательно, их в точности достаточно для отыскания решения. В векторной форме оно имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{n}^p}{\partial c^q} = \frac{\mathbf{n}^q}{h^p} \frac{\partial h^q}{\partial c^p} - \delta^{pq} \left[ \frac{\mathbf{n}^1}{h^1} \frac{\partial h^p}{\partial c^1} + \frac{\mathbf{n}^2}{h^2} \frac{\partial h^p}{\partial c^2} + \frac{\mathbf{n}^3}{h^3} \frac{\partial h^p}{\partial c^3} \right], \tag{6}$$

что можно проверить прямой подстановкой в (5).

## 2.6. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И СМЕЩЕНИЯМИ И МЕЖДУ СМЕЩЕНИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ В ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Продолжая анализ в обозначениях, введенных в дополнении 2.6, получим сначала формулы связи между компонентами деформаций  $e^{pq}$  и компонентами смещений  $u^i$ , обобщающие известный результат для декартовых координат

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i).$$

Под  $e^{pq}$  мы подразумеваем просто компоненты декартова тензора второго ранга  $\mathbf{e}$ , отнесенные к повернутым *декартовым координатным осям*, которые в интересующей нас точке по определению направлены вдоль  $\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3$ . Таким образом, мы подчеркиваем физические компоненты деформаций в отличие от обобщенных тензорных компонент (которые могут даже не иметь размерность деформации). Наша задача — выразить  $e^{pq}$  через производные (по  $c^1, c^2, c^3$ ) физических компонент смещений, также определенных относительно  $\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3$ . Возникающие при этом трудности связаны а) с изменением в пространстве масштабных множителей  $h^1, h^2, h^3$  и б) с пространственным изменением направлений осей  $\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3$ .

Направляющие косинусы повернутой декартовой оси  $\mathbf{n}^p$  по отношению к декартовым осям  $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3$  (зафиксированным и неизменяемым от точки к точке) равны  $(n_1^p, n_2^p, n_3^p)$ . Следовательно, в соответствии с правилами преоб-

разования векторных и тензорных декартовых компонент, подразумевая суммирование по повторяющимся нижним индексам, имеем:

$$\begin{aligned} u^p &= n_i^p u_i, \\ e^{pq} &= n_i^p n_j^q e_{ij}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Из формулы (3) дополнения 2.6, не суммируя по верхним индексам, получаем

$$e^{pq} = \frac{1}{h^p h^q} \frac{\partial x_i}{\partial c^p} \frac{\partial x_j}{\partial c^q} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Применяя к предыдущей строке цепное правило в обратном направлении, находим

$$\begin{aligned} e^{pq} &= \frac{1}{2h^p h^q} \left( \frac{\partial x_i}{\partial c^p} \frac{\partial u_i}{\partial c^q} + \frac{\partial x_i}{\partial c^q} \frac{\partial u_i}{\partial c^p} \right) = \frac{1}{2h^q} \left[ \frac{\partial}{\partial c^q} \left( \frac{u_i}{h^p} \frac{\partial x_i}{\partial c^p} \right) - u_i \frac{\partial}{\partial c^q} \left( \frac{1}{h^p} \frac{\partial x_i}{\partial c^p} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2h^p} \left[ \frac{\partial}{\partial c^p} \left( \frac{u_i}{h^q} \frac{\partial x_i}{\partial c^q} \right) - u_i \frac{\partial}{\partial c^p} \left( \frac{1}{h^q} \frac{\partial x_i}{\partial c^q} \right) \right]. \end{aligned}$$

Затем, повторно используя (3) из дополнения 2.6 и (2.44), будем иметь

$$\begin{aligned} e^{pq} &= \frac{1}{2h^q} \frac{\partial u^p}{\partial c^q} + \frac{1}{2h^p} \frac{\partial u^q}{\partial c^p} - \frac{1}{2} u_i \left[ \frac{1}{h^q} \frac{\partial}{\partial c^q} n_i^p + \frac{1}{h^p} \frac{\partial}{\partial c^p} n_i^q \right] \\ &= \frac{1}{2h^q} \frac{\partial u^p}{\partial c^q} + \frac{1}{2h^p} \frac{\partial u^q}{\partial c^p} - \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \left[ \frac{1}{h^q} \frac{\partial \mathbf{n}^p}{\partial c^q} + \frac{1}{h^p} \frac{\partial \mathbf{n}^q}{\partial c^p} \right]. \end{aligned}$$

Теперь мы можем использовать последнее уравнение дополнения 2.6 для получения

$$e^{pq} = \frac{1}{2} \left[ \frac{h^p}{h^q} \frac{\partial}{\partial c^q} \left( \frac{u^p}{h^p} \right) + \frac{h^q}{h^p} \frac{\partial}{\partial c^p} \left( \frac{u^q}{h^q} \right) \right] + \frac{\delta^{pq}}{h^q} \left[ \frac{u^1}{h^1} \frac{\partial h^p}{\partial c^1} + \frac{u^2}{h^2} \frac{\partial h^p}{\partial c^2} + \frac{u^3}{h^3} \frac{\partial h^p}{\partial c^3} \right], \quad (2.45)$$

где, наконец, полностью устранены все ссылки на декартовы координаты ( $x_1, x_2, x_3$ ). Для недиагональных компонент ( $p \neq q$ ) нужна только первая квадратная скобка, но для типичной диагональной компоненты (2.45) сводится, например, к виду

$$e^{11} = \frac{1}{h^1} \frac{\partial u^1}{\partial c^1} + \frac{u^2}{h^1 h^2} \frac{\partial h^1}{\partial c^2} + \frac{u^3}{h^3 h^1} \frac{\partial h^1}{\partial c^3}. \quad (2.46)$$

Для получения соотношений между обобщенными ортогональными компонентами смещений  $\mathbf{u}$  и напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  мы будем действовать тем же способом, как и при выводе  $\rho \ddot{u}_i = \tau_{ij}$ ,  $j$  в разд. 2.1 для фиксированных декартовых осей.

Главная трудность — в интерпретации  $\iint_S \boldsymbol{\tau} dS$  — интеграла по напряжениям на поверхности  $S$ , окружающей объем  $V$ . Пусть  $\mathbf{v}$  — внешняя нормаль на  $dS$ . Тогда

$$T_i(\mathbf{v}) dS = \tau_{ij} v_j dS = \sum_{p,q} \tau^{pq} n_i^p n_j^q v_j dS$$

(проведено преобразование компонент тензора к повернутой декартовой системе координат). Обозначая как  $\nu^q$  компоненту нормали к  $dS$  по оси  $\mathbf{n}^q$ , получаем

$$= \sum_{p,q} \tau^{pq} n_p^p \nu^q dS.$$

Теперь  $\nu^q dS$  — это проекция  $dS$  на поверхность  $c^q = \text{const}$  (рис. 2.6) так что  $\nu^1 dS = h^2 h^3 dc^2 dc^3$ ; аналогичный вид имеют выражения для  $\nu^2 dS$  и  $\nu^3 dS$ . Отсюда следует

$$\begin{aligned} \iint_S T_i dS &= \sum_p \iint_p [\tau^{p1} n_p^p h^2 h^3 dc^2 dc^3 + \tau^{p2} n_p^p h^3 h^1 dc^3 dc^1 + \tau^{p3} n_p^p h^1 h^2 dc^1 dc^2] \\ &= \sum_p \iiint_v \left[ \frac{\partial}{\partial c^1} (\tau^{p1} n_p^p h^2 h^3) + \frac{\partial}{\partial c^2} (\tau^{p2} n_p^p h^3 h^1) + \frac{\partial}{\partial c^3} (\tau^{p3} n_p^p h^1 h^2) \right] dc^1 dc^2 dc^3. \end{aligned}$$

Физический объем элемента  $dV$  равен  $h^1 h^2 h^3 dc^1 dc^2 dc^3$ , так что последовательно делая те же шаги, что и в доказательстве из разд. 2.1, находим

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f} + \frac{1}{h^1 h^2 h^3} \sum_{p,q} \frac{\partial}{\partial c^q} \left( \tau^{pq} \mathbf{n}^p \frac{h^1 h^2 h^3}{h^q} \right). \quad (2.47)$$

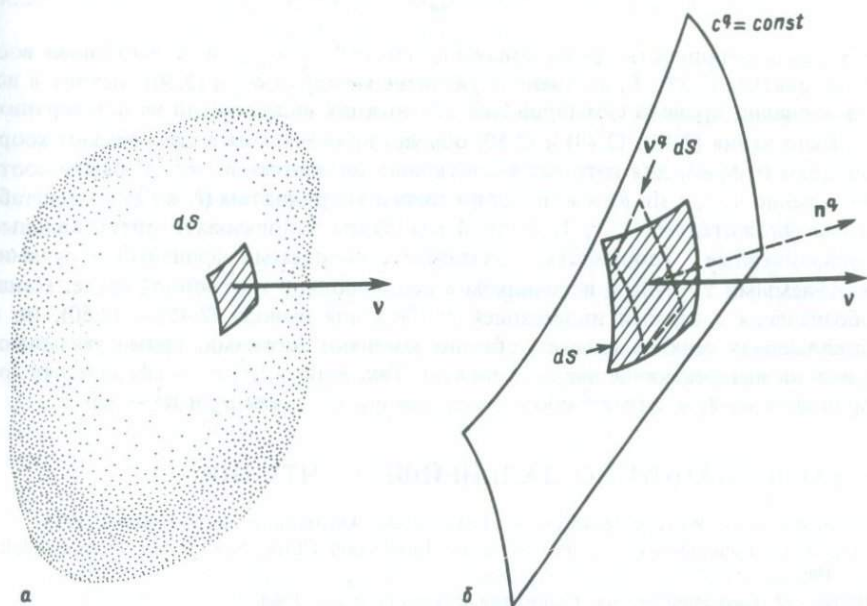


Рис. 2.6. Проектирование площадки  $dS$  на поверхность  $c^q = \text{const}$ . Площадь проекции  $dS$  на координатную поверхность равна  $\nu^q dS$ . а — площадка  $dS$  — участок поверхности объема  $V$ ; б — проекция  $dS$  на координатную поверхность  $c^q = \text{const}$  лежит внутри пунктирного контура.

Здесь опять необходимы производные  $\partial \mathbf{n}^p / \partial c^q$  [см. (6) из дополнения 2.6], и, решая (2.47) относительно направления  $\mathbf{n}^1$ , находим,

$$\rho \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} = f^1 + \frac{1}{h^1 h^2 h^3} \left[ \frac{\partial}{\partial c^1} (\tau^{11} h^2 h^3) + \frac{\partial}{\partial c^2} (\tau^{12} h^3 h^1) + \frac{\partial}{\partial c^3} (\tau^{31} h^1 h^2) \right] + \frac{\tau^{12}}{h^1 h^2} \frac{\partial h^1}{\partial c^2} + \frac{\tau^{31}}{h^3 h^1} \frac{\partial h^1}{\partial c^3} - \frac{\tau^{22}}{h^1 h^2} \frac{\partial h^2}{\partial c^1} - \frac{\tau^{33}}{h^3 h^1} \frac{\partial h^3}{\partial c^1}. \quad (2.48)$$

Подобные результаты для  $\rho \ddot{u}^2$  и  $\rho \ddot{u}^3$  можно получить перестановкой верхних индексов в (2.48).

Связь напряжений и деформаций  $\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}$  в изотропной среде принимает вид

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (2.49)$$

Для получения этого выражения мы использовали (2.33):  $\lambda$  и  $\mu$ , вообще говоря, — функции положения в пространстве, а  $e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$  — деформация объема. В уравнении (2.49) фигурируют компоненты тензоров в фиксированной декартовой системе координат, но соответствующий результат для физических компонент в обобщенной ортогональной системе имеет тот же вид:

$$\tau^{pq} = \lambda \delta^{pq} \sum_r e^{rr} + 2\mu e^{pq}, \quad (2.50)$$

так как изотропность среды означает, что  $c^{pqrs} = c_{pqrs}$ , и можно снова воспользоваться (2.33). Единственное различие между (2.49) и (2.50) состоит в использовании правила суммирования для нижних индексов, но не для верхних.

Выражения (2.46), (2.48) и (2.50) обычно применяются к сферическим координатам  $(r, \theta, \phi)$ , для которых масштабные множители  $h^1, h^2, h^3$  равны соответственно  $1, r, r \sin \theta$ , и к цилиндрическим координатам  $(r, \phi, z)$  с масштабными множителями  $1, r, 1$ . В гл. 4 мы будем использовать ортогональные криволинейные координаты, связанные с волновыми фронтами и лучами, излучаемыми точечным источником в неоднородной изотропной среде. Наши обозначения с верхней индексацией удобны для вывода (2.45) — (2.50), но в приложениях верхние индексы обычно заменяют нижними, прямо указывающими на интересующие нас координаты. Так, если  $c^1, c^2, c^3$  — сферические координаты  $(r, \theta, \phi)$ , то  $e^{12}$  обозначают как  $e_{r\theta}$ ,  $u^3$  — как  $u_\phi$  и  $\mathbf{n}^2$  — как  $\hat{\theta}$ .

## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ

*Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. Amsterdam: North-Holland, 1973.

*Fung Y. C.* Foundations of solid mechanics. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice-Hall, 1965.

*Jeffreys H.* Cartesian tensors, Cambridge University Press, 1965.

*Ляв А.* Математическая теория упругости. — М. — Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.

*Malvern L. E.* Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice-Hall, 1969.

\**Седов Л. И.* Механика сплошной среды (в 2-х томах). — М.: Наука, 1973.

\**Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теория упругости. — М.: Наука, 1965.

## ЗАДАЧИ

2.1. Что происходит с напряжениями в теле с ростом температуры при неизменной деформации? Будут ли напряжения подчиняться закону Гука (2.18) или понадобятся некоторые изменения этого закона? (Напомним, что сейсмологические приложения (2.18) обычно соответствуют адиабатическому нагружению.)

2.2. Мы показали, что поле смещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  упругого тела определяется единственным образом (например, приложенными объемными силами и напряжениями). Покажите, что объемные силы и напряжения заданы однозначно, если  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  известно во всех точках. (Доказательство «построением» проводится быстро и просто.)

2.3. Изменяются ли соотношения (2.21) — (2.25), если напряжения зависят от скорости деформаций (например, для вязкой среды)?

2.4. Найдите напряжение, вызванное полем смещений  $\mathbf{u}$ , действующим на элементы площадки, нормальные к  $\mathbf{n}$ , в форме

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + \mu \left( 2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \right).$$

Здесь

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{u}.$$

2.5. Напряжение  $\mathbf{T}$  предыдущей задачи является функцией положения точки  $\mathbf{x}$  в смысле  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{n})$ .

а) Измените вывод (2.7) так, чтобы продемонстрировать непрерывность напряжения как функции  $\mathbf{x}$  в том смысле, что

$$\mathbf{T}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0} \text{ при } \delta\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0},$$

при условии, что  $\delta\mathbf{x}$  параллельно направлению  $\mathbf{n}$ , определяющему ориентировку элементов площади, где оценивается  $\mathbf{T}$ .

б) Пусть на плоском столе лежит книга. Правда ли, что напряжение — непрерывная функция координат на поверхности стола?

в) Проверьте, не противоречат ли друг другу ваши ответы на п. «а» и «б».

г) Покажите, что  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zz}$  — непрерывные функции  $z$  в любой среде, но что  $\tau_{zz}$  не должно быть обязательно непрерывным в направлениях  $x$  и  $y$ , а также что  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  и  $\tau_{xy}$  не должны быть обязательно непрерывными в направлении  $z$ .

2.6. Для точки в жидкости под давлением  $P$  тензор напряжений изотропен и имеет компоненты  $\tau_{ij} = -P\lambda_{ij}$ . Чтобы подчеркнуть различия между напряжениями, возможными в твердом теле и существующими в жидкости, удобно определить *девиаторные напряжения*  $\tau'_{ij}$  из  $\tau_{ij} = (1/3)\tau_{kk}\lambda_{ij} + \tau'_{ij}$  и *девиаторные деформации* из  $e_{ij} = (1/3)e_{kk}\delta_{ij} + e'_{ij}$ . Покажите, что упругая энергия  $\mathcal{U}$  в изотропной упругой среде представима как

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} [(\lambda + \frac{2}{3}\mu)e_{ii}e_{kk} + 2\mu e'_{ij}e'_{ij}].$$

Покажите, что  $e_{ii}$  — это относительное изменение объема (т.е. объемная деформация). Отсюда  $\mathcal{U}$  можно рассматривать как сумму дилатационной энергии  $(1/2)[\lambda + (2/3)\mu]e_{ij}e_{kk}$  и упругой энергии  $\mu e'_{ij}e'_{ij}$ . Почему  $\lambda + (2/3)\mu$  (часто называемое *модулем сжатия*, обозначаемым  $\kappa$ ) и  $\mu$  должны быть положительны? Как естественнее называть  $\kappa$  — *сжимаемостью* или *несжимаемостью*?

## Описание сейсмических источников

Сейсмические волны возбуждаются ветром, морскими волнами, падениями метеоритов, запусками ракет, атмосферными взрывами и даже людьми, проходящими близко от сейсмометров. Однако перечисленные примеры относятся к источникам, внешним по отношению к твердой Земле, и их обычно можно анализировать просто как изменяющиеся во времени напряжения, приложенные к земной поверхности. Другие источники, которые во многих приложениях также можно рассматривать как внешние, — это вулканические извержения, взрывы с выбросом, откол (свободное падение поверхностного слоя, подброшенного вверх подземным взрывом). Для внутренних источников, таких как землетрясения и подземные взрывы, аналитический подход более сложен, поскольку уравнения (2.17)—(2.18), описывающие упругие колебания, повсюду в твердой Земле уже не выполняются. Эта глава посвящена внутренним источникам, и мы будем различать два разных типа источников — разрывные и объемные.

Разрывной источник представляет собой явление, связанное с внутренней поверхностью, такое как скольжение по плоскости разрыва. Объемный источник — явление, связанное с внутренним объемом, например внезапное (взрывное) расширение некоторой трехмерной очаговой области. Мы покажем, что возможен единый подход к обоим типам источников; связующим звеном является понятие внутренней поверхности, на которой может происходить разрыв смещений (в случае разрывного источника) или деформаций (у объемного источника).

В классических работах внутренние сейсмические источники математически описывали двумя способами: во-первых, объемной силой, приложенной к определенным элементам среды, содержащим источник; во-вторых, разрывами смещений или деформаций (например, на поверхности разрыва или объемного источника). Второй подход может быть с пользой включен в первый, и мы начнем наш анализ детальным выводом эквивалентных объемных сил для случая простого сдвига по поверхности разрыва и покажем, что существенно различные системы сил могут быть эквивалентны одному и тому же разрыву смещения. Затем, следуя Барриджу и Кнопову [66], представим общую теорию разрывных источников и, наконец, опишем теорию для объемных источников.

Характер движений, записываемых на сейсмограмме, определяется как пространством, так и источником. Поэтому главным стимулом к поиску путей для лучшего понимания механизма источника было желание выделить эффекты распространения, так как они несут информацию о внутреннем строении Земли. Однако в последние годы механизм очага землетрясений исследовали с целью картировать движения тектонических плит и изучить, как эти плиты приводятся

в движение. Теория очага теперь интенсивно развивается в связи с необходимостью прогнозировать разрушительные воздействия землетрясений на инженерные сооружения; при этом используются геологические и геофизические данные о свойствах близких разломов и распределении региональных напряжений.

### 3.1. ТЕОРЕМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ; ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОБЪЕМНЫЕ СИЛЫ ДЛЯ РАЗРЫВОВ В НАПРЯЖЕНИИ И СМЕЩЕНИИ

Теоремы представления, полученные в гл. 2, могут быть эффективным инструментом в теории сейсмического очага, если выбрать поверхность  $S$  так, чтобы она включала две стороны одной и той же поверхности, внутренней по отношению к объему  $V$ . Стимулом к такому выбору явилась работа Рейда, исследовавшего разлом Сан-Андреас до и после землетрясения 1906 г. в Сан-Франциско. Она привела к всеобщему признанию того факта, что смещения при землетрясении вызываются волнами, излучаемыми при внезапном скольжении по активным геологическим разломам. Мы обсудим этот механизм очага детальнее в разд. 3.2 и 3.3, а связанные с ним динамические процессы (и другие механизмы очага) — в гл. 15. В данный момент мы просто хотим показать, как наши теоремы представления помогают естественным образом исследовать процесс подвижки на погребенном разломе и излучаемые при этом волны.

Чтобы использовать (2.41) — (2.43), примем, что поверхность объема  $V$  состоит из внешней поверхности  $S$  (рис. 3.1) и двух сторон  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$  одной и той же внутренней поверхности  $\Sigma$ , представляющих противоположные поверхности разрыва. Если вдоль  $\Sigma$  происходит подвижка, то поле смещений терпит на ней разрыв и уравнение движения уже не может выполняться повсюду внутри  $S$ . Однако оно *выполняется* повсюду «внутри» поверхности  $S + \Sigma^+ + \Sigma^-$ , и к этой области мы можем применить наши прежние результаты.

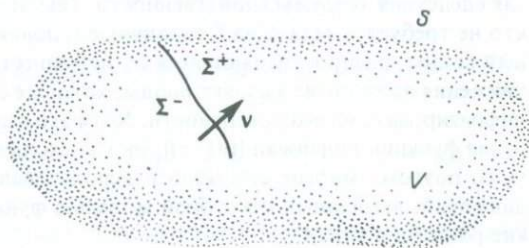


Рис. 3.1. Конечное упругое тело объема  $V$  с внешней поверхностью  $S$  и двусторонней внутренней поверхностью  $\Sigma$  (моделирующей погребенный разлом), на которой могут возникнуть разрывы. Смещения на стороне  $\Sigma^+$  поверхности  $\Sigma$  могут отличаться от смещений на стороне  $\Sigma^-$ . Нормаль  $\nu$  к  $\Sigma$  направлена от  $\Sigma^-$  к  $\Sigma^+$ , и скачок смещений в точке  $\xi$  на  $\Sigma$  обозначается  $[\mathbf{u}(\xi, \tau)]$ ; квадратные скобки обозначают разность  $\mathbf{u}(\xi, \tau)|_{\Sigma^+} - \mathbf{u}(\xi, \tau)|_{\Sigma^-}$ . В общем случае подобную же разность можно образовать и для напряжений (благодаря внешним силам, приложенным к  $\Sigma$ ), но для внезапного разрыва напряжения должны быть непрерывны и  $[\mathbf{T}(\mathbf{u}, \nu)] = 0$ .

Поверхность  $S$  (это может быть поверхность Земли) нас больше непосредственно не интересует, и мы предположим, что и  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{G}$  удовлетворяют на  $S$  однородным граничным условиям. Тогда

$$\begin{aligned}
 u_n(\mathbf{x}, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_V f_p(\boldsymbol{\eta}, \tau) G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\eta}, 0) dV(\boldsymbol{\eta}) \\
 & + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_{\Sigma} \{ [u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) c_{ijpq} v_j \partial G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) / \partial \xi_q ] \\
 & - [G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) T_p(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau), \nu)] \} d\Sigma. \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

В этой формуле  $\boldsymbol{\eta}$  используется как произвольная точка внутри  $V$ , а  $\boldsymbol{\xi}$  — как произвольная точка на  $\Sigma$ . Квадратными скобками обозначена разность значений на  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$  (см. подпись к рис. 3.1).

До настоящего момента не делалось никаких предположений относительно граничных условий на  $\Sigma$ . Хотя выбор  $\mathbf{u}$  должен согласоваться с фактическими свойствами смещений и напряжений вдоль поверхности вспарывающегося разрыва,  $\mathbf{G}$  можно выбрать так, чтобы это упростило дальнейшие выкладки. Следовательно, подвижка вдоль плоскости разрыва ведет к ненулевому значению  $[\mathbf{u}]$ , но непрерывность напряжений [см. доказательство (2.7) и задачу 2.5] указывает на  $[\mathbf{T}(\mathbf{u}, \nu)] = \mathbf{0}$ . Простейший и наиболее часто используемый способ определения свойств  $\mathbf{G}$  на  $\Sigma$  состоит в том, чтобы принять  $\Sigma$  за искусственную поверхность, на которой  $\mathbf{G}$  и ее производные непрерывны, так что  $\mathbf{G}$  будет удовлетворять уравнению движения (2.36) даже на  $\Sigma$ . Это наиболее легко вычисляемая функция Грина для объема  $V$ , и (в отсутствие объемных сил для  $\mathbf{u}$ ) она приводит к представлению

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_{\Sigma} [u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)] c_{ijpq} v_j \partial G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) / \partial \xi_q d\Sigma. \quad (3.2)$$

Не удивительно, что для определения смещения во всей среде достаточно задать смещение по поверхности разрыва: этого свойства (3.2) можно было ожидать как следствия теоремы единственности. Тем не менее на первый взгляд странно, что не требуется задать на  $\Sigma$  граничные условия для функции Грина, описывающей волны, распространяющиеся от источника. Можно было бы ожидать, что движения на разрыве вызовут волны, которые сами каким-либо способом будут дифрагировать на его поверхности. Хотя это взаимодействие осложняет определение функции подвижки  $[\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau)]$ , оно не входит в определение функции Грина в (3.2); поэтому многие сейсмологи использовали эту формулу для вычисления движений, вызванных некоторой моделью функции подвижки. Мы опишем такие расчеты в гл. 14.

### ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОБЪЕМНЫЕ СИЛЫ

Модель землетрясения, которую мы только что описали, не включает непосредственно объемных сил, хотя представление (3.2) дает смещение в  $(\mathbf{x}, t)$  как интеграл по функциям Грина, каждая из которых генерируется объемной силой и вносит свой вклад в решение. Поэтому имеет смысл рассматривать активную поверхность разрыва как поверхностное распределение объемных сил.

Чтобы определить эквивалентные объемные силы, мы начнем с (3.1) и предположим, что  $\Sigma$  прозрачно для  $\mathbf{G}$ . Не делая никаких предположений о скачках  $[\mathbf{u}]$  и  $[\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{n})]$  на  $\Sigma$  (так что допускаются также источники напряжений), найдем

$$\begin{aligned} u_n(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V f_p(\eta, \tau) G_{np}(x, t - \tau; \eta, 0) dV(\eta) \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_{\Sigma} \{ [u_i(\xi, \tau)] c_{ijpq} v_j G_{np,q}(x, t - \tau; \xi, 0) \\ & - [T_p(\mathbf{u}(\xi, \tau), \mathbf{v})] G_{np}(x, t - \tau; \xi, 0) \} d\Sigma(\xi). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Скачки на  $\Sigma$  можно локализовать внутри  $V$ , используя дельта-функцию Дирака  $\delta(\eta - \xi)$ . Например,  $[\mathbf{T}]d\Sigma(\xi)$  имеет размерность силы, и соответствующее ему распределение объемных сил (сила/единица объема) будет  $[\mathbf{T}]\delta(\eta - \xi)d\Sigma$  при изменении  $\eta$  внутри  $V$ . Скачок напряжений создает следующий вклад в смещение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V \left\{ - \iint_{\Sigma} [T_p(\mathbf{u}(\xi, \tau), \mathbf{v})] \delta(\eta - \xi) d\Sigma \right\} G_{np}(x, t - \tau; \eta, 0) dV.$$

Это выражение по форме точно соответствует вкладу объемных сил [см. первый член в правой части формулы (3.3)], и поэтому объемная сила, эквивалентная скачку напряжений на  $\Sigma$ , описывается как  $\mathbf{f}^{[\mathbf{T}]}$ , где

$$\mathbf{f}^{[\mathbf{T}]}(\eta, \tau) = - \iint_{\Sigma} [\mathbf{T}(\mathbf{u}(\xi, \tau), \mathbf{v})] \delta(\eta - \xi) d\Sigma(\xi). \quad (3.4)$$

Скачок смещений интерпретировать труднее, так как смещения связаны с силами более сложным образом, чем напряжения. Используем производную дельта-функции  $\partial\delta(\eta - \xi)/\partial\eta_q$ , чтобы локализовать точки на  $\Sigma$  внутри  $V$ . Эта функция имеет свойство

$$\frac{\partial}{\partial\xi_q} G_{np}(x, t - \tau; \xi, 0) = - \iiint_V \frac{\partial}{\partial\eta_q} \delta(\eta - \xi) G_{np}(x, t - \tau; \eta, 0) dV(\eta),$$

так что скачок смещений в (3.3) вносит следующий вклад в смещение в точке  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V \left\{ - \iint_{\Sigma} [u_i(\xi, \tau)] c_{ijpq} v_j \frac{\partial}{\partial\eta_q} \delta(\eta - \xi) d\Sigma \right\} G_{np}(x, t - \tau; \eta, 0) dV.$$

Эквивалентную скачку смещений на  $\Sigma$  объемную силу  $\mathbf{f}^{[\mathbf{u}]}$  можно найти из этого выражения как

$$f_p^{[\mathbf{u}]}(\eta, \tau) = - \iint_{\Sigma} [u_i(\xi, \tau)] c_{ijpq} v_j \frac{\partial}{\partial\eta_q} \delta(\eta - \xi) d\Sigma. \quad (3.5)$$

Хотя подынтегральное выражение состоит из 27 членов (суммирование по  $i, j, q$ ), различных для каждого  $p$ , мы найдем важные примеры, когда только два или три члена не равны нулю. Выражения для эквивалентных объемных сил (3.4)

и (3.5) справедливы в случае произвольной неоднородной анизотропной среды; интересно, что свойства упругой среды влияют на них только на самой поверхности разрыва.

#### ДОПОЛНЕНИЕ 3.1

##### *Об использовании эффективной подвижки и эффективных упругих постоянных в очаговой зоне*

Мы используем выражения «плоскость разрыва» и «поверхность разрыва», символизируемые буквой  $\Sigma$ , как математические понятия, не имеющие толщины. Однако на земле есть много мест, где геологи имеют прямой доступ к областям разломов и часто находят здесь зоны разрушенных и деформированных пород, обычно в несколько метров толщиной, так что геологи часто говорят о наличии «глинки трения» и «зоны разлома». Что же тогда означает наше утверждение, что эквивалентные объемные силы зависят от упругих постоянных только на поверхности разрыва?

Мощность самой зоны разлома почти всегда гораздо меньше длин волн обнаружимого сейсмического излучения; следовательно, изменение смещения через всю зону разлома представляет собой кажущийся разрыв смещений, который возбуждает волны, уходящие от очаговой зоны. Поэтому почти во всех практических случаях упругие постоянные в уравнениях (3.2), (3.3) и (3.5) — это константы, соответствующие прочной (неизменной) породе, окружающей зону разлома.

Поскольку образование разрыва внутри объема  $V$  — внутренний процесс, в этом объеме полное количество движения и полный момент количества движения должны сохраняться. Отсюда следует, что полная сила, вызванная  $\mathbf{f}^{[u]}$ , и полный момент силы  $\mathbf{f}^{[u]}$  относительно любой фиксированной точки должны равняться нулю. Таким образом,

$$\iiint_V \mathbf{f}^{[u]}(\boldsymbol{\eta}, \tau) dV(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0} \quad \text{для всех } \tau \quad (3.6)$$

и

$$\iiint_V (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \times \mathbf{f}^{[u]}(\boldsymbol{\eta}, \tau) dV(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0} \quad \text{для всех } \tau \text{ и любого фиксированного } \boldsymbol{\eta}_0. \quad (3.7)$$

В подтверждение (3.6) заметим, что  $p$ -я компонента в левой части равна  $-\iint_{\Sigma} [u_i] c_{ijpq} v_j \left\{ \iiint_V \delta \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) / \partial \eta_q dV \right\} d\Sigma(\boldsymbol{\xi})$ . Объемный интеграл здесь равен  $\iint_S \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) \eta_q dS(\boldsymbol{\eta})$  и обращается в нуль, потому что на  $S_{\boldsymbol{\eta}}$  не может быть равно  $\boldsymbol{\xi}$  ( $S$  и  $\Sigma$  не имеют общих точек).

Чтобы проверить (3.7), запишем  $m$ -ю компоненту слева как

$$\iiint_V \varepsilon_{mnp} (\eta_n - \eta_{0n}) f_p^{[u]} dV =$$

$$\begin{aligned}
&= - \iint_{\Sigma} c_{ijpq} v_j [u_i] \left\{ \iiint_V \varepsilon_{mnp} (\eta_n - \eta_{0n}) \frac{\partial}{\partial \eta_q} \delta(\eta - \xi) dV \right\} d\Sigma \quad [\text{из (3.5)}] \\
&= + \iint_{\Sigma} \varepsilon_{mqp} c_{ijpq} v_j [u_i] d\Sigma \quad [\text{так как } \frac{\partial}{\partial \eta_q} (\eta_n - \eta_{0n}) = \delta_{nq}] \\
&= 0 \quad (\text{из симметрии } c_{ijpq} = c_{ijqp}).
\end{aligned}$$

В качестве простого примера объемной силы, эквивалентной разрыву поля, рассмотрим случай, когда такая сила приложена только в одной точке в выбранном направлении (например, объемная сила для функции Грина из (2.4)). Ее можно рассматривать как разрыв компоненты напряжений. Чтобы получить соотношение эквивалентности, направим ось  $x_3$  в сторону увеличения глубины и рассмотрим вертикальную точечную силу, имеющую величину  $F$ , приложенную в точке  $(0, 0, h)$  в момент времени  $\tau = 0$  и не изменяющуюся затем со временем. Тогда

$$\mathbf{f}(\eta, \tau) = (0, 0, F) \delta(\eta_1) \delta(\eta_2) \delta(\eta_3 - h) H(\tau). \quad (3.8)$$

Вместо этого мы можем рассматривать разрыв напряжения в точке плоскости  $\xi_3 = h$  вида

$$[T(\xi, \tau)]_{\xi=(\xi_1, \xi_2, h^-)}^{\xi=(\xi_1, \xi_2, h^+)} = -(0, 0, F) \delta(\xi_1) \delta(\xi_2) H(\tau), \quad (3.9)$$

т.е.  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{23}$  непрерывны и разрыв претерпевает только  $\tau_{33}$ . Эквивалентность (3.8) и (3.9) можно показать непосредственной подстановкой в (3.4).

Наиболее важным примером эквивалентных объемных сил в сейсмологии является сдвиговый разрыв, и этот случай мы рассмотрим подробнее.

### 3.2. ПРОСТОЙ ПРИМЕР ПОДВИЖКИ ПО ВНУТРЕННЕМУ РАЗРЫВУ

Подвижка по поверхности разрыва возбуждает те же сейсмические волны, что и вызываются распределением на разрыве некоторых сил с нулевым суммарным моментом. Распределение (для данной подвижки) может иметь разный вид, но в изотропной среде его всегда можно выбрать как поверхностное распределение двойных пар сил. Такой вывод парадоксален, если учесть аргументы, использованные в продолжительном споре о том, моделируется ли землетрясение одинарной или двойной парой сил. Те, кто отстаивали теорию одинарной пары, считали, что землетрясение происходит в результате подвижки по разрыву, но интуитивно предполагали, что она эквивалентна одинарной паре (состоящей из двух сил, соответствующих движениям на противоположных сторонах разрыва). Интуитивный подход в динамической теории упругости часто бывает чреват опасными последствиями. С другой стороны, некоторые из тех, кто отстаивал теорию двойной пары, полагали, что землетрясение представляет собой быстрое разрушение некоторого объема среды под существующими скальвающими напряжениями. В последние годы теория разрыва (принимаемого теперь как эквивалент двойной пары) убедительно подтверждается растущим количеством данных, полученных вблизи очаговых зон, а также диаграммами направленности излучения, наблюдаемыми на больших расстояниях.

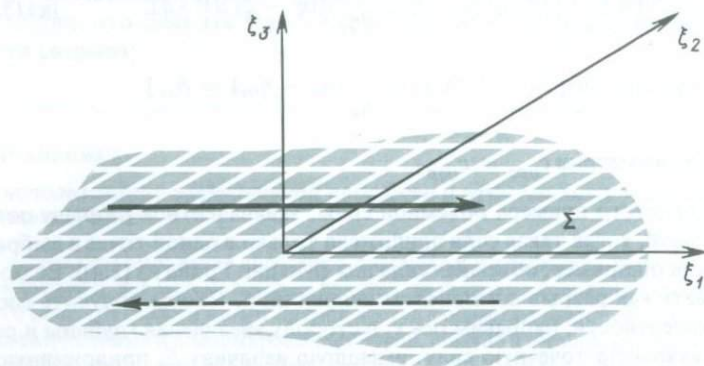


Рис. 3.2. Поверхность разрыва  $\Sigma$  внутри изотропной среды лежит в плоскости  $\xi_3 = 0$ . Подвижка происходит вдоль  $\Sigma$  в направлении  $\xi_1$  (жирные стрелки). Движение на стороне  $\Sigma^+$  (т.е.  $\xi_3 = 0^+$ ) — в направлении возрастающих  $\xi_1$ , на стороне  $\Sigma^-$  — в направлении убывающих  $\xi_1$ .

Примем (рис. 3.2), что разрыв  $\Sigma$  лежит в плоскости  $\xi_3 = 0$ , так что  $[\mathbf{u}]$  не имеет составляющей в направлении  $\xi_3$ . (Этот случай мы назвали «подвижкой по разрыву», так как  $[\mathbf{u}]$  параллельно  $\Sigma$ .) Пусть  $\xi_1$  — направление подвижки, так что  $[u_2] = [u_3] = 0$  и  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ . Тогда эквивалентная объемная сила в (3.5) сводится к виду

$$f_p(\boldsymbol{\eta}, \tau) = - \iint_{\Sigma} [u_1(\boldsymbol{\xi}, \tau)] c_{13pq} \frac{\partial}{\partial \eta_q} \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2.$$

В изотропной (хотя все еще, вообще говоря, неоднородной) среде, как это следует из (2.33), все  $c_{13pq}$  обращаются в нуль, кроме  $c_{1313} = c_{1331} = \mu$ . Отсюда

$$f_1(\boldsymbol{\eta}, \tau) = - \iint_{\Sigma} \mu(\boldsymbol{\xi}) [u_1(\boldsymbol{\xi}, \tau)] \delta(\eta_1 - \xi_1) \delta(\eta_2 - \xi_2) \frac{\partial}{\partial \eta_3} \delta(\eta_3) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$f_2(\boldsymbol{\eta}, \tau) = 0, \quad (3.10)$$

$$f_3(\boldsymbol{\eta}, \tau) = - \iint_{\Sigma} \mu [u_1] \frac{\partial}{\partial \eta_1} \delta(\eta_1 - \xi_1) \delta(\eta_2 - \xi_2) \delta(\eta_3) d\xi_1 d\xi_2.$$

Рассмотрим сначала  $f_1$ , которая, как мы увидим, относится к системе оди-нарных пар (силы в направлении  $\pm \eta_1$ , плечо вдоль  $\eta_3$ , момент вдоль  $\eta_2$ ), распределенных на  $\Sigma$ . Интегрирование дает

$$f_1(\boldsymbol{\eta}, \tau) = - \mu(\boldsymbol{\eta}) [u_1(\boldsymbol{\eta}, \tau)] \frac{\partial}{\partial \eta_3} \delta(\eta_3). \quad (3.11)$$

Как показано на рис. 3.3, эту компоненту можно рассматривать как точечные силы, распределенные по плоскости  $\eta_3 = 0^+$ , и силы противоположного направления, распределенные по плоскости  $\eta_3 = 0^-$ .

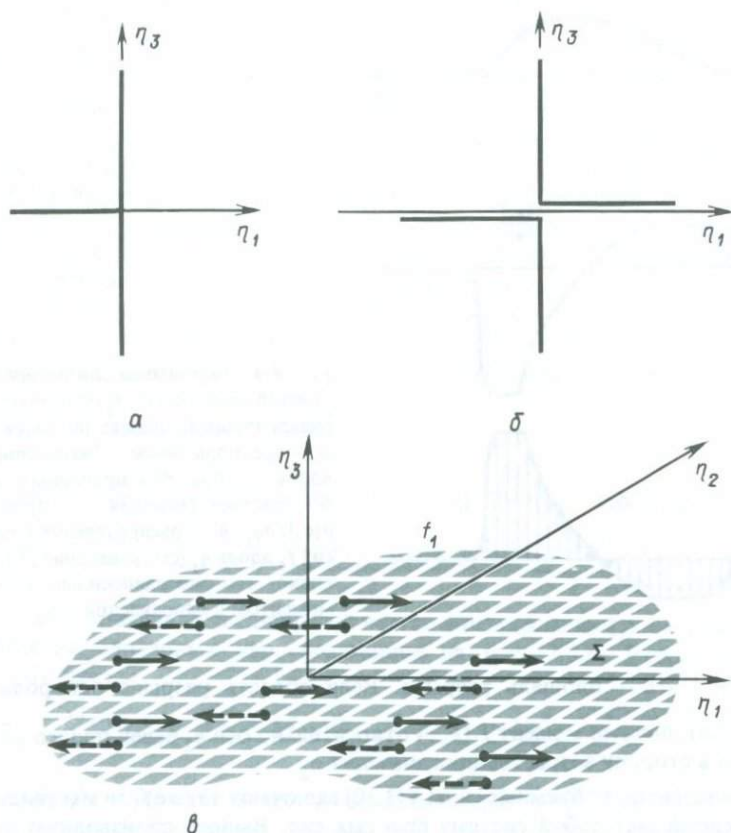


Рис. 3.3. Диаграммы для интерпретации первой компоненты  $f_1$  объемных сил, эквивалентных подвиге по разрыву такого типа, как изображено на рис. 3.2. *a* — график функции  $[-\delta(\eta_3), 0, 0]$  ( $\delta$ -функция действует в направлении  $-\eta_1$  в точке  $\eta_3 = 0$ ); *b* — график производной  $[-\partial/\partial\eta_3, \delta(\eta_3), 0, 0]$ : объемная сила  $(f_1, 0, 0)$  пропорциональна этой величине [см. уравнение (3.11)]; *c* — сплошными стрелками показано распределение  $f_1$  на стороне  $\Sigma^+$  поверхности  $\Sigma$ , а прерывистыми — на стороне  $\Sigma^-$ . Эта компонента объемной силы должна существовать в любой силовой модели движений, показанных на рис. 3.2.

Равнодействующая сил  $f_1$  равна нулю (см. анализ (3.6)), но момент только этой компоненты сил существует. Полный момент сил относительно оси  $\eta_2$  равен

$$\iiint_V \eta_3 f_1 dV = - \iiint_V \eta_3 \mu [u_1] \frac{\partial}{\partial \eta_3} \delta(\eta_3) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \iint_{\Sigma} \mu [u_1(\xi, \tau)] d\Sigma.$$

Найдем среднюю подвижку на  $\Sigma$ :

$$\bar{u}(\tau) \equiv \frac{\iint_{\Sigma} [u_1(\xi, \tau)] d\Sigma}{A},$$

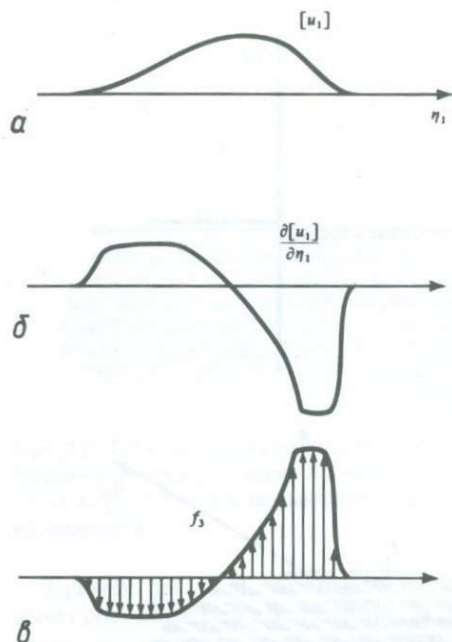


Рис. 3.4. Диаграммы для интерпретации третьей компоненты  $f_3$  объемных сил, эквивалентных подвижке по разрыву  $[u_1]$ . **а** — предполагаемое изменение  $[u_1]$  вдоль  $\eta_1$  при фиксированных  $\eta_2$  и  $\tau$ ; **б** — соответствующая производная  $\partial[u_1]/\partial\eta_1$ ; **в** — распределение одинарных сил  $f_3$  вдоль  $\eta_1$  [см. уравнение (3.12)]; очевидно, что оно равносильно паре сил с моментом в направлении  $-\eta_2$ .

где  $A = \iint_{\Sigma} d\Sigma$  — площадь разрыва. Если область разрыва однородна (т.е.  $\mu = \text{const}$ ), полный момент  $f_1(\xi, \tau)$  относительно оси  $\eta_2$  равен просто  $\mu \bar{\eta} A$  и направлен в сторону возрастающих значений  $\eta_2$ .

Эквивалентные объемные силы в (3.10) включают также  $f_3$ , и мы увидим, что она представляет собой систему простых сил. Вынося производную по  $\eta_1$  за пределы интеграла, находим

$$f_3(\eta, \tau) = -\frac{\partial}{\partial\eta_1} \{ \mu [u_1(\eta, \tau)] \} \delta(\eta_3). \quad (3.12)$$

Хотя эта компонента не является парой сил в каждой точке на  $\Sigma$  (в том смысле, в каком является парой  $f_1$ ), тем не менее распределение  $f_3$  по  $\Sigma$  имеет момент. На рис. 3.4 показано, как  $f_3$  может изменять направление на обратное в различных точках  $\Sigma$ . Суммарный момент сил относительно оси  $\eta_2$  равен

$$\begin{aligned} \iiint_V \varepsilon_{213} \eta_1 f_3 dV &= \iiint_V \eta_1 \frac{\partial}{\partial\eta_1} \{ \mu [u_1] \} \delta(\eta_3) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \\ &= \iint_{\Sigma} \xi_1 \frac{\partial}{\partial\xi_1} \{ \mu [u_1] \} d\xi_1 d\xi_2 = - \iint_{\Sigma} \mu [u_1] d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

(последнее равенство следует из интегрирования по частям с учетом того, что вдоль контура, окаймляющего поверхность  $\Sigma$ ,  $[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$ ). В однородной очаговой зоне полный момент  $f_3$  равен  $-\mu u A$ ; он равен по величине, но противоположен

по знаку полному моменту сил  $f_1$ . В более общей форме этот результат получен в (3.7); здесь мы нашли два взаимноуничтожающихся члена, соответствующих компонентам возникающих сил.

Мы показали, что подвижка по разрыву эквивалентна распределению одинарных пар ( $f_1$ ) плюс распределение простых сил ( $f_3$ ), которое эффективно действует как пара с противоположным по знаку моментом. Однако классический силовой эквивалент подвижки по разрыву — это распределение на  $\Sigma$  двойных пар. Для конечного разрыва это впервые доказал Маруяма в 1963 г. [225]. Дело заключается в том, что для данной подвижки эквивалентные силы определяют неединственным образом. Это можно увидеть непосредственно и получить при этом плотность распределения двойных пар, как и плотности распределения одинарных пар и простых сил, если выписать представление (3.2) для подвижки по разрыву, определенной на рис. 3.2. В результате имеем

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_{\Sigma} \mu[u_1] \left\{ \frac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3} + \frac{\partial G_{n3}}{\partial \xi_1} \right\} d\Sigma. \quad (3.13)$$

Первый член в фигурных скобках  $\partial G_{n1}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) / \partial \xi_3$  — это предел

$$\frac{(G_{n1}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi + \varepsilon \hat{\xi}_3, 0) - G_{n1}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi - \varepsilon \hat{\xi}_3, 0))}{2\varepsilon}$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (мы приняли  $\hat{\xi}_i$  за единичный вектор в направлении  $\xi_i$ ). Он описывает распределение одинарных пар, показанное на рис. 3.5,а. Второй член в (3.13) — это предел

$$\frac{(G_{n3}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi + \varepsilon \hat{\xi}_1, 0) - G_{n3}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi - \varepsilon \hat{\xi}_1, 0))}{2\varepsilon},$$

и такое распределение одинарных пар показано на рис. 3.5,б. Указанные две системы образуют распределение двойных пар, и мы должны спросить, почему

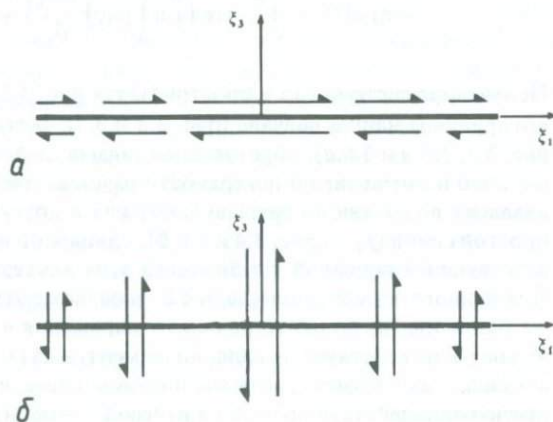


Рис. 3.5. Два распределения одинарных пар сил, в совокупности эквивалентные (в смысле сейсмического излучения) подвижке по разрыву. Заметим, что на любой элемент плоскости разрыва ( $\xi_3 = 0$ ) всегда действуют как одинарная пара сил, так и одинарная сила.

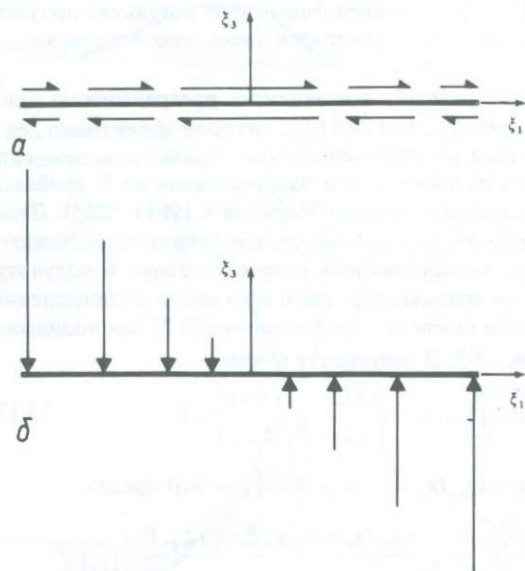


Рис. 3.6. Другая система сил, эквивалентная подвижке по разрыву (ср. с рис. 3.5). Ее образуют: *a* — система из одинарных пар плюс *б* — система одинарных сил. Для всей поверхности разрыва равнодействующая сил и полный момент сил равны нулю. Однако на отдельные элементы поверхности действуют пара сил и сила.

ранее найденный силовой эквивалент (3.10) образован одинарной парой плюс простая сила. Ответ на этот вопрос дает интегрирование одного из членов в (3.13) по частям:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\Sigma} \mu \left( [u_1] \frac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3} - \left[ \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} \right] G_{n3} \right) d\Sigma. \quad (3.14)$$

Полученная система сил иллюстрируется рис. 3.6; ясно, что это та же система, которую мы нашли вначале (рис. 3.3 и 3.4). Всегда имеется одинарная пара ( $f_1$ , рис. 3.3, 3.5, *a* и 3.6, *a*), образованная силами, действующими в том же направлении, что и смещение по поверхности разрыва (рис. 3.2). Но полный силовой эквивалент подвижки по разрыву содержит и другую часть, которая может быть простой силой ( $f_3$  — рис. 3.4 и 3.6, *б*), одинарной парой сил (рис. 3.5, *б*) или соответствующей линейной комбинацией этих альтернативных крайних вариантов. Для данного элемента площади  $d\Sigma$  на разломе эти системы сил физически весьма различны: из подынтегрального выражения в представлении (3.13) следует, что на  $d\Sigma$  не действует ни сила, ни момент, а из (3.14) видно, что на  $d\Sigma$  действует как сила, так и момент, хотя мы показали ранее, что объединение  $f_1$  и  $f_3$  дает нулевую равнодействующую сил и нулевой суммарный момент для всей  $\Sigma$  в целом.

Эти результаты были рассмотрены довольно детально, поскольку они показывают ограничения в использовании силовых эквивалентов при изучении динамики подвижки по разрыву. Вся поверхность разрыва излучает сейсмические во-

льны, и мы не можем оценить из (3.13) и (3.14) фактическую роль отдельных элементов площади разрыва. Это оправдано физически, так как элементы площади разрыва движутся не в динамической изоляции от других частей разрыва. Силовые эквиваленты (обычно выбираемые в виде распределения двойных пар сил) полезны главным образом только тогда, когда функция подвижки  $[\mathbf{u}(\xi, \tau)]$  определена или известна, и тогда они позволяют вычислить характеристики излучения приданием соответствующих весов функциям Грина.

На большом расстоянии от вспарывающегося разрыва часто удается наблюдать только волны, длина которых много больше линейных размеров  $\Sigma$  возбужденного их разлома. (Высококачественные компоненты относительно слабы даже в источнике — см. гл. 15 — и быстрее затухают в процессе распространения.) В таких случаях  $\Sigma$  действует как точечный источник, и подвижка локализуется заменой  $[\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \tau)]$  сосредоточенным распределением  $\bar{\mu}A \delta(\xi_1)\delta(\xi_2)H(\tau)$ . Тогда  $f_3$ , как и  $f_1$ , становится одинарной парой, и эквивалент подвижки по разрыву в виде двойной пары сил запишется как

$$\begin{aligned} f_1(\eta, \tau) &= -M_0 \delta(\eta_1)\delta(\eta_2) \frac{\partial}{\partial \eta_3} \delta(\eta_3)H(\tau) \\ f_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$f_3(\eta, \tau) = -M_0 \frac{\partial}{\partial \eta_1} \delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta(\eta_3)H(\tau),$$

где

$$M_0 = \bar{\mu}A = \mu \times \text{средняя подвижка} \times \text{площадь разрыва}. \quad (3.16)$$

Мы называем величину  $M_0$  *сейсмическим моментом*. Это, вероятно, наиболее фундаментальный параметр, который можно использовать, чтобы измерить силу землетрясения, вызванного подвижкой по разрыву. Измеренные значения  $M_0$  лежат в диапазоне от  $\sim 10^{30}$  дин  $\times$  см (Чилийское землетрясение 1960 г., Аляскинское землетрясение 1964 г.) до  $\sim 10^{12}$  дин  $\times$  см для микроземлетрясений и  $10^5$  дин  $\times$  см для микротрещин в лабораторных экспериментах на нагруженных образцах горных пород. Даже для геофизики 25 порядков величин — исключительно большой диапазон значений, принимаемых одной физической переменной. Первой двойную пару сил как эквивалент очага в виде эффективно-точечной подвижки получила А. В. Введенская [328]. Первую оценку сейсмического момента дал Аки [5]. Это было сделано для Ниигатского землетрясения 1964 г. по записям длиннопериодных волн Лява, зарегистрированных станциями Мировой сети стандартизованных сейсмографов (WWSSN).

Мы определили  $M_0$  как константу, но при решении некоторых задач полезнее рассматривать сейсмический момент как функцию времени  $\bar{\mu}i(t)A$ , где  $\bar{\mu}$  осреднено в момент времени  $t$ . В этих случаях  $M_0 H(\tau)$  в (3.15) заменяется на  $M_0(\tau)$ , и (в терминологии гл. 14) мы говорим о том, что «время нарастания» отлично от нуля.

Заметим, что имеется принципиальный произвол в идентификации плоскости разрыва, связанной с точечной двойной парой сил (3.15). Мы проделали все выводы для случая поверхности разрыва, нормальной к направлению  $x_3$ , и подвижки, параллельной направлению  $x_1$ . Если вместо этого принять, что поверхность разрыва нормальна к направлению  $x_1$ , а подвижка параллельна  $x_3$  с тем же мо-

ментом, тогда эквивалентная объемная сила опять определена (3.15). Отсюда следует, что в сейсмическом излучении эффективно-точечной подвижки не заключено информации, позволяющей отличить плоскость разрыва от ее вспомогательной плоскости (т.е. плоскости, перпендикулярной как плоскости разрыва, так и подвижке).

### 3.3. ОБЩИЙ АНАЛИЗ РАЗРЫВОВ СМЕЩЕНИЙ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ $\Sigma$

В этом разделе мы введем *тензор сейсмического момента*  $\mathbf{M}$ . Он зависит от силы источника и ориентации разрыва и характеризует всю информацию об очаге, которую можно получить, наблюдая волны с длиной, много большей линейных размеров  $\Sigma$ . В этом случае источник является эффективно-точечным с соответствующей характеристикой излучения, и тензор момента для данного землетрясения может быть оценен на практике по длиннопериодным телесеismicким данным. На практике сейсмологи используют тензоры момента для источников, имеющих силовой эквивалент в виде пар сил. Такие источники включают геологические сбросы (сдвиги) и взрывы (расширение), и  $\mathbf{M}$  для них — тензор второго ранга. Для сил, дифференцируемых более чем один раз, источники можно описать тензорами момента более высокого ранга.

Для источников конечных размеров введем *тензор плотности сейсмического момента*  $\mathbf{m}$ , который часто можно трактовать как  $d\mathbf{M}/d\Sigma$  или  $d\mathbf{M}/dV$  (для объемных источников).

Этот раздел является обобщением предыдущего в двух отношениях. Во-первых, координатные оси никак не связаны с ориентацией источника (это обобщение важно, потому что направление подвижки и ориентация плоскости разрыва обычно не известны априори, а должны находиться по излучаемым сейсмическим волнам). Во-вторых, допускаются скачки компоненты смещений, нормальной к плоскости разрыва, так что могут произойти явные растяжения или сжатия.

Начнем общий анализ разрывов смещений с представления (3.2), но используем теперь символ свертки  $*$ , так что

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} [u_i] v_j c_{ijpq} * \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{np} d\Sigma. \quad (3.17)$$

Если  $X_0$  — амплитуда силы, приложенной к точке  $\xi$  в направлении  $p$  с произвольным изменением во времени, то свертка  $X_0 * G_{np}$  дает  $n$ -ю компоненту смещения в  $(\mathbf{x}, t)$ , обусловленную переменной точечной силой в  $\xi$ . Более общим является случай, когда в  $\xi$  приложена сила  $\mathbf{F}(\xi, \tau)$ ; тогда мы можем просуммировать по  $p$  смещения, вызываемые отдельными компонентами силы, и получить  $n$ -ю компоненту смещения в  $(\mathbf{x}, t)$  в виде  $F_p * G_{np}$ . В (3.17) входит производная  $G_{np}$  по координате источника  $\xi_q$ . Такую производную, как мы видели в разд. 3.2, можно физически интерпретировать как эквивалент одинарной пары сил (с плечом в направлении  $\xi_q$ ) в точке  $\xi$  на  $\Sigma$ .

Для трех компонент силы и трех возможных направлений плеча существуют, как показано на рис. 3.7, девять обобщенных пар. Таким образом, эквивалентную поверхностную силу, соответствующую бесконечно малому элементу по-

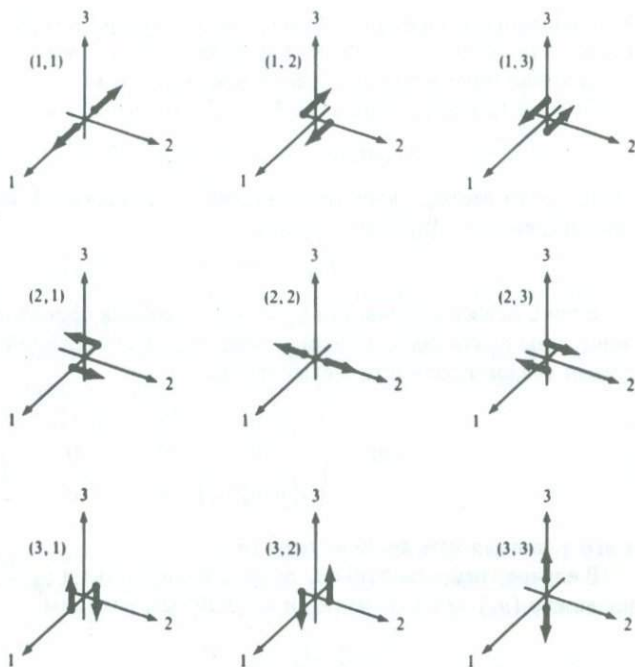


Рис. 3.7. Девять возможных пар сил, необходимых для получения силового эквивалента при произвольно ориентированном разрыве смещений в анизотропной среде.

верхности  $d\Sigma(\xi)$ , можно представить как комбинацию из девяти пар. В общем случае нам нужны и такие «пары», у которых сила и плечо направлены одинаково [случаи (1.1), (2.2), (3.3) на рис. 3.7]. Их иногда называют *векторными диполями*.

Поскольку  $[u_i]v_j c_{ijpq} * \partial G_{np}/\partial \xi_q$  в (3.17) — это поле в  $x$ , вызванное парами сил в  $\xi$ , значит  $[u_i]v_j c_{ijpq}$  — интенсивность пары  $(p, q)$ . Размерностью  $[u_i]v_j c_{ijpq}$  является момент силы на единицу площади, что имеет физический смысл, поскольку вклад от  $\xi$  в суммарный момент должен быть поверхностной плотностью, умноженной на бесконечно малый элемент площади  $d\Sigma$ . Определим

$$m_{pq} \equiv [u_i]v_j c_{ijpq} \quad (3.18)$$

как компоненты тензора плотности момента  $\mathbf{m}$ . Если использовать этот симметрический тензор, зависящий от времени, теорема представления для смещения в  $x$ , обусловленного произвольным скачком смещений  $\mathbf{u}(\xi, \tau)$  на  $\Sigma$ , примет вид

$$u_n(x, t) = \iint_{\Sigma} m_{pq} * G_{np,q} d\Sigma. \quad (3.19)$$

Когда мы узнаем больше о функции Грина (в гл. 4), мы найдем, что временная зависимость подынтегрального выражения в (3.19) весьма проста: когда  $x$  уда-

лено на много длин волн от  $\xi$ , свертка с  $\mathbf{G}$  создает в  $(\mathbf{x}, t)$  поле, зависящее от того, что происходит в  $\xi$  только в сдвинутый назад момент времени, т.е.  $t$  минус «задержка» (время распространения между  $\xi$  и  $\mathbf{x}$ ).

Для изотропного тела из (2.33) и (3.18) следует, что

$$m_{pq} = \lambda v_k [u_k(\xi, \tau)] \delta_{pq} + \mu (v_p [u_q(\xi, \tau)] + v_q [u_p(\xi, \tau)]). \quad (3.20)$$

Далее, если вектор разрыва смещения в  $\xi$  (подвижка) параллелен  $\Sigma$ , скалярное произведение  $\nu \cdot [\mathbf{u}]$  равно нулю и

$$m_{pq} = \mu (v_p [u_q] + v_q [u_p]). \quad (3.21)$$

Если  $\Sigma$  лежит в плоскости  $\xi_3 = 0$ , а подвижка происходит только в направлении  $\xi_1$ , мы приходим к модели источника, рассмотренной в разд. 3.2, и для этого случая тензор плотности момента равен

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu [u_1(\xi, \tau)] \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu [u_1(\xi, \tau)] & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а это знакомая нам двойная пара сил.

В случае трещины отрыва, лежащей в плоскости  $\xi_3 = 0$ , только компонента подвижки  $[u_3]$  не равна нулю, и из (3.20) мы находим

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \lambda [u_3(\xi, \tau)] & 0 & 0 \\ 0 & \lambda [u_3(\xi, \tau)] & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) [u_3(\xi, \tau)] \end{pmatrix}.$$

Таким образом, трещина отрыва является суперпозицией трех векторных диполей с отношением амплитуд 1:1:  $(\lambda + 2\mu)/\lambda$  (рис. 3.8).

Полученные выше результаты относились к плоскости разрыва конечных размеров; однако на практике сейсмолог часто имеет дело с данными, которые надежны только для периодов, при которых вся поверхность  $\Sigma$  — эффективно-точечный источник. Для этих волн вклады различных элементов  $d\Sigma$  поверхности  $\Sigma$  находятся приблизительно в фазе. Тогда всю поверхность  $\Sigma$  можно рассматривать как систему пар сил, расположенных в точке, например в центре  $\Sigma$ , с тензором момента, равным интегралу от тензора плотности момента на  $\Sigma$ . Таким образом, для эффективно-точечного источника

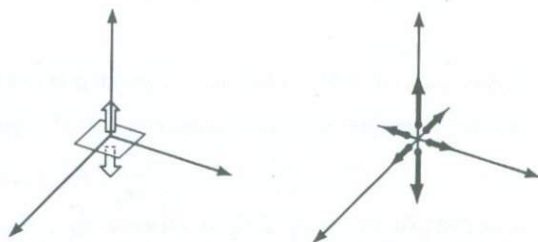
$$u_n(\mathbf{x}, t) = M_{pq} * G_{np,q}, \quad (3.22)$$

где компоненты тензора момента равны

$$M_{pq} = \iint_{\Sigma} m_{pq} d\Sigma = \iint_{\Sigma} [u_i] v_j c_{ijpq} d\Sigma, \quad \text{т.е. } m_{pq} = \frac{dM_{pq}}{d\Sigma}. \quad (3.23)$$

Уравнение (3.22) — одно из наиболее важных в этой главе. Позднее в этой книге мы дадим выражения для функции Грина и различных описываемых ею волн. Так в гл. 4 мы используем лучевую теорию для  $\mathbf{G}$  и будем интерпретировать (3.22) как сейсмограмму объемных волн, возбужденных данным  $\mathbf{M}$  [уравнение (4.91)]. В гл. 7 мы найдем выражения для поверхностных волн, возбуждаемых

Рис. 3.8. Силовой эквивалент для трещины отрыва в изотропной среде.



$\mathbf{M}$  [уравнения (7.147) — (7.150)], и в гл. 8 — для нормальных мод (собственных колебаний) Земли как целого (8.37).

Выражая тензор момента через сейсмический момент  $M_0$  в той же координатной системе, как в разд. 3.2, для эффективно-точечной подвижки получим

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ M_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.23) оправдывает название «тензора плотности момента» для  $\mathbf{m}$ . В случае источника конечных размеров мы можем теперь интерпретировать (3.19) как поверхностное распределение точечных источников, где каждая точка имеет тензор момента  $\mathbf{m}d\Sigma$ .

Мы завершим этот раздел интересным примером использования «сейсмического момента», предложенным Брюном [55] и связанным с кинематикой тектонических плит. Их движения часто приводят к такому характеру региональной сейсмичности, при котором много различных землетрясений имеют одну и ту же плоскость разрыва (хотя каждое отдельное явление связано с подвижкой только на части всей поверхности разрыва). Если  $M_0^i$  — сейсмический момент  $i$ -

#### ДОПОЛНЕНИЕ 3.2

##### Об использовании термина «момент» в теории сейсмического очага

В механике вращения часто говорят о паре сил как о системе, характеризующейся скалярной величиной, называемой моментом, и одним направлением. Однако в нашем исследовании разрывов смещений и эквивалентных объемных сил мы приписываем «паре» больше свойств, связанных с ориентацией, чем в механике вращения жестких тел. Для нас «пара» означает как направление сил, так и направление плеча рычага. В результате величина «момент» превращается из скалярной в тензорную.

Декартовы тензоры второго ранга в математической физике — это обычно величины, связывающие один физический вектор с другим [например, уравнение (2.16), в котором тензор напряжений — это средство для получения компонент напряжения из ориентации вектора элементарной площадки; или, например, тензор инерции  $\mathbf{I}$ , определяющий момент количества движения  $\mathbf{h}$  по угловой скорости  $\omega$  как  $h_i = I_{ij}\omega_j$ ]. Но в теории сейсмического очага тензор момента — входной сигнал, а не фильтр, и для получения векторного смещения на него надо подействовать тензором третьего ранга [см. (3.19) и (3.22)].

## ДОПОЛНЕНИЕ 3.3

## Эквивалентные объемные силы и тензор сейсмического момента

Для произвольного разрыва смещения на  $\Sigma$  из (3.5) получаем

$$f_p = -\frac{\partial}{\partial \eta_q} \{ [u_i] v_j c_{ijpq} \delta(\Sigma) \},$$

где под  $\delta(\Sigma)$  мы подразумеваем одномерную пространственную дельта-функцию Дирака, равную нулю вне  $\Sigma$ . Таким образом, если  $\Sigma$  лежит в плоскости  $\eta_3 = 0$ , то  $\delta(\Sigma) = \delta(\eta_3)$  для точек  $(\eta_1, \eta_2)$  на  $\Sigma$ .

Следует подчеркнуть, что  $\mathbf{f}$  — это сила в единице объема и что она определяется однозначно. (Если  $[u_i]$  задано на  $\Sigma$ ,  $\mathbf{u}$  определено повсюду и  $\mathbf{f} = \mathbf{L}(\mathbf{u})$ , где  $\mathbf{L}$  дано в дополнении 2.4.) Неопределенности, упомянутые в разд. 3.2, возникают только тогда, когда ищут эквивалентные поверхностные силы. Таким образом, приведенная выше формула для  $f_p$  не дает распределения пар и диполей. Такое распределение возникает только после того, как было проведено интегрирование по частям  $\iiint_V G_{np} \{f_p\} dV$  и последующее интегрирование по  $\eta_3$  привело к (3.17). Эта формула допускает интерпретацию в рамках эквивалентных поверхностных сил. Последние нельзя определить однозначно [см. (3.13) и (3.14)], но всегда можно найти поверхностное распределение пар и векторных диполей.

Мы ввели тензор сейсмического момента в форме  $M_{pq} = \iint_{\Sigma} [u_i] v_j c_{ijpq} d\Sigma$ , но из приведенной выше формулы для объемной силы вытекает, что

$$M_{pq} = \iiint_V f_p \eta_q dV(\eta).$$

С помощью этого результата можно обобщить определение  $\mathbf{M}$ , так как он пригоден для любого распределения объемных сил, а не только для силового эквивалента разрыва смещений. Согласно такому определению, момент (в обычном смысле механики вращения)

объемных сил  $\mathbf{f}$  относительно  $i$ -й оси равен  $\iiint_V \varepsilon_{ijk} \eta_j f_k dV = \varepsilon_{ijk} M_{kj}$ . Он равен нулю всегда, когда тензор момента симметричен [например, в (3.23)].

го землетрясения в серии из  $N$  землетрясений, то из определения  $M_0^i$  следует, что суммарная подвижка при всех землетрясениях этой серии равна

$$\Delta U = \frac{\sum_{i=1}^N M_0^i}{\mu S}, \quad (3.25)$$

где  $S$  — полная площадь разрыва.  $\Delta U$  осреднено по всей площади  $S$ , и можно оценить все члены в правой части (3.25). Если серия землетрясений включает все значимые перемещения за данный период времени  $\Delta T$  и если сейсмичность в течение  $\Delta T$  достаточно хорошо характеризует активность на этом участке границы плит за более продолжительный интервал времени, то  $\Delta U / \Delta T$  будет оценкой относительной скорости плит (рассматриваемых как медленно движущиеся жесткие тела), которая может быть получена исключительно из сейсмических данных.

ДОПОЛНЕНИЕ 3.4

### Упругая энергия, высвобождаемая землетрясением

Предположим, что внутри среды, находящейся под начальным статическим полем напряжений  $\sigma^0$ , развивается разрыв смещений на внутренней поверхности  $\Sigma$ . Это ведет к полю смещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , измеренному по отношению к начальной конфигурации, а по  $\mathbf{u}$  мы можем определить дополнительную, зависящую от времени деформацию и дополнительное напряжение  $\tau$ . Тогда полное напряжение равно  $\sigma = \sigma^0 + \tau$ , и после того, как все движения прекратились, новое статическое поле равно  $\sigma^1$ . Если  $\Delta E$  определить как изменение упругой энергии среды от начальной статической конфигурации до конечной статической конфигурации, можно показать, что

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} [u_i](\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1)v_j d\Sigma, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  — конечное смещение (смысл квадратных скобок и  $v$  пояснен в подписи к рис. 3.1). Уравнение (1) известно как соотношение Вольтерра [286, 310].

Этот результат (который мы далее выведем) можно проще сформулировать, если использовать работу, выполняемую напряжениями на поверхности разрыва. Из (1) вытекает, что высвобожденная упругая энергия всей среды ( $-\Delta E$ ) — положительная величина, полученная для воображаемого квазистатического роста напряжения, линейного по отношению к окончательному смещению:

$$T = T^0 + (T^1 - T^0) \frac{U}{[u]} \quad \text{при } 0 \leq U \leq [u] \quad (2)$$

(для каждой компоненты напряжения  $T$  и смещения  $U$ ). Интегрирование от 0 до  $[u]$  для получения полной работы, проделанной на  $\Sigma$ , приводит к (1).

Нужно сделать несколько замечаний о соотношении между  $\Delta E$  и средним напряжением.

Высвобожденная энергия  $-\Delta E$  обеспечивает совершение работы, фактически выполненной на двух сторонах поверхности  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$  во время их движения друг относительно друга, плюс работы, направленной на начало процесса трещинообразования. Мы рассмотрим эти два вида работы в гл. 15. Кроме того,  $-\Delta E$  включает сейсмическую энергию  $E_s$ , излучаемую из области очага. Естественно ввести сейсмический к.п.д.  $\eta$  как отношение  $E_s/(-\Delta E)$ . Это дает

$$E_s = -\eta \Delta E = \frac{1}{2} \eta \int_{\Sigma} [u_i](\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1)v_j d\Sigma. \quad (3)$$

Если среднее из двух статических напряжений не сильно изменяется вдоль  $\Sigma$ , то для касательной подвижки, показанной на рис. 3.2, (3) можно выразить через момент  $M_0 = \mu \int_{\Sigma} [u_1] d\Sigma$ . Следовательно,

$$E_s = \eta M_0 \bar{\sigma} / \mu, \quad (4)$$

где  $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_{13}^0 + \sigma_{13}^1)$ .

Оценив  $E_s$ ,  $M_0$  и  $\mu$ , можно при помощи (4) найти произведение  $\eta \bar{\sigma}$ , названное Уиссом и Брюном *кажущимся напряжением* [341, 342].

Поскольку функция подвижки  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  в (3.17) определяет все смещения (а следовательно, приращения деформаций и напряжений) в среде, она также определяет сброшенное напряжение  $\sigma^0 - \sigma^1$ . Однако нет способа, которым можно было бы, обрабатывая только наблюдения излученного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , узнать что-нибудь об абсолютном уровне напряжений в очаговой области. Перефразируя и используя (1), можно сделать следующее утверждение. Если одна и та же функция подвижки  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  реализуется на  $\Sigma$  в двух различных

разрывных событиях с различными начальными напряжениями, то все сейсмические смещения для этих двух событий совпадут, но высвобожденная при этом упругая энергия может оказаться существенно различной.

Теперь остается доказать наш главный результат (1). Это весьма общая формула, и ее правильный вывод может быть сделан на основе рассмотрения квазистатических деформаций, описанных в (2). Однако мы дадим явное доказательство для частного случая, в котором внутренняя упругая энергия  $\mathcal{W}$  определяется по функции упругой энергии  $\mathcal{W}^0$  (см. разд. 2.2). Далее предположим, что существует опорное состояние нулевых напряжений и деформаций. Начальные напряжения и деформации перед самым испариванием равны  $\sigma_{ij}^0$  и  $e_{ij}^0$ , и  $u$  измеряются от этого состояния.

Применяя (2.32) к полным напряжениям и деформациям, получаем

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij})(e_{ij}^0 + u_{i,j}).$$

Из симметрии  $\sigma_{ij}$  получаем

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^0 + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^0 u_{i,j} + \frac{1}{2}c_{ijkl} u_{k,l} e_{ij}^0,$$

а используя (2.30), находим

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^0 + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^0 u_{i,j} + \frac{1}{2}\sigma_{ki}^0 u_{k,l}.$$

Тогда увеличение внутренней энергии в новой статической конфигурации будет равно

$$\Delta E = \int_V (\mathcal{W}^1 - \mathcal{W}^0) dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^0) u_{i,j} dV, \quad (5)$$

где  $V$  — весь упругий объем, содержащий  $\Sigma$  (см. рис. 3.1). Поскольку  $\sigma_{ij}^0$  и  $\sigma_{ij}^1$  — поля статических напряжений, из (2.17) вытекает  $\sigma_{ij,j}^0 = \sigma_{ij,j}^1 = 0$  (мы предполагаем, что объемные силы отсутствуют). Из (5) получаем

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int_V \{(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1) u_{i,j}\}_{,j} dV.$$

Применим теорему Остроградского — Гаусса о дивергенции, рассматривая  $V$  как внутреннюю часть  $S + \Sigma^+ + \Sigma^-$ . Отсюда мы приходим к (1) в случае, когда  $S$  — жесткая поверхность или, как в случае Земли, когда она свободна от напряжений.

### 3.4. ОБЪЕМНЫЕ ИСТОЧНИКИ: ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ

Чтобы вывести уравнения для сейсмических волн, возбуждаемых подземными взрывами или быстрыми фазовыми переходами, необходимо ввести понятие объемного источника. Мы опишем такой источник при помощи трансформационных (свободных от напряжений) деформаций, вносимых в объем, занимаемый источником, и выведем свойства соответствующего тензора сейсмического момента.

Проиллюстрируем эти представления при помощи набора воображаемых операций выреза, деформирования и склеивания, описанных Эшелби [111].

1) Отделим материал области источника вырезом по замыкающей ее поверхности  $\Sigma$  и устраним этот объем («включение») из его окружения (вмещающей среды). На этом этапе мы предполагаем, что извлеченный материал сохраняет свою первоначальную форму благодаря напряжениям, имеющим на  $\Sigma$  то же значение, что и напряжения, действующие на  $\Sigma$  со стороны вмещающей среды до выреза.

2) Позволим материалу включения претерпеть трансформационную деформацию  $\Delta e_{rs}$ . Под этим мы подразумеваем, что  $\Delta e_{rs}$  происходит без изменения напряжений внутри включения — отсюда и название «деформация без напряжений». Именно эта деформация характеризует сейсмический источник. Подобного рода деформациями можно описать такие процессы, как фазовый переход, тепловое расширение и некоторые пластические деформации. Деформация без напряжений — статическая концепция.

3) Приложим дополнительные поверхностные напряжения, которые восставят объем включения до его первоначальной формы; для этого потребуется дополнительное поле напряжений  $-c_{pqrs}\Delta e_{rs} = -\Delta\tau_{pq}$  во всем включении, и дополнительные напряжения, приложенные к его поверхности  $\Sigma$ , равны  $-c_{pqrs}\Delta e_{rs}\nu_q$ , где  $\nu_q$  — внешняя нормаль к  $\Sigma$ . Поскольку  $\Delta\tau_{pq}$  — статическое поле,  $\Delta\tau_{pq,q} = 0$ . Напряжение во вмещающей среде еще не изменилось, так как оно удерживается на своем начальном значении напряжениями, приложенными к внутренней поверхности  $\Sigma$  и имеющими то же значение, что и напряжения, создававшиеся в этой среде «включением», прежде чем оно было вырезано.

4) Вложим «включение» назад в вырез (который имеет точно такую же форму) и склеим материал по разрезу. Напряжение на  $\Sigma^-$  теперь на  $-c_{pqrs}\Delta e_{rs}\nu_q$  больше, чем на  $\Sigma^+$ , что приводит к скачку напряжений (в направлении  $\nu$ ) на величину  $c_{pqrs}\Delta e_{rs}\nu_q$ . Это напряжение вызвано поверхностными силами, являющимися внешними к источнику и действующими на «включение» для сохранения его правильной формы.

5) Снимаем приложенные к  $\Sigma$  поверхностные силы. Поскольку напряжение фактически непрерывно на  $\Sigma$ , это равносильно внесению кажущегося скачка напряжений величиной  $-c_{pqrs}\Delta e_{rs}\nu_q$ . Упругое поле, созданное во вмещающей среде всем процессом, будет тем же, что и вызываемое кажущимся скачком напряжений на  $\Sigma$ .

Описанный выше способ можно обобщить на динамическую задачу возбуждения сейсмических волн, так как для любого момента времени трансформационную деформацию  $\Delta e_{rs}$  можно определить для недеформированного материала. В каждый момент все еще справедливо, что  $\Delta\tau_{pq,q} = 0$ . Сейсмическое смещение, возбуждаемое разрывом напряжений, описывается (3.3). Подставляя туда  $[T_p] = -(c_{pqrs}\Delta e_{rs})\nu_q$ , получаем

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_{\Sigma} c_{pqrs} \Delta e_{rs} \nu_q G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) d\Sigma(\xi). \quad (3.26)$$

Если подынтегральное выражение и его производные по  $\xi$  непрерывны, мы можем применить формулу Остроградского — Гаусса и получить

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V \frac{\partial}{\partial \xi_q} \{ c_{pqrs} \Delta e_{rs} G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) \} dV(\xi) \quad (3.27)$$

( $V$  здесь относится только к объему включения, т.е. к области источника). Используя  $\partial(c_{pqrs}\Delta e_{rs})/\partial \xi_q = \Delta\tau_{pq,q} = 0$ , мы можем записать (3.27) иначе:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iiint_V c_{pqrs} \Delta e_{rs} * \frac{\partial G_{np}}{\partial \xi_q} dV. \quad (3.28)$$

Сравнивая этот объемный интеграл с поверхностным интегралом в (3.17), можно видеть, что естественно ввести тензор плотности момента

$$\frac{dM_{pq}}{dV} = c_{pqrs} \Delta e_{rs} \quad (3.29)$$

с размерностью момент на единицу объема [ср. также с (3.23)]. Тогда

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iiint_V \frac{dM_{pq}}{dV} * \frac{\partial G_{np}}{\partial \xi_q} dV. \quad (3.30)$$

Заметим, что  $\Delta \tau_{pq} = dM_{pq}/dV$  — это не сброшенное напряжение (различие между напряжением в первоначальном равновесном состоянии и напряжением в конечном равновесном состоянии в зоне источника), как ясно из его определения. Сброшенное напряжение не ограничено объемом источника, а  $\Delta \tau_{pq}$  не существует за пределами объема источника и назван Бэкусом и Мулхахи [25] «излишком напряжения».

Для длинных волн, по отношению к которым весь объем  $V$  — эффективно-точечный источник,  $V$  можно рассматривать как сосредоточенную в точке (скажем, в центре  $V$ ) систему пар сил с тензором момента, равным интегралу от тензора плотности момента по  $V$ . Тогда для эффективного точечного источника применимо (3.22), что приводит к такому выражению для компонент тензора момента

$$M_{pq} = \iiint_V c_{pqrs} \Delta e_{rs} dV. \quad (3.31)$$

Например, если в однородном изотропном теле объема  $V$  произошло быстрое сдвиговое разрушение с ненулевыми компонентами трансформационной деформации (скажем,  $\Delta e_{13} = \Delta e_{31}$ ), тензор момента равен

$$\mathbf{M} = 2\mu V \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta e_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta e_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

В этом случае сейсмическое излучение такое же, как у точечного силового источника, эквивалентного подвижке по разрыву, но сейсмический момент  $M_0$  равен  $2\mu \Delta e_{13} V$ . Для группы землетрясений во внутриплитовой сейсмической зоне кумулятивная деформация может иметь больший смысл, чем кумулятивная подвижка, определяемая (3.25). Костров [201] предложил суммировать моменты для группы землетрясений однотипного механизма в данном объеме, чтобы определить полную деформацию этого объема. Из (3.32) полную деформацию  $\Delta E_{13}$  можно оценить как

$$\Delta E_{13} = \frac{\sum_{i=1}^N M_0^i}{2\mu V}, \quad (3.33)$$

где  $M_0^i$  — момент  $i$ -го землетрясения.

Наконец, рассмотрим эффект трансформационного увеличения сферического объема радиуса  $a$ . Компоненты деформаций без напряжений в этом случае равны  $\Delta e_{12} = \Delta e_{13} = \Delta e_{23} = 0$  и  $\Delta e_{11} = \Delta e_{22} = \Delta e_{33} = \Delta\theta/3$ , где  $\Delta\theta$  — относительное изменение объема. Для однородного изотропного тела из (3.31) имеем

$$M = \frac{4\pi}{3} a^3 \begin{pmatrix} \Delta p & 0 & 0 \\ 0 & \Delta p & 0 \\ 0 & 0 & \Delta p \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

где  $\Delta p = [\lambda + (2/3)\mu]\Delta\theta$ . Таким образом, сферический источник с трансформационным увеличением объема эквивалентен трем взаимно-перпендикулярным диполям (см. рис. 3.8). В уравнении (3.34) не следует путать  $\Delta p$  со скачком давления на сферической поверхности радиуса  $a$  (см. задачу 3.5).

## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ

- Backus G., Mulcahy M.* Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic waves. — I. Continuous displacements. *Geophysical Journal of the Royal Astr. Soc.*, **46**, 341 — 361, 1976.
- Backus G., Mulcahy M.* Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. — II. Geoph. Journ. Royal Astr. Soc., **47**, 301 — 329, 1976.
- Burridge R., Knopoff L.* Body force equivalents for seismic dislocations. *Bull. Seism. Soc. Amer.*, **54**, 1875 — 1888, 1964.
- Eshelby J. D.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. Royal Soc.*, **A241**, 376 — 396, 1957.
- Костров Б. В.* Теория очага тектонических землетрясений. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 4, 258 — 267, 1970.
- Костров Б. В.* Сейсмический момент, энергия землетрясений и сейсмическое течение горных масс. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 1, 13 — 21, 1974.
- Mariyama T.* On force equivalents of dynamic elastic dislocations with reference to the earthquake mechanism. *Bull. Earthq. Res. Inst., Tokyo Univ.*, **41**, 467 — 486, 1963.
- Nyland E.* Body force equivalents as sources of anelastic processes. *Canad. J. Earth Sci.*, **8**, 1184 — 1189, 1971.
- Press F., Archambeau C.* Release of tectonic strain by underground nuclear explosions. *J. Geoph. Res.*, **67**, 337 — 342, 1962.
- Savage J. C.* Steketee's paradox. *Bull. Seism. Soc. Amer.*, **59**, 381, 1969.
- Steketee J. A.* Some geophysical applications of the theory of dislocations. *Canad. Journ. Physics.*, **36**, 1168 — 1198, 1958.

## ЗАДАЧИ

**3.1.** Уравнения (3.25) и (3.32) записаны как скалярные, поскольку при их выводе предполагалось, что землетрясения в данной области (на  $S$  или внутри  $V$ ) имеют тензоры сейсмического момента с одной и той же ориентацией.

Обобщите (3.25) на случай векторного уравнения и (3.33) на случай тензорного уравнения для ситуаций, когда серия землетрясений (на  $S$  или в  $V$ ) имеет тензоры момента произвольной ориентации. (Но для (3.25) продолжайте предполагать, что разрыв смещений для каждого землетрясения чисто сдвиговый и что  $S$  — плоскость.)

3.2. При выводе (3.2) мы предполагали, что упругие модули непрерывны на  $\Sigma$  и что  $G_{np}$  и  $\partial G_{np}/\partial \xi_q$  непрерывны. Если упругие модули терпят разрыв на  $\Sigma$ , проинтегрируйте часть подынтегрального выражения в (3.2) как напряжения и покажите, что это представление все еще достоверно, хотя  $\partial G_{np}/\partial \xi_q$  может терпеть разрыв на  $\Sigma$ . (Замечание: при определении  $\mathbf{Q}$  надо принимать, что контакт на  $\Sigma$  жесткий.)

3.3. Мы установили, что зависящий от времени сейсмический момент определяется как  $M_0(t) = \mu \dot{u}(t)A$ .

Является ли  $u(t)$  средним по площади  $A(t)$ , соответствующей разрыву в момент  $t$ , или средним по площади  $A(\infty)$ , являющейся результирующей поверхностью разрыва для данного землетрясения?

3.4. Покажите, что силовой эквивалент точечного источника в  $\xi$  с тензором сейсмического момента  $M_{pq}$  равен

$$f_p(\mathbf{x}, t) = -M_{pq}(t) \frac{\partial}{\partial x_q} \delta(\mathbf{x} - \xi).$$

3.5. Рассмотрим сферическую полость радиуса  $a$  внутри однородного изотропного тела. Когда к поверхности полости приложен однородный скачок давления  $\Delta P$ , генерируются сферически-симметричные волны со смещением только в радиальном направлении. Покажите, что тензор момента точечного источника, эквивалентного этому сейсмическому источнику, имеет вид, аналогичный (3.34), с заменой множителя  $1/2$  на  $(\lambda + 2\mu)/\mu$ . (Используйте тот факт, что радиальное смещение вида  $u(r, t) = -\partial/\partial r [\psi(t - r/\alpha)/r]$  удовлетворяет уравнению движения, где  $r$  — расстояние от центра полости и  $\alpha$  — скорость продольных волн.)

## Упругие волны, излучаемые точечной дислокацией

Мы начинаем теперь серию из шести глав, в которой будут рассмотрены основные особенности распространения волн. В гл. 2 и 3 мы узнали, что сейсмические колебания могут быть получены интегрированием по пространственно-временной области, в которой действует источник. Интегрирование [см., например, (3.2)] — это синтез поля смещений из функции Грина, введенной в разд. 2.4. В данной главе исследуются свойства самой функции Грина, и мы выведем специальную формулу (4.23) для смещений внутри однородной, изотропной, неограниченной среды, вызванных однонаправленной силой, которая действует в некоторой точке среды и имеет произвольно зависящую от времени величину. Для получения этой формулы введены потенциалы упругих смещений, с ее помощью идентифицированы  $P$ - и  $S$ -волны.

Во многих задачах объемная сила, действующая в точке, — адекватная модель источника сейсмических смещений, наблюдаемых при землетрясении. Однако эквивалентная подвижке по разрыву объемная сила — не однонаправленная сила, а двойная пара сил [см. (3.15)]. Мы получим поле смещений для двойной пары и обсудим ее характеристику направленности излучения на больших расстояниях (в «дальней зоне») и на малых расстояниях (в «ближней зоне») от точки, где расположен источник.

Чтобы применить эти точные результаты на практике, необходимо иметь метод учета фокусировки и дефокусировки сейсмических волн неоднородностями Земли. Для приближенного решения этой проблемы в дальней зоне можно использовать классическую лучевую теорию. Главу завершают некоторые общие результаты, относящиеся к амплитуде и характеристике излучения волн  $P$  и  $S$  двойной парой сил при заданных падении и простирании плоскости разрыва и заданном направлении подвижки по этой плоскости.

### 4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ: ПОТЕНЦИАЛЫ УПРУГИХ СМЕЩЕНИЙ

Наша первая важная проблема — найти смещение  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , вызванное однонаправленной точечной объемной силой, действующей с зависящей от времени амплитудой в заданной точке  $O$  однородной, неограниченной, изотропной упругой среды. Без потери общности мы примем  $O$  за начало декартовой системы координат и ось  $x_1$  — за направление действия объемной силы. Уравнение, которое нужно решить для отыскания  $\mathbf{u}$ , как следует из (2.17), (2.18), (2.3) и (2.33), имеет вид

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj}$$

или

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (4.1)$$

где объемная сила  $\mathbf{f}$  определяется как  $f_i = X_0(t)\delta(\mathbf{x})\delta_{i1}$ , при нулевых начальных условиях  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$  при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

В обозначениях предыдущих глав это поле смещений имеет компоненты

$$u_n(\mathbf{x}, t) = X_0 * G_{n1},$$

и задача выглядит усложненной фактором направленности источника ( $\hat{\mathbf{x}}_1$  в  $O$ ) и приемника ( $\mathbf{u}$  в  $\mathbf{x}$ ).

А как тогда поставить аналогичную скалярную задачу (не имеющую таких усложнений), с помощью которой мы могли бы начать изучение общих свойств волн, распространяющихся от точечного источника в трехмерной среде? Чтобы избежать направленности источника, нужно рассматривать сферически-симметричную скалярную задачу, откуда вытекает естественная необходимость найти такую функцию  $g = g(\mathbf{x}, t)$ , что

$$\ddot{g} = \delta(\mathbf{x})\delta(t) + c^2\nabla^2 g, \quad (4.2)$$

с нулевыми начальными условиями. Решение (4.2) имеет вид

$$g(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\delta(t - |\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|}. \quad (4.3)$$

Этот удивительно простой результат, доказанный в дополнении 4.1, очень информативен в том, что касается природы волн в трех измерениях. Из него мы будем строить иерархию все более полезных функций Грина для задач динамической теории упругости. Формула (4.3) — первое явное волновое решение, приведенное в этой книге. Поэтому для дальнейшего использования необходимо запомнить три его важных свойства. Во-первых, оно является произведением двух множителей: дельта-функции, изменение которой в пространстве происходит очень быстро, и обратной функции от расстояния, изменяющейся относительно медленно (по крайней мере вдали от источника). В общем случае существует еще множитель, связанный с направленностью излучения и зависящий от того, куда направлен вектор  $\mathbf{x}$ , но в нашем случае этот множитель постоянен из-за сферической симметрии. Во-вторых, быстро меняющийся множитель при любом заданном  $|\mathbf{x}|$  зависит только от времени относительно «момента прихода» (здесь  $|\mathbf{x}|/c$ ), когда начинается движение. Очевидно, что  $c$  — скорость распространения волны. В-третьих, форма волны во времени (для любого фиксированного приемника) повторяет зависимость от времени неоднородного члена в уравнении (4.2). Это справедливо только для случаев, когда пространственная особенность источника имеет вид  $\delta(\mathbf{x})$  (например, для диполя такого повторения формы уже нет). Но именно такова ситуация в задаче динамической теории упругости (4.1). Мы также обнаружим в этом случае, что в смещении частиц преобладает та же импульсная форма, что и в приложенной объемной силе. Сходное свойство (4.2) и (4.3) заключается в обращении  $g$  в нуль для данного приемника после прохождения волны [в этом случае имеющей форму  $\delta(t - |\mathbf{x}|/c)$ ].

## ДОПОЛНЕНИЕ 4.1

Доказательство того, что

$$g(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 |\mathbf{x}|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right)$$

есть решение уравнения  $\ddot{g} = \delta(\mathbf{x})\delta(t) + c^2 \nabla^2 g$  с нулевыми начальными условиями.

Благодаря симметрии пространственная зависимость решения сводится только к зависимости от расстояния  $r = |\mathbf{x}|$  до источника. Поэтому мы будем искать  $g$  в виде  $g = g(r, t)$ . Выразив  $\nabla^2$  как дифференциальный оператор в сферических координатах, получим

$$\nabla^2 g = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rg).$$

Следовательно, всюду, за исключением  $r = 0$ ,  $rg$  удовлетворяет одномерному волновому уравнению  $(rg)'' = r\ddot{g}/c^2$  (штрих здесь обозначает  $\partial/\partial r$ ), которое имеет хорошо известное общее решение

$$rg = f(t - r/c) + h(t + r/c).$$

Мы знаем, что  $h = 0$ , так как искомое решение должно описывать волну, уходящую от источника. Следовательно, остается доказать, что  $f(r) = \delta(r)/(4\pi c^2)$ , т.е. что  $4\pi c^2 f(r)$  при интегрировании в некотором интервале времени имеет те же свойства, что и  $\delta(r)$ .

Это можно установить, исследуя функцию

$$F(r, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \equiv 4\pi c^2 \int_{r/c - \varepsilon_1}^{r/c + \varepsilon_2} g(r, t) dt = \frac{4\pi c^2}{r} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\tau) d\tau.$$

Применяя оператор  $\nabla^2$  к функции  $F$ , мы должны дифференцировать пределы и подынтегральное выражение с  $g$  по  $r$ , что дает

$$\nabla^2 F = 4\pi c \left[ 2\dot{g}'(r, t) + \frac{2}{r} g(r, t) + \frac{\dot{g}}{c}(r, t) \right]_{r/c - \varepsilon_1}^{r/c + \varepsilon_2} + 4\pi c^2 \int_{r/c - \varepsilon_1}^{r/c + \varepsilon_2} \nabla^2 g(r, t) dt.$$

Подставляя сюда  $c^2 \nabla^2 g = \ddot{g} - \delta(\mathbf{x})\delta(t)$  и находя в полученном выражении интеграл от  $\ddot{g}$ , получаем еще один член с  $\dot{g}/c$  в квадратных скобках. Из  $rg = f(t - r/c)$  следует  $g' = -g/r - \dot{g}/c$ , и все члены в квадратных скобках взаимно уничтожаются, что приводит к выражению

$$\nabla^2 F = -4\pi \delta(\mathbf{x}) \int_{r/c - \varepsilon_1}^{r/c + \varepsilon_2} \delta(t) dt.$$

Проинтегрировав правую часть по некоторому объему  $V$  с источником внутри этого объема или вне его, получим результат, равный интегралу по объему от  $-4\pi \delta(\mathbf{x}) \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \delta(t) dt$ .

Используя свойство  $\nabla^2(1/r) = -4\pi \delta(\mathbf{x})$ , имеем

$$F(r; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{r} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \delta(t) dt.$$

( $F$  не включает дополнительную гармоническую функцию, поскольку такая функция ли $\infty$  создает еще одну особенность при  $r = 0$ , либо нарушает свойство  $F \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ ). Из второго равенства в формуле, определяющей  $F$ , мы можем теперь найти, что

$4\pi c^2 \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\tau) d\tau = \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \delta(t) dt$  для всех  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , и, следовательно,  $f(r)$  — искомая дельта-функция.

На этом этапе можно поставить и решить следующие три задачи (при нулевых начальных условиях).

1) Если  $\ddot{g}_1 = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t - \tau) + c^2\nabla^2 g_1$ , то

$$g_1(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}.$$

2) Если  $\ddot{g}_2 = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})f(t) + c^2\nabla^2 g_2$ , то из

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$$

и написанного выше выражения для  $g_1$  получим

$$g_2(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g_1(\mathbf{x}, t) d\tau = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{f\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}. \quad (4.4)$$

Позднее мы найдем решения для распространения волн в неоднородной среде в форме, аналогичной (4.4). Однако в этом случае решения будут приближенными, справедливыми лишь на больших удалениях от точечного источника (рис. 4.1).

3) Если источник распределен в некотором объеме  $V$  и во времени, например

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\Phi(\mathbf{x}, t)}{\rho} + \alpha^2 \nabla^2 \phi \quad (4.5)$$

(мы используем  $\phi$ , а не  $g_3$ , по причинам, которые станут понятны в дальнейшем), то

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V \Phi(\boldsymbol{\xi}, \tau) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) dV(\boldsymbol{\xi}).$$

Исходя из принципа суперпозиции, решение (4.5) будет иметь вид

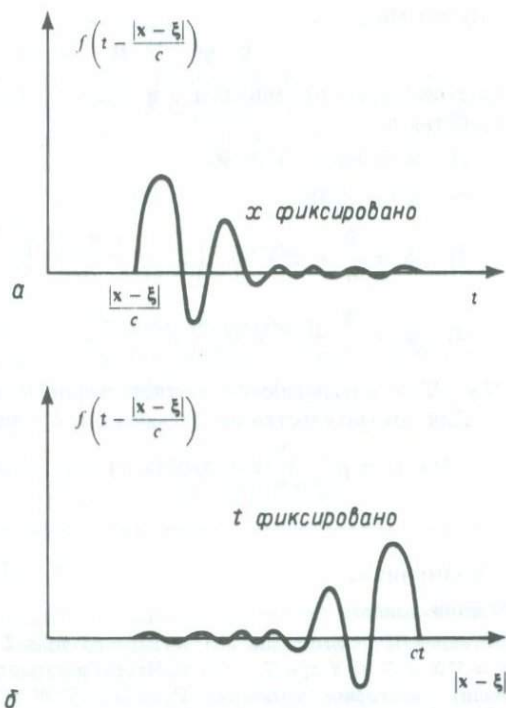
$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\alpha^2\rho} \iiint_V \frac{\Phi\left(\boldsymbol{\xi}, t - \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}{\alpha}\right)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dV. \quad (4.6)$$

Оно имеет важное свойство, что поле в  $(\mathbf{x}, t)$  чувствительно к активности источника в элементе  $dV$  (в  $\boldsymbol{\xi}$ ) только в некоторый *задержанный момент времени*  $t - |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|/\alpha$ . Необходимо еще раз подчеркнуть, что с учетом этого факта решение (4.6) имеет замечательно простой вид, если учесть характер соответствующего уравнения (4.5) — дифференциального уравнения второго порядка в частных производных с четырьмя переменными (три пространственные и одна временная) и неоднородным членом общего вида.

Уравнение

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\Phi(\mathbf{x})}{\alpha^2 \rho} \quad (4.7)$$

Рис. 4.1. В простейшем случае волна — это распространяющаяся величина, которая является функцией определенной линейной комбинации пространственных координат и времени. *а* — в некоторых задачах мы интересуемся волной как функцией времени, наблюдаемой на фиксированном расстоянии  $|x - \xi|$  от источника, находящегося в  $\xi$ ; такой ситуации соответствует сейсмограмма; *б* — в других задачах нас интересует волна как функция пространственных координат в фиксированный момент времени. Такой ситуации соответствует мгновенная фотография волны.



является частным случаем (4.5) и называется уравнением Пуассона; в нем отсутствует временная зависимость. Из (4.6) видно, что оно имеет решение, не зависящее от времени:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\alpha^2\rho} \iiint_V \frac{\Phi(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} dV. \quad (4.8)$$

Теперь перед нами стоит задача преобразовать уравнение динамической теории упругости (4.1) в решаемое уравнение типа (4.5). Ниже мы покажем, каким путем можно провести такое преобразование (теорема Ламе), а в дополнении 4.2 продемонстрируем, что дает этот довольно тонкий результат.

#### 4.1.1. ТЕОРЕМА ЛАМЕ

Если поле смещений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (\text{снова 4.1})$$

и если объемная сила и начальные значения  $\dot{\mathbf{u}}$  и  $\mathbf{u}$  выражаются через потенциалы Гельмгольца как

$$\mathbf{f} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi; \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \nabla A + \nabla \times \mathbf{B}; \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \nabla C + \nabla \times \mathbf{D} \quad (4.9)$$

с нулевыми

$$\nabla \cdot \Psi, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}, \quad (4.10)$$

то существуют потенциалы  $\phi$  и  $\psi$  для  $\mathbf{u}$ , обладающие следующими четырьмя свойствами:

$$1) \quad \mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \psi; \quad (4.11)$$

$$2) \quad \nabla \cdot \psi = 0; \quad (4.12)$$

$$3) \quad \ddot{\phi} = \frac{\Phi}{\rho} + \alpha^2 \nabla^2 \phi \quad \left( \alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right); \quad (\text{снова 4.5})$$

$$4) \quad \ddot{\psi} = \frac{\Psi}{\rho} + \beta^2 \nabla^2 \psi \quad \left( \beta^2 = \frac{\mu}{\rho} \right) \quad (4.13)$$

( $\nabla \phi$  и  $\nabla \times \psi$  называются соответственно *P*- и *S*-компонентами  $\mathbf{u}$ ).

Для доказательства представим  $\phi$  и  $\psi$  в виде интегралов:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \rho^{-1} \int_0^t (t - \tau) \{ \Phi(\mathbf{x}, \tau) + (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \} d\tau + tA + C, \quad (4.14)$$

#### ДОПОЛНЕНИЕ 4.2

##### О потенциалах

Потенциалы Гельмгольца для векторного поля  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{x})$  — это поля  $X, Y$  такие, что  $\mathbf{Z} = \nabla X + \nabla \times Y$  при  $\nabla \cdot Y = 0$ . Чтобы построить  $X$  и  $Y$  для заданного  $\mathbf{Z}$ , достаточно решить векторное уравнение Пуассона  $\nabla^2 \mathbf{W} = \mathbf{Z}$ , поскольку тогда из тождества  $\nabla^2 \mathbf{W} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{W})$  следует, что в качестве потенциалов можно выбрать  $X = \nabla \cdot \mathbf{W}$  и  $Y = -\nabla \times \mathbf{W}$ . Решением векторного уравнения Пуассона служит простое обобщение (4.8) и (4.7); оно имеет вид

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = - \iiint_V \frac{\mathbf{Z}(\xi)}{4\pi|\mathbf{x} - \xi|} dV(\xi).$$

Почему же мы не определили упругие потенциалы  $\phi$  и  $\psi$  как потенциалы Гельмгольца для  $\mathbf{u}$ ? Причина в том, что подстановка (4.11) и (4.12) в уравнение динамической теории упругости (4.1) приводит к дифференциальным уравнениям в частных производных *третьего* порядка относительно  $\phi$  и  $\psi$ . К ним нужно применить операторы  $\nabla \cdot ( )$  и  $\nabla \times ( )$ , чтобы получить отдельные уравнения для потенциалов, удовлетворяющих волновым уравнениям *четвертого* порядка:

$$\nabla^2 \{ \rho \ddot{\phi} - \Phi - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi \} = 0, \quad \nabla^2 \{ \rho \ddot{\psi} - \Psi - \mu \nabla^2 \psi \} = 0.$$

Теорема Ламе приводит к значительно более сильному результату, так как благодаря ей мы должны искать потенциалы, удовлетворяющие волновым уравнениям лишь *второго* порядка.

В заключение укажем два примечательных факта. Теорема Ламе была сформулирована и использовалась почти 100 лет, прежде чем было дано ее доказательство. Теорема остается справедливой даже для статических полей  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Однако в этом случае  $\phi$  и  $\psi$  остаются функциями  $\mathbf{x}$  и  $t$ , и они все еще удовлетворяют волновому уравнению, хотя зависимость от времени для комбинации  $\nabla \phi + \nabla \times \psi$  исчезает.

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \rho^{-1} \int_0^t (t - \tau) \{ \Psi(\mathbf{x}, \tau) - \mu \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \} d\tau + t\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (4.15)$$

и проверим, действительно ли определенные таким образом  $\phi$  и  $\psi$  обладают свойствами «1» — «4». Свойства «1» и «2» проверить легко. Чтобы получить свойство «3», найдем из (4.14), что левая часть «3» — это  $[\Phi + (\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \mathbf{u}]/\rho$ . Но она равна правой части «3», поскольку из «1» следует, что  $\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \mathbf{u}$ . Последнее свойство, «4», можно получить тем же способом, используя ряд векторных тождеств:

$$\nabla^2 \mathbf{V} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}), \quad \nabla \times (\nabla \Phi) \equiv \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \equiv 0.$$

Итак, найдя решение скалярного волнового уравнения и способ сведения уравнений динамической теории упругости к более простым уравнениям для потенциалов, мы можем вернуться к главной теме этой главы.

#### 4.2. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОДНОРОДНОЙ, ИЗОТРОПНОЙ, НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Напомним, что мы ищем смещения  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , удовлетворяющие уравнению динамической теории упругости (4.1) с объемной силой  $\mathbf{f}$ , которая приложена в источнике с амплитудой  $X_0(t)$  в направлении  $x_1$  (т.е.  $\hat{\mathbf{x}}_1$ ).

Первым шагом будет нахождение таких потенциалов объемных сил  $\Phi$  и  $\Psi$ , при которых

$$X_0(t)\delta(\mathbf{x})\hat{\mathbf{x}}_1 = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi \quad \text{и} \quad \nabla \cdot \Psi = 0. \quad (4.16)$$

Задача такого типа решается в дополнении 4.2, так как  $\Phi$  и  $\Psi$  — потенциалы Гельмгольца для  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  в любой фиксированный момент времени. Вначале вводим функцию

$$\mathbf{W} = -\frac{X_0(t)}{4\pi} \iiint_V (1, 0, 0) \frac{\delta(\xi) dV}{|\mathbf{x} - \xi|} = -\frac{X_0(t)}{4\pi|\mathbf{x}|} \hat{\mathbf{x}}_1,$$

с помощью которой можно записать

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \nabla \cdot \mathbf{W} = -\frac{X_0(t)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \\ \Psi(\mathbf{x}, t) &= -\nabla \times \mathbf{W} = \frac{X_0(t)}{4\pi} \left( 0, \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{|\mathbf{x}|}, -\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

На первый взгляд кажется несколько странным, что наша пространственно-сосредоточенная объемная сила (пропорциональная  $\delta(\mathbf{x})$ ) имеет потенциалы (4.17), не равные нулю вне области источника. Такое в теории упругости встречается часто и указывает на искусственный характер метода потенциалов.

Второй шаг в отыскании выражений для смещений — решение уравнений для потенциалов Ламе  $\phi$  и  $\psi$ . Из (4.5), (4.13) и (4.17) мы получаем

$$\ddot{\phi} = -\frac{X_0(t)}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \alpha^2 \nabla^2 \phi \quad (4.18)$$

и

$$\ddot{\psi} = \frac{X_0(t)}{4\pi\rho} \left( 0, \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{|\mathbf{x}|}, -\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) + \beta^2 \nabla^2 \psi. \quad (4.19)$$

Решение уравнения (4.18) получаем сравнением его с (4.5) и (4.6); оно имеет вид

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{(4\pi\alpha)^2 \rho} \iiint_V \frac{X_0\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}{\alpha}\right)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} dV(\boldsymbol{\xi}). \quad (4.20)$$

К счастью, этот интеграл можно упростить, интегрируя по объему  $V$ , разделенному на систему концентрических сферических оболочек с центром в  $\mathbf{x}$ . Если  $\alpha\tau$  — радиус одной такой оболочки  $S$ , так что  $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = \alpha\tau$  и мощность слоя равна  $\alpha d\tau$ , то

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{(4\pi\alpha)^2 \rho} \int_0^\infty \frac{X_0(t - \tau)}{\tau} \left( \iint_S \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} dS \right) d\tau.$$

В дополнении 4.3 показано, что интеграл по  $S$  — простая явная функция  $\mathbf{x}$  и  $\tau$ , откуда следует, что

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \int_0^{|\mathbf{x}|/\alpha} \tau X_0(t - \tau) d\tau. \quad (4.21)$$

Аналогичным образом для векторного потенциала Ламе находим

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left( 0, \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{|\mathbf{x}|}, -\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \int_0^{|\mathbf{x}|/\beta} \tau X_0(t - \tau) d\tau. \quad (4.22)$$

#### ДОПОЛНЕНИЕ 4.3

##### Оценка поверхностного интеграла

Определим

$$h(\mathbf{x}, \tau) \equiv \iint_{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = \alpha\tau} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} dS(\boldsymbol{\xi})$$

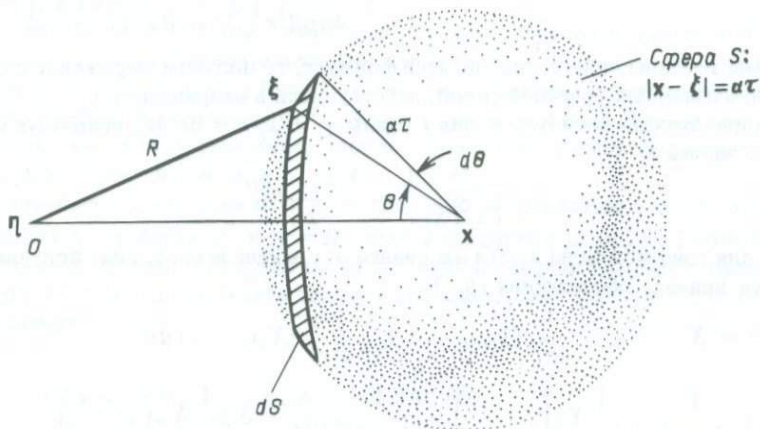
и покажем, что

$$h(\mathbf{x}, \tau) = 0 \quad \text{при } \tau > |\mathbf{x}|/\alpha,$$

но

$$h(\mathbf{x}, \tau) = 4\pi\alpha^2\tau^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \quad \text{при } \tau < |\mathbf{x}|/\alpha.$$

1) Рассмотрим физический смысл результата. Пусть плотность равномерно распределена по поверхности  $S$ . Тогда  $|\xi|^{-1}dS$  пропорционально гравитационному потенциалу  $dS$  в точке  $O$ , а  $\partial|\xi|^{-1}/\partial\xi_1 dS$  — компонента силы в направлении  $\hat{x}_1$ . Искомый результат получаем так: находим полный потенциал в  $O$ , создаваемый сферической оболочкой, а затем дифференцируем его, чтобы получить полную компоненту силы вдоль  $\hat{x}_1$ . Потенциал внутри сферической оболочки постояен, а вне ее потенциал можно найти, собрав всю массу в точку в центре, т.е. в  $x$ .



2) Подробное доказательство. Пусть точка  $O$  занимает положение  $\eta$ , так что мы можем дифференцировать по изменяющемуся  $\eta$  и затем принять  $\eta = 0$ . Пусть также  $r = |x - \eta|$ ,  $R = |\xi - \eta|$ , а  $\theta$  — угол между  $x - \eta$  и  $x - \xi$ . Тогда

$$h = -\frac{\partial}{\partial\eta_1} \iint_S \frac{dS}{R} \quad (\text{так как для всех } \xi \text{ на } S \quad \eta \text{ одно и то же}).$$

Теперь выберем  $dS = 2\pi\alpha^2\tau^2 \sin\theta d\theta$ :

$$\iint_S \frac{dS}{R} = 2\pi\alpha^2\tau^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{R}.$$

Но  $R^2 = r^2 + \alpha^2\tau^2 - 2r\alpha\tau\cos\theta$ ; следовательно,  $2RdR = 2r\alpha\tau\sin\theta d\theta$  и

$$\iint_S \frac{dS}{R} = \frac{2\pi\alpha\tau}{r} \int_{R(\theta=0)}^{R(\theta=\pi)} dR = \frac{2\pi\alpha\tau}{r} \int_{|x\tau-r|}^{x\tau+r} dR = \begin{cases} 4\pi\alpha\tau & \text{при } O \text{ внутри } S \quad (\tau > r/\alpha) \\ \frac{4\pi\alpha^2\tau^2}{r} & \text{при } O \text{ вне } S \quad (\tau < r/\alpha). \end{cases}$$

Отсюда если точка  $O$  находится внутри  $S$ , то

$$h = -\frac{\partial}{\partial\eta_1} 4\pi\alpha\tau = 0 \quad (\tau > r/\alpha),$$

а при  $O$  вне  $S$

$$h = -\frac{\partial}{\partial\eta_1} \frac{4\pi\alpha^2\tau^2}{r} = 4\pi\alpha^2\tau^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \quad (\tau < r/\alpha).$$

Третий, завершающий шаг в получении функции Грина для смещений, вызванных объемной силой  $X_0(t)$ , приложенной в начале координат в направлении  $x_1$ , состоит в нахождении  $\nabla\phi + \nabla \times \psi$  из (4.21) и (4.22). Учитывая, что  $r = |\mathbf{x}|$ , получаем

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_1} \frac{1}{r} \right) \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2 r} \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) X_0 \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2 r} \left( \delta_{i1} - \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) X_0 \left( t - \frac{r}{\beta} \right).$$

Если мы заменим индекс 1 на  $j$  по всей формуле, то получим выражение для смещений, вызванных точечной силой, действующей в направлении  $x_j$ .

Направляющие косинусы  $\gamma_i$  для  $\mathbf{x}$  равны  $\gamma_i = x_i/r = \partial r/\partial x_i$ ; используя их, мы можем записать

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} = \frac{3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}}{r^3}.$$

Тогда для точечной силы  $X_0(t)$  в направлении  $x_j$  в начале координат получим (используя вначале обозначения гл. 3)

$$u_i(\mathbf{x}, t) = X_0 * G_{ij} = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} X_0 \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r} X_0 \left( t - \frac{r}{\beta} \right). \quad (4.23)$$

Это та формула, которую мы хотели получить (эквивалентное выражение впервые было дано Стоксом в 1849 г.). Она дает одно из наиболее важных решений задачи об излучении упругих волн; исследуем его основные свойства.

Относительная величина различных членов функции Грина зависит от расстояния  $r$  между источником и приемником. Так величина  $r^{-3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t - \tau) d\tau$  изменяется как  $r^{-2}$  для источников, у которых  $X_0 \neq 0$  только в интервале времени, коротком по сравнению с  $r/\beta - r/\alpha$  (например, для импульсного источника самой функции Грина). Но остальные члены в (4.23) пропорциональны  $r^{-1}$  и при  $r \rightarrow \infty$  доминируют над членом порядка  $r^{-2}$ . Члены, включающие  $r^{-1} X_0(t - r/\alpha)$  и  $r^{-1} X_0(t - r/\beta)$ , называют смещениями в *дальней зоне*. Поскольку член с  $r^{-2}$  доминирует над членами с  $r^{-1}$  при  $r \rightarrow 0$ , слагаемое, включающее  $r^{-3} \int \tau X_0(t - \tau) d\tau$ , называют смещением в *ближней зоне*. Почти все сейсмические данные, используемые в геофизике, собраны в дальней зоне [т.е. на расстояниях, где преобладают смещения дальней зоны из (4.23)]. Однако существуют важные исключения, например наблюдения окончательной статической подвижки, вызванной образованием разрыва (эффект ближней зоны). Сейсмические данные, используемые в инженерной сейсмологии, в ряде случаев получены в ближней зоне. Однако при более детальном анализе вопроса, где кончается ближняя зона и начинается дальняя, оказывается, что смещения в дальней зоне также могут быть достаточно велики для того, чтобы землетрясение повредило инженерные сооружения (см. задачу 4.1).

4.2.1. СВОЙСТВА  $P$ -ВОЛНЫ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ

Введем теперь понятие  $P$ -волны в дальней зоне, для которой (4.23) дает смещение  $u^P$  в виде

$$u_i^P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i \gamma_j \frac{1}{r} X_0 \left( t - \frac{r}{\alpha} \right). \quad (4.24)$$

Тогда вдоль данного направления  $\gamma$  от источника эта волна:

- 1) затухает как  $r^{-1}$ ;
- 2) имеет форму колебания, зависящую от пространственно-временной комбинации  $t - r/\alpha$ , и, следовательно, распространяется со скоростью  $\alpha$ . [Напомним, что  $\alpha^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ .] Если  $t = 0$  — такой момент времени, когда  $X_0(t)$  впервые становится отличным от 0, то  $r/\alpha$  — время прихода  $P$ -волны в  $r$ ;
- 3) имеет амплитуду смещения, пропорциональную приложенной силе в задержанный момент времени;
- 4) направление смещения  $u^P$  в  $\mathbf{x}$  параллельно направлению  $\gamma$  от источника. Это следует из свойства  $u^P \times \gamma = 0$ , легко выводимого из (4.24). Таким образом, волна  $P$  в дальней зоне является продольной (иногда ее называют также радиальной) волной, т.е. движение частиц в ней происходит в направлении ее распространения.

4.2.2. СВОЙСТВА  $S$ -ВОЛНЫ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ

Волна  $S$  в дальней зоне несет смещение  $u^S$  вида

$$u_i^S(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j) \frac{1}{r} X_0 \left( t - \frac{r}{\beta} \right). \quad (4.25)$$

Вспомним, что  $\gamma$  — единичный вектор, направленный от источника к приемнику. Вдоль данного направления  $\gamma$  эта волна

- 1) затухает как  $r^{-1}$ ;
- 2) имеет время прихода в  $\mathbf{x}$ , равное  $r/\beta$ , и распространяется со скоростью  $\beta$ ;
- 3) имеет амплитуду смещения, пропорциональную приложенной силе на задержанном времени;
- 4) имеет направление смещений  $u^S$  в  $\mathbf{x}$ , перпендикулярное направлению  $\gamma$  от источника. Из (4.25) легко показать, что  $u^S \cdot \gamma = 0$ . Следовательно, волна  $S$  в дальней зоне — поперечная волна, поскольку направление движения частиц в ней нормально к направлению распространения.

Диаграммы излучения  $u^P$  и  $u^S$  приведены на рис. 4.2.

## 4.2.3. СВОЙСТВА СМЕЩЕНИЯ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

Определим смещение в ближней зоне  $u^N$ , согласно (4.23), как

$$u_i^N(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t - \tau) d\tau. \quad (4.26)$$

При выводе выражения для этой компоненты ближней зоны (см. выше) мы видели, что в ее образовании принимают участие как градиент потенциала  $\phi$

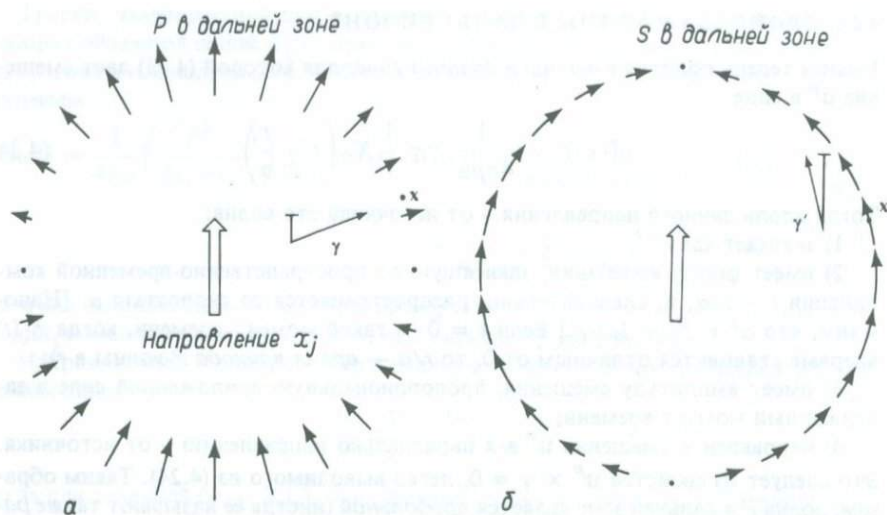


Рис. 4.2. Диаграммы направленности излучения волн  $P$  и  $S$  в дальней зоне точечной силы, действующей в направлении  $x_j$  внутри бесконечной, однородной, изотропной среды. Направления смещения в волнах  $P$  и  $S$  определяются свойствами «4» каждой из волн (см. текст); конкретный выбор поперечного направления  $\gamma'$  для волны  $S$  определен требованием осевой симметрии.  $a$  — амплитуда  $\mathbf{u}^P$  определяется соотношением  $\mathbf{u}^P \cdot \boldsymbol{\gamma} \sim \gamma_j$ , где  $\gamma_j$  — косинус угла между направлением силы и направлением  $\mathbf{u}^P$ ;  $b$  — амплитуда  $\mathbf{u}^S$  определяется соотношением  $\mathbf{u}^S \cdot \boldsymbol{\gamma}' \sim \gamma'_j$ , где  $\gamma'_j$  — косинус угла между направлением силы и направлением  $\mathbf{u}^S$ .

волны  $P$ , так и ротор потенциала  $\psi$  волны  $S$ . В этом смысле  $\mathbf{u}^N$  образуется как  $P$ -, так и  $S$ -волнами. Это смещение не является ни безвихревым (т.е. имеющим нулевой ротор), ни соленоидальным (т.е. имеющим нулевую дивергенцию). Отсюда видно, что не всегда целесообразно разлагать упругое смещение на  $P$ - и  $S$ -компоненты. Далее,  $\mathbf{u}^N$  переносит как продольные, так и поперечные смещения, так как продольная компонента равна

$$\mathbf{u}^N \cdot \boldsymbol{\gamma} = \gamma_j \frac{1}{2\pi\rho r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t - \tau) d\tau,$$

а поперечная компонента

$$\mathbf{u}^N \cdot \boldsymbol{\gamma}' = -\gamma'_j \frac{1}{4\pi\rho r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t - \tau) d\tau$$

(определения  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\boldsymbol{\gamma}'$  даны на рис. 4.2).

Хотя для смещений в ближней зоне нельзя указать такие простые свойства, как «1» — «4», найденные для дальней зоны, мы можем установить время прихода и длительность смещения  $\mathbf{u}^N$  в фиксированной точке наблюдения. Пусть  $t = 0$  — момент времени, когда  $X_0(t)$  впервые становится ненулевым; предположим, что  $X_0(t)$  возвращается к нулю для всех времен  $t > T$ . Функция этого типа показана на рис. 4.3, а;  $X_0(t - \tau)$  как функция  $\tau$  приведено на рис. 4.3, б. Из (4.26)

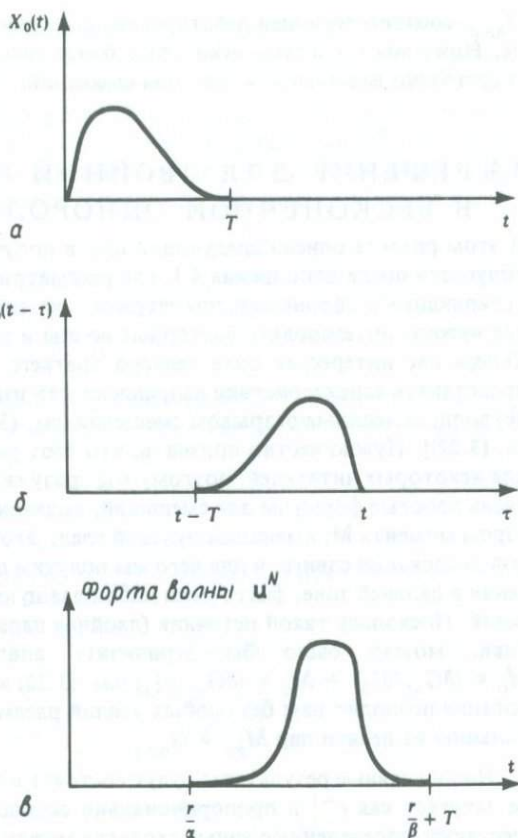


Рис. 4.3. Графики для интерпретации понятий «время прихода» и «длительность» для смещения  $u^N$  в ближней зоне. **а** — временная зависимость объемной силы, отличная от нуля только в интервале  $0 \leq t \leq T$ ; **б** — изменение  $X_0(t - \tau)$  с изменением  $\tau$  при фиксированном  $t$ ; эта функция не равна нулю в интервале  $\tau$  от  $r/\alpha$  до  $r/\beta$  только в том случае, если  $t$  лежит в интервале от  $r/\alpha$  до  $r/\beta + T$ ; **в** — изменение  $\int_{r/\alpha}^{r/\beta} X_0(t - \tau) d\tau$  со временем  $t$ . На больших расстояниях  $r/\alpha \gg T$  и  $X_0(t - \tau)$  под интегралом в выражении для  $u^N$  — практически дельта-функция; поэтому  $u^N$  имеет ненулевые значения только в интервале между  $r/\alpha$  и  $r/\beta$  с амплитудой, пропорциональной времени. Впрочем, на таких расстояниях  $u^N$  обычно пренебрежимо мало по сравнению с членами дальней зоны.

следует, что  $u^N$  — это движение, начинающееся в точке  $x$  в момент  $r/\alpha$  (т.е. в момент прихода волны  $P$ ) и происходящее вплоть до времени  $r/\beta + T$ , так что оно имеет длительность  $(r/\beta - r/\alpha) + T$ . Если  $X_0(t)$  никогда не возвращается в нуль окончательно (т.е.  $T$  не конечно), то смещение в ближней зоне существует неопределенно долго.

Еще несколько свойств  $X_0 * G$  выявлено в задачах в конце главы. Мы видели в гл. 2 и 3, что в сейсмологии функцию Грина удобнее использовать в форме

$G_{np,q}$  соответствующей действующей в источнике паре сил, а не одинарной силе. Ниже мы исследуем некоторые более специфические свойства этого непосредственно важного для нас поля смещений.

### 4.3. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ДВОЙНОЙ ПАРЫ СИЛ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В этом разделе описан следующий шаг в получении решений волновой теории упругости после дополнения 4.1, где рассматривалась скалярная волна, распространяющаяся сферически-симметрично от точечного источника. Мы видели, как нужно синтезировать векторные волны и поля тензоров второго ранга  $G_{ij}$ . Теперь нас интересует поле тензора третьего ранга  $G_{np,q}$ : оно позволит нам представить характеристики направленности излучения (в ближней и дальней зоне) волн, вызванных разрывом смещений [см. (3.17) или, для точечного источника, (3.22)]. Нужно честно признать, что этот раздел может оказаться трудным для некоторых читателей; поэтому мы сразу скажем, что здесь будут получены очень простые формулы для смещений, вызванных точечным источником с тензором момента  $\mathbf{M}$ , имеющим нулевой след. Этот случай имеет место при точечной дислокации сдвига, и для него мы получим диаграмму направленности излучения в дальней зоне, фактически наблюдавшуюся во многих тысячах землетрясений. Поскольку такой источник (двойная пара сил) столь интересен для практики, можно было бы ограничить анализ конкретной комбинацией  $M_0 * (\partial G_{n1}/\partial \xi_3) + M_0 * (\partial G_{n3}/\partial \xi_1)$  [см. (3.22) и (3.24)]. Однако правило суммирования позволит нам без особых усилий рассматривать наиболее общую комбинацию из девяти пар  $M_{pq} * G_{np,q}$ .

Наши главные результаты будут состоять в том, что смещение в дальней зоне затухает как  $r^{-1}$  и пропорционально скорости частиц в источнике, что существуют определенные явные сходства между смещениями в ближней и дальней зонах и что результирующее статическое смещение, вызванное в среде дислокацией смещений, которая достигает в конце концов некоторого фиксированного значения, затухает как  $r^{-2}$ .

Начнем с использования решения Стокса (4.23) для получения  $n$ -компоненты смещений, вызванных распределением объемных сил  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(t)\delta(\mathbf{x} - \xi)$ , т.е. силой  $\mathbf{F}(t)$ , приложенной в  $\xi$ . Это смещение в  $(\mathbf{x}, t)$  равно

$$F_p * G_{np} = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_n\gamma_p - \delta_{np}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau F_p(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_n\gamma_p \frac{1}{r} F_p \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_n\gamma_p - \delta_{np}) \frac{1}{r} F_p \left( t - \frac{r}{\beta} \right), \quad (4.27)$$

где  $r = |\mathbf{x} - \xi|$  — расстояние от источника до приемника, и направляющие косинусы  $\gamma_i = (x_i - \xi_i)/r$  относятся к источнику в  $\xi$ . Формула (4.27) по виду совпадает с (4.23), но в ней имеется суммирование по  $p$ , так как в общем случае  $\mathbf{F}$  не направлено по какой-либо из координатных осей.

Чтобы получить суммарный эффект девяти пар сил типа тех, что показаны на рис. 3.7, мы можем оценить (4.27) для силы  $\mathbf{F}(t)$ , приложенной в

$\xi + \Delta l_q$  (где  $\Delta l_g$  — малое расстояние в направлении  $\xi_q$ ), и вычтешь значение (4.27) для силы  $\mathbf{F}(t)$ , приложенной в  $\xi$ . Эта разность дает поле смещений в  $(\mathbf{x})$ , создаваемое парой сил с моментом  $|\Delta l_q| |\mathbf{F}|$ ; с точностью до первого порядка по  $\Delta l_q$  она получается применением оператора  $\Delta l_q (\partial / \partial \xi_q)$ . (Заметим, что это — безразмерный оператор; результат остается смещением.) Окончательный шаг — приравнять произведение  $\Delta l_q F_p(t)$  (в котором  $\Delta l_q \rightarrow 0$  и  $F_p \rightarrow \infty$ , так что само произведение конечно) компонентам тензора момента  $M_{pq}(t)$ . Такая процедура выражается равенством

$$M_{pq} * G_{np,q} = \lim_{\substack{\Delta l_q \rightarrow 0 \\ F_p \rightarrow \infty \\ \Delta l_q F_p = M_{pq}}} \Delta l_q F_p * \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{np}. \quad (4.28)$$

Отметим, что здесь суммирование осуществляется и по  $p$ , и по  $q$ . Операцию, определяемую (4.28), можно непосредственно применить к (4.27) с учетом двух правил:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_q} = -\gamma_q \quad \text{и} \quad \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi_q} = \frac{\gamma_j \gamma_q - \delta_{jq}}{r}.$$

Результатом будет поле смещений [см. (3.22)],  $n$ -я компонента которого имеет вид

$$\begin{aligned} M_{pq} * G_{np,q} = & \left( \frac{15\gamma_n \gamma_p \gamma_q - 3\gamma_n \delta_{pq} - 3\gamma_p \delta_{nq} - 3\gamma_q \delta_{np}}{4\pi\rho} \right) \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_{pq}(t - \tau) d\tau \\ & + \left( \frac{6\gamma_n \gamma_p \gamma_q - \gamma_n \delta_{pq} - \gamma_p \delta_{nq} - \gamma_q \delta_{np}}{4\pi\rho\alpha^2} \right) \frac{1}{r^2} M_{pq} \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \\ & - \left( \frac{6\gamma_n \gamma_p \gamma_q - \gamma_n \delta_{pq} - \gamma_p \delta_{nq} - 2\gamma_q \delta_{np}}{4\pi\rho\beta^2} \right) \frac{1}{r^2} M_{pq} \left( t - \frac{r}{\beta} \right) \\ & + \frac{\gamma_n \gamma_p \gamma_q}{4\pi\rho\alpha^3} \frac{1}{r} \dot{M}_{pq} \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) - \left( \frac{\gamma_n \gamma_p - \delta_{np}}{4\pi\rho\beta^3} \right) \gamma_q \frac{1}{r} \dot{M}_{pq} \left( t - \frac{r}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Члены, соответствующие ближней зоне, в этом поле смещений, обусловленном дислокацией, пропорциональны  $r^{-4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_{pq}(t - \tau) d\tau$ , а члены дальней зоны

пропорциональны  $r^{-1} \dot{M}_{pq}(t - r/\alpha)$  (волны  $P$ ) или  $r^{-1} \dot{M}_{pq}(t - r/\beta)$  (волны  $S$ ). Вспомним из гл. 3 [уравнение (3.22)], что  $M_{pq} * G_{np,q}$  —  $n$ -я компонента смещения в  $\mathbf{x}$ , вызванного скачком смещения на поверхности разрыва с линейными размерами, много меньшими длины волны излучаемых колебаний, регистрируемых приемником. Следовательно, компоненты тензора момента  $\mathbf{M}$  пропорциональны смещениям частиц, осредненным по плоскости разрыва. Далее, функции  $\dot{M}_{pq}(t - r/\alpha)$  и  $\dot{M}_{pq}(t - r/\beta)$ , характеризующие форму колебаний в дальней зоне, пропорциональны скоростям частиц в источнике, осредненным по плоскости разрыва.

В (4.29) присутствуют также члены, пропорциональные

$$r^{-2}M_{pq}(t - r/\alpha) \text{ and } r^{-2}M_{pq}(t - r/\beta).$$

Поскольку их асимптотические свойства для больших и малых  $r$  промежуточны между асимптотическими свойствами смещений в ближней и дальней зоне, их естественно назвать *смещениями в промежуточной зоне*. Однако это название может ввести в заблуждение, поскольку не существует промежуточного диапазона расстояний, где бы эти члены доминировали. На практике они оказываются малыми в дальней зоне и (часто) сравнимы по величине со смещениями в ближней зоне на тех расстояниях, где последние еще существенны.

Формула (4.29) описывает излучение для любого тензора момента  $\mathbf{M}$  и является весьма общей; мы часто будем выделять случай, когда след  $\mathbf{M}$  равен нулю ( $M_{kk} = 0$ ). Это может произойти в случае трех векторных диполей, не создающих чистых изменений объема. Но чаще нас будет интересовать случай тензора  $\mathbf{M}$  с нулевым следом, возникающего при наличии разрыва смещений. Из (3.23) и (3.20) следует, что осредненный скачок смещений  $\bar{\mathbf{u}}$  параллелен поверхности разрыва:  $\bar{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ , где  $\boldsymbol{\nu}$  — нормаль к поверхности разрыва и  $M_{pq} = \mu(\bar{u}_p \nu_q + \bar{u}_q \nu_p)A$  для разрыва площадью  $A$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \mu(\bar{u}_p \nu_q + \bar{u}_q \nu_p)A * G_{np,q} \\ &= \left( \frac{30\gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_q - 6\nu_n \gamma_p - 6\delta_{np} \gamma_q \nu_q}{4\pi\rho r^4} \right) \mu A \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \bar{u}_p(t - \tau) d\tau \\ &+ \left( \frac{12\gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_q - 2\nu_n \gamma_p - 2\delta_{np} \gamma_q \nu_q}{4\pi\rho\alpha^2 r^2} \right) \mu A \bar{u}_p \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \\ &- \left( \frac{12\gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_q - 3\nu_n \gamma_p - 3\delta_{np} \gamma_q \nu_q}{4\pi\rho\beta^2 r^2} \right) \mu A \bar{u}_p \left( t - \frac{r}{\beta} \right) \\ &+ \frac{2\gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_q}{4\pi\rho\alpha^3 r} \mu A \dot{\bar{u}}_p \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \\ &- \left( \frac{2\gamma_n \gamma_p \gamma_q \nu_q - \nu_n \gamma_p - \delta_{np} \gamma_q \nu_q}{4\pi\rho\beta^3 r} \right) \mu A \dot{\bar{u}}_p \left( t - \frac{r}{\beta} \right). \quad (4.30) \end{aligned}$$

Наша следующая цель — преобразовать это выражение для поля смещений, излучаемого дислокацией сдвига, из декартовой формы к виду, где естественно выделяются радиальная и поперечная компоненты движения. Этого можно достичь таким выбором осей, чтобы разрыв лежал в плоскости  $(x_1, x_2)$ , т.е.  $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)$  при  $\xi = 0$ , и введением сферических координат  $r, \theta$  и  $\phi$  с центром в источнике. Будем измерять  $\theta$  от направления  $x_3$  (рис. 4.4), выбирая при этом ось  $x_1$  за направление подвижки, так что  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, 0, 0)$ , и принимая  $\phi = 0$  за плоскость, содержащую  $\boldsymbol{\nu}$  и  $\bar{\mathbf{u}}$ . Единичные векторы  $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$  направлены в сторону увеличения  $r, \theta, \phi$ , так что «радиальное» направление идет вдоль  $\hat{r}$ , а оба направления  $\hat{\theta}$  и  $\hat{\phi}$  — поперечные.

Мы хотим выразить вектор смещения в  $\mathbf{x}$  [ $n$ -я декартова компонента которого определена в (4.30)] через сумму векторов, ориентированных в трех направлениях  $\hat{r}, \hat{\theta}$  и  $\hat{\phi}$ . К счастью, (4.30) образовано векторами только трех типов, а имен-

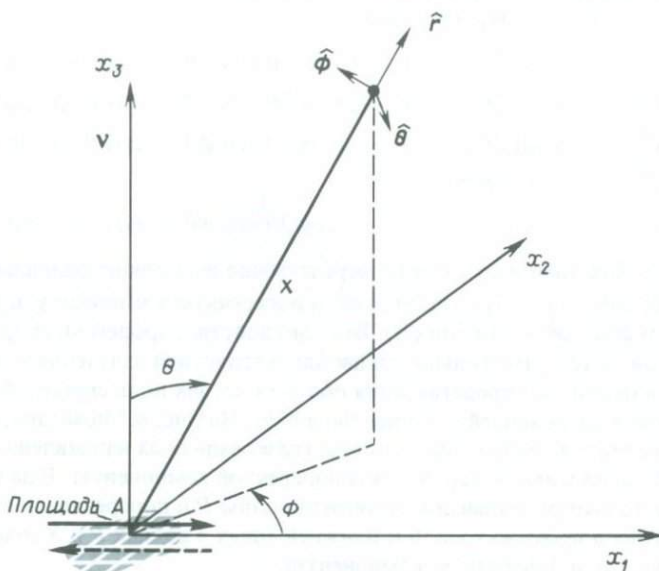


Рис. 4.4. Декартовы и сферические координаты для анализа радиальной и поперечных компонент смещения, обусловленного дислокацией сдвига площадью  $A$  со средней подвижкой  $\bar{u}$  [(см. (4.31)].

но  $\gamma_n \gamma_p \bar{u}_p \gamma_q \nu_q$ ,  $\nu_n \gamma_p \bar{u}_p$  и  $\delta_{np} \bar{u}_p \gamma_q \nu_q$ . Эти три типа векторов можно отождествить соответственно как:

$$\begin{aligned} 2\gamma_n \gamma_p \bar{u}_p \gamma_q \nu_q & - n\text{-я компонента} \quad \hat{r} \sin 2\theta \cos \phi \bar{u}, \\ 2\nu_n \gamma_p \bar{u}_p & - n\text{-я компонента} \quad \hat{r} \sin 2\theta \cos \phi \bar{u} - \hat{\theta} 2 \sin^2 \theta \cos \phi \bar{u}, \quad (4.31) \\ 2\bar{u}_{n1} & n\text{-я компонента} \quad \hat{r} \sin 2\theta \cos \phi \bar{u} + \hat{\theta} 2 \cos^2 \theta \cos \phi \bar{u} \\ & - \hat{\phi} 2 \cos \theta \sin \phi \bar{u}. \end{aligned}$$

[Эти результаты следуют из соотношений  $\hat{r} = \gamma = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ ,  $\hat{\theta} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$  и  $\hat{\phi} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$ .]

Идентифицировав векторные компоненты в (4.31), теперь можно представить наше поле смещения  $u_n = M_{pq} * G_{np,q}$  в точной векторной форме, используя зависящий от времени сейсмический момент  $M_0(t) = \mu \bar{u}(t)A$ . Найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\rho} A^N \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_0(t - \tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} A^{IP} \frac{1}{r^2} M_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} A^{IS} \frac{1}{r^2} M_0\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3} A^{FP} \frac{1}{r} \dot{M}_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} A^{FS} \frac{1}{r} \dot{M}_0\left(t - \frac{r}{\beta}\right), \quad (4.32) \end{aligned}$$

в которой  $P$ - и  $S$ -возмущения в ближней, промежуточной и дальней зонах имеют следующие характеристики излучения:

$$\begin{aligned} A^N &= 9 \sin 2\theta \cos \phi \hat{r} - 6(\cos 2\theta \cos \phi \hat{\theta} - \cos \theta \sin \phi \hat{\phi}), \\ A^{IP} &= 4 \sin 2\theta \cos \phi \hat{r} - 2(\cos 2\theta \cos \phi \hat{\theta} - \cos \theta \sin \phi \hat{\phi}), \\ A^{IS} &= -3 \sin 2\theta \cos \phi \hat{r} + 3(\cos 2\theta \cos \phi \hat{\theta} - \cos \theta \sin \phi \hat{\phi}), \\ A^{FP} &= \sin 2\theta \cos \phi \hat{r} \\ A^{FS} &= \cos 2\theta \cos \phi \hat{\theta} - \cos \theta \sin \phi \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Эти характеристики излучения непосредственно вычлениют радиальную компоненту, пропорциональную  $\sin 2\theta \cos \phi \hat{r}$ , и поперечную компоненту, пропорциональную  $(\cos 2\theta \cos \phi \hat{\theta} - \cos \theta \sin \phi \hat{\phi})$ . Важное свойство, продемонстрированное в (4.33), состоит в том, что только эти две характеристики излучения необходимы для получения полного представления обо всех членах поля смещений, излучаемых сдвиговой дислокацией (двойная пара сил). На рис. 4.5 показано, как изменяется по амплитуде радиальная компонента в различных направлениях ( $\theta$ ,  $\phi$ ), а рис. 4.6 дает аналогичную картину для поперечной компоненты. В дальней зоне существует только радиальная компонента волны  $P$  и поперечная волны  $S$ . Однако смещения в промежуточной и ближней зонах в волнах  $P$  и  $S$  содержат как радиальную, так и поперечную компоненты.

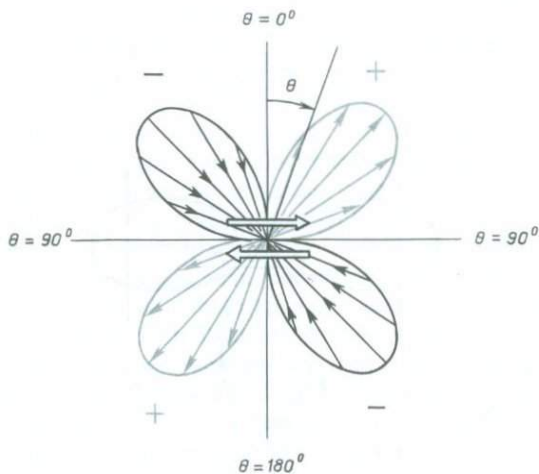
Удивительно простая зависимость от  $\theta$  и  $\phi$ , найденная в (4.32) и (4.33) и показанная на рис. 4.5 и 4.6, наталкивает на вопрос, не существует ли более простой способ вывода этих формул. Действительно, он имеется — необходимый аналитический аппарат и демонстрация простой зависимости от  $\theta$ ,  $\phi$  с самого начала выкладок обеспечиваются при помощи векторных поверхностных функций (гл. 8). Однако алгебраические преобразования, связанные с использованием этого более сложного метода, по нашему мнению, столь же трудоемки, что и анализ в декартовых координатах, выбранный нами.

В разд. 4.4 исследуются свойства смещений в дальней зоне для среды, которая, подобно Земле, является неоднородной. В разд. 4.5 мы рассмотрим снова характеристики излучения (4.33) и покажем, как их можно использовать на практике для нахождения (из сейсмических данных) ориентации плоскости разрыва и направления подвижки. Завершая настоящий раздел, найдем из (4.32) поле установившихся статических смещений для сдвиговой дислокации с моментом  $M_0$ .

Это требует перехода к пределу в функциях  $\dot{M}_0(t - \tau)$ ,  $M_0(t - \tau)$  и  $\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_0(t - \tau) d\tau$  при  $t \rightarrow \infty$ ; при этом предполагается, что сам сейсмический момент стремится к постоянному значению  $M_0(\infty)$ . В результате получаем смещение

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \infty) &= \frac{M_0(\infty)}{4\pi\rho r^2} \left[ A^N \left( \frac{1}{2\beta^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \right) + \frac{A^{IP}}{\alpha^2} + \frac{A^{IS}}{\beta^2} \right] \\ &= \frac{M_0(\infty)}{4\pi\rho r^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{3}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \sin 2\theta \cos \phi \hat{r} + \frac{1}{\alpha^2} (\cos 2\theta \cos \phi \hat{\theta} - \cos \theta \sin \phi \hat{\phi}) \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

затухающее вдоль любого заданного направления ( $\theta$ ,  $\phi$ ) как  $r^{-2}$ .



а



б

Рис. 4.5. Диаграмма направленности излучения для радиальной компоненты смещений, вызванных двойной парой сил, т.е.  $\sin 2\theta \cos \phi$ . а — лепестки диаграммы — геометрическое место точек, удаленных от начала координат на расстояние, пропорциональное  $\sin 2\theta$ . Диаграмма относится к плоскости постоянного азимута; пара стрелок в центре символизирует дислокацию сдвига. Квадранты, в которых движения направлены к центру и от центра, чередуются. Для волн  $P$  в дальней зоне «плюс» означает движение от центра [если  $M_0(t - r/\alpha)$  положительно], а «минус» — движение к центру. б — вид диаграммы направленности на сфере с центром в источнике. Знаки «плюс» и «минус» различных размеров означают соответствующее изменение ( $s$   $\theta$  и  $\phi$ ) амплитуды движений от источника и к источнику. Плоскость разрыва и вспомогательная плоскость проектируются в нодальные линии (на которых  $\sin 2\theta \cos \phi = 0$ ). Использована равноплощадная проекция (см. рис. 4.17). Точки  $P$  и  $T$  отмечают оси сжатия и растяжения.

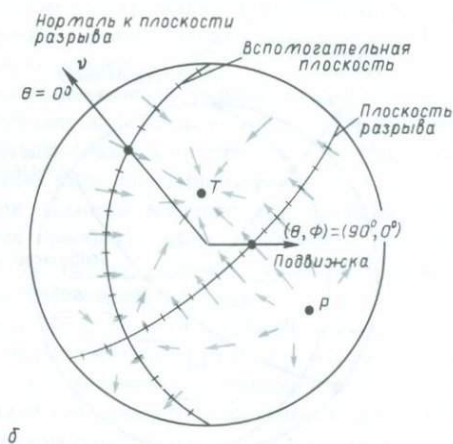
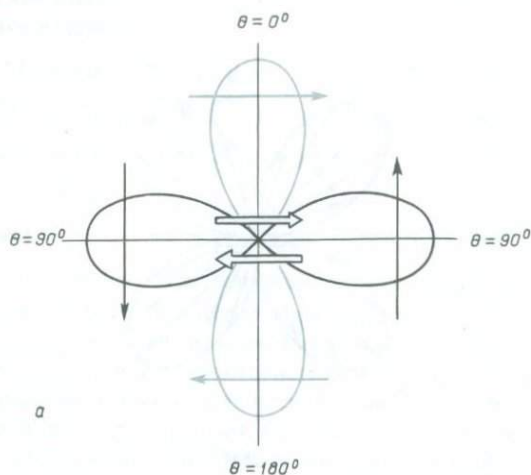


Рис. 4.6. Диаграммы направленности для поперечной компоненты смещений, вызванных двойной парой сил, т.е.  $\cos 2\theta \cos \phi \hat{\phi} - \cos \theta \sin \phi \hat{\phi}$ . **а** — четырехлепестковая диаграмма в плоскости  $\{\phi = 0, \phi = \pi\}$ . Пара стрелок в центре символизирует сдвиговую дислокацию; стрелки на каждом лепестке указывают направление смещения частиц, связанное с данным лепестком. Если диаграмма используется для анализа волн  $S$  в дальней зоне, предполагается, что  $M_0(t - r/\beta)$  положительно. **б** — вне двух плоскостей  $\theta = \pi/2$  и  $\{\phi = 0, \phi = \pi\}$   $\hat{\phi}$ -я компонента не равна нулю, поэтому **а** имеет только ограниченное практическое значение. Диаграмма **б** характеризует направленность излучения на всей сфере с центром в источнике, и стрелки (различных размеров и направлений) на сферической поверхности показывают изменение характера поперечных движений с изменением  $\theta$  и  $\phi$ . Использована стереографическая (равноугольная) проекция (см. рис. 4.16). Узловых линий (где движение отсутствует) здесь нет, но имеются узловые точки. Заметим, что узловая точка для поперечных колебаний  $(\theta, \phi) = (45^\circ, 0^\circ)$  соответствует максимуму диаграммы для продольных колебаний (см. рис. 4.5, б). Максимальное поперечное движение (например, при  $\theta = 0$ ) происходит вдоль узловой линии для продольных колебаний.

#### 4.4. ЛУЧЕВАЯ ТЕОРИЯ ДЛЯ ВОЛН $P$ И $S$ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ, ВОЗБУЖДЕННЫХ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

В книгах и статьях по теории распространения упругих волн в большинстве случаев рассматриваются однородные среды. Сейсмологам часто нужно ясно понимать свойства волн в столь простых средах и иметь точные решения, которые могут быть для них получены (см., например, гл. 5 и 6). Однако для интерпретации реальных сейсмограмм требуется также иметь ясное представление о приближенных решениях для волн, распространяющихся в неоднородных средах. В Земле существуют не только границы вещества, на которых упругие свойства меняются скачком, но и обширные области, внутри которых происходит систематическое и плавное изменение модулей сжатия и сдвига и плотности. Так, скорости волн  $P$  и  $S$  увеличиваются примерно в два раза от кровли к подошве мантии, и этого достаточно для искажения до неузнаваемости описанных выше характеристик излучения, если не учесть эффекты неоднородности. В этом и следующем разделе мы покажем, как устранить такие искажения, и продемонстрируем, что амплитуды объемных волн могут быть существенно изменены эффектами фокусировки и дефокусировки, сходными с теми, которые возникают при распространении света в средах с переменным показателем преломления. Приближенное решение, которое мы получим, называется (*геометро*)лучевым решением и обеспечивает основу для стандартной интерпретации большинства объемных сейсмических волн. Кроме того, оно всегда является полезным ключом к более сложным методам, если они оказываются необходимыми.

Лучевая теория, вероятно, лучше всего запоминается как набор доступных проверке интуитивных идей и приближений. В ней объемные волны распространяются с локальной скоростью вдоль лучевых траекторий, определяемых законом Снеллиуса, прибывая в точку наблюдения (как «волновой фронт») с амплитудой, определяемой геометрическим расхождением лучей от источника к приемнику. Это утверждения, которые мы докажем, но интуиция играет большую роль на начальном этапе при выборе формы пробного решения.

Нам нужно будет обобщить форму решения для дальней зоны, найденного ранее для волн  $P$  и  $S$ , используя систему координат, позволяющую естественным образом описать расхождение волнового фронта от точечного источника в изотропной неоднородной среде. Для сферически-симметричных сред ортогональные координаты, привязанные к лучам, имеют то свойство, что волна  $P$  и две различные компоненты волны  $S(SV$  и  $SH)$  разделяются. Три этих вида движения оказываются параллельными трем различным осям координат.

*Волновой фронт* — это распространяющаяся поверхность разрыва некоторой зависимой переменной, представляющей физический интерес (например, ускорения частиц). В этой связи слова «поверхность разрыва» означают «поверхность, на которой терпит разрыв переменная или одна из ее производных». Таким образом, линейно-возрастающая функция, показанная на рис. 4.7, а, фактически непрерывна в точке  $t = \tau$ , но она подходит для описания поведения частицы среды вблизи волнового фронта, так как имеет разрыв производной. Если нужно рассмотреть функцию,  $(n - 1)$ -я производная которой терпит разрыв при  $t = \tau$  (а все производные более низкого порядка при этом непрерывны), то гово-

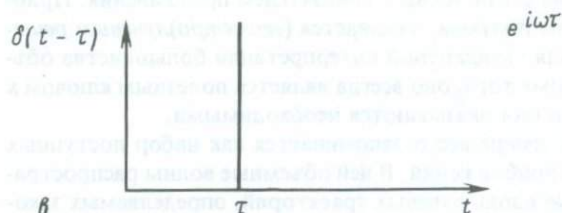
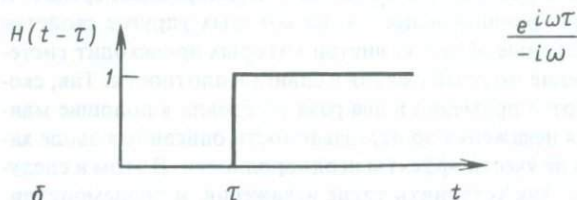
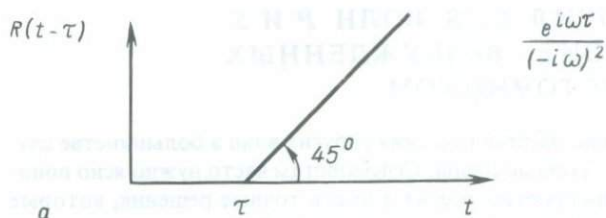


Рис. 4.7. Иерархия разрывных функций с соответствующими формулами для их высокочастотных спектров. Значения линейной функции даны формулой  $R(t) = tH(t)$ .

рят, что эта функция терпит разрыв  $n$ -го порядка при  $t = \tau$ . Рассмотрение решения (4.23) для функции Грина покажет, что (временной) разрыв в объемной силе  $X_0(t)$  ведет к распространению с членами дальней зоны разрыва, имеющего тот же порядок, что и разрыв в объемной силе:  $X_0(t)$ , действующая при  $r = 0$ , ведет к форме колебаний вида  $X_0(t - r/\alpha)$  и  $X_0(t - r/\beta)$  на больших  $r$ . (В источнике обязательно должен существовать разрыв какого-либо порядка, иначе  $X_0(t)$  и все ее производные окажутся тождественно равными нулю для всех времен и волны не будут возбуждаться.) Смещения в ближней зоне  $\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t - \tau) d\tau$  также несут разрыв, но он менее сильный. Например, если  $X_0(t) \sim H(t)$  (ступенчатая функция Хевисайда, имеющая разрыв первого порядка), то в дальнюю зону излучаются распространяющиеся «ступеньки» смещения, а члены, соответствующие ближней зоне, несут разрывы второго порядка, так как функция  $\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau H(t - \tau) d\tau$  непрерывна в моменты  $t = r/\alpha$  и  $t = r/\beta$ , но ее первая производная в этих точках терпит разрыв (рис. 4.8).

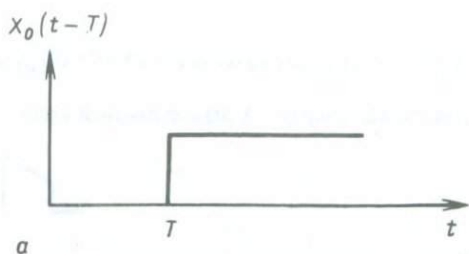
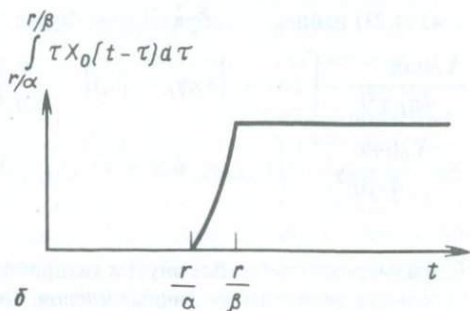


Рис. 4.8. Сравнение форм колебаний в дальней и ближней зонах для случая свертки функций Грина с функцией  $X_0(t) \sim H(t)$ . *а* — дальняя зона: время  $t = T$  — это либо  $t = r/\alpha$ , либо  $r/\beta$ . *б* — ближняя зона: между волновыми фронтами  $t = r/\alpha$  и  $t = r/\beta$  смещение растет по параболе, а скорость частиц терпит разрыв на каждом из них.



Тот факт, что более сильные разрывы переносятся смещениями в дальней зоне, имеет фундаментальное значение. В действительности иногда лучше использовать его для определения свойств разных слагаемых, поскольку обычно используемые ярлыки «дальней зоны» и «ближней зоны» могут приводить к заблуждениям. На *любом* фиксированном расстоянии  $r$  (большом и малом) поведение излученной волны в моменты времени, достаточно близкие к  $r/\alpha$  и  $r/\beta$ , будет определяться самым сильным разрывом (наиболее сильным волновым фронтом), прибывающим в это время, и, вообще говоря, он переносится смещениями в дальней зоне. Для достаточно больших  $r$  имеются две причины преобладания смещений дальней зоны: меньший порядок разрыва и относительно слабое затухание с расстоянием. На заданном малом  $r$  смещения дальней зоны будут или не будут преобладать в зависимости от того, что окажется более важным — меньший порядок разрыва в них или слабость особенности в  $r^{-1}$ .

Перейдя к частотной области, мы найдем значительно более простой способ для сравнения поведения смещений, соответствующих ближней и дальней зонам. Во всей этой книге для преобразования Фурье функций времени и частоты мы будем использовать следующие обозначения:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{+i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-i\omega t} d\omega;$$

зависит ли  $f$  от частоты или от времени, будет определяться контекстом. (О причинах такого выбора обозначений см. дополнение 5.2.) Тогда функция

$X_0(t - r/\alpha)$  преобразуется в  $e^{+i\omega r/\alpha} X_0(\omega)$  и  $\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t - \tau) d\tau$  можно интерпретировать как свертку  $X_0(t)$  с функцией вида



Свертка преобразуется в произведение

$$X_0(\omega) \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau e^{+i\omega\tau} d\tau = \left[ -\left(\frac{r}{\alpha} - \frac{1}{i\omega}\right) \frac{e^{+i\omega r/\alpha}}{i\omega} + \left(\frac{r}{\beta} - \frac{1}{i\omega}\right) \frac{e^{+i\omega r/\beta}}{i\omega} \right] X_0(\omega),$$

и из (4.23) найдем преобразование Фурье  $X_0 * G_{ij}$  в виде

$$\begin{aligned} & \frac{X_0(\omega) e^{+i\omega r/\alpha}}{4\pi\rho\alpha^2 r} \left[ \gamma_i \gamma_j + (3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \left(-\frac{\alpha}{i\omega r}\right) + (3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \left(-\frac{\alpha}{i\omega r}\right)^2 \right] \\ & - \frac{X_0(\omega) e^{+i\omega r/\beta}}{4\pi\rho\beta^2 r} \left[ (\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) + (3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \left(-\frac{\beta}{i\omega r}\right) + (3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \left(-\frac{\beta}{i\omega r}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Безразмерные слагаемые внутри квадратных скобок в (4.35) указывают на относительные величины различных членов, соответствующих смещениям в дальней и ближней зонах. Особенно важны безразмерные отношения  $\omega r/\alpha$ ,  $\omega r/\beta$ ; отметим, что

$$\begin{cases} \omega r/\alpha = 2\pi \times & \text{(число длин волн с частотой } \omega, \text{ укладываемых между приемником и источником, в случае } P\text{-волны);} \\ \omega r/\beta = 2\pi \times & \text{(число длин волн с частотой } \omega, \text{ укладываемых между приемником и источником, в случае } S\text{-волны).} \end{cases}$$

Эта интерпретация позволяет получить, наконец, ясную картину того, в какой области доминируют различные члены функции Грина. Дальняя зона — это просто «все, что находится дальше, чем несколько длин волн, от источника», а ближняя зона — «то, что находится на расстоянии от источника, составляющем малую долю длины волны». На близких и промежуточных расстояниях необходимо оценивать относительную величину каждого члена в (4.35); вероятным заключением здесь будет отсутствие единственного доминирующего члена (см. задачу 4.1 в конце главы).

Приведенные выше рассуждения о разрывах, которые могут распространяться во временной области, формально можно перенести на свойства высокочастотной области спектра. Если  $g(t)$  имеет единичный скачок в  $t = 0$ , то спектр  $g(\omega)$  содержит член, ведущий себя асимптотически как  $(-i\omega)^{-1}$  при  $\omega \rightarrow \infty$  [50]. Многократно интегрируя  $g(t)$  с учетом этого результата и применяя теорему о сдвиге

$$g(t - T) \rightarrow g(\omega) e^{i\omega T},$$

получаем следующее: если  $f(t)$  имеет разрыв  $n$ -го порядка при  $t = T$  такой, что

$$\left. \frac{\partial^{n-1} f(t)}{\partial t^{n-1}} \right|_{t=T^-} = A \quad (\text{где } A = \text{const}),$$

то преобразование Фурье  $f(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$  изменяется асимптотически как  $A(-i\omega)^{-n} e^{i\omega T}$ . Это позволяет нам понять, как правильно связать различные члены в (4.35) с различными разрывами во временной области. Однако тут можно прийти к ошибочным выводам, поскольку  $f(\omega)$  может вести себя как  $A(-i\omega)^{-n} e^{i\omega T}$  только на гораздо более высоких частотах, чем наблюдаемые. Иными словами, наблюдаемый закон изменения физической переменной  $f(\omega)$  на высоких частотах может не указывать на свойства какого-либо волнового фронта, так как для этого понадобилось бы наблюдать частоты порядка килогерц или мегагерц. Эти частоты обычно недостижимы в сейсмологии. Мы можем разделить члены ближней и дальней зоны даже на сейсмических частотах на базе различных частотных зависимостей, показанных в (4.35), хотя абстрактные понятия «волновой фронт» и «порядок разрыва» могут быть ненаблюдаемыми.

Эти результаты описаны довольно подробно, потому что в формальных изложениях лучевой теории обычно подробно останавливаются на анализе различий в порядке разрыва; к этому методу мы не можем прибегать в сейсмологии. Нам лучше подойдет менее строгий подход с четко сформулированными предположениями, согласно которым производная  $\dot{X}_0(t - r/\alpha)$  доминирует над  $(\alpha/r)X_0(t - r/\alpha)$ , поскольку это будет справедливо на высоких частотах, обычно наблюдаемых в объемных волнах дальней зоны (т.е. когда  $\omega r/\alpha \gg 1$ ).

Изыскный способ изучения продольной и двух поперечных компонент смещения в объемных волнах дает введение системы криволинейных координат, в которых эти три компонента направлены либо вдоль координатной оси, либо лежат в координатной плоскости. Пусть точечный источник в положении  $\zeta$  начинает действовать в начальный момент времени  $t = 0$ . В однородной среде волновые фронты излучаются из источника как непрерывно расширяющиеся сферы радиуса  $\alpha t$  (для  $P$ -волн) и  $\beta t$  (для  $S$ -волн), приходящие в произвольную точку  $\mathbf{x}$  в моменты времени  $r/\alpha$  и  $r/\beta$ , где  $r = |\mathbf{x} - \zeta|$ . Обобщение на неоднородные среды достигается введением зависящего от положения источника и приемника времени пробега  $T(\mathbf{x}, \xi)$ , необходимого для распространения волнового фронта из  $\zeta$  в  $\mathbf{x}$ . Если для рассматриваемого источника может существовать более чем один волновой фронт (как в случае, когда существуют и продольные, и поперечные волны), то потребуется более одной функции времени пробега. Однако часто достаточно говорить о  $T(\mathbf{x})$ ; о каком волновом фронте и о каком точечном источнике идет речь, будет ясно из контекста.

Нашим первым пробным решением тогда будет

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(t - T)f(\mathbf{x}), \quad (4.36)$$

и мы опробуем его как приближенное решение для волнового уравнения  $\rho \ddot{u}_i = \tau_{ij,j}$  (справедливого всюду, кроме особой точки, где расположен источник  $\mathbf{x} = \xi$ ). Соотношения между напряжениями и смещениями для произвольно анизотропной неоднородной среды имеют вид  $\tau_{ij} = c_{ijk}(\mathbf{x})u_{k,l}(\mathbf{x}, t)$ , и прямая постановка дает

$$\rho \ddot{u}_i f = [c_{ijk}(U_k f)_{,l}]_{,j}. \quad (4.37)$$

Мы предполагаем, что вблизи волнового фронта  $\mathbf{U}$  изменяется значительно быстрее, чем  $f$  и  $c_{ijkl}$ , а ее производные  $\dot{\mathbf{U}}$  и  $\ddot{\mathbf{U}}$  флуктуируют еще более быстро. Уравнение (4.37) содержит как временные, так и пространственные производные  $U_k$ , но зависимость  $\mathbf{U}$  от пространственно-временной комбинации  $t - T(\mathbf{x})$  делает возможными такие соотношения, как

$$U_{k,lj} = \ddot{U}_k \frac{\partial T}{\partial x_l} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \dot{U}_k \frac{\partial^2 T}{\partial x_l \partial x_j},$$

так что вторые производные в (4.37) могут быть представлены как

$$\left( \rho \delta_{ik} - c_{ijkl} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_l} \right) \ddot{U}_k f = E_i(\mathbf{U}f), \quad (4.38)$$

где  $E$  содержит только 1) первые производные  $\mathbf{U}$ , 2) само  $\mathbf{U}$ , 3) упругие модули и амплитудную функцию  $f(\mathbf{x})$  с их градиентами. Таким образом,  $E$  должно быть много меньше, чем  $\mathbf{U}$ , и следовательно, матрица коэффициентов  $\ddot{U}_k f$  должна быть вырожденной:

$$\det \left| \rho \delta_{ik} - c_{ijkl} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_l} \right| = 0. \quad (4.39)$$

Это уравнение определяет возможные волновые фронты в упругой среде, так как оно накладывает ограничения на функцию  $T(\mathbf{x})$ .

В неоднородной изотропной среде  $c_{ijkl}$  таково [см. (2.33)], что (4.39) удается представить в виде произведения

$$\left( \nabla T \cdot \nabla T - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right) \left( \nabla T \cdot \nabla T - \frac{\rho}{\mu} \right)^2 = 0. \quad (4.40)$$

Это означает, что  $T$  удовлетворяет уравнению эйконала

$$(\nabla T)^2 = \frac{1}{c^2}, \quad (4.41)$$

где  $c$  — либо локальная скорость  $P$ -волны  $\sqrt{(\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}))/\rho(\mathbf{x})} = \alpha$ , либо локальная скорость  $S$ -волны  $\sqrt{\mu(\mathbf{x})/\rho(\mathbf{x})} = \beta$ .

Далее мы рассмотрим следствия того, что  $T$  удовлетворяет уравнению эйконала со скоростью  $c$  — уравнению, позволяющему ввести лучи.

#### 4.4.1. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ ПРОБЕГА $T(\mathbf{x})$ , СВЯЗАННОЙ С ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ $c(\mathbf{x})$

Пусть волновой фронт  $S$  задан уравнением  $t = T(\mathbf{x})$ , и пусть он достигает точки  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  на  $dt$  позже, чем точки  $\mathbf{x}$ . Тогда  $t + dt = T(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ , так что  $dt = \nabla T \cdot d\mathbf{x}$ . Если  $\mathbf{V}$  — скорость фронта, распространяющегося в направлении  $d\mathbf{x}$ , то  $\mathbf{V} = d\mathbf{x}/dt$  и  $\nabla T \cdot \mathbf{V} = 1$ . Значит, исходя из (4.41),

$$V^2 \geq \frac{1}{(\nabla T)^2} = c^2.$$

Равенство имеет место только тогда, когда векторы  $\mathbf{V}$  и  $\nabla T$  параллельны, т.е. когда  $d\mathbf{x}$  перпендикулярно  $S$ . Отсюда следует, что  $c$  — это скорость фронта  $S$  по нормали к нему.

Для данного волнового фронта  $S$  мы вводим *лучи* как нормали к распространяющейся поверхности фронта  $S$ . Если луч параметризован в виде  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\zeta)$ , где  $\zeta$  монотонно изменяется вдоль луча, то отсюда следует, что  $d\mathbf{x}/d\zeta = g(\mathbf{x})\nabla T$  — уравнение луча, где  $g$  (скалярная функция, связывающая параллельные векторы) определяется конкретным выбором  $\zeta$ .

Например, выбрав

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} = c^2 \nabla T = (c \nabla T)c \quad (4.42)$$

и заметив, что  $c\nabla T$  — единичная нормаль к фронту  $S$ , а  $c$  — скорость распространения фронта  $S$  по нормали к нему, находим, что  $\zeta$  можно интерпретировать как время пробега вдоль луча. Поскольку фронт  $S$  распространяется, оставаясь перпендикулярным к конкретному лучу  $R$ , разные точки пересечения  $S$  и  $R$  соответствуют разным временам  $T$ . Для сравнения этого  $T$  и  $\zeta$  из (4.42) заметим, что

$$\frac{dT}{d\zeta} = \nabla T \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} = \nabla T \cdot (c^2 \nabla T) = 1$$

и, следовательно,  $T$  и  $\zeta$  возрастают вдоль луча совершенно одинаковым образом. Поэтому сам луч может быть параметризован при помощи величины  $T$  и  $T$  имеет физический смысл времени пробега вдоль луча.

Рассматривая уравнение траектории луча, иногда удобно использовать в качестве параметра расстояние  $s$ , измеренное вдоль луча от некоторой точки отсчета. Очевидно, что

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c \nabla T, \quad (4.43)$$

так как  $d\mathbf{x}/ds$  и  $\nabla T$  параллельны, но левая сторона (4.43) — единичный вектор.

Сами лучи — фиксированные кривые в пространстве, и, чтобы исследовать их геометрию, нам нужно исключить  $T$  в (4.43) и получить уравнение для  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ , содержащее только  $c(\mathbf{x})$ . Это можно выполнить в несколько стадий, используя уравнение эйконала, в следующей последовательности:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) &= \frac{d}{ds} \nabla T = \left( \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \nabla \right) \nabla T = (c \nabla T \cdot \nabla) \nabla T \\ &= \frac{1}{2} c \nabla [(\nabla T)^2] = \frac{1}{2} c \nabla \left( \frac{1}{c^2} \right) = -\frac{1}{c^2} \nabla c. \end{aligned}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение луча, содержащее только пространственные координаты, имеет вид

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = \nabla \left( \frac{1}{c} \right). \quad (4.44)$$

В однородной среде оно сводится к  $d^2\mathbf{x}/ds^2 = \mathbf{0}$  с общим решением  $\mathbf{x} = \mathbf{a}s + \mathbf{b}$  (где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — константы), т.е. к прямой линии.

В среде, где  $c$  зависит только от глубины  $z$  (в декартовой системе координат), величина

$$\hat{z} \times \frac{1}{c} \frac{dx}{ds} \equiv \mathbf{Q} \quad (4.45a)$$

постоянна вдоль луча, так как

$$\frac{d\mathbf{Q}}{ds} = \hat{z} \times \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{dx}{ds} \right) = \hat{z} \times \nabla \left( \frac{1}{c} \right) = \mathbf{0}$$

[ $\hat{z}$  параллельно  $\nabla(1/c)$ ]. Отсюда следует, что лучи лежат в плоскостях, параллельных оси  $z$ , и что  $\sin i(z)/c(z) \equiv p$  постоянно вдоль луча; здесь  $i$  — угол между положительным направлением оси  $z$  и лучом (рис. 4.9, а). Это соотношение выражает закон Снеллиуса, а величину  $p$  называют *лучевым параметром*.

В сферически-симметричной среде  $c = c(r)$  постоянной вдоль луча является величина

$$\mathbf{r} \times \frac{1}{c} \frac{dr}{ds} \equiv \mathbf{Q} \quad (4.45b)$$

[Здесь мы используем  $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$  и сферические координаты с началом в центре симметрии.] Этот результат также получен при помощи (4.44), а именно

$$\frac{d\mathbf{Q}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{1}{c} \frac{dr}{ds} + \mathbf{r} \times \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{c} \frac{dr}{ds} \right) = \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \nabla \left( \frac{1}{c} \right) = \mathbf{0}.$$

Лучи остаются в вертикальной плоскости, и теперь вдоль луча постоянна величина  $r \sin i(r)/c(r) \equiv p$  (все еще называемая *лучевым параметром*) (рис. 4.9, б). Это закон Снеллиуса для сферически-симметричных сред. Мы будем часто использовать величину  $p$  в последующих главах, рассматривая ее как переменную, принимающую различные значения на разных лучах, исходящих из точечного источника. Заметим, что  $p$  имеет разную физическую размерность в средах, где скорость зависит от глубины (4.45 а), и в сферически-симметричных средах (4.45 б).

Имеется одно более общее свойство лучей, которое нужно упомянуть, прежде чем возвратиться к изучению амплитуд смещений частиц. Речь идет о так называемом принципе Ферма, который гласит, что для двух точек  $A$  и  $B$ , лежащих на луче  $R$ , сам луч является путем, вдоль которого в поле скоростей  $c(\mathbf{x})$  время пробега от  $A$  к  $B$  стационарно. Мы можем доказать это, используя дальнейшие свойства параметра  $\zeta$  в уравнении луча  $d\mathbf{x}/d\zeta = g(\mathbf{x})\nabla T = g(\zeta)\nabla T$  (вспомним, что мы уже использовали в качестве параметра  $\zeta$  время пробега и расстояние). Величины  $g(\zeta)$  и  $\zeta$  связаны уравнением эйконала (4.41), из которого следует

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} = \left( \frac{g}{c} \right)^2.$$

Для данного  $\zeta$  потребуем, чтобы

$$g = c \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} \right)^{1/2}. \quad (4.46)$$

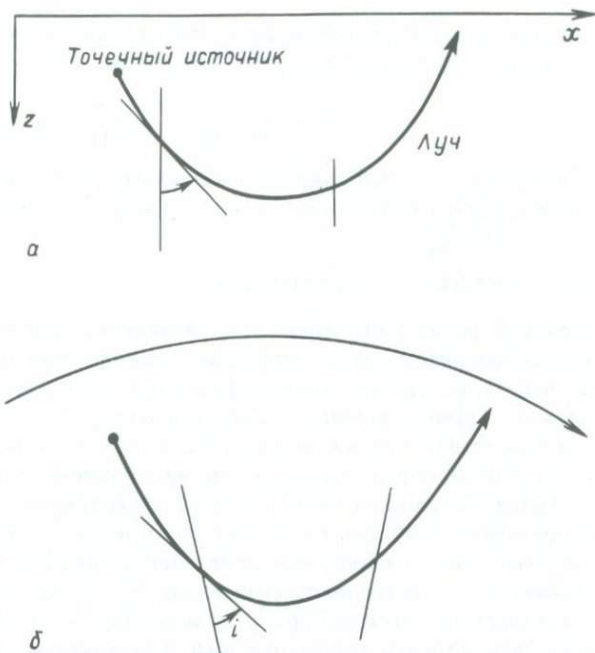


Рис. 4.9. **а** — траектория луча в среде, где скорость зависит только от глубины:  $\sin i(z)/c(z) = \text{const}$ , и луч лежит в вертикальной плоскости. **б** — траектория луча в сферически-симметричной среде, где скорость зависит только от расстояния  $r$  до центра симметрии:  $r \sin i(r)/c(r) = \text{const}$ , и луч лежит в вертикальной плоскости. Угол  $i$ , оцениваемый в источнике, называется *углом выхода из источника*.

В общем случае  $d/ds = (c/g)d/d\zeta$ , и из (4.44) мы получаем при любом выборе  $\zeta$  уравнение луча в виде

$$\frac{c}{g} \frac{d}{d\zeta} \left[ \frac{1}{g} \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} \right] = \nabla \left( \frac{1}{c} \right).$$

В этой форме уравнение луча можно идентифицировать с уравнениями Эйлера из вариационного исчисления, исключив вначале  $g$  с помощью (4.46) и получив

$$\frac{d}{d\zeta} \left[ \frac{1}{c(\mathbf{x})} \frac{\frac{d\mathbf{x}}{d\zeta}}{\left( \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} \right)^{1/2}} \right] = \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} \right)^{1/2} \nabla \left( \frac{1}{c} \right).$$

Это уравнение можно представить в виде трех скалярных уравнений ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial x_i}{\partial \zeta} \right)} \left[ \frac{1}{c(\mathbf{x})} \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} \right)^{1/2} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{c(\mathbf{x})} \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\zeta} \right)^{1/2} \right].$$

Мы получили искомые уравнения Эйлера, так как они свидетельствуют о стационарности времени вдоль луча. Мы видим, что

$$T(B, A) = \int_A^B \frac{|dx|}{c(x)} = \int_A^B \frac{1}{c(x)} \left( \frac{dx}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\zeta} \right)^{1/2} d\zeta \quad (4.47)$$

— интеграл, который для всех возможных путей, связывающих  $A$  и  $B$ , стационарен тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\zeta)$  — траектория луча.

#### 4.4.2. ЛУЧЕВЫЕ КООРДИНАТЫ

Волновой фронт  $S$  ортогонален к связанным с ним лучам, и мы показали, как можно параметризовать точки вдоль луча значениями  $T$ . Введем теперь  $(c^2, c^3)$  как некоторую систему координат внутри самого волнового фронта (т.е. признаем, что лучи, связанные с точечным источником, образуют двупараметрическое семейство). Тогда каждая точка, достигнутая лучом в поле скоростей  $c(\mathbf{x})$  ( $c = \alpha$  или  $\beta$ ), описывается значениями в лучевой координатной системе  $(T, c^2, c^3)$ . Наши обозначения для криволинейных координат введены в дополнении 2.6. Направление  $T$  (идущее вдоль луча) ортогонально к направлениям  $c^2$  и  $c^3$  в каждой точке; однако в произвольных неоднородных средах невозможно выбрать координаты  $c^2, c^3$  ортогональными всюду. К счастью, в частном случае сферической симметрии такой выбор  $c^2$  и  $c^3$  возможен, и это позволяет нам непосредственно использовать полученные в гл. 2 результаты для произвольных ортогональных систем координат. Заметим, что масштабный множитель  $h_T = h^1 = c$ , так как приращение расстояния  $ds$  вдоль луча равно  $cdT$ .

В однородных средах мы находим, что волны  $P$  в дальней зоне продольные, а волны  $S$  поперечные. То же самое остается справедливым и для произвольно неоднородных (но все еще изотропных) сред, что можно подтвердить, найдя векторное и скалярное произведения уравнения (4.38)  $\nabla T$ . В изотропной среде мы получаем

$$[\rho - \mu \nabla T \cdot \nabla T] \ddot{\mathbf{U}} \times \nabla T = \mathbf{E}(\mathbf{U}) \times \nabla T \quad (4.48)$$

и

$$[\rho - (\lambda + 2\mu) \nabla T \cdot \nabla T] \ddot{\mathbf{U}} \cdot \nabla T = \mathbf{E}(\mathbf{U}) \cdot \nabla T. \quad (4.49)$$

Вспомнив, что  $|\mathbf{E}|$  порядка  $|\dot{\mathbf{U}}|$ , что пробное решение имело вид  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})\mathbf{U}(t - T(\mathbf{x}))$  и что члены порядка  $|\dot{\mathbf{U}}|$  значительно больше членов порядка  $|\ddot{\mathbf{U}}|$ , находим, что либо

$$\ddot{\mathbf{U}} \times \nabla T = 0 \quad \text{и} \quad (\nabla T)^2 = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{\alpha(\mathbf{x})^2}, \quad (4.50)$$

либо

$$\ddot{\mathbf{U}} \cdot \nabla T = 0 \quad \text{и} \quad (\nabla T)^2 = \frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{\beta(\mathbf{x})^2}. \quad (4.51)$$

Направление луча совпадает с направлением  $\nabla T$ ; следовательно, уравнение (4.50) описывает продольную волну, распространяющуюся вдоль лучей, определяемых локальной скоростью волн  $P$ , а (4.51) — поперечную волну, распространяющуюся вдоль лучей, определяемых локальной скоростью волн  $S$ .

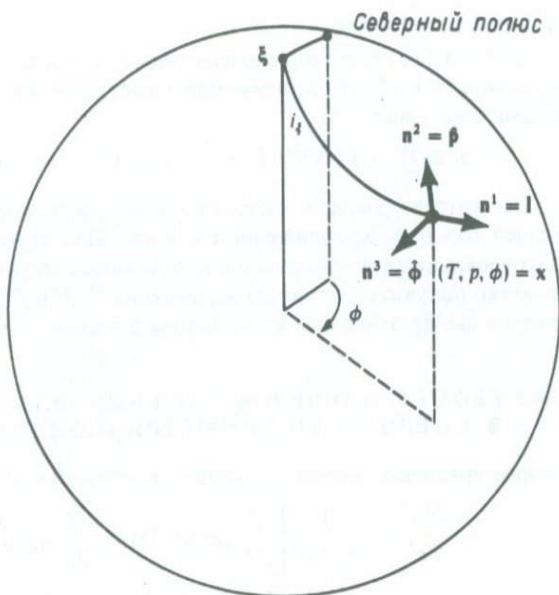


Рис. 4.10. Произвольные ортогональные лучевые координаты в сферически-симметричной среде. Мы выбираем  $(c^1, c^2, c^3) = (T, p, \phi)$ , где  $p$  — лучевой параметр, равный  $r \sin i(r)/c(r)$  и постоянный вдоль данного луча,  $\phi$  — географический азимут,  $T$  — время распространения волнового фронта вдоль луча от  $\xi$  до  $x$ . Таким образом,  $(c^2, c^3) = (p, \phi)$  характеризуют конкретный луч, выходящий из источника, а  $T$  указывает конкретную точку на луче. Соответствующие нормали в  $x$  — это  $n^1$  (вдоль луча),  $n^2$  — поперек луча в вертикальной плоскости,  $n^3$  — поперек луча в горизонтальной плоскости. Эти единичные нормали мы часто будем обозначать соответственно как  $l, \hat{\beta}, \hat{\phi}$ .

Другой возможный вариант лучевой координаты для  $c^2$  — угол  $i_\xi$ , часто называемый углом выхода из источника; в этом случае  $i_\xi$  и  $\phi$  будут углами сферической системы координат с центром в источнике, направлением  $i_\xi = 0$ , идущим вниз от источника, и направлением  $\phi = 0$  — на север от источника. Причина такого выбора  $i_\xi = 0$  (по вертикали вниз) в том, что  $\phi$  тогда сохраняет смысл географического азимута и мы получаем правостороннюю систему координат, в которой  $\phi$  измеряется по часовой стрелке от направления на север.

Наша следующая цель — найти вариации амплитуд волн  $P$  и  $S$  по мере их распространения вдоль лучей в неоднородной среде. Наши результаты (4.50) и (4.51) позволяют принять следующее.

1) Если  $(T, c^2, c^3)$  определены через скорость  $P$ -волн  $\alpha(x)$ , то уравнения движения имеют приближенное решение, в котором преобладает компонента  $u^1$  (компонента  $u$  вдоль направления  $\nabla T$ ), т.е. поперечные компоненты  $u^2$  и  $u^3$  пренебрежимо малы. Это решение описывает продольное возмущение с пробной формой вида

$$u(x, t) = f^1(x)(U^1(t - T(x)), 0, 0). \quad (4.52)$$

Далее предположим:

2) Если  $(T, c^2, c^3)$  определены через скорость  $S$ -волн  $\beta(\mathbf{x})$ , то преобладают смещения  $u^2$  и  $u^3$ . Это решение описывает поперечное возмущение, и его пробная форма имеет вид

$$u(\mathbf{x}, t) = f^2(\mathbf{x})(0, U^2(t - T(\mathbf{x})), 0) + f^3(\mathbf{x})(0, 0, U^3(t - T(\mathbf{x}))). \quad (4.53)$$

Рассмотрим вначале частный случай сферически-симметричной среды, служащей хорошим приближением к Земле. Для этого случая  $c^2$  и  $c^3$  выбраны как ортогональные координаты  $\rho$  и  $\phi$ , описанные на рис. 4.10. Мы найдем, что можно легко получить амплитудные функции  $f^1, f^2$  и  $f^3$  из (4.52) и (4.53), и идентифицируем две независимые компоненты  $S$ -волны.

#### 4.4.3. ГЕОМЕТРОЛУЧЕВОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ $P$ -ВОЛН В СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СРЕДЕ

Точное уравнение, которому удовлетворяет  $u^1(\mathbf{x}, t)$ , теперь имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} = \frac{1}{\alpha h^2 h^3} \left[ \frac{\partial}{\partial T} (h^2 h^3 \tau^{11}) + \frac{\partial}{\partial c^2} (h^3 \alpha \tau^{12}) + \frac{\partial}{\partial c^3} (\alpha h^2 \tau^{31}) \right] \\ + \frac{\tau^{12}}{\alpha h^2} \frac{\partial \alpha}{\partial c^2} + \frac{\tau^{31}}{h^3 \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial c^3} - \frac{\tau^{22}}{\alpha h^2} \frac{\partial h^2}{\partial T} - \frac{\tau^{33}}{h^3 \alpha} \frac{\partial h^3}{\partial T} \end{aligned} \quad (4.54)$$

[см. (2.48) и рис. 4.10], за исключением точки  $\mathbf{x} = \xi$ , где расположен источник. Однако из формул связи деформаций и смещений (2.45), (2.46) и нашего предположения о том,

3) что производные функций, описывающих форму колебаний, по перпендикуляру к волновому фронту много больше, чем производные по направлениям, параллельным волновому фронту,

следует, что большинство компонент деформаций в этой системе координат пренебрежимо малы. Соотношение между напряжениями и деформациями (2.50) позволяет тогда заключить, что  $\tau^{12}, \tau^{13}, \tau^{22}, \tau^{33}$  практически равны нулю, в то время как

$$\tau^{11} = \frac{\lambda + 2\mu}{\alpha} \frac{\partial u^1}{\partial T},$$

так что (4.54) сводится к приближенному виду

$$\rho \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} = \frac{1}{\alpha h^2 h^3} \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( h^2 h^3 \frac{\lambda + 2\mu}{\alpha} \frac{\partial u^1}{\partial T} \right) \right].$$

С тем же порядком аппроксимации (т.е. сохраняя  $\ddot{u}^1$  и  $u^1$ ) мы получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\rho \alpha h^2 h^3)^{1/2} u^1] = \frac{\partial^2}{\partial T^2} [(\rho \alpha h^2 h^3)^{1/2} u^1], \quad (4.55)$$

являющееся просто одномерным волновым уравнением для волны, распространяющейся вдоль направления изменения  $T$ . Общее решение для  $(\rho \alpha h^2 h^3)^{1/2} u^1$  —

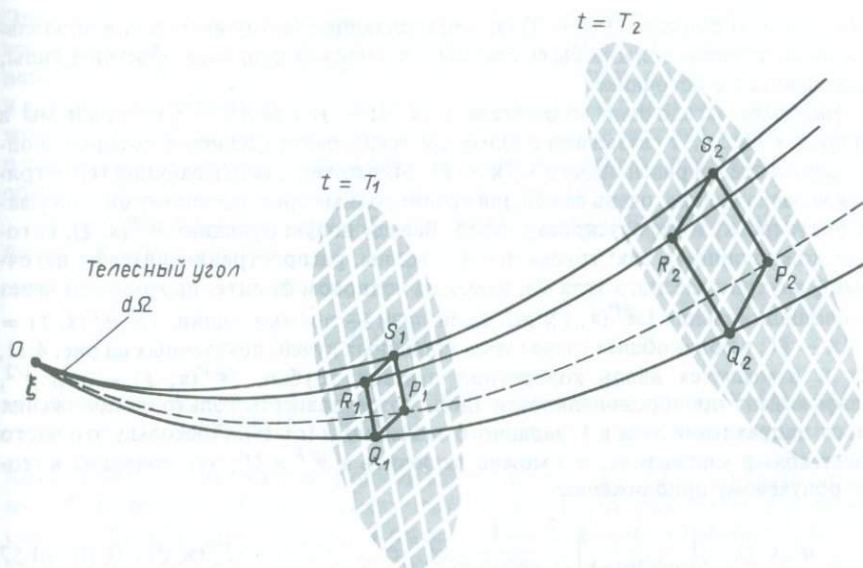


Рис. 4.11. Геометрическое расхождение четырех лучей. Пусть  $OP_1P_2$  — луч с координатами  $(c^2, c^3)$  в произвольной ортогональной системе  $(T, c^2, c^3)$ , а  $T_1$  и  $T_2$  указывают положение того же волнового фронта в последовательные моменты времени  $t = T_1, t = T_2$ . Положим, что лучи  $OQ_1Q_2, OR_1R_2, OS_1S_2$  имеют координаты  $(c^2, c^3 + dc^3), (c^2 + dc^2, c^3 + dc^3)$  и  $(c^2 + dc^2, c^3)$  соответственно и что телесный угол при вершине этой трубки в точке  $O$  равен  $d\Omega$ . Тогда площадь  $P_1Q_1R_1S_1$  равна  $h^2h^3dc^2dc^3$ , где  $(h^2h^3)$  оценивается при  $T = T_1$ , а площадь  $P_2Q_2R_2S_2$  равна  $h^2h^3dc^2dc^3$ , где  $(h^2h^3)$  оценивается при  $T = T_2$ . В этом смысле  $h^2h^3$  пропорционально поперечному сечению пучка лучей, выходящего из точечного источника.

Если координаты  $c^2$  и  $c^3$  не ортогональны (что имеет место в произвольно неоднородной среде), то фигуры  $P_1Q_1R_1S_1$  и  $P_2Q_2R_2S_2$  не прямоугольники и их площади даются выражением  $|(\partial x/\partial c^2) \times (\partial x/\partial c^3)| dc^2 dc^3$ . Такие площади все еще пропорциональны  $d\Omega$  на любом заданном волновом фронте, и мы определяем функцию геометрического расхождения  $\mathcal{R}(x, \xi)$ , приравнивая площадь поперечного сечения лучевой трубки в  $x$  к  $\mathcal{R}^2(x, \xi)d\Omega$ .

это функция  $t - T$  плюс функция  $t + T$ . Решение для продольного движения в  $P$ -волне вдоль *растущих*  $T$  тогда имеет вид

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t) = (u^1, 0, 0) = \left( \frac{1}{\rho \alpha h^2 h^3} \right)^{1/2} \mathcal{F}^P(c^2, c^3) (U^1(t - T(\mathbf{x}), 0, 0)). \quad (4.56)$$

Множители в правой части (4.56) обладают несколькими из свойств, отмеченных в разд 4.1 [после (4.3)] у элементарного решения в виде волны, распространяющейся от точечного источника в однородной среде. Величина  $(h^2h^3)^{-1/2}$  описывает затухание волны вследствие геометрического расхождения (см. рис. 4.11); множитель  $\mathcal{F}^P(c^2, c^3)$  описывает характеристику направленности излучения  $P$ -волн, выходящих в различных направлениях  $(c^2, c^3)$  из источника. Можно

ожидать, что функция  $U^1(t - T(x))$ , определяющая форму импульса в продольном направлении, должна быть связана с временной функцией объемной силы, действующей в источнике.

Наиболее загадочный множитель в (4.56) — это  $(h^2 h^3)^{-1/2}$ , который мы в подпункте к рис. 4.11 связываем с геометрическим расхождением и который в однородных средах равен просто  $1/|x - \xi|$ . Множитель, описывающий геометрическое расхождение, очень важен для неоднородных сред, поскольку он описывает фокусировку и дефокусировку лучей. Введем новую функцию  $\mathcal{R}^P(x, \xi)$ , которую можно описать так: трубка лучей  $P$ -волны, распространяющихся от источника  $\xi$  внутри телесного угла  $d\Omega$ , имеет на волновом фронте, проходящем через  $x$ , площадь сечения  $[\mathcal{R}^P(x, \xi)]^2 d\Omega$ . Если лучи — прямые линии, то  $\mathcal{R}^P(x, \xi) = |x - \xi|$ ; в более общем случае криволинейных лучей, показанных на рис. 4.11, где  $x$  изменяется вдоль конкретной лучевой трубки,  $\mathcal{R}^P(x, \xi) \sim (h^2 h^3)^{1/2}$ . Коэффициент пропорциональности здесь может зависеть только от положения  $\xi$  и от направления луча в  $\xi$ , заданного значениями  $(c^2, c^3)$ . Поскольку это чисто масштабный множитель, его можно включить в  $\mathcal{F}^P$  и  $U^1$ , что приводит к геометролучевому приближению

$$u^P(x, t) = \left( \frac{1}{\rho(x)\alpha(x)} \right)^{1/2} \frac{1}{\mathcal{R}^P(x, \xi)} \mathcal{F}^P(c^2, c^3)(U^1(t - T^P(x, \xi)), 0, 0) \quad (4.57)$$

для смещения в  $P$ -волне. Мы использовали здесь верхний индекс и для времени

пробега  $T^P(x, \xi) = \int_{\xi}^x |ds|/\alpha$ , где интеграл берется вдоль луча [см. 4.47]. В

разд. 4.5 мы получим явные выражения для  $\mathcal{F}^P(c^2, c^3)$  и  $U^1(t)$  в случае точечной сдвиговой дислокации произвольной ориентации.

#### 4.4.4. ГЕОМЕТРОЛУЧЕВОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ S-ВОЛН

В СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СРЕДЕ:  
КОМПОНЕНТЫ  $SV$  И  $SH$

Лучевые координаты рис. 4.10 с временем пробега  $T$ , определенным для скорости поперечных волн  $\beta(x) = \beta(r)$ , пригодны также для анализа поперечных движений  $\mathbf{u} = (0, u^2, u^3)$ . Используя сделанные ранее предположения «2» и «3» и формулы связи деформаций и напряжений, деформаций и смещений из разд. 2.6, мы находим, что всеми компонентами напряжений, за исключением скальвающих напряжений, можно пренебречь:

$$\tau^{12} = \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial u^2}{\partial T}, \quad \tau^{31} = \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial u^3}{\partial T}.$$

Эти выражения можно подставить в уравнения для  $\ddot{u}^2$  и  $\ddot{u}^3$  [см. (2.48)], и тем же путем, что и при выводе (4.55), найдем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\rho\beta h^2 h^3)^{1/2} u^2] = \frac{\partial^2}{\partial T^2} [(\rho\beta h^2 h^3)^{1/2} u^2], \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\rho\beta h^2 h^3)^{1/2} u^3] = \frac{\partial^2}{\partial T^2} [(\rho\beta h^2 h^3)^{1/2} u^3]. \quad (4.59)$$

Это опять одномерные волновые уравнения, общее решение которых нам известно; из уравнений (4.58) и (4.59) следует также, что  $u^2$  и  $u^3$  распространяются независимо. Из рис. 4.10 следует, что  $u^3$  — это движение, происходящее в точке  $\mathbf{x}$  в горизонтальном направлении; поэтому его называют  $SH$ -компонентой. Движение  $u^2$  также поперечно по отношению к лучу, но происходит в вертикальной плоскости и поэтому называется  $SV$ -компонентой. Заметим, что движение  $SV$  не обязательно происходит в вертикальном направлении.

Геометролучевые решения для  $S$ -волн в сферически-симметричной среде получаются теперь в виде

$$u^{SV}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})} \right)^{1/2} \frac{1}{\mathcal{R}^S(\mathbf{x}, \xi)} \mathcal{F}^{SV}(p, \phi)(0, U^2(t - T^S(\mathbf{x}, \xi)), 0), \quad (4.60)$$

$$u^{SH}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{1}{\rho(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x})} \right)^{1/2} \frac{1}{\mathcal{R}^S(\mathbf{x}, \xi)} \mathcal{F}^{SH}(p, \phi)(0, 0, U^3(t - T^S(\mathbf{x}, \xi))). \quad (4.61)$$

Хотя характеристики направленности излучения  $\mathcal{F}^{SV}$  и  $\mathcal{F}^{SH}$  могут быть разными, обе компоненты волны  $S$  имеют тот же множитель, описывающий геометрическое расхождение  $\mathcal{R}^S(\mathbf{x}, \xi)$ , и ту же функцию времени пробега  $T^S$ . Формы колебаний  $U^2$  и  $U^3$  могут, вообще говоря, различаться, хотя в следующем разделе мы покажем, что для волн  $S$  в дальней зоне, вызванных точечной сдвиговой дислокацией, они одинаковы.

Такое разделение смещений, переносимых в виде  $SV$ - и  $SH$ -компонент, называется *поляризацией*  $S$ -волны и не изменяется вдоль данного луча; это свойство играет очень важную роль при интерпретации сейсмограмм объемных волн.

#### 4.4.5. ГЕОМЕТРОЛУЧЕВЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Точность, достигнутая современной сейсмологией, сделала очевидным тот факт, что внутреннее строение Земли несколько отличается от сферически-симметричного. Так годографы (графики зависимости времени пробега  $T$  от расстояния вдоль земной поверхности) объемных волн от поверхностного источника для разных регионов имеют систематические различия. В некоторых исследованиях (например, [188]) значимые отклонения порядка 0,2 с (во временах пробега, достигающих нескольких минут) использовались для оценки отклонений от однородности в нижней мантии. Часть отклонений от симметрии обусловлена эллиптичностью Земли, но поправки, учитывающие этот эффект, теперь хорошо известны [64, 109]. Более интересны эффекты, вызванные большими изменяющимися по горизонтали структурами, такими как опускающиеся литосферные плиты, восходящие мантийные струи, континентальные окраины и весьма разнообразные неоднородности земной коры. В случае объемных волн некоторые из таких эффектов иногда можно интерпретировать в рамках явлений отражения и преломления на наклонных (т.е. не горизонтальных) границах, но в настоящий момент мы интересуемся лучевой теорией для сред с плавным изменением параметров, т.е. без разрывов структуры.

Если предположение о сферической симметрии отбросить, возникает ряд ос-

ложнений, главное из которых в том, что луч больше не обязан лежать в плоскости. В наиболее неблагоприятном случае он может перекручиваться, как изогнутый штопор, и поэтому удивительно, что результаты (4.57), (4.60), (4.61), уже полученные для сферической симметрии, требуют лишь незначительных изменений в общем случае. Действительно, геометролучевое решение для  $P$ -волн не изменится в произвольной изотропной среде. Для  $S$ -волн амплитуда смещений все еще изменяется как  $1/[(\rho\beta)^{1/2}\mathcal{R}^S(\mathbf{x}, \xi)]$  [см. (4.60), (4.61)], и еще можно говорить с некоторым основанием, что поляризация не изменяется вдоль луча. Поскольку уже не удастся найти координаты  $(c^2, c^3)$ , ортогональные на каждом волновом фронте, только что высказанные утверждения требуют другого, более сложного метода доказательства.

Так, для  $P$ -волн мы можем опробовать решение в виде

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})U(t - T(\mathbf{x}))\alpha \nabla T, \quad (4.62)$$

вытекающем из (4.50). Здесь  $\alpha \nabla T$  — единичный вектор в направлении продольного движения частиц; мы подставляем (4.62) в общее уравнение смещений для неоднородных изотропных сред

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} [\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})], \quad (4.63)$$

полученное из (2.17), (2.49) и (2.3). Все члены порядка  $\dot{U}$  взаимно уничтожаются, так как  $(\nabla T)^2 = 1/\alpha^2$ , и если потребовать исчезновения также членов порядка  $\dot{U}$ , мы получим уравнение для амплитуды  $P$ -волн  $f(\mathbf{x})$ . Умножая скалярно уравнение (4.63) на  $\nabla T$  [как в (4.49)], можно представить результат после ряда преобразований в виде

$$(\lambda + 2\mu)[2 \nabla T \cdot \nabla(\alpha f) + 2\alpha^3 f T_{,k} T_{,ik} T_{,i} + \alpha f \nabla^2 T] + \alpha f \nabla(\lambda + 2\mu) \cdot \nabla T = 0. \quad (4.64)$$

Большинство этих членов можно непосредственно представить в виде производных по расстоянию  $s$  вдоль луча, поскольку  $\alpha(\partial T/\partial x_i)(\partial/\partial x_i) = \partial/\partial s$ . Например,

$$T_{,k} T_{,ik} T_{,i} = \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{\alpha^2} \right).$$

Эффект геометрического расхождения представлен в (4.64) членом с  $\nabla^2 T$ . Это дивергенция  $\nabla T$  и, рассматрив элементарный объем с вершинами в точках  $T \pm \delta T/2$ ,  $c^2 \pm \delta c^2/2$ ,  $c^3 \pm \delta c^3/2$ , мы находим, что поток величины  $\nabla T$  из этого объема не равен нулю только для его граней с площадью  $\mathcal{R}^2(\mathbf{x}, \xi) d\Omega$  (см. рис. 4.11 и подпись к нему). Из определения дивергенции (поток из единицы объема) следует, что

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\mathcal{R}^2(\mathbf{x}, \xi) d\Omega \alpha} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\mathcal{R}^2(\mathbf{x}, \xi) d\Omega}{\alpha} \right) \delta T = \frac{1}{\mathcal{R}^2} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\mathcal{R}^2}{\alpha} \right), \quad (4.65)$$

и (4.64) сведется к уравнению

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} = 0. \quad (4.66)$$

Интегрируя, находим пропорциональность  $f(\mathbf{x}) \sim 1/[(\rho(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}))^{1/2}\mathcal{R}(\mathbf{x}, \xi)]$ ; коэффициент пропорциональности зависит от выбора луча, т.е. от  $(c^2, c^3)$ . Таким образом, пробное решение ведет точно к тому же геометролучевому решению для волн  $P$ , как и найденное в (4.57) для сферически-симметричных сред.

Для волн  $S$  из (4.51) следует, что смещение частиц в общем все еще является поперечным к лучу, но мы сталкиваемся с новым явлением, которое нельзя количественно описать исходя из опыта однородных или сферически-симметричных сред. Оно состоит во вращении направления смещения частиц вокруг луча по мере распространения волнового фронта.

Наше пробное решение для смещения в  $S$ -волне имеет вид

$$\mathbf{u}^S(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})U(t - T(\mathbf{x}))\mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (4.67)$$

где  $f(\mathbf{x})$  — амплитуда,  $U(t)$  — форма волны, а единичный вектор  $\mathbf{v}$  дает направление движений частиц, так что  $\mathbf{v} \cdot \nabla T = 0$ . Снова подставим наше пробное решение в уравнение смещений (4.63), но на этот раз образуем векторное произведение (4.63) с  $\nabla T$ . Наибольшие члены, содержащие  $\dot{U}$ , уничтожаются благодаря свойству  $(\nabla T)^2 = 1/\beta^2$ , и, пренебрегая членами с  $\dot{U}$ , мы получим

$$\mu[2(\nabla f \cdot \nabla T)\mathbf{v} \times \nabla T + 2f((\nabla T \cdot \nabla)\mathbf{v}) \times \nabla T + f(\nabla^2 T)\mathbf{v} \times \nabla T] + f(\nabla\mu \cdot \nabla T)\mathbf{v} \times \nabla T = 0. \quad (4.68)$$

Используя соотношение  $\beta(\partial T/\partial x_i)(\partial/\partial x_i) = \partial/\partial s$  для того, чтобы выразить производные в (4.68) как производные по расстоянию  $s$  вдоль луча, а также то, что  $\nabla^2 T = (1/\mathcal{R}^2)(\partial/\partial s)(\mathcal{R}^2/\beta)$ , где  $\mathcal{R}$  описывает геометрическое расхождение для волн  $S$  [ср. с (4.65)], преобразуем (4.68) к виду

$$\left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{1}{2\beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s}\right)(\mathbf{v} \times \nabla T) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \times \nabla T\right) = 0. \quad (4.69)$$

Однако встречающиеся здесь два вектора  $\mathbf{v} \times \nabla T$  и  $\partial \mathbf{v}/\partial s \times \nabla T$  ортогональны (это следует из взаимной ортогональности  $\nabla T$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v} \times \nabla T$  и из того факта, что  $0 = \partial/\partial s(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v}/\partial s$ ; значит,  $\partial \mathbf{v}/\partial s$  лежит в одной плоскости с  $\nabla T$  и  $\mathbf{v} \times \nabla T$ ). Следовательно, амплитудная функция  $f$  подчиняется условию

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{1}{2\beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} = 0 \quad (4.70)$$

и, кроме того,

$$\partial \mathbf{v}/\partial s \times \nabla T = 0, \quad (4.71)$$

что указывает на совпадение  $\partial \mathbf{v}/\partial s$  с продольным направлением  $\nabla T$ .

Из (4.70) получаем пропорциональность  $f(\mathbf{x}) \sim 1/[(\rho(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}))^{1/2}\mathcal{R}(\mathbf{x}, \xi)]$ , и амплитуда имеет те же свойства, которые найдены для компонент  $SV$  и  $SH$  в сферически-симметричных средах [см. (4.60), (4.61)].

Пользуясь (4.71), можно показать, что в некотором отношении волна  $S$  сохраняет поляризацию в различных точках вдоль луча, даже в произвольно неоднородных средах. Этот эффект можно проанализировать с помощью локальной системы единичных векторов, связанной с каждой точкой луча. К ним относятся

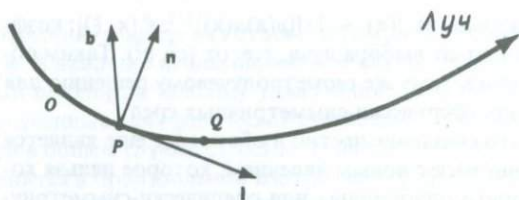


Рис. 4.12. Система трех взаимно-ортогональных единичных векторов в точке  $P$ , характерная для геометрии закручивающегося луча.  $l$  направлено вдоль луча,  $n$  — нормаль к лучу и лежит в плоскости, в которой луч изменяет направление (т.е. в плоскости  $d\mathbf{l}/ds$  — это соприкасающаяся плоскость, определяемая как предельная плоскость, содержащая точки  $O$ ,  $P$ ,  $Q$  криволинейного луча при стремлении  $O$  и  $Q$  к  $P$ ). Единичная бинормаль  $b$  взята в таком направлении, что  $(l, n, b)$  образуют правую координатную систему. Если луч не испытывает кручения, а просто искривляется в плоскости,  $b$  нормально к этой плоскости.

единичный касательный вектор  $l = \beta \nabla T$ , единичная нормаль  $n(d\mathbf{l}/ds)/|d\mathbf{l}/ds|$  и единичная бинормаль  $b = l \times n$ . Локальная кривизна луча  $\kappa(s)$  — это мера тенденции луча к изменению направления и равна просто  $|d\mathbf{l}/ds|$ . Заметим, что это изменение направления происходит по нормали к  $l$  и связано с  $n$  соотношением

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = \kappa(s)n. \quad (4.72)$$

Для каждой точки на луче векторы  $l$  и  $n$  определяют плоскость, которая называется *соприкасающейся* (рис. 4.12) и совпадает с плоскостью луча, когда луч лежит в плоскости (например, в случае сферической симметрии). В более общем случае соприкасающаяся плоскость (нормальная к  $b$ ) изменяет свое направление вдоль луча и производная  $db/ds$  будет мерой стремления луча «выкрутиться» из соприкасающейся плоскости.

Записав  $db/ds = c_1 l + c_2 n + c_3 b$ , нетрудно показать, что из фиксированной длины  $b$  следует  $c_3 = 0$ , а из определения  $b$  и  $n$   $c_1 = 0$ . Следовательно,  $db/ds$  направлено вдоль  $n$ , и локальное кручение, или вторая кривизна, луча  $T$  определяется как

$$\frac{db}{ds} = -Tn. \quad (4.73)$$

Это уравнение означает, что оси  $(n, b)$  по мере продвижения вдоль луча вращаются вокруг него с быстротой изменения угла на единице расстояния, равной  $T$ .

Поскольку  $n = b \times l$ , отсюда следует, что

$$\frac{dn}{ds} = -\kappa l + T b. \quad (4.74)$$

Уравнения (4.72) — (4.74) известны как формулы Френе, и мы теперь возвращаемся к нашей задаче: найти, как направление поперечного движения изменяется в процессе распространения.

Положим, что на расстоянии  $s$  вдоль луча направление поперечного движения  $v$  волны  $S$  составляет угол  $\gamma$  с локальной нормалью:

$$v = \cos \gamma n + \sin \gamma b. \quad (4.75)$$

Тогда из (4.73) и (4.74) следует

$$\frac{\partial v}{\partial s} = -\kappa \cos \gamma l - \left( \frac{d\gamma}{ds} + T \right) (\sin \gamma \mathbf{n} - \cos \gamma \mathbf{b}). \quad (4.76)$$

Но мы уже получили из (4.71), что  $dv/ds$  направлено вдоль  $\nabla T$ , т.е. вдоль  $l$ ; следовательно,

$$\frac{d\gamma}{ds} = -T. \quad (4.77)$$

Это означает, что вектор смещения  $u^S$  в волне  $S$  вращается относительно направлений  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b}$  точно с той же скоростью  $T$ , как и сами оси [см. (4.73)], но в противоположном направлении. Благодаря этому можно говорить о том, что волна  $S$  сохраняет свою поляризацию. На практике оказывается, что пространственные производные скорости волн  $S$  часто изменяются по вертикали и горизонтали таким образом, что для анализа времен пробега и диаграммы направленности точечного источника необходимо полное трехмерное трассирование лучей. [Последнее требует численного решения уравнения (4.44) для лучевых траекторий. Однако благодаря взаимному уничтожению двух описанных выше эффектов (4.73) и (4.77) может оказаться, что на самом деле поляризация (выражаемая как отношение компонент  $SH/SV$ ) при распространении через плавно меняющуюся структуры изменяется мало. Этот вопрос еще подробно не исследован.]

Этим мы завершаем проведенное здесь рассмотрение лучевой теории. В гл. 5 мы свяжем полученные выше результаты с сохранением энергии в лучевых трубках, в гл. 9 найдем новые свойства лучей в сферически-симметричной среде (в частности окажется, что для каустик, где  $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \xi) = 0$ , и зон тени результаты этого раздела нужно модифицировать). В гл. 13 мы покажем, как трехмерное трассирование лучей используется для интерпретации эффектов горизонтальных изменений в строении Земли.

Методы этого раздела были существенно более полно развиты Бабицем, Келлером и их коллегами, использовавшими в качестве пробных решений

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \exp(i\omega T) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\mathbf{x})(i\omega)^{-n}. \quad (4.78)$$

Можно получить рекуррентное соотношение между  $A_n$ , позволяющее найти столько членов бесконечного ряда, сколько может потребоваться [191]. Наши результаты относятся к  $A_0$ , доминирующему на достаточно высоких частотах. Иногда полезно знать  $A_1$  (например, когда имеются границы раздела свойств среды и геометрия расположения источника и приемника допускает существование головных волн, тогда их главный вклад содержится в  $A_1$ ). Чаще, если одного  $A_0$  недостаточно для описания решения, необходимо учесть существенно большее число членов в ряде (4.78) (что трудно практически осуществить) или использовать другой вид пробного решения. (Во временной области  $A_n$  в (4.78) является весовым коэффициентом при члене, пропорциональном  $(t - T(\mathbf{x}))^{n-1}$ , так что такое решение неограниченно растет с удалением от волнового фронта [244].)

#### 4.5. ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ ТОЧЕЧНОЙ СДВИГОВОЙ ДИСЛОКАЦИЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ В СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СРЕДЕ

Ясное понимание вопроса, указанного в названии, сыграло большую роль в обнаружении и измерении движений многих литосферных плит [176, 316]. После того как диаграмма направленности излучения для данного землетрясения получена, ее ориентация дает ценную информацию о напряженном состоянии, вызвавшем землетрясение.

Мы уже описали диаграмму направленности в координатах источника в разд. 4.3 (см. рис. 4.5,б, 4.6,б). Для волн  $P$  существуют две nodальные (узловые) плоскости. Они ортогональны, и одна из них — плоскость разрыва. Но эта система координат, связанная с источником, остается неизвестной нам до тех пор, пока мы не узнаем ориентировку плоскости разрыва и направление подвижки по разрыву. Ориентация разрыва определяется *простирианием* и *падением*, а затем либо *уклон*, либо *погружение* определяют направление подвижки (рис. 4.13). Разрыв имеет две поверхности (два крыла), на рисунке показана поверхность *лежащего бока*. Другую поверхность называют *висячим боком*. Подвижка  $\bar{u}$  определяется как направление движения висячего бока по отношению к лежащему. Уклон  $\lambda$  — это угол между направлением простириания и вектором подвижки ( $-\pi < \lambda \leq \pi$ ). Если  $\delta$  не равно 0 и  $\pi/2$  и  $\lambda$  находятся в диапазоне  $(0, \pi)$ , разрыв называется *взбросом* или *надвигом*. Если же  $\lambda$  лежит в диапазоне  $(-\pi, 0)$ , разрыв называют (*нормальным*) *сбросом*.

Вместо *уклона* (измеряемого на плоскости разрыва) некоторые авторы используют *погружение*, измеряемое в вертикальной плоскости. Измеряя его от горизонтали вниз к направлению  $\bar{u}$ , мы находим, что синус этого угла равен  $-\sin \lambda \sin \delta$ .

*Разрыв со смещением по простирианию (сдвиг)* — это такой разрыв, у которого  $\delta = \pi/2$ , а  $\lambda = 0$  или  $\pi$ ; выбор висячего и лежащего боков становится произвольным, и имеются два варианта направления простириания. Однако полезно установить правило для различения правостороннего и левостороннего сдвигов по одному только значению  $\lambda$ . (При *правостороннем* сдвиге наблюдатель, находящийся на одном крыле, видит другое движущимся вправо.) Наше правило — зафиксировать одно из двух возможных направлений простириания и назвать правосторонний блок (т.е. тот, который находится справа от наблюдателя, смотрящего вдоль простириания) висячим боком. Это определяет ту из двух поверхностей разрыва, на которой определяется  $\lambda$ , и очевидно, что  $\lambda = 0$  соответствует левостороннему сдвигу, а  $\lambda = \pi$  — правостороннему.

*Разрыв со скольжением по падению* — это такой разрыв, у которого  $\delta = \pi/2$ , а  $\lambda = \pi/2$  или  $-\pi/2$ . Здесь опять-таки есть произвол в выборе направления простириания. Мы будем считать, что лежащий бок опускается, а направление простириания опять выбирается так, чтобы висячий бок оказался справа. В результате у такого сброса всегда  $\lambda = \pi/2$ .

Введем понятие *фокальной сферы* (рис. 4.14); на ее поверхности мы будем

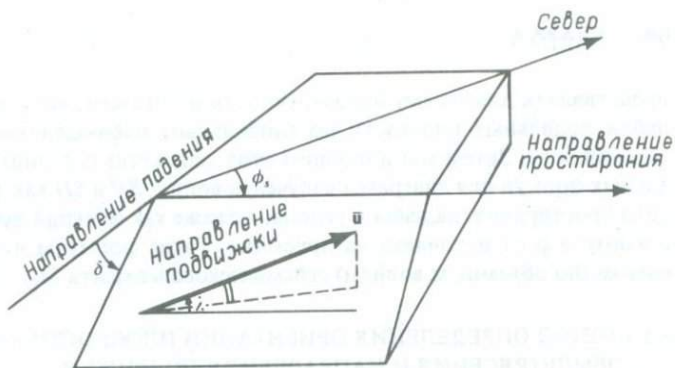


Рис. 4.13. Определение параметров, характеризующих ориентацию плоскости разрыва (простирание  $\phi_s$ , падение  $\delta$ ) и направление подвижки.  $\phi_s$  измеряется по часовой стрелке от направления на север, падение плоскости разрыва происходит вправо по отношению к направлению простирания:  $0 \leq \phi_s < 2\pi$ ;  $\delta$  измеряется вниз от горизонтали:  $0 \leq \delta \leq \pi/2$ .

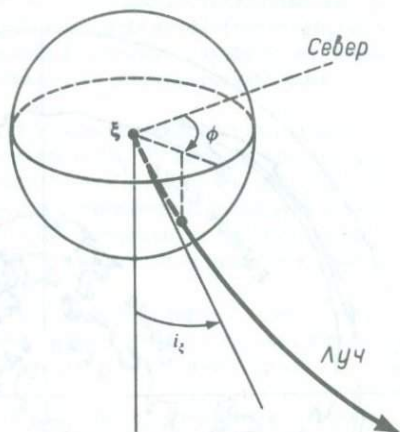


Рис. 4.14. Фокальная сфера сейсмического точечного источника — это сфера с центром в источнике, имеющая произвольно малый радиус. На такой сфере удобно изображать диаграмму излучения, так как на нее можно перенести информацию, записанную сейсмографами (расположенными на поверхности Земли); это требует прослеживания лучевых траекторий от приемников обратно к источнику и определения точек пересечения ими фокальной сферы. Эквивалентный способ заключается в описании положения точек на фокальной сфере угловыми координатами луча ( $i_\xi, \phi$ ) в сферической системе координат с центром в источнике ( $i_\xi = 0$  — это направленная вниз вертикаль;  $\phi$  — азимут, отсчитываемый от направления на север; радиус фокальной сферы несуществен и обычно принимается за единицу). Например, диаграммы излучения на рис. 4.5,б и 4.6,б показаны как диаграммы на фокальной сфере.

Поскольку фокальная сфера расположена в ближней зоне источника, не очевидно, что характеристики излучения в дальней зоне, отображенные на фокальную сферу, будут прямо указывать смещения, фактически происходящие в области очага. Однако для сдвиговой дислокации с результирующей (статической) подвижкой того же направления, что усредненная скорость частиц, недоразумений не возникает. Это обусловлено тем, что характеристика направленности излучения дальней зоны [члены  $A^{FP}$  и  $A^{FS}$  в (4.32) и (4.33)] та же, что и для статического смещения (4.34) на любом расстоянии от источника (и, в частности, на фокальной сфере).

представлять диаграмму направленности и покажем, как с ее помощью можно найти нодальные плоскости по глобальным наблюдениям объемных волн в дальней зоне. Затем мы дополним этот описательный подход выводом специальных формул для диаграмм излучения волн  $P$ ,  $SV$  и  $SH$  как функций произвольного простирания, падения и уклона, а также как функций лучевого параметра  $p$  и азимута  $\phi$  от источника на приемник. Такие формулы нужны для надежной оценки (по объемным волнам) сейсмического момента  $M_0$ .

#### 4.5.1. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ПЛОСКОСТИ РАЗРЫВА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ И НАПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖКИ ПО ТЕЛЕСЕЙСМИЧЕСКИМ НАБЛЮДЕНИЯМ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН

Диаграмма направленности излучения сдвиговой дислокации для волн  $P$  (см. рис. 4.5) характеризуется квадрантным распределением. Этот эффект наиболее часто изучают по первым движениям в смещениях, переносимых этими волна-



Рис. 4.15. Фокальная сфера в равноплощадной проекции вокруг точки под Курильскими островами ( $43^{\circ}26'$  с.ш.,  $147^{\circ}03'$  в.д., глубина 42 км). Для сейсмологических задач восток СССР мог бы дать больше информации, чем все остальные континентальные области, вместе взятые. Отсутствие наблюдений в Тихом океане крайне затрудняет определение механизма очага [103].

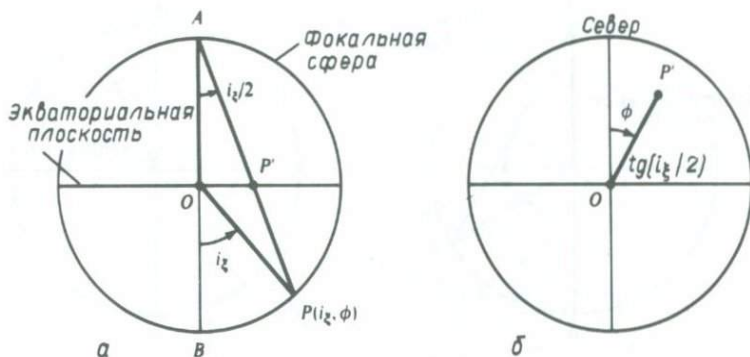


Рис. 4.16. Стереографическая проекция фокальной сферы отображает точку  $P$  в точку  $P'$  в экваториальной плоскости фокальной сферы.  $a$  — вертикальная плоскость, проходящая через центр фокальной сферы и точку  $P$ .  $b$  — горизонтальная плоскость (видимая в  $a$  сбоку) в плане; это плоскость проектирования, и точка  $P'$  находится на расстоянии  $\operatorname{tg}(i_z/2)$  от точки  $O$ . На рисунке показано проектирование нижней фокальной полусферы, но, проектируя из  $B$  вместо  $A$ , можно отобразить на круг единичного радиуса верхнюю фокальную полусферу.

Поскольку такая проекция сохраняет углы, масштаб во всех направлениях из точки  $P'$  локально одинаков. Однако масштаб в  $P'$  пропорционален  $\sec^2(i_z/2)$ ; значит, элементы площади в  $P$  переходят в элементы площади в  $P'$  с масштабным множителем  $\sec^4(i_z/2)$ . Это крайне нежелательно, так как приводит к сильному преувеличению площадей вокруг точек фокальной сферы, не лежащих вблизи  $A$  и  $B$ . Этот эффект проявляется в  $b$  главным образом как относительное сжатие площадей, относящихся к нисходящим лучам (т.е. с малыми  $i_z$ ).

Стереографическая проекция используется совместно с сеткой Вульфа, которая является шаблоном и позволяет проводить в  $b$  всевозможные кривые, представляющие в  $a$  пересечения фокальной сферы с произвольно ориентированными плоскостями разрыва.

ми. Для данного приемника продольное движение частиц происходит либо по направлению на источник, либо от него: первые вступления у сейсмометра часто являются наиболее надежной и наиболее легкой интерпретируемой частью записи смещений грунта. Диаграмму направленности наиболее удобно представлять на фокальной сфере, показанной на рис. 4.14. Так, имея наблюдение  $P$ -волн в точке  $x$  на луче, мы проследим луч назад к источнику в  $\xi$ , перенесем информацию, полученную в  $x$ , в соответствующую точку фокальной сферы (т.е. точку с координатами  $i_z, \phi$ ).

Чтобы проиллюстрировать искажения, вносимые таким отображением, на рис. 4.15 показано, как отображаются контуры основных континентов лучами  $P$ -волн на нижнюю фокальную полусферу с центром в точке на глубине 42 км под Курильскими островами в северной части Тихого океана. Поскольку скорость  $P$ -волн в мантии увеличивается с глубиной (в модели Земли, использованной для получения этого рисунка), при отображении поверхности Земли на фокальную сферу происходит очень сильное площадное искажение.

Заметим, что для того, чтобы показать фокальную сферу на плоскости (такой, как печатная страница), требуется еще одно отображение. Два наиболее широко распространенных способа такого отображения — это стереографиче-

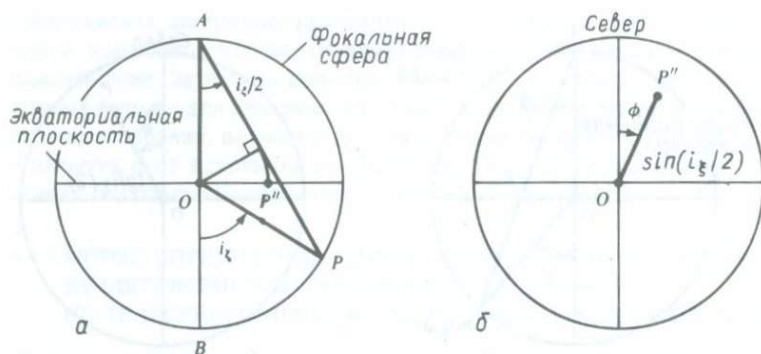


Рис. 4.17. Зенитная равноплощадная проекция отображает точку  $P$  в точку  $P''$ . Азимутальный угол  $\phi$  не изменяется (свойство всех зенитных проекций), расстояние  $OP''$  равно  $\sin(i_z/2)$ . **а** — вертикальная плоскость, проходящая через центр фокальной сферы и точку  $P$ . **б** — горизонтальная плоскость (показанная в **а** сбоку) в плане. Если элемент площади  $i_z di_z d\phi$  вокруг  $P$  отображается в элемент вокруг  $P''$ , его новая площадь равна

$$\sin(\frac{1}{2}i_z) d\phi [\sin(\frac{1}{2}i_z + \frac{1}{2}di_z) - \sin(\frac{1}{2}i_z)] = \frac{1}{4} \sin i_z di_z d\phi,$$

т.е. умножается на постоянный множитель  $1/4$ . Вся фокальная сфера (с площадью поверхности  $4\pi$ ) отображается в единичный круг площадью  $\pi$ . Однако принято представлять верхнюю полусферу [проектируемую из точки  $B$ , т.е. с использованием  $\sin(\pi/2 - i_z/2)$ ] отдельно от нижней, чтобы избежать сильных искажений углов верхней полусферы, которые возникали бы при проектировании всей сферы из одной точки. Для нанесения различных положений плоскости разрыва в **б** нужен специальный шаблон. Различия между равноплощадной и равноугольной (стереографической) проекциями можно заметить при рассмотрении рис. 4.5,б и 4.6,б, на которых плоскость разрыва и вспомогательная плоскость (для того же самого механизма очага) представлены двумя различными способами.

ская проекция (рис. 4.16) и зенитная равноплощадная проекция (иногда называемая равноплощадной проекцией Шмидта — Ламберта, рис. 4.17).

Процедура отыскания механизма очага по первым вступлениям  $P$ -волн включает: а) разметку на фокальной сфере точек, соответствующих  $P$ -лучам, для которых имеются данные, с использованием различных символов для сжатия и разрежения; б) разделение фокальной сферы двумя перпендикулярными большими кругами так, чтобы каждый квадрант содержал либо только вступления со сжатием, либо вступления с разрежением. Пример приведен на рис. 4.18.

Здесь нужно отметить два принципиальных момента. Первый — это невозможность однозначно решить вопрос о том, какая из двух нодальных плоскостей — плоскость разрыва. Эту трудность мы предвидели еще в разд. 3.2 в связи с симметрией двух компонент в эквивалентной системе двойной пары сил (3.15). Для события, иллюстрируемого рис. 4.18, наблюдался поверхностный разлом с простираанием, отличающимся от простираания одной из нодальных плоскостей только на  $8^\circ$ . Поэтому выбор  $\phi_s = 301^\circ$ ,  $\delta = 67^\circ$  может быть сделан достаточно уверенно. Вторым важным моментом — это расположение так называемой *оси сжатия* в центре квадранта, где наблюдаются разрежения, а *оси растяжения* — в центре квадранта, где наблюдаются сжатия. Это две главные

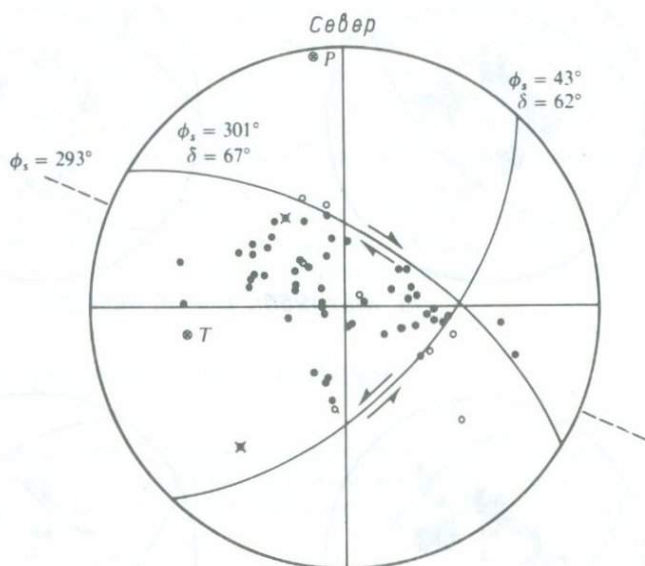
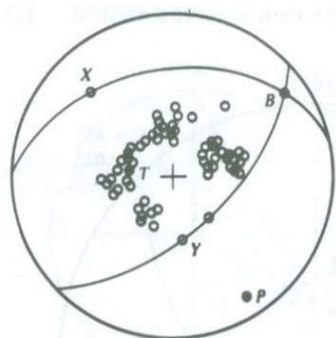


Рис. 4.18. Первые вступления волн  $P$ , наблюдавшиеся Маккензи [221] для землетрясения 19 августа 1966 г. в восточной Турции. Показана равноплощадная проекция нижней полусферы фокальной сферы. Точки соответствуют сжатию, кружки — растяжению, крестики — станции вблизи нодальной плоскости.  $\phi_1$  и  $\delta$  — простирание и падение нодальных плоскостей, стрелки указывают направление движения. Пунктиром показано простирание главного правостороннего поверхностного разлома, сопровождавшего землетрясение.

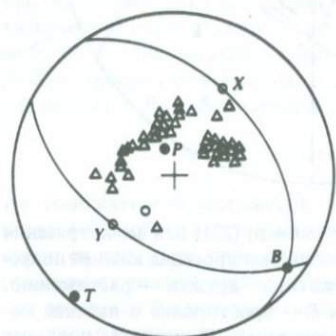
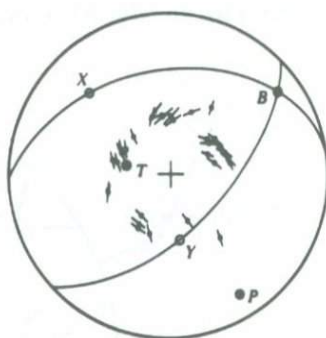
оси тензора момента, а также оси главных напряжений, в случае если плоскость разрыва — плоскость максимального скалывающего напряжения. Однако плоскость разрыва для данного землетрясения определяется тектоническими процессами, имеющими свою геологическую историю. Чаще чем плоскость максимальных скалывающих напряжений, ею будет плоскость разлома, активизировавшаяся при данном землетрясении. В этих случаях, как показал Маккензи [221], единственное ограничение на направление наибольшего сжимающего напряжения состоит в том, что оно лежит в квадранте разрежений на фокальной сфере.

Определение механизма очага по диаграммам направленности для  $S$ -волн требует значительно больших усилий, чем для  $P$ -волн, так как, чтобы найти, как поляризованы  $S$ -волны, необходимо использовать несколько приборов на каждой регистрирующей станции; кроме того, нужно ввести поправку за эффект наблюдения на свободной поверхности Земли. Главные особенности показаны в примере на рис. 4.19; частицы движутся от оси сжатия к оси растяжения и перпендикулярно к нодальным плоскостям  $P$ -волн.

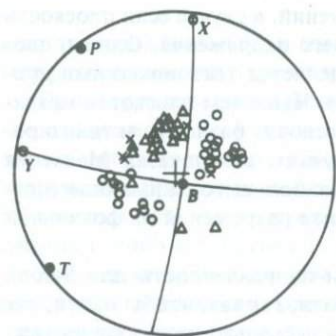
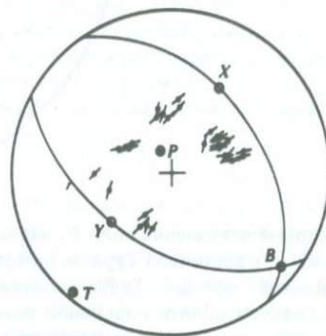
Когда простирание, падение и уклон определены, можно ввести систему сферических координат (систему источника), использованных на рис. 4.5 и 4.6, для детального анализа амплитудных зависимостей в пределах диаграмм направ-



15 мая 1966г. 14ч 46 мин 06с



2 июня 1966г. 3ч 27 мин 53с



4 июля 1966г. 18ч 33 мин 36с

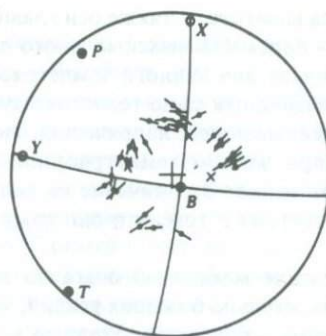


Рис. 4.19. Диаграммы конкретных механизмов очага (равноплощадная проекция). На диаграммах для  $P$ -волн (левая в каждой паре) треугольники представляют разрывание в первом движении, кружки — сжатие, крестики — наблюдение  $P$ -волн вблизи нодальных линий (такие вступления имеют нечеткий характер). Символами  $P$ ,  $T$ ,  $B$  обозначены оси тензора момента, а  $X$  и  $Y$  — полюсы (точки выхода осей) нодальных плоскостей (из [308]; с разрешения Американского геофизического союза).

денности. Однако углы  $i_\xi$  и  $\phi$  (рис. 4.10 и 4.14) уже образуют систему сферических углов в источнике. Кроме того, это естественные и удобные для использования координаты, поскольку мы знаем их свойства, так же как и в случае лучевых координат для волн  $SV$  и  $SH$  (см. разд. 4.4). Поэтому наша следующая цель — получить диаграммы направленности излучения волн  $P$ ,  $SV$  и  $SH$  как функции  $i_\xi$  и  $\phi$ , а кроме того, как функции произвольных простираения падения и уклона.

Нужно различать два этапа в достижении этой цели. Во-первых, стоит задача идентификации волн  $P$ ,  $SV$  и  $SH$  в дальней зоне для источника в однородной среде. Во-вторых, адаптация этого случая к сферически-симметричной среде, подобной Земле.

#### 4.5.2. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ДВОЙНОЙ ПАРЫ СИЛ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Пользуясь выражениями (4.30) для декартовых компонент смещений, возбуждаемых эффективным точечным источником с тензором момента  $M_{pq}$ , соответствующим сдвиговой дислокации, можно представить волну  $P$  дальней зоны в векторной форме как

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t) = \frac{2(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \dot{\mathbf{u}})\mu A \boldsymbol{\gamma}}{4\pi\rho\alpha^3 r}. \quad (4.79)$$

Здесь  $\boldsymbol{\gamma}$  — это продольное направление от источника в точке  $\xi$  к приемнику в точке  $\mathbf{x}$ ;  $\mathbf{v}$  — нормаль к разрыву;  $\dot{\mathbf{u}}$  — скорость частиц в источнике, осредненная по площади разрыва  $A$  и оцениваемая в момент времени  $t - r/\alpha$ ;  $r$  — расстояние  $|\mathbf{x} - \xi|$ . Соответствующим результатом для волны  $S$  в дальней зоне будет

$$\mathbf{u}^S(\mathbf{x}, t) = \frac{[(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v})\dot{\mathbf{u}} + (\boldsymbol{\gamma} \cdot \dot{\mathbf{u}})\mathbf{v} - 2(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \dot{\mathbf{u}})\boldsymbol{\gamma}]\mu A}{4\pi\rho\beta^3 r}, \quad (4.80)$$

где  $\dot{\mathbf{u}}$  оценивается в момент времени  $t - r/\beta$ .

Поскольку  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор в источнике, направленный вдоль луча к  $\mathbf{x}$ , задача отыскания диаграммы направленности излучения волны  $P$  сводится просто к представлению  $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}$  и  $\boldsymbol{\gamma} \cdot \dot{\mathbf{u}}$  через углы простираения  $\phi_s$ , падения  $\delta$ , уклона  $\lambda$ , угол выхода из источника  $i_\xi$  и азимут с источника на приемник  $\phi$ . Диаграммы излучения для волн  $SV$  и  $SH$  несколько сложнее, поскольку из (4.80) не видно сразу, как разделить колебания  $SV$  и  $SH$ . Очевидно, эта формула свидетельствует о поперечном движении в  $\mathbf{u}^S$ , поскольку  $\mathbf{u}^S \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0$ . Движения  $SV$  и  $SH$ , происходящие соответственно вдоль направлений  $\hat{\mathbf{p}}$  и  $\hat{\phi}$  рис. 4.10, определяются формулами [35]

$$\mathbf{u}^{SV}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{u}^S \cdot \hat{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{p}} = \frac{[(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v})(\dot{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + (\boldsymbol{\gamma} \cdot \dot{\mathbf{u}})(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}})]\mu A \hat{\mathbf{p}}}{4\pi\rho\beta^3 r}, \quad (4.81)$$

$$\mathbf{u}^{SH}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{u}^S \cdot \hat{\phi})\hat{\phi} = \frac{[(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v})(\dot{\mathbf{u}} \cdot \hat{\phi}) + (\boldsymbol{\gamma} \cdot \dot{\mathbf{u}})(\mathbf{v} \cdot \hat{\phi})]\mu A \hat{\phi}}{4\pi\rho\beta^3 r}. \quad (4.82)$$

Чтобы выразить все три диаграммы излучения через  $(\phi_s, \delta, \lambda, i_\xi, \phi)$ , введем декартовую систему координат  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$  в эпицентре. При этом  $\hat{\mathbf{x}}$  будет направлено на

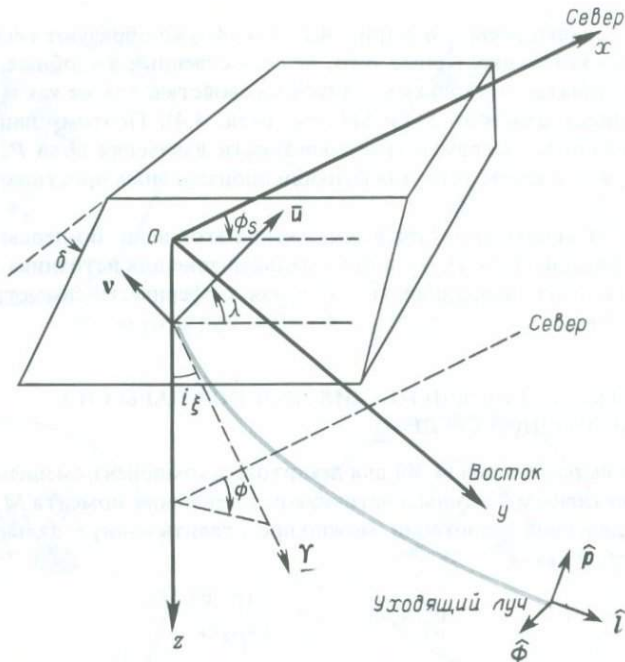


Рис. 4.20. Определение декартовых координат  $(x, y, z)$ , использованных для получения явной зависимости диаграмм направленности излучения волн  $P, SV$  и  $SH$  как функций  $(\phi_s, \delta, \lambda, i_\xi, \phi)$ . Начало координат совмещено с эпицентром (точкой на земной поверхности, расположенной на той же вертикали, что и рассматриваемый сейсмический источник). Преимущество этой координатной системы в том, что ось  $z$ , как обычно принято, направлена в сторону увеличения глубины, а азимуты  $\phi$  измеряются от оси  $x$  согласно географическим стандартам. Горизонтальные компоненты  $\bar{u}$  можно легко разделить на  $\bar{u} \cos \lambda$  (вдоль простирания) и  $\bar{u} \cos \delta \sin \lambda$  (в направлении, обратном направлению падения). В тексте приведены выражения (4.83) для компонент в направлении на север ( $x$ ) и восток ( $y$ ). Это естественная координатная система для описания тензора момента (дополнение 4.4). Угол выхода из источника  $i_\xi$  можно использовать вместо лучевого параметра  $p$  в качестве лучевой координаты. Поскольку  $l$  имеет продольное направление вдоль луча, для однородной среды  $l = \gamma$ .

север,  $\hat{y}$  — на восток и  $\hat{z}$  — вертикально вниз, как показано на рис. 4.20. С помощью этих единичных векторов получаем:

$$\begin{aligned} \text{вектор подвижки } \bar{u} &= \bar{u}(\cos \lambda \cos \phi_s + \cos \delta \sin \lambda \sin \phi_s) \hat{x} \\ &+ \bar{u}(\cos \lambda \sin \phi_s - \cos \delta \sin \lambda \cos \phi_s) \hat{y} \\ &- \bar{u} \sin \lambda \sin \delta \hat{z}, \end{aligned}$$

$$\text{нормаль к разрыву } \nu = -\sin \delta \sin \phi_s \hat{x} + \sin \delta \cos \phi_s \hat{y} - \cos \delta \hat{z}, \quad (4.83)$$

$$\text{направление волны } P \quad l = \gamma = \sin i_\xi \cos \phi \hat{x} + \sin i_\xi \sin \phi \hat{y} + \cos i_\xi \hat{z},$$

направление волны  $SV$   $\hat{\mathbf{p}} = \cos i_\xi \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos i_\xi \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin i_\xi \hat{\mathbf{z}}$ ,

направление волны  $SH$   $\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}$ .

Заметим, что  $\mathbf{l}$ ,  $\hat{\mathbf{p}}$  и  $\hat{\phi}$  даны, как для однородной среды.

В формулах (4.79), (4.81), (4.82) мы встречаем шесть различных скалярных произведений, и их легко получить из (4.83). В безразмерной форме диаграммы излучения  $\mathcal{F}^P$ ,  $\mathcal{F}^{SV}$  и  $\mathcal{F}^{SH}$  даны как

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^P &= 2(\gamma \cdot \mathbf{v})(\gamma \cdot \hat{\mathbf{u}})/\hat{u} \\ &= \cos \lambda \sin \delta \sin^2 i_\xi \sin 2(\phi - \phi_s) - \cos \lambda \cos \delta \sin 2i_\xi \cos(\phi - \phi_s) \\ &\quad + \sin \lambda \sin 2\delta (\cos^2 i_\xi - \sin^2 i_\xi \sin^2(\phi - \phi_s)) \\ &\quad + \sin \lambda \cos 2\delta \sin 2i_\xi \sin(\phi - \phi_s), \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{SV} &= [(\gamma \cdot \mathbf{v})(\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + (\gamma \cdot \hat{\mathbf{u}})(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{p}})]/\hat{u} \\ &= \sin \lambda \cos 2\delta \cos 2i_\xi \sin(\phi - \phi_s) - \cos \lambda \cos \delta \cos 2i_\xi \cos(\phi - \phi_s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos \lambda \sin \delta \sin 2i_\xi \sin 2(\phi - \phi_s) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin \lambda \sin 2\delta \sin 2i_\xi (1 + \sin^2(\phi - \phi_s)), \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{SH} &= [(\gamma \cdot \mathbf{v})(\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\phi}) + (\gamma \cdot \hat{\mathbf{u}})(\mathbf{v} \cdot \hat{\phi})]/\hat{u} \\ &= \cos \lambda \cos \delta \cos i_\xi \sin(\phi - \phi_s) + \cos \lambda \sin \delta \sin i_\xi \cos 2(\phi - \phi_s) \\ &\quad + \sin \lambda \cos 2\delta \cos i_\xi \cos(\phi - \phi_s) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin \lambda \sin 2\delta \sin i_\xi \sin 2(\phi - \phi_s). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Соответствующие смещения в дальней зоне тогда равны

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mathcal{F}^P \mu A}{4\pi \rho \alpha^3 r} \hat{u} \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \mathbf{l}, \\ \mathbf{u}^{SV}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mathcal{F}^{SV} \mu A}{4\pi \rho \beta^3 r} \hat{u} \left( t - \frac{r}{\beta} \right) \hat{\mathbf{p}}, \\ \mathbf{u}^{SH}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mathcal{F}^{SH} \mu A}{4\pi \rho \beta^3 r} \hat{u} \left( t - \frac{r}{\beta} \right) \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

#### 4.5.3. ПРИМЕНЕНИЕ ДИАГРАММ ИЗЛУЧЕНИЯ

##### В СЛУЧАЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СРЕДЫ.

Мы сумели получить смещения для волн  $P$ ,  $SV$  и  $SH$  в форме, сопоставимой с лучевыми решениями, найденными в разд. 4.4 [(4.57), (4.60) и (4.61)]. Чтобы завершить это сопоставление для волн  $P$ , остается только идентифицировать  $r/\alpha$  со временем пробега  $T^P$  по лучу,  $1/r$  отождествить с множителем, описывающим геометрическое расхождение  $1/\mathcal{R}^P(\mathbf{x}, \xi)$ , и  $\mu/(\rho\alpha^3)$  — с множителем  $\mu(\xi)/[\rho^{1/2}(\xi) \times \rho^{1/2}(\mathbf{x})\alpha^{5/2}(\xi)\alpha^{1/2}(\mathbf{x})]$ . Последнее вытекает из обобщенного представления множителя  $\mu/(\rho\alpha^3)$  как члена, пропорционального  $[\rho(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x})]^{-1/2}$  [см.

(4.57)], где коэффициент пропорциональности может зависеть только от свойств источника. Тогда

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathcal{F}^P \mu(\xi) A \dot{\mathbf{u}}(t - T^P) \mathbf{l}}{4\pi \rho^{1/2}(\xi) \rho^{1/2}(\mathbf{x}) \alpha^{5/2}(\xi) \alpha^{1/2}(\mathbf{x}) \mathcal{R}^P(\mathbf{x}, \xi)}, \quad (4.88)$$

и аналогично

$$\mathbf{u}^{SV}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathcal{F}^{SV} \mu(\xi) A \dot{\mathbf{u}}(t - T^S) \hat{\mathbf{p}}}{4\pi \rho^{1/2}(\xi) \rho^{1/2}(\mathbf{x}) \beta^{5/2}(\xi) \beta^{1/2}(\mathbf{x}) \mathcal{R}^S(\mathbf{x}, \xi)}, \quad (4.89)$$

$$\mathbf{u}^{SH}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathcal{F}^{SH} \mu(\xi) A \dot{\mathbf{u}}(t - T^S) \hat{\phi}}{4\pi \rho^{1/2}(\xi) \rho^{1/2}(\mathbf{x}) \beta^{5/2}(\xi) \beta^{1/2}(\mathbf{x}) \mathcal{R}^S(\mathbf{x}, \xi)}. \quad (4.90)$$

Характеристики направленности излучения здесь такие же, как в однородной среде, и описаны в (4.84) — (4.86). Единственное заслуживающее упоминания свойство симметрии — обращение знаков  $\mathcal{F}^P$ ,  $\mathcal{F}^{SV}$  и  $\mathcal{F}^{SH}$  при изменении уклона на  $180^\circ$ . В частности, следует заметить, что не имеется симметрии при изменении на  $180^\circ$  угла простираания  $\phi_s$  или азимута выхода луча  $\phi$ . Поэтому необходимо строго придерживаться определений, данных на рис. 4.13 и 4.20, где эти углы отсчитываются по часовой стрелке от направления на север.

Основное применение наших окончательных формул (4.88) — (4.90) — оценка с их помощью сейсмического момента. Из наблюдения смещений в дальней зоне после введения поправок за направленность излучения, геометрическое расхождение и масштабные множители для источника и приемника можно найти  $\mu A \dot{\mathbf{u}}(t - T)$ . (В действительности необходимы также поправки за прохождение через границы пород с различными свойствами, за затухание и, на практике, за частотную характеристику аппаратуры.) Часто оказывается, что длительность вспарывания гораздо меньше периодов наблюдаемых объемных волн; в то же время эти периоды еще достаточно коротки и потому можно применить лучевую теорию. В этом случае осредненное смещение частиц  $\dot{\mathbf{u}}$  в источнике практически представляет собой ступенчатую функцию и  $M_0(t) = M_0(\infty)H(t)$ . Следовательно, спектр наблюдаемого импульса смещения  $\mu(\xi) A \dot{\mathbf{u}}$  на длинных периодах равен просто  $M_0(\infty)$ .

#### ДОПОЛНЕНИЕ 4.4

##### *Декартовы компоненты тензора момента для сдвиговой дислокации произвольной ориентации*

В наших окончательных формулах для диаграмм излучения объемных волн сдвиговой дислокацией мы соединили свойства тензора момента со свойствами функции Грина. Если мы собираемся изучать поверхностные волны или собственные колебания в более сложной среде, мы должны развить дальше теорию распространения волн, чтобы оценить соответствующую функцию Грина. Но тензор момента при этом не изменится. Мы найдем здесь его декартовы компоненты для сдвигового разрыва, который характеризуется углами простираания  $\phi_s$ , уклона  $\lambda$ , падения  $\delta$  и моментом  $M_0$ .

Обратимся к рис. 4.20, в котором направление  $x$  указывает на север. Декартовы компоненты вектора подвижки  $\dot{\mathbf{u}}$  и нормали к разрыву  $\nu$  уже даны в (4.83). Вспомним (гл. 3), что момент  $M_0$  сдвиговой дислокации равен  $\mu A \dot{\mathbf{u}}$ , где  $\mu$  — модуль сдвига в области источника (дополнение 3.1) и  $A$  — площадь, по которой осреднялся скачок смещения. Из (3.21) и (3.23) следует, что  $M_{pq} = \mu A (\dot{u}_p \nu_q + \dot{u}_q \nu_p)$ , и отсюда декартовы компоненты тензора мо-

мента  $\mathbf{M}$  равны

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -M_0(\sin \delta \cos \lambda \sin 2\phi_s + \sin 2\delta \sin \lambda \sin^2 \phi_s), \\ M_{xy} &= M_0(\sin \delta \cos \lambda \cos 2\phi_s + \frac{1}{2} \sin 2\delta \sin \lambda \sin 2\phi_s) = M_{yx}, \\ M_{xz} &= -M_0(\cos \delta \cos \lambda \cos \phi_s + \cos 2\delta \sin \lambda \sin \phi_s) = M_{zx}, \\ M_{yy} &= M_0(\sin \delta \cos \lambda \sin 2\phi_s - \sin 2\delta \sin \lambda \cos^2 \phi_s), \\ M_{yz} &= -M_0(\cos \delta \cos \lambda \sin \phi_s - \cos 2\delta \sin \lambda \cos \phi_s) = M_{zy}, \\ M_{zz} &= M_0 \sin 2\delta \sin \lambda. \end{aligned} \quad (1)$$

Этот общий результат может быть представлен как взвешенная сумма четырех элементарных тензоров момента

$$\mathbf{M} = \cos \delta \cos \lambda \mathbf{M}^{(1)} + \sin \delta \cos \lambda \mathbf{M}^{(2)} - \cos 2\delta \sin \lambda \mathbf{M}^{(3)} + \sin 2\delta \sin \lambda \mathbf{M}^{(4)} \quad (2)$$

$$\text{где} \quad \mathbf{M}^{(1)} = M_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos \phi_s \\ 0 & 0 & -\sin \phi_s \\ -\cos \phi_s & -\sin \phi_s & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{(2)} = M_0 \begin{pmatrix} -\sin 2\phi_s & \cos 2\phi_s & 0 \\ \cos 2\phi_s & \sin 2\phi_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} = M_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \phi_s \\ 0 & 0 & -\cos \phi_s \\ \sin \phi_s & -\cos \phi_s & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{(4)} = M_0 \begin{pmatrix} -\sin^2 \phi_s & \frac{1}{2} \sin 2\phi_s & 0 \\ \frac{1}{2} \sin 2\phi_s & -\cos^2 \phi_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Каждый из  $\mathbf{M}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) имеет собственные значения  $M_0$ ,  $-M_0$  и  $0$ , так что каждый является тензором момента сдвиговой дислокации. Из (2) следует, что  $\mathbf{M}^{(1)} = \mathbf{M}$  при  $\delta = 0$ ,  $\lambda = 0$  (т.е.  $\mathbf{M}^{(1)}$  соответствует горизонтальной плоскости разрыва, где направление подвижки определяет простирание). Аналогичным образом  $\mathbf{M}^{(2)}$  — чистый сдвиг ( $\delta = \pi/2$ ,  $\lambda = 0$ ),  $\mathbf{M}^{(3)}$  — чистый сброс по вертикали ( $\delta = \pi/2$ ,  $\lambda = \pi/2$ ) и  $\mathbf{M}^{(4)}$  — сброс с углом падения  $45^\circ$ , где подвижка направлена строго вверх по восстанию ( $\delta = \pi/4$ ,  $\lambda = \pi/2$ ).

В то время как наши формулы для функции Грина могут оказаться приближенными, разложение тензора момента источника излучения, указанное в (2), точное. Следовательно, волны, излучаемые сдвиговой дислокацией произвольной ориентации, всегда можно представить в виде суммы волн, излучаемых четырьмя различными элементарными сдвиговыми дислокациями, имеющими одно и то же простирание. В действительности, если отбросить требование об общем простирании, можно обойтись тремя элементарными сдвиговыми дислокациями. Это следует из замены  $\mathbf{M}^{(1)}$  в (2) на  $\mathbf{M}^{(3)}$ , оцениваемое при простирании  $\phi_s = \pi/2$ .

В этом рассмотрении мы приняли направления осей координат ( $x, y, z$ ) в источнике совпадающими с направлениями на север, восток и вниз. Другие правила, более естественные при изучении нормальных мод колебаний Земли как целого, основаны на координатах ( $r, \Delta, \phi$ ), где  $\Delta$  — эпицентральный расстояние, а  $\phi$  — долгота эпицентра ( $\phi = 0$  соответствует направлению на юг). Тогда декартовы компоненты тензора момента будут  $M_{rr}, M_{r\Delta}$  и т.д.; они соответствуют декартовой системе в источнике с направлениями соответственно вверх, на юг, на восток. Компоненты  $\mathbf{M}$  в этих двух системах связаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} M_{rr} & M_{r\Delta} & M_{r\phi} \\ M_{\Delta r} & M_{\Delta\Delta} & M_{\Delta\phi} \\ M_{\phi r} & M_{\phi\Delta} & M_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{zz} & M_{zx} & -M_{zy} \\ M_{xz} & M_{xx} & -M_{xy} \\ -M_{yz} & -M_{yx} & M_{yy} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в правилах для нормальных мод азимут источник — приемник равен  $\pi - \phi$ .

Для точечных источников, описываемых общим тензором момента (т.е. девятью парами с симметрией  $M_{pq} = M_{qp}$ ), объемные волны дальней зоны описываются через шесть независимых компонент  $\mathbf{M}$  путем обобщения (4.79) и (4.81) — (4.82). Мы используем выражения для смещений в дальней зоне в (4.29) и получаем для однородной среды

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t) &= \left( \frac{\gamma \cdot \dot{\mathbf{M}} \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) \cdot \gamma}{4\pi\rho\alpha^3 r} \right) \mathbf{l}, \\ \mathbf{u}^{SV}(\mathbf{x}, t) &= \left( \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{M}} \left( t - \frac{r}{\beta} \right) \cdot \gamma}{4\pi\rho\beta^3 r} \right) \hat{\mathbf{p}}, \\ \mathbf{u}^{SH}(\mathbf{x}, t) &= \left( \frac{\hat{\phi} \cdot \dot{\mathbf{M}} \left( t - \frac{r}{\beta} \right) \cdot \gamma}{4\pi\rho\beta^3 r} \right) \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (4.91)$$

что легко приспособить к неоднородным средам, используя лучевую теорию. Во-первых, знаменатели в (4.91) заменяются на те, что стоят в (4.88) — (4.90). Во-вторых, нужно учесть, что единичные векторы  $\hat{\mathbf{p}}$  и  $\hat{\phi}$ , которые в (4.91) свертываются с  $\dot{\mathbf{M}}$ , поперечны к лучу в источнике, в то время как  $\hat{\mathbf{p}}$  и  $\hat{\phi}$  у приемника указывают направления для идентификации компонент  $SV$  и  $SH$  в излучаемом поле.

## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ

*Červený V., Molotkov I. A., Pšenčík I.* The ray method in seismology. Prague, Charles University Press, 1978.

*Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. — М.: Гостехиздат, 1951.

*Kline M., Kay I. W.* Electromagnetic theory and geometrical optics. New York, Dover Publ., 1944.

*Ляв А.* Математическая теория упругости. — М. — Л.: ОНТИ, 1935.

*Морс Ф. М., Фейсбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. — М.: ИЛ, 1960. (гл. 6 о лучевой теории).

*Sternberg E.* On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 6, 34 — 50, 1960.

\**Бабич В. М., Бултырев В. С.* Асимптотические методы в задачах теории дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.

## ЗАДАЧИ

4.1. Нарисуйте «сейсмограмму» для самой функции Грина  $G_{ip}$  т.е. нарисуйте, правильно расположив во времени, импульсы, соответствующие трем различным членам в (4.23), когда  $X_0$  — единичный импульс. Далее покажите, что площадь под каждым из этих трех импульсов зависит от расстояния как  $1/r$ . Площадь под импульсом равна пределу (при  $\omega \rightarrow 0$ ) фурье-преобразования импульса,

и из-за частотной зависимости (4.35) кажется, что эта площадь не ограничена. Покажите, что в действительности члены с  $1/\omega^2 r^3$ ,  $1/\omega r^2$  в (4.35) взаимно уничтожаются и что зависимость от расстояния при  $\omega \rightarrow 0$  действительно соответствует  $1/r$ .

Заметим, что для сейсмометра, чувствительного только к значительно более длинным периодам, чем время  $S - P$ , т.е.  $r/\beta - r/\alpha$ , смещение в ближней зоне в функции Грина, так же, как и смещение в дальней зоне, практически имеет вид  $\delta$ -функции. Учтем, что для изучения эффектов ближней зоны (таких, как сильное колебание грунта вблизи вспарывающегося разлома) так называемые смещения в дальней и ближней зонах одинаково важны. Ведь вблизи очага временная функция источника  $X_0$  не равна нулю для времен, больших по сравнению с  $r/\beta - r/\alpha$ , и первый член в (4.23) — тоже порядка  $1/r$ .

Подведем итог: смещения в «дальней зоне» доминируют в дальней зоне, но смещения в «дальней» и «ближней» зонах равнозначны в ближней зоне после свертки их с временной функцией источников.

4.2. Покажите, что если в источнике внутри безграничной однородной изотропной среды приложена в  $j$ -м направлении постоянная сила  $X_0$ , то, согласно (4.23), статическое решение для  $i$ -й компоненты смещения в  $\mathbf{x}$  равно

$$\frac{X_0}{8\pi\rho r} \left[ \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \gamma_{ij} + \left( \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \delta_{ij} \right].$$

(это выражение иногда называют тензором Сомильяны).

4.3. Чтобы оценить функцию геометрического расхождения  $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \xi)$  между двумя точками  $\xi$  и  $\mathbf{x}$  в сферически-симметричной Земле, рассмотрите два луча, выходящие из  $\xi$  в одном и том же азимуте и с углами выхода  $i_\xi$  и  $i_\xi + \delta i_\xi$  (см. рис. 4.9, б)

Рассмотрите также два луча, полученные из предыдущих приращением азимута  $\delta\phi_0$ . Телесный угол, образованный в  $\xi$  четырьмя лучами, равен  $\sin i_\xi \delta i_\xi \delta\phi_0$ .

Покажите, что поперечное сечение лучевой трубки в  $\mathbf{x}$  равно  $-|\mathbf{x}|^2 \cos i_x \times \sin \Delta \delta \delta\phi_0$ . Затем используйте лучевой параметр

$$p = \frac{|\xi| \sin i_\xi}{c(\xi)} = \frac{|\mathbf{x}| \sin i_x}{c(\mathbf{x})}$$

[см. (4.456)], чтобы получить

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}, \xi) c(\xi) = |\mathbf{x}| |\xi| \left[ \frac{\cos i_x \cos i_\xi \sin \Delta}{p} \left| \frac{\partial \Delta}{\partial p} \right| \right]^{1/2}.$$

Из-за симметрии правой части мы сразу же обнаруживаем взаимность  $\mathcal{R}(\mathbf{x}, \xi) c(\xi) = \mathcal{R}(\xi, \mathbf{x}) c(\mathbf{x})$ , доказанную здесь только для сферически-симметричных сред.

4.4. Получите лучевое решение

$$\frac{l_i(\mathbf{x}) l_j(\xi) \delta(t - T(\mathbf{x}, \xi))}{4\pi \rho^{1/2}(\mathbf{x}) \rho^{1/2}(\xi) \alpha^{3/2}(\xi) \alpha^{1/2}(\mathbf{x}) \mathcal{R}(\mathbf{x}, \xi)}.$$

для вклада волны  $P$  дальней зоны в  $G_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, 0)$  [используйте решение, данное в (4.66), (4.57), и смещение в волне  $P$  дальней зоны в (4.23)]. Воспользуйтесь затем

теоремой взаимности (2.39) и докажите, что

$$\mathcal{R}(x, \xi)\alpha(\xi) = \mathcal{R}(\xi, x)\alpha(x)$$

в случае произвольной неоднородной изотропной среды.

Это свойство взаимности геометрического расхождения — интересный результат в дифференциальной геометрии лучей. Прямое доказательство дано Ричардсом [267].

4.5. Главные оси симметрического тензора второго ранга — это оси декартовой системы координат, в которой недиагональные компоненты тензора равны нулю. Начните с (3.24), дающего тензор момента, отнесенный к направлениям подвижки  $\bar{u}$  и нормали к разрыву  $\nu$ ; поверните оси на  $45^\circ$  вокруг линии, перпендикулярной к  $\bar{u}$  и  $\nu$ , и покажите таким образом, что оси сжатия и растяжения — главные оси для тензора момента. Покажите, что сейсмический момент  $M_0$  для подвижки по разрыву — инвариант тензора момента  $\mathbf{M}$ , найдя для этого величину компонент векторного диполя в координатной системе, связанной с главными осями.

4.6. Покажите, что среднеквадратичное значение характеристики направленности для амплитуд волн  $P$  в дальней зоне от точечной сдвиговой дислокации, осредненное по фокальной сфере, равно  $\sqrt{4/15}$ ; покажите, что для волн  $S$  аналогичная величина равна  $\sqrt{2/5}$ . [Начните с определения характеристики направленности в (4.33).]

4.7. Опишите в сферических координатах, использованных в (4.31) — (4.33), характеристику направленности двойной пары сил и покажите, что компоненты  $F_j * G_{ij}$  в дальней зоне равны

$$\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{\hat{r}_i \hat{r}_j}{r} F_j \left( t - \frac{r}{\alpha} \right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} \frac{(\hat{\theta}_i \hat{\theta}_j + \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j)}{r} F_j \left( t - \frac{r}{\beta} \right).$$

[Эта формула определяет  $i$ -ю компоненту смещения в системе  $(r, \theta, \phi)$  через декартовы компоненты единичных векторов  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{\phi}$  для случая силы  $\mathbf{F}(t)$ , приложенной в начале координат.]

4.8. Покажите, что задача отыскания траектории луча в неоднородной среде со скоростью распространения волн  $c = c(\mathbf{x})$  эквивалентна решению задачи механики о движении частицы в силовом поле с потенциалом, пропорциональным  $1/c^2$ . (Указание: введите скалярную переменную  $\sigma$ , определяющую положение на луче и имеющую свойство  $d\mathbf{x}/d\sigma = \nabla T$ .)

## Плоские волны в однородных средах и их отражение и преломление на плоских границах

В предыдущих главах мы детально рассмотрели возбуждение сейсмических волн в однородной, безграничной, изотропной, упругой среде различными точечными источниками и начали изучение вопросов распространения волн, развив лучевую теорию для неоднородных сред с плавно изменяющимися свойствами. Здесь мы продолжим развитие теории распространения волн, сосредоточив свое внимание на фундаментальных задачах, включающих разрыв упругих свойств в среде, где распространяются волны. Мы исследуем здесь только простейший из таких разрывов, а именно случай жесткого контакта двух однородных, изотропных, упругих сред на плоской границе. Чтобы избежать влияния сейсмических источников, мы ограничимся рассмотрением только таких случаев, когда падающая на границу волна плоская.

Эта задача впервые была рассмотрена Грином в 1839 г. [140], она сформулирована в той же классической статье, где впервые было введено понятие функции упругой энергии. Грин пытался объяснить отражение и преломление света при помощи теории упругих волн, и его работа в некоторых отношениях похожа на современный анализ плоских волн  $P$ ,  $SV$  и  $SH$ . Однако он не завершил все алгебраические преобразования, необходимые в случае, когда два полупространства имеют совершенно разные упругие модули и плотности. Обобщение (при помощи потенциалов) выполнили Нотт в 1899 г. [200] и независимо от него Цеппритц в 1907 г. [346].

Предположение о *плоской падающей волне* может быть вполне приемлемым на практике для изучения волн на больших расстояниях от их источника (рис. 5.1, *а*). Но если отражение или преломление волн происходит вблизи источника (рис. 5.1, *б*), наблюдаются явления, которые невозможно объяснить непосредственно теорией Нотта. Ярким примером является волна  $P_n$ , открытая в 1909 г. Мохоровичичем. Хотя волна такого типа может распространяться в среде, образованной двумя однородными полупространствами с жестким контактом между ними (см. дополнение 6.4), для ее возникновения необходим точечный источник, возбуждающий *сферические волны*. Мы говорим об этом для того, чтобы продемонстрировать важное косвенное приложение теории Нотта. Метод изучения сферических волн состоит в разложении их в ряд по плоским волнам (или представлении их соответствующим интегралом), применении теории Нотта к каждой плоской волне, а затем синтезе нужного решения суммированием результатов для каждой плоской волны.

В этой главе мы сделаем обзор основных свойств плоских волн, которые потребуются нам во многих последующих главах. Сначала мы покажем, как ставятся задачи о волнах  $P$ ,  $SV$  и  $SH$  с тремя скалярными потенциалами, затем получим конкретные формулы для коэффициентов отражения и преломления и

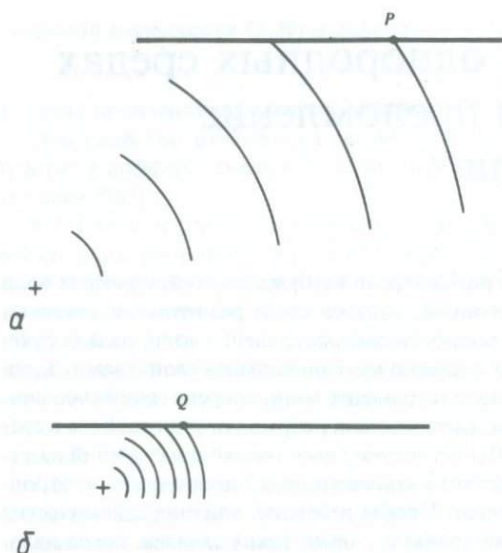


Рис. 5.1. *а* — если точка  $P$  на некоторой границе внутри Земли находится достаточно далеко от локализованного источника, фронты волн, приходящих в  $P$ , можно практически рассматривать как плоские. *б* — если точка  $Q$  достаточно близка к источнику, в ней необходимо учитывать кривизну волновых фронтов (см. гл. 4). Заметим, что выражения «достаточно близко» и «достаточно далеко» следует понимать как оценку числа длин волн, укладываемых на расстоянии между рассматриваемой точкой ( $P$  или  $Q$ ) и источником. Поэтому даже при расположении источника и приемника, как в случае *б*, можно пользоваться теорией плоских волн для очень высоких частот.

свяжем их с унитарными матрицами рассеяния. Мы опишем неоднородные волны и соответствующий фазовый сдвиг коэффициентов рассеяния.

Земля — неидеально упругая среда в том смысле, что малые движения частиц, вызываемые распространяющейся волной, ведут к необратимым потерям энергии волн из-за наличия множества различных механизмов диссипации. Вызванное диссипацией затухание распространяющейся волны удобно описывать при помощи параметра  $Q$ . Мы дадим краткое описание изменений формы колебаний в результате распространения их в среде с затуханием, подобной Земле, в которой  $Q$  практически постоянно в частотном диапазоне наблюдаемых сейсмических волн. В заключение будут рассмотрены основы теории распространения плоских волн в анизотропных средах.

## 5.1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПЛОСКИХ ВОЛН В УПРУГИХ СРЕДАХ

Физическая величина (например, ускорение частиц или компонента напряжений) распространяется как *плоская волна* в направлении  $\mathbf{l}$  со скоростью  $c$ , если:

- 1) в фиксированный момент времени эта величина неизменна в пространстве в каждой плоскости, нормальной к  $\mathbf{l}$ , и

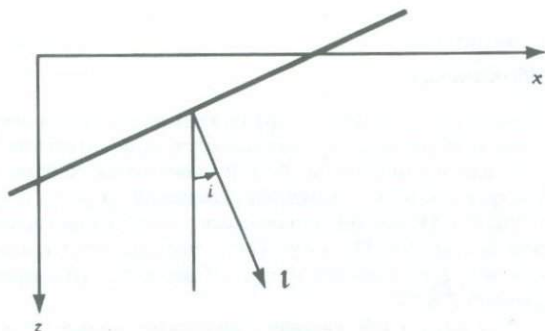


Рис. 5.2. Для физической величины, распространяющейся со скоростью  $c$  в направлении  $l$ , наклонная жирная прямая отмечает плоскость, на которой значения этой величины всюду одинаковы. Обычно в сейсмологии положительное направление оси  $z$  берется в сторону увеличения глубины, а ось  $x$  определяется как направление горизонтальной компоненты  $l$ . Для указания направления распространения волны часто используется угол  $i$  между осью  $z$  и направлением  $l$ . Тогда кажущаяся скорость распространения волны вдоль оси  $x$  равна  $c/\sin i$ . Эту кажущуюся скорость в сейсмологии часто измеряют при помощи группы приборов, расположенной на земной поверхности. Величина, обратная этой скорости, — горизонтальная медленность, или лучевой параметр.

2) плоскость, характеризуемая каким-либо значением этой величины, перемещается со скоростью  $c$  в направлении  $l$ .

Отсюда следует, что физическая величина, распространяющаяся согласно этим условиям, должна функционально зависеть от пространственных координат и времени только через их комбинацию  $t - (l \cdot x)/c$ . Мы называем  $l/c$  *вектором медленности*  $s$ . Использование этого понятия (по сравнению со скоростью) для описания быстроты перемещения и направления распространения волны обладает тем преимуществом, что медленности могут векторно складываться (скорости же, применительно к данной проблеме, не могут). В декартовых координатах  $(x, y, z)$  медленность данной волны — это векторная сумма ее компонент  $s_x, s_y, s_z$  вдоль каждого координатного направления:  $s = s_x \hat{x} + s_y \hat{y} + s_z \hat{z}$ , а медленность в направлении  $n$  — это просто  $s \cdot n$ . Напротив, скорость, с которой плоская волна продвигается в определенном направлении, в общем случае больше ее скорости в направлении распространения (рис. 5.2).

Два основных типа плоских волн легко разделяются после подстановки общего выражения для смещений  $u = u(t - s \cdot x)$  в уравнение упругих смещений в однородной изотропной среде:

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{j,j} + \mu u_{i,jj}; \quad (5.1)$$

отсюда получаем

$$[\rho \delta_{ik} - (\lambda + \mu) s_i s_k - \mu s_j s_j \delta_{ik}] \ddot{u}_k = 0. \quad (5.2)$$

Скалярно и векторно умножив (5.2) на  $s$  и учтя, что  $s^2 = 1/c^2$ , находим

$$\left( \rho - \frac{\mu}{c^2} \right) \ddot{u} \times s = 0, \quad \left( \rho - \frac{\lambda + 2\mu}{c^2} \right) \ddot{u} \cdot s = 0. \quad (5.3)$$

## ДОПОЛНЕНИЕ 5.1

## Обозначения

Преимущества использования нижних индексов для обозначения векторных и тензорных компонент значительно уменьшаются, если интересоваться в деталях свойствами какой-либо одной компоненты. В этой главе мы часто пользуемся обозначением  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  для трех декартовых компонент смещения и  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  для координат. Мы найдем, что волны  $P$  и  $SV$  связаны граничными условиями на горизонтальных плоскостях и что плоские волны  $P$  и  $SV$  могут быть описаны через компоненты смещений  $u = u(x, z, t)$ ,  $w = w(x, z, t)$ . Плоские волны  $SH$  несут только смещение  $v = v(x, z, t)$  и не связаны с волнами  $P$  и  $SV$ .

Там же, где обозначения с индексами оказываются удобными — в уравнениях (5.1), (5.2) и (5.5), — мы их сохраняем; связь разных обозначений очевидна, например  $e_{23} = (\partial u_2 / \partial x_3 + \partial u_3 / \partial x_2) / 2 = (\partial v / \partial z + \partial w / \partial y) / 2 = e_{yz}$ .

Следовательно, или  $\ddot{\mathbf{u}} \times \mathbf{s} = \mathbf{0}$  и  $c^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$ , или  $\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{0}$  и  $c^2 = \mu / \rho$ . Значит, плоская волна — это либо волна  $P$  с продольным движением (параллельным  $\mathbf{s}$ ) и скоростью  $\sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$ , либо волна  $S$  с поперечным движением и скоростью  $\sqrt{\mu / \rho}$ . Наш анализ здесь подобен выполненному ранее для уравнений (4.48) — (4.51); разница в том, что сейчас мы не делаем никаких приближений. Продольный характер колебаний в волне  $P$  и поперечный в волне  $S$  — это точный факт, верный для плоских волн в однородной среде на любой частоте.

Для описания энергии, связанной с упругими смещениями, мы развили в гл. 2 представления о плотности упругой энергии. Упругая энергия среды — это способность среды выполнять работу благодаря ее конфигурации, и в (2.32) мы нашли, что плотность упругой энергии равна  $\tau_{ij} e_{ij} / 2$ . Для плоской волны  $\dot{u}_i = u_i(t - \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})$  тензор деформаций равен  $e_{ij} = -[\dot{u}_i s_j + \dot{u}_j s_i] / 2$ , и из соотношений между деформациями и напряжениями в изотропной среде (2.49) непосредственно получаем

$$\frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} [(\lambda + \mu)(\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}})^2 + \mu(\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})]. \quad (5.4)$$

В случае  $P$ -волн (у которой  $\mathbf{s}$  параллельно  $\dot{\mathbf{u}}$  и  $|\mathbf{s}| = \alpha^{-1}$ ) или  $S$ -волн (у которой  $\mathbf{s}$  перпендикулярно  $\dot{\mathbf{u}}$  и  $|\mathbf{s}| = \beta^{-1}$ ) из (5.4) следует, что

$$\frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2, \quad (5.5)$$

т. е. что плотность упругой энергии равна плотности кинетической энергии. Все величины в (5.5) вещественные, а плотности энергий зависят от  $t$  и  $\mathbf{x}$  только в комбинации  $t - \mathbf{s} \cdot \mathbf{x}$ . Следовательно, скорость распространения энергии не отличается от скорости, с которой распространяется импульс смещений, т. е.  $\alpha$  для волн  $P$  и  $\beta$  для волн  $S$ .

Таким образом, скорость потока энергии в плоской волне (т. е. количество энергии, проходящей за единицу времени через единичную площадку, нормальную к направлению распространения) равна  $\rho \alpha \dot{u}^2$  для волн  $P$  и  $\rho \beta \dot{u}^2$  для волн  $S$ . Мы доказали это только для плоских волн в однородной среде, и это свойство



Рис. 5.3. Параметры лучевой трубки, исходящей из точечного источника в  $\xi$ . Сечения трубки в  $x_1$  и  $x_2$  равны  $\delta A_i = \delta\Omega \mathcal{R}^2(x_i, \xi)$  ( $i = 1, 2$ ), где  $\delta\Omega$  — телесный угол в источнике. Согласно геометролучевой теории, энергия, пересекающая  $\delta A_1$  в единицу времени, та же, что энергия, пересекающая  $\delta A_2$  в единицу времени (с учетом временной задержки на пробег между  $x_1$  и  $x_2$ ).

волн «локально», т. е. зависит от свойств вещества и от плоской геометрии волны только в точке, где оценивается скорость потока. Поэтому можно ожидать, что скорости потока все еще приближенно равны  $\rho \dot{u}^2 \times$  скорость распространения и в случае слегка искривленных волновых фронтов в среде с небольшими пространственными флуктуациями свойств вещества. Отсюда следует, что формулам для амплитуд смещения, полученным в гл. 4 с помощью лучевой теории, можно дать физическую интерпретацию. Так для волн  $P$ , распространяющихся от точечного источника в неоднородной среде, (4.57) указывает, что для данного луча  $[\rho(x)\alpha(x)]^{1/2} \dot{u}^P$  зависит от положения приемника  $x$  только через геометрическое расхождение  $1/\mathcal{R}^P(x, \xi)$  и время пробега  $T^P(x, \xi)$ . Следовательно, скорость потока энергии контролируется только геометрией лучей. В соответствии с рис. 5.3 скорость, с которой поток энергии пересекает  $\delta A_1$ , равна  $\rho(x_1)\alpha(x_1)\dot{u}^2 \delta A_1$ . Но поскольку  $\delta A_1 \sim [\mathcal{R}^P(x_1, \xi)]^2$ , из (4.57) следует, что скорость потока энергии в  $\delta A_1$  в момент времени  $T_1$  равна скорости потока энергии в  $\delta A_2$  в момент времени  $T_2$ ;  $T_2 - T_1$  — время, затраченное волной на пробег от  $x_1$  до  $x_2$ . Таким образом, мы узнаем из лучевой теории, что распространяющаяся сейсмическая энергия ограничена лучевыми трубками. Но это только приближение, которое становится точным на достаточно высоких частотах.

### 5.1.1. ПОТЕНЦИАЛЫ ПЛОСКИХ ВОЛН

Мы видели в гл. 4, что потенциалы упругих смещений можно использовать для разделения компонент  $P$  и  $S$  и что такое разделение желательно, так как волновые уравнения для разделенных потенциалов намного проще, чем для упругих смещений (каждое содержит только одну скорость распространения). Преимущества использования потенциалов ( $\phi$  и  $\psi$ ) кажутся не столь значительными из-за того, что  $\phi$  и  $\psi$  содержат *четыре* неизвестные функции, в то время как физическая величина, которая нас чаще всего интересует, — упругое смещение — это вектор лишь с *тремя* неизвестными компонентами. Лишнее неизвестное связано лишним уравнением, обычно  $\nabla \cdot \psi = 0$ . Однако в однородной изотропной среде нужны только три скалярные потенциальные функции, соответствующие каждой из  $P$ -,  $SV$ - и  $SH$ -компонент движения.

Мы докажем этот общий результат в дополнении 6.5, но в настоящий момент нас интересуют плоские волны, и для них имеются специальные выраже-

ния двух скалярных  $S$ -потенциалов. В общем случае волна  $S$  имеет смещение  $\nabla \times \psi$ . Если это плоская волна, а декартовы координаты выбраны, как на рис. 5.2, с осью  $x$  в направлении горизонтальной компоненты медленности, тогда  $\psi$  зависит только от  $x$ ,  $z$  и  $t$ . Из ограничения  $\nabla \cdot \psi = 0$  следует, что

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = 0. \quad (5.6)$$

Если волна поляризована строго как  $SV$ , то  $y$ -компонента смещения равна нулю и

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} = 0. \quad (5.7)$$

С точки зрения теории функций комплексного переменного (5.6) и (5.7) — это уравнения Коши — Римана, и, следовательно,  $\psi_z + i\psi_x$  — аналитическая функция переменной  $x + iz$ . В соответствии с теоремой Лиувилля всюду аналитическая и ограниченная функция является константой. В плоской волне  $\psi_z + i\psi_x$  определено. Далее, если волна  $SV$  описывается как  $\nabla \times \psi$  только в ограниченном диапазоне глубин, можно умозрительно продолжить это смещение на все глубины, так что функция  $\psi_z + i\psi_x$  всюду аналитическая. Отсюда следует, что  $\psi_z + i\psi_x$  — константа. Поскольку физический интерес представляют только производные  $\psi_x$  и  $\psi_z$ , эту константу можно считать нулем. Из этого мы делаем вывод, что наиболее общую плоскую волну  $SV$ , распространяющуюся в вертикальной плоскости, содержащей ось  $x$ , можно описать потенциалом  $\psi = (0, \psi, 0)$  со смещением  $\nabla \times \psi = (-\partial\psi/\partial z, 0, \partial\psi/\partial x)$ . Векторное волновое уравнение сведется к скалярному  $\beta^2 \nabla^2 \psi = \ddot{\psi}$ .

Для плоской волны  $SH$  использование векторного потенциала не оправдано, поскольку горизонтальная компонента смещения — сама по себе удобная для анализа скалярная функция. Если координатная система соответствует рис. 5.2, смещение  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  сведется для волны  $SH$  к  $\mathbf{u} = (0, v, 0)$  при  $v = v(x, z, t)$  для плоской волны. Условие  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  для поперечной волны уже удовле-

#### ДОПОЛНЕНИЕ 5.2

##### *Правило знаков для преобразований Фурье, используемых в решениях задач на распространение волн*

Используя декартову систему координат, в которой  $z$  увеличивается с глубиной, мы часто применяем преобразования Фурье по двум горизонтальным переменным, преобразуя  $x$  в  $k_x$  и  $y$  в  $k_y$ . Наше правило для пространственных преобразований имеет вид

$$f(x) \rightarrow f(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik_x x} dx,$$

и аналогично для функций от  $y$ . Заметим, что мы не будем использовать специальных обозначений (таких, как  $\tilde{f}$ , или  $\bar{f}$ , или  $F$ ), чтобы показать, что  $f$  было преобразовано. Если из контекста не очевидно, означает ли  $f$  саму функцию  $f(x)$  или ее трансформанту, мы будем писать  $f$  с соответствующим аргументом  $f(x)$  или  $f(k_x)$ . Единственное исключение сдела-

но в гл. 11, посвященной обработке данных, где многие результаты становятся понятнее благодаря использованию прописной буквы для трансформанты.

Мы будем также преобразовывать временную зависимость либо при помощи преобразования Лапласа от  $t$  к  $s$  и правила

$$f(t) \rightarrow f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

либо при помощи преобразования Фурье от  $t$  к  $\omega$ . Хотя эти преобразования по существу идентичны, если преобразованная переменная предполагается комплексной, полезно все же различать их, поскольку одни методы анализа основаны на использовании вещественных значений  $\omega$  (так что естественно применять преобразование Фурье), а другие — вещественных  $s$  (т. е. мнимых  $\omega$ ); в таком случае удобнее преобразование Лапласа.

В преобразовании Фурье временной функции мы применяем такое правило знаков для показателя экспоненты:

$$f(t) \rightarrow f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(+i\omega t) dt.$$

Заметим, что оно отличается от правила, принятого в этом дополнении для пространственных преобразований Фурье. Конечно, хотелось бы избежать смешанных правил, но имеются три серьезные причины для такого выбора знаков при решении задач на распространение волн в сейсмологии.

Во-первых, при таких знаках легко интерпретировать обратное преобразование Фурье. Если  $f(x, y, z, t)$  — исследуемая распространяющаяся физическая переменная, часто оказывается возможным найти трижды преобразованную функцию  $f(k_x, k_y, z, \omega)$ . Тогда искомое решение имеет вид

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(k_x, k_y, z, \omega) \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)].$$

При нашем выборе знаков этот интеграл можно в случае *положительных*  $k_x$ ,  $k_y$  и  $\omega$  интерпретировать как волну, распространяющуюся в сторону *возрастающих*  $x$  и  $y$ .

Во-вторых, если  $f(x, y, z, t)$  удовлетворяет волновому уравнению вида  $c^2 \nabla^2 f = \ddot{f}$ , то  $f(k_x, k_y, z, \omega)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left( k_x^2 + k_y^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) f.$$

Если среда однородна (т. е. с постоянно), то

$$f(k_x, k_y, z, \omega) \propto e^{\pm i\omega \xi z}, \quad (1)$$

где  $\omega \xi = (\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$ . Выбор знака в (1) показывает, является ли волна  $f$  нисходящей (+) или восходящей (-). Однако если  $\omega^2/c^2 < k_x^2 + k_y^2$ , то окажется, что почти всегда удобнее рассматривать положительные мнимые значения  $\omega \xi$ , так как тогда волна  $e^{+\omega \xi z}$  затухает с глубиной ( $z \rightarrow \infty$ ), а волна  $e^{-i\omega \xi z}$  затухает с высотой ( $z \rightarrow -\infty$ ) в соответствии с физическим смыслом задачи.

В-третьих, предвидя, что в последующих главах нам придется использовать функции Ханкеля, мы будем прибегать к обозначениям, почти универсальным в физике, а именно полагать, что функции Ханкеля первого рода соответствуют расходящимся волнам, а функции Ханкеля второго рода — сходящимся волнам. При описании распространяющихся установившихся волн функции Ханкеля должны быть дополнены множителем  $e^{-i\omega t}$ . Интегрирование (по  $\omega$ ) функций, имеющих такой множитель, представляет собой обратное преобразование Фурье во временную область, и, следовательно, наше правило знаков верно для стандартных обозначений функций Ханкеля.

но, и, как легко показать, уравнение для упругих смещений сводится к  $\beta^2 \nabla^2 v = \ddot{v}$ .

Для волн  $P$  смещение равно  $\nabla \phi$ , где  $\phi$  удовлетворяет уравнению  $\alpha^2 \nabla^2 \phi = \ddot{\phi}$ . Частный случай плоской  $P$ -волны, распространяющейся как на рис. 5.2, характеризуется нулевой компонентой смещения в направлении  $y$  и потенциалом  $\phi = \phi(x, z, t)$ , независимым от координаты  $y$ . Таким образом, смещение равно  $(\partial \phi / \partial x, 0, \partial \phi / \partial z)$ .

### 5.1.2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ; СТАЦИОНАРНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

Покажем, что решение волнового уравнения

$$\alpha^2 \nabla^2 \phi = \ddot{\phi} \quad (5.8)$$

методом разделения переменных в декартовой системе координат эквивалентно анализу решений в виде плоских волн.

Мы ищем решения (5.8) в форме  $X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ , где каждый из множителей зависит только от одной из переменных. Из (5.8) следует, что

$$\frac{\alpha^2 d^2 X}{X dx^2} + \frac{\alpha^2 d^2 Y}{Y dy^2} + \frac{\alpha^2 d^2 Z}{Z dz^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (5.9)$$

Отсюда вытекает, что  $\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \text{const}$ ; чтобы убедиться в этом, продифференцируйте (5.9) по  $t$ . Тогда

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0, \text{ и, следовательно, } T \propto \exp(\pm i\omega t).$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X &= 0 \quad \text{и} \quad X \propto \exp(\pm ik_x x), \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y &= 0 \quad \text{и} \quad Y \propto \exp(\pm ik_y y), \end{aligned}$$

где  $k_x$  и  $k_y$  — некие константы. Зависимость от  $z$  найдем из

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0,$$

(т.е.  $Z \sim \exp(\pm ik_z z)$ ), где на  $k_z$  наложено условие

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2} - k_x^2 - k_y^2, \quad (5.10)$$

и в результате решение характеризуется только тремя независимыми числами ( $\omega, k_x, k_y$ ), а не четырьмя.

Таким образом, решения, полученные разделением переменных, имеют вид

$$\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)],$$

где  $\mathbf{k}(k_x, k_y, k_z)$  и  $|\mathbf{k}| = |\omega/\alpha|$ . Очевидно, что это плоская волна с особенно простой зависимостью от времени — установившееся колебание с фиксированной частотой  $\omega$ . Вектор  $\mathbf{k}$ , образованный тремя константами разделения переменных, называют *волновым вектором*; он равен вектору медленности, умноженному на  $\omega$ .

Общее решение (5.8) получаем путем суперпозиции отдельных частных решений:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \Phi(k_x, k_y, \omega, z) \\ & \times \exp \left\{ i \left[ k_x x + k_y y + \left( \frac{\omega^2}{\alpha^2} - k_x^2 - k_y^2 \right)^{1/2} z - \omega t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Здесь  $\Phi(k_x, k_y, \omega, z)$  — просто некоторая весовая функция, указывающая вклад плоской волны с параметрами  $(k_x, k_y, \omega)$  в искомое суммарное решение  $\phi$ .

Полученный результат (5.11) по существу совпадает с тем, который найден при помощи обратных преобразований Фурье в дополнении 5.2. Здесь применялись декартовы координаты, но и для других систем координат решение, найденное обратными преобразованиями, можно рассматривать как суперпозицию частных решений с разделением переменных.

Плоские волны имеют непосредственное отношение к сейсмологии, поскольку объемные волны от удаленных источников локально ведут себя как плоские. Представление (5.11) указывает на важную косвенную роль установившихся плоских волн, показывая, что они служат основой для синтеза более общих решений. Было проведено детальное исследование этого синтеза, и оно служит предметом рассмотрения в гл. 6 и частично в гл. 7 и 9. Ввиду того что из него вытекают нужные нам свойства плоских волн, полезно перечислить свойства представления (5.11).

1) Поскольку характер плоских волн зависит от  $k_x, k_y$ , нужно изучить их зависимость от горизонтальной компоненты волнового вектора или, что эквивалентно, от горизонтальной медленности.

2) Частью процесса решения задачи на распространение волн с помощью (5.11) является определение функции  $\Phi(k_x, k_y, \omega, z)$ , соответствующей конкретному источнику данной задачи. При интегрировании по элементам  $d\omega dk_x dk_y$   $\Phi$  можно рассматривать как *функцию плотности* в пространстве  $(\omega, k_x, k_y)$ . С позиций теории преобразований Фурье она связана с тройным преобразованием  $\phi$  по  $t, x$  и  $y$ . С точки зрения суперпозиции — это *функция возбуждения*, показывающая, в какой степени конкретная плоская волна возбуждена исследуемым источником.

3) Часто оказывается полезным изучать распространение волн только в двумерном пространстве  $(x, z)$ ; в этом случае зависимость от  $y$  и интеграл по  $k_y$  в (5.11) отсутствуют.

4) Необходимо принять решение о знаке квадратного корня, появляющегося в (5.11). Кроме того, если горизонтальная компонента волнового вектора достаточно велика, необходимо извлекать квадратный корень из отрицательного числа. Из-за этого может возникнуть экспоненциальный рост или убывание решения в  $z$ -направлении. Мы рассмотрим этот вопрос в разд. 5.3.

5) Когда различные множители в подынтегральном выражении в (5.11) найдены, нужно оценить тройной интеграл. Мы узнаем, что в настоящее время для этого применяется множество различных методов, которые часто являются приближенными. В небольшом числе случаев интеграл может быть взят точно, что приводит к аналитическому выражению для  $\phi$ . Для упругих сред, к которым относятся сейсмологические задачи, часто приходится оценивать интеграл численно. Все наиболее плодотворные методы этого типа включают преобразование интеграла по горизонтальной медленности.

Оправдав таким образом необходимость детального анализа плоских волн, вернемся к главной теме этой главы.

## 5.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Мы видели, что стационарные решения уравнений типа  $\alpha^2 \nabla^2 \phi = \ddot{\phi}$  в однородной среде имеют вид плоских волн  $A \exp[i\omega(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} - t)]$ , где  $A$  — амплитуда, а  $(\partial\phi/\partial x, 0, \partial\phi/\partial z)$  — соответствующее смещение в  $P$ -волне, распространяющейся по перпендикуляру к оси  $y$ . В этом разделе мы исследуем эффект границы между двумя полупространствами, контактирующими вдоль плоскости  $z = 0$ . Если полупространства могут состоять из твердых тел, жидкости и вакуума, возможны пять нетривиальных случаев, требующих отдельного рассмотрения: твердое тело/твердое тело, твердое тело/жидкость, твердое тело/вакуум, жидкость/жидкость, жидкость/вакуум.

### 5.2.1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Существуют два типа граничных условий: на смещения (их часто называют кинематическими граничными условиями) и на компоненты напряжений (динамические граничные условия).

Для двух твердых тел, находящихся в жестком контакте, кинематические условия заключаются в непрерывности всех трех компонент смещения на границе. Непрерывность смещений потребовалась бы на границе твердого и вязкожидкого полупространств. Однако, если жидкость полностью лишена вязкости, возможно скольжение частиц в жидкости параллельно границе, но нормальная компонента смещений должна быть непрерывна (если только не происходит кавитации или жидкость не проникает в поры внутри твердого тела). Для типичных длин волн (километры) и периодов сейсмических колебаний (секунды) две жидкости, важные для сейсмологии (вода океанов и вещество внешнего ядра), по-видимому, ведут себя как невязкие. Иными словами, их вязкость столь мала, что можно ограничить кинематическое вязкостное сопротивление в жидкости только очень тонким пограничным слоем (мощность которого пренебрежимо мала по сравнению с длиной волны) у границы между твердой и жидкой средами (например, океаническое дно или граница ядра и мантии). В этих условиях тангенциальную компоненту смещений можно считать практически разрывной и граничные условия остается применять только к нормальной компоненте. Сильные

ДОПОЛНЕНИЕ 5.3

*Различие между кинематикой и динамикой*

Кинематика — это раздел механики, занимающийся исключительно движением без анализа сил, вызывающих это движение или участвующих в нем. Динамика же — раздел механики, непосредственно изучающий системы сил и энергетический баланс, управляющий движением. На основе этих фундаментальных определений выведены два полезных правила для применения слов «кинематика» и «динамика».

Во-первых, при анализе одних только смещений кинематическими свойствами будут такие свойства, которые можно вывести из уравнения эйконала (4.41), в то время как динамические свойства связаны с амплитудами смещений. Таким образом, существование конкретных волновых фронтов и лучевых траекторий — это часть кинематики рассматриваемой задачи. В качестве примера динамической задачи мы можем указать на вопрос о том, является ли некое приближение адекватным для описания смещения, зафиксированного данным приемником на заданном расстоянии от локализованного источника.

Во-вторых, в тех задачах, где мы непосредственно интересуемся как смещениями, так и связанными с ними напряжениями, кинематическими свойствами будут свойства поля смещений, а динамическими — свойства напряжений. Например, если известно относительное смещение противоположных сторон поверхности разрыва как функция пространственных координат и времени, это называют кинематическим описанием движения по разрыву. Если известны напряжения на поверхности разрыва, говорят о динамическом описании. Другим примером является использование этих терминов по отношению к граничным условиям, как это сделано в данном разделе.

сжимающие напряжения, преобладающие внутри Земли, не допускают кавитации (она привела бы к возникновению ударных волн со скачком напряжения, значительно превышающим прочность горных пород). Далее, любая значительная диффузия жидкости в твердое тело потребует значительно большего времени, чем период сейсмических волн. Поэтому для сейсмологических задач вполне допустимо принимать в качестве граничного условия на контакте твердого тела и жидкости непрерывность только нормальной компоненты смещений.

Динамические граничные условия заключаются в непрерывности напряжений на границе. Этот результат можно доказать такими же рассуждениями, какие были приведены ранее при рассмотрении рис. 2.4. Напряжения, действующие на малый тонкий диск, две плоские стороны которого принадлежат разным средам, равны по величине, но имеют противоположное направление [см. (2.7)]. Если изменить направление одной из внешних нормалей диска на противоположное, мы получим, что напряжение  $T(\mathbf{n})$  — одно и то же на каждой стороне диска и, следовательно, непрерывно на границе (см. также задачу 2.5). Поскольку напряжение, действующее на площадку, — вектор, возникают три скалярных условия. Одно или два из них могут равняться нулю, так как распространяющаяся плоская волна вовсе не обязана возбуждать все три компоненты напряжения. Заметим, что компоненты напряжения — вектора при нашем выборе границы как плоскости, нормальной к оси  $z$ , — являются компонентами тензора напряжений  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{zz}$ . На границе с вакуумом все эти три компоненты равны нулю; этот случай непосредственно описывает условия на поверхности земли или океана,

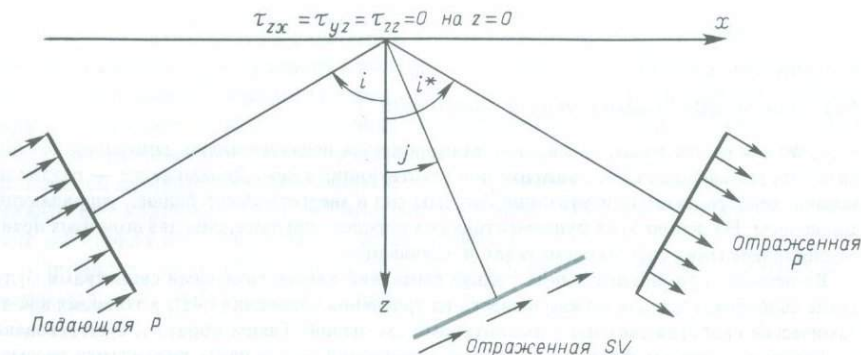


Рис. 5.4. Система лучей и координаты, используемые при изучении отраженных волн, возбуждаемых плоской волной  $P$ , падающей на свободную поверхность упругого полупространства. Участки фронтов плоских волн показаны жирными прямыми, а стрелки около них — направления движения частиц. Углы  $i$  и  $j$  определяются лучевыми траекториями, ортогональными к плоским фронтам  $P$  и  $SV$  соответственно. Угол отражения  $i^*$  равен углу падения  $i$ .

так как упругие модули атмосферы на несколько порядков меньше, чем упругие модули горных пород или модуль объемного сжатия морской воды (исключение могут представлять связанные с воздушной средой поверхностные волны, рассматриваемые в приложении 1). Случай  $(\tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zz}) = (0, 0, 0)$  при  $z = 0$  обычно называют «условиями на свободной границе»  $z = 0$ , и мы прежде всего детально опишем отражение от такой границы.

### 5.2.2. ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН $P$ И $SV$ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть плоская волна  $P$  распространяется с горизонтальной медленностью, направленной в сторону растущих  $x$  (рис. 5.4). Тогда для некоторого потенциала  $\phi$  смещение в волне имеет вид  $\mathbf{u} = (\partial\phi/\partial x, 0, \partial\phi/\partial z)$ , а соответствующее напряжение

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{z}}) = (\tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zz}) = \left( 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}, 0, \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right). \quad (5.12)$$

Для полноты удобно привести здесь соответствующие формулы для волн  $SV$  и  $SH$ : для  $SV$  имеется скалярный потенциал  $\psi$ ,  $SV$ -смещение равно  $\mathbf{u} = (-\partial\psi/\partial z, 0, \partial\psi/\partial x)$ , а напряжение равно

$$(\tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zz}) = \left( \mu \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), 0, 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \right); \quad (5.13)$$

для волн  $SH$  нужна только одна компонента смещения, и  $SH$ -смещение описывается как  $\mathbf{u} = (0, v, 0)$ , а соответствующее напряжение — как

$$(\tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zz}) = \left( 0, \mu \frac{\partial v}{\partial z}, 0 \right). \quad (5.14)$$

Медленность можно выразить через угол падения  $i$  (см. рис. 5.4); для падающей волны  $P$  медленность равна

$$s = \left( \frac{\sin i}{\alpha}, 0, \frac{-\cos i}{\alpha} \right).$$

Поскольку эта волна не возбуждает  $\tau_{yz}$ -компоненту [см. (5.12)], отразиться могут только волны  $P$  и  $SV$  с соответствующими медленностями

$$\left( \frac{\sin i^*}{\alpha}, 0, \frac{\cos i^*}{\alpha} \right), \left( \frac{\sin j}{\beta}, 0, \frac{\cos j}{\beta} \right).$$

Таким образом, полный потенциал  $\phi$  образован из падающей компоненты  $\phi^{\text{пад}}$  и отраженной компоненты  $\phi^{\text{отр}}$ :

$$\phi = \phi^{\text{пад}} + \phi^{\text{отр}}, \quad (5.15)$$

$$\phi^{\text{пад}} = A \exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin i}{\alpha} x - \frac{\cos i}{\alpha} z - t \right) \right], \quad (5.16)$$

$$\phi^{\text{отр}} = B \exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin i^*}{\alpha} x + \frac{\cos i^*}{\alpha} z - t \right) \right]. \quad (5.17)$$

Амплитуды  $A$  и  $B$  в каждой волне постоянные, а полный потенциал для волны  $SV$

$$\psi = \psi^{\text{отр}}, \quad (5.18)$$

где

$$\psi^{\text{отр}} = C \exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin j}{\beta} x + \frac{\cos j}{\beta} z - t \right) \right]. \quad (5.19)$$

Кинематические граничные условия в данном случае отсутствуют, поскольку говорить о смещениях выше свободной поверхности бессмысленно, а смещения свободной поверхности твердого тела не ограничены. Нетривиальные динамические условия имеют вид  $\tau_{zx} = \tau_{zz} = 0$  при  $z = 0$ ; из уравнений (5.12), (5.13), (5.15) — (5.19) находим, что каждое из  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zz}$  — это сумма трех вкладов, содержащих множители вида

$$\exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin i}{\alpha} x - t \right) \right], \text{ или } \exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin i^*}{\alpha} x - t \right) \right], \text{ или } \exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin j}{\beta} x - t \right) \right].$$

Граничные условия на плоскости  $z = 0$  выполняются для всех  $x$  и  $t$ , так что эти множители, контролирующие распространение системы волн в горизонтали, должны быть равны у всех трех волн. В частности,  $i^* = i$  (углы падения и отражения волны  $P$  равны) и  $(\sin i)/\alpha = (\sin j)/\beta$ . Таким образом, горизонтальная медленность падающей волны сохраняется при отражении, а также при обмене на волну  $SV$ . Если бы энергия передавалась в верхнее полупространство, горизонтальная компонента медленности должна была бы сохраниться и здесь в соответствии с законом Снеллиуса, который мы уже доказали [см. (4.45а)] для сред, в которых скорость плавно изменяется с глубиной. Здесь следует подчеркнуть, что вся система волн, созданная отражением и преломлением плоских волн в плоскостойких средах, характеризуется значением их общей горизон-

## ДОПОЛНЕНИЕ 5.4

*Импеданс среды*

Импеданс, которым обладает данная среда по отношению к данному движению, есть мера сопротивления среды движению частиц. Точнее, в теории упругости импедансом служит отношение напряжения к скорости частицы, так что при фиксированном приложенном напряжении скорость частицы обратно пропорциональна импедансу.

Импедансные свойства волн различных типов, как мы увидим сейчас на конкретных примерах, могут значительно варьировать.

Рассмотрим сначала волну  $SH$  со смещением  $v = v_0 \exp\{i\omega[px + (\beta^{-1} \cos j)z - t]\}$ . Тогда для горизонтальных плоскостей ( $z = \text{const}$ ) тангенциальное напряжение равно  $\tau_{yz} = i\mu\omega(\beta^{-1} \cos j)v$ , а тангенциальная скорость частиц  $\dot{v} = -i\omega v$ ; значит, импеданс равен  $\tau_{yz}/\dot{v} = -\mu(\beta^{-1} \cos j) = -\rho\beta \cos j$ . Для земной коры типичные значения плотности и скорости поперечных волн равны соответственно  $\rho = 2,8 \text{ г/см}^3$  и  $\beta = 3,5 \text{ км/с}$ , так что импеданс оказывается порядка  $10^6$  СГС. Следовательно, волна напряжения с амплитудой 100 бар ( $= 10^8$  СГС) соответствует скорости движения грунта около 100 см/с. Однако заметим, что для волн  $SH$  при  $j \rightarrow \pi/2$  (скользящее падение)  $\tau_{yz}/\dot{v} \rightarrow 0$ .

Теперь рассмотрим акустическую волну (т. е. волну  $P$  в жидкости), в которой давление имеет вид  $P = P_0 \exp\{i\omega[px + (\alpha^{-1} \cos i)z - t]\}$ . Тогда, поскольку  $\rho\ddot{u} = -\nabla P$ , вертикальная скорость частиц равна  $-i\omega\rho\dot{u}_z = -\partial P/\partial z$  и импеданс равен  $P/\dot{u}_z = \rho\alpha/\cos i$ . Заметим, что теперь при  $i \rightarrow \pi/2$  (скользящее падение) в отличие от случая волн  $SH$  импеданс стремится к бесконечности.

тальной медленности. Мы часто называем ее *лучевым параметром*, хотя  $(\sin i)/\alpha = (\sin j)/\beta = p$  — это параметр не одного луча, а целой системы лучей.

Упростив уравнения (5.12), (5.13), выражающие физические переменные как функции потенциалов  $\phi$  и  $\psi$ , и переписав их в виде функций от  $p$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\partial\phi/\partial z$  и  $\partial\psi/\partial z$ , находим:

$$\text{для волны } P \left\{ \begin{array}{l} \text{смещение} \left( i\omega r\phi, 0, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \\ \text{напряжение} \left( 2\rho\beta^2 i\omega r \frac{\partial\phi}{\partial z}, 0, -\rho(1 - 2\beta^2 p^2)\omega^2\phi \right), \end{array} \right. \quad (5.20)$$

$$\text{для волны } SV \left\{ \begin{array}{l} \text{смещение} \left( -\frac{\partial\psi}{\partial z}, 0, i\omega r\psi \right) \\ \text{напряжение} \left( \rho(1 - 2\beta^2 p^2)\omega^2\psi, 0, 2\rho\beta^2 i\omega r \frac{\partial\psi}{\partial z} \right). \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Наша ближайшая задача — получить формулы для отношений  $B/A$  и  $C/A$ , выражающих амплитуды отраженной и обменной волн как доли амплитуды пада-

ющей волны. Два уравнения, которые мы можем использовать, — это

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= 2\rho\beta^2 i\omega p \left( \frac{\partial\phi^{\text{inc}}}{\partial z} + \frac{\partial\phi^{\text{refl}}}{\partial z} \right) + \rho(1 - 2\beta^2 p^2)\omega^2 \psi^{\text{refl}} = 0 \\ \tau_{zz} &= -\rho(1 - 2\beta^2 p^2)\omega^2 (\phi^{\text{inc}} + \phi^{\text{refl}}) + 2\rho\beta^2 i\omega p \frac{\partial\psi^{\text{refl}}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \text{при } z = 0.$$

Подставляя сюда выражения для потенциалов из (5.16), (5.17), (5.19), получаем уравнения

$$2\rho\beta^2 p \frac{\cos i}{\alpha} (A - B) + \rho(1 - 2\beta^2 p^2)C = 0, \quad (5.22)$$

$$\rho(1 - 2\beta^2 p^2)(A + B) + 2\rho\beta^2 p \frac{\cos j}{\beta} C = 0, \quad (5.23)$$

решения которых имеют вид

$$\frac{B}{A} = \frac{4\beta^4 p^2 \frac{\cos i}{\alpha} \frac{\cos j}{\beta} - (1 - 2\beta^2 p^2)^2}{4\beta^4 p^2 \frac{\cos i}{\alpha} \frac{\cos j}{\beta} + (1 - 2\beta^2 p^2)^2}, \quad (5.24)$$

$$\frac{C}{A} = \frac{-4\beta^2 p \frac{\cos i}{\alpha} (1 - 2\beta^2 p^2)}{4\beta^4 p^2 \frac{\cos i}{\alpha} \frac{\cos j}{\beta} + (1 - 2\beta^2 p^2)^2}. \quad (5.25)$$

Используя тригонометрические тождества и соотношения между упругими модулями, можно получить множество различных форм приведенных выше выражений. Например, заметим, что  $1 - 2\beta^2 p^2 = \cos 2j$ . Мы предпочли иметь дело с  $p$ ,  $\alpha^{-1} \cos i$ ,  $\beta^{-1} \cos j$ , потому что в гл. 9 мы покажем, что формулы для коэффициентов отражения (5.24) и (5.25) можно легко обобщить на случай вертикально-неоднородных сред.

Мы назвали отношения  $B/A$  и  $C/A$  «коэффициентами отражения», но фактически — это амплитудные отношения только для потенциалов. На практике мы обычно интересуемся амплитудными отношениями для смещений (и иногда для энергий). Для распространяющейся гармонической  $P$ -волны амплитуда смещения равна (амплитуда потенциала)  $\cdot \omega/\alpha$ , и аналогично для смещения в волне  $S$  амплитуда равна (амплитуда потенциала)  $\cdot \omega/\beta$ . Следовательно, коэффициент отражения волны  $P \rightarrow P$  в смещениях равен отношению  $B/A$ , но коэффициент отражения с обменом волны  $P \rightarrow S$  в смещениях равен  $C\alpha/A\beta$ . Нужно также установить правило знаков для коэффициентов, указывающее положительные направления движения, и наш выбор объяснен на рис. 5.5.

Предлагалось очень много различных обозначений для коэффициентов отражения и преломления. К счастью, часто для решения поставленной задачи требуется небольшое число (один, два) определенных коэффициентов. В этих случаях нет нужды в исчерпывающей системе обозначений, так как из контекста вполне ясно, что такой символ, как  $PP$ , описывает коэффициент отражения, причем не возникает неясности в том, какая именно частная комбинация падающей и от-

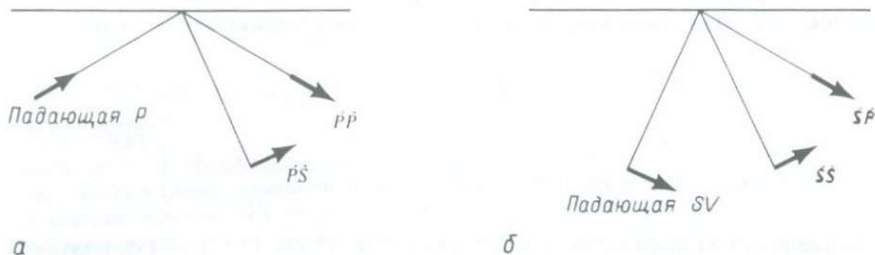


Рис. 5.5. Обозначения и правило знаков для коэффициентов отражения плоских волн  $P$  и  $SV$  от свободной поверхности. Смещение считается *положительным*, если его компонента вправо (т.е. в горизонтальном направлении распространения) имеет ту же фазу, что и множитель  $\exp[i\omega(px - t)]$ , описывающий распространение волны.

раженной волн подразумевается. Такова ситуация в рассматриваемой задаче об упругом полупространстве со свободной границей: присутствует только одна падающая волна  $P$ , и только одна волна  $P$  возникает. Но вскоре мы займемся границей между двумя упругими телами, на которую волны  $P$  (и  $S$ ) могут падать как сверху, так и снизу. Каждый из четырех типов падающих  $P$ - $SV$ -волн ( $P$  или  $SV$ , сверху или снизу) может генерировать все четыре типа уходящих от границы воли; следовательно, для полного анализа одной этой границы нужно иметь 16 коэффициентов. Поэтому даже в рассматриваемой сейчас задаче лучше принять обозначения, которые можно будет легко обобщить на более сложные границы.

На рис. 5.5,а  $\acute{P}\acute{P}$  обозначает коэффициент отражения волны  $P \rightarrow P$ , а  $\acute{P}\acute{S}$  — коэффициент отражения с обменом волны  $P \rightarrow S$ . На рис. 5.5,б коэффициент отражения волны  $S \rightarrow P$  обозначен  $\acute{S}\acute{P}$ , а коэффициент отражения волны  $S \rightarrow S$  — как  $\acute{S}\acute{S}$ . Использование наклонных ударений над буквами указывает рассматриваемую последовательность «падающая волна — образовавшаяся волна», так как все волны перемещаются слева направо. Поэтому ударение влево ( $\acute{\phantom{P}}$ ), например  $\acute{P}$ , указывает восходящую волну, а ударение вправо ( $\grave{\phantom{P}}$ ), например  $\acute{S}$ , — нисходящую волну. Комбинируя эти обозначения с правилом знаков (рис. 5.5), мы даем в табл. 5.1 точную векторную форму движений, соответствующих двум возможным типам падающей волны.

Из табл. 5.1 и уравнений (5.24), (5.25) следует, что

$$\acute{P}\acute{P} = \frac{-\left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i \cos j}{\alpha \beta}}{\left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i \cos j}{\alpha \beta}}, \quad (5.26)$$

$$\acute{P}\acute{S} = \frac{4 \frac{\alpha}{\beta} p \frac{\cos i}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)}{\left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i \cos j}{\alpha \beta}}. \quad (5.27)$$

Явные выражения для векторных смещений в задачах о плоских волнах  $P$  и  $SV$ , показанных на рис. 5.5

Падающая волна		Рассеянные волны	
Тип (восходящая волна)	Смещение	Тип (нисходящая волна)	Смещение
$P$	$S(\sin i, 0, -\cos i) \exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin i}{\alpha} x - \frac{\cos i}{\alpha} z - t \right) \right]$	$P$	$S(\sin i, 0, \cos i) \hat{P}\hat{P} \exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin i}{\alpha} x + \frac{\cos i}{\alpha} z - t \right) \right]$
		$SV$	$S(\cos j, 0, -\sin j) \hat{P}\hat{S} \exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin j}{\beta} x + \frac{\cos j}{\beta} z - t \right) \right]$
$SV$	$S(\cos j, 0, \sin j) \exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin j}{\beta} x - \frac{\cos j}{\beta} z - t \right) \right]$	$P$	$S(\sin i, 0, \cos i) \hat{S}\hat{P} \exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin i}{\alpha} x + \frac{\cos i}{\alpha} z - t \right) \right]$
		$SV$	$S(\cos j, 0, -\sin j) \hat{S}\hat{S} \exp \left[ i\omega \left( \frac{\sin j}{\beta} x + \frac{\cos j}{\beta} z - t \right) \right]$

*Примечание.* Амплитуды  $S$  падающих волн можно трактовать двояко — или как амплитуду смещения в гармонической волне, или как амплитуду преобразования Фурье скорости частиц в том случае, если падающая волна — импульс скорости частиц, соответствующий скачку смещения величиной  $S$ .

Наши обозначения буквами с ударениями были введены для отношений амплитуд смещений. Их можно использовать также для отношений амплитуд скоростей частиц и амплитуд ускорений частиц (поскольку каждое содержит амплитуды падающих и рассеянных волн с множителями, являющимися одинаковой степенью частоты). Однако для отношений потенциалов или потоков энергий коэффициенты отличаются. Если нужно получить такие отношения [см., например, дополнение 6.6 и уравнение (5.41)], необходимо сохранить символы с ударениями у отношений амплитуд смещений и умножить их на соответствующие масштабные множители.

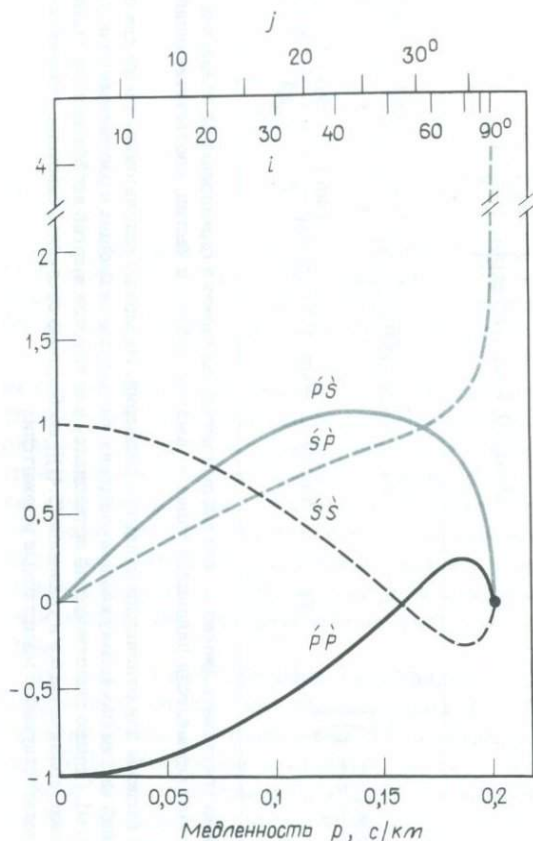


Рис. 5.6. Четыре возможных коэффициента отражения волн  $P-SV$  (отношения амплитуд смещений) от свободной поверхности как функции горизонтальной медленности  $p$  (см. рис. 5.5). В данном случае  $\alpha = 5$  км/с и  $\beta = 3$  км/с;  $p$  ограничено диапазоном  $0 \leq p \leq 1/\alpha$ , так что угол падения  $i$  всегда вещественный. При  $i = 90^\circ$   $\dot{S}\dot{P}$  весьма велико ( $\sim 4,1$ ).

В случае падения на свободную поверхность волны  $SV$  мы можем ожидать возникновения отраженной волны  $P(\dot{S}\dot{P})$  и отраженной волны  $S(\dot{S}\dot{S})$ . Пользуясь выражениями для векторов смещений в табл. 5.1, мы приводим условие  $\tau_{zx} = 0$  при  $z = 0$  к виду

$$-2p\alpha\beta \frac{\cos i}{\alpha} \dot{S}\dot{P} + (1 - 2\beta^2 p^2)(1 - \dot{S}\dot{S}) = 0, \quad (5.28)$$

а условие  $\tau_{zz} = 0$  при  $z = 0$  — к виду

$$-(1 - 2\beta^2 p^2)\dot{S}\dot{P} + \frac{2\beta^3 p \cos j}{\alpha \beta} (1 + \dot{S}\dot{S}) = 0. \quad (5.29)$$

Решая (5.28) и (5.29), получаем

$$\dot{S}\dot{P} = \frac{4 \frac{\beta}{\alpha} p \frac{\cos j}{\beta} \left( \frac{1}{\beta^2} - 2p^2 \right)}{\left( \frac{1}{\beta^2} - 2p^2 \right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i \cos j}{\alpha \beta}}, \quad (5.30)$$

$$\hat{S}\hat{S} = \frac{\left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)^2 - 4p^2 \frac{\cos i \cos j}{\alpha \beta}}{\left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i \cos j}{\alpha \beta}}. \quad (5.31)$$

Таким образом, в этом простом примере отражения от свободной поверхности упругого полупространства мы нашли формулы, определяющие каждую компоненту матрицы

$$\begin{pmatrix} \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} \\ \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица объединяет всевозможные коэффициенты отражения и называется *матрицей рассеяния*. На рис. 5.6 приведены графики каждой компоненты как функции медленности; как видно, эти компоненты довольно сильно варьируют. На рисунке показан диапазон медленностей  $0 \leq p \leq 1/\alpha$ . Заметим, что в интервале значений медленности от 0,14 до 0,195 с/км отраженные колебания почти полностью принадлежат другому типу, чем падающая волна. Так, падающая волна  $P$  почти полностью преобразуется в отраженную волну  $SV$ , а падающая  $SV$  — в отраженную  $P$ . В других граничных задачах (например, при контакте твердого тела с жидкостью) могут возникать значительно более сложные ситуации, и при интерпретации конкретных данных сейсмологи часто вынуждены оценивать поведение коэффициентов отражения с большой детальностью. Поэтому мы приведем формулы для коэффициентов в двух других граничных задачах, представляющих интерес в сейсмологии. К сожалению, во многих случаях эти формулы публиковались с опечатками (обзор их дан в [147, 343]). Чтобы читатель был уверен, правильно ли он оценил тот или иной коэффициент, в конце раздела мы приведем полезный способ проверки правильности представленных формул.

### 5.2.3. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛН $SH$

Компоненты напряжений  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zz}$  не возбуждаются смещениями, приведенными в табл. 5.2, так что единственным нетривиальным динамическим граничным условием является непрерывность  $\tau_{yz}$  на  $z = 0$ .  $y$ -компонента смещения также непрерывна, и из (5.14) мы находим, что элементы матрицы рассеяния

$$\begin{pmatrix} \hat{S}\hat{S} & \hat{S}\hat{S}' \\ \hat{S}\hat{S} & \hat{S}\hat{S}' \end{pmatrix}$$

равны

$$\begin{aligned} \hat{S}\hat{S}' &= \frac{\rho_1 \beta_1 \cos j_1 - \rho_2 \beta_2 \cos j_2}{\Delta}, & \hat{S}\hat{S} &= \frac{2\rho_2 \beta_2 \cos j_2}{\Delta}, \\ \hat{S}\hat{S} &= \frac{2\rho_1 \beta_1 \cos j_1}{\Delta}, & \hat{S}\hat{S}' &= -\hat{S}\hat{S}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

где

$$\Delta = \rho_1 \beta_1 \cos j_1 + \rho_2 \beta_2 \cos j_2.$$

Таблица 5.2

Векторные смещения в задачах о плоских волнах  $SH$ , показанных на рис. 5.7

Палающая волна		Рассеянные волны	
Тип	Смещение	Тип	Смещение
Нисходящая $SH$	$(0, S, 0) \exp \left[ i\omega \left( px + \frac{\cos j_1}{\beta_1} z - t \right) \right]$	Восходящая $SH$	$(0, S, 0) \hat{S} \hat{S}' \exp \left[ i\omega \left( px - \frac{\cos j_1}{\beta_1} z - t \right) \right]$
		Нисходящая $SH$	$(0, S, 0) \hat{S} \hat{S} \exp \left[ i\omega \left( px + \frac{\cos j_2}{\beta_2} z - t \right) \right]$
Восходящая $SH$	$(0, S, 0) \exp \left[ i\omega \left( px - \frac{\cos j_2}{\beta_2} z - t \right) \right]$	Восходящая $SH$	$(0, S, 0) \hat{S} \hat{S}' \exp \left[ i\omega \left( px - \frac{\cos j_1}{\beta_1} z - t \right) \right]$
		Нисходящая $SH$	$(0, S, 0) \hat{S} \hat{S} \exp \left[ i\omega \left( px + \frac{\cos j_2}{\beta_2} z - t \right) \right]$

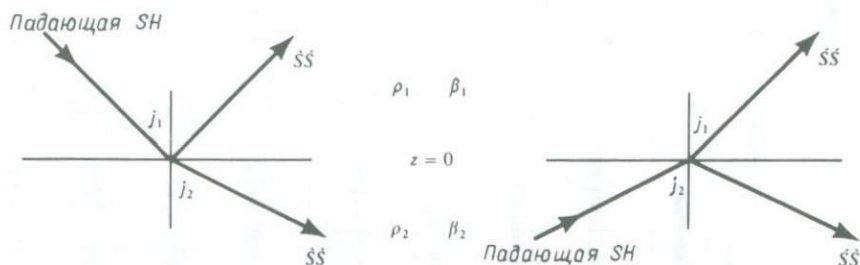


Рис. 5.7. Обозначения для четырех возможных коэффициентов отражения (преломления), возникающих в задачах о падении волн  $SH$ .

#### 5.2.4. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛН $P-SV$ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Матрица рассеяния теперь равна

$$\begin{pmatrix} \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} & \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} \\ \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} & \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} \\ \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} & \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} \\ \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} & \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} \end{pmatrix}.$$

Ее можно найти из непрерывности компонент  $x$  и  $z$  смещения и напряжения. Каждый столбец матрицы рассеяния представляет собой четыре волны, рассеянные на границе, на которую падает волна определенного типа. Следовательно, чтобы оценить все столбцы, нам на первый взгляд нужно получить четыре системы из четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Если при этом не уделить достаточного внимания учету всех свойств симметрии, присущих этой задаче, полное определение всех 16 коэффициентов может потребовать громоздких алгебраических преобразований. Такие преобразования минимизируются способом, основанным на работе Нейфа [237], к описанию которого мы перейдем.

Предположим, что все четыре возможные падающие волны существуют вместе и имеют соответствующие амплитуды смещений  $\hat{P}_1, \hat{S}_1, \hat{P}_2, \hat{S}_2$  (рис. 5.9). Чтобы различить среды, в которых распространяются волны, нам понадобятся нижние индексы. Предполагается, что все волны имеют одинаковую горизонтальную медленность, и четыре рассеянные волны имеют амплитуды  $\hat{P}'_1, \hat{S}'_1, \hat{P}'_2$  и  $\hat{S}'_2$ . Из непрерывности  $u_x, u_z, \tau_{zx}$  и  $\tau_{zz}$  получаем соответственно четыре уравнения:

$$\begin{aligned} \sin i_1(\hat{P}_1 + \hat{P}'_1) + \cos j_1(\hat{S}_1 + \hat{S}'_1) &= \sin i_2(\hat{P}_2 + \hat{P}'_2) + \cos j_2(\hat{S}_2 + \hat{S}'_2), \\ \cos i_1(\hat{P}_1 - \hat{P}'_1) - \sin j_1(\hat{S}_1 - \hat{S}'_1) &= \cos i_2(\hat{P}_2 - \hat{P}'_2) - \sin j_2(\hat{S}_2 - \hat{S}'_2), \\ 2\rho_1\beta_1^2p \cos i_1(\hat{P}_1 - \hat{P}'_1) + \rho_1\beta_1(1 - 2\beta_1^2p^2)(\hat{S}_1 - \hat{S}'_1) &= 2\rho_2\beta_2^2p \cos i_2(\hat{P}_2 - \hat{P}'_2) + \rho_2\beta_2(1 - 2\beta_2^2p^2)(\hat{S}_2 - \hat{S}'_2), \end{aligned} \quad (5.33)$$

Векторные смещения в задачах о плоских волнах  $P - SV$ , показанных на рис. 5.8 (контакт твердых тел)

Падающая волна		Рассеянные волны	
Тип	Смещение	Тип	Смещение
Нисходящая $P$	$S(\sin i_1, 0, \cos i_1) \exp\left[i\omega\left(px + \frac{\cos i_1}{\alpha_1}z - t\right)\right]$	Восходящая $P$	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\hat{S}\hat{P} \exp\left[i\omega\left(px - \frac{\cos i_1}{\alpha_1}z - t\right)\right]$
		Восходящая $SV$	$S(\cos j_1, 0, \sin j_1)\hat{S}\hat{S} \exp\left[i\omega\left(px - \frac{\cos j_1}{\beta_1}z - t\right)\right]$
		Нисходящая $P$	$S(\sin i_2, 0, \cos i_2)\hat{S}\hat{P} \exp\left[i\omega\left(px + \frac{\cos i_2}{\alpha_2}z - t\right)\right]$
		Нисходящая $SV$	$S(\cos j_2, 0, -\sin j_2)\hat{S}\hat{S} \exp\left[i\omega\left(px + \frac{\cos j_2}{\beta_2}z - t\right)\right]$
Нисходящая $SV$	$S(\cos j_1, 0, -\sin j_1) \exp\left[i\omega\left(px + \frac{\cos j_1}{\beta_1}z - t\right)\right]$	Восходящая $P$	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\hat{P}\hat{P} \exp\left[i\omega\left(px - \frac{\cos i_1}{\alpha_1}z - t\right)\right]$
		Восходящая $SV$	$S(\cos j_1, 0, \sin j_1)\hat{P}\hat{S} \exp\left[i\omega\left(px - \frac{\cos j_1}{\beta_1}z - t\right)\right]$
		Нисходящая $P$	$S(\sin i_2, 0, \cos i_2)\hat{P}\hat{P} \exp\left[i\omega\left(px + \frac{\cos i_2}{\alpha_2}z - t\right)\right]$
		Нисходящая $SV$	$S(\cos j_2, 0, -\sin j_2)\hat{P}\hat{S} \exp\left[i\omega\left(px + \frac{\cos j_2}{\beta_2}z - t\right)\right]$
Восходящая $P$	$S(\sin i_2, 0, -\cos i_2) \exp\left[i\omega\left(px - \frac{\cos i_2}{\alpha_2}z - t\right)\right]$	Восходящая $P$	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\hat{P}\hat{P} \exp\left[i\omega\left(px - \frac{\cos i_1}{\alpha_1}z - t\right)\right]$
		Восходящая $SV$	$S(\cos j_1, 0, \sin j_1)\hat{P}\hat{S} \exp\left[i\omega\left(px - \frac{\cos j_1}{\beta_1}z - t\right)\right]$
		Нисходящая $P$	$S(\sin i_2, 0, \cos i_2)\hat{P}\hat{P} \exp\left[i\omega\left(px + \frac{\cos i_2}{\alpha_2}z - t\right)\right]$
		Нисходящая $SV$	$S(\cos j_2, 0, -\sin j_2)\hat{P}\hat{S} \exp\left[i\omega\left(px + \frac{\cos j_2}{\beta_2}z - t\right)\right]$
Восходящая $SV$	$S(\cos j_2, 0, \sin j_2) \exp\left[i\omega\left(px - \frac{\cos j_2}{\beta_2}z - t\right)\right]$	Восходящая $P$	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\hat{S}\hat{P} \exp\left[i\omega\left(px - \frac{\cos i_1}{\alpha_1}z - t\right)\right]$
		Восходящая $SV$	$S(\cos j_1, 0, \sin j_1)\hat{S}\hat{S} \exp\left[i\omega\left(px - \frac{\cos j_1}{\beta_1}z - t\right)\right]$
		Нисходящая $P$	$S(\sin i_2, 0, \cos i_2)\hat{S}\hat{P} \exp\left[i\omega\left(px + \frac{\cos i_2}{\alpha_2}z - t\right)\right]$
		Нисходящая $SV$	$S(\cos j_2, 0, -\sin j_2)\hat{S}\hat{S} \exp\left[i\omega\left(px + \frac{\cos j_2}{\beta_2}z - t\right)\right]$

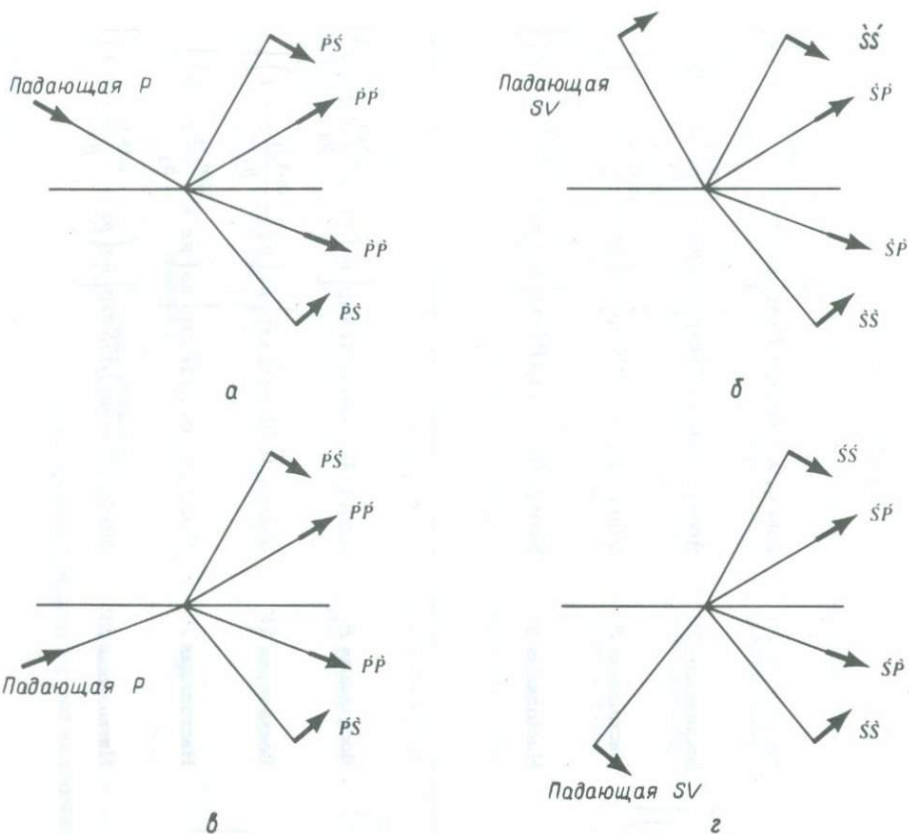


Рис. 5.8. Обозначения для 16 возможных коэффициентов отражения (преломления), возникающих в задачах о волнах  $P - SV$  на жесткой границе между двумя различными твердыми полупространствами.

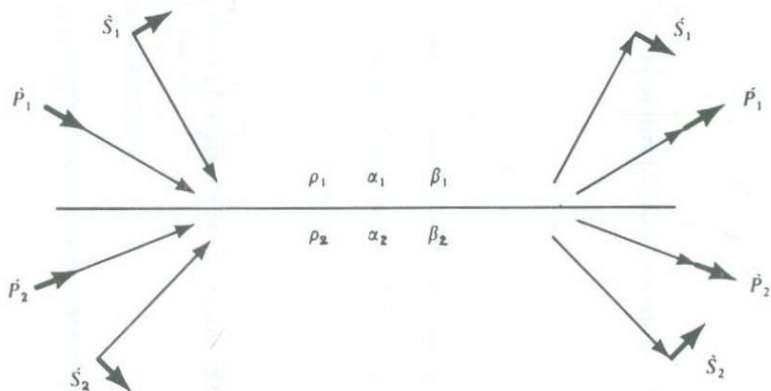


Рис. 5.9. Полная система падающих и рассеянных плоских волн  $P - SV$ , через которые легко определяется матрица рассеяния. Короткие стрелки указывают направление движения частиц, длинные — направление распространения волн.

$$\begin{aligned} \rho_1 \alpha_1 (1 - 2\beta_1^2 p^2) (\dot{P}_1 + \dot{P}_1) - 2\rho_1 \beta_1^2 p \cos j_1 (\dot{S}_1 + \dot{S}_1) \\ = \rho_2 \alpha_2 (1 - 2\beta_2^2 p^2) (\dot{P}_2 + \dot{P}_2) - 2\rho_2 \beta_2^2 p \cos j_2 (\dot{S}_2 + \dot{S}_2), \end{aligned}$$

Переставляя члены в этих уравнениях так, чтобы рассеянные волны оказались в левой части, а падающие волны — в правой, находим

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{S}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dot{S}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{S}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dot{S}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

где матрицы коэффициентов равны

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 p & -\cos j_1 & \alpha_2 p & \cos j_2 \\ \cos i_1 & -\beta_1 p & \cos i_2 & -\beta_2 p \\ 2\rho_1 \beta_1^2 p \cos i_1 & \rho_1 \beta_1 (1 - 2\beta_1^2 p^2) & 2\rho_2 \beta_2^2 p \cos i_2 & \rho_2 \beta_2 (1 - 2\beta_2^2 p^2) \\ -\rho_1 \alpha_1 (1 - 2\beta_1^2 p^2) & 2\rho_1 \beta_1^2 p \cos j_1 & \rho_2 \alpha_2 (1 - 2\beta_2^2 p^2) & -2\rho_2 \beta_2^2 p \cos j_2 \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \alpha_1 p & \cos j_1 & -\alpha_2 p & -\cos j_2 \\ \cos i_1 & -\beta_1 p & \cos i_2 & -\beta_2 p \\ 2\rho_1 \beta_1^2 p \cos i_1 & \rho_1 \beta_1 (1 - 2\beta_1^2 p^2) & 2\rho_2 \beta_2^2 p \cos i_2 & \rho_2 \beta_2 (1 - 2\beta_2^2 p^2) \\ \rho_1 \alpha_1 (1 - 2\beta_1^2 p^2) & -2\rho_1 \beta_1^2 p \cos j_1 & -\rho_2 \alpha_2 (1 - 2\beta_2^2 p^2) & 2\rho_2 \beta_2^2 p \cos j_2 \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

В случае когда  $\dot{P}_1 = 1$  и  $\dot{S}_1 = \dot{P}_2 = \dot{S}_2 = 0$ , первый столбец матрицы рассеяния становится просто  $(\dot{P}_1, \dot{S}_1, \dot{P}_2, \dot{S}_2)^T$ , т. е. первым столбцом матрицы  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ . Аналогичный результат получаем для трех остальных столбцов, и, следовательно, вся матрица рассеяния равна

$$\begin{pmatrix} \dot{P}\dot{P} & \dot{S}\dot{P} & \dot{P}\dot{P} & \dot{S}\dot{P} \\ \dot{P}\dot{S} & \dot{S}\dot{S} & \dot{P}\dot{S} & \dot{S}\dot{S} \\ \dot{P}\dot{P} & \dot{S}\dot{P} & \dot{P}\dot{P} & \dot{S}\dot{P} \\ \dot{P}\dot{S} & \dot{S}\dot{S} & \dot{P}\dot{S} & \dot{S}\dot{S} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}. \quad (5.37)$$

Удачным обстоятельством является заметное сходство матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$ , позволяющее существенно упростить формулы для каждой компоненты матрицы рассеяния. В частности, в этих формулах неоднократно используются величины

$$\begin{aligned} a &= \rho_2 (1 - 2\beta_2^2 p^2) - \rho_1 (1 - 2\beta_1^2 p^2), & b &= \rho_2 (1 - 2\beta_2^2 p^2) + 2\rho_1 \beta_1^2 p^2, \\ c &= \rho_1 (1 - 2\beta_1^2 p^2) + 2\rho_2 \beta_2^2 p^2, & d &= 2(\rho_2 \beta_2^2 - \rho_1 \beta_1^2) \end{aligned}$$

и выражения, включающие косинусы:

$$\begin{aligned} E &= b \frac{\cos i_1}{\alpha_1} + c \frac{\cos i_2}{\alpha_2}, & F &= b \frac{\cos j_1}{\beta_1} + c \frac{\cos j_2}{\beta_2}, \\ G &= a - d \frac{\cos i_1 \cos j_2}{\alpha_1 \beta_2}, & H &= a - d \frac{\cos i_2 \cos j_1}{\alpha_2 \beta_1}, \\ D &= EF + GHp^2 = (\det \mathbf{M}) / (\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Основные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{P}\dot{P} &= \left[ \left( b \frac{\cos i_1}{\alpha_1} - c \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \right) F - \left( a + d \frac{\cos i_1}{\alpha_1} \frac{\cos j_2}{\beta_2} \right) H p^2 \right] / D, \\ \dot{P}\dot{S} &= -2 \frac{\cos i_1}{\alpha_1} \left( ab + cd \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \frac{\cos j_2}{\beta_2} \right) p \alpha_1 / (\beta_1 D), \\ \dot{P}\dot{P} &= 2 \rho_1 \frac{\cos i_1}{\alpha_1} F \alpha_1 / (\alpha_2 D), \\ \dot{P}\dot{S} &= 2 \rho_1 \frac{\cos i_1}{\alpha_1} H p \alpha_1 / (\beta_2 D), \\ \dot{S}\dot{P} &= -2 \frac{\cos j_1}{\beta_1} \left( ab + cd \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \frac{\cos j_2}{\beta_2} \right) p \beta_1 / (\alpha_1 D), \\ \dot{S}\dot{S} &= - \left[ \left( b \frac{\cos j_1}{\beta_1} - c \frac{\cos j_2}{\beta_2} \right) E - \left( a + d \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \frac{\cos j_1}{\beta_1} \right) G p^2 \right] / D, \\ \dot{S}\dot{P} &= -2 \rho_1 \frac{\cos j_1}{\beta_1} G p \beta_1 / (\alpha_2 D), \\ \dot{S}\dot{S} &= 2 \rho_1 \frac{\cos j_1}{\beta_1} E \beta_1 / (\beta_2 D), \\ \dot{P}\dot{P} &= 2 \rho_2 \frac{\cos i_2}{\alpha_2} F \alpha_2 / (\alpha_1 D), \\ \dot{P}\dot{S} &= -2 \rho_2 \frac{\cos i_2}{\alpha_2} G p \alpha_2 / (\beta_1 D), \\ \dot{P}\dot{P} &= - \left[ \left( b \frac{\cos i_1}{\alpha_1} - c \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \right) F + \left( a + d \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \frac{\cos j_1}{\beta_1} \right) G p^2 \right] / D, \\ \dot{P}\dot{S} &= 2 \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \left( ac + bd \frac{\cos i_1}{\alpha_1} \frac{\cos j_1}{\beta_1} \right) p \alpha_2 / (\beta_2 D), \\ \dot{S}\dot{P} &= 2 \rho_2 \frac{\cos j_2}{\beta_2} H p \beta_2 / (\alpha_1 D), \\ \dot{S}\dot{S} &= 2 \rho_2 \frac{\cos j_2}{\beta_2} E \beta_2 / (\beta_1 D), \\ \dot{S}\dot{P} &= 2 \frac{\cos j_2}{\beta_2} \left( ac + bd \frac{\cos i_1}{\alpha_1} \frac{\cos j_1}{\beta_1} \right) p \beta_2 / (\alpha_2 D), \\ \dot{S}\dot{S} &= \left[ \left( b \frac{\cos j_1}{\beta_1} - c \frac{\cos j_2}{\beta_2} \right) E + \left( a + d \frac{\cos i_1}{\alpha_1} \frac{\cos j_2}{\beta_2} \right) H p^2 \right] / D. \end{aligned} \tag{5.39}$$

## 5.2.5. ПОТОК ЭНЕРГИИ

Когда плоская волна падает на границу между двумя однородными полупространствами, энергия не может захватываться у границы. Поэтому поток энергии, покидающей границу, должен быть равен потоку энергии в падающей волне.

Фактическое смещение в гармонической волне  $P$  с амплитудой  $S$  и фазовым множителем  $\exp[i\omega(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} - t)]$ , описывающим распространение, равно  $S \cos[\omega(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} - t)]$ . Тогда  $\rho_1 \alpha_1 S^2 \omega^2 \sin^2[\omega(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} - t)]$  — это скорость потока энергии, протекающей через единичную площадку на волновом фронте (см. разд. 5.1). Чтобы получить скорость потока через единичную площадку горизонтальной поверхности, на которую волна падает под углом  $i$ , нужно умножить это выражение на  $\cos i$  (поскольку этот поток протекает через участок поверхности волнового фронта с площадью, равной  $\cos i$ ). Найденные выше коэффициенты отражения — преломления относились к смещениям. Поэтому из условий равенства входящего и уходящего потоков энергии мы получим, например, уравнение

$$\begin{aligned} \rho_1 \alpha_1 \cos i_1 = & \rho_1 \alpha_1 \cos i_1 (\dot{P}\dot{P})^2 + \rho_1 \beta_1 \cos j_1 (\dot{P}\dot{S})^2 \\ & + \rho_2 \alpha_2 \cos i_2 (\dot{P}\dot{P})^2 + \rho_2 \beta_2 \cos j_2 (\dot{P}\dot{S})^2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

для системы рассеянных волн, показанной на рис. 5.8, а.

Уравнение (5.40) — ограничение, наложенное на первый столбец матрицы рассеяния для границы двух твердых сред. Его можно упростить, введя новые зависимые переменные, а именно смещение  $\times$  (плотность  $\times$  скорость распространения  $\times$  косинус угла падения) $^{1/2}$ .

Матрица рассеяния  $\mathbf{S}$ , выраженная через такие взвешенные смещения (пропорциональные квадратному корню из потока энергии), является унитарной и эрмитовой. Это свойство можно вывести из уравнений, полученных Фрэйзиром [117]; оно детально исследовано в [194].

Так, например, новое выражение для коэффициента отражения, соответствующее прежнему  $\dot{P}\dot{S}$ , имеет вид

$$\frac{\text{амплитуда смещений нисходящей волны } SV \times (\rho_2 \beta_2 \cos j_2)^{1/2}}{\text{амплитуда смещений падающей восходящей волны } P \times (\rho_2 \alpha_2 \cos i_2)^{1/2}}$$

(см. рис. 5.8, б). Этот коэффициент равен  $\dot{P}\dot{S}(\beta_2 \cos j_2)^{1/2}/(\alpha_2 \cos i_2)^{1/2}$ . Полная матрица рассеяния имеет вид

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \dot{P}\dot{P} & \dot{S}\dot{P} \left( \frac{\alpha_1 \cos i_1}{\beta_1 \cos j_1} \right)^{1/2} & \dot{P}\dot{P} \left( \frac{\rho_1 \alpha_1 \cos i_1}{\rho_2 \alpha_2 \cos i_2} \right)^{1/2} & \dot{S}\dot{P} \left( \frac{\rho_1 \alpha_1 \cos i_1}{\rho_2 \beta_2 \cos j_2} \right)^{1/2} \\ \dot{P}\dot{S} \left( \frac{\beta_1 \cos j_1}{\alpha_1 \cos i_1} \right)^{1/2} & \dot{S}\dot{S} & \dot{P}\dot{S} \left( \frac{\rho_1 \beta_1 \cos j_1}{\rho_2 \alpha_2 \cos i_2} \right)^{1/2} & \dot{S}\dot{S} \left( \frac{\rho_1 \beta_1 \cos j_1}{\rho_2 \beta_2 \cos j_2} \right)^{1/2} \\ \dot{P}\dot{P} \left( \frac{\rho_2 \alpha_2 \cos i_2}{\rho_1 \alpha_1 \cos i_1} \right)^{1/2} & \dot{S}\dot{P} \left( \frac{\rho_2 \alpha_2 \cos i_2}{\rho_1 \beta_1 \cos j_1} \right)^{1/2} & \dot{P}\dot{P} & \dot{S}\dot{P} \left( \frac{\alpha_2 \cos i_2}{\beta_2 \cos j_2} \right)^{1/2} \\ \dot{P}\dot{S} \left( \frac{\rho_2 \beta_2 \cos j_2}{\rho_1 \alpha_1 \cos i_1} \right)^{1/2} & \dot{S}\dot{S} \left( \frac{\rho_2 \beta_2 \cos j_2}{\rho_1 \beta_1 \cos j_1} \right)^{1/2} & \dot{P}\dot{S} \left( \frac{\beta_2 \cos j_2}{\alpha_2 \cos i_2} \right)^{1/2} & \dot{S}\dot{S} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

и

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^H = \mathbf{S}^{-1}. \quad (5.42)$$

(Здесь  $\mathbf{S}^H$  — матрица, комплексно-сопряженная с транспонированной матрицей  $\mathbf{S}$ .)

Когда 16 коэффициентов  $\hat{P}\hat{P}$ ,  $\hat{P}\hat{S}$  и т. д. найдены из (5.37) или (5.39), их можно контролировать, убедившись, что выполняется условие (5.42) для  $\mathbf{S}$ . Фактически при условии, что медленность достаточно мала, так что все углы  $i_1, j_1, i_2, j_2$  — вещественные, все элементы  $\mathbf{S}$ , определенные выше, тоже вещественны, так что матрица, транспонированная к  $\mathbf{S}$ , является также обратной  $\mathbf{S}$ . В конкретном примере для модели  $(\rho_1, \alpha_1, \beta_1, \rho_2, \alpha_2, \beta_2, p) = (3; 6; 3,5; 4; 7; 4,2; 0,1)$  находим, что

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0,1065 & -0,1766 & 0,9701 & -0,1277 \\ -0,1766 & -0,0807 & 0,1326 & 0,9720 \\ 0,9701 & 0,1326 & -0,0567 & 0,1950 \\ -0,1277 & 0,9720 & 0,1950 & 0,0309 \end{pmatrix}$$

и эта конкретная матрица действительно имеет свойства  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}$ .

Мы получили бы матрицу  $\mathbf{S}$  с комплексными элементами, если бы, образуя 16 коэффициентов, использовали как уровни отсчета  $z_1 < 0$  в верхнем полупространстве и  $z_2 > 0$  в нижнем полупространстве. Чтобы учесть сдвиг уровня отсчета по вертикали, пришлось бы ввести дополнительные фазовые сдвиги. В этом случае обратной к  $\mathbf{S}$  является матрица  $\mathbf{S}^H$ , комплексно-сопряженная с транспонированной матрицей  $\mathbf{S}$ . В заключение заметим, что если в диапазоне  $z_1 < z < z_2$  существует некая более сложная переходная зона (например, непрерывно изменяющаяся по упругим свойствам среда или пачка однородных слоев с различными упругими параметрами, находящаяся в жестком контакте), но области выше  $z_1$  и ниже  $z_2$  остаются однородными, то матрица рассеяния  $\mathbf{S}$  может быть определена для переходной зоны в целом и все еще является унитарной и эрмитовой. Эти свойства — следствие закона сохранения энергии, принципов взаимности и причинности.

### 5.2.6. ПОЛЕЗНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ—ПРЕЛОМЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ МЕЖДУ ДВУМЯ БЛИЗКИМИ ПО СВОЙСТВАМ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

Если два рассматриваемых полупространства сходны по свойствам, можно ожидать, что коэффициенты преломления будут большими для волны, сохраняющих тип колебаний (например,  $\hat{P}\hat{P}$ , где как падающая, так и преломленная волна — нисходящие волны  $P$ ), а все остальные коэффициенты рассеяния будут малыми. Это означает, что если имеются скачки плотности  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$  и скоростей  $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ,  $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$  и величины  $\Delta\rho/\rho$ ,  $\Delta\alpha/\alpha$  и  $\Delta\beta/\beta$  много меньше единицы (здесь  $\rho, \alpha, \beta$  — средние значения плотности и скоростей для двух полупространств), можно ожидать, что такие величины, как  $\hat{S}\hat{P}$  и  $\hat{P}\hat{S}$  будут малы, а коэффициенты преломления  $\hat{P}\hat{P}$  и  $\hat{S}\hat{S}$  будут близки к 1. Мы оценим сейчас эффект первого порядка малых скачков плотности и скорости в задаче о волнах  $P - SV$

на границе двух твердых полупространств, поскольку полученные приближенные формулы (5.44) часто оказываются исключительно точными. Они позволяют понять вклад, вносимый каждым из скачков  $\Delta\rho$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$ ; Чепмен [77] показал, что эти формулы важны при анализе волн в неоднородных средах.

Предположим, что все углы  $i_1, i_2, j_1, j_2$  вещественные и ни один из них не близок к  $90^\circ$ . Тогда из закона Снеллиуса, связывающего  $i_1$  и  $i_2, j_1$  и  $j_2$  следует, что

$$\Delta i = i_2 - i_1 = \operatorname{tg} i(\Delta\alpha/\alpha), \quad \Delta j = j_2 - j_1 = \operatorname{tg} j(\Delta\beta/\beta) \quad (5.43)$$

(с точностью до первого порядка скачков скорости). После разложения членов, определенных в (5.38), в ряд с точностью до первого порядка скачков  $\Delta\rho$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$ , подставим полученные выражения в (5.39) и найдем, что

$$\begin{aligned} \dot{P}\dot{P} &= \frac{1}{2}(1 - 4\beta^2 p^2) \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{1}{2 \cos^2 i} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4\beta^2 p^2 \frac{\Delta\beta}{\beta}, \\ \dot{P}\dot{S} &= \frac{-p\alpha}{2 \cos j} \left[ \left( 1 - 2\beta^2 p^2 + 2\beta^2 \frac{\cos i \cos j}{\alpha} \frac{\Delta\alpha}{\beta} \right) \frac{\Delta\rho}{\rho} \right. \\ &\quad \left. - \left( 4\beta^2 p^2 - 4\beta^2 \frac{\cos i \cos j}{\alpha} \frac{\Delta\beta}{\beta} \right) \frac{\Delta\beta}{\beta} \right], \\ \dot{P}\dot{P} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho} + \left( \frac{1}{2 \cos^2 i} - 1 \right) \frac{\Delta\alpha}{\alpha}, \\ \dot{P}\dot{S} &= \frac{p\alpha}{2 \cos j} \left[ \left( 1 - 2\beta^2 p^2 - 2\beta^2 \frac{\cos i \cos j}{\alpha} \frac{\Delta\alpha}{\beta} \right) \frac{\Delta\rho}{\rho} \right. \\ &\quad \left. - \left( 4\beta^2 p^2 + 4\beta^2 \frac{\cos i \cos j}{\alpha} \frac{\Delta\beta}{\beta} \right) \frac{\Delta\beta}{\beta} \right], \\ \dot{S}\dot{P} &= \frac{\cos j}{\alpha} \frac{\beta}{\cos i} \dot{P}\dot{S}, \\ \dot{S}\dot{S} &= -\frac{1}{2}(1 - 4\beta^2 p^2) \frac{\Delta\rho}{\rho} - \left( \frac{1}{2 \cos^2 j} - 4\beta^2 p^2 \right) \frac{\Delta\beta}{\beta}, \\ \dot{S}\dot{P} &= \frac{-\cos j}{\alpha} \frac{\beta}{\cos i} \dot{P}\dot{S}, \\ \dot{S}\dot{S} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho} + \left( \frac{1}{2 \cos^2 j} - 1 \right) \frac{\Delta\beta}{\beta}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Остающиеся восемь коэффициентов легко получить из восьми приведенных выше, просто изменив знаки в величинах  $\Delta\rho$ ,  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\beta$ .

Коэффициенты при  $\Delta\beta/\beta$  в (5.44) обычно больше, чем при  $\Delta\rho/\rho$  и  $\Delta\alpha/\alpha$ , что указывает на относительно большую роль флуктуаций скорости поперечных волн в рассеянии упругих колебаний. Приближенные формулы (5.44) перестают быть справедливыми, если углы  $i$  (или  $j$ ) близки к  $90^\circ$ , поскольку в этих условиях очень малый скачок в скоростях может приводить к большим изменениям  $i$  (или  $j$ ). Примеры использования приближений первого порядка (5.44) даны в работах Бортфельда [49] и Ричардса и Фрэйзира [271]. Чепмен [77] в своем подробном ис-

следовании волн, возбуждаемых точечным источником в средах, свойства которых зависят от глубины, показал, как справляться с особенностями в (5.44) при  $i = 90^\circ$  и  $j = 90^\circ$ .

### 5.2.7. ЧАСТОТНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН

До этого момента мы рассматривали только гармонические плоские волны частоты  $\omega$  (см. табл. 5.1 — 5.3), и поэтому коэффициенты отражения и преломления были найдены в частотной области. Однако в формулах для коэффициентов [например, (5.26), (5.32), (5.39)] не заметно никакой частотной зависимости. Мы намеренно говорим осторожно «не заметна», так как в разд. 5.3 мы обнаружим, что в полученных нами коэффициентах может существовать некоторая частотная зависимость (включая знаковозависимый фазовый сдвиг). Тем не менее коэффициенты действительно частотно-независимы до тех пор, пока углы падения всех волн (обозначавшиеся выше как  $i, j, i_1, j_1, i_2, j_2$ ) вещественны. В этом случае  $p^{-1}$  (горизонтальная фазовая скорость) выше скоростей распространения  $\alpha$  и  $\beta$  волн  $P$  и  $S$ . Все коэффициенты отражения и преломления при этом вещественны, и их независимость от частоты означает, что форма колебаний у волн, покидающих границу, и у падающей волны одна и та же (при разных амплитудах). Это очень специфическое свойство, и оно не выполняется, если граница или волны не плоские. Позднее мы рассмотрим одно важное явление, связанное с изменением формы отраженной или преломленной волны относительно падающей в случаях, когда фронт падающей волны криволинейный (гл. 6) или когда граница слегка криволинейна (гл. 9).

### 5.3. НЕОДНОРОДНЫЕ ВОЛНЫ, ФАЗОВЫЕ СДВИГИ И ГРАНИЧНЫЕ ВОЛНЫ

Для рассматриваемых до сих пор плоских волн подразумевалось, что направление распространения  $\mathbf{l}$  — вектор (параллельный медленности  $\mathbf{s}$ ), имеющий вещественные декартовы компоненты. В этом разделе мы рассмотрим следствия допущения, что компонента  $\mathbf{l}$  (или  $\mathbf{s}$ ) в направлении оси глубин мнимая. Окажется, что такие волны могут существовать и их амплитуда экспоненциально растет или затухает с глубиной. Они являются примерами *неоднородных волн* [формально определенных после соотношения (5.92)]; при изучении их свойств мы опять-таки будем использовать в качестве независимой переменной их горизонтальную медленность  $p$ .

Ранее мы нашли для волн  $P$ , что  $\mathbf{s} = (\alpha^{-1} \sin i, 0, \pm \alpha^{-1} \cos i) = (p, 0, \pm \sqrt{\alpha^{-2} - p^2})$ . Если  $z$ -компонента  $\mathbf{s}$  мнимая, то  $p > 1/\alpha$ . Это означает, что горизонтальная фазовая скорость  $p^{-1}$  меньше скорости распространения волны  $P$ . Величина, которую мы раньше называли  $\sin i$ , все еще вещественная, но теперь превышает единицу, так что угол  $i$  уже не является действительным. Если  $p$  еще больше, так что  $p > 1/\beta > 1/\alpha$ , то соответствующая  $S$ -волна тоже неоднородная, а ее медленность  $\mathbf{s}$  равна  $(p, 0, \pm \sqrt{\beta^{-2} - p^2})$ . Раньше, когда мы изучали гармонические плоские волны с фазовым множителем  $\exp[i\omega(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} - t)]$ , под-

разумевалось, что фактические изменения волны в пространстве и времени описываются вещественной частью этого фазового множителя, т.е.  $\cos[\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} - t]$ . Теперь же, при мнимом  $s_z$ , фактические изменения волны описываются множителем вида  $\exp(i\omega_s z) \cos \omega (px - t)$ , в котором вещественная величина  $\exp(i\omega_s z)$  характеризует экспоненциальный рост или убывание с глубиной в зависимости от того, является ли  $\omega_s z$  отрицательной или положительной мнимой величиной. Ранее мы нашли, что условие, при котором решение удовлетворяет волновому уравнению, сводится к  $s^2 = 1/c^2$ , где  $c = \alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  для волн  $P$  и  $c = \beta = \sqrt{\mu/\rho}$  для волн  $S$ . Это условие остается необходимым и для неоднородных волн, и, поскольку теперь  $p = s_x > 1/c$  и  $s^2 = s_x^2 + s_z^2 = 1/c^2$ , мы видим, что, как следствие волнового уравнения, при достаточно больших значениях горизонтальной медленности вертикальная медленность должна быть мнимой.

Как пример того, что в сейсмологии необходимо рассматривать неоднородные волны, рассмотрим опять задачу рис. 5.5, б о падении плоской волны  $SV$  на свободную поверхность. Мы получили формулы (5.30) и (5.31) для коэффициентов отражения  $\hat{S}\hat{P}$ ,  $\hat{S}\hat{S}$  и показали, как они зависят от  $p$  в диапазоне  $0 \leq p \leq 1/\alpha$  (рис. 5.6). Что происходит при  $1/\alpha < p$ ? Если  $p$  настолько велико, что  $1/\beta < p$ , то даже волна  $SV$  является неоднородной и неясно, что мы подразумеваем под «падающей волной». Но в диапазоне  $1/\alpha < p < 1/\beta$  волна  $SV$  имеет вещественный угол падения  $j = \arcsin(\beta p)$ . В этом диапазоне  $\cos j$  следует рассматривать как вещественный и положительный, а  $(\cos i)/\alpha = \sqrt{\alpha^{-2} - p^2}$  — как чисто мнимый. Поскольку из табл. 5.1 мы находим для  $\hat{S}\hat{P}$  смещение в  $P$ -волне вида

$$S(\sin i, 0, \cos i) \hat{S}\hat{P} \exp\left(i\omega \frac{\cos i}{\alpha} z\right) \exp\left[i\omega \left(\frac{\sin i}{\alpha} x - t\right)\right] \quad (5.45)$$

и не можем допустить экспоненциального роста волны  $P$  с глубиной, мы получаем

$$\frac{\cos i}{\alpha} = \pm i \sqrt{p^2 - \frac{1}{\alpha^2}} \quad \text{в зависимости от } \omega \geq 0. \quad (5.46)$$

Тогда для положительных частот мы имеем вместо (5.45)

$$S(\alpha p, 0, i\sqrt{\alpha^2 p^2 - 1}) \hat{S}\hat{P} \exp\left(-i\omega \sqrt{p^2 - \frac{1}{\alpha^2}} z\right) \exp[i\omega(px - t)]. \quad (5.47)$$

Вывод выражений для коэффициентов  $\hat{S}\hat{P}$ ,  $\hat{S}\hat{S}$  (5.28) — (5.31) не изменится, если мы будем интерпретировать  $\cos i$  как мнимую величину, определенную в (5.46); коэффициенты  $\hat{S}\hat{P}$  и  $\hat{S}\hat{S}$  не будут больше вещественными. Поэтому, когда мы берем вещественную часть от компонент вектора в (5.47) для получения физических смещений, мы находим, что в этом случае имеется фазовый сдвиг величины  $\phi$ , где  $\phi$  — фаза ( $\hat{S}\hat{P}$ ) для горизонтальной компоненты и  $\phi = \pi/2 + \text{фаза}(\hat{S}\hat{P})$  для вертикальной компоненты. При фиксированном  $p$  фазовый сдвиг один и тот же для всех положительных частот; легко показать, что для всех отрицательных частот сдвиг имеет ту же величину, но противоположный знак.

Хотя волна  $P$ , описываемая (5.47), неоднородная, отраженная волна  $S$  не затухает с глубиной. Из табл. 5.1 для вещественного значения  $\cos j$ , равного

$\sqrt{1 - \beta^2 p^2}$ , смещение в отраженной волне  $S$  выражается как

$$S(\sqrt{1 - \beta^2 p^2}, 0, -\beta p) \hat{S} \hat{S} \exp \left[ i\omega \left( px + \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - p^2} z - t \right) \right]. \quad (5.48)$$

#### ДОПОЛНЕНИЕ 5.5

##### *Фазовые сдвиги: задержка и опережение по фазе*

Фазовые сдвиги в бегущей волне возникают благодаря множеству механизмов. Так, в фазовом множителе  $\exp[i\omega(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} - t)]$  мы можем определить фазовый сдвиг, вызванный распространением волны, как  $\phi(\omega) = \omega \mathbf{s} \cdot \mathbf{x}$ . Такой сдвиг называют *фазовой задержкой*, поскольку он эквивалентен оцениванию основной временной зависимости  $\exp(-i\omega t)$  в момент времени, задержанный на  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{x}$ , т.е. как  $\exp[-i\omega(t - \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})]$ .

Другой пример фазового сдвига виден в уравнении (5.47), где вертикальная компонента движения *вниз* в неоднородной волне  $P$  имеет на  $\pi/2$  большую фазу, чем горизонтальная компонента в направлении распространения. Это тоже задержка фазы: максимальное смещение вниз задержано на время  $\pi/2\omega$  относительно максимального смещения на горизонтальной компоненте (в направлении распространения). Соответствующая временная задержка на четверть периода ведет к прямому (т.е. направленному по распространению при прохождении верхней точки траектории. — *Перев.*) движению частиц (см. задачу 5.4).

Напротив, фазовый сдвиг, происходящий в волне  $\hat{S}\hat{S}$ , образующейся при падении волны  $SV$  на свободную поверхность под углом  $j$ , большим  $\arcsin(\beta/\alpha)$ , является *фазовым опережением*. Если учесть, что  $\cos i$  имеет положительную мнимую часть, то из (5.31) можно видеть, что фаза  $\hat{S}\hat{S}$  отрицательна (см. также рис. 5.10), и это соответствует оцениванию  $\exp(-i\omega t)$  в более раннее время.

Общий вывод заключается в том, что фазовый сдвиг может зависеть от знака частоты [см. (5.46)] или правила знаков, принятого нами для преобразований Фурье, но термины «фазовая задержка» и «фазовое опережение» более фундаментальны и часто позволяют лучше понять физический смысл явлений, вызывающих фазовый сдвиг. Так, в разд. 5.5 мы рассмотрим фазовую задержку, вызванную затуханием, а в гл. 9 узнаем, что при касании объемной волной каустики происходит фазовое опережение.

#### ДОПОЛНЕНИЕ 5.6

##### *Преобразование Гильберта и частотно-независимое фазовое опережение*

Если все фурье-компоненты функции  $f = f(t)$  сдвинуть вперед по фазе на  $\pi/2$ , то соответствующая этому искажению фаз временная функция будет иметь вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp \left[ -i\omega \left( t + \frac{\pi}{2\omega} \right) \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp \left( -i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) \right) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (1)$$

где  $\operatorname{sgn}(\omega) = \pm 1$  в зависимости от  $\omega \gtrless 1$ . Подставляя в (1)  $f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau$ ,

получаем эквивалентную формулу

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin[\omega(\tau - t)] d\tau. \quad (2)$$

Описываемую (2) функцию Титчмарш [321] и Джеффрис и Свирлс [183] называют *функцией, присоединенной к  $f(t)$* . Интегрируя в (2) по  $\omega$ , приходим к выражению

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau; \quad (3)$$

из-за особенности в  $\tau = t$  интеграл понимается в смысле его главного значения, т.е. вклады от  $\tau$ , чуть меньших и чуть больших  $t$ , взаимно уничтожаются.

Выражение (3) — это одно из принятых определений преобразования Гильберта функции  $f(t)$ , которое мы обозначим символом  $\mathcal{H}[f(t)]$ . Его можно также интерпретировать как свертку (обозначаемую  $*$ ), и тогда окончательное выражение для сигнала с искажением будет

$$f(t) * (-1/\pi t). \quad (4)$$

Мы будем без особых оговорок ссылаться на любое из выражений (1) — (4) как на преобразование Гильберта от  $f(t)$ . На практике, когда нужно выполнить это преобразование численно, первоначальное выражение (1) наиболее удобно: одно преобразование Фурье дает  $f(\omega)$ ; фазовое опережение на  $\pi/2$  сводится к перестановке местами вещественной и мнимой частей  $f(\omega)$  (с переменной знака новой мнимой части). Затем обратное преобразование Фурье приводит к искомому  $\mathcal{H}[f(t)]$ .

Заметим, что

$$\mathcal{H}[f(t)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin[\omega(\tau - t)] d\tau,$$

где

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos[\omega(\tau - t)] d\tau.$$

Если подвергнуть преобразованию Гильберта пару функций  $f(t)$  и  $\mathcal{H}[f(t)]$ , в результате получим пару  $\mathcal{H}[\mathcal{H}[f(t)]]$  и  $-f(t)$ . Это обращение знака — просто результат двух сдвигов фазы вперед на  $\pi/2$ .

Аронс и Йенни [17] указали, что если функция  $f(t)$  испытывает фазовый сдвиг вперед на  $\varepsilon$ , результат можно представить как линейную комбинацию  $f(t)$  и ее преобразования Гильберта. Обширный класс сейсмологических примеров таких фазовых сдвигов включает все плоские волны, отраженные или преломленные под углами больше критических на таких границах, как свободная поверхность Земли, дно океана, граница между корой и мантией и между ядром и мантией. Чой и Ричардс [83] привели несколько примеров в сейсмограммах волн  $SH$  и  $SV$ . Коэффициенты линейной комбинации можно получить следующим путем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp[-i\varepsilon \operatorname{sgn}(\omega)] \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) [\cos \varepsilon - i \operatorname{sgn}(\omega) \sin \varepsilon] \exp(-i\omega t) d\omega = \cos \varepsilon f(t) + \sin \varepsilon \mathcal{H}[f(t)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Наиболее важное преобразование Гильберта — это преобразование от дельта-функции Дирака  $\delta(t)$ , равное  $(-1/\pi t)$ . Прямоугольная функция (равная 1 в интервале  $0 < t < T$  и нулю вне этого интервала) имеет преобразование Гильберта

$$(-1/\pi)(\ln|t| - \ln|t - T|).$$

При  $t \ll T$  прямоугольная функция приближается к функции Хевисайда  $H(t)$  и ее преобразование Гильберта приближается к  $(-1/\pi) \ln|t/T|$ .

Заметим, что амплитудные спектры Фурье преобразования Гильберта какой-либо функции и самой этой функции совпадают.

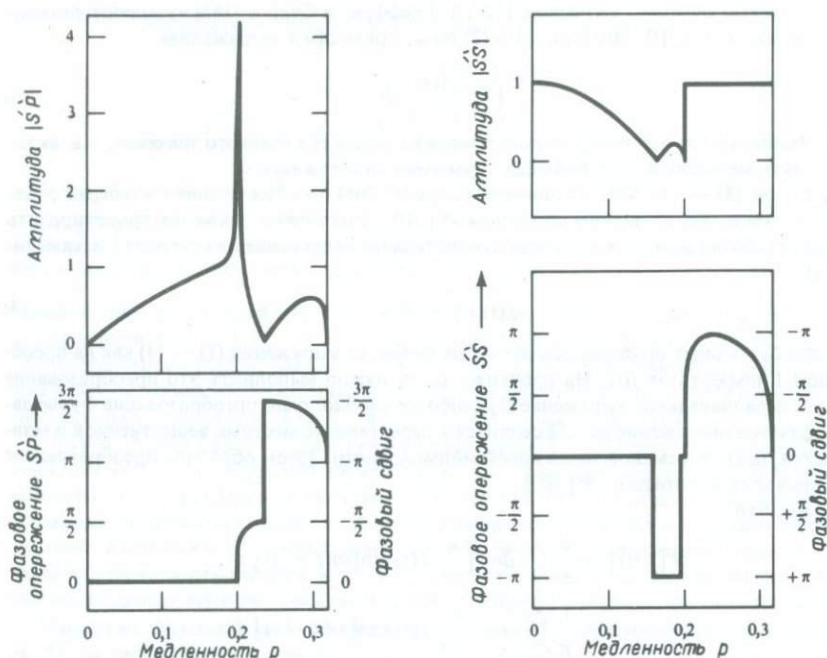


Рис. 5.10. Амплитуды и фазы двух коэффициентов отражения как функции горизонтальной медленности  $p$ . Приведены коэффициенты  $\hat{S}P$  и  $\hat{S}S$  для случая падения волны  $SV$  на свободную поверхность, и мы приняли  $\alpha = 5$  км/с,  $\beta = 3$  км/с, так что частично эти коэффициенты уже были показаны на рис. 5.6 в диапазоне  $0 \leq p \leq 1/\alpha$ . На этом рисунке диапазон  $p$  расширен до  $0 \leq p \leq 1/\beta$ , так что в интервале  $1/\alpha < p \leq 1/\beta$  существует неоднородная  $P$ -волна. Здесь показан не просто фазовый сдвиг, а фазовое опережение, поскольку оно не зависит от знака частоты и правила знаков, принятого для преобразований Фурье. Фактически показаны графики фаз  $\hat{S}P$  и  $\hat{S}S$ , определенных формулами (5.30) и (5.31). Заметим, что нули амплитуд соответствуют скачкам на  $\pi$  в фазе.

Из-за фазового сдвига в  $\hat{S}S$  утверждение о том, что форма отраженной  $S$ -волны совпадает с формой падающей, уже становится неверным. Как следует из аргументации в дополнении 5.6, форма отраженного импульса представляет собой линейную комбинацию формы падающего импульса и преобразования Гильберта от нее.

На рис. 5.10 показаны амплитуды и фазы коэффициентов  $\hat{S}P$  и  $\hat{S}S$  как функции  $p$  в интервале  $0 \leq p \leq 1/\beta$ .

Другим примером, демонстрирующим обязательное присутствие неоднородных волн, является отражение и преломление волн  $SH$  в соответствии с рис. 5.7 и уравнениями (5.32). Неоднородные волны будут существовать в верхней среде, если  $1/\beta_1 < p$ , и будут затухать с удалением от границы, при условии, что мы опять примем

$$\frac{\cos j_1}{\beta_1} = +i \sqrt{p^2 - \frac{1}{\beta_1^2}} \quad \text{при } \omega > 0, \quad (5.49)$$

так как  $\exp[-i\omega(\beta^{-1}\cos j)z] \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$ , если  $1/\beta < p$ . Явление *полного внутреннего отражения* может возникнуть, если скорость  $\beta_2$  в нижней среде меньше, чем в верхней, и волна  $SH$  падает на границу снизу. Для медленностей, заключенных в интервале  $1/\beta_1 < p < 1/\beta_2$ , падающая волна — это обычная бегущая плоская волна, и рассеянные волны еще правильно описываются табл. 5.2 и формулами (5.32) при условии, что  $\cos j_1$  понимается, как в (5.49). В частности,  $|\mathcal{S}\mathcal{S}| = 1$ , но имеется фазовый сдвиг при отражении (анализ потока энергии для этой задачи см. в [173]). Поскольку поведение волн для  $p$ , лежащих в интервале  $0 \leq p < 1/\beta_1$ , совершенно иное, естественно называть  $p = 1/\beta_1$  *критическим значением*, а  $j_2 = \arcsin(\beta_2/\beta_1)$  — *критическим углом падения*. Волну, у которой все компоненты медленности вещественны, мы будем называть *однородной волной*; таким образом, в примере с волнами преломленная волна является однородной или неоднородной в зависимости от того, принимает ли  $p$  значения, меньшие или большие критического.

Как правило, *все* коэффициенты отражения — преломления, связанные с конкретной границей, становятся комплексными, если *по крайней мере одна* из волн, возбуждаемых на границе падающей волной, неоднородная. До сих пор мы рассматривали примеры, когда падающая волна была однородной, и в таких случаях по меньшей мере одна из рассеянных волн также должна была быть однородной волной. Общая картина пока еще все та же: энергия распространяется по направлению к границе, взаимодействует с другим полупространством и, наконец, распространяется от границы.

Следующий случай, который мы должны рассмотреть, — это ситуация, когда *все* плоские волны, взаимодействующие с границей, неоднородные. Так для неоднородных плоских волн  $P$  и  $SV$  на свободной границе полупространства (см. рис. 5.5, табл. 5.1) мы рассмотрим медленности в диапазоне  $1/\alpha < 1/\beta < p$ . В этом случае общая картина существенно отличается от рассмотренных до сих пор, так как теперь энергия не распространяется по направлению к границе и не рассеивается на ней. Скорее она перемещается только вдоль самой границы как бы в канале. В полупространстве волны неограниченной амплитуды недопустимы, так что единственный разрешенный тип волн — экспоненциально затухающие с удалением от поверхности:

$$(\alpha p, 0, i\sqrt{\alpha^2 p^2 - 1}) \exp\left(-\omega \sqrt{p^2 - \frac{1}{\alpha^2}} z\right) \exp[i\omega(px - t)] \quad (5.50)$$

для неоднородной волны  $P$  (первый множитель — вектор единичной длины) и

$$(i\sqrt{\beta^2 p^2 - 1}, 0, -\beta p) \exp\left(-\omega \sqrt{p^2 - \frac{1}{\beta^2}} z\right) \exp[i\omega(px - t)] \quad (5.51)$$

для неоднородной волны  $SV$  (здесь также впереди — единичный вектор). Эти две волны связаны граничными условиями ( $\tau_{zx} = \tau_{zz} = 0$  при  $z = 0$ ), и, как мы уже нашли для однородных волн, отношение амплитуд волн определяется этими условиями. Различие заключается в том, что мы не идентифицируем конкретную падающую волну в связанной системе, и поэтому нам нужно определять на одно отношение амплитуд меньше без уменьшения числа граничных условий. Если присутствуют волны (5.50) и (5.51) в пропорциях, выражаемых соот-

ветственно  $\dot{P}$  и  $\dot{S}$ , то

$$2p\alpha\beta i\sqrt{p^2 - 1/\alpha^2}\dot{P} + (1 - 2\beta^2 p^2)\dot{S} = 0 \quad (\text{из } \tau_{zx} = 0 \text{ на } z = 0) \quad (5.52)$$

и

$$(1 - 2\beta^2 p^2)\dot{P} - 2(\beta^3 p/\alpha)i\sqrt{p^2 - 1/\beta^2}\dot{S} = 0 \quad (\text{из } \tau_{zz} = 0 \text{ на } z = 0). \quad (5.53)$$

Поскольку это два уравнения для одного и того же отношения амплитуд ( $\dot{S}/\dot{P}$ ), определитель коэффициентов системы должен обращаться в нуль и  $p$  должно удовлетворять уравнению  $\mathbf{R}(p) = 0$ , где

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(p) &\equiv \left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)^2 - 4p^2\left(p^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}\left(p^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2\frac{\cos i \cos j}{\alpha \beta}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Эта функция  $p^2$  имеет только один корень (для положительных мнимых «косинусов»), и он будет вещественным и положительным. Соответствующее положительное значение  $p$  несколько (на 4 — 14%) больше, чем  $1/\beta$  для всех упругих тел, и поэтому такая пара связанных неоднородных волн  $P$  и  $SV$  действительно способна распространяться вдоль поверхности полупространства. Эту поверхностную волну назвали волной Рэлея, по имени ученого, первым описавшего ее свойства в 1886 г. [263], а определенная в (5.54) функция  $\mathbf{R}(p)$  называется *функцией Рэлея*. Заметим, что функция Рэлея — это точно знаменатель формул для коэффициентов плоских волн, приведенных в (5.26), (5.27), (5.30) и (5.31). Волны Рэлея постоянно наблюдаются в сейсмологии; как поверхностная волна в однородном полупространстве, она обладает следующими важнейшими свойствами:

- 1) ее скорость распространения  $c_R$ , удовлетворяющая уравнению  $\mathbf{R}(1/c_R) = 0$ , несколькими процентами меньше скорости поперечных волн;
- 2)  $c_R$  не зависит от частоты и, следовательно, не испытывают дисперсии (физически это свойство обязано отсутствию в однородном полупространстве характерного масштаба длины; в гл. 7 мы узнаем, что в среде, свойства которой зависят от глубины, поверхностные волны непременно диспергируют);
- 3) частицы движутся по эллиптическим траекториям (рис. 5.11); на поверхности их движение возвратное (этот результат, полученный в задачах в конце главы, примечателен, поскольку для каждой из неоднородных волн  $P$  и  $SV$ , образующих волну Рэлея, движение частиц происходит по эллипсам в прямом направлении);
- 4) ниже определенной глубины, зависящей от частоты, в движении частиц волны Рэлея доминирует компонента  $SV$ , и оно становится прямым эллиптическим.

Если приведенная выше теория волн Рэлея полностью освоена, ее обобщение на граничные ( $P - SV$ ) волны для двух однородных полупространств не составляет труда. Граничная волна образуется неоднородными волнами, затухающими вверх от границы в верхней среде и вниз от границы в нижней среде, так что движение частиц практически ограничено областью вблизи границы. В рамках «рассеянных» волн, перечисленных в табл. 5.3, мы приходим к следующей интерпретации (для положительных частот):

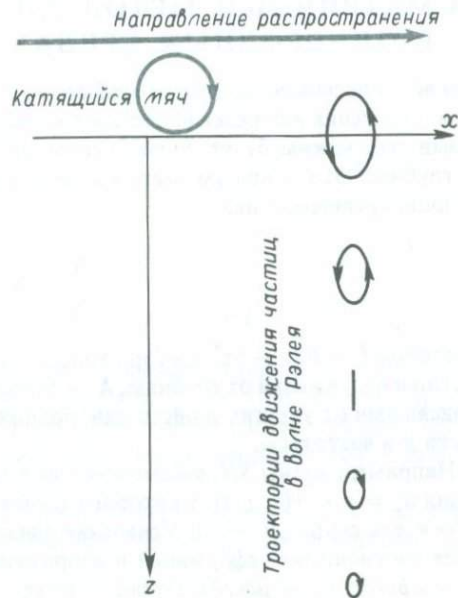


Рис. 5.11. Направления движения частиц в волне Рэлея в зависимости от глубины. Правило для различия прямого и возвратного движений, вероятно, лучше всего запомнить из аналогии с мячом, катящимся по поверхности полупространства от источника к приемнику. Направление вращения мяча прямое; таково же направление движения в неоднородных волнах  $P$  и  $SV$ , а также в волнах Рэлея на достаточной глубине. На поверхности же движение частиц в волне Рэлея возвратное.

$$\begin{aligned} \frac{\cos i_1}{\alpha_1} &\rightarrow +i \sqrt{p^2 - \frac{1}{\alpha_1^2}}; \quad \frac{\cos j_1}{\beta_1} \rightarrow +i \sqrt{p^2 - \frac{1}{\beta_1^2}}, \\ \frac{\cos i_2}{\alpha_2} &\rightarrow +i \sqrt{p^2 - \frac{1}{\alpha_2^2}}; \quad \frac{\cos j_2}{\beta_2} \rightarrow +i \sqrt{p^2 - \frac{1}{\beta_2^2}} \end{aligned} \quad (5.55)$$

[ср. с (5.49) и (5.46)], и возможные значения горизонтальной медленности  $p$  определяются из условия  $\mathbf{D}(p) = 0$ , где  $\mathbf{D}$  определено в (5.38). Мы, конечно, интересуемся только действительными корнями, для которых  $p$  больше, чем наибольшее из значений  $(1/\alpha_1, 1/\beta_1, 1/\alpha_2, 1/\beta_2)$ , так что все «косинусы» в (5.55) чисто мнимые. Схольте показал [291], что уравнение  $\mathbf{D}(p) = 0$  всегда имеет четыре корня (т.е. два значения  $p^2$  и четыре корня для  $p$ ), но они действительны и достаточно велики, только если значения отношений  $\rho_1/\rho_2$  и  $\beta_1/\beta_2$  находятся в определенных диапазонах. Эти волны были названы волнами Стонли — по имени ученого, открывшего их основные свойства в 1924 г. [313]. Волны Стонли всегда могут существовать в частном случае границы между жидкостью и твердым телом. Заметим, что, поскольку в формуле для  $\mathbf{D}$  не фигурирует частота, волны Стонли, так же, как и волны Рэлея, не диспергируют (в случае однородных полупространств).

В этом разделе мы сознательно подчеркивали различия между однородными и неоднородными волнами, хотя мы и унифицировали теорию, анализируя эти волны в функции их горизонтальной медленности. Позднее мы будем называть волны обоих этих типов «плоскими волнами» и узнаем, что для синтеза волнового поля, вызванного локализованным источником, требуются волны обоих типов.

## 5.4. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЛОСКИХ ВОЛН В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Для всех плоских волн, рассмотренных в разд. 5.3, можно так объединить уравнения движения и определяющее соотношение между напряжениями и деформациями, что нужны будут только первые производные смещений и напряжений по глубине. Это подразумевает, что свойства плоских волн можно изучать при помощи уравнения типа

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = \mathbf{A} \mathbf{f}, \quad (5.56)$$

в котором  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(z)$  — это вектор-столбец, описывающий зависимость смещений частиц и напряжений от глубины,  $\mathbf{A}$  — это матрица с постоянными элементами, зависящими от упругих свойств однородной среды, от горизонтальной медленности  $p$  и частоты  $\omega$ .

Например, волны  $SH$ , рассмотренные в табл. 5.2, — результат анализа смещения  $u_y = v = v(x, z, t)$ , у которого зависимость от  $(x, t)$  входит только через множитель  $\exp[i\omega(px - t)]$ . Уравнение движения  $\rho \ddot{v} = \tau_{yz,z} + \tau_{yx,x}$  и определяющее соотношение деформаций и напряжений (2.18) приобретает простой вид  $\tau_{yz} = \mu \partial v / \partial z$ ,  $\tau_{yx} = \mu \partial v / \partial x$ . Отсюда следует, что задачи о волнах  $SH$  можно рассматривать при помощи вектора  $\mathbf{f}$ , определяемого как

$$\mathbf{f}(z) \exp[i\omega(px - t)] = \begin{pmatrix} v \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

и зависимость  $\mathbf{f}$  от глубины находится решением уравнения вида (5.56) с матрицей коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ \omega^2(\mu p^2 - \rho) & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.58)$$

Для акустических волн (см. дополнение 5.4) с давлением  $P$  и вертикальным смещением частиц  $u_z$  имеем

$$\mathbf{f}(z) \exp[i\omega(px - t)] = \begin{pmatrix} u_z \\ P \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p^2}{\rho} - \frac{1}{\rho \alpha^2} \\ \rho \omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

Для волн  $P - SV$  принимаем

$$\mathbf{f}(z) \exp[i\omega(px - t)] = \begin{pmatrix} u_x \\ u_z \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\text{и} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -i\omega\rho & \frac{1}{\mu} & 0 \\ \frac{-i\omega\rho\lambda}{\lambda + 2\mu} & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda + 2\mu} \\ \frac{4\omega^2 p^2 \mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} - \rho\omega^2 & 0 & 0 & \frac{-i\omega\rho\lambda}{\lambda + 2\mu} \\ 0 & -\rho\omega^2 & -i\dot{\omega}\rho & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

О решениях системы дифференциальных уравнений первого порядка типа  $\partial \mathbf{f} / \partial z = \mathbf{A} \mathbf{f}$  известно очень много (см., например, [85]), и мы будем широко пользоваться этой теорией в гл. 7 — 9 при рассмотрении распространения волн в неоднородных средах. Однако здесь мы ограничимся однородными средами, в которых  $\mathbf{A}$  независимо от  $z$ .

Первое важное свойство решений в этом случае состоит в том, что если  $\mathbf{v}^\alpha$  — собственный вектор  $\mathbf{A}$ , а  $\lambda^\alpha$  — связанное с ним собственное значение, решение (5.56) имеет вид

$$\mathbf{f} = \mathbf{v}^\alpha \exp[\lambda^\alpha(z - z_{\text{отс}})] \quad (5.61)$$

(суммирование по верхнему индексу  $\alpha$  не проводится), где  $z_{\text{отс}}$  — уровень, от которого отсчитывается фаза.

Пусть теперь  $\mathbf{F}$  — матрица, в которой столбцы — различные решения типа (5.61). Тогда, если  $\mathbf{A}$  — матрица размерами  $n \times n$ , мы можем найти  $n$  собственных значений и  $n$  линейно-независимых собственных векторов ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ), так что  $\mathbf{F}$  тоже будет матрицей  $n \times n$  с  $\alpha$ -столбцом вида  $\mathbf{v}^\alpha \exp[\lambda^\alpha(z - z_{\text{отс}})]$ . Отсюда общее решение  $\mathbf{f}$  уравнения  $\partial \mathbf{f} / \partial z = \mathbf{A} \mathbf{f}$  — это некоторая линейная комбинация векторов  $\mathbf{F}$ , т.е.

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} \mathbf{w}, \quad (5.62)$$

где  $\mathbf{w}$  — вектор констант, являющихся весами столбцов  $\mathbf{F}$ , образующих решение  $\mathbf{f}$ .

Анализ плоских волн при помощи таких собственных значений и собственных векторов может быть весьма эффективным благодаря физическому смыслу, заложенному в (5.61) и (5.62). Рассмотрим случай волн  $SH$ , для которого  $\partial \mathbf{f} / \partial z = \mathbf{A} \mathbf{f}$ , где  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{A}$  определены в (5.57) и (5.58). Два собственных значения  $\mathbf{A}$  — это  $\pm i\omega\sqrt{\beta^{-2} - p^2} = \pm i\omega\beta^{-1}\cos j$ , в точности равные вертикальным волновым числам для нисходящих и восходящих волн  $SH$ , умноженным на  $i$ . Величина  $\beta^{-1}\cos j$  представляет собой вертикальную медленность для  $S$ -волн, и мы введем обозначение

$$\eta = \frac{\cos j}{\beta} = \left( \frac{1}{\beta^2} - p^2 \right)^{1/2}.$$

Собственным значениям  $\pm i\omega\eta$  отвечают собственные векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\omega\mu\eta \end{pmatrix}.$$

Следовательно, согласно (5.61), фундаментальные решения для смещений в  $SH$ -волне имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega\mu\eta \end{pmatrix} \exp[i\omega\eta(z - z_{\text{отс}})]$$

либо

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega\mu\eta \end{pmatrix} \exp[-i\omega\eta(z - z_{\text{отс}})].$$

Очевидно, что первое описывает смещения частиц и скалывающие напряжения в нисходящей волне  $SH$ , а второе — то же самое в восходящей волне. Наиболее общий тип плоской волны  $SH$  описывается линейной комбинацией двух приведенных выше решений; поэтому вектор  $\mathbf{w}$  [появившийся в (5.62)] можно интерпретировать следующим образом: его первая компонента указывает долю нисходящей волны, а вторая — долю восходящей волны в полной волновой системе  $\mathbf{f}$ .

Заметим, что матрицу  $\mathbf{F}$  можно выразить в явном виде как

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega\mu\eta & -i\omega\mu\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp[i\omega\eta(z - z_{\text{ref}})] & 0 \\ 0 & \exp[-i\omega\eta(z - z_{\text{отс}})] \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

$$= \mathbf{E}\Lambda;$$

сама  $\mathbf{F}$  представлена как произведение матрицы  $\mathbf{E}$ , составленной из собственных векторов  $\mathbf{A}$ , и диагональной матрицы  $\Lambda$ , содержащей вертикальные фазовые множители, отнесенные к уровню  $z_{\text{отс}}$ .  $\mathbf{F}$  называют *матрицей решений*, или *матрицей слоя* (что соответствует смыслу задач, в которых она чаще всего используется в сейсмологии). Матрица, обратная  $\mathbf{F}$ , для волн  $SH$  имеет вид

$$\mathbf{F}^{-1} = \Lambda^{-1}\mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix} \exp[-i\omega\eta(z - z_{\text{ref}})] & 0 \\ 0 & \exp[i\omega\eta(z - z_{\text{отс}})] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -i \\ \frac{1}{2} & i \end{pmatrix} \frac{1}{2\omega\mu\eta}. \quad (5.64)$$

Для волн  $P-SV$  собственные значения  $\mathbf{A}$  равны  $\pm i\omega\xi$  (где  $\xi = \alpha^{-1}\cos i$  — вертикальная медленность для волн  $P$ ) и  $\pm i\omega\eta$ . Общее решение  $\partial\mathbf{f}/\partial z = \mathbf{A}\mathbf{f}$ , где  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{A}$  определены в (5.60), опять-таки будет  $\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{w}$ , причем  $\mathbf{F}$  можно представить в виде  $\mathbf{E}\Lambda$ , где

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \alpha p & \beta\eta & \alpha p & \beta\eta \\ \alpha\xi & -\beta p & -\alpha\xi & \beta p \\ 2i\omega\rho\alpha\beta^2 p\xi & i\omega\rho\beta(1 - 2\beta^2 p^2) & -2i\omega\rho\alpha\beta^2 p\xi & -i\omega\rho\beta(1 - 2\beta^2 p^2) \\ i\omega\rho\alpha(1 - 2\beta^2 p^2) & -2i\omega\rho\beta^3 p\eta & i\omega\rho\alpha(1 - 2\beta^2 p^2) & -2i\omega\rho\beta^3 p\eta \end{pmatrix}, \quad (5.65)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \exp[i\omega\xi(z - z_{ref})] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp[i\omega\eta(z - z_{ref})] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp[-i\omega\xi(z - z_{ref})] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp[-i\omega\eta(z - z_{ref})] \end{pmatrix}$$

Заметим, что компоненты  $\mathbf{f}$  — это те физические величины, которые остаются непрерывными при пересечении жестких контактов. Так, в задачах о волнах  $P - SV$  величины  $u_x, u_z, \tau_{zx}, \tau_{zz}$ , как мы видели, непрерывны на горизонтальной границе (например,  $z = 0$ ) между двумя различными полупространствами. Отсюда из (5.60) следует, что  $\mathbf{f}$  непрерывно, хотя  $\mathbf{A}$  не является непрерывным.

Излагаемый здесь матричный метод играет большую роль при изучении распространения плоских волн в пачке однородных слоев. В качестве простейшего примера мы приведем вывод формул (5.32), определяющих все коэффициенты отражения — преломления на границе между двумя полупространствами.

В верхней среде ( $z < 0$ , см. рис. 5.7) имеем  $\mathbf{f} = \mathbf{F}_1(z)\mathbf{w}_1$ , где  $\mathbf{F}_1$  определяется (5.63) со значениями  $\rho, \beta, j$ , соответствующими верхней среде, а  $\mathbf{w}_1$  — вектор, определяющий доли восходящих и нисходящих волн в верхней среде. Аналогичным образом в нижней среде ( $z > 0$ ),  $\mathbf{f} = \mathbf{F}_2(z)\mathbf{w}_2$ . Поскольку  $\mathbf{f}$  непрерывно на границе  $z = 0$ , отсюда следует, что

$$\mathbf{F}_1(0)\mathbf{w}_1 = \mathbf{F}_2(0)\mathbf{w}_2, \quad (5.66)$$

что дает общее соотношение между системами восходящих и нисходящих волн в двух средах при произвольном характере этих систем.

Чтобы найти  $\hat{S}\hat{S}$  и т.д., применим (5.66) к двум случаям, показанным на рис. 5.7. Тогда для волны  $SH$ , падающей сверху

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{S}\hat{S} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \hat{S}\hat{S} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подстановка в (5.66) дает систему двух скалярных уравнений с двумя неизвестными  $\hat{S}\hat{S}$  и  $\hat{S}\hat{S}$ . Для волны  $SH$ , падающей снизу, имеем

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{S}\hat{S} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \hat{S}\hat{S} \\ 1 \end{pmatrix},$$

и опять подстановкой в (5.66) получаем систему из двух уравнений для  $\hat{S}\hat{S}$  и  $\hat{S}\hat{S}$ .

На практике часто целесообразно нормировать собственные векторы  $\mathbf{v}^\alpha$  так, чтобы соответствующее смещение имело единичную амплитуду. Мы делали это раньше при рассмотрении как волн  $SH$ , так и  $P - SV$ . Как мы узнаем в гл. 7 и 9, основная причина, по которой матричный метод столь привлекателен с вычислительной точки зрения, заключается в том, что матрице  $\mathbf{F}(z)$  соответствует обратная матрица  $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}^{-1}$ , выражаемая в замкнутой форме. Действитель-

но, для волн  $P - SV$  матрица  $\mathbf{E}$  из (5.65) имеет обратную матрицу

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta^2 p}{\alpha} & \frac{1 - 2\beta^2 p^2}{2\alpha\xi} & \frac{-ip}{2\omega\rho\alpha\xi} & \frac{-i}{2\omega\rho\alpha} \\ \frac{1 - 2\beta^2 p^2}{2\beta\eta} & -\beta p & \frac{-i}{2\omega\rho\beta} & \frac{ip}{2\omega\rho\beta\eta} \\ \frac{\beta^2 p}{\alpha} & \frac{-(1 - 2\beta^2 p^2)}{2\alpha\xi} & \frac{ip}{2\omega\rho\alpha\xi} & \frac{-i}{2\omega\rho\alpha} \\ \frac{1 - 2\beta^2 p^2}{2\beta\eta} & \beta p & \frac{i}{2\omega\rho\beta} & \frac{ip}{2\omega\rho\beta\eta} \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

## 5.5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ: ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛОСКИХ ВОЛН

До сих пор мы рассматривали адиабатический процесс распространения волн, при котором волновое движение, возбужденное каким-либо конкретным источником, может продолжаться сколь угодно долго. При этом колебания могут становиться слабее с удалением от локализованной области источника, но полная энергия движения частиц (т.е. объемный интеграл от кинетической и упругой энергии) остается постоянной (см. разд. 2.2). В противоположность такому идеализированному представлению, как показывает опыт, при распространении

### ДОПОЛНЕНИЕ 5.7

#### *Различные определения $Q$*

Если некоторый объем вещества подвергается действию циклических напряжений с частотой  $\omega$ , безразмерная характеристика внутреннего трения (степень неупругости) определяется как

$$\frac{1}{Q(\omega)} = -\frac{\Delta E}{2\pi E}, \quad (1)$$

где  $E$  — пиковое значение упругой энергии, запасенной в этом объеме, а  $-\Delta E$  — энергия, потерянная в каждом цикле вследствие неидеальной упругости материала.

Приведенное определение редко используется непосредственно в таком виде, так как подвергать элемент материала воздействию волн напряжений постоянной амплитуды и периода возможно только в специальных экспериментах. Чаще наблюдают либо а) затухание во времени амплитуды стоячей волны с постоянным волновым числом, либо б) затухание в пространстве бегущей волны постоянной частоты. Для сейсмологии наиболее типична ситуация, в которой происходит затухание сигнала, образованного набором частот некоторого диапазона, и мы будем делать сильное предположение (которое в даль-

нейшем следует проверить), что затухание — линейное явление. Под этим подразумевается, что волну можно описать с помощью компонент Фурье, каждую из которых можно проанализировать способами «а» или «б», а последующий синтез Фурье приведет к правильному описанию затухания реального сигнала.

В обоих упомянутых способах для среды с линейным соотношением между напряжением и деформацией амплитуда волны  $A$  пропорциональна  $E^{1/2}$ . (Например,  $A$  может характеризовать максимальную скорость частиц или компоненту напряжения в волне. Мы предполагаем также, что  $Q \geq 1$ , и поэтому следующие друг за другом пики колебания содержат почти одну и ту же упругую энергию.) Тогда

$$\frac{1}{Q(\omega)} = -\frac{1}{\pi} \frac{\Delta A}{A}, \quad (2)$$

откуда мы можем найти флуктуации амплитуд, вызванные затуханием.

Таким образом, в случае способа «а» мы спрашиваем: «Чему будет равно  $A = A(t)$ , если первоначально  $A = A_0$  и  $A$  уменьшается на  $\pi/Q$  часть в последовательные моменты времени  $2\pi/\omega, 4\pi/\omega, \dots, 2n\pi/\omega \dots$ ? Очевидно, что

$$A(t) = A_0(1 - \pi/Q)^n \quad (\text{при } t = 2n\pi/\omega).$$

Поэтому

$$A(t) = A_0 \left[ 1 - \frac{\omega t}{2Qn} \right]^n \rightarrow A_0 \exp \left[ -\frac{\omega t}{2Q} \right] \quad (\text{при больших } n, \text{ т.е. для больших времен}). \quad (3)$$

Наблюдая экспоненциально затухающие амплитуды  $A(t)$ , мы используем (3) для определения значения *временного*  $Q$ . Именно оно используется при описании затухания собственных колебаний Земли (см. гл. 8).

Нам пришлось выводить результат (3), используя дискретные времена, поскольку такова природа эксперимента в случае «а». В случае «б» вывод формулы вида  $A = A(x)$  для расстояния  $x$  легче, так как конкретный экстремум волны можно проследить на некотором интервале расстояний  $dx$  и наблюдать постепенное пространственное затухание величины  $A$ . (Мы предполагаем здесь, что направление максимального затухания совпадает с осью  $x$ , вдоль которой происходит и распространение волны.) Тогда  $\Delta A = (dA/dx)\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны, выражаемая через частоту  $\omega$  и фазовую скорость  $c$  как  $\lambda = 2\pi c/\omega$ . Уравнение (2) принимает вид  $dA/dx = -(\omega/2cQ)A$  и имеет экспоненциально затухающее решение

$$A(x) = A_0 \exp \left[ -\frac{\omega x}{2cQ} \right]. \quad (4)$$

Наблюдая экспоненциально затухающие значения  $A(x)$ , мы используем (4) для оценки величины *пространственного*  $Q$ . Конечно, любое затухание, вызванное эффектами геометрического расхождения, также необходимо учесть. В разд. 5.5 мы обходим эту проблему, рассматривая только плоские волны, распространяющиеся в однородных средах. В таких простых ситуациях не возникает также проблемы учета «геометрической» дисперсии, которая обусловлена неоднородностью материала и порождает различия между  $Q$ , найденным при помощи (3) и при помощи (4). Эти дополнительные эффекты дисперсии (существующие даже в идеально упругих средах) исследуются в гл. 7 в связи с поверхностными волнами.

Заметим, что для того, чтобы оценить затухание волновых решений вида  $\exp[i(kx - \omega t)]$ , можно интерпретировать эксперимент по измерению *временного*  $Q$  как замену  $\omega$  комплексной частотой, а эксперимент по измерению *пространственного*  $Q$  — как замену  $k$  комплексным волновым числом. В первом случае  $\omega$  приобретает мнимую часть  $-i|\omega|/2Q^{\text{врем}}$ , во втором случае  $k$  приобретает мнимую часть  $ik/2Q^{\text{прост}}$ .

волн через реальные вещества амплитуда их убывает вследствие множества процессов, которые мы можем феноменологически описать как «внутреннее трение».

Приведем лишь два примера: деформации и напряжения, происходящие в распространяющейся волне, могут приводить к необратимым изменениям в кристаллической структуре вещества, содержащей дефекты, и, если связь между соседними зернами материала неупругая, на границах зерен может выполняться работа. Такие среды называют *неидеально упругими*, поскольку конфигурация частиц вещества в какой-то мере зависит от характера изменения со временем приложенных напряжений. Суммарный эффект внутреннего трения характеризуется безразмерной величиной  $Q$ , для которой (в случае слабо неупругих тел) существуют различные определения (дополнение 5.7)

Общая проблема затухания волн вследствие внутреннего трения (иногда называемого собственным поглощением в материале) весьма обширна, как можно видеть из рассмотрения трех ее различных аспектов.

1) В рамках исследований по физике вещества ведется изучение фундаментальных (микроскопических) процессов, вызывающих затухание. Обзор эффектов, порождаемых различными дефектами кристаллов, процессами на границах зерен и некоторыми термоупругими процессами, дан в работах [174, 226, 240].

2) Частотная зависимость  $Q$  как макроскопическое явление исследована для множества материалов. Наблюдения ее в сейсмических волнах [16, 300, 301] позволяют наложить ограничения на возможный состав вещества в недрах Земли. Соломон [300, 301] использовал этот метод для количественной характеристики частичного плавления в верхней мантии.

3) Многими авторами предложены феноменологические соотношения между напряжениями и деформациями, призванные заменить закон Гука, и вытекающие из них (и из  $\rho \ddot{u}_i = \tau_{ij,j}$ ) уравнения движения для материалов с некоторыми конкретными зависимостями  $Q = Q(\omega)$ . Весьма важно при этом использовать ограничения, обусловленные принципом причинности и приводящие к дисперсии в поглощающей среде. Ключевыми работами по этой проблеме являются [18, 127, 181, 212, 214]. Обзоры Кнюпова [199] и Стейси и др. ([306] с поправкой Сэвиджа [288]) показывают, что в нашем понимании процесса затухания и его влияния на форму импульса в распространяющейся волне имеются еще значительные пробелы. В частности, еще точно не известна доля собственной дисперсии, испытываемой сейсмическими волнами, и не имеется прямых подтверждений закона линейной суперпозиции (введенного в дополнении 5.7).

В оставшейся части этой главы будут рассмотрены некоторые вопросы, упомянутые в п. 3, поскольку наблюдаемая в сейсмологии форма сигналов явно испытывает влияние внутреннего трения. Главный результат, к которому мы придем, выглядит следующим образом: если  $Q$  практически постоянно в широком диапазоне частот, наблюдаемых в сейсмологии (0,001 — 100 Гц), то распространение волн в поглощающей Земле можно изучать, рассматривая скорость объемных волн ( $\alpha$  или  $\beta$ , которые мы до сих пор считали вещественными и частотно-независимыми) как комплексную и частотно-зависимую величину, определяемую в (5.88). Но если  $Q$  изменяется с частотой в сейсмическом диапазоне более чем на несколько процентов, формула (5.88) может быть неадекватной явлению.

### 5.5.1. НЕИЗБЕЖНОСТЬ СОБСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Рассмотрим плоскую волну  $\delta(t - x/c)$ , распространяющуюся со скоростью  $c$  вдоль положительного направления  $x$  в идеально упругой однородной среде. Как мы показали ранее в этой главе, такая волна идеально сохраняет свою форму, и все частотные компоненты перемещаются когерентно с одной и той же скоростью  $c$ .

Теперь рассмотрим такую волну как входной сигнал при  $x = 0$  для поглощающей среды. Кнопов [199] обобщил экспериментальные измерения затухания и сделал вывод о том, что  $Q(\omega) \sim \omega^{-1}$  для многих жидкостей, но что  $Q$  приблизительно постоянно в частотном диапазоне наблюдений в твердых телах. Именно среды такого типа, характеризующиеся частотно-независимыми  $Q$ , наиболее интересны для сейсмологии.

Каждая компонента Фурье импульса

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - x/c) e^{i\omega t} dt = \exp[i\omega x/c]$$

будет теперь ослабляться множителем  $\exp[-\alpha(\omega)x]$ , и из уравнения (4) дополнения 5.7 мы находим, что коэффициент затухания равен  $\alpha = \omega/2cQ$ .

Какова будет форма импульса  $p(x, t)$  затухающей волны на расстоянии  $x$ ? При первой попытке ответить на этот вопрос предположим, что дисперсия отсутствует, так что импульс синтезируется из компонент Фурье, имеющих одну и ту же скорость  $c$ :

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-|\omega|x}{2cQ}\right] \exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right] d\omega \quad (5.68)$$

(очевидно, что на отрицательных частотах в множителе, описывающем затухание,  $\omega$  нужно заменить на  $|\omega|$ , если  $x > 0$ ). Если  $Q$  постоянно, интегрирование, как нетрудно показать, дает

$$p(x, t) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\frac{x}{2cQ}}{\left(\frac{x}{2cQ}\right)^2 + \left(\frac{x}{c} - t\right)^2} \right]; \quad (5.69)$$

Импульс такой формы представлен как функция времени на фиксированном расстоянии  $x$  на рис. 5.12.

К сожалению, как показывает рис. 5.12, у полученного таким образом сигнала имеется несколько неприемлемых особенностей. Для него характерно наличие колебания (хотя и слабого) в точке  $x = 0$  даже раньше момента  $t = 0$ , что нарушает самые элементарные представления о причинности. Время нарастания (см. подпись к рисунку) для него слишком велико {Стейси и др. [306] указывали, что измеренная скорость увеличения  $\tau$  с расстоянием равна лишь  $(2cQ)^{-1}$ , а рис. 5.12 и уравнение (5.69) дают в 1,5 раза большую скорость}. Симметричная форма сигнала также не согласуется с экспериментами, которые свидетельству-

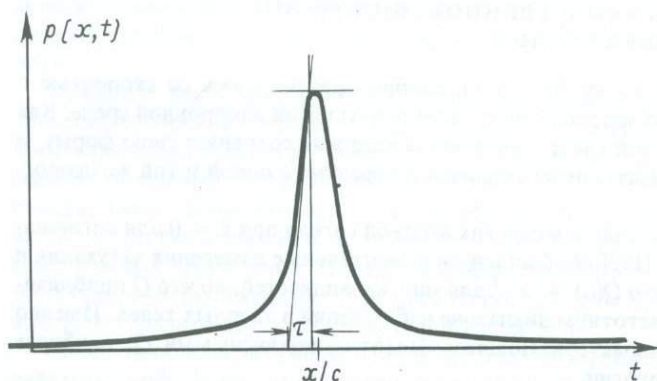


Рис. 5.12. Форма волны  $p(x, t)$  (5.69) как функция времени на фиксированном расстоянии. Время нарастания  $\tau$ , определяемое экстраполяцией касательной к  $p(x, t)$  в точке максимальной производной по времени, можно выразить через  $x$ ,  $c$  и  $Q$  как  $\tau = (4/3\sqrt{3})(x/cQ)$  для этой формы импульса. Времена  $\tau$ , наблюдаемые в эксперименте, существенно короче.

ют об асимметрии формы сигнала с временем спада, значительно превышающим время нарастания.

Возникают сомнения в трех предположениях, использованных при выводе формулы для формы импульса (5.69): линейности, постоянстве  $Q$  и отсутствии дисперсии; естественным кажется сохранить первые два и ослабить третье из предположений. (Косвенным свидетельством в пользу сохранения линейности является тот простой факт, что она приводит к непротиворечивым результатам в многочисленной весьма детальной интерпретации сейсмических данных. Это особенно ясно проявилось при изучении нормальных мод колебаний Земли, возбуждающихся до наблюдаемого уровня сотнями землетрясений с периодами колебаний, остающимися неизменными с высокой степенью точности при различных источниках и различных сейсмографах.) Хотя мы вскоре откажемся от предположения о постоянстве  $Q$ , здесь мы прежде всего *должны* допустить существование некоторой дисперсии, иначе нам не удастся избежать симметрии затухающего импульса (см. задачу 5.9).

### 5.5.2. НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ СОБСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Наши первые попытки количественно охарактеризовать физическую дисперсию потребуют введения такого понятия, как волновой фронт в неидеально упругой среде. Предположим, что плоская волна  $u(x, t)$  распространяется в направлении растущих  $x$  и волновой фронт впервые приходит в точку  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Тогда

$$u(0, t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \quad (5.70)$$

При  $x > 0$  каждую компоненту Фурье можно представить как

$$u(x, \omega) = u(0, \omega) \exp(iKx),$$

где комплексное волновое число  $K$  выражается через фазовую скорость  $c(\omega)$  и коэффициент затухания  $\alpha(\omega)$ :

$$K = \frac{\omega}{c(\omega)} + i\alpha(\omega). \quad (5.71)$$

В предположении линейной суперпозиции волна в  $(x, t)$  имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(0, \omega) \exp[i(Kx - \omega t)] d\omega,$$

что эквивалентно свертке  $u(0, t)$  с функцией

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(Kx - \omega t)] d\omega; \quad (5.72)$$

здесь  $p(x, t)$  — реакция поглощающей среды на  $\delta$ -импульс, описанная в (5.68). Однако теперь мы допускаем частотно-зависимое  $c$ , и в дополнении 5.8 мы показываем, что условие  $p(x, t) = 0$  до времени вступления  $x/c_\infty$  приводит к соотношению

$$\frac{\omega}{c(\omega)} = \frac{\omega}{c_\infty} + \mathcal{H}[\alpha(\omega)]. \quad (5.73)$$

Здесь  $c_\infty$  — предел  $c(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$ , а  $\mathcal{H}[\alpha(\omega)]$  — преобразование Гильберта от коэффициента затухания.

На этом этапе возникает впечатление, что проблема отыскания значений  $c(\omega)$  по существу решена. Нужно просто взять преобразование Гильберта от коэффициента затухания, соответствующего постоянному  $Q$ , и затем использовать (5.73). Однако из уравнения (4) дополнения 5.7 вытекает, что

$$\frac{\omega}{c_\infty} + \mathcal{H}[\alpha(\omega)] = 2Q\alpha(\omega). \quad (5.74)$$

Такой пары преобразований Гильберта, для которой это соотношение может выполняться при постоянном  $Q$ , не существует. [Если бы оно выполнялось, мы могли бы взять преобразование Гильберта от обеих частей (5.74). Но это невозможно, так как преобразование от  $\omega/c_\infty$  — расходящийся интеграл.] Вместо

#### ДОПОЛНЕНИЕ 5.8

*Соотношение между амплитудным и фазовым спектрами распространяющегося импульса при выполнении принципа причинности*

Предположим, что распространяющийся импульс  $p(x, t)$  имеет преобразование Фурье  $e^{iKx}$ , причем действительная и мнимая части  $K$  имеют вид

$$K = \frac{\omega}{c(\omega)} + i\alpha(\omega). \quad (1)$$

Тогда, если

$$p(x, t) = 0 \quad (\text{при } t < x/c_\infty), \quad (2)$$

то, как мы покажем,

$$\frac{\omega}{c(\omega)} = \frac{\omega}{c_\infty} + \mathcal{H}[\alpha(\omega)]. \quad (3)$$

Во-первых, заметим, что выражаемый (2) принцип причинности полностью эквивалентен утверждению, что

$$F(\omega), \text{ определенное как } F(\omega) = \exp[i(K - \omega/c_\infty)x], \text{ — аналитическая функция} \\ \text{в верхней полуплоскости (т.е. при } \text{Im}\omega \geq 0). \quad (4)$$

Это действительно так, поскольку при выполнении (2)

$$F(\omega) = p(x, \omega) \exp(-i\omega x/c_\infty) = \int_{x/c_\infty}^{\infty} p(x, t) \exp[i\omega(t - x/c_\infty)] dt \quad (5)$$

и по лемме Жордана является сходящимся интегралом в верхней полуплоскости.  $F$  и все ее производные существуют, что ведет к (4). С другой стороны, если справедливо (4), мы можем написать

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp[-i\omega(t - x/c_\infty)] d\omega \quad (6)$$

и добавить к пути интегрирования полуокружность на бесконечности в верхней полуплоскости (вклад от интеграла по дополнительному пути равен нулю при  $t < x/c_\infty$ , поскольку экспонента стремится к нулю). Подынтегральное выражение в (6) является аналитическим всюду внутри замкнутого контура, и поэтому мы приходим к (2).

Во-вторых, покажем также, что  $\log F(\omega)$  — аналитическая функция в верхней полуплоскости. Чтобы доказать это, нужно только показать, что у  $F(\omega)$  нет корней, в которых  $\omega$  имеет неотрицательную мнимую часть. Пусть, напротив,  $F(\omega_0) = 0$  при  $\text{Im}\omega_0 \geq 0$ . Тогда  $F(\omega) = (\omega - \omega_0)^\lambda f(\omega)$  для некоторого  $\lambda > 0$  и некоторого  $f$  при  $f(\omega_0) \neq 0$ . Однако при возрастании  $x$  до  $x + \Delta x$  из (4) следует, что

$$(\omega - \omega_0)^{\lambda(1 + \Delta x/x)} f(\omega)^{1 + \Delta x/x}$$

— аналитическая функция в верхней полуплоскости, что невозможно, так как эта функция имеет точку ветвления в  $\omega_0$ .

В-третьих, напомним о специальной форме теоремы Коши: если функция  $g(z)$  аналитическая на замкнутом контуре  $C$  и внутри ограниченной им области, то для точки  $x$  на самом контуре  $C$  имеем

$$g(x) = \frac{1}{\pi i} P \int_C \frac{g(z) dz}{z - x} \quad (7)$$

(здесь  $P$  указывает, что берется главное значение по Коши).

Наконец, применим (7) к аналитической функции

$$\log F(\omega) = \log|F(\omega)| + i \arg F(\omega) = -\alpha(\omega)x + i\omega \left( \frac{1}{c(\omega)} - \frac{1}{c_x} \right) x, \quad (8)$$

используя в качестве контура  $C$  полуокружность бесконечного радиуса, охватывающую верхнюю половину плоскости комплексного  $\omega$ , с диаметром, совпадающим с осью действительных значений  $\omega$ . Для действительных  $\omega$  получаем

$$\log F(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log F(\zeta) d\zeta}{\zeta - \omega} \quad (9)$$

(при условии что вклад от полуокружности равен нулю; см. об этом ниже). Подставляя (8) в (9) и разделяя действительную и мнимую части, находим

$$\alpha(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \zeta \left( \frac{1}{c(\zeta)} - \frac{1}{c_x} \right) \frac{d\zeta}{\zeta - \omega} = -\mathcal{H} \left[ \omega \left( \frac{1}{c(\omega)} - \frac{1}{c_x} \right) \right] \quad (10)$$

и

$$\omega \left( \frac{1}{c(\omega)} - \frac{1}{c_x} \right) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\zeta) d\zeta}{\zeta - \omega} = \mathcal{H} [\alpha(\omega)], \quad \text{т.е. (3)}$$

что и требовалось доказать. Результат, эквивалентный (3) в теории электромагнитных волн, известен как соотношение Крамера — Крёнига.

Может оказаться, что при больших  $|\omega|$   $\log F(\omega)$  не ведет себя так, что можно применить (9), из-за вклада, который вносит интеграл по окружности (см., например, задачу 5.10). Однако можно несколько изменить ход проведенного выше анализа, применив (7) к функции  $\log F(\omega)/\omega$ . Используется та же бесконечная полуокружность, что приводит к двум полувычетам — в  $\zeta = 0$  и  $\zeta = \omega$ :

$$\frac{\log F(0)}{-\omega} + \frac{\log F(\omega)}{\omega} = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log F(\zeta)}{\zeta(\zeta - \omega)} d\zeta. \quad (11)$$

[Вклад от большой дуги исчезает, если, например,

$$\log F(\omega) = O(\log \omega) \quad \text{при} \quad |\omega| \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Если на волновом фронте  $t = x/c_\infty$  сигнала  $p(x, t)$  имеется разрыв  $n$ -го порядка, это приводит к  $F(\omega) = O(\omega^{-n})$  и отсюда к (12) и (11).]

Из (11) и (8) следует, что

$$\frac{1}{c(\omega)} = \frac{1}{c_x} + \mathcal{H} \left[ \frac{\alpha(\omega)}{\omega} \right] \quad \text{и} \quad \frac{\alpha(\omega) - \alpha(0)}{\omega} = -\mathcal{H} \left[ \frac{1}{c(\omega)} - \frac{1}{c_x} \right]. \quad (13)$$

Это простой пример более общего результата, называемого *дисперсионным соотношением при одином вычитании*, и  $\alpha(0)$  называется *константой вычитания* [242].

В некоторых ситуациях может быть известно, что функция  $f(t)$  обладает свойством  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ ; следовательно, функция  $f(\omega)$  аналитическая в верхней полуплоскости, но больше о  $f(\omega)$  ничего не известно. [В рассмотренных выше частных задачах конкретная формула (4) описывает функцию в частотной области.] В общем случае мы не можем исключить возможность, что  $f(\omega)$  имеет нули.

Пусть  $f(\omega)$  имеет нули при  $\omega = \omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) в верхней полуплоскости. Введем функцию  $f_0(\omega)$ , определяемую условием

$$f(\omega) = f_0(\omega) \prod_{i=1}^n \frac{\omega - \omega_i}{\omega - \omega_i^*}. \quad (14)$$

Поскольку  $f_0(\omega)$  не имеет нулей, ее амплитуда  $|f_0(\omega)|$  и фаза  $\phi_0(\omega)$  связаны соотношением

$$\phi_0(\omega) = \mathcal{H}[\log |f_0(\omega)|] \quad (15)$$

(доказывается так же, как при выводе (3); заметим, что  $f$  и  $f_0$  имеют одинаковые амплитудные спектры). Но из (14) следует, что фаза  $\phi(\omega)$  функции  $f(\omega)$  связана с  $\phi_0(\omega)$  следующим образом:

$$\phi(\omega) = \phi_0(\omega) - \sum_{i=1}^n 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Im} \omega_i}{\omega - \operatorname{Re} \omega_i} \right).$$

Если заданы различные сигналы во временной области, имеющие один и тот же амплитудный спектр  $|f(\omega)|$ , то форма импульса, соответствующая фазовому спектру  $\phi_0(\omega)$ , называется формой с *минимальной задержкой*, поскольку групповая задержка, вызванная нулями спектра,

$$\frac{d}{d\omega} \{\phi(\omega) - \phi_0(\omega)\} = +2 \sum_{i=1}^n \frac{\operatorname{Im} \omega_i}{\{(\operatorname{Im} \omega_i)^2 + (\omega - \operatorname{Re} \omega_i)^2\}},$$

всегда положительна (так как  $\operatorname{Im} \omega_i > 0$ ).

Следовательно, особая форма импульса, рассмотренная выше [например, в уравнении (6)] и обусловленная затуханием волны при пробеге его расстояния  $x$ , является формой с минимальной задержкой после времени вступления  $x/c_\infty$ .

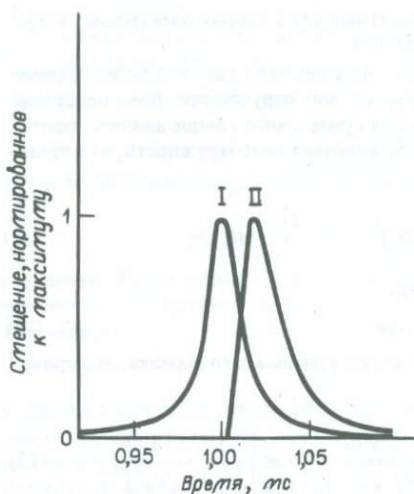


Рис. 5.13. Сравнение форм двух затухающих импульсов  $p(x, t)$  на фиксированном одинаковом расстоянии  $x = 5$  м. В случае недиспергирующего импульса (I)  $c = 5$  км/с и  $Q = 50$  на всех частотах. В случае с дисперсией (II) [с законом затухания Азими, Калинина и др. (5.75)], где  $c(\omega)$  и  $\alpha(\omega)$  определены в (5.73) — (5.75),  $c_\infty = 5$  км/с и  $(2\alpha_0 c_\infty)^{-1} = 50$  [139].

этого мы должны смириться с частотно-зависимым  $Q$ , удовлетворяющим (5.74), но с затуханием, обеспечивающим практическое постоянство  $Q$  в сейсмическом частотном диапазоне. Такой подход был принят Азими, Калининым и др. [18], и одна из пар функций, использованных в их работе, имела вид

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0 \omega}{1 + \alpha_1 \omega}, \quad \mathcal{H}[\alpha(\omega)] = \frac{2\alpha_0 \omega}{\pi(1 - \alpha_1^2 \omega^2)} \ln\left(\frac{1}{\alpha_1 \omega}\right), \quad (5.75)$$

где  $\alpha_0, \alpha_1$  — константы.

На рис. 5.13 показана форма импульса (5.72), следующая из закона затухания (5.75), принятого в [18]\*). Отметим асимметрию импульса и его запаздывание по сравнению с недиспергирующим импульсом, описанным ранее.

Стейси и др. [306] нашли, что время нарастания импульса Азими и др. изменяется с расстоянием с той же скоростью, что измерена для многих твердых материалов. Следовательно, соответствующая (5.75) дисперсия является, по видимому, хорошей аппроксимацией для сейсмологических задач. За (5.75) стоит предположение, что  $\alpha_1 \omega \ll 1$  во всем сейсмическом диапазоне частот, так что отклонение затухания от закона  $\alpha(\omega) \sim \omega$  не заметно до тех пор, пока  $\omega$  не станет очень большим. Поэтому мы можем пренебречь членом  $\alpha_1^2 \omega^2$  в выражении для  $\mathcal{H}[\alpha(\omega)]$  и найдем из (5.73) следующую приближенную формулу для фазовой скорости:

$$\frac{1}{c(\omega)} = \frac{1}{c_\infty} + \frac{2\alpha_0}{\pi} \ln\left(\frac{1}{\alpha_1 \omega}\right). \quad (5.76)$$

Как следует из (5.74) и (5.75),  $Q \approx (2c_\infty \alpha_0)^{-1}$ , что позволяет найти из (5.76) отношение фазовых скоростей на двух различных сейсмических частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$\frac{c(\omega_1)}{c(\omega_2)} = 1 + \frac{1}{\pi Q} \ln\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right). \quad (5.77)$$

\* Формула (5.75) была получена в кандидатской диссертации А. В. Калинина (Москва, 1965 г.). — Прим. перев.

Это важный результат, так как он является хорошей аппроксимацией для множества законов затухания, в которых  $Q$  практически постоянно в сейсмическом частотном диапазоне (см. задачу 5.10). Однако были предложены специфические законы затухания; которые также характеризуются практически постоянным  $Q$ , но для которых дисперсия не описывается достаточно точно формулой (5.77) (см., например, [315] и задачу 5.11). Чтобы увидеть, как это может произойти, заметим, что, согласно (5.73), задержка фазы на частоте  $\omega$ , т.е.  $x/c(\omega)$ , равна  $x/c_\infty$  плюс  $x\omega^{-1} \mathcal{H}[\alpha(\omega)]$ . Значит, фазовая задержка на конкретной частоте определяется интегралом (преобразованием Гильберта) от спектра поглощения на всех частотах. Если асимптотическое поведение  $\alpha(\omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$  выбрано так, что интеграл сходится медленно, на сейсмических частотах может возникнуть очень большая фазовая задержка. В этом случае целесообразно наложить ограничения на коэффициент затухания  $\alpha(\omega)$  на очень высоких и очень низких частотах, вернувшись для этого к рассмотрению физической природы явления неидеальной упругости.

Предположим, что к твердому телу, находящемуся первоначально в состоянии нулевых напряжений и нулевых деформаций, приложено напряжение в виде ступенчатой функции  $\sigma = \sigma_0 H(t)$ . Для линейной среды результирующую деформацию  $\varepsilon(t)$  можно представить как

$$M_U \varepsilon(t) = \sigma_0 [1 + \phi(t)], \quad (5.78)$$

где  $M_U$  — упругий модуль, а  $\phi(t)$  — так называемая *функция ползучести* для этого упругого модуля. [Мы рассматриваем (5.78) как соотношение между скалярными величинами, поскольку в этом разделе нас интересует только одномерное распространение волн.] В случае изотропной упругой среды  $\phi = 0$  при  $M_U = \mu$  для поперечных и  $M_U = \lambda + 2\mu$  для продольных волн. В неидеально упругих материалах происходит мгновенная деформация  $\sigma_0/M_U$  в ответ на приложенное напряжение [заметим, что  $\phi(t) = 0$  при  $t \leq 0$ ]. Именно поэтому мы используем индекс  $U$  у модуля ( $U$  обозначает *нерелаксирующий* (unrelaxed) в том смысле, что он является коэффициентом пропорциональности между напряжением и деформацией сразу же после приложения напряжения, прежде чем материал начнет релаксировать (посредством ползучести) в новую конфигурацию.

Соотношение (5.78) между напряжениями и деформациями легко обобщить на случай произвольной нагрузки  $\sigma = \sigma(t)$ ; в этом случае оно принимает вид

$$M_U \varepsilon(t) = \left[ \sigma(t) + \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) \dot{\phi}(t - \tau) d\tau \right],$$

как показал Больцман в 1876 г. Поскольку  $\phi = 0$  при  $t \leq 0$ , это соотношение удобно представить при помощи свертки

$$M_U \varepsilon(t) = \sigma(t) + \sigma(t) * \dot{\phi}(t). \quad (5.79)$$

Рассмотрим теперь ситуацию, в которой  $\sigma$  и  $\varepsilon$  возникают благодаря прохождению плоской волны фиксированной частоты в направлении оси  $x$ :  $\sigma = \sigma_0 \exp i(Kx - \omega t)$ , где комплексное волновое число  $K$  связано с фазовой скоростью  $c(\omega)$  и коэффициентом затухания  $\alpha(\omega)$  формулой (5.71). Соотношение

между напряжениями и деформациями в этом случае принимает вид

$$M_U \varepsilon(t) = \sigma(t) \left[ 1 + \int_0^\infty \dot{\phi}(\tau) \exp(i\omega\tau) dt \right] \quad (5.80)$$

(здесь используется частный вид  $\sigma(t) \sim \exp(-i\omega t)$  и  $\dot{\phi}(t) = 0$  при  $t \leq 0$ ). Отсюда следует, что напряжение пропорционально деформации, причем коэффициент пропорциональности — комплексный модуль  $M(\omega)$ , равный

$$M(\omega) = M_U \left/ \left[ 1 + \int_0^\infty \dot{\phi}(\tau) \exp(i\omega\tau) dt \right] \right. \quad (5.81)$$

Непрерывность  $\phi$  при  $t = 0$  указывает на то, что интеграл стремится к нулю при  $\omega \rightarrow \infty$ , и, следовательно,  $M(\omega) \rightarrow M_U$  при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Из уравнения движения  $\rho \ddot{u} = \partial \sigma / \partial x$  получаем  $\rho \omega^2 = K^2 M(\omega)$ , откуда следуют соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c(\omega)} + i\alpha(\omega) &= \omega \sqrt{\frac{\rho}{M(\omega)}} = \frac{\omega}{c_\infty} \left[ 1 + \int_0^\infty \dot{\phi}(t) \exp(i\omega t) dt \right]^{1/2}, \\ \frac{1}{Q(\omega)} &= \frac{2c(\omega)\alpha(\omega)}{\omega} = -\frac{\text{Im } M(\omega)}{\text{Re } M(\omega)} = \frac{\text{Im} \left\{ \int_0^\infty \dot{\phi}(t) \exp(i\omega t) dt \right\}}{1 + \text{Re} \left\{ \int_0^\infty \dot{\phi} \exp(i\omega t) dt \right\}}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Мы определили здесь скорость  $c_\infty$  через нерелаксирующий модуль как  $c_\infty = (M_U/\rho)^{1/2}$ , и (5.82) позволяет нам преобразовать различные законы ползучести в законы затухания и дисперсии.

Так, Ломниц [212, 213] описал свои лабораторные наблюдения ползучести в породах логарифмическим законом

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ q \ln(1 + at) & t \geq 0, \end{cases}$$

в котором фундаментальная частота  $a$  может быть столь же высока, что и частота колебаний вакантных узлов в кристаллической решетке (т.е. порядка  $10^{10}$  Гц, см. [289]). Преобразование Фурье от  $\phi$  равно

$$aq \int_0^\infty \frac{\exp(i\omega t)}{1 + at} dt \sim -q \left[ \gamma + \ln\left(\frac{\omega}{a}\right) - \frac{i\pi}{2} \right] e^{-i\omega/a}, \quad (5.83)$$

если  $\omega \ll a$ ; здесь  $\gamma = 0,577 \dots$  (константа Эйлера). Поскольку  $q \ll 1$ , мы получаем из (5.82) и (5.83), что

$$\frac{\omega}{c(\omega)} + i\alpha(\omega) = \frac{\omega}{c_\infty} \left\{ 1 - \frac{q}{2} \left[ \gamma + \ln\left(\frac{\omega}{a}\right) \right] + \frac{i\pi q}{4} \right\} \quad (5.84)$$

(с точностью до членов первого порядка). Мнимая часть этого выражения определяет одну из констант Ломница:

$$q = \frac{2}{\pi Q} \frac{c_\infty}{c(\omega)} \sim \frac{2}{\pi Q}.$$

Отсюда, используя выражение для действительной части (5.84), находим частотную зависимость  $c$ :

$$\frac{1}{c(\omega)} = \frac{1}{c_\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi Q} \left[ \gamma + \ln \left( \frac{\omega}{a} \right) \right] \right\},$$

которая согласуется с соотношением

$$\frac{c(\omega_1)}{c(\omega_2)} = 1 + \frac{1}{\pi Q} \ln \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \quad (\text{снова 5.77})$$

найденным выше для закона затухания Азими и Калинина с соавторами.

Получив тот же самый закон дисперсии двумя совершенно разными методами [эмпирическая формула (5.75) для затухания и лабораторные наблюдения логарифмической ползучести], мы с удовлетворением узнаем, что подход Больцмана также приводит к (5.77), если функция ползучести получена на основе хорошо установленных механизмов внутреннего трения таким образом, что обеспечивает практически постоянное  $Q$  на сейсмических частотах [211]. Таким образом, физическое обоснование (5.77) непосредственно следует из наблюдений постоянного  $Q$ . Лиу и др. [211] предположили, что затухание вызвано суперпозицией различных релаксационных явлений, каждое из которых, если бы оно было единственным, описывалось бы соотношением напряжений и деформаций вида

$$\sigma + \tau_\sigma \dot{\sigma} = M_R (\varepsilon + \tau_\varepsilon \dot{\varepsilon}).$$

(Многие физические механизмы, предложенные для объяснения затухания, по видимому, удовлетворяют этому соотношению, являющемуся законом связи между напряжением и деформацией для *стандартного линейного твердого тела*, впервые в деталях исследованного Зенером [344].) Здесь  $\tau_\varepsilon$  — характерное время релаксации деформаций под внезапно приложенным постоянным напряжением и  $\tau_\sigma$  — характерное время релаксации напряжений, соответствующее скачкообразному изменению деформаций.  $M_R$  — упругий модуль, и отклик на нагрузку в виде ступенчатой функции  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$  имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{M_R} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon} \right) e^{-t/\tau_\varepsilon} \right]. \quad (5.85)$$

Сравнивая этот результат с (5.78) и учитывая особым образом мгновенный отклик в момент времени  $t = 0$ , мы можем найти, что

$$M_R = M_U \frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}$$

$$\phi(t) = \left( \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} - 1 \right) (1 - e^{-t/\tau_\varepsilon}). \quad (5.86)$$

$M_R$  называют *релаксационным модулем*, так как, согласно (5.85), он описывает отношение напряжения к деформации в пределе при  $t \rightarrow \infty$ . Чтобы найти значения  $Q$  и закон дисперсии, нужно преобразовать (5.82), т.е. перейти к

$$\int_0^\infty \dot{\phi}(t) \exp(i\omega t) dt.$$

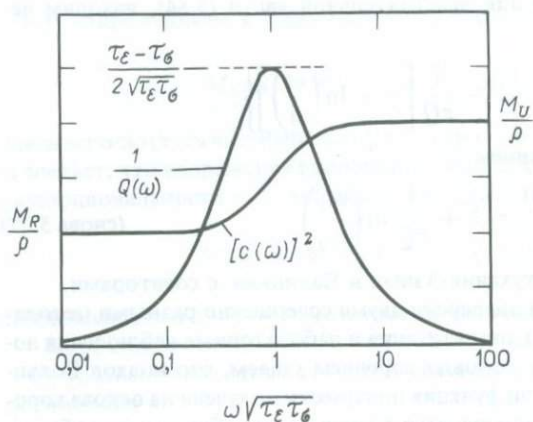


Рис. 5.14. Внутреннее трение  $Q^{-1}$  и квадрат фазовой скорости  $[c(\omega)]^2$  как функции частоты для стандартного линейного тела (т.е. тела с единственным релаксационным механизмом) [211].

Для функции ползучести вида (5.86) нетрудно показать, что

$$\frac{1}{Q} = \frac{\omega(\tau_\epsilon - \tau_\sigma)}{1 + \omega^2 \tau_\epsilon \tau_\sigma},$$

$$[c(\omega)]^2 = \frac{M_U}{\rho} \left[ 1 + \left( \frac{M_U}{M_R} - 1 \right) \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_\epsilon^2} \right]^{-1}$$

Графики этих двух функций приведены на рис. 5.14; отметим концентрацию затухания вблизи частоты  $(\tau_\epsilon \tau_\sigma)^{-1/2}$ ; при этом  $Q^{-1}$  изменяется как  $\omega$  для частот ниже пиковой и как  $\omega^{-1}$  для частот выше пиковой. Кроме того, фазовая скорость  $c(\omega)$  монотонно растет с частотой, причем нижний предел ее при  $\omega = 0$  равен  $(\mu_R/\rho)^{1/2}$ . Чтобы воспроизвести практически постоянные значения  $Q$ , наблюдаемые на сейсмических частотах, Лиу и др. использовали дискретную суперпозицию 12 релаксационных пиков такого типа, как показан на рис. 5.14, характеризующихся одним и тем же релаксационным модулем  $M_R$ . Они подобрали 24 неупругих параметра ( $\tau_\epsilon$  и  $\tau_\sigma$  для каждого механизма) и получили  $Q^{-1}$  и фазовую скорость, показанные на рис. 5.15. В диапазоне 0,0001 — 10 Гц, как мы видим,  $Q$  практически постоянно (в пределах 1%), а фазовая скорость линейно зависит от  $\ln \omega$ . Сделав в своем анализе еще один шаг, они рассмотрели также непрерывную суперпозицию релаксаций, определяемую плотностью распределения, и опять-таки нашли линейную зависимость  $c(\omega)$  от  $\ln \omega$ , подобную показанной на рис. 5.15. Кроме того, они сумели аналитически определить производную от  $c(\omega)$  и показали, что отношение  $c(\omega_1)/c(\omega_2)$  имеет уже знакомый нам вид  $1 + (\pi Q)^{-1} \ln(\omega_1/\omega_2)$ .

Эта логарифмическая дисперсия получила теперь достаточно полное обоснование для материалов, у которых наблюдается постоянное значение  $Q$ , и теперь ясно, как решать задачу о распространении волн в неидеально упругой среде, если параллельная задача для упругой среды уже решена. Мы видели, что множитель, описывающий распространение волн:

$$\exp[i(kx - \omega t)] = \exp[i\omega(x/c - t)],$$

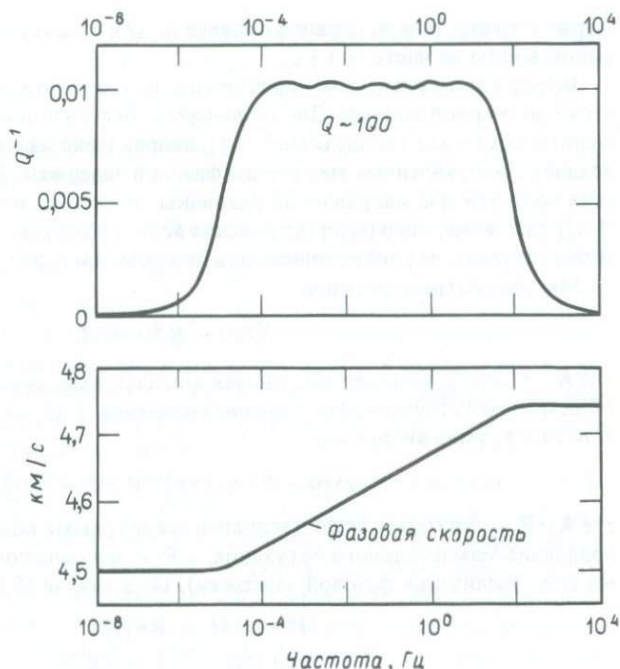


Рис. 5.15. Вверху — значения внутреннего трения, внизу — фазовые скорости. Получены с помощью (5.82) суперпозицией 12 различных релаксационных пиков [211].

в упругой среде следует заменить на

$$\exp i(Kx - \omega t) = \exp \left[ \frac{(-\omega x)}{2c(\omega)Q(\omega)} \right] \exp \left[ i\omega \left( \frac{x}{c(\omega)} - t \right) \right].$$

Хотя  $c$  в решениях задач теории упругости имеет вид частотно-независимой константы  $c = c_e$ , эти решения должны быть аналитическими функциями  $c_e$ . Тогда из теории аналитических продолжений следует, что решение для неупругой модели можно найти путем замены  $c_e$  по правилу

$$\frac{1}{c_e} \rightarrow \frac{1}{c(\omega)} \left( 1 + \frac{i}{2Q(\omega)} \right). \quad (5.87)$$

Если  $Q$  практически постоянно, можно использовать для описания дисперсии логарифмический закон (5.77). Нам нужно выбрать опорную частоту, относительно которой будет рассматриваться дисперсия; выберем ее равной 1 Гц (т.е.  $\omega = 2\pi$ ). Тогда скорость в упругой среде  $c_e$  будет заменена в соответствии с правилом

$$c_e \rightarrow c_1 \left[ 1 + \frac{1}{\pi Q} \ln \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) - \frac{i}{2Q} \right] \quad (5.88)$$

(верно с точностью до первого порядка по  $Q$ ); здесь  $c_1$  — фазовая скорость объемной волны на частоте  $\frac{1}{2}$  Гц.

Всюду в этом разделе мы предполагали, что затухающая плоская волна является одномерной волной. Для одномерной бегущей волны, описываемой выражением  $\exp(-\alpha x) \exp i\omega[x/c(\omega) - t]$ , направление максимального затухания совпадает с направлением увеличения фазовой задержки. В общем случае для плоских волн эти два направления различны. Ниже мы приведем пример правила (5.87) для двумерного распространения волн и покажем, что, даже когда плоская волна затухает, ее удобно описывать при помощи горизонтальной медленности.

Мы рассмотрим решения

$$\nabla^2 \psi + K^2 \psi = 0, \quad (5.89)$$

где  $K^2 = \omega^2 \rho / \mu$  комплексно, так как комплексным является модуль сдвига  $\mu$ . В общем случае стационарное решение уравнения (5.89) вида плоской волны — это константа, умноженная на

$$\exp(-\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \exp[i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (5.90)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P}$  — векторы с вещественными декартовыми компонентами.  $\mathbf{A}$  имеет направление максимального затухания, а  $\mathbf{P}$  — направление распространения волны (т.е. увеличения фазовой задержки). Подставляя (5.90) в (5.89), получаем

$$P^2 - A^2 = \operatorname{Re}\{K^2\}, \quad (5.91)$$

$$PA \cos \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\{K^2\}, \quad (5.92)$$

где  $P$  и  $A$  — амплитуды  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{A}$ , а  $\gamma$  — угол между  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{A}$ . Такую волну называют *однородной* или *неоднородной* в зависимости от того,  $\gamma = 0$  или  $\gamma \neq 0$ . Эти термины уже встречались в разд. 5.3 в связи с упругой средой. Как показано в работах [60, 47], для упругих сред возможно только или  $A = 0$ , или  $\gamma = \pi/2$ . Это следует из (5.92) при  $\operatorname{Im}\{K^2\} = 0$ . Но для неупругих сред  $A \neq 0$ , и  $\gamma \neq \pi/2$ . Ранее в этом разделе мы рассматривали только случай  $A \neq 0$  и  $\gamma = 0$ , т.е. однородную затухающую волну. Но для учета эффектов границы между неупругими полупространствами мы должны рассмотреть неоднородные плоские волны при  $0 < \gamma < \pi/2$ .

К счастью, эти более общие плоские волны все еще можно рассматривать как функции независимого переменного  $p$ , поскольку

$$\exp[i\omega p x + i(K^2 - \omega^2 p^2)^{1/2} z - i\omega t] \quad (5.93)$$

также является общим решением волнового уравнения для плоских волн. Решения (5.93) и (5.90) эквивалентны; ось  $z$  перпендикулярна  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{A}$ . Декартовы компоненты  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{A}$  равны

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\operatorname{Re}\{\omega p\}, 0, \operatorname{Re}\{(K^2 - \omega^2 p^2)^{1/2}\}), \\ \mathbf{A} &= (\operatorname{Im}\{\omega p\}, 0, \operatorname{Im}\{(K^2 - \omega^2 p^2)^{1/2}\}). \end{aligned} \quad (5.94)$$

Эти выражения допускают комплексные  $p$ , что нам понадобится в гл. 6 — 9. Физическая горизонтальная медленность равна  $\operatorname{Re}\{p\}$ .

Бухен [60] и Борхердт [47, 48] детально изучили свойства плоских волн, описываемых при помощи векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{A}$ . Такой подход позволяет легко идентифи-

цировать физические свойства отдельной плоской волны. Например, угол падения относительно вертикали — просто  $\theta$ , где

$$\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{z}} = P \cos \theta. \quad (5.95)$$

Фазовая скорость равна  $\omega/P$ , а из  $K^2 = \omega^2 \rho / \mu$  и (5.91) — (5.92) следует, что она в точности равна выражению

$$\left( \frac{\operatorname{Re}\{\mu\}}{\rho} \right)^{1/2} \left( \frac{2(1 + Q^{-2})}{1 + (1 + \sec^2 \gamma Q^{-2})^{1/2}} \right)^{1/2}. \quad (5.96)$$

Заметим, что в (5.96) фигурирует  $Q$ , определяемое выражением  $Q^{-1} = -\operatorname{Im}\{\mu\}/\operatorname{Re}\{\mu\}$  [см. (5.82)]. Вероятно, это лучшее из нескольких определений, которые ученые использовали для  $Q$  (см. [243]). В дополнении 5.7 мы указали несколько свойств, найденных при  $Q \gg 1$ , которые можно использовать как определение  $Q$ . Однако эти определения противоречат друг другу, если их применять к сильно поглощающим средам.

Поскольку теперь для описания плоской волны, падающей на границу, нужны два угла ( $\theta$  и  $\gamma$ ), закон Снеллиуса принимает исключительно сложную форму, если записывать его через такие физические величины, как  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{A}$ , для каждой волны на границе [48]. Но если использовать плоские волны, описываемые (5.93), где  $K$  принимает различные (комплексные) значения на каждой из сторон границы, то закон Снеллиуса принимает хорошо знакомый вид, в котором параметр  $p$  для всех плоских волн, связанных с границей, одинаков. Это позволяет нам очень быстро обобщить все формулы, полученные ранее для коэффициентов отражения (преломления) в упругих средах, и сделать всех их применимыми и в неидеально упругом случае. Так, чтобы получить коэффициенты преломления  $\hat{S}\hat{S}$  для волн  $SH$ , пересекающих границу между двумя неидеально упругими полупространствами (см. рис. 5.7), мы должны сначала выразить углы  $j_1$  и  $j_2$  через независимый параметр  $p$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sin j_1}{\beta_1} &= p = \frac{\sin j_2}{\beta_2}, \\ \frac{\cos j_1}{\beta_1} &= \left( \frac{1}{\beta_1^2} - p^2 \right)^{1/2} = \eta_1, \\ \frac{\cos j_2}{\beta_2} &= \left( \frac{1}{\beta_2^2} - p^2 \right)^{1/2} = \eta_2. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Здесь падающая волна пропорциональна  $\exp[i\omega(px + \eta_1 z - t)]$ , и преобразования, сходные с теми, что привели к (5.32), дают нам здесь

$$\hat{S}\hat{S} = \frac{2\rho_1\beta_1^2\eta_1}{\rho_1\beta_1^2\eta_1 + \rho_2\beta_2^2\eta_2} = \frac{2\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2}. \quad (5.98)$$

При выводе выражений для углов падения и выхода преломленной волны  $\hat{S}\hat{S} \exp[i\omega(px + \eta_2 z - t)]$  следует учесть ряд обстоятельств. Здесь мы должны использовать (5.94) и угол  $\theta$  в (5.95), определяемый для каждой отдельной плоской волны. Вообще говоря, углы падения и выхода не будут равны  $j_1$  и  $j_2$ , так как

эти углы имеют смысл только благодаря (5.97), а в качестве независимого переменного мы избрали  $p$  (а не, скажем,  $j_1$ ).

Анализ (5.98) показывает, что наш коэффициент  $\tilde{S}\tilde{S}$  зависит непосредственно от комплексных скоростей  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (или от  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ) и  $p$ . Ранее мы ограничивались в описании затухания одномерными однородными волнами. Отрадно, что комплексные упругие константы, которые мы ввели в эти волны, — это все, в чем мы нуждаемся для оценки двумерных плоских волн, даже если эти волны неоднородны. Таким образом, коэффициенты отражения (преломления) на границе поглощающих сред можно получить из аналогичных формул для упругих сред [например, (5.32)] простой подстановкой комплексных упругих констант, при условии что мы будем аккуратны в интерпретации таких понятий, как «угол падения» и «угол выхода».

## 5.6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ: ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛОСКИХ ВОЛН

Стационарные плоские волны в однородной анизотропной среде будут распространяться с медленностью  $\mathbf{s}$  при условии, что смещение  $\mathbf{u} = \mathbf{U} \exp[-i\omega(t - \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})]$  удовлетворяет условию  $\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} u_{k,j}$ . Величина  $\mathbf{U}$  — это константа, вектор поляризации, указывающий направление движения частиц, и для выполнения волнового уравнения необходимо, чтобы

$$\det|\rho\delta_{ik} - c_{ijkl}s_js_l| = 0. \quad (5.99)$$

В изотропных средах (5.99) сводится к трем отдельным уравнениям второго порядка для компонент медленности, соответствующих волнам  $P$  и двум типам волн  $S$  [см. (4.36) — (4.39) и (5.2)]. Но для произвольной анизотропной среды аналитические решения для  $\mathbf{s}$  или  $|\mathbf{s}|$ , выраженные через  $\rho$  и компоненты  $\mathbf{c}$ , отсутствуют.

Для получения визуального представления о допустимых медленностях удобно воспользоваться *поверхностью медленности*  $S$ . Эта поверхность в пространстве медленностей (с декартовыми координатами  $s_1, s_2, s_3$ ) представляет собой совокупность точек, удовлетворяющих (5.99). Для изотропных сред из (4.40) следует, что  $S$  состоит из трех концентрических сфер: одна имеет радиус  $[\rho/(\lambda + 2\mu)]^{1/2}$ , а две другие, совпадающие, — радиус  $[\rho/\mu]^{1/2}$ . В более общем случае  $S$  состоит из отдельных несферических листов.

Имея поверхность медленности, можно сконструировать другую трехлистную поверхность  $W(t)$  для описания положения (в данный момент времени  $t$ ) волнового фронта, связанного с точечным источником. Очевидно,  $W$  образуется решениями  $(x_1, x_2, x_3)$ , удовлетворяющими условию  $t = \mathbf{s} \cdot \mathbf{x}$ . Задача здесь в том, чтобы каждому  $\mathbf{x}$ , принадлежащему волновому фронту, на поверхности медленности соответствовало свое  $\mathbf{s}$ . Мы определим  $W$  как огибающую плоскостей  $t = \mathbf{s} \cdot \mathbf{x}$  при  $\mathbf{s}$ , варьирующих на поверхности медленности. Геометрические соотношения между точкой  $\mathbf{s}$  на  $S$  и соответствующей точкой  $\mathbf{x}$  на  $W$  описаны Масгрейвом [236]. Нормаль к  $S$  в точке  $\mathbf{s}$  параллельна вектору  $\mathbf{x}$ . Отсюда можно предложить графический способ построения  $W$  (так как направление вектора  $\mathbf{x}$  теперь известно, а  $|\mathbf{x}|$  определяется из  $t = \mathbf{s} \cdot \mathbf{x}$ ). Выдерживается также и об-

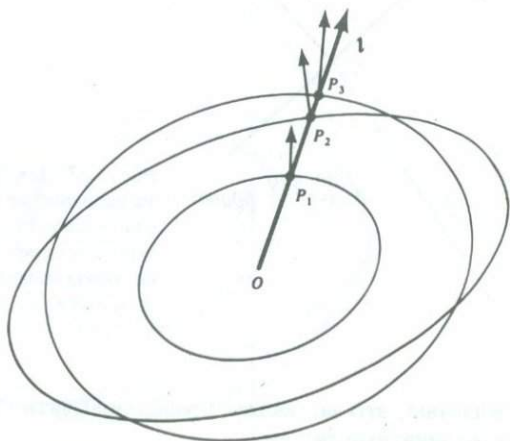


Рис. 5.16. Трехлистая поверхность медленности  $S$ . В направлении  $l$  имеются три возможных значения медленности с амплитудами  $OP_1$ ,  $OP_2$  и  $OP_3$ . Нормали к  $S$  в  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  дают направления распространения энергии (направления лучей) для каждой из трех медленностей.

ратное соотношение, более важное с точки зрения сейсмологии: нормаль к  $W$  в точке  $x$  параллельна вектору  $s$ . Простейшая наблюдаемая характеристика волнового фронта — это, вероятно, направление его перемещения (т.е. нормаль к нему), которое дается вектором  $s$ . Однако, как указал Влаар [327], направление луча, являющееся направлением переноса энергии, в общем не совпадает с направлением  $s$ , а следует вдоль нормали к поверхности медленности в точке  $s$ . Общий метод расчета геометрического расхождения в анизотропной неоднородной среде описан Червени [69].

При данном направлении медленности  $l$  имеются три различных значения величины  $|s|$ , для которых вектор  $s = |s|l$  принадлежит поверхности медленности (рис. 5.16). Они соответствуют трем различным объемным волнам, и амплитуды медленностей этих волн находятся решением задачи на собственные значения

$$\det[M - (\rho/|s|^2)I] = 0, \quad (5.100)$$

где  $M_{ip} = c_{ijpq}l_jl_q$  и  $I_{ip} = \delta_{ip}$ . Матрица  $M$  — симметрическая, и  $M_{ip}U_p = (\rho/|s|^2)U_i$ , так что три собственных вектора, характеризующих поляризацию  $U$ , взаимно ортогональны.

Ранее, чтобы подготовиться к анализу горизонтальных границ между двумя однородными полупространствами, мы избирали направление  $x_2$  так, чтобы  $s = (p, 0, s_3)$ . Закон Снеллиуса для границ, нормальных к  $x_3$ , сводится к  $s_1 = p$ ,  $s_2 = 0$  для всех плоских волн, связанных с границей; при этом  $s_3$  различно для всех волн. Тот же подход полезен и для анизотропных сред; на рис. 5.18 показано построение компоненты  $s_3$  для плоских волн по обе стороны горизонтальной поверхности между двумя полупространствами. Плоскость, показанная на рис. 5.18 и содержащая все связанные векторы медленности, называется *сагиттальной плоскостью*. Она является также плоскостью падения, и, если нужно ее изменять, необходимо вращать оси  $(x_1, x_2)$ , для того чтобы сохранить  $s_2 = 0$ . К со-



Рис. 5.17. Для плоского волнового фронта направление луча (определяемое потоком энергии) в общем случае не является перпендикулярным к волновому фронту и не обязательно лежит в сагиттальной плоскости.

жалению, это заставляет преобразовывать декартовы компоненты  $\mathbf{C}$  в новую координатную систему.

Чтобы количественно охарактеризовать отражающие и преломляющие свойства границы, удобно представить уравнения движения (на каждой стороне границы) в виде  $d\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{f}$ , где теперь

$$\mathbf{f} \exp[i\omega(px - t)] = (u_x, u_y, \dot{u}_z, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zz})^T. \quad (5.101)$$

$\mathbf{A}$  — матрица размером  $6 \times 6$ , и ее шесть собственных значений — это шесть величин  $i\omega s_3$ ; корни  $s_3$  показаны графически (для данного  $p$  и данного полупространства) на рис. 5.18. Образует матрицу  $\mathbf{E}$ , у которой столбцы — собственные векторы  $\mathbf{A}$ , и матрицу  $\Lambda$  — диагональную, с шестью элементами  $\exp(i\omega s_3 z)$  для шести различных  $s_3$ . Упорядочив столбцы  $\mathbf{E}$  и  $\Lambda$ , ищем общее решение в виде плоских волн в каждой однородной среде как  $\mathbf{f} = \mathbf{E}\Lambda\mathbf{w}$ , где  $\mathbf{w}$  — шестикомпонентный вектор констант. 36 различных коэффициентов отражения (преломления) как функций  $p$  и ориентации сагиттальной плоскости теперь можно получить методами разд. 5.4. (Матрица  $\mathbf{A}$  в общем случае зависит от ориентации сагиттальной плоскости.) Некоторые численные примеры приведены в [193].

Имеется несколько конкретных типов анизотропии, представляющих определенный интерес для сейсмологии. Простейшим отклонением от изотропии является случай, когда тензор упругости  $\mathbf{C}$  изотропен во всех направлениях, перпендикулярных к некоторому особому направлению  $x_3$ . Такую среду называют поперечно-изотропной, и она характеризуется пятью независимыми константами. Матрица коэффициентов для  $d\mathbf{f}/dz = \mathbf{A}\mathbf{f}$  в поперечно-изотропном материале детально рассмотрена Такеучи и Сайто [319], где за аномальное направление  $x_3$  было принято вертикальное направление. В этом случае существует на удивление мало различий с изотропной средой. Волна  $SH$  существует независимо от квази- $P$ - и квази- $SV$ -волн, которые часто обозначают  $qP$  и  $qSV$ , и симметрия относительно вертикальной оси означает, что волновые решения не зависят от ориентации сагиттальной плоскости. Такое существенное упрощение невозможно ни для какого другого типа анизотропии.

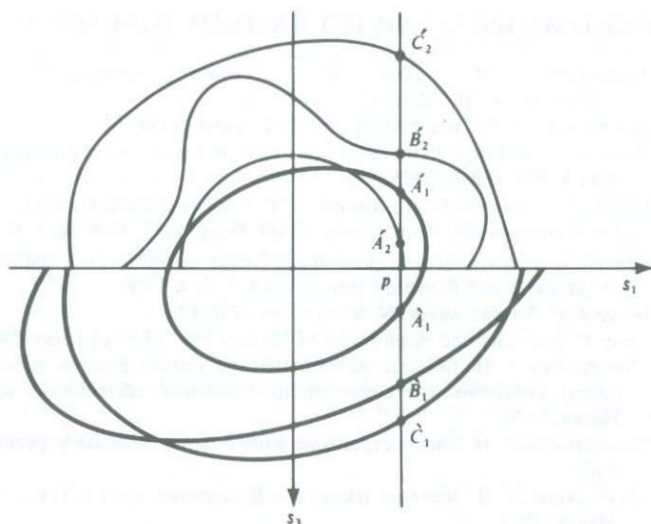


Рис. 5.18. Графический метод определения вектора медленности для каждой плоской волны, рассеянной на горизонтальной границе между двумя анизотропными полупространствами. Жирные линии — часть трехлистной поверхности медленности для нижней среды; падающая волна (бегущая вверх) имеет медленность с координатами, соответствующими точке  $A_1$ . Все шесть рассеянных волн имеют одну и ту же горизонтальную медленность  $p$ . Положительные значения  $s_3$  имеют нисходящие волны в нижней среде, а отрицательные значения (которые лежат на тонких кривых, являющихся частью поверхности медленности для верхней среды) соответствуют преломленным волнам. Если  $p$  достаточно велико для того, чтобы некоторые или все значения  $s_3$  были мнимыми, соответствующие плоские волны экспоненциально растут или затухают с глубиной.

Как показал Бэкус [20], для произвольной, но слабой анизотропии скорость объемных волн в какой-либо плоскости весьма просто зависит от направления распространения внутри этой плоскости. Например, волны  $qP$ , распространяющиеся в плоскости  $(x_1, x_2)$  с медленностью  $(\cos \phi, \sin \phi, 0)/\alpha$ , имеют фазовую скорость  $\alpha(\phi)$ , приблизительно равную

$$\rho\alpha^2 = A + B \cos 2\phi + C \sin 2\phi + D \cos 4\phi + E \sin 4\phi. \quad (5.102)$$

Обнаружению Бэкусом зависимости  $\alpha = \alpha(\phi)$  этого вида предшествовало наблюдение Хесса [163], сделанное им на основе опубликованных данных. Хесс заметил, что волны  $P$ , рефрагирующие непосредственно под границей Мохо, видимо, обладают скоростной анизотропией порядка нескольких процентов. В свою очередь формула (5.102) стимулировала попытки (см., например, [91]) интерпретировать наблюдения  $\alpha$  так, чтобы определить пять других упругих параметров (коэффициенты  $A, B, C, D, E$ , представляющие собой линейные комбинации компонент  $\mathbf{c}$ ).

## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ

- Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
- Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
- Kraut E. A. Advances in the theory of anisotropic elastic wave propagation. Reviews of Geophysics, 1, 401 — 448, 1963.
- Liu H.-P., Anderson D. L., Kanamori H. Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition. Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 47, 41 — 58, 1976.
- Randall M. J. Attenuative dispersion and frequency shifts of the earth's free oscillations. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 12, 1 — 4, 1976.
- White J. E. Seismic waves. N. Y. McGraw-Hill, 1965.
- Zener C. Elasticity and Anelasticity of Metals. Univ. Chicago Press, 1948.
- \*Петрашень Г. И. Основы математической теории распространения упругих волн. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. XVIII — Л.: Наука, 1978.
- \*Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. — Л.: Наука, 1980.
- \*Ратникова Л. И. Методы расчета сейсмических волн в тонкослоистых средах. — М.: Наука, 1973.
- \*Акопян С. Ц., Жарков В. Н., Любимов В. М. О динамическом модуле сдвига земных недр. ДАН СССР, 223, № 1, 1975.

## ЗАДАЧИ

- 5.1. Если поверхность упругого полупространства свободна от напряжений, то, как было показано выше, может существовать поверхностная волна смещений (волна Рэлея). Покажите, что, если поверхность неподвижна, соответствующей поверхностной волны напряжений существовать не может. (Указание: получите выражение для определителя и покажите, что оно не обращается в нуль при допустимых значениях  $p$ .)
- 5.2. Почему не может существовать граничная волна  $SH$  на границе между двумя однородными полупространствами?
- 5.3. Получите матрицу рассеяния волн  $P - SV$

$$\begin{pmatrix} \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} \\ \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} \end{pmatrix}$$

для упругого полупространства  $z > 0$  (см. рис. 5.5 и табл. 5.1), если граничные условия на  $z = 0$  имеют вид: а)  $u_z = 0$  и  $\tau_{zx} = 0$ ; б)  $u_x = 0$  и  $\tau_{zz} = 0$ . [Можно сократить выкладки, если воспользоваться уравнениями (5.33).]

Покажите, что если по направлению к поверхности  $z = 0$  распространяется комбинация энергий  $P$ - и  $SV$ -волн, то, суммируя отражения, полученные из граничных условий (а), с отражениями, полученными из граничных условий (б), можно взаимно уничтожить все волны, отраженные вниз от границы. (Смит [298, 299] показал, что это полезный способ устранения нежелательных отражений от границ сетки в численных исследованиях методами конечных элементов и конечных разностей.)

5.4. а) Покажите, что неоднородная волна  $P$  (5.50) и неоднородная волна  $SV$  (5.51) характеризуются прямым эллиптическим движением частиц.

б) Пользуясь (5.50) — (5.54), покажите, что вектор смещения частиц в волнах Рэлея на свободной поверхности ( $z = 0$ ) пропорционален вектору

$$\left( \frac{2i}{c_R} \sqrt{\frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{\beta^2}}, 0, \frac{2}{c_R} - \frac{1}{\beta^2} \right).$$

в) Покажите, что движение частиц в этой волне на свободной поверхности *возвратно-эллиптическое*.

г) Приведите краткую аргументацию в пользу того, что на достаточной глубине движение становится опять прямым эллиптическим.

5.5. Покажите, что именно *горизонтальная* (а не вертикальная) компонента смещения в волне Рэлея проходит через нуль при увеличении глубины (как это показано на рис. 5.11).

5.6. Поскольку сейсмометры очень часто помещают на свободной от напряжений поверхности Земли (или очень близко от нее), интересно получить полное смещение поверхности полупространства, вызванное волнами  $P$ ,  $SV$  или  $SH$ , падающими на нее снизу. Используя обозначения табл. 5.1 и рис. 5.5, покажите, что полное смещение поверхности для  $P$ -волны (амплитуды  $\vec{P}$ ), падающей снизу, равно

$$\frac{\vec{P} \left[ \frac{4\alpha p \cos i \cos j}{\beta^2} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\beta}, 0, \frac{-2\alpha \cos i}{\beta^2} \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\beta^2} - 2p^2 \right) \right] \exp[i\omega(px - t)]}{\left( \frac{1}{\beta^2} - 2p^2 \right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i \cos j}{\alpha} \frac{1}{\beta}},$$

а для  $SV$ -волны (амплитуды  $\vec{S}$ ), падающей снизу, равно

$$\frac{\vec{S} \left[ \frac{2 \cos j}{\beta} \frac{1}{\beta} \left( \frac{1}{\beta^2} - 2p^2 \right), 0, \frac{4p \cos i \cos j}{\beta} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\beta} \right] \exp[i\omega(px - t)]}{\left( \frac{1}{\beta^2} - 2p^2 \right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i \cos j}{\alpha} \frac{1}{\beta}}.$$

[В диапазоне  $1/\alpha < p < 1/\beta$  эту последнюю формулу можно использовать, придав положительное мнимое значение величине  $(\cos i)/\alpha = i\sqrt{p^2 - 1/\alpha^2}$  для получения фазового сдвига в смещении поверхности, когда  $SV$ -волна падает под запредельным углом  $j > j_c = \arcsin(\beta/\alpha)$ .]

Покажите, что в случае падения волны  $SH$  амплитуда смещения частиц свободной поверхности равна удвоенной амплитуде смещения частиц в падающей волне.

5.7. Пусть вид  $f$  определен (5.60). Покажите, что если  $\mathbf{A}$  имеет вид, указанный в (5.60), для волн  $P - SV$  справедливо  $\partial f / \partial z = \mathbf{A}f$ . Покажите, что  $\mathbf{A}$  сохраняет ту же форму, если  $\rho$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  — функции  $z$ , но (5.61) в общем случае не будет решением (5.56).

5.8. Рассмотрите потенциал  $P$ -волны  $\phi = A \exp[i\omega(px + \xi z - t)]$ , который в однородной среде удовлетворяет уравнению  $\alpha^2 \nabla^2 \phi = \ddot{\phi}$ , если  $\xi = (\alpha^{-2} - p^2)^{1/2}$ . Покажите, что  $u_x$ ,  $u_z$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zz}$ , построенные по этому потенциалу, образуют по существу первый столбец матрицы  $\mathbf{F} = \mathbf{E}\mathbf{A}$ , определенной в (5.65). (Различия возникают только из-за различной нормировки этой нисходящей волны  $P$ .)

Повторите то же самое для потенциала  $SV$ -волн  $B \exp[i\omega(px + \eta z - t)]$  (где  $\eta = (\beta^{-2} - p^2)^{1/2}$ ), потенциала  $P$ -волн  $C \exp[i\omega(px - \xi z - t)]$  и потенциала  $SV$ -волн  $D \exp[i\omega(px - \eta z - t)]$ . [Существенно, что различные столбцы  $\mathbf{F}$  в (5.65) — это восходящие и нисходящие волны  $P$  и  $SV$ , в которых компоненты смещений и напряжений для каждой волны выражены явно.]

Покажите, что эти четыре волны, выраженные в потенциалах, эквивалентны волновой системе  $\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{w}$ , в которой

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{i\omega A}{\alpha} \\ -\frac{i\omega B}{\beta} \\ \frac{i\omega C}{\alpha} \\ \frac{i\omega D}{\beta} \end{pmatrix}$$

5.9. Покажите, что  $Q$  в общем случае является четной функцией  $\omega$ , т.е.  $Q(-\omega) = Q(\omega)$ , и, следовательно, при отсутствии дисперсии затухающий импульс, описываемый (5.68), всегда симметричен относительно  $t = x/c$ .

5.10. Получите приближенное выражение (5.77) в двух случаях:

$$\text{а) } \alpha(\omega) = \frac{\alpha_0 \omega}{1 + \alpha_2 \omega^2},$$

$$\text{б) } \alpha(\omega) = \alpha_0 \omega \{H(\omega - \omega_l) - H(\omega - \omega_h)\}$$

(здесь  $\omega_l$  и  $\omega_h$  — нижняя и верхняя граничные частоты,  $H$  — ступенчатая функция Хевисайда); при выводе (5.77) используйте  $0 < \omega_l \ll \omega \ll \omega_h$ . Вам потребуются также преобразования Гильберта от двух функций — коэффициентов поглощения. Учтите, что  $\alpha(-\omega) = \alpha(\omega)$  и два приведенных выше определения даны для  $\omega > 0$ . Соответствующие преобразования Гильберта  $\mathcal{H}[\alpha(\omega)]$  равны

$$\frac{\alpha_0}{\pi} \frac{\omega}{1 + \alpha_2 \omega^2} \ln \left( \frac{1}{\alpha_2 \omega^2} \right) \quad \text{для (а)}$$

и

$$\frac{\alpha_0 \omega}{\pi} \ln \left\{ \frac{\omega_h^2 - \omega^2}{\omega_l^2 - \omega^2} \right\} \quad \text{для (б)}.$$

5.11. Азими и др. [18] и Стрик [315] исследовали закон затухания  $\alpha(\omega) = \alpha_0 |\omega|^s$  для  $s$ , чуть меньших единицы. Такой закон может дать практически линейную зависимость  $\alpha(\omega)$  от  $\omega$  в диапазоне наблюдаемых частот. Покажите, что из соотношения (13) дополнения 5.8 и преобразования Гильберта  $\mathcal{H}[\text{sign } \omega |\omega|^{s-1}] = |\omega|^{s-1} \text{tg } (s\pi/2)$  следует

$$\frac{1}{c(\omega)} = \frac{1}{c_\infty} + \frac{\alpha(\omega)}{|\omega|} \text{tg } \frac{s\pi}{2}.$$

Чтобы указанный выше закон затухания был практически линейным, необходимо, чтобы  $\alpha(\omega)/|\omega|$  было практически постоянным. Используя только что полученное уравнение, покажите, что относительная дисперсия между различными частотными компонен-

тами в сейсмическом диапазоне частот может быть слаба; в то же время абсолютная дисперсия (по отношению к фазовой скорости  $c_\infty$ ) может быть значительной для  $s$ , чуть меньших единицы. (Этот курьезный результат объясняется медленной сходимостью преобразования Гильберта. Амплитудный спектр на частотах мегагерцевого диапазона и выше контролирует фазовую задержку на сейсмических частотах. Это неправдоподобно, поскольку более разумные законы затухания по-другому выглядят на высоких частотах.)

**5.12.** Если  $Q^{-1} \ll 1$  и (5.96) представлено биномиальным разложением, то фазовую скорость для затухающей плоской волны  $S$  в общем случае можно представить как  $(\text{Re} [\mu]/\rho)^{1/2} (1 + \text{член порядка } 1/Q^2)$ . Противоречит ли это важному выводу разд. 5.5, что затухание в среде, подчиняющейся закону причинности, оказывает на скорость влияние, приводящее к поправке порядка  $1/Q$ ?

**5.13.** Среда с затуханием, в которой все потери энергии связаны со сдвиговыми деформациями и нет потерь при чистом сжатии, может иметь комплексный модуль сдвига, но чисто вещественный модуль всестороннего сжатия. Покажите, что в такой среде отношение  $Q$  для волн  $P$  к  $Q$  для волн  $S$  равно  $3\alpha^2/(4\beta^2)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — скорости волн двух типов (предположим, что  $Q \gg 1$ ).

**5.14.** Покажите, что для времен  $t$  таких, что  $|t - T| \ll T$ , можно считать, что функция Хевисайда  $H(t - T)$  имеет преобразование Гильберта  $(-1/\pi) \ln |\pm t - T|/T|$ .

## Отражение и преломление сферических волн. Задача Лэмба

Как правило, элементарная теория, необходимая для объяснения сейсмических данных, принадлежит одной из двух категорий: изучаются либо асимптотические приближения для волн, распространяющихся в реалистичных моделях Земли, либо точные решения для крайне идеализированных сред. Первая категория включает геометролучевую теорию (гл. 4), а вторая — все то, что проделано в гл. 5 по плоским волнам и однородным полупространствам. По мере разработки более сложных методов эти две категории постепенно сближаются, т.е. мы стараемся возможно точнее рассчитать волны, которые распространяются во вполне реалистичных моделях Земли.

В настоящей главе мы продолжим развитие теоретических вопросов, относящихся к упомянутой выше второй категории, так как будем искать пути расчета волн, излучаемых точечным источником в среде, состоящую только из двух однородных полупространств. В 1904 г. Лэмб [203] дал точное решение задачи этого типа, в которой источник действовал как импульс, приложенный в точке свободной поверхности твердого полупространства по нормали к ней. Однако, поскольку содержание статьи существенно выходило за рамки этой частной проблемы, термин «задача Лэмба» стали теперь относить и к более общему случаю произвольного источника в среде с одной границей; при этом основной интерес представляют точные расчеты (во временной области) волновых полей, излучаемых импульсным линейным или точечным источником.

В начале исследования мы дадим выражения для сферической волны, излучаемой точечным источником, в виде суперпозиции плоских волн (интеграл Вейля) и затем суперпозиции цилиндрических волн (интеграл Зоммерфельда). Когда сферическая волна взаимодействует с плоской границей между двумя различными полупространствами, образующую систему волн можно естественным образом разделить на три основных типа: 1) волны, непосредственно отраженные от границы или преломленные на ней; 2) волны, распространяющиеся от источника к приемнику по пути, включающему скольжение вдоль границы со скоростью объемной волны (головные волны); 3) волны типа волн Рэлея и Стоуна с амплитудой, экспоненциально затухающей с удалением от границы. Эти результаты получены преобразованием пути интегрирования в плоскости комплексного лучевого параметра. После того как мы дадим общее описание волн трех основных типов в частотной области, будут рассмотрены точные методы решения, основанные на работах Каньяра и де Хоопа. В них используется преобразование Лапласа по времени, однако окончательные решения даны во временной области. Снова имеется разделение волн на три типа с небольшими дополнительными вкладками просачивающихся мод (еще один тип граничных волн).

Вначале необходимо подчеркнуть, что лучшим способом решить задачу Лэмба является использование преобразования Лапласа и методов обращения Каньяра. При этом анализ пути интегрирования в плоскости комплексного лучевого параметра становится относительно простым, а фактическое обращение преобразования Лапласа с получением форм импульса во временной области делается тривиальным. Полное описание этих методов дано в разд. 6.4 и 6.5. Однако мы начнем изложение этого материала с применения преобразования Фурье. Отчасти — это дань обширной литературе по данному вопросу, включающей книги Юинга и др. [112], Бреховских [51], Червени и Равиндры [71] и сотни статей. Но главным образом методы преобразования Фурье необходимы в связи с задачей Лэмба для того, чтобы подготовить почву для гл. 9, где излагаются практические методы расчета сейсмограмм в реальных средах. Мы увидим, что метод отражений (reflectivity method) для слоистых сред и эффективные методы решения задач для случая скользящего падения основываются на вычислительных процедурах, использующих преобразование Фурье, а не аналитическое обращение преобразования Лапласа.

## 6.1. СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КАК СУПЕРПОЗИЦИЯ ПЛОСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение с точечным источником в начале координат и временной зависимостью  $\exp(-i\omega t)$ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \phi = 4\pi c^2 \delta(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t). \quad (6.1)$$

Решение этого уравнения (в бесконечном однородном пространстве) получается из (4.4) в виде

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{R} \exp \left[ i\omega \left( \frac{R}{c} - t \right) \right], \quad (6.2)$$

где  $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ .

Уравнение (6.1) можно также решать, приняв временную зависимость  $\phi(\mathbf{x}, t)$  в виде гармонического колебания  $\exp(-i\omega t)$  и используя затем методы преобразования Фурье для получения пространственной зависимости. Найдем, что

$$\phi(\mathbf{k}, t) = [4\pi c^2 / (k^2 c^2 - \omega^2)] \exp(-i\omega t),$$

где  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ . Тогда из (6.2) и трехкратного обратного преобразования  $\phi(\mathbf{k}, t)$  получим

$$\frac{1}{R} \exp \left[ i\omega \left( \frac{R}{c} - t \right) \right] = \frac{\exp(-i\omega t)}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} dk_x dk_y dk_z. \quad (6.3)$$

Левая часть (6.3) — это сферическая волна, бегущая от источника со скоростью  $c$ . Ее амплитуда зависит только от радиального расстояния и не варьирует с изменением направления. Правая часть (6.3) имеет весовую функцию  $[2\pi^2(k^2 - \omega^2/c^2)]^{-1}$  и является суперпозицией плоских волн  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$  по всему диапазону  $k_x, k_y, k_z$ . Поэтому может показаться, что мы достигли сво-

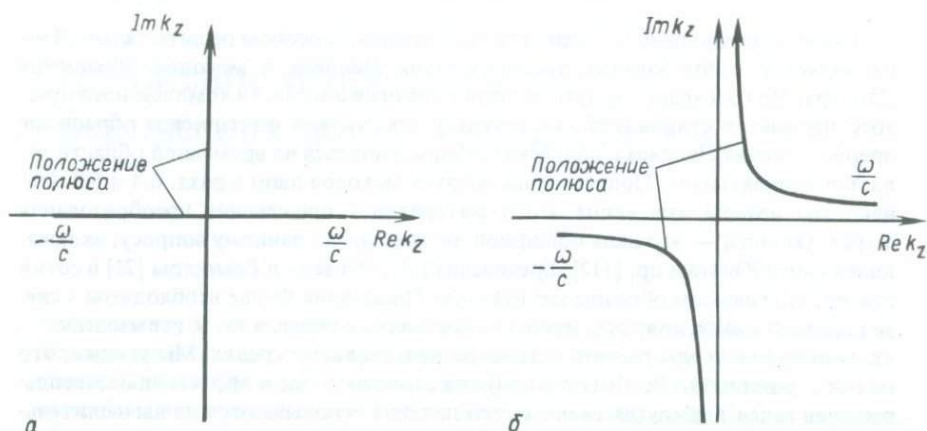


Рис. 6.1. Положение полюсов на плоскости комплексного  $k_z$  для различных действительных значений  $k_x, k_y$  и фиксированного  $\omega > 0$ . **а** — упругая среда, **б** — поглощающая среда.

ей цели и представили сферическую волну в виде суперпозиции плоских волн. Однако более внимательное рассмотрение выражения для плоских волн в (6.3) показывает, что они имеют произвольную скорость ( $\omega/k$ ) от нуля до бесконечности, так что пока не являются плоскими волнами в среде с данной скоростью  $c$ .

Чтобы получить интеграл Вейля, мы должны проинтегрировать в (6.3) по одной из компонент волнового числа; мы проведем интегрирование по  $k_z$ , так что оставшиеся интегралы должны браться по горизонтальным волновым числам.

Интегрирование в (6.3) по  $k_z$  осуществляется просто, если продолжить  $k_z$  в комплексную область и применить теорию вычетов. При заданных значениях  $k_x$  и  $k_y$ , подынтегральное выражение имеет полюсы в  $k_z = \pm [(\omega^2/c^2) - k_x^2 - k_y^2]^{1/2}$ , и единственная трудность состоит в том, что (в некотором диапазоне значений  $k_x$  и  $k_y$ ) эти полюсы лежат на действительной оси  $k_z$ , т.е. на пути интегрирования (рис. 6.1,а). Чтобы обойти эту трудность, введем слабое затухание, сделав  $1/c$  комплексным. Как мы видели в гл. 5 [уравнения (5.87), (5.88)], для этого надо представить  $1/c$  в виде суммы некоторого опорного значения и малой комплексной поправки, имеющей *положительную* мнимую часть. Таким образом,  $\text{Im} \{1/c\} = \varepsilon$  и  $\varepsilon > 0$  (при  $\omega > 0$ ). Непосредственным результатом этой операции является устранение полюсов с пути интегрирования сдвигом их в первый и третий квадранты (рис. 6.1,б).

1 положение полюса в первом квадранте определяется как

$$k_z = i\gamma = +(\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}.$$

Тогда положение другого полюса (в третьем квадранте) будет

$$k_z = -i\gamma = -(\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}.$$

В обоих случаях  $\text{Re} \{\gamma\}$  положительно и  $\text{Im} \{\gamma\}$  отрицательно.

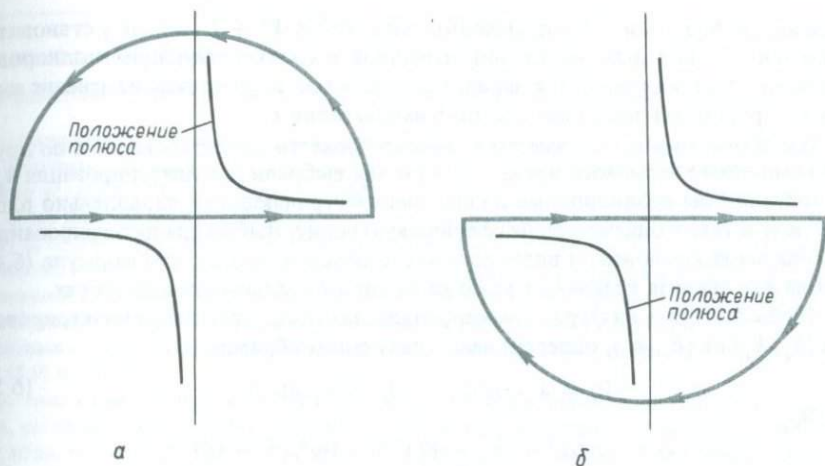


Рис. 6.2. Пути интегрирования в плоскости комплексного  $k_z$  при выводе интеграла Вейля: а — в случае  $z > 0$ , б — при  $z < 0$ .

Теперь легко оценить вычет. При  $z > 0$  множитель  $\exp(ik_z z)$  сводит подынтегральное выражение в (6.3) к нулю, если интеграл берется по достаточно большой полуокружности в верхней полуплоскости (рис. 6.2,а). Добавляя эту полуокружность к пути интегрирования вдоль действительной оси, получаем замкнутый контур, обходящий полюс  $k_z = i\gamma$  в первом квадранте против часовой стрелки, так что

$$\phi = 2\pi i \times \text{вычет} = \frac{\exp(-i\omega t)}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik_x x + ik_y y - \gamma z)}{\gamma} dk_x dk_y.$$

Для  $z < 0$  добавим к пути интегрирования достаточно большую полуокружность в нижней полуплоскости (рис. 6.2,б), чтобы получить замкнутый путь в отрицательном (т.е. по часовой стрелке) направлении. Этот контур содержит полюс в  $k_z = -i\gamma$  в третьем квадранте. Тогда

$$\phi = -2\pi i \times \text{вычет} = \frac{\exp(-i\omega t)}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik_x x + ik_y y + \gamma z)}{\gamma} dk_x dk_y.$$

Объединяя эти результаты, получаем интеграл Вейля:

$$\frac{1}{R} \exp\left(i\omega \frac{R}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik_x x + ik_y y - \gamma|z|)}{\gamma} dk_x dk_y, \quad (6.4)$$

где  $\gamma = (k_x^2 + k_y^2 - \omega^2/c^2)^{1/2}$ , и знак  $\gamma$  выбран так, что  $\text{Re } \gamma > 0$ . В предельном случае нулевого затухания имеем  $\text{Re } \gamma \geq 0$ .

В приведенной формуле плоские волны в подынтегральном выражении теперь уже удовлетворяют волновому уравнению для скорости  $c$ , и сферическая волна действительно представлена суперпозицией таких плоских волн. Заметим, что для некоторых подобластей интегрирования по  $k_x, k_y$  плоские волны явля-

ются неоднородными. Это происходит при  $\omega^2/c^2 < k_x^2 + k_y^2$ , когда  $\gamma$  становится положительной действительной величиной и соответствующие неоднородные волны распространяются параллельно плоскости  $xy$ , причем изменение амплитуд происходит наиболее быстро в направлении  $z$ .

Как отмечалось выше, вместо  $k_z$  можно провести интегрирование и по другой компоненте волнового числа. Если бы мы выбрали для интегрирования  $k_x$ , то получили бы неоднородные волны, распространяющиеся параллельно плоскости  $yz$  и также описывающие сферическую волну. Выбор для интегрирования вертикальной компоненты волнового числа обусловлен тем, что формула (6.4) удобна для анализа граничных условий на горизонтальных поверхностях.

Чтобы получить интеграл Зоммерфельда, заменим переменные интегрирования  $(k_x, k_y)$  на  $(k_r, \phi')$ , определяемые следующим образом:

$$k_x = k_r \cos \phi', \quad k_y = k_r \sin \phi'. \quad (6.5)$$

Тогда

$$i\gamma = (\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2} = (\omega^2/c^2 - k_r^2)^{1/2},$$

и элемент площади  $dk_x dk_y$  заменяется элементом  $dk_r (k_r d\phi')$ , так что вся плоскость горизонтального волнового числа ( $-\infty < k_x < \infty$ ;  $-\infty < k_y < \infty$ ) описывается новыми переменными в интервалах  $0 \leq k_r < \infty$ ,  $0 \leq \phi' < 2\pi$ . Интеграл (6.4) принимает теперь иной вид:

$$\frac{1}{R} \exp\left(i\omega \frac{R}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk_r \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{k_r}{\gamma} \exp[ik_r r \cos(\phi - \phi') - \gamma|z|], \quad (6.6)$$

где  $(r, \phi)$  — полярные координаты, связанные с  $(x, y)$  соотношениями  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ . Мы часто будем называть  $r$  горизонтальным расстоянием или просто расстоянием, а  $\phi$  — азимутальной координатой в цилиндрической или сферической системе. Поскольку  $z$  растет с глубиной,  $\phi$  увеличивается по часовой стрелке, если смотреть на горизонтальную плоскость сверху.

Интеграл по  $\phi'$  в (6.6) можно выразить явно при помощи соотношения

$$2\pi J_0(k_r r) = \int_0^{2\pi} \exp(ik_r r \cos \phi) d\phi; \text{ это приводит к интегралу Зоммерфельда}$$

$$\frac{1}{R} \exp\left(i\omega \frac{R}{c}\right) = \int_0^\infty \frac{k_r J_0(k_r r) \exp(-\gamma|z|)}{\gamma} dk_r \quad (6.7)$$

где  $i\gamma = (\omega^2/c^2 - k_r^2)^{1/2}$  и  $\text{Re } \gamma > 0$ . Подынтегральное выражение представляет собой новый вид фундаментальных волн, а именно цилиндрическую волну (симметричную относительно вертикальной оси), в которой зависимости от  $r$  и  $z$  выражаются отдельными множителями.

В гл. 5 оказалось удобным анализировать плоские волны, направив ось  $y$  по нормали к направлению распространения, и отождествлять  $k_x$  с лучевым параметром  $p$  при помощи соотношения  $k_x = (\omega \sin i)/c = \omega p$  [см., например, уравнение (5.16)]. Теперь, в случае точечного источника, система плоских волн, уходящих от источника, содержит всевозможные горизонтальные направления распространения; это явно показано в (6.6) интегрированием по  $\phi'$ . Соотношение между горизонтальным волновым числом и лучевым параметром принимает

## ДОПОЛНЕНИЕ 6.1.

## Фундаментальное значение интегралов Вейля и Зоммерфельда

Вся совокупность решений волнового уравнения с конкретными однородными граничными условиями образует векторное пространство, и в различных координатных системах можно установить базис, покрывающий это пространство. Интеграл Вейля использует как базис плоские волны, суммируя их для получения решения, соответствующего точечному источнику. Интеграл Зоммерфельда является аналогичным результатом для цилиндрических волн. Мы часто называем базисные векторы собственными векторами или собственными функциями, относящимися к конкретной системе координат. Плоские и цилиндрические волны в задаче изучения решений волнового уравнения методом разделения переменных можно рассматривать как собственные функции [см., например, гл. 5, уравнения (5.9) и (5.10)].

К этим идеям мы будем неоднократно возвращаться в последующих главах в тех случаях, когда собственными функциями могут быть моды векторных смещений поверхностных волн, источник может иметь сложную диаграмму направленности излучения, координатная система может быть сферической системой с началом в центре Земли и удобнее использовать дискретную сумму собственных функций вместо применявшихся здесь интегралов по горизонтальным волновым числам.

Задача отыскания конкретного интеграла (или суммы) по собственным функциям, подходящим для заданного источника, в таком подходе сводится к отысканию коэффициента для каждой (соответствующим образом нормированной) собственной функции, участвующей в разложении. Этот коэффициент — полезная мера степени возбуждения данной собственной функции.

Общее для всех этих разложений источника свойство, верное как для интеграла Вейля, так и для более сложных выражений, представляющих поверхностные волны и нормальные моды, описанные в гл. 7 и 8, заключается в том, что подынтегральное выражение (или каждый член суммы) можно представить как произведение вертикальной собственной функции, оцениваемой в источнике, вертикальной собственной функции, оцениваемой в приемнике, и горизонтальной волновой функции, зависящей от горизонтального расстояния между источником и приемником. [В нашем случае, например в (6.4) и (6.9), вертикальные собственные функции в источнике и приемнике — это волны, бегущие в противоположных направлениях, поэтому в формулах появляется только разность фаз этих волн, пропорциональная расстоянию между источником и приемником по вертикали.] Независимая переменная, с помощью которой описываются различные члены в интеграле, — это по существу горизонтальная медленность; функция этой переменной входит как весовой множитель в подынтегральное выражение.

вид

$$k_x = \omega \sin i \cos \phi' / c = \omega p \cos \phi', \quad k_y = \omega \sin i \sin \phi' / c' = \omega p \sin \phi'.$$

Из сравнения с (6.5) видно, что

$$k_r = \omega p. \quad (6.8)$$

Следовательно, пользуясь (6.7), можно выразить сферическую волну в виде интеграла по всем лучевым параметрам:

$$\frac{1}{R} \exp\left(i\omega \frac{R}{c}\right) = i\omega \int_0^\infty \frac{p}{\xi} J_0(\omega p r) \exp(i\omega \xi |z|) dp. \quad (6.9)$$

Здесь принято  $i\gamma = \omega(c^{-2} - p^2)^{1/2} = \omega\xi$ . Напомним также, что  $\text{Re } \gamma > 0$ . Следовательно,

$$\xi = (c^{-2} - p^2)^{1/2},$$

и мы должны выбрать ветвь  $\text{Im } \xi > 0$ , которая в идеально упругой среде переходит в  $\text{Im } \xi \geq 0$ . При таком определении квадратного корня легко идентифицировать вертикальную волновую функцию в (6.9) с выражениями из гл. 5: она равна  $\exp [i\omega(c^{-1} \cos i)|z|]$  с положительным мнимым  $(c^{-1} \cos i) = (c^{-2} - p^2)^{1/2} = \xi$  при условии  $1/c < p$ . Заметим, что  $\xi$  — вертикальная медленность, а  $i\gamma$  — соответствующее вертикальное волновое число, в то время как  $p$  — горизонтальная медленность. В случае волн  $S$  мы будем использовать  $\eta$  для обозначения вертикальной медленности и  $i\nu$  для вертикального волнового числа. Тогда  $\xi^2 + p^2 = 1/\alpha^2$  и  $\eta^2 + p^2 = 1/\beta^2$ . Поскольку в этой главе речь идет в основном об объемных волнах и не испытывающих дисперсии поверхностных волнах, практически удобнее иметь дело с медленностями  $p, \xi, \eta$ . Поэтому мы будем систематически пользоваться (6.9), а не (6.7). Для поверхностных волн, рассматриваемых в гл. 7, когда возможна сильная дисперсия, а вертикальное волновое число — мнимая величина, мы вернемся к использованию таких переменных, как  $k_r, \gamma$  и  $\nu$ .

## 6.2. ОТРАЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН ОТ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ; АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

В этом и следующем разделах мы опишем основные явления, происходящие при падении криволинейного волнового фронта на границу двух различных сред. На этой начальной стадии мы рассмотрим волны фиксированной частоты, поскольку многие наблюдения в сейсмологии можно интерпретировать как синтез (обратное преобразование Фурье) таких волн. Позже для получения точных волновых решений во временной области мы воспользуемся методом, который удобнее реализовать на основе преобразования Лапласа.

В первой из задач, которые мы будем решать (рис. 6.3), рассматриваются акустические волны в среде, состоящей из двух различных однородных жидких полупространств, контактирующих по плоскости  $z = 0$ . Источник находится в среде 1 (плотность  $\rho_1$ , скорость  $\alpha_1$ ) на глубине  $z_0 < 0$ ; в этой же среде находится точка наблюдений  $(x, y, z)$ . Расстояние источник — приемник равно

$$R = [x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{1/2},$$

Пусть источник генерирует волны давления  $P$  вида

$$P = P^{\text{пад}} \equiv A \frac{1}{R} \exp \left[ i\omega \left( \frac{R}{\alpha_1} - t \right) \right],$$

где  $A$  — некая константа.

Воспользовавшись результатами разд. 6.1, выразим  $P^{\text{пад}}$  в виде суперпозиции цилиндрических волн. Тогда мы сможем применить теорию, развитую в гл. 5, для отыскания выражений, описывающих отраженные и преломленные пло-

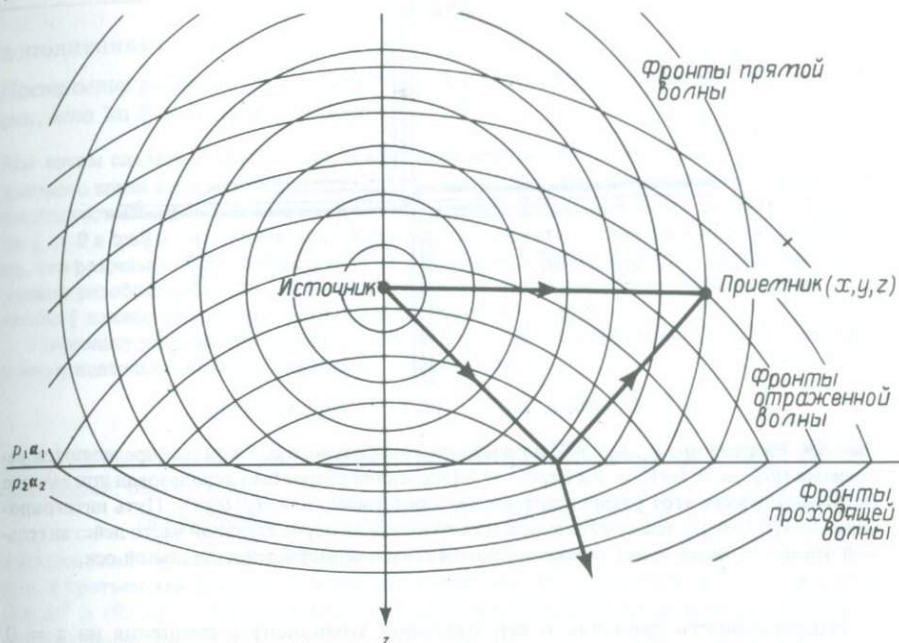


Рис. 6.3. Расположение источника и приемника в жидком полупространстве  $z < 0$  с плотностью  $\rho_1$  и скоростью  $\alpha_1$ . Другое жидкое полупространство ( $\rho_2, \alpha_2$ ) занимает область  $z > 0$ ; давление и вертикальное смещение непрерывны на границе. Обычно из-за сложности систем волновых фронтов мы пользуемся только лучами.

ские волны, которые опять должны испытывать суперпозицию. Итак,

$$\begin{aligned}
 p^{\text{пад}} &= \frac{A}{R} \exp \left[ i\omega \left( \frac{R}{\alpha_1} - t \right) \right] \\
 &= i\omega \exp(-i\omega t) \int_0^\infty \frac{Ap}{\xi_1} J_0(\omega pr) \exp(i\omega \xi_1 |z - z_0|) dp, \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

где  $\xi_1 = \alpha_1^{-1} \cos i_1 = (\alpha_1^{-2} - p^2)^{1/2}$  положительное мнимое, если  $1/\alpha_1 < p$ . Рассматривая подынтегральное выражение как интеграл по азимуту от плоских волн [ср. с уравнением (6.6)], естественно попытаться представить решения для полей отраженных и преломленных волн как

$$p^{\text{отр}} = i\omega \exp(-i\omega t) \int_0^\infty \frac{Bp}{\xi_1} J_0(\omega pr) \exp[-i\omega \xi_1 (z + z_0)] dp \quad \text{при } z < 0 \quad (6.12)$$

и

$$p^{\text{прел}} = i\omega \exp(-i\omega t) \int_0^\infty \frac{Cp}{\xi_1} J_0(\omega pr) \exp(-i\omega \xi_1 z_0 + i\omega \xi_2 z) dp \quad \text{при } z > 0. \quad (6.13)$$

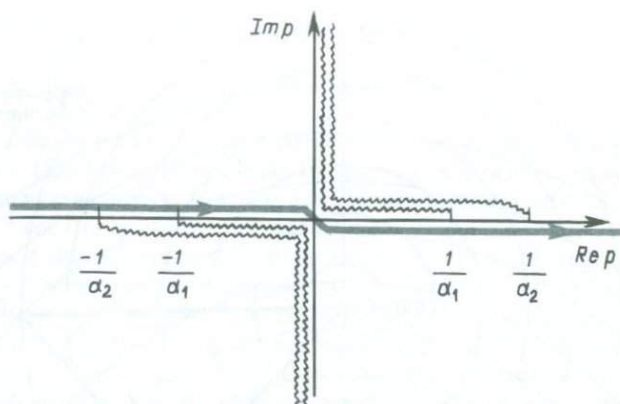


Рис. 6.4. Разрезы для  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  и  $p^{1/2}$  в плоскости комплексного  $p$ . Разрезы определяются условиями  $\text{Im } \xi_1 = 0$ ,  $\text{Im } \xi_2 = 0$  и  $\text{Re } p^{1/2} = 0$  [последний разрез был использован при выводе (6.16)]. Фактически этот разрез пригоден непосредственно для  $H_0^{(1)}(\omega p r)$ . Путь интегрирования для  $P^{\text{отр}}$  (6.17) лежит чуть выше трех разрезов на отрицательной части действительной оси и чуть ниже трех разрезов на положительной части действительной оси.

Непрерывность давления и вертикальной компоненты смещения на  $z = 0$  будет обеспечена, если  $A + B = C$  и  $(\xi_1/\rho_1)(A - B) = (\xi_2/\rho_2)C$ . Эти уравнения определяют коэффициенты отражения/преломления плоских волн:

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho_1 \xi_2 - \rho_2 \xi_1}{\rho_1 \xi_2 + \rho_2 \xi_1} = -\frac{\rho_1 \frac{\cos i_2}{\alpha_2} - \rho_2 \frac{\cos i_1}{\alpha_1}}{\rho_1 \frac{\cos i_2}{\alpha_2} + \rho_2 \frac{\cos i_1}{\alpha_1}} \quad (6.14)$$

и

$$\frac{C}{A} = \frac{2\rho_2 \xi_1}{\rho_1 \xi_2 + \rho_2 \xi_1} = \frac{2\rho_2 \frac{\cos i_1}{\alpha_1}}{\rho_1 \frac{\cos i_2}{\alpha_2} + \rho_2 \frac{\cos i_1}{\alpha_1}}$$

Заметим также, что, когда  $1/\alpha_2 < p$ , то  $\alpha_2^{-1} \cos i_2 = \xi_2 = (\alpha_2^{-2} - p^2)^{1/2}$  положительное мнимое, чем обеспечивается экспоненциальное затухание (6.13) с глубиной.

Оставшуюся часть этого раздела мы посвятим приближенной оценке колебаний в отраженной волне (6.12), используя для этого стандартный метод интегрирования — метод седловой точки. Начнем со случая  $\alpha_1 > \alpha_2$ .

Первый шаг — замена в (6.12) функции  $J_0$  функцией Ханкеля  $H_0^{(1)}$ . Поскольку  $J_0(x) = (1/2)[H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x)]$  и  $H_0^{(2)}(x) = -H_0^{(1)}(-x)$ , находим

$$P^{\text{отр}} = \frac{i\omega}{2} \exp(-i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Bp}{\xi_1} H_0^{(1)}(\omega p r) \exp[-i\omega \xi_1(z + z_0)] dp \quad (6.15)$$

(здесь использована четность  $B$  как функции  $p$ ).

## ДОПОЛНЕНИЕ 6.2.

**Построение разрезов  $(\alpha^{-2} - p^2)^{1/2} = \xi$  в плоскости комплексного  $p$  при условии, что  $\text{Im } \xi \geq 0$  для всей плоскости**

Мы хотим сделать  $\xi$  однозначной аналитической функцией от  $p$ , и произвол в знаке квадратного корня вынуждает нас рассмотреть две  $p$ -плоскости (два римановых листа), чтобы полностью описать  $\xi$ . Будем говорить о *верхнем* и *нижнем листах*, соответствующих  $\text{Im } \xi > 0$  и  $\text{Im } \xi < 0$  и соединенных вдоль линий (разрезов), на которых  $\text{Im } \xi = 0$ . Очевидно, что разрезы содержат точки, где  $\xi = 0$  (точки ветвления); в них  $p = \pm 1/\alpha$ . Нам необходимо разобраться в том, как находить замкнутые контуры вокруг точки ветвления, так чтобы  $\xi$  плавно изменялось с изменением  $p$  вдоль всего пути.

Поскольку разрезы определены условием  $\text{Im } \xi = 0$ , то разность  $\alpha^{-2} - p^2$  вещественна и неотрицательна на саих разрезах и, следовательно,

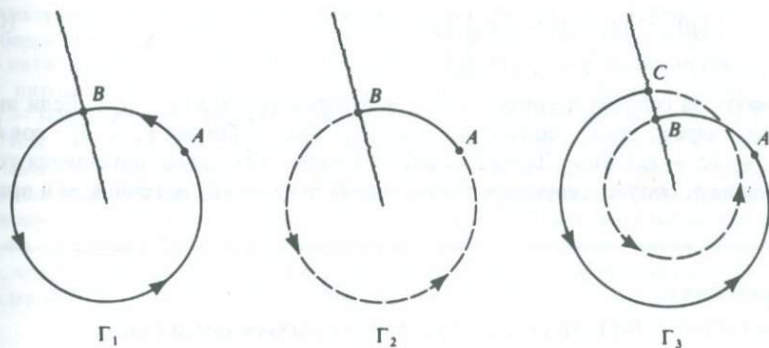
$$1/\alpha^2 - (\text{Re } p)^2 + (\text{Im } p)^2 - 2i(\text{Re } p)(\text{Im } p) \geq 0. \quad (1)$$

Но раз  $\text{Im } (1/\alpha^2)$  (мало и) положительно, требование о том, чтобы левая часть (1) была вещественной, означает, что

$$(\text{Re } p)(\text{Im } p) = \varepsilon \text{ для некоторого } \varepsilon > 0, \text{ где } \varepsilon \rightarrow 0$$

в предельном случае идеальной упругости. Поэтому разрезы лежат на гиперболах в первом и третьем квадрантах. Дальнейшее ограничение, вытекающее из (1), заключается в  $(\text{Im } p)^2 \geq (\text{Re } p)^2 - \text{Re } (1/\alpha^2)$ , что указывает предельное положение разрезов, схематически показанное на рис. 6.4.

Чтобы увидеть, как при помощи разрезов и римановых листов первоначально двузначная функция  $\xi = \xi(p)$  превращается в однозначную аналитическую функцию, рассмотрим приведенные ниже три контура.



Замкнутый контур  $\Gamma_1$  начинается в точке  $A$  и проходит целиком по одному и тому же листу:  $\xi$  однозначно, но даже не является непрерывным в точке  $B$ , где контур пересекает разрез. На контуре  $\Gamma_2$   $\xi$  — аналитическая функция в  $B$ , что вынуждает продолжить этот контур по другому листу (пунктирная линия); но при этом  $\Gamma_2$  не приведет  $\xi$  к тому же значению в точке  $A$ , какое было там первоначально. Наконец, контур  $\Gamma_3$  дважды обходит вокруг точки ветвления, причем функция  $\xi$  аналитическая вдоль всего пути и принимает по возвращении в  $A$  то же значение, что и первоначально.

Далее предположим, что расстояние  $r$  содержит много длин волн, т.е.  $pr$  велико, и можно заменить функцию  $H_0^{(1)}(\omega pr)$  ее асимптотическим выражением

$$H_0^{(1)}(\omega pr) = \left(\frac{2}{\pi\omega pr}\right)^{1/2} \exp[i(\omega pr - \pi/4)] \left[1 - \frac{i}{8\omega pr} + O\left(\frac{1}{\omega^2 p^2 r^2}\right)\right]. \quad (6.16)$$

[Это разложение несправедливо для значений  $p$ , близких к нулю, но позднее мы деформируем путь интегрирования так, чтобы избежать  $p = 0$ . Было бы более строго, если бы подстановка (6.16) была выполнена после того, как путь деформирован.] Приближенный результат теперь имеет вид

$$P^{\text{отр}} = \left(\frac{\omega}{2\pi r}\right)^{1/2} \exp[-i(\omega t - \pi/4)] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Bp^{1/2}}{\xi_1} \exp[i\omega(pr - \xi_1 z - \xi_1 z_0)] dp, \quad (6.17)$$

в подынтегральном выражении отброшены члены порядка  $1/\omega$  и выше, а  $B = B(p)$ , содержащее  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , определено в (6.14). Положение разрезов для  $\xi_1$  и  $\xi_2$  описано в дополнении 6.2, а разрезы для  $P^{\text{отр}}$  показаны на рис. 6.4.

Теперь нам нужно деформировать путь интегрирования таким образом, чтобы только ограниченный диапазон значений  $p$  давал сколько-нибудь значительный вклад в интеграл, и затем оценить сам интеграл. Для этой цели мы воспользуемся стандартным методом седловой точки, что позволит получить асимптотическое приближение для  $P^{\text{отр}}$ , справедливое в области достаточно высоких частот.

Следуя обозначениям дополнения 6.3 при  $x = \omega$  и  $\zeta = p$ , мы видим, что

$$\begin{aligned} f(p) &= i(pr + \xi_1|z + z_0|) \text{ (напомним, что } z < 0, z_0 < 0), \\ f'(p) &= i(r - p|z + z_0|/\xi_1), \\ f''(p) &= -i|z + z_0|/(\alpha_1^2 \xi_1^3), \end{aligned} \quad (6.18)$$

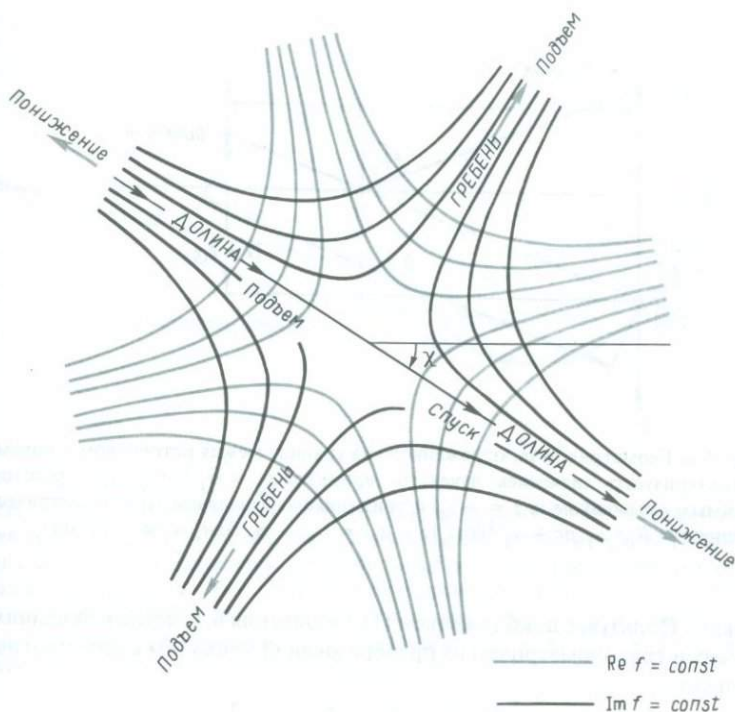
указывают на седловую точку  $p = p_s$ , в которой  $r\xi_1 = p|z + z_0|$ . Если выразить  $p_s$  через угол, получаем  $p_s = \alpha_1^{-1} \sin i_s$ . Тогда  $\xi_1 = \alpha_1^{-1} \cos i_s$  и  $r \cos i_s = |z + z_0| \sin i_s$ . Теперь из рис. 6.5 видно, что седло приходится точно на значение  $p$ , соответствующее отраженному лучу между источником и прием-

#### ДОПОЛНЕНИЕ 6.3.

Оценка  $I(x) = \int_C F(\zeta) \exp[xf(\zeta)] d\zeta$  методом наискорейшего спуска

Мы предполагаем, что читатель имеет представление об этом методе (см., например, [183]). Здесь мы введем обозначения и продемонстрируем ряд его приложений. Пусть  $f(\zeta)$  имеет седловую точку  $\zeta = \zeta_0$ . Там, где  $f$  — аналитическая функция, линии  $\text{Re } f = \text{const}$  и  $\text{Im } f = \text{const}$  ортогональны друг другу. Вблизи  $\zeta_0$  эти линии — гиперболы, как показано на рисунке. (Угол  $\chi \approx -32^\circ$ . На практике он может принимать любое значение в интервале  $-\pi/2 \leq \chi \leq \pi/2$ .)

Термины «долина» и «гребень» и направления подъема и спада описывают топографию поверхности с высотами, равными  $\text{Re } f$ , оценка которых берется вблизи  $\zeta_0$ . На амплитуду подынтегрального выражения в  $I(x)$  больше всего влияет величина  $\exp(x \text{Re } f)$ ;



следовательно, раз  $x$  предполагается большим и положительным, термины «долина» и «гребень» тем более применимы и ко всему подынтегральному выражению. Выбирая путь интегрирования так, чтобы он шел вверх по одной долине, пересекал гребень в его самой низкой точке и спускался вниз по другой долине, часто удается достичь цели — минимизировать интервал интегрирования, дающий значимый вклад в оценку  $I(x)$ . Как конкретно деформируется контур  $C$ , чтобы пересечь седло, разделяющее долины, зависит от расположения особых точек и разрезов подынтегрального выражения и конечных точек  $C$ . Будем предполагать, что  $C$  уже деформирован к пути, описанному выше, имеющему участки подъема и спуска и пересекающему действительную положительную ось  $\zeta$  под углом  $\chi$  ( $-\pi < \chi \leq \pi$ ). Разложим  $f(\zeta)$  вблизи  $\zeta_0$  в ряд Тейлора. Легко показать, что  $f''(\zeta_0)e^{2ix}$  вещественно и отрицательно. Пренебрегая в разложении  $f(\zeta)$  членами порядка  $O[(\zeta - \zeta_0)^3]$ , находим, что вклад в  $I(x)$  окрестности седла асимптотически равен

$$\left| \frac{2\pi}{xf''(\zeta_0)} \right|^{1/2} F(\zeta_0)e^{ix} \exp[xf(\zeta_0)] \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Однако эта формула представляет для сейсмологии лишь преходящий интерес, так как (что будет показано позже) предлагаемое ею решение мы можем получить с помощью геометролучевой теории. Более важны численные методы интегрирования по седловому участку без грубых приближений для  $f(\zeta)$ . Мы часто будем двигаться по «долинам»  $\text{Re } f$  на большие расстояния от самого седла (см., например, рис. 6.6), где направление долин не ортогонально к направлению гребней на самом седле.

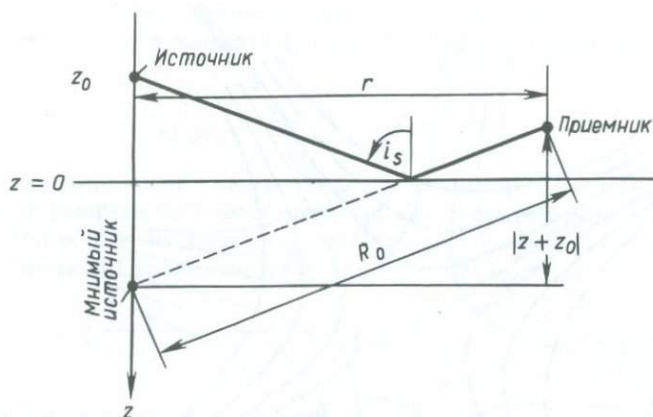


Рис. 6.5. Геометрия луча, отраженного на границе между источником и приемником. Луч характеризуется значением лучевого параметра  $p_s = \alpha_1^{-1} \sin i_s$ ,  $R_0$  — расстояние между мнимым источником (в  $z = -z_0$ ) и приемником. Упомянем тригонометрические соотношения:  $r = R_0 p_s \alpha_1$ ,  $pr + \alpha_1^{-1} \cos i_s |z + z_0| = R_0 / \alpha_1$  и  $r \cos i_s = |z + z_0| \sin i_s$ .

ником. Пользуясь приближением (1) дополнения 6.3, после небольших алгебраических и тригонометрических преобразований приходим к асимптотическому результату

$$P^{\text{отр}} \sim \frac{B(p_s)}{R_0} \exp \left[ i\omega \left( \frac{R_0}{\alpha_1} - t \right) \right] \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty, \quad (6.19)$$

однако при том условии, что действительная часть пути интегрирования в (6.17) может деформироваться в путь наискорейшего спуска, проходящий через  $p = p_s$ , и при этом не вносятся дополнительных вкладов от особенностей и разрывов подынтегрального выражения. Само седло лежит на двух разрезах, так что на первый взгляд кажется, что воспользоваться методом наискорейшего спуска не удастся. Действительно, это было бы невозможно, если бы путь интегрирования лежал только на листе римановой поверхности с  $\text{Im } \xi_1 \geq 0$ ,  $\text{Im } \xi_2 \geq 0$ . Но, используя (в первом квадранте) лист с  $\text{Im } \xi_1 < 0$  и  $\text{Im } \xi_2 < 0$ , мы получим путь  $\Gamma$ , показанный на рис. 6.6. Он обладает следующими свойствами:

- 1) величина  $i(pr - \xi_1 z - \xi_1 z_0)$  — аналитическая функция, принимающая значение  $iR_0/\alpha_1$  в седловой точке;
- 2) всюду на  $\Gamma$ , кроме седловой точки,  $i(pr - \xi_1 z - \xi_1 z_0) - iR_0/\alpha_1$  — отрицательное вещественное число;
- 3) как показано на рис. 6.6, асимптоты  $\Gamma$  — прямые линии, образующие углы  $i_s$  с положительной и отрицательной действительной  $p$ -осью.

Эти три свойства следуют из решения уравнения

$$i(pr - \xi_1 z - \xi_1 z_0) = -X^2 + iR_0/\alpha_1$$

для  $p$  как функции вещественного числа  $X$ . Другие детали таких решений будут рассмотрены позднее (в подписи к рис. 6.12, в и при описании теории Каньяра

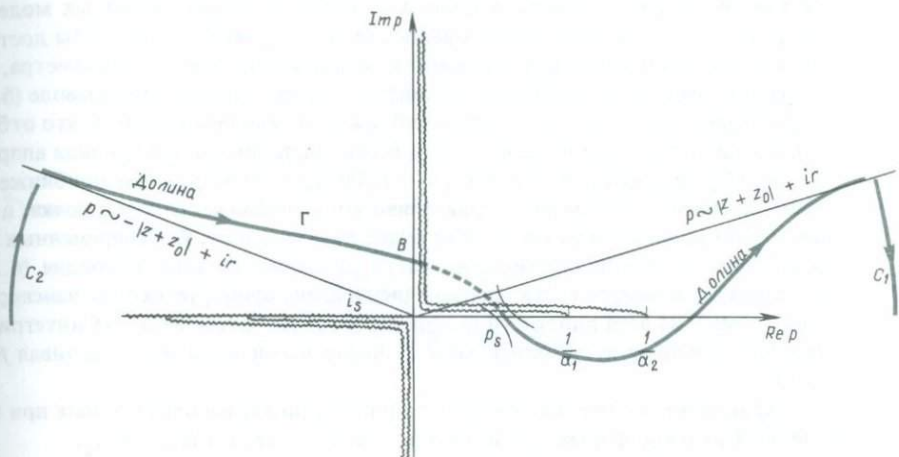


Рис. 6.6. Путь наискорейшего спуска  $\Gamma$  в плоскости комплексного лучевого параметра, позволяющий получить  $P^{\text{отр}}$  (6.17) при  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Указан точный путь на всем его протяжении, найденный в соответствии с правилом, по которому  $\omega f(p) - \omega f(p_s)$  вещественно и отрицательно, так что  $\exp[\omega f(p)]$  затухает по экспоненте с удалением от седловой точки. Гребни и долины вблизи самой седловой точки показаны на рисунке в дополнении 6.3, где  $\chi = -\pi/4$ . Пунктиром показана часть пути, проходящая по нижнему листу римановой поверхности, на котором  $\text{Im} \xi_1$  и  $\text{Im} \xi_2$  отрицательны.

для соответствующих путей). Здесь нам остается только указать, что, когда  $\alpha_1 > \alpha_2$ , деформирование пути (6.17), идущего вдоль действительной оси, к пути  $\Gamma$  рис. 6.6 не вызывает затруднений. При этом появятся связующие дуги  $C_1$  и  $C_2$  в первом и втором квадрантах, однако на них подынтегральное выражение экспоненциально мало. В точке  $B$  контур  $\Gamma$  должен покинуть верхний риманов лист, чтобы избежать разрывов подынтегрального выражения. Достигнув верхней точки седла,  $\Gamma$  вновь появляется на верхнем листе, где и остается на всей оставшейся части пути. Удостоверившись, что разрезы и особенности не создали дополнительных вкладов в решение, мы можем вернуться к анализу асимптотического решения (6.19).

Заметим, что множитель, описывающий геометрическое расхождение для отраженной волны, должен быть равен  $1/R_0$ , а ее время пробега  $R_0/\alpha_1$ . Тогда из лучевой теории следовало бы ожидать, что  $P^{\text{отр}} \sim A(1/R_0) \exp[i\omega(R_0/\alpha_1 - t)]$  (отношение давлений в отраженной и падающей волнах). Такие отношения были получены нами в гл. 5 для плоских волн, но теперь падающая волна имеет сферический фронт. Тем не менее коэффициент отражения плоской волны  $B/A$ , определяемый (6.14), оказывается приемлемым, если радиус кривизны фронта достаточно велик, при условии что  $B = B(p)$  оценивается при значении лучевого параметра  $p_s$  (соответствующем фактическому углу отражения  $i_s$ ). Теперь мы можем дать физическую интерпретацию решения (6.19) при помощи геометролучевой теории и коэффициентов отражения плоских волн. Мы узнаем, что такие объяснения все еще возможны, по мере того как продолжаем развивать наши те-

оретические методы расчета волновых полей в более реалистичных моделях Земли. Однако, если этим исчерпывалось бы все то, чего мы могли бы достичь при помощи интегрирования в плоскости комплексного лучевого параметра, наши усилия вряд ли можно было бы считать оправданными. При выводе (6.19) было сделано несколько различных приближений: мы начали с того, что отбросили члены высшего порядка в (6.16), а затем в дополнении 6.3 приняли аппроксимацию  $f(p)$  выражением  $f(p_s) + (p - p_s)^2 f''(p_s)$ . Это последнее приближение особенно опасно, так как оно справедливо только вблизи седловой точки, а использовано во всей  $p$ -плоскости. Как будет показано в гл. 9, в современных методах количественной сейсмологии часто применяется аппроксимация (6.16); при этом удерживается только первый член и идентифицируется путь наискорейшего спуска  $\Gamma$  на всей плоскости комплексного  $p$ , но затем проводят интегрирование по удобному пути, близкому к  $\Gamma$ , численными методами, оценивая  $f(p)$  точно.

Сохранив дополнительные члены в приближениях, использованных при выводе (6.19), можно формально показать, что в случае, когда  $\alpha_1 > \alpha_2$ ,

$$P^{\text{отр}} = \frac{B(p_s)}{R_0} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{i}{\omega} \right)^n \right] \exp \left[ i\omega \left( \frac{R_0}{\alpha_1} - t \right) \right] \quad (6.20)$$

при  $\omega \rightarrow \infty$ , где константы  $a_1, a_2, \dots$  зависят от геометрии системы источник — приемник. Во временной области этот результат приводит к формуле

$$P^{\text{отр}} = \frac{B(p_s)}{R_0} \left\{ \delta \left( t - \frac{R_0}{\alpha_1} \right) + H \left( t - \frac{R_0}{\alpha_1} \right) \left[ a_1 + a_2 \left( t - \frac{R_0}{\alpha_1} \right) + a_3 \left( t - \frac{R_0}{\alpha_1} \right)^2 + \dots \right] \right\} \quad (6.21)$$

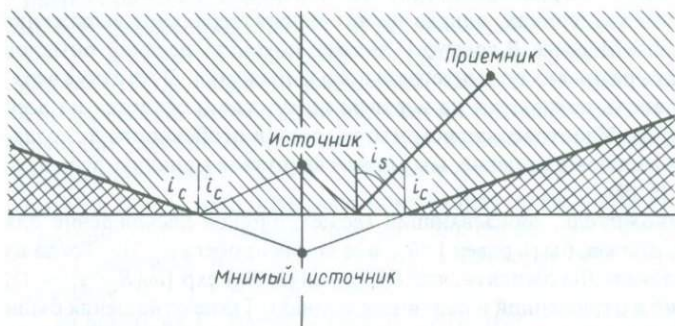


Рис. 6.7. Если приемник расположен в верхней части рисунка (косая штриховка), угол отражения луча  $i_s < i_c$ . Мы определяем  $i_c = \arcsin(\alpha_1/\alpha_2)$ , так что в соответствии с законом Снеллиуса лучи, падающие под этим углом, проходят в нижнее полупространство под углом  $i_2 = \pi/2$ , т.е. в горизонтальном направлении. Приемники, расположенные в нижней области (крестообразная штриховка), будут иметь  $i_s > i_c$ , так что  $p_s = \alpha_1^{-1} \sin i_s > 1/\alpha_2$ . Поэтому плоские волны в нижней среде с таким значением лучевого параметра будут неоднородными. Головные волны могут наблюдаться на приемниках, расположенных в области, покрытой крестообразной штриховкой.

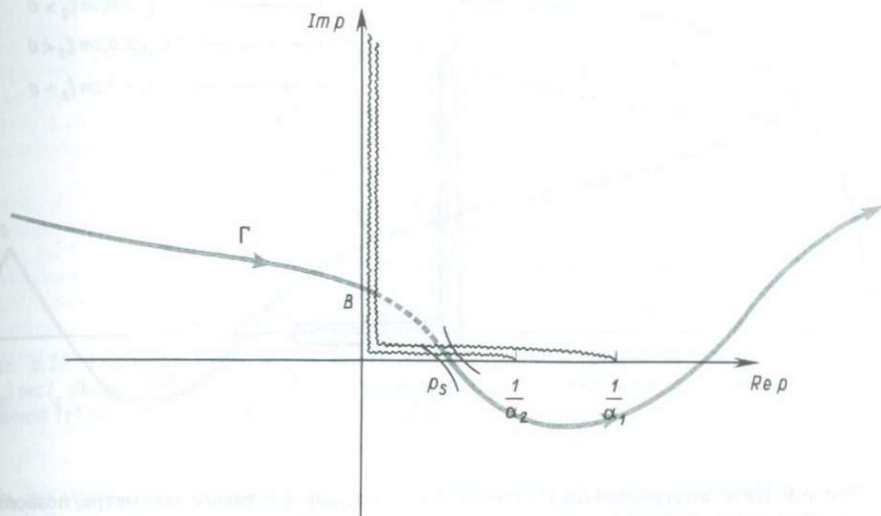


Рис. 6.8. Путь наискорейшего спуска  $\Gamma$  в плоскости комплексного лучевого параметра, позволяющий получить  $P^{\text{отр}}$  (6.17), когда  $\alpha_1 < \alpha_2$ , но  $p_s < 1/\alpha_2$ . Путь подобен показанному на рис. 6.6.

при  $t \rightarrow R_0/\alpha_1$ ; это означает, что отраженная волна несет во временной области более длинный цуг колебаний, чем падающая волна [ $P^{\text{пад}} = (A/R)\delta(t - R/\alpha_1)$ ]. Эквивалентные выражения (6.20) и (6.21) представляют собой *разложения в окрестности волнового фронта*. Как мы указывали в гл. 4 после (4.78), их применение в сейсмологии ограничено, хотя первый член сам по себе может представлять интерес, так как описывает свойства самого волнового фронта.

Чтобы продолжить наш анализ акустических волн в двух различных полупространствах, мы должны далее рассмотреть случай  $\alpha_1 < \alpha_2$ , допускающий существование головных волн. Уравнение (6.17) все еще справедливо, а разрезы остаются такими же, как на рис. 6.4, но точка  $1/\alpha_1$  лежит теперь правее точки  $1/\alpha_2$ . Как и прежде, существует седловая точка  $p_s = \alpha_1^{-1} \sin i_s$ , которая должна лежать между 0 и  $1/\alpha_1$ ; однако теперь  $p_s$  может лежать справа от  $1/\alpha_2$ . На рис. 6.7 определен критический угол  $i_c = \arcsin(\alpha_1/\alpha_2)$  и указаны области пространства, соответствующие

$$p_s = \alpha_1^{-1} \sin i_s < 1/\alpha_2 \quad \text{и} \quad p_s = \alpha_1^{-1} \sin i_s > 1/\alpha_2.$$

Сначала рассмотрим случай, когда приемник расположен в области рис. 6.7, покрытой косой штриховкой, т.е.  $p_s < 1/\alpha_2$ . Отраженную волну  $P^{\text{отр}}$  можно детально изучить вдоль такого же пути наискорейшего спуска  $\Gamma$ , как найденный ранее. Этот путь показан на рис. 6.8, и в первом квадранте он опять должен быть проведен на листе  $\text{Im } \xi_1 < 0$ ,  $\text{Im } \xi_2 < 0$ . То, что говорилось выше о геометролучевом решении (6.19), осталось в силе.

Теперь рассмотрим случай, когда приемник расположен в области рис. 6.7 с крестообразной штриховкой, т.е.  $p_s > 1/\alpha_2$ . Хотя  $p_s$  — все еще седловая точка

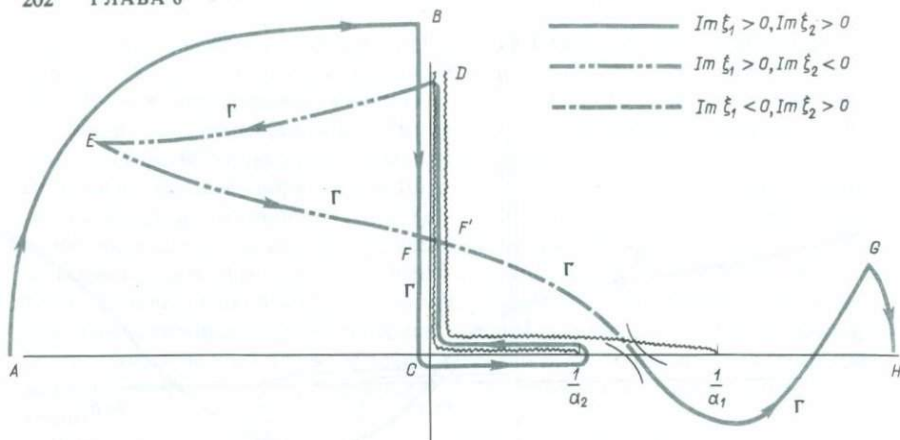


Рис. 6.9. Путь интегрирования  $\Gamma$  в плоскости комплексного лучевого параметра, позволяющий получить  $P^{отр}$  (6.17), когда  $\alpha_1 < \alpha_2$ , но  $p_s > 1/\alpha_2$ . Заметим, что, как показано сверху справа, нужны три листа римановой поверхности. Интеграл по дуге  $AB$  равен нулю. На участках  $BC$ , от  $C$  до  $1/\alpha_2$  и вокруг разреза  $\text{Im } \xi_2 = 0$  до  $D$  путь остается на верхнем листе; точка  $D$  находится достаточно далеко сверху, так что подынтегральное выражение там пренебрежимо мало. После пересечения разреза в  $D$  путь должен перейти на лист  $\text{Im } \xi_1 > 0$ ,  $\text{Im } \xi_2 < 0$ , для того чтобы сохранить аналитичность подынтегрального выражения. От  $E$  до седловой точки и далее до  $G$  — это в точности путь наискорейшего спуска; в точке  $F$  путь пересекает разрез, переходя на лист  $\text{Im } \xi_1 < 0$ ,  $\text{Im } \xi_2 > 0$ , и возвращается на верхний лист в седловой точке. Интеграл по большой дуге  $GH$  равен нулю.

$i(pr - \xi_1 z - \xi_1 z_0)$ , задача осложнилась теперь тем, что долина, по которой путь подходил к седлу в первом квадранте, лежит на листе  $\text{Im } \xi_1 < 0$ ,  $\text{Im } \xi_2 > 0$ . Как обойти разрез и перейти с этого листа на другой, если путь должен начаться во втором квадранте на листе  $\text{Im } \xi_1 > 0$ ,  $\text{Im } \xi_2 > 0$ ? Решение показано в деталях на рис. 6.9.

При рассмотрении этого сложного пути интегрирования нужно помнить, что подынтегральное выражение экспоненциально мало и, следовательно, пренебрежимо во всех точках, за исключением близких к действительной оси. Интегрирование по окрестности седла снова дает вклад, приблизительно равный

$$\frac{B(p_s)}{R_0} \exp \left[ i\omega \left( \frac{R_0}{\alpha_1} - t \right) \right], \quad (6.22)$$

хотя теперь коэффициент отражения имеет фазовый сдвиг, вызванный неоднородными волнами в нижней среде, возникающими при  $1/\alpha_2 < p_s$ . Из-за очевидных геометрических свойств (см. рис. 6.7) волна, приближенно описываемая выражением (6.22), называется в сейсмологии *закритическим отражением* (заметим, что в этом случае  $i_s > i_c$ ). Из-за фазового сдвига в  $B(p_s)$  форма отраженного импульса искажена так, как это было описано в разд. 5.3 и дополнении 5.6.

Другой вклад от пути  $\Gamma$  рис. 6.9 возникает при интегрировании вдоль берегов разреза  $\xi_2$ . На положительной части действительной оси сразу под разрезом

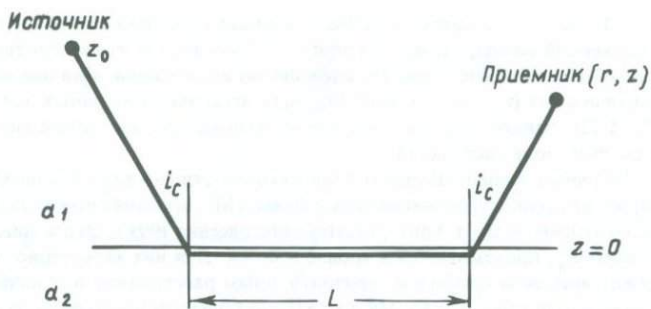


Рис. 6.10. Головная волна имеет время пробега  $t_h$  соответствующее отрезку длины  $|z_0| \sec i_c$  в верхней среде, отрезку  $L$  в нижней среде (на горизонтальном пути) и отрезку длины  $|z| \sec i_c$  снова в верхней среде. Таким образом,

$$t_h = (\alpha_1^{-1} \sec i_c) |z + z_0| + L/\alpha_2,$$

что, как можно показать, равно  $r/\alpha_2 + (\alpha_1^{-1} \cos i_c) |z + z_0|$ . Расстояние  $L$ , очевидно, равно  $r - |z + z_0| \operatorname{tg} i_c$ .

$\xi_2$  — положительная действительная величина, равная  $\alpha_2^{-1} \cos i_2$ ; непосредственно выше разреза  $\xi_2 = -\alpha_2^{-1} \cos i_2$ . Из (6.17) и (6.14) следует, что соответствующий интеграл равен

$$A \left( \frac{\omega}{2\pi r} \right)^{1/2} \exp[-i(\omega t - \pi/4)] \left( \int_{i_\infty}^0 + \int_0^{1/\alpha_2} \right) \times \left[ \frac{-\rho_1 \alpha_1 \cos i_2 + \rho_2 \alpha_2 \cos i_1}{+\rho_1 \alpha_1 \cos i_2 + \rho_2 \alpha_2 \cos i_1} - \frac{+\rho_1 \alpha_1 \cos i_2 + \rho_2 \alpha_2 \cos i_1}{-\rho_1 \alpha_1 \cos i_2 + \rho_2 \alpha_2 \cos i_1} \right] \times \frac{\alpha_1 p^{1/2}}{\cos i_1} \exp[\omega f(p)] dp, \quad (6.23)$$

где функция в экспоненте  $f(p)$  определена в (6.18). В интервале между  $p = 0$  и  $p = 1/\alpha_2$   $f(p)$  мнимая, так что подынтегральное выражение в (6.23) быстро осциллирует. Главный вклад дает область значений  $p$ , в которых  $\operatorname{Im} \{f'(p)\}$  наи-

#### ДОПОЛНЕНИЕ 6.4

##### Основные особенности головных волн

а) Амплитуда затухает с расстоянием как  $r^{-1/2} L^{-3/2}$ , что при  $r \gg |z + z_0|$  приблизительно равно  $r^{-2}$ ; таким образом, затухание существенно сильнее, чем у сферической волны  $P^{\text{пад}}$  или закритического отражения.

б) Множитель  $(i/\omega)$  соответствует интегрированию во временной области, что делает форму колебаний более плавной, с менее четким началом и более длинным хвостом по сравнению с формой колебания у  $P^{\text{пад}}$ .

в) Вблизи критического расстояния, на котором формально может возникнуть головная волна,  $L$  мало (см. рис. 6.10), и наша приближенная формула (6.25) теряет смысл при

$L \rightarrow 0$ , т.е.  $i_1 \rightarrow i_c$  сверху. Соответствующая проблема возникает и в формуле (6.20) для отраженной волны, где  $a_1 \rightarrow \infty$  при  $i_1 \rightarrow i_c$  снизу, так что на критическом расстоянии наши асимптотические формулы совершенно непригодны. Для диапазона углов, близких к критическому ( $i_1 \sim i_c$ ), можно получить несколько различных асимптотических формул [51, § 22], однако для практики важно разработать численные методы, применимые во всем диапазоне расстояний.

Головные волны называют также «коническими» или «боковыми» волнами, и траекторию их распространения впервые выявил Мохоровичич при исследовании времен пробега некоторых волн от Хорватского землетрясения 1909 г. Эти волны, которые теперь называют  $P_n$ , преломляются в кровле мантии. Для них характерно линейное соотношение между временем пробега и горизонтальным расстоянием в отличие от отраженных или прямых волн (рис. А и Б). На достаточно большом расстоянии головная волна образует первое вступление (см. приемник  $A_4$ ), но это преимущество ослаблено затуханием амплитуд, отмеченным в пункте «а».

Джеффрис [178] первым развил теорию головных волн как отчетливо различимых вступлений. Метод, использованный нами в разд. 6.2, был обобщен Берри и Вестом [38] на упругие слоистые среды и применен ими для интерпретации волн  $P_g$ ,  $P_n$ ,  $P^*$ ,  $P_M P$ ,  $P_I P$ , зарегистрированных ранее на плато Колорадо Геологической службой США. На рис. В показаны пути распространения этих волн:  $P_g$ ,  $P^*$  и  $P_n$  — головные волны;  $P_I P$  и

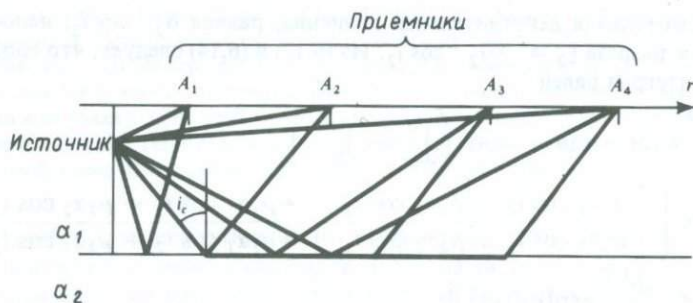


Рис. А

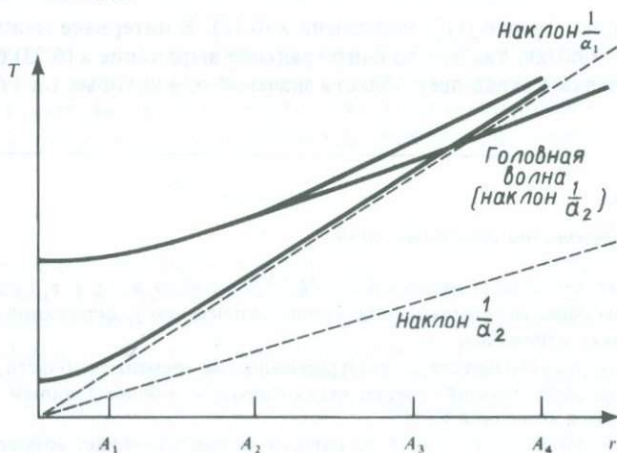


Рис. Б

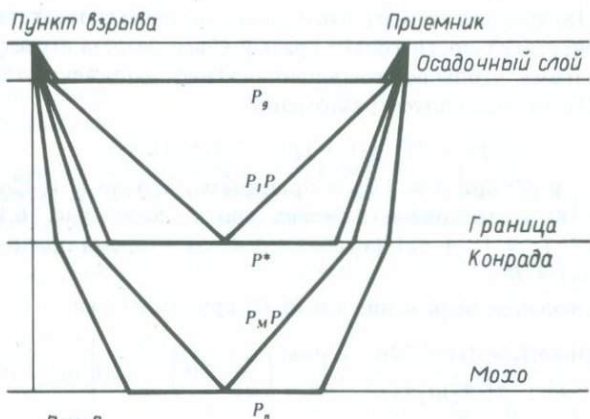


Рис. В

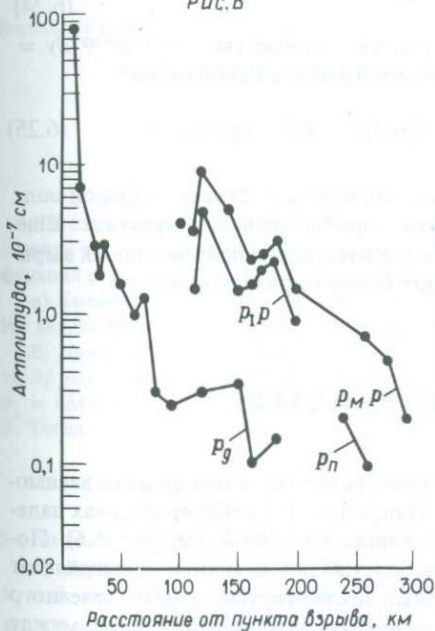


Рис. Г

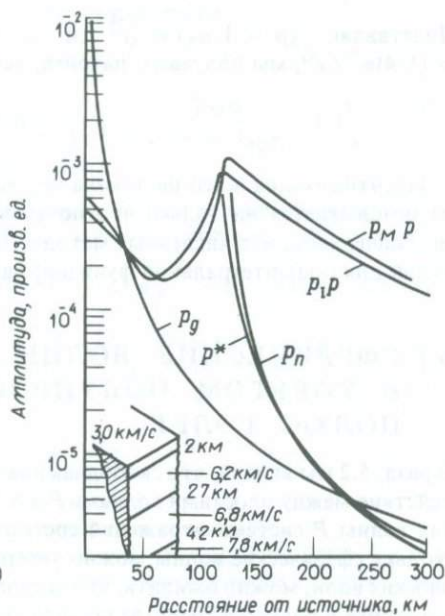


Рис. Д

$P_M P$  — отражения. Данные наблюдений показаны на рис. Г; отмечается общее согласие с амплитудами, рассчитанными для модели коры, показанной на рис. Д. (Рис. Г и Д взяты из [38] с разрешения Американского геофизического союза.) Низкие амплитуды головных волн затрудняют их обнаружение, исключая случаи, когда они вступают раньше всех отраженных волн. Наибольшее противоречие — в амплитудах отраженных волн, оказавшихся в эксперименте гораздо меньшими, чем в расчетах. Этот эффект Берри и Вест объясняют шероховатостью границ Конрада и Мохо.

меньшее; из (6.18) находим, что это наименьшее значение соответствует именно  $p = 1/\alpha_2$ . В действительности только правый конец разреза играет существенную роль, и поэтому, чтобы получить приближенное выражение для интеграла по разрезу (6.23), мы используем разложение

$$f(p) = f(1/\alpha_2) + (p - 1/\alpha_2)f'(1/\alpha_2),$$

оцениваем  $\cos i_1$  и  $p^{1/2}$  при  $p = 1/\alpha_2$  и принимаем, что  $\cos i_2 = (2\alpha_2)^{1/2}(1/\alpha_2 - p)^{1/2}$ . Из (6.18) и тригонометрических соотношений рис. 6.10 находим  $f(1/\alpha_2) = it_h$ , где  $t_h = |z + z_0|/(\alpha_1 \cos i_c) + L/\alpha_2$  — время прихода головной волны, и  $f'(1/\alpha_2) = iL$ .

Тогда приближенное выражение для (6.23) принимает вид

$$-A \left( \frac{\omega}{\pi r} \right)^{1/2} \frac{\exp[i\omega(t_h - t)] e^{i\pi/4} 2\rho_1 \alpha_1^2}{(1 - \alpha_1^2/\alpha_2^2)\rho_2 \alpha_2} \int_0^{1/\alpha_2} \left( \frac{1}{\alpha_2} - p \right)^{1/2} \exp \left[ i\omega L \left( p - \frac{1}{\alpha_2} \right) \right] dp. \quad (6.24)$$

Подставляя  $(p - 1/\alpha_2) = iy^2$  и используя тождество  $\int_0^\infty y^2 e^{-\alpha y^2} dy = (1/4)\pi^{1/2}/\alpha^{3/2}$ , мы получаем, наконец, асимптотическое приближение

$$\frac{i}{\omega} A \frac{\rho_1 \alpha_1^2}{\rho_2 \alpha_2 (1 - \alpha_1^2/\alpha_2^2)} \frac{1}{r^{1/2} L^{3/2}} \exp[i\omega(t_h - t)] \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty. \quad (6.25)$$

Идентификация всего интеграла по берегам разреза (6.23) как головной волны основывается на том, что полученном приближенном результате. Еще раз подчеркнем, что численные методы (не использующие приближенных выражений для подынтегральной функции) дают более точные результаты.

### 6.3. СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ; ПОЛЮС РЭЛЕЯ

В разд. 5.2 мы видели, что свободная поверхность создает очень сильное взаимодействие между плоскими волнами  $P$  и  $S$ . Например, при некоторых углах падения волны  $P$  система отражений состоит только из волн  $S$  (см. рис. 5.6). Поскольку сферические волны можно теперь описывать с помощью интеграла от плоских волн, можно ожидать, что детальный анализ упругих волн от точечного источника в полупространстве потребует внимательного изучения связей между волнами  $P$  и  $S$  на границе.

Эта задача впервые была решена Лэмбом [203] и в дальнейшем неоднократно пересматривалась. В разложении упругого волнового поля на несколько волн-компонент, каждая из которых имеет простую физическую интерпретацию, мы будем следовать Лэвуду [207]. (Правда, настоящий раздел посвящен точечному источнику в отличие от линейного, рассмотренного Лэвудом.) В частности, мы исследуем возбуждение волн Рэлея, которые преобладают на сейсмограммах, записанных в удаленных точках наблюдения на свободной поверхности. Позднее мы решим эту задачу методом Каньяра — де Хоопа и получим точное решение для всего поля.

## ДОПОЛНЕНИЕ 6.5

*Независимость движений P — SV и SH в кусочно-однородных средах с горизонтальными границами раздела*

Кусочно-однородная среда образована различными областями, каждая из которых однородна. В гл. 5 уже было показано, что горизонтальная плоская граница между двумя однородными средами создает связь плоских волн P и SV, а волны SH распространяются независимо от них. Здесь этот результат будет обобщен.

Начав с теоремы Ламе (разд. 4.1), мы замечаем, что решениями волновых уравнений

$$\ddot{\phi} = \Phi/\rho + \alpha^2 \nabla^2 \phi, \quad \ddot{\psi} = \Psi/\rho + \beta^2 \nabla^2 \psi \quad (1)$$

являются потенциалы, связанные со смещением  $\mathbf{u}$  и объемной силой  $\mathbf{f}$  следующим образом:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \psi, \quad \mathbf{f} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi, \quad \text{with } \nabla \cdot \psi = 0, \quad \nabla \cdot \Psi = 0.$$

Волновые уравнения (1) эквивалентны трем скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \Phi/\rho + \alpha^2 \nabla^2 \phi, \\ \frac{d^2}{dt^2} (\nabla \times \psi)_z &= \frac{1}{\rho} (\nabla \times \Psi)_z + \beta^2 \nabla^2 [(\nabla \times \psi)_z], \\ \ddot{\psi}_z &= \Psi_z/\rho + \beta^2 \nabla^2 \psi_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Когда объемные силы отсутствуют, из (2) следует, что любое движение можно представить как сумму движений трех типов, а именно таких, в которых какие-либо две из трех функций  $\phi$ ,  $(\nabla \times \psi)_z$ ,  $\psi_z$  всюду равны нулю.

а) Движения первого рода, когда равны нулю  $(\nabla \times \psi)_z$  и  $\psi_z$  — это, очевидно, волны P. Их характеризует ненулевое  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ , но при этом  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ .

б) Движения второго рода имеют  $\phi = 0$ ,  $\psi_z = 0$ . Поскольку, кроме того,  $\nabla \cdot \psi = 0$ , то  $\partial \psi_x / \partial x + \partial \psi_y / \partial y = 0$ . Это условие существования некоторой функции  $M$ , у которой  $\psi_x = \partial M / \partial y$ ,  $\psi_y = -\partial M / \partial x$ , т.е.  $\psi = \nabla \times (0, 0, M)$ . Удобнее представлять  $M$  как скаляр  $\psi$ . Тогда

$$\mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times (0, 0, \psi) = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y}, -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right).$$

У этих движений  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  и  $(\nabla \times \mathbf{u})_z = 0$ , что характеризует волны SV.

в) Движения третьего рода характеризуются  $\phi = 0$ ,  $(\nabla \times \psi)_z = 0$ . Тогда  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  и  $u_z = 0$ , так что смещение подобно  $\psi$  в «б»; существует такая функция  $\chi$ , для которой  $\mathbf{u} = \nabla \times (0, 0, \chi)$ . Это движение сходно с SH, и для него характерны

$$(\nabla \times \mathbf{u})_z \neq 0, \quad u_z = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Таким же способом каждый из трех типов объемных сил в (2) можно описать скалярным потенциалом, и  $\mathbf{f} = \nabla \Phi + \nabla \times \nabla \times (0, 0, \Psi) + \nabla \times (0, 0, X)$ ; уравнения для движений в волнах P, SV, SH соответственно имеют вид

$$\ddot{\phi} = \Phi/\rho + \alpha^2 \nabla^2 \phi, \quad \ddot{\psi} = \Psi/\rho + \beta^2 \nabla^2 \psi, \quad \ddot{\chi} = X/\rho + \beta^2 \nabla^2 \chi. \quad (3)$$

При наличии горизонтальных границ, разделяющих вещества с разными свойствами, три скалярных условия непрерывности компонент  $\mathbf{u}$  можно дифференцировать по горизонтальным координатам. Эти условия становятся тогда эквивалентными условиям не-

прерывности

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad u_z,$$

т.е. непрерывности

$$(\nabla \times \mathbf{u})_z, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} - \partial u_z / \partial z, \quad u_z. \quad (4)$$

Подобным же образом непрерывность напряжений приводит к непрерывности величин

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} [(\nabla \times \mathbf{u})_z], \quad \mu \left[ \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{u} - 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \nabla^2 u_z \right], \quad \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (5)$$

Для волн  $SH$ , у которых  $(\nabla \times \mathbf{u})_z \neq 0$ , а  $u_z = 0$  и  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , четыре из шести условий непрерывности в (4) и (5) выполняются всегда, а  $u_z$  и  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  остаются нулевыми после взаимодействия с границей, т.е. характер движения в волне  $SH$  сохраняется.

Аналогично для падающей волны с нулевым  $(\nabla \times \mathbf{u})_z$ , но ненулевыми  $u_z$  и  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  отсутствует связь с движением  $SH$  на границе. Однако связь между  $u_z$  и  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  указывает на связь движений  $P$  и  $SV$ .

В средах с зависящими от глубины плотностью и параметрами Ламе движения  $SH$  и  $P + SV$  опять-таки остаются несвязанными; связь колебаний  $P$  и  $SV$  непосредственно следует из волновых уравнений, которые не разделяются в виде (2). Вместо этого существует система из двух уравнений, каждое из которых содержит  $\phi$  и  $(\nabla \times \psi)_z$ .

Предположим, что однородное, изотропное, упругое тело со скоростями объемных волн  $\alpha$  и  $\beta$  и плотностью  $\rho$  занимает полупространство  $z > 0$ . В точке  $z = h$ ,  $(x^2 + y^2)^{1/2} = r = 0$  расположен точечный источник. Мы исследуем задачу о волнах  $P - SV$  (см. дополнение 6.5), упрощенную осевой симметрией относительно вертикальной прямой, проходящей через источник. В этом смысле задача двумерная и ее решения зависят только от  $(r, z)$ . В дальнейшем будут использоваться как декартовы  $(x, y, z)$ , так и цилиндрические  $(r, \phi, z)$  координаты с одним и тем же направлением оси глубин. Тогда смещение можно представить как

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \nabla \times (0, 0, \psi)$$

с потенциалом  $P$ -волн  $\phi$ , удовлетворяющим уравнению

$$\ddot{\phi} = \frac{\Phi}{\rho} + \alpha^2 \nabla^2 \phi, \quad (6.26)$$

и потенциалом  $SV$ -волн  $\psi$ , удовлетворяющим уравнению

$$\ddot{\psi} = \frac{\Psi}{\rho} + \beta^2 \nabla^2 \psi,$$

где  $\Phi$  и  $\Psi$  — потенциалы объемной силы  $\mathbf{f}$ , представляемой в виде

$$\mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} - (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \Phi + \nabla \times \nabla \times (0, 0, \Psi). \quad (6.27)$$

Рассмотрим точечный источник  $P$ -волн, показанный на рис. 6.11. (На рисунке приведен также простой точечный источник волн  $SV$ . Точечные источники, представляющие больший интерес для сейсмологии, описаны при помощи цилиндрических координат в следующей главе. Линейный источник волн  $SV$  опи-

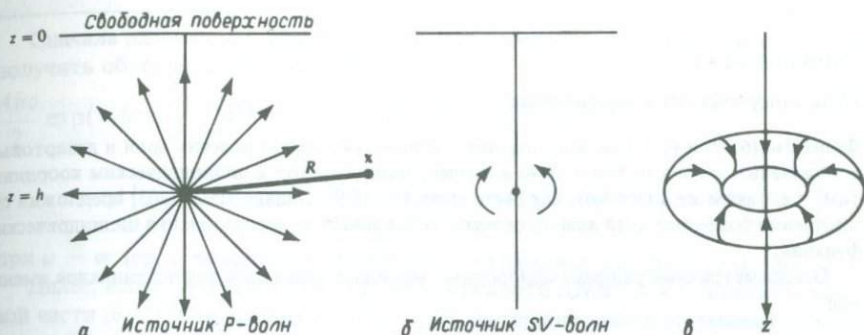


Рис. 6.11. Два разных точечных источника на глубине  $h$  в упругом полупространстве. **а** — источник  $P$ -волн, возбуждающий сферическую волну  $\phi^{\text{пад}} = (A/R)\exp[i\omega(R/\alpha - t)]$ , где  $R$  — расстояние по прямой от источника до приемника. Этот источник — простая модель взрыва. **б** — источник  $SV$ -волн, возбуждающий  $\psi^{\text{пад}} = (A/R)\exp[i\omega(R/\beta - t)]$ . **в** — чтобы лучше представить себе этот источник, рассмотрим небольшой тор (бублик) с вертикальной осью симметрии и осесимметричным движением, в котором частицы тора «катятся», как показано стрелками, так что движение частиц ограничено вертикальными плоскостями. Ясно, что такой источник излучает  $SV$ -волны, и можно показать, что в пределе, когда тор сжимается в точку, такой источник действительно возбуждает сферически-симметричный потенциал  $\psi^{\text{пад}}$ , как указано выше.

сан в разд. 6.4.) Таким образом, мы принимаем здесь

$$\Phi = A4\pi\alpha^2 \delta(x) \delta(y) \delta(z - h) \exp(-i\omega t); \quad \Psi = 0. \quad (6.28)$$

В соответствии с волновым уравнением для потенциала (6.26) этот источник генерирует сферическую волну

$$\phi^{\text{пад}}(\mathbf{x}, t) = A \frac{1}{R} \exp\left[i\omega\left(\frac{R}{\alpha} - t\right)\right], \quad \text{где } R = [x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{1/2}, \quad (6.29)$$

падающую затем на свободную поверхность  $z = 0$ . Полные потенциалы равны

$$\begin{aligned} \phi &= Ai\omega \exp(-i\omega t) \int_0^\infty \frac{p}{\xi} J_0(\omega pr) \exp[i\omega\xi|z - h|] dp \\ &+ Ai\omega \exp(-i\omega t) \int_0^\infty \hat{P}\hat{P} \frac{p}{\xi} J_0(\omega pr) \exp[i\omega\xi(z + h)] dp \end{aligned} \quad (6.30)$$

где первое слагаемое представляет собой падающую волну, а второе — обобщенное отражение  $\hat{P}\hat{P}$ , и

$$\psi = Ai\omega \exp(-i\omega t) \int_0^\infty \left(\frac{1}{i\omega p} \frac{\beta}{\alpha} \hat{P}\hat{S}\right) \frac{p}{\xi} J_0(\omega pr) \exp[i\omega(\xi h + \eta z)] dp, \quad (6.31)$$

что является обобщенным отражением  $\hat{P}\hat{S}$  (см. дополнение 6.6); здесь  $\hat{P}\hat{P}$  и  $\hat{P}\hat{S}$  — зависящие от  $p$  коэффициенты, рассмотренные для случая свободной поверхности в гл. 5 (уравнения (5.26) и (5.27)).

Сосредоточим внимание на обобщенном отражении  $\hat{P}\hat{P}$  в (6.30) и покажем, как оно разделяется на три различных типа  $P$ -волн при увеличении расстояния  $r$ .

## ДОПОЛНЕНИЕ 6.6

## О цилиндрических координатах

Формулы (6.30) и (6.31) можно получить, используя теорию плоских волн в декартовых координатах, интеграл Вейля (6.4) и последующий переход к цилиндрическим координатам, т.е. таким же способом, как было выведено (6.9). Однако Лэмб [203] предложил существенно более быстрый вывод, целиком основанный на использовании цилиндрических функций.

Оссиметричные решения однородных волновых уравнений для потенциалов имеют вид

$$J_0(\omega pr) \exp(\pm i\omega \xi z - i\omega t) \text{ для } \phi \text{ и } J_0(\omega pr) \exp(\pm i\omega \eta z - i\omega t) \text{ для } \chi,$$

где  $\xi = (\alpha^{-2} - p^2)^{1/2}$  и  $\eta = (\beta^{-2} - p^2)^{1/2}$ . Пусть восходящая  $P$ -волна и ее отражения описываются полными полями:

$$\phi = J_0(\omega pr) [Ae^{-i\omega \xi z} + Be^{i\omega \xi z}] \exp(-i\omega t),$$

$$\psi = J_0(\omega pr) C e^{i\omega \eta z} \exp(-i\omega t).$$

Тогда с учетом  $\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \nabla \times (0, 0, \psi)$  и  $dJ_0(x)/dx = -J_1(x)$  получаем

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} = -\omega p J_1(\omega pr) [Ae^{-i\omega \xi z} + Be^{i\omega \xi z} + i\omega \eta C e^{i\omega \eta z}] \exp(-i\omega t),$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = J_0(\omega pr) [-i\omega \xi A e^{-i\omega \xi z} + i\omega \xi B e^{i\omega \xi z} + \omega^2 p^2 C e^{i\omega \eta z}] \exp(-i\omega t).$$

Из разд. 2.6 с учетом осевой симметрии имеем

$$\begin{aligned} \tau_{zr} &= 2\mu e_{zr} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ &= i\omega^2 J_1(\omega pr) [2\rho\beta^2 p \xi (A - B) + \rho(1 - 2\beta^2 p^2)(-i\omega p C)] \exp(-i\omega t) \quad \text{при } z = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\lambda \omega^2}{\alpha^2} \phi + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= -\omega^2 J_0(\omega pr) [\rho(1 - 2\beta^2 p^2)(A + B) + 2\rho\beta^2 p \eta (-i\omega p C)] \exp(-i\omega t) \quad \text{при } z = 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Приравняв (1) и (2) нулю (условия на свободной поверхности), находим уравнения, отличающиеся от полученных при изучении плоских волн только заменой  $C$  в (5.22) и (5.23) на  $-i\omega p C$ . Отсюда следует, что

$$B = A \hat{P} \hat{P} \quad \text{и} \quad C = \frac{A}{i\omega p} \frac{\beta}{\alpha} \hat{P} \hat{S}, \quad (3)$$

где  $\hat{P} \hat{P}$  и  $\hat{P} \hat{S}$  — коэффициенты отражения для смещений, приведенные в (5.26) и (5.27). Формулы (6.30) и (6.31) непосредственно вытекают из интеграла Зоммерфельда для падающей волны и из суперпозиции отражений.

Сначала разложим  $J_0$  на его компоненты, имеющие вид бегущих волн, чтобы получить обобщенное отражение  $\dot{P}\dot{P}$ :

$$\frac{A i \omega}{2} \exp(-i \omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}\dot{P} \frac{p}{\xi} H_0^{(1)}(\omega p r) \exp[i \omega \xi(z+h)] dp \\ \sim A \left( \frac{\omega}{2 \pi r} \right)^{1/2} e^{-i(\omega t - \pi/4)} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{P}\dot{P} \frac{p^{1/2}}{\xi} \exp[i \omega(p r + \xi z + \xi h)] dp \quad (6.32)$$

при  $\omega \rightarrow \infty$  [ср. с выводом (6.15) и (6.17)]. Напомним, что  $\text{Im } \xi \geq 0$ ,  $\text{Im } \eta \geq 0$ .

Далее, исследуем разрезы и путь наискорейшего спуска для экспоненты в правой части (6.32). Как показано на рис. 6.12, на верхнем листе римановой поверхности ( $\text{Im } \xi \geq 0$ ,  $\text{Im } \eta \geq 0$ ) имеется седловая точка в  $p_s = \alpha^{-1} \sin i_s$  и полюс  $p = 1/c_R$  ( $c_R$  — скорость волны Рэлея и корень знаменателя в выражении для  $\dot{P}\dot{P}$ ). Если сравнить путь наискорейшего спуска  $\Gamma$  на рис. 6.12, *в* с особенностями рис. 6.12, *б*, то можно увидеть, что особенности не создают существенных проблем, если угол отражения мал. Такова ситуация на рис. 6.12, *г*, и здесь важен только вклад самой седловой точки. Однако, если  $i_s$  становится большим (т.е. при  $r \gg z+h$ ), имеется сильное влияние особенностей (рис. 6.12, *д*), что приводит к трем независимым слагаемым. Два из них — это: а) основной вклад на отрезке пути  $\Gamma_\alpha$  все еще дает седловая точка; его можно интерпретировать как отраженную от поверхности  $P$ -волну, показанную на рис. 6.12, *а*; б) на отрезке пути  $\Gamma_\beta$  основной вклад создает близость точки разветвления  $p = 1/\beta$ . Этот отрезок идентифицируется как неоднородная  $P$ -волна, затухающая на пути вверх от источника к свободной поверхности, распространяющаяся затем по горизонтали как  $SV$ -волна и заканчивающаяся как неоднородная  $P$ -волна, ослабляющаяся на пути вниз от свободной поверхности к приемнику. Ее называют *поверхностной S-волной*. Наконец, в) путь  $\Gamma_R$  дает  $P$ -компоненту рэлеевской волны с амплитудой, описываемой просто как вычет подынтегрального выражения (6.32). Поскольку

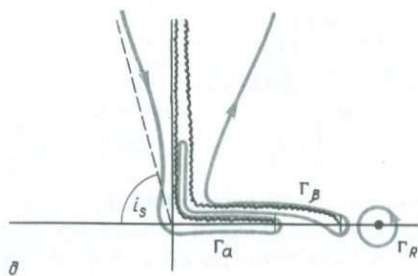
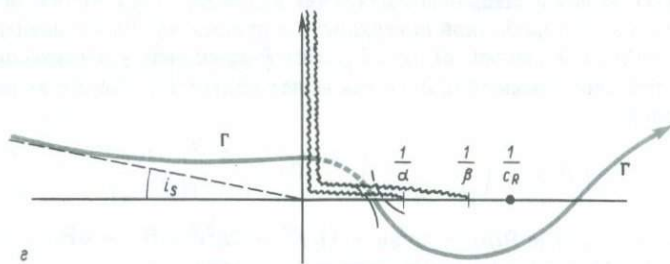
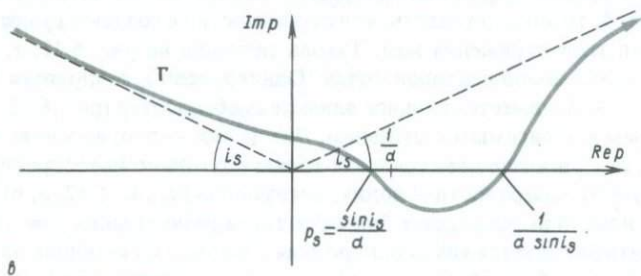
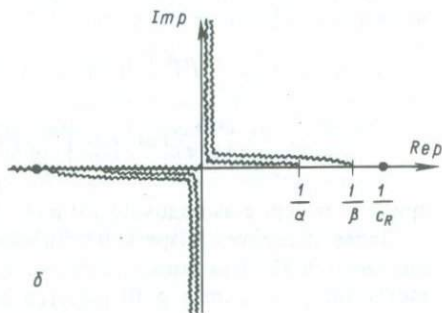
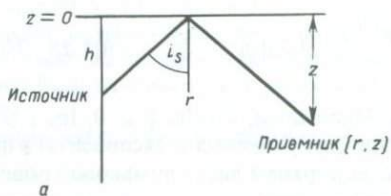
$$\dot{P}\dot{P} \sim - \left( \frac{1}{p - 1/c_R} \right) \frac{8(c_R^{-2} - \alpha^{-2})^{1/2} (c_R^{-2} - \beta^{-2})^{1/2}}{c_R^2 \mathbf{R}'(1/c_R)}$$

при  $p \rightarrow 1/c_R$ , где  $\mathbf{R}(p) = 4p^2 \xi \eta + (1/\beta^2 - 2p^2)^2$  и  $\mathbf{R}' = d\mathbf{R}/dp$ , из (6.32) находим, что  $P$ -компонента рэлеевской волны равна

$$\phi_R \sim -8A \left( \frac{2\pi\omega}{rc_R} \right)^{1/2} \frac{e^{i\pi/4} \left( \frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)^{1/2}}{c_R^2 \mathbf{R}'(1/c_R)} \\ \exp \left[ i \omega \left( \frac{r}{c_R} - t \right) \right] \exp \left[ -\omega \left( \frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^{1/2} (z+h) \right], \quad (6.33)$$

где  $\omega \rightarrow \infty$ . Оценку интервала расстояний, на которых этот вычет еще не дает вклада, можно получить, если найти условие, при котором путь наискорейшего спуска  $\Gamma$  (рис. 6.12, *в*) еще лежит ниже полюса Рэлея. Это приближенно имеет место, когда

$$\frac{1}{\alpha \sin i_s} > \frac{1}{c_R},$$



или, что то же самое, при

$$\operatorname{tg} i_s = \frac{r}{z+h} < \frac{c_R}{(\alpha^2 - c_R^2)^{1/2}}. \quad (6.34)$$

Неравенство (6.34) впервые получил Накано и интерпретировал его как оценку расстояний, на которых волна Рэлея еще не сформировалась. Если

$$\frac{r}{z+h} \gg \frac{c_R}{(\alpha^2 - c_R^2)^{1/2}} \sim 0.6,$$

то вклад полюса четко изолирован от разрезов и пути наискорейшего спуска и (6.33) имеет значительную величину.

Мы можем анализировать волну  $SV$  (6.31) подобным же образом, обобщая отражение  $\tilde{P}\tilde{S}$  и находя, что обычная нисходящая волна  $S$  — результат отражения падающей сферической  $P$ -волны. На достаточных расстояниях существует также волна с горизонтальной медленностью  $1/\beta$ . Называемая *вторичной S-волной*, она выходит из источника как неоднородная волна  $P$ , затухает на пути вверх и затем распространяется по горизонтали к приемнику как  $S$ . Опять-таки существует полюс Рэлея, и вычет в нем дает

$$\begin{aligned} \psi_R \sim 4A \left( \frac{2\pi\omega}{rc_R} \right)^{1/2} e^{i\pi/4} \left( \frac{c_R}{\omega} \right) \frac{\left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{c_R^2} \right)}{c_R R'(1/c_R)} \\ \times \exp \left[ i\omega \left( \frac{r}{c_R} - t \right) \right] \exp \left[ -\omega \left( \frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^{1/2} h - \omega \left( \frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)^{1/2} z \right] \end{aligned} \quad (6.35)$$

где  $\omega \rightarrow \infty$ . Соответствующие смещения находим, пользуясь соотношениями

$$u = u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}, \quad w = u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right).$$

(Мы придерживаемся здесь стандартного обозначения  $u$  для горизонтального смещения, хотя подразумеваем теперь радиальную, а не декартову горизонталь-

*Рис. 6.12.* Диаграммы для интерпретации обобщенной отраженной волны от точечного источника в упругом полупространстве.  $a$  — геометрия источник — приемник и отраженная волна  $P$ ; определение угла отражения  $i_s$ ;  $b$  — разрезы для  $\xi$  и  $\eta$  в плоскости комплексного  $p$  и полюс в точке  $p = 1/c_R$ . (Замечание: в поглощающей среде разрезы и полюсы на положительной части действительной оси сдвинуты вверх в первый квадрант.)  $c$  — путь наискорейшего спуска  $\Gamma$  для экспоненты в правой части (6.32) — это путь, на котором  $pr + \xi z + \xi h = R_0/\alpha +$  положительная мнимая величина  $= R_0/\alpha + iX^2$ . Решая это уравнение, находим выражение для  $p$  на контуре  $\Gamma$ :

$$R_0^2 p = r(iX^2 + R_0/\alpha) \pm (X^4 - 2iX^2 R_0/\alpha)^{1/2} (z+h).$$

Этот контур пересекает действительную ось при  $p = p_s = \alpha^{-1} \sin i_s$ , а также в  $p = (\alpha \sin i_s)^{-1}$ .  $z$  — для малых  $i_s$  можно выбрать путь наискорейшего спуска, идущий по листу  $\operatorname{Im} \xi < 0, \operatorname{Im} \eta < 0$  в первом квадранте, как на рис. 6.8.  $d$  — для больших  $i_s$  путь интегрирования лежит целиком на верхнем римановом листе и может быть представлен как сумма двух интегралов  $\Gamma_\alpha$  и  $\Gamma_\beta$  по берегам разрезов плюс контур  $\Gamma_R$ , охватывающий полюс Рэлея.

## ДОПОЛНЕНИЕ 6.7

*Наиболее важные свойства волн Рэлея, возбуждаемых внутренним точечным источником*

а) Волна затухает с расстоянием как  $r^{-1/2}$ ; поскольку объемные волны убывают как  $\sim r^{-1}$ , а головные — как  $r^{-2}$ , волны Рэлея должны преобладать на достаточно больших расстояниях. Заметим, что отношение горизонтальной и вертикальной компонент смещения в *цилиндрической* волне Рэлея (6.36) то же самое, что было найдено для *плоской* волны Рэлея в задаче 5.4б.

б) Фазовая задержка равна  $\omega r/c_R$  и не зависит от глубины  $h$ , так что годограф волны — прямая линия.

в) Амплитуда — экспоненциально убывающая функция  $h$  и  $\omega$ :

$$\exp[-\omega(c_R^{-2} - \alpha^{-2})^{1/2}h] \sim \exp[-(0.9)^{1/2}\omega h/\beta].$$

Для источника волн  $S$  она имеет вид

$$\exp[-\omega(c_R^{-2} - \beta^{-2})^{1/2}h] \sim \exp[-(0.2)^{1/2}\omega h/\beta].$$

г) Движение частиц возвратно-эллиптическое ( $w$  имеет фазовый сдвиг  $-\pi/2$  по отношению к  $u$  и, следовательно, фазовое опережение  $\pi/2$  — см. дополнение 5.5); эллиптичность та же, что и у плоских волн Рэлея.

д) Из «б» и «в» следует, что наклон фазового спектра — функция расстояния, но не глубины, а форма амплитудного спектра — функция глубины, но не расстояния. Следовательно, амплитуда и фаза не зависят друг от друга. Это общее свойство так называемых *нормальных мод*, которые будут более детально исследованы для слоистой среды в гл. 7. Такая независимость, конечно, нарушает принцип причинности (см. дополнение 5.8), так что бессмысленно говорить о «первом движении» для волн Рэлея или отдельных нормальных мод.

ную компоненту.) Смещение в волне Рэлея на поверхности ( $z = 0$ ) равно

$$u_R \sim -2iQe^{i\pi/4} \left[ \frac{2}{c_R} \left( \frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)^{1/2} \right] \exp \left[ i\omega \left( \frac{r}{c_R} - t \right) \right] \exp \left[ -\omega \left( \frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^{1/2} h \right],$$

$$w_R \sim -2Qe^{i\pi/4} \left[ \frac{2}{c_R^2} - \frac{1}{\beta^2} \right] \exp \left[ i\omega \left( \frac{r}{c_R} - t \right) \right] \exp \left[ -\omega \left( \frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^{1/2} h \right], \quad (6.36)$$

где

$$Q = A \left( \frac{2\pi\omega}{rc_R} \right)^{1/2} \frac{\omega}{\beta^2 R'(1/c_R)}.$$

Хотя полюс в точке  $p = 1/c_R$  — доминирующая особенность задач о полупространстве, в следующем разделе будет показано, что и другие нули функции Рэлея, лежащие на других римановых листах, также могут иметь большое значение.

Исследуя сферические волны, падающие на плоские границы, мы обнаружили два явления — головные волны и волны Рэлея, не имеющие места, если падающая волна имеет плоский фронт. Асимптотические формулы, использованные

для оценки этих явлений, позволили нам выявить многие из их свойств, но теперь мы примем альтернативный подход, который для задачи Лэмба приводит к точным результатам.

#### 6.4. МЕТОДЫ КАНЬЯРА — ДЕ ХООПА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИСТОЧНИКОВ

До сих пор в этой главе рассматривались источники с временной зависимостью  $\exp(-i\omega t)$ , и мы искали способ описать реакцию среды (т.е. некоторую физическую переменную, оцениваемую в приемнике) в виде  $\tilde{r}(\omega)\exp(-i\omega t)$ . В представлении «вход-выход» это выглядит как

$$\exp(-i\omega t) \rightarrow \text{упругая среда} \rightarrow \tilde{r}(\omega) \exp(-i\omega t).$$

Во многих случаях важно найти отклик  $r(t)$  на входной сигнал  $\delta(t)$ . Тогда

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) d\omega \rightarrow \text{упругая среда} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega = r(t),$$

и видно, что  $r(t)$  — обратное преобразование Фурье от  $\tilde{r}(\omega)$ . В силу физической причинности необходимо, чтобы  $r(t) = 0$  при  $t < 0$ ; заметим, что до настоящего времени мы интересовались деталями преобразования Фурье от  $r(t)$  в основном для вещественных положительных значений  $\omega$ . Зная  $r(t)$ , мы можем выразить отклик на произвольный входной сигнал  $x(t)$  сверткой

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \delta(\tau) d\tau \rightarrow \text{упругая среда} \rightarrow \int_0^{\infty} x(t - \tau) r(\tau) d\tau. \quad (6.37)$$

(Поскольку  $r$  удовлетворяет закону причинности, интегрирование можно ограничить положительными  $\tau$ .)

Используя метод Каньяра, получим теперь отклик  $\tilde{r}(s)e^{st}$  на входной сигнал  $e^{st}$  ( $-\infty < t < \infty$ ), где  $s$  вещественно и положительно:

$$e^{st} \rightarrow \text{упругая среда} \rightarrow \tilde{r}(s)e^{st}.$$

Тогда, согласно (6.37),  $\tilde{r}(s)e^{st} = \int_0^{\infty} \tilde{r}(\tau)e^{s(t-\tau)} d\tau$  и, следовательно,  $\tilde{r}(s)$  — преобразование Лапласа от  $r(t)$ :

$$\tilde{r}(s) = \int_0^{\infty} r(t)e^{-st} dt \quad (s \text{ вещественно и положительно}). \quad (6.38)$$

Предположим, что решение для  $\tilde{r}(s)$  может быть найдено; тогда метод Каньяра обеспечивает последовательность преобразований выражения для  $\tilde{r}(s)$  до тех пор, пока оно не примет форму (6.38), и тогда множитель  $r(t)$  в подынтегральном выражении идентифицируется как отклик на единичный импульс. [Роль де Хоопа заключалась в упрощении методов преобразования  $\tilde{r}(s)$ . Нужно отметить, что Каньяр приписывает свой метод Карсону. Его развивали также Смирнов и Соболев, Пекерис, Саутер, Гарвин и Гилберт.] Как только найден отклик на единичный импульс, задача считается решенной, поскольку отклик на произвольный входной сигнал можно найти сверткой.

Однако не очевидно, что отклик  $r(t)$  на импульс однозначно определяется описанным выше способом по функции  $\bar{r}(s)$ , известной только для вещественных положительных  $s$ . Ведь обратное преобразование от (6.38) равно

$$r(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{r}(s) e^{st} ds$$

[где линия интегрирования лежит справа от всех особенностей  $\bar{r}(s)$ ], что требует проведения анализа  $\bar{r}(s)$  для комплексных  $s$ . К счастью, Каняр [68, гл. 3] показал, что идентификация  $r(t)$  как множителя при  $\exp(-st)$  в подынтегральном выражении в (6.38) однозначно определяет требуемый отклик на единичный импульс при довольно слабых ограничениях дифференцируемости и ограниченности  $r(t)$ . Этот факт известен как лемма (или теорема) Лерха. Доказательство ее весьма сложное и длинное, и мы его здесь не приводим.

Очевидно, что  $\bar{r}(s)$  можно получить формальной подстановкой  $\omega = is$  в выражения для  $\bar{r}(\omega)$  в наших разд. 6.1 — 6.3. Однако удобно выводить  $\bar{r}(s)$  непосредственно преобразованием Лапласа выходного сигнала при сигнале в источнике  $\delta(t)$ . Например, в двумерных задачах, включающих распространение по нормали к декартовой оси  $y$ , нужно найти функциональную зависимость  $r = r(x, z, t)$ . Для входного сигнала  $\delta(t)$  окажется удобным провести пространственное преобразование Фурье по  $x$  и преобразование Лапласа по  $t$  и получить алгебраическое выражение для двойного преобразования  $\bar{r} = \bar{r}(k_x, z, s)$ . Обратное преобразование Фурье будет иметь вид

$$\bar{r}(x, z, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}(k_x, z, s) \exp(ik_x x) dk_x.$$

Поскольку здесь  $k_x$  — горизонтальная компонента волнового числа, мы выделяем множитель  $is$  и идентифицируем  $k_x/(is) = p$  как лучевой параметр. Тогда

$$\bar{r}(x, z, s) = -\frac{is}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \tilde{r}(isp, z, s) e^{-spx} dp. \quad (6.39)$$

Рассматривая здесь  $p$  как формальную переменную интегрирования, нужно далее привести (6.39) к виду (6.38). Тогда полученное подынтегральное выражение позволит непосредственно определить  $r(x, z, t)$ .

Заметим, что  $s$  появляется в интеграле (6.38) только в одном месте — в показателе экспоненты. Преобразование (6.39) часто приводит к выражению вида

$$\bar{r} = s^n \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt, \quad (6.40)$$

в этом случае отклик на импульс можно найти из формулы

$$r(t) = \frac{d^n}{dt^n} g(t).$$

Можно поступить и иначе, приняв в качестве входного сигнала проинтегрированный  $n$  раз  $\delta$ -импульс, чтобы сразу же получить отклик  $g(t)$ .

Далее в этом разделе мы рассмотрим применение описанного выше метода для линейных источников воли  $SH$  и линейного источника воли  $P - SV$  в упругом полупространстве. Мы найдем, что отклик среды можно точно описать алгебраическими выражениями. Обобщение метода на случай точечного источни-

ка дано в следующем разделе. Глава завершается сопоставлением метода Каньяра — де Хоопа и методов преобразования Фурье, рассмотренных в разд. 6.1 — 6.3.

Начнем с более простой задачи о волнах *SH*. Используя декартовы координаты  $(x, y, z)$ , положим, что линейный источник в бесконечной упругой среде, вытянутый вдоль оси  $y$ , представляет собой объемную силу, импульсно действующую в направлении  $y$ . Тогда объемная сила равна

$$\mathbf{f} = (0, A \delta(x) \delta(z) \delta(t), 0),$$

где  $A$  — константа, имеющая размерность количества движения на единицу длины. Такой источник возбуждает только  $y$ -компоненту смещений, так что смещение  $\mathbf{u}$  равно  $(0, v(x, z, t), 0)$ . Уравнение для  $v$  имеет вид

$$\rho \ddot{v} = A \delta(x) \delta(z) \delta(t) + \mu \nabla^2 v, \quad (6.41)$$

и как  $v$ , так и  $\dot{v}$  равны нулю при  $t < 0$ .

Простейший способ найти  $v$  — это взять выражения для решения в случае точечного источника из дополнения 4.1 и проинтегрировать его по всем точечным источникам вдоль оси  $y$ :

$$v(x, z, t) = \frac{1}{4\pi\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\rho} \frac{1}{R_3} \delta\left(t - \frac{R_3}{\beta}\right) dy,$$

где  $R_3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ . Поскольку  $dy/R_3 = dR_3/y$  и  $R_3$  — четная функция  $y$ ,

$$v(x, z, t) = \frac{A}{2\pi\rho\beta^2} \int_R^{\infty} \frac{1}{y} \delta\left(t - \frac{R_3}{\beta}\right) dR_3 = \begin{cases} 0 & t < \frac{R}{\beta}, \\ \frac{A}{2\pi\rho\beta^2} \frac{1}{\left(t^2 - \frac{R^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} & t > \frac{R}{\beta}, \end{cases} \quad (6.42)$$

где  $R = (x^2 + z^2)^{1/2}$  — функция расстояния для двумерных задач.

Выведем теперь (6.42), используя подход Каньяра — де Хоопа. Выполним двойное преобразование

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik_x x) dx \int_0^{\infty} e^{-st} dt,$$

находим

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} v(k_x, z, s) = \frac{-A}{\rho\beta^2} \delta(z) + n^2 v(k_x, z, s),$$

где  $n^2 = k_x^2 + s^2/\beta^2$ . Таким образом, всюду, за исключением  $z = 0$ , мы знаем  $\partial^2 v/\partial z^2 = n^2 v$  с решениями вида

$$v(k_x, z, s) = ae^{nz} + be^{-nz},$$

где мы фиксируем выбор корня условием  $n > 0$ , а  $a$  и  $b$  — некоторые константы. Рассматривая по отдельности две области  $z \geq 0$  и требуя, чтобы  $v$  было ограничено при  $z \rightarrow \pm\infty$ , мы находим, что  $a = 0$  при  $z > 0$  и  $b = 0$  при  $z < 0$ .

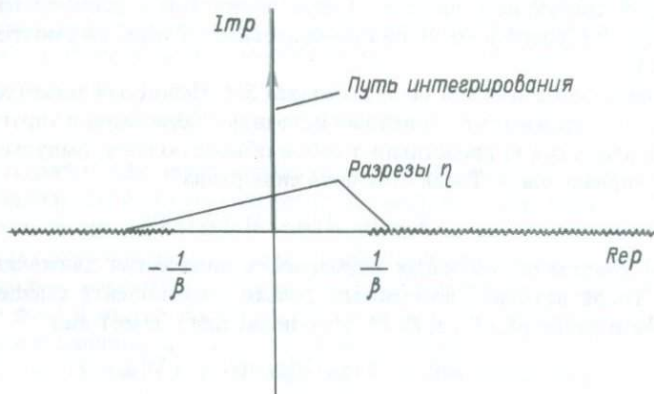


Рис. 6.13. Разрезы и путь интегрирования в плоскости комплексного  $p$  для преобразования Лапласа (6.47).

Но из (6.43) следует непрерывность  $v$  при  $z = 0$  и скачок  $\partial v / \partial z$  вниз на величину  $A / \rho \beta^2$ . Отсюда вытекает, что  $v \sim e^{-n|z|}$ ; зная величину скачка  $\partial v / \partial z$ , находим окончательно

$$v(k_x, z, s) = \frac{A}{2\rho\beta^2 n} e^{-n|z|}. \quad (6.44)$$

[Можно получить (6.44) и иначе, вводя преобразование по  $z$  в (6.43) и используя полюса в плоскости  $k_x$ , как мы делали при выводе интеграла Вейля (6.4).]

Преобразование Лапласа от искомого решения теперь имеет вид

$$v(x, z, s) = \frac{A}{4\pi\rho\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik_x x - n|z|)}{n} dk_x \quad (6.45)$$

причем  $\text{Re } n = \text{Re}(k_x^2 + s^2/\beta^2)^{1/2} > 0$ , что обобщает предыдущее условие  $n > 0$ , позволяя рассматривать комплексные значения. Заметим, что в (6.45)  $k_x$  — формальная переменная интегрирования, и запишем вместо нее  $k_x = isp$ . Тогда

$$v(x, z, s) = \frac{A}{4\pi\rho\beta^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{-ie^{-s(px + \eta|z|)}}{\eta} dp, \quad (6.46)$$

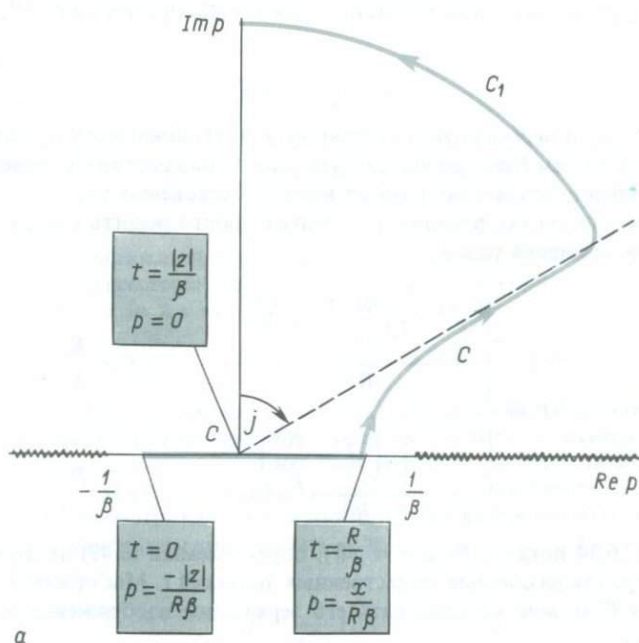
где  $\eta = (\beta^{-2} - p^2)^{1/2}$ ,  $\text{Re } \eta > 0$ .

Мы уже изолировали  $s$  так, что оно только один раз появляется под интегралом (6.46); теперь мы продолжим преобразования (6.46) к виду прямого преобразования Лапласа. Для этого обозначим действительную и мнимую части  $(1/\eta)\exp[-s(px + \eta|z|)]$  соответственно как  $E(p)$  и  $O(p)$ , замечая, что  $E$  — четная и  $O$  — нечетная функции для мнимых значений  $p$ . Тогда

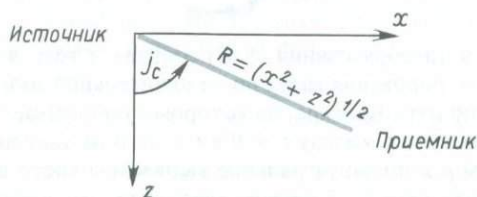
$$\int_{-i\infty}^{i\infty} -i(E + iO) dp = -2i \int_0^{i\infty} E dp = 2 \text{Im} \left\{ \int_0^{i\infty} (E + iO) dp \right\}$$

и, следовательно,

$$v(x, z, s) = \frac{A}{2\pi\rho\beta^2} \text{Im} \left\{ \int_0^{i\infty} \frac{e^{-s(px + \eta|z|)}}{\eta} dp \right\}. \quad (6.47)$$



а



б

Рис. 6.14. а — путь Каньяра  $C$ , определяемый (6.49) в плоскости комплексного  $p$ : начинается в момент  $t = 0$  на отрицательной действительной оси  $p$ , переходит на ветвь гиперболы при  $t = R/\beta$  и продолжается в первом квадранте таким образом, что его асимптота образует угол  $j = \text{arctg } x/|z|$  с положительной мнимой осью  $p$ . Заметим, что на действительной оси  $p$   $C$  не может лежать на разрезах. Показана также часть большой дуги в первом квадранте, связывающей  $C$  и мнимую ось  $p$ . б — угол  $j$  отождествлен с углом выхода луча из источника.

Титчмарш [322] приводит результат, сходный с нашим выводом (6.47) из (6.46), и называет его «принципом отражения». Разрезы для  $\eta$  определяются условием  $\text{Re } \eta \geq 0$  и показаны на рис. 6.13. (Заметим, что при анализе преобразований Фурье мы выбирали  $\text{Im } \eta \geq 0$ , что приводило к существенно более сложным разрезам, включающим части действительной и мнимой оси  $p$ .)

Нашим следующим шагом будет исследование пути  $C$  в плоскости комплексного  $p$ , для которого величина  $px + \eta|z|$  вещественна. Далее мы будем обозна-

чать эту величину как  $t$ , так что экспонента в (6.47) примет вид  $e^{-st}$ , и будем использовать

$$t = px + \eta|z| \quad (6.48)$$

как независимую переменную интегрирования. Назовем путь  $C$ , определяемый как  $p = p(t)$ , путем *Каньяра* и исследуем, как он параметризуется вещественными значениями  $t$ , возрастающими от нуля до бесконечности.

Найти  $p$  в (6.48) как функцию  $t$  — значит просто решить квадратное уравнение, и один из корней равен

$$p = \begin{cases} \frac{xt - |z|\left(\frac{R^2}{\beta^2} - t^2\right)^{1/2}}{R^2}, & t < \frac{R}{\beta} \\ \frac{xt + i|z|\left(t^2 - \frac{R^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}{R^2}, & t > \frac{R}{\beta} \end{cases} \quad (6.49)$$

На рис. 6.14 показан путь  $p = p(t)$ , определяемый (6.49) на плоскости комплексного  $p$  для различных вещественных значений  $t$ . Мы приняли  $x > 0$ . Если  $x < 0$ , для  $C$  можно использовать его зеркальное изображение относительно мнимой оси:



Следующий шаг в преобразовании (6.47) состоит в том, чтобы проверить, нельзя ли вместо интегрирования вверх по положительной мнимой оси  $p$  провести интегрирование по пути *Каньяра*, на котором  $t$  увеличивается от нуля до бесконечности. Участок пути  $C$  между  $t = 0$  и  $t = R/\beta$  не дает вклада в интеграл (6.47), так как на нем  $p$  и подынтегральное выражение чисто вещественны. Не дает вклада и большая дуга  $C_1$  в первом квадранте (см. дополнение 6.8). Поскольку особенностей между  $C$  и положительной мнимой осью  $p$  не имеется, получаем в итоге

$$v(x, z, s) = \frac{A}{2\pi\rho\beta^2} \operatorname{Im} \left\{ \int_C \frac{e^{-s(px + \eta|z|)}}{\eta} dp \right\}. \quad (6.50)$$

Остается только найти обратное преобразование этого выражения, рассматривая  $t$  как переменную интегрирования. Используя (6.48) и (6.49), можно показать, что

$$\frac{dp}{dt} = \frac{i\eta}{(t^2 - R^2/\beta^2)^{1/2}} \quad \text{на } C \text{ при } t > R/\beta,$$

что наконец приводит к результату

$$v(x, z, s) = \frac{A}{2\pi\rho\beta^2} \int_{R/\beta}^{\infty} \frac{e^{-st}}{(t^2 - R^2/\beta^2)^{1/2}} dt, \quad (6.51)$$

## ДОПОЛНЕНИЕ 6.8

## Лемма Жордана

Покажем, что

$$\int_{C_1} \frac{e^{-s(px + \eta|z|)}}{\eta} dp \rightarrow 0,$$

когда радиус дуги  $C_1$  (показанной на рис. 6.14) стремится к бесконечности.

На  $C_1$   $p = Le^{i\theta}$  для некоторого большого значения  $L$  и  $0 \leq \pi/2 - j \leq \theta \leq \pi/2$ . Тогда  $\eta \sim -ip$  (так как  $\operatorname{Re} \eta > 0$ ), и  $\eta \sim L \sin \theta - iL \cos \theta$ . Отсюда

$$\left| \int_{C_1} \right| \leq \int_{\pi/2-j}^{\pi/2} 2 \exp[-s(L \cos \theta x + L \sin \theta |z|)] d\theta \quad (1)$$

(при условии, что  $L$  достаточно велико; множитель 2 введен, чтобы обеспечить выполнение условия  $\leq$ ). Если ни  $x$ , ни  $z$  не равно нулю, экспонента является исчезающе малой. Если  $x = 0$ , то  $j = 0$  и путь Каньяра совпадает с мнимой осью, так что доказывать нечего. Но если  $z = 0$ , то  $j = \pi/2$  и нужно проверить, что интеграл в правой части (1) стремится к нулю при больших  $L$ , несмотря на то, что подынтегральное выражение в (1) не стремится к нулю при  $\theta \rightarrow \pi/2$ . Используем неравенство  $1 - 2\theta/\pi < \cos \theta$  при  $0 < \theta < \pi/2$ . Тогда из (1) при  $|z| = 0$  и  $L \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{C_1} \right| \leq \int_0^{\pi/2} 2e^{-sL(1-2\theta/\pi)x} d\theta = \frac{\pi}{sLx} (1 - e^{-sLx}) \rightarrow 0.$$

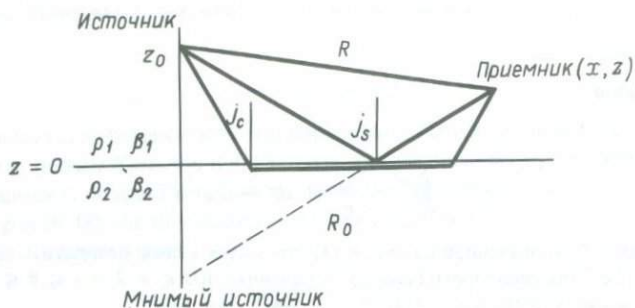
Справедливо и более общее утверждение, что  $\int_{\Gamma} e^{-\lambda p} f(p) dp \rightarrow 0$  при  $L \rightarrow \infty$ , где  $\lambda$  — вещественно и положительно.  $\Gamma$  — полуокружность  $p = Le^{-i\theta}$  ( $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ) и  $|f(p)| \rightarrow 0$  при  $|p| \rightarrow \infty$  на  $\Gamma$ . Этот общий результат представляет собой лемму Жордана, часто формулируемую для отрицательных мнимых  $\lambda$  и контура  $\Gamma$  в виде верхней полуокружности с  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

откуда мы определяем

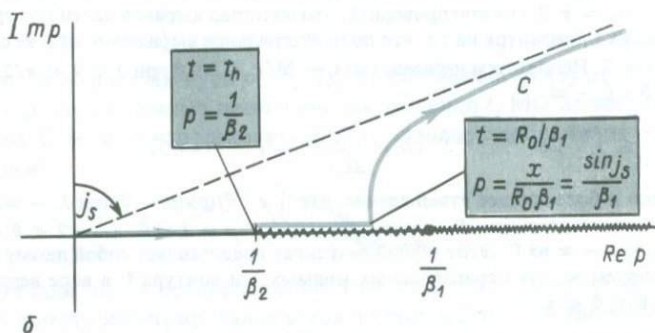
$$v(x, z, t) = \frac{A}{2\pi\rho\beta^2} \frac{H(t - R/\beta)}{(t^2 - R^2/\beta^2)^{1/2}}. \quad (\text{ снова 6.42})$$

Этим завершается наш повторный вывод отклика на  $\delta$ -функцию. Заметим, что колебание (6.42) начинается в момент времени  $t = R/\beta$ , что и следовало ожидать. При  $t = R/\beta$  в  $v$  имеется особенность, но она интегрируема, так что теперь нетрудно сверткой найти отклик на объемную силу  $f$  с произвольной временной зависимостью.

Далее исследуем простую задачу о волнах  $SH$  в случае, когда могут существовать головные волны. Пусть линейный источник имеет вид  $\mathbf{f} = (0, A\delta(x)\delta(z - z_0)\delta(t), 0)$  и действует в однородном полупространстве  $z < 0$  (так что  $z_0 < 0$ ), находящемся в жестком контакте с другим полупространством ( $z > 0$ ) вдоль поверхности  $z = 0$ . Плотность и скорость поперечных волн в верхней среде равны  $\rho_1$  и  $\beta_1$ , в нижней  $\rho_2$  и  $\beta_2$  (рис. 6.15). После выполнения двойного преобразования  $(x, t) \rightarrow (k_x, s)$  из (6.44) становится очевидным, что падающая



а



б

Рис. 6.15. а — параметры модели для линейного источника волн  $SH$ , расположенного в  $x = 0, z = z_0 < 0$  в среде из двух полупространств, находящихся в жестком контакте вдоль  $z = 0$ .  $R_0 = [x^2 + (z + z_0)^2]^{1/2}$  — расстояние от приемника до мнимого источника, находящегося в нижней среде. Мы предполагаем, что  $\beta_2 > \beta_1$  и критический угол  $j_c = \arcsin(\beta_1/\beta_2)$ . Закритическое отражение происходит под углом  $j_s$ , где  $j_s > j_c$ . б — характеристики плоскости комплексного лучевого параметра, важные для оценки обобщенного отражения (6.55), когда приемник расположен на расстоянии, большем критического, так что  $j_s > j_c$  (см. а) и возможна головная волна.

волна в верхней среде имеет вид

$$v^{\text{пад}}(k_x, z, s) = \frac{A}{2\rho_1\beta_1^2s\eta_1} \exp(-s\eta_1|z - z_0|), \quad (6.52)$$

где  $\eta_1 = (1/\beta_1^2 - p^2)^{1/2}$ . Непрерывность  $v$  и  $\tau_{yz} = \mu\partial v/\partial z$  на  $z = 0$  определяет коэффициенты отражения и преломления  $\hat{S}\hat{S}$  и  $\hat{S}\hat{S}$ ; согласно (5.32), они равны

$$\hat{S}\hat{S} = \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2}, \quad \hat{S}\hat{S} = \frac{2\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2}.$$

Полные поля имеют теперь вид:

$$\text{при } z < 0, \quad v(k_x, z, s) = \frac{A}{2\mu_1 s \eta_1} \{ \exp(-s\eta_1|z - z_0|) + \mathcal{S}\mathcal{S} \exp[+s\eta_1(z + z_0)] \}, \quad (6.53)$$

$$\text{при } z > 0, \quad v(k_x, z, s) = \frac{A}{2\mu_1 s \eta_1} \mathcal{S}\mathcal{S} \exp[-s(\eta_2 z + \eta_1 z_0)]. \quad (6.54)$$

Эти алгебраические выражения и были нужны для того, чтобы приступить к обратному преобразованию Каньяра — де Хоопа. Мы уже исследовали первый член в (6.53) и рассмотрим теперь второй член  $v^{\text{отр}}$ , описывающий обобщенную отраженную волну в верхней среде. Идя тем же путем, что и при выводе (6.47), мы должны помнить, что оценка

$$v^{\text{отр}}(x, z, s) = \frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2} \text{Im} \left\{ \int_0^{i\infty} \frac{1}{\eta_1} \left( \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \right) \exp[-s(px + \eta_1|z + z_0|)] dp \right\} \quad (6.55)$$

требует учета разрезов, определенных условиями  $\text{Re } \eta_1 \geq 0, \text{Re } \eta_2 \geq 0$ .

Путь Каньяра  $C$  для отражения — это решение  $p = p(t)$  уравнения

$$t = px + \eta_1|z + z_0|, \quad (6.56)$$

т.е.

$$p = \begin{cases} \frac{xt - |z + z_0| \left( \frac{R_0^2}{\beta_1^2} - t^2 \right)^{1/2}}{R_0^2} & t \leq \frac{R_0}{\beta_1}, \\ \frac{xt + i|z + z_0| \left( t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2} \right)^{1/2}}{R_0^2} & t \geq \frac{R_0}{\beta_1}, \end{cases} \quad (6.56a) \quad (6.56b)$$

где  $R_0 = [x^2 + (z + z_0)^2]^{1/2}$  — расстояние между приемником и мнимым источником (см. рис. 6.15, а). Интересно сравнить этот путь Каньяра с путем интегрирования наискорейшего спуска для (6.55). Чтобы найти этот путь, примем обозначения дополнения 6.3 с  $x = s, \zeta = p$  и  $f = -(px + \eta_1|z + z_0|)$ . Седловая точка  $p = p_s$  должна быть такой, что  $f'(p_s) = 0$ , т.е.  $x \cos j_s = |z + z_0| \sin j_s$ , где  $p_s = \beta_1^{-1} \sin j_s$ . Таким образом,  $p_s$  — это просто лучевой параметр для отраженного луча между источником и приемником, а  $j_s$  — угол падения в верхней среде (см. рис. 6.15, а). Заметим, что начинает проявляться близкое сходство с разд. 6.2 [см. (6.18)]. В том разделе рассматривалась задача о волнах  $P$ , использовалось преобразование Фурье и изучался точечный источник. Несмотря на это. мы находим, что положение седловой точки в обоих случаях практически одинаково. Различие в том, что путь наискорейшего спуска теперь перпендикулярен действительной оси  $p$ , т.е.  $\chi = \pi/2$ , в то время как ранее мы нашли  $\chi = -\pi/4$ . По существу там, где путь Каньяра идет по действительной оси (6.56а), он лежит на «гребне» подынтегрального выражения, и гребень спускается к седловой точке в  $p_s = x/(R_0\beta_1) = \beta_1^{-1} \sin j_s$  по мере роста  $t$  до  $R_0/\beta_1$ . Здесь путь Каньяра поворачивает на  $\pi/2$  и следует вдоль «долины» подынтегрального выражения, т.е. обычного пути наискорейшего спуска для  $t$ , растущего от  $R_0/\beta_1$  (6.56б).

Если приемник расположен так, что  $x/R_0 < \beta_1/\beta_2$ , то точка, где начинается отклонение пути Каньяра от действительной оси  $p$ , лежит слева от разрезов, исходящих из  $p = 1/\beta_1$  и  $p = 1/\beta_2$ . (Неравенство означает, что  $x$  меньше, чем критическое расстояние, на котором начинает наблюдаться головная волна.) Разрезы не оказывают влияния на волновую картину, и, поскольку

$$dp/dt = i\eta_1(t^2 - R_0^2/\beta_1^2)^{-1/2} \quad \text{на } C \text{ (при } t > R_0/\beta_1),$$

отсюда следует, что

$$v^{\text{отр}}(x, z, t) = \frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \right\} \frac{H(t - R_0/\beta_1)}{(t^2 - R_0^2/\beta_1^2)^{1/2}}. \quad (6.57)$$

{ Часть пути при  $t < R_0/\beta_1$  ничего не вносит в решение, так как на ней  $p(t)$  вещественно [см. (6.56a)] и подынтегральное выражение в (6.55) имеет нулевую мнимую часть.} Таким образом, алгебраическое выражение (6.57) является точным. Оно оценивается для  $t > R_0/\beta_1$  следующим способом: сначала используем (6.56b) для отыскания соответствующей точки на пути Каньяра, затем находим  $\eta_i = (\beta_i^{-2} - p^2)^{1/2}$  ( $i = 1, 2$ ) и, наконец, подставляем их в (6.57).

Если приемник находится на расстоянии, большем критического, так что  $1 > x/R_0 > \beta_1/\beta_2$ , то путь Каньяра отходит от действительной оси  $p$  в точке  $p = p_s$  между  $1/\beta_2$  и  $1/\beta_1$ , как показано на рис. 6.15, б. Деформация пути от положительной части мнимой оси  $p$  (6.55) к пути Каньяра осуществляется так же, как и ранее, но теперь может появиться вклад от той части пути, которая лежит на действительной оси  $p$ . Это вклад головной волны, возникающий при оценке (6.55) в той части пути Каньяра, которая соответствует вещественным значениям  $p$  между  $1/\beta_2$  и  $\beta_1^{-1} \sin j_s$ ; при этом  $\eta_2$  чисто мнимое, так что подынтегральное выражение содержит ненулевую мнимую часть. Соответствующие времена находим из (6.56):

$$\text{при } p = 1/\beta_2, \quad t = t_h = x/\beta_2 + |z + z_0|(\beta_1^{-2} - \beta_2^{-2})^{1/2},$$

где  $t_h$  — время прихода в  $(x, z)$  головной волны из  $(0, z_0)$ ;

$$\text{при } p = \beta_1^{-1} \sin j_s, \quad t = R_0/\beta_1,$$

$t$  — время прихода закритического отражения. В интервале времен между  $t_h$  и  $R_0/\beta_1$   $\eta_2$  — отрицательная, чисто мнимая величина. Отсюда следует точная формула для обобщенного отражения:

$$v^{\text{отр}}(x, z, t) = \frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \right\} \frac{H(t - t_h) - H(t - R_0/\beta_1)}{(R_0^2/\beta_1^2 - t^2)^{1/2}} + \frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \right\} \frac{H(t - R_0/\beta_1)}{(t^2 - R_0^2/\beta_1^2)^{1/2}}. \quad (6.58)$$

Последний член характеризует форму закритического отражения при  $t > R_0/\beta_1$ . Однако здесь имеется фазовый сдвиг, поскольку волны, возникающие в нижней среде, неоднородные ( $p > 1/\beta_2$ ). Как было показано в дополнении 5.6 и разд. 6.2, форма колебаний в закритическом отражении является линейной комбинацией формы падающей волны и преобразования Гильберта от нее. Последнее включает движения, возникающие при  $t < R_0/\beta_1$ , т.е. первый член правой части

(6.58), часто называемый вкладом головной волны. В этом смысле можно говорить о том, что закритическое отражение «возникает в хвостовой части головной волны». Однако заметим, что попытка разделить вклады головной волны и закритического отражения потерпит неудачу во всех случаях, когда нарушены условия применимости приближенной (асимптотической) теории для каждого из вкладов [например, (6.25), если приемник находится на расстоянии, близком к критическому, так что  $L$  очень мало]. Хотя раздельное описание волн теряет смысл, (6.58) точно выражает суммарный эффект «головной волны» плюс «отражения».

Последняя задача, которую мы рассмотрим в этом разделе, посвященном точному отклику на единичный импульс в двумерном случае, относится к линейному источнику волн  $P - SV$  в полупространстве, занимающем область  $z > 0$  со свободной поверхностью  $z = 0$ . Мы будем довольно близко следовать Чепмену [74] в получении точных результатов, имеющих много общего с найденными в разд. 6.3. Введем одну новую концепцию: «просачивающейся моды», которая связана с нулями функции Рэлея, лежащими на римановом листе ( $\text{Re } \xi < 0$ ,  $\text{Re } \eta > 0$ ).

Рассмотрим движения  $P - SV$  со смещениями, происходящими только в направлениях  $x$  и  $z$ . Тогда, исходя из аргументов, приведенных в разд. 5.1, достаточно использовать скалярные потенциалы  $\phi$  и  $\psi$ , связанные со смещениями соотношениями

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times (0, \psi, 0) = (\partial\phi/\partial x - \partial\psi/\partial z, 0, \partial\phi/\partial z + \partial\psi/\partial x). \quad (6.59)$$

Источник таких движений — объемная сила  $\mathbf{f}$ , которую (без потери общности) можно описать как  $\mathbf{f} = \nabla\Phi + \nabla \times (0, \Psi, 0)$ . Из теоремы Ламе следует, что потенциалы удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\phi} = \alpha^2 \nabla^2 \phi + \Phi/\rho \quad \text{и} \quad \ddot{\psi} = \beta^2 \nabla^2 \psi + \Psi/\rho. \quad (6.60)$$

Чтобы конкретизировать вид линейного источника на глубине  $h$ , примем

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) &= L_0(t) \delta(x) \delta(z - h) && \text{(источник } P\text{-волны),} \\ \Psi(x, z, t) &= M_0(t) \delta(x) \delta(z - h) && \text{(источник } SV\text{-волны).} \end{aligned} \quad (6.61)$$

Каждый из двух источников генерирует волну, падающую на свободную поверхность, и после преобразования  $(x, t) \rightarrow (k_x, s)$  сравнением с (6.52) мы находим потенциалы падающих волн:

$$\phi_{\text{пад}}(k_x, z, s) = \frac{L_0(s)}{2\rho\alpha^2 s \xi} e^{-s\xi|z-h|}, \quad \psi_{\text{пад}}(k_x, z, s) = \frac{M_0(s)e^{-s\eta|z-h|}}{2\rho\beta^2 s \eta}. \quad (6.62)$$

Как обычно, мы использовали здесь  $\xi = (\alpha^{-2} - p^2)^{1/2}$ ,  $\eta = (\beta^{-2} - p^2)^{1/2}$  и выбрали корни  $\text{Re } \xi > 0$ ,  $\text{Re } \eta > 0$ , чтобы удовлетворить условиям излучения. Когда волны (6.62) достигают свободной поверхности, они генерируют отражения  $P$  и  $S$  с амплитудой, обеспечивающей выполнение граничных условий  $\tau_{zx} = \tau_{zz} = 0$  на  $z = 0$ . Преобразованием в область  $(k_x, z, s)$  мы существенно упростили вывод выражений для отраженных волн, сведя его к задаче в теории

плоских волн, так что суммарные потенциалы будут иметь вид

$$\begin{aligned}\phi(k_x, z, s) &= \frac{L_0(s)}{2\rho\alpha^2s\xi} \{ \exp(-s\xi|z-h|) + \dot{P}\dot{P} \exp[-s\xi(z+h)] \} \\ &\quad + \frac{M_0(s)}{2\rho\beta^2s\eta} \frac{\alpha\dot{S}\dot{P}}{\beta} \exp[-s(\xi z + \eta h)], \\ \psi(k_x, z, s) &= \frac{-L_0(s)}{2\rho\alpha^2s\xi} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \dot{P}\dot{S} \exp[-s(\eta z + \xi h)] \\ &\quad + \frac{M_0(s)}{2\rho\beta^2s\eta} \{ \exp(-s\eta|z-h|) - \dot{S}\dot{S} \exp[-s\eta(z+h)] \},\end{aligned}\quad (6.63)$$

где коэффициенты отражения [см. (5.26) — (5.27), (5.30) — (5.31)] равны

$$\begin{aligned}\dot{P}\dot{P} &= \frac{4p^2\xi\eta - (\beta^{-2} - 2p^2)^2}{R(p)}, & \dot{S}\dot{P} &= \frac{4\beta p\eta(\beta^{-2} - 2p^2)/\alpha}{R(p)}, \\ \dot{P}\dot{S} &= \frac{4\alpha p\xi(\beta^{-2} - 2p^2)/\beta}{R(p)}, & \dot{S}\dot{S} &= \frac{-4p^2\xi\eta + (\beta^{-2} - 2p^2)^2}{R(p)},\end{aligned}\quad (6.64)$$

и

$$R(p) = 4p^2\xi\eta + (\beta^{-2} - 2p^2)^2 \quad (6.65)$$

— функция Рэлея.

Чтобы в оставшейся части этого раздела установить некоторые общие методы и получить конкретные результаты, необходимо ограничиться обращением во временную область только одной из волн. [Выражения (6.63) описывают шесть волн, но две из них — падающие волны и оцениваются элементарно.] Мы оценим только обобщенную отраженную волну  $\dot{S}\dot{S}$  в случае, когда  $M_0(t) = M_0H(t)$  (т.е. ступенька постоянной высоты  $M_0$ , преобразование Лапласа которой равно  $M_0/s$ ). Из последнего члена в (1) дополнения 6.9 находим выражение для горизонтальной компоненты смещения в этой волне  $u_{SS}$ :

$$u_{SS}(k_x, z, s) = \frac{-M_0}{2\rho\beta^2s} \dot{S}\dot{S} \exp[-s\eta(z+h)]. \quad (6.66)$$

Поскольку  $\dot{S}\dot{S}$  — четная функция  $p$ , обратное преобразование по  $k_x$  можно представить как

$$u_{SS}(x, z, s) = \frac{-M_0}{2\pi\rho\beta^2} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{i\infty} \dot{S}\dot{S}(p) \exp[-spx - s\eta(z+h)] dp \right\} \quad (6.67)$$

ДОПОЛНЕНИЕ 6.9

О записи многократно преобразованного решения (6.63)

Единственная трудность, не позволяющая сразу же получить формулы (6.63) из теории плоских волн, связана с деталями нашего правила знаков и нормировкой коэффициентов отражения. Начиная с гл. 5, мы приняли за правило записывать эти коэффициенты для отношений амплитуд смещений с положительным знаком для смещения в направлении растущих  $x$  (см. рис. 5.5). Поскольку формулы (6.63) относятся к потенциалам, в них введены знаки «минус» для коэффициентов  $\hat{P}\hat{S}$  и  $\hat{S}\hat{S}$  и множители  $\alpha/\beta$  и  $\beta/\alpha$  для  $\hat{S}\hat{P}$  и  $\hat{P}\hat{S}$  соответственно.

На практике не нужно преобразовывать потенциалы во временную область и затем использовать (6.59) для компонент смещений. Лучше получить выражения для преобразованных компонент смещения, аналогичные (6.63), а затем выполнить их обратное преобразование, перейдя во временную область. Пусть  $\mathbf{u} = (u, 0, w)$ ; учитывая, что операция  $\partial/\partial x$  соответствует умножению на  $(-sp)$  после преобразования по пространству, получим из (6.59) для  $0 \leq z \leq h$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(k_x, z, s) \\ w(k_x, z, s) \end{pmatrix} = & \frac{L_0(s)}{2\rho\beta^2\xi} \left[ \begin{pmatrix} -p \\ \xi \end{pmatrix} \exp[s\xi(z-h)] + \hat{P}\hat{P} \begin{pmatrix} -p \\ -\xi \end{pmatrix} \exp[-s\xi(z+h)] \right] \\ & + \frac{M_0(s)}{2\rho\beta^2\eta} \frac{\alpha}{\beta} \hat{S}\hat{P} \begin{pmatrix} -p \\ -\xi \end{pmatrix} \exp[-s(\xi z + \eta h)] \\ & + \frac{L_0(s)}{2\rho\beta^2\xi} \frac{\beta}{\alpha} \hat{P}\hat{S} \begin{pmatrix} -\eta \\ p \end{pmatrix} \exp[-s(\eta z + \xi h)] \\ & + \frac{M_0(s)}{2\rho\beta^2\eta} \left[ \begin{pmatrix} -\eta \\ -p \end{pmatrix} \exp[s\eta(z-h)] + \hat{S}\hat{S} \begin{pmatrix} -\eta \\ p \end{pmatrix} \exp[-s\eta(z+h)] \right]. \quad (1) \end{aligned}$$

Поскольку векторы  $\begin{pmatrix} -p \\ \xi \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} -\eta \\ -p \end{pmatrix}$  имеют соответственно амплитуды  $1/\alpha$  и  $1/\beta$ , множитель  $\alpha/\beta$  должен предшествовать  $\hat{S}\hat{P}$ , а множитель  $\beta/\alpha$  предшествовать  $\hat{P}\hat{S}$  для того, чтобы коэффициенты отражения обменных волн сохранили свой стандартный вид отношений амплитуд смещений.

(напомним, что  $k_x = isp$ ). Определив путь Каньяра условием  $t = px + \eta(z+h)$ , т.е. как

$$p(t) = \begin{cases} \frac{xt - (z+h) \left( \frac{R_0^2}{\beta^2} - t^2 \right)^{1/2}}{R_0^2} & t \leq \frac{R_0}{\beta}, \\ \frac{xt + i(z+h) \left( t^2 - \frac{R_0^2}{\beta^2} \right)^{1/2}}{R_0^2} & \frac{R_0}{\beta} \leq t, \end{cases} \quad (6.68)$$

где  $R_0 = [x^2 + (z+h)^2]^{1/2}$  — расстояние между приемником и мнимым источником, получаем

$$u_{SS}(x, z, s) = \frac{-M_0}{2\pi\rho\beta^2} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^\infty \dot{S}\dot{S}(p) e^{-st} \frac{dp}{dt} dt \right\},$$

Следовательно, точным решением во временной области будет

$$\begin{aligned} u_{SS}(x, z, t) &= \frac{-M_0}{2\pi\rho\beta^2} \operatorname{Im} \left\{ \dot{S}\dot{S}(p) \frac{dp}{dt} \right\} \\ &= \frac{M_0}{2\pi\rho\beta^2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{4p^2 \xi \eta - (\beta^{-2} - 2p^2)^2 dp}{4p^2 \xi \eta + (\beta^{-2} - 2p^2)^2 dt} \right\} \Big|_{p=p(t)}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

В этом выражении

$$\frac{dp}{dt} = \begin{cases} \frac{\eta}{\left(\frac{R_0^2}{\beta^2} - t^2\right)^{1/2}} & 0 < t < \frac{R_0}{\beta}, \\ \frac{i\eta}{\left(t^2 - \frac{R_0^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} & \frac{R_0}{\beta} < t, \end{cases}$$

так что в (6.69) присутствует интегрируемая особенность на времени  $t = R_0/\beta$ , соответствующем приходу отраженной волны.

Несмотря на простой вид точного решения (6.69), целесообразно продолжить его исследование, так как анализ различных свойств решения в плоскости комплексного  $p$  (рис. 6.16, б) поможет лучше понять его структуру; этими свойствами определяются качественные характеристики волн. Так первое вступление в точке приема (если она достаточно удалена от источника) образует головная волна, имеющая лучевой параметр  $1/\alpha$  и время пробега  $t_h = x/\alpha + (z+h)(\beta^{-2} - \alpha^{-2})^{1/2}$ . Форма колебаний в этом вступлении определяется путем оценки (6.69) в окрестности  $t = t_h$ ,  $p = 1/\alpha$ ; путь Каньяра для этих значений лежит на разрезе, начинающемся в  $p = 1/\alpha$ . Другое важное вступление — отражение, связанное с седловой точкой (6.67). Оно соответствует  $t = R_0/\beta$  на пути Каньяра, и его свойства сходны с исследованными для (6.57) и (6.58). Два новых явления, возникающие в этой задаче, связаны с полюсами подынтегрального выражения в (6.67), т.е. нулями функции Рэлея

$$R(p) = 4p^2 \xi \eta + (\beta^{-2} - 2p^2)^2.$$

Из разд. 5.3 нам известно, что  $R(p)$  имеет нули при  $p = \pm 1/c_R$  вблизи  $p = \pm 1/\beta$  на листе  $\{\operatorname{Re} \xi \geq 0; \operatorname{Re} \eta \geq 0\}$ , где  $\xi$  и  $\eta$  чисто мнимые.  $R(p) = 0$  имеет нули также вблизи  $p = \pm 1/\alpha$  на листе  $\{\operatorname{Re} \xi < 0, \operatorname{Re} \eta \geq 0\}$ . Такой лист часто называют «запрещенным» или «нефизическим» в том смысле, что подынтегральное выражение, оцениваемое в некоторой точке этого листа, стремится к бесконечности при  $z \rightarrow \infty$  в нарушение условий излучения. Однако мы узнаем, что полюса  $\dot{S}\dot{S}$ , являющиеся корнями  $R(p)$  на запрещенном листе, все же могут вносить вполне определенный вклад в решение.

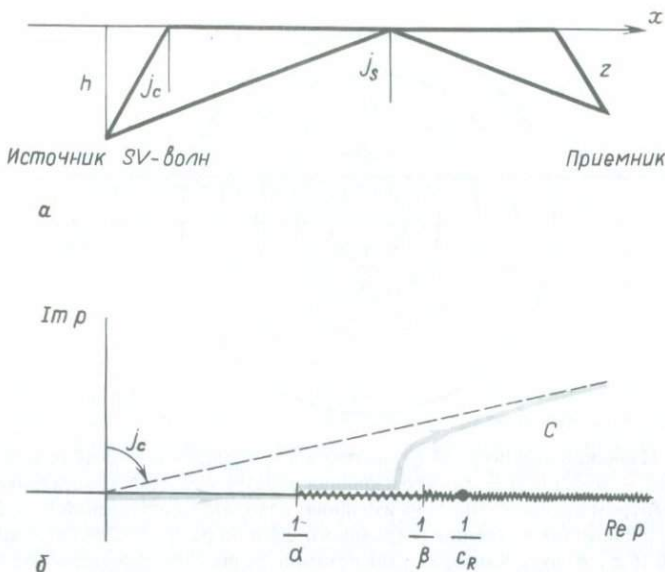


Рис. 6.16. Обобщенное отражение  $\hat{S}\hat{S}$  для линейного источника, расположенного внутри однородного полупространства. *а* — геометрия источник — приемник в случае  $j_s > j_c$ ; показаны пути отраженной и головной волн. *б* — плоскость комплексного  $p$ ; показан путь Каньяра на римановом листе ( $\text{Re} \xi > 0$ ;  $\text{Re} \eta > 0$ ). Полюс Рэлея  $p = 1/c_R$  лежит теперь на двух разрезах.

Оценим сначала эффект полюса Рэлея в  $p = 1/c_R$ . С ростом расстояния источник — приемник угол  $j_s$  увеличивается (см. рис. 6.16, *а*), и асимптота для пути Каньяра приближается к действительной оси  $p$  (рис. 6.16, *б*). Следовательно, сам путь Каньяра проходит ближе к полюсу Рэлея. Если начертить изолинии амплитуд  $\hat{S}\hat{S}(p)$  в окрестности полюса  $p = 1/c_R$  (рис. 6.17), то можно увидеть, что большие значения  $\hat{S}\hat{S}(p)$  вблизи полюса приведут к возникновению заметной рэлеевской волны, при условии что путь Каньяра лежит достаточно близко к  $p = 1/c_R$ . Чтобы оценить, когда рэлеевская волна достаточно четко выражена, мы можем проверить, лежит ли путь Каньяра на ее «времени вступления»  $x/c_R$  ближе к полюсу Рэлея, чем к другой ближайшей особенности  $\hat{S}\hat{S}$  и  $dp/dt$ , которая могла бы повлиять на  $u_{SS}$  в (6.69). Поскольку эта ближайшая особенность — точка разветвления в  $p = 1/\beta$ , ясно, что волна Рэлея будет хорошо выражена, если

$$\left| p \left( \frac{x}{c_R} \right) - \frac{1}{c_R} \right| < \frac{1}{c_R} - \frac{1}{\beta}. \quad (6.70)$$

В этом неравенстве мы можем оценить  $p$  в момент времени  $x/c_R$  из (6.68) и найти полностью эквивалентное неравенство в виде геометрического соотношения:

$$\text{tg } j_s > \left( \frac{2c_R}{\beta - c_R} \right)^{1/2}. \quad (6.71)$$

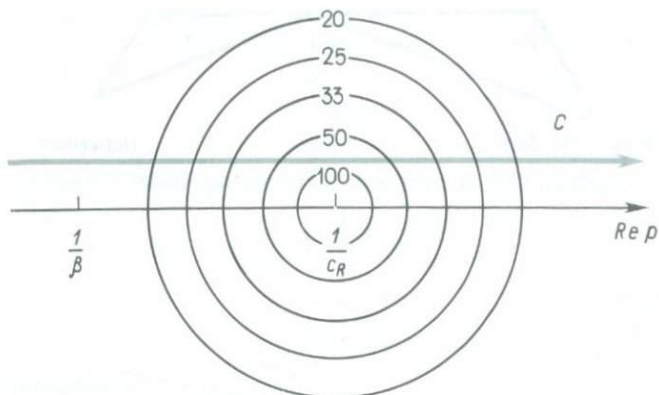


Рис. 6.17. Изолинии амплитуд  $\mathcal{S}\mathcal{S}(p)$  на плоскости комплексного  $p$  вблизи полюса Рэлея. Здесь  $\mathcal{S}\mathcal{S}(p) \sim (p - 1/c_R)^{-1}$ , так что изолинии образуют систему концентрических окружностей с центром в полюсе. Числа на изолиниях находятся в отношении  $1 : 1/2 : 1/3 : 1/4 : 1/5 \dots$ , удобном для получения постоянного шага по радиусу. Для больших значений  $j_s$  (см. рис. 6.16, а и б) путь Каньяра  $C$ , как показано на рисунке, пересекает изолинии близко к полюсу; соответствующие значения  $u_{SS}$ , определяемые из (6.69), на этих временах, очевидно, будут большими. Такие значения и определяют форму волны Рэлея (точнее, ее поперечной компоненты; второй вклад в виде  $P$ -компоненты вносит обобщенное отражение  $\mathcal{S}\bar{P}$ ).

На практике этот результат несколько точнее, чем неравенство Накано (6.34), которое мы получили для источника  $P$ -волн (оно было обращенным, так как указывало диапазон расстояний, где волна Рэлея *не выражена* отчетливо). Поскольку для многих горных пород  $c_R \sim 0,92\beta$ , из (6.71) следует, что для того, чтобы волна Рэлея отчетливо проявилась, расстояние должно по меньшей мере в пять раз превышать сумму глубин источника и приемника.

Гилберт и Ластер [137] обозначили полюс в  $p = 1/c_R$  как  $\mathcal{S}$ -полюс, а связанную с ним волну Рэлея — как  $\mathcal{S}$ -импульс. Такое обозначение было выбрано потому, что, вообще говоря, волна Рэлея — это дифракционное явление, связанное с ближайшим фронтом  $\mathcal{S}$ -волны, взаимодействующим со свободной поверхностью. Подобно этому существует эффект, связанный с корнями  $\mathbf{R}(p)$ , обычно расположенными вблизи  $p = 1/\alpha$  и удаляющимися от этой точки разветвления только при значениях коэффициента Пуассона, больших примерно 0,4. Соответствующие полюсы, названные в [137]  $\bar{P}$ -полюсами, не лежат на «физическом» листе римановой поверхности. Вводя обозначения Финни [256], обозначим «физический» лист  $\{\text{Re } \xi > 0; \text{Re } \eta > 0\}$  как лист  $(++)$ , а три «нефизических» листа — как  $(+-)$ ,  $(-+)$  и  $(--)$ . В то время как полюс ( $\mathcal{S}$ ) Рэлея лежит на листе  $(++)$ ,  $\bar{P}$ -полюс лежит на листе  $(-+)$ .

Казалось бы резонным предположить, что полюсы  $\mathcal{S}\mathcal{S}(p)$ , лежащие на нефизических листах, не могут влиять на обобщенное отражение  $u_{SS}$  в (6.69), поскольку путь Каньяра лежит целиком на листе  $(++)$ . Однако рассмотрим схематически показанную на рис. 6.18 систему изолиний  $\mathcal{S}\mathcal{S}$  вблизи от  $\bar{P}$ -полюса. Поскольку мы интересуемся значениями  $\mathcal{S}\mathcal{S}$  в первом квадранте листа  $(++)$  (т.е. в обла-

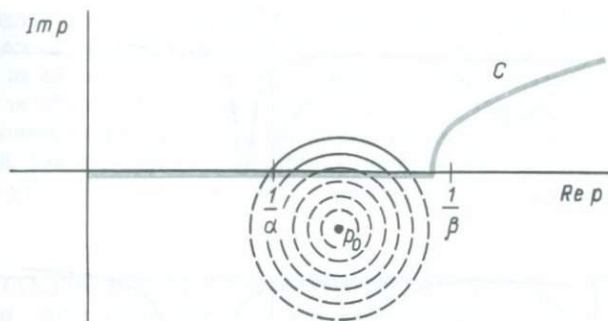


Рис. 6.18. Изолинии амплитуд  $\bar{S}\bar{S}(p)$  вблизи  $\bar{P}$ -полюса  $p = p_0$ , лежащего на «нефизическом» римановом листе. Это лист  $(- +)$ , и  $R(p_0) = 0$ , где по-прежнему  $R(p) = 4p^2\xi\eta + (\beta^{-2} - 2p^2)^2$ . Хотя изолинии, близкие к  $p_0$ , — концентрические окружности, лежащие целиком в четвертом квадранте листа  $(- +)$ , изолинии большего радиуса должны пересекаться с разрезом, идущим вправо от  $p = 1/\alpha$ . Такие изолинии перейдут тогда на первый квадрант физического риманова листа, так как именно этим способом сохранена аналитичность  $\bar{S}\bar{S}(p)$  вдоль разреза (см. дополнение 6.2). На листе  $(- +)$  изолинии показаны пунктиром, а их продолжение на листе  $(+ +)$  — сплошными линиями. Заметим, что путь Каньяра на отрезке между  $1/\alpha$  и  $1/\beta$  лежит на действительной оси  $p$ .

сти, где лежит наш путь Каньяра), изолинии именно для этого листа нанесены в первом квадранте рис. 6.18. Аналитическое продолжение  $\bar{S}\bar{S}$  в четвертый квадрант (т.е. через ось действительного  $p$  для  $p > 1/\alpha$ ) требует перехода на другой риманов лист, в четвертый квадрант листа  $(- +)$ ; в этой области *имеется* полюс  $\bar{S}\bar{S}$ . Показанный на рисунке полюс занимает положение, соответствующее коэффициенту Пуассона порядка 0,4; важно, что изолинии, связанные с этим полюсом, появляются на физическом листе. Для приемника, находящегося на достаточном расстоянии, при котором путь Каньяра лежит на действительной оси  $p$  или вблизи нее, область сплошных изолиний рис. 6.18 при оценке (6.69) будет пересекаться контуром, в результате чего появится сравнительно широкий импульс. Это  $\bar{P}$ -импульс, описанный в деталях Гилбертом и др. [138]. Он возникает при значениях лучевого параметра между  $1/\alpha$  и  $1/\beta$  и располагается на сейсмограмме между вступлениями головной волны и закритического отражения. Пример такого импульса приведен на рис. 6.19, а.

Для значений коэффициента Пуассона, уменьшающихся от 0,4 примерно до 0,263,  $\bar{P}$ -полюсы смещаются к оси действительных  $p$  чуть левее точки  $p = 1/\alpha$  [оставаясь при этом на листе  $(- +)$ ]. При дальнейшем уменьшении коэффициента Пуассона от 0,263 до нуля  $\bar{P}$ -полюсы остаются на действительной оси, причем один стремится приблизиться к точке разветвления  $p = 1/\alpha$  (см. задачу 6.3). Присутствие полюса вблизи этой точки на пути Каньяра, в которой возникает головная волна [также при  $p = 1/\alpha$ , но на листе  $(+ +)$ ], приводит к искажению обычной формы головной волны. На рис. 6.19, б приведен пример  $u_{SS}$  для обычного значения коэффициента Пуассона (0,25), а на рис. 6.19, в — пример теоретической сейсмограммы для очень низкого значения коэффициента Пуассона (0,1).

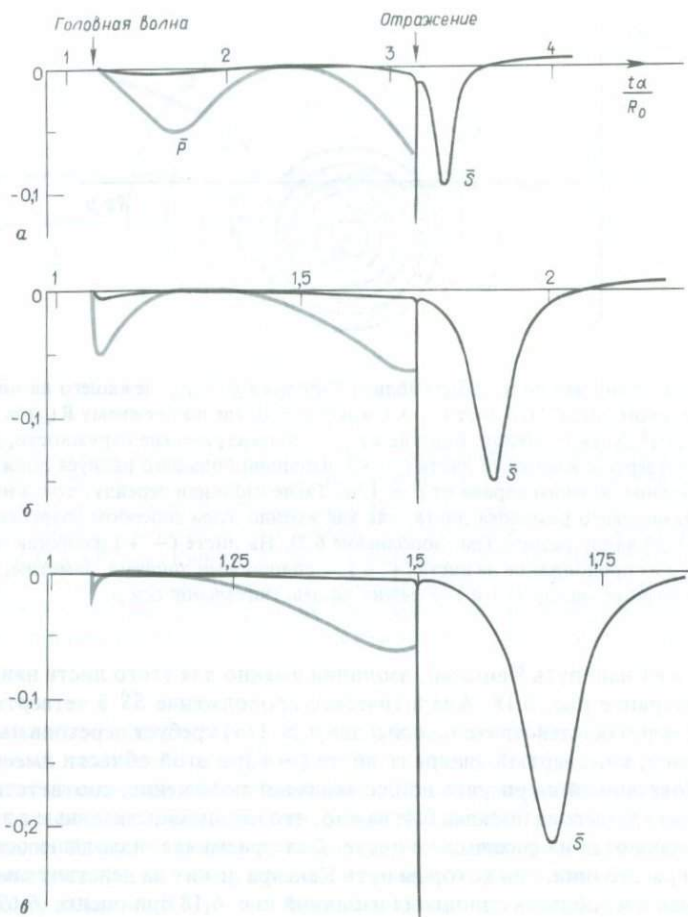


Рис. 6.19. Графики горизонтальной компоненты обобщенного отражения  $\overline{SS}$ , определяемого (6.69), как функции времени при трех различных значениях коэффициента Пуассона. Используется безразмерное время  $t\alpha/R_0$ , где  $R_0$  — расстояние между приемником и минимальным источником. Величины  $h, x, z$  относятся как 1 : 20 : 0,1. Поскольку головная волна большую часть своего пути распространяется со скоростью  $P$ -волны, она вступает вскоре после  $t\alpha/R_0 = 1$ . Временные масштабы выбраны так, чтобы охватить времена прихода головной и отраженной волн. Для подробного рассмотрения формы колебаний между этими временами соответствующая часть сейсмограммы дана также с десятикратным увеличением амплитуд (серые линии). **а** — коэффициент Пуассона 4/9;  $\overline{P}$ -полус находится вдали от оси действительных  $p$ , как на рис. 6.18, что приводит к волне  $\overline{P}$  между головной и отраженной волнами. **б** — коэффициент Пуассона 1/4; головная волна и закрытическое отражение — четко разделенные импульсы. **в** — коэффициент Пуассона 1/10;  $\overline{P}$ -полус лежит на оси действительных  $p$  близко к точке разветвления  $p = 1/\alpha$ , хотя и не на листе (+ +); его главный эффект — искажение формы головной волны, создающее импульсное вступление. Хотя на времени вступления отраженной волны имеется особенность, площадь, ограниченная этой частью импульса, незначительна.

$P$ -импульс — простой пример *просачивающейся моды*. Определение «просачивающаяся» правильно описывает явление, поскольку для той части пути Каньяра, на которую влияет  $P$ -полос,  $\eta$  или чисто вещественно, или (на временах сразу за вступлением отраженной волны) имеет очень малую мнимую часть. Это указывает на излучение энергии вниз от свободной поверхности в виде  $SV$ -колебаний. Такая утечка излучаемой энергии не происходит в волне  $S$ , для которой и  $\xi$ , и  $\eta$  являются мнимыми. Мы полнее исследуем просачивающиеся моды в гл. 7.

## 6.5. МЕТОДЫ КАНЬЯРА — ДЕ ХООПА ДЛЯ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Как оказалось, привлекательной особенностью метода Каньяра — де Хоопа при решении двумерных задач (задач с линейными источниками) является то, что с его помощью удастся найти для решения точное алгебраическое выражение. В трехмерных задачах, как мы обнаружим, точные решения во временной области обычно невозможно представить алгебраическими выражениями, и они описываются однократными интегралами в конечных пределах. Сравнительно недавно в сейсмологической литературе были найдены преобразования этих интегралов, сводящие их к интегрированию по конечному отрезку пути Каньяра. Однако для многих практически важных трехмерных задач можно найти подходящую приближенную форму решения (6.94), (6.95), позволяющую легко вычислить интеграл путем свертки.

Начнем опять с простой задачи о волнах  $SH$ ; будем пользоваться декартовыми координатами  $(x, y, z)$  и одновременно связанными с ними цилиндрическими координатами  $(r, \phi, z)$ . Пусть точечный источник в бесконечной упругой среде действует в начале координат как центр вращения, так что соответствующая объемная сила равна

$$\mathbf{f} = \nabla \times (0, 0, X) \quad (6.72)$$

где потенциал объемных сил  $X$  осесимметричен, так что  $X = X(r, z, t)$  не зависит от  $\phi$ . Такой источник возбуждает только азимутальную компоненту, и она не зависит от  $\phi$ . Таким образом, в цилиндрических координатах

$$\mathbf{u} = \nabla \times (0, 0, \chi) = (0, -\partial\chi/\partial r, 0), \quad (6.73)$$

и уравнение движения сводится к виду

$$\rho\ddot{\chi} = X + \mu\nabla^2\chi. \quad (6.74)$$

Для точечного источника в начале координат с временной зависимостью типа ступенчатой функции

$$X = N_0 H(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z) = N_0 H(t) \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z), \quad (6.75)$$

где  $N_0$  — некая константа. Из (4.4) следует, что решение для  $SH$ -потенциала  $\chi$  в точности равно

$$\chi(x, y, z, t) = \frac{N_0}{4\pi\rho\beta^2} \frac{H(t - R/\beta)}{R}, \quad (6.76)$$

здесь использовано  $R = |\mathbf{x}|$ .

Выведем этот результат снова, применив подход Каньяра — де Хоопа к трехмерным задачам. Начнем с трехкратного преобразования

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik_x x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik_y y) dy \int_0^{\infty} \exp(-st) dt$$

действующего на (6.74) и (6.75):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \chi(k_x, k_y, z, s) = -\frac{N_0}{\rho\beta^2 s} \delta(z) + n^2 \chi(k_x, k_y, z, s),$$

где  $n^2 = k_x^2 + k_y^2 + s^2/\beta^2$ . Из сравнения с (6.43) и (6.44) следует, что

$$\chi(k_x, k_y, z, s) = \frac{N_0}{2\rho\beta^2 sn} e^{-n|z|}, \quad (6.77)$$

при выборе  $\text{Re } n > 0$ .

Преобразование Лапласа решения, которое мы хотим найти, выражается как двойное обратное преобразование Фурье от (6.77):

$$\chi(x, s) = \frac{N_0}{8\pi^2 \rho\beta^2 s} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \frac{\exp(ik_x x + ik_y y - n|z|)}{n}, \quad (6.78)$$

и наша задача — привести его к виду прямого преобразования Лапласа, подынтегральное выражение которого отображает  $\chi$  во временной области. Для этой цели мы исследуем плоскость  $(k_x, k_y)$ , используя новые переменные  $(w, q)$ , определенные как

$$k_x = s(w \cos \phi - q \sin \phi), \quad k_y = s(w \sin \phi + q \cos \phi). \quad (6.79)$$

Эта замена и представляет собой преобразование де Хоопа [170]; оно включает азимутальную координату  $\phi$  и состоит фактически из вращения и растягивания всей плоскости горизонтального волнового числа. Поскольку  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$  и элемент площади  $dk_x dk_y$  теперь заменен на  $s^2 dw dq$ , мы находим из (6.78), что

$$\chi(x, s) = \frac{N_0}{8\pi^2 \rho\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp(iswr - sn|z|)}{\eta}, \quad (6.80)$$

где  $\eta = (\beta^{-2} + q^2 + w^2)^{1/2}$  и  $\text{Re } \eta > 0$ .

Одним из стандартных способов перевода (6.80) во временную область является преобразование интеграла по  $q$  в прямое преобразование Лапласа интеграла по  $w$ . Такой подход часто применяется в работах по прикладной механике и будет использован для решений, описанных в гл. 15 нашей книги [см. уравнения (15.30) и (15.31), в которых из  $q$  и  $w$  устранили лишний множитель  $1/\alpha$ , чтобы сделать эти переменные безразмерными].

Другой способ обращения (6.80) — использование сходства с задачей для линейного источника. Чтобы привести подынтегральное выражение в (6.80) к виду, сходному с двумерным случаем [см., например, (6.46)], мы вводим переменную  $p = -iw$ , что дает

$$\chi(x, s) = \frac{N_0}{2\pi^2 \rho\beta^2} \int_0^{\infty} dq \text{Im} \left[ \int_0^{i\infty} \frac{\exp[-s(pr + \eta|z|)]}{\eta} dp \right], \quad (6.81)$$

где  $\eta = (\beta^{-2} + q^2 - p^2)^{1/2}$ . [Чтобы получить (6.81) из (6.80), мы использовали также полуинтервалы интегрирования и свойство четности по  $q$ , а также четности и нечетности по действительной и мнимой частям подынтегрального выражения (6.80).]

Теперь становится очевидным сильное сходство между подынтегральными выражениями в (6.47) и (6.81). Заметим, что здесь горизонтальной переменной служит  $r$ , а не  $x$ , и  $1/\beta^2 + q^2$  заменяет  $1/\beta^2$  в определении  $\eta$ . Ранее было найдено, что

$$\text{Im} \left[ \int_0^{i\infty} \frac{\exp[-s(pX + \eta|z|)]}{\eta} dp \right] \quad (\text{with } \eta = (\beta^{-2} - p^2)^{1/2})$$

— это преобразование Лапласа от

$$\frac{H\left(t - \frac{(x^2 + z^2)^{1/2}}{\beta}\right)}{\left(t^2 - \frac{x^2 + z^2}{\beta^2}\right)^{1/2}},$$

что позволяет нам представить (6.81) как

$$\chi(\mathbf{x}, s) = \frac{N_0}{2\pi^2 \rho \beta^2} \int_0^\infty dq \int_0^\infty \frac{H[t - R(\beta^{-2} + q^2)^{1/2}]}{[t^2 - R^2(\beta^{-2} + q^2)]^{1/2}} e^{-st} dt. \quad (6.82)$$

Здесь  $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = (r^2 + z^2)^{1/2}$  используется как трехмерная функция расстояния. Остается только изменить порядок интегрирования в (6.82) (см. рис. 6.20), что приводит к формуле

$$\chi(\mathbf{x}, s) = \frac{N_0}{2\pi^2 \rho \beta^2} \int_0^\infty dt e^{-st} \left\{ H\left(t - \frac{R}{\beta}\right) \int_0^{(t^2/R^2 - 1/\beta^2)^{1/2}} \frac{dq}{[t^2 - R^2(\beta^{-2} + q^2)]^{1/2}} \right\} \quad (6.83)$$

Искомое решение имеет вид

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \frac{N_0}{2\pi^2 \rho \beta^2} H\left(t - \frac{R}{\beta}\right) \int_0^{(t^2/R^2 - 1/\beta^2)^{1/2}} \frac{dq}{[t^2 - R^2(\beta^{-2} + q^2)]^{1/2}}. \quad (6.84)$$

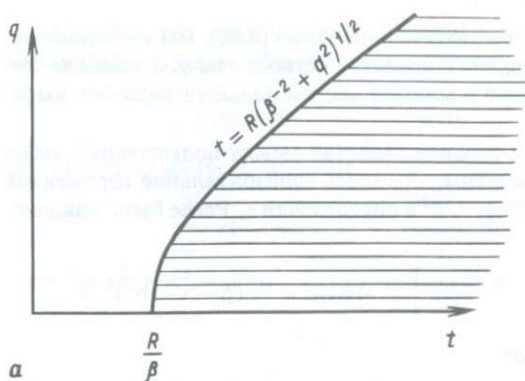
По существу в изложенном и заключается метод де Хоопа [170]; укажем следующие свойства решения (6.84).

1) Форма решения типична для задач с точечным источником: точное решение дается однократным интегралом в конечных пределах.

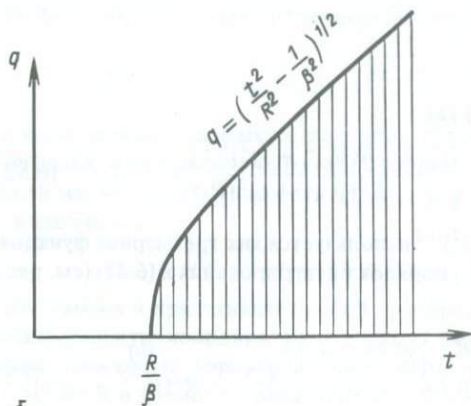
2) В нашем частном случае интеграл (6.84) легко оценивается аналитически. Подстановка  $q = (t^2/R^2 - 1/\beta^2)^{1/2} \sin \theta$  непосредственно приводит к значению интеграла  $\pi/2R$ , и мы вновь получаем решение (6.76).

3) Вернувшись к (6.83), находим  $\chi(\mathbf{x}, s) = (N_0 e^{-SR/\beta}) / (4\pi\rho\beta^2 sR)$ . Для произвольной зависимости от времени  $N_0(t)$  (а не ступенчатой функции, с которой мы до сих пор имели дело) получаем

$$\chi(\mathbf{x}, s) = \frac{N_0(s)}{4\pi\rho\beta^2 R} e^{-sR/\beta} \quad \text{и} \quad \chi(\mathbf{x}, t) = \frac{N_0(t - R/\beta)}{4\pi\rho\beta^2 R}.$$



а



б

Рис. 6.20. Диаграммы, объясняющие эквивалентность разных способов интегрирования в плоскости  $t$ - $q$ . а — сначала проводится интегрирование по  $t$  при фиксированном  $q$ , согласно (6.82), при нижнем пределе — функции от  $q$ . б — сначала проводится интегрирование по  $q$  при фиксированном  $t$ , как в (6.83), при верхнем пределе — функции от  $t$ .

Физическое смещение, согласно (6.73), равно

$$u_\phi = - \left[ \frac{\partial}{\partial r} \frac{N_0(t - R/\beta)}{4\pi\rho\beta^2 R} \right].$$

4) Когда имеется граница с соответствующими головными и граничными волнами, описанный выше метод изменяется только в том смысле, что вид интеграла по времени в (6.82) становится более сложным (его опять-таки можно выписать из предыдущего анализа двумерной задачи).

Хотя описанный выше метод является глубоко разработанным и весьма успешным подходом, в нем не используются полностью свойства лучевого параметра и интегрирования в плоскости комплексного лучевого параметра, оказавшие столь полезными для нас в разд. 6.4. Поэтому современные методы решения задачи Лэмба часто используют способ, предложенный Стриком [314] и развитый Хелмбергером [158] и Гилбертом и Хелмбергером [136]; в нем плоскость комплексного лучевого параметра играет главную роль. Эти методы требуют знакомства с преобразованием Ханкеля и связанными с ним результатами для

модифицированных функций Бесселя, обзор которых дан в дополнении 6.10. Чтобы проиллюстрировать подход, основанный на использовании комплексного  $p$ , вернемся к задаче (6.74) — (6.75), применив теперь двойное преобразование

$$\int_0^{\infty} r I_0(\lambda r) dr \int_0^{\infty} e^{-st} dt, \text{ чтобы найти}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \chi(\lambda, z, s) = \frac{-N_0}{2\pi\rho\beta^2 s} \delta(z) + \left( \frac{s^2}{\beta^2} - \lambda^2 \right) \chi(\lambda, z, s).$$

Следовательно, двойное преобразование решения будет равно [ср. с (6.44) и (6.43)]

$$\chi(\lambda, z, s) = \frac{N_0}{4\pi\rho\beta^2 s^2 \eta} e^{-s\eta|z|}, \quad (6.85)$$

где  $\eta = (1/\beta^2 - \lambda^2/s^2)^{1/2}$  и  $\text{Re } \eta > 0$ . Вводя теперь  $\lambda = sp$  (таким представлением в той или иной форме мы пользовались уже несколько раз) и применяя обратное преобразование [см. уравнение (4) дополнения 6.10], получаем

$$\chi(r, z, s) = \frac{N_0}{4\pi^2\rho\beta^2 i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{p}{\eta} K_0(spr) e^{-s\eta|z|} dp, \quad (6.86)$$

где  $\eta = (\beta^{-2} + p^2)^{1/2}$  и  $s, r, \eta$  — вещественные и положительные величины.

#### ДОПОЛНЕНИЕ 6.10

##### *Горизонтальные преобразования для функций, симметричных относительно вертикальной оси*

Рассмотрим функцию  $f = f(x, y)$ , которая фактически зависит только от  $(x^2 + y^2)^{1/2} = r$ . Тогда

$$f(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy.$$

Введем теперь  $k_r$  и  $\phi'$  так же, как это делалось в (6.5) для получения интеграла Зоммерфельда. Следуя методике, которая привела к (6.7), находим, что

$$f(k_x, k_y) = 2\pi \int_0^{\infty} r f(r) J_0(k_r r) dr,$$

эта функция зависит только от  $k_r$ , но не от  $\phi'$ . Общепринято, что  $f(r) = f(x, y)$ , но при этом  $f(k_r) = f(k_x, k_y)/2\pi$ . Отсюда и из аналогичных результатов для обратного преобразования получаем

$$\left. \begin{aligned} f(k_r) &= \int_0^{\infty} r f(r) J_0(k_r r) dr \\ f(r) &= \int_0^{\infty} k_r f(k_r) J_0(k_r r) dk_r \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{пара преобразований Ханкеля} \\ \text{порядка 0.} \end{array} \quad (1)$$

Индукцией получаем пару преобразований Ханкеля порядка  $n$ :

$$\left. \begin{aligned} f^{(n)}(k_r) &= \int_0^{\infty} r f(r) J_n(k_r r) dr \\ f(r) &= \int_0^{\infty} k_r f^{(n)}(k_r) J_n(k_r r) dk_r. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

[мы используем верхний индекс ( $n$ ), когда хотим указать порядок функции Бесселя, применяемой в преобразовании].

В любой конкретной волновой задаче следует выбрать такой порядок преобразования Ханкеля, при котором в рассматриваемом волновом уравнении операции с переменным  $r$  после преобразования сводятся к скалярному умножению. Например, производные в (6.74) записываются как

$$\rho \ddot{\chi} = X + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right].$$

В этом случае целесообразно использовать преобразование Ханкеля нулевого порядка, так как

$$\int_0^{\infty} r \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \right] J_0(k_r r) dr = -k_r^2 \chi(k_r, z, t).$$

(Этот результат можно получить, дважды интегрируя по частям и используя затем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет  $J_0$ .) Однако волновое уравнение, которому удовлетворяет  $u_\phi = -\partial \chi / \partial r$ , имеет вид

$$\rho \dot{u}_\phi = f_\phi + \mu (\nabla^2 u)_\phi = f_\phi + \mu \left( \nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2} \right), \quad (3)$$

и лишний член справа означает, что преобразование Ханкеля нулевого порядка не приведет к желаемому результату. В то же время преобразование первого порядка сводит все операции в (3), содержащие  $r$ , к скалярному умножению в области  $k_r$ . В задачах о волнах  $P - SV$  от точечного источника на  $r = 0$  для  $u_z$  и  $\tau_{zz}$  нужно использовать преобразование нулевого порядка, для  $u_r$  и  $\tau_{zr}$  — преобразования первого порядка. Эти результаты с очевидностью следуют из дополнения 6.6, где волны исследуются в области частот — волновых чисел.

Решая двумерные задачи методом Каньяра — де Хоопа, мы на ранней стадии воспользовались соотношением  $k_x = isp$  между горизонтальным волновым числом и лучевым параметром [см. (6.39)]. Для задач с точечным источником это соотношение, очевидно, принимает вид  $k_r = isp$  [ср. с (6.8) для преобразования Фурье по времени]; поэтому важно исследовать, возможны ли чисто мнимые  $k_r$  в (2). Примем  $k_r = i\lambda$ , и тогда (2) можно записать иначе:

$$\left. \begin{aligned} f^{(n)}(\lambda) &= \int_0^{\infty} r f(r) I_n(\lambda r) dr \\ f(r) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \lambda f^{(n)}(\lambda) K_n(\lambda r) d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь  $I_n$  и  $K_n$  — модифицированные функции Бесселя. Пара преобразований (4) так же связана с (2), как преобразование Лапласа с преобразованием Фурье.

Заметим, что  $K_0(\zeta^*) = [K_0(\zeta)]^*$ ; отсюда (6.86) дает

$$\chi(x, s) = \frac{N_0}{2\pi^2 \rho \beta^2} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{i\infty} \frac{p}{\eta} K_0(spr) e^{-sn|z|} dp \right\}. \quad (6.87)$$

Учитывая асимптотический результат

$$K_0(spr) = \left( \frac{\pi}{2spr} \right)^{1/2} e^{-spr} \left( 1 + O\left( \frac{1}{spr} \right) \right) \quad (6.88)$$

для больших значений аргумента, замечаем очень большое сходство (6.87) с формулой для линейного источника (6.47). Оба подынтегральных выражения определены на плоскости комплексного лучевого параметра, но теперь  $r$  заменило  $x$  в качестве горизонтальной переменной. Введем новую переменную

$$\tau = pr + \eta|z|$$

и будем искать решение на пути Каньяра  $p = p(\tau)$  в первом квадранте (рис. 6.21). Деформируя путь интегрирования в (6.87) к пути Каньяра, получаем

$$\chi(x, s) = \frac{N_0}{2\pi^2 \rho \beta^2} \operatorname{Im} \int_{p(\tau)} \frac{p}{\eta} K_0(spr) e^{-sn|z|} dp, \quad (6.89)$$

теперь осталось только провести обращение во временную область.

Из таблиц преобразований известно, что  $K_0(s\sigma_1)$  — это преобразование Лапласа от

$$H(t - \sigma_1)(t^2 - \sigma_1^2)^{-1/2},$$

и, следовательно,  $K_0(s\sigma_1)\exp[-s\sigma_2]$  является преобразованием Лапласа от

$$H(t - \sigma_1 - \sigma_2)[(t - \sigma_2)^2 - \sigma_1^2]^{-1/2}.$$

Следовательно, (6.89) приводит к выражению

$$\chi(x, t) = \frac{N_0}{2\pi^2 \rho \beta^2} \operatorname{Im} \int_{p(\tau)} \frac{p}{\eta} \frac{H(t - pr - \eta|z|)}{[(t - \eta|z|)^2 - p^2 r^2]^{1/2}} dp. \quad (6.90)$$

Фактический вклад в этот интеграл вносит только отрезок  $R/\beta < \tau < t$ : в точке, соответствующей нижнему пределу, подынтегральное выражение приобретает ненулевую мнимую часть; верхний предел соответствует обращению в нуль ступенчатой функции. Поэтому

$$\chi(x, t) = \frac{N_0}{2\pi^2 \rho \beta^2} \operatorname{Im} \int_{R/\beta}^t \frac{p}{\eta} \frac{1}{(t - \tau)^{1/2}(t - \tau + 2pr)^{1/2}} \frac{dp}{d\tau} d\tau, \quad (6.91)$$

где

$$p = p(\tau) = \frac{r\tau + i|z|(\tau^2 - R^2/\beta^2)^{1/2}}{R^2},$$

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{i\eta}{(\tau^2 - R^2/\beta^2)^{1/2}}, \quad \text{и} \quad \eta = \left( \frac{1}{\beta^2} - p^2 \right)^{1/2} \quad \text{с} \quad \operatorname{Re} \eta > 0.$$

Хотя не очевидно, что интеграл в (6.91) имеет мнимую часть, равную  $\pi/2R$ , его легко оценить численно, учтя интегрируемые особенности на верхнем и нижнем концах интервала интегрирования.

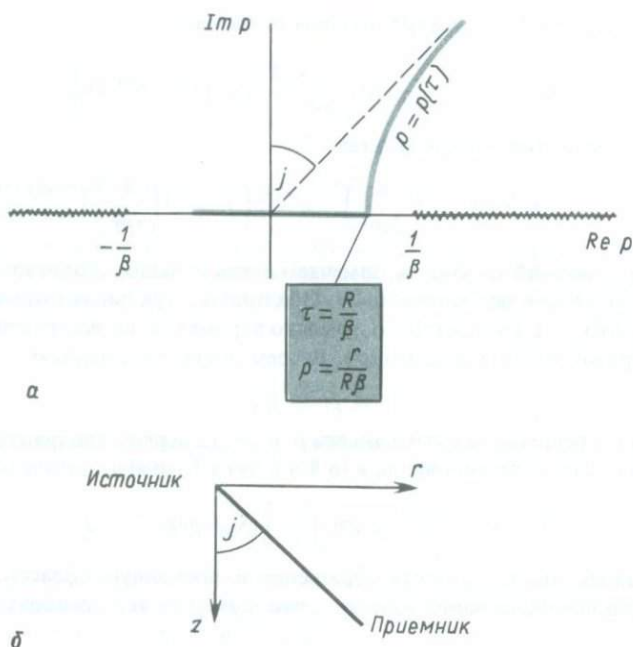


Рис. 6.21. Плоскость комплексного лучевого параметра и ее свойства, важные при оценке (6.89) — (6.91). Отметим сходство с рис. 6.14.

Как только вывод формулы (6.91) завершен, применение метода Каньяра — де Хоопа не вызывает практических трудностей. Положим, что два полупространства находятся в жестком контакте вдоль  $z = 0$ , как показано на рис. 6.15; точечный источник  $SH$ -волн действует в  $z_0 < 0$  в верхней среде. Потенциал  $SH$  в верхней среде образован потенциалом падающей волны

$$\chi^{\text{пад}}(\mathbf{x}, t) = \frac{N_0}{4\pi\rho_1\beta_1^2} \frac{H(t - R/\beta_1)}{R}$$

где  $R = [r^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}$  [см. (6.76)], плюс потенциал обобщенной отраженной волны. По аналогии с задачей для линейного источника и (6.91) отражение описывается точной формулой

$$\chi^{\text{отр}}(\mathbf{x}, t) = \frac{N_0}{2\pi^2\rho_1\beta_1^2} \operatorname{Im} \int_0^t \frac{p}{\eta_1} \left[ \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \right] \frac{1}{(t - \tau)^{1/2}(t - \tau + 2pr)^{1/2}} \frac{dp}{d\tau} d\tau \quad (6.92)$$

в которой  $p(\tau)$  определено в (6.56а и 6.56б), но с  $r$  вместо  $x$  и  $\tau$  вместо  $t$ . Интеграл в (6.92) продлен до нуля снизу, чтобы включить возможные головные волны в случае  $\beta_2 > \beta_1$ .

При выводе (6.92) не сделано никаких приближений, но во многих практических приложениях можно использовать существенную аппроксимацию, которая

резко уменьшает объем вычислений ценой малых потерь в точности. Предположим, что  $|pr| \gg t - \tau$  во всем интервале интегрирования. Тогда можно воспользоваться приближением

$$(t - \tau + 2pr)^{1/2} \sim (2pr)^{1/2} \quad (6.93)$$

и отождествить (6.91) и (6.92) как свертки функции, зависящей от времени, с  $1/t^{1/2}$ . Тогда, если в (6.92) мы хотим найти  $\chi^{\text{отр}}$  для всего интервала времен  $0 \leq t \leq T$ , мы сначала вычисляем функцию

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi^2 \rho_1 \beta_1^2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{p(t)}{\eta_1} \left[ \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \right] \frac{1}{(2pr)^{1/2}} \frac{dp}{dt} \right\} \quad (6.94)$$

для  $0 \leq t \leq T$ . В этом случае

$$\chi(x, t) = N_0 \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t - \tau)^{1/2}} d\tau = N_0 \psi(t) * \frac{1}{t^{1/2}}, \quad (6.95)$$

и теоретическую сейсмограмму для  $0 \leq t \leq T$  можно получить однократной сверткой — очень эффективной и быстрой процедурой для ЭВМ многих типов. В то же время получение точного выражения (6.92) требует отдельного численного интегрирования для каждой точки искомого временного ряда.

Заметим, что аппроксимация (6.93) хороша для больших расстояний, но даже в этом случае неправомерна для достаточно больших времен. Она эквивалентна использованию  $[\pi/(2spr)]^{1/2} e^{-spr}$  вместо  $K_0(spr)$  в (6.87), и, следовательно, это та же аппроксимация, что и (6.17), использованная в разд. 6.2 для задачи с точечным источником, решаемой в частотной области. Можно сохранить последующие члены разложения  $K_0$  в (6.88); они будут эквивалентны аппроксимации  $(t - \tau + 2pr)^{-1/2}$  биномиальным разложением

$$\frac{1}{(2pr)^{1/2}} \left[ 1 - \frac{t - \tau}{4pr} + \frac{3}{32} \left( \frac{t - \tau}{pr} \right)^2 + \dots \right].$$

При условии, что  $|2pr| > t - \tau$ , можно ожидать, что учет последующих членов повысит точность, хотя такие усилия редко оправдываются. Поскольку эти члены зависят от  $t$  только через множители вида  $(t - \tau)^n$ , они тоже приводят к простым сверткам [159].

Решения (6.91) и (6.92) получены для случая ступенчатой зависимости силы от времени. Другую временную зависимость можно, конечно, учесть сверткой; однако существует один вид временной зависимости, который фактически «устраняет» свертку (6.95). Положим, например, что

$$X(r, z, t) = N_0(t) \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z), \quad N_0(t) = \frac{H(t)}{\pi t^{1/2}}.$$

Тогда элементарные выкладки с интегралами свертки показывают, что

$$\chi(x, t) = \frac{d\psi}{dt} * \frac{1}{t^{1/2}} * \frac{1}{\pi t^{1/2}} = \psi(t),$$

и в этом смысле мы можем получить полезное алгебраическое выражение для сейсмограммы, а именно (6.94).

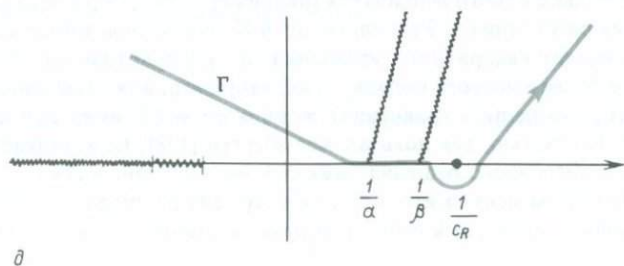
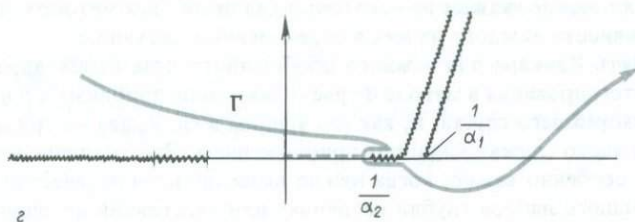
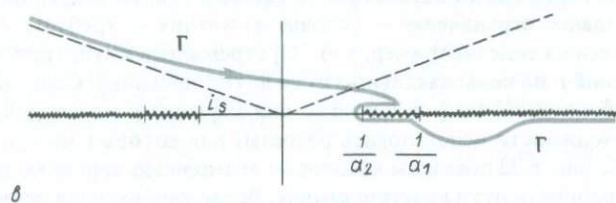
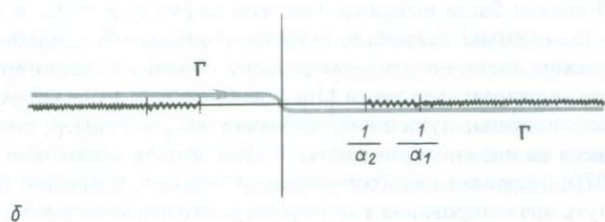
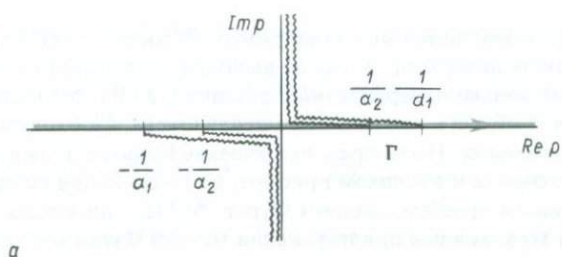
Приближение (6.93) и результирующая свертка (6.95) нашли широкое применение в современной сейсмологии, как это будет показано в гл. 9 при рассмотрении эффектов слоистости.

## 6.6. СВОДКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ

Мы описали два метода решения задач о взаимодействии сферической волны с плоской границей. В первом методе (разд. 6.1 — 6.3) применяется преобразование Фурье по времени, что приводит к решениям для смещений, давления и т.п. как функциям частоты. Второй метод (разд. 6.4 — 6.5) основан на преобразовании Лапласа, но (благодаря преобразованиям, разработанным Каньяром, де Хоопом и др.) приводит к решениям непосредственно во временной области. В этом разделе мы перечислим некоторые сходства и различия данных двух методов и рассмотрим их сравнительные преимущества и недостатки, так чтобы читатель сам мог определить, какой из методов предпочтительнее в практических приложениях.

Сначала укажем сходные черты. Как метод Фурье, так и метод Каньяра — де Хоопа включают интегрирование в плоскости комплексного лучевого параметра: лучевые траектории в физической задаче соответствуют седловым точкам рассматриваемого подынтегрального выражения; головные волны соответствуют разрезам; граничные волны (волны Рэлея, Стонли) соответствуют

*Рис. 6.22.* Различные разрезы и пути интегрирования в плоскости комплексного  $p$ , демонстрирующие большую свободу выбора. Рисунки  $a$  —  $g$  относятся к задаче, решенной в разд. 6.2, для точечного источника давления в среде, состоящей из двух жидких полупространств.  $a$  — разрезы выбраны так, что  $\text{Im} \xi_1 > 0$ ,  $\text{Im} \xi_2 > 0$  на всей плоскости.  $\Gamma$  лежит на действительной оси, чуть выше разрезов в третьем квадранте и ниже разрезов в первом. (Ср. с рис. 6.4.)  $b$  — в той же задаче мы изменили разрезы так, чтобы  $\text{Re} \xi_1 > 0$ ,  $\text{Re} \xi_2 > 0$ . Решение не изменилось, так как путь  $\Gamma$  остался неизменным и значения подынтегрального выражения [например, (6.17)] в любой точке  $\Gamma$  не отличаются от случая  $a$ .  $c$  — контур  $\Gamma$  деформирован по сравнению с  $b$  так, что идет вдоль пути наискорейшего спуска в случае, когда может существовать головная волна. Путь в обход разреза здесь намного проще, чем показанный на рис. 6.9, хотя и здесь остается трудность, связанная с пересечением пути наискорейшего спуска с разрезами в  $p = 1/(\alpha_1 \sin i_s)$ . Поэтому  $\Gamma$  в дальнейшем проведено ниже разреза.  $d$  — если провести разрезы так, как здесь показано, трудно повсюду удержать  $\Gamma$  на пути наискорейшего спуска (за исключением участка, обходящего точку разветвления  $p = 1/\alpha_2$ ). Чтобы понять, допустимы ли такие разрезы, заметим, что их можно переместить из положения рис.  $a$  до того, как  $\Gamma$  был отклонен от действительной оси. При последующем деформировании  $\Gamma$  к показанному здесь пути  $\text{Im} \xi_1$  и  $\text{Im} \xi_2$  становятся отрицательными в первом квадранте слева от показанных разрезов. Это допустимо, потому что между этой частью  $\Gamma$  и показанным пунктиром путем, на котором  $\text{Im} \xi_1$  и  $\text{Im} \xi_2$  положительны, отсутствуют особенности.  $e$  — показана плоскость комплексного  $p$  для задачи с твердым полупространством, скажем при оценке обобщенного отражения  $\hat{P}\hat{P}$  (для сравнения см. рис. 6.12). Разрезы в первом квадранте идут вверх, и благоприятный для вычислений путь  $\Gamma$  образован отрезками прямых и полуокружностью, огибающей  $p = 1/c_R$ . Разрезы этого типа имеют свойства, подобные линиям полюсов, найденным в гл. 9 при получении теоретических сейсмограмм с учетом сферичности Земли.



полюсам; просачивающиеся моды (например,  $P$ ) соответствуют полюсам на тех листах римановой поверхности, где не выполняются условия излучения.

Имеются несколько поверхностных различий. а) Чтобы получить результаты во временной области при помощи метода Фурье, необходимо численное обратное преобразование. Но на практике решение Каньяра должно быть свернуто с функцией источника и откликом прибора, и эти операции по существу эквивалентны численным преобразованиям Фурье. б) Мы описывали метод Каньяра как точный, в то время как при изложении метода Фурье мы заменили некоторые функции Ханкеля приближенными выражениями (6.15) — (6.17). На практике в подходе Каньяра часто делается подобная аппроксимация (6.93). в) Разрезы в методе Каньяра были выбраны так, чтобы  $\{\operatorname{Re} \xi \geq 0; \operatorname{Re} \eta \geq 0\}$ ; при этом оказалось возможным сохранить путь интегрирования целиком на том же самом физическом листе, не пересекая разрезы. Однако в теории метода Фурье мы зафиксировали разрезы условием  $\{\operatorname{Im} \xi \geq 0; \operatorname{Im} \eta \geq 0\}$ , в результате чего пришлось искать сложные пути интегрирования (см., например, рис. 6.9), частично приходящиеся на нефизические листы. Такой подход применяли многие авторы (см. [38, 207]); он привел к необходимости учитывать просачивающиеся моды. К счастью, путь интегрирования в методе Фурье не является жестко зафиксированным и может быть проведен так, что будет располагаться близко к пути наискорейшего спуска и все же оставаться на одном и том же листе римановой поверхности. Главное ограничение — условие излучения — требует, чтобы подынтегральное выражение [например, в (6.32)] стремилось к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$  только для значений  $p$  на первоначальном пути интегрирования. Следовательно, требуется, чтобы в (6.32)  $\operatorname{Im} \xi \geq 0$  только для значений  $p$  на оси действительных  $p$ ; нет необходимости использовать разрезы, для которых  $\operatorname{Im} \xi \geq 0$  на всей плоскости. На рис. 6.22 показаны некоторые возможные варианты разрезов, позволяющие выбирать пути интегрирования, более удобные для применения численного преобразования Фурье.

В заключение укажем на некоторые различия двух методов, чтобы пояснить эффективность каждого из них в определенных ситуациях.

1) Путь Каньяра для каждого обобщенного луча необходимо найти точно; путь интегрирования в методе Фурье может лишь приблизительно следовать пути наискорейшего спуска, и, как мы увидим в гл. 9, два — три прямолинейных отрезка часто служат хорошим приближением. Это различие между двумя методами особенно важно, когда нужно вычислить теоретические сейсмограммы для большого набора глубин источника или расстояний источник — приемник. В этом случае в методе Фурье один и тот же путь интегрирования можно использовать несколько раз для получения различных сейсмограмм благодаря изменению только одного множителя (например,  $e^{i\omega p r}$  для расчета сейсмограмм на различных расстояниях). Различные пути Каньяра, описанные выше, были найдены решением квадратного уравнения, но на практике часто нужно решать уравнение более высокого порядка. Так, например, для отыскания отражения  $\hat{S}P$  (6.63) требуется решить уравнение  $t = px + \eta z + \xi h$ , имеющее четвертый порядок по  $p$ . К счастью, как показал Хелмбергер [158], не возникает трудностей в отыскании численного решения даже для многослойных сред.

2) Успех применения метода Каньяра зависит от определенного свойства преобразования Лапласа искомого решения, а именно от возможности предста-

вить его как произведение функции от  $S$  на множитель  $\int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt$  [см. (6.40)].

К сожалению, эту возможность очень легко потерять. Например, при введении затухания, как мы видели в гл. 5, скорости объемных волн начинают зависеть от

частоты. Преобразование Лапласа отклика среды принимает вид  $\int_0^{\infty} g(s, t)e^{-st} dt$

и представить  $g$  в виде произведения, допускающего прямое отображение решения во временную область, уже нельзя. Та же трудность возникает для сред, у которых свойства непрерывно изменяются с глубиной, но имеют редкие скачки; мы увидим это в гл. 9.

В целом очевидно, что подход Каньяра — де Хоопа имеет большие преимущества при решении задачи Лэмба с точечным или линейным источником. Отклик среды на единичный импульс находится непосредственно и с минимумом вычислительных усилий. Метод Фурье также имеет свои преимущества, позволяя глубже понять задачу благодаря независимому анализу поведения различных частотных компонент. Он более гибок, чем метод Каньяра, при решении более сложных задач, чем задача Лэмба.

## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ

- Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1974.  
*Cerveny V., Ravindra R.* Theory of seismic head waves. Univ. Toronto Press, 1971.  
*Chapman C. H.* Lamb's problem and comments on the paper "On leaking modes" by Usha Gupta. Pure and Appl. Geophysics., **94**, 233 — 247, 1972.  
*De Hoop A. T.* Modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems. Applied Science Research, **B8**, 349 — 356, 1960.  
*Gilbert F., Knopoff L.* The directivity problem for a buried line source. Geophysics., **26**, 626 — 634, 1961.  
*Johnson L. R.* Greens function for Lamb's problem. Geoph. Journ. Roy. Astr. Soc., **37**, 99 — 131, 1974.  
*Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. Philos. Trans. Royal Soc. of London, **A203**, 1 — 42, 1, 1904.  
*Lapwood E. R.* The disturbance due to a line source in a semi-infinite elastic medium. Philos. Trans. Roy. Soc. London **A242**, 63 — 100, 1949.  
*Pekeris C. L.* The seismic buried pulse. Proc. Nat. Acad. Sci., **41**, 629 — 639, 1955.

## ЗАДАЧИ

6.1. Покажите, что в случае, когда в решении (6.92) может возникнуть головная волна, вступающая в момент  $t_h$ , (6.93) эквивалентно условию

$$\frac{r}{\beta_2} \gg t - t_h.$$

Покажите, что если  $\beta_2 < \beta_1$ , то аппроксимация (6.93) в решении (6.92) эквивалентна условию

$$\frac{r^2}{R_0\beta_1} \gg t - \frac{R_0}{\beta_1}.$$

Приведенные выше ограничения применимости нашего решения (6.95) типа свертки могут создать впечатление, что (6.95) — не более чем аппроксимация решения в окрестности волнового фронта [например, (6.21)]. В действительности же (6.95) значительно более важно, чем аппроксимация в окрестности фронта. Покажите коротко, что это так, рассмотрев выражения для сейсмограмм на расстояниях, близких к критическому, где происходит наложение головной волны и закритического отражения.

**6.2.** Используйте эквивалентные объемные силы типа (3.8), рассмотренные в гл. 3, и покажите, что разрыв  $\partial u/\partial z$ , использованный при выводе (6.44), физически обусловлен скачком напряжений.

**6.3.** Покажите, что пересечения с нулевой линией в  $\hat{P}\hat{P}$  и  $\hat{S}\hat{S}$  на рис. 5.6 происходят точно при значениях  $p$ , для которых функция Рэлея имеет нули на нефизических римановых листах. (Крайнее справа пересечение с нулевой линией на рис. 5.6 вблизи  $p = 1/\alpha$  может повлиять на вступление головной волны, содержащейся в выражении (6.69); расчетные примеры даны на рис. 6.18.)

**6.4.** Дайте алгебраическое решение классической задачи Лэмба для линейного источника, а именно: получите смещения поверхности ( $u, w$ ), когда линейный источник, вытянутый вдоль оси  $y$ , действует на поверхности упругого полупространства, так что импульс  $I$  (на единицу длины) направлен вертикально вниз и приложен в точке ( $x = 0, t = 0$ ) к свободной поверхности  $z = 0$ . Получите простое приближенное выражение для формы волны Рэлея.

**6.5.** Заметьте, что при постановке задач о волнах  $P - SV$  в методе потенциалов общее представление для смещений в волне  $SV$  имеет вид  $\nabla \times \nabla \times (0, 0, \psi)$  (см. дополнение 6.5). Объясните, как это согласуется с выводом, сделанным в разд. 5.1, где  $SV$ -смещение для плоских волн было представлено как  $\nabla \times (0, \psi, 0)$ . [Синтез таких плоских волн позволяет использовать  $\nabla \times (0, \psi, 0)$  как  $SV$ -смещение во всех задачах, где волновые поля не зависят от координаты  $y$ .]

**6.6.** Отличается ли результат интегрирования вдоль полного пути  $\Gamma$  на рис. 6.9 от полученного при интегрировании вдоль пути  $A - B - C -$  (вокруг  $1/\alpha_2$ )  $- F' -$  (седло)  $- G - H$  (т.е. с пропуском  $F' - D - E - F'$ )?

**6.7.** Покажите, что смещение на сейсмограмме  $u_{SS}$ , полученное в (6.69) и показанное на рис. 6.19, неограниченно растет при  $t \rightarrow \infty$ . Покажите (без полных алгебраических выкладок), что это возрастание взаимно уничтожается при сложении с подобным же расходящимся выражением, связанным с  $P$ -компонентой колебания частиц (обобщенной волной  $\hat{S}\hat{P}$ ).

## Поверхностные волны в вертикально-неоднородной среде

Поверхностные волны распространяются в направлениях, параллельных поверхности Земли. Распределение их амплитуд по глубине остается неизменным в разных районах (с точностью до общего множителя, описывающего горизонтальное расхождение). Следовательно, эффект геометрического расхождения для поверхностных волн гораздо меньше, чем для объемных волн, энергия которых распространяется как горизонтально, так и вертикально вниз, в глубь Земли. По существу поверхностные волны обычно составляют основную часть записей длиннопериодных сейсмограмм Мировой сети стандартизованных сейсмографов, и изучение этих волн дает много надежной информации о длиннопериодной области сейсмических спектров. Длиннопериодные поверхностные волны с периодами от 10 до 200 с послужили ценным источником информации как о строении Земли, так и о механизме сейсмического источника. Их фазовые и групповые скорости, а также характеристики затухания позволили определить строение земной коры и верхней мантии в различных регионах Земли. Их спектры источников и диаграммы направленности излучения использовались для определения сейсмического момента, механизма и глубины очага удаленных толчков. Они обеспечивают также решающие данные для разделения землетрясений и подземных взрывов.

Главная цель этой главы — описать основные свойства поверхностных волн в вертикально-неоднородной среде, ограниченной свободной поверхностью, и вывести формулы для их амплитудного и фазового спектра в случае произвольного точечного источника. В последнем разделе, чтобы придать законченную форму модальному подходу, мы представим полное волновое поле как сумму нормальных и просачивающихся мод.

### 7.1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Пусть ось  $z$  направлена вертикально вниз. Наша вертикально-неоднородная среда занимает нижнее полупространство  $z > 0$ . Как мы уже говорили в разд. 5.1 и 5.2, имеет смысл рассматривать волны, в которых зависимость от пространственных координат и от времени находится методом разделения переменных. Поэтому, начиная с простейшей из задач, мы рассмотрим декартовы координаты и поверхностную волну, распространяющуюся в горизонтальном направлении возрастания  $x$  с частотой  $\omega$ :

$$u(x, y, z, t) = Z(z) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (7.1)$$

## дополнение 7.1

## Начальные допущения

Переходя к изучению поверхностных волн, необходимо отметить, что самое первое приведенное здесь уравнение (7.1) имеет двойной смысл. В большей части текста эта основная волна вводится как гармоническая волна с фиксированным горизонтальным волновым числом. (Для краткости мы будем писать  $k$  вместо  $k_x$  и  $k_y$ , используемых в предыдущих главах.) Это позволяет прояснить физическую природу волны. Очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, z, t) = -i\omega \mathbf{u}(x, z, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}(x, z, t) = iku(x, z, t).$$

Однако в сейсмологии поверхностные волны представляют собой по существу синтез таких основных волн. В этом смысле удобно представлять поле смещений как функцию  $(k, z, \omega)$  в виде двойного преобразования Фурье (по  $x$  и  $t$ ) единой поверхностной волны  $\mathbf{u}(x, t)$ . В этом контексте двойные преобразования  $\partial \mathbf{u}(x, t)/\partial t$  и  $\partial \mathbf{u}(x, t)/\partial x$  равны соответственно  $-i\omega \mathbf{u}(k, z, \omega)$  и  $iku(k, z, \omega)$ . Таким образом, двумя различными, но связанными подходами мы сводим вычисление частных производных (по  $x$  и  $t$ ) к скалярному умножению.

Самым важным следствием этого уравнения является то, что и в волновом уравнении и в граничных условиях остаются только производные по  $z$ , и такие одномерные задачи сравнительно легко решать.

В действительности задача состоит в оценке (7.1) при трех общих условиях. Эти волны должны удовлетворять условиям на свободной поверхности при  $z = 0$ , где напряжения равны нулю. На границе  $z = \infty$  их амплитуды должны быть равны нулю из-за отсутствия источников на бесконечности. Кроме того, волны, конечно, должны удовлетворять уравнению движения. При таких ограничениях не существует нетривиального решения уравнения (7.1) для произвольной частоты  $\omega$  и произвольного волнового числа  $k$ . Однако оно может существовать, если для данного  $\omega k$  принимает некоторое частное значение, допустим  $k_n(\omega)$ . Это задача на собственные значения, и мы используем индекс  $n$ , так как часто для данного  $\mathbf{u}_n(z)$  у поверхностной волны (7.1) находится более чем одно значение  $k$ . Здесь  $k_n(\omega)$  — собственное значение, а соответствующее решение  $\mathbf{u}_n(z)$  — собственная функция. Таким образом, для данной частоты  $\omega$  поверхностные волны (если они существуют) имеют единственным образом определенные волновые числа  $k_0(\omega), k_1(\omega), \dots$ . Другими словами, фазовые скорости  $c_n = \omega/k_n$  фиксированы для данной частоты. Распределение по  $z$  также фиксировано независимо от горизонтального расположения.

Для иллюстрации этих представлений изучим сначала простейший случай плоских волн Лява в однородном слое, лежащем на однородном полупространстве (рис. 7.1). Обозначив модули сдвига в слое и полупространстве через  $\mu_1, \mu_2$ , а плотности в них через  $\rho_1, \rho_2$  соответственно, запишем волновые уравнения для  $u$ -компоненты смещения ( $v$ ):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\mu_1}{\rho_1} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad \text{в слое} \quad 0 < z < H$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\mu_2}{\rho_2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \text{ в полупространстве } z > H.$$

Используя пробные решения вида (7.1), находим

$$v = [\hat{S}_1 e^{-v_1 z} + \hat{S}'_1 e^{v_1 z}] \exp[i(kx - \omega t)] \quad 0 \leq z \leq H$$

и

$$v = [\hat{S}_2 e^{-v_2 z} + \hat{S}'_2 e^{v_2 z}] \exp[i(kx - \omega t)], \quad H \leq z, \quad (7.2)$$

где

$$v_i = (k^2 - \omega^2/\beta_i^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} v_i \geq 0 \quad \text{и} \quad \beta_i = (\mu_i/\rho_i)^{1/2}$$

при  $i = 1$  и  $2$ . Тогда  $\operatorname{Im} v_i \geq 0$  [ср. со свойствами  $\gamma$  в (6.4)].  $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}'_1, \hat{S}'_2$  — пока неизвестные константы.

Положим, что скорость  $\beta_1$  в слое меньше скорости  $\beta_2$  в полупространстве. Из граничных условий при  $z \rightarrow \infty$  известно (если волна однородна, т.е.  $v_2$  — мнимая отрицательная величина), что на бесконечности не может быть восходящей волны, т.е.  $\hat{S}'_2 = 0$ , и что эта волна должна исчезать, если  $v_2$  — положительная действительная величина, чтобы не происходило экспоненциального роста амплитуды с глубиной. Знак корня для  $v_1$  и  $v_2$  придает  $iv_1$  и  $iv_2$  смысл вертикального волнового числа, имеющего либо положительные, либо нулевые действительную и мнимую части. Поскольку условия на свободной поверхности удовлетворяются, если  $\partial v/\partial z = 0$  при  $z = 0$ , поэтому  $\hat{S}_1 = \hat{S}'_1$ . Таким образом, остаются две неизвестные константы  $\hat{S}_1$  и  $\hat{S}_2$ , которые должны удовлетворять следующим уравнениям, необходимым для сохранения непрерывности смещений и напряжений на границе  $z = H$ :

$$2\hat{S}_1 \cos(iv_1 H) = \hat{S}_2 e^{-v_2 H}, \quad (7.3)$$

$$2i\mu_1 v_1 \hat{S}_1 \sin(iv_1 H) = \mu_2 v_2 \hat{S}_2 e^{-v_2 H}$$

или

$$\frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} = \frac{2 \cos(iv_1 H)}{e^{-v_2 H}} = \frac{2i\mu_1 v_1 \sin(iv_1 H)}{\mu_2 v_2 e^{-v_2 H}}. \quad (7.4)$$

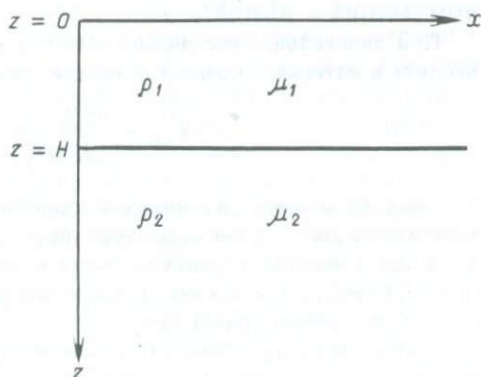


Рис. 7.1. Однородный слой на однородном полупространстве — простейшая среда, в которой могут возбуждаться волны Лява.

Это определяет собственные значения  $k_n$  как решения уравнения  $F(k) = 0$ , где

$$F(k) \equiv \operatorname{tg}(iv_1 H) - \frac{\mu_2 v_2}{i\mu_1 v_1}, \quad (7.5)$$

или фазовую скорость  $c_n = \omega/k_n$  как решение уравнения

$$\operatorname{tg} \omega H \left( \frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2} \right)^{1/2} = \frac{\mu_2 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{\beta_2^2} \right)^{1/2}}{\mu_1 \left( \frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2} \right)^{1/2}}. \quad (7.6)$$

Соответствующая собственная функция  $v_n$  получается подстановкой (7.4),  $\hat{S}_1 = \hat{S}'_1$  и  $\hat{S}_2 = 0$  в (7.2):

$$\begin{aligned} v_n(x, z, t) &= 2\hat{S}_1 \cos \left[ \omega \left( \frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c_n^2} \right)^{1/2} z \right] \\ &\quad \times \exp[i(k_n x - \omega t)] \quad \text{при } 0 \leq z \leq H \\ &= 2\hat{S}_1 \cos \left[ \omega \left( \frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c_n^2} \right)^{1/2} H \right] \exp \left[ -\omega \left( \frac{1}{c_n^2} - \frac{1}{\beta_2^2} \right)^{1/2} (z - H) \right] \\ &\quad \times \exp[i(k_n x - \omega t)] \quad \text{при } H \leq z. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Эта функция синусоидально осциллирует в слое и экспоненциально затухает в полупространстве.

Чтобы дать грубое представление о фазовой скорости, уравнение (7.6) можно решить графически. На рис. 7.2. правая часть уравнения (7.6) показана пунктирной кривой, а левая — сплошными кривыми, обе как функции от  $(H/\beta_1)(1 - \beta_1^2/c^2)^{1/2}$ . Корни определяются как пересечение двух кривых. Из рисунка ясно, что действительные корни для  $c$  лежат в интервале между  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (мы приняли  $\beta_1 < \beta_2$ ). Видно, что для данной частоты  $\omega$  имеется ограниченное число действительных корней. Когда  $\omega = 0$ , существует только один корень — точка на кривой основной моды, соответствующей крайней левой ветви тангенсоиды. Если мы увеличим  $\omega$ , справа в рассматриваемом интервале появляется ветвь тангенсоиды, помеченная как  $n = 1$ . Она появляется, когда  $\pi/\omega$  становится равным  $(H/\beta_1)(1 - \beta_1^2/\beta_2^2)^{1/2}$ .

При дальнейшем увеличении частоты все новые ветви тангенсоиды будут входить в интервал справа.  $n$ -я кривая появляется, когда  $\omega$  равно

$$\omega_{cn} = \frac{n\pi\beta_1}{H} \left/ \left( 1 - \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2} \right)^{1/2} \right. . \quad (7.8)$$

Эта частота называется *граничной частотой  $n$ -й высшей моды*, потому что, как показано на рис. 7.3,  $n$ -я мода существует только для частот  $\omega > \omega_{cn}$ . Например, в случае типичной структуры коры — мантии на континенте ( $H = 35$  км,  $\beta_1 = 3,5$  км/с,  $\beta_2 = 4,5$  км/с) граничная частота первой высшей моды равна 0,08 Гц, т.е. период равен 13 с.

Таким образом,  $n$ -я высшая мода появляется на частоте  $\omega = \omega_{cn}$  и существует при частотах, больших  $\omega_{cn}$ . На граничной частоте все моды имеют фазовую

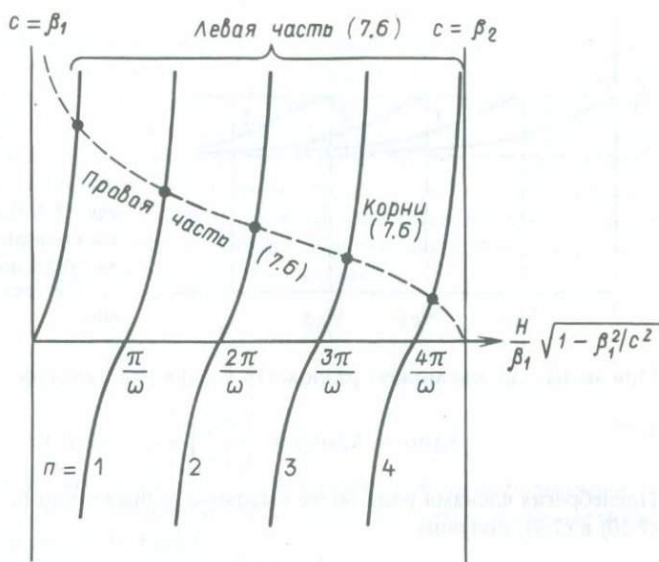


Рис. 7.2. Графическое решение уравнения (7.6) для дисперсии волн Лява в слое, лежащем на полупространстве. Сплошные линии — левая часть уравнения (7.6), пунктир — правая часть (7.6), точки — корни уравнения (7.6).

скорость  $c = \beta_2$ . Когда  $\omega \rightarrow \infty$ , фазовая скорость приближается для всех мод к скорости  $\beta_1$ . Следовательно, схематически мы можем начертить дисперсионные кривые так, как показано на рис. 7.3. Теперь ясно, что для данной частоты  $\omega$  существует только конечное число мод. Собственную функцию, соответствующую каждой моде, можно вычислить по (7.7), если определена фазовая скорость.

Относительное возбуждение различных мод зависит от глубины и природы сейсмического источника. Например, длиннопериодные волны от неглубокого источника в общем преимущественно принадлежат основной моде, обозначенной нами как  $n = 0$ . Один из путей разделения различных мод — регистрация их на больших удалениях, когда они вступают раздельно на различных временах, так как распространяются с различными групповыми скоростями. Групповая скорость для данной частоты  $\omega$  — это скорость, с которой переносится огибающая волнового пакета с частотой в окрестности  $\omega$ . Максимумы, минимумы и нули этого волнового пакета распространяются с фазовой скоростью, которая в общем отлична от групповой скорости. Групповая скорость — это понятие, относящееся к волновому пакету, имеющему непрерывный спектр, а не спектр, состоящий из дискретных линий. Поэтому ее лучше всего объяснять, сконструировав неустановившуюся волну интегрированием решения для одной моды (с единичной амплитудой и нулевой начальной фазой) по конечной полосе частот в окрестности частоты  $\omega_0$ . Используя косинус-преобразование, получим

$$f_0(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \cos[\omega t - k_n(\omega)x] d\omega. \quad (7.9)$$

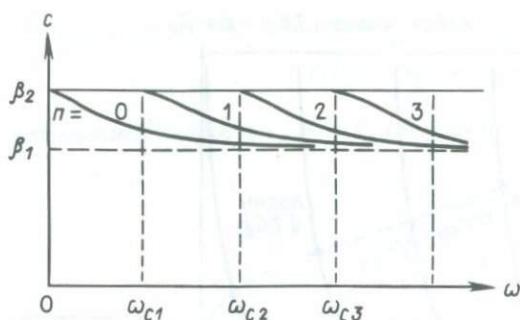


Рис. 7.3. Схематическая диаграмма изменения фазовых скоростей с частотой для основной моды ( $n = 0$ ) и трех последующих высших мод.

При малых  $\Delta\omega$  мы можем разложить  $k_n(\omega)$  в ряд Тейлора:

$$k_n(\omega) = k_n(\omega_0) + \left(\frac{dk_n}{d\omega}\right)_0 (\omega - \omega_0) + \dots \quad (7.10)$$

Пренебрегая членами ряда более высокого порядка, чем  $(\omega - \omega_0)$ , и подставляя (7.10) в (7.9), получим

$$f_0(x, t) \sim \frac{\Delta\omega}{\pi} \frac{\sin Y}{Y} \cos[\omega_0 t - k_n(\omega_0)x], \quad (7.11)$$

где

$$Y = \frac{\Delta\omega}{2} \left[ t - \left(\frac{dk_n}{d\omega}\right)_0 x \right].$$

Приведенная выше волновая форма — это синусоидальное колебание частоты  $\omega_0$ , модулированное огибающей  $(\sin Y)/Y$ , имеющей максимум при  $Y = 0$  или  $x = (d\omega/dk_n)_0 t$ . Отсюда видно, что огибающая переносится с групповой скоростью  $(d\omega/dk_n)_0$ , а фаза (максимумы, минимумы и нули косинуса) движется с фазовой скоростью  $\omega_0/k_n(\omega_0)$ .

Волновой пакет с данной спектральной плотностью  $|F(\omega)|$  и начальной фазой  $\phi(\omega)$ , образованный одной модой, может быть представлен в виде

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega} |F(\omega)| \exp[-i\omega t + ik_n x + i\phi(\omega)] d\omega. \quad (7.12)$$

Этот интеграл можно оценить, разбив ось  $\omega$  на последовательные отрезки длиной  $\Delta\omega$ ; и суммируя приближенные решения, такие как (7.11). Чтобы найти, как эффект  $d|F(\omega)|/d\omega$  учитывается для всех отрезков, см. задачу 7.8.

Когда поверхностная волна не диспергирует (например, волна Рэлея в полупространстве), форма ее не меняется в процессе распространения, потому что если  $c_n$  не диспергирует, то

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp[-i\omega(t - x/c_n)] d\omega = f(t - x/c_n). \quad (7.13)$$

Когда поверхностная волна сильно диспергирует, для оценки формы волны можно использовать метод стационарной фазы. Подобно методу наискорейшего спуска, интегрирование методом стационарной фазы также связано с оценкой

поведения подынтегральной функции вблизи седловой точки. В методе наискорейшего спуска путь интегрирования — это путь, вдоль которого фаза подынтегрального выражения постоянна, а абсолютное значение быстро меняется. В методе стационарной фазы путь интегрирования проходит вдоль действительной оси  $\omega$ , на которой фаза  $(-\omega t + k_n x)$  меняется наиболее быстро. Тогда при больших  $x$  или  $t$  подынтегральная функция очень сильно осциллирует, приводя к уничтожению самого интеграла. Только в окрестности седловой точки, где фаза меняется медленно, вклад ее в интеграл будет значительным. Седловая точка или точка стационарной фазы определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega}(-\omega t + k_n x) = 0,$$

приводящего к

$$\frac{x}{t} = \frac{d\omega}{dk_n}. \quad (7.14)$$

Это уравнение определяет частоту  $\omega_s = \omega_s(x, t)$ , которая для данного расстояния  $x$  и на данном времени  $t$  должна доминировать; очевидно, что  $\omega_s$  — это частота, для которой групповая скорость равна  $x/t$ .

Разлагая фазу в ряд Тейлора в окрестности точки стационарной фазы и пренебрегая членами более высокого порядка, чем  $(\omega - \omega_s)^2$ , получим

$$-\omega t + k_n x \sim -\omega_s t + k_n(\omega_s)x + \frac{x}{2} \frac{d^2 k_n}{d\omega^2} (\omega - \omega_s)^2. \quad (7.15)$$

Для больших  $x$  малые отклонения  $\omega$  от  $\omega_s$  создадут сильные колебания подынтегральной функции и приведут к уничтожению интеграла. Следовательно, пределы интегрирования могут быть расширены за пределы для разложения Тейлора. Таким образом, имеем

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \exp[-i\omega_s t + ik_n(\omega_s)x] |F(\omega_s)| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{x}{2} i \frac{d^2 k_n}{d\omega^2} (\omega - \omega_s)^2\right] d\omega. \quad (7.16)$$

Поскольку таблицы интегралов дают

$$\int_0^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2} a\omega^2\right) d\omega = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2} a\omega^2\right) d\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}, \quad (7.17)$$

имеем

$$f(x, t) = \frac{|F(\omega_s)|}{2\pi} \left\{ x \frac{d^2 k_n}{d\omega^2} \right\}^{1/2} \exp\left[-i\omega_s t + ik_n(\omega_s)x \pm i \frac{\pi}{4}\right], \quad (7.18)$$

где  $\pm$  соответствует  $d^2 k_n / d\omega^2 \gtrless 0$ . Для данных  $x$  и  $t$  находим  $\omega_s$ , решая (7.14). Таким образом, приведенная выше формула дает форму диспергирующих поверхностных волн, когда известны фазовая скорость  $c_n = \omega/k_n$ , групповая скорость  $U_n = d\omega/dk_n$  и  $dU_n^{-1}/d\omega$ . Знак фазового сдвига на  $\pi/4$  (временной сдвиг на  $1/8$  периода) указывает на задержку, когда групповая скорость возрастает с периодом. Визуальное сравнение волн, обладающих такими дисперсионными свойствами, с гармоническими колебаниями (рис. 7.4) дает интуитивное объяс-

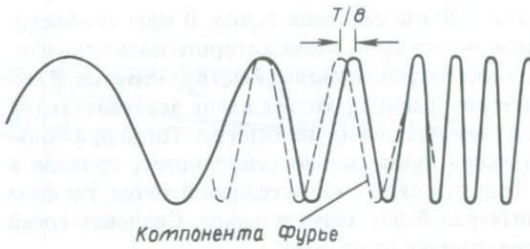


Рис. 7.4. Несогласованность (на  $T/8$ ) между пиком с периодом  $T$  в диспергирующем волновом пучке (сплошная кривая) и пиком соответствующей компоненты Фурье (пунктир).

нение кажущейся фазовой задержки для  $f(x, t)$  относительно компоненты Фурье [58].

Когда групповая скорость стационарна относительно частоты, знаменатель в (7.18) обращается в нуль и формула теряет смысл. Включение членов более высокого порядка в разложении Тейлора для фазы приводит к формулам, содержащим функции Эйри [285]. Поэтому вступления, связанные с максимумами и минимумами групповой скорости, называют фазами Эйри. Оценку фазы Эйри легко также получить непосредственно численным интегрированием (7.12), потому что групповая скорость меняется медленно и общая длительность фазы мала.

Различные методы измерения фазовых и групповых скоростей поверхностных волн описаны в гл. 11.

## 7.2. ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРА ДВИЖЕНИЯ-НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим теперь поверхностные волны в вертикально-неоднородной, изотропной, упругой среде, занимающей полупространство  $z > 0$ , в котором упругие константы  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$  и плотность  $\rho(z)$  — произвольные функции  $z$ . В этом разделе мы будем рассматривать плоские поверхностные волны, распространяющиеся в направлении  $x$ . Позднее будет показано, что им присуще то же распределение по  $z$ , что и цилиндрическим поверхностным волнам, расходящимся от точечного источника.

В некоторых отношениях этот раздел частично повторяет рассмотрение объемных волн в разд. 5.4. Однако наши обозначения здесь более соответствуют поверхностным волнам в том, что фазовые сдвиги на  $\pi/2$  между различными компонентами смещения и напряжения указаны явно. Кроме того, из-за дисперсии зависимость горизонтального волнового числа  $k$  от частоты здесь более сложная, поэтому  $k$  оставлено здесь в явном виде, а не представлено как произведение ( $\omega \times$  горизонтальная медленность).

Для волн Лява будем искать решение волнового уравнения (2.13) в виде

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ v &= l_1(k, z, \omega) \exp[i(kx - \omega t)], \\ w &= 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Компоненты напряжения, связанные с этими смещениями, будут

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \tau_{zx} = 0,$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{dl_1}{dz} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (7.20)$$

$$\tau_{xy} = ik\mu l_1 \exp[i(kx - \omega t)].$$

Если мы подставим (7.19) и (7.20) в (2.13), то получим уравнение движения для  $l_1(k, z, \omega)$ :

$$-\omega^2 \rho(z) l_1 = \frac{d}{dz} \left[ \mu(z) \frac{dl_1}{dz} \right] - k^2 \mu(z) l_1. \quad (7.21)$$

Как описывалось в предыдущем разделе, такие волны Лява суть решения уравнения движения при отсутствии в среде источника (нет объемной силы). Напряжение должно исчезать на свободной поверхности  $z = 0$ ; источники отсутствуют на бесконечности. В дополнение к этим условиям смещения и напряжения должны быть непрерывны на всех границах, где упругие постоянные терпят разрыв, потому что в противном случае разрывы в смещениях и напряжениях действовали бы как сейсмический источник (см. разд. 3.1). Поскольку разрывы в физических свойствах среды происходят только на горизонтальных плоскостях, необходимо, чтобы компонента напряжения  $\tau_{yz}$  в волнах Лява была непрерывной. Введем новую функцию для описания зависимости  $\tau_{yz}$  от  $z$ :

$$\tau_{yz} = l_2(k, z, \omega) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (7.22)$$

Тогда уравнения (7.20) и (7.21) можно переписать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dl_1}{dz} &= \frac{l_2}{\mu(z)}, \\ \frac{dl_2}{dz} &= (k^2 \mu(z) - \omega^2 \rho(z)) l_1 \end{aligned} \quad (7.23)$$

или в матричной форме:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu(z)^{-1} \\ k^2 \mu(z) - \omega^2 \rho(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

Будем называть  $(l_1, l_2)$  вектором движения-напряжения для волн Лява и напомним (дополнение 7.1), что это также двойное преобразование зависимости  $(u_y, \tau_{yz})$  от  $(x, t)$  для произвольного движения частиц волны SH вдоль направления  $y$ .

Подобным же образом можно получить вектор движения-напряжения для волны Рэлея. Начнем со следующего вида смещений:

$$\begin{aligned} u &= r_1(k, z, \omega) \exp[i(kx - \omega t)], \\ v &= 0, \\ w &= ir_2(k, z, \omega) \exp[i(kx - \omega t)]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

(Для действительных положительных  $r_1$  и  $r_2$  приведенная выше комбинация  $u$  и  $w$  представляет собой прямое движение.) Соответствующие компоненты напря-

жения будут равны

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xx} &= i \left[ \lambda \frac{dr_2}{dz} + k(\lambda + 2\mu)r_1 \right] \exp[i(kx - \omega t)], \\ \tau_{yy} &= i \left( \lambda \frac{dr_2}{dz} + k\lambda r_1 \right) \exp[i(kx - \omega t)], \\ \tau_{zz} &= i \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{dr_2}{dz} + k\lambda r_1 \right] \exp[i(kx - \omega t)], \\ \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{dr_1}{dz} - kr_2 \right) \exp[i(kx - \omega t)]. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Компоненты напряжения  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zz}$  непрерывны по  $z$ . Запишем их как

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= r_3(k, z, \omega) \exp[i(kx - \omega t)], \\ \tau_{zz} &= ir_4(k, z, \omega) \exp[i(kx - \omega t)]. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Тогда дифференциальные уравнения для вектора движения-напряжения  $(r_1, r_2, r_3, r_4)$  получаются из (7.26) и (2.13) в виде

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & \mu^{-1}(z) & 0 \\ -k\lambda(z)[\lambda(z) + 2\mu(z)]^{-1} & 0 & 0 & [\lambda(z) + 2\mu(z)]^{-1} \\ k^2\zeta(z) - \omega^2\rho(z) & 0 & 0 & k\lambda(z)[\lambda(z) + 2\mu(z)]^{-1} \\ 0 & -\omega^2\rho(z) & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}, \quad (7.28)$$

где  $\zeta(z) = 4\mu(z)[\lambda(z) + \mu(z)]/[\lambda(z) + 2\mu(z)]$ .

Матрицы в (7.24) и (7.28) выглядят очень простыми и в сущности такими же, как полученные в разд. 5.4 для однородной среды. Они не содержат пространственных градиентов параметров среды в явном виде, хотя  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$  и  $\rho(z)$  являются функциями  $z$ .

Граничные условия для поверхностных волн, т.е. обращение в нуль напряжения на свободной поверхности и отсутствие движения на бесконечности, требуют, чтобы

$$\begin{aligned} r_1, r_2, \text{ и } l_1 &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty, \\ r_3 = r_4 = l_2 &= 0 \text{ на свободной поверхности } (z = z_0). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Для данного  $\omega$  ненулевые решения уравнений (7.24) и (7.28) при условии (7.29) существуют только для определенных  $k = k_n(\omega)$ . Так же как и для волн Лява в полупространстве с одним слоем, рассмотренных в разд. 7.1,  $\omega/k_n(\omega)$  определяет фазовую скорость, а соответствующее решение (7.24) или (7.28) — зависимость моды от  $z$ .

Существует много способов решения этой задачи на собственные значения — собственные векторы. Мы начнем с метода численного интегрирования и метода матричного пропагатора. Результаты в явном виде получаются

методом Томсона — Хаскелла, который является частным случаем метода матричного пропагатора, применимым для серии однородных слоев, подстилаемых полупространством.

### 7.2.1. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Задача на собственные значения для вектора движения-напряжения может быть решена с помощью прямого интегрирования уравнений (7.24) и (7.28) численными методами, например методом Рунге — Кутты. Такеучи и Сайто [319] отстаивают этот подход, так как он позволяет более гладко моделировать Землю по сравнению с матричным методом, в котором Земля аппроксимируется серией однородных слоев.

Чтобы проиллюстрировать, как решать задачу на собственные значения методом численного интегрирования, положим сначала, что смещения на большой глубине  $z_n$  запрещены (т.е. имеется абсолютно жесткая граница). В случае волн Лява мы начинаем интегрировать уравнение (7.24) вверх от  $z = z_n$  с начальными значениями  $l_1(z_n) = 0$  и  $l_2(z_n) = 1$ . Для заданного  $\omega$  должна быть выбрана пробная величина  $k$ . В случае, если  $k$  является собственным значением, результатом интегрирования должно быть  $l_2 = 0$  при  $z = z_0 = 0$ . Процесс повторяется с исправленным значением  $k$  до тех пор, пока  $l_2(z_0)$  не обратится в нуль. В случае волн Рэлея мы интегрируем уравнение (7.28) для двух различных наборов начальных значений. В первом  $r_1 = r_2 = r_4 = 0$  и  $r_3 = 1$ , во втором  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$  и  $r_4 = 1$ . Обозначив решения для набора 1 и набора 2 как  $r^{(1)}$  и  $r^{(2)}$  соответственно, запишем общее решение (7.28) как

$$r = Ar^{(1)} + Br^{(2)}. \quad (7.30)$$

Если  $r$  — собственный вектор, то его компоненты напряжения  $r_3(z_0)$  и  $r_4(z_0)$  должны обращаться в нуль, т.е.

$$\begin{aligned} Ar_3^{(1)}(z_0) + Br_3^{(2)}(z_0) &= 0, \\ Ar_4^{(1)}(z_0) + Br_4^{(2)}(z_0) &= 0. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Таким образом, нетривиальное решение (7.30) возможно только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} r_3^{(1)}(z_0) & r_3^{(2)}(z_0) \\ r_4^{(1)}(z_0) & r_4^{(2)}(z_0) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.32)$$

Собственное значение ищется методом проб и коррекций до тех пор, пока не удовлетворяется (7.32). Как только найдено собственное значение, можно из (7.31) определить  $A/B$  и затем из (7.30) найти собственный вектор.

Лучшим приближением условий на нижней границе, чем абсолютно жесткая граница, является замена Земли ниже  $z_n$  однородным полупространством. Решения в однородном полупространстве, экспоненциально затухающие с глубиной, хорошо известны. Для волн Лява мы используем следующие начальные значения:

$$\begin{aligned} l_1(z_n) &= \exp(-v_{n+1}z_n), \\ l_2(z_n) &= \mu_{n+1} \frac{dl_1}{dz} = -v_{n+1}\mu_{n+1} \exp(-v_{n+1}z_n), \end{aligned} \quad (7.33)$$

## ДОПОЛНЕНИЕ 7.2

**Метод Рунге — Кутты**

Рассмотрим численный метод решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1)$$

Используя формулу правой разности для  $dy/dx$  (см. дополнение 13.4), запишем уравнение в конечных разностях, соответствующее (1), как

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + (x_{i+1} - x_i)f_i, \\ f_i &= f(x_i, y_i). \end{aligned} \quad (2)$$

Множественное применение (2) определяет  $y_i$ , если известно начальное значение  $y_0$ . Это метод Эйлера, и уравнение (2) имеет ошибку ограничения порядка  $h^2$ , где  $h = x_{i+1} - x_i$ . С другой стороны, метод Рунге — Кутты  $n$ -го порядка предполагает ошибку ограничения порядка  $h^{n+1}$ . Мы начинаем с определения положения точки  $(\bar{x}, \bar{y})$  в плоскости  $xy$ :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_i + \alpha h \\ \bar{y} &= y_i + \beta h. \end{aligned} \quad (3)$$

Мы хотим определить  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы

$$\overline{\Delta y}_i = f(\bar{x}, \bar{y})h \quad (4)$$

было идентично приращению

$$\Delta y_i = y_i' h + y_i'' \frac{h^2}{2} + \dots + \frac{d^n y_i}{dx^n} \frac{h^n}{n!},$$

где штрихи обозначают производные по  $x$ ; такие производные оцениваются в  $x_i$ .

Если можно найти  $\alpha$  и  $\beta$ , обладающие таким свойством, тогда решение может быть продвинуто на один шаг вправо с помощью (4) с той же точностью, как если бы производные по  $y$  вплоть до  $n$ -го порядка имелись в начале шага (в таком случае были бы известны  $n$  членов ряда Тейлора).

Например, если  $n = 2$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  определяются так, что

$$\Delta y_i = y_i' h + y_i'' \frac{1}{2} h^2 = \overline{\Delta y}_i. \quad (5)$$

Разлагая (4) в окрестности  $(x_i, y_i)$ , имеем

$$\overline{\Delta y}_i = f(x_i + \alpha h, y_i + \beta h) \cdot h \sim \left[ f_i + \alpha h \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \beta h \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_i \right] h. \quad (6)$$

С другой стороны, поскольку

$$y'' = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx},$$

получим

$$y_i' h + y_i'' \frac{1}{2} h^2 = f_i h + \frac{1}{2} h^2 \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_i f_i \right]. \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (5), найдем, что (5) выполняется, если мы выберем  $\alpha = 1/2$  и  $\beta = f_i/2$ , т.е.

$$\bar{x} = x_i + \frac{1}{2} h, \quad \bar{y} = y_i + \frac{1}{2} h f_i. \quad (8)$$

Таким образом, в методе Рунге — Кутта второго порядка решение получается в виде

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \overline{\Delta y}_i, \\ \overline{\Delta y}_i &= hf(\bar{x}, \bar{y}) = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf_i). \end{aligned} \quad (9)$$

В случае системы уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z), \quad (10)$$

решение методом Рунге — Кутта второго порядка будет иметь вид

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \overline{\Delta y}_i, \\ z_{i+1} &= z_i + \overline{\Delta z}_i, \\ \overline{\Delta y}_i &= hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf_i, z_i + \frac{1}{2}hg_i), \\ \overline{\Delta z}_i &= hg(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf_i, z_i + \frac{1}{2}hg_i). \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\nu_{n+1} = (k^2 - \omega^2/\beta_{n+1}^2)^{1/2}$  выбрано так, что  $\text{Re } \nu_{n+1} \geq 0$  (и, следовательно,  $\text{Im } \nu_{n+1} \leq 0$ ). Индекс  $n+1$  относится к параметрам полупространства. Для волн Рэлея два требуемых набора начальных значений можно вычислить, используя потенциалы

$$\phi = \exp(-\gamma_{n+1}z), \quad \psi = 0 \quad (7.34)$$

для первого набора и

$$\phi = 0, \quad \psi = \exp(-\nu_{n+1}z) \quad (7.35)$$

для второго, где  $\gamma_{n+1} = (k^2 - \omega^2/\alpha_{n+1}^2)^{1/2}$  и  $\nu_{n+1} = (k^2 - \omega^2/\beta_{n+1}^2)^{1/2}$ . Соответствующие векторы движения-напряжения  $\mathbf{r}^{(1)}(z)$  и  $\mathbf{r}^{(2)}(z)$  в полупространстве можно вычислить, подставив (7.34) и (7.35) в (6.59) и используя (7.25) и (7.26). Численное интегрирование проводится для двух наборов начальных значений  $\mathbf{r}^{(1)}(z_n)$  и  $\mathbf{r}^{(2)}(z_n)$ , итерации повторяются для разных  $k$  до тех пор, пока не находится собственное значение, удовлетворяющее уравнению (7.32). При малых  $\omega/k$  два набора начальных данных становятся численно неразличимыми. В этих случаях в качестве начальных данных можно использовать сумму и разность двух решений.

## 7.2.2. МЕТОД МАТРИЧНОГО ПРОПАГАТОРА

Матричный метод, предложенный Томсоном [320] и уточненный Хаскеллом [152], стали интенсивно использовать при анализе поверхностных волн с появлением больших вычислительных машин. В этом методе вертикально-неоднородная среда заменяется пачкой однородных слоев, лежащих на однородном полупространстве, как показано на рис. 7.5. Метод Томсона — Хаскелла является частным случаем метода матричного пропатора, введенного в сейсмологию Гилбертом и Бкусом [134].

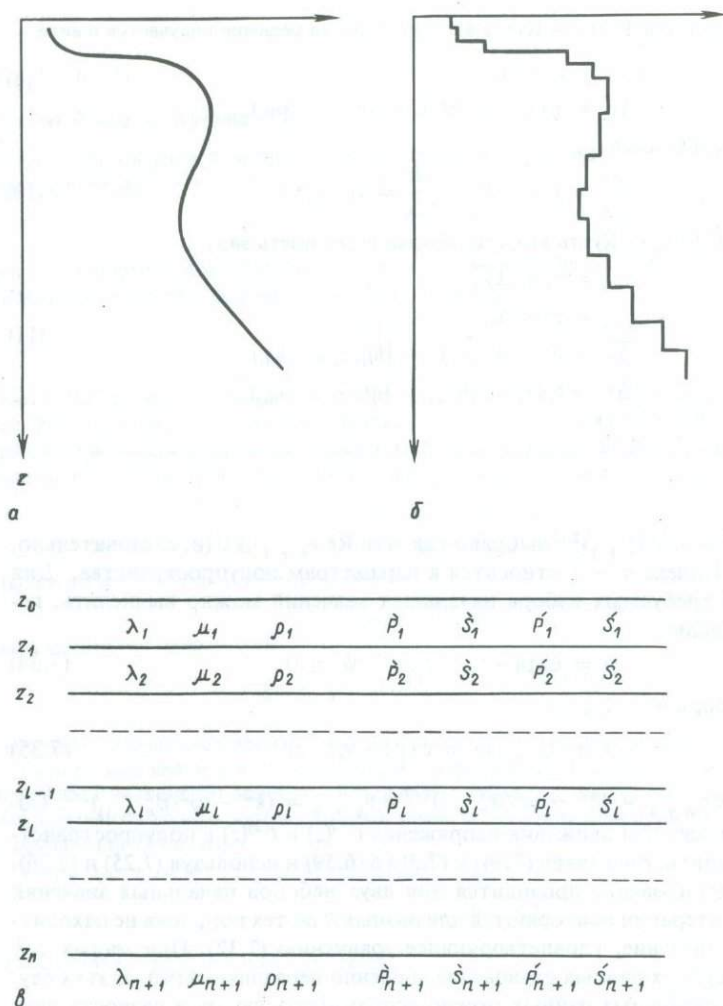


Рис. 7.5. **а** — непрерывное изменение свойств (одного из параметров  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  или  $\beta$ ) с глубиной. **б** — кусочно-непрерывная аппроксимация **а**, которую можно рассматривать как пачку однородных пластин в жестком контакте. **в** — система обозначений для упругих констант, слоев и восходящих и нисходящих волн.

Выразим сначала дифференциальные уравнения (7.24) и (7.28) для вектора движения-напряжения в общей матричной форме

$$\frac{d\mathbf{f}(z)}{dz} = \mathbf{A}(z)\mathbf{f}(z), \quad (7.36)$$

где  $\mathbf{f}(z)$  есть вектор-столбец  $n \times 1$ , а  $\mathbf{A}(z)$  — матрица  $n \times n$ ;  $n = 2$  для волн Лява и  $n = 4$  для волн Рэлея.

Матричный пропагатор (иногда называемый *матризантом*) определяется как

$$\mathbf{P}(z, z_0) = \mathbf{I} + \int_{z_0}^z \mathbf{A}(\zeta_1) d\zeta_1 + \int_{z_0}^z \mathbf{A}(\zeta_1) \int_{z_0}^{\zeta_1} \mathbf{A}(\zeta_2) d\zeta_2 d\zeta_1 + \dots, \quad (7.37)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица  $n$ -го порядка. Очевидно,  $\mathbf{P}(z, z_0)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (7.36):

$$\frac{d}{dz} \mathbf{P}(z, z_0) = \mathbf{A}(z)\mathbf{P}(z, z_0). \quad (7.38)$$

Кроме того, как следует из (7.37),  $\mathbf{P}(z_0, z_0) = \mathbf{I}$ . Отсюда мы получаем наиболее важное свойство пропагатора, а именно

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{P}(z, z_0)\mathbf{f}(z_0), \quad (7.39)$$

так как правая часть здесь удовлетворяет уравнению (7.36) и равна  $\mathbf{f}(z_0)$  при  $z = z_0$ . Таким образом,  $\mathbf{P}(z, z_0)$  порождает вектор движения-напряжения на глубине  $z$ , действуя на этот вектор на глубине  $z_0$ . Можно обнаружить интересное свойство  $\mathbf{P}(z, z_0)$ , заметив, что

$$\mathbf{f}(z_2) = \mathbf{P}(z_2, z_1)\mathbf{f}(z_1) = \mathbf{P}(z_2, z_1)\mathbf{P}(z_1, z_0)\mathbf{f}(z_0).$$

Выбрав  $z_2 = z_0$  и применяя приведенное выше цепное правило к произвольному  $\mathbf{f}(z_0)$ , получим

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}(z_0, z_1)\mathbf{P}(z_1, z_0), \quad (7.40)$$

т.е. что  $\mathbf{P}(z_0, z_1)$  есть обратная матрица  $\mathbf{P}(z_1, z_0)$ .

Когда  $\mathbf{A}(z)$  — константа, независимая от  $z$  внутри данного слоя, как принимали Томсон и Хаскелл, матричный пропагатор приобретает простую форму. Из (7.37)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z, z_0) &= \mathbf{I} + (z - z_0)\mathbf{A} + \frac{1}{2}(z - z_0)^2\mathbf{A}\mathbf{A} + \dots \\ &= \exp[(z - z_0)\mathbf{A}]. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Для квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  с различными собственными значениями  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) функцию матрицы  $\mathbf{A}$  можно представить многочленом Лагранжа — Сильвестра (см., например, [164])

$$F(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n F(\lambda_k) \frac{\prod_{r \neq k} (\mathbf{A} - \lambda_r \mathbf{I})}{\prod_{r \neq k} (\lambda_k - \lambda_r)}. \quad (7.42)$$

Именно это соотношение придает смысл последней части (7.41). Для волн Лява из (7.24) имеем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ k^2\mu - \omega^2\rho & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти собственные значения, запишем

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & \mu^{-1} \\ k^2\mu - \omega^2\rho - \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

и получим  $\lambda = \mp (k^2 - \omega^2/\beta^2)^{1/2} = \pm \nu$ . Подставив эти результаты в (7.42), найдем

$$\mathbf{P}(z, z_0) = \exp[(z - z_0)\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \nu(z - z_0) & (\nu\mu)^{-1} \operatorname{sh}(z - z_0) \\ \nu\mu \operatorname{sh} \nu(z - z_0) & \operatorname{ch} \nu(z - z_0) \end{pmatrix}. \quad (7.43)$$

Эта матрица порождает вектор движения-напряжения  $\mathbf{l}(z)$ , действуя на  $\mathbf{l}(z_0)$ , когда  $z$  и  $z_0$  принадлежат одному и тому же слою. Для слоистой среды (такой, как показана на рис. 7.5) матричный пропегатор  $\mathbf{P}(z, z_0)$  при  $z_k > z > z_{k-1}$  находится из формулы

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{P}(z, z_{k-1})\mathbf{P}(z_{k-1}, z_{k-2}) \cdots \mathbf{P}(z_1, z_0)\mathbf{f}(z_0) = \mathbf{P}(z, z_0)\mathbf{f}(z_0),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}(z, z_0) = \exp[(z - z_{k-1})\mathbf{A}_k] \prod_{l=1}^{k-1} \exp[(z_l - z_{l-1})\mathbf{A}_l]. \quad (7.44)$$

Аналогичным образом матрицу слоя для волн Рэлея можно найти, подставляя  $\mathbf{A}$ , определяемое уравнением (7.28), в (7.41). В этом случае собственные значения  $\mathbf{A}$  равны  $\pm \gamma = \pm (k^2 - \omega^2/\alpha^2)^{1/2}$  и  $\pm \nu = \pm (k^2 - \omega^2/\beta^2)^{1/2}$ . Результирующие элементы  $\mathbf{P}(z, z_0)$  приведены ниже (для  $z$  и  $z_0$  внутри одного слоя):

$$P_{11} = P_{33} = 1 + \frac{2\mu}{\omega^2\rho} \left[ 2k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(z - z_0)}{2} - (k^2 + \nu^2) \operatorname{sh}^2 \frac{\nu(z - z_0)}{2} \right],$$

$$P_{12} = -P_{43} = \frac{k\mu}{\omega^2\rho} \left[ (k^2 + \nu^2) \frac{\operatorname{sh}\gamma(z - z_0)}{\gamma} - 2\nu \operatorname{sh} \nu(z - z_0) \right],$$

$$P_{13} = \frac{1}{\omega^2\rho} \left[ k^2 \frac{\operatorname{sh}\gamma(z - z_0)}{\gamma} - \nu \operatorname{sh} \nu(z - z_0) \right],$$

$$P_{14} = -P_{23} = \frac{2k}{\omega^2\rho} \left[ \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(z - z_0)}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\nu(z - z_0)}{2} \right],$$

$$P_{21} = -P_{34} = \frac{k\mu}{\omega^2\rho} \left[ (k^2 + \nu^2) \frac{\operatorname{sh}\gamma(z - z_0)}{\gamma} - 2\gamma \operatorname{sh} \nu(z - z_0) \right],$$

$$P_{22} = P_{44} = 1 + \frac{2\mu}{\omega^2\rho} \left[ 2k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\nu(z - z_0)}{2} - (k^2 + \nu^2) \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(z - z_0)}{2} \right],$$

$$P_{24} = \frac{1}{\omega^2\rho} \left[ k^2 \frac{\operatorname{sh}\nu(z - z_0)}{\nu} - \gamma \operatorname{sh} \gamma(z - z_0) \right],$$

$$P_{31} = \frac{\mu^2}{\omega^2\rho} \left[ 4k^2 \gamma \operatorname{sh}\gamma(z - z_0) - (k^2 + \nu^2)^2 \frac{\operatorname{sh}\nu(z - z_0)}{\nu} \right],$$

$$P_{32} = -P_{41} = 2\mu^2(k^2 + \nu^2)P_{14},$$

$$P_{42} = \frac{\mu^2}{\omega^2\rho} \left[ 4k^2 \nu \operatorname{sh} \nu(z - z_0) - (k^2 + \nu^2)^2 \frac{\operatorname{sh}\gamma(z - z_0)}{\gamma} \right].$$

(7.45)

Уравнения (7.43), (7.44), (7.45) определяют пропагатор в методе Томсона — Хаскелла.

Матричный пропагатор можно также использовать для решения системы, включающей источник:

$$\frac{df(z)}{dz} = A(z)f(z) + g(z), \quad (7.46)$$

где  $g(z)$  — известная  $n \times 1$  матричная функция от  $z$ . Решение будет иметь вид

$$f(z) = P(z, z_0) \left[ \int_{z_0}^z P^{-1}(\zeta, z_0) g(\zeta) d\zeta + f(z_0) \right]. \quad (7.47)$$

Для проверки этого результата используем (7.38) и получим

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{dP}{dz} \left[ \int_{z_0}^z P^{-1}(\zeta, z_0) g(\zeta) d\zeta + f(z_0) \right] + P(z, z_0) P^{-1}(z, z_0) g(z) \\ &= A(z) P(z, z_0) P^{-1}(z, z_0) f(z) + g(z) = A(z) f(z) + g(z). \end{aligned}$$

Таким образом, (7.47) удовлетворяет (7.46). Поскольку из (7.40)

$$P(z, z_0) P^{-1}(\zeta, z_0) = P(z, z_0) P(z_0, \zeta) = P(z, \zeta),$$

решение (7.47) упрощается:

$$f(z) = \int_{z_0}^z P(z, \zeta) g(\zeta) d\zeta + P(z, z_0) f(z_0). \quad (7.48)$$

Обсудим теперь некоторые практические вопросы, возникающие при применении методов Томсона — Хаскелла. Поскольку условия излучения вводятся путем подавления некоторых волн на бесконечности, а не непосредственным ограничением вектора движения-напряжения, необходимо связать этот вектор с присутствием (или отсутствием) волн, бегущих вверх и вниз в подстилающем полупространстве. Конечно, при достаточно больших  $k$  эти волны соответственно экспоненциально возрастают или убывают с глубиной. Из (5.62) и (5.63) с заменой  $\omega\eta$  вертикальным волновым числом  $i\nu$  соотношение для волн  $SH$  в однородном теле имеет вид

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\nu z} & e^{\nu z} \\ -\nu\mu e^{-\nu z} & \nu\mu e^{\nu z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{S} \end{pmatrix}, \quad (7.49)$$

т.е.  $\mathbf{l} = \mathbf{F}\mathbf{w}$ , где  $\nu = (k^2 - \omega^2/\beta^2)^{1/2}$  и  $\beta = (\mu/\rho)^{1/2}$ .  $\dot{S}$  и  $\dot{S}$  — константы, определяющие амплитуды смещения в восходящих и нисходящих волнах соответственно. Выпишем также соотношение, обратное (7.49):

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \dot{S} \\ \dot{S} \end{pmatrix} = 1/(2\nu\mu) \begin{pmatrix} \nu\mu e^{\nu z} & -e^{\nu z} \\ \nu\mu e^{-\nu z} & e^{-\nu z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad (7.50)$$

или  $\mathbf{w} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{l}$ .

Применяя это соотношение к вектору движения-напряжения при  $z = z_n$ , выразим амплитуды восходящих и нисходящих волн в полупространстве через вектор движения-напряжения при  $z = z_0$ :

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{-1} P(z_n, z_0) \mathbf{l}(z_0) = \mathbf{B}\mathbf{l}(z_0). \quad (7.51)$$

## ДОПОЛНЕНИЕ 7.3

*Почему следует избегать потенциалов*

В противоположность методам Хаскелла [152 — 154], относящимся к распространению волн в слоистых средах, мы в этой главе сводим до минимума использование потенциалов для волн  $P$ ,  $SV$  и  $SH$ . Хотя справедливо, что потенциалы могут прояснить некоторые аспекты теории распространения упругих волн в однородных изотропных средах, матричные методы в действительности обладают гораздо большими возможностями для решения уравнения  $\partial \mathbf{f} / \partial z = \mathbf{A}(z)\mathbf{f}$ . Потенциалы не представляют непосредственного интереса и довольно громоздки при введении граничных условий, в то время как  $\mathbf{f}$  состоит из компонент движения частиц и напряжения, т.е. величин, которые мы ищем.

Читатель может заметить, что первый коэффициент отражения, рассмотренный в гл. 5, был выведен с использованием потенциалов, но мы быстро перешли непосредственно к смещениям. Потенциалы вновь появляются в гл. 6, так как их скалярные волновые уравнения кажутся проще, чем векторные уравнения, содержащие  $P$ - и  $S$ -движения, поскольку мы тогда еще не привели волновые уравнения к виду  $\partial \mathbf{f} / \partial z = \mathbf{A}\mathbf{f}$ . Однако в дополнении 6.9 мы все же ввели первые две компоненты вектора движения-напряжения и получили результат, приравнивающий  $\mathbf{f}$  к сумме основных возможных волн, т.е.  $\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{w}$  (в обозначениях этой главы).

Условия излучения легко ввести, полагая равными нулю соответствующие компоненты  $\mathbf{w}$ .

Сказанное не противоречит тому, что понимание потенциалов упругих волн и решений для них является важной частью процесса обучения сейсмологов. Мы будем время от времени использовать потенциалы в дальнейшем, но основное внимание все же сосредоточим на анализе уравнений  $\mathbf{f}(z) = \mathbf{P}(z, z_0)\mathbf{f}(z_0)$  и  $\mathbf{f}(z) = \mathbf{F}(z)\mathbf{w}$ . Связь между потенциалами и матрицей слоя  $\mathbf{F}$  рассматривается в задаче 5.8.

Поскольку  $\dot{S}_{n+1} = 0$  и  $l_2(z_0) = 0$  из условий излучения и граничных условий, то имеем

$$\begin{pmatrix} \dot{S}_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1(z_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.52)$$

Как видно из приведенного выше уравнения (7.52), для нетривиального решения  $l_1 B_{21}$  должно быть равно нулю. Таким образом, собственное значение определяется из условия

$$B_{21} = 0. \quad (7.53)$$

Чтобы найти корень этого уравнения для данного  $\omega$ , начнем с некоторого пробного значения  $k$ . Для известных  $\omega$  и  $k$  значение  $B_{21}$  можно найти матричным умножением (7.51), используя заданные параметры слоев. Затем  $k$  слегка меняется и контролируется результирующее изменение  $B_{21}$ . Чтобы быстро локализовать величину  $k$ , для которой  $B_{21} = 0$ , используются методы экстраполяции и интерполяции. Как только найдено собственное значение, из (7.44) можно вычислить собственную функцию.

Описанный выше метод легко распространить на волны Рэлея, найдя соотношение между вектором движения-напряжения  $(r_1, r_2, r_3, r_4)$  и числами  $(\dot{P}, \dot{S}, \dot{P},$

$\hat{S}$ ), описывающими, в каких пропорциях каждый их четырех возможных типов волн присутствует в каждом слое. В разд. 5.4 для того, чтобы решить уравнение  $\partial \mathbf{f} / \partial z = \mathbf{A} \mathbf{f}$ , мы представляли  $\mathbf{f}$  в виде  $\mathbf{f} = \mathbf{F} \mathbf{w}$ , где  $\mathbf{F}$  — произведение матрицы, образованной собственными векторами  $\mathbf{A}$ , на диагональную матрицу, содержащую вертикальные фазовые множители [см. (5.65)]. Также мы поступим и здесь:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \mathbf{w} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} \hat{P} \\ \hat{S} \\ \hat{P}' \\ \hat{S}' \end{pmatrix}. \quad (7.54)$$

Матрицу  $\mathbf{F}$  можно представить в виде произведения:

$$\mathbf{F} = \omega^{-1} \begin{pmatrix} \alpha k & \beta v & \alpha k & \beta v \\ \alpha \gamma & \beta k & -\alpha \gamma & -\beta k \\ -2\alpha \mu k \gamma & -\beta \mu (k^2 + v^2) & 2\alpha \mu k \gamma & \beta \mu (k^2 + v^2) \\ -\alpha \mu (k^2 + v^2) & -2\beta \mu k v & -\alpha \mu (k^2 + v^2) & -2\beta \mu k v \end{pmatrix} \\
 \times \begin{pmatrix} e^{-\gamma z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-vz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\gamma z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{vz} \end{pmatrix}. \quad (7.55)$$

Мы можем выбрать любую подходящую нормировку для собственных векторов матрицы коэффициентов, появившейся в (7.28); для конкретных случаев (7.54) и (7.55) нужно учесть два требования. Во-первых, четыре волны-компоненты, образующие  $\mathbf{F} \mathbf{w}$ , имеют амплитуды смещения, определяемые величинами  $(\hat{P}, \hat{S}, \hat{P}', \hat{S}')$  для однородных волн (т.е. когда  $\gamma$  и  $v$  — отрицательные мнимые числа). Во-вторых, для поверхностных волн (когда  $\gamma$  и  $v$  положительные действительные) все компоненты в  $\mathbf{F}$  — действительные числа.

Для каждого из множителей матрицы  $\mathbf{F}$  в (7.55) можно выписать обратную матрицу:

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\gamma z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{vz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-vz} \end{pmatrix} \times \frac{\beta}{2\alpha \mu \gamma v \omega} \\
 \times \begin{pmatrix} 2\beta \mu k \gamma v & -\beta \mu v (k^2 + v^2) & -\beta k v & \beta \gamma v \\ -\alpha \mu \gamma (k^2 + v^2) & 2\alpha \mu k \gamma v & \alpha \gamma v & -\alpha k \gamma \\ 2\beta \mu k \gamma v & \beta \mu v (k^2 + v^2) & \beta k v & \beta \gamma v \\ -\alpha \mu \gamma (k^2 + v^2) & -2\alpha \mu k \gamma v & -\alpha \gamma v & -\alpha k \gamma \end{pmatrix} \quad (7.56)$$

Каждая из матриц  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}^{-1}$  зависит от параметров слоя, и можно связать амплитуды волн различного типа в нижнем полупространстве с вектором

## ДОПОЛНЕНИЕ 7.4

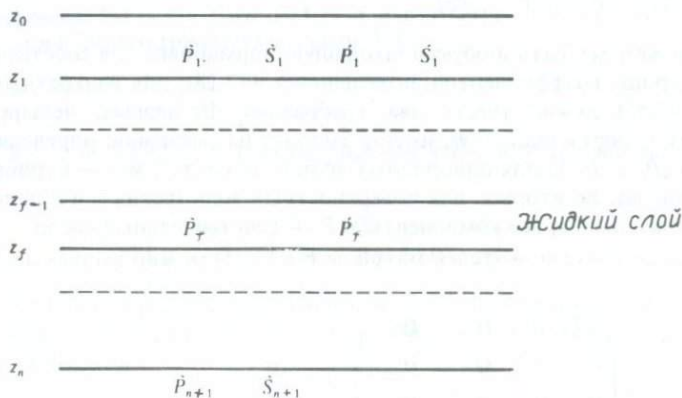
*Чередование твердых и жидких слоев*

Жидкий слой в сейсмологии может располагаться 1) сверху, как в случае океана; 2) между двумя твердыми слоями, как в покрытом льдом океане или в районе развития вулканов, где имеются линзы магмы; 3) внизу, как в случае мантии, подстилаемой жидким ядром. Мы будем рассматривать идеальную жидкость с нулевой вязкостью, для которой сдвиговое напряжение на границе между жидкостью и твердым телом должно равняться нулю, но допускаются разрывы в горизонтальных смещениях (см. разд. 5.2).

В случае волн Лява граница жидкости и твердого тела становится свободной поверхностью; и жидкий слой ведет себя подобно вакууму.

В случае волн Рэлея исчезает напряжение сдвига, но нормальное напряжение и нормальное смещение не равны нулю и должны быть непрерывны на границе жидкость — твердое тело. Тогда матрица слоя  $\mathbf{F}$  для жидкости становится вырожденной и обратная ей матрица не существует. Необходимо найти метод, который пригоден и при отсутствии обратной матрицы.

Рассмотрим случай жидкого слоя, помещенного на глубинах  $z_f > z > z_{f-1}$  в твердом слоем полупространстве, как показано на рисунке. Внутри слоя существуют только продольные волны. Чтобы определить вектор движения-напряжения в такой смешанной слоевой среде, мы должны начать со свободной поверхности  $z = z_0$ . Вектор движения-напряжения  $\mathbf{r}(z)$  при  $z = z_{f-1}$  можно выразить через вектор  $\mathbf{r}(z_0)$  с помощью матриц слоя  $\mathbf{F}$ , приведенных в тексте (см. задачу 7.3). Поскольку напряжение на свободной поверхности равно нулю, компоненты напряжений  $r_3 = r_4 = 0$  на  $z_0$  и  $\mathbf{r}(z_{f-1})$  полностью опреде-



ляются как линейная комбинация двух неизвестных  $r_1(z_0)$  и  $r_2(z_0)$ . С другой стороны,  $z = z_{f-1}$  — граница жидкости и твердого тела, где напряжение сдвига  $r_3(z_{f-1})$  равно нулю. Это приводит к линейной связи между  $r_1(z_0)$  и  $r_2(z_0)$ . Используя это соотношение, можно исключить  $r_1(z_0)$  из выражения для  $\mathbf{r}(z_{f-1})$ , которое теперь полностью определяется одним неизвестным  $r_2(z_0)$ . Тогда  $r_2(z_f)$  и  $r_4(z_f)$  можно определить по  $r_2(z_{f-1})$  и  $r_4(z_{f-1})$  с помощью восходящих и нисходящих продольных волн  $\dot{P}_f$  и  $\dot{P}_f$ . Известно, что при  $z = z_f$   $r_3(z_f) = 0$ , так что остается единственная неизвестная компонента  $\mathbf{r}(z_f)$ , а именно  $r_1(z_f)$ . Теперь вектор движения-напряжения ниже  $z_f$  можно определить как линейную комбинацию двух неизвестных  $r_1(z_f)$  и  $r_2(z_0)$ . Таким образом, условие излучения для волн, бегущих в полупространстве, приводит к уравнению, сходному с (7.58), где  $r_1(z_0)$  заменено на  $r_1(z_f)$ .

В случае жидкого слоя, лежащего на твердой среде, единственной неизвестной компонентой  $\mathbf{r}(z_0)$  с самого начала будет  $r_1(z_0)$ , и, следовательно, ход рассуждений будет идентичен только что рассмотренному случаю, в котором отбрасываются твердые слои, перекрывающие жидкий слой. В случае жидкого полупространства условие обращения в нуль  $r_3(z_n)$  заменяет условие обращения в нуль  $S_{n+1}$ .

движения-напряжения на свободной границе:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \mathbf{P}(z_n, z_0) \mathbf{r}(z_0) = \mathbf{B} \mathbf{r}(z_0). \quad (7.57)$$

Так же как и при нашем исследовании волн Лява (7.51), (7.52), находим здесь, что

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_{n+1} \\ \dot{S}_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(z_0) \\ r_2(z_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.58)$$

Таким образом, собственное значение определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.59)$$

Чтобы найти корень этого определителя для заданного  $\omega$ , снова начнем с пробной величины  $k$  и будем итерировать по  $k$  до тех пор, пока не удовлетворим (7.59). При вычислении минора в левой части (7.59) для пробного значения  $k$  возникают вычислительные трудности, когда длина волны  $\lambda$  в поверхностных волнах становится меньше некоторого предела. Согласно Швабу и Кнопову [293], при расчетах с 16 значащими десятичными цифрами этот предел примерно равен

$$H/\lambda = 3 \times 10^{(14,3-\sigma)/12,4}, \quad (7.60)$$

где  $H$  — глубина до однородного полупространства, а  $\sigma$  — требуемая точность фазовой скорости, заданная в значащих цифрах. Такой предел не существует для волн Лява. Причина его существования для волн Рэлея связана со следующей матрицей  $\Lambda_l(z)$ , присутствующей в матрице слоя (7.55):

$$\Lambda_l(z) = \begin{pmatrix} \exp(-\gamma_l z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-v_l z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\gamma_l z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(v_l z) \end{pmatrix}. \quad (7.61)$$

Когда  $H/\lambda$  велико, некоторые из диагональных элементов  $\Lambda_l$  становятся очень большими. Представим матрицу  $\mathbf{B}$  в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \Lambda_l \mathbf{R}, \quad (7.62)$$

объединив в  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{R}$  произведения матриц, входящих в выражение для  $\mathbf{B}$  до и после  $\Lambda_l$  соответственно. Минор  $\mathbf{B}$ , соответствующий (7.59), будет содержать члены вида

$$\exp(2\gamma_l z) (l_{33} r_{31} l_{43} r_{32} - l_{43} r_{31} l_{33} r_{32}),$$

которые тождественно равны нулю, но получаются как разность двух больших чисел, если в процессе вычислений  $\exp(\gamma_i z)$  велико, что приводит к потере значащих цифр. На эту трудность указал Данкин [107]; пути ее преодоления были предложены им и Кноповым [199a] с помощью разложения Лапласа по минорам. Другой путь преодоления этой трудности заключается в уменьшении числа слоев [293], когда нижняя часть среды заменяется однородным полупространством, причем число заменяемых слоев тем больше, чем короче период волны. Однако этот прием не следует использовать в случаях, когда имеются глубокие волноводы; он применим лишь для тех глубин, ниже которых в слоях распространяются только неоднородные  $P$ - и  $SV$ -волны. Еще один подход заключается в использовании методов матричного пропагатора для миноров второго порядка из решений  $r^{(1)}$  и  $r^{(2)}$  [см. (7.30)]. Это следующие шесть миноров:

$$R_1 = r_1^{(1)}r_2^{(2)} - r_2^{(1)}r_1^{(2)}, \quad R_2 = r_1^{(1)}r_3^{(2)} - r_3^{(1)}r_1^{(2)}, \quad R_3 = r_1^{(1)}r_4^{(2)} - r_4^{(1)}r_1^{(2)}, \\ R_4 = r_2^{(1)}r_3^{(2)} - r_3^{(1)}r_2^{(2)}, \quad R_5 = r_2^{(1)}r_4^{(2)} - r_4^{(1)}r_2^{(2)}, \quad R_6 = r_3^{(1)}r_4^{(2)} - r_4^{(1)}r_3^{(2)}.$$

Такеучи и Сайто [319] показали, что  $\mathbf{f} = (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6)^T$  удовлетворяет уравнению типа  $d\mathbf{f}/dz = \mathbf{C}\mathbf{f}$ , способ решения которого мы уже указали. Однако на этот раз дисперсионное соотношение (7.32) сводится к требованию обращения в нуль только одной скалярной компоненты  $\mathbf{f}$  (а именно  $R_6$ ) на свободной поверхности  $z = z_0$ .

дополнение 7.5

### Поверхностные волны в модели Земли Гутенберга

В качестве примера на рисунках А — Д мы покажем фазовую скорость  $c$ , групповую скорость  $U$  и собственные функции волн Лява и Рэлея для классической континентальной модели Земли Гутенберга. Модель состоит из 24 однородных слоев, параметры которых (глубина подошвы, плотность, скорости продольных и поперечных волн) приведены в таблице.

Слоистая модель Гутенберга для континента

Номер слоя	Глубина до подошвы слоя, км	Плотность, г/см <sup>3</sup>	$v_p$ , км/с	$v_s$ , км/с	Номер слоя	Глубина до подошвы слоя, км	Плотность, г/см <sup>3</sup>	$v_p$ , км/с	$v_s$ , км/с
1	19	2,74	6,14	3,55	13	225	3,48	8,10	4,42
2	38	3,00	6,58	3,80	14	250	3,50	8,21	4,46
3	50	3,32	8,20	4,65	15	300	3,53	8,38	4,54
4	60	3,34	8,17	4,62	16	350	3,58	8,62	4,68
5	70	3,35	8,14	4,57	17	400	3,62	8,87	4,85
6	80	3,36	8,10	4,51	18	450	3,69	9,15	5,04
7	90	3,37	8,07	4,46	19	500	3,82	9,45	5,21
8	100	3,38	8,02	4,41	20	600	4,01	9,88	5,45
9	125	3,39	7,93	4,37	21	700	4,21	10,30	5,76
10	150	3,41	7,85	4,35	22	800	4,40	10,71	6,03
11	175	3,43	7,89	4,36	23	900	4,56	11,10	6,23
12	200	3,46	7,98	4,38	24	1000	4,63	11,35	6,32

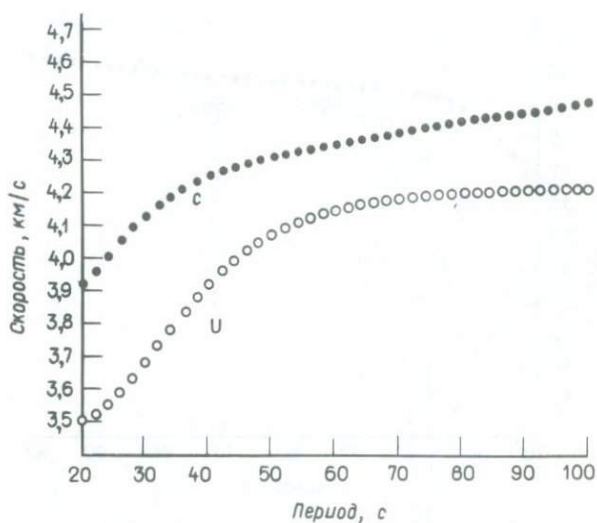


Рис. А. Фазовая и групповая скорости основной моды волн Лява в модели Земли Гутенберга.

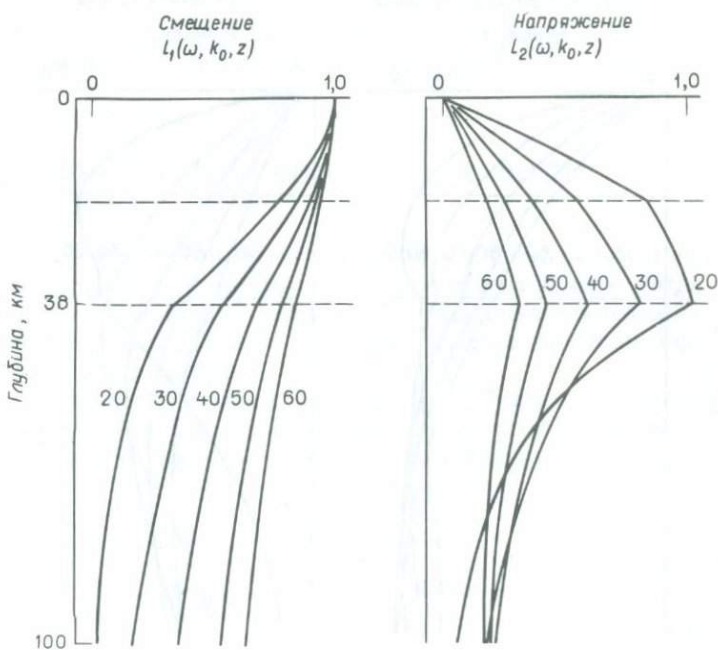


Рис. Б. Собственные функции основной моды волн Лява на различных периодах. Амплитуда нормирована смещением на глубине  $z = 0$ .

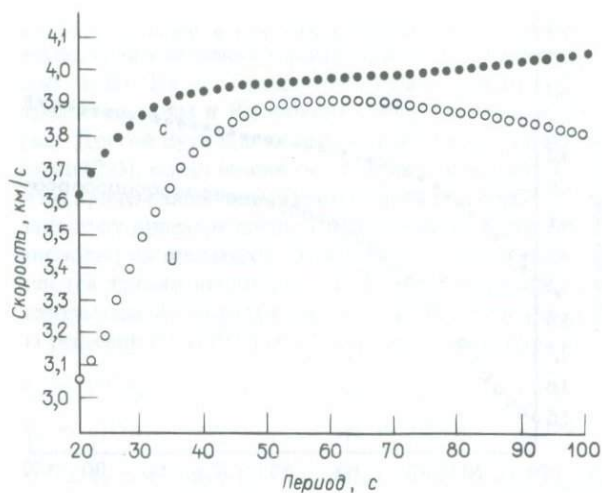


Рис. В. Фазовая и групповая скорости основной моды волн Рэлея в модели Гутенберга.

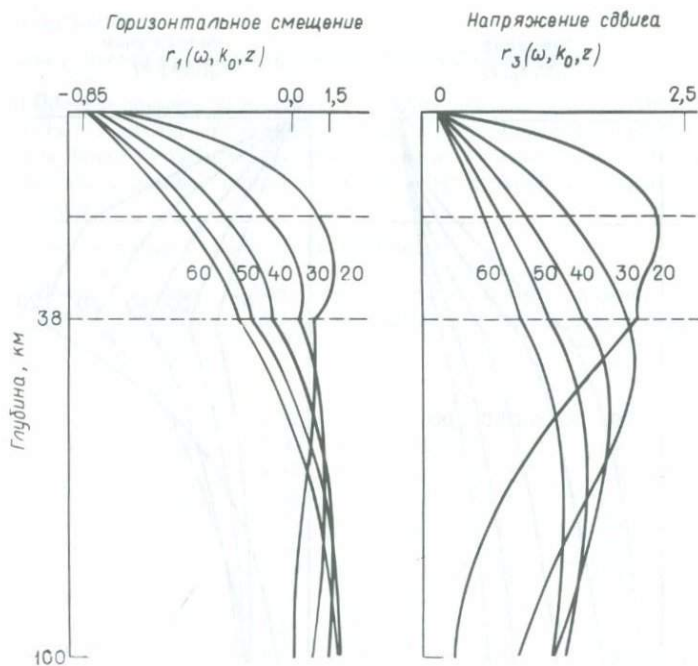


Рис. Г. Горизонтальные собственные функции основной моды волн Рэлея на различных периодах. Амплитуда нормирована вертикальным смещением  $r_2$  на глубине  $z = 0$ .

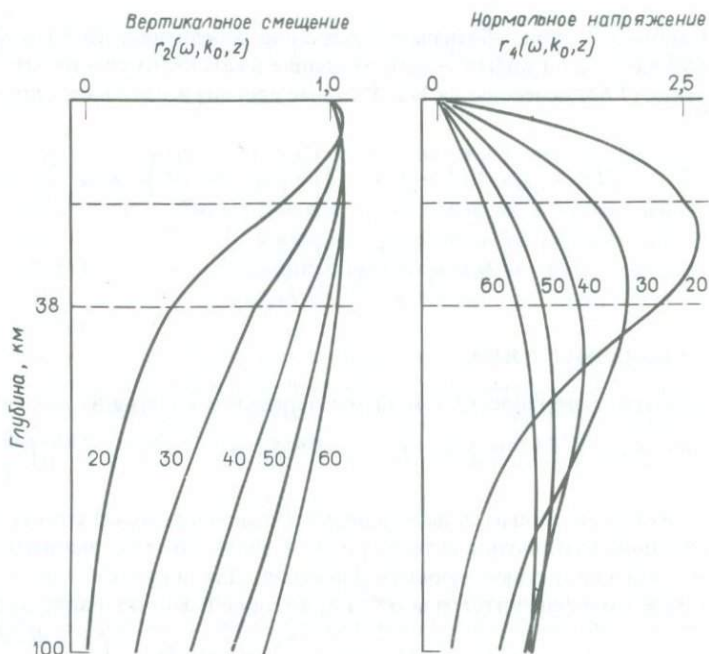


Рис. 4. Вертикальные собственные функции основной моды волн Рэлея на различных периодах. Амплитуды также нормированы вертикальным смещением  $r_2$  на глубине  $z = 0$ .

### 7.3. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ ВОЛН ЛЯВА И РЭЛЕЯ

Покажем теперь, что задача на собственные значения — собственные функции, рассмотренная выше, может быть решена с помощью метода Рэлея — Ритца. Мы используем также вариационные методы, чтобы найти несколько важных формул для расчета групповой скорости, затухания и частных производных фазовой скорости по параметрам среды.

Начнем с плотностей лагранжиана  $L$  для волн Лява и Рэлея в изотропных вертикально-неоднородных средах. Для линейно-упругого тела плотность лагранжиана равна разности между кинетической энергией и упругой энергией (2.32). Для изотропного тела

$$L = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - \left[ \frac{1}{2} \lambda (e_{kk})^2 + \mu e_{ij} e_{ij} \right]. \quad (7.63)$$

В случае плоских волн Лява, определяемых (7.19), поскольку  $e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ , имеем

$$\langle L \rangle = \frac{1}{4} \rho \omega^2 l_1^2 - \frac{1}{4} \mu \left[ k^2 l_1^2 + \left( \frac{dl_1}{dz} \right)^2 \right]. \quad (7.64)$$

Скобки  $\langle \rangle$  здесь обозначают операцию осреднения, поэтому множители вида  $\cos^2(kx - \omega t)$  и  $\sin^2(kx - \omega t)$ , входящие в каждое из слагаемых (7.63), при получении (7.64) заменены на  $1/2$ . В случае плоских волн Рэлея, определяемых (7.25),

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = & \frac{1}{4} \rho \omega^2 (r_1^2 + r_2^2) - \frac{1}{4} \left[ \lambda \left( kr_1 + \frac{dr_2}{dz} \right)^2 + \mu \left( \frac{dr_1}{dz} - kr_2 \right)^2 \right. \\ & \left. + 2\mu k^2 r_1^2 + 2\mu \left( \frac{dr_2}{dz} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.65)$$

### 7.3.1. ВОЛНЫ ЛЯВА

Для этих поверхностных волн мы определим интегралы энергии:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho l_1^2 dz, \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu l_1^2 dz, \quad I_3 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu \left( \frac{dl_1}{dz} \right)^2 dz. \quad (7.66)$$

Когда объемные силы и поверхностные напряжения отсутствуют, тогда из принципа Гамильтона интеграл от  $\langle L \rangle$  должен быть стационарен относительно возмущения  $l_1$  существующего движения. Для проверки этого утверждения изучим возмущение интеграла от  $\langle L \rangle$ , которое равно половине от выражения

$$\begin{aligned} \omega^2 \delta I_1 - k^2 \delta I_2 - \delta I_3 &= \omega^2 \int_0^\infty \rho l_1 \delta l_1 dz - \int_0^\infty \mu \frac{dl_1}{dz} \frac{d \delta l_1}{dz} dz \\ &\quad - k^2 \int_0^\infty \mu l_1 \delta l_1 dz \\ &= \int_0^\infty \left\{ \omega^2 \rho l_1 - k^2 \mu l_1 + \frac{d}{dz} \left( \mu \frac{dl_1}{dz} \right) \right\} \delta l_1 dz \\ &\quad - \mu \frac{dl_1}{dz} \delta l_1 \Big|_0^\infty. \end{aligned}$$

Если удовлетворяются 1) уравнение движения (7.21), 2) условия на свободной поверхности  $dl_1/dz = 0$  при  $z = 0$ , 3)  $\delta l_1 = 0$  при  $z = \infty$  и 4) условия непрерывности  $l_1$  и  $\mu dl_1/dz$  (требуемой для интегрирования по частям), то действительно

$$\omega^2 \delta I_1 - k^2 \delta I_2 - \delta I_3 = 0. \quad (7.67)$$

Функция  $l_1$ , удовлетворяющая всем этим четырем условиям, — не что иное, как собственная функция. Таким образом, мы проверили, что  $\omega^2 I_1 - k^2 I_2 - I_3$  стационарно относительно возмущения  $l_1$  вблизи собственной функции. Более того, мы можем показать, что интеграл от лагранжиана  $\omega^2 I_1 - k^2 I_2 - I_3$  равен нулю в его стационарной точке, умножив уравнение движения (7.21) на  $l_1$  и проинтегрировав его по  $z$  от 0 до  $\infty$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \left\{ \omega^2 \rho l_1^2 - k^2 \mu l_1^2 + l_1 \frac{d}{dz} \left( \mu \frac{dl_1}{dz} \right) \right\} dz \\ &= 2\omega^2 I_1 - 2k^2 I_2 - 2I_3 + l_1 \mu \frac{dl_1}{dz} \Big|_0^\infty. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Когда  $l_1$  — собственная функция, то  $l_1 = 0$  при  $z = \infty$  и  $dl_1/dz = 0$  при  $z = 0$ , так что последний член в (7.68) равен нулю. Таким образом, для собственной функции

$$\omega^2 I_1 = k^2 I_2 + I_3. \quad (7.69)$$

Другими словами, полная упругая энергия, содержащаяся в нормальной моде, равна полной кинетической энергии.

Рассмотрим три особенно важных для нас приложения двух соотношений:  $\omega^2 \delta I_1 = k^2 \delta I_2 + \delta I_3$  и  $\omega^2 I_1 = k^2 I_2 + I_3$ . В каждом приложении возмущаются разные величины, и эффективность вариационных методов хорошо иллюстрируется тем фактом, что три таких разных результата вытекают из одного и того же исходного выражения.

1) Предположим, что, пытаясь оценить численно истинную собственную функцию  $l_1(z)$ , мы сделали ошибки и получили в действительности  $l_1 + \delta l_1$ . Тогда подставив  $l_1 + \delta l_1$  в (7.66), мы получим  $I_1 + \delta I_1$ ,  $I_2 + \delta I_2$ ,  $I_3 + \delta I_3$ . Однако сложение соотношений (7.67) и (7.69) показывает, что  $\omega^2$  связано с  $k^2$  следующим образом:

$$k^2 = \frac{\omega^2(I_1 + \delta I_1) - (I_3 + \delta I_3)}{I_2 + \delta I_2}.$$

Это можно использовать для точного определения  $k^2$ ; следовательно, ошибки первого порядка в  $l_1$  не ведут к ошибкам первого порядка в собственном значении.

2) Получим полезную формулу для групповой скорости  $U$ , не прибегая к численному дифференцированию. Положим, что  $l_1(k, \omega)$  и  $l_1 + \delta l_1 = l_1(k + \delta k, \omega + \delta \omega)$  — две собственные функции. Используя  $l_1 + \delta l_1$  для оценки интегралов энергии, получим из (7.69)

$$(\omega + \delta \omega)^2 (I_1 + \delta I_1) = (k + \delta k)^2 (I_2 + \delta I_2) + (I_3 + \delta I_3).$$

Вычитая (7.69), найдем в первом приближении, что

$$\omega^2 \delta I_1 + 2\omega \delta \omega I_1 = k^2 \delta I_2 + 2k \delta k I_2 + \delta I_3.$$

Однако использование  $l_1 + \delta l_1$  создает возмущение в  $l_1$ , для которого применимо (7.67). Следовательно,  $2\omega \delta \omega I_1 = 2k \delta k I_2$  и

$$U = \frac{\delta \omega}{\delta k} = \frac{k I_2}{\omega I_1} = \frac{I_2}{c I_1}. \quad (7.70)$$

Здесь групповая скорость выражается через интегралы, что численно более устойчиво, чем дифференцирование.

3) Оценим изменения фазовой и групповой скоростей, которые возникают (на фиксированной частоте), когда в структуру вносятся малые изменения модуля сдвига  $\mu$  и плотности  $\rho$ . Предположим, что  $l_1(k, \omega)$  есть собственная функция для структуры  $(\rho(z), \mu(z))$ . Запишем ее как  $l_1(\rho, \mu, k, \omega)$  и рассмотрим возмущение  $l_1 + \delta l_1 = l_1(\rho + \delta \rho, \mu + \delta \mu, k + \delta k, \omega)$ , которое также является собственной функцией, но в несколько измененной структуре. Применение (7.69) к новой соб-

ственной функции дает

$$\omega^2 \int_0^\infty (\rho + \delta\rho)(l_1 + \delta l_1)^2 dz = (k + \delta k)^2 \int_0^\infty (\mu + \delta\mu)(l_1 + \delta l_1)^2 dz + \int_0^\infty (\mu + \delta\mu) \left[ \frac{d}{dz} (l_1 + \delta l_1) \right]^2 dz,$$

а вычитание (7.69), примененного к начальной собственной функции, приводит (в первом приближении) к соотношению

$$\omega^2 \int_0^\infty (l_1^2 \delta\rho + 2\rho l_1 \delta l_1) dz = k^2 \int_0^\infty (l_1^2 \delta\mu + 2\mu l_1 \delta l_1) dz + 2k \delta k \int_0^\infty \mu l_1^2 dz + \int_0^\infty \left( \frac{dl_1}{dz} \right)^2 \delta\mu dz + \int_0^\infty 2\mu \frac{dl_1}{dz} \frac{d\delta l_1}{dz} dz.$$

Но благодаря (7.67) все интегралы, содержащие  $\delta l_1$  и  $d(\delta l_1)/dz$ , уничтожаются, что дает связь между  $\delta k$  и интегралами по  $\delta\rho$  и  $\delta\mu$ . Остается связать  $\delta c$  и  $\delta k$ , и окончательный результат будет иметь вид

$$\left( \frac{\delta c}{c} \right)_\omega = -\frac{\delta k}{k} = \frac{\int_0^\infty \left[ k^2 l_1^2 + \left( \frac{dl_1}{dz} \right)^2 \right] \delta\mu dz - \int_0^\infty \omega^2 l_1^2 \delta\rho dz}{2k^2 \int_0^\infty \mu l_1^2 dz}. \quad (7.71)$$

Полученная формула демонстрирует линейную связь между относительным изменением  $\delta c/c$  фазовой скорости и возмущением параметров модели. Она играет центральную роль в инверсии наблюдаемых значений фазовых скоростей, как будет показано в гл. 12. То, что весовая функция (или ядро) для  $\delta\mu/\mu$  пропорциональна плотности потенциальной энергии, а для  $\delta\rho/\rho$  — плотности кинетической энергии, показывает, что изменения в  $\mu$  и  $\rho$  на глубинах, где плотности энергии больше, сильнее влияют на фазовую скорость.

Изменение групповой скорости на фиксированной частоте, вызываемое малыми возмущениями модуля сдвига и плотности, получается из (7.70) в виде

$$\frac{\delta U}{U} = \frac{\delta I_2}{I_2} - \frac{\delta c}{c} - \frac{\delta I_1}{I_1}, \quad (7.72)$$

но в этом случае  $\delta I_1$  должно быть вычислено прежде, чем найдены  $\delta I_1$  и  $\delta I_2$ , так как интегралы, содержащие  $\delta l_1$  и  $d(\delta l_1)/dz$ , не уничтожаются подобно тому, как это было в (7.71).

### 7.3.2. ВОЛНЫ РЭЛЕЯ

Используя выражение (7.65) для плотности лагранжиана, можно записать принцип Гамильтона для волн Рэлея следующим образом:

$$\omega^2 \delta I_1 - k^2 \delta I_2 - k \delta I_3 - \delta I_4 = 0, \quad (7.73)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho(r_1^2 + r_2^2) dz, \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty [(\lambda + 2\mu)r_1^2 + \mu r_2^2] dz, \quad (7.74)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \left( \lambda r_1 \frac{dr_2}{dz} - \mu r_2 \frac{dr_1}{dz} \right) dz,$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ (\lambda + 2\mu) \left( \frac{dr_2}{dz} \right)^2 + \mu \left( \frac{dr_1}{dz} \right)^2 \right] dz.$$

Можно показать, что (7.73) эквивалентно уравнению движения (7.28), граничным условиям (7.29) и условиям непрерывности  $r_1, r_2, r_3, r_4$ . Поскольку  $r_1, r_2$ , удовлетворяющие этим условиям, являются собственными функциями для волн Рэлея, уравнение (7.73) показывает, что выражение  $\omega^2 I_1 - k^2 I_2 - k I_3 - I_4$  стационарно относительно возмущений собственных функций. Как и для волн Лява, этот интеграл обращается в нуль в стационарной точке:

$$\omega^2 I_1 - k^2 I_2 - k I_3 - I_4 = 0. \quad (7.75)$$

Таким образом, это уравнение можно использовать для контроля при расчете собственных значений и собственных функций методами, описанными ранее.

Возмущая  $k$  и  $\omega$  в (7.75), найдем формулу для групповой скорости:

$$I_1 \delta(\omega^2) = I_2 \delta(k^2) + I_3 \delta k$$

или

$$U = \frac{\delta \omega}{\delta k} = \frac{I_2 + \frac{I_3}{2k}}{c I_1}, \quad (7.76)$$

где  $c$  — фазовая скорость.

Из (7.75) можно также найти изменение фазовой скорости при малых возмущениях в  $\lambda, \mu$  и  $\rho$ . Для данного  $\omega$ , вновь используя (7.73), имеем

$$\begin{aligned} \delta k(2k I_2 + I_3) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \omega^2 (r_1^2 + r_2^2) \delta \rho dz \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( k r_1 + \frac{dr_2}{dz} \right)^2 \delta \lambda dz \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ 2k^2 r_1^2 + 2 \left( \frac{dr_2}{dz} \right)^2 + \left( k r_2 - \frac{dr_1}{dz} \right)^2 \right] \delta \mu dz. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Соответствующее относительное изменение фазовой скорости можно записать как

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta c}{c} \right)_\omega &= -\frac{\delta k}{k} \\ &= \frac{1}{4UcI_1 k^2} \left\{ \int_0^\infty \left( k r_1 + \frac{dr_2}{dz} \right)^2 \delta \lambda dz + \int_0^\infty \left[ 2k^2 r_1^2 + 2 \left( \frac{dr_2}{dz} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( k r_2 - \frac{dr_1}{dz} \right)^2 \right] \delta \mu dz - \int_0^\infty \omega^2 (r_1^2 + r_2^2) \delta \rho dz \right\}, \end{aligned} \quad (7.78)$$

где для упрощения знаменателя в правой части использовано (7.76). Весовая функция для  $\delta \rho / \rho$  — это опять кинетическая энергия, а для  $\delta \lambda$  она пропорциональна упругой энергии дилатации. Переписав (7.78) так, чтобы выделить члены с  $\delta(\lambda + 2\mu/3)$  и  $\delta \mu$ , найдем веса, пропорциональные упругой энергии дилатации и упругой энергии сдвига (см. задачу 2.6).

## ДОПОЛНЕНИЕ 7.6

## «Частные производные» фазовой скорости

Малое изменение фазовой скорости волн Лява, вызванное малыми возмущениями  $\delta\rho$  и  $\delta\mu$ , можно записать в виде

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_{\omega} = \int_0^{\infty} \frac{\rho}{c} \left[\frac{\partial c}{\partial \rho}\right]_{\omega, \mu} \frac{\delta \rho}{\rho} dz + \int_0^{\infty} \frac{\mu}{c} \left[\frac{\partial c}{\partial \mu}\right]_{\omega, \rho} \frac{\delta \mu}{\mu} dz. \quad (1)$$

Символы, появившиеся здесь в квадратных скобках, называют частными производными фазовой скорости по плотности (или модулю сдвига) на некоторой глубине. Сравнивая (1) с (7.71), имеем

$$\frac{\rho}{c} \left[\frac{\partial c}{\partial \rho}\right]_{\omega, \mu} = \frac{\rho \omega^2 l_1^2}{2k^2 \int_0^{\infty} \mu l_1^2 dz} \quad (2)$$

и

$$\frac{\mu}{c} \left[\frac{\partial c}{\partial \mu}\right]_{\omega, \rho} = \frac{\mu \left\{ k^2 l_1^2 + \left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2 \right\}}{2k^2 \int_0^{\infty} \mu l_1^2 dz}. \quad (3)$$

Принятая здесь форма записи частных производных обманчива, так как кажется, что левые части уравнений (2) и (3) безразмерны. Но из рассмотрения правых частей ясно, что размерность здесь обратная длине [это непосредственно видно из (1)].

Первые расчеты частных производных фазовой скорости были проведены Дорманом и Юингом [106] и Брюном и Дорманом [56], которые просто нашли фазовые скорости для слабо различающихся структур и затем оценили производные по первым разностям. Вариационный метод как для волн Лява, так и для волн Рэлея был предложен Джеффрисом [181]. Практическая схема получения частных производных групповой скорости дана Роди и др. [277].

## 7.3.3. МЕТОД РЭЛЕЯ — РИТЦА

Вариационные принципы, подобные примененным в (7.67) и (7.73) для волн Лява и Рэлея, используются в методе Рэлея — Ритца для нахождения собственных значений и собственных функций. В этом подходе мы аппроксимируем собственную функцию линейной комбинацией координатных функций  $\phi_i(z)$ , которые обычно выбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия на  $z = 0$  и  $z = \infty$ :

$$l_1(z) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(z). \quad (7.79)$$

Подставив это выражение в интегралы энергии (7.66), найдем

$$I_1 = \mathbf{c}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{c}, \quad I_2 = \mathbf{c}^T \mathbf{A}_2 \mathbf{c}, \quad I_3 = \mathbf{c}^T \mathbf{A}_3 \mathbf{c}, \quad (7.80)$$

где  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ , а матрицы  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  и  $\mathbf{A}_3$  имеют элементы

$$\begin{aligned} A_{1ij} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \rho \phi_i \phi_j dz, & A_{2ij} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mu \phi_i \phi_j dz, \\ A_{3ij} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (7.81)$$

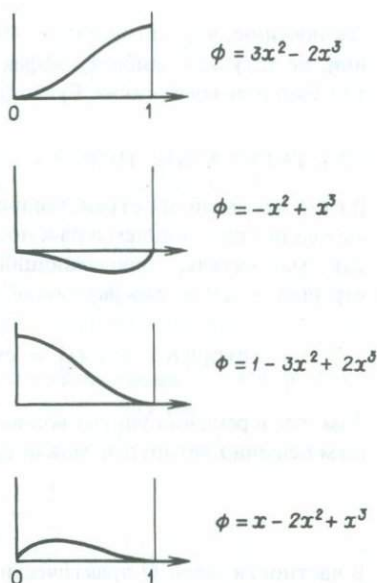


Рис. 7.6. Координатные функции, использованные Виггинсом [335] для нахождения собственных функций методом Рэлея — Ритца. Среда может содержать много неоднородных слоев; здесь показаны четыре нормированные функции, использованные в каждом слое ( $x = 0$  и  $x = 1$  соответствуют границам слоев). Для каждой из четырех приведённых функций при  $x = 0$  и  $x = 1$   $\phi$  и  $d\phi/dx$  равны нулю или единице.

Векторный коэффициент  $\mathbf{c}$ , минимизирующий лагранжиан  $\omega^2 I_1 - k^2 I_2 - I_3$ , получается приравниванием нулю производной интеграла по  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). В результате имеем

$$(\omega^2 A_1 - k^2 A_2 - A_3) \mathbf{c} = 0. \quad (7.82)$$

Это уравнение определяет задачу на собственные значения — собственные векторы для  $\mathbf{c}$ . Нетривиальные решения  $\mathbf{c}$  существуют только тогда, когда  $k$  — собственное значение, удовлетворяющее условию

$$|\omega^2 A_1 - k^2 A_2 - A_3| = 0 \quad (7.83)$$

для данного  $\omega$ . Как только определено собственное значение, соответствующий собственный вектор определяется из (7.82).

Поскольку собственное значение стационарно к любым возмущениям собственной функции, приближенный собственный вектор, полученный из решения (7.82), можно использовать для нахождения более точного собственного значения из (7.69).

Такеучи и Кобаяси [318] использовали в качестве координатных экспоненциально затухающие функции и определили дисперсию волн Лява в полупространстве, где модуль сдвига линейно возрастает с глубиной. Они продемонстрировали эффективность метода Рэлея — Ритца, получив по существу те же результаты, что и при численном интегрировании методом Сато [283]: первый занял столько же времени на ручном калькуляторе, сколько последний на IBM 650. Недавно Виггинс [335] использовал в качестве координатных функций кубические полиномы, показанные на рис. 7.6. Их значения и их производные равны 1 или 0 в конечных точках, что удобно для построения пробных собственных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Виггинс пришел к

заключению, что метод Рэлея — Ритца, использующий эти координатные функции, не уступает наиболее эффективному матричному методу. Подобный подход был применен также Буландом и Гилбертом [62].

### 7.3.4. ЗАТУХАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

В гл. 5 мы ввели пространственное  $Q(\omega)$  для описания затухания плоских объемных волн с расстоянием и рассмотрели связанную с этим дисперсию; мы видели, как множитель, описывающий распространение волн в упругих средах  $\exp[i(kx - \omega t)] = \exp[i\omega(x/c - t)]$ , заменяется множителем

$$\exp[i(Kx - \omega t)] = \exp\left[\frac{(-\omega x)}{2c(\omega)Q(\omega)}\right] \exp\left\{i\omega\left[\frac{x}{c(\omega)} - t\right]\right\}.$$

Там, где в решении упруго-волновой задачи фигурирует  $c = c_e$ , в соответствующем решении неупругой задачи  $c_e$  заменяется по правилу

$$\frac{1}{c_e} \rightarrow \frac{1}{c(\omega)} \left(1 + \frac{i}{2Q(\omega)}\right). \quad (\text{снова 5.87})$$

В частности, если  $Q$  практически постоянно, мы находим, что дисперсия логарифмическая и определяется как

$$\frac{c(\omega_1)}{c(\omega_2)} = 1 + \frac{1}{\pi Q} \ln\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right).$$

Для поглощающей среды с высоким  $Q$  правило (5.87) можно рассматривать как введение малых возмущений в скорость  $c_e$  [12, 13]. Приращение  $\delta c$  на фиксированной частоте будет иметь действительную и мнимую компоненты:

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right) = \left(\frac{c}{c_e} - 1\right) - \frac{i}{2Q_{\text{простр}}}. \quad (7.84)$$

Рассмотрим сначала изменение фазовой скорости волн Лява, вызванное возмущениями в скоростях  $S$ -волн на любой глубине. Относительное изменение  $\delta c/c$  фазовой скорости в зависимости от  $\delta\mu/\mu$  и  $\delta\rho/\rho$  уже было приведено в (7.71). Поскольку

$$\delta\beta/\beta = \frac{1}{2}(\delta\mu/\mu - \delta\rho/\rho),$$

то из (7.71), пренебрегая возмущением плотности, имеем

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_{\omega} = \frac{\int_0^{\infty} \left[ k^2 l_1^2 + \left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2 \right] 2\mu \frac{\delta\beta}{\beta} dz}{2k^2 \int_0^{\infty} \mu l_1^2 dz}. \quad (7.85)$$

Подставляя выражение для  $\delta\beta/\beta$  в форме (7.84) в уравнение (7.85), получим  $\delta c/c$  с действительной и мнимой частями. Действительная часть вводит вещественную дисперсию для волн Лява, вызванную неидеальной упругостью, в дополнение к геометрической дисперсии, вызванной вертикальной неоднородностью среды. Мнимая часть вызывает затухание амплитуд волн Лява, и из (7.84) мы

определим пространственное  $Q_L$  волн Лява как

$$\text{пространственное } Q_L^{-1} = -2\text{Im}(\delta c/c)_\omega. \quad (7.86)$$

Полагая в (7.85)  $\text{Im}(\delta\beta/\beta) = -1/(2Q_\beta)$ , получим

$$\text{пространственное } Q_L^{-1} = \frac{\int_0^\infty \left[ k^2 l_1^2 + \left( \frac{dl_1}{dz} \right)^2 \right] \mu Q_\beta^{-1} dz}{k^2 \int_0^\infty \mu l_1^2 dz}. \quad (7.87)$$

Эта формула показывает, что  $Q_L^{-1}$  для волн Лява выражается как интеграл от  $Q_\beta^{-1}$  для поперечных волн с весовой функцией, пропорциональной плотности упругой энергии данной моды.

Для волн Рэлея возмущения  $\lambda$  и  $\mu$  заменяются возмущениями  $\alpha$  и  $\beta$ , и, учитывая, что в (7.78)  $\delta(\lambda + 2\mu)/(\lambda + 2\mu) = 2\delta\alpha/\alpha + \delta\rho/\rho$ , получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta c}{c} \right)_\omega = \frac{1}{4UcI_1 k^2} \left\{ \int_0^\infty \left( kr_1 + \frac{dr_2}{dz} \right)^2 (\lambda + 2\mu) 2 \left( \frac{\delta\alpha}{\alpha} \right) dz \right. \\ \left. + \int_0^\infty \left[ \left( kr_2 - \frac{dr_1}{dz} \right)^2 - 4kr_1 \frac{dr_2}{dz} \right] 2\mu \left( \frac{\delta\beta}{\beta} \right) dz \right\}. \quad (7.88) \end{aligned}$$

Определяя пространственное  $Q_R$  для волн Рэлея таким же образом, как для волн Лява в (7.86), и подставляя  $\text{Im}(\delta\alpha/\alpha) = -1/2 Q_\alpha$ , получим из (7.88)

$$\begin{aligned} \text{пространственное } Q_R^{-1} = \frac{1}{4UcI_1 k^2} \left\{ \int_0^\infty \left( kr_1 + \frac{dr_2}{dz} \right)^2 (\lambda + 2\mu) 2Q_\alpha^{-1} dz \right. \\ \left. + \int_0^\infty \left[ \left( kr_2 - \frac{dr_1}{dz} \right)^2 - 4kr_1 \frac{dr_2}{dz} \right] 2\mu Q_\beta^{-1} dz \right\}. \quad (7.89) \end{aligned}$$

И вновь  $Q_R^{-1}$  для волн Рэлея выражается как интеграл  $Q^{-1}$  для волн  $P$  и  $S$  с соответствующими весовыми функциями.

До сих пор мы рассматривали пространственное  $Q$ , определяемое по затуханию волн с расстоянием (дополнение 5.7). Это определение пригодно при измерении бегущих волн. Однако в целом ряде сейсмических измерений непосредственно определяется временное  $Q$ . Наиболее важный случай — это затухание определенного собственного колебания Земли. В этом случае фиксируется величина  $k$  в отличие от экспериментальных наблюдений бегущих волн, когда фиксируется частота  $\omega$ .

Изменение фазовой скорости, связанное с возмущением параметров модели, различно в экспериментах с фиксированным  $\omega$  и с фиксированным  $k$ . Так фазовая функция  $\exp[i(kx - \omega t)]$  заменяется следующей функцией:

$$\exp[i(kx - \Omega t)] = \exp\left[-\frac{\omega t}{2Q(\omega)}\right] \exp[ik(x - ct)].$$

Замена скорости в упругой среде  $c_e$  происходит теперь по правилу

$$c_e \rightarrow c \left( 1 - \frac{i}{2Q_{\text{врем}}} \right),$$

т.е.

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_k = \left(\frac{c}{c_e} - 1\right) - \frac{i}{2Q_{\text{врем}}}. \quad (7.90)$$

Поскольку как  $(\omega, k + \delta k)$ , так и  $(\omega + \delta\omega, k)$  становятся парой собственных значений для возмущенной среды, наклон прямой, соединяющей две точки на диаграмме  $\omega - k$ , даст групповую скорость  $U$  для возмущенной среды:

$$U = \frac{\omega - (\omega + \delta\omega)}{(k + \delta k) - k} = -\frac{\delta\omega}{\delta k}. \quad (7.91)$$

дополнение 7.7'

### Некоторые эффекты анизотропии

Общая теория распространения поверхностных волн в анизотропных средах с вертикальной неоднородностью по идее является простым обобщением методики матричного пропагатора, описанной в разд. 7.2. Вектор движения-напряжения [см. (5.101)] теперь содержит шесть элементов, и в общем мы уже не можем говорить о волнах Рэлея и Лява как о двух независимых семействах поверхностных волн. Скорее здесь существует одно обобщенное семейство поверхностных волн, которое в слабо анизотропных средах можно разбить на квазилявовские и квазирэлеевские движения.

Если анизотропия слаба, то можно показать [297], что фазовая скорость поверхностных волн  $c$  зависит от азимута распространения  $\phi$  как

$$c(\omega, \phi) = A(\omega) + B(\omega) \cos 2\phi + C(\omega) \sin 2\phi + E(\omega) \cos 4\phi + F(\omega) \sin 4\phi \quad (1)$$

Эта формула приближенная и сходна с результатом, полученным для объемных волн (5.102). Форсайт [116] применил (1) к данным поверхностных волн для Тихого океана, не включая члены с  $4\phi$ , так как на практике (при современных данных) их влияние ничтожно.

Детальный анализ дисперсии поверхностных волн в анизотропном полупространстве, состоящем из пачки жестко контактирующих однородных слоев, был проведен Крампин [87—90]. Если анизотропия в Земле определяется некоторой преимущественной ориентацией анизотропных кристаллов (например, оливина), которые первоначально затвердевают вблизи центров раздвигания дна океана (таких, как срединно-океанический хребет), то горизонтальные плоскости в такой среде, по всей видимости, соответствуют плоскостям симметрии. Задав  $x_3$  как направление по глубине, Ляв [218] показал, что симметрия относительно горизонтальных плоскостей существует тогда и только тогда, когда  $c_{ijkl} = 0$ , если один или три из этих индексов имеют значение 3. Крампин [89] описал движение частиц в поверхностной волне, характерное для этого вида анизотропии. Это так называемое «наклонное рэлеевское» движение; оно заключается в том, что движение частиц происходит по эллипсу с вертикальной и горизонтальной осью, но плоскость эллипса наклонена по отношению к сагиттальной плоскости (см. разд. 5.6). Таким образом, движение частиц имеет компоненту, поперечную по отношению к направлению медленности, в котором распространяется волна. Горизонтальные компоненты находятся в фазе, но отличаются по фазе на  $\pm \pi/2$  от вертикальной компоненты. Крампин и Кинг [92] описали различные примеры такого движения частиц, наблюдавшиеся на группе сейсмометров в Норвегии (НОРСАР), для поверхностных волн, прошедших через Евразию.

Но в одном случае мы имеем  $k + \delta k = K = k(1 + i/2Q^{\text{простр}})$ , а в другом  $\omega + \delta\omega = \Omega = \omega(1 - i/2Q^{\text{врем}})$ . Отсюда составим  $-\delta\omega/\delta k$  и получим общее правило:

$$\text{временное } Q^{-1} = \frac{U}{c} \times \text{пространственное } Q^{-1}. \quad (7.92)$$

На различие этих двух видов  $Q$  впервые указал Брюн [53] при изучении поверхностных волн. Приведенная выше формула важна, когда мы сравниваем значения  $Q$  диспергирующих волн, полученные из экспериментальных данных о стоячих и бегущих волнах. Для недиспергирующих волн  $c = U$  и нет различия между двумя видами  $Q$ .

Уравнение (7.92) легко понять, измеряя затухание диспергирующих волн с использованием приближения стационарной фазы (7.18). При заданных  $x$  и  $t$  на записи преобладает частота  $\omega$ , определяемая из уравнения  $x/t = U(\omega)$ . Поскольку волна с частотой  $\omega$  существует в среде в течение времени  $t = x/U(\omega)$ , ее затухание определяется множителем

$$\exp\left[\frac{-\omega t}{2 \text{ временное } Q(\omega)}\right] = \exp\left[\frac{-\omega x}{2U(\omega) \text{ временное } Q(\omega)}\right]. \quad (7.93)$$

В связи с тем, что по определению он равен

$$\exp\left[\frac{-\omega x}{2c(\omega) \text{ простр. } Q(\omega)}\right],$$

мы получаем (7.92).

#### 7.4. ПОВЕРХНОСТНО-ВОЛНОВАЯ ЧАСТЬ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

В этом разделе мы получим простое компактное решение для поверхностных волн, возбуждаемых силой с временной зависимостью  $e^{-i\omega t}$ , действующей в точке внутри вертикально-неоднородной среды. Сначала мы выразим общее решение для уравнений движения в цилиндрических координатах  $(r, \phi, z)$ , используя вектор движения-напряжения, введенный в предыдущих разделах, и множество векторов, являющихся функциями только  $r$  и  $\phi$ , для описания горизонтального распространения. Разрыв напряжения, эквивалентный точечному источнику, разлагается в ряд по этим меняющимся по горизонтали векторным функциям. Затем мы найдем решение с заданным скачком, которое также удовлетворяет граничным условиям на свободной поверхности и на бесконечности. Этот подход применяли Хаскелл [155], Харкрайдер [148], Бен-Менахем и др. [36] и Хадсон [174, 175]. Компактный результат получается путем применения вариационного принципа к вычетам, оцениваемым в полюсах плоскости  $k$ . Этот последний шаг был проделан Кейлис-Бороком и Яновской [192], Харкрайдером и Андерсоном [149], Влааром [326] и Сайто [280].

Сначала мы опишем простой метод (который пригоден в двумерных случаях), используя теорему взаимности Херреры [161], к сожалению неприменимую к трем измерениям. Затем, следуя Сайто, найдем решение для трехмерного случая.

#### 7.4.1. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Найдем сначала условия ортогональности для собственных функций волн Лява и Рэлея, используя нашу теорему взаимности (2.35). Пренебрегая объемными силами и записав трансформанты Фурье от  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  как  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega)$  и  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$  соответственно, перепишем преобразование (2.35) в следующем виде:

$$0 = \iint_S \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega), \mathbf{n}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \omega), \mathbf{n}) \} dS. \quad (7.94)$$

[Замечание. Свертка в (2.35) становится здесь произведением трансформант.] Это уравнение должно выполняться для любой пары решений  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  уравнения движения в данной среде при отсутствии объемных сил. Обозначим две различные моды волны Лява, распространяющиеся в направлении  $x$ , как  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  и определим  $S$  как поверхность, ограничивающую заштрихованный прямоугольник с вершинами в точках  $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$ ,  $(a, D)$  и  $(b, D)$ , как показано на рис. 7.7.

Для волн Лява напряжение  $\mathbf{T}$  обращается в нуль на свободной поверхности  $z = 0$ , и движение равно нулю на  $z = \infty$ . Компоненты смещения и напряжения вдоль *вертикальной* плоскости равны

$$\begin{aligned} u_y &= l_1(\omega, k_n, z) \exp(ik_n x) \\ T_y &= \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} = ik_n \mu l_1 \exp(ik_n x) \end{aligned} \quad (7.95)$$

для первого решения и

$$\begin{aligned} v_y &= l_1(\omega, k_m, z) \exp(ik_m x) \\ T_y &= ik_m \mu l_1 \exp(ik_m x) \end{aligned} \quad (7.96)$$

для второго. Другие компоненты не вносят вклада в интеграл (7.94). Подставляя (7.95) и (7.96) в (7.94), найдем при  $D \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty i(k_n - k_m) \mu(z) l_1(\omega, k_m, z) l_1(\omega, k_n, z) dz \exp[i(k_n + k_m)a] \\ &= \int_0^\infty i(k_n - k_m) \mu(z) l_1(\omega, k_m, z) l_1(\omega, k_n, z) dz \exp[i(k_n + k_m)b] \end{aligned}$$

Это равенство выполняется для произвольных  $a$  и  $b$  тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty \mu(z) l_1(\omega, k_m, z) l_1(\omega, k_n, z) dz = 0 \quad \text{при } k_n \neq k_m. \quad (7.97)$$

Следовательно, собственные функции различных мод волн Лява для фиксированного  $\omega$  ортогональны друг другу с модулем сдвига  $\mu(z)$  в качестве весовой функции.

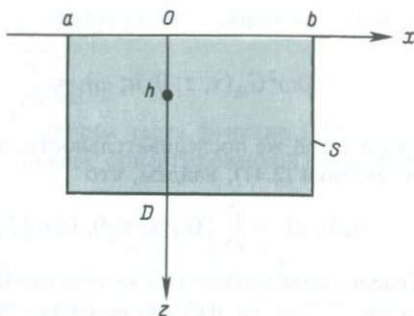


Рис. 7.7. Интегрирование в (7.94) проводится по поверхности  $S$ , ограничивающей серый прямоугольник.

Для волн Рэлея также обозначим  $n$ -ю моду как  $\mathbf{u}$ , и тогда компоненты смещения и напряжения вдоль вертикальной плоскости будут равны

$$\begin{aligned} u_x &= r_1(\omega, k_n, z) \exp(ik_n x), \\ u_z &= ir_2(\omega, k_n, z) \exp(ik_n x), \end{aligned} \quad (7.98)$$

$$\tau_{xx} = iT_1(\omega, k_n, z) \exp(ik_n x) = i \left\{ \lambda \frac{dr_2}{dz} + (\lambda + 2\mu)k_n r_1 \right\} \exp(ik_n x),$$

$$\tau_{zx} = T_2(\omega, k_n, z) \exp(ik_n x) = \left( \mu \frac{dr_1}{dz} - \mu k_n r_2 \right) \exp(ik_n x).$$

То же самое получим для  $\mathbf{v}$ , заменяя  $k_n$  на  $k_m$ . Условие ортогональности для волн Рэлея получится тогда как

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^{\infty} \{r_i(\omega, k_n, z)T_i(\omega, k_m, z) - r_i(\omega, k_m, z)T_i(\omega, k_n, z)\} dz = 0$$

или

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left\{ (\lambda + 2\mu)(k_m - k_n)r_1(\omega, k_n, z)r_1(\omega, k_m, z) - \mu(k_m - k_n)r_2(\omega, k_n, z)r_2(\omega, k_m, z) \right. \\ \left. + \lambda \left[ r_1(\omega, k_n, z) \frac{dr_2(\omega, k_m, z)}{dz} - r_1(\omega, k_m, z) \frac{dr_2(\omega, k_n, z)}{dz} \right] \right. \\ \left. + \mu \left[ r_2(\omega, k_n, z) \frac{dr_1(\omega, k_m, z)}{dz} - r_2(\omega, k_m, z) \frac{dr_1(\omega, k_n, z)}{dz} \right] \right\} dz = 0. \quad (7.99) \end{aligned}$$

Располагая этими условиями ортогональности, перейдем к нахождению поверхностно-волновой части функции Грина, снова используя теорему взаимности. Воспользуемся тем же решением для  $\mathbf{u}$ , которое было получено в (7.95) и (7.98) для волн Лява и Рэлея соответственно, но для  $\mathbf{v}$  мы используем двумерную функцию Грина  $\mathbf{G}_k \exp(-i\omega t)$ , т.е. отклик на линейную силу с временной зависимостью  $\exp(-i\omega t)$ , расположенную на прямой  $x = 0, z = h$ . Эта прямая параллельна оси  $y$  (т.е. оси  $x_2$ ), и сила действует в направлении  $x_k$  (т.е.  $x, y$  или  $z$ ), так

что

$$-\rho\omega^2 G_{ik}(x, z; 0, h; \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}(\mathbf{G}_k) + \delta_{ik} \delta(x) \delta(z - h). \quad (7.100)$$

Действуя в той же последовательности, что и при переходе от (2.35) к теореме представлений (2.41), найдем, что

$$u_k(0, h) = \int_S \{G_{ik}(x, z; 0, h; \omega) T_i(\mathbf{u}, \mathbf{n}) - u_i(x, z) T_i(\mathbf{G}_k, \mathbf{n})\} dS. \quad (7.101)$$

Теперь снова выберем ту же поверхность интегрирования  $S$ , которая показана на рис. 7.7, но на этот раз не только при  $D \rightarrow \infty$ , но и при  $a \rightarrow -\infty$  и  $b \rightarrow \infty$ . Поскольку поверхностные волны от линейного источника не испытывают геометрического расхождения, тогда как объемные волны испытывают, мы полагаем, что функция Грина на большом расстоянии состоит полностью из поверхностных волн, распространяющихся от источника. Таким образом, для больших  $x$   $u$ -компонента функции Грина определяется суммой волн Лява:

$$G_{yy}(x, z; 0, h; \omega) \sim \begin{cases} \sum_m b_{m2}^+(h) l_1(\omega, k_m, z) \exp(ik_m x) & x \gg 0 \\ \sum_m b_{m2}^-(h) l_1(\omega, k_m, z) \exp(-ik_m x) & x \ll 0. \end{cases} \quad (7.102)$$

$x$ - и  $z$ -компоненты состоят из волн Рэлея:

$$G_{xk}(x, z; 0, h; \omega) \sim \begin{cases} \sum_m a_{mk}^+(h) r_1(\omega, k_m, z) \exp(ik_m x) & x \gg 0 \\ \sum_m a_{mk}^-(h) r_1(\omega, k_m, z) \exp(-ik_m x) & x \ll 0, \end{cases} \quad (7.103)$$

$$G_{zk}(x, z; 0, h; \omega) \sim \begin{cases} \sum_m ia_{mk}^+(h) r_2(\omega, k_m, z) \exp(ik_m x) & x \gg 0 \\ -\sum_m ia_{mk}^-(h) r_2(\omega, k_m, z) \exp(-ik_m x) & x \ll 0. \end{cases}$$

Подставляя (7.102) и (7.95) в (7.101), найдем  $u$ -компоненту смещения:

$$u_y(0, h) = \sum_m b_{m2}^+(h) \int_0^\infty i(k_n - k_m) \mu(z) l_1(\omega, k_n, z) l_1(\omega, k_m, z) \exp[i(k_n + k_m)b] dz - \sum_m b_{m2}^-(h) \int_0^\infty i(k_n + k_m) \mu(z) l_1(\omega, k_n, z) l_1(\omega, k_m, z) \exp[i(k_m - k_n)a] dz.$$

Используя условие ортогональности (7.97), приведем ее к виду

$$u_y(0, h) = l_1(\omega, k_n, h) = -2ik_n b_{n2}^-(h) \int_0^\infty \mu(z) l_1^2(\omega, k_n, z) dz$$

или

$$b_{n2}^-(h) = \frac{l_1(\omega, k_n, h)}{-4ik_n l_2}, \quad (7.104)$$

где  $I_2$  определено в (7.66). Аналогичным образом, используя  $u_y = I_1 \exp(-ik_n x)$  вместо (7.95), получим

$$b_{n2}^+(h) = b_{n2}^-(h). \quad (7.105)$$

Подставляя (7.104) и (7.105) в (7.102), получим часть функции Грина, описывающую волны Лява, в случае линейной силы, ориентированной в направлении  $y$ :

$$G_{yy}(x, z; 0, h; \omega) \sim \sum_n \frac{I_1(\omega, k_n, h) I_1(\omega, k_n, z)}{4k_n I_2} \exp\left(ik_n x + i\frac{\pi}{2}\right) \quad x \gg 0, \quad (7.106)$$

или, используя (7.70),

$$G_{yy}(x, z; 0, h; \omega) \sim \sum_n \frac{I_1(\omega, k_n, h) I_1(\omega, k_n, z)}{4k_n c U I_1} \exp\left(ik_n x + i\frac{\pi}{2}\right) \quad x \gg 0,$$

где  $I_1$  и  $I_2$  определены в (7.66).

Полученное уравнение демонстрирует, насколько просто можно представить ту часть функции Грина, которая описывает волны Лява. Эффекты глубины источника  $h$ , глубины приемника  $z$ , пути распространения  $x$  и свойств среды, выражаемые  $c$ ,  $U$  и  $I_1$ , разделены для каждой моды. Как только задача на собственные значения — собственные функции решена, расчет амплитуд волн Лява, возбуждаемых линейной силой, становится очень простым. Позднее мы покажем, что та же формула с небольшими преобразованиями применима и к волнам Лява от точечного источника.

Подобным же образом можно получить часть функции Грина, относящуюся к волнам Рэлея, подставляя (7.103) и (7.98) в (7.101) и используя условие ортогональности (7.99). Например, положив в (7.101) индекс  $k = 1$  (направление  $x$ ), получим

$$\begin{aligned} u_x(0, h) &= r_1(\omega, k_n, h) \\ &= -ia_{n1}^-(h) \int_0^\infty \left\{ 2k_n [(\lambda + 2\mu)r_1^2(\omega, k_n, z) + \mu r_2^2(\omega, k_n, z)] \right. \\ &\quad \left. + 2 \left[ \lambda r_1(\omega, k_n, z) \frac{dr_2(\omega, k_n, z)}{dz} - \mu r_2(\omega, k_n, z) \frac{dr_1(\omega, k_n, z)}{dz} \right] \right\} dz \end{aligned}$$

или

$$a_{n1}^-(h) = \frac{r_1(\omega, k_n, h)}{-i4k_n \left( I_2 + \frac{I_3}{2k_n} \right)} = \frac{r_1(\omega, k_n, h)}{-i4k_n c U I_1} \quad (7.107)$$

где  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  определены в (7.74). Снова имеем  $a_{n1}^+(h) = a_{n1}^-(h)$ . Подставляя их в (7.103), получим часть функции Грина, описывающую волны Рэлея, для линейной силы, действующей в направлении  $x$ :

$$G_{xx}(x, z; 0, h; \omega) \sim \sum_n \frac{r_1(\omega, k_n, h) r_1(\omega, k_n, z)}{4k_n c U I_1} \exp\left(ik_n x + i\frac{\pi}{2}\right) \quad x \gg 0, \quad (7.108)$$

$$G_{zx}(x, z; 0, h; \omega) \sim \sum_n \frac{r_1(\omega, k_n, h) r_2(\omega, k_n, z)}{4k_n c U I_1} \exp(ik_n x + i\pi) \quad x \gg 0.$$

Это также очень простое выражение, в котором эффекты источника, приемника и пути распространения разделены. Аналогичным образом можно получить функцию Грина для линейной силы, ориентированной в направлении  $z$ :

$$G_{xz}(x, z; 0, h; \omega) \sim \sum_n \frac{r_2(\omega, k_n, h)r_1(\omega, k_n, z)}{4k_n c U I_1} \exp(ik_n x) \quad x \gg 0, \quad (7.109)$$

$$G_{zz}(x, z; 0, h; \omega) \sim \sum_n \frac{r_2(\omega, k_n, h)r_2(\omega, k_n, z)}{4k_n c U I_1} \exp\left(ik_n x + i\frac{\pi}{2}\right) \quad x \gg 0, \quad (7.110)$$

Отметим, что фазовые сдвиги, появляющиеся в  $G_{xx}$ ,  $G_{yy}$  и  $G_{zz}$ , — это задержки, равные  $\pi/2$ .

#### ДОПОЛНЕНИЕ 7.8

##### *Правило знаков при вертикальном движении*

Так как  $x_3$ , или ось  $z$ , направлено вниз, положительным направлением при вертикальном смещении здесь выбрано направление вниз. Это противоречит обычной практике. Естественно, сейсмологи полагают, что глубина направлена вниз, но затем непоследовательно выбирают в качестве положительного направления вертикальной компоненты сейсмического движения направление вверх. В этой книге мы считаем ось  $z$  направленной вниз как для смещений, так и для глубин всюду, где мы получаем результаты в координатах  $(x, y, z)$  или  $(r, \phi, z)$ . Конечно, в сферических координатах с  $r = 0$  в центре Земли ( $r$  — вертикальная координата) естественным положительным направлением является направление вверх, как мы будем полагать в гл. 8 и соответствующих частях гл. 9.

Беглый взгляд на форму этих решений с  $k_n$  в знаменателе позволяет заметить пропорциональность амплитудного спектра  $\omega^{-1}$ . Однако  $I_1$  (с нормированными  $r_1$  и  $r_2$ ) зависит от  $\omega$  таким образом, что  $k_n I_1$  — только слабо меняющаяся функция  $\omega$  (см. задачу 7.7).

#### 7.4.2. ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Естественной системой отсчета для функции Грина в случае точечного источника служит цилиндрическая система координат  $(r, \phi, z)$ , показанная на рис. 7.8. Вернемся к дополнению 6.5 и рассмотрим три скалярных потенциала  $\phi, \psi, \chi$ , характеризующих волны  $P, SV$  и  $SH$  соответственно. Мы показали, что упругое смещение в однородном теле можно выразить как

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \nabla \times (0, 0, \psi) + \nabla \times (0, 0, \chi), \quad (7.111)$$

Здесь потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям (3) дополнения 6.5. Как следует из метода разделения переменных, общие решения можно полу-

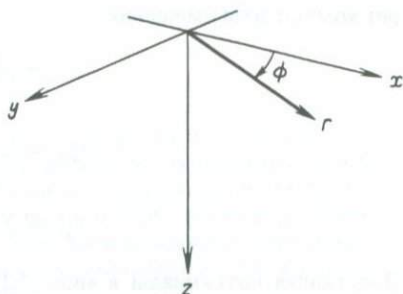


Рис. 7.8. Декартовы и цилиндрические координаты, используемые для анализа волн от точечного источника в вертикально-неоднородной среде.

читать суперпозицией базисных решений:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, \omega) &= J_m(kr)e^{im\phi}(Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z}) \exp(-i\omega t), \\ \psi(\mathbf{x}, \omega) &= J_m(kr)e^{im\phi}(Ce^{-\nu z} + De^{\nu z}) \exp(-i\omega t), \\ \chi(\mathbf{x}, \omega) &= J_m(kr)e^{im\phi}(Ee^{-\nu z} + Fe^{\nu z}) \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (7.112)$$

где  $J_m(kr)$  — функция Бесселя  $m$ -го порядка,  $m$  — целое число;  $A, B, C, D, E, F$  — константы и

$$\gamma = (k^2 - \omega^2/\alpha^2)^{1/2}, \nu = (k^2 - \omega^2/\beta^2)^{1/2}.$$

[Ср. (7.112) с осесимметричными решениями в дополнении 6.6.] В дальнейшем мы найдем полезным объединить зависимость  $(r, \phi)$  в виде

$$Y_k^m(r, \phi) = J_m(kr)e^{im\phi}, \quad (7.113)$$

это выражение естественно называть базисной *горизонтальной волновой функцией*, так как только оно характеризует горизонтальное распространение потенциалов.

Кажущееся препятствие в нашем дальнейшем использовании метода потенциалов заключается в том, что теперь мы интересуемся вертикально-неоднородными средами, в то время как решения (7.112) требуют однородности. Однако потенциалы могут помочь нам подобрать различные горизонтальные волновые функции, соответствующие различным физическим переменным, так как этот аспект проблемы не меняется при наличии вертикальной неоднородности. Оставаясь в рамках однородной среды, мы можем выразить  $(u_r, u_\phi, u_z)$  через потенциалы с помощью (7.111). Компонента  $P$ -волны,  $\text{grad} \phi$ , находится без труда, а для волн  $SV$  и  $SH$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{SV} &= \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}, \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \phi}, -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right), \\ \mathbf{u}^{SH} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \phi}, -\frac{\partial \chi}{\partial r}, 0 \right). \end{aligned} \quad (7.114)$$

В разд. 2.6 мы нашли связь между смещениями и напряжениями в произвольных ортогональных криволинейных координатах и из (2.50) и (2.45) можем выразить напряжение, действующее на горизонтальных плоскостях, че-

рез компоненты смещения:

$$\begin{aligned}\tau_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\ \tau_{z\phi} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right), \\ \tau_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}.\end{aligned}\quad (7.115)$$

Подставляя потенциалы в виде (7.112) в (7.114) и (7.115), найдем, что смещение  $\mathbf{u}$  и напряжение  $\mathbf{T}$ , действующее на горизонтальную плоскость на глубине  $z$ , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= [l_1(\omega, k, z)\mathbf{T}_k^m(r, \phi) + r_1(\omega, k, z)\mathbf{S}_k^m(r, \phi) + r_2(\omega, k, z)\mathbf{R}_k^m(r, \phi)] \exp(-i\omega t), \\ \mathbf{T} &= [l_2(\omega, k, z)\mathbf{T}_k^m(r, \phi) + r_3(\omega, k, z)\mathbf{S}_k^m(r, \phi) + r_4(\omega, k, z)\mathbf{R}_k^m(r, \phi)] \exp(-i\omega t).\end{aligned}\quad (7.116)$$

Зависимость  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{T}$  от  $r, \phi$  описывается тремя ортогональными векторными функциями, определяемыми как

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_k^m(r, \phi) &= \frac{1}{kr} \frac{\partial Y_k^m}{\partial \phi} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{k} \frac{\partial Y_k^m}{\partial r} \hat{\phi}, \\ \mathbf{S}_k^m(r, \phi) &= \frac{1}{k} \frac{\partial Y_k^m}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{kr} \frac{\partial Y_k^m}{\partial \phi} \hat{\phi}, \\ \mathbf{R}_k^m(r, \phi) &= -Y_k^m(r, \phi) \hat{\mathbf{z}},\end{aligned}\quad (7.117)$$

где  $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\phi}$  и  $\hat{\mathbf{z}}$  — единичные векторы в направлениях  $r, \phi, z$ . Зависимость от  $z$  описывается шестью скалярными функциями  $l_1, l_2, r_1, r_2, r_3, r_4$ . Можно показать, что эти функции [выведенные здесь из зависящих от  $z$  членов в потенциалах (7.112)] удовлетворяют хорошо знакомому нам уравнению  $\partial f / \partial z = \mathbf{A}f$ , рассмотренному в разд. 7.2 сначала с  $\mathbf{f} = (l_1, l_2)^T$  для вывода (7.24), а затем с  $\mathbf{f} = (r_1, r_2, r_3, r_4)^T$  для вывода (7.28).

Результат, полученный для однородных сред, побуждает нас начать с выражения (7.116) даже в случае *вертикально-неоднородных* сред, подставив его в уравнения движения и в соотношение между напряжением и деформацией. Таким образом мы приходим *непосредственно* к системе дифференциальных уравнений первого порядка (7.24) и (7.28) и находим, что зависимость от  $z$  для вектора движения-напряжения в цилиндрических волнах точно такая же, как зависимость от  $z$  в задачах плоских волн.

Мы только что указали точную причину, почему цилиндрические и плоские волны имеют одинаковую зависимость от  $z$ . Результат становится интуитивно понятным, если в векторных функциях (7.117) мы положим, что  $r$  велико. Сначала мы заменяем  $J_m(kr)$  на  $[H_m^{(1)}(kr) + H_m^{(2)}(kr)]/2$ , как мы делали в (6.15), и используем асимптотическое разложение для уходящих волн:

$$H_m^{(1)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp \left[ i \left( kr - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right].$$

ДОПОЛНЕНИЕ 7.9

О горизонтальных волновых функциях

Горизонтальная волновая функция для плоских волн, описанная в гл. 6 и 7, есть  $e^{ikx}$ . Уникальная особенность плоских волн состоит в том, что для всех рассматриваемых нами физических переменных (таких, как смещение, дилатация, деформация и напряжение) этот фазовый множитель является общим. Для недекартых координат основная проблема в том, что разделение переменных в решении может оказаться невозможным. Однако такое разделение осуществимо в цилиндрических и сферических координатах, т.е. в наиболее важных задачах на распространение волн в геофизике.

Следующая проблема заключается в том факте, что горизонтальные волновые функции (например, в цилиндрических координатах) могут меняться от одной физической переменной к другой. Подобный пример мы рассмотрели в дополнении 6.6, где для  $u_z$  и  $\tau_{zz}$  такой волновой функцией является  $J_0$ .

В общем осесимметричном случае существует зависимость как от азимутального числа  $m$ , так и от  $k$ , и в (7.116), (7.117) оказалось удобным воспользоваться тремя различными горизонтальными функциями, каждая из которых является вектором.

Применяя обратное преобразование Фурье, можно синтезировать функции горизонтальной пространственной переменной  $x$  с помощью горизонтальной волновой функции для плоских волн:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{+ikx} dk. \tag{1}$$

В дополнении 6.10 мы выводили подобные формулы (обратное преобразование Ханкеля) для горизонтальной фазовой функции  $J_m$ . Комбинируя (1) с разложением в ряд Фурье

$$\begin{aligned} f(\phi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)e^{im\phi}, \\ f(m) &= \int_0^{2\pi} f(\phi)e^{-im\phi} d\phi, \end{aligned} \tag{2}$$

получим разложение в ряд векторных функций от  $(r, \phi)$ . Это разложение имеет вид

$$\mathbf{f}(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [f_T(k, m)\mathbf{T}_k^m(r, \phi) + f_S(k, m)\mathbf{S}_k^m(r, \phi) + f_R(k, m)\mathbf{R}_k^m(r, \phi)]k dk, \tag{3}$$

где  $\mathbf{T}_k^m, \mathbf{S}_k^m, \mathbf{R}_k^m$  — горизонтальные волновые функции, приведенные в (7.117), а коэффициенты в (3) равны

$$\begin{aligned} f_T(k, m) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{f}(r, \phi) \cdot [\mathbf{T}_k^m(r, \phi)]^* r dr d\phi, \\ f_S(k, m) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{f}(r, \phi) \cdot [\mathbf{S}_k^m(r, \phi)]^* r dr d\phi, \\ f_R(k, m) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{f}(r, \phi) \cdot [\mathbf{R}_k^m(r, \phi)]^* r dr d\phi. \end{aligned} \tag{4}$$

В случае декартовых координат горизонтальные волновые функции обладают ортогональностью, выражаемой как  $\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(k - k')x] dx$ . Эквивалентный результат для наших векторных функций установлен в (7.121).

Пренебрежем также членами, затухающими быстрее, чем  $1/\sqrt{r}$ . Тогда для уходящих волн

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k^m(r, \phi) &\sim -i \sqrt{\frac{1}{2\pi kr}} \exp\left(ikr - i\frac{2m+1}{4}\pi + im\phi\right) \hat{\phi}, \\ \mathbf{S}_k^m(r, \phi) &\sim i \sqrt{\frac{1}{2\pi kr}} \exp\left(ikr - i\frac{2m+1}{4}\pi + im\phi\right) \hat{r}, \\ \mathbf{R}_k^m(r, \phi) &\sim -\sqrt{\frac{1}{2\pi kr}} \exp\left(ikr - i\frac{2m+1}{4}\pi + im\phi\right) \hat{z}, \end{aligned} \quad (7.118)$$

откуда видно, что на больших расстояниях эти волны действительно ведут себя локально как плоские волны Лява и Рэлея с соответствующей поляризацией. Следовательно, их зависимость от  $z$  можно найти путем изучения плоских волн, и мы можем воспользоваться всеми результатами, полученными для векторов движения-напряжения в случае плоских волн, в задаче для цилиндрических волн.

Рассмотрим теперь поверхностные волны, возбуждаемые сосредоточенной силой  $\mathbf{F} \exp(-i\omega t)$  в вертикально-неоднородной среде. Пусть в точке с координатами  $r = 0$ ,  $z = h$  действует соответствующая объемная сила (сила на единицу объема)  $\mathbf{F} \exp(-i\omega t) [\delta(r)/(2\pi r)] \delta(z - h)$ . В дальнейшем мы часто будем пользоваться декартовыми координатами  $(x, y, z)$ , связанными с  $(r, \phi, z)$  соотношениями  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ . Заметим, что  $\delta(r)/(2\pi r) = \delta(x)\delta(y)$  (так как каждая сторона этого равенства при интегрировании по горизонтальной плоскости дает один и тот же результат). Из уравнения (3.4) следует, что приложенная объемная сила эквивалентна скачку напряжения на горизонтальной плоскости  $z = h$ , заданному как

$$\mathbf{T}(h+0) - \mathbf{T}(h-0) = -\mathbf{F} \exp(-i\omega t) \delta(x) \delta(y). \quad (7.119)$$

Наш метод решения будет заключаться в следующем: 1) разложение этого скачка на его  $(k, m)$ -компоненты; 2) решение уравнения  $\partial \mathbf{f} / \partial z = \mathbf{A} \mathbf{f}$  для каждой пары  $(k, m)$ , где  $\mathbf{f}$  — зависящий от  $z$  вектор движения-напряжения с известным скачком на  $z = h$ , и, наконец, 3) построение решения как функции от  $(r, \phi, z)$  путем суперпозиции всех  $(k, m)$ -компонент.

Мы пытаемся найти коэффициенты в разложении

$$\begin{aligned} -\mathbf{F} \exp(-i\omega t) \delta(x) \delta(y) &= \frac{\exp(-i\omega t)}{2\pi} \sum_m \int_0^\infty k [f_T(k, m) \mathbf{T}_k^m \\ &+ f_S(k, m) \mathbf{S}_k^m + f_R(k, m) \mathbf{R}_k^m] dk. \end{aligned} \quad (7.120)$$

Существенно, что  $\mathbf{T}_k^m$ ,  $\mathbf{S}_k^m$  и  $\mathbf{R}_k^m$  ортогональны друг другу, и каждый из этих трех типов горизонтальных волновых функций удовлетворяет условию ортогональности (для различных  $k$  и  $m$ ) в виде

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mathbf{T}_k^m(r, \phi) \cdot [\mathbf{T}_{k'}^{m'}(r, \phi)]^* r dr d\phi = \frac{2\pi \delta_{mm'} \delta(k - k')}{\sqrt{kk'}}, \quad (7.121)$$

где звездочка указывает на комплексно-сопряженную величину. Отсюда следует, что коэффициенты разложения в (7.120) определяются как

$$f_T(k, m) = - \int_0^{2\pi} \int_0^\infty [T_k^m(r, \phi)]^* \cdot F \delta(x) \delta(y) r dr d\phi, \quad (7.122)$$

и аналогичным образом для  $f_S$  и  $f_R$ .

Оценка двойного интеграла в (7.122) упрощается переходом к декартовым координатам. При этом учитывается  $\int_0^{2\pi} \int_0^\infty ( ) r dr d\phi = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty ( ) dx dy$  и важное свойство

$$T_k^m(r, \phi) = k^{-1} \nabla \times (0, 0, Y_k^m). \quad (7.123)$$

Перейдя в (7.132) к декартовым координатам, найдем из (7.122), что

$$\begin{aligned} f_T(k, m) &= - \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{k} \left( F_x \frac{\partial Y_k^{-m}}{\partial y} - F_y \frac{\partial Y_k^{-m}}{\partial x} \right) \delta(x) \delta(y) dx dy \\ &= -F_x e^{-im\pi/2} \left. \frac{\partial}{\partial(ky)} J_m(ky) \right|_{y=0} + F_y \left. \frac{\partial}{\partial(kx)} J_m(kx) \right|_{x=0} \end{aligned} \quad (7.124)$$

Поскольку  $J_m$  имеет нулевую производную в источнике для всех  $m$ , кроме  $m = \pm 1$ , то  $f_T(k, m) = 0$ , если  $m \neq \pm 1$ . Тогда  $(\partial/\partial\zeta)J_{\pm 1}(\zeta)/(1/2)$  при  $\zeta = 0$ , так что

$$\begin{aligned} f_T(k, 1) &= \frac{1}{2}(F_y + iF_x), \\ f_T(k, -1) &= \frac{1}{2}(-F_y + iF_x). \end{aligned} \quad (7.125)$$

Применяя подобный способ к  $f_S(k, m)$ , используя

$$S_k^m(r, \phi) = k^{-1} \nabla Y_k^m(r, \phi) \quad (7.126)$$

и переходя к декартовым координатам, находим, что  $f_S(k, m) = 0$ , если  $m \neq \pm 1$ , и

$$\begin{aligned} f_S(k, 1) &= \frac{1}{2}(-F_x + iF_y), \\ f_S(k, -1) &= \frac{1}{2}(F_x + iF_y). \end{aligned} \quad (7.127)$$

Для  $f_R(k, m)$  непосредственно в цилиндрических координатах получаем

$$f_R(k, m) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty F_z \frac{\delta(r)}{2\pi r} e^{-im\phi} J_m(kr) r dr d\phi,$$

так что  $f_R(k, m) = 0$ , если  $m \neq 0$ , и

$$f_R(k, 0) = J_0(0)F_z = F_z. \quad (7.128)$$

Все коэффициенты разложения для нашего скачка напряжения теперь найдены, причем вносят вклад только те члены, для которых  $m = 0$  и  $m = \pm 1$ .

Наш следующий шаг — найти вектор движения-напряжения  $(l_1, l_2, r_1, r_2, r_3, r_4)$ , который имеет заданные скачки  $f_T, f_S, f_F$  в компонентах напряжения  $l_2, r_3, r_4$  (соответственно). Конечно, наше решение должно удовлетворять уравнениям

движения и условию на свободной поверхности

$$l_2 = r_3 = r_4 = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (7.129)$$

Оно должно также удовлетворять условию излучения, требующему, чтобы  $l_1$ ,  $r_1$  и  $r_2$  содержали только волны, бегущие вниз, когда  $z \rightarrow \infty$ , т.е. если волновое число достаточно велико, так что  $\gamma = (k^2 - \omega^2/\alpha^2)^{1/2}$  и  $\nu = (k^2 - \omega^2/\beta^2)^{1/2}$  становятся действительными и положительными, то все величины

$$l_1, r_1, r_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (7.130)$$

Когда задача на собственные значения поверхностных волн ставилась в разд. 7.2, мы нашли, что непрерывное решение уравнений движения не удовлетворяет однородным граничным условиям (7.129) и (7.130), если только для заданного  $\omega$   $k$  не принимает особых дискретных значений. Следовательно, интересно обнаружить, что, когда в задачу введен скачок напряжения на глубине источника, становится возможным найти решение для *каждого* значения  $k$ . Мы дадим это решение ниже, а здесь заметим, что, как только задача об отыскании вектора движения-напряжения как функции  $(k, m, z, \omega)$  решена, можно записать стационарное смещение, вызванное точечной силой  $\mathbf{F} \exp(-i\omega t)$ , в виде

$$\mathbf{u}(r, \phi, z, t) = \exp(-i\omega t) \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k [l_1(k, m, z, \omega) \mathbf{T}_k^m(r, \phi) + r_1(k, m, z, \omega) \mathbf{S}_k^m(r, \phi) + r_2(k, m, z, \omega) \mathbf{R}_k^m(r, \phi)] dk. \quad (7.131)$$

Найдем сначала решение  $l_1(k, m, z, \omega)$ , напомним, что

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ -\omega^2 \rho + k^2 \mu & 0 \end{pmatrix} \mathbf{l}, \quad (\text{снова 7.24})$$

с  $l_2 = 0$  на  $z = 0$ . Когда  $z \rightarrow \infty$ , то

$$\begin{aligned} &\text{либо } \mathbf{l} \text{ становится нисходящей волной (однородная объемная волна),} \\ &\text{либо } \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{0} \text{ (неоднородная волна)} \end{aligned} \quad (7.132)$$

в зависимости от величины  $k/\omega$  (горизонтальной медленности). Окончательно имеем

$$\mathbf{l} \Big|_{z=h^+} - \mathbf{l} \Big|_{z=h^-} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_T(k, m) \end{pmatrix}. \quad (7.133)$$

Мы должны построить разрывное решение  $\mathbf{l}'$ , которое удовлетворяет (7.133), а затем — непрерывное решение  $\mathbf{l}''$  такое, чтобы линейная комбинация

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}' + \frac{\mathbf{l}''}{\Delta(k)} \quad (7.134)$$

удовлетворяла всем требуемым условиям. Как  $I'$ , так и  $I''$  являются решениями уравнения движения при граничных условиях

$$\begin{aligned} l'_1 = 0 \quad \text{и} \quad l'_2 = 0 \quad \text{для всех} \quad z > h, \\ l'_1 = 0 \quad \text{и} \quad l'_2 = -f_T \quad \text{при} \quad z = h - 0, \end{aligned} \quad (7.135)$$

$$\begin{aligned} l''_1 \text{ описывает нисходящую волну, или } l''_1 \rightarrow 0, \text{ при } z \rightarrow \infty \\ l''_2 = -\Delta(k)l'_2 \text{ при } z = 0. \end{aligned} \quad (7.136)$$

Легко показать, что  $I$  из (7.134) с  $I'$  и  $I''$ , определенными выше, удовлетворяет всем требуемым условиям в (7.132) и (7.133). Условие излучения для  $l''_1$  в (7.136), когда  $z \rightarrow \infty$ , существует в двух видах в зависимости от величины горизонтальной медленности  $k/\omega$ . Если эта величина достаточно мала, тогда  $l''_1$  на большой глубине соответствует однородной нисходящей объемной волне. Но если  $(k/\omega) > \lim_{z \rightarrow \infty} [1/\beta(z)]$ , то  $l''_1$  — это неоднородная волна, стремящаяся к 0 при  $z \rightarrow \infty$ .

Функция  $\Delta(k)$  определена таким образом, что поверхностное сдвиговое напряжение в разрывном решении  $I'$  после умножения на  $-\Delta(k)$  в точности равно этому же напряжению в непрерывном решении. Но если оказывается, что  $k$  равно собственному значению для поверхностной волны, то поверхностное напряжение в непрерывном решении  $I''$  становится равным нулю. Из этого следует, что  $\Delta(k)$  должно равняться нулю, когда  $k$  — собственное значение и  $I''$  является собственной функцией поверхностной волны. В этом случае невозможна никакая нисходящая волна (при  $z \rightarrow \infty$ ), так как  $I''$  удовлетворяет волновому уравнению с однородными граничными условиями и при отсутствии источника. Поэтому собственные значения  $k$  должны быть достаточно большими, чтобы  $l''_1 \rightarrow 0$ , когда  $z \rightarrow \infty$ , предотвращая потерю уходящей вниз энергии, которая переносилась бы объемной волной.

На рис. 7.9 получение  $I'$  и  $I''$  описано в большой детальности. Построив  $I$  с помощью (7.134), мы можем теперь воспользоваться (7.131), чтобы синтезировать смещение

$$u(r, \phi, z, t) = \exp(-i\omega t) \frac{1}{2\pi} \sum_m \int_0^\infty k \left[ l'_1 + \frac{l''_1}{\Delta(k)} \right] T_k^m(r, \phi) dk. \quad (7.137)$$

Наша следующая цель — установить вклад поверхностных волн в это поле смещений. Напомним из (7.124), что для источника в виде сосредоточенной силы эти вклады приходят от членов с  $m = \pm 1$ .

Подынтегральное выражение в (7.137) имеет полюсы при  $\Delta = 0$ . Мы выбрали для  $\Delta$  функцию, которая становится равной нулю, когда  $k$  — собственное значение. Поэтому вклад от полюсов дает нормальные моды, или в данном случае волны Лява. Однако (7.137) содержит также вклады всех возможных объемных волн и просачивающихся мод, и при оценке интеграла мы воспользуемся некоторыми из операций, применявшихся при рассмотрении (6.11) — (6.15) и (6.30).

Таким образом, мы заменяем  $J_m(kr)$  на  $[H_m^{(1)}(kr) + H_m^{(2)}(kr)]/2$ , а затем преобразуем интеграл от  $H_m^{(2)}$  по положительному  $k$  в интеграл от  $H_m^{(1)}$  по отрицательному  $k$ , так что интеграл (7.137) становится интегралом по всей действительной



ся вне замкнутого контура, расположенного в верхней полуплоскости, в то время как полюсы на положительной действительной оси  $k$  переходят вверх в первый квадрант и их вычеты захватываются. Эти пути интегрирования, соответствующие разрезы и объемные волны мы рассмотрим в разд. 7.6 и 9.3.)

Оценку  $(\partial\Delta/\partial k)_{k=k_n}$  легко осуществить с помощью вариационных принципов из разд. 7.3. Из (7.68) для непрерывного решения  $I''$  уравнений движения найдем, что

$$\frac{1}{2}[l_1'' l_2'']_0^\infty = -\omega^2 I_1 + k^2 I_2 + I_3.$$

Тогда из граничных условий (7.136)

$$\frac{1}{2}\Delta(k)(l_2' l_1'')_{z=0} = -\omega^2 I_1 + k^2 I_2 + I_3.$$

Если  $k$  близко к собственному значению, то  $l''$  близко к собственной функции. Вследствие стационарности выражения  $(-\omega^2 I_1 + k^2 I_2 + I_3)$  относительно слабых отклонений  $l''$  от истинной собственной функции [см. (7.67)] изменение  $\Delta$ , вызванное возмущением  $k$ , можно записать как

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial k}\right)_{k=k_n} (l_2' l_1'')_{z=0} = 4k_n I_2 = 4k_n c U I_1, \quad (7.139)$$

где  $c$  и  $U$  — фазовая и групповая скорости, соответствующие  $\omega$  и  $k_n$  [см. (7.70)]. В приведенном выше уравнении мы можем исключить  $l_2'$  на  $z=0$ , так как легко показать из уравнений движения, что  $(d/dz)(l_1' l_2'' - l_1'' l_2') = 0$ . Оценив константу  $l_1' l_2'' - l_1'' l_2'$  при  $z=0$  и  $z=h-0$  и используя (7.135) и (7.136), найдем

$$l_1' l_2'' \Big|_{z=0} = -f_T(k_n, m) l_1'' \Big|_{z=h}. \quad (7.140)$$

Объединяя (7.138) — (7.140), найдем теперь

$$\mathbf{u}^L = -i \exp(-i\omega t) \sum_m \sum_n \frac{f_T(k_n, m) l_1''(h) l_1''(z)}{4c U I_1} \mathbf{T}_{k_n}^{m(1)}. \quad (7.141)$$

Сумму по  $m$  легко вычислить, так как  $f_T = 0$  при  $m \neq \pm 1$  [см. (7.125)]. Поскольку  $l_1''$  в (7.141) — просто некая мода волны Лява, мы опустим штрихи и будем использовать  $l_1$ , т.е. вернемся к нашим первоначальным обозначениям для отдельных мод. Заменим также  $\mathbf{T}_k^{m(1)}$  асимптотическим выражением, приведенным в (7.118). Тогда наш окончательный результат, описывающий возбуждение мод волны Лява сосредоточенной силой  $\mathbf{F} \exp(-i\omega t)$ , приложенной в точке  $r=0$ ,  $z=h$ , будет

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^L = & \exp(-i\omega t) \sum_n \frac{(F_y \cos \phi - F_x \sin \phi) l_1(k_n, h, \omega)}{8c U I_1} \\ & \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} [l_1(k_n, z, \omega) \hat{\phi}] \exp\left[i\left(k_n r + \frac{\pi}{4}\right)\right], \end{aligned} \quad (7.142)$$

где  $I_1 = (1/2) \int_0^\infty \rho [l_1(k_n, z, \omega)]^2 dz$  и  $l_1(k_n, z, \omega)$  — непрерывная собственная функция.

Для волн Рэлея, исходя из аналогичных рассуждений, окончательный результат будет иметь вид

$$u^R = \exp(-i\omega t) \sum_n \frac{F_z r_2(k_n, h, \omega) + i(F_x \cos \phi + F_y \sin \phi) r_1(k_n, h, \omega)}{8cUI_1} \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} [r_1(k_n, z, \omega) e^{-i\pi/4 \hat{z}} + r_2(k_n, z, \omega) e^{i\pi/4 \hat{z}}] \exp(ik_n r), \quad (7.143)$$

$$\text{где } I_1 = (1/2) \int_0^\infty \rho(r_1^2 + r_2^2) dz.$$

Этот компактный результат, т.е. вычеты в полюсах, выраженные через  $1/(cUI_1)$  в уравнениях (7.142) и (7.143), получен для волн Лява Кейлис-Бороком и Яновской [192]. Соответствующий результат для волн Рэлея был указан Харкрайдером и Андерсоном [149] и проверен ими численно. Сайто [280] первым получил то же выражение для возбуждения собственных колебаний Земли точечным источником (этот вопрос мы рассмотрим в следующей главе).

Сравнение с решениями для линейных источников, данными в (7.106), (7.108) и (7.109), выявляет удивительное сходство между двумерными и трехмерными решениями. Решение для точечного источника опережает по фазе решение для линейного источника на  $\pi/4$  и содержит более высокие частоты благодаря дополнительному множителю, пропорциональному  $\omega^{1/2}$ . Это легко понять, так как последнее можно рассматривать как суперпозицию или пространственное сглаживание первого. Основное свойство решений, а именно разделение на множители, зависящие от источника, среды и приемника, сохраняется в обоих случаях (см. также дополнение 6.1).

Чтобы связать эти результаты для стационарных смещений с нашими обозначениями для функции Грина, заметим, что можно опустить множитель  $\exp(-i\omega t)$  в (7.142) и (7.143) и затем рассматривать левую часть как смещение в частотной области, вызванное сосредоточенной силой  $\mathbf{F}(\omega)$ , действующей в  $\xi = (0, 0, h)$ . Отсюда

$$u_i(\mathbf{x}, \omega) = F_p(\omega) G_{ip}(\mathbf{x}; \xi; \omega). \quad (7.144)$$

Под  $\mathbf{G}(\mathbf{x}; \xi; \omega)$  мы подразумеваем трансформанту Фурье зависящей от  $t$  функции  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)$ , где  $\tau = 0$ . Свертки, эквивалентные (7.144), часто появлялись в гл. 3 и 4. Сравнение с (7.142) и (7.143) показывает теперь, что возбуждение поверхностных волн в функции Грина описывается членами, относящимися к волнам Рэлея и волнам Лява. В частности,

$$G^L = \sum_n \frac{l_1(z) l_1(h)}{8cUI_1} \begin{pmatrix} \sin^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi & 0 \\ -\sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left( \frac{2}{\pi k_n r} \right)^{1/2} \exp \left[ i \left( k_n r + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$(7.145)$$

и

$$\mathbf{G}^R = \sum_n \frac{1}{8cUI_1} \begin{pmatrix} r_1(z)r_1(h) \cos^2 \phi & r_1(z)r_1(h) \cos \phi \sin \phi & -ir_1(z)r_2(h) \cos \phi \\ r_1(z)r_1(h) \sin \phi \cos \phi & r_1(z)r_1(h) \sin^2 \phi & -ir_1(z)r_2(h) \sin \phi \\ ir_2(z)r_1(h) \cos \phi & ir_2(z)r_1(h) \sin \phi & r_2(z)r_2(h) \end{pmatrix} \times \left( \frac{2}{\pi k_n r} \right)^{1/2} \exp \left[ i \left( k_n r + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (7.146)$$

## 7.5. ВОЛНЫ ЛЯВА И РЭЛЕЯ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СЕЙСМИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Если поверхностные волны возбуждаются точечным источником, описанным только своим тензором момента  $\mathbf{M}$ , тогда один из путей изучения такого возбуждения состоит в использовании эквивалентной объемной силы. Именно так мы поступили в предыдущем разделе. Это подход Сайто [280], и, пользуясь им, мы нашли, что в  $(k, m)$ -разложении скачков напряжения ненулевые члены имеют  $m = \pm 2$ . Однако мы уже получили выражения для части функции Грина, описывающей волны Рэя и Лява, так что более быстрый путь — это просто воспользоваться формулой

$$u_i(\mathbf{x}, \omega) = M_{pq}(\omega) \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{ip}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}; \omega), \quad (\text{снова 3.22})$$

При дифференцировании  $\mathbf{G}^L$  и  $\mathbf{G}^R$  мы удержим только самые большие члены, а именно те, которые содержат производные вертикальных собственных функций по глубине или горизонтальные производные от  $\exp(ik_n r)$ . Используя  $\partial r / \partial \xi_1 = -\cos \phi$  и  $\partial r / \partial \xi_2 = -\sin \phi$ , найдем, что

$$\begin{aligned} u_x^L(\mathbf{x}, \omega) = & - \sum_n \sin \phi \frac{l_1(z)}{8cUI_1} \left( \frac{2}{\pi k_n r} \right)^{1/2} \exp \left[ i \left( k_n r + \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ & \times \left\{ ik_n l_1(h) [M_{xx} \sin \phi \cos \phi - M_{yx} \cos^2 \phi + M_{xy} \sin^2 \phi \right. \\ & \left. - M_{yy} \sin \phi \cos \phi] - \frac{dl_1}{dz} \Big|_h [M_{xz} \sin \phi - M_{yz} \cos \phi] \right\}. \quad (7.147) \end{aligned}$$

Вывод (7.147) подобен нашему выводу (4.29) с промежуточным (4.28), хотя теперь мы удерживаем только смещения дальней зоны. Подобное выражение можно найти для  $u_y^L$ ; легко также показать что  $u_z^L = 0$ , и в векторном виде формула запишется как

$$\mathbf{u}^L(\mathbf{x}, \omega) = \sum_n \frac{l_1(z)}{8cUI_1} \left( \frac{2}{\pi k_n r} \right)^{1/2} \exp \left[ i \left( k_n r + \frac{\pi}{4} \right) \right] \{ \} \hat{\phi}, \quad (7.148)$$

где выражение в фигурных скобках то же самое, что и в (7.147).

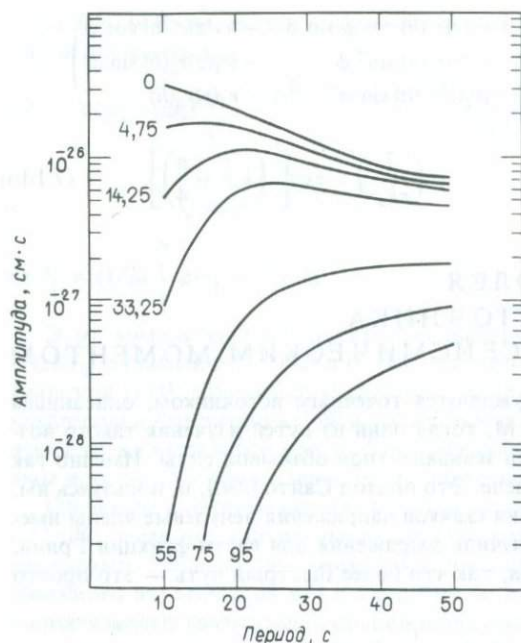


Рис. 7.10. Амплитудные спектры волн Рэлея (вертикальное смещение) при  $\Delta = 2000$  км для подземного взрыва с единичным сейсмическим моментом (диагональный элемент). Числа у кривых — глубина источника (в км). Из работы [323] (с разрешения Американского геофизического союза).

Для волн Рэлея из последней строки компонент в (7.146) найдем, что

$$\begin{aligned}
 u_z^R = \sum_n \frac{r_2(z)}{8cUI_1} \left( \frac{2}{\pi k_n r} \right)^{1/2} \exp \left[ i \left( k_n r + \frac{\pi}{4} \right) \right] \times \left\{ k_n r_1(h) [M_{xx} \cos^2 \phi \right. \\
 + (M_{xy} + M_{yx}) \sin \phi \cos \phi + M_{yy} \sin^2 \phi] + i \frac{dr_1}{dz} \Big|_h [M_{xz} \cos \phi \\
 + M_{yz} \sin \phi] - ik_n r_2(h) [M_{zx} \cos \phi + M_{zy} \sin \phi] + \frac{dr_2}{dz} \Big|_h M_{zz} \left. \right\}. \quad (7.149)
 \end{aligned}$$

Для радиальной (т.е. горизонтальной) компоненты волны Рэлея получим

$$u_r^R = \sum_n \frac{r_1(z)}{8cUI_1} \left( \frac{2}{\pi k_n r} \right)^{1/2} \exp \left[ i \left( k_n r - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left\{ \right\}, \quad (7.150)$$

где выражение в фигурных скобках то же самое, что и в (7.149).

Отметим, что эти формулы, определяющие возбуждение поверхностных волн с помощью тензора сейсмического момента, пригодны не только для малых дислокационных источников, но и для малых объемных источников. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим объемный источник с плотностью момента  $m_{pq} = M_{pq}/\partial V$ . Это плотность момента на единицу объема, описанная в разд. 3.4, и мы начнем с уравнения, эквивалентного (3.30), для  $x_1$ -компоненты смеще-

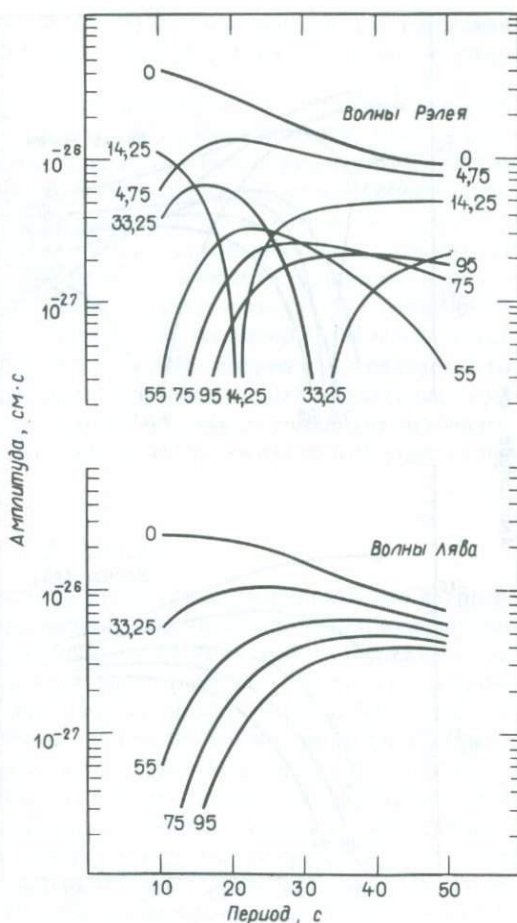


Рис. 7.11. Амплитудные спектры волн Рэлея (вертикальная компонента) и волн Лява при  $\Delta = 2000$  км. Азимут точки наблюдения  $\phi = 30^\circ$  (измеряется относительно линии простираения разрыва). Источник — сдвиг по простираанию вертикального разрыва с сейсмическим моментом в виде ступенчатой функции единичной амплитуды. Числа у кривых — глубина источника (в км). Из работы [323] (с разрешения Американского геофизического союза).

ния:

$$u_i(\mathbf{x}, \omega) = \int_V m_{pq}(\boldsymbol{\eta}, \omega) \frac{\partial}{\partial \eta_q} G_{ip}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}; \omega) dV(\boldsymbol{\eta}).$$

Если плотность момента сосредоточена в точке  $\xi$ , то

$$m_{pq}(\boldsymbol{\eta}, \omega) = M_{pq}(\omega) \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}),$$

где  $\boldsymbol{\eta}$  меняется внутри  $V$ , и написанное выше выражение действительно снова приводит к  $u_i = M_{pq} G_{ip,q}$ .

В качестве примера возьмем сначала случай взрывного источника. Если рассматривать его как точечный источник, то тензор момента можно записать в виде диагональной матрицы с равными элементами  $M_{xx} = M_{yy} = M_{zz} = M_0$ . Очевидно, что в этом случае волны Лява не возбуждаются. Волны Рэлея азимуталь-

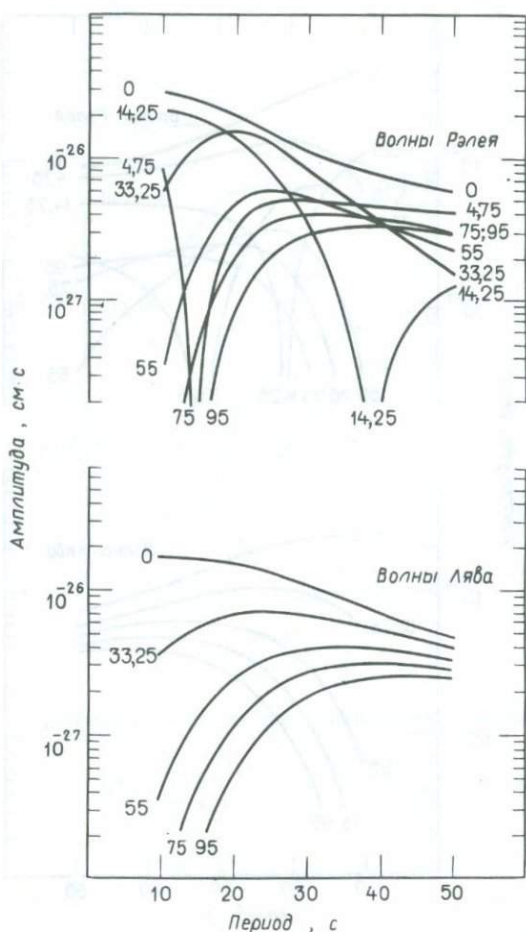


Рис. 7.12. Амплитудные спектры волн Рэлея (вертикальная компонента) и волн Лява при  $\Delta = 2000$  км и  $\phi = 30^\circ$ . Источник — сброс по падению с углом падения  $45^\circ$  и сейсмическим моментом — единичной ступенчатой функцией. Числа у кривых — глубина источника (в км). Из работы [323] (с разрешения Американского геофизического союза).

но-изотропны, и вертикальное смещение (7.149) запишется как

$$u_z(\mathbf{x}, \omega) = \sum_n \frac{r_2(z)}{8cUI_1} \left( \frac{2}{\pi k_{nr}} \right)^{1/2} \left( \frac{-1}{i\omega} \right) \exp \left[ i \left( k_{nr} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \left\{ k_{nr} r_1(h) + \frac{dr_2}{dz} \Big|_h \right\}, \quad (7.151)$$

где мы полагаем, что  $M_0(t)$  — ступенька с амплитудой 1 дин · см, так что  $M_0(\omega) = -1/i\omega$ .

Пользуясь фазовой и групповой скоростями и собственными функциями, полученными ранее для континентальной модели Земли Гутенберга (см. дополнение 7.5), легко рассчитать амплитуду основной моды волн Рэлея от взрывного источника, расположенного на различных глубинах. В (7.151) дан только первый член (т.е. основная мода  $n = 0$ ) с размерностью см · с. На

рис. 7.10 приведены результаты расчетов для эпицентрального расстояния 2000 км; очевидно, что возбуждение волн Рэлея взрывным источником плавно ослабевает с глубиной.

С другой стороны, такой источник, как землетрясение, с тензором момента, обладающим симметрией двойной пары (3.19), возбуждает спектр волн Рэлея со сложной зависимостью от механизма источника и от глубины очага. Случай чистого сдвига по простиранию вертикального разрыва и случай сброса по падению плоскости разрыва, имеющей угол падения  $45^\circ$ , показаны на рис. 7.11 и 7.12 соответственно. В обоих случаях приемник расположен на эпицентрального расстоянии 2000 км, в азимуте  $30^\circ$  по отношению к линии простирания разрыва; как для волн Лява, так и для волн Рэлея предполагается ступенчатое изменение момента двойной пары сил с амплитудой  $1 \text{ дин} \cdot \text{см}$ . Компоненты  $\mathbf{M}$  в декартовых координатах, присутствующие в (7.148) — (7.149), получены в дополнении 4.4. Хотя спектр волн Лява плавно ослабевает с глубиной в обоих случаях, для спектра волн Рэлея наблюдается сильная зависимость как от механизма источника, так и глубины очага. Отсюда следует весьма эффективный способ определения этих параметров источника.

## 7.6. ПРОСАЧИВАЮЩИЕСЯ МОДЫ

До сих пор в этой главе мы рассматривали поверхностные волны или нормальные моды, возникающие как вклады вычетов в полюсах плоскости волновых чисел. Решение для нормальной моды обращается в нуль на частотах, равных граничной и превышающих ее, потому что полюсы переходят с «верхнего» риманова листа (где мнимая часть вертикального волнового числа выбрана положительной, чтобы удовлетворить условию излучения на бесконечности) на нижние листы. Полное решение требует оценки дополнительных интегралов по берегам разрезов, подобных показанным на рис. 6.12 для задачи о полупространстве. В этом разделе мы покажем, что интегралы по берегам разреза можно трансформировать в сумму вычетов от полюсов на нижних листах; такие вычеты в отличие от нормальных мод экспоненциально затухают со временем из-за просачивания в нижнее полупространство. Поэтому их называют *просачивающимися* модами.

Мы рассмотрим просачивающиеся моды для простейшей слоистой среды: для жидкого слоя, лежащего на жидком полупространстве. Возбуждение и распространение волн в такой среде подробно изучал Пекерис [252], чтобы найти объяснение наблюдениям звука в океане, проведенным Юингом и Ворцелем [114]. Мы будем следовать Розенбауму [278] при выводе полного представления всего волнового поля в виде суммы нормальных и просачивающихся мод. Этот результат используется для получения приближенных формул, пригодных на больших временах.

Рассмотрим жидкий слой мощностью  $H$  с плотностью  $\rho_1$  и скоростью акустических волн  $\alpha_1$ , лежащий на жидком полупространстве с плотностью  $\rho_2$  и скоростью  $\alpha_2$  (рис. 7.13). Будем считать, что сферический источник давления расположен внутри слоя на глубине  $h$ . Воспользуемся теми же координатами и теми же выражениями для источника, что и в задаче для двух жидких контактирующих полупространств, рассмотренной в разд. 6.2. Сначала представим пря-

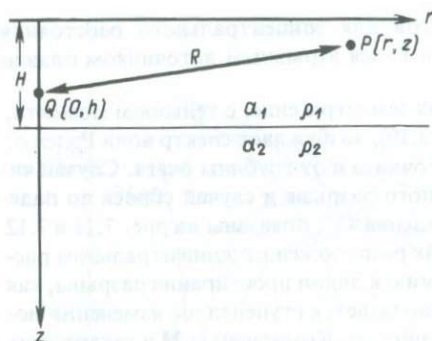


Рис. 7.13. Параметры точечного источника, который расположен в точке  $Q$  в жидком слое, лежащем на жидком полупространстве.

мую волну сжатия в виде (6.11):

$$P_{\text{пад}} = \frac{A}{R} \exp \left[ i\omega \left( \frac{R}{\alpha_1} - t \right) \right], \quad (7.152)$$

где  $R$  — расстояние между точкой излучения  $Q$  и точкой приема  $P$ . Возьмем пробную форму решения, подобную (6.12) и (6.13), где дополнительные члены будут описывать волны, распространяющиеся в двух направлениях в слое, и определим неизвестный множитель в подынтегральных выражениях так, чтобы удовлетворить граничным условиям. Граничные условия состоят в следующем: 1) давление равно нулю при  $z = 0$ ; 2) давление и вертикальное смещение непрерывны на границе  $z = H$ ; 3) никакие волны не приходят из  $z = +\infty$ . Тогда (для  $0 \leq z \leq h$ ) полное поле давлений в слое можно записать как

$$2 \exp(-i\omega t) \int_0^\infty J_0(kr) k \frac{\text{sh } \gamma_1 z}{\gamma_1} F_1(\omega, k) dk, \quad (7.153)$$

где

$$F_1(\omega, k) = A \frac{\rho_2 \gamma_1 \text{ch}\{\gamma_1(H-h)\} + \rho_1 \gamma_2 \text{sh}\{\gamma_1(H-h)\}}{\rho_2 \gamma_1 \text{ch}(\gamma_1 H) + \rho_1 \gamma_2 \text{sh}(\gamma_1 H)}. \quad (7.154)$$

Здесь  $\gamma_i = (k^2 - \omega^2 \alpha_i^2)^{1/2}$ , и знаки  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  выбраны так, чтобы  $\text{Re } \gamma_1 \geq 0$ ,  $\text{Re } \gamma_2 \geq 0$ . Удобное для запоминания правило: чтобы удовлетворялись условия излучения, действительная и мнимая части  $i\gamma_2$  должны быть положительными или равными нулю.

Чтобы вывести модальное решение для частот ниже граничной, необходимо рассмотреть нестационарный источник с непрерывным спектром. Рассмотрим прямую волну давления в виде

$$P_{\text{пад}}(t) = \frac{A \exp \left[ \sigma \left( \frac{R}{\alpha_1} - t \right) \right]}{R}, \quad t > \frac{R}{\alpha_1}, \\ = 0, \quad t < \frac{R}{\alpha_1}. \quad (7.155)$$

Выбранный источник можно описать с помощью обратного преобразования Фурье

$$P^{\text{пад}}(t) = \frac{A}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-i\omega\left(t - \frac{R}{\alpha_1}\right)\right]}{\sigma - i\omega} d\omega, \quad (7.156)$$

поэтому соответствующее полное поле давлений можно получить, проинтегрировав (7.153) по  $\omega$ :

$$P^{\text{полн}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{\sigma - i\omega} d\omega \int_0^{\infty} J_0(kr) k \frac{\text{sh } \gamma_1 z}{\gamma_1} F_1(\omega, k) dk. \quad (7.157)$$

Поскольку  $P^{\text{полн}}(t)$  — действительная величина, ее преобразования Фурье по  $\pm \omega$  — комплексно-сопряженные величины, и мы можем переписать (7.157) в виде

$$P^{\text{полн}}(t) = \frac{2}{\pi} \text{Re} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{\sigma - i\omega} d\omega \int_0^{\infty} J_0(kr) k \frac{\text{sh } \gamma_1 z}{\gamma_1} F_1(\omega, k) dk. \quad (7.158)$$

Теперь изменим порядок интегрирования и оценим сначала интеграл по  $\omega$ , деформируя путь интегрирования в плоскости комплексного  $\omega$ . Поскольку подынтегральное выражение есть четная функция  $\gamma_1$ , то  $\omega = \pm \alpha_1 k$  — это не точки разветвления, и единственные разрезы, имеющиеся в данной задаче, связаны с  $\gamma_2$ . Разрезы от  $\omega = \pm \alpha_2 k$  проведены вдоль  $\text{Re } \gamma_2 = 0$ , что соответствует той части действительной оси  $\omega$ , на которой  $|\text{Re } \omega| > \alpha_2 k$ , как показано на рис. 7.14.

Вследствие принятого условия излучения наш исходный путь интегрирования лежит на верхнем листе, для которого  $\text{Re } \gamma_2 > 0$ . Покажем далее, что на верхнем листе существует только конечное число действительных корней уравнения

$$f_1(\omega, k) \equiv \rho_2 \gamma_1 \text{ch } \gamma_1 H + \rho_1 \gamma_2 \text{sh } \gamma_1 H = 0 \quad (7.159)$$

Положив

$$i\gamma_1 H = p_1 + iq_1, \quad i\gamma_2 H = p_2 + iq_2,$$

(где  $p_1, p_2, q_1, q_2$  — действительные величины), подставив их в выражения для  $f_1(\omega, k)$  и взяв его мнимую часть, найдем, что

$$\frac{\text{sh } q_1 \text{ch } q_1}{\cos^2 p_1 \text{ch}^2 q_1 + \sin^2 p_1 \text{sh}^2 q_1} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2}{p_2^2 + q_2^2} = 0 \quad (7.160)$$

если выполняется (7.159). Поскольку  $\gamma_1^2 - \gamma_2^2 = \omega^2/\alpha_2^2 - \omega^2/\alpha_1^2$  действительно,  $p_1 q_1 = p_2 q_2$ . Следовательно,

$$\frac{p_1 p_2 + q_1 q_2}{p_2^2 + q_2^2} = \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{p_1^2 + q_1^2}{p_2^2 + q_2^2}.$$

Подставляя это в (7.160), получим, что если  $q_2 > 0$ , то первый и второй члены (7.160) имеют один и тот же знак. Таким образом, корень  $f_1(\omega, k)$  не может существовать на верхнем листе, где  $q_2 = \text{Re } \gamma_2 H > 0$ , кроме случая  $q_1 = \text{Re } \gamma_1 H = 0$ . Когда  $\text{Re } \gamma_1 = 0$ , корни действительны и соответствующая

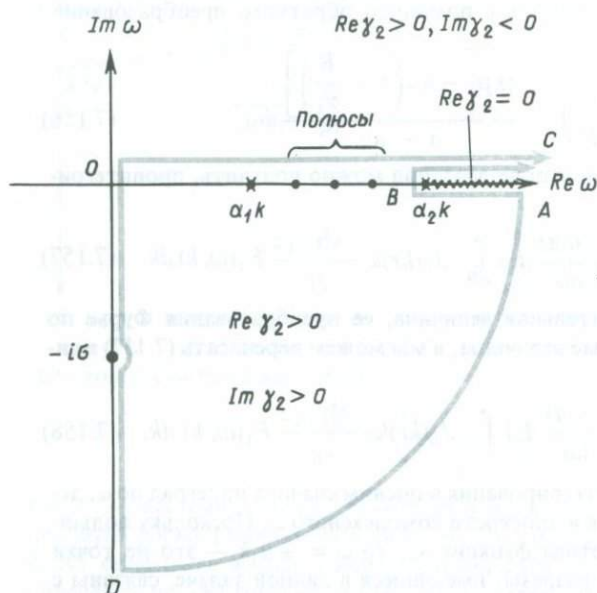


Рис. 7.14. Полюсы (точки) и точки разветвления (крестики) в плоскости  $\omega$ .

фазовая скорость определяется формулой

$$\operatorname{tg} \omega H \sqrt{\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{c^2}} = - \frac{\rho_2 \sqrt{\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{c^2}}}{\rho_1 \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\alpha_2^2}}}. \quad (7.161)$$

Это уравнение сходно с дисперсионным уравнением (7.6) для волн Лява, но имеет одно важное отличие. Из-за отрицательного знака правой части тангенсоида нулевого порядка не дает корня (см. рис. 7.2). Таким образом, все моды в слоистой жидкости имеют конечные граничные частоты, и в качестве основной моды мы берем  $n = 1$  (а не  $n = 0$ ). Граничная частота  $\omega_{cn}$  для  $n$ -й моды находится подстановкой  $c = \alpha_2$  в (7.161):

$$\omega_{cn} = \frac{\pi(n - \frac{1}{2})}{H \sqrt{\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_2^2}}}. \quad (7.162)$$

Соответствующее граничное волновое число равно

$$k_{cn} = \frac{\omega_{cn}}{\alpha_2}. \quad (7.163)$$

Как показано на рис. 7.14, для данного  $k$  существует только конечное число корней  $k_{cn} \leq k$ , которые появляются на верхнем листе. В дополнение к этим полюсам на действительной оси существует еще один полюс, связанный с временной

функцией источника и расположенный в точке  $-i\sigma$  на отрицательной мнимой оси.

Теперь преобразуем начальный путь интегрирования  $OC$  в  $ODABC$  (см. рис. 7.14) таким образом, что

$$\int_{OC} = \int_{OD} + \int_{DA} + \int_{ABC} - 2\pi i \Sigma \quad (\text{вычеты в полюсах}).$$

Для больших  $t$  из-за наличия множителя  $\exp(-i\omega t)$  подынтегральное выражение в (7.158) равно нулю на пути  $DA$ , когда радиус дуги стремится к бесконечности. С другой стороны, вдоль пути  $OD$  подынтегральное выражение чисто мнимое, за исключением малой полуокружности вокруг  $-i\sigma$ , и единственный вклад здесь равен (со знаком минус) половине вычета в  $-i\sigma$ , умноженной на  $2\pi i$ . Представим его как

$$P_L = \int_{OD} = 2e^{-\sigma t} \int_0^\infty J_0(kr)k \frac{\text{sh } \gamma_1(\sigma)z}{\gamma_1(\sigma)} F_1(-i\sigma, k) dk, \quad (7.164)$$

где  $\gamma_1(\sigma) = (\sigma^2/\alpha_1^2 + k^2)^{1/2}$ . Полученное выражение описывает неколебательное движение с временной зависимостью, идентичной функции источника. Хотя оно не согласуется с законом причинности для акустики (движение начинается раньше, чем приходит прямая волна), это не влияет на результат при больших  $t$ , в котором мы прежде всего заинтересованы.

Решение для нормальных мод есть сумма вычетов в полюсах на действительной оси, определяемая как

$$P_N = -2\pi i \Sigma \text{Re} (\text{вычеты}) \\ = 4 \text{Re} \sum_n \int_{k_{cn}}^\infty J_0(kr)k \frac{\text{sh}(\gamma_1 z) \exp(-i\omega_n t)}{\omega_n + i\sigma} F_2(\omega_n, k) dk, \quad (7.165)$$

где

$$F_2(\omega_n, k) = \frac{A\rho_2 \text{sh}(\gamma_1 h)}{\text{sh}(\gamma_1 H) \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} f_1(\omega, k) \right]_{\omega=\omega_n}}. \quad (7.166)$$

Здесь  $\omega_n$  — корни уравнения  $f_1(\omega_n, k) = 0$  и  $k_{cn}$  — граничные волновые числа, определенные в (7.163). Нижний предел интегрирования возник в связи с тем, что при  $k < k_{cn}$   $n$ -й полюс на верхнем листе не существует.

Нам осталось рассмотреть интеграл вдоль пути  $ABC$ . Если подынтегральное выражение непрерывно между  $AB$  и  $BC$ , этот интеграл равен нулю. Однако это не так, поскольку  $\gamma_2$  имеет противоположные знаки на берегах разреза. Действительно,  $\text{Im } \gamma_2$  отрицательно вдоль  $BC$  и положительно вдоль  $AB$ . Чтобы показать это, используя  $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ , определенные на рис. 7.15, запишем

$$\alpha_2 \gamma_2 = -i(\omega^2 - \alpha_2^2 k^2)^{1/2} = -i\sqrt{r_1 r_2} \left( \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + i \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right).$$

Первый квадрант может быть определен как  $0 < \theta_1 + \theta_2 < \pi$ . Таким образом, на верхнем листе, где  $\text{Re } \gamma_2 > 0$ ,  $\text{Im } \gamma_2$  отрицательно. Аналогичным образом можно показать, что  $\text{Im } \gamma_2$  положительно в четвертом квадранте верхнего листа плоскости  $\omega$ . (На нижнем листе первый квадрант определяется как

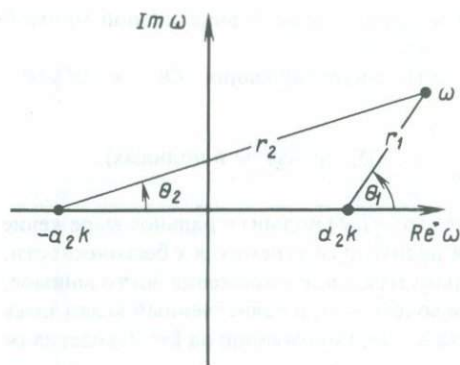


Рис. 7.15. Определение корня, выбранного для  $\gamma_2$  на рис. 7.14. Используем  $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ ,  $-\pi < \theta_2 \leq \pi$  и  $\alpha_2 \gamma_2 = (r_1 r_2)^{1/2} \exp[i(\theta_1 + \theta_2 - \pi)/2]$ .

$2\pi < \theta_1 + \theta_2 < 3\pi$ .) С определенным таким образом знаком  $\gamma_2$  можно переписать интеграл вдоль  $ABC$  как

$$\begin{aligned} \int_{ABC} &= \int_{BC} - \int_{BA} \\ &= \frac{4}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^\infty J_0(kr) k dk \int_{\alpha_2 k}^\infty \frac{\exp(-i\omega t)}{\omega + i\sigma} \operatorname{sh} \gamma_1 z F_3(\omega, k) d\omega, \end{aligned} \quad (7.167)$$

где

$$F_3(\omega, k) = \frac{A \rho_1 \rho_2 \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 h}{(\rho_2 \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 H + \rho_1 \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 H)(\rho_2 \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 H - \rho_1 \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 H)}. \quad (7.168)$$

Для оценки этого интеграла мы вновь деформируем путь интегрирования, переходя от  $BC$  к  $BC'$ , как показано на рис. 7.16. На этот раз мы будем сохранять подынтегральное выражение в (7.167) в аналитическом виде. Следовательно, мы вынуждены брать корень  $\operatorname{Re} \gamma_2 < 0$  в четвертом квадранте, т.е. мы спускаемся на нижний лист римановой поверхности. Интеграл по четверти окружности  $CC'$  равен нулю, когда радиус стремится к бесконечности. Эта деформация частично заменяет интеграл по разрезу вкладом вычетов в полюсах, которые расположены внутри области, заметаемой при деформировании контура:

$$\begin{aligned} \int_{ABC} &= P_{B1} + P_{B2}, \\ P_{B1} &= \frac{4}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^\infty J_0(kr) k dk \int_{\alpha_2 k}^{\alpha_2 k - i\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{\omega + i\sigma} \operatorname{sh} \gamma_1 z F_3(\omega, k) d\omega \end{aligned} \quad (7.169)$$

и

$$\begin{aligned} P_{B2} &= -2\pi i \sum (\text{вычеты}) \\ &= 4 \operatorname{Re} \sum_n \int_0^{k_{\text{он}}} J_0(kr) k dk \frac{\exp(-i\omega_n t)}{\omega_n + i\sigma} \operatorname{sh} \gamma_1 z F_2(\omega_n, k) dk. \end{aligned} \quad (7.170)$$

При оценке вычетов заметим, что все полюсы  $F_3$ , встреченные на нижнем листе, представляют собой

$$\rho_2 \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 H + \rho_1 \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 H = 0,$$

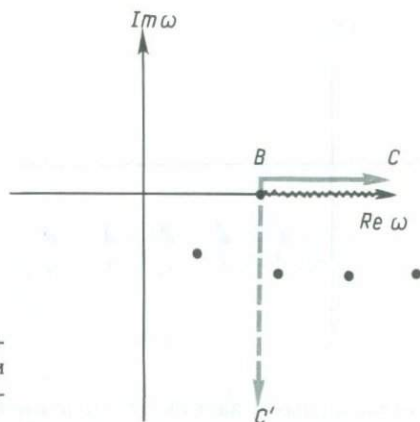


Рис. 7.16. Полюсы на нижнем листе римановой поверхности ( $\text{Re} \gamma_2 < 0$ ) в плоскости комплексного  $\omega$ .

т.е.  $f_1(\omega, k) = 0$ . Из нашего анализа (7.159) в данном случае следует, что уравнение  $\rho_2 \gamma_1 \text{ch} \gamma_1 H - \rho_1 \gamma_2 \text{sh} \gamma_1 H = 0$  не может иметь комплексных корней, если  $\text{Re} \gamma_2 < 0$ . Формула (7.170) идентична решению для нормальных мод (7.165), за исключением пределов интегрирования. Эти пределы возникают из-за того, что в области справа от  $BC'$  полюсы существуют только для  $0 < k < k_{0n}$ . Это требует пояснения. Проследим движение полюсов в плоскости  $\omega$ , когда  $k$  возрастет от 0 до  $\infty$ .

Вообразим, что  $k$  играет роль времени. При  $k = 0$ ,  $i\gamma_1 = \omega/\alpha_1$ ,  $i\gamma_2 = \omega/\alpha_2$  и корни  $f_1(\omega, 0)$  определяются как

$$\omega_n = \frac{\alpha_1(n - \frac{1}{2})\pi}{H} - i \frac{\alpha_1}{2H} \ln \frac{\alpha_2 \rho_2 - \alpha_1 \rho_1}{\alpha_2 \rho_2 + \alpha_1 \rho_1}. \quad (7.171)$$

Полюсы расположены на нижнем листе плоскости  $\omega$ , как показано на рис. 7.16 (мы полагаем  $\rho_2 \alpha_2 > \alpha_1 \rho_1$ ). При  $k = 0$  начальная скорость и ускорение в плоскости  $\omega$  соответственно равны

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_n}{dk} &= 0, \\ \frac{d^2\omega_n}{dk^2} &= \frac{\alpha_1^2}{\omega_n} \left[ 1 + i \frac{\rho_1 \alpha_2}{\rho_2 \omega_n H} \left( 1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \right) / \left( 1 - \frac{\rho_1^2 \alpha_1^2}{\rho_2^2 \alpha_2^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.172)$$

Исследуя действительную и мнимую части ускорения, найдем, что полюсы «ускоряются» в направлении, показанном стрелками на рис. 7.17. Наибольшее ускорение получает полюс наименьшего порядка.

С другой стороны, при  $k = 0$  путь интегрирования  $BC'$  проходит по отрицательной мнимой оси. Контур  $BC'$  перемещается вправо с постоянной скоростью  $\alpha_2$ , которая выше, чем скорости движения полюсов на начальной стадии. Таким образом, при возрастании  $k$   $BC$  «обгоняет» один за другим все полюсы. Предел интегрирования  $k_{0n}$ , введенный в (7.170), — это значение  $k$  в момент, когда  $BC'$  «догоняет»  $n$ -й полюс. При  $k < k_{0n}$   $n$ -й полюс находится справа от  $BC'$  и, следо-

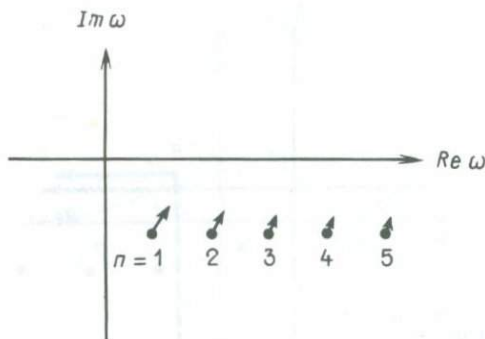


Рис. 7.17. Начальное положение (при  $k = 0$ ) полюсов на нижнем листе римановой поверхности. Стрелки указывают направление и относительную величину «ускорения» полюсов.

вательно, вычет дает вклад. Положение  $\omega_{0n}$   $n$ -го полюса при  $k = k_{0n}$  удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{Re} \omega_{0n} = \alpha_2 k_{0n}. \quad (7.173)$$

После того как полюс обойден контуром  $BC'$ , он продолжает двигаться вправо и вверх к действительной оси  $\omega$ . На действительной оси он встречает другой полюс, пришедший из первого квадранта (двойные корни). Затем один из корней движется влево, другой вправо, но оба остаются на действительной оси. Корень, который движется вправо, теперь разгоняется и вновь догоняет  $BC'$  в  $k = k_{cn}$ , где полюс перескакивает на верхний лист при граничной частоте  $\omega_{cn} = \alpha_2 k_{cn}$ . Затем он замедляется при  $k \rightarrow \infty$ , стремясь к  $\alpha_1 k$ .

Теперь нам нужно оценить интеграл  $P_{B1}$  в (7.169) вдоль пути  $BC'$ . Для этого изменим снова порядок интегрирования и вернемся к плоскости  $k$ . В то же время заменим переменную  $\omega$  на  $q$ :

$$q = i(\omega - \alpha_2 k). \quad (7.174)$$

Переписав (7.169), получим

$$P_{B1} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-qt} dq \int_0^\infty J_0(kr) k \frac{e^{-i\alpha_2 kt}}{q - \sigma + i\alpha_2 k} \operatorname{sh} \gamma_1 z F_3(\omega, k) dk. \quad (7.175)$$

Поскольку  $\gamma_2 = (iq/\alpha_2)^{1/2}(2k - iq/\alpha_2)^{1/2}$ , в точке разветвления  $k = i(q/2\alpha_2)$ , как показано на рис. 7.18. Разрез проведен от точки разветвления  $k - i\infty$ . Этот выбор разреза и начального пути интегрирования  $BC'$ , лежащего на нижнем листе (рис. 7.16), дает знаки действительной и мнимой частей  $\gamma_2$ , указанные на рис. 7.18.

Изменим путь интегрирования от положительной действительной оси  $k$  на отрицательную мнимую ось так, чтобы множитель  $\exp(-i\alpha_2 kt)$  в подынтегральном выражении быстро затухал вдоль выбранного пути. При этой деформации мы внесем в решение вклады от комплексных полюсов в четвертом квадранте. Поскольку здесь  $\operatorname{Re} \gamma_2 < 0$ , уравнение  $\rho_2 \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 H - \rho_1 \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 H = 0$  не может иметь комплексных корней. Следовательно, полюсы — это корни уравнения  $\rho_2 \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 H + \rho_2 \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 H = 0$ . Таким образом, имеем

$$P_{B1} = P_{BL} + P_{B3}.$$

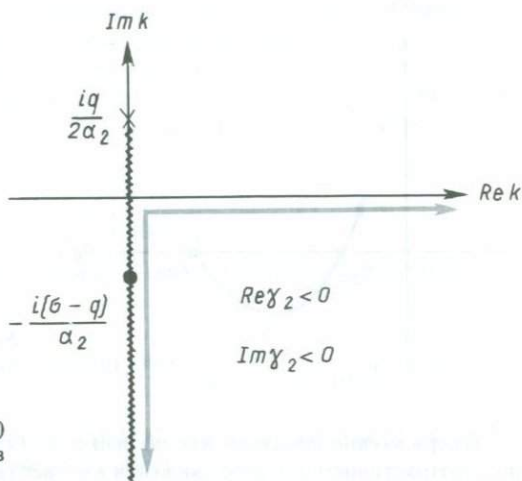


Рис. 7.18. Полюс (черный кружок) и точка разветвления (крестик) в плоскости  $k$ .

$$P_{BL} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-qt} dq \int_0^{-i\infty} J_0(kr) k \frac{e^{-ix_2 kt}}{q - \sigma + ix_2 k} \operatorname{sh} \gamma_1 z F_3(\omega, k) dk \quad (7.176)$$

и

$$P_{B3} = -2\pi i \sum (\text{вычеты})$$

$$= 4 \operatorname{Re} \sum_n \int_0^{q_{0n}} e^{-qt} J_0(k_n r) k_n \frac{\exp(-ix_2 k_n t)}{q - \sigma + ix_2 k_n} \operatorname{sh} \gamma_1 z F_4(q, k) dq, \quad (7.177)$$

где

$$F_4(q, k) = \frac{A \rho_2 \operatorname{sh} \gamma_1 h}{\operatorname{sh} \gamma_1 H \left[ \frac{\partial}{\partial k} (\rho_2 \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 H + \rho_1 \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 H) \right]_{k=k_n}}. \quad (7.178)$$

Интеграл по  $k$  в (7.176) равен нулю, если  $\sigma < q$ , так как на пути интегрирования нет полюса  $i(q - \sigma)/\alpha_2$ . Отсюда интервалом интегрирования для  $q$  будет  $0 < q < \sigma$ . Следовательно,  $P_{BL}$  равно нулю при  $\sigma = 0$  (т.е. ступенчатая функция в источнике) и не имеет для нас существенного значения.

Предел интегрирования  $q_{0n}$  для  $P_{B3}$  нуждается в пояснении. Как указывалось ранее, для действительного положительного  $k$  существуют только два значения  $k_{0n}$  и  $k_{cn}$ , для которых действительная часть  $\omega$  становится равной  $\alpha_2 k$ . Другими словами, для действительных положительных  $k$  и  $q$  есть два корня  $f_1(\omega, k) = 0$ , имеющие вид

$$\omega = \alpha_2 k - iq. \quad (7.179)$$

Один корень соответствует  $k_{cn}$ , при котором  $q = 0$ , а другой соответствует  $k_{0n}$ , при котором  $q = q_{0n}$ . Для действительного положительного  $q$  на действительной положительной оси  $k$  нет других корней  $f_1(\omega, k) = 0$ .

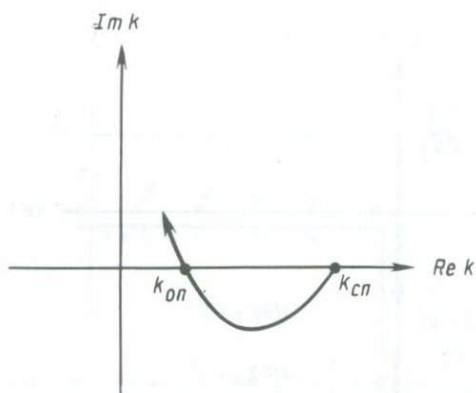


Рис. 7.19. Траектория движения полюса в плоскости  $k$ .

Теперь можно показать, что вблизи  $q = 0$   $\text{Im}(dk/dq)_{f_1=0} < 0$ . Следовательно, с возрастанием  $q$  полюс движется в четвертый квадрант так, как показано на рис. 7.19. Поскольку полюс пересекает действительную ось только еще один раз при  $q = q_{0n}$ , в четвертом квадранте при  $q > q_{0n}$  полюс не существует. Поэтому пределы интегрирования для  $P_{B3}$  — это  $0 < q < q_{0n}$ .

Наконец, перейдем от переменной интегрирования  $q$  к  $k$ , следуя соотношению

$$f_1(q, k) = \rho_2 \gamma_1 \text{ch } \gamma_1 H + \rho_1 \gamma_2 \text{sh } \gamma_1 H = 0.$$

Тогда

$$\frac{dq}{dk} = \frac{(\partial f_1 / \partial k)_{q=\text{const.}}}{(\partial f_1 / \partial q)_{k=\text{const.}}} = \frac{(\partial f_1 / \partial k)_{q=\text{const.}}}{i(\partial f_1 / \partial \omega)_{k=\text{const.}}}$$

Подставляя выражение для  $dq$  в (7.177), имеем

$$P_{B3} = 4 \text{Re} \sum_n \int_{k_{он}}^{k_{сн}} \frac{J_0(kr)k \exp(-i\omega_n t)}{\omega_n + i\sigma} \text{sh } \gamma_1 z F_2(\omega_n, k) dk, \quad (7.180)$$

где подынтегральное выражение идентично  $P_N$  и  $P_{B2}$  в (7.165) и (7.170). Объединив все члены, окончательно имеем

$$P_{\text{полн}} = 4 \text{Re} \sum_n \int_0^{k_{сн}} \frac{J_0(kr)k \exp(-i\omega_n t)}{\omega_n + i\sigma} \text{sh } \gamma_1 z F_2(\omega_n, k) dk, \quad (7.181)$$

где неколебательные члены  $P_L$  и  $P_{BL}$  опущены. Путь интегрирования отклоняется от действительной оси  $k$  в интервале между  $k_{он}$  и  $k_{сн}$ , как показано на рис. 7.19.

### 7.6.1. ОРГАННАЯ МОДА

Рассмотрим сначала случай, встречающийся в сейсморазведке методом отраженных волн, когда приемник расположен над-источником, т.е.  $r = 0$ . Тогда интеграл (7.181) принимает вид, рассмотренный в дополнении 6.3, с экспонентой  $-i\omega_n t$  и может быть оценен методом наискорейшего спуска для больших  $t$ . По-

сколькx  $d\omega_n/dk = 0$  при  $k = 0$ , как показано в (7.172), седловая точка в этом случае находится в  $k = 0$ . Полагая, что основной вклад дает окрестность  $k = 0$ , разложим подынтегральный фазовый множитель  $\exp(-i\omega_n t)$  в степенной ряд по  $k$  и удержим только первые два члена ряда. Значения  $\omega_n$  и  $d^2\omega_n/dk^2$  при 0 даны в (7.171) и (7.172) соответственно. Путь наискорейшего спуска определяется из соотношения

$$-\frac{it}{2} \omega_n''(0)k^2 = -i \frac{t}{2} k^2 \left[ \frac{d^2\omega_n}{dk^2} \right]_{k=0} = -x^2,$$

где  $x$  — действительная величина. Переходя с помощью этого уравнения от переменной  $k$  к  $x$ , получим

$$P^{\text{полн}} = 4 \operatorname{Re} \sum_n \frac{F_2(\omega_n, 0)}{\omega_n(0) + i\sigma} \exp(-i\omega_n(0)t) \operatorname{isin} \left( \frac{-\omega_n}{\alpha_1} z \right) \frac{2}{i\omega_n''(0)t} \int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$$

Подставляя  $F_2(\omega_n, 0)$ ,  $\omega_n(0)$  из (7.166) и (7.171) и заметив, что  $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx = 1/2$ , перепишем приведенную выше формулу в виде

$$P^{\text{полн}} = 4A \frac{\alpha_1^2}{Ht} \sum_n \left| \frac{\sin(\omega_n h/\alpha_1) \sin(\omega_n z/\alpha_1)}{\omega_n(-i\omega_n + \sigma)\omega_n} \right|_{k=0} \times \left( \frac{\alpha_2 \rho_2 - \alpha_1 \rho_1}{\alpha_2 \rho_2 + \alpha_1 \rho_1} \right)^{-x_1 t/2H} \cos \left[ \frac{\alpha_1}{H} \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi t + \psi \right], \quad (7.182)$$

где  $\psi$  — фазовый угол выражения, стоящего под знаком модуля. Формула (7.182) описывает затухающее колебание с периодом  $4H/[(2n-1)\alpha_1]$ . Мода самого низкого порядка ( $n=1$ ) имеет длину волны, равную четырехкратной мощности слоя  $H$ , т.е. это четвертьволновой осциллятор. Затухание таково, что соответствующее значение временного  $Q$  (см. дополнение 5.7) определяется как

$$Q = \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{\ln \left( \frac{\alpha_2 \rho_2 + \alpha_1 \rho_1}{\alpha_2 \rho_2 - \alpha_1 \rho_1} \right)}. \quad (7.183)$$

Если разность импедансов (акустических жесткостей) велика, т.е.  $\alpha_2 \rho_2 \gg \alpha_1 \rho_1$ , то логарифм стремится к нулю,  $Q$  становится большим и в результате возникает продолжительная реверберация. Этот тип реверберации называется органной модой, так как при нем происходит главным образом одномерное колебание в вертикальном направлении.

## 7.6.2. ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ И ЗАТУХАНИЕ

Рассмотрим случай, когда приемник расположен далеко от источника. Тогда мы можем воспользоваться асимптотическим разложением функции Бесселя  $J_0(kr)$ . Подставляя (6.16) в (7.181) и удерживая только главный член, имеем

$$P^{\text{полн}} \sim \frac{4}{\pi r} \operatorname{Re} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} (k)^{1/2} \frac{\exp \left( -i\omega_n t + ikr - i \frac{\pi}{4} \right)}{\omega_n + i\sigma} F_2(\omega_n, k) dk. \quad (7.184)$$

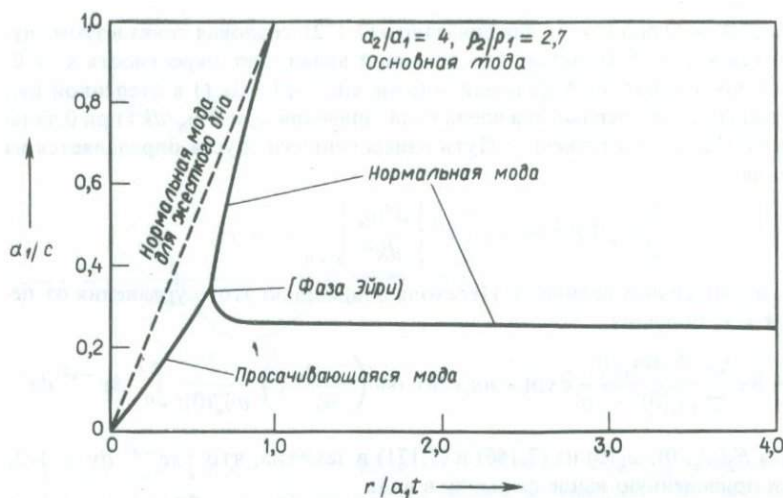


Рис. 7.20. Соотношение между групповой и фазовой скоростью для основной нормальной и просачивающейся мод при  $\alpha_2/\alpha_1 = 4$  и  $\rho_2/\rho_1 = 2,7$ . Соотношения для этих мод сходны в случае абсолютно жесткого полупространства. Из [278] (с разрешения Американского геофизического союза).

В этом случае седловая точка определяется из условия

$$\frac{d(-i\omega_n t + ikr)}{dk} = 0$$

или

$$\frac{d\omega_n}{dk} = \frac{r}{t}. \quad (7.185)$$

Поскольку  $r/t$  — действительная величина, мы видим, что групповая скорость  $d\omega_n/dk$  в седловой точке — также действительная величина. Для определения положения седловой точки надо найти  $(\omega_n, k_n)$ , удовлетворяющее одновременно уравнениям (7.185) и  $f_1(\omega_n, k_n) = 0$  (7.159). Как только мы найдем седловую точку, скажем  $k_{sn}$ , и соответствующее  $\omega_{sn}$ , то путь наискорейшего спуска определится из условия

$$-i\omega_n t + ikr \sim -i\omega_{sn} t + ik_{sn} r - \frac{i}{2} \omega_{sn}'' (k - k_{sn})^2 t = -i\omega_{sn} t + ik_{sn} r - x^2$$

с действительным  $x$ . Проведя интегрирование вдоль пути наискорейшего спуска, получим

$$P_{\text{полн}} \sim \frac{4}{\sqrt{r}t} \sum_n |Q_n| \exp(-L_n t) \cos(\text{Re } \omega_{sn} t - \text{Re } k_{sn} r + \psi), \quad (7.186)$$

где

$$L_n = -\text{Im } \omega_{sn} + \text{Im } k_{sn} r/t, \quad Q_n = \frac{\sqrt{k_{sn}} F_2(\omega_{sn}, k_{sn})}{(i\omega_{sn} + \sigma) \sqrt{\omega_{sn}''}}$$

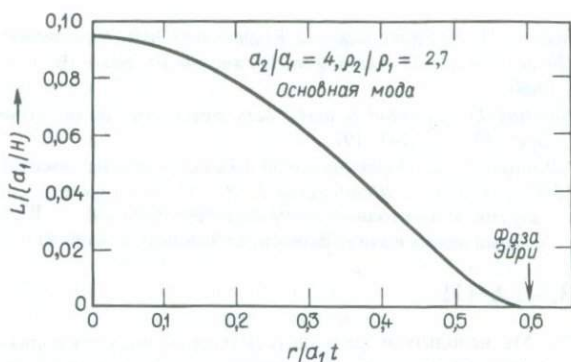


Рис. 7.21. Коэффициент затухания просачивающейся моды. Из [278] (с разрешения Американского геофизического союза).

и  $\psi$  — фазовый угол  $Q_n$ . Эти формулы определяют фазовую скорость и затухание, связанные с каждой просачивающейся модой.

Розенбаум [278] приводит некоторые численные результаты. Например, на рис. 7.20 показана связь между групповой скоростью  $d\omega_n/dk = r/t$  и фазовой скоростью  $\text{Re}(\omega_{sn})/\text{Re}(k_{sn}) = c$  для моды самого низкого порядка ( $n = 1$ ) в случае, когда  $\alpha_2/\alpha_1 = 4$  и  $\rho_2/\rho_1 = 2,7$ . На рис. 7.21 показан соответствующий коэффициент затухания  $L$ .

Акустическая просачивающаяся мода имеет более низкую групповую скорость при более высокой фазовой скорости, и ее групповая скорость всегда ниже, чем у нормальной моды. Соотношение между групповой и фазовой скоростью для нормальной моды в слое, лежащем на жесткой поверхности, показано пунктиром на рис. 7.20. С другой стороны, для упругого тела существуют просачивающиеся моды, приходящие раньше, чем нормальные. Затухающее длиннопериодное колебание, вступающее за волнами  $P$  и называемое волной  $PL$ , часто наблюдается на малых эпицентральных расстояниях. Этот тип движения Оливер и Мэджер [246] интерпретировали как просачивающиеся моды.

## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ

- Юинг М., Ворцель Дж. Л., Пекерис Х. Л. Распространение звука в океане. — М.: ИЛ, 1951.
- Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F. Elastic waves in layered media. New York: McGraw-Hill, 1957.
- Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
- Gilbert F., Backus G. E. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*, 31, 326 — 332, 1966.
- Lighthill M. J. Group velocity. *Journal of the Institute of Mathematics and its applications*, 1, 1 — 28, 1965.
- Brune J. N., Nafe J. T., Oliver J. E. A simplified method for the analysis and synthesis of dispersed wave trains. *Journ. Geoph. Res.* 65, 287 — 304, 1960.
- Schwab F. A., Knopoff L. Fast surface wave and free mode computations. In Bolt B. A. (ed.), *Seismology: surface waves and Earth oscillations (Methods in Computational Physics, vol. 11)*, New York.: Academic Press, 1972.

Schultz M. H. Spline analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1973.

Oliver J. Major M. Leaking modes and the PL phase. Bull. Seism. Soc. Amer., **50**, 165 — 180, 1960.

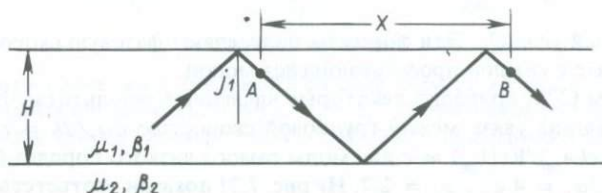
Bamford D., Crampin S. and others. Special edition on anisotropy. Geoph. Journ. Roy. Astr. Soc., **49**, 1 — 243, 1977.

\*Левшин А. Л. Поверхностные и каналовые сейсмические волны. — М.: Наука, 1973.

\*Нейгауз М. Г., Шкадинская Г. В. Метод расчета поверхностных волн Рэлея в вертикально-неоднородном полупространстве. В сб. «Машинная интерпретация сейсмических волн» (Вычисл. сейсмология, вып. 2). — М.: Наука, 1966.

## ЗАДАЧИ

7.1. Мы используем здесь альтернативный подход к волнам Лява в слое, лежащем на упругом полупространстве. Физический механизм такой волны с частотой  $\omega$  и фазовой скоростью  $c(\omega)$  — интерференция объемных волн, закритически отраженных в верхнем слое ( $\beta_1 < \beta_2$ ). Для двух точек  $A$  и  $B$ , расположенных на одной и той же глубине и на расстоя-



нии  $X$  друг от друга в направлении распространения поверхностной волны (см. рисунок), фаза в  $B$  должна быть сдвинута относительно фазы в  $A$  на  $X\omega/c$ .

а) Покажите, что для объемной волны между  $A$  и  $B$  этот сдвиг будет равен

$$\psi = \frac{2H\omega}{\beta_1} \sec j_1 - 2 \arctg \frac{\mu_2 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{\beta_2^2} \right)^{1/2}}{\mu_1 \left( \frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{c^2} \right)^{1/2}}.$$

[Указание: используйте уравнение (5.32).]

б) Покажите, что для того, чтобы поверхностная волна существовала,  $\psi$  и  $X\omega/c$  должны различаться только на числа, кратные  $2\pi$ . Исходя из этого требования, выведите дисперсионное соотношение (7.6).

в) Почему волны Лява не существуют, когда  $\beta_1 > \beta_2$ ?

7.2. Покажите, что матричный пропагатор для волн  $SH$  в однородном слое получается как произведение матриц (7.50) при  $z = z_0$ , подставленное в (7.49). Получите соответствующий результат для волн  $P - SV$  из (7.55) и (7.56). [В сущности Томсон и Хаскелл вывели пропагатор именно этим путем, а не из (7.41).]

7.3. Обобщите идею, выраженную в предыдущей задаче, связав  $f(z_l)$  и  $f(z_{l-1})$  с  $\mathbf{w}_l$  и показав затем, что

$$\mathbf{f}(z_l) = \mathbf{F}_l(z_l) \mathbf{F}_l^{-1}(z_{l-1}) \mathbf{f}(z_{l-1}),$$

т.е. покажите, что пропагатор от  $z_0$  к  $z_k$  равен

$$\mathbf{P}(z_k, z_0) = [\mathbf{F}_k(z_k) \mathbf{F}_k^{-1}(z_{k-1})] [\mathbf{F}_{k-1}(z_{k-1}) \mathbf{F}_{k-1}^{-1}(z_{k-2})] \cdots [\mathbf{F}_1(z_1) \mathbf{F}_1^{-1}(z_0)].$$

(Заметим, что эти результаты по-прежнему справедливы, если среда состоит из пачки неоднородных слоев, при условии что  $\mathbf{F}_l(z)$  есть матрица, столбцы которой — линейно-независимые решения уравнения  $\partial \mathbf{f} / \partial z = \mathbf{A}(z) \mathbf{f}$  в  $l$ -м слое.)

7.4. В разд. 5.4 и 7.2 мы показали, что  $\mathbf{Fw}$  можно рассматривать как сумму всех возможных типов волн, являющихся решением уравнения  $\partial f/\partial z = \mathbf{A}f$ , что каждый из столбцов  $\mathbf{F}$  есть независимое базисное решение  $\partial f/\partial z = \mathbf{A}f$  и что  $\mathbf{w}$  — это вектор постоянных, который определяет вес каждого базисного решения, представленного в сумме  $\mathbf{Fw}$ . Рассмотрите первый столбец  $\mathbf{F}$  в (7.55) при  $k > (\omega/\alpha)$  и покажите, что соответствующая волна в сумме  $\mathbf{Fw}$  в (7.54) является неоднородной волной  $P$  с амплитудой смещения

$$\dot{P} e^{-\gamma z} [\alpha^2 k^2 / \omega^2 - \sin^2(kx - \omega t)]^{1/2}.$$

7.5. Покажите, изменив положение источника, что один из способов построить  $G_{np}(0, 0, h; x, y, z; \omega)$  — это сделать замену в формулах для  $G_{np}(x, y, z; 0, 0, h; \omega)$ :  $r \rightarrow r$ ,  $\phi \rightarrow \phi + \pi$ ,  $z \rightarrow h, h \rightarrow z$ . Используя этот подход, проверьте, что для компонент поверхностной волны (7.145) и (7.146) удовлетворяется принцип взаимности

$$G_{np}(0, 0, h; x, y, z; \omega) = G_{pn}(x, y, z; 0, 0, h; \omega)$$

7.6. Покажите, что изменение фазовой скорости волн Лява при фиксированном волновом числе, вызванное возмущением  $(\delta\rho, \delta\mu)$  параметров среды, равно

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_k = \frac{\int_0^\infty \left[ k^2 l_1^2 + \left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2 \right] \delta\mu dz - \int_0^\infty \omega^2 l_1^2 \delta\rho dz}{2\omega^2 \int_0^\infty \rho l_1^2 dz}.$$

7.7. Покажите, что собственная функция волн Рэлея для полупространства с коэффициентом Пуассона, равным 0,25, определяется как

$$r_1 = e^{-0,8475kz} - 0,5773e^{-0,3933kz}, \quad r_2 = 0,8475e^{-0,8475kz} - 1,4679e^{-0,3933kz},$$

и что интеграл энергии  $I_1$  равен 0,6205  $\rho/k$  ( $k$  — горизонтальное волновое число,  $\rho$  — плотность). Затем, используя (7.149), получите в явном виде выражение для волн Рэлея, возбуждаемых точечным источником с произвольным тензором момента на глубине  $h$ .

7.8. Форму диспергирующего цуга волн, определяемую как

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| e^{-i\omega t + i\phi(\omega)} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |F(\omega)| \cos[\omega t - \phi(\omega)] d\omega,$$

можно легко и точно вычислить, если на дискретных частотах известны значения групповой временной задержки  $t_g = d\phi/d\omega$  и  $d|F(\omega)|/d\omega$ . Покажите, что

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_i \frac{1}{\pi} \int_{\omega_i - \Delta\omega_i/2}^{\omega_i + \Delta\omega_i/2} |F(\omega)| \cos(\omega t - \phi(\omega)) d\omega \\ &\sim \sum_i \frac{\Delta\omega_i}{\pi} \left[ |F(\omega_i)| \cos \omega_i(t - t_{pi}) \frac{\sin[(\Delta\omega_i/2)(t - t_{gi})]}{(\Delta\omega_i/2)(t - t_{gi})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{d|F(\omega_i)|}{d\omega} \frac{\sin \omega_i(t - t_{pi})}{t - t_{gi}} \left\{ \frac{\sin[(\Delta\omega_i/2)(t - t_{gi})]}{(\Delta\omega_i/2)(t - t_{gi})} - \cos \left[ \frac{\Delta\omega_i}{2} (t - t_{gi}) \right] \right\} \right], \end{aligned}$$

где  $t_{pi} = \phi(\omega_i)/\omega_i$  — фазовая временная задержка на частоте  $\omega_i$ .

7.9. Определите фазовую скорость как функцию частоты для поверхностных волн со следующими наблюдаемыми свойствами:

- их групповая скорость равна 4,4 км/с независимо от частоты;
- форма волны меняется с расстоянием, но каждые 8800 км возвращается к прежнему виду;
- фазовая скорость возрастает с периодом (длиннопериодные волны Лява в диапазоне периодов 40 — 200 с обладают примерно такими свойствами; они имеют импульсный характер из-за частотно-независимой групповой скорости, и их иногда называют волнами  $G$ ).

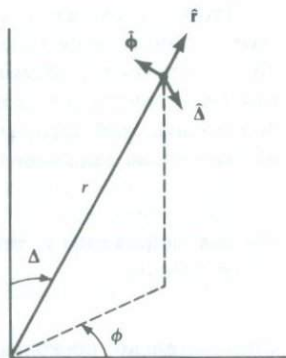
## Собственные колебания Земли

Длиннопериодные волны, возбужденные сильным землетрясением, могут быть зарегистрированы на одной и той же станции несколько раз, поскольку они продолжают обегать Землю. Очевидно, что для анализа таких волн не подходит плоская модель Земли, рассмотренная в гл. 7. Даже на таких небольших периодах, как 20 с, уже нельзя пренебрегать влиянием кривизны Земли на дисперсию поверхностных волн, особенно когда резко выраженный низкоскоростной слой в верхней мантии захватывает большую долю энергии и заметно уменьшает длину пути волны. Кроме того, дисперсия может быть столь сильной, что длиннопериодные поверхностные волны, которые обожали  $N + 1$  раз вокруг Земли, могут интерферировать с более медленными короткопериодными волнами, обожавшими  $N$  раз вокруг Земли, и с волнами, распространявшимися в противоположном направлении. Поэтому теперь, чтобы завершить анализ поверхностных волн, важно изучить сферическую модель Земли. Однако основная цель данной главы состоит в том, чтобы показать, что поверхностные и объемные волны (а также просачивающиеся моды) — это явления, которые связаны с более фундаментальными движениями — собственными колебаниями Земли.

Поскольку Земля представляет собой тело конечных размеров, она может резонировать как единое целое только на определенных дискретных частотах. Для начала попытаемся понять, почему это так.

В предыдущих главах мы характеризовали системы волн горизонтальным волновым числом  $k$  и частотой  $\omega$ . Поскольку мы считали, что волны распространяются в среде, имеющей бесконечную протяженность в горизонтальном направлении,  $k$  в этом случае являлось непрерывной функцией. При таком подходе каждому  $\omega$  могли соответствовать только определенные значения волнового числа  $k = k_n(\omega)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Теперь вместо этого мы можем принять  $k$  за независимую переменную, считая, что моды поверхностных волн могут иметь только определенное число собственных частот  $\omega = {}_n\omega(k)$  (хотя для каждого  $n$   ${}_n\omega$  меняется непрерывно). Именно такая форма дисперсионного соотношения позволяет естественным образом перейти к изучению собственных колебаний сферической Земли. Это следует из того обстоятельства, что в сферической геометрии «горизонтальное волновое число» принимает ряд дискретных значений из-за конечной горизонтальной протяженности среды ( $0 \leq \Delta < 2\pi$ , где смысл  $\Delta$  ясен из рис. 8.1). На самом деле мы будем иметь дело с горизонтальным *угловым* волновым числом  $l$  вместо  $k$  и увидим, что  $l$  должно быть нулем или целым положительным числом. Вместо  ${}_n\omega(l)$  мы будем писать  ${}_n\omega_l$ , и одна из наших ближайших задач должна состоять в том, чтобы получить возможные собственные частоты  ${}_n\omega_l$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) для данного  $l$ .

Рис. 8.1. Сферическая система координат  $(r, \Delta, \phi)$  с началом в центре Земли. Прямая  $\Delta = 0$  часто выбирается проходящей через сейсмический источник; в этом случае  $(r, \Delta, \phi)$  называются *эпицентрными координатами*.



Мы начнем с анализа «дисперсионного соотношения»  $\omega = {}_n\omega_l$  для однородной жидкой сферы, т.е. постараемся выяснить характер зависимости  $\omega$  от  $l$  для основной моды ( $n = 0$ ) и для обертонов ( $n > 0$ ). Мы пренебрежем самогравитацией и, следовательно, будем опираться на нереалистичную, но простую модель, которая удобна для введения многих волновых функций, необходимых при анализе любой сферической модели. Затем мы опишем возбуждение собственных колебаний точечным источником, уделяя особое внимание влиянию сферичности Земли на распространение поверхностных волн. Для волн с периодами, превышающими примерно 500 с, роль силы тяжести становится существенной; в дальнейшем мы покажем, как ввести в рассмотрение самогравитацию. Наконец, мы рассмотрим расщепление спектральных линий в результате вращения Земли и (в гл. 13) расщепление, вызванное горизонтальными изменениями в строении Земли.

## 8.1. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОЙ СФЕРЫ

Возможно, простейшую из систем свободных колебаний, обладающих теми же важными свойствами, что и собственные колебания Земли, описывает решение задачи о «скрипичной струне». Поперечное движение струны как функция положения  $x$  и времени  $t$  удовлетворяет одномерному волновому уравнению  $c^2 \partial^2 y / \partial x^2 = \partial^2 y / \partial t^2$  и  $y(x, t) = 0$  в точках  $x = 0$  и  $x = L$ . Мы будем считать, что читатель знаком с соответствующей теорией Штурма — Лиувилля. Ее наиболее важный результат состоит в том, что *любое* решение  $y(x, t)$ , удовлетворяющее приведенному выше волновому уравнению и граничным условиям, можно представить в виде ряда

$$y = \sum_n a_n y_n(x, t),$$

где  $a_n$  — постоянные коэффициенты, а  $y_n$  характеризует свободные (собственные) колебания;  $y_n = \sin({}_n\omega x/c) \cos({}_n\omega t)$  с собственными частотами  ${}_n\omega = (n + 1)\pi c/L$ .

Чтобы вспомнить некоторые особые свойства сферических тел, представим себе однородную сжимаемую жидкую сферу радиуса  $r_0$ , упругие свойства которой определяются объемным модулем  $k$  и плотностью  $\rho$ . Пусть никакие объемные силы внутри среды не действуют. Рассмотрим собственные колебания малых возмущений давления  $P$  относительно равновесного поля давления. Обычное уравнение движения (2.17) принимает вид

$$\rho \ddot{u} = -\nabla P, \quad (8.1)$$

так как напряжение  $\tau_{ij}$  становится просто  $-\rho \delta_{ij}$ , а закон Гука (2.18) сводится к соотношению

$$P = -\kappa \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (8.2)$$

Следовательно, поскольку  $\rho$  и  $\kappa$  являются константами,

$$c^2 \nabla^2 P = \partial^2 P / \partial t^2, \quad (8.3)$$

где  $c^2 = \kappa / \rho$ .

Примем условие «свободной границы», а именно что  $P(\mathbf{x}, t) = 0$  на поверхности радиуса  $r_0$ . Введя сферическую систему координат  $(r, \Delta, \phi)$ , подобную приведенной на рис. 8.1, естественно попытаться найти частные решения, в которых зависимость от  $(r, \Delta, \phi, t)$  разделена на четыре различных множителя:  $P = R(r)\Theta(\Delta)\Phi(\phi)T(t)$ . Проведенный нами ранее анализ решений уравнения (5.8) показывает, что  $T = \exp(\pm i\omega t)$ , где  $\omega$  — некоторая константа, и для того, чтобы разделить пространственные зависимости, нам следует использовать явную форму выражения  $\nabla^2$  в сферических координатах, а именно

$$\nabla^2 P = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Delta} \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \sin \Delta \frac{\partial P}{\partial \Delta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Delta} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2}. \quad (8.4)$$

В дополнении 8.1 находим, что

$$\Theta(\Delta)\Phi(\phi) = Y_l^m(\Delta, \phi) \equiv (-1)^m \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \Delta) e^{im\phi}, \quad (8.5)$$

где  $l$  и  $m$  — целые числа,  $-1 \leq m \leq l$  и  $P_l^m(\cos \Delta)$  — присоединенная функция Лежандра. Хотя зависимости от  $\Delta$  и  $\phi$  здесь уже разделены, обычно в уравнении типа (8.5) принято записывать произведение  $\Theta\Phi$  как  $Y_l^m(\Delta, \phi)$ .

Теперь нам следует рассмотреть радиальную волновую функцию  $R = R(r)$ , которая должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (8.6)$$

Поскольку  $c$  здесь — константа, (8.6) оказывается стандартным уравнением, решениями которого, как известно, являются сферические функции Ханкеля. Кроме того, поскольку мы интересуемся решениями, которые не имеют особенностей поля давлений нигде в области  $0 \leq r \leq r_0$ , решения (8.6) должны быть вида  $R(r) \sim j_l(\omega r/c)$ , где  $j_l$  — сферическая функция Бесселя порядка  $l$ . Поскольку

ДОПОЛНЕНИЕ 8.1

*Сферические поверхностные гармоника*

Можно привести длинный перечень важных свойств специальных функций  $\Theta(\Delta)\Phi(\phi)$ , с помощью которых в сферической геометрии можно представить зависимость решений уравнения  $c^2\nabla^2 P = \partial^2 P/\partial t^2$  от горизонтальных координат. Мы здесь остановимся на формальном выводе некоторых из этих свойств, часто используемых в геофизике ввиду необходимости определять непрерывные ограниченные функции на сферических поверхностях внутри Земли.

Попытаемся найти решение в виде  $P(x, t) = R(r)\Theta(\Delta)\Phi(\phi)\exp(-i\omega t)$ ; тогда из (8.3) и (8.4) получим, что

$$\frac{\sin^2 \Delta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \Delta}{\Theta} \frac{d}{d\Delta} \left( \sin \Delta \frac{d\Theta}{d\Delta} \right) + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \sin^2 \Delta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}.$$

Левая часть независима от  $\phi$ ; следовательно,  $(1/\Phi)(d^2\Phi/d\phi^2) = \text{const}$ . Решая уравнение относительно  $\Phi$  и имея в виду, что функция  $\Phi(\phi)$  должна быть периодической с периодом  $2\pi$ , если  $P(x, t)$  — однозначная функция положения точки, находим собственные функции

$$\Phi = e^{im\phi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1)$$

Уравнение для  $R$  и  $\Theta$  теперь запишем в виде

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} = \frac{m^2}{\sin^2 \Delta} - \frac{1}{\sin \Delta} \frac{d}{d\Delta} \left( \sin \Delta \frac{d\Theta}{d\Delta} \right),$$

который обеспечивает зависимость левой части только от  $r$ , а правой только от  $\Delta$ . Таким образом, уравнение может быть удовлетворено для всех  $(r, \Delta)$  только в том случае, если найдется некоторая константа  $K$ , для которой

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( \frac{\omega^2 r^2}{c^2} - K \right) R = 0 \quad (2)$$

и

$$\frac{d}{d\Delta} \left( \sin \Delta \frac{d\Theta}{d\Delta} \right) = \left( \frac{m^2}{\sin^2 \Delta} - K \right) \sin \Delta \Theta. \quad (3)$$

Займемся теперь анализом уравнения, содержащего  $\Theta$ , рассмотрев сначала

случай  $m = 0$ 

Функция  $\Phi(\phi)$  постоянна, и решение  $P(x, t)$  обладает осевой симметрией.  $\Theta$  удовлетворяет уравнению  $d(\sin \Delta d\Theta/d\Delta)/d\Delta = -K \sin \Delta \cdot \Theta$ ; следовательно, было бы удобно избавиться от угла  $\Delta$  и воспользоваться вместо него переменной  $x = \cos \Delta$ , поскольку тогда в  $\Theta$ -уравнении исчезнут тригонометрические члены. Находим уравнение

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + K\Theta = 0, \quad (4)$$

которое называется *уравнением Лежандра*. Для произвольных значений постоянной  $K$  решения имеют особенности в граничных точках интервала  $-1 \leq x \leq 1$ . Этот интервал соответствует интервалу  $0 \leq \Delta \leq \pi$ , который нужен для описания положения точки внутри Земли. Но для некоторых значений  $K$  существуют регулярные решения  $\Theta$  (не имеющие особенностей), которые оказываются полиномами по степеням  $x$ .

Для доказательства этих утверждений примем, что существует решение в виде

$$\Theta(x) = x^k \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \quad (b_0 \neq 0). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и приравнявая коэффициент при каждой степени  $x$  нулю, находим

$$b_0 k(k-1) = 0, \quad (6)$$

$$b_1(k+1)k = 0, \quad (7)$$

а в общем виде

$$b_{i+2} = b_i \left[ \frac{(k+i)(k+i+1) - K}{(k+i+1)(k+i+2)} \right]. \quad (8)$$

Из уравнения (6) мы находим, что  $k = 0$  или  $k = 1$ . Без потери общности мы примем  $k = 0$ , поскольку при  $k = 1$  из (7) и (8) вытекает, что все  $b_i$  с нечетными индексами равны нулю, и, следовательно, одно  $b_0$  определяет все ненулевые  $b_i$ ; это решение содержится в случае  $k = 0$ .

В общем случае из уравнения (8) следует, что  $|b_{i+2}/b_i| \rightarrow 1$  при  $i \rightarrow \infty$ . Тогда из сравнения с геометрическим рядом можно сделать вывод, что степенной ряд (5) сходится при условии, что  $-1 < x < 1$ . А что же происходит при  $x = \pm 1$  ( $\Delta = 0$  или  $\pi$ )? Можно показать, что в этом случае бесконечный ряд для  $\Theta(x)$  будет *расходиться*, если только по какой-то причине один из  $b_i$  с четным индексом и один из  $b_i$  с нечетным индексом не окажутся равными нулю. (Тогда все последующие  $b_i$  будут равны нулю, и поэтому бесконечный ряд сведется к полиномиальному, который безусловно «сходится» при значениях  $x = \pm 1$ .) Полагая  $k = 0$  в уравнении (8), находим, что единственный случай, когда коэффициент  $b_{i+2}$  может стать равным нулю (при  $b_i \neq 0$ ), — это если  $K = i(i+1)$ .

Таким образом, мы получаем важный результат, что константа  $K$ , которая была введена с целью разделить радиальное уравнение и  $\Theta$ -уравнение, должна быть произведением двух последовательных целых чисел. В противном случае уравнение для  $\Theta$  не имеет решения, пригодного для всего интервала  $0 \leq \Delta \leq \pi$ .

Далее, если  $K = K(l+1)$  и  $l$  четное, то решение определяют  $b_i$  с четными индексами. Ряд с нечетными индексами должен быть прерван требованием  $b_1 = 0$ . Подобным образом, если  $K = l(l+1)$  и  $l$  нечетное, тогда  $b_0 = 0$ . В любом случае решение для  $\Theta$  — полином порядка  $l$ . Обычно выбор  $b_0$  или  $b_1$  задается условием

$$\Theta(x) = 1 \quad \text{при} \quad x = 1. \quad (9)$$

Получаемые полиномы называются *полиномами Лежандра*. Представив их в виде суммы членов с понижающимися степенями, после ряда громоздких преобразований получаем при четных или нечетных  $l$  выражение

$$\Theta = P_l(x) = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} \left[ x^l - \frac{l(l-1)x^{l-2}}{2(2l-1)} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)x^{l-4}}{2 \cdot 4 \cdot (2l-1)(2l-3)} - \dots \right], \quad (10)$$

которое заканчивается  $x$  или 1 (умноженными на константу). Первые несколько полиномов Лежандра имеют вид

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, & P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), & P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \end{aligned}$$

и можно записать общую формулу

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l,$$

известную под названием *формулы Родригеса*.

СЛУЧАЙ  $m \neq 0$

Для ненулевых целых значений  $m$  вначале примем, что они положительны. Тогда при  $x = \cos \delta$  в уравнении (3) находим

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] = \frac{m^2 \Theta}{1 - x^2} - K\Theta. \quad (11)$$

Мы могли бы искать решение в виде степенного ряда подобно уравнению (5). Однако, используя этот метод, легко увязнуть в расчетах, поскольку понятно, что формула для  $b_{i+2}$  включает не только  $b_i$  (как это было раньше для  $\Theta$  при  $m = 0$ ), но и  $b_{i+1}$ , и отыскание решения в общем виде для такой трехчленной рекурсивной связи — очень трудоемкая процедура. Чтобы понять, что тут можно сделать, напомним, что при  $m = 0$  важны свойства  $\Theta$  вблизи  $x = \pm 1$ . Можно также ожидать, исследовав коэффициенты в уравнении (11), что эти свойства будут важны и при  $m > 0$ . Итак, обратимся к краткому исследованию  $\Theta$  вблизи  $x = \pm 1$ . Пусть  $\varepsilon = x \pm 1$  и  $\varepsilon$  мало, тогда уравнение (11) можно приближенно записать как

$$\varepsilon \frac{d^2 \Theta}{d\varepsilon^2} + \frac{d\Theta}{d\varepsilon} - \frac{m^2 \Theta}{4\varepsilon} = 0,$$

Решения этого уравнения имеют вид  $\Theta = \varepsilon^{m/2}$  и  $\varepsilon^{-m/2}$ . Второе решение не имеет смысла при  $\varepsilon = 0$  и может быть отброшено. Тогда, по-видимому, функция  $\Theta$  должна иметь нули порядка  $m/2$  при  $x = \pm 1$ . Оба они могут быть выявлены с помощью записи

$$\Theta(x) = (1 - x^2)^{m/2} A(x),$$

и мы можем надеяться исследовать  $\Theta$  с помощью анализа  $A(x)$ .

Этот метод оказывается плодотворным, так как  $A$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2) \frac{d^2 A}{dx^2} - 2(m+1) \frac{dA}{dx} + [K - m(m+1)]A = 0, \quad (12)$$

и это как раз дает двучленную рекуррентную формулу для коэффициентов ряда

$A(x) = x^k \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ . Рекуррентная формула принимает вид

$$c_{i+2} = \frac{[(i+m)(i+m+1) - K]}{(i+1)(i+2)} c_i.$$

В общем случае эта формула даст два решения в виде ряда для  $A(x)$  (одно с четными степенями  $x$  и множителем  $c_0$ , другое с нечетными степенями и множителем  $c_1$ ). Если бы эти ряды не оканчивались на некотором члене  $x^r$ , они обладали бы свойствами выражения  $(1 - x^2)^{-m}$ . Требование, чтобы функция  $\Theta$  не имела особенностей в интервале  $-1 \leq x \leq 1$  ( $0 \leq \Delta \leq \pi$ ), ведет тем самым к результату  $c_{r+2} = 0$ , а также к  $c_1 = 0$ , если  $r$  — четное число, и к  $c_0 = 0$ , если  $r$  нечетное. Итак,

$$(r+m)(r+m+1) = K,$$

и  $K$  имеет собственные значения, которые снова (т.е. как и при  $m = 0$ ) являются произведением последовательных целых чисел. Поскольку  $r \geq 0$  и  $m \geq 0$ , мы можем записать, что  $K = l(l+1)$  для некоторого целого числа  $l \geq 0$ ; при этом из условия  $r \geq 0$  мы получаем важный результат, что  $m \leq l$ .

Заметим, что поскольку  $K$  принимает одни и те же собственные значения при  $m = 0$  и  $m > 0$ , радиальная функция  $R(r)$  остается неизменной, если отбросить требование осевой симметрии.

Мы показали, что  $\Theta(x) = (1 - x^2)^{m/2} A(x)$ , где  $A$  — полином по степеням  $x$ . Определение коэффициентов этого полинома не представляет особых трудностей. Однако существует быстрый способ получения явного выражения для  $A$ , так как, если уравнение, которому удовлетворяет полином Лежандра  $P_l$  [см. (4)], продифференцировать  $m$  раз, результат имеет вид

$$(1 - x^2) \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_l - 2(m+1)x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l + [l(l+1) - m(m+1)] \frac{d^m}{dx^m} P_l = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (12), которому удовлетворяет  $A(x)$ , мы видим, что решение  $A$  можно представить в виде  $A(x) = d^m P_l(x)/dx^m$ . Поскольку  $P_l(x)$  представляет собой полином, включающий неотрицательные степени  $x$ , нет опасности, что  $A(x)$  будет неограниченно расти где-либо в интервале  $-1 \leq x \leq 1$ .

Следовательно, решением для угловой функции  $\Theta(X)$  является произведение  $(1 - x^2)^{m/2} d^m P_l(x)/dx^m$ . Оно называется *присоединенной* функцией Лежандра,  $P_l^m(x)$ .

Уравнение (11) для функции  $\Theta$  зависит от  $m$  только через член  $m^2$ . Следовательно, если  $m < 0$ , неособое решение должно быть пропорционально  $P_l^{m1}(\cos \Delta)$ . Примем, что

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x), \quad (13)$$

где коэффициент пропорциональности выбран так, что определение

$$P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (14)$$

применимо для всех  $l, m$  таких, что  $-l \leq m \leq l$ .

О свойствах полиномов  $P_l$  и  $P_l^m$  написан ряд книг [275, 168]. Виггинс и Сайто [337] показали, как можно эффективно рассчитывать эти полиномы. Приведем наиболее важные формулы:

$$\frac{1}{(1+r^2-2r \cos \Delta)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos \Delta) \quad 0 < r < 1 \quad (15)$$

$$(l-m+1)P_{l+1}^m(x) - (2l+1)xP_l^m(x) + (l+m)P_{l-1}^m(x) = 0 \quad (16)$$

$$(1-x^2) \frac{d}{dx} P_l^m(x) = (l+1)xP_l^m(x) - (l-m+1)P_{l+1}^m(x). \quad (17)$$

Удобно определить полностью нормированные поверхностные гармоники

$$Y_l^m(\Delta, \phi) = (-1)^m \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \Delta) e^{im\phi} \quad (18)$$

для целых  $l \geq 0$  и целых  $m$  при  $-l \leq m \leq l$ . Тогда

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi [Y_l^m(\Delta, \phi)]^* Y_{l'}^{m'}(\Delta, \phi) \sin \Delta d\Delta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (19)$$

и

$$Y_l^{-m}(\Delta, \phi) = (-1)^m [Y_l^m(\Delta, \phi)]^*.$$

В теории возбуждения нормальных мод точечным источником требуются значения функций  $Y_l^m$  и некоторых ее производных при  $\Delta = 0$ . Основным результатом можно записать в виде

$$P_l^m(\cos \Delta) \rightarrow \frac{1}{2^m m!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \Delta^m \quad \text{при } \Delta \rightarrow 0 \quad \text{для } m \geq 0.$$

$l$  — целое число, мы можем еще воспользоваться соотношением

$$j_l(x) = x^l \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left( \frac{\sin x}{x} \right), \quad (8.7)$$

так что при  $l = 0$

$$rR(r) \propto \sin(\omega r/c), \quad (8.8)$$

а при  $l = 2$

$$R(r) \propto \left( \frac{3c^3}{\omega^3 r^3} - \frac{c}{\omega r} \right) \sin(\omega r/c) - \frac{3c^2}{\omega^2 r^2} \cos(\omega r/c). \quad (8.9)$$

Остается ввести в рассмотрение условие «свободной границы» при  $r = r_0$ , которое требует, чтобы  $R(r_0) = 0$ . Именно это условие указывает разрешенные собственные частоты  ${}_n\omega_f$ . Таким образом, из (8.8) мы находим для  $l = 0$ , что  $\sin(\omega r_0/c) = 0$ . Отсюда следует, что

$${}_n\omega_0 = \frac{(n+1)\pi c}{r_0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (8.10)$$

$n = 0$  дает основную моду (основной тон), а  $n \geq 1$  составляют обертоны, или высшие моды. Движения с  $l = 0$  — это чисто радиальные моды, поскольку соответствующие  $u_\Delta$  и  $u_\phi$  равны нулю. Для случая  $r_0 = 6000$  км и  $c = 5$  км/с периоды (в секундах), определенные в соответствии с (8.10), равны  ${}_nT_0 = (2400)/(n+1)$ , причем период основной моды  ${}_0T_0$  составляет 40 мин. Для  $l = 2$  первый нуль  $j_l(x)$  появляется, когда  $x \sim 1,8 \pi$ ; следовательно,  ${}_0T_2 \approx 22$  мин. На рис. 8.2 показаны собственные функции  ${}_nR_0 \sim j_0({}_n\omega_0 r/c)$  при  $n = 0, 1, 2$  и  ${}_nR_2 \sim {}_n j_2({}_n\omega_2 r/c)$  при  $n = 0, 1, 2$ .

Важными свойствами собственных колебаний однородной жидкой сферы являются их ортогональность и вырожденность по отношению к азимутальному числу  $m$ . Определим внутреннее произведение для векторного пространства стационарных решений [схр  $(-i\omega t)$ ] уравнения  $c^2 \nabla^2 P = \partial^2 P / \partial t^2$  внутри  $|x| < r_0$ , удовлетворяющих условию  $P(x, t) = 0$  при  $|x| = r_0$ . Если  $f$  и  $g$  — два элемента этого векторного пространства, то по определению

$$\{f, g\} = \iiint_{|x| \leq r_0} \rho f^* g \, dV. \quad (8.11)$$

Предположим далее, что  $f$  и  $g$  — нормальные моды с собственными частотами  $\omega_f$  и  $\omega_g$  соответственно; тогда ряд алгебраических преобразований приводит к выражению

$$[\omega_g^2 - (\omega_f^*)^2] \{f, g\} = 0.$$

Положив  $f = g$ , найдем, что собственные частоты должны быть вещественными. При  $f \neq g$  и  $\omega_f \neq \omega_g$  получим, что  $f$  и  $g$  ортогональны в том смысле, что  $\{f, g\} = 0$ . Таким образом, в нашей задаче

$$\{j_l({}_n\omega_l r/c) Y_l^m(\Delta, \phi), j_{l'}({}_{n'}\omega_{l'} r/c) Y_{l'}^{m'}(\Delta, \phi)\} = 0 \quad (8.12)$$

если только  $l \neq l'$ ,  $m \neq m'$ ,  $n \neq n'$ .

Для каждого набора чисел  $l \geq 0$ ,  $n \geq 0$  имеется  $(2l+1)$  собственных колебаний, характеризующихся одной и той же собственной частотой  ${}_n\omega_l$  и той же са-

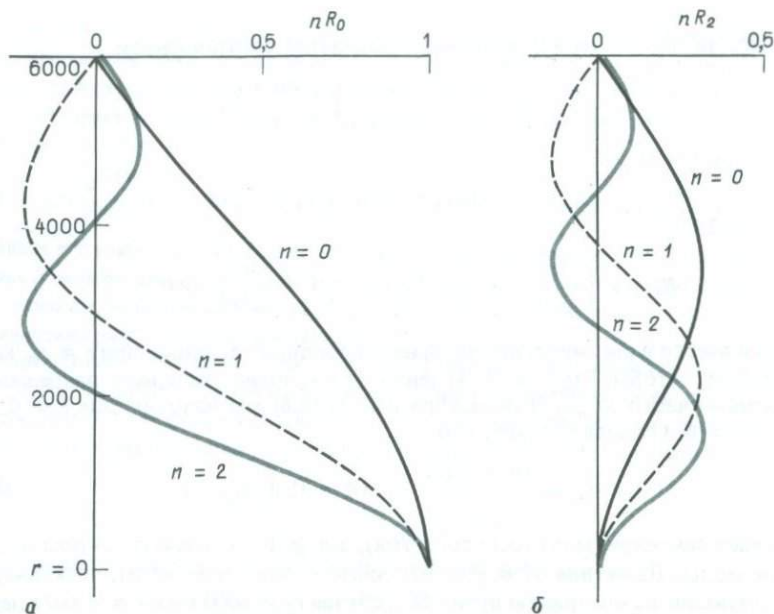


Рис. 8.2. Собственные функции  ${}_n R_l$  давления внутри жидкой сферы радиуса 6000 км как функции радиуса. **а** —  ${}_n R_0(r)$  при  $n = 0, 1, 2$ . **б** —  ${}_n R_2(r)$  при  $n = 0, 1, 2$ .

мой радиальной собственной функцией  $j_l(n\omega_l r/c)$ . Эта вырожденность возникает из-за того, что одномерное уравнение (8.6) не зависит от  $m$  и каждому  $m$  в области  $-l \leq m \leq l$  соответствует своя нормальная мода давления

$${}_n P_l^m(\mathbf{x}, t) = j_l(n\omega_l r/c) Y_l^m(\Delta, \phi) \exp(-i_n \omega_l t).$$

Можно обобщить анализ собственных колебаний на такие сферические тела, которые являются гораздо лучшими моделями Земли, чем рассмотренная нами однородная жидкая сфера, и в то же время сохраняют те же свойства ортогональности и вырожденности и ту же самую схему индексации мод  $(l, m, n)$ . Значительным шагом вперед по сравнению с жидкой моделью является однородная упругая твердая сфера, детально изученная в 1882 г. Г. Лэмбом. Это простейшая сжимаемая среда, в которой существуют два независимых семейства мод, сферических и тороидальных (крутильных), различающихся по своим свойствам точно так же, как  $P$ - $SV$ -движения отличаются от  $SH$ -движений в плоской модели Земли, что мы уже выяснили в гл. 7. Так же, как мы ввели векторные поверхностные гармоники для цилиндрической геометрии (7.117), теперь нам нужно ввести подобные векторы для сферической геометрии. Введем обозначения:

$$\mathbf{R}_l^m(\Delta, \phi) = Y_l^m \hat{\mathbf{r}},$$

$$\mathbf{S}_l^m(\Delta, \phi) = \frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}} \left( \frac{\partial Y_l^m}{\partial \Delta} \hat{\Delta} + \frac{1}{\sin \Delta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \hat{\phi} \right), \quad (8.13)$$

$$T_l^m(\Delta, \phi) = \frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}} \left( \frac{1}{\sin \Delta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \hat{\Delta} - \frac{\partial Y_l^m}{\partial \Delta} \hat{\phi} \right),$$

где  $Y_l^m(\Delta, \phi)$  — полностью нормированная поверхностная гармоника, определенная в (8.5), а  $\hat{r}$ ,  $\hat{\Delta}$ ,  $\hat{\phi}$  — единичные векторы в направлениях  $r$ ,  $\Delta$ ,  $\phi$  соответственно (см. рис. 8.1). Легко заметить, что  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{T}$  перпендикулярны друг другу. Поскольку  $Y_l^m(\Delta, \phi)$  — полностью нормированная величина, векторные функции удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности:

$$\int_0^\pi \sin \Delta \, d\Delta \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{R}_l^{m*} \cdot \mathbf{R}_l^{m'} = \delta_{mm'} \delta_{ll'},$$

$$\int_0^\pi \sin \Delta \, d\Delta \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{S}_l^{m*} \cdot \mathbf{S}_l^{m'} = \delta_{mm'} \delta_{ll'},$$

$$\int_0^\pi \sin \Delta \, d\Delta \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{T}_l^{m*} \cdot \mathbf{T}_l^{m'} = \delta_{mm'} \delta_{ll'}.$$

*Сфероидальное колебание* — это такое движение, при котором радиальная компонента  $\nabla \times \mathbf{u}$  равна нулю; при *крутильном колебании* обе компоненты,  $u_r$  и  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ , равны нулю. Ясно, что однородная жидкая сфера может испытывать только сфероидальные колебания. Если нормальная мода создает в этой среде поле давлений, пропорциональное  $j_l(n\omega_l r/c) Y_l^m(\Delta, \phi) \exp(-i_n\omega_l t)$ , тогда, исходя из (8.1), соответствующее поле смещений пропорционально

$$\left\{ \left( \frac{dj_l}{dr} \right) \mathbf{R}_l^m(\Delta, \phi) + \frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r} j_l \mathbf{S}_l^m(\Delta, \phi) \right\} \frac{\exp(-i_n\omega_l t)}{\rho(n\omega_l)^2}. \quad (8.14)$$

Из полученного результата, а также непосредственно из (8.13) становится очевидным, что для описания векторных полей, связанных со сфероидальными колебаниями, требуются векторы  $\mathbf{R}_l^m$  и  $\mathbf{S}_l^m$  а для крутильных колебаний — вектор  $\mathbf{T}_l^m$ .

Рассматривая сферически-симметричные модели Земли, в которых отсутствует вращение, мы можем описать сфероидальные моды путем обобщения радиальных функций, приведенных в (8.14). Но эти моды все еще будут обладать теми же горизонтальными волновыми функциями, той же вырожденностью и ортогональностью, что и решение (8.12). Чтобы идентифицировать сфероидальные моды, часто используется символ  ${}_n S_l$ , а для обозначения тороидальных мод служит символ  ${}_n T_l$ .

В некотором смысле модель сферической Земли проще для исследования, чем модель плоской Земли, так как любое движение внутри сферы можно выразить при помощи суперпозиции нормальных мод. Просачивающиеся моды, рассмотрению которых мы отвели значительное место в предыдущей главе, не существуют в сфере. В следующем разделе показано, что формулы для описания собственных колебаний, возбужденных точечным источником, можно получить более простым путем, чем формулы для поверхностных волн.

## 8.2. ВОЗБУЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Поскольку сфера — тело конечных размеров, любое возмущение можно выразить в виде суперпозиции нормальных мод. Вслед за Гилбертом [132] вернемся в XIX в. и начнем с изучения колебаний системы, состоящей из  $N$  частиц, которую рассматривали Рэлей и Паус.

Пусть первоначально  $N$  частиц находятся в положении равновесия. Затем все частицы приходят в движение под действием внешних сил, приложенных таким образом, что на  $\alpha$ -ю частицу ( $\alpha=1, \dots, N$ ) действует сила  $\mathbf{f}_\alpha(t)$ . Пусть масса  $\alpha$ -й частицы равна  $m_\alpha$ , а ее смещение от положения равновесия равно  $\mathbf{u}_\alpha$ . Для малых смещений мы можем принять, что изменение силы взаимодействия между частицами есть линейная комбинация смещений. Тогда уравнение движения можно записать в виде

$$m_\alpha \frac{d^2 \mathbf{u}_\alpha(t)}{dt^2} + \sum_{\beta=1}^N c_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta(t) = \mathbf{f}_\alpha(t) \quad t > 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N), \quad (8.15)$$

при начальных условиях

$$\mathbf{u}_\alpha(0) = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{u}_\alpha(0) = \mathbf{0},$$

с — симметрическая и положительно определенная матрица [ср. с (2.32)].

Нормальные моды системы задаются решением (8.15) при  $\mathbf{f}_\alpha = 0$ . Поскольку для каждой частицы имеются три скалярных уравнения, можно определить  $3N$  собственных частот  $\omega_i$  и  $3N$  собственных векторов (нормальных мод) для всей системы. Нормальные моды обозначаются  $\mathbf{u}_\alpha \exp(-i\omega_i t)$ , т.е. это смещение  $\alpha$ -й частицы в  $i$ -нормальной моде. Чтобы описать моду, для каждого  $i$  нужно знать смещение всех частиц ( $\alpha = 1, \dots, N$ ). Смещение  $\alpha$ -й частицы в  $i$ -й нормальной моде получается решением уравнения

$$-\omega_i^2 m_\alpha (\mathbf{u}_\alpha) + \sum_{\beta} c_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\beta) = \mathbf{0} \quad (\alpha = 1, \dots, N). \quad (8.16)$$

Собственные векторы  $\mathbf{u}_\alpha$  ортогональны в том смысле, что

$$\sum_{\alpha} m_\alpha (\mathbf{u}_\alpha^*) \cdot (\mathbf{u}_\alpha) = 0$$

при  $i \neq j$ , но их амплитуды не определяются из (8.16). Мы нормируем их при помощи условия

$$\sum_{\alpha} m_\alpha (\mathbf{u}_\alpha^*) \cdot (\mathbf{u}_\alpha) = \delta_{ij}. \quad (8.17)$$

Взяв скалярное произведение выражения (8.16) и  $\mathbf{u}_\alpha^*$  и суммируя по  $\alpha$  с учетом (8.17), получаем

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\alpha^*) \cdot (\mathbf{u}_\beta) = \omega_i^2 \delta_{ij}. \quad (8.18)$$

Чтобы найти решение уравнения (8.15) как суперпозицию нормальных мод, нам необходимо определить коэффициенты  $a_i$  в разложении

$$\mathbf{u}_\alpha(t) = \sum_i a_i (\mathbf{u}_\alpha) \exp(-i\omega_i t) \quad (t > 0). \quad (8.19)$$

[Разумеется, мы используем для определения действительных  $u_\alpha(t)$  только действительную часть этой суммы.] Применим преобразование Лапласа  $u_\alpha(t) \rightarrow u_\alpha(s)$  для нахождения из (8.19)

$$u_\alpha(s) = \sum_i \frac{a_i}{s + i\omega_i} iu_\alpha. \quad (8.20)$$

Для определения коэффициентов  $a_i$  подставим (8.20) в преобразование Лапласа от (8.15):

$$m_x s^2 \sum_i \left( \frac{a_i}{s + i\omega_i} \right) iu_\alpha + \sum_\beta c_{\alpha\beta} \sum_i \left( \frac{a_i}{s + i\omega_i} \right) iu_\beta = f_x(s). \quad (8.21)$$

Объединив (8.17), (8.18) и (8.21), легко показать, что

$$\frac{a_j}{s + i\omega_j} = \frac{\sum_j iu_\beta^* \cdot f_\beta(s)}{s^2 + \omega_j^2};$$

следовательно, (8.20) можно записать в виде

$$u_\alpha(s) = \sum_i \left[ \frac{\sum_\beta iu_\beta^* \cdot f_\beta(s)}{s^2 + \omega_i^2} \right] iu_\alpha. \quad (8.22)$$

Это выражение легко преобразовать во временную область. Принимая, что изменение силы со временем описывается ступенчатой функцией  $f_\alpha(t) = F_\alpha H(t)$ , получим, что в выражении (8.22)  $f_\beta(s) = s^{-1} F_\beta$ .

Обратное преобразование Лапласа от  $[s(s^2 + \omega_i^2)]^{-1}$  дает  $H(t)(1 - \cos \omega_i t)/\omega_i^2$ , так что для  $t > 0$  имеем

$$u_\alpha(t) = \sum_i \left( \sum_\beta iu_\beta^* \cdot F_\beta \right) iu_\alpha \frac{1 - \cos \omega_i t}{\omega_i^2}. \quad (8.23)$$

Если рассматривать среду с диссипативными свойствами, то, используя временное  $Q$  (дополнение 5.7), получим, что

$$u_\alpha(t) = \sum_i \left( \sum_\beta iu_\beta^* \cdot F_\beta \right) iu_\alpha \frac{1 - \exp[-(\omega_i t/2Q_i)] \cos \omega_i t}{\omega_i^2}. \quad (8.24)$$

Структура этого решения обладает некоторыми очень интересными свойствами. Прежде всего заметим, что статическое смещение  $u_\alpha(t \rightarrow \infty)$  легко получается из (8.24) как сумма нормальных мод. Действительно, (8.24) показывает, что движение в каждой моде можно представить как затухающее колебание около нового уровня приведения, причем этот новый уровень возникает при  $t = 0$ , как следует из рис. 8.3. Далее, вид суммы нормальных мод (8.24) показывает, что мы можем узнать об источнике, основываясь на наблюдениях за смещением даже одной частицы. Предположим, что мы знаем все нормальные моды системы. Если мы наблюдаем  $\alpha$ -ю частицу и ее смещение  $u_\alpha(t)$ , попытаемся вывести коэффициенты возбуждения

$$\sum_\beta iu_\beta^* \cdot F_\beta$$



Рис. 8.3. Запись колебаний почвы в заданной нормальной моде, возбужденной источником в виде ступенчатой функции в момент  $t = 0$ .

при  $i = 1, 2, \dots, 3N$ . [Это невозможно для тех мод, которые имеют узлы в положении  $\alpha$ -частицы. В этих случаях  $u_\alpha = 0$  и коэффициент возбуждения моды невозможно определить по известному  $u_\alpha(t)$ , поскольку мода там не наблюдается. Для получения коэффициентов возбуждения нужно рассмотреть спектры Фурье функции  $u_\alpha(t)$  и измерить высоту спектральных пиков с центром на каждом значении  $\omega_r$ . Кроме того, коэффициенты возбуждения трудно определить в случае двух мод, обладающих почти одинаковыми частотами.] Интересно отметить, что, наблюдая только одну частицу и получив коэффициенты возбуждения, можно затем воспользоваться (8.24) для различных  $\alpha$  и предсказать движение всех остальных частиц системы. Даже если некоторые из коэффициентов возбуждения не определены (по причинам, указанным выше), все-таки возможно предсказать главные части спектра  $u_\alpha(t)$  для всех  $\alpha$ .

Мы остановились на этих замечаниях о решении (8.24), так как с небольшим видоизменением его можно применить к изучению строения Земли. Пусть число частиц увеличивается так, что среда становится почти непрерывной. В пределе

сумма по всем частицам вида  $\sum_{\beta=1}^N i u_\beta^* \cdot F_\beta$  заменится объемным интегралом вида  $\int i u^*(\xi) \cdot f(\xi) dV(\xi)$ , где  $f(\xi)$  означает теперь объемную силу на единицу объема.

Далее мы примем, что эта объемная сила действует во времени как ступенчатая функция. Из (8.24) непосредственно получаем

$$u(x, t) = \sum_i \left( \int_V i u^*(\xi) \cdot f(\xi) dV \right) u(x) \frac{1 - \exp[-(\omega_i t / 2Q_i)] \cos \omega_i t}{\omega_i^2}. \quad (8.25)$$

Здесь индекс  $i$  означает  $i$ -ю нормальную моду для Земли как целого, т.е. каждое  $i$  соответствует определенному набору из тройки целых чисел  $(l, m, n)$ , которые, как мы выяснили в разд. 8.1, необходимы для характеристики отдельных мод. Таким образом, сумма в (8.25) является бесконечной, но, как показал Рэлей [266, § 101], она сходится благодаря множителю  $\omega_i^{-2}$ . Нормальные моды в (8.25) нормированы [ср. с (8.17)] с помощью выражения

$$\int_V \rho(\xi) u^*(\xi) \cdot u(\xi) dV = \delta_{ij}, \quad (8.26)$$

где  $\rho(\xi)$  — плотность, и объемные интегралы в приведенных выше выражениях берутся по всему объему Земли.

Теперь найдем колебания сферической Земли, которые возбуждаются точечным источником, характеризующимся тензором сейсмического момента. Используя результат, полученный ранее в качестве упражнения (задача 3.4), запишем объемную силу следующим образом:

$$f_p(\xi, t) = -M_{pq}(t) \frac{\partial}{\partial \xi_q} \delta(\xi - x_s). \quad (8.27)$$

Примем, что  $M$  действует как ступенчатая функция времени в точке  $x_s$ ; тогда объемная сила также является ступенчатой функцией и можно непосредственно использовать (8.25). Следовательно,  $i$ -й коэффициент возбуждения теперь равен

$$\begin{aligned} \int_V i \mathbf{u}^*(\xi) \cdot \mathbf{f}(\xi) dV &= -M_{pq} \int_V i \mathbf{u}_p^*(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_q} \delta(\xi - x_s) dV(\xi) \\ &= i u_{p,q}^*(x_s) M_{pq} = i e_{pq}^*(x_s) M_{pq}, \end{aligned} \quad (8.28)$$

где  $i e_{pq}$  — компонента деформации ( $pq$ ) в  $i$ -й нормальной моде. Чтобы получить предпоследнее равенство в (8.28), мы воспользовались симметрией  $M_{pq} = M_{qp}$ . Подставляя (8.28) в (8.25), окончательно получаем смещение для произвольного точечного источника  $MH(t)$ , действующего в точке  $x_s$ :

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_i (i e_{pq}^*(x_s) M_{pq}) i \mathbf{u}(x) \frac{1 - \exp(-\omega_i t / 2Q_i) \cos \omega_i t}{\omega_i^2}. \quad (8.29)$$

Таким образом, если известны нормальные моды  $\mu$  Земли, несложно подсчитать отклик Земли на действие точечного источника с произвольным тензором момента.

Чтобы написать нормальные моды в явном виде, мы должны точнее определить модель Земли. Рассмотрим невращающуюся сферически-симметричную Землю, у которой плотность  $\rho(r)$  и параметры Ламе  $\lambda(r)$  и  $\mu(r)$  зависят только от расстояния  $r$  до центра симметрии. Уравнения движения (2.47) — (2.50) для этой модели удобно исследовать с помощью принятого в гл. 7 подхода, основанного на векторе движения-напряжения. В сферических координатах подходящее пробное решение для смещения в моде  $(l, m, n)$  имеет вид

$$[{}_n U_l(r) \mathbf{R}_l^m(\Delta, \phi) + {}_n V_l(r) \mathbf{S}_l^m(\Delta, \phi) + {}_n W_l(r) \mathbf{T}_l^m(\Delta, \phi)] \exp(-i_n \omega_l t). \quad (8.30)$$

Соответствующее напряжение, действующее на сферических поверхностях  $r = \text{const}$ , равно

$$[{}_n R_l(r) \mathbf{R}_l^m(\Delta, \phi) + {}_n S_l(r) \mathbf{S}_l^m(\Delta, \phi) + {}_n T_l(r) \mathbf{T}_l^m(\Delta, \phi)] \exp(-i_n \omega_l t), \quad (8.31)$$

и мы можем записать уравнения для радиальных функций в двух различных формах:

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r} & \frac{1}{\mu} & 0 \\ \frac{\lambda[l(l+1)]^{1/2}}{r(\lambda+2\mu)} & -\frac{2\lambda}{r(\lambda+2\mu)} & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} \\ \frac{4l(l+1)\mu(\lambda+\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)} - \rho\omega^2 - \frac{2\mu}{r^2} & -\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)[l(l+1)]^{1/2}}{r^2(\lambda+2\mu)} & -\frac{3}{r} & -\frac{\lambda[l(l+1)]^{1/2}}{r(\lambda+2\mu)} \\ -\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)[l(l+1)]^{1/2}}{r^2(\lambda+2\mu)} & -\rho\omega^2 + \frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)} & \frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r} & -\frac{4\mu}{r(\lambda+2\mu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

и

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{\mu} \\ \frac{\mu(l-1)(l+2)}{r^2} - \rho\omega^2 & -\frac{3}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}. \quad (8.33)$$

(Мы опустили индексы  $l$  и  $n$  в зависимых переменных и в  $\omega$ . Заметим, что  $m$  не входит в матричные уравнения.)

Таким образом, в колебаниях невращающейся сферически-симметричной Земли можно выделить два типа мод. Один из них — это сфероидальная мода с горизонтальными волновыми функциями  $R_l^m$  и  $S_l^m$  и определяемыми (8.32) радиальными волновыми функциями. Второй тип представляет собой тороидальную, или крутильную, моду с горизонтальной волновой функцией  $T_l^m$  и определяемой (8.33) радиальной волновой функцией. Из сравнения матриц в (8.32) и (7.28) ясно, что сфероидальные моды включают рэлеевские волны. Сравнивая (8.33) и (7.24), мы видим, что крутильные колебания включают волны Лява. Для таких сравнений нужно, чтобы горизонтальное волновое число  $k$  поверхностных волн было отождествлено с числом  $[l(l+1)]^{1/2}/r$  для собственных колебаний. В следующем разделе мы проведем более детальное сопоставление поверхностных волн и собственных колебаний.

Для нахождения нормальных мод нам нужно решить задачи на собственные значения — собственные векторы (8.32) и (8.33) при граничных условиях, состоящих в том, что решения регулярны при  $r = 0$  и напряжения равны нулю на поверхности Земли. Для решения этих задач можно применить численный метод и метод Рэлея-Ритца, описанный в гл. 7. Один способ преодоления трудностей, связанных с условием в  $r = 0$  [319], состоит в том, чтобы Землю считать однородной в области  $r < r_1$  и искать решения дифференциальных уравнений в виде степенного ряда по  $r$ . Затем степенной ряд оценивается при  $r = r_1$ , и от этого уровня вверх ведется численное интегрирование. Каждому целому числу  $l$  соответствуют собственные значения  ${}_n\omega_l$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), и для каждого  ${}_n\omega_l$  имеется собственная функция вектора движения-напряжения. Снова обратим внима-

ние на вырожденность, состоящую в том, что собственная частота и радиальная собственная функция независимы от  $m$  в диапазоне  $-l \leq m \leq l$ .

Формула нормировки (8.26) для нормальных мод вместе с аналогичной формулой для горизонтальных волновых функций приводит к следующей нормировке радиальных функций:

$$\int_0^{r_{\oplus}} \rho(r) \{ [{}_n U_l(r)]^2 + [{}_n V_l(r)]^2 \} r^2 dr = 1 \quad (8.34)$$

и

$$\int_0^{r_{\oplus}} \rho(r) [{}_n W_l(r)]^2 r^2 dr = 1, \quad (8.35)$$

где  $r_{\oplus}$  — радиус Земли.

Итак, решение в виде нормальных мод теперь полностью определено, и наш следующий шаг в расчете отклика на точечный источник будет заключаться в оценке тензора деформации для смещения в нормальных модах на глубине источника, поскольку он нужен для подстановки в (8.29). В сферических координатах  $(r, \Delta, \phi)$  получаем компоненты деформации из (2.45), полагая  $h^r = 1$ ,  $h^{\Delta} = r$ ,  $h^{\phi} = r \sin \Delta$ :

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ e_{\Delta\Delta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\Delta}}{\partial \Delta} + \frac{u_r}{r}, \\ e_{\phi\phi} &= \frac{1}{r \sin \Delta} \frac{\partial u_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{u_{\Delta}}{r} \cot \Delta + \frac{u_r}{r}, \\ e_{\Delta\phi} &= e_{\phi\Delta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{\phi}}{\partial \Delta} - u_{\phi} \cot \Delta \right) + \frac{1}{r \sin \Delta} \frac{\partial u_{\Delta}}{\partial \phi} \right], \\ e_{\phi r} &= e_{r\phi} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r \sin \Delta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_{\phi}}{\partial r} - \frac{u_{\phi}}{r} \right], \\ e_{r\Delta} &= e_{\Delta r} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_{\Delta}}{\partial r} - \frac{u_{\Delta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \Delta} \right], \end{aligned} \quad (8.36)$$

где  $u_r$ ,  $u_{\Delta}$  и  $u_{\phi}$  представляют собой  $r$ -,  $\Delta$ -,  $\phi$ -компоненты смещения, определенно-го выражением (8.30).

Следуя Гилберту и Дзевонскому [135], поместим точку возбуждения колебаний в полюс ( $\Delta = 0$ ) и оценим компоненты деформаций в нормальных модах как  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} e(\Delta)$ . Тогда мы найдем, что при  $|m| > 2$  все компоненты стремятся к нулю. Компоненты деформаций для сфероидальных колебаний представлены в табл. 8.1, соответствующие результаты для крутильных колебаний — в табл. 8.2. Появившаяся в этих таблицах постоянная  $b_0$  равна  $[(2l + 1)/4\pi]^{1/2}$ . Рассчитав компоненты деформации на уровне источника  $r = r_s$  и подставляя их в (8.29), мы найдем отклик Земли на точечный источник с произвольным тензором момента, меняющимся во времени как ступенчатая функция. Для произвольной временной зависимости мы можем использовать интеграл свертки  $\dot{M}_{pq}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{M}_{pq}(\tau) H(t - \tau) d\tau$ . Рассматривая данное подынтегральное выражение как

источник в виде ступенчатой функции, действующей в момент времени  $t = \tau$ , найдем из (8.29), что

$$u(x, t) = \sum_i [e_{pq}^*(x_s) \dot{M}_{pq}(t)] * u(x) \left( \frac{1 - \exp(-\omega_i t / 2Q_i) \cos \omega_i t}{\omega_i^2} \right). \quad (8.37)$$

Звездочка, следующая после  $\dot{M}_{pq}$ , означает свертку, и мы записали (8.37), чтобы показать, что точечный источник естественным образом характеризуется своим тензором скорости изменения момента  $\dot{M}(t)$ .

В этом разделе мы проделали простые и явные выкладки, основываясь на работах Гилберта [132] и Гилберта и Дзевонского [135], для вывода формул, описывающих возбуждение собственных колебаний. Ту же задачу решил ранее Сай-

Таблица 8.1

Компоненты деформаций для сфероидальных колебаний

	$m = 0$	$m = \pm 1$	$m = \pm 2$
$e_{rr}$	$b_0 \frac{dU}{dr}$	0	0
$e_{\Delta\Delta}$	$\frac{b_0}{r} [U - \frac{1}{2}\sqrt{l(l+1)}V]$	0	$\frac{b_0\sqrt{(l+2)(l-1)}}{4} \frac{V}{r}$
$e_{\phi\phi}$	$e_{\Delta\Delta}$	0	$-e_{\Delta\Delta}$
$2e_{r\Delta}$	0	$-\frac{b_0}{2} \left[ \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} U + \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right]$	0
$2e_{r\phi}$	0	$2ime_{r\Delta}$	0
$2e_{\Delta\phi}$	0	0	$ime_{\Delta\Delta}$

Таблица 8.2

Компоненты деформаций для крутильных колебаний

	$m = 0$	$m = \pm 1$	$m = \pm 2$
$e_{rr}$	0	0	0
$e_{\Delta\Delta}$	0	0	$\frac{imb_0}{8} \sqrt{(l+2)(l-1)} \frac{W}{r}$
$e_{\phi\phi}$	0	0	$-e_{\Delta\Delta}$
$2e_{r\Delta}$	0	$-\frac{imb_0}{2} \left[ \frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right]$	0
$2e_{r\phi}$	0	$\frac{b_0}{2} \left[ \frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right]$	0
$2e_{\Delta\phi}$	0	0	$\frac{-b_0\sqrt{(l+2)(l-1)}}{2} \frac{W}{r}$

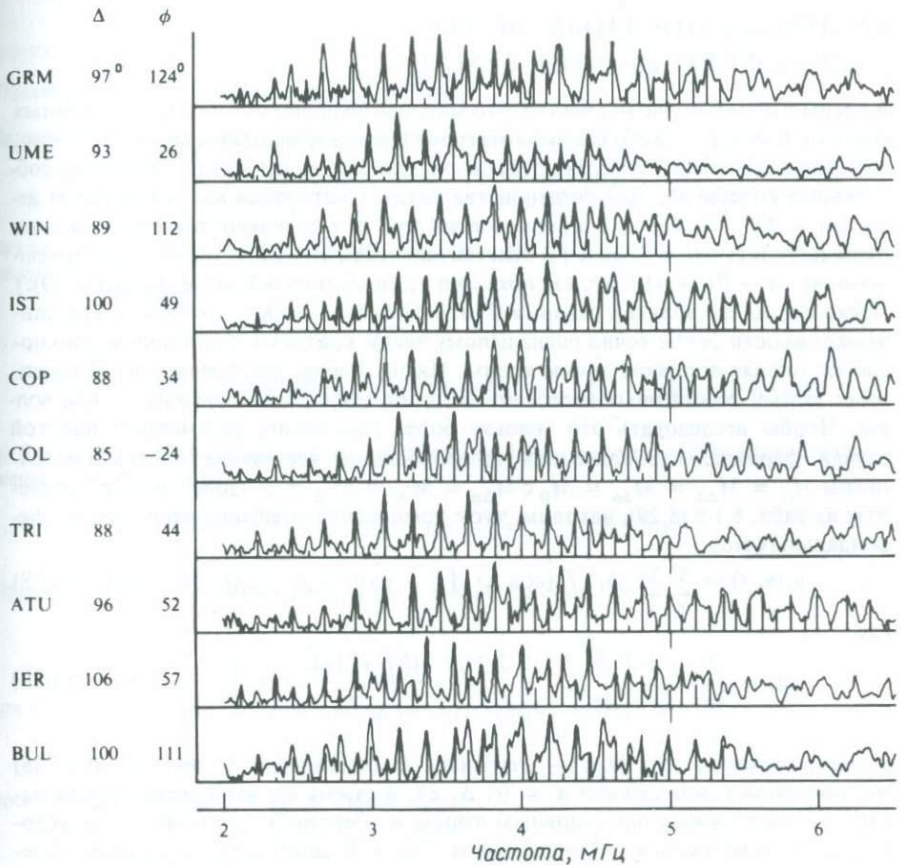


Рис. 8.4. Непрерывными линиями показаны спектры наблюдаемых радиальных смещений. Вертикальные отрезки — теоретические спектральные линии для основной моды сфероидальных колебаний.  $\Delta$  — эпицентральный расстояние,  $\phi$  — азимут на эпицентр, измеренный по часовой стрелке от направления на север. (По Мендигурену [229].)

то [280]. Его метод был подобен тому, который мы описали в гл. 7, рассматривая возбуждение поверхностных волн. При этом он получил формулу, эквивалентную (8.29). Результаты Сайто использовал Мендигурен [229] при создании алгоритма суммирования с высокой разрешающей способностью для идентификации спектральных пиков, как описано в гл. 11. На рис. 8.4 проводится сравнение наблюдаемых и расчетных спектральных пиков, полученных на ряде станций WWSSN для сильного глубокого землетрясения в Колумбии. Непрерывными линиями показан спектр наблюдаемых радиальных смещений, вертикальные отрезки указывают теоретические амплитуды собственных колебаний, рассчитанные Мендигурену [229] на основе формул Сайто и механизма очага, определенного по наблюдениям знаков первых вступлений  $P$ -волн.

### 8.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ЗЕМЛЕ

В предыдущем разделе мы нашли, что матрица коэффициентов для собственных колебаний (8.32) — (8.33) близка к матрице для поверхностных волн при  $r \rightarrow \infty$ , если волновое число  $k$  поверхностных волн заменено на  $[l(l+1)]^{1/2}/r$  в случае собственных колебаний. Для большинства задач, с которыми мы здесь имеем дело,  $[l(l+1)]^{1/2} \sim l + 1/2$  и волновое число  $k$  для поверхностных волн можно отождествлять с  $(l + 1/2)/r$ . { В действительности  $k \rightarrow (l + 1/2)/r$  более приемлемо, чем  $k \rightarrow [l(l+1)]^{1/2}/r$ , как показано в дополнении 9.3 после уравнения (9). } Поскольку длина волны  $\lambda$  равна  $2\pi/k$ , это означает, что  $\lambda = 2\pi r/(l + 1/2)$  и длина окружности  $2\pi r$  не точно равна целому числу, кратному длине волны; наблюдается лишняя половина длины волны. Иначе говоря, расстояние между соседними узлами собственных колебаний не будет везде равно половине длины волны. Чтобы исследовать это условие более тщательно, рассмотрим простой случай сфероидальных колебаний, генерированных взрывным точечным источником  $M_{rr} = M_{\Delta\Delta} = M_{\phi\phi} = M_0$  с  $M_{\Delta\phi} = M_{\phi r} = M_{r\Delta} = 0$ . Подставляя компоненты из табл. 8.1 в (8.29), находим, что  $r$ -компонента смещения равна сумме сфероидальных мод:

$$u_r(\mathbf{x}, t) = \sum_n \sum_l n A_l \cdot P_l(\cos \Delta) \cdot [1 - \exp(-n\omega_l t / 2nQ_l) \cos n\omega_l t], \quad (8.38)$$

где

$$n A_l = \frac{2l+1}{4\pi(n\omega_l)^2} \left[ \frac{d}{dr} n U_l + \frac{2n U_l}{r} - \frac{(l(l+1))^{1/2}}{r} n V_l \right] \Big|_{r=r_s} n U_l(r), \quad (8.39)$$

и мы положили, что  $M_0(t)$  — ступенька с амплитудой 1 дин·см. В (8.38) мы пользуемся допущением  $\mathbf{x} = (r, \Delta, \phi)$ , и сумма по всем модам  $i$  записывается в виде суммы по основным тонам и обертонам с номером  $n$  и угловым волновым числом  $l$ . Только моды с  $m = 0$  дают вклад в решение. Следовательно, (8.38) описывает суперпозицию стоячих волн, называемых *зональными гармониками* и определяемых выражением  $P_l(\cos \Delta)$ . Поскольку  $P_l(\cos \Delta)$  в интервале  $0 < \Delta < \pi$  имеет ровно  $l$  узлов, по большому кругу укладывается  $l$  циклов колебаний. С другой стороны, асимптотическое разложение  $P_l(\cos \Delta)$ , которое справедливо при больших  $l$  (вне областей вблизи  $\Delta = 0$  или  $\Delta = \pi$ ), можно записать следующим образом (см. дополнения 8.3 и 9.3):

$$P_l(\cos \Delta) \sim \left( \frac{2}{l\pi \sin \Delta} \right)^{1/2} \cos \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right) \Delta - \pi/4 \right]. \quad (8.40)$$

Это опять-таки показывает, что длина волны составляет приблизительно  $2\pi r/(l + 1/2)$ , за исключением областей вблизи  $\Delta = 0$  и  $\Delta = \pi$ . Взяв  $l$  циклов таких волн, мы получаем  $2\pi r/(l + 1/2)$  вместо  $2\pi r$ . Это означает, что расстояние между соседними узлами в окрестности  $\Delta = 0$  или  $\pi$  больше, чем в других областях, и, следовательно, кажущаяся фазовая скорость в этих областях выше.

## ДОПОЛНЕНИЕ 8.2

*Пример формулы суммирования Пуассона*

Зададим некоторую функцию  $g = g(\nu)$  и докажем прежде всего, что

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l + \frac{1}{2}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) e^{2i\pi s \nu} d\nu. \quad (1)$$

Затем, применяя формулу (1) к функции  $f(\nu)$  такой, что  $f = g$  при  $\nu \geq 0$  и  $f = 0$  при  $\nu < 0$ , получим

$$\sum_{l=0}^{\infty} g(l + \frac{1}{2}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \int_0^{\infty} g(\nu) e^{2i\pi s \nu} d\nu. \quad (2)$$

Чтобы доказать (1), определим  $S = S(x)$  как  $S(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l + 1/2 + x)$ . Тогда

$S$  становится периодической функцией с периодом 1. Мы можем записать для нее разложение в ряд Фурье в виде

$$S(x) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} S_s e^{-2i\pi s x}, \quad \text{где } S_s = \int_0^1 S(y) e^{2i\pi s y} dy.$$

Приняв  $x = 0$  и используя выражения для  $S_s$  и  $S(y)$ , получим

$$S(0) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l + \frac{1}{2} + y) e^{2i\pi s y} dy;$$

при этом заметим, что  $S(0)$  равно левой части (1). Кроме того,

$$e^{2i\pi s y} = (-1)^s e^{2i\pi s(l + 1/2 + y)}$$

поскольку  $s$ ,  $l$  и  $sl$  — целые числа. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l + \frac{1}{2}) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \int_0^1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(l + \frac{1}{2} + y) e^{2i\pi s(l + 1/2 + y)} dy \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{l+1/2}^{l+3/2} g(\nu) e^{2i\pi s \nu} d\nu, \end{aligned}$$

что равно правой части (1).

При измерении фазовой скорости поверхностных волн описанный эффект вызывает кажущееся фазовое опережение, достигающее до  $\pi/2$  при каждом прохождении полюса, что должно учитываться, если путь содержит эпицентр или его антипод. [Фазовый сдвиг на  $\pi/4$  в (8.40) удваивается за счет входа и выхода из полярной области.] Этот эффект называется *полярным фазовым сдвигом* и введен в современной сейсмологии Брюном и др. [57]; они показали, что учет этого эффекта снимает выявленные ранее противоречия в результатах для фазовых скоростей, измеренных на малых дугах, больших дугах и на полных больших кругах.

Для количественного сравнения собственных колебаний и поверхностных волн воспользуемся формулой суммирования Пуассона для каждого обертона в (8.38). Тогда из уравнения (2) дополнения 8.2 получим

$$u_r(x, t) = \sum_n \int_0^\infty dv \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s ({}_n A_{v-1/2}) P_{v-1/2}(\cos \Delta) C(v, t) e^{2insv}, \quad (8.41)$$

где

$$C(v, t) = H(t) [1 - \cos({}_n \omega_{v-1/2} t) \cdot \exp(-{}_n \alpha_{v-1/2} t)] \quad (8.42)$$

и  $\alpha$  связано с временным  $Q$  следующим образом:  $\alpha = \omega/2Q$ .

Следуя Гилберту [133], перепишем в (8.41) сумму по  $s$ , используя функции Лежандра второго рода, обозначенные  $Q_j(\cos \Delta)$  (см. дополнение 8.3). Тогда

$$u_r(x, t) = \sum_n \int_0^\infty dv {}_n A_{v-1/2} \sum_{N=1}^{\infty} R_N(v, \Delta) C(v, t), \quad (8.43)$$

где для нечетных  $N$

$$R_N = (-1)^{(N-1)/2} \left\{ P_{v-1/2}(\cos \Delta) \cos[(N-1)\pi v] + \frac{2}{\pi} Q_{v-1/2}(\cos \Delta) \sin[(N-1)\pi v] \right\}, \quad (8.44)$$

а для четных  $N$

$$R_N = (-1)^{N/2} \left\{ P_{v-1/2}(\cos \Delta) \cos(N\pi v) - \frac{2}{\pi} Q_{v-1/2}(\cos \Delta) \sin(N\pi v) \right\}. \quad (8.45)$$

Эквивалентность (8.41) и (8.43) следует из равенства

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \dots \\ = P_{v-1/2}(1 - \cos 2\pi v - \cos 2\pi v + \cos 4\pi v + \cos 4\pi v - \cos 6\pi v - \dots) \\ + \frac{2}{\pi} Q_{v-1/2}(0 + \sin 2\pi v - \sin 2\pi v - \sin 4\pi v + \sin 4\pi v \\ + \sin 6\pi v - \dots) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s P_{v-1/2} e^{2insv}. \end{aligned}$$

ДОПОЛНЕНИЕ 8.3.

### Различные функции Лежандра и их асимптотические приближения

В дополнении 8.1 мы исследовали полиномы Лежандра  $P_l(\cos \Delta)$ . Хотя они являются единственными решениями, физически возможными вблизи  $\Delta = 0$  и  $\Delta = 180^\circ$ , часто имеет смысл оперировать с различными уравнениями Лежандра, поскольку эти решения локально могут подходить для описания сейсмических движений на расстояниях, отличных от  $\Delta = 0$  и  $\Delta = 180^\circ$ .

Воспользовавшись формулами из работы Нуссенцвейга [241], запишем

$$P_{v-1/2}(\cos \Delta) = \left( \frac{2}{\pi v \sin \Delta} \right)^{1/2} \left[ \cos \left( v\Delta - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\cot \Delta}{8v} \sin \left( v\Delta - \frac{\pi}{4} \right) + O \left( \frac{1}{v^2} \right) \right] \quad (1)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \Delta \leq \pi - \varepsilon$ ,  $|\nu| \gg 1$  и  $|\nu| \varepsilon \gg 1$ . То, что это решение близко по свойствам к

$$(\sin \Delta)^{-1/2} \cos(\nu \Delta - \frac{1}{4}\pi),$$

позволяет предположить существование линейно-независимого решения с асимптотическим поведением, как у выражения  $(\sin \Delta)^{-1/2} \sin(\nu \Delta - \pi/4)$ . Суммируя и вычитая эти решения, можно в результате получить бегущие волны. Действительно, существуют решения Лежандра  $Q^{(i)} (i = 1, 2)$ , обладающие следующими свойствами:

$$Q_{\nu-1/2}^{(1)(2)}(\cos \Delta) = \frac{e^{\mp i(\nu \Delta - \pi/4)}}{(2\pi \nu \sin \Delta)^{1/2}} \left[ 1 \pm i \frac{\operatorname{ctg} \Delta}{8\nu} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) \right] \quad (2)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \Delta \leq \pi - \varepsilon$ ,  $|\nu| \gg 1$ ,  $|\nu| \varepsilon \gg 1$  и  $(\nu - 1/2)$ , не равном отрицательным целым числам, когда  $Q_{\nu-1/2}^{(i)}$  не имеет полюсов. Эти полюсы взаимно сокращаются в сумме

$$P_l = Q_l^{(1)} + Q_l^{(2)}.$$

Формальное определение  $Q_l^{(i)}$  таково:

$$Q_l^{(1)(2)} = \frac{1}{2} \left( P_l \pm \frac{2i}{\pi} Q_l \right), \quad (3)$$

где  $Q_l$  — функция Лежандра второго рода, но основные свойства  $Q_l^{(i)}$  по-прежнему следуют из (2).

Еще два решения уравнения Лежандра задаются комбинацией (8.44) и (8.45). Записывая их через  $Q^{(1)}$  и  $Q^{(2)}$ , получим для нечетных  $N$

$$\begin{aligned} R_N &= (-1)^{(N-1)/2} [Q_{\nu-1/2}^{(1)}(\cos \Delta) e^{-i(N-1)\pi\nu} + Q_{\nu-1/2}^{(2)}(\cos \Delta) e^{i(N-1)\pi\nu}] \\ &\sim (-1)^{(N-1)/2} \left( \frac{2}{\pi \nu \sin \Delta} \right)^{1/2} \cos \left\{ \nu \left[ (N-1)\pi + \Delta \right] - \frac{\pi}{4} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

а для четных  $N$

$$\begin{aligned} R_N &= (-1)^{N/2} [Q_{\nu-1/2}^{(2)}(\cos \Delta) e^{-iN\pi\nu} + Q_{\nu-1/2}^{(1)}(\cos \Delta) e^{iN\pi\nu}] \\ &\sim (-1)^{N/2} \left( \frac{2}{\pi \nu \sin \Delta} \right)^{1/2} \cos \left\{ \nu \left[ N\pi - \Delta \right] + \frac{\pi}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) ясно, что каждое  $R_N$  описывает стоячую волну.

Равномерное асимптотическое приближение для  $P_{\nu-1/2}$ , которое справедливо даже вблизи  $\Delta = 0$ , имеет вид

$$P_{\nu-1/2}(\cos \Delta) = \left( \frac{\Delta}{\sin \Delta} \right)^{1/2} \left[ J_0(\nu \Delta) + \frac{1}{8} (\Delta \operatorname{ctg} \Delta - 1) \frac{J_1(\nu \Delta)}{\nu \Delta} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) \right].$$

Попытка идентифицировать объемные и поверхностные волны в некотором выражении, включающем наряду с этими волнами еще и другие, представляет собой главным образом упражнение в операциях с шестью функциями Лежандра:  $P$ ,  $Q$ ,  $Q^{(1)}$ ,  $Q^{(2)}$ ,  $R_N$  ( $N$  четное),  $R_N$  ( $N$  нечетное). Эта проблема еще возникнет в гл. 9, но там мы предпочтем пользоваться преобразованием Уотсона, а не суммированием Пуассона.

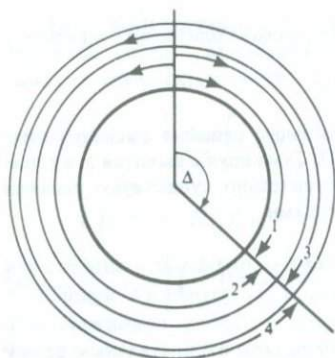


Рис. 8.5. Нумерация орбит для волн, распространяющихся вокруг Земли.  $N = 1$  соответствует малой дуге,  $N = 2$  — большой дуге,  $N \geq 3$  включает по крайней мере один полный большой круг.

$R_N$  введены по той причине, что они представляют собой подходящие горизонтальные функции для  $N$ -й орбиты волн, распространяющихся вокруг Земли. Нумерация орбит показана на рис. 8.5. Однако заметим, что каждое  $R_N$  в том виде, как оно определено в (8.44) — (8.45), соответствует все же стоячей, а не бегущей волне. Это обстоятельство продемонстрировано в дополнении 8.3; теперь же подчеркнем, что при сравнении с поверхностными волнами для каждого  $N$  следует ожидать наличия горизонтальных фазовых функций, которые при положительном волновом числе соответствуют стоячим волнам. Этот вывод является следствием тех решений, которые мы часто получали в гл. 6 и 7:

$$u(X, \omega) = \int_0^{\infty} f(k, \omega) J_0(kX) dk \quad (8.46)$$

для плоских моделей Земли. Мы ввели здесь  $X$  в качестве горизонтального расстояния;  $k$  — горизонтальное волновое число и  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка. Подынтегральная функция в (8.46) — стоячая волна, и, чтобы получить представление бегущей волны, используем свойство  $f(-k, \omega) = -f(k, \omega)$  и

$$u(X, \omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(k, \omega) H_0^{(1)}(kX) dk \quad (8.47)$$

[см., например, (6.15)]. Интересно, что волновые функции бегущих волн  $H_0^{(1)}$  и  $H_0^{(2)}$  для плоской Земли имеют разрез вдоль отрицательной полуоси действительных волновых чисел ( $k < 0$ ) и что аналогичные волновые функции для сферической Земли  $Q_{\nu-1/2}^{(2)}$  и  $Q_{\nu-1/2}^{(1)}$  имеют полюсы на отрицательной полуоси действительных волновых чисел ( $\nu < 0$ ). В гл. 9 мы рассмотрим несколько примеров цепочки полюсов, во многом сходных с разрезами.

Принимая во внимание в (8.43) только волны, приходящие первыми ( $N = 1$ ), запишем  $l + 1/2 = \nu = kr$ , где  $r = |x|$  — радиальное положение приемника (обычно  $r = r_{\oplus}$ ). Тогда

$$u(r, x, t) = \left( \frac{\Delta}{\sin \Delta} \right)^{1/2} \sum_n \int_0^{\infty} r dk_n A(k) J_0(kX) C(kr, t), \quad (8.48)$$

где мы воспользовались соотношением

$$R_1(\nu, \Delta) = P_{\nu-1/2}(\cos \Delta) \sim \left( \frac{\Delta}{\sin \Delta} \right)^{1/2} J_0(kX). \quad (8.49)$$

$X$  — это горизонтальное расстояние  $r\Delta$ ; следовательно,  $\nu\Delta = kX$ ;  ${}_n A(k) = {}_n A_{\nu-1/2}$ .

Пренебрегая членом, описывающим в выражении для  $C(kr, t)$  статическое смещение, заметим, что преобразование Фурье функции  $u_r(x, \omega)$  получается подстановкой выражения

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{i[\omega + {}_n\omega(k)] - {}_n\alpha(k)} + \frac{1}{i[\omega - {}_n\omega(k)] - {}_n\alpha(k)} \right]$$

для  $C$  в (8.48). Коэффициент при  $J_0(kX)$  в (8.48) является нечетным по  $k$ ; следовательно,

$$u_r(x, \omega) = \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta}{\sin \Delta} \right)^{1/2} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} r dk {}_n A(k) H_0^{(1)}(kX) \frac{1}{i[\omega - {}_n\omega(k)] - {}_n\alpha(k)}. \quad (8.50)$$

Второй член, включающий  $\omega + {}_n\omega(k)$ , опущен, поскольку он порождает полюс в нижней половине плоскости комплексного  $k$ , а мы хотим замкнуть контур в верхней полуплоскости. Чтобы локализовать полюс приведенного выше подынтегрального выражения и оценить его вычит, можно записать ряд Тейлора для  ${}_n\omega(k)$  при  $k$ , меняющемся вблизи значения  $k_n(\omega)$  — собственного значения  $n$ -моды поверхностной волны. Таким образом,

$${}_n\omega(k) = \omega + (k - k_n)U_n(\omega) + \dots,$$

где  $U_n(\omega) = d\omega/dk =$  групповой скорости. Групповая скорость почти всегда положительна, поэтому полюс, определенный по (8.50), лежит в первом квадранте плоскости комплексного  $k$  при  $k = k_n(\omega) + i\alpha_n/U_n(\omega)$ . Здесь  $\alpha_n$  определено исходя из временного  $Q$ ; если же мы переходим к описанию затухания, основанному на пространственном  $Q$ , мы должны заменить  $\alpha_n/U_n = \omega/2Q_n^{\text{вп}}U_n$  на  $\omega/2Q_n^{\text{вп}}c_T = k_n/2Q_n^{\text{вп}}$  [см. (7.92)]. Рассматривая путь интегрирования, показанный на рис. 8.6, и вводя аппроксимацию дальней зоны для  $H_0^{(1)}$ , мы можем оценить вычеты от полюсов в первом квадранте (один полюс для каждого  $n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и найти

$$u_r(x, \omega) = i \frac{\pi}{2} \left( \frac{\Delta}{\sin \Delta} \right)^{1/2} \sum_n \frac{rA(k_n)}{U_n} \left( \frac{2}{\pi k_n X} \right)^{1/2} \exp \left[ i \left( k_n X + \frac{\pi}{4} \right) \right] \exp(-k_n X / 2Q_n). \quad (8.51)$$

Здесь запись  $A(k_n)$  относится к  ${}_n A(k)$ , рассчитанному при  $k = k_n(\omega)$ ; кроме того, мы приняли, что множители в (8.50), за исключением фазовой функции  $e^{ikX}$ , — медленно меняющиеся функции  $k$  вблизи каждого полюса. Уравнение (8.51) дает представление поверхностных волн, возбужденных в сферической Земле взрывным источником с временной функцией единичной амплитуды.

Сравнивая (8.51) с соответствующими формулами (7.151) для волн Рэлея в среде с плоскопараллельными слоями, мы должны учесть разницу в нормировке радиальных и вертикальных собственных функций. В самом деле,  $r_n U_l(r)$  соот-

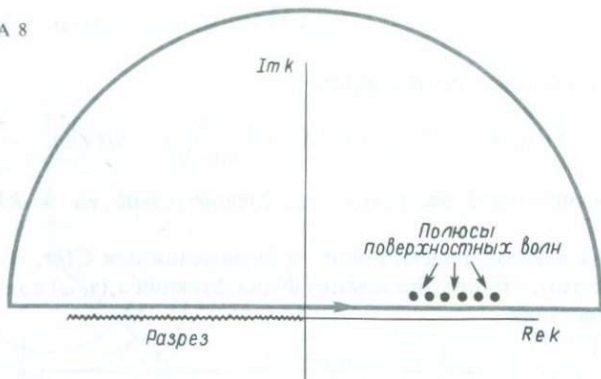


Рис. 8.6. Свойства плоскости комплексного волнового числа, используемые для оценки вклада поверхностных волн в смещение, описываемое формулой (8.50).

ветствует  $r_2(z)/\sqrt{2I_1}$ ;  $rd_n U_n(r)/dr \rightarrow -(dr_2(z)/dz)/\sqrt{2I_1}$ ;  $r_n V_n(r) \rightarrow r_1(z)/\sqrt{2I_1}$ . Таким образом,  $rA v(k_n)$  в (8.51) заменяется в первом приближении на

$$-\frac{k_n}{2\pi\omega^2} \left[ \frac{dr_2}{dz} + k_n r_1 \right] \Bigg|_{\text{на уровне источника}} \frac{r_2(z)}{2I_1}.$$

Учитывая, что (8.51) — формула для движения, направленного *вверх*, а (7.151) — для компоненты движения, направленной *вниз*, можно сделать вывод, что обе формулы практически идентичны. Единственное различие заключено в множителе, описывающем пространственное затухание, который мы явно включили в (8.51), и в множителе  $(\Delta/\sin\Delta)^{1/2}$ , который описывает азимутальное геометрическое расхождение на поверхности сферы в отличие от расхождения на плоской поверхности.

Суммируя изложенное выше, можно сказать, что влияние сферичности Земли можно учесть с помощью множителя геометрического расхождения, пропорционального  $(\sin\Delta)^{-1/2}$ , а также соответствующих собственных функций, найденных путем решения уравнений (8.32) — (8.33), записанных с помощью вектора движения-напряжения в сферической модели Земли.

#### 8.4. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ ЗЕМЛИ

Сила тяжести не влияет на крутильные колебания, так как они не обладают радиальной компонентой смещения и дивергенцией и поэтому не изменяют распределение плотности. Но при сфероидальных колебаниях возмущения плотности возникают. Поскольку сила тяжести является по существу объемной силой, ее зависимость от времени будет влиять на движение в целом. Гравитацией нельзя пренебрегать для сфероидальных колебаний с периодами, превышающими примерно 500 с. Прежде чем изложить необходимую теорию, коснемся истории вопроса.

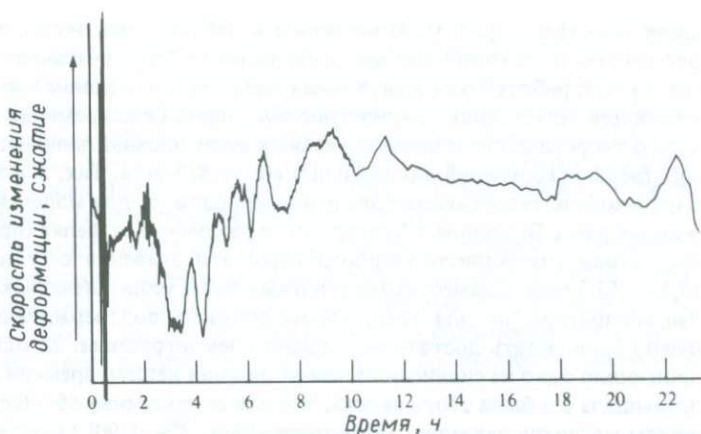


Рис. 8.7. Сейсмограмма Камчатского землетрясения 4 ноября 1952 г., записанная в Пасадене, шт. Калифорния (США), стрейн-сейсмографом Беньоффа. На записи, сделанной через 3,5 ч после начала землетрясения, видно колебание (или волновой пакет), состоящее из четырех циклов, по первоначальным сообщениям имеющее период 57 мин. (Воспроизведено из [31]; с разрешения Американского геофизического общества.)

Теорию собственных колебаний однородной твердой упругой сферы опубликовал Лэмб в 1882 г. Из нее известно, что модой с наибольшим периодом является  $\rho S_2$ . Бромвич [52] исследовал периодическое уравнение численно и сумел включить в рассмотрение эффект гравитации в случае несжимаемой среды. Он показал, что для несжимаемой сферы, имеющей те же размеры и массу, что и Земля, а твердость, равную твердости стали, период  $\rho S_2$  уменьшается с 65 до 55 мин при учете самогравитации. Ляв [217] сумел учесть самогравитацию уже сжимаемой среды и, приняв коэффициент Пуассона равным  $1/4$  для модели Земли, которая в остальном подобна рассмотренной Бромвичем, нашел, что период  $\rho S_2$  должен равняться почти точно одному часу. Очевидно, что если мы зададимся целью наблюдать эту моду, то для этого будут необходимы приборы, чувствительные к значительно более длинным периодам, чем обычно регистрируемые периоды сейсмических волн.

В 40 — 50-х годах стало очевидным, что наблюдаемые сейсмические поверхностные волны имеют свойства, которые в значительной степени можно объяснить с привлечением теории поверхностных волн, которая была разработана для пачки однородных плоских пластин, скрепленных по поверхностям раздела. Теория для такой среды активно развивалась [152, 112], и, что особенно важно, для такой среды оказалось возможным вычислить дисперсию. Ясной стала и необходимость конструировать сейсмометры, с помощью которых можно было бы регистрировать все более длинные периоды, поскольку только в этом случае наблюдаемую дисперсию поверхностных волн можно было бы использовать для изучения строения Земли в более глубоких областях мантии. Беньофф из Калифорнийского технологического института был одним из создателей таких приборов. При помощи его стрейн-сейсмографа с кварцевой нитью была произведена запись Камчатского землетрясения 4 ноября 1952 г. (рис. 8.7). Как сооб-

щали Беньофф и др. [33], 57-минутное колебание, «вероятно, представляет собой собственные колебания Земли как целого». Этот результат вдохновил многих ученых, работающих в различных областях, на создание аппаратуры, подходящей для регистрации длиннопериодных волн. Одновременно он привел к усилению теоретических и вычислительных исследований, направленных на расчет собственных колебаний для реальных моделей Земли. Так, Альтерман и др. [11] опубликовали теоретические значения периодов  $\sigma S_2$  для моделей Земли, предложенных ранее Булленом и Буллардом: в различных моделях (при наличии и при отсутствии внутреннего твердого ядра) эти значения составляют примерно 53,5 — 53,7 мин. Совместными усилиями была усовершенствована измерительная аппаратура, но для того, чтобы получить подтверждение наблюдениям, нужно было ждать достаточно сильного землетрясения. 22 мая 1960 г. в Чили произошло одно из сильнейших землетрясений нашего времени. (Магнитуда его превышала 8 и была столь велика, что для ее измерения обычно применявшиеся шкалы магнитуд оказались недостаточными. См. [190].) Среди огромного возбуждения, связанного с этим событием, три группы исследователей доложили на заседании IASPEI (Международная ассоциация сейсмологии и физики земных недр), состоявшемся летом 1960 г. в Хельсинки, что они наблюдали множество нормальных мод собственных колебаний Земли [34, 239, 9]. Стало ясно, что возникла совершенно новая область сейсмологии.

В этом разделе представлена теория сфероиальных мод для модели Земли, которая является сферически-симметричной, невращающейся, самогравитирующей, упругой и имеет изотропную связь между напряжением и деформацией и изотропное начальное напряжение.

#### ДОПОЛНЕНИЕ 8.4

##### *Счастливым случаем или уникальная запись истинных движений почвы?*

Хотя сейсмограмма, приведенная на рис. 8.7, явилась огромным стимулом для изучения нормальных мод, в начале 1960-х годов стало очевидным, что длиннопериодные колебания, зарегистрированные в Пасадене после землетрясения, весьма аномальны во многих отношениях: 1) объявленный период 57 мин длиннее, чем обычные оценки для  $\sigma S_2$  (~ 54 мин); 2) период 57 мин настолько преобладает в некоторой части записи, что трудно объяснить, почему же другие собственные колебания так слабы; 3) только четыре цикла имеют период 57 мин, и непонятно, почему эти колебания должны прекратиться. Поэтому в течение нескольких лет считали, что появление этих длиннопериодных циклов вызвал какой-то инструментальный дефект. Однако Канамори [189] показал, что 1) период равен не 57 мин, а (как получается после тщательного анализа Фурье) составляет около 54 мин. Он рассудил, что 2) в очаговой области Камчатского землетрясения, возможно, произошла некоторая постсейсмическая медленная деформация такой длительности, что преимущественно была возбуждена мода  $\sigma S_2$ ; 3) прекращение колебаний после четырех циклов обусловлено деструктивной интерференцией между различными членами  $\sigma S_2^m$  ( $-2 \leq m \leq 2$ ), которые существенно различаются вследствие вращения Земли, или примерно после семичасовой записи действительно возник инструментальный дефект.

Уравнения упругого движения, которые мы вывели в гл. 2, были основаны главным образом на формулировке Лагранжа, в которой принимается, что частица, находящаяся в момент времени  $t_0$  в  $\mathbf{x}$ , перемещается в положение  $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{X}$  в момент  $t$ , и мы рассматривали  $\mathbf{u}$  как функцию  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . К сожалению, метод Лагранжа не позволяет достаточно легко ввести изменения плотности и последующие эффекты флуктуации гравитационного поля. Поэтому мы здесь воспользуемся подходом Эйлера:  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{u}$  определяются, как и выше, но такие параметры, как  $\mathbf{u}$  и  $\rho$ , изучаются как функции от  $(\mathbf{X}, t)$ .

Теперь представим себе сферическую модель Земли, которая находится в состоянии гидростатического равновесия под действием самогравитации. Состояние равновесия описывается плотностью  $\rho_0(r)$ , давлением  $P_0(r)$  и гравитационным потенциалом  $V_0(r)$ , и все эти величины являются функциями только от  $r$ . Поскольку  $V_0$  обусловлено распределением плотности  $\rho_0$ , мы можем применить уравнение Пуассона

$$\nabla^2 V_0 = -4\pi\gamma\rho_0, \quad (8.52)$$

где  $\gamma$  — гравитационная постоянная ( $\sim 6,670 \cdot 10^{-8}$  дин  $\cdot$  см<sup>2</sup>/г<sup>2</sup>). Уравнение равновесия получается путем приравнивания объемной силы градиенту давления, т.е.

$$-\rho_0 g_0 \hat{\mathbf{r}} = \rho_0 \nabla V_0 = \nabla P_0, \quad (8.53)$$

где  $g_0 = g_0(r)$ , будучи положительной функцией, представляет собой величину невозмущенной гравитационной силы на единицу объема.

Опираясь на это исходное положение, рассмотрим малое возмущение смещения  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) \exp(-i\omega t)$ . Плотность и гравитационный потенциал в возмущенном состоянии будем описывать функциями  $\rho(\mathbf{X}, t)$  и  $V_0 + K(\mathbf{X})\exp(-i\omega t)$  соответственно, воспользовавшись подходом Эйлера.

Из закона сохранения массы следует, что, увеличение массы внутри объема  $V$  (зафиксированного в пространстве) равно притоку массы через поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ , так что

$$\int_V \rho \, dV = \int_V \rho_0 \, dV - \int_S \rho_0 \mathbf{u} \exp(-i\omega t) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (8.54)$$

где  $\mathbf{n}$  — направленный наружу единичный вектор нормали к элементу поверхности  $dS$ . [Уравнение (8.54) представляет собой аппроксимацию, в которой плотность материала, пересекающего  $S$ , меняется со временем. Мы приняли плотность равной  $\rho_0$ , что адекватно аппроксимации первого порядка, так как  $\mathbf{u}$  мало.] Заменяя поверхностный интеграл объемным по теореме Остроградского-Гаусса, получаем

$$\rho(\mathbf{X}, t) = \rho_0 - \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u} \exp(-i\omega t)).$$

Поскольку  $\rho_0$  является функцией только от  $r$ , мы можем переписать это уравнение как

$$\rho = \rho_0 - \left( u_r \frac{d\rho_0}{dr} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \exp(-i\omega t). \quad (8.55)$$

Гравитационный потенциал в возмущенном состоянии удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 (V_0 + K \exp(-i\omega t)) = -4\pi\gamma\rho,$$

которое можно использовать вместе с (8.52) и (8.55), чтобы показать, что

$$\nabla^2 K = 4\pi\gamma \left( u_r \frac{d\rho_0}{dr} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \right). \quad (8.56)$$

Чтобы получить уравнение движения, воспользуемся декартовой системой координат  $(X_1, X_2, X_3)$  и начнем с установления зависимости между скоростью изменения количества движения, объемной силой (силой тяжести) и градиентом напряжения:

$$-\rho\omega^2 u_i \exp(-i\omega t) = \rho(V_0 + K \exp(-i\omega t))_{,i} + \sigma_{ij,j}. \quad (8.57)$$

[Для точности следует заметить, что левая часть этого уравнения должна бы содержать ускорение материала  $D^2 \mathbf{u} \exp(-i\omega t)/Dt^2$ . Но  $\mathbf{u}$  и скорость частиц малы, поэтому в первом приближении ускорение можно записать как  $-\omega^2 \mathbf{u} \exp(-i\omega t)$ .] Напряжение  $\sigma_{ij}(\mathbf{X}, t)$  определяется в возмущенном состоянии. Поскольку частица, находящаяся в  $\mathbf{X}$  во время  $t$ , первоначально находилась в  $\mathbf{x} = \mathbf{X} - \mathbf{u} \exp(-i\omega t)$ , напряжение в положении  $\mathbf{X}$  является начальным напряжением в  $\mathbf{X} - \mathbf{u} \exp(-i\omega t)$  вместе с дополнительным эффектом, обусловленным искажением области вокруг  $\mathbf{x}$ -частицы, т.е. деформациями, связанными с  $\mathbf{u}$ . Следовательно, для изотропного тела, характеризующегося постоянными Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ , имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{X}, t) &= -P_0 \delta_{ij} \Big|_{\mathbf{X} - \mathbf{u} \exp(-i\omega t)} + \text{напряжение, обусловленное } \mathbf{u} \\ &= -P_0(r) \delta_{ij} + \left[ u_r \frac{dP_0}{dr} \delta_{ij} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \exp(-i\omega t). \end{aligned} \quad (8.58)$$

Подставляя последнее уравнение в (8.57) и удерживая члены первого порядка, получаем

$$\begin{aligned} -\rho_0 \omega^2 \mathbf{u} &= \left( u_r \frac{d\rho_0}{dr} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \right) g_0 \hat{\mathbf{r}} + \rho_0 \nabla K - \nabla(\rho_0 u_r g_0) \\ &+ \left[ (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \frac{d\lambda}{dr} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \hat{\mathbf{r}} + 2 \frac{d\mu}{dr} \frac{\partial \mathbf{u}}{dr} \right. \\ &\left. + \frac{d\mu}{dr} \hat{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \right]. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Здесь член в квадратных скобках — просто вектор,  $i$ -я компонента которого в декартовой системе координат имеет вид  $\{\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})\}_{,j}$  если принимать, что  $\lambda$  и  $\mu$  зависят только от радиуса  $r$ . Остальные члены в правой части (8.59) дают количественную оценку эффекта самогравитации. Если известны  $\rho_0(r)$ ,  $\lambda(r)$  и  $\mu(r)$ , можно найти  $g_0(r)$  и затем решить (8.56) и (8.59) относительно  $K$  и  $\mathbf{u}$  при соответствующих начальных и граничных условиях. Заметим, что урав-

нение (8.59) применимо также и для крутильных колебаний, хотя в этом случае большинство членов уравнения равно нулю.

Ранее мы уже показали, что оперировать уравнениями движения удобнее, если преобразовать их к виду  $df/dr = Af$ , где  $f$  непрерывно при переходе через границы в матрице коэффициентов  $A = A(r, \omega)$ . Этот результат приводит к следующему рассмотрению.

Если в каком-либо свойстве среды (например,  $\rho_0$ ,  $\lambda$  или  $\mu$ ) имеется скачок при некотором значении радиуса  $r_d$ , тогда компоненты смещения и напряжения, а также возмущение гравитационного потенциала  $K$  непрерывны при переходе через  $r_d$ . Но производная  $dK/dr$  терпит разрыв, если имеется скачок плотности. Следовательно, мы ищем величину, связанную с  $dK/dr$  и сохраняющую непрерывность.

Перепиывая (8.56) как  $\nabla \cdot (\nabla K - 4\pi\gamma\rho_0\mathbf{u}) = 0$ , применим теорему Остроградского—Гаусса к некоторому объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ , и найдем, что  $\int_S (\nabla K - 4\pi\gamma\rho_0\mathbf{u}) \cdot n dS = 0$ . Выбрав  $V$  в виде тонкого диска с одной плоской поверхностью непосредственно над границей  $r_d$  и другой прямо под границей, получим, что разность  $dK/dr - 4\pi\gamma\rho_0\mu_r$  должна быть одной и той же по обе стороны границы. Следовательно, мы можем выбрать непрерывную величину  $dK/dr - 4\pi\gamma\rho_0\mu_r$  в качестве одной из зависимых переменных.

Мы уже видели, что для сфероидальных колебаний смещение и напряжение в моде  $(l, m, n)$  задаются выражениями

$$\begin{aligned} u_r &= {}_n U_l(r) Y_l^m(\Delta, \phi), & u_\Delta &= \frac{{}_n V_l(r)}{[l(l+1)]^{1/2}} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \Delta}, & u_\phi &= \frac{{}_n V_l(r)}{[l(l+1)]^{1/2}} \frac{1}{\sin \Delta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}, \\ \tau_{rr} &= {}_n R_l(r) Y_l^m, & \tau_{r\Delta} &= \frac{{}_n S_l(r)}{[l(l+1)]^{1/2}} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \Delta}, & \tau_{r\phi} &= \frac{{}_n S_l(r)}{[l(l+1)]^{1/2}} \frac{1}{\sin \Delta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (8.60)$$

где  $(\tau_{rr}, \tau_{r\Delta}, \tau_{r\phi})$  — напряжение, полученное из  $\mathbf{u}$ . Гравитационный потенциал можно представить также с разделенными переменными:

$$K = {}_n K_l(r) Y_l^m(\Delta, \phi), \quad (8.61)$$

и, согласно Такеучи и Сайто [319], введем

$${}_n G_l(r) = \frac{d {}_n K_l}{dr} - 4\pi\gamma\rho_0({}_n U_l) + \frac{l+1}{r} {}_n K_l. \quad (8.62)$$

Мы уже отмечали, что  $(dK/dr - 4\pi\gamma\rho_0\mu_r)$  и  $K$  непрерывны при переходе через скачок плотности; значит, функция  ${}_n G_l$  непрерывна. Дополнительное достоинство  ${}_n G_l$  состоит в том, что  ${}_n G_l(r_\oplus) = 0$  (т.е. на поверхности Земли); этот результат следует из того, что  $K$  удовлетворяет уравнению Лапласа при  $r > r_\oplus$  и, следовательно,  ${}_n K_l(r) = {}_n K_l(r_\oplus)(r_\oplus/r)^{l+1}$  за пределами Земли.

Подставляя (8.60) — (8.62) в (8.56) и (8.59), мы приходим к системе из шести линейных дифференциальных уравнений первого порядка для

радиальных функций:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dr} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left\{ R - \frac{\lambda}{r} [2U - (l(l+1))^{1/2}V] \right\}, \\ \frac{dR}{dr} &= -\omega^2 \rho_0 U + \frac{2}{r} \left( \lambda \frac{dU}{dr} - R \right) + \frac{1}{r} \left[ \frac{2(\lambda + \mu)}{r} - \rho_0 g_0 \right] [2U - (l(l+1))^{1/2}V] \\ &\quad + \frac{(l(l+1))^{1/2}}{r} S - \rho_0 \left( G - \frac{l+1}{r} K + \frac{2g_0}{r} U \right), \\ \frac{dV}{dr} &= \frac{1}{\mu} S + \frac{1}{r} [V - (l(l+1))^{1/2}U], \\ \frac{dS}{dr} &= -\omega^2 \rho_0 V - \frac{\lambda}{r} (l(l+1))^{1/2} \frac{dU}{dr} - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} [2(l(l+1))^{1/2}U - l(l+1)V] \\ &\quad + 2 \frac{\mu}{r^2} [(l(l+1))^{1/2}U - V] - \frac{3}{r} S - \frac{\rho_0}{r} (l(l+1))^{1/2} (K - g_0 U), \\ \frac{dK}{dr} &= G + 4\pi\gamma\rho_0 U - \frac{l+1}{r} K, \\ \frac{dG}{dr} &= \frac{l-1}{r} (G + 4\pi\gamma\rho_0 U) + \frac{4\pi\gamma\rho_0}{r} [2U - (l(l+1))^{1/2}V], \end{aligned} \quad (8.63)$$

где мы опустили индексы  $n$  и  $l$ . Уравнения (8.63) можно записать как  $df/dr = \mathbf{A}f$  с непрерывным  $f$  и  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(r, \omega)$ . Существование решения для  $f$ , регулярного при  $r = 0$ , для которого  ${}_n R_l(r_{\oplus})$ ,  ${}_n S_l(r_{\oplus})$  и  ${}_n G_l(r_{\oplus})$  равны нулю, требует, чтобы  $\omega$  было собственным значением. Поскольку численный метод решения (8.63) для собственных значений  ${}_n \omega_l$  и собственных векторов  $f = ({}_n V_l, {}_n U_l, {}_n S_l, {}_n R_l, {}_n K_l, {}_n G_l)^T$  очень похож на метод, описанный в разд. 7.2 для поверхностных волн, мы не будем рассматривать его детально. Для крутильных колебаний (8.59) дает систему из двух уравнений (8.33), поскольку гравитационное поле не оказывает на них прямого влияния.

Разумеется, вариационные методы разд. 7.3 также применимы к нормальным модам с изменениями, касающимися обозначений. Возмущения фазовой скорости (обусловленные малыми изменениями в строении среды) заменяются возмущениями собственной частоты. Например, для крутильных колебаний [см. (8.33) и (8.35)]

$$\left( \frac{\delta\omega}{\omega} \right)_l = \int_0^{r_*} \left[ \frac{\rho}{\omega} \left( \frac{\partial\omega}{\partial\rho} \right)_{l,\beta} \frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{\beta}{\omega} \left( \frac{\partial\omega}{\partial\beta} \right)_{l,\rho} \frac{\delta\beta}{\beta} \right] dr, \quad (8.64)$$

где

$$\left( \frac{\rho}{\omega} \frac{\partial\omega}{\partial\rho} \right)_{l,\beta} = \frac{1}{2\omega^2} \left[ -\omega^2 \rho r^2 W^2 + \frac{r^2 T^2}{\mu} + (l-1)(l+2)\mu W^2 \right]$$

и

$$\left( \frac{\beta}{\omega} \frac{\partial\omega}{\partial\beta} \right)_{l,\rho} = \frac{1}{\omega^2} \left[ \frac{r^2 T^2}{\dot{\mu}} + (l-1)(l+2)\mu W^2 \right]. \quad (8.65)$$

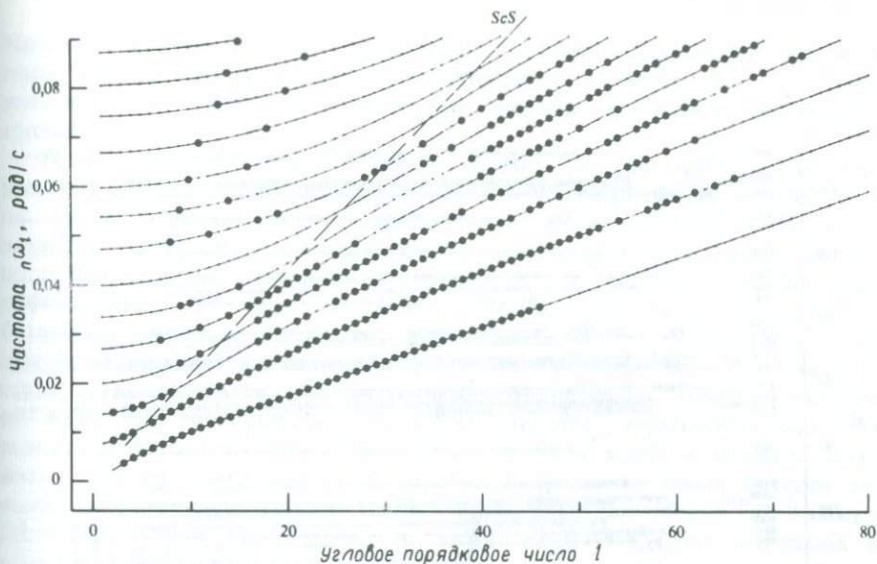


Рис. 8.8. Крутильные колебания  $n\omega_l$ , нанесенные на график как функции  $l$  для различных ветвей  $0 \leq n \leq 13$ . Крупные точки — наблюдаемые моды, которые были использованы Гилбертом и Дзевонским для определения строения Земли. (Из работы [135]; с разрешения Королевского общества, Лондон.)

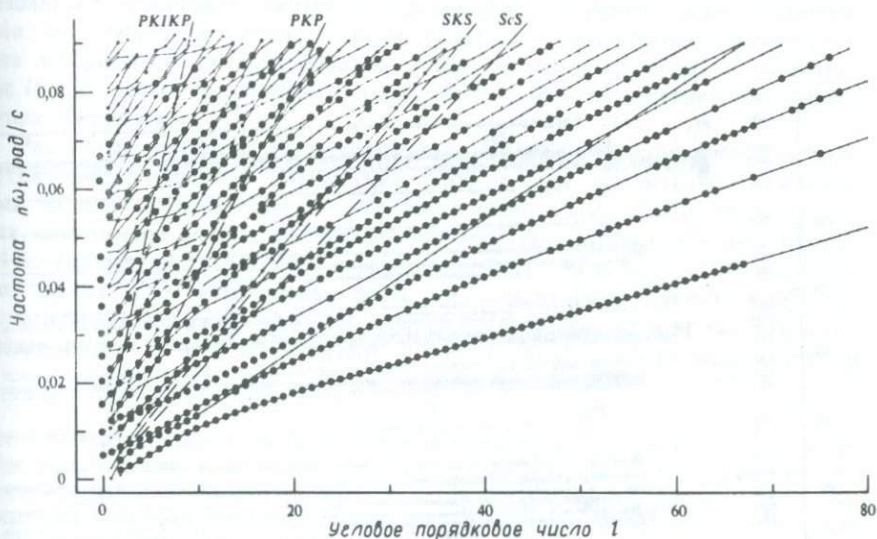
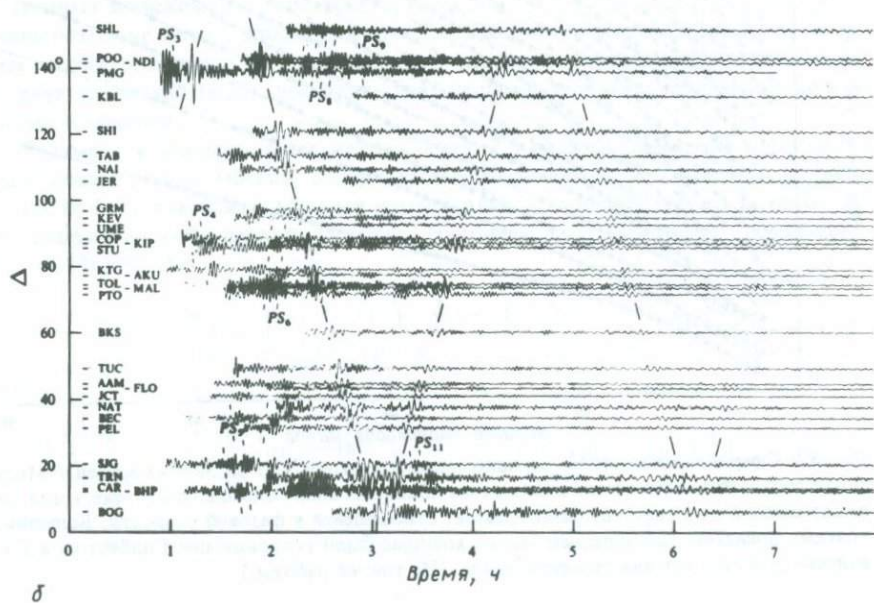
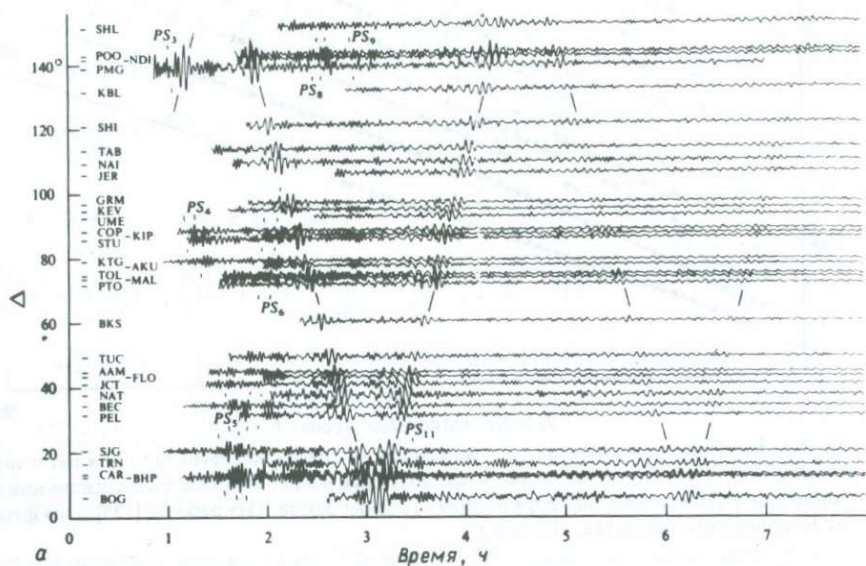


Рис. 8.9. Сфероидальные моды  $n\omega_l$ , нанесенные в функции  $l$  для различных ветвей  $n$ . Моды могут соответствовать отмеченным фазам объемных волн только в том случае, когда они лежат слева от соответствующей прямой, относящейся к фазовой скорости. Большими точками показаны наблюдаемые моды, которые были использованы Гилбертом и Дзевонским для определения строения Земли. (Из той же работы.)



Частные производные для крутильных и сфероидальных колебаний в поперечно-изотропной модели Земли приведены в работе [319], а в [339] показано, как влияет на собственные частоты возмущение внутренних границ.

Теперь мы уже имеем довольно полное рассмотрение теории нормальных мод в сферически-симметричной невращающейся модели Земли. Около 40 различных собственных частот были выделены в 1960 г. по записям Чилийского землетрясения, и первоначальные усилия многих исследователей были направлены просто на то, чтобы правильно идентифицировать эти моды колебаний. Информация, заключенная в собственных частотах, совершенно определенно имеет иную природу, чем данные о временах пробега объемных волн, поскольку известно, как построить модели Земли, для которых годографы имеют заданный вид, но не ясно, как использовать собственные частоты нормальных мод для выяснения строения Земли, кроме как методом проб и ошибок. Важность этой проблемы явилась стимулом для развития новых методов решения обратных задач по геофизическим данным. Бэкус и Гилберт [22 — 24] провели исследование по теории обратных задач, используя в качестве примера данные о нормальных модах.

С современной аппаратурой можно наблюдать и идентифицировать нормальные моды от землетрясений со столь малой магнитудой ( $M_s$ ), как 6,5 [42]. Чтобы определить, какие нормальные моды будут преимущественно возбуждаться данным землетрясением, выясним из (8.37), что решающей величиной является деформация в данной моде, оцениваемая на глубине источника. Таким образом, мелкофокусные землетрясения возбуждают главным образом основные моды ( ${}_0S_l$  и  ${}_0T_l$  с различными  $l$ ), в то время как глубокие землетрясения больше подходят для наблюдения обертонов.

Рассмотрев спектры 211 сейсмограмм WWSSN от двух глубоких землетрясений, Гилберт и Дзевонский [135] смогли выявить 812 собственных частот. Большинство из них были обертонами. Было найдено, что для многих мод ошибки не превышают величину 0,05% и в целом меньше 0,1%. Примерно из 2000 мод с периодами более 80 с около 1500 в настоящее время уже идентифицированы на сейсмических записях. Значения  $n\omega_l < 0,09$  рад/с для крутильных колебаний показаны на рис. 8.8 при  $l$  в диапазоне от 0 до 13 и  $l$  в диапазоне от 1 до 80. Пользуясь соотношением

*Рис. 8.10.* Вертикальная компонента колебаний, вызванных глубокофокусным Колумбийским землетрясением 31 июля 1970 г. *а* — теоретические записи для 34 станций WWSSN, причем каждая сейсмограмма помещена на соответствующее расстояние  $\Delta$  от эпицентра. (Такое представление называют *сводной сейсмограммой*). Расчет сделан по формуле (8.37) с включением мод в диапазоне периодов 100 — 10000 с для модели источника и модели Земли 1066 А Гилберта и Дзевонского [135]. *б* — наблюдавшееся вертикальное движение почвы для тех же станций и того же землетрясения (в эти сейсмограммы были внесены поправки за влияние аппаратуры, и они были подвергнуты фильтрации, оставляющей тот же диапазон частот, который был использован при расчете теоретической записи *а*). (Из работы [219].)

$l + 1/2 = kr$ , мы можем идентифицировать кажущуюся скорость конкретной моды, измеренной на поверхности Земли, как  $\omega r_{\oplus} / (l + 1/2)$  (в км/с). Известно, что объемные сейсмические волны  $ScS$  ( $S$ -волны, отраженные вверх от границы ядро — мантия) имеют кажущиеся скорости, большие некоторого минимального значения, определяемого кажущейся скоростью луча  $ScS$ -волны, касающегося границы ядро — мантия. Этот минимальный наклон  $\omega / (l + 1/2)$  показан на рис. 8.8 пунктирной прямой. Идея здесь в том, что нормальные моды полностью описывают возможные движения Земли. Следовательно, можно ожидать, что информация о строении Земли, содержащаяся в данных по волнам  $ScS$  (поляризованным как  $SH$ ), подобна информации, заключенной в крутильных колебаниях с той же горизонтальной фазовой скоростью, что и  $ScS$ , т.е. слева от пунктирной прямой. Моды справа от этой прямой имеют более низкую кажущуюся скорость и соответствуют  $SH$ -волнам в мантии, которые падают не настолько круто, чтобы достичь ядра. Рис. 8.9 для сфероидальных колебаний имеет гораздо более сложный вид, так как этот случай эквивалентен распространению волн  $P - SV$ , включая волны Рэлея и Стоули.

При наличии такого большого количества точно идентифицированных нормальных мод с периодами, превышающими примерно 80 с, появляется возможность суммировать все моды согласно (8.37) при использовании некоторой конкретной модели землетрясения (т.е. его тензора скорости момента) и оценить, насколько результирующие теоретические сейсмограммы согласуются с реально наблюдаемыми, т.е. проводить сравнение во временной области, а не в частотной. Первые такие сейсмограммы, рассчитанные путем суммирования нормальных мод, приведены в работе Сато и др. [284]. Обзор ранних исследований в этой области дан в работе [204], где проведено сравнение различных характеристик суммы нормальных мод (например, амплитуды конкретной объемной волны) с соответствующими характеристиками сейсмической записи. Первые сравнения во временной области целых волновых цугов (включая объемные волны), полученных суммированием нормальных мод, с реальными сейсмограммами сделали Лу и Дзевонский [219] для глубокого Колумбийского землетрясения 1970 г. Используя ранее найденный тензор скорости момента для этого землетрясения и конкретную модель Земли, эти авторы рассчитали 75 сейсмограмм, включив в расчет более тысячи мод в диапазоне периодов 100 — 1000 с. Их результаты показаны на рис. 8.10. Прямые, пересекающие теоретические сейсмограммы, означают рэлеевские волны  $R_1$ ,  $R_2$  и т.д., которые весьма сильны в этом диапазоне периодов даже при таком глубоком землетрясении (глубина оценена в 651 км). Заметны также фазы объемных волн, соответствующие многократно пересекающим мантию  $P$ - и  $S$ -волнам, например  $PSPSPS$ , когда обмен между колебаниями  $P$  и  $S$  происходит при отражении от поверхности Земли. Приведенный пример мы обозначим просто  $PS_3$ , и несколько таких  $PS_n$ -фаз отмечено на рисунке. Основные черты наблюдаемых записей повторяются на теоретических сейсмограммах; в случаях же, когда имеет место расхождение, Лу и Дзевонский полагают, что оно могло возникнуть за счет принятой модели тензора скорости момента, а также выбранной  $Q$ -модели.

Очевидно, что этот метод интерпретации сейсмограмм имеет большие по-

тенциальные возможности. При его реализации основные трудности лежат в адекватном расчете и накоплении большого числа «короткопериодных» нормальных мод (периоды примерно до 5 с), которые наблюдаются, но раздельно не идентифицируются на «длиннопериодных» сейсмограммах WWSSN. Для крутильных колебаний известно преобразование (дополнение 9.9), которое сводит сферическую модель Земли к плоскопараллельной модели. Решение такой задачи обеспечено высокоэффективными программами, позволяющими рассчитывать моды для периодов примерно до 10 с [238, 224]. Для сфероидальных мод применение методов Рэлея — Ритца позволило рассчитать все моды примерно до периодов 45 с [62, 63]. В случае более коротких периодов развита достаточно точная асимптотическая теория для каждой моды [340]. Следовательно, уравнение (8.37), вероятно, можно использовать в целях сравнения, подобно приведенному на рис. 8.10, но без фильтрации данных фильтрами с большой крутизной частотной характеристики.

#### ДОПОЛНЕНИЕ 8.5

##### *Учет начального напряжения*

Напряжения внутри Земли могут достигать значений порядка мегабар. Поскольку упругие постоянные в законе Гука имеют этот же порядок величины, в Земле могут иметь место деформации первого порядка даже в простой ситуации, когда имеется опорный уровень, на котором как деформация, так и напряжение равны нулю; тогда современную конфигурацию Земли можно было бы получить исходя из этого состояния в соответствии с линейной зависимостью между напряжением и деформацией. В действительности у нас нет причин полагать, что такой уровень существует; даже если бы он имелся, он не подходил бы для изучения сейсмических волн, так как теория распространения волн для конечных деформаций нелинейна. Вместо этого мы имеем дело с теорией для бесконечно малых приращений напряжений, используя в качестве опорного начального состояние, при котором напряжение может быть большим, но деформации равны нулю.

В сейсмологии естественно принять за начальное состояние конфигурацию Земли непосредственно перед землетрясением. Поскольку начальное напряжение преимущественно изотропно (на каждой конкретной глубине оно обусловлено силой тяжести, действующей на вышележащие породы), оказывается, что в сущности оно не вносит осложнений во все полученные нами к настоящему времени формулы, в которых полностью игнорируется начальное поле напряжений. Однако формальные положения теории упругости гораздо сложнее. Работа, необходимая для проверки того, нуждаются ли в изменении формулы, основанные на классической теории упругости, для моделей Земли с высоким начальным напряжением, в основном выполнена Даленом [97 — 99, 101].

Расчет моделей с произвольным начальным напряжением затруднен тем, что приращение напряжения в материальной частице состоит из двух частей: одна зависит от локальных деформаций и известна нам из теории, описанной в гл. 2; другая зависит от локальных вращений, поворачивающих начальное поле напряжений. Следовательно, полное напряжение в общем случае зависит от  $e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  и  $\omega_{ij} = (u_{i,j} - u_{j,i})/2$ . Чтобы описать поля напряжений и деформаций, Дален [98] пользуется подходом Лагранжа. Далее, для того, чтобы привести граничные условия (такие, как описание разрыва) назад к начальной конфигурации, тензор напряжений Коши, рассмотренный в гл. 2, неприемлем. Элементы площади (их величина и ориентация), через которые передается напряжение, при определении тензора напряжений Коши находятся в деформированном состоянии. Вместо

этого Дален [97, 98] предлагает для описания последующих напряжений использовать элементарные площадки в начальном положении. Пусть элемент материальной области с центром в  $\mathbf{x}$  имеет в начальном положении площадь  $dS(\mathbf{x})$  и ориентацию  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ . В некоторый последующий момент времени  $t$  частица, первоначально находившаяся в  $\mathbf{x}$ , сместилась в положение  $\mathbf{X} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$  и элементарная площадка материала стала иметь площадь  $dS(\mathbf{X}, t)$  и ориентацию  $\mathbf{n}(\mathbf{X}, t)$ . Тензор напряжений Коши  $\sigma^C$  имеет такие компоненты в декартовой системе координат, что напряжение, действующее на элемент материала, характеризуется  $j$ -й компонентой вида  $n_i(\mathbf{X}, t)\sigma_{ij}^C(\mathbf{X}, t)dS(\mathbf{X}, t)$ . Это напряжение приравнивается к  $n_i(\mathbf{x})\sigma_{ij}^{PK}(\mathbf{x}, t)dS(\mathbf{x})$  для нахождения декартовых компонент *тензора напряжения Пайола — Кирхгофа*, с помощью которого, таким образом, можно оценить зависимость от времени напряжения на единицу первоначальной площади деформированной поверхности. Учитывая начальное напряжение  $\sigma^0$ , тензор приращения напряжений Пайола — Кирхгофа  $\tilde{\tau}$  и тензор приращения напряжений Коши  $\tau$  можно задать выражениями

$$\sigma^{PK} = \sigma^0 + \tilde{\tau} \quad \sigma^C = \sigma^0 + \tau. \quad (1)$$

Дален [97] и Малверн [223] указывают, что тензор напряжений Пайола — Кирхгофа не симметричен. Соотношение между тензорами приращения напряжений (с точностью до членов первого порядка в начальных напряжениях и последующих деформациях) имеет вид

$$\tilde{\tau}_{ij} = \tau_{ij} + \sigma_{ij}^0 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \sigma_{jk}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

и сводится к

$$\tilde{\tau}_{ij} = \tau_{ij} - p_0 \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + p_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

для изотропного начального напряжения  $\sigma_{ij}^0 = -p_0 \delta_{ij}$ .

Для модели Земли с самогравитацией, упругой по отношению к напряжениям и деформациям, вращающейся относительно изотропно напряженного начального состояния, Дален [97] показал, что эквивалентом объемной силы для сдвиговой дислокации (которую мы рассмотрели в гл. 2 и 3) все еще является распределение двойной пары сил. Если начальное состояние характеризуется еще и скальвующими напряжениями, то эквивалент объемной силы для сдвига представляет собой двойную пару сил плюс дополнительные члены порядка [(начальные скальвующие напряжения) + (упругие постоянные *in situ*)]. Эти дополнительные члены очень малы, поскольку породы обычно не могут выдерживать скальвующие напряжения, превышающие 1 — 2 кбар. Для сдвигов разрыва в плоскости  $x_3$  Дален [99] нашел, что сохраняется непрерывность  $[\tau_{31}] = [\tau_{32}] = [\tau_{33}] = 0$  для тензора приращения напряжений Коши и справедливость формулы

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} [u_i(\mathbf{x}, \infty)] (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1) v_j dS \quad (2)$$

(см. дополнение 3.4) для изменения упругой энергии в среде, обусловленного образованием разрыва по поверхности  $\Sigma$ . Формулы для работы сил трения на поверхности  $\Sigma$  и работы, необходимой для образования новой поверхности разрыва, также остаются неизменными при введении изотропного начального напряжения. Дален [101] показал, что даже если возникнут изменения в продолжительности суток и в гравитационном поле, формула (2) все равно выражает энергию разрыва в модели предварительно напряженной Земли [т.е. дает сумму изменений энергии вращения, гравитационной энергии и внутренней упругой энергии сдвига, хотя отдельные члены этой суммы могут изменяться по величине на четыре порядка больше, чем правая часть формулы (2)].

## 8.5. РАСЩЕПЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ МОД, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ВРАЩЕНИЕМ ЗЕМЛИ

Модели Земли, рассмотренные в разд. 8.4, обладали двумя не подходящими для нас свойствами — они не вращались и были сферически-симметричны. Теперь мы введем влияние вращения, а рассмотрение горизонтальной неоднородности отложим до гл. 13.

Можно ожидать, что суточное вращение Земли создает заметный эффект при измерении нормальных мод, который грубо выражается безразмерным коэффициентом, равным отношению (период нормальной моды/24 ч). Очевидно, что этот коэффициент может достигать нескольких процентов для основных мод низкого порядка и должен выявляться на реальных записях. Действительно, наблюдения во время Чилийского землетрясения 1960 г. показали, что такие моды, как  ${}_0S_2$ , имеют не один спектральный пик, а состоят по крайней мере из двух линий с периодами 54,7 и 53,1 мин [34]. Оказалось, что наблюдаемый эффект математически подобен эффекту Зеемана (расщеплению вырожденных энергетических уровней атома водорода в магнитном поле). Раньше мы получили, что для каждого  $l$  существует  $2l + 1$  мод, т.е.  $-l \leq m \leq l$ , с одной и той же собственной частотой и радиальной собственной функцией. Теперь вращение снимает эту вырожденность, и вместо единственной собственной частоты  ${}_n\omega_l$  мы должны говорить о мультиплете  ${}_n\omega_l^m$  ( $-l \leq m \leq l$ ), причем каждая из частот имеет свою радиальную собственную функцию. Прежде чем перейти к соответствующей теории, укажем на некоторые практические проблемы, которые возникают в связи с вращением Земли при наблюдениях нормальных мод.

Прежде всего, осложняется задача нахождения временного  $Q$  конкретной моды. Стандартный метод определения скорости затухания данной частотной компоненты временного ряда состоит в расчете спектра и измерении ширины спектрального пика на уровне половины мощности. Следовательно, при временной функции  $f(t) = H(t)e^{-\omega_0 t/2Q} \cos \omega_0 t$  амплитуда спектра вблизи  $\omega_0$  будет равна

$$|f(\omega)| \sim \frac{1}{2} \left[ (\omega - \omega_0)^2 + \left( \frac{\omega_0}{2Q} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (8.66)$$

При  $\omega = \omega_0 \pm \omega_0/2Q$  амплитуда понижается множителем  $1/\sqrt{2}$  по сравнению с ее пиковым значением, а соответствующий спектр мощности  $|f(\omega)|^2$  снижается умножением на коэффициент  $1/2$ . Измеряя ширину  $\Delta\omega$  пика на уровне его половинной мощности, получаем, что  $Q^{-1} = \Delta\omega/\omega_0$ . Очевидно, что этот стандартный метод нахождения  $Q$  неприменим в тех случаях, когда спектральные пики в пределах данного мультиплета перекрываются. В этих случаях отдельные моды разрешить не удастся, и формула (8.66) не дает адекватной модели спектра вблизи  $\omega_0$ . Олсон и др. [10] нашли, что здесь можно использовать другой простой метод измерения  $Q$ . В нем интерпретируется относительная амплитуда спектров, определенных в тщательно выбранных временных окнах (равной длины) по исходной сейсмограмме, причем для каждого окна вычисляется один спектр.

Вторая проблема, связанная с расщеплением нормальных мод вследствие вращения, состоит в том, что этот эффект маскирует расщепление, обусловлен-

ное отклонением Земли от сферической симметрии. Дален [95, 96] показал, что если расщепление нормальных мод используется для изучения горизонтальной неоднородности Земли, то нужно предварительно исключить эффекты вращения первого и второго порядка.

После этих предварительных замечаний изложим теперь теорию возмущений первого порядка для расщепления нормальных мод вследствие вращения.

Рассмотрим крутильные колебания, которые, согласно (8.59), удовлетворяют уравнению

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = [\mu(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j}. \quad (8.67)$$

Это уравнение описывает слабые движения относительно равновесного состояния при отсутствии вращения, при этом используется закрепленная инерциальная система координат. Но Земля обладает суточным вращением, и, следовательно, (8.67) надо модифицировать таким образом, чтобы  $\mathbf{u}$  описывало слабые отклонения от положения равновесия при наличии вращения. Для этого воспользуемся системой координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\Omega = \Omega \hat{\mathbf{z}}$ , где  $\Omega$  равно  $2\pi$  за 24 ч (в действительности за звездные сутки), а  $\hat{\mathbf{z}}$  — единичный вектор в направлении оси вращения Земли. В этой неинерциальной системе скорость частицы задается как  $d\mathbf{u}/dt + \Omega \times \mathbf{u}$ , а ускорение  $\partial^2 \mathbf{u}/\partial t^2 + 2\Omega \times d\mathbf{u}/dt + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{u})$ . Поскольку  $\Omega$  очень мало (по сравнению с частотами нормальных мод), мы можем пренебречь членами порядка  $\Omega^2$  и записать уравнение (8.67) в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + 2\rho_0 \Omega \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{X}, \quad (8.68)$$

где  $X_i = [\mu(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j}$ .

Допустим, что (8.68) без ускорения Кориолиса  $2\Omega \times d\mathbf{u}/dt$  имеет вырожденное собственное значение

$$\omega_0 = {}_n\omega_l. \quad (8.69)$$

Решение  $\mathbf{u}$  из (8.68), которое мы хотим исследовать, имеет пространственную зависимость, определяемую в основном  ${}_n W_l(r) T_l^m(\Delta, \phi)$ , и собственную частоту  $\omega = {}_n\omega_l^m$ , которая несколько отклоняется от (8.69). Можно показать [21], что  $\mathbf{u}$  является аналитической функцией  $\Omega$  для малых  $\Omega$ , и потому мы можем использовать представление в виде степенного ряда:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_0} &= 1 + \sigma_1 \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right) + \sigma_2 \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 + \dots, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right) + \dots, \\ \mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1 \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (8.70)$$

где  $\omega$  — собственное значение для (8.68), т.е.  $\mathbf{u} \sim \exp(-i\omega t)$ . Подставляя  $\Omega = \Omega \hat{\mathbf{z}}$  и (8.70) в (8.68) и приравнявая степени  $(\Omega/\omega_0)$ , находим

$$-\rho_0 \omega_0^2 \mathbf{u}_0 = \mathbf{X}_0, \quad (8.71)$$

$$-\rho_0 \omega_0^2 \mathbf{u}_1 - 2\dot{\rho}_0 \omega_0^2 [\sigma_1 \mathbf{u}_0 + i\hat{z} \times \mathbf{u}_0] = \mathbf{X}_1. \quad (8.72)$$

Теперь наша цель состоит в том, чтобы получить возмущение  $\sigma_1$  первого порядка. Ясно, что  $\mathbf{u}_1$  должно быть линейно-независимо от  $\mathbf{u}_0$ , так что снова, определив, если это необходимо,  $\mathbf{u}_0$ , мы можем принять, что  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_0$  ортогональны. Пекерис и др. [253] показали также, что вектор  $\mathbf{X}$  ортогонален  $\mathbf{u}_0$ ; следовательно, из (8.72)

$$\int \rho_0 [\sigma_1 \mathbf{u}_0^* \cdot \mathbf{u}_0 + i \mathbf{u}_0^* \cdot (\hat{z} \times \mathbf{u}_0)] dV = 0.$$

Мы получили уравнение для  $\sigma_1$ , которое можно переписать с использованием (8.35) как

$$\sigma_1 = -i\hat{z} \cdot \int \rho_0 \mathbf{u}_0 \times \mathbf{u}_0^* dV. \quad (8.73)$$

Поскольку  $\mathbf{u}_0 = {}_n W_l(r) T_l^m(\Delta, \phi) \exp[-i {}_n \omega_\delta t]$ , из (8.73) получаем

$$\sigma_1 = \frac{-m}{l(l+1)}. \quad (8.74)$$

Этот результат несколько разочаровывает с геофизической точки зрения, так как из него следует, что расщепление первого порядка малости в крутильных модах независимо от строения Земли. Возмущенные собственные функции будут, исходя из (8.70), определяться выражением

$${}_n \omega_l^m = {}_n \omega_l - \frac{m}{l(l+1)} \Omega \quad \text{при } -l \leq m \leq l, \quad (8.75)$$

и вырожденность таким образом снята.

Примечательно, что уравнение (8.73) остается справедливым для сфероидальных колебаний, когда  $\mathbf{u}_0 = [{}_n U_l \mathbf{R}_l^m + {}_n V_l \mathbf{S}_l^m] \exp[-i {}_n \omega_\delta t]$  и введена нормировка (8.34). Величину  $\sigma_1$  можно оценить, воспользовавшись соотношением

$${}_n \omega_l^m = {}_n \omega_l - m \Omega_n \beta_l, \quad (8.76)$$

где

$${}_n \beta_l = \int_0^{r_0} \frac{\rho_0 ({}_n V_l)^2}{l(l+1)} r^2 dV + 2 \int_0^{r_0} \frac{\rho_0 ({}_n U_l) ({}_n V_l)}{[l(l+1)]^{1/2}} r^2 dV.$$

Дален [95] рассчитал значения  ${}_n \beta_l (\Omega / {}_n \omega_l)$ , и наибольшие из них относятся к модам  ${}_1 S_1$  и  ${}_0 S_2$ , достигая примерно 0,015.

Используя теорию расщепления за счет вращения, можно моделировать часть наблюдаемого спектрального пика как наложение близко расположенных компонент расщепленного мультиплета. Это позволяет разработать метод анализа данных для оценки  $Q$ . Стейн и Геллер [309] советуют проводить синтез движения грунта во временной области, т.е. получать возбуждение каждой моды в мультиплете  $-l \leq m \leq l$ , связанном с заданными  $(n, l)$ . Они суммируют моды в пределах мультиплета и сравнивают эту синтетическую запись с наблюдениями. (Как синтетические, так и наблюдаемые записи фильтруются узкополосным фильтром, чтобы выделить интересующий нас мультиплет.) На рис. 8.11 представлен пример для моды  ${}_0 S_2$ , наблюдавшейся после сильнейшего Чилийского

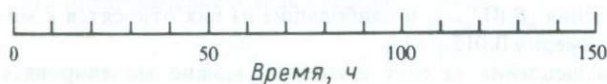
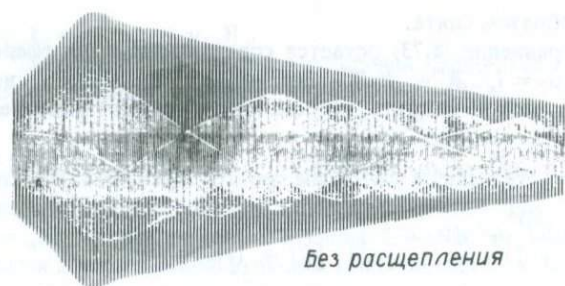
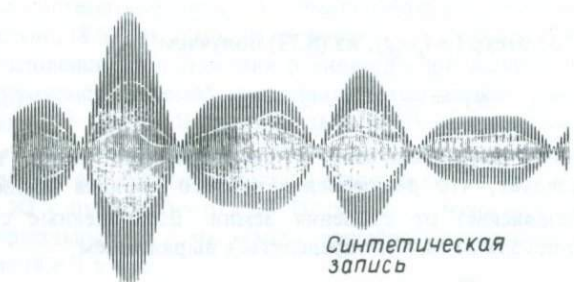
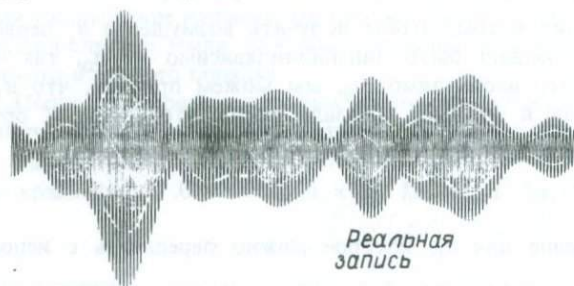
${}_0S_2$   $T = 53,8 \text{ мин}$ 

Рис. 8.11. Сравнение наблюдений моды  ${}_0S_2$  во временной области с теоретическими записями, полученными методами, в которых учитывается и не учитывается эффект расщепления при вращении. (Из работы [309].)

землетрясения 1960 г.; на записи продолжительностью в 150 ч видна интерференция между различными модами в пределах мультиплета.

В этом разделе мы обрисовали только наиболее простые свойства расщепления при вращении. Дален и Смит [102] провели более полное исследование и показали, что нормальные моды для вращающейся Земли не ортогональны. Когда

модель Земли включает жидкую часть (например, внешнее ядро), возникает целый ряд новых теоретических задач, даже без усложнений из-за вращения, поскольку в этом случае могут существовать наборы нормальных мод с очень длинными периодами. Они могут иметь периоды длиной в несколько часов и были названы *унтертонами* [254].

Имеется много факторов, влияющих на Землю с периодом времени, превышающим период моды  ${}_0S_2$ . Можно было бы надеяться провести квазистатическое рассмотрение деформации, но, к сожалению, сделать это не просто из-за наличия жидкого ядра. Лонгман [215] показал, что уравнения (8.63) становятся взаимно несовместными в пределе, когда  $\mu \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow 0$ , и многие авторы [93] предлагают пути для разрешения этого парадокса. При рассмотрении нормальных мод с учетом вращения Земли теория чандлеровского колебания усложняется парадоксом Лонгмана. Смит [296] избежал квазистатического рассмотрения и показал, как динамические уравнения для вращающейся Земли (с жидким ядром, но без океанов) включают чандлеровское колебание в качестве нормальной моды. Он рассчитал, что период чандлеровского колебания составляет 405,19 звездных суток для модели Земли с устойчиво-стратифицированным жидким ядром. Наблюдаемый период составляет  $434,14 \pm 1,02$  звездных суток [94], но Дален [100] показал, что влияние мирового океана увеличит чандлеровский период для модели Земли, рассмотренной Смитом, что приводит к удовлетворительному согласию между наблюдаемым и предсказанным периодами чандлеровского колебания.

## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ

- Biot M. A.* Mechanics of Incremental Deformations. New York, Wiley, 1965.
- Brune J. N., Gilbert F.* Torsional overtone dispersion from correlations of  $S$  waves to  $SS$  waves. Bulletin of the Seismological Society of America, **64**, 313 — 320, 1974.
- Gilbert F., Dziewonski A. M.* An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra. Philosophical Transactions of the Royal Society (Lond.), **A278**, 187 — 269, 1975.
- Love A. E. H.* Some problems of geodynamics. New York, Dover Publications, 1967.
- Рэлей.* Теория звука. Гл. 5. — М.: ГИТТЛ, 1955.
- Sato Y., Usami T., Landisman M.* Theoretical seismograms of spheroidal type on the surface of a gravitating elastic sphere — II. Case of Gutenberg-Bullen A'earth models. Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo Univ., **45**, 601 — 624, 1967.
- Takeuchi H., Saito M.* Seismic surface waves. In: Seismology: Surface waves and Earth Oscillations (Methods in Computational Physics, vol. 11) edited by Bolt B. A. New York, Academic Press, 1972.
- \**Жарков В. Н., Любимов В. М., Оснач А. И.* О теории возмущений для собственных колебаний Земли. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 10, 3 — 16, 1968.
- \**Жарков В. Н., Любимов В. М.* Теория крутильных колебаний для сферически несимметричных моделей Земли. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 2, 3 — 14, 1970.
- \**Жарков В. Н., Любимов В. М.* Теория сфероидальных колебаний для сферически несимметричных моделей Земли. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 10, 3 — 12, 1970.

\*Акопян С. Ц., Жарков В. Н., Любимов В. М. О аperiodических решениях при возбуждении собственных колебаний в неупругой Земле. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 8, 3 — 11, 1978.

## ЗАДАЧИ

8.1. Дайте теорию нормальных мод для крутильных колебаний однородной упругой твердой сферы и найдите два наибольших периода. Какова в общем случае наиболее благоприятная глубина для возбуждения моды  ${}_0T_2$  при помощи одинарной горизонтальной силы? Пары сил с моментом относительно вертикальной оси?

8.2. Покажите, что временное  $Q$  крутильных колебаний связано с  $Q_\beta(r)$  для объемных волн как функций радиуса  $r$  выражением

$$Q^{-1} = \int_0^{r_0} \frac{\beta}{\omega} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right] Q_\beta^{-1}(r) dr,$$

частная производная при этом задается (8.65).

8.3. Что неверно в следующем утверждении? Суточное вращение Земли не вызывается внешними силами и, следовательно, является собственным колебанием Земли. Оно должно быть крутильным колебанием  $l = 1$ . Для сферически-симметричной Земли отсюда следует, что вращение не может оказывать никакого влияния на другие моды (крутильные и сфероидальные), поскольку моды в такой модели не взаимодействуют.

8.4. Рассмотрите последовательность  $G$ -волн ( $G_1, G_2, \dots, G_n$ ), подходящих к данной станции после сильного землетрясения (см. приложение 1). Приняв в расчет полярный фазовый сдвиг, выведите формулу для определения фазовой скорости по большому кругу, используя преобразования Фурье от  $G_n$  и  $G_m$ .

Формула не включает начальную фазу, обусловленную эффектом источника, если  $n$  и  $m$  различаются на четное число. В противном случае требуется знать разность между начальными фазами на противоположных азимутах излучения. Имеется ли какое-либо простое правило, связывающее начальные фазы на противоположных азимутах от точечного источника (7.148), которое можно использовать для упрощения формулы в последнем случае?

Рассмотрите ту же задачу для мантийных волн Рэлея, используя (7.149).

## Объемные волны в средах со свойствами, зависящими от глубины

Исторически наиболее успешным сейсмическим методом изучения строения Земли было применение формул лучевой теории (разд. 4.4) к интерпретации короткопериодных объемных волн. Гутенберг в 1913 г. весьма точно определил глубину границы между ядром и мантией как 2900 км именно из наблюдений времени пробега  $T(x, \xi)$  как функции положения приемника  $x$  и источника  $\xi$ . Надежные определения толщины коры начались работами Мохоровичича в 1909 г., а существование внутреннего ядра было установлено в 1936 г. Леманн. К 1939 г. независимые исследования Гутенберга и Джеффриса по применению лучевой теории привели к созданию скоростных моделей Земли, которые отличались одна от другой только на несколько процентов. В интервале глубин 800 — 2800 км различие между скоростями  $P$ -волн в моделях Джеффриса и Гутенберга составляет менее 1 %, и такое же различие имеется между скоростями в модели Джеффриса и современной модели 1066 В Гилберта и Дзевонского [135]. Однако эти первоначальные результаты Гутенберга и Джеффриса, полученные с помощью лучевой теории, не были достаточны для того, чтобы разрешить многочисленные вопросы относительно состава и состояния вещества на больших глубинах внутри Земли. Например, в верхней мантии имеются два интервала глубин (вблизи 400 и 650 км), в пределах которых градиент скорости ( $d\alpha/dz$ ) аномально велик. Причиной этого может быть, по всей вероятности, либо изменение состава, либо твердофазовый переход в одном и том же минерале (возможны и обе эти причины), и любое приемлемое во всех отношениях решение этого сложного вопроса будет зависеть главным образом от того, окажутся ли сейсмологи в состоянии сделать достаточно точные оценки  $d\alpha/dz$  и  $d\beta/dz$  в зависимости от глубины. Подобным же образом для того, чтобы понять энергетику механизма динамо в жидком ядре Земли, важно выяснить, какие значения имеет там градиент скорости: препятствующие или способствующие конвекции.

Таким образом, оказалось, что один из самых классических аспектов сейсмологии, а именно изучение внутреннего строения Земли, еще является активным полем исследований; однако акцент теперь уже делается на сравнительно тонкие детали, такие как градиенты скорости в ограниченных интервалах глубин и определение скачков физических свойств при переходе через известные границы, например Мохо.

Объемные волны играют важную роль при решении этих задач, поскольку их сравнительно короткие периоды и возможность выделить их по времени среди других волн на сейсмограмме способствуют их использованию для изучения узко локализованных зон внутри Земли. Этот факт был признан уже давно, и проблема состояла главным образом в том, чтобы найти способ, который су-

щественно усовершенствовал бы классический метод анализа данных о временах пробега волн. В гл. 11 мы опишем, как с помощью групп сейсмических станций можно непосредственно измерять медленность [т.е. градиент  $T(x, \xi)$  при изменении  $x$  в пределах группы], а в гл. 12 покажем, что это является важным достижением, так как именно медленность необходима при решении обратных задач. Кроме того, поскольку  $T$  часто представляет собой многозначную функцию, измерения с помощью групп приборов могут помочь в идентификации последующих вступлений волн на основе различий в их медленности. Однако эти усовершенствования по большей части все еще основаны на определении времен вступлений и расчетах в рамках лучевой теории, изложенной в разд. 4.4.

Обобщение попыток использовать лучевую теорию для амплитуд вступлений объемных волн было сделано в работах [187, 330, 295, 73]. В этих статьях показано, что функция геометрического расхождения ( $\mathcal{R}(x, \xi)$  в обозначениях гл. 4) может оказаться чрезвычайно чувствительной к градиентам скорости, что является весьма полезным качеством для выявления строения Земли. Однако именно на этой стадии можно уяснить ограничения в приложении классической лучевой теории для интерпретации данных наблюдений. Проблема заключается в недостаточности самой теории, поскольку при наблюдениях объемных волн можно заметить ряд частотно-зависимых эффектов, которые лучевая теория не может количественно описать. Объемные волны наблюдаются в «зонах тени» (куда они не должны проникать согласно закону Снеллиуса); они наблюдаются вблизи каустик [поверхностей слабой фокусировки энергии, на которых  $\mathcal{R}(x, \xi) = 0$ ] с частотно-зависимыми амплитудами, которые вовсе не имеют особенностей, предсказанных функцией геометрического расхождения; наблюдаются они и в ситуациях, когда множество лучей между источником и приемником имеют одно и то же время прихода, в результате чего возникают сложные интерференционные эффекты. Волновая теория, необходимая для объяснения этих наблюдений, по существу является обобщением методов, примененных в гл. 6 для решения задачи Лэмба, и включает в себя также последовательность процедур, описанных в гл. 7 для анализа волн в слоистых средах.

В действительности для успешного изучения объемных волн мы будем использовать три весьма различных теоретических метода. В настоящее время, хотя методы расчета могут существенно различаться, любая теория используется одним и тем же путем, а именно для построения теоретических сейсмограмм в заданной модели Земли при заданном источнике сейсмических волн. Затем проводится сравнение между результатами теоретических расчетов и наблюдений. Поскольку, чтобы судить о том, являются ли данные модели Земли и источники приемлемыми или нет, рассматривается вся волновая картина, зафиксированная в данных наблюдений, теоретические сейсмограммы представляют собой значительный шаг вперед по сравнению с использованием только теоретических годографов, построенных в рамках лучевых представлений, и полярности первых вступлений.

Первым теоретическим методом, который мы рассмотрим, будет развитие подхода Каньяра (см. разд. 6.5), использованного на практике для расчета волн в среде, образованной очень большим числом (возможно, несколькими сотнями) однородных плоских слоев. Как показал Хелмбергер [158], суть его — в численном подходе к отысканию пути Каньяра в плоскости комплексного лучевого па-

раметра, а не вычисление простых гипербол, определяемых уравнением (6.91). Следующий теоретический метод, предложенный Фуксом [121 — 123] и часто называемый «методом отражений», тоже направлен на расчет волн внутри среды, состоящей из очень большого числа однородных слоев. Основанный на матричных методах, развитых в сейсмологии Хаскеллом (см. гл. 7), метод Фукса включает численное интегрирование по ограниченному интервалу действительных значений лучевого параметра с последующим обратным преобразованием Фурье по частоте, позволяющим получить синтетическую сейсмограмму.

Разумеется, Земля не является совокупностью однородных плоских слоев; поэтому, применяя оба указанных метода для интерпретации сейсмограмм, необходимо помнить два важных результата. Один, согласно теореме Вольтерра (см. [134]), состоит в том, что волновое поле в среде с *непрерывными* частными производными функции плотности и скорости волн можно изучать с помощью решений для волн в *дискретной* среде, состоящей из множества однородных частей. Действительно, волновое решение для дискретной среды (в пределе, когда число однородных зон устремляется к бесконечности так, чтобы получить распределение плотности и скорости волн в непрерывной среде) стремится к волновому решению для непрерывной среды. На практике для среды, в которой  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  зависят только от глубины (т.е. от  $z$  в декартовой системе координат), допустимо, следовательно, моделировать непрерывный разрез большим числом однородных плоских слоев. Такой подход нашел широкое применение, хотя Чепмен [77] обобщил метод Каньяра так, что получил решение непосредственно для непрерывно меняющихся  $\rho(z)$ ,  $\alpha(z)$ ,  $\beta(z)$ .

Второй результат, необходимый для приложения методов Каньяра и Фукса в сейсмологии, включает учет сферичности Земли. (Во всей этой главе мы будем иметь дело только со средами, в которых  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  являются функциями  $r$  в сферической системе координат или функциями глубины  $z$ , где  $z$  принадлежит либо декартовой системе координат, либо цилиндрической с вертикальной осью симметрии.) Возникает вопрос, как преобразовать задачу распространения волн, поставленную для среды со сферической симметрией (т.е. радиально-неоднородной), в задачу для плоскостной среды, в которой непосредственно применимы два названных метода. В работах [14] и [41] показано, что, используя некоторое преобразование Земли в плоскую модель, в случае *SH*-волн из соответствующего решения для плоской среды можно получить *точное* волновое решение для сферической среды. К сожалению, для волн *P — SV*, как показал Чепмен [75], точное преобразование оказывается невозможным, и поэтому часто используемые преобразования в плоскую модель Земли для решения задач в случае волн *P — SV* являются только приближенными.

В третьем методе решения, который мы будем рассматривать, принимается модель Земли, состоящая из радиально-неоднородных слоев. Сейсмические колебания (как функция времени в различных точках на Земле) разделяются на сигналы, приходящие в пределах различных временных окон, при этом каждый сигнал соответствует в целом некоторому конкретному типу лучевой траектории объемной волны. Вместо геометролучевой теории используется более точное решение для изучаемого сигнала, найденное путем двойного интегрирования как по частоте, так и по лучевому параметру. Для осуществления двойного интегрирования предложено несколько различных способов. Первым может выполнять-

ся интегрирование либо по частоте, либо по лучевому параметру. Интеграл по лучевому параметру может быть взят как по действительным, так и по комплексным значениям. Многие ученые внесли свой вклад в рассматриваемую теорию. Основная заслуга принадлежит Схольте [292], который использовал хорошо разработанные методы суммирования частных волновых разложений в сферических моделях и достаточно детально показал, как можно получить решение в частотной области для конкретных сейсмических лучей. Решение содержит интеграл в плоскости комплексной переменной, которая (по существу) является лучевым параметром. Важный вклад внесли Финни и Александер [257] и Финни и Каслес [258], показавшие, что этот интеграл легко найти численно. Используя интегрирование по комплексному лучевому параметру с последующим интегрированием по действительной частоте, мы продемонстрируем ряд практических приложений метода к некоторым сейсмическим волнам, взаимодействующим с твердым и жидким ядром Земли.

Чепмен [79, 80] предложил несколько альтернативных подходов. Один из них, часто оказывающийся очень эффективным, включает в первую очередь интегрирование по действительным частотам (во многих случаях его можно осуществить аналитически, а не численными методами) с довольно простым последующим нахождением интеграла по лучевому параметру.

Поскольку Земля представляет собой очень сложную среду (даже если принять сферически-симметричную модель), в любом из трех методов решения, которые мы рассмотрим, на практике требуется проведение приближенных преобразований. Следовательно, можно считать удачей, что мы располагаем несколькими методами решения, так как часто оказывается, что точность любого отдельного метода (и, что еще важнее, геофизических выводов, которые могут быть сделаны на основе его применения) можно проверить только путем сравнения с другими методами. В действительности такие сравнения стали возможны лишь весьма недавно, и, хотя результаты еще не достаточно полны, оказалось, что некоторые задачи могут быть решены только каким-либо одним методом, а некоторые — несколькими различными методами.

## 9.1. МЕТОД КАНЬЯРА ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЫ С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ. АНАЛИЗ ОБОБЩЕННОГО ЛУЧА

Этот раздел является естественным развитием разд. 6.5, в котором мы показали, как оценить обобщенное отражение от границы между двумя полупространствами. Предположив, что читатель знаком с выводом формулы (6.91) и с действиями, проведенными в формулах (6.92) — (6.95), мы опишем, следуя Хелмбергеру [158], как рассчитать обобщенное однократное отражение, изображенное на рис. 9.1. Первоначально Хелмбергер применил этот метод к интерпретации записей гидрофона, полученных в случае точечного источника давления — заряда ГНТ, взорванного на глубине  $d_1$  под поверхностью Берингова моря. Приемник располагается на глубине  $d_2$ ; и главной задачей было выделить на записях в диапазоне расстояний порядка 30 — 70 км головную волну и отраже-

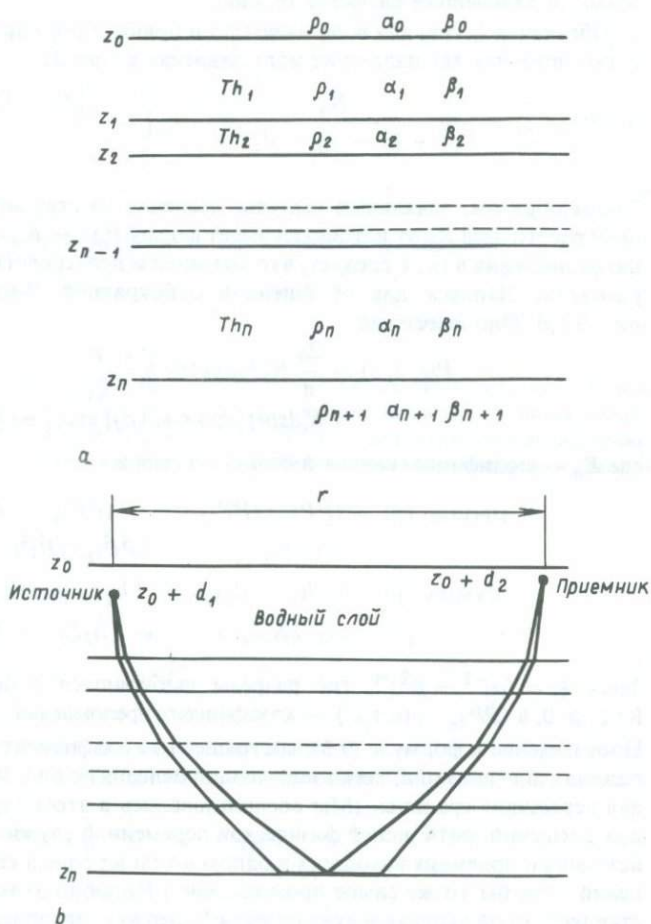


Рис. 9.1. *a* — обозначения плотности ( $\rho$ ) и скорости волн двух типов ( $\alpha, \beta$ ) в пакке однородных слоев. Граница между слоями  $n$  и  $n + 1$  находится на глубине  $z_n$ , мощность  $n$ -го слоя равна  $Th_n = z_n - z_{n-1}$ . *б* — лучевое представление двух основных составляющих обобщенного отражения  $P$ -волны, связанного с  $n$ -й границей; источник и приемник находятся в слое 1. Мы приняли, что  $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ ; следовательно, наряду с закритическим отражением может существовать головная волна, распространяющаяся горизонтально по кровле  $(n + 1)$ -го слоя, как показано на рисунке. Поскольку обобщенное отражение связано только с одной границей, его называют *однократным* отражением. Обмен типа колебаний ( $P$  на  $SV$ ) не показан. На практике в случае источника  $P$ -волн часто оказывается справедливым, что полная запись  $P$ -волны в точке приема получается достаточно точно суммированием таких однократных отражений — по одному для каждой границы (т.е. без учета внутренних многократных отражений и обмена волн  $P$  на  $SV$  и обратно в  $P$ ).

ние от поверхности Мохо. Для учета возможной слоистости земной коры потребовалось дальнейшее развитие теории.

Обозначив  $z_0$  границу вода — воздух и приняв слой 1 за водную толщу, определим источник как падающее поле давления в слое 1:

$$P^{\text{пад}}(r, z, t) = \frac{R_S}{[r^2 + (z - z_0 - d_1)^2]^{1/2}} P_0 \left( t - \frac{[r^2 + (z - z_0 - d_1)^2]^{1/2}}{\alpha_1} \right). \quad (9.1)$$

Таким образом, начальный импульс давления на стандартном (зафиксированном) расстоянии  $R_S$  от источника имеет форму  $P_0(t - R_S/\alpha_1)$ . Из анализа источников давления в гл. 6 следует, что мы можем непосредственно записать преобразование Лапласа для обобщенной однократной  $P$ -волны, показанной на рис. 9.1,б. Оно имеет вид

$$P(r, z, s) = \frac{2s}{\pi} R_S P_0(s) \operatorname{Im} \int_0^{i\infty} \frac{p}{\xi_1} \times K_0(spr) [\text{произв. } (p)] \exp \{-s[\text{сумма } (p)]\} dp, \quad (9.2)$$

где  $K_0$  — модифицированная функция Бесселя и

$$\begin{aligned} \text{ПРОИЗВ. } (p) &= (\dot{P}\dot{P})_1 \cdot (\dot{P}\dot{P})_2 \cdots (\dot{P}\dot{P})_{n-1} \cdot (\dot{P}\dot{P})_n \\ &\cdot (\dot{P}\dot{P})_{n-1} \cdots (\dot{P}\dot{P})_2 \cdot (\dot{P}\dot{P})_1, \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned} \text{СУММА } (p) &= (Th_1 - d_1)\xi_1 + Th_2\xi_2 + \cdots + Th_n\xi_n \\ &+ Th_n\xi_n + \cdots + Th_2\xi_2 + (Th_1 - d_2)\xi_1. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Здесь  $\xi_i = (\alpha_i^{-2} - p^2)^{1/2}$ , где разрезы выбираются с помощью неравенства  $\operatorname{Re} \xi_i \geq 0$ , а  $(\dot{P}\dot{P})_{n-1}$  (и т.д.) — коэффициент преломления для  $(n-1)$ -й границы. Произведение в формуле (9.3), состоящее из коэффициентов преломления и отражения плоских волн, легко записать, проследив по рис. 9.1,б, как обобщенный луч пересекает границы. (Мы воспользовались в этом случае коэффициентами для смещений, хотя нашей физической переменной служит давление, поскольку источник и приемник находятся в одном и том же слое и коэффициенты для давлений дали бы то же самое произведение.) Подобно этому сумма в (9.4) представляет собой вертикальную фазовую задержку, накопленную вдоль обобщенного луча.

Путь Каньяра для вычисления (9.2) является теперь решением  $p = p(\tau)$  уравнения

$$\tau = pr + \text{СУММА } (p), \quad (9.5)$$

где  $\tau$  — величина действительная и положительная. Хотя этот этап должен выполняться численно, легко найти такое решение, которое имеет много общих свойств с обобщенным отражением, изображенным на рис. 6.15. На рис. 9.2 приведено решение для многослойного случая, когда скорости  $P$ -волн  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$  увеличиваются с глубиной и  $r$  достаточно велико, чтобы существовала головная волна от  $(n+1)$ -го слоя.

Если импульсный источник  $P_0(t)$  описывается единичной ступенькой на расстоянии  $R_S$ , то отклик во временной области для обобщенного однократного от-

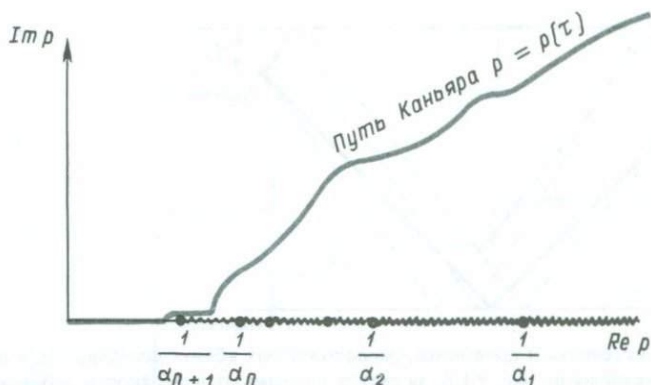


Рис. 9.2. Первый квадрант плоскости комплексного  $p$  с множеством точек разветвления на действительной оси (с разрезами, протягивающимися вправо) и путь Каньяра, являющийся решением (9.5) (т.е. для обобщенного луча рис. 9.1). Вклад головной волны возникает вблизи  $p = 1/\alpha_{n+1}$ , а отражение появляется вблизи точки отклонения пути Каньяра от действительной оси  $p$ .

ражения в точности равен

$$\frac{2}{\pi} R_S \operatorname{Im} \int_0^t \frac{p}{\xi_1} \left( \frac{dp}{d\tau} \right) \frac{\text{ПРОИЗВ.}(p) d\tau}{(t - \tau)^{1/2} (t - \tau + 2pr)^{1/2}} \quad (9.6)$$

[ср. с (6.92)]. На практике вполне допустимо заменить  $(t - \tau + 2pr)^{1/2}$  в знаменателе на  $(2pr)^{1/2}$ , так что отклик на ступенчатую функцию (9.6) становится равным

$$\frac{2}{\pi} \psi(t) * \frac{1}{t^{1/2}}, \quad \text{где } \psi(t) = R_S \operatorname{Im} \left\{ \frac{p^{1/2}}{\xi_1} \frac{dp}{d\tau} \frac{\text{ПРОИЗВ.}(p)}{(2r)^{1/2}} \right\}. \quad (9.7)$$

Прежде чем можно будет сравнивать этот теоретический отклик с наблюдаемыми данными, необходимо провести свертку с реальным импульсом источника  $P_0(t)$ , с импульсной характеристикой аппаратуры  $I(t)$ , а также учесть отражения-спутники вблизи источника и приемника. Все эти эффекты объединяются в передаточной функции  $T(t)$ , которая записывается следующим образом:

$$T(t) = P_0(t) * I(t) * \left[ \delta(t) - \delta\left(t - \frac{2d_1}{\alpha_1}\right) - \delta\left(t - \frac{2d_2}{\alpha_1}\right) + \delta\left(t - \frac{2d_1}{\alpha_1} - \frac{2d_2}{\alpha_1}\right) \right]. \quad (9.8)$$

Соображения, по которым для описания отражений от свободной поверхности введены три дополнительные дельта-функции, иллюстрирует рис. 9.3. На рис. 9.4 показан способ, которым Хелмбергер [158] построил  $T(t)$  из соответствующих компонент. Отсюда следует, что синтетический отклик можно записать

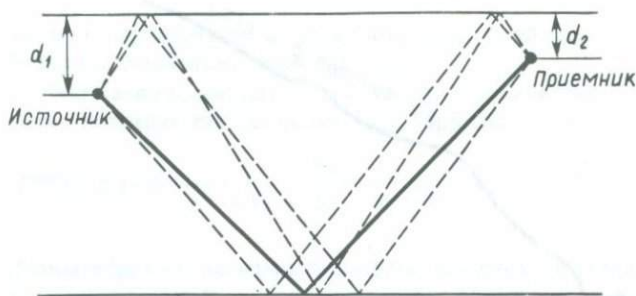


Рис. 9.3. Для источника и приемника, расположенных вблизи поверхности, к исходному лучу, изображенному на рис. 9.1, б, за счет отражения от поверхности добавляются еще три обобщенных луча. Таким образом, для отражения вблизи источника вводится временная задержка  $2d_1/\alpha_1$  (скорость звука в океане настолько ниже, чем  $\alpha_{n+1}$ , что для волн, преломленных на границе Мохо, лучевые траектории в океане почти вертикальны). Поскольку  $d_1 \ll Th_1$  и  $d_1 \ll r$ , эта временная задержка и является основным эффектом (не считая перемены знака при отражении), остальная часть луча по существу сохраняется той же, что и для исходного обобщенного луча.

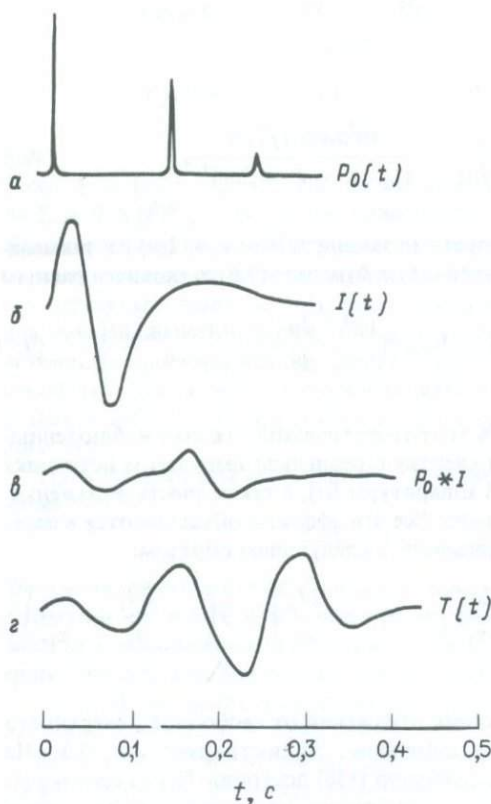


Рис. 9.4. Построение передаточной функции. а — типичная функция источника  $P_0(t)$  для заряда, взорванного на глубине 50 м; последующие импульсы возникают в результате пульсации газового пузыря. б — импульсная характеристика аппаратуры (гидрофона плюс записывающей системы), т.е. отклик, который был бы зарегистрирован при прохождении через приемник волны давления в виде дельта-функции. в — свертка а и б. г — передаточная функция после свертки, позволяющей учесть отражения от поверхности вблизи источника и приемника [см. (9.8)]. (Согласно рис. 6 из работы [158].)

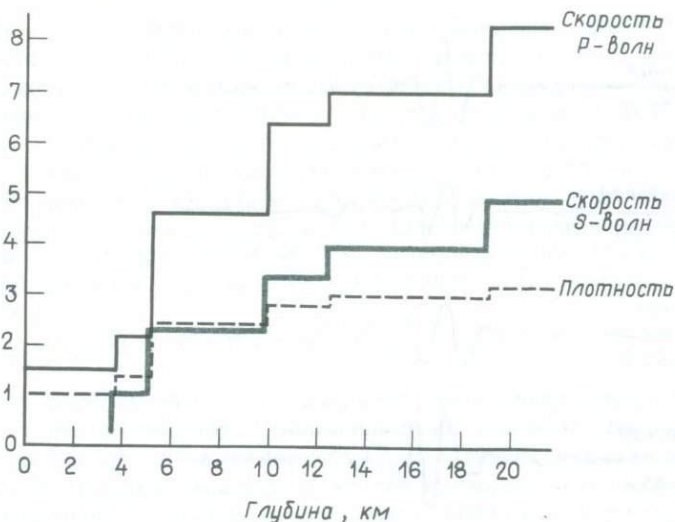


Рис. 9.5. Модель океанической коры под Северо-Алеутским бассейном. Мохо на глубине 19 км, слой воды 3,75 км. (Согласно рис. 10 из [158].)

как

$$T(t) * \frac{d}{dt} [\text{отклик на ступенчатую функцию, данный в (9.6)}] = \frac{dT}{dt} * \frac{2}{\pi} \psi(t) * \frac{1}{t^{1/2}}. \quad (9.9)$$

Напомним, что здесь рассматривалось только обобщенное однократное отражение Р-волны от границы на глубине  $z_n$ . Для модели океанической коры, представленной на рис. 9.5, нужно учитывать однократные отражения Р-волн от четырех других границ, лежащих выше границы Мохо, которая расположена на глубине 19 км. Однако их легко включить в расчет путем суммирования соответствующих  $\psi$ -функций, определенных в (9.7), каждая из которых имеет различный путь Каньяра, с последующим проведением двух сверток в соответствии с формулой (9.9). Результат показан на рис. 9.6, где дано сравнение рассчитанных и наблюдаемых волн, выполненное Хелмбергером [158] для работ по методу преломленных волн, проведенных в Беринговом море примерно в 500 км к северу от Адака. Рисунок демонстрирует поразительно хорошее согласие форм рассчитанного и наблюдаемого импульсов, хотя в относительных амплитудах заметны некоторые различия, обусловленные, возможно, ошибками в калибровке источника. Дальнейшие подробности расчета пути Каньяра и разложения волнового фронта головной и отраженной волн описаны в задачах 9.1 и 9.2.

Легкость, с которой можно рассчитать вклад каждого обобщенного луча, позволяет рассматривать случаи, в которых суммируются несколько сотен обобщенных лучей. Такое развитие теории Каньяра позволяет исследовать большое число интересных геофизических проблем. Так Меллман и Хелмбергер [228] по-

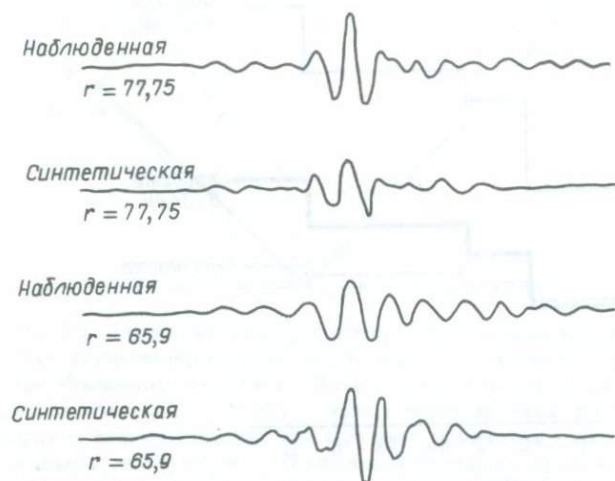


Рис. 9.6. Сравнение наблюдаемых и теоретических сейсмограмм для головной волны и за- критического отражения от границы Мохо под Северо-Алеутским бассейном. Отражение сравнительно сильное. Синтетические сейсмограммы рассчитаны на основе обобщенных отражений однократной  $P$ -волны для модели, показанной на рис. 9.5. Наблюдаемые записи приведены с коэффициентом  $10^{1/2}$ , а синтетические — с коэффициентом 2. (Согласно рис. 11 из [158].)

казали, что высокоскоростной тонкий слой может вызвать затухание высокочастотных волн; Виред и Бен-Менахем [325] и Лэнгстон и Хелмбергер [206] дали способ анализа источников в виде сдвиговых дислокаций; Хелмбергер и Мэлон [160] сопоставили теоретические и реальные сейсмограммы  $SH$ -волн, показав, как сильно слоистость коры может изменять форму волн, возникающих при близких землетрясениях; Спудич и Хелмбергер [305] исследовали структуры осадочных пород, которые могут слагать океаническое дно, обнаружив при этом практический эффект просачивающихся мод, подобных  $\bar{P}$ -волнам в полупространстве, рассмотренным нами в гл. 6.

Однако часто число обобщенных лучей, которые должны быть включены в расчет, оказывается недопустимо большим. Такие случаи возникают при изучении разрезов, характеризующихся сильными градиентами скорости, и при расчетах синтетических сейсмограмм для протяженных интервалов времени. Ввиду важности таких проблем мы обратимся теперь к альтернативному методу расчета, в котором учитываются все многократные отражения.

## 9.2. МЕТОД ОТРАЖЕНИЙ ДЛЯ СРЕДЫ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ПЛОСКИХ СЛОЕВ

В гл. 6 и 7 мы показали, как получить дважды трансформированные решения в виде функции  $(k, z, \omega)$ , где  $k$  — горизонтальное волновое число. В этих главах действия производятся в основном в плоскости комплексного  $k$  (или  $p$ -

плоскости,  $k = \omega p$  с целью найти обратное преобразование, дающее решение в виде функции  $(r, z, \omega)$ . Метод Фукса позволяет оценить это обратное преобразование численно путем интегрирования по действительным  $k$  с последующим интегрированием по действительным  $\omega$  для получения искомого решения в виде функции  $(r, z, t)$ . Например, при описании возбуждения волн Лява (разд. 7.4) мы получили формулу для многократной трансформанты решения. Она может быть рассчитана с использованием известной формы пропагатора для волн  $SH$  в пачке однородных слоев. Интеграл по действительным значениям  $k$  берется для последовательности различных частот, а затем для получения синтетической сейсмограммы используется дискретное представление интеграла

$$(1/\pi) \operatorname{Re} \int_0^{\infty} s(r, z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Реализация указанной программы осложняется наличием полюсов трансформанты, которые соответствуют модам поверхностных волн. Они лежат на самой действительной оси  $k$  и, следовательно, находятся на пути интегрирования. Вероятно, эту трудность можно обойти путем прибавления к скорости в каждом слое малой комплексной поправки, учитывающей неупругость среды [см.(5.88)], за счет которой полюсы поверхностных волн сдвигаются с положительной действительной оси  $k$  и поднимаются в первый квадрант  $k$ -плоскости. Однако метод Фукса использовался в основном при исследовании объемных волн для получения отклика свободной поверхности пачки однородных плоских слоев на действующий внутри пачки точечный источник. Если ограничиться рассмотрением объемных волн, то интегрирование по  $k$  можно проводить только по той части действительной оси  $k$ , где нет полюсов поверхностных волн. Теперь обсудим конкретный пример этого численного подхода, который называют *методом отражений*.

Пусть (рис. 9.7) точечный источник на глубине  $h$  генерирует волны, которые подходят к приемнику как отраженные от некоторой структуры в интервале глубин  $z_m$  и  $z_n$ . Например, в Земле этому может соответствовать область повышенного градиента скорости, моделируемая в данном примере пачкой тонких однородных слоев.

Рассматривая векторы движения-напряжения, мы убедились, что источник можно описать как разрыв функции  $f(k, z, \omega)$  при  $z = h$ , где компоненты  $f$  являются многократно преобразованными компонентами смещения и напряжения. Если источник зависит от азимута  $\phi$ , тогда, как мы показали, необходимо перейти от  $\phi$  к  $m$ , рассчитать каждую  $m$ -компоненту и суммировать по  $m$  для получения  $f(k, \phi, z, \omega)$ . Однако на практике нужны только несколько членов ( $-2 \leq m \leq 2$  для источников в виде двойной пары сил). Разрыв в  $f$  для сдвиговой дислокации произвольной ориентации описал Хадсон [174, 175].

Если бы источник находился в безграничном однородном пространстве с теми же упругими параметрами, которыми характеризуется слой  $S$ , было бы нетрудно получить вектор движения-напряжения для волны, уходящей вниз от источника. Мы рассмотрим только задачу для волн  $P - SV$ , сосредоточив внимание на распространении  $P$ -волны в области, лежащей выше отражающей структуры. Напомним, что в принятом нами обозначении  $f = Fw$ ,  $F = F(z)$  — это матрица слоя, определенная для каждого слоя [см.(5.65)], а  $w$  — вектор, соот-

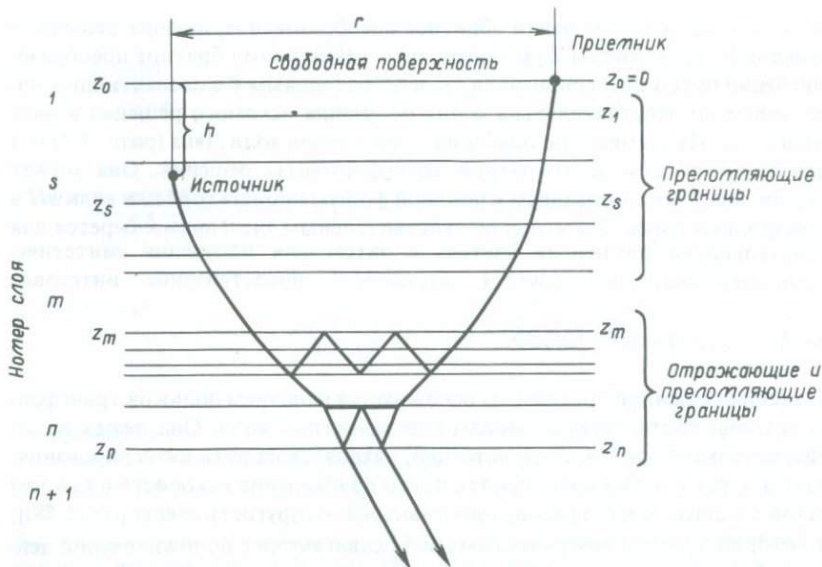


Рис. 9.7. Метод отражений. Точечный источник на глубине  $h$  расположен в слое  $s$ . Требуется рассчитать смещение на расстоянии  $r$  на свободной поверхности для объемных волн, которые взаимодействуют с частью среды на глубинах между  $z_m$  и  $z_n$ . Поскольку используется матричный пропагатор между этими двумя глубинами, все многократные отражения, возникающие внутри интересующей нас толщи, принимаются в расчет. Например, в слое  $n$  показаны головная  $P$ -волна и  $S$ -волны. В данном изложении рассматриваются только те волны, которые распространяются вниз от источника как  $P$  и подходят к приемнику тоже как  $P$ . Принципиально несложно включить в расчет влияние толщи, расположенной выше источника.

ветствующий весам столбцов  $\mathbf{F}$ . Четыре компоненты  $\mathbf{W}$  в общем случае постоянны для каждого слоя и дают амплитуду в слое для нисходящих волн  $P$  и  $SV$  и восходящих волн  $P$  и  $SV$  соответственно. Слой, содержащий источник, отличается от остальных тем, что  $\mathbf{W}_s$  принимает два значения, одно из которых применимо для  $z < h$  (имеются дополнительные восходящие волны от источника), а другое соответствует случаю  $z > h$  (с дополнительными нисходящими волнами). Из (5.65) следует, что вектор движения-напряжения, описывающий только  $P$ -волны, распространяющиеся вниз от источника, задается первым столбцом матрицы  $\mathbf{E}$ , умноженным на фазовый множитель  $\exp[i\omega\xi_s(z-h)]$  и на скаляр  $P^{\text{пад}}$ , который связан с разрывом  $\mathbf{f}$  на глубине  $h$ . Именно этот вектор  $\mathbf{f}^{\text{пад}P}$  нам нужен, чтобы рассмотреть эффекты распространения в нашей задаче:

$$\mathbf{f}^{\text{пад}P} = \mathbf{f}^{\text{пад}P}(k, m, z, \omega) = P^{\text{пад}} \begin{pmatrix} \alpha_s P \\ \alpha_s \xi_s \\ 2i\omega\rho_s \alpha_s \beta_s^2 p \xi_s \\ i\omega\rho_s \alpha_s (1 - 2\beta_s^2 p^2) \end{pmatrix} \exp[i\omega\xi_s(z-h)]. \quad (9.10)$$

Спектр источника и все азимутальные эффекты содержатся в скаляре  $P^{\text{пад}}$ . Поскольку нас интересует в основном смещение, мы не будем далее выписывать последние две компоненты вектора движения-напряжения.

Переносим волновое движение в  $P$ -волну, уходящую вниз в подошву слоя  $m$ , помножим выражение для этой волны на коэффициенты преломления и вертикальные фазовые множители. Тогда для волны, падающей на изучаемую пачку слоев между  $z_m$  и  $z_n$ , получим

$$\begin{pmatrix} \alpha_m P \\ \alpha_m \xi_m \end{pmatrix} \left( \prod_{j=s}^{m-1} \dot{P} \dot{P}_j \right) \exp \left[ i\omega \left( \sum_{j=s+1}^m \xi_j T h_j \right) \right] P^{\text{пад}} \exp [i\omega \xi_s (z_s - h)]$$

Обозначим коэффициент отражения  $P$  —  $P$  для данной пачки слоев как  $\{\dot{P}P\}_n^m$  и введем подобное же обозначение для обменных ( $P \rightarrow S$ ) и проходящих волн. Чтобы найти этот коэффициент, воспользуемся матричным пропагатором  $P(z_m, z_n)$ , который известен в явном виде (см. дополнение 9.1) для однородных слоев. Вспомнив свойство

$$f(z_m) = P(z_m, z_n) f(z_n), \quad (9.11)$$

получим

$$f(z_m) = E_m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \{\dot{P}P\}_n^m \\ \{\dot{P}S\}_n^m \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad f(z_n) = E_{n+1} \begin{pmatrix} \{\dot{P}P\}_n^m \\ \{\dot{P}S\}_n^m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.12)$$

Здесь для фазы выбран уровень приведения  $z_m$  в случае коэффициентов отражения и  $z_n$  — коэффициентов преломления. Этот выбор объясняет индексы матриц  $E$  в (9.12) [так как из (5.65) следует, что  $E_m = F_m(z_m)$  и  $E_{n+1} = F_{n+1}(z_n)$ ]. Первое из уравнений (9.12) отражает наше допущение о том, что на пачку слоев падает только нисходящая  $P$ -волна, а второе не содержит восходящих волн в полупространстве ниже  $z_n$ . Поскольку подстановка этих выражений для вектора движения-напряжения в (9.11) дает четыре скалярных уравнения для четырех неизвестных, мы можем решить их для неизвестного, интересующего нас в настоящий момент, а именно для  $\{\dot{P}P\}_n^m$ . Подробное рассмотрение этой задачи дано в работах [70] и [195] (см. также дополнение 9.6). Восходящая  $P$ -волна у подошвы слоя  $m$  запишется как

$$\begin{pmatrix} \alpha_m P \\ -\alpha_m \xi_m \end{pmatrix} \left( \prod_{j=s}^{m-1} \dot{P} \dot{P}_j \right) \exp \left[ i\omega \left( \sum_{j=s+1}^m \xi_j T h_j \right) \right] P^{\text{пад}} \{\dot{P}P\}_n^m \exp [i\omega \xi_s (z_s - h)].$$

Если мы теперь проследим это движение в виде  $P$ -волны вверх до свободной поверхности, то получим

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 P \\ -\alpha_1 \xi_1 \end{pmatrix} (\text{ПРОИЗВ.}) \times \exp [i\omega (\text{СУММА})] \{\dot{P}P\}_n^m P^{\text{пад}}, \quad (9.13)$$

где

$$\begin{aligned} \text{ПРОИЗВ.} &= \left( \prod_{j=s}^{m-1} \dot{P}\dot{P}_j \right) \times \left( \prod_{j=1}^{m-1} \dot{P}\dot{P}_j \right), \\ \text{СУММА} &= \left( \sum_{j=s+1}^m \xi_j Th_j \right) + \left( \sum_{j=1}^m \xi_j Th_j \right) + \xi_s(z_s - h). \end{aligned} \quad (9.14)$$

В формулу для смещения (9.13) следует ввести поправку за влияние свободной поверхности путем добавления отраженных вниз  $P$ - и  $S$ -волн при  $z=0$  к подходящей снизу  $P$ -волне. Эта поправка рассмотрена в задаче 5.6. Теперь мы, наконец, можем записать компоненты вектора движения-напряжения в точке при-

## ДОПОЛНЕНИЕ 9.1

*Матричные пропагаторы в задачах о волнах SH и P — SV*

Мы ввели матричные пропагаторы при рассмотрении волн Лява и Рэлея (разд. 7.2). Как было отмечено, движение частиц затухает с глубиной, и поэтому удобно иметь дело с величинами  $e^{\pm\gamma z}$ ,  $e^{\pm\nu z}$ , в которых (по большей части)  $\gamma$  и  $\nu$  вещественны. Более того, при этом для волн  $P — SV$  фазовый сдвиг  $\pi/2$  между вертикальными и горизонтальными компонентами смещения и напряжения [см. (7.25) — (7.27)] введен явно, так что  $r_1, r_2, r_3, r_4$  — действительные величины. Хотя полученные уравнения справедливы в равной мере и для объемных волн, обозначения  $\gamma, \nu$  неудобны, потому что  $\gamma$  и  $\nu$  становятся отрицательными мнимыми. Заметим также, что фазовый сдвиг между компонентами смещения и между компонентами напряжения (для однородных волн) отсутствует и поэтому все величины  $r_1, r_2, r_3, r_4$  не могут быть вещественными. Короче говоря, лучше использовать векторы движения-напряжения, введенные (для плоских волн) в разд. 5.4, и медленности  $\rho, \xi, \eta$ , чем горизонтальное волновое число  $k$  и постоянные затухания  $\gamma$  и  $\nu$ .

Для  $SH$ -волн в дальней зоне мы воспользуемся выражением

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(k, m, z, \omega) = \mathbf{f}(\omega\rho, m, z, \omega) = \begin{pmatrix} u_\phi(\omega\rho, m, z, \omega) \\ \tau_{\phi z}(\omega\rho, m, z, \omega) \end{pmatrix} \quad (1a)$$

в цилиндрической системе координат  $(r, \phi, z)$ . Соответствующая горизонтальная волновая функция есть  $e^{im\phi} d[J_m(kr)]/dr$ . Это представление является некоторой аппроксимацией, так как мы пренебрегли здесь горизонтальной компонентой движения, перпендикулярного  $\phi$ -направлению. Точное представление базируется на выражениях для смещения  $\mathbf{u} = U(k, m, z, \omega)\mathbf{T}_k^m(r, \phi)$  и напряжения  $\mathbf{T}(k, m, z, \omega)\mathbf{T}_k^m(r, \phi)$ , где  $\mathbf{T}_k^m$  — векторная поверхностная гармоника, определенная в (7.117). Для точного представления, имеющего значение в ближней зоне и для больших времен, мы берем

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} U(\omega\rho, m, z, \omega) \\ T(\omega\rho, m, z, \omega) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Уравнения  $\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{w}$  и  $\mathbf{F} = \mathbf{E}\mathbf{A}$ , связанные с (1a) или (16), описаны в разд. 5:4; при этом матрица слоя  $\mathbf{F}$  и обратная ей матрица даны в явном виде в формулах (5.63) — (5.64). Матрич-

ный пропагатор имеет вид

$$P(z, z_0) = F(z)F^{-1}(z_0) = \begin{pmatrix} \cos[\omega\eta(z - z_0)] & -\frac{1}{\omega\mu\eta} \sin[\omega\eta(z - z_0)] \\ \omega\mu\eta \sin[\omega\eta(z - z_0)] & \cos[\omega\eta(z - z_0)] \end{pmatrix}, \quad (2)$$

при условии что  $z$  и  $z_0$  принадлежат одному и тому же (однородному) слою. Если эти глубины относятся к разным слоям пачки, сложенной однородными слоями, находящимися в жестком контакте друг с другом, то используется выражение (7.44).

Для волн  $P - SV$  в дальней зоне в качестве компонент вектора  $f$  примем  $u_x, u_z, u_{xz}, u_{zz}$ . Тогда  $F$  определяется из формулы (5.65), а обратная ей матрица — из (5.67). Матричный пропагатор (для  $z$  и  $z_0$  в одном и том же однородном слое) запишется тогда как

$$P(z, z_0) = \begin{pmatrix} 2\beta^2 p^2 C_\xi + (1 - 2\beta^2 p^2) C_\eta & \frac{ip}{\xi} (1 - 2\beta^2 p^2) S_\xi - 2i\beta^2 p\eta S_\eta & & \\ 2i\beta^2 p\xi S_\xi - \frac{ip}{\eta} (1 - 2\beta^2 p^2) S_\eta & (1 - 2\beta^2 p^2) C_\xi + 2\beta^2 p^2 C_\eta & & \\ -4\omega\rho\beta^4 p^2 \xi S_\xi - \frac{\omega\rho}{\eta} (1 - 2\beta^2 p^2)^2 S_\eta & 2i\omega\rho\beta^2 p (1 - 2\beta^2 p^2) [C_\xi - C_\eta] & & \\ 2i\omega\rho\beta^2 p (1 - 2\beta^2 p^2) [C_\xi - C_\eta] & -\frac{\omega\rho}{\xi} (1 - 2\beta^2 p^2)^2 S_\xi - 4\omega\rho\beta^4 p^2 \eta S_\eta & & \\ & \frac{p^2}{\omega\rho\xi} S_\xi + \frac{\eta}{\omega\rho} S_\eta & -\frac{ip}{\omega\rho} [C_\xi - C_\eta] & \\ & -\frac{ip}{\omega\rho} [C_\xi - C_\eta] & \frac{\xi}{\omega\rho} S_\xi + \frac{p^2}{\omega\rho\eta} S_\eta & \\ & 2\beta^2 p^2 C_\xi + (1 - 2\beta^2 p^2) C_\eta & 2i\beta^2 p\xi S_\xi - \frac{ip}{\eta} (1 - 2\beta^2 p^2) S_\eta & \\ & \frac{ip}{\xi} (1 - 2\beta^2 p^2) S_\xi - 2i\beta^2 p\eta S_\eta & (1 - 2\beta^2 p^2) C_\xi + 2\beta^2 p^2 C_\eta & \end{pmatrix} \quad (3)$$

где 1-й и 2-й столбцы записаны над 3-м и 4-м столбцами:

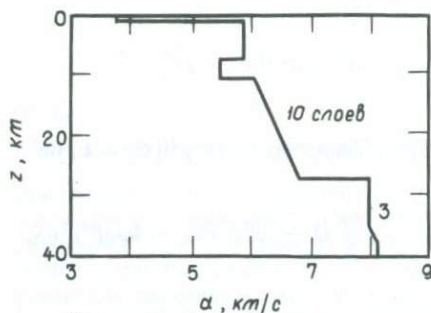
$$C_\xi = \cos[\omega\xi(z - z_0)], \quad C_\eta = \cos[\omega\eta(z - z_0)], \\ S_\xi = \sin[\omega\xi(z - z_0)], \quad S_\eta = \sin[\omega\eta(z - z_0)].$$

Отметим, что действительные и мнимые элементы матрицы расположены в (3) в шахматном порядке. Произведение таких матриц имеет тот же самый вид, поэтому необходимые действия с пропагатором [например, (7.44)], если  $p$  — действительная величина, легко запрограммировать, используя только действительные переменные. Некоторые из коэффициентов в (2) и (3) имеют порядок  $O(\omega)$ , а некоторые  $O(\omega^{-1})$ . От этой частотной зависимости можно избавиться, оперируя скоростями частиц и напряжениями (а не смещениями частиц и напряжениями).

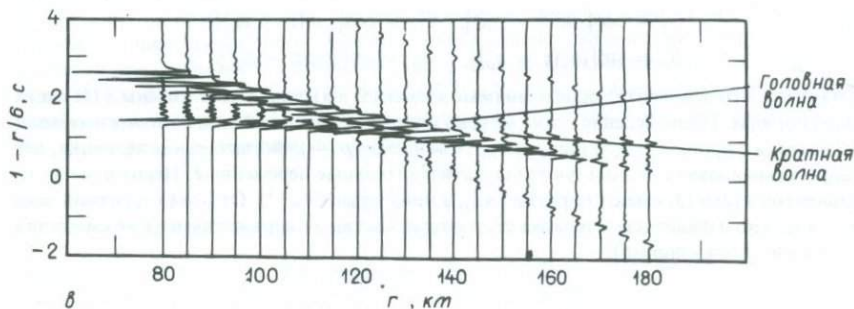
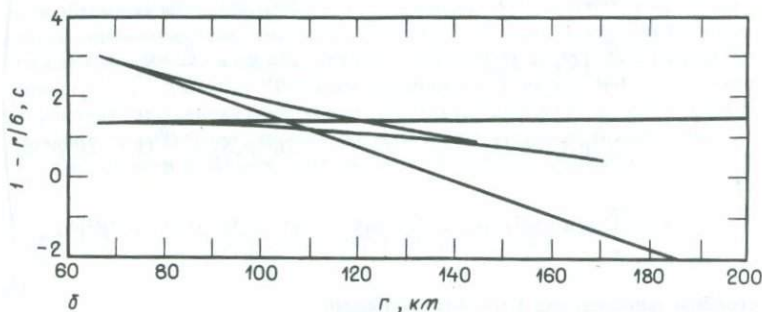
емника. Они имеют вид

$$\begin{pmatrix} u_r(k, m, 0, \omega) \\ u_z(k, m, 0, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_1\beta_1^2 p \zeta_1 \eta_1 \\ -2\alpha_1\zeta_1(1 - 2\beta_1^2 p^2) \end{pmatrix} \times \frac{\text{ПРОИЗВ.} \times \exp[i\omega \text{ СУММА}] \times \{\dot{P}\dot{P}\}_n^m \times P^{\text{пад}}}{(1 - 2\beta_1^2 p^2)^2 + 4\beta_1^4 p^2 \zeta_1 \eta_1}. \quad (9.15)$$

Мы получили многократно преобразованное решение, которое нужно просуммировать по  $m$  ( $P^{\text{пад}}$ , как правило, зависит от  $m$ ) и проинтегрировать по  $k$  и  $\omega$ . Таким образом, основываясь на формуле (7.131), мы находим, что в частот-



а



ной области решением будет

$$u(r, \phi, 0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k [u_r(k, m, 0, \omega) S_k^m - i u_z(k, m, 0, \omega) R_k^m] dk.$$

При значениях  $k$  для объемных волн и при некотором горизонтальном разное между источником и приемником компонента  $\hat{\phi}$  вектора  $S_k^m$  (см. (7.117)) становится пренебрежимо малой. Следовательно, (9.15) можно записать как

$$u(r, \phi, 0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \omega^2 p \left[ u_r \frac{d}{d(\omega p r)} J_m(\omega p r) \hat{r} + i u_z J_m(\omega p r) \hat{z} \right] e^{im\phi} dp, \quad (9.16)$$

с последующим интегрированием по  $\omega$  для получения  $u(r, \phi, 0, t)$ .

Практически в (9.16) берется только конечный интервал значений  $p$ . Так Фукс и Мюллер [124] рекомендуют интервал  $0 \leq p \leq 1/\alpha_{\max}$ , где  $\alpha_{\max}$  — наибольшая скорость  $P$ -волны в слоистой толще, покрывающей отражающую пачку. Отсюда следует, что СУММА всегда вещественна и неоднородные волны выше отражающей области исключены.

Сама по себе отражающая пачка фигурирует в расчетах только в виде члена  $\{\hat{P}\hat{P}\}_n^m$  и теперь мы коротко рассмотрим простой пример, иллюстрирующий тот факт, что все многократно-отраженные лучи внутри диапазона глубин  $z_m - z_n$  автоматически учтены. Но сначала обратимся к набору теоретических сейсмограмм, полученных методом отражений в случае взрывного источника, возбуждающего колебания на поверхности заданной модели земной коры. Модель изображена на рис. 9.8,а. Фукс и Мюллер [124] рассчитали теоретические сейсмограммы, показанные на рис. 9.8,б; при этом в качестве отражающей поверхности они приняли границу между низкоскоростным каналом и подстилающей его пачкой слоев. Ключом к интерпретации является приведенный годо-

Рис. 9.8. Применение метода отражений. а — модель земной коры; показана только скорость  $P$ -волн. Линейное нарастание скорости в нижней части коры (до границы Мохо на глубине 27 км) аппроксимируется на самом деле 10 однородными слоями, а небольшой по мощности линейный участок ниже Мохо — тремя слоями. б — приведенный годограф  $P$ -волн для модели а, который характеризуется медленностью, меньшей 1/6 с/км. в — синтетические сейсмограммы (вертикальная компонента смещения), соответствующие годографу б и полученные с помощью метода отражений. Наибольшие амплитуды имеют волны, испытавшие поворот луча в пределах слоя с повышенным градиентом скорости в самой нижней части коры и закритически отраженные от границы Мохо. Волна  $P_n$  слаба, но ее раннее вступление на расстоянии более 120 км позволит идентифицировать ее в Земле, если данная модель строения коры достаточно точна. В диапазоне расстояний 150 — 180 км наблюдается заметная кратная волна на приведенном времени 1 с, которую можно отождествить как волну, дважды претерпевшую поворот внутри нижнего слоя коры и отразившуюся при этом один раз от подошвы зоны пониженной скорости. «Головная волна», возникающая в подошве зоны пониженной скорости, на расстояниях, превышающих примерно 140 км, очень слаба из-за наличия положительного градиента скорости. Позже всех следится фаза с медленностью, равной 1/8,15 (как у основной головной волны  $P_n$ ). Это фиктивная волна, возникающая в результате усечения интервала интегрирования по параметру  $p$  в (9.16). (Согласно рис. 7 из работы [124].)

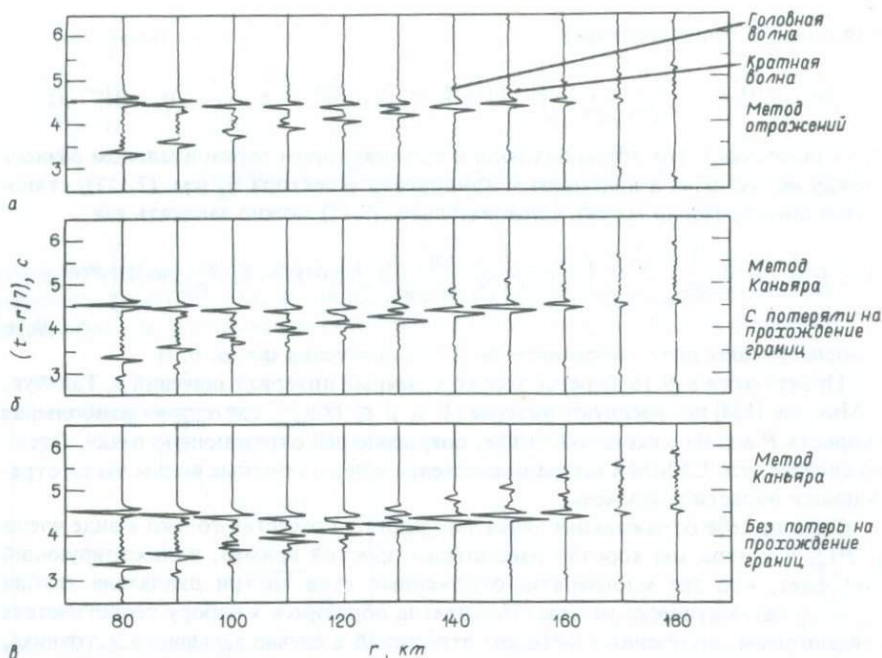


Рис. 9.9. Сопоставление метода отражений и метода Каньяра для модели коры, изображенной на рис. 9.8,а. *а* — отдельные сейсмограммы, выбранные с рис. 9.8,в, нанесены так, чтобы детально показать форму импульсов, полученную методом отражений. Время пробега приведено здесь к медленности  $1/7$  с/км. *б* — расчет, сделанный в *а*, повторен с использованием формулы (9.9) для каждого однократного взаимодействия в пакке слоев. *в* — повторение расчета *б*, при этом все коэффициенты преломления (вниз и вверх от каждой отражающей границы) приравнены к единице. Это означает, что член ПРОИЗВ в (9.2) и (9.3) аппроксимируется одним только членом  $PP_n$ . В расчеты *б* и *в* включены также отражения от верхней части коры, которые не учитывались в *а*, что объясняет некоторое различие в форме импульсов для ранних времен на расстояниях вплоть до примерно 120 км. Очевидны также и другие расхождения между *а* и *б*, особенно на расстояниях 100 и 110 км для приведенного времени около 4 с. Эта часть сейсмограммы определяется главным образом областью коры, находящейся непосредственно под зоной пониженной скорости. Нарастание скорости с глубиной в этом районе вызывает появление кратных волн, которые не учтены в *б*, но автоматически включены в расчет в *а*. На расстояниях 140 — 180 км головная и кратная волны, отмеченные в *а*, имеют совершенно иные амплитуды, чем дает расчет в *б* (см. также рис. 9.8,в). (Согласно рис. 8 из [124].)

граф, показанный на рис. 9.8,б. (Если бы вместо приведенного времени  $t - r/v$  на график было нанесено время  $t$  в функции  $r$ , вертикальная шкала растянулась бы более чем на 26 с вместо изображенных здесь 6 с и многие детали разделения по времени между вступлениями могли бы оказаться потерянными.) По приведенной кривой можно также найти интервал значений  $p$ , необходимый для интегрирования (9.16), так как по годографу можно определить те значения лучевого параметра, с которыми приходят к приемнику основные волны. Действительно,

лучевой параметр равен наклону годографа (см. задачу 9.2и). Поскольку величина наклона меняется примерно от  $1/8,15$  до  $1/6$ , при интегрировании для получения сейсмограмм, приведенных на рис. 9.8,в, был взят соответствующий диапазон значений  $p$ :  $1/8,15 \leq p \leq 1/6$ . Наибольшее количество времени при расчетах занимает оценка коэффициентов  $\{\hat{P}\hat{P}\}_n^m$  при различных значениях  $p$  и  $\omega$ . Однако проделать это требуется только один раз, так как этот член не зависит от  $g$ . Программа быстрого расчета составлена Киндом [195].

На рис. 9.9 рассчитанные импульсы показаны более подробно с использованием другой временной шкалы. Дано сравнение метода отражений с методом Каньяра, рассмотренным в разд. 9.1. Отчетливо видны некоторые различия. По-видимому, их можно было бы устранить, если бы для последующего обратного преобразования в методе Каньяра было взято достаточное число обобщенных лучей. Затраты времени на расчет приведенных сейсмограмм  $a, б, в$ , как показали Фукс и Мюллер [124], находятся в отношении 20:5:1; следовательно, метод отражений требует значительно больше времени, чем метод, в котором принимаются в расчет только однократные отражения на каждой границе в пакке слоев.

Чтобы закончить рассмотрение метода отражений, убедимся в том, что член вида  $\{\hat{P}\hat{P}\}_n^m$  включает в себя все многократные отражения между уровнями  $z_m$  и  $z_n$ . В общем демонстрация этого факта может быть чрезвычайно громоздкой, однако основная идея станет ясна из простого примера для  $SH$ -волн.

Итак, на рис. 9.10 изображен слой, заключенный между двумя полупространствами. Вектор движения-напряжения для  $SH$ -волн имеет вид (см. дополнения 9.1)

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} u_\phi(k, z, \omega) \\ \tau_{\phi z}(k, z, \omega) \end{pmatrix},$$

и уравнения, соответствующие (9.12), в этом случае запишутся следующим образом:

$$\mathbf{f}(z_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega\mu_1\eta_1 & -i\omega\mu_1\eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \{\hat{S}\hat{S}\}_2^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(z_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega\mu_3\eta_3 & -i\omega\mu_3\eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\hat{S}\hat{S}\}_2^1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя их в формулу  $\mathbf{f}(z_1) = \mathbf{P}(z_1, z_2) \mathbf{f}(z_2)$  и используя матричный пропагатор  $SH$ -волн [дополнение 9.1, уравнение (2)], получим два уравнения для двух неизвестных  $\{\hat{S}\hat{S}\}_2^1$  и  $\{\hat{S}\hat{S}\}_2^2$ . Для отражения решением будет

$$\{\hat{S}\hat{S}\}_2^1 = \frac{\left( C - \frac{i\mu_3\eta_3 S}{\mu_2\eta_2} \right) - \left( \frac{\mu_3\eta_3}{\mu_1\eta_1} C - \frac{i\mu_2\eta_2 S}{\mu_1\eta_1} \right)}{\left( C - \frac{i\mu_3\eta_3 S}{\mu_2\eta_2} \right) + \left( \frac{\mu_3\eta_3}{\mu_1\eta_1} C - \frac{i\mu_2\eta_2 S}{\mu_1\eta_1} \right)}, \quad (9.17)$$

где  $C = \cos(\omega\eta_2 Th_2)$ ,  $S = \sin(\omega\eta_2 Th_2)$ .

На рис. 9.10,б показана система многократных волн, которую можно ожидать на основе принципа причинности. Иными словами, мы ожидаем, что за отражением  $\hat{S}\hat{S}_1$  от кровли слоя последует волна, уже один раз отразившаяся от подошвы этого слоя, т.е.  $\hat{S}\hat{S}_1 \cdot \hat{S}\hat{S}_2 \cdot \hat{S}\hat{S}_1 \cdot e^{2i\omega\eta_2 Th_2}$  и т.д. Распространение по

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} u_{\phi}(k, z, \omega) \\ \tau_{\phi z}(k, z, \omega) \end{pmatrix},$$

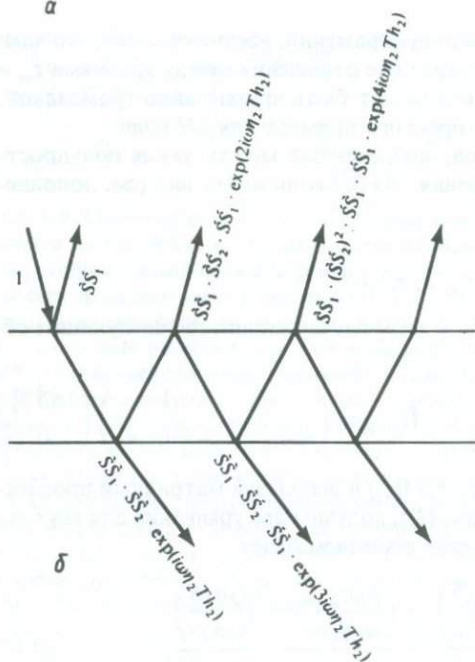
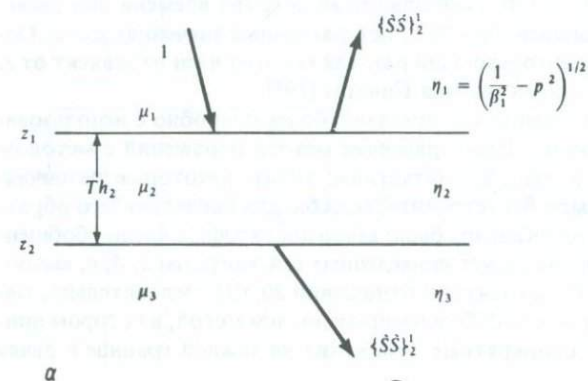


Рис. 9.10. Бесконечное семейство обобщенных  $SH$ -лучей, которые эквивалентны отраженной (преломленной) волне для одного слоя между двумя границами, рассчитанной с помощью матричного пропагатора. **a** — параметры слоя. Суммарное отражение описывается членом  $\{\hat{S}\}_2^1$ . **б** — семейство обобщенных лучей, как показано в тексте, эквивалентно **a**.

вертикали описывается фазовым множителем, и всю систему отраженных волн можно представить в виде

$$\{\hat{S}\}_2^1 = \hat{S}\hat{S}_1 + \hat{S}\hat{S}_1 \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{S}\hat{S}_2 e^{2i\omega\eta_2 Th_2})^j (\hat{S}\hat{S}_1)^{j-1} \right] \hat{S}\hat{S}_1, \quad (9.18)$$

$$\{\hat{S}\}_2^1 = \hat{S}\hat{S}_1 + \frac{\hat{S}\hat{S}_1 \cdot \hat{S}\hat{S}_2 \cdot \hat{S}\hat{S}_1}{1 - \hat{S}\hat{S}_2 \cdot \hat{S}\hat{S}_1 \cdot e^{2i\omega\eta_2 Th_2}}. \quad (9.19)$$

Это основной этап. Бесконечный геометрический ряд заменен одним точным выражением для суммы. Отдельные члены (9.18) соответствуют конкретным лучам, и все бесконечное семейство многократных волн явно содержится в (9.19). Чтобы оценить (9.19), можно воспользоваться (5.32) для получения отдельных отраженных (и проходящих) лучей. При этом мы находим формулу

$$\{\tilde{S}\tilde{S}\}_2^1 = \left( \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \right) + \frac{2\mu_1\eta_1 \cdot \mu_2\eta_2 - \mu_3\eta_3 \cdot 2\mu_2\eta_2 \cdot e^{2i\omega\eta_2Th_2}}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2 \cdot \mu_2\eta_2 + \mu_3\eta_3 \cdot \mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \cdot \frac{1 - \frac{\mu_2\eta_2 - \mu_3\eta_3}{\mu_2\eta_2 + \mu_3\eta_3} \cdot \frac{\mu_2\eta_2 - \mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \cdot e^{2i\omega\eta_2Th_2}}{1 - \frac{\mu_2\eta_2 - \mu_3\eta_3}{\mu_2\eta_2 + \mu_3\eta_3} \cdot \frac{\mu_2\eta_2 - \mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \cdot e^{2i\omega\eta_2Th_2}}$$

которую после некоторых алгебраических преобразований легко свести точно к (9.17). Таким путем мы показали, что полученное из матричного пропагатора отражение от слоя, заключенного между двумя границами, можно представить как бесконечное множество обобщенных лучей.

Очевидно, что если число границ становится больше двух и, кроме того, вводится усложнение в виде наличия обмена между волнами  $P$  и  $SV$ , то в расчете отражения с помощью матричного пропагатора, например  $\{\tilde{P}\tilde{P}\}_n^m$ , может появиться сложная система обобщенных лучей. Спенсер [303, 304] указал, что основное достоинство работы с обобщенными лучами состоит в том, что каждый член в бесконечном ряде имеет очень простую зависимость от частоты или от переменной  $s$  преобразования Лапласа. В качестве примера укажем, что в (9.18)  $\omega\eta_2 = \omega(1/\beta_2^2 - p^2)^{1/2} = is(1/\beta_2^2 + p^2)^{1/2}$  и  $s$  входит в выражение для каждого обобщенного луча только через экспоненту. Поэтому для получения вклада (во временной области) каждого обобщенного луча можно использовать метод Каньяра. Зависимость от частоты в формулах (9.15) и (9.17) гораздо сложнее, и методы Каньяра нельзя применить непосредственно к совокупности всех семейств многократных волн. Хрон [171, 172] показал, что могут быть найдены подсемейства обобщенных лучей, имеющих один и тот же путь Каньяра, а Цистернас и др. [84] предложили метод последовательного отыскания обобщенных лучей, содержащихся в точном (т.е. полученном из матричного пропагатора) решении.

Метод отражений был развит Фуксом и его коллегами для изучения земной коры. Оркот и др. [249] применили этот метод к изучению строения Восточно-Тихоокеанского поднятия. Используя модель плоской Земли, которая характеризуете теми же временами пробега, что и сферическая модель (разд. 9.6), Мюллер [233] применил метод отражений для интерпретации длиннопериодных объемных волн, проходящих сквозь земное ядро, а в работе [234] Мюллер и Кинд проанализировали сейсмограммы длиннопериодных объемных волн для Земли в целом.

Таким образом, описание распространения волн в пачке однородных слоев привело нас к двум различным численным процедурам. Однако независимо от того, применяется ли метод Каньяра (для большого числа обобщенных лучей) или же метод Фукса (с двойным интегрированием), для понимания процесса распространения волн в заданной модели очень важно уметь определять характер связи конкретных волн в упругой среде со свойствами определенных волновых функций в плоскости комплексного лучевого параметра. Например, мы исследовали седловые точки, разрезы и полюсы в  $p$ -плоскости и связали их соответст-

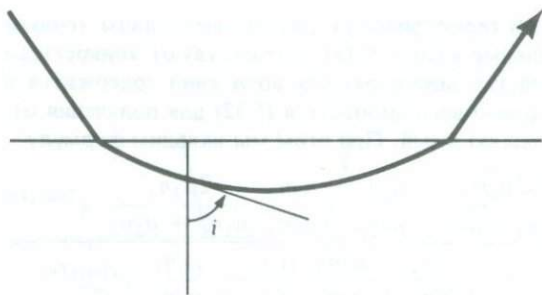


Рис. 9.11. Луч, претерпевший поворот внутри неоднородного слоя. Точка, в которой луч имеет горизонтальное направление, называется *точкой поворота*. Вдоль луча выполняется закон Снеллиуса ( $\sin i/v = p$  (константа)). Поскольку для точки поворота  $i = 90^\circ$ , уравнение  $1/v(z) = p$  удовлетворяется, если  $z$  — глубина точки поворота.

венно с лучевыми траекториями, головными и поверхностными волнами. Для пачки однородных слоев анализ заданного обобщенного луча в  $p$ -плоскости относительно прост. Это происходит главным образом потому, что горизонтальное расстояние, на котором заданный луч может выйти, всегда является *растущей* функцией лучевого параметра (см. задачу 9.2). Однако в оставшейся части этой главы мы обратимся к волнам в средах, характеризующихся плавным изменением скоростей и плотности в каждом слое. Это условие может привести, во-первых, к явлению полного поворота луча *внутри* данного слоя. На рис. 9.11 приведен такой пример. Во-вторых, мы увидим, что горизонтальное расстояние до точки выхода данного луча на поверхность (при распространении в пачке неоднородных слоев) очень часто оказывается *убывающей* функцией лучевого параметра. Расстояние может также и увеличиваться с ростом  $p$  и (на заданном расстоянии  $\Delta$ ) могут существовать лучи обоих типов (т.е. с  $d\Delta/dp$  больше или меньше нуля).

Эти условия заставят нас в разд. 9.4 обратиться к некоторым математическим методам, применять которые при анализе волн в однородных слоях не было необходимости. В то же время свойства волновых функций в плоскости комплексного лучевого параметра все еще будут иметь первостепенное значение. Чтобы подготовиться к рассмотрению этого материала, мы вспомним некоторые положения элементарной лучевой теории.

До сих пор мы имели дело с плоскопараллельной слоистой средой, в которой лучевой параметр  $p$  равен  $(\sin i)/\alpha$  (как угол  $i$ , так и скорость  $\alpha$  являются функциями глубины). Часто возникает необходимость выразить время пробега и расстояние в виде функций от  $p$  (см. задачу 9.2). Эти зависимости для  $P$ -волн имеют вид

$$\text{ВРЕМЯ } (p) = \int \frac{dz}{\alpha(z) \cos i(z)} = \int (1 - p^2 \alpha^2)^{-1/2} \frac{dz}{\alpha} = \int \frac{dz}{\alpha^2 \xi}, \quad (9.20)$$

$$\text{РАССТОЯНИЕ } (p) = \int \operatorname{tg} i \, dz = \int \frac{p}{\xi} \, dz,$$

где

$$\xi = \xi(p, z) = \left( \frac{1}{\alpha^2(z)} - p^2 \right)^{1/2} = \frac{\cos i}{\alpha}$$

и интегрирование ведется по интервалу глубин, пересекаемых лучом. Однако следующий раздел посвящен сферически-слоистой среде, в которой лучевой параметр  $p$  определяется как  $(r \sin i)/\alpha$ , поскольку именно для таких сред лучевая теория широко применяется в сейсмологии.

### 9.3. КЛАССИЧЕСКАЯ ЛУЧЕВАЯ ТЕОРИЯ В СЕЙСМОЛОГИИ

В гл. 4 мы получили с помощью лучевой теории решения для смещения в виде высокочастотных волн, излучаемых в дальнюю зону точечным источником. Основные понятия геометрического расхождения и времени пробега вдоль луча были сформулированы Христианом Гюйгенсом и Пьером де Ферма приблизительно 300 лет тому назад. Нас интересуют конкретные свойства лучей при изменении положения приемника в среде, однородной по горизонтали. Например, каким образом по виду годографа для конкретных наблюдаемых объемных волн мы можем заключить, что данная волна является отраженной от некоторой границы внутри Земли? Или каковы признаки наличия в разрезе зоны малых скоростей?

Обратимся к рис. 9.12 и рассмотрим лучи S-волн, которые соответствуют поверхностному источнику в модели верхней мантии. Ясно, что к данному приемнику могут подойти несколько лучей, и, таким образом, для некоторого интервала расстояний функция времени пробега (рис. 9.12, в) многозначна. Однако в каждой точке годограф имеет определенный наклон, причем его значение уменьшается от  $A$  к  $B$ , затем от  $B$  к  $C$  и т.д. Это свойство дает нам полезную независимую переменную. Из рис. 5.2 следует, что наклон годографа  $dT/d\Delta$ , который является горизонтальной медленностью при наклонном падении волны, есть не что иное, как лучевой параметр  $p$ . (Горизонтальное расстояние в безразмерных единицах обозначается  $\Delta$ , а в единицах длины  $r\Delta$ .)

Теперь рассмотрим, как функция расстояния зависит от  $p$ . Из рис. 9.12, в ясно, что расстояние и наклон уменьшаются одновременно для ветви  $BC$ , для ветвей же  $AB$  и  $CD$  расстояние увеличивается, а наклон уменьшается. Это ясно показано на рис. 9.13, причем точки  $B$  и  $C$  заслуживают особого внимания. Заметим, что функция  $d\Delta/dp$  меняет знак в этих точках, и может оказаться, что при этом  $d\Delta/dp$  остается непрерывной, так что  $d\Delta/dp = 0$  в  $C$  или в  $B$  и  $C$ . Поскольку функция геометрического расхождения  $\mathcal{R}^{-1}$  пропорциональна  $(d\Delta/dp)^{-1/2}$  (см. задачу 4.3), лучевая теория предсказывает особенность в амплитуде смещения. Это обусловлено *каустикой*, пример которой показан на рис. 9.12 для расстояния  $14^\circ$ . Каустикой называется огибающая семейства лучей, и для источника и модели Земли, представленных на рис. 9.12, в трехмерном случае огибающая будет представлять собой поверхность, пересекающую поверхность Земли по окружности. Конечно, выводы лучевой теории в этом случае оказываются не-

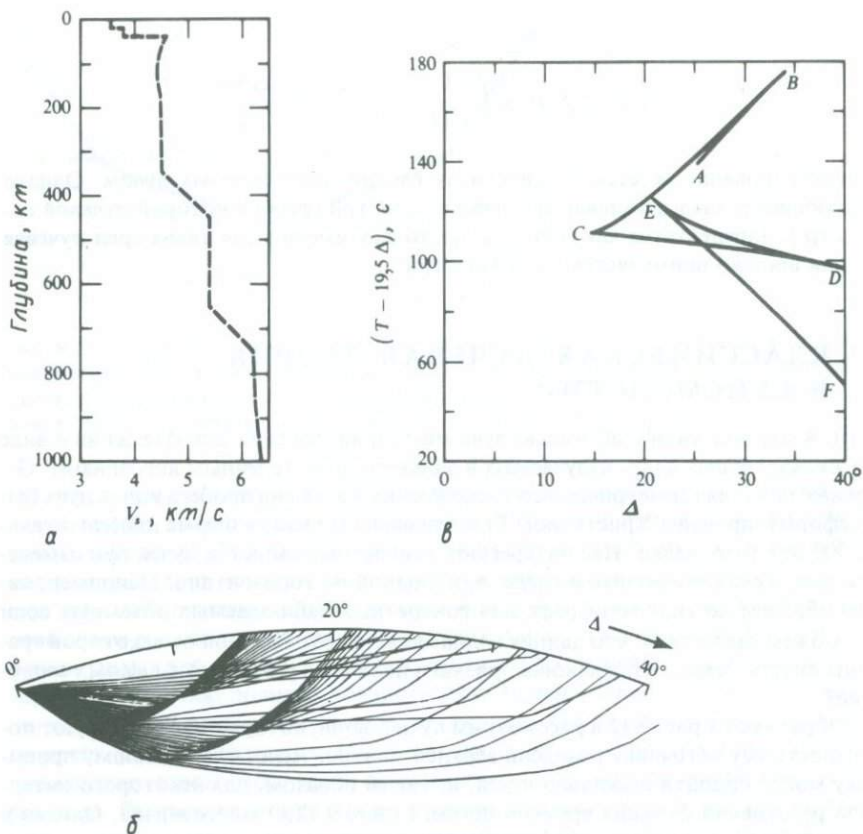


Рис. 9.12. *a* — скорость  $S$ -волн в верхней мантии модели CIT 11 GB. *б* — соответствующие лучи  $S$ -волн для точечного источника на поверхности, рассчитанные для набора углов выхода, увеличивающихся от  $28$  до  $50^\circ$  с шагом  $0,5$ . Заметим, что расстояние между источником и приемником на поверхности Земли измеряется углом  $\Delta$  с вершиной в центре Земли. *в* — соответствующий приведенный годограф. Точка  $C$  явно отождествляется с сильной фокусировкой лучей в *б* при  $\Delta \approx 14^\circ$ , где и амплитуды будут большими. Участки  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  вместе образуют петлю, и каждая из двух показанных петель связана со значительным увеличением скорости с глубиной в модели Земли. (По [187].)

верными: амплитуды в окрестности каустики могут быть очень большими (фокусировка лучей на рис. 9.12, *б*), но здесь нет особенности для конечных частот.

На практике зависимость амплитуд (рассчитанных с помощью лучевого метода) от величины  $d\Delta/d\rho$  приводит к некоторым трудностям при расчете. Проблема состоит в том, что модели Земли обычно строят, задавая значения плотности ( $\rho$ ) и скоростей  $P$ - и  $S$ -волн ( $\alpha$  и  $\beta$ ) на нескольких различных значениях радиуса. При этом разные методы интерполяции между такими дискретными значениями могут привести к совершенно различным оценкам геометрического рас-

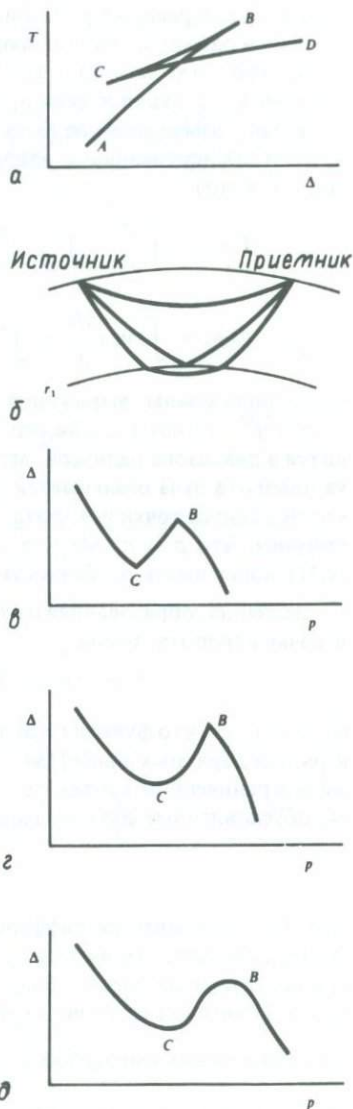


Рис. 9.13. Поведение величин  $T$ ,  $\Delta$  и  $p$  в случае увеличения скорости с глубиной. *a* — типичная петля. *б* — три луча с одним и тем же  $\Delta$ . Принимается, что скорость возрастает с глубиной и на уровне  $r_1$  имеется аномальное увеличение скорости. Самый верхний из приведенных здесь лучей можно назвать прямым (отрезок  $AB$  годографа); затем идут луч типа отраженного (отрезок  $BC$ ) и, наконец, луч, подобный лучу головной волны (отрезок  $CD$ ). Степень гладкости профиля скорости при переходе через  $r_1$  определяет, будут ли лучи действительно менять направление при достижении этого уровня или же только будут иметь большую кривизну. *в* — функция  $\Delta(p)$  для скачкообразного увеличения скорости на  $r_1$ . Заметим, что  $d\Delta/dp$  терпит разрыв в точках  $B$  и  $C$  и может нигде не иметь малых значений. [Величина  $(d\Delta/dp)^{-1/2}$  определяет амплитуды волн, предсказанных лучевой теорией.] *г* — функция  $\Delta(p)$  для непрерывного профиля скорости, у которого градиент скорости терпит разрыв при переходе через  $r_1$ . В этом случае  $d\Delta/dp = 0$  в точке  $C$ , где образуется каустика. *д* — функция  $\Delta(p)$  для случая, когда и скорость, и градиент скорости непрерывны. В точках  $B$  и  $C$  образуется каустика.

хождения. Для интерполяции скорости Чепмен [73] рекомендует кубические сплайны, так как в этом случае вторая производная скорости по глубине становится непрерывной, а эта степень непрерывности необходима, если  $d\Delta/dp$  должно быть непрерывным. Некоторые примеры того, как может меняться характер изменения  $d\Delta/dp$  при различных законах увеличения скорости с глубиной, дал Буллен [65]; примеры приведены на рис. 9.13. Явление каустики широко наб-

людается при распространении сейсмических волн, и методы расчета в областях каустик в рамках волновой теории описаны в разд. 9.4.

Можно легко получить конкретные формулы для времени пробега  $T$  и расстояния  $\Delta$  в функции  $p$ , если принять во внимание, что элемент траектории луча  $ds$  связан с изменением радиуса  $dr$  зависимостью  $\cos i ds = dr$ , где  $i$  — угол между местной вертикалью и направлением луча. Следовательно, для скорости  $P$ -волн  $\alpha = \alpha(r)$ :

$$T(p) = \int \frac{ds}{\alpha} = \int \frac{dr}{\alpha(r) \cos i(r)} = \int \left(1 - \frac{p^2 \alpha^2}{r^2}\right)^{-1/2} \frac{dr}{\alpha} = \int \frac{dr}{\alpha^2 \xi},$$

$$\Delta(p) = \int \sin i \frac{ds}{r} = \int \frac{p \alpha}{r^2} \left(1 - \frac{p^2 \alpha^2}{r^2}\right)^{-1/2} dr = \int \frac{p}{r^2 \xi},$$
(9.21)

где использованы выражения  $p = (r \sin i)/\alpha$  из (4.456) и  $\xi = \xi(r) = (1/\alpha^2 - p^2/r^2)^{1/2} = (\cos i)/\alpha$  для вертикальной медленности. Интегрирование проводится в диапазоне радиусов, пересекаемых лучом, и поэтому случается, что точка поворота луча оказывается одним из пределов интегрирования. Взяв  $r_p$  в качестве радиуса точки поворота луча с соответствующим лучевым параметром  $p$ , получим, что  $p = r_p/\alpha(r_p)$ , и, следовательно, подынтегральные выражения в (9.21) могут иметь особенности.

Величина, образованная из  $T$  и  $\Delta$ , у которой нет особенности под интегралом в точке поворота, равна

$$\tau = \tau(p) \equiv T - p\Delta = \int \frac{\cos i}{\alpha} dr = \int \xi dr.$$
(9.22)

Оказывается, что функция  $\tau(p)$  применяется поразительно часто. Она появляется в теории обратных задач [184, 39] и в теории распространения волн. Однако даже в ограниченном контексте лучевой теории она имеет замечательные свойства, обусловленные соотношением

$$\frac{d\tau}{dp} = -\Delta(p)$$
(9.23)

[которое доказывается дифференцированием  $\int \xi dr$  и сравнением с  $\Delta$  в (9.21)]. Отсюда следует, что в отличие от  $\Delta(p)$   $\tau$  — монотонно убывающая функция от  $p$ , и поэтому она более удобна, чем  $\Delta(p)$ , для того чтобы развернуть петли годографа. { Ранее мы часто пользовались символом  $\tau$  для обозначения формального времени в явных выражениях для свертки:  $f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$ . Поэтому

было естественным представлять пути Каньяра для задач с точечным источником как решения уравнения  $p = p(\tau)$  при  $\tau = pr + \text{СУММА}(p)$  [см. (9.5)]. Однако  $\text{СУММА}(p)$  — это по существу новая переменная  $\tau(p)$ , которую мы только что определили в (9.22). Это обстоятельство рассмотрено в задаче 9.26. Чтобы избежать путаницы, необходимо выбрать другой символ для времен вдоль пути Каньяра в задачах, где  $\tau$  уже занято для интегрирования по вертикальной медленности. }

Мы видели на рис. 9.12 и 9.13, что петли годографа обусловлены возрастанием скорости с глубиной. Если же скорость *убывает* с глубиной достаточно

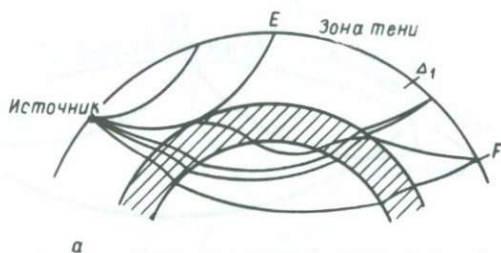
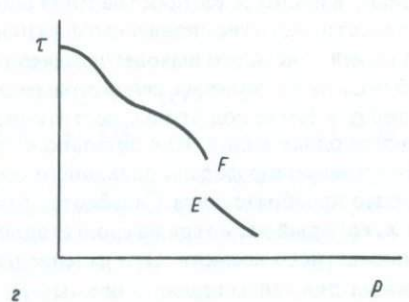
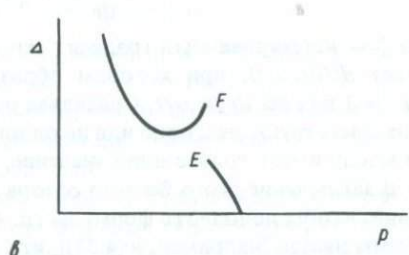
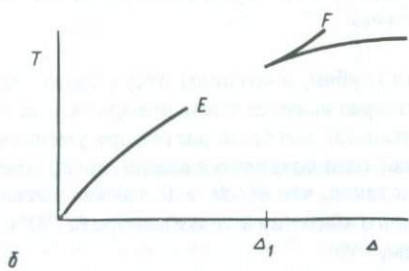


Рис. 9.14. Поведение функций  $T$ ,  $\Delta$  и  $\rho$  при уменьшении скорости с глубиной. **а** — зона пониженной скорости (внутри которой  $d\alpha/dr > \alpha/r$  и отсутствуют точки поворота лучей) показана штриховкой; на поверхности наблюдается зона тени, в пределах которой не выходит ни один луч. **б** — годограф, соответствующий **а**. Верхняя граница зоны пониженной скорости — точки поворота для луча, выходящего на поверхность в  $E$ . Точка  $F$  имеет тот же лучевой параметр, но лежит на луче, прошедшем через зону пониженной скорости. По мере уменьшения лучевого параметра относительно его значения в  $F$  расстояние  $\Delta$  убывает, пока не образуется каустика на расстоянии  $\Delta_1$ . **в** — график функции  $\Delta = \Delta(\rho)$  показывает, что дальняя граница зоны тени действительно соответствует каустике. **г** — верхняя и нижняя границы зоны пониженной скорости — точки поворота для лучей, бесконечно мало различающихся по своему лучевому параметру. Следовательно, радиус точек поворота является разрывной функцией от  $\rho$ . Наблюдается также разрыв функции  $\tau(\rho) = T - \rho\Delta$  и производной  $d\tau/d\rho = -\Delta(\rho)$ .



быстро (т.е.  $d\alpha/dr$  положительно и достаточно велик), то на годографе появляется другая характерная особенность. Это явление, называемое *зоной тени*, иллюстрируется рис. 9.14. В пределах зоны пониженной скорости имеется интер-



Рис. 9.15. Волна  $S$ , распространяющаяся от источника вниз и один раз отразившаяся от поверхности Земли между источником и приемником, обозначается  $SS$ , а обозначение  $sS$  относится к волне, идущей вверх от источника и отраженной от поверхности вблизи источника.

вал глубин, в котором отсутствуют точки поворота лучей. Когда в нижней части луча имеется точка поворота, она достигается при угле  $i$  (между лучом и вертикалью), который растет при уменьшении радиуса вдоль луча. Таким образом, зона тени появляется всегда, когда градиент скорости в зоне пониженной скорости таков, что  $di/dr > 0$ , так как в этом случае по мере убывания  $r$   $i$  не достигает своего значения в точке поворота ( $90^\circ$ ). Поскольку  $(r \sin i)/\alpha$  постоянно, мы находим, что

$$r \frac{di}{dr} = -[1 - \zeta(r)] \operatorname{tg} i, \quad (9.24)$$

где  $\zeta$  — нормированный градиент скорости  $(r/\alpha) \cdot (d\alpha/dr)$ . Следовательно, условие  $di/dr > 0$ , при котором образуется зона тени, переходит в условие  $\zeta(r) > 1$  или  $d\alpha/dr > \alpha/r$ . Сравнивая рис. 9.14,в и 9.14,г, замечаем, что данному  $p$  соответствуют два, одно или ни одного значения  $\Delta$ , в то время как  $T - p\Delta$  почти всюду имеет только одно значение.

В заключение этого беглого обзора лучевой теории сделаем несколько замечаний, чтобы дополнить формулы гл. 4 с учетом формы импульса. Напомним, что мы нашли [например, в (4.57)], что амплитуды в точке  $x$  определяются множителем  $1/\mathcal{R}(x, \xi)$  в случае точечного источника, находящегося в положении  $\xi$ . Однако в процессе распространения вдоль луча от  $\xi$  к  $x$  несколько факторов могут ввести частотно-независимое фазовое опережение в волны, регистрируемые в дальней зоне, и это вызовет искажение формы импульса, которое можно часто наблюдать на полевых сейсмограммах. Примером служит падение волны на границу в Земле под углом, достаточно большим для того, чтобы возбудилась неоднородная волна. Как показано в гл. 5, результирующий фазовый сдвиг ведет к изменению формы падающего импульса, которое можно рассчитать с помощью преобразования Гильберта. Другим примером является луч, идущий от  $\xi$  к  $x$ , который несмотря на свою стационарность все же не является траекторией минимального времени. Это явление наблюдается у некоторых лучей, наиболее важных для сейсмологии: прямые  $P$ - и  $S$ -волны, которые распространяются вниз от источника и регистрируются на ветви годографа, для которой  $d^2T/d\Delta^2 > 0$ ; волны  $PP$  и  $SS$  и волна  $SKKS$ . Так  $SS$  имеет траекторию минимаксного времени (рис. 9.15), поскольку малое смещение точки отражения в другую точку на поверхности Земли, лежащую в одной плоскости с источником и прием-

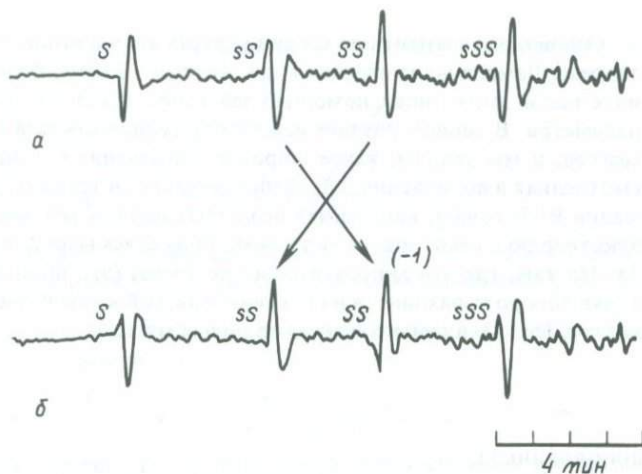


Рис. 9.16. *а* — реальная запись компоненты EW (ориентация благоприятна для регистрации  $YN$ -волн) волн глубокого землетрясения (608 км) под Японским морем 8 октября 1960 г. Записана на станции PAL,  $\Delta = 96,3^\circ$ . *б* — преобразование Гильберта от *а*. Для удобства четыре основные фазы помечены первоначальными обозначениями. Одна стрелка показывает, что фаза  $SS$  в *а* имеет ту же форму, что и преобразование Гильберта от  $sS$ , данное в *б*; вторая стрелка — что  $sS$  в *а* имеет ту же форму (после обращения полярности), что и преобразование Гильберта от  $SS$  в *б*. (Согласно [83].)

ником, будет действительно уменьшать время пробега волны (а возмущение, перпендикулярное к этому направлению, будет его увеличивать). С другой стороны,  $sS$  действительно является траекторией минимального времени, и Чой и Ричардс [83] наблюдали волну  $SS$ , которая совершенно точно соответствовала преобразованию Гильберта от  $sS$  (рис. 9.16).

Хотя мы подчеркнули, что в проведенном обзоре рассматриваем сферически-симметричную среду, все идеи и формулы имеют аналоги для плоскопараллельной слоистой среды. К этому мы вернемся, когда будем рассматривать аппроксимацию Земли плоской моделью, чтобы применить методы Каньяра и Фукса к телесейсмическим волнам в Земле.

#### 9.4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СРЕДАХ С ПЛАВНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ СКОРОСТИ С ГЛУБИНОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕК ПОВОРОТА

Луч, выходящий вниз из некоторого точечного источника внутри Земли, можно зарегистрировать приемником на поверхности только после того, как он испытает отражение на какой-либо внутренней границе или постепенно изменит свое направление с «нисходящего» на «восходящее», пройдя точку поворота. В предыдущем разделе мы уже имели дело с точками поворота при изложении лучевой теории. Теперь же наша цель состоит в изучении точек поворота в рамках волновой теории для конечных частот в неоднородных средах. Это очень важно для того, чтобы избежать искусственного увеличения числа слоев при аппроксимации неоднородных сред.

Основными элементами теории упругих волн в неоднородных средах служат теорема Ламе, анализ плоских волн, интеграл Зоммерфельда и способы расчета интегралов этого типа с помощью действий в плоскости комплексного лучевого параметра. В данном разделе найдет отражение каждый из перечисленных элементов, и мы увидим, какое широкое применение получила теория ВКБ (рассмотренная в дополнении 9.3). Действительно, в тех ситуациях, когда аппроксимации ВКБ точны, наш расчет объемных волн объединяет классическую лучевую теорию с некоторыми методами, применяемыми для решения задачи Лэмба. Но там, где эти аппроксимации не точны (это происходит в случае, когда точка поворота находится на глубине, близкой к какой-либо разрывной границе внутри Земли), нужны совершенно новые методы.

## ДОПОЛНЕНИЕ 9.2

*Скалярные потенциалы для P-, SV- и SH-волн в сферически-симметричных средах*

Вспользуемся сферической системой координат  $(r, \Delta, \phi)$ , в которой  $r = 0$  является центром симметрии среды, а направление  $\Delta = 0$  проходит через некоторый точечный источник. Тогда векторное волновое уравнение второго порядка для смещения  $\mathbf{u} = (u_r, u_\Delta, u_\phi)$  можно получить из соотношений между ускорением и напряжением (2.47), напряжением и деформацией (2.50), деформацией и смещением (2.45). Это уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho\omega^2\mathbf{u} = & -(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} - \lambda'(\nabla\cdot\mathbf{u}, 0, 0) \\ & - 2\mu'\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial r} + \mu'(0, \text{rot}_\phi\mathbf{u}, -\text{rot}_\Delta\mathbf{u}) - \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по радиальному направлению, а  $\text{rot}_\alpha\mathbf{u}$  является  $\alpha$ -координатой произведения  $\nabla\times\mathbf{u}(\alpha = r, \Delta, \phi)$ . Мы рассмотрим только решение однородной задачи, т.е. примем, что объемная сила  $\mathbf{f}$  равна  $\mathbf{0}$ .

При выводе выражений для потенциалов  $\mathbf{u}$  мы будем действовать тем же методом, который был применен в разд. 4.1 (Более подробное рассмотрение этого вопроса дано Ричардсом [269].) Итак, попробуем привести (1) непосредственно к нужному виду, выбрав специальную форму для потенциалов:

$$\begin{aligned} P & \equiv \frac{-(\lambda + 2\mu)}{\rho^{1/2}\omega^2} \left[ \nabla\cdot\mathbf{u} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left( \frac{2\mu'}{\mu} - \frac{\rho'}{\rho} \right) u_r \right], \\ S & \equiv \frac{\mu}{\rho^{1/2}\omega^2} \left[ \nabla\times\mathbf{u} + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left( \frac{\rho'}{\rho} - \frac{2\mu'}{\lambda + 2\mu} \right) (0, -u_\phi, u_\Delta) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

После деления (1) на  $\rho\omega^2$  уравнение движения можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \rho^{-1/2}(\nabla P + \nabla\times S) + \text{члены порядка } |\mathbf{u}|/\omega. \quad (3)$$

Для объемных волн, изучением которых мы будем заниматься, эти последние члены пренебрежимо малы. Обычно они имеют порядок  $(\beta'/\omega)|\mathbf{u}|$  и составляют около 2% от  $|\mathbf{u}|$  для волн с периодами 20 с в верхней мантии в случае моделей Земли с довольно высоким градиентом скорости поперечных волн (0,005 км/с на 1 км).

Выражения (2) теперь нужно преобразовать в волновые уравнения с помощью подстановки  $\mathbf{u}$  из формулы (3). При этом получится

$$\begin{aligned} \nabla^2 P + \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} P &= \text{члены порядка } \frac{|\mathbf{u}|}{\omega}, \\ \nabla^2 \mathbf{S} + \frac{\rho\omega^2}{\mu} \mathbf{S} &= \text{члены порядка } \frac{|\mathbf{u}|}{\omega}. \end{aligned} \quad (4)$$

Но каждый из членов в левой части уравнений (4) имеет порядок  $\omega|\mathbf{u}|$ , так что членами правой части в большинстве случаев можно пренебречь, поскольку они на два порядка ниже по частоте.

Остается только найти раздельно скалярные потенциалы для волн  $SV$  и  $SH$ . Для этого надо обратить оператор Бельтрами  $B$ , где

$$Bf \equiv \frac{1}{\sin \Delta} \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \sin \Delta \frac{\partial f}{\partial \Delta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Delta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

Заметим, что  $B$  содержит горизонтальные производные, присутствующие в операторе Лапласа, так что  $BY_l^m = -l(l+1)Y_l^m$  для любой поверхностной гармоники  $Y_l^m$ . Оператор  $B^{-1}$ , обратный  $B$ , рассмотрен Бэкусом [19]: если  $g = g(r, \Delta, \phi)$  можно представить как

сумму  $g = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l^m(r) Y_l^m$ , тогда мы решаем уравнение  $Bf = g$ , чтобы получить

$$f = B^{-1}g = - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [l(l+1)]^{-1} g_l^m Y_l^m.$$

### SV-ПОТЕНЦИАЛ

Для сфероидального движения  $\text{rot}_r \mathbf{u} = 0$  и, как следует из (2),  $S_r = 0$  и  $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$ . Таким образом,  $\partial(\sin \Delta S_\Delta)/\partial \Delta + \partial S_\phi/\partial \phi = 0$ , и это является условием существования такой функции  $V$ , что  $S_\Delta = (1/\sin \Delta)\partial V/\partial \phi$ ,  $S_\phi = -\partial V/\partial \Delta$ . Следовательно, для волн  $SV$

$$\mathbf{S} = \nabla \times (rV, 0, 0). \quad (5)$$

Чтобы построить  $V$ , образуем  $\text{rot}_r \mathbf{S}$  и напомним, что  $-\text{rot}_r \mathbf{S} = BV$  (как обратить такой оператор, мы уже знаем). Ричардс [269] показал, что

$$\nabla^2 V + \frac{\rho\omega^2}{\mu} V = \text{члены порядка } \frac{|\mathbf{u}|}{\omega^2}. \quad (6)$$

### SH-ПОТЕНЦИАЛ

Для тороидального движения  $u_r = 0$  и  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Следовательно, мы можем проследить те же этапы, которые рассматривались выше для  $\mathbf{S}$ , введя потенциал  $H_0$  как  $H_0 = -B^{-1}(r\text{rot}_r \mathbf{u})$ . Чтобы получить каноническую форму волнового уравнения для  $SH$ -потенциала, удобно воспользоваться выражением  $H = \mu^{1/2}H_0$ . Тогда для  $SH$ -волн

$$\mathbf{u} = \mu^{-1/2} \nabla \times (rH, 0, 0)$$

и

$$\nabla^2 H + \frac{\rho\omega^2}{\mu} H = \text{члены порядка } \frac{|\mathbf{u}|}{\omega}. \quad (7)$$

Уравнения (9.25a) и (9.25b) получаются, если пренебречь членами высшего порядка малости в (3) — (7). (Все эти члены равны нулю в однородных средах.)

При изучении однородных упругих сред удобно было двигаться от рассмотрения потенциалов к методу, основанному на введении вектора движения-напряжения. Подобный подход приемлем и для неоднородных сред, поскольку потенциалы помогают понять свойства скалярных волновых решений в их простейшей форме, в то время как использование вектора движения-напряжения облегчает проведение необходимых расчетов физических величин. Таким образом, начав с рассмотрения потенциалов, мы видели в дополнении 9.2, что смещение  $\mathbf{u}$  в сферически-симметричной среде можно выразить в виде суммы трех векторных членов

$$\mathbf{u} = \rho^{-1/2}[\nabla P + \nabla \times \nabla \times (rV, 0, 0)] + \mu^{-1/2}\nabla \times (rH, 0, 0). \quad (9.25a)$$

Здесь три вектора в правой части являются соответственно  $P$ -,  $SV$ - и  $SH$ -компонентами смещения со скалярными потенциалами  $P$ ,  $V$ ,  $H$ , удовлетворяющими (в частотной области) разделенным волновым уравнениям

$$\nabla^2 P + \frac{\omega^2}{\alpha^2} P = 0, \quad \nabla^2 V + \frac{\omega^2}{\beta^2} V = 0, \quad \nabla^2 H + \frac{\omega^2}{\beta^2} H = 0. \quad (9.25b)$$

В выражениях (9.25a) и (9.25b) каждая из величин  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  является функцией только от радиуса  $r$  в сферической системе координат  $(r, \Delta, \phi)$ . Следовательно, каждое из волновых уравнений имеет вид уравнения Гельмгольца с изменяющимся вдоль радиуса волновым числом.

Предположим теперь, что в среду помещен точечный источник. Сначала получим представление источника, который играет здесь такую же роль, как в интеграле Зоммерфельда для волн, распространяющихся в однородной среде. Простейшим из рассматриваемых источников является дельта-функция, введенная в волновое уравнение для  $P(r, \omega)$ :

$$\nabla^2 P + \frac{\omega^2}{\alpha^2(r)} P = K_s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s), \quad (9.26)$$

где источник находится в положении  $\mathbf{r}_s$ , а  $K_s$  — константа (индекс  $s$  относится ко всем константам, связанным с источником).

Решение уравнения (9.26) для однородной безграничной среды имеет вид

$$P(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{K_s \exp(i\omega|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/\alpha_s)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}, \quad (9.27)$$

для которого существует известное разложение по частным волновым решениям через сферические функции Ханкеля и полиномы Лежандра:

$$P(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{iK_s\omega}{4\pi\alpha_s} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) h_l^{(1)}(\omega r/\alpha_s) [h_l^{(1)}(\omega r_s/\alpha_s) + h_l^{(2)}(\omega r_s/\alpha_s)] P_l(\cos \Delta) \quad (9.28)$$

(для  $r > r_s$ ), где  $\alpha_s$  — постоянная скорость  $P$ -волн в среде.

Чтобы можно было изучать *неоднородные* среды, записанное выражение следует обобщить. К счастью, метод разделения переменных показывает, что горизонтальные волновые функции все еще остаются полиномами Лежандра, и все усложнения касаются только вертикальной (в данном случае радиальной) волновой функции. Итак, попытаемся решить уравнение (9.26) с помощью сум-

мы разделенных решений в форме

$$P(r, \omega) = \sum_{l=0}^{\infty} a(r, l) P_l(\cos \Delta). \quad (9.29)$$

Тогда  $a(r, l) = (l + 1/2) \int_0^{\pi} P(r, \omega) P_l(\cos \Delta) \sin \Delta d\Delta$ , и подстановка (9.29) в волновое уравнение дает выражение

$$\frac{d^2}{dr^2} [ra(r, l)] + \left[ \frac{\omega^2}{\alpha^2(r)} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] ra(r, l) = K_s \delta(r - r_s) \frac{(2l+1)}{4\pi r}. \quad (9.30)$$

Следуя Секлеру и Келлеру [294] и Фридману [120], введем три частных решения однородного уравнения, связанного с (9.30). Пусть  $f_1(r)$  — решение для  $a(r, l)$ , регулярное в центральной точке  $r = 0$ . Для очень больших значений  $r$  волновое уравнение можно приближенно записать как  $d^2a/dr^2 = -\omega^2 a/\alpha^2$ . Пр аналогии с решениями  $e^{\pm i\omega r/\alpha}$ , когда  $\alpha = \text{const}$ , по-видимому, можно выбрать два независимых решения нашего волнового уравнения: в одном из них фаза увеличивается с ростом  $r$ , в другом уменьшается. Обозначим эти решения соответственно  $g_1^{(1)}(r)$  и  $g_2^{(2)}(r)$ . В соответствии с множителем  $e^{-i\omega t}$   $g^{(1)}$  — это выходящая из источника волна, а  $g^{(2)}$  — входящая. Не считая нормировки, указанные три решения полностью определены, и мы можем принять

$$a(r, l) = \begin{cases} c_1 g_1^{(1)}(r) & r_s \leq r \\ c_2 f_1(r) & \text{for } 0 \leq r \leq r_s. \end{cases} \quad (9.31)$$

Постоянные  $c_1$  и  $c_2$  определяются, если принять во внимание, что (9.30) подразумевает как непрерывность  $a(r, l)$  при переходе  $r$  через  $r_s$ , так и скачок величиной  $K_s(2l+1)/(4\pi r_s^2)$  в  $da(r, l)/dr$ . Отсюда следует, что

$$c_1 = -\frac{K_s(2l+1)}{4\pi r_s^2} \frac{f_1(r_s)}{W(r_s)}, \quad c_2 = -\frac{K_s(2l+1)}{4\pi r_s^2} \frac{g_1^{(1)}(r_s)}{W(r_s)}, \quad (9.32)$$

где  $W(r) = g_1^{(1)}(r)df_1/dr - f_1(r)dg_1^{(1)}/dr$  представляет собой вронскиан от  $g_1^{(1)}$  и  $f_1$ . К счастью, можно показать, что  $W(r)$  пропорционален  $1/r^2$ ; следовательно, волновые уравнения, которым удовлетворяют  $g_1^{(1)}$  и  $f_1$ , можно использовать для решения уравнения  $d(r^2W)/dr = 0$ . Коэффициент пропорциональности зависит от нормировки волновых функций, и на этой стадии мы обратимся к методу ВКБ. Из уравнения (11) дополнения 9.3 следует, что для больших  $\omega$

$$r g_1^{(2)}(r) \sim \frac{K^{(2)}}{\left[ \frac{1}{\alpha^2(r)} - \left( \frac{l + \frac{1}{2}}{\omega r} \right)^2 \right]^{1/4}} \exp \left\{ \pm i\omega \int_{r_p}^r \left[ \frac{1}{\alpha^2(r')} - \left( \frac{l + \frac{1}{2}}{\omega r'} \right)^2 \right]^{1/2} dr' \right\}, \quad (9.33)$$

где  $K^{(1)}$  и  $K^{(2)}$  — константы, а  $r_p$  — радиус, при котором подынтегральное выражение обращается в нуль. Определив

$$p \equiv \frac{l + \frac{1}{2}}{\omega}, \quad \text{мы имеем } p = \frac{r_p}{\alpha(r_p)}. \quad (9.34)$$

Поскольку лучевой параметр в сферических координатах равен  $(r \sin i)/\alpha$ , можно дать  $r_p$  физическую интерпретацию радиуса точки поворота луча с параметром  $p$ .

## ДОПОЛНЕНИЕ 9.3

## Теория ВКБ

Здесь мы займемся нахождением приближенных решений уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \omega^2 s^2 \phi = 0, \quad (1)$$

где  $\omega$  положительно и велико, а функция  $s = s(x)$  такова, что  $s^2$  является монотонно возрастающей функцией от  $x$ . Метод, который мы собираемся изложить, имеет очень большую область применимости, поскольку любое линейное однородное уравнение второго порядка можно преобразовать к виду (1), часто с теми же особыми свойствами  $\omega$  и  $s^2$ , которые сформулированы выше. Многие авторы заново открывали этот метод (в том числе Венцель, Крамерс, Бриллюэн и Джеффрис, откуда и возникло название метода\*). Основные идеи, безусловно, восходят к Грину и Лиувиллю и использовались Рэлеем [265].

Предположим, что  $s^2$  имеет нуль (называемый *точкой поворота*) при  $x = x_p$ , так что  $s^2 \leq 0$  в соответствии с неравенством  $x \geq x_p$ . Из (1) следует, что кривизна функции  $\phi = \phi(x)$  имеет противоположный или тот же самый знак, что и  $\phi$ , соответственно неравенству  $x \leq x_p$ . Из одного этого ясен основной характер решений — осциллирующий при значениях  $x > x_p$  и экспоненциальный при  $x < x_p$ .

Там, где  $s(x)$  постоянно, решениями будут  $\phi = e^{\pm i\omega s x}$ , и это указывает нам пробную форму решения  $\phi = e^{-i\omega \tau(x)}$ . Из (1) тогда следует, что

$$i\omega \tau'' - \omega^2 (\tau')^2 + \omega^2 s^2 = 0,$$

где штрих означает  $d/dx$ . В первом приближении мы пренебрегаем здесь членом  $\omega \tau''$ , принимая  $\tau' \sim \pm s(x)$  и  $\tau(x) \sim \pm \int s(x) dx$ . Это даст  $\tau'' \sim \pm s'$ , так что следующее приближение для  $\tau$  удовлетворяет  $(\tau')^2 = s^2 \pm is'/\omega$ , т.е.  $\tau' = \pm s + is'/2s\omega$ , и тогда  $\tau(x) = \pm \int s(x) dx + (i/2\omega) \ln s$ . Соответствующее решение для  $\phi$  будет иметь вид

$$\phi(x) \sim \frac{A}{s^{1/2}(x)} \exp\left(i\omega \int_{x_p}^x s dx\right) + \frac{B}{s^{1/2}(x)} \exp\left(-i\omega \int_{x_p}^x s dx\right) \quad (2)$$

( $A$  и  $B$  — константы). Это справедливо при условии  $|s'/\omega| \ll |s^2|$ . А поскольку приближенно можно считать, что  $\omega s \times$  (длина волны)  $= 2\pi$ , это условие выдерживается до  $|s' \times \text{длина волны}| \ll 2\pi |s|$  и изменение в пределах одной длины волны для  $s(x)$  должно быть много меньше, чем само  $s$ . Очевидно, что (2) будет нарушаться вблизи  $x = x_p$ , где  $s = 0$ .

Заметим, что в области экспоненциального поведения решения  $x < x_p$ ,  $s$  — мнимая величина, так что для общего решения подходящим выражением будет

\* Мы придерживаемся широко принятого в СССР сокращения ВКБ вместо WKBJ, используемого авторами. — Прим. перев.

$$\phi(x) \sim \frac{C}{(-s^2)^{1/4}} \exp\left[\omega \int_x^{x_p} (-s^2)^{1/2} dx\right] + \frac{D}{(-s^2)^{1/4}} \exp\left[-\omega \int_x^{x_p} (-s^2)^{1/2} dx\right]. \quad (3)$$

Если  $C \neq 0$ , то в области  $x < x_p$  в данном решении появляется экспоненциально растущая компонента, и она будет доминировать в этой области. Наибольший интерес тогда будет представлять решение  $\phi(x)$  при  $x < x_p$  (ниже точки поворота), для которого аппроксимация ВКБ (3) имеет  $C = 0$ . При заданном значении  $D$  это особое решение определяется формулой (1) во всем диапазоне  $x$ , и мы постараемся найти его асимптотическое выражение в форме (2) для области  $x > x_p$  (выше точки поворота). Нельзя просто довести решение (3) до точки поворота, приравнять его там к (2), а затем продолжить вверх, так как ни одна из этих формул не справедлива вблизи точки поворота [и они имеют там особенности, которых нет в истинном решении  $\phi(x)$ ]. Мы говорим о «связывании» экспоненциально затухающего решения с двумя решениями для распространяющихся волн, объединенными в (2); метод, предложенный для этой цели Рэлеем [265], состоит в применении функции Эйри.

Заметим, что  $Ai(-y)$  является решением уравнения  $d^2w/dy^2 + yw = 0$ , которое представляет собой частный случай нашего уравнения (1). Известны следующие результаты (формулы 10.4. 59 — 60 из [2]):

$$Ai(-y) \sim \pi^{-1/2} y^{-1/4} \cos\left[\frac{2}{3}y^{3/2} - \pi/4\right] \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \quad (4)$$

$$Ai(-y) \sim \frac{1}{2}\pi^{-1/2} (-y)^{-1/4} \exp\left[-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] \quad \text{при } y \rightarrow -\infty.$$

Таким образом,  $Ai(-y)$  — частное решение, которое характеризуется экспоненциальным затуханием ниже точки поворота.

Вблизи  $x = x_p$  аппроксимируем  $s^2(x)$  с помощью выражения  $s^2 = \lambda(x - x_p)$ , где  $\lambda = ds^2/dx$  при  $x = x_p$ . Тогда затухающее слагаемое в (3) будет

$$\frac{D}{\lambda^{1/4}(x_p - x)^{1/4}} \exp\left[-\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x_p - x)^{3/2}\right]$$

для очень больших  $\omega$  и  $x$ , лежащих непосредственно ниже  $x_p$ . При сравнении со второй строкой (4) получим

$$2D\pi^{1/2}(\omega/\lambda)^{1/6} Ai(-\omega^{2/3}\lambda^{1/3}(x - x_p)). \quad (5)$$

Но теперь мы можем воспользоваться *первой* строкой из (4), чтобы найти, как ведет себя это решение непосредственно над точкой поворота. Оно должно иметь вид

$$\frac{2D}{\lambda^{1/4}(x - x_p)^{1/4}} \cos\left[\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x - x_p)^{3/2} - \pi/4\right]. \quad (6)$$

Однако в этой области то же решение задается выражением (2) как

$$\frac{1}{\lambda^{1/4}(x - x_p)^{1/4}} \{A \exp[i\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x - x_p)^{3/2}] + B \exp[-i\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x - x_p)^{3/2}]\}. \quad (7)$$

Из сравнения (6) и (7) заключаем, что

$$A = De^{-i\pi/4}, \quad B = De^{+i\pi/4}, \quad (8)$$

и мы окончательно нашли асимптотическое выражение в области над точкой поворота для решения, затухающего ниже точки поворота.

В действительности уравнение, к которому мы собираемся применить описанный метод, имеет вид [ср. (9.30)]

$$\frac{d^2}{dr^2}(ra) + \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)ra = 0. \quad (9) \text{ (см. 9.30)}$$

При  $r = 0$  имеется особенность, которую мы устраним заменой переменной  $r = r_0 e^{x/x_0}$ , где  $r_0$  и  $x_0$  — константы. Тогда  $r^{1/2} a(r, l) = \phi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{r_0^2}{x_0^2} e^{2x/x_0} \left[ \frac{\omega^2}{\alpha^2} - \left( \frac{l + \frac{1}{2}}{r_0 e^{x/x_0}} \right)^2 \right] \phi = 0,$$

которое имеет тот же вид, что и (1). Члены типа  $\omega \int_{x_p}^x dx$  заменяются на

$$\omega \int_{r_p}^r \left[ \frac{1}{\alpha^2} - \left( \frac{l + \frac{1}{2}}{\omega r'} \right)^2 \right]^{1/2} dr',$$

и экспоненциально затухающее решение для  $a(r, l)$  аппроксимируется выражением

$$ra(r, l) = r^{1/2} \phi \sim \frac{D}{\left[ \left( \frac{l + \frac{1}{2}}{\omega r} \right)^2 - \frac{1}{\alpha^2} \right]^{1/4}} \exp \left\{ -\omega \int_r^{r_p} \left[ \left( \frac{l + \frac{1}{2}}{\omega r'} \right)^2 - \frac{1}{\alpha^2} \right]^{1/2} dr' \right\} \quad (10)$$

в области  $r < r_p$ . Над точкой поворота ( $r > r_p$ ) то же решение  $a(r, l)$  имеет вид

$$ra(r, l) = r^{1/2} \phi \sim \frac{D}{\left[ \frac{1}{\alpha^2} - \left( \frac{l + \frac{1}{2}}{\omega r} \right)^2 \right]^{1/4}} \left[ \exp \left( i\omega\tau - \frac{\pi}{4} \right) + \exp \left( -i\omega\tau + \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

где

$$\tau = \int_{r_p}^r \left[ \frac{1}{\alpha^2} - \left( \frac{l + \frac{1}{2}}{\omega r'} \right)^2 \right]^{1/2} dr'. \quad (11)$$

Для ряда специальных функций, известных в прикладной математике, широко используются аппроксимации, являющиеся частными примерами (2) и (3). Один пример уже рассмотрен в (4) для функции Эйри. Другие относятся к сферическим функциям Ханкеля  $h_l^{(1)}(\omega r/\alpha)$  и  $h_l^{(2)}(\omega r/\alpha)$  (где  $\alpha$  — константа) и функциям Лежандра  $P_l(\cos \Delta)$ . Сферические функции Ханкеля удовлетворяют уравнению (9) (если  $\alpha$  постоянно), и соответствующая формула (10) метода ВКБ (известная в этом случае как аппроксимация Дебая для  $h_l^{(1)} + h_l^{(2)}$ ) имеет нормировку  $D = \alpha^{1/2}/\omega$ . Поскольку  $\alpha$  в этом случае постоянно, выражение (11) для  $\tau$  можно проинтегрировать, в результате чего получим

$$\left[ \frac{r^2}{\alpha^2} - \left( \frac{l + \frac{1}{2}}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{l + \frac{1}{2}}{\omega} \arcsin \left[ \frac{(l + \frac{1}{2})\alpha}{\omega r} \right].$$

Сферическая функция Бесселя  $j_l(\omega r/\alpha)$  аппроксимируется формулой (10) с  $D = \alpha^{1/2}/2\omega$  при  $r > r_p$ .

Аппроксимация ВКБ, примененная к уравнению Лежандра, дает

$$P_l(\cos \Delta) \sim \left( \frac{1}{2\pi l \sin \Delta} \right)^{1/2} \left\{ \exp \left[ -i(l + \frac{1}{2})\Delta + \frac{i\pi}{4} \right] + \exp \left[ +i(l + \frac{1}{2})\Delta - \frac{i\pi}{4} \right] \right\}, \quad (12)$$

и в этом случае точка поворота [где (12) неприменимо] соответствует  $\sin \Delta = 0$ , т.е.  $\Delta = 0$  и  $\pi$ . Заметим, что (12) является выражением для стоячей волны, пропорциональной

$\cos \left[ (l + \frac{1}{2})\Delta - \pi/4 \right]$ , хотя оно было записано в виде суммы бегущих волн [ср. (9.39)].

Нормировка  $g_l^{(j)}$  сделана после сравнения с аппроксимацией Дебая сферических функций Ханкеля (см. дополнение 9.3). Эта процедура оправдана, так как мы будем считать  $g_l^{(j)}$  действительно равным  $h_l^{(j)}(\omega r/\alpha_s)$ , если среда однородна и имеет постоянную скорость  $\alpha_s$ . Тем самым  $K^{(1)}$  и  $K^{(2)}$  теперь определены, и в области, где  $r/\alpha(r) > p$  (т.е. выше глубины максимального проникновения луча с параметром  $p$ ),

$$g_l^{(2)}(r) \sim e^{\mp i\pi/4} \frac{\alpha_s^{1/2}}{\omega r} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha^2(r)} - \frac{p^2}{r^2}\right]^{1/4}} \cdot \exp\left\{\pm i\omega \int_{r_p}^r \left[\frac{1}{\alpha^2(r')} - \frac{p^2}{r'^2}\right]^{1/2} dr'\right\}$$

Оставаясь в рамках лучевой теории, определим множитель  $(1/\alpha^2 - p^2/r^2)^{1/2}$  как  $\alpha^{-1} \cos \xi$ , который представляет собой вертикальную медленность  $P$ -волн, уже обозначенную нами ранее как  $\xi$ . Таким образом,

$$g_l^{(2)}(r) \sim \frac{e^{\mp i\pi/4} \alpha_s^{1/2}}{\omega r \xi^{1/2}(r)} \cdot \exp\left[\pm i\omega \int_{r_p}^r \xi(r') dr'\right]. \quad (9.35)$$

Подобным образом из теории ВКБ выводим, что в области, где  $r/\alpha(r) < p$  (т.е.  $r < r_p$ )

$$f_l(r) \sim \frac{\alpha_s^{1/2}}{2\omega r} \cdot \frac{1}{\left[\frac{p^2}{r^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right]^{1/4}} \cdot \exp\left\{-\omega \int_r^{r_p} \left[\frac{p^2}{(r')^2} - \frac{1}{\alpha^2(r')}\right]^{1/2} dr'\right\} \quad (9.36)$$

так что  $f_l(r)$  экспоненциально затухает с глубиной ниже точки поворота. Нормировка, проведенная в формуле (9.36), такова, что в однородной среде  $f_l(r) = j_l(\omega r/\alpha_s)$  (сферическая функция Бесселя).

Три функции  $f_l, g_l^{(1)}, g_l^{(2)}$  являются решениями во всех диапазонах изменения радиуса, и теперь важно получить и понять формулу связи между ними. Из дополнения 9.3 находим, что это та же зависимость, что и для сферических функций Бесселя/Ханкеля, т.е. формула связи имеет простой вид

$$f_l(r) = \frac{1}{2} [g_l^{(1)}(r) + g_l^{(2)}(r)]. \quad (9.37)$$

Физически этот результат означает, что ниже точки поворота амплитуды решения затухают. Но выше этой точки наблюдается стоячая волна, состоящая из нисходящих и восходящих компонент, точно так же как луч сначала идет вниз до точки поворота, а затем заворачивает вверх. Ниже точки поворота каждое из решений  $g_l^{(1)}$  и  $g_l^{(2)}$  будет экспоненциально расти с глубиной.

Теперь с помощью примененной выше нормировки можно оценить вронскиан. Находим, что  $W(r) = -i\alpha_s/(\omega r^2)$ . Таким образом, из (9.29), (9.31), (9.32) и (9.37) получаем окончательно

$$P(r, \omega) = -\frac{iK_s(\omega)}{4\pi\alpha_s} \sum_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) g_l^{(1)}(r_>) [g_l^{(1)}(r_<) + g_l^{(2)}(r_<)] P_l(\cos \Delta), \quad (9.38)$$

где  $r_>$  — наибольшее из  $(r, r_s)$ ,  $r_<$  — наименьшее из  $(r, r_s)$ .

Часто бывает полезным представить функцию Лежандра в виде суммы двух бегущих волн:

$$P_l = Q_l^{(1)} + Q_l^{(2)}, \quad \text{где} \quad Q_l^{(2)}(\cos \Delta) \sim \frac{\exp\left\{\mp i\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)\Delta - \frac{\pi}{4}\right]\right\}}{(2\pi l \sin \Delta)^{1/2}} \quad (9.39)$$

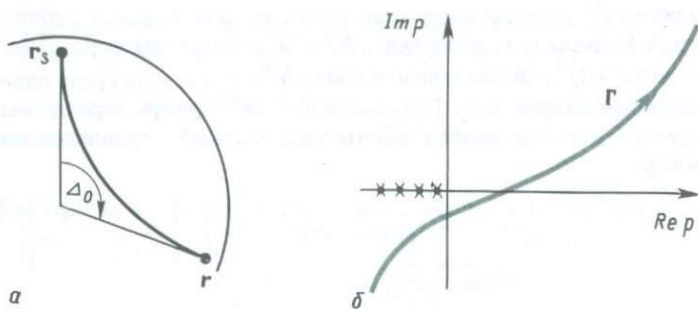


Рис. 9.17. *а* — параметры луча, идущего вниз от источника к приемнику. Имеется точка поворота. *б* — соответствующий путь интегрирования  $\Gamma$ . См. уравнение (9.40). [268].

для больших  $l$  (при условии что  $l$  не принимает значений, близких к целому отрицательному числу, а  $\Delta$  не имеет значений, близких к  $0^\circ$  или  $180^\circ$ ). Напомним, что в декартовой системе координат горизонтальная волновая функция выражается как  $e^{i\omega p x}$ , где  $p$  — горизонтальная медленность, или лучевой параметр. Подобно этому из (9.39) мы можем определить  $(l + 1/2)/\omega$  как лучевой параметр в сферических координатах, как это уже было сделано в формуле (9.34).

Результат, полученный в формуле (9.38), имеет тот же смысл, что интеграл Зоммерфельда; он показывает, как волны, возбужденные простым точечным источником, можно разложить по вертикальным и горизонтальным волновым функциям, соответствующим той системе координат, в которой легко можно проанализировать граничные условия. Однако, хотя разложение по частным волновым решениям (9.38) представляет собой сходящийся ряд, отдельные члены его не слишком быстро уменьшаются с ростом  $l$ ; только когда  $l$  становится достаточно большим, сумма  $g_l^{(1)}(r_<) + g_l^{(2)}(r_<)$  начинает уменьшаться экспоненциально. Это приводит к требованию, чтобы  $l$  было больше, чем  $\omega r_< + \alpha(r_<)$ . Поскольку  $r_<$  обычно составляет несколько тысяч километров, а  $\alpha(r_<) \sim 10$  км/с, для изучения короткопериодных (1 или 2 с) объемных волн нужно было бы в (9.38) просуммировать несколько тысяч членов. Подобного рода вычислительные трудности легко преодолеть с помощью замены суммирования по  $l$  интегралом (преобразование Ватсона или Пуассона), после чего легко провести прямое интегрирование, определив подходящий контур в (комплексной) плоскости  $l$ . Точно определить подходящий контур нелегко [241, 15], поскольку (9.38) является по сути суммой волн четырех различных типов. Каждая имеет вид  $g_l^{(j)}(r_<) Q_l^{(k)}$ , где  $j = 1$  или  $2$ ,  $k = 1$  или  $2$ , и характеризуется направлением движения (распространяется ли волна вниз или вверх от  $r_<$  к  $r_>$  и движется ли к источнику или от него). Но если ряд (9.38) разбить на четыре ряда, по одному для волны каждого типа, то каждый из рядов будет *расходящимся*. Требуются чрезвычайно сложные ухищрения, чтобы избежать этого расхождения; в дополнении 9.4 мы приводим пример для наиболее важного случая, который иллюстрируется рис. 9.17, а именно когда имеется точка поворота луча.

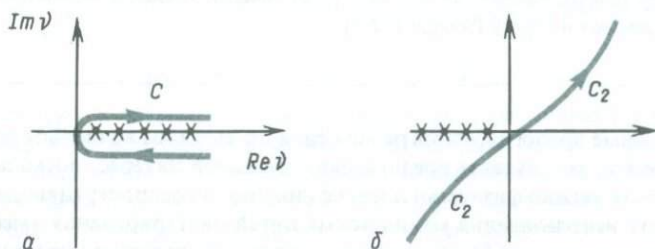
## ДОПОЛНЕНИЕ 9.4

## Пример применения преобразования Ватсона

Рассмотрим способ преобразования сумм в интегралы. Используя полюсы  $\sec v\pi$  при  $v = 1/2, 1 1/2, 2 1/2, \dots$ , получим выражение для преобразования

$$\sum_{l=0}^{\infty} f(l + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \int_C f(v) e^{-iv\pi} \sec v\pi dv, \quad (1)$$

где контур  $C$  взят вокруг положительной действительной оси  $v$ , как показано на рисунке.



**a** — контур для преобразования Ватсона. Все полюсы расположены вдоль действительной оси и нанесены для положительных  $v$  в точках  $v = l + 1/2$ ;  $l = 0, 1, 2, \dots$ .  
**б** — деформация контура  $C$  для прямого луча с точкой поворота после замены  $v$  на  $-v$  в интеграле, содержащем  $Q_{-\nu-1/2}^{(2)}$ .

Применим (1) к разложению по частным волновым решениям (9.38) для случая, когда луч на пути от источника  $r_s$  к приемнику  $r$  имеет точку поворота. Траектория такого луча изображена на рис. 9.17, а. Используя представление  $P_l(\cos \Delta) = e^{i\pi l} P_l(-\cos \Delta)$ , мы находим, что

$$P(r, \omega) = -\frac{K_s \omega}{4\pi \alpha_s} \int_C v g_{v-1/2}^{(1)}(r) f_{v-1/2}(r_s) P_{v-1/2}(-\cos \Delta) \sec v\pi dv.$$

Чтобы привести это подынтегральное выражение и путь интегрирования к более удобной форме, следует воспользоваться рядом особых свойств вертикальных и горизонтальных волновых функций во избежание появления расходящихся интегралов на промежуточных стадиях преобразования. Из работы [241] следует, что путь  $C$  можно преобразовать так, чтобы, пройдя в процессе деформирования через четвертый квадрант и частично через первый и третий, он перешел в путь  $C_2$ , симметричный относительно начала координат (см. рисунок). На этой стадии подынтегральное выражение имеет полюсы на положительной действительной оси  $v$ . Записывая

$$P_{v-1/2}(-\cos \Delta) \sec v\pi = [-e^{-iv\pi} Q_{v-1/2}^{(2)}(\cos \Delta) + e^{iv\pi} Q_{-v-1/2}^{(2)}(\cos \Delta)] \operatorname{cosec} v\pi,$$

получаем возможность разделить интеграл по контуру  $C_2$  на два члена. Заменяя  $v$  на  $-v$  в интеграле, содержащем  $Q_{-v-1/2}^{(2)}$ , и используя равенства  $g_{-v-1/2}^{(1)}(r_s) e^{-iv\pi} = g_{v-1/2}^{(1)}(r_s)$  и

$$f_{-v-1/2}(r_s) = f_{v-1/2}(r_s) e^{-iv\pi} + i \sin v\pi g_{v-1/2}^{(1)}(r_s),$$

находим

$$P(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{iK_s\omega}{4\pi\alpha_s} \int_{C_2} v g_{\nu-\frac{1}{2}}^{(1)}(r) g_{\nu-\frac{1}{2}}^{(1)}(r_s) Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta) dy. \quad (2)$$

Заметим, что: 1) представленный здесь окончательный интеграл можно отождествить только с одним из четырех членов, описывающих распространение волн в разложении (9.38); 2) коэффициент  $Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta)$  в формуле (2) имеет полюсы только на отрицательной действительной оси, так что путь  $C_2$  теперь можно деформировать так, чтобы он пересекал положительную действительную ось  $\nu$  в удобной точке; 3) если луч не имеет точек поворота между источником  $\Gamma_s$  и приемником  $\Gamma$ , например он везде распространяется вверх, то членом, описывающим соответствующую бегущую волну в (9.38), будет  $g_{l}^{(1)}(r) g_{l}^{(2)}(r_s) Q_l^2(\cos \Delta)$ . Анселл [15] дал детальный анализ, указав на расходимость интегралов, приведенных в статье Ричардса [268].

Хотя сложные преобразования разложений по частным волновым решениям очень трудоемки, результаты представляют большой интерес, поскольку в таком разложении можно физически идентифицировать распространяющиеся волны. Результат использования комплексных путей интегрирования имеет двойной смысл: исключены все бегущие волны, которые не представляют для нас интереса, а для остальных волн получен удобный для расчета интеграл. Таким образом, в случае источника и приемника, показанных на рис. 9.17,а, результат (2) из дополнения 9.4 точно идентифицирует ту распространяющуюся волну, которую и следует ожидать. Мы получаем

$$P(\mathbf{r}, \omega) = \frac{-iK_s\omega^3}{4\pi\alpha_s} \int_{\Gamma} p g_{\omega p-\frac{1}{2}}^{(1)}(r) g_{\omega p-\frac{1}{2}}^{(1)}(r_s) Q_{\omega p-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta) dp, \quad (9.40)$$

где  $p$  — лучевой параметр ( $\nu = l + \frac{1}{2} = \omega p$ ), и путь  $\Gamma$ , изображенный на рис. 9.17,б, можно деформировать так, чтобы он пересекал положительную действительную ось  $p$  в любой удобной точке или нескольких точках.

Влияние разрывов в Земле, таких как граница ядро — мантия, рассматривается в следующем разделе. Мы увидим, что в подынтегральное выражение формулы (9.40) необходимо включить коэффициенты отражения и преломления. В то же время наличие различных лучевых траекторий для одной и той же пары источник — приемник, как это показано на рис. 9.12,б,в, уже учтено в (9.40). Наше определение  $g_p^{(j)}$  подразумевает в неявном виде, что существует только одна точка поворота  $r_p$  [решение уравнения  $p = r/\alpha(r)$ ]; следовательно, зоны пониженной скорости исключаются из рассмотрения. (Выражения теории ВКБ можно видоизменить так, чтобы несколько смягчить это допущение.) Поскольку кривая  $T - \Delta$  не имеет пропусков, ветви годографа таковы, что допускают существование одного луча, трех лучей или, в общем случае, некоторого нечетного числа лучей между источником и приемником.

Чтобы применить формулу (9.40), нужно непосредственно рассчитать вертикальные волновые функции (с помощью интегрирования уравнений движения) и затем провести интегрирование по пути  $\Gamma$  в (9.40), выбранному вблизи траектории наискорейшего спуска [81]. Однако для волновых функций часто бывают адекватны приближенные выражения, и их применение позволяет значительно

ускорить расчеты. Вначале рассмотрим, как применить приближения теории ВКБ к радиальному смещению, найденному из (9.40) для приемника, находящегося на расстоянии  $\Delta_0$  от источника. Тогда из (9.25а), (9.35) и (9.39) получим

$$u_r(r, \Delta_0, \omega) = [\rho(r)]^{-1/2} \partial P / \partial r = \frac{K_s e^{-3i\pi/4} \omega^{3/2}}{[2\pi\rho(r) \sin \Delta_0]^{1/2}} \frac{1}{4\pi r r_s} \int_{\Gamma} \left( \frac{p\xi(r)}{\xi(r_s)} \right)^{1/2} e^{i\omega J} dp, \quad (9.41)$$

где интеграл фазовой задержки имеет вид

$$J = J(p) = \int_{r_p}^{r_s} \xi dr + \int_{r_p}^r \xi dr + p\Delta_0.$$

Как отмечалось в (9.22),  $\int \xi dr$  связан с интегралами от времени пробега и расстояния, так что

$$J = T(p) - p \Delta(p) + p\Delta_0 = \tau(p) + p\Delta_0, \quad (9.42)$$

где  $T(p)$  и  $\Delta(p)$  — время и расстояние, при которых луч с параметром  $p$  достигнет радиуса  $r$  от источника на уровне  $r_s$ . Поскольку  $\partial J / \partial p = \Delta_0 - \Delta(p)$  [см. (9.23)], отсюда следует, что подынтегральное выражение для  $u_r$  имеет седловые точки при таких значениях параметра, что  $\Delta(p) = \Delta_0$ , т.е. как раз при лучевых параметрах, для которых существует луч между источником и приемником. Вблизи такой седловой точки  $p_0$  разложение в ряд Тейлора приводит к выражению для  $J$

$$J(p) = T(p_0) + \frac{1}{2}(p - p_0)^2 (-\partial\Delta/\partial p) \quad (9.43)$$

Если имеется только один действительный луч между  $\Gamma$  и  $\Gamma_s$ , производная  $\partial\Delta/\partial p$  отрицательна (ветвь  $AB$  на рис. 9.13) и седло благоприятно ориентировано для того, чтобы взять  $\Gamma$  как путь наискорейшего спуска. Тогда получаем приближенное выражение для (9.41):

$$u_r(r, \Delta_0, \omega) \sim \frac{-iK_s \omega}{4\pi} \left( \frac{\alpha_s}{\rho\alpha} \right)^{1/2} \frac{e^{i\omega T}}{r r_s} \left[ \frac{\cos i_s \sin \Delta_0}{p_0 \cos i} \left( -\frac{\partial\Delta}{\partial p} \right) \right]^{-1/2}$$

Определяя геометрическое расхождение из выражения

$$\alpha_s \mathcal{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = r r_s [\cos i \cos i_s \sin \Delta_0 |\partial\Delta/\partial p| / p_0]^{1/2} \quad (9.44)$$

(см. задачу 4.3), получаем

$$u_r(r, \Delta_0, \omega) \sim \frac{-iK_s \omega}{4\pi(\rho\alpha\alpha_s)^{1/2}} \frac{e^{i\omega T}}{\mathcal{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)} \cos i(r). \quad (9.45)$$

Мы задали интенсивность источника множителем  $K_s$ . Если вместо этого источник  $P$ -волн описывать с помощью его тензора момента  $M_{ij}(t) = M_0(t)\delta_{ij}$ , то объемная сила будет  $f_j(\mathbf{x}, t) = -M_0(t)\partial\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_s)/\partial x_j$ . Для нахождения связи между  $K_s$  и  $M_0$  в случае, когда градиенты материальных свойств в окрестности источника малы, заметим, что доминирующими членами в векторном волновом уравнении [дополнение 9.2, уравнение (1)] становятся члены  $\rho\omega^2\mathbf{u} + \nabla(\rho\alpha^2\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla[M_0(\omega)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_s)]$ , и вместе с выражением  $\mathbf{u} = \rho^{-1/2}\nabla P$  это дает [при сравнении с (9.26)]  $K_s = M_0(\omega)/\rho_s^{-1/2}\alpha_s^2$ . Поэтому из (9.45) мы находим,

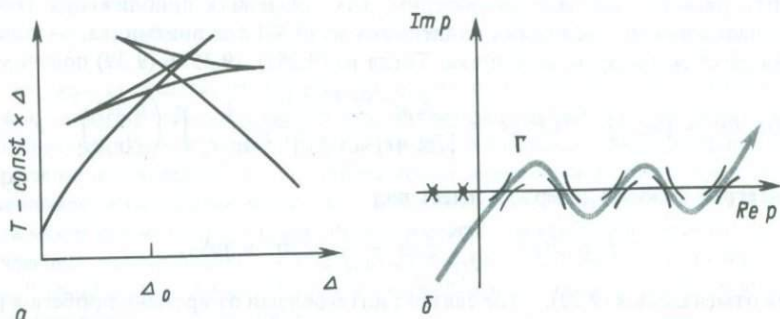


Рис. 9.18. *а* — приведенный годограф с двумя перекрывающимися петлями. *б* — путь интегрирования в плоскости комплексного лучевого параметра, пересекающий пять седел, каждое при значении  $p$ , удовлетворяющем уравнению  $\Delta(r, p) = \Delta_0$ . (Из работы [268].)

что во временной области

$$u_r(r, \Delta_0, t) \sim \frac{\cos i(r) \dot{M}_0(t - T)}{4\pi[\rho(r)\rho_s\alpha(r)\alpha_s^5]^{1/2} \mathcal{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)}, \quad (9.46)$$

и это выражение точно соответствует предсказанному лучевой теорией.

Более сложная конфигурация годографа приведена на рис. 9.18, где для состояния  $\Delta_0$  имеется пять значений лучевого параметра, которые удовлетворяют уравнению  $\Delta(p) = \Delta_0$ . Вторая производная фазового интеграла,  $-\omega d\Delta/dp$ , принимает то положительное, то отрицательное значение, образуя седла, ориентированные как показано на рис. 9.18, б. Путь  $\Gamma$  можно выбрать так, чтобы каждое седло пересекалось траекторией наискорейшего спуска для получения приближения типа (9.45) в случае первого, третьего и пятого седел. Для второго и четвертого седла в приближение типа (9.45) вводится коэффициент  $(-i)$ , т.е. фазовое опережение  $\pi/2$ . Переходя к временной области, получим, что вступления, соответствующие седлам с нечетным номером, имеют вид импульсов, являющихся преобразованием Гильберта от вступлений для четных номеров. Явление каустики возникает, когда уравнение  $\Delta_c = \Delta(p)$  имеет двукратный корень (например, вблизи  $p_c$ ), так что  $d\Delta/dp$  также равно нулю при  $p = p_c$ . Рис. 9.19 иллюстрирует свойства волновых функций в этом случае, и важно подчеркнуть, что (9.41) все еще очень легко оценить численно, обобщив предварительно программу для расчета  $T$  и  $\Delta$  на случай комплексного лучевого параметра. Подобным путем Ричардс [269] описал влияние каустики в волне РККР на амплитуды вблизи  $240^\circ$ .

Чепмен [78] показал, что представления, подобные (9.41), можно записать во временной области в виде суммы сверток. Важность этого результата заключается в том, что он приводит к очень простому и плодотворному методу синтеза сейсмограмм, в котором могут участвовать многократные вступления и каустики. Примечательно, что этот метод имеет тесные связи с методом Каньяра, хотя он применим даже тогда, когда имеются точки поворота лучей. Мы начнем с (9.41), но при этом используем изотропный тензор момента

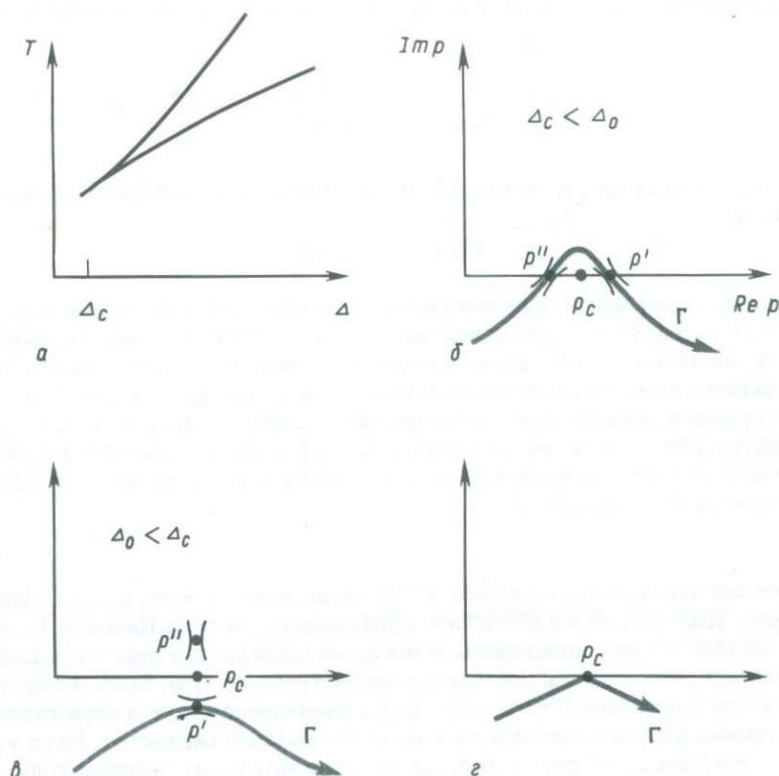


Рис. 9.19. Поведение седловых точек вблизи каустики. *a* — две ветви  $T = T(\Delta)$  касаются на расстоянии  $\Delta_c$ , где наблюдается каустика. *б* — для расстояний  $\Delta_0$ , немного больших чем  $\Delta_c$ , имеются два действительных решения уравнения  $\Delta(p) = \Delta_0$ , причем каждое дает седловую точку на действительной оси  $p$ . По мере того как  $\Delta_0$ , уменьшаясь, проходит через  $\Delta_c$ , эти два седла сливаются в  $p_c$ , и тогда (*в*) для расстояний  $\Delta_0$ , чуть меньших  $\Delta_c$ , существуют два комплексно-сопряженных решения уравнения  $\Delta(p) = \Delta_0$ ; одно из них, лежащее ниже действительной оси  $p$  и параллельное ей, и есть путь наискорейшего спуска. *г* — показаны два прямолинейных отрезка, которые подходят для численной оценки уравнения (9.41) в обоих случаях, т.е. когда  $\Delta_0 \cong \Delta_c$ . (Согласно [268].)

$M_{ij} = M_0(\omega)\delta_{ij}$ , так что

$$u_r(r, \Delta_0, \omega) = \frac{-i\omega M_0(\omega) e^{-i\pi/4} \omega^{1/2}}{(2\pi\rho\rho_s \sin \Delta_0)^{1/2} 4\pi r r_s \alpha_s^2} \int_{\Gamma} B(p) e^{i\omega J(p)} dp, \quad (9.47)$$

где

$$B(p) = \left( \frac{p \xi(r)}{\xi_s} \right)^{1/2} = p^{1/2} \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{p^2}{r^2} \right)^{1/4} \left/ \left( \frac{1}{\alpha_s^2} - \frac{p^2}{r_s^2} \right)^{1/4} \right.$$

Во временной области выражение (9.47) принимает вид (см. дополнение 9.5)

$$u_r(r, \Delta_0, t) = \frac{dM_0}{dt} \frac{d}{(2\rho\rho_s \sin \Delta_0)^{1/2} 4\pi r r_s \alpha_s^2} * \frac{d}{dt} \frac{H(t)}{(\pi t)^{1/2}} * \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \int_\Gamma B(p) e^{i\omega(J-t)} dp d\omega. \quad (9.48)$$

Но последняя из трех временных функций, свернутых в этой формуле, есть  $f(t)$ , причем

$$f(t) = \operatorname{Re} \int_\Gamma B(p) \delta[J(p) - t] dp. \quad (9.49)$$

Следовательно, подынтегральное выражение зависит как раз от тех значений  $p$ , для которых  $J(p) = t$ . Для таких значений параметром  $p$  служит реальное время, и они до некоторой степени идентичны значениям на пути Каньяра. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сначала простой случай, когда только одно значение лучевого параметра  $p_0$  удовлетворяет уравнению  $\Delta(p) = \Delta_0$  для времени пробега  $t_0$  от  $r_s$  до  $r$  (см. рис. 9.17). График  $J(p) = T(p) - p\Delta(p) + p\Delta_0$  показан на рис. 9.20, а. Наклон кривой  $\Delta_0 - \Delta(p)$  равен нулю в  $p_0$ , где  $J(p) = t_0$ . Для времен, больших  $t_0$ , уравнение

$$t = J(p) \quad (9.50)$$

имеет два корня, которые в работе [78] обозначены как  $\pi_1(t)$  и  $\pi_2(t)$ . Действительно, уравнение (9.50) совпадает с уравнением для пути Каньяра. Ранее нас интересовал только один корень, и мы проследили его вне действительной оси для времен, больших чем некоторое время вступления луча. Здесь мы сохраним оба корня и проведем  $\Gamma$  только вдоль действительной оси  $p$  (в окрестности  $p_0$ ) так, чтобы избежать комплексных значений лучевого параметра. Пути  $\pi_1(t)$  и  $\pi_2(t)$ , показанные на рис. 9.20, б, имеют действительные значения только при  $t \geq t_0$ . Заметим, что направление, взятое вдоль  $\pi_1(t)$ , при увеличении  $t$  противоположно направлению, известному из гл. 6 и разд. 9.1. Причина в том, что  $\partial\Delta/\partial p < 0$  при  $p_0$  и значения вдоль  $\pi_j(t)$  вблизи  $p_0$  задаются рядом Тейлора

$$t = t_0 + \frac{1}{2}(\pi_j - p_0)^2 \frac{\partial^2 J}{\partial p^2} = t_0 - \frac{1}{2}(\partial\Delta/\partial p)|_{p_0} (\pi_j - p_0)^2. \quad (9.51)$$

Когда действительные решения  $\pi_j = \pi_j(t)$  уравнения (9.50) найдены, мы можем заменить аргумент дельта-функции в (9.49) на

$$J(p) - t = (p - \pi_j) \frac{\partial J}{\partial p} \Big|_{\pi_j} = (p - \pi_j) [\Delta_0 - \Delta(\pi_j)]$$

вблизи каждого  $\pi_j(t)$ . Действительно, здесь не имеет смысла удерживать члены более высокого порядка, так как выражение, которое мы аппроксимируем, само является результатом аппроксимации ВКБ. Таким образом, выражение (9.48) сводится к следующему:

$$u_r(r, \Delta_0, t) = \frac{dM_0}{dt} \frac{d}{(2\rho\rho_s \sin \Delta_0)^{1/2} 4\pi^2 r r_s \alpha_s^2} * \frac{d}{dt} \frac{H(t)}{t^{1/2}} * \sum_j \frac{B(\pi_j)}{|\Delta_0 - \Delta(\pi_j)|}. \quad (9.52)$$

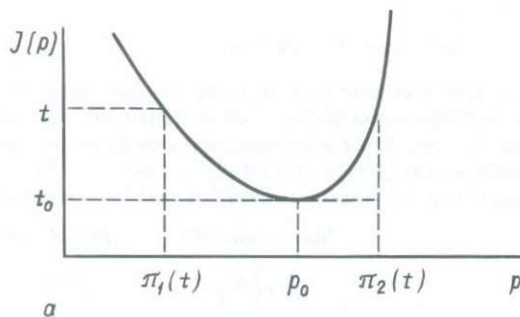
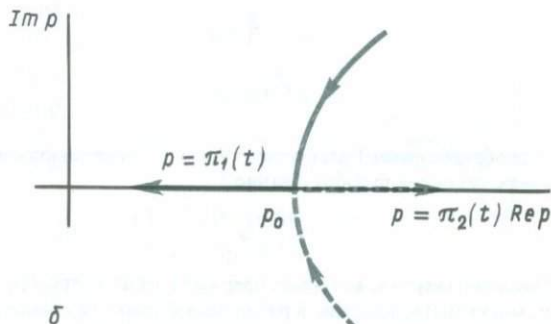


Рис. 9.20. *a* — функция  $J(p)$ , полученная из  $\tau(p)$  (рис. 9.14, *z*) добавлением линейного члена  $p\Delta_0$ . Минимум в  $p_0$  соответствует времени  $t_0 = J(p_0)$ . *б* — пути интегрирования  $p = \pi_j(t)$  [где  $p$  — решение уравнения  $t = J(p)$ ], которые лежат на действительной оси  $p$  при  $t > t_0$ .



Приведенный к такому виду результат подобен полученным нами ранее решениям Каньяра, но без использования алгебры комплексных чисел. Чтобы удостовериться, что в формуле (9.52) содержится геометролучевое решение, представим  $\Delta_0 - \Delta(\pi_j)$  вблизи  $p_0$  как  $(-\partial\Delta/\partial p)_{p_0}(\pi_j - p_0)$  и затем, воспользовавшись (9.51), запишем

$$\Delta_0 - \Delta(\pi_j) \sim [-2 \partial\Delta/\partial p]_{p_0}^{1/2} (t - t_0)^{1/2}. \quad (9.53)$$

Из операций свертки, содержащихся в формуле (9.52), и дополнения 9.5 следует, что каждый из двух членов ( $j = 1, 2$ ) дает как раз половину геометролучевого приближения (9.46).

Главное достоинство формулы (9.52) состоит в том, что в ней непосредственно учитываются многократные вступления и каустики. Так, на рис. 9.21 показан более сложный годограф с тремя решениями  $p_1, p_2, p_3$  уравнения  $\Delta(p) = \Delta_0$ . Для графика  $t = J(p)$  имеются четыре решения, и здесь совершенно ясно, как применять формулу (9.52). Каустики в *B* и *C* соответствуют перегибам кривой  $J = J(p)$ , и если при  $\Delta_0$  наблюдается каустика, то касательная в точке перегиба кривой на рис. 9.21, *z* горизонтальна. Находим, что  $\Delta_0 - \Delta(\pi_j) \sim (t - t_0)^{3/2}$ , и это приводит к получению больших амплитуд по формуле (9.52).

Интересно, что формула (9.52) была получена совершенно иными способами, чем примененный нами. Так Чепмен [77] исследовал метод Каньяра для большо-

## ДОПОЛНЕНИЕ 9.5

*Полезные пары преобразований*

Мы рассматриваем действительные временные ряды, следовательно действительные части их преобразований Фурье — четные функции частоты, а мнимые части — нечетные функции частоты. Имея это в виду, запишем формулу только для положительных действительных частот:  $f(t) = (1/\pi) \operatorname{Re} \int_0^{\infty} f(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$ . Связь между сверткой с  $t^{-1/2}$  и умножением на  $\omega^{-1/2}$  можно выразить в виде следующих пар преобразований:

<i>Частотная обл.</i>	<i>Временная обл.</i>
$e^{i\pi/4} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{1/2}$	$\frac{H(t)}{t^{1/2}}$
$e^{-i\pi/4} \left(\frac{\pi}{-}\right)^{1/2}$	$\frac{H(-t)}{(-t)^{1/2}}$
$e^{-i\pi/4} (\pi\omega)^{1/2}$	$\frac{d}{dt} \frac{H(t)}{t^{1/2}}$
$e^{i\pi/4} (\pi\omega)^{1/2}$	$-\frac{d}{dt} \frac{H(-t)}{(-t)^{1/2}}$

Преобразованием Гильберта от  $H(t)/t^{1/2}$  будет выражение  $H(-t)/(-t)^{1/2}$ , и следует запомнить основное преобразование

$$\frac{H(t)}{t^{1/2}} * \frac{H(t-T)}{(t-T)^{1/2}} = \pi H(t-T).$$

Операции свертки, которые содержат оператор преобразования Гильберта и оператор  $d/dt$ , могут быть записаны в различных формах на основе коммутативных свойств и связей этих операторов с другими функциями. Итак,

$$\frac{d\psi}{dt} * \frac{H(t)}{t^{1/2}} * \frac{H(t-T)}{(t-T)^{1/2}} = \psi * \frac{d}{dt} [\pi H(t-T)] = \pi \psi(t-T),$$

и

$$\psi(t) * \left[ -\frac{d}{dt} \frac{H(-t)}{(-t)^{1/2}} * \frac{H(T-t)}{(T-t)^{1/2}} \right] = \left( -\frac{d\psi}{dt} \right) * (-\pi H(t-T)) = \pi \psi(t-T).$$

Чтобы получить из (9.52) — (9.53) геометролучевое приближение, мы пользуемся преобразованием

$$\frac{d}{dt} \frac{H(t)}{t^{1/2}} * \frac{H(t-t_0)}{(t-t_0)^{1/2}} = \pi \delta(t-t_0).$$

го числа однородных плоских слоев и сумел получить выражение для обобщенного однократного отражения [см. (9.6)]. Он провел суммирование по всем границам и нашел предел при стремящихся к нулю мощностях слоев. Вблизи волновых фронтов найденное им выражение оказалось равным  $\pi/3$  от того, что дает формула (9.52) (точнее, ее плоскосоистый эквивалент). Для точек поворота лучей это приводит к неожиданному результату, что тонкая слоистость и большое

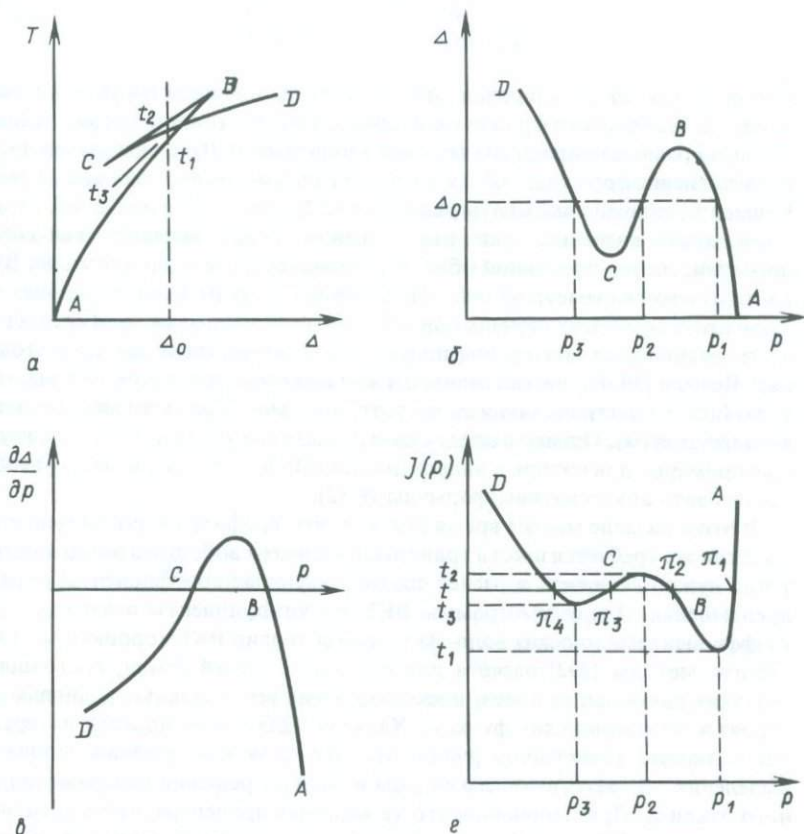


Рис. 9.21. Годограф с каустиками в  $B$  и  $C$  и построенные по ним кривые. Геометрические параметры луча приведены для расстояния  $\Delta_0$  в пределах петли.  $a$  — голограф с отмеченными вступлениями на временах  $t_1, t_3, t_2$ .  $б$  — функция  $\Delta = \Delta(\rho)$  с тремя решениями  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  для  $\Delta(\rho) = \Delta_0$ .  $в$  — нули функции  $\partial\Delta/\partial\rho$  наблюдаются в  $B$  и  $C$ .  $г$  — построение решений  $\pi_j(t)$  для  $t = J(\rho)$  для конкретного расстояния  $\Delta_0$ . (Согласно [78]; с разрешения Американского геофизического союза.)

число однократных отражений в пределе не дают формулы лучевой теории на волновых фронтах. Например, общий эффект однократных отражений примерно на 5% больше. Однако тройные отражения (трижды отраженные волны) стремятся в пределе к  $-\pi^3/648$  от значений, полученных по формуле (9.52) вблизи волновых фронтов. Чепмен показал, что для многократных отражений порядка  $(2l + 1)$  аппроксимация на волновых фронтах составляет  $2(-1)^l(\pi/6)^{2l+1}/(2l + 1)!$  от значений, рассчитанных по формуле (9.52). Добавление отражений последующих порядков дает тогда быстро сходящийся ряд, который действительно сходится к (9.52), так как

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi^3}{648} + \dots = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1.$$

Виггинс [334] сформулировал другой подход, интерпретируя  $J(p)$  как время вступления волнового фронта (или «диска») на расстоянии  $\Delta_0$  с медленностью  $p$ . Выбирая равные приращения времени вдоль кривой  $J(p)$ , он получил дискретное представление формулы (9.52) и назвал его *диско-лучевой теорией*. В работе [79] Чепмен предложил называть решение (9.52) *сейсмограммой ВКБ*. Это весьма подходящее название, так как решение (9.52) является выражением в пространственно-временной области, эквивалентным аппроксимации ВКБ в области лучевой параметр — частота. Сейсмограмму ВКБ легко рассчитать, и, по видимому, во многих случаях при исследовании динамики волн следует предпочесть именно этот метод. Мы получили его как частный пример метода, который Чепмен [79, 80] назвал *методом медленности*, т.е. промежуточные результаты (после интегрирования по частоте) получены в области медленности (лучевого параметра). Однако в следующем разделе мы увидим, что существуют важные примеры, для которых аппроксимации ВКБ не точны, поэтому необходимо исследовать альтернативы формулы (9.52).

В этом разделе мы все время считали, что профиль скорости меняется плавно. Если же требуется ввести границы, например свободную поверхность Земли, тогда нужно включить в расчет соответствующие коэффициенты отражения и преломления. Для сейсмограммы ВКБ эти коэффициенты оказываются просто коэффициентами плоских волн. За рамками теории ВКБ хорошо известны более строгие методы [292] расчета для простых моделей Земли, состоящих из нескольких однородных слоев, поскольку в них вертикальные волновые функции строятся из сферических функций Ханкеля. Для таких моделей интересующую нас волновую траекторию (например, *SKKP*) можно проанализировать путем выделения соответствующего ей ряда волновых решений в выражении для полного отклика. Принципиально это та же самая процедура, что и идентификация конкретного обобщенного луча в выражении, которое описывает бесконечное семейство лучей (см. рис. 9.10). Для этой цели все еще можно использовать преобразование Ватсона, но теперь любая деформация траектории в плоскости комплексного  $p$  должна учитывать полюсы в коэффициентах отражения/преломления для интересующей нас лучевой траектории. Положения большинства полюсов устанавливаются при изучении свойств приближения ВКБ по отношению к сферическим функциям Ханкеля; следовательно, в более реалистичных моделях Земли с радиальным изменением упругих свойств между глубинами, соответствующими границам, мы еще можем надеяться определить положение необходимых полюсов, используя формулы (9.35)—(9.36) теории ВКБ для обобщенных вертикальных волновых функций  $g_{\omega p}^{(j)}_{-1/2}$ . Строгий анализ деформаций путей интегрирования, необходимый, чтобы превратить путь Ватсона в пути типа  $\Gamma$  (на рис. 9.17), в случае реалистичных моделей Земли представляет трудновыполнимую задачу. Тем не менее можно указать несколько классических задач распространения волн, которые решены таким способом. В последующем изложении мы сосредоточим внимание на *спектральных методах*, в которых промежуточные результаты получаются в частотной области (после интегрирования по комплексному лучевому параметру).

### 9.5. ЗАДАЧИ ОБ ОБЪЕМНЫХ ВОЛНАХ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ЗЕМЛИ С ВНУТРЕННИМИ ГРАНИЦАМИ

Для систематического учета отражений и преломлений на границах внутри Земли удобно применить подход, основанный на представлении о векторе движения-напряжения. Если не использовать этого аппарата, то нужен какой-либо специально разработанный для данного случая способ, основанный (обычно) на представлении о потенциалах, и для каждого конкретного приложения требуется тогда проводить детальные алгебраические выкладки. В этом разделе мы выведем вектор движения-напряжения для колебаний  $P - SV$  в сферически-симметричной среде, используя обозначения, подобные тем, которые мы применяли для однородных плоских слоев. Не представляет труда записать матрицу рассеяния, которой мы воспользуемся для изучения различных типов волн.

Подходящие для использования горизонтальные волновые функции представляют собой векторные поверхностные гармоники, введенные в гл. 8. Наши обозначения основаны на полностью нормированной поверхностной гармонике  $Y_l^m(\Delta, \phi)$  [см. (8.5)] и

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_l^m(\Delta, \phi) &= Y_l^m \hat{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{S}_l^m(\Delta, \phi) &= \frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}} \left( \frac{\partial Y_l^m}{\partial \Delta} \hat{\Delta} + \frac{1}{\sin \Delta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \hat{\phi} \right), \\ \mathbf{T}_l^m(\Delta, \phi) &= \frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}} \left( \frac{1}{\sin \Delta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \hat{\Delta} - \frac{\partial Y_l^m}{\partial \Delta} \hat{\phi} \right). \end{aligned} \quad (9.54)$$

Используя эти выражения, запишем следующие формулы разложения:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \Delta, \phi, \omega) = (u_r, u_\Delta, u_\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [U_l^m \mathbf{R}_l^m + V_l^m \mathbf{S}_l^m + W_l^m \mathbf{T}_l^m], \quad (9.55)$$

и

$$\text{напряжение} = (\tau_{rr}, \tau_{r\Delta}, \tau_{r\phi}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [R_l^m \mathbf{R}_l^m + S_l^m \mathbf{S}_l^m + T_l^m \mathbf{T}_l^m].$$

Мы ищем решение для шести функций:  $U_l^m, V_l^m, W_l^m, R_l^m, S_l^m, T_l^m$ . Каждая из них является функцией от  $(r, l, m, \omega)$ , и в этом смысле представляет собой тройное преобразование решения в интересующей нас области  $(r, \Delta, \phi, t)$ . В многократно преобразованных уравнениях движения (2.47) — (2.50) остаются только радиальные производные, и они распадаются на две группы:

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{-[l(l+1)]^{1/2}}{r} & \frac{1}{\mu} & 0 \\ \frac{\lambda[l(l+1)]^{1/2}}{r(\lambda+2\mu)} & \frac{-2\lambda}{r(\lambda+2\mu)} & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} \\ \frac{4l(l+1)^2\mu(\lambda+\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)} - \rho\omega^2 - \frac{2\mu}{r^2} & \frac{-2\mu(3\lambda+2\mu)[l(l+1)]^{1/2}}{r^2(\lambda+2\mu)} & \frac{3}{r} & \frac{-\lambda[l(l+1)]^{1/2}}{r(\lambda+2\mu)} \\ \frac{-2\mu(3\lambda+2\mu)[l(l+1)]^{1/2}}{r^2(\lambda+2\mu)} & \frac{-\rho\omega^2 + \frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)}}{r} & \frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r} & \frac{-4\mu}{r(\lambda+2\mu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix} \quad (9.56)$$

$$\text{и} \quad \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{\mu} \\ \frac{\mu(l-1)(l+2)}{r^2} - \rho\omega^2 & -\frac{3}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}. \quad (9.57)$$

Мы опустили здесь индексы  $l$  и  $m$  у зависимых переменных. Заметим, что  $m$  даже не входит в уравнения, но следует помнить, что зависимость от  $m$ , вообще говоря, здесь присутствует как следствие зависимости от  $m$  представления источника. В гл. 8 мы также связывали с радиальными функциями номер обертона  $n$ . В нашем теперешнем подходе обертоны не рассматриваются, так как мы не ищем специальных решений, характеризующихся регулярностью при  $r = 0$  и нулевыми напряжениями при  $r = r_{\oplus}$  (на поверхности Земли). Мы предпочтем рассматривать полное множество линейно-независимых решений, не налагая (пока) граничных условий.

Очевидно, что формула (9.56) описывает колебания  $P - SV$  [ср. (5.60)], а формула (9.57) — колебания  $SH$  [ср. (5.58)], и обе эти группы уравнений в стандартной форме можно записать как  $d\mathbf{f}/dr = \mathbf{A}(r)\mathbf{f}$ . Наша следующая задача состоит в том, чтобы найти, как можно записать  $\mathbf{f}$  в виде  $\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{w} = \mathbf{E}\Lambda\mathbf{w}$ , где матрица слоя  $\mathbf{F}$  представлена как произведение члена  $\mathbf{E}$ , описывающего амплитуды компонент смещения и напряжения в каждом слое, и члена  $\Lambda$  (диагональной матрицы), определяющего вертикальные волновые функции для нисходящих и восходящих волн  $P$  и  $SV$ . Наиболее простой путь — это описывать  $\mathbf{F}$  и образующие ее множители  $\mathbf{E}$  и  $\Lambda$  через потенциалы (9.25а), выраженные в сферических координатах, поскольку каждый столбец матрицы  $\mathbf{F}$  является производной от определенной вертикальной волновой функции (см. задачу 5.8). Другой путь состоит в том, чтобы найти преобразования, обратные предложенным Чепменом [75, 76]. Окончательный результат совершенно явно подобен результату теории плоских волн (5.65). Для задач с волнами  $P - SV$  он имеет вид

$$\mathbf{f}(r) = \begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix} = \mathbf{E}\Lambda\mathbf{w}, \quad \text{где} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \pi^{(2)}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^{(1)}(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^{(1)}(r) \end{pmatrix} \quad (9.58)$$

$$\text{и} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\frac{i\alpha p}{r} & -i\beta\dot{\eta} & -\frac{i\alpha p}{r} & -i\beta\dot{\eta} \\ -\alpha\dot{\xi} & \frac{\beta p}{r} & \alpha\dot{\xi} & -\frac{\beta p}{r} \\ -2\omega\rho\alpha\beta^2\frac{p}{r}\dot{\xi} & -\omega\rho\beta\left(1-2\beta^2\frac{p^2}{r^2}\right) & 2\omega\rho\alpha\beta^2\frac{p}{r}\dot{\xi} & \omega\rho\beta\left(1-2\beta^2\frac{p^2}{r^2}\right) \\ i\omega\rho\alpha\left(1-2\beta^2\frac{p^2}{r^2}\right) & -2i\omega\rho\beta^3\frac{p}{r}\dot{\eta} & i\omega\rho\alpha\left(1-2\beta^2\frac{p^2}{r^2}\right) & -2i\omega\rho\beta^3\frac{p}{r}\dot{\eta} \end{pmatrix}. \quad (9.59)$$

Волновые функции  $\pi^{(j)}$  относятся к  $P$ -волнам и связаны с введенными ранее функциями  $g^{(j)}$  посредством выражения

$$\pi^{(1)}(r, p, \omega) \equiv \left(\frac{\rho_s}{\rho}\right)^{1/2} \frac{\alpha_s}{\alpha} g^{(1)} \sim e^{\mp i\pi/4} \left(\frac{\rho_s \alpha_s}{\rho \alpha \cos i}\right)^{1/2} \left(\frac{\alpha_s}{\omega r}\right) \exp\left[\pm i\omega \int_{r_p}^r \xi(r') dr'\right]. \quad (9.60)$$

Волновые функции  $\sigma^{(j)}$  для  $SV$ -волн определяются подобным образом по профилю скорости поперечных волн  $\beta(r)$ :

$$\sigma^{(2)}(r, p, \omega) \sim e^{\mp i\pi/4} \left(\frac{\rho_s \beta_s}{\rho \beta \cos j}\right)^{1/2} \left(\frac{\beta_s}{\omega r}\right) \exp\left[\pm i\omega \int_{r_p}^r \eta(r') dr'\right] \quad (9.61)$$

(здесь  $r_p$  — точка поворота  $S$ -волн, где  $\eta = (1/\beta^2 - p^2/r^2)^{1/2} = \beta^{-1} \cos j$  равно нулю). Помеченные значками  $\setminus$  вертикальные медленности в формуле (9.59) определяются выражениями

$$\xi \setminus \equiv \frac{1}{-i\omega \pi^{(2)}} \frac{d\pi^{(2)}}{dr}, \quad \xi \equiv \frac{1}{i\omega \pi^{(1)}} \frac{d\pi^{(1)}}{dr}, \quad \eta \setminus \equiv \frac{1}{-i\omega \sigma^{(2)}} \frac{d\sigma^{(2)}}{dr}, \quad \eta \equiv \frac{1}{i\omega \sigma^{(1)}} \frac{d\sigma^{(1)}}{dr}, \quad (9.62)$$

В первом приближении из теории ВКБ следует, что выше точек поворота  $\xi \setminus \sim \xi \sim \alpha^{-1} \cos i$  и  $\eta \setminus \sim \eta \sim \beta^{-1} \cos j$ . Однако ниже точек поворота  $\xi \setminus \sim -\xi \setminus \sim -i(p^2/r^2 - 1/\alpha^2)^{1/2}$  и  $\eta \setminus \sim -\eta \setminus \sim -i(p^2/r^2 - 1/\beta^2)^{1/2}$ . Использование обозначений  $\xi \setminus$  и  $\xi$  имеет целью указать связь  $\xi \setminus$  (следует читать как «кси-вниз») с нисходящей волной и  $\xi$  (следует читать как «кси-вверх») с восходящей волной.

Столбцы в матрицах  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{A}$  записаны в следующей последовательности: нисходящая  $P$ , нисходящая  $SV$ , восходящая  $P$ , восходящая  $SV$ -волна, а коэффициент, указывающий вклад волны каждого типа, равен  $\mathbf{W}$ . Эти три матрицы находят для каждого неоднородного слоя в Земле, однако их практическое использование существенно отличается от задач для однородных слоев, хотя бы просто потому, что теперь требуется рассмотреть очень мало «слоев». Например, часто достаточно использовать только один слой для нижней мантии от глубин порядка 650 км до самой границы ядро — мантия.

Поскольку метод потенциалов, описанный формулами (9.25a) — (9.25b), лишь приближенный, следует помнить, что формулы, которые мы приводим для  $\mathbf{A}$  и ее волновых функций, также являются только приближениями. Однако мы сможем улучшить аппроксимации ВКБ. Формула (9.59) для  $\mathbf{E}$  тоже приближенная даже для однородного сферического слоя. Несмотря на это для большинства интервалов глубин ошибки имеют порядок только  $\alpha/\omega r$  и  $\beta/\omega r$ , в худшем случае  $(\alpha/\omega r)^{2/3}$  и  $(\beta/\omega r)^{2/3}$ , что все еще составляет незначительную величину для присущих объемным волнам частот.

В развитии нами представлении вектора движения-напряжения не содержится ничего, что не было бы уже заключено в методе потенциалов. Однако напомним, что наша цель состояла в том, чтобы дать систематический метод расчета при наличии граничных условий. Используем нумерацию слоев, показанную на рис. 9.22. Для каждой границы можно построить матрицу рассеяния типа той,

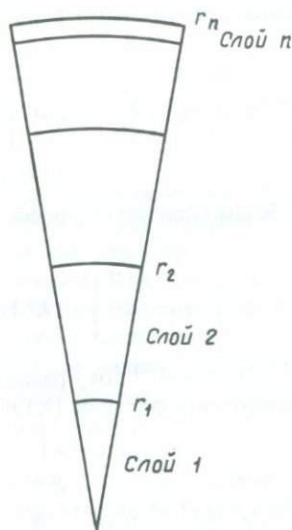


Рис. 9.22. Обозначение слоев и границ в сферической Земле. Поскольку каждый слой может быть неоднородным, для исследования длиннопериодных объемных волн по всему разрезу Земли нужно небольшое число слоев (около 10).

которая задается формулой (5.37). Для удобства пользования в дополнении 9.6 приведены специальные формулы для всех 16 коэффициентов отражения/преломления волн  $P - SV$  на границе, имеющейся на уровне  $r_1$ .

#### ДОПОЛНЕНИЕ 9.6

##### *Обобщенное рассеяние от пачки неоднородных слоев: частный пример одной сферической границы между двумя радиально-неоднородными слоями*

Предположим, что нам требуется определить рассеяние на всех границах пачки неоднородных слоев между  $M$ -м и  $(N + 1)$ -м слоями. Сами границы лежат на глубинах  $r_M, r_{M+1}, r_{M+2}, \dots, r_{N-1}, r_N$ , и слой  $N + 1$  расположен выше границы  $r_N$ .

В  $M$ -м слое система восходящих и нисходящих волн  $P - SV$  описывается вектором констант

$$\mathbf{w}_M = (\dot{P}_M, \dot{S}_M, \dot{P}_M, \dot{S}_M)^T,$$

и, исходя из уравнения  $\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{w}$ , каждый слой характеризуется своим вектором

$$\mathbf{w}_M = \mathbf{F}_M^{-1}(r_M)\mathbf{f}(r_M).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_M &= \mathbf{F}_M^{-1}(r_M)\mathbf{F}_{M+1}(r_M)\mathbf{w}_{M+1} \\ &= \{\mathbf{F}_M^{-1}(r_M)\mathbf{F}_{M+1}(r_M)\} \cdots \cdots \{\mathbf{F}_N^{-1}(r_N)\mathbf{F}_{N+1}(r_N)\}\mathbf{w}_{N+1} \\ &= \mathbf{H}\mathbf{w}_{N+1}, \quad \text{где } \mathbf{H} \text{ — произведение матриц.} \end{aligned} \quad (1)$$

Следовательно,

$$(\dot{P}_M, \dot{S}_M, \dot{P}_M, \dot{S}_M)^T = \mathbf{H}(\dot{P}_{N+1}, \dot{S}_{N+1}, \dot{P}_{N+1}, \dot{S}_{N+1})^T, \quad (2)$$

и  $\mathbf{H}$  можно получить в явном виде, если известны все матрицы слоев  $\mathbf{F}$  и обратные им матрицы  $\mathbf{F}^{-1}$ . В радиально-неоднородном слое  $\mathbf{F}$  для многих приложений задается формулами (9.58) — (9.59) со следующей обратной матрицей:

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{ir^2\omega}{\rho_s} \begin{pmatrix} F_{33}/\alpha_s^3 & F_{43}/\alpha_s^3 & -F_{13}/\alpha_s^3 & -F_{23}/\alpha_s^3 \\ F_{34}/\beta_s^3 & F_{44}/\beta_s^3 & -F_{14}/\beta_s^3 & -F_{24}/\beta_s^3 \\ -F_{31}/\alpha_s^3 & -F_{41}/\alpha_s^3 & F_{11}/\alpha_s^3 & F_{21}/\alpha_s^3 \\ -F_{32}/\beta_s^3 & -F_{42}/\beta_s^3 & F_{12}/\beta_s^3 & F_{22}/\beta_s^3 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Индекс  $s$  относится здесь к свойствам на некотором уровне приведения [см. (9.35)]. Эта формула для  $\mathbf{F}^{-1}$ , составленная из элементов  $\mathbf{F}$ , является следствием свойств вронскиана для  $(\pi^{(1)}, \pi^{(2)})$  и  $(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})$ .

Определим матрицу рассеяния  $\mathbf{S}$  как

$$(\hat{P}_{N+1}, \hat{S}_{N+1}, \hat{P}_M, \hat{S}_M)^T = \mathbf{S}(\hat{P}_{N+1}, \hat{S}_{N+1}, \hat{P}_M, \hat{S}_M)^T, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} & \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} \\ \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} & \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} \\ \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} & \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} \\ \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} & \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

[Ср. с (5.34) — (5.37) для одной границы между двумя однородными полупространствами. Левая часть соотношения (4) описывает рассеянные волны, а матрица  $\mathbf{S}$  действует на падающие волны.] Каждый элемент  $\mathbf{S}$  является теперь обобщенным коэффициентом рассеяния, так что, например, запись  $\hat{P}\hat{S}$  означает фазу и амплитуду  $SV$ -волны, прошедшей вниз в неоднородный слой с номером  $M$  и вызванной нисходящей волной  $P$  в слое  $N+1$ . Следовательно,  $\hat{P}\hat{S}$  содержит все многократные волны, возникавшие внутри пачки слоев между границами  $M$  и  $N$ . Чтобы выразить  $\mathbf{S}$  в явном виде через элементы  $\mathbf{H}$ , переведем (2) в форму (4) и найдем

$$\mathbf{S} = - \begin{pmatrix} H_{13} & H_{14} & -1 & 0 \\ H_{23} & H_{24} & 0 & -1 \\ H_{33} & H_{34} & 0 & 0 \\ H_{43} & H_{44} & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & -1 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -H_{44} & H_{34} \\ 0 & 0 & H_{43} & -H_{33} \\ D & 0 & H_{14}H_{43} - H_{13}H_{44} & H_{13}H_{34} - H_{14}H_{33} \\ 0 & D & H_{24}H_{43} - H_{23}H_{44} & H_{23}H_{34} - H_{24}H_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & -1 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $D = H_{33}H_{44} - H_{34}H_{43}$ .

Переменная две матрицы в (6), можно найти любой нужный член  $\mathbf{S}$ . Метод, который мы здесь привели, разработан Червени [70], показавшим также, как избежать вычислительных трудностей при работе с матрицами размером  $6 \times 6$  (так называемыми *дельта-матрицами*), элементами которых являются миноры второго порядка матрицы  $\mathbf{H}$ . Метод дельта-матрицы, сводящийся к действиям с матрицами размером  $5 \times 5$ , для случая однородных слоев подробно описан Киндом [195].

Часто бывает нужно найти  $\mathbf{S}$  для частного случая одной границы между двумя неоднородными слоями. Тогда матрица  $\mathbf{H}$  получается из (1). Метод, описанный формулами (5.34) — (5.36), приводит нас к выражениям

$$a = \rho_2(1 - 2\beta_2^2 p^2/r_1^2) - \rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2/r_1^2), \quad b = \rho_2(1 - 2\beta_2^2 p^2/r_1^2) + 2\rho_1\beta_1^2 p^2/r_1^2, \\ c = \rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2/r_1^2) + 2\rho_2\beta_2^2 p^2/r_1^2, \quad d = 2(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2), \\ E = b\check{\zeta}_1 + c\check{\zeta}_2, \quad F = b\check{\eta}_1 + c\check{\eta}_2, \quad G = a - d\check{\zeta}_1\check{\eta}_2, \\ H = a - d\check{\zeta}_2\check{\eta}_1, \quad D = EF + GHp^2/r_1^2,$$

где индекс 1 относится к нижнему слою, а индекс 2 — к верхнему. Граница находится на  $r_1$ , а коэффициенты волн  $P - SV$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{P}\dot{P} &= -\{(b\dot{\xi}_1 - c\dot{\xi}_2)F + (a + d\dot{\xi}_2\dot{\eta}_1)Gp^2/r_1^2\}/D\}(\pi_2^{(2)}/\pi_2^{(1)}), \\ \dot{P}\dot{S} &= \{(\dot{\xi}_2 + \dot{\xi}_1)(ac + bd\dot{\xi}_1\dot{\eta}_1)p\alpha_2/(r_1\beta_2D)\}(\pi_2^{(2)}/\sigma_2^{(1)}), \\ \dot{P}\dot{P} &= \{\rho_2(\dot{\xi}_2 + \dot{\xi}_1)F\alpha_2/(\alpha_1D)\}(\pi_2^{(2)}/\pi_1^{(2)}), \\ \dot{P}\dot{S} &= -\{\rho_2(\dot{\xi}_2 + \dot{\xi}_1)Gp\alpha_2/(r_1\beta_1D)\}(\pi_2^{(2)}/\sigma_1^{(2)}), \\ \dot{S}\dot{P} &= \{(\dot{\eta}_2 + \dot{\eta}_1)(ac + bd\dot{\xi}_1\dot{\eta}_1)p\beta_2/(r_1\alpha_2D)\}(\sigma_2^{(2)}/\pi_2^{(1)}), \\ \dot{S}\dot{S} &= \{[b\dot{\eta}_1 - c\dot{\eta}_2]E + (a + d\dot{\xi}_1\dot{\eta}_2)Hp^2/r_1^2\}/D\}(\sigma_2^{(2)}/\sigma_2^{(1)}), \\ \dot{S}\dot{P} &= \{\rho_2(\dot{\eta}_2 + \dot{\eta}_1)Hp\beta_2/(r_1\alpha_1D)\}(\sigma_2^{(2)}/\pi_1^{(2)}), \\ \dot{S}\dot{S} &= \{\rho_2(\dot{\eta}_2 + \dot{\eta}_1)E\beta_2/(\beta_1D)\}(\sigma_2^{(2)}/\sigma_1^{(2)}), \\ \dot{P}\dot{P} &= \{\rho_1(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_1)F\alpha_1/(\alpha_2D)\}(\pi_1^{(1)}/\pi_2^{(1)}), \\ \dot{P}\dot{S} &= \{\rho_1(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_1)Hp\alpha_1/(r_1\beta_2D)\}(\pi_1^{(1)}/\sigma_2^{(1)}), \\ \dot{P}\dot{P} &= \{[b\dot{\xi}_1 - c\dot{\xi}_2]F - (a + d\dot{\xi}_1\dot{\eta}_2)Hp^2/r_1^2\}/D\}(\pi_1^{(1)}/\pi_2^{(2)}), \\ \dot{P}\dot{S} &= -\{(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_1)(ab + cd\dot{\xi}_2\dot{\eta}_2)p\alpha_1/(r_1\beta_1D)\}(\pi_1^{(1)}/\sigma_1^{(2)}), \\ \dot{S}\dot{P} &= -\{\rho_1(\dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_1)Gp\beta_1/(r_1\alpha_2D)\}(\sigma_1^{(1)}/\pi_2^{(1)}), \\ \dot{S}\dot{S} &= \{\rho_1(\dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_1)E\beta_1/(\beta_2D)\}(\sigma_1^{(1)}/\sigma_2^{(1)}), \\ \dot{S}\dot{P} &= -\{(\dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_1)(ab + cd\dot{\xi}_2\dot{\eta}_2)p\beta_1/(r_1\alpha_1D)\}(\sigma_1^{(1)}/\pi_1^{(2)}), \\ \dot{S}\dot{S} &= -\{[b\dot{\eta}_1 - c\dot{\eta}_2]E - (a + d\dot{\xi}_2\dot{\eta}_1)Gp^2/r_1^2\}/D\}(\sigma_1^{(1)}/\sigma_1^{(2)}). \end{aligned}$$

Последний множитель в каждом коэффициенте, отношение волновых функций, оценивается при  $r_1$ .

Выбранный нами способ записи приспособлен к зависимым переменным формулы (9.58). Например, если

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dot{S}\dot{P} \\ \dot{S}\dot{S} \end{pmatrix}, \quad \text{то } w_1 = \begin{pmatrix} \dot{S}\dot{P} \\ \dot{S}\dot{S} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если один из двух слоев жидкий, тогда имеют значение только 9 из 16 коэффициентов. Их легко можно найти из приведенных здесь коэффициентов путем предельного перехода. Например, если слой 1 представляет собой жидкое ядро, возьмем  $\beta_1 \rightarrow 0$ ,  $\eta_1 \rightarrow \infty$  и  $bc - adp^2/r_1^2 = \rho_1\rho_2$ . Тогда коэффициенты  $\dot{P}\dot{P}$ ,  $\dot{P}\dot{S}$ ,  $\dot{S}\dot{P}$ ,  $\dot{S}\dot{S}$ , определенные выше, используются для границы ядро — мантия при нахождении  $\dot{P}\dot{K}$ ,  $\dot{K}\dot{K}$ ,  $\dot{K}\dot{S}$  соответственно.

Аналогичные результаты для  $SH$ -волн и одной границы раздела будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{S}\dot{S} &= [(\mu_2\dot{\eta}_2 - \mu_1\dot{\eta}_1)/D]\sigma_2^{(2)}/\sigma_2^{(1)}, \\ \dot{S}\dot{S} &= [\mu_2(\dot{\eta}_2 + \dot{\eta}_2)/D]\sigma_2^{(2)}/\sigma_1^{(2)}, \\ \dot{S}\dot{S} &= [\mu_1(\dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_1)/D]\sigma_1^{(1)}/\sigma_2^{(1)}, \\ \dot{S}\dot{S} &= [(\mu_1\dot{\eta}_1 - \mu_2\dot{\eta}_2)/D]\sigma_1^{(1)}/\sigma_1^{(2)}, \end{aligned}$$

где  $D = \mu_1\dot{\eta}_1 + \mu_2\dot{\eta}_2$ , а  $\mu_1, \mu_2$  — модули сдвига ниже и выше границы.

Теперь, наконец, мы можем применить рассмотренную теорию к некоторым задачам сейсмических объемных волн. Сначала исследуем волну  $PcP$  ( $P$ -волну, отразившуюся от границы ядро — мантия) и связанные с ней явления дифракции и интерференции. Начав со случая взрывного источника  $M_{ij} = M_0(t)\delta_{ij}$ , расположенного в точке  $r_s$ , исходя из формул (9.40) — (9.46) запишем, что

$$u_r^{\text{пад}}(r, \Delta_0, \omega) = \frac{-i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\alpha_s^4} \int_{\Gamma} \omega^2 p\pi^{(1)}(r_s)[\alpha(r)\xi(r)\pi^{(1)}(r)]Q_{\omega p-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta_0) dp. \quad (9.63)$$

Это как раз та прямая волна, распространяющаяся вниз от  $r_s$  и приходящая в точку  $r$  с координатами  $(r, \Delta_0)$ , которая показана на рис. 9.17. Для наших целей предположим, что  $\rho$  и  $\alpha$  плавно меняются на всем протяжении от глубин источника и приемника до границы ядро — мантия. Именно этот случай используется при нахождении волновых функций  $\pi^{(1)}$ ; в дальнейшем мы будем отмечать индексом  $s$  или  $m$  данные, относящиеся к ядру или мантии соответственно. В формуле (9.63) мы записали  $u_r^{\text{пад}}$ , потому что падающая волна как раз такого типа взаимодействует с границей ядро — мантия. Заметим, что зависимость от  $r$  в формуле (9.63) целиком заключена в подынтегральном множителе  $[\alpha(r)\xi(r)\pi^{(1)}(r)]$ . Именно этот член появляется в качестве элемента в нужной строке и столбце матрицы  $\mathbf{F}$  (радиальная компонента смещения восходящей  $P$ -волны в точке  $r$ ). Это иллюстрирует удобство введенной системы новых обозначений для вертикальных волновых функций. Подтверждается также тот факт, что система коэффициентов отражения/преломления, подробно рассмотренная в дополнении 9.6 для столбцов  $\mathbf{F}$ , непосредственно применима к подынтегральному выражению формулы (9.63).

Полное обобщенное отражение на границе ядро — мантия получается путем введения в формулу (9.63) множителя  $\dot{P}\dot{P}$ :

$$u_r^{P+PcP}(r, \Delta_0, \omega) = \frac{-i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\alpha_s^4} \times \int_{\Gamma} \omega^2 p\pi^{(1)}(r_s)\dot{P}\dot{P}[\alpha(r)\xi(r)\pi^{(1)}(r)]Q_{\omega p-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta_0) dp, \quad (9.64)$$

где путь интегрирования  $\Gamma$  и соответствующие свойства плоскости комплексного лучевого параметра показаны на рис. 9.23. Развернутый вид  $\dot{P}\dot{P}$  дан в дополнении 9.6, где под слоями 1, 2 подразумеваются ядро и мантия соответственно. Хотя строгий вывод (9.64) затруднителен (Нуссенцвейг [241] описывает соответствующую каноническую задачу), результат представляет интерес, когда выяснены простые свойства подынтегрального выражения. Так, на расстояниях  $\Delta_0$ , при которых к приемнику подходят волны  $P$  и  $PcP$  (рис. 9.23, а), подынтегральное выражение имеет две седловые точки. Прямая волна  $P$  характеризуется лучевым параметром  $p$ , большим чем  $p_d$ , где  $p_d = r_{\text{CMB}}/\alpha_m(r_{\text{CMB}})$  соответствует лучу, который только касается границы ядро — мантия. Индекс  $m$  относится к характеристикам мантии. Если  $p > p_d$ , то  $\xi_m \sim \xi_m^e$ , и легко показать, что  $\dot{P}\dot{P} \sim 1$ . Тогда седло прямой волны  $P$  в формуле (9.64) совпадает с тем, которое мы исследовали ранее в формуле (9.41). Если  $p < p_d$ , фаза подынтегрального выражения (9.64) находится из множителей

$$\pi_m^{(1)}(r_s)[\pi_m^{(2)}(r_{\text{CMB}})/\pi_m^{(1)}(r_{\text{CMB}})]\pi_m^{(1)}(r)Q_{\omega p-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta_0).$$

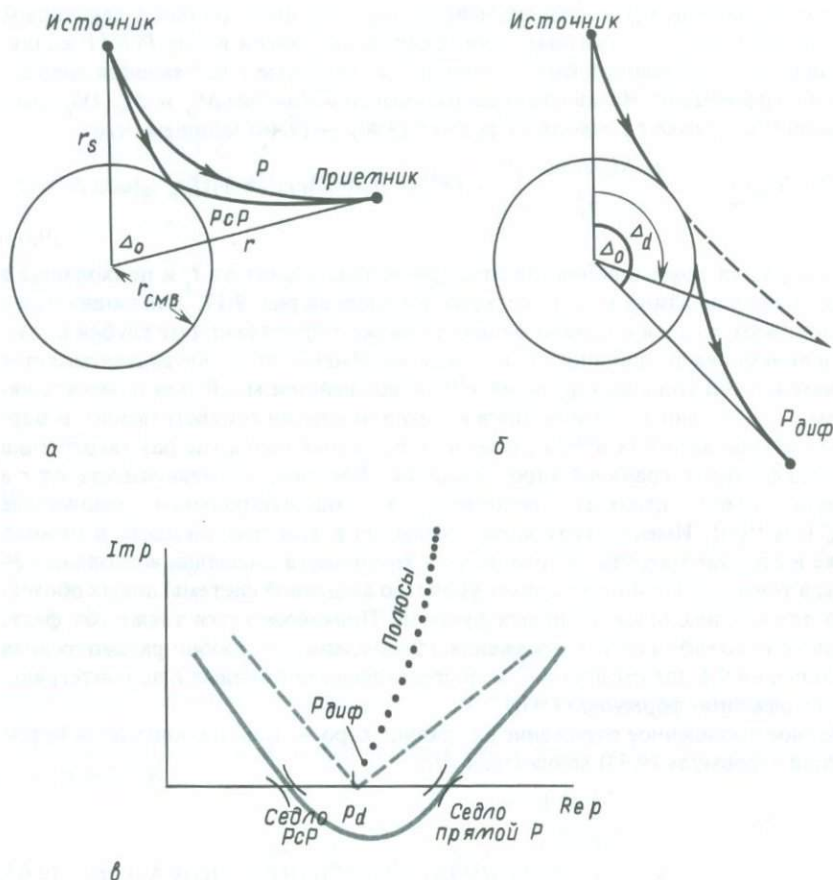


Рис. 9.23. *а* — лучи прямой волны  $P$  и волны  $RсP$ . *б* — на расстояниях, больших  $\Delta_d$ , наблюдается зона тени, в которой  $P$ -волны являются дифрагированными. *в* — соответствующая плоскость комплексного  $p$ . Для расстояний  $\Delta_0 < \Delta_d$  наблюдаются два седла. Полюсы дифракции, идущие вверх от  $p_d$ , присутствуют всегда, но в современной сейсмологии обычно предпочитают делать расчет по формуле (9.64) путем интегрирования по контуру (штриховая линия), а не применять аппроксимации седловых точек или оценивать отдельные вычеты. Определение положений полюсов см. в дополнении 9.8. Заметим, что один и тот же путь можно использовать для целого интервала расстояний  $\Delta_0$  по обе стороны от  $\Delta_d$ . Ср. с путем интегрирования на рис. 6.22, *д*.

Оказывается, что для этой фазы теория ВКБ дает выражение  $\exp [i\omega(T - p\Delta + p\Delta_0)]$ , где  $T(p)$  и  $\Delta(p)$  соответствуют лучу  $RсP$ . Ранее мы уже выяснили, каким образом такие фазовые множители дают седловые точки. Действительно, в этом случае  $d\Delta/dp$  положительно, что приводит к ориентации седла, показанной на рис. 9.23, *в*. Кроме того, если применить теорию ВКБ в диапазоне  $p < p_d$ , то оказывается, что амплитуда  $\dot{R}\dot{P}$  равна коэффициенту отражения плоской волны

(все еще в функции  $p$ ). Если мы продолжим пользоваться аппроксимацией седловых точек для интеграла по этому седлу волны  $PcP$  (см. дополнение 6.3), то придем к результату классической лучевой теории для этой фазы (т.е. рассеяние на границе ядро — мантия описывается геометрическим расхождением совместно с коэффициентом отражения плоской волны).

Проведенное нами предварительное рассмотрение волны  $PcP$  представляет собой частный пример общего правила: если между источником и приемником существует реальный луч, то комбинация двух аппроксимаций (теории ВКБ и седловых точек), примененная к интегральному выражению для обобщенного луча [ср. (9.64)], приведет просто к лучевой теории. Мы уже получили результат такого свойства при выводе формулы (6.19) для однородной среды. В работе [294] приведено много примеров для неоднородных сред. Конечно, мы заинтересованы в том, чтобы некоторым образом улучшить классическую лучевую теорию. Приведем несколько примеров такого улучшения, которое дает результаты и в тех случаях, когда не используются ни приближения ВКБ, ни аппроксимация седловых точек.

Возвращаясь к рис. 9.23, заметим, что при увеличении  $\Delta_0$  лучи прямой волны  $P$  и волны  $PcP$  сближаются, пока не совпадут при определенном расстоянии  $\Delta_d$ . Пользуясь понятиями оптики, естественно назвать  $\Delta_d$  *границей тени*, поскольку оно отмечает край области  $\Delta_d < \Delta_0$ , в пределах которой не может наблюдаться ни прямая  $P$ , ни  $PcP$ -волна. Как показано на рис. 9.23, б, лучи, выходящие в зоне тени, должны огибать подошву мантии. Вступления таких волн часто наблюдаются в сейсмологии и известны как *дифрагированные  $P$ -волны* (записываются  $P_{\text{диф}}$ ). По своей геометрии это явление подобно дифракции радиоволн на криволинейной поверхности Земли. Именно для задач, связанных с такими волнами, Ватсон первоначально ввел преобразование, носящее теперь его имя. При  $\Delta_0 = \Delta_d$  два седла сливаются в точке  $p = p_d$ . В пределах зоны тени контурный интеграл (9.64) можно оценить как быстро сходящийся ряд вычетов от цепочки полюсов (нулей знаменателя  $\tilde{P}\tilde{P}$ , описанных в дополнении 9.8), которая протягивается в первый квадрант от первого полюса, расположенного прямо на  $p_d$ . Если приемник находится глубоко в зоне тени, так что  $\Delta_0$  существенно больше, чем  $\Delta_d$ , тогда имеет значение только первый вычет. Он расположен в точке  $p_{\text{диф}}$ , близкой к  $p_d$ , в которой  $p_{\text{диф}} = p_d + \lambda e^{i\pi/3} \omega^{-2/3}$ , где  $\lambda$  — положительная константа, имеющая величину порядка  $p_d^{1/3}$ . Из этого следует, что глубоко в зоне тени амплитуда дифрагированной волны  $P_{\text{диф}}$  пропорциональна

$$\exp[-\omega^{1/3} \lambda \sin(\pi/3)(\Delta_0 - \Delta_d)].$$

Таким образом, амплитуды  $P_{\text{диф}}$  сильнее затухают на высоких частотах и по мере углубления в зону тени.

Все указанные свойства формулы (9.64) были описаны в работе [292]. В [258] показано, что численная оценка контурного интеграла (9.64) имеет много преимуществ. Подходящим путем интегрирования могут быть два прямолинейных отрезка ломаной, показанных на рис. 9.23, в штрихами; результат интегрирования для двух различных частот приведен на рис. 9.24.

Далее в этом разделе мы опишем результаты численного интегрирования вдоль путей, состоящих из прямолинейных отрезков в плоскости комплексного

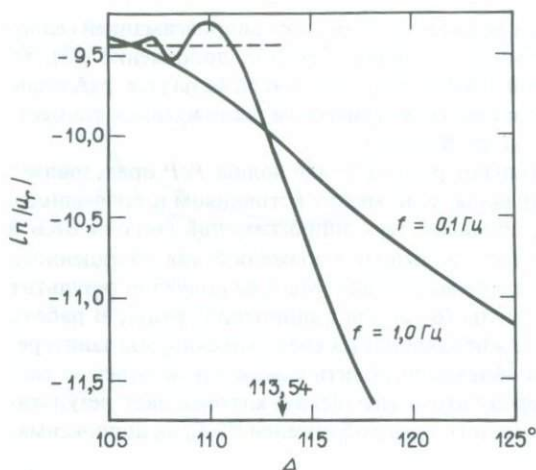


Рис. 9.24. Вертикальная компонента амплитуды смещения  $P$ -волны, возбужденной взрывным источником, момент  $M_0(t)$  которого является ступенчатой функцией. Расчет проведен по формуле (9.64) для двух различных частот (сплошные кривые), путь интегрирования (отрезки прямых) приведен на предыдущем рисунке. Граница тени  $\Delta_d$  для такой грубо приближенной модели Земли наблюдается на расстоянии 113,54°. На расстояниях  $\Delta_0 < \Delta_d$  происходит интерференция волн  $P$  и  $PcP$ . Штриховая прямая отмечает амплитуду, рассчитанную только для прямой волны  $P$  согласно лучевой теории. Резкой границы тени не наблюдается, однако амплитуды при частоте 1 Гц очень быстро затухают с расстоянием в окрестности  $\Delta_d$ . Более длиннопериодные волны должны наблюдаться далеко в пределах зоны тени.

лучевого параметра. Но для этого в теорию необходимо ввести еще один новый элемент. Мы видим, что часто приходится рассчитывать волновые функции типа  $\pi_m^{(1)}(r_{CMB}, p, \omega)$ , когда  $p$  меняется вблизи значений, для которых радиальный аргумент есть точка поворота. Такой случай изображен, например, на рис. 9.23, вблизи точки  $p_d$ , и заметим, что почти вся энергия волны  $P_{\text{диф}}$  распространяется вдоль луча с этим лучевым параметром. Проблема заключается в том, что аппроксимации ВКБ перестают быть справедливыми именно в области точки поворота, как показано в дополнении 9.3. (Расчет кривых, приведенных на рис. 9.24, не представлял затруднений, поскольку «мантия» и «ядро» считались однородными и поэтому вертикальные волновые функции  $\pi^{(j)}$  и  $\sigma^{(j)}$  точно задавались сферическими функциями Ханкеля.) К счастью, для многих случаев радиальной неоднородности имеется весьма удовлетворительное равномерное асимптотическое приближение для  $\pi^{(j)}$  и  $\sigma^{(j)}$ . Краткий обзор дан в дополнении 9.7, и мы представим здесь результаты в виде приближения Лангера

$$\pi^{(2)}(r, p, \omega) \sim \left( \frac{\pi \rho_s \alpha_s}{2 \rho \alpha} \right)^{1/2} \frac{\alpha_s e^{\pm i\pi/6}}{\omega r} \left( \frac{\omega \tau}{\alpha \xi} \right)^{1/2} H_{1/3}^{(2)}(\omega \tau), \quad (9.65)$$

где  $\tau = T - p\Delta = \int_{r_p}^r \xi(r') dr'$  и  $\xi = \xi(r) = (1/\alpha^2(r) - p^2/r^2)^{1/2}$ . Соответствующие вертикальные медленности запишутся как

$$\xi \sim \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{p^2}{r^2} \right)^{1/2} e^{-i\pi/6} \frac{H_{2/3}^{(2)}(\omega\tau)}{H_{1/3}^{(2)}(\omega\tau)} \quad \text{и} \quad \xi \sim \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{p^2}{r^2} \right)^{1/2} e^{i\pi/6} \frac{H_{2/3}^{(1)}(\omega\tau)}{H_{1/3}^{(1)}(\omega\tau)}. \quad (9.66)$$

Можно получить аналогичные выражения для  $\sigma^{(j)}$ ,  $\eta$  и  $\dot{\eta}$  по распределению скорости  $\beta(r)$  и точке поворота луча поперечных волн.

#### ДОПОЛНЕНИЕ 9.7

##### Равномерное асимптотическое приближение для вертикальных волновых функций

Вначале, когда мы рассматривали вертикальные волновые функции ( $g^{(1)}$ ,  $g^{(2)}$ ,  $f$ ,  $\pi^{(1)}$ ,  $\pi^{(2)}$ ,  $\sigma^{(1)}$ ,  $\sigma^{(2)}$ ), основное внимание уделялось уравнениям движения, которым удовлетворяют эти функции, поэтому мы рассматривали их в основном как функции от  $r$ . Но при расчете волн, возбужденных точечным источником, мы обычно имеем дело с вертикальными волновыми функциями при фиксированном  $r$  (положение источника, или приемника, или уровня, на котором заданы некоторые граничные условия) и переменных  $p$  и  $\omega$ .

После того как определена подходящая нормировка, аппроксимация ВКБ (9.35) — (9.36), (9.60) часто дает хорошие результаты, позволяя рассчитать волновые функции при переменных  $p$  и  $\omega$  в случае больших  $\omega$ . Однако это неравномерная аппроксимация, так как она может быть слегка или сильно ошибочной при значениях  $p$ , близких к тому особому значению  $p_r$ , для которого радиальный аргумент  $r$  является точкой поворота. Чтобы найти равномерное приближение, обратимся снова к уравнению движения.

Ниже мы рассмотрим функции  $g^{(1)}$  и  $g^{(2)}$ , введенные как решения уравнения для уходящих и приходящих волн

$$\frac{d^2}{dr^2} [ra(r, l)] + \omega^2 \left[ \frac{1}{\alpha^2(r)} - \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} \right] ra(r, l) = 0. \quad (1)$$

Первые попытки решить уравнение (1) при изменении  $r$  вблизи  $r_p$  опирались на разложение в ряд Тейлора коэффициента члена  $ra(r, l)$ , т.е. разложения этого члена в ряд по степеням  $r - r_p$ . В окрестности самой точки поворота это приводит к решениям в виде функций Эйри с аргументом, пропорциональным  $(r - r_p)$  [см., например, вывод уравнения (5) в дополнении 9.3]. Однако это приближение опять неравномерное, поскольку оно справедливо только в окрестности точки поворота.

Мы воспользуемся равномерным асимптотическим решением, основанным на работах Лангера [205] и Олвера [247, 248]. Для эффективного применения этого метода нужно ввести новую переменную по глубине, связанную с  $r$  и  $\alpha(r)$ , для которой уравнение (1) близко к уравнению Эйри на всех глубинах, включая уровень точки поворота. Приведем здесь только результаты, а более детальное рассмотрение читатель найдет в работе Ричардса [271].

Итак, исходя из уравнения  $\tau = \tau(r, p) = \int_{r_p}^r \xi dr$ , как это делается для аппроксимации ВКБ, введем новую переменную по глубине  $\zeta = (\frac{1}{2}\omega\tau)^{2/3}$ . Допустим, что скорость — аналитическая функция радиуса; следовательно,  $r_p$  — аналитическая функция  $p$ . Это означает, что  $\xi$ ,  $\tau$  и  $\zeta$  являются аналитическими функциями  $p$ , и то же самое относится к функциям  $g^{(1)}$  и  $g^{(2)}$ . Если зависимость скорости от радиуса не аналитическая (например, она

может быть образована множеством слоев Мохоровичича, в каждом из которых скорость задается как  $a^p$ , где  $a$  и  $b$  постоянны в каждом слое), тогда и  $r_p$ , а также  $g^{(1)}$  и  $g^{(2)}$  не будут аналитическими функциями  $p$ . Но даже в этом случае  $g^{(1)}$  и  $g^{(2)}$  могут меняться достаточно плавно с изменением  $p$ , и для наших целей их можно считать аналитическими функциями в комплексной плоскости.

Уравнение (1) можно записать относительно  $\zeta$  в виде

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \left[ r \left( \frac{d\zeta}{dr} \right)^{1/2} a(r, l) \right] + \zeta \left[ r \left( \frac{d\zeta}{dr} \right)^{1/2} a(r, l) \right] = \text{члены на два порядка ниже по частоте} \quad (2)$$

Для больших  $\omega$  правая часть уравнения равномерно пренебрежима (т.е. ею можно пренебречь для всех глубин). Отсюда следует, что  $r(d\zeta/dr)^{1/2} a(r, l)$  имеет решения, образованные линейной комбинацией функций Эйри:

$$\text{Ai}(-\zeta), \text{Ai}(-e^{2i\pi/3}\zeta), \text{Ai}(-e^{-2i\pi/3}\zeta). \quad (3)$$

Теперь мы получили искомые равномерные асимптотические решения для  $a(r, l)$ , и остается только определить частную линейную комбинацию (3) для каждого конкретного решения  $g^{(1)}$  (уходящей волны) и  $g^{(2)}$  (приходящей волны). Для этого лучше всего сравнить аппроксимации ВКБ для трех функций (3) с аппроксимациями ВКБ для  $g^{(1)}$  и  $g^{(2)}$ . Из этого сравнения заключаем, что

$$g^{(2)} \sim \frac{2}{\omega r} \left( \frac{\pi \alpha_s}{\zeta} \right)^{1/2} \zeta^{1/4} \text{Ai}(-e^{\pm 2i\pi/3}\zeta) e^{\mp i\pi/3}. \quad (4)$$

Теория ВКБ использовалась только для получения приведенной выше *нормировки*, и уравнение (4) дает нужные нам равномерные асимптотические приближения. Рассчитать их несколько труднее, чем приближения ВКБ. Требуется знать зависимость  $\tau = \tau(r, p)$ , и, кроме того, (4) содержит функции Эйри, в то время как аппроксимации ВКБ используют экспоненциальные функции.

Аппроксимации Лангера (9.65), на которые мы ссылались в тексте, основаны на уравнениях (4), (9.60) и стандартных формулах, связывающих функции Эйри с функциями Ханкеля порядка  $1/3$ . Различные разрезы, необходимые для отдельных множителей в формулах (4) и (9.65), выбираются так, чтобы произведение множителей (сама аппроксимация Лангера) было целой функцией (однозначной и аналитической), определенной везде в плоскости  $p$  для конечных  $p$ . Нули  $g^{(1)}$  лежат в первом и третьем квадрантах этой плоскости, а нули  $g^{(2)}$  — во втором и четвертом квадрантах (см. дополнение 9.8).

В оставшейся части этого раздела мы приведем примеры объемных волн в сейсмологии, имеющих характеристики, которые легко оцениваются с помощью линейных интегралов типа (9.64) в плоскости комплексного лучевого параметра, но с применением аппроксимации Лангера для вертикальных волновых функций.

Итак, обратимся теперь к  $P$ -волнам, проходящим в жидкое ядро Земли, поскольку это прекрасный пример для изучения явлений, происходящих в случае, когда волны взаимодействуют с границей, ниже которой лежит слой с меньшей скоростью (в данном случае жидкое ядро). Выбрав в качестве примера волну  $P4KP$  (рис. 9.25, *a*), наблюдавшуюся после мощных ядерных взрывов [3, 59], мы можем с помощью приведенной теории выписать радиальное смещение на рас-

стоянии  $\Delta_0$  в виде

$$u_r^{P4KP}(r, \Delta_0, \omega) = \frac{-i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\alpha_s^4} \times \int_{\Gamma} \omega^2 p\pi^{(1)}(r_s)\dot{P}\dot{K} \cdot (\dot{K}\dot{K})^3 \cdot (\dot{K}\dot{P})[\alpha(r)\dot{\xi}(r)\pi^{(1)}(r)]Q_{\omega p-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta_0) dp. \quad (9.67)$$

Здесь для  $P$ -волны в жидком ядре используется обозначение  $K$ , так что  $\dot{P}\dot{K}$  означает коэффициент преломления из мантии в ядро (легко получаемый из общего выражения  $\dot{P}\dot{P}$ , приведенного в дополнении 9.6),  $\dot{K}\dot{K}$  — коэффициент внутреннего отражения, а  $\dot{K}\dot{P}$  — коэффициент преломления из ядра в мантию. Годограф волны  $P4KP$ , построенный согласно лучевой теории, показан на рис. 9.26, б, и любопытно, что наблюдения этой фазы связаны только с поздней ветвью годографа (эта фаза обычно хорошо выделяется на записях короткопериодных приборов WWSSN, так что она достаточно высокочастотна для применимости классической лучевой теории). Еще более удивительно, что данные наблюдений относятся главным образом к расстояниям за «концом» этой поздней ветви, т.е. за граничной точкой  $A$ , которая отмечает предельно достижимое расстояние для лучей.

Объяснение этих явлений легче всего получить, исследуя произведение  $\dot{P}\dot{K} \cdot (\dot{K}\dot{K})^3 \cdot \dot{K}\dot{P}$  при значениях  $p$  в окрестности седловых точек, связанных с вступлениями двух лучей (т.е. ветвями годографа), показанными на рис. 9.25, б. Это произведение коэффициентов нанесено на рис. 9.25, в для частот  $\frac{1}{2}$  и 2 Гц и для предельного случая, когда частота стремится к бесконечности. При  $p$ , равном 254,5 с, получено критическое значение лучевого параметра, за которым в предельном случае амплитуда равна нулю. Критическое значение — это параметр  $p_d$  для луча в мантии, который касается ядра. Однако в случае конечных частот энергия может проходить вдоль такого обобщенного луча даже при  $p > p_d$ . Это явление известно как *туннельный эффект* (по аналогии с явлением в квантовой механике, для которого существует подобная теория) и объясняется рис. 9.25, г.

Численно  $\dot{P}\dot{K}$  уменьшается с ростом  $p$  за пределами  $p_d$  благодаря множителю  $(\dot{\xi}_m + \dot{\xi}_m)\pi_m^{(2)}(r_{CMB})$ . Используя формулу (9.62) и вронскиан для  $\pi^{(1)}$ ,  $\pi^{(2)}$ , получим, что этот множитель имеет порядок  $[\pi_m^{(1)}(r_{CMB})]^{-1}$ . Обе функции  $\pi^{(1)}$  и  $\pi^{(2)}$  экспоненциально *растут* ниже точки поворота, так что исследуемый нами множитель должен экспоненциально *затухать*. Численно  $\dot{K}\dot{P}$  также ведет себя подобно  $[\pi_m^{(1)}(r_{CMB})]^{-1}$ . Однако  $\dot{K}\dot{K}$  имеет порядок единицы. Для рассматриваемого случая границы ядро — мантия получается, что  $\dot{K}\dot{K}$  равняется нулю очень близко к  $p = 240$  с (т.е. слева от  $p_d$ ) и быстро растет от нуля при увеличении  $p$  вблизи  $p_d$ . Нам нужно оценить этот коэффициент в кубической степени, и получается, что быстрый рост  $(\dot{K}\dot{K})^3$  перевешивает уменьшение  $\dot{P}\dot{K} \cdot \dot{K}\dot{P}$  для небольшой части диапазона  $p_d < p$ ; в результате две кривые на рис. 9.25, в — штриховая и серая — действительно имеют максимумы в области туннеля.

Путь  $\Gamma$  для расчета формулы (9.67) можно выбрать так, как это показано на рис. 9.25, д. Проще в качестве пути интегрирования взять отрезок действительной оси от  $p \sim 240$  с до  $p \sim 265$  с (поскольку нуль для  $\dot{K}\dot{K}$  дает естественный

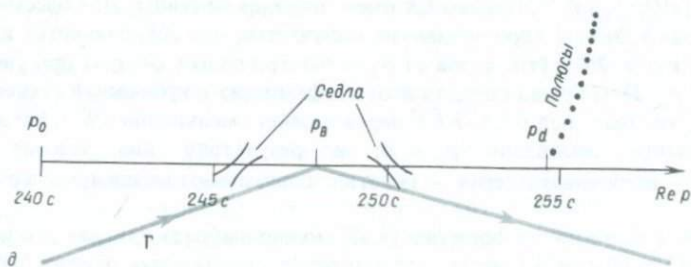
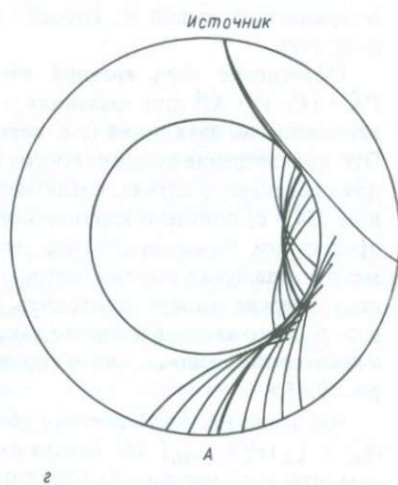
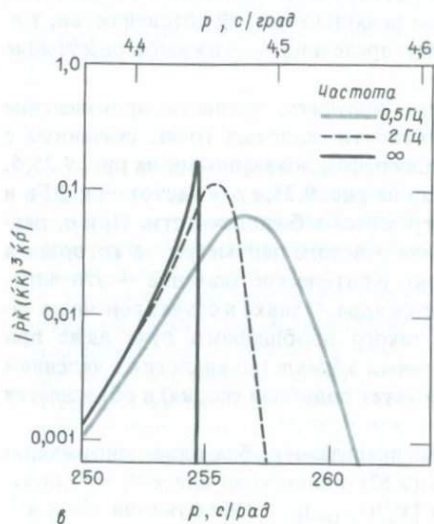
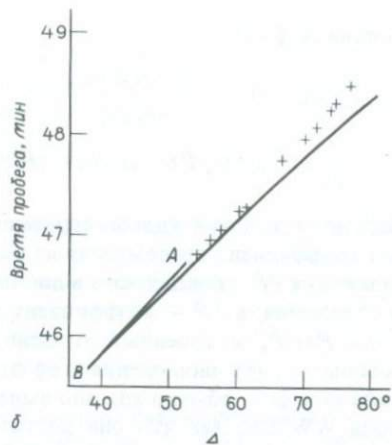
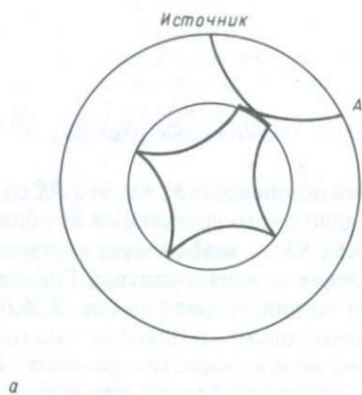
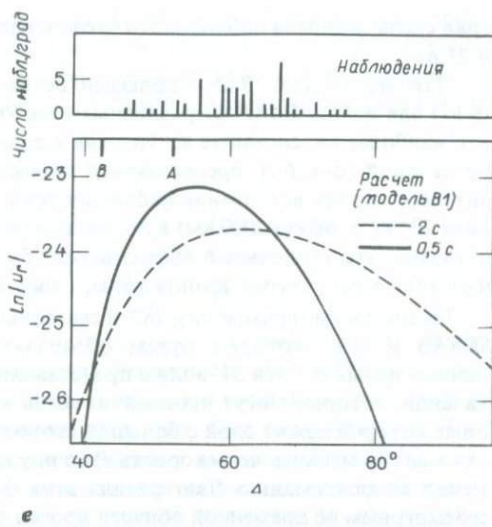


Рис. 9.25. Волны, которые распространяются в мантии как  $P$ -волны и которые претерпели отражение под границей ядро — мантия, обозначаются  $PmKP$ , где  $m$  — целое число, обозначающее число звеньев луча внутри жидкого ядра.  $a$  — лучевая траектория волны  $P4KP$ . Лучевой параметр изображенного луча является как раз параметром  $p_d$  луча, касающегося границы ядра. Для этого конкретного лучевого параметра точка выхода волны  $P4KP$  на поверхность Земли обозначена буквой  $A$ . На основе классической лучевой теории можно ожидать, что волна  $P4KP$  будет наблюдаться только при лучевых параметрах  $\leq p_d$ . Однако на деле это не так.  $b$  —

сплошной прямой показан годограф волны  $P4KP$  для модели Земли Джеффриса — Буллена. Лучевой параметр от максимума в  $A$ , где начинается годограф, уменьшается до минимума (в функции  $\Delta = \Delta(p)$ ) в  $B$ , где имеется каустика. Продолжающееся уменьшение лучевого параметра попадает тогда на ветвь, для которой  $d\Delta/dp < 0$ . Крестиками показаны времена пробега, наблюдавшиеся для ядерных взрывов, зарегистрированных станциями в Северной Америке.  $e$  — произведение коэффициентов отражения и преломления, соответствующих волне  $P4KP$ , как функция лучевого параметра для двух конечных частот. Показан также предельный случай, когда частота стремится к бесконечности [для  $p_d < p$  получается ноль, а для  $p < p_d$  — просто произведение коэффициентов плоских волн (5.39)]. (По Ричардсу [268].)  $z$  — жирной линией показан луч, касающийся границы ядра, который выходит в  $A$ . Ниже точки поворота наблюдается экспоненциальное затухание энергии. Следовательно, для луча с лучевым параметром, чуть большим  $p_d$ , на границе ядро — мантия происходит просачивание энергии сверху вниз. Ниже этой границы энергия снова может распространяться вдоль действительных лучей. Следовательно, высокоскоростная зона (в мантии) непосредственно ниже точки поворота представляет собой как бы барьер, через который для конечных частот часть энергии может проходить в зону пониженной скорости (в данном случае в ядро). Для ясности мы привели здесь только волну  $P4KP$ , но подобный «туннельный» эффект возникает для всех волн  $PmKP$ . Возможно также просачивание энергии обратно в мантию. Просачивание приводит к распространению энергии в некотором диапазоне расстояний, и этот диапазон протягивается далеко к точке  $A$ .  $\delta$  — свойства подынтегрального выражения формулы (9.67) в плоскости комплексного  $p$ . Седла по обе стороны от  $p = p_B$  подобны тем, что показаны на рис. 9.19, б, в. При  $p = p_0$  наблюдается ноль  $K\bar{K}$ .  $e$  — амплитуды  $P4KP$  на двух частотах как функции расстояния, рассчитанные по формуле (9.67) с использованием модели Земли В1 Джордана и Андерсона [185]. Для этой модели отмечены точки  $A$  и  $B$  и видно, что максимум амплитуд наблюдается за точкой  $A$ . Волна  $P4KP$  наблюдается обычно с периодом около 1 с. Вверху рисунка  $e$  приведена гистограмма, полученная по результатам наблюдений, опубликованным в работах [59, 3]. Максимумы расчетных кривых приходятся на расстояния, где наблюдения довольно предвостительны.



спад слева, а справа наблюдается экспоненциальный спад, как это видно на рис. 9.25,б).

Наконец, на рис. 9.25,е приведен результат расчета линейного интеграла (9.67) для волны  $P4KP$  на различных расстояниях. Действительно, ясно видно, что наиболее интенсивные вступления в диапазоне периодов  $1/2 - 2$  с лежат за предельной точкой  $A$ , предсказанной лучевой теорией. Этот эффект весьма значителен, так как вступления наблюдаются и объясняются теорией при расстояниях  $20^\circ$  (т.е. около 2000 км) в пределах «запрещенной» области. В работе [125] показано, что туннельный эффект может быть значительным также для объемных волн в структурах земной коры, содержащих слой с высокой скоростью.

Теперь рассмотрим волну  $SKS$  и связанные с ней многократные волны  $SKKS$ ,  $SKKKS$  и т.д., которые будем обозначать для краткости  $SmKS$  для различных целых  $m$ . Эти  $SV$ -волны представляют прекрасный пример для изучения явлений, которые могут произойти, когда волны взаимодействуют с границей, ниже которой лежит слой с большой скоростью. (Скорость  $S$ -волн в нижней части мантии меньше, чем скорость  $P$ -волн у кровли ядра.) В работе [82] Чой применил аппроксимацию Лангера для этих фаз, а для получения синтетических сейсмограмм во временной области провел интегрирование по комплексному  $p$ , а также по действительному  $\omega$ .

Для изучения  $SV$ -волн сначала нужно выбрать источник, отличный от изотропного источника  $P$ -волн, который до сих пор рассматривался в этой главе. Подходящим источником, позволяющим получить явные результаты, может служить сдвиговая дислокация с простираем  $\phi_s$ , наклоном  $\lambda$ , падением  $\delta$  и интенсивностью (т.е. моментом)  $\mu A \bar{u} = M_0(\omega)$ . Характеристика направленности излучения такого источника, а также формула геометрического расхождения даются выражениями (4.85) и (4.89). Теперь нам нужно уточнить ту аппроксимацию, для которой горизонтальная компонента записывается в виде

$$u_{\Delta}^{SV}(r, \Delta_0, \phi, \omega) \sim \frac{\mathcal{F}^{SV}(-i\omega M_0(\omega))(-\cos j) \exp(i\omega T^S)}{4\pi[\rho_s \rho(r) \beta_s^5 \beta(r)]^{1/2} \mathcal{R}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)}. \quad (9.68)$$

[Здесь появляется множитель  $-\cos j(r)$ , поскольку формула (4.89) дает амплитуду в направлении  $\hat{\mathbf{p}}$ , а мы хотим знать горизонтальную компоненту в направлении увеличения  $\Delta$ .] Из предыдущего опыта с  $P$ -волнами мы знаем, что

$$\frac{i\omega}{\alpha_s^4} \int_{\Gamma} \omega^2 p \pi^{(1)}(r_s) [\alpha(r) \xi(r) \pi^{(1)}(r)] Q_{\omega p - \frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta_0) dp \sim \left[ \frac{\rho_s}{\rho(r) \alpha(r) \alpha_s^5} \right]^{1/2} \frac{\cos i}{\mathcal{R}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)} \exp(i\omega T^P).$$

Поэтому соответствующий результат для  $SV$ -волн позволяет записать

$$u_{\Delta}^{\text{пад}SV}(r, \Delta_0, \phi, \omega) = \frac{i\omega M_0(\omega) i\omega}{4\pi \rho_s \beta_s^4} \times \int_{\Gamma} \omega^2 p \mathcal{F}^{SV} \sigma^{(1)}(r_s) [\beta(r) \eta(r) \sigma^{(1)}(r)] Q_{\omega p - \frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta_0) dp. \quad (9.69)$$

Это выражение описывает  $SV$ -волну, которая распространяется вниз от источника и регистрируется в точке  $(r, \Delta_0)$  как восходящая  $SV$ -волна. На основе одно-

го этого описания мы могли бы записать большинство подинтегральных множителей формулы (9.69). Остальные множители дают просто нормировочные коэффициенты, и благодаря этому здесь вполне приемлемо использовать классическую лучевую теорию. Следовательно,  $\mathcal{F}^{SV}$  в (9.69) задается как функция от  $(p, \phi)$  из формулы (4.85):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{SV}(p, \phi) \sim & [\sin \lambda \cos 2\delta \sin(\phi - \phi_s) \\ & - \cos \lambda \cos \delta \cos(\phi - \phi_s)](1 - 2\beta_s^2 p^2/r_s^2) + [\cos \lambda \sin \delta \sin 2(\phi - \phi_s) \\ & - \sin \lambda \sin 2\delta(1 + \sin^2(\phi - \phi_s))] \frac{\beta_s^2 p}{r_s} \left( \frac{1}{\beta_s^2} - \frac{p^2}{r_s^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (9.70)$$

Эта формула приближенная, поскольку она следует из лучевой теории. Однако она отличается высокой точностью в случае объемных волн, когда точка поворота луча лежит гораздо ниже уровня источника, а это условие, конечно, всегда выполняется для волн, распространяющихся в ядре. При подстановке (9.70) в (9.69) получаются два различных подинтегральных выражения, но  $\mathcal{F}^{SV}(p, \phi)$  может меняться столь медленно при изменении  $p$  вдоль тех частей контура  $\Gamma$ , которые вносят значительный по величине вклад в подинтегральное выражение, что  $\mathcal{F}^{SV}$  практически постоянно и может быть вынесено за знак интеграла (см. также дополнение 9.10).

Если длина волн, возбуждаемых источником, не на много больше пространственных размеров поверхности вспарывающегося разрыва, тогда конечные размеры разрыва могут существенно влиять на распространение волн в дальней зоне. Этот вопрос освещен в гл.14, а необходимые исправления рассмотренной нами теории — в дополнении 14.1.

В формуле (9.69) мы получили выражение для «падающей волны», из которой возникли волны *SmKS*. Следовательно, для волны *SKS*

$$\begin{aligned} u_{\Delta}^{SKS}(r, \Delta_0, \phi, \omega) = & \frac{i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\beta_s^4} \\ & \times \int_{\Gamma} \omega^2 p \mathcal{F}^{SV} \sigma^{(1)}(r_s) \hat{S} \hat{K} \cdot \hat{K} \hat{S} [\beta(r)\hat{\eta}(r)\sigma^{(1)}(r)] Q_{\omega p - \frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta_0) dp, \end{aligned} \quad (9.71)$$

где путь  $\Gamma$  изображен на рис. 9.26,б. Чой [82] исследовал формулу (9.71) применительно к модели Земли 1066В Гилберта и Дзевонского [135]. Для достаточно больших  $\Delta_0$  седловая точка на действительной оси  $p$ , соответствующая волне *SKS*, может сдвигаться влево от линии дифракционных полюсов, возникающих при  $p = p_d$ . Тогда процесс интегрирования вдоль  $\Gamma$  состоит в суммировании вкладов от дифракционных полюсов и от седла. Следовательно, формула (9.71) автоматически содержит фазу  $SP_{\text{диф}} SK$ , изображенную на рис.9.26,а. Чой провел также интегрирование формулы (9.71) по  $\omega$ , и некоторые его результаты приведены на рис.9.26,в. Очевидно, что дифракция в виде волны  $P$  вдоль подошвы мантии может быть значительной даже после свертки с импульсной характеристикой длиннопериодного сейсмометра WWSSN.

Чтобы получить выражения для *SmKS* ( $m = 2, 3, \dots$ ), в формулу (9.71) надо ввести коэффициенты  $(\hat{K}\hat{K})^{m-1}$  для учета  $(m - 1)$  внутренних отражений. На рис. 9.27 показаны несколько таких лучей и соответствующий путь интегрирова-

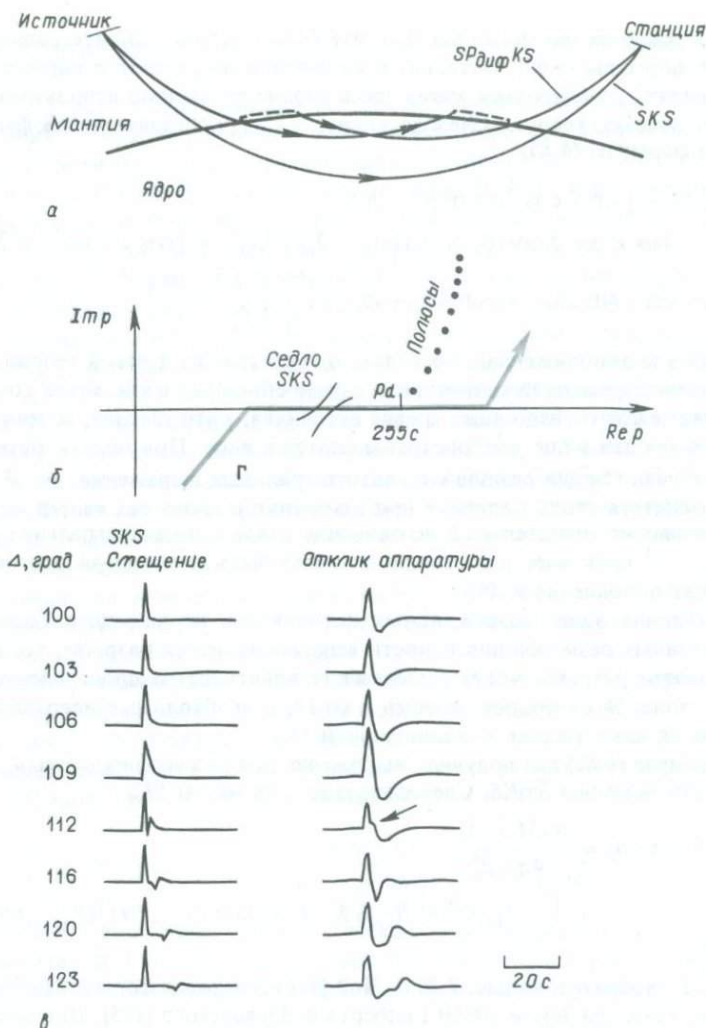


Рис. 9.26. Если волна  $SKS$  наблюдается на расстояниях свыше  $100^\circ$ , луч падает на границу ядро — мантия с медленностью, допускающей интерференцию этой волны с  $P$ -волной, дифрагированной в подошве мантии. На рисунке **а** эта фаза отмечена как  $SP_{\text{диф}} KS$ . Дифракционный участок траектории может появиться на любом из концов звена  $K$ . **б** — путь интегрирования для (9.71), и очевидно, что  $SP_{\text{диф}} KS$  будет наблюдаться всегда, когда седло  $SKS$  лежит левее полюсов дифракции, исходящих из  $\rho_d$  **в** (слева) — импульсные сейсмограммы, рассчитанные по формуле (9.71) для модели Земли 1066В Гилберта и Дзевонского [135]; справа те же записи после свертки с откликом длиннопериодного прибора (15 — 100) WWSSN ( $T_s = 15$  с,  $T_g = 100$  с; см. разд. 10.3.3). Стрелкой отмечено вступление волны  $SP_{\text{диф}} KS$ ; заметное проявление этой фазы видно в коде волны  $SKS$  на расстоянии, большем  $112^\circ$ . (Согласно [82].)

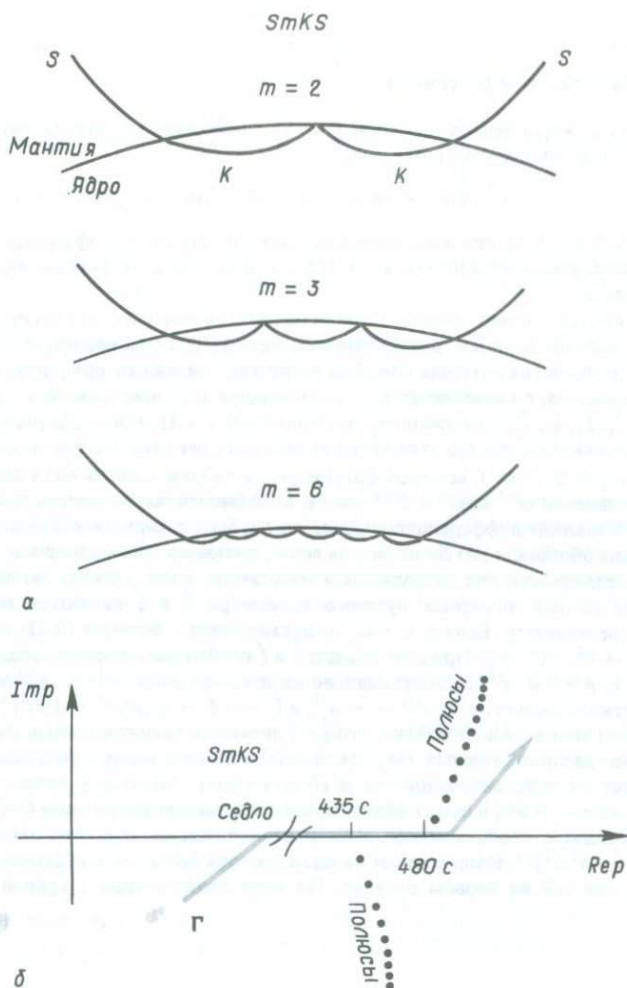


Рис. 9.27. В коде волн  $SKS$  появляются волны  $SKKS$ ,  $SKKKS$  и т.д. *a* — у таких многократных волн точка поворота лежит тем выше, чем больше число  $K$ -звеньев. Представленные волны  $SmKS$  получаются путем введения множителя  $(KK)^{m-1}$  в формулу (9.71). *б* — на путь интегрирования влияют полюсы, протягивающиеся вниз от  $p = 435$  с (связанные с точкой поворота  $P$ -волны у верхней границы жидкого ядра), и полюсы, протягивающиеся вверх от  $p = 480$  с (точка поворота  $S$ -волны в основании мантии).

ния. Задача заключается, очевидно, в том, что волны  $S(m+1)KS$  вступают в коде волн  $SmKS$ ; следовательно, наблюдаемая на сейсмограмме форма импульса образована наложением большого числа кратных волн. Чой [82] нашел, что сходимость суммы  $SKKS + SKKKS + SKKKKS + \dots$  очень медленная, даже на

## ДОПОЛНЕНИЕ 9.8

## Полюсы коэффициентов рассеяния

Все шестнадцать коэффициентов для волн  $P - SV$ , полученные в дополнении 9.6, содержат один и тот же множитель  $(1/D)$ , где

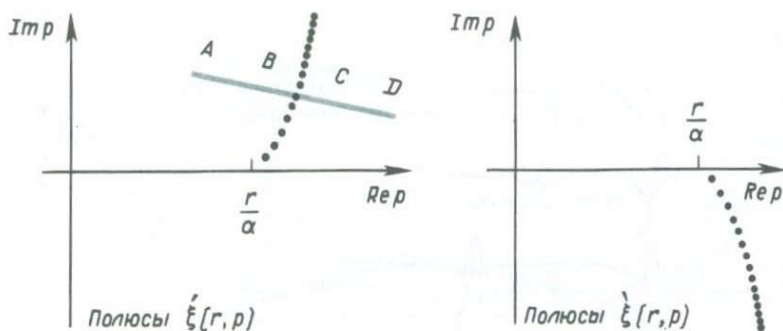
$$D = (b\tilde{\xi}_1 + c\tilde{\xi}_2)(b\tilde{\eta}_1 + c\tilde{\eta}_2) + (a - d\tilde{\xi}_1\tilde{\eta}_2)(a - d\tilde{\xi}_2\tilde{\eta}_1)p^2/r^2.$$

Таким образом, нули  $D$  (при изменении  $p$ ) являются полюсами коэффициентов рассеяния и должны специально исследоваться при деформации пути интегрирования  $\Gamma$  в плоскости комплексного  $p$ .

Действительно,  $D^{-1}$  имеет полюсы Стоуна на действительной оси  $p$  такие же, как мы нашли в теории плоских волн [см. рассуждения после (5.55)]. Более важно, что  $D^{-1}$  имеет цепочки полюсов, свойства которых подобны разрезам, описанным при рассмотрении задачи Лэмба. К счастью, положение цепочек полюсов для  $D^{-1}$  почти такое же, как для четырех величин  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ , содержащихся в выражении для  $D$ . Наши обозначения введены с целью подчеркнуть сходство этих четырех величин с вертикальными медленностями  $\xi = \alpha^{-1} \cos i$ , и  $\eta = \beta^{-1} \cos j$ , которые фигурируют в теории плоских волн для однородной среды. [Появление  $\alpha^{-1} \cos i$ , и  $\beta^{-1} \cos j$  в коэффициентах рассеяния плоских волн (5.39) было обусловлено дифференцированием по глубине  $z$  волновых функций  $e^{\pm i\omega\xi z}$  и  $e^{\pm i\omega\eta z}$ . В (9.62) мы обобщили это свойство для волн, имеющих точки поворота, найдя, что вертикальные медленности для нисходящих и восходящих волн должны различаться.]

При действительных значениях лучевого параметра  $\xi$  и  $\xi$  являются комплексно-сопряженными величинами. Если  $p < r/\alpha$ , то примененная к формуле (9.62) теория ВКБ дает  $\xi \sim (1/\alpha^2 - p^2/r^2)^{1/2} - \xi$ . При  $p \rightarrow r/\alpha$  для  $\xi$  и  $\xi$  необходима аппроксимация Лангера (9.66). Для  $r/\alpha < p$   $\pi^{(1)}$  и  $\pi^{(2)}$  экспоненциально велики, но сумма  $\pi^{(1)} + \pi^{(2)}$  экспоненциально мала. Отсюда следует, что  $\pi^{(1)} \sim -\pi^{(2)}$  и  $\xi \sim -\xi \sim -i(p^2/r^2 - 1/\alpha^2)^{1/2}$ .

В более общем виде можно показать, что  $\xi$  и  $\xi$  являются аналитическими функциями  $p$  с особенностями, расположенными так, как показано на двух первых рисунках. Цепочки полюсов отходят от действительной оси  $p$  вблизи  $r/\alpha(r)$ . Полюсы  $\xi$  являются нулями функции  $H_{1/2}^{(1)}(\omega\tau)$  [см. (9.66)] и лежат вблизи кривых (называемых кривыми Стокса), определяемых требованием, чтобы  $\tau = \tau(r, p)$  было вещественным. Вдали от этих особенностей  $\xi \sim (1/\alpha^2 - p^2/r^2)^{1/2}$ . Например, эта аппроксимация была бы достаточно точна для таких прямых, как  $AB$  на первом рисунке. По мере приближения к кривой особенно-



Полюсы коэффициентов рассеяния  $\hat{P}\hat{K}$ ,  $\hat{K}\hat{K}$ ,  $\hat{S}\hat{K}$  и т.д., связанные с границей ядро — мантия. Поскольку  $D$  четно по  $p$ , полюсы имеются также во втором и третьем квадрантах. Они получаются из приведенных здесь полюсов путем поворота на  $180^\circ$  относительно начала координат.

стей аппроксимация ухудшается и становится вовсе неприемлемой, если  $BC$  проходит через один из полюсов пелочки или очень близко к нему. После пересечения кривой особенностей справедлива аппроксимация  $\xi \sim - (1/\alpha^2 - p^2/r^2)^{1/2}$  и происходит перемена знака, что выглядит как пересечение разреза для квадратного корня. Так как  $ABCD$  не пересекает кривую особенностей для  $\xi$ , аппроксимация  $\xi \sim (1/\alpha^2 - p^2/r^2)^{1/2}$  точна для всего контура и не испытывает скачка между  $B$  и  $C$ .

Полюсы  $\xi$  имеются также в третьем квадранте, а полюсы  $\xi$  — во втором квадранте; они получены из тех, что показаны здесь, поворотом на  $180^\circ$  относительно начала координат ( $\xi$  и  $\xi$  — четные по  $p$ ).

Нули  $\xi$  перемежаются с полюсами  $\xi$  первого квадранта. Поскольку и нули, и полюсы  $\xi$  лежат вдоль одной и той же общей кривой,  $\xi$  испытывает вдоль нее быстрые изменения амплитуды. Следовательно, рациональная функция от  $\xi$  будет тоже иметь полюсы и нули вдоль той же кривой в первом квадранте. В сейсмологии коэффициенты рассеяния — обычно рациональные функции от нескольких вертикальных медленностей, каждая из которых определяется различным профилем скорости ( $\xi_1$ ,  $\eta_2$  и т.д.)

Для границы ядро — мантия  $\alpha_m > \alpha_c$ ,  $\alpha_1 > \beta_m = \beta_c$  и  $\beta_1 > 0$ . Следовательно, знаменатель  $D$  принимает вид  $b^2 \xi_c + bc \xi_m - d(\alpha - d \xi_c \eta_m) \xi_m p^2 / r_{CMB}^2$ . Полюсы  $D^{-1}$  расположены вблизи полюсов  $\xi_c$ ,  $\xi_m$  и  $\eta_m$ , как это показано на третьем рисунке.

расстояниях, на несколько тысяч километров превышающих критическое ( $\sim 62^\circ$ ), при котором образуется волна  $SKS$ . Однако эту систему многократных волн важно изучать, поскольку она чувствительна к скоростям во внешней части жидкого ядра. Чой показал, что скорости в этой зоне в модели 1066В нуждаются в некотором уточнении. На рис. 9.28 представлено сделанное им сопоставление между наблюдаемыми и синтетическими сейсмограммами для модели Земли, подобной 1066В, но с адиабатическим градиентом скорости во внешних 200 км ядра.

Трудности из-за медленной сходимости ряда многократных волн типа  $SmKS$  будут возникать всегда, когда ниже границы лежит среда с большей скоростью

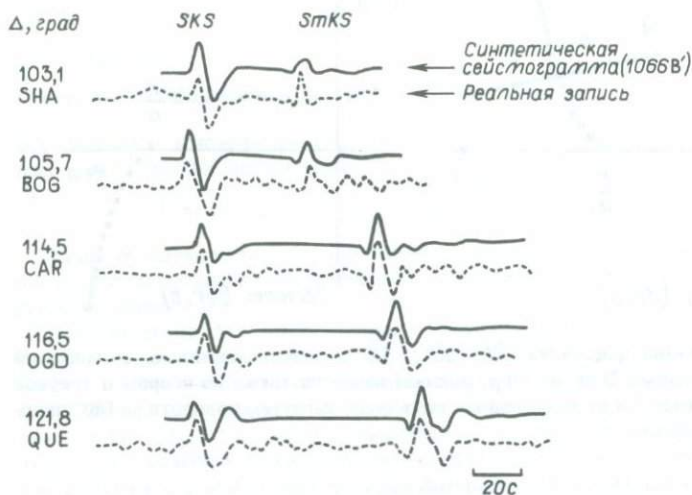


Рис. 9.28. Сравнение теоретических сейсмограмм (рассчитанных для модели 1066В, модифицированной путем замены самой внешней зоны в 200 км жидкого ядра слоем со скоростью, предложенной Джеффрисом) с наблюдаемыми сейсмограммами для глубокого землетрясения на Фиджи 21 июля 1973 г. Отметим изменение с расстоянием формы волны SKS, обусловленное, по-видимому, волной  $SP_{\text{диф}}$  KS. Заметим также удовлетворительное совпадение между теоретическими и наблюдаемыми данными для интерферирующих многократных волн в SmKS. Чой суммировал волны в диапазоне от  $m = 2$  до  $m = 15$  для получения этих расчетных записей и обнаружил, что, согласно наблюдаемым волнам SmKS, требуется введение адиабатического внешнего ядра (подобного модели Джеффриса). (По Чою [82].)

(при условии что скорость не уменьшается с глубиной столь быстро, что в нижнем слое отсутствуют точки поворота). Это очень распространенный случай для границ внутри Земли, и волна, составленная из всех вместе взятых многократных волн, известна как *интерференционная головная волна* [71]. Схема лучей показана на рис. 9.29. Множество подобных примеров имеется в океанических осадках, в слоях земной коры [165, 166], возможно в верхней мантии и безусловно в фазах, связанных с ядром. Среда, в которой образуются такие лучи, носит классическое название *шепчущей галереи* [264]. Сходимость системы многократных волн может быть особенно плохой, если приемник расположен вблизи критического расстояния.

Кормье и Ричардс [86] показали, что удобным способом избежать этой трудности может быть непосредственное использование выражения, принимающего в расчет все вместе взятые многократные волны. Они исследовали геофизическую задачу о  $P$ -волнах, проходящих как сквозь внешнее жидкое, так и сквозь внутреннее твердое ядро Земли, и в этом случае интерференционная головная волна возникает на границе внутреннее ядро/внешнее ядро (радиуса  $r_1$ ). На рис. 9.30,а приведен годограф волны PKP, а также ветвь CD для PKiKP (отражение от  $r_1$ ), ветвь DF для PKiKP (имеющей только одно звено ниже  $r_1$ ) и ветвь для PKiKP. Естественным обозначением для коэффициента отражения PKiKP явля-

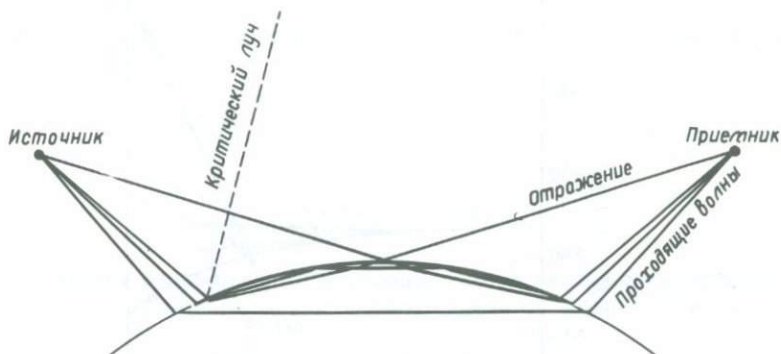


Рис. 9.29. Граница раздела двух сред в случае, когда нижний слой характеризуется большей скоростью. Бесконечное множество лучевых траекторий связывает источник и приемник, помещенный на расстоянии за критическим лучом. Это семейство многократных волн образует интерференционную головную волну. Показан также отраженный луч. По мере перемещения приемника в сторону критического луча времена пробега для всех лучевых траекторий будут стремиться к общему пределу. Мы привели здесь криволинейную границу и прямые лучи. Однако интерференционная головная волна может образоваться на границе неоднородных сред (в случае криволинейных лучей), например путем наложения лучей, показанных на рис. 9.27, а. Самая верхняя часть высокоскоростной среды действует здесь подобно волноводу, и этот эффект сходен со случаем «шепчущей галереи».

ется  $\hat{K}\hat{K}$ , и подобное же обозначение можно принять для прохождений через  $r_1$ . Следовательно, все семейство лучей, изображенных на рис. 9.29, можно описать суммой

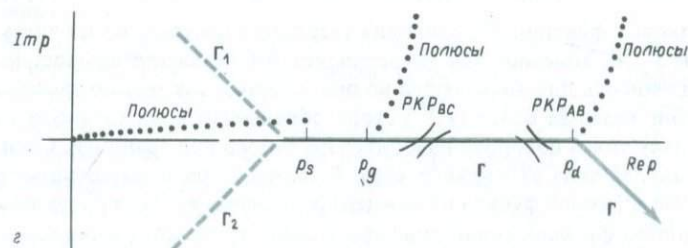
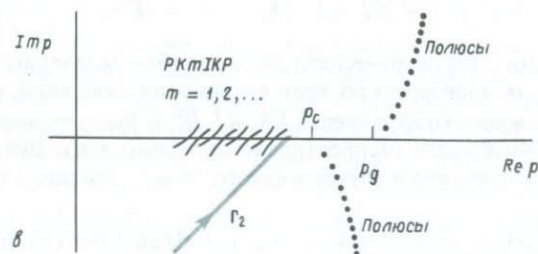
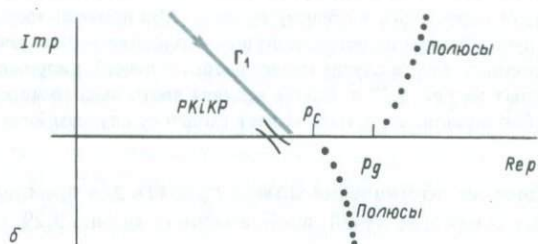
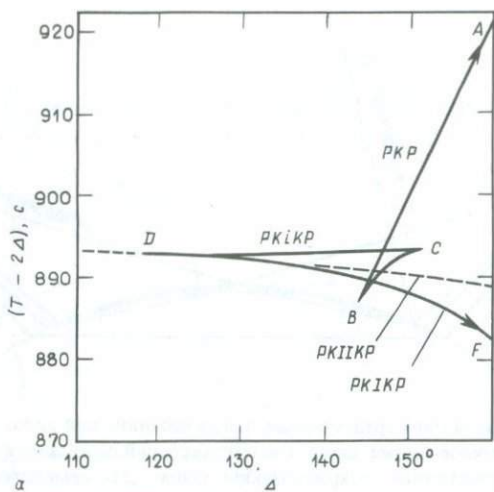
$$\hat{K}\hat{K} + \hat{K}\hat{l} \cdot \hat{l}\hat{K} + \hat{K}\hat{l} \cdot \hat{l}\hat{l} \cdot \hat{l}\hat{K} + \dots = \hat{K}\hat{K} + \frac{\hat{K}\hat{l} \cdot \hat{l}\hat{K}}{1 - \hat{l}\hat{l}}. \quad (9.72)$$

Суммирование этого геометрического ряда подобно задаче, которую мы рассмотрели ранее для многократных волн в теории плоских волн, (9.18) — (9.19).

При выводе каждого коэффициента  $\hat{K}\hat{K}$ ,  $\hat{K}\hat{l}$ ,  $\hat{l}\hat{K}$ ,  $\hat{l}\hat{l}$  было принято, что рассеянная энергия в нижней среде распространяется только вниз. Действительно, из дополнения 9.6 следует, что в случае жидкого слоя 2, лежащего выше твердого слоя 1,

$$\hat{K}\hat{K} = \frac{[\rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2 / r_1^2)^2 \xi_2 - \rho_2 \xi_1 + 4\rho_1 \beta_1^4 (p^2 / r_1^2) \xi_2 \eta_1 \xi_1] \pi_2^{(2)}}{[\rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2 / r_1^2)^2 \xi_2 + \rho_2 \xi_1 + 4\rho_1 \beta_1^4 (p^2 / r_1^2) \xi_2 \eta_1 \xi_1] \pi_2^{(2)}}. \quad (9.73)$$

Волновые функции  $P$ -волны для твердого ядра содержатся здесь только в величине  $\xi_1$ , и, конечно, она представляет собой соответствующую вертикальную медленность для нисходящей волны. Однако, как можно заметить на рис. 9.29, эта нисходящая волна ( $\pi_1^{(2)}$ ) скоро обращается в восходящую волну ( $\pi_1^{(1)}$ ), поскольку точка поворота находится неглубоко под границей. Следовательно, для падающей вниз из жидкого ядра  $P$ -волны более подходящим будет взять в качестве волновой функции в нижней среде сумму  $\pi_1^{(1)} + \pi_1^{(2)}$ , поскольку именно эта волновая функция точно описывает амплитуды внутри твердого ядра. Если используется новая волновая функция для твердого ядра, коэффициент отражения



$\check{K}\check{K}$  изменяется, и его естественно обозначить как  $\check{K}(\check{I})\check{K}$ . Удовлетворяя граничным условиям, находим

$$\check{K}(\check{I})\check{K} = \frac{[\rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2/r_1^2)^2 \check{\xi}_2 - \rho_2 \check{\xi}_1 + 4\rho_1 \beta_1^4 (p^2/r_1^2) \check{\xi}_2 \check{\eta}_1 \check{\xi}_1] \pi_2^{(2)}}{[\rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2/r_1^2)^2 \check{\xi}_2 + \rho_2 \check{\xi}_1 + 4\rho_1 \beta_1^4 (p^2/r_1^2) \check{\xi}_2 \check{\eta}_1 \check{\xi}_1] \pi_2^{(1)}}, \quad (9.74)$$

где

$$\check{\xi}_1 \equiv \frac{1}{-i\omega(\pi_1^{(1)} + \pi_1^{(2)})} \frac{d}{dr} (\pi_1^{(1)} + \pi_1^{(2)}). \quad (9.75)$$

Новый коэффициент отражения  $\check{K}(\check{I})\check{K}$  обладает двумя важными свойствами. Во-первых, после ряда алгебраических преобразований его можно представить как

$$\check{K}(\check{I})\check{K} = \check{K}\check{K} + \frac{\check{K}\check{I} \cdot \check{I}\check{K}}{1 - \check{I}\check{I}}, \quad (9.76)$$

и, следовательно, этот единственный коэффициент учитывает все лучи, показанные на рис. 9.29. Разложение  $\check{K}(\check{I})\check{K}$  на члены левой части формулы (9.72) является примером *радужного разложения* (иногда называемого *разложением Дебая*), названного так, поскольку подобное разложение применяется в теории радуги. (В самом деле, коэффициент преломления на границе вода/воздух подобен коэффициенту преломления на границе ядро/мантия, и каустика РККР может служить сейсмической аналогией первичной радуги.) Радужное разложение обычно применимо, когда скорость в среде под границей меньше, чем над ней, так как в этом случае многократные волны, образующиеся в нижней среде, не будут интерферировать друг с другом. Примером такого разложения служит ряд  $PcP + PKP + PKKP + \dots$ , и каждую из проходящих волн можно исследовать отдельно. Однако это разложение часто неприменимо, если нижняя среда имеет большую скорость.

Второе важное свойство коэффициента  $\check{K}(\check{I})\check{K}$  касается положения полюсов в плоскости комплексного  $p$ . Раньше для  $\check{K}\check{K}$  существовала система полюсов, связанная с  $\check{\xi}_1$  и, следовательно, уходящая вниз в четвертый квадрант (дополнение 9.8). Но для нового отношения, определяющего  $\check{\xi}_1$ , полюсы и нули вытягиваются непосредственно над действительной  $p$ -осью, между 0 и  $r_1/\alpha_1(r_1)$ , и именно здесь находятся полюсы коэффициента  $\check{K}(\check{I})\check{K}$ .

Рис. 9.30. Обобщенная волна РКР. *a* — годограф волны РКР и соответствующие отражения и преломления на границе внутреннее ядро/внешнее ядро. Численное интегрирование в (9.77) удобно проводить, отделив вклад волны  $PKiKP$  в выражении, описывающем интерференционную волну. Следовательно,  $\check{K}(\check{I})\check{K}$  в (9.77) разобьется на два члена с помощью формулы (9.76). *b* — при коэффициенте  $\check{K}\check{K}$  в формуле (9.77) интегрирование ведется по контуру  $\Gamma_1$ . *в* — при  $(\check{K}\check{I} \cdot \check{I}\check{K})/(1 - \check{I}\check{I})$  интегрирование проводится по  $\Gamma_2$ . В каждом случае наблюдаются полюсы, уходящие вниз в четвертый квадрант ( $p_c$  — критический лучевой параметр, соответствующий лучам с точкой поворота в кровле твердого ядра;  $p_g$  — лучевой параметр для касательного луча с точкой поворота в подошве жидкого ядра). *г* — для остальной части пути интегрирования два подынтегральных выражения объединяются в один член, пропорциональный  $\check{K}(\check{I})\check{K}$ . Полюсы, связанные с  $\check{\xi}_1$ , заменяются полюсами, связанными с  $\check{\xi}_1$ . Справа от  $p_c$   $\check{K}(\check{I})\check{K} \rightarrow +1$ ; следовательно, (9.77) определяет ветви *AB* и *BC* волны РКР.

Выражение для  $P$ -волн, возбужденных точечной сдвиговой дислокацией с моментом  $M_0(\omega)$  и прошедших через внутреннее ядро, теперь можно записывать как

$$u_r^{PKP}(r, \Delta_0, \phi, \omega) = \frac{-i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\alpha_s^4} \times \int_{\Gamma} \omega^2 p \mathcal{F}^P \pi^{(1)}(r_s) \dot{P}\dot{K} \cdot \dot{K}(\dot{I})\dot{K} \cdot \dot{K}\dot{P}[\alpha(r)\dot{\xi}(r)\pi^{(1)}(r)]Q_{\omega p-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta_0) dp. \quad (9.77)$$

Характеристика излучения получена здесь из формулы (4.84), и  $\mathcal{F}^P$  зависит от простираания  $\phi_s$ , падения  $\delta$  и наклона  $\lambda$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^P = & \sin \lambda \sin 2\delta + [\cos \lambda \sin \delta \sin 2(\phi - \phi_s) \\ & - \sin \lambda \sin 2\delta(1 + \sin^2(\phi - \phi_s))] \alpha_s^2 p^2 / r_s^2 + 2[\sin \lambda \cos 2\delta \sin(\phi - \phi_s) \\ & - \cos \lambda \cos \delta \cos(\phi - \phi_s)] \frac{\alpha_s^2 p}{r_s} \left( \frac{1}{\alpha_s^2} - \frac{p^2}{r_s^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (9.78)$$

Выражение (9.77) вполне обоснованно можно считать обобщенной  $PKP$ -волной, так как оно включает все продольные фазы, образованные  $P$ -волной, прошедшей один раз вниз и один раз вверх через границу ядро — мантия. При таких значениях  $p$ , при которых волна имеет точку поворота гораздо выше границы внутреннего ядра, коэффициент  $\dot{K}(\dot{I})\dot{K}$  в формуле (9.77) приблизительно равен +1, и влияние внутреннего ядра пренебрежимо мало. В расчет принимается даже каустика, образованная волнами  $PKP$  вблизи  $142^\circ$ . При более низких значениях  $p$  интерференционная головная волна оценивается точно; при этом подынтегральное выражение разбивается на две части и интегрирование ведется вдоль различных путей, как показано на рис. 9.30, б, в, г.

Используя представление, эквивалентное (9.77), Кормье и Ричардс [86] рассчитали волны  $PKP$  в параметрической модели Земли Дзевонского и др. [108]. Результаты приведены на рис. 9.31, а на рис. 9.32 дано их сравнение с данными наблюдений.

Ясно, что такие подынтегральные выражения, как в (9.77), можно построить для все более сложных объемных волн. Удастся учесть даже влияние слоистости коры и верхней мантии, так как матричный пропагатор, соответствующий (9.58) — (9.59), представим в явном виде. Таким способом можно рассчитать просачивающиеся моды вместе с другими фазами, приходящими в пределах одного временного окна. Рассмотрим, например, что происходит, когда  $SV$ -волна падает снизу на границу кора — мантия при значении лучевого параметра в окрестности 770 с/рад. Это близко к критическому значению, при котором  $P$ -волна распространяется горизонтально непосредственно под Мохо, и на рис. 9.33 показаны различные возможные лучевые траектории для приемника на поверхности, включая эффект шепчущей галереи. Известно также, что в коре могут образоваться просачивающиеся моды, называемые  $PL$ -модами, в которых энергия  $P$ -волн ниже Мохо экспоненциально затухает с глубиной, но  $SV$ -волны излучаются вниз. Соответствующая фазовая медленность (лучевой параметр) основной моды лишь немного больше, чем для  $SP_{\text{диф}}$  (рис. 9.33, д); стало быть, подобная просачивающаяся мода может возбуждаться и падающей  $SV$ -волной,

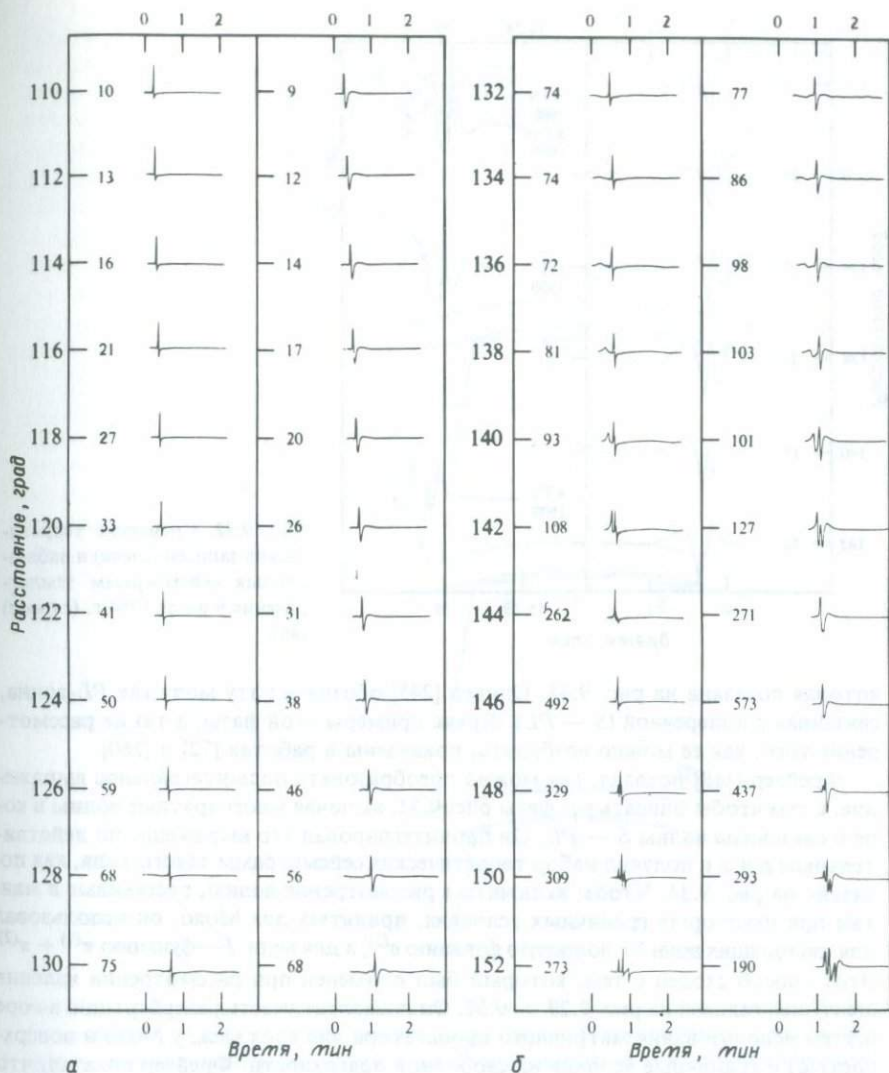


Рис. 9.31. Левые части *а* и *б* — импульсные сейсмограммы волны *PKP*, рассчитанные по (9.77) для параметрической модели Земли (РЕМ) Дзевонского и др. [108]. Правые части *а* и *б* — импульсные сейсмограммы, свернутые с откликом длиннопериодного (15 — 100) вертикального прибора WWSSN. Цифры слева от записей указывают относительную амплитуду для последовательно увеличивающихся расстояний. Заметим, что форма волны не меняется при переходе через критическую точку вблизи  $120^\circ$ . Положение критической точки сказывается только на амплитудах. На расстояниях 134 — 140° заметно появление длиннопериодного предвестника, связанного с каустикой волны *PKP* (точка *B* на рис. 9.30, *а*) на расстоянии 143°. Импульсы сложной формы, наблюдавшиеся на расстояниях 138 — 152°, являются результатом интерференции всех вступлений, приведенных на рис. 9.30, *а*. (Согласно [86].)

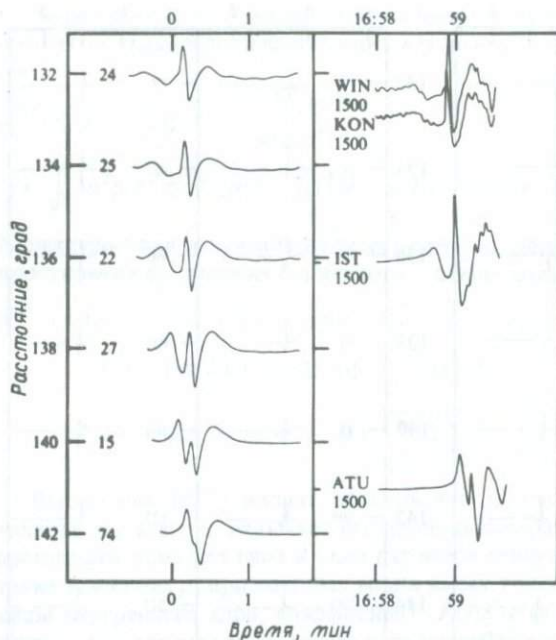


Рис. 9.32. Сравнение теоретических записей (слева) и наблюдаемых сейсмограмм землетрясения 9 июля 1964 г. (справа) [86].

которая показана на рис. 9.33. Оливер [245] обозначил эту моду как  $PL$ -волна, связанная с поперечной ( $S - PL$ ). Яркие примеры этой фазы, а также рассмотрение того, как ее можно возбудить, приведены в работах [72] и [260].

Фрейзер [119] показал, как можно преобразовать подынтегральное выражение, с тем чтобы описать все фазы рис. 9.33, включая многократные волны в коре и связанные волны  $S - PL$ . Он проинтегрировал это выражение по действительным  $p$  и  $\omega$  и получил набор теоретических сейсмограмм такого типа, как показано на рис. 9.34. Чтобы включить в рассмотрение волны, рассеянные в мантии при некоторых граничных условиях, принятых для Мохо, он использовал для нисходящих волн  $SV$  волновую функцию  $\sigma^{(2)}$ , а для волн  $P$ —функцию  $\pi^{(1)} + \pi^{(2)}$ . Этот способ сходен с тем, который был применен при рассмотрении явления шепчущей галереи на рис. 9.29 — 9.32. Он позволяет учесть реверберацию в коре (путем использования матричного пропагатора для слоя между Мохо и поверхностью) и граничные условия на свободной поверхности. Фрейзер показал, что для наблюдения интенсивных волн  $S - PL$  требуется благоприятная ориентация источника и наличие в мантии аномально высокого градиента скорости поперечных волн на глубине порядка 650 км. Поскольку на практике сейсмограммы не содержат фаз  $SP_{\text{диф}}$  типа той, что видна на теоретической сейсмограмме на рис. 9.34, Фрейзер сделал вывод, что ниже границы Мохо скорость  $P$ -волны должна уменьшаться с глубиной. Если она уменьшается достаточно быстро ( $d\alpha/dr > \alpha/r$ ), тогда горизонтально распространяющийся луч преломляется вниз: отсутствует эффект шепчущей галереи, иллюстрируемый рис. 9.33, и для описания рассеянных  $P$ -волн ниже Мохо нужна одна только волновая функция  $\pi^{(2)}$ .

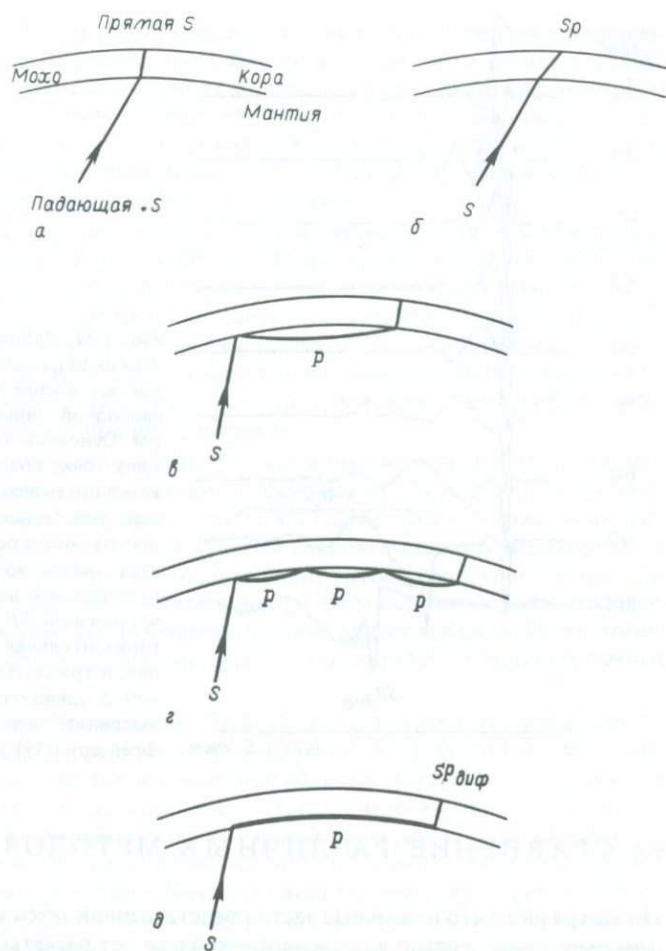


Рис. 9.33. Лучевые траектории, связанные с волной *SV*, падающей на границу Мохо под углом, близким к критическому, когда возникает волна *P*, распространяющаяся горизонтально по кровле мантии. *а* — прямая *S*-волна (*SV* в коре). *б* — волна, обозначенная *S<sub>p</sub>*, поскольку она проходит кору как *P*. Она вступает несколько раньше, чем прямая *S*-волна; детальное описание ее имеется в [186]. *в* — волновая траектория включает одно звено *P* в мантии (звено в коре может быть либо *P*, либо *S*). *г* — три звена *P* в мантии. *д* — число звеньев *P* в мантии может бесконечно увеличиваться, пока не достигнет предела (в случае критического значения лучевого параметра), при котором луч идет по кровле мантии горизонтально. Фрейзер [119] обозначает соответствующее вступление на поверхности как *SP<sub>диф</sub>*. Оно содержит наложение лучей *P* и *S*, прошедших кору, и включает практически все семейство лучей типа *в* и *г*, образуя интерференционную головную волну. При данном расположении источника и приемника все лучевые траектории *а* — *д* могут присутствовать одновременно с реверберациями в коре, хотя каждый конкретный луч будет, вообще говоря, иметь слегка отличающийся от остальных лучевой параметр.

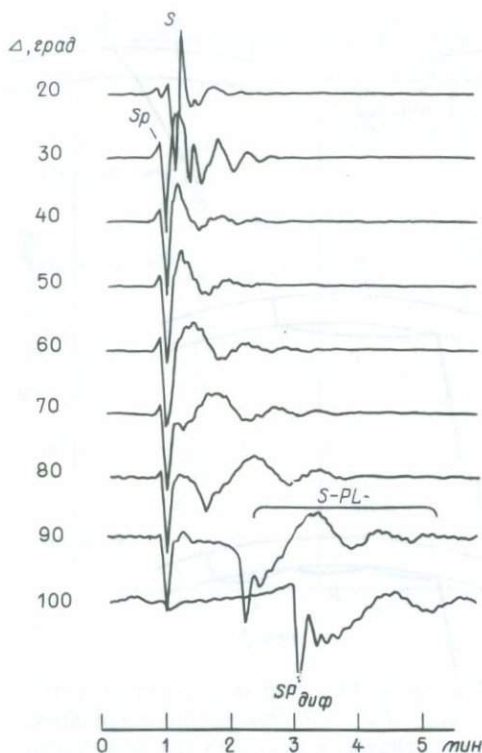


Рис. 9.34. Набор сейсмограмм, содержащих фазы, которые образуют сложное вступление  $SV$  для приемника на свободной поверхности земной коры. Основной  $SV$ -луч в мантии имеет одну точку поворота между источником и приемником. Скорость  $P$ -волны непосредственно под Мохо принята постоянной, в результате чего образуется очень эффективная шепчущая галерея, что видно по интенсивному вступлению  $SP_{\text{лиф}}$ . Здесь рассчитана горизонтальная компонента движения, и трассы для различных расстояний  $\Delta$  сдвинуты по времени, чтобы выровнять первые вступления. (По Фрейзеру [119].)

## 9.6. СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ

Несмотря на то что отдельные части представленной здесь теории известны уже довольно давно, только в последние несколько лет расчеты весьма точной формы объемных волн в реалистичных моделях стали более успешными, чем расчеты в рамках классической лучевой теории. Мы пришли к выводу, что удобно различать три расчетных метода: 1) обратное преобразование по Каньяру выражений для обобщенных лучей, которые не имеют точек поворота; 2) двойное интегрирование (по действительной медленности и действительной частоте) с сохранением всех многократных волн; 3) двойное интегрирование (по действительной или комплексной медленности и действительной частоте) для обобщенных лучей (возможно, с точками поворота) в неоднородных слоях. Действуя третьим методом, мы получили сейсмограмму ВКБ, и на практике это решение имеет некоторые общие черты с результатами преобразования Каньяра. Названные методы, вероятно, являются основными методами, используемыми в настоящее время в сейсмологии, однако в некоторых приложениях их могут заменять либо прямое суммирование нормальных мод (см. описание в гл. 8), либо метод Алек-

сева и Михайленко [8]. В последнем методе к уравнениям движения применяется преобразование по горизонтальной координате, при этом остается только дифференциальное уравнение в частных производных по глубине и времени. Оно решается с помощью конечно-разностной схемы для многих значений горизонтального волнового числа, а затем проводится обратное пространственное преобразование (численное интегрирование по горизонтальному волновому числу) с целью получить набор теоретических сейсмограмм.

Необходимо помнить, что теория распространения волн в вертикально-неоднородных средах все еще находится в стадии исследования, и пока неясно, который из основных методов, выделенных нами, наиболее подходит для решения проблемы. Далее, в каждом из этих методов исследователь поставлен перед необходимостью принимать решения относительно деталей применения данного конкретного метода. В оставшейся части этой главы мы сформулируем кратко достоинства и недостатки каждого метода и покажем, какой выбор представляется исследователю при их применении.

Во-первых, напомним, что методы Каньяра и Фукса были получены для плоских однородных слоев. Их приложение к сферической Земле требует некоторого предварительного анализа, проведенного в дополнении 9.9. В каждом из этих двух методов нужно решить, каким образом аппроксимировать неоднородную модель Земли слонистой моделью. Выбор более грубой слоистости может существенно снизить стоимость расчетов, но при этом понизится точность решения. Здесь решение о том, какую мощность слоев следует выбрать, будет, конечно, зависеть от частотного диапазона, для которого требуется получить точные результаты.

Метод Каньяра и сейсмограммы ВКБ имеют неоспоримые преимущества для сигналов в широкой полосе частот, поскольку отклик среды (не считая операций свертки) рассчитывается во временной области. Когда амплитуда сигнала быстро меняется во времени, особенности этого изменения легко можно исследовать, уменьшая шаг дискретизации расчетных точек вдоль пути Каньяра.

Если нужно рассчитать форму волны на ряде расстояний, тогда неоспоримое преимущество получают методы Фукса и Схольте, поскольку один и тот же путь интегрирования может служить для различных расстояний, в то время как путь Каньяра (и эквивалентный путь для сейсмограммы ВКБ) нужно вновь определять для каждого расстояния. [Напомним, что под «методом Каньяра» мы подразумеваем метод, в развитие которого внесли вклад многие исследователи. Например, детали расчетов предложены Виггинсом и Хелмбергером [336]. Метод отражений Фукса также расширен по сравнению с его первоначальной формулировкой. Так, например, Кинд [196] модифицировал этот метод с целью включить в рассмотрение реверберации в слоях выше и ниже источника. Он сумел также учесть эффекты затухания поверхностных волн и просачивающихся мод. Используя решение (9.58) и дополнение 9.6, можно обобщить метод Фукса так, чтобы учесть все многократные волны в *неоднородных* слоях. Под «методом Схольте» мы широко понимаем целый диапазон методов, собранных в разд. 9.5 и основанных на интегрировании по *комплексному* лучевому параметру и действительной частоте. Когда этот метод улучшает аппроксимации ВКБ, его иногда называют «полной волновой теорией».]

## ДОПОЛНЕНИЕ 9.9

*Преобразование Земли в плоскую модель и соответствующие аппроксимации*

В разд. 7.2 и 9.2 показано, как получить и использовать вектор движения-напряжения

$$\begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix},$$

который удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\mu(z) \\ k^2\mu(z) - \omega^2\rho(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Это уравнение *SH*-волны, и для его решения широко развиты матричные методы, особенно для случаев, когда среда аппроксимируется большим числом однородных плоских слоев. Например, такая аппроксимация делается в методе отражений.

В настоящее время нас больше интересует уравнение

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{\mu} \\ \frac{\mu(l-1)(l+2)}{r^2} - \omega^2\rho & -\frac{3}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}, \quad (2)$$

которое эквивалентно (1) в сферических координатах. Нас также интересуют соответствующие уравнения для волн *P—SV*. К счастью, в работах [14] и [41] предложено преобразование (2), которое приводит в точности к уравнению (1)\*. Следовательно, метод отражений можно применять в сферических координатах без дополнительных аппроксимаций (кроме замены зависимых от глубины  $\rho(z)$ ,  $\mu(z)$  множеством тонких слоев и ограничения

интервалов интегрирования  $\int_0^\infty dk \int_0^\infty d\omega$ ). Однако для задач, связанных с волнами *P—SV*, преобразование волнового уравнения из сферических координат в декартовы нельзя провести точно и нужно вводить новые приближения.

Сначала опишем преобразование для *SH*-волн. Будем использовать индекс *s* для параметров, относящихся к сферической среде, например  $\mu_s, \rho_s, \beta_s$ , и индекс *f* для параметров в плоскослойной (т.е. зависящей от *z*) среде. Задавая профили  $\mu_s, \rho_s$  и порядковый номер *l*, мы хотим преобразовать уравнение (2) для

$$\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}$$

в уравнение (1) для

$$\begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}.$$

\*К сожалению, здесь даны неверные ссылки. Впервые указанное преобразование предложено в работе М.Л.Гервера и Д.А.Каждана «Нахождение скоростного разреза по дисперсионной кривой. Вопросы единственности». Опубликовано в кн.: Некоторые прямые и обратные задачи сейсмологии (Вычисл. сейсмология, вып. 4. — М.: Наука, с.78 — 94, 1968). — *Прим. перев.*

Новая переменная — глубина  $z$  — определяется выражением

$$e^{-z/a} = \frac{r}{a}, \quad (3)$$

где  $a$  — любой удобный радиус (обычно за  $a$  принимается радиус Земли). Новые профили скорости определяются выражениями

$$\alpha_f(z) = \frac{a}{r} \alpha_s(r), \quad \beta_f(z) = \frac{a}{r} \beta_s(r). \quad (4)$$

Новые зависимые переменные и плотность записываются в виде

$$\begin{pmatrix} u_\phi(z) \\ \tau_{\phi z}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a/r)W \\ -(r/a)^3 T \end{pmatrix}, \quad \rho_f(z) = \left(\frac{r}{a}\right)^5 \rho_s(r), \quad (5)$$

и теперь из (2) можно показать, что

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\mu_f \\ \frac{(l-1)(l+2)}{a^2} \mu_f - \omega^2 \rho_f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Ясно, что преобразование к (1) будет полным, если новое горизонтальное волновое число определить как

$$k^2 = (l-1)(l+2)/a^2. \quad (7)$$

Благоприятным свойством замены переменных (3) и (4) является то, что время пробега вдоль луча в сферической модели очень близко к времени в соответствующей плоской задаче. Таким образом, из (9.21) имеем

$$T_s = \int \frac{dr}{\beta_s(1 - l^2 \beta_s^2/r^2)^{1/2}};$$

если использовать соотношение  $l + 1/2 = \omega p_s$  и замену переменных (3) и (4), то получим

$$T_s = \int \frac{dz}{\beta_f \left[ 1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2 \beta_f^2}{\omega^2 a^2} \right]^{1/2}} \quad (8)$$

В то же время из (9.20), пользуясь формулой  $k = \omega/p_f$  и соотношением (7), можно записать

$$T_f = \int \frac{dz}{\beta_f \left[ 1 - \frac{(l-1)(l+2)\beta_f^2}{\omega^2 a^2} \right]^{1/2}}. \quad (9)$$

Действительно, уравнения (8) и (9) идентичны, если незначительно изменить определение лучевого параметра, поскольку  $(l + 1/2)^2 = l^2 + l + 1/4$ , а  $(l-1)(l+2) = l^2 + l - 2$ . Таким образом, преобразования (3) и (4) сохраняют *кинематические свойства* распространения волн. При использовании преобразования (5) в точности сохраняются *динамические свойства* распространения волн в двух типах сред.

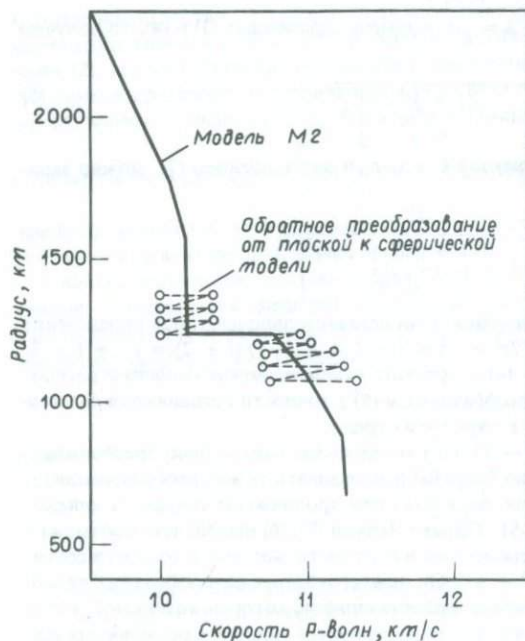
При переходе к задаче с волнами  $P - SV$  нам хотелось бы уметь точно преобразовывать (9.56) в (5.60). Очевидно, что удобно было бы использовать те же преобразования (3) и (4), которые справедливы для  $SH$ -волн, поскольку они продолжают сохранять кинематические свойства также и для волн  $P-SV$ . Однако Чепмен [75, 76] нашел, что невозможно получить преобразование зависимых переменных и плотности, которое в точности сохраняло бы динамические свойства волн  $P - SV$ . Он описал действие разнообразных преобразований типа (5) и нашел асимптотические свойства ошибок, которые возникают, когда для построения решений в зависящей от  $r$  среде используются волновые решения для среды, зависящей от  $z$ . В основном эти ошибки имеют порядок  $\omega^{-1}$ , и интересно, что такой же порядок имеет ошибка, вносимая использованием первого члена приближения Ланге-

ра, что мы и делали, применяя формулы (9.65) и (9.59) для решения сферического волнового уравнения (9.56). Следовательно, хотя приближение Лангера не использует специальную трансформацию к плоской модели, оно вносит ошибки, которые (на низких частотах) могут иметь тот же порядок величины, что и ошибки за счет преобразования в плоскую модель, вносимые в методы Каньяра и Фукса для волн  $P-SV$  в сферической модели. Именно по этим причинам для некоторых задач не удается избежать численного интегрирования сферического волнового уравнения (9.56).

Если проведены кинематические преобразования (3) и (4), в методах Каньяра и Фукса непрерывные распределения свойств по  $z$  заменяются пачкой однородных слоев. Интересно посмотреть, как проявится эта слоистость, если провести обратное преобразование в сферическую систему координат. Для профиля скорости  $P$ -волн из (4) находим, что

$$\alpha_s(r) = r\alpha_f/a, \quad (10)$$

следовательно,  $\alpha_s$  пропорционально  $r$  в каждом слое ( $\alpha_f$  кусочно-постоянно). На приведенном здесь рисунке можно увидеть, что даже на участках, где скорость постоянна (например, вблизи радиуса 1500 км) в преобразованной среде все еще нужны тонкие слои. Действительно, градиент скорости в (10) как раз такой, для которого угол между лучом и локальной вертикалью не меняется. Это означает, что  $di/dr = 0$ , как можно понять из формулы (9.24) с профилем скорости (10). Лучи будут иметь постоянный угол с локальной вертикалью в пределах любого заданного слоя. Этого кинематического свойства можно было ожидать, поскольку оно справедливо также в пачке однородных плоских слоев. Отсюда следует, что в неоднородных слоях, показанных на рисунке, отсутствуют точки поворота лучей. Все явления, которые в разд. 9.5 мы связывали со свойствами волновых функций вблизи их точки поворота, должны возникать в методах Каньяра и Фукса благодаря интерференции различных лучей внутри пачки неоднородных слоев.



Сплошной линией показан профиль скорости  $P$ -волн вблизи границы внутреннего ядра/внешнего ядра модели M2 Мюллера [233]. Пунктирной линией показан результат обратного преобразования, эквивалентный пачке плоских однородных слоев. (Согласно [234]; с разрешения Американского геофизического союза.)

Если имеется сильное затухание в том смысле, что  $Q \gg 1$ , но волны затухают, распространяясь на расстояния, равные многим длинам волн, теория методов Фука и Схольте остается практически неизменной. Сам профиль скорости становится комплексным [см. (5. 88)]. Однако в метод Каньяра и сейсмограмму ВКБ нельзя просто ввести причинное затухание, если не прибегать к специальным методам, основанным на классической лучевой теории.

Наиболее существенно различие методов сказывается в их подходе к задачам, в которых синтезируемые волны подвергаются влиянию строения Земли в окрестности точки поворота. Но именно этот тип объемных волн, по видимому, представляет наибольший интерес для геофизики, поскольку анома-

## ДОПОЛНЕНИЕ 9.10

## Тензор момента и обобщенные лучи

Для точечного сейсмического источника, объективно описанного тензором момента второго ранга, мы уже получили конкретные результаты по возбуждению поверхностных волн и нормальных мод колебаний Земли. Теперь рассмотрим соответствующие формулы возбуждения объемных волн.

Предварительная попытка найти функцию возбуждения объемных волн была сделана, когда мы получили характеристики направленности излучения в формуле (4.91) на основе лучевой теории. Используя углы  $i_\xi$  (для  $P$ -волн) и  $j_\xi$  (для  $S$ -волн), которые описывают направление выхода луча из гипоцентра, ключевые множители для волн  $P$ ,  $SV$  и  $SH$  запишем в следующем виде:

$$(P) \quad \gamma \cdot \dot{\mathbf{M}} \cdot \gamma = \sin^2 i_\xi [\cos^2 \phi \dot{M}_{xx} + \sin 2\phi \dot{M}_{xy} + \sin^2 \phi \dot{M}_{yy} - \dot{M}_{zz}] + 2 \sin i_\xi \cos i_\xi [\cos \phi \dot{M}_{xz} + \sin \phi \dot{M}_{yz}] + [\dot{M}_{zz}], \quad (1)$$

$$(SV) \quad \hat{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{M}} \cdot \gamma = \sin j_\xi \cos j_\xi [\cos^2 \phi \dot{M}_{xx} + \sin 2\phi \dot{M}_{xy} + \sin^2 \phi \dot{M}_{yy} - \dot{M}_{zz}] + (1 - 2 \sin^2 j_\xi) [\cos \phi \dot{M}_{xz} + \sin \phi \dot{M}_{yz}], \quad (2)$$

$$(SH) \quad \hat{\phi} \cdot \dot{\mathbf{M}} \cdot \gamma = \sin j_\xi [\frac{1}{2} \sin 2\phi (\dot{M}_{yy} - \dot{M}_{xx}) + \cos 2\phi \dot{M}_{xy}] + \cos j_\xi [\cos \phi \dot{M}_{yz} - \sin \phi \dot{M}_{xz}]. \quad (3)$$

В этих формулах использованы обозначения гл. 4. Они сгруппированы здесь так, чтобы продемонстрировать зависимость от некоторых комбинаций элементов тензора момента. При построении теории обобщенных лучей, в которой решение для объемных волн, связанное с конкретной лучевой траекторией, задается интегралом по лучевому параметру, в подынтегральное выражение в качестве множителя будет входить одно из выражений (1), (2) или (3). Это справедливо для метода Каньяра, для метода отражений (как показано в разд. 9.2), для сейсмограммы ВКБ, а также (с возможными изменениями, описанными ниже) для методов полной волновой теории, приведенных в разд. 9.6. Во всех этих методах нужно вначале решить, будет ли интересующая нас лучевая траектория выходить вверх или вниз из источника. Чтобы проиллюстрировать эту процедуру для общего  $\mathbf{M}$ , воспользуемся полной волновой теорией для  $SH$ -волн и рассмотрим волны  $S + ScS$  (которые становятся  $S_{\text{диф}}$  в зоне тени земного ядра). Таким образом, в частотной области мы можем записать

$$i_\phi^{S+ScS}(r, \Delta_0, \phi, \omega) = \frac{-i\omega \cdot i\omega}{4\pi\rho_s\rho_s^4} \int_{\Gamma} \omega^2 p(\hat{\phi} \cdot \mathbf{M} \cdot \gamma) \sigma^{(1)}(r_s) \hat{S} \hat{S} \sigma^{(1)}(r) Q_{\omega p-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta_0) dp. \quad (4)$$

Это выражение получено с учетом (9.64) или (9.69).  $SS$  — коэффициент отражения ScS (для SH-волн), а  $\Gamma$  — путь, очень похожий на приведенный на рис. 9.23, в. В формуле (4) нас интересует зависящий от источника множитель, и, чтобы получить его зависимость от лучевого параметра, заметим, что (1) — (3) можно переписать в виде

$$(P) \quad \gamma \cdot \dot{M} \cdot \gamma = (p\alpha_s/r_s)^2 [\cos^2 \phi \dot{M}_{xx} + \sin 2\phi \dot{M}_{xy} + \sin^2 \phi \dot{M}_{yy} - \dot{M}_{zz}] + 2(p\alpha_s^2/r_s)\epsilon\zeta_s [\cos \phi \dot{M}_{xz} + \sin \phi \dot{M}_{yz}] + [\dot{M}_{zz}], \quad (5)$$

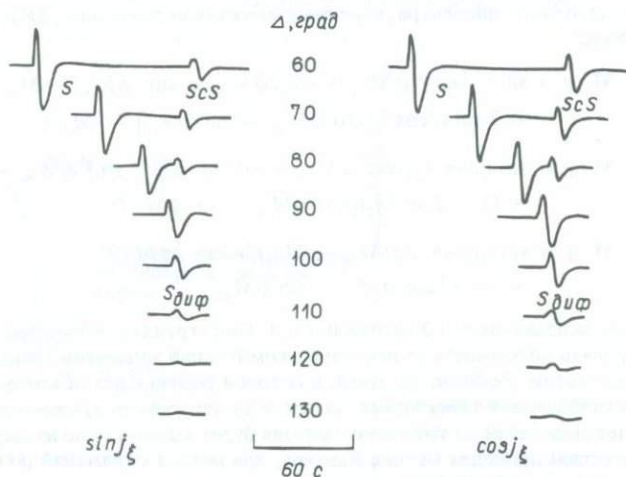
$$(SV) \quad \dot{p} \cdot \dot{M} \cdot \gamma = (p\beta_s^2/r_s)\epsilon\eta_s [\cos^2 \phi \dot{M}_{xx} + \sin 2\phi \dot{M}_{xy} + \sin^2 \phi \dot{M}_{yy} - \dot{M}_{zz}] + (1 - 2\beta_s^2 p^2/r_s^2) [\cos \phi \dot{M}_{xz} + \sin \phi \dot{M}_{yz}], \quad (6)$$

$$(SH) \quad \hat{\phi} \cdot \dot{M} \cdot \gamma = (p\beta_s/r_s) [\frac{1}{2} \sin 2\phi (\dot{M}_{yy} - \dot{M}_{xx}) + \cos 2\phi \dot{M}_{xy}] + \beta_s \epsilon \eta_s [\cos \phi \dot{M}_{yz} - \sin \phi \dot{M}_{xz}]. \quad (7)$$

Символы  $\xi_s$  и  $\eta_s$  означают вертикальную медленность [например,  $\xi = \alpha^{-1} \cos i = (\alpha^{-2} - p^2/r^2)^{1/2}$ ], оцененную в источнике, а  $\epsilon$  равно +1 или -1 в зависимости от того, выходит ли луч вниз или вверх из источника. Подставляя (7) в (4), находим, что для расчета удобна следующая схема.

Рассчитаем и запомним два основных решения:

$$\begin{aligned} SH_1(\Delta_0, \omega) &= \int_{\Gamma} \sin j_{\xi} f(p, \omega) dp, \\ SH_2(\Delta_0, \omega) &= \int_{\Gamma} \cos j_{\xi} f(p, \omega) dp, \end{aligned} \quad (8)$$



Два набора сейсмограмм волн  $S + ScS$  (поляризованных как SH). Расчет сделан для модели Земли ПЕМ-С [108], при этом взята характеристика длиннопериодного сейсмометра (15 — 100) и момент  $M_0(t)$  в виде линейно растущей функции длительностью 4 с. Для расчета сейсмограмм, приведенных *слева*, использована зависимость подынтегрального выражения от  $\sin j_{\xi}$ ; *справа* взята зависимость от  $\cos j_{\xi}$ . Заметим, что отношение амплитуд  $ScS/S$  больше для зависимости от  $\cos j_{\xi}$ , чем от  $\sin j_{\xi}$ . Это происходит потому, что седло для ScS появляется при значительно меньшем лучевом параметре, чем седло для S. Соответствующий эффект наблюдается по отношению к  $\sin j_{\xi}$ , а  $\cos j_{\xi}$  сравнительно нечувствителен к положению седловой точки.

где для рассматриваемой задачи

$$f(p, \omega) = i\omega(4\pi\rho_s\beta_s^4)^{-1}\omega^2 p\sigma^{(1)}(r_s)\dot{S}\dot{S}\sigma^{(1)}(r)Q_{\omega p^{-1}}^{(2)}(\cos \Delta_0), \quad \sin j_\xi = p\beta_s/r_{s\omega} \quad \cos j_\xi = \beta_s r_s.$$

Чтобы рассчитать набор сейсмограмм для любого заданного тензора скорости момента  $\mathbf{M}$ , можно умножить спектр выражения  $[\frac{1}{2} \sin 2\phi (M_{yy} - M_{xx}) + \cos 2\phi M_{xy}]$  на  $SH_1(\Delta_0, \omega)$ , а спектр  $[\cos \phi M_{yz} - \sin \phi M_{xz}]$  — на  $SH_2(\Delta_0, \omega)$ , сложить результаты и, проинтегрировав сумму по действительным частотам, вернуться во временную область. Эти действия выполняются очень быстро. Вычислительную схему можно упростить, если заранее решить, что  $\mathbf{M}$  соответствует сдвиговой дислокации с заданным простиранием, падением и наклоном и заданной временной функции  $M_0(t) = \mu A i$ . В этом случае мы образуем  $M_0^*(t) * SH_1(\Delta_0, t)$  и  $M_0^*(t) * SH_2(\Delta_0, t)$ . Два таких набора сейсмограмм, прошедших предварительную рекурсивную фильтрацию с целью учесть влияние типичного длиннопериодного сейсмометра, показаны ниже на рисунке. Достоинство этого подхода состоит в том, что сейсмограмма для заданного расстояния ( $\Delta_0$ ) задается просто как *линейная сумма* двух сейсмограмм, показанных для этого расстояния на рисунке. Коэффициенты в этой линейной сумме являются функциями от простирания, падения, наклона и азимута ( $\phi$ ) от источника на приемник, поэтому легко проверить влияние изменения механизма очага. Два коэффициента равны  $[\frac{1}{2} \sin 2\phi (M_{yy} - M_{xx}) + \cos 2\phi M_{xy}]/M_0$  и  $[\cos \phi M_{yz} - \sin \phi M_{xz}]/M_0$ , где компоненты  $\mathbf{M}$  приведены в дополнении 4.4.

Если вместо  $SH$  рассматривать выходящую из источника волну  $P$ , тогда нужно запомнить *три* основных типа решений:

$$P_1(\Delta_0, \omega) = \int_{\Gamma} \sin^2 i_\xi f(p, \omega) dp, \quad P_2(\Delta_0, \omega) = \int_{\Gamma} 2 \sin i_\xi \cos i_\xi f(p, \omega) dp, \\ P_3(\Delta_0, \omega) = \int_{\Gamma} f(p, \omega) dp.$$

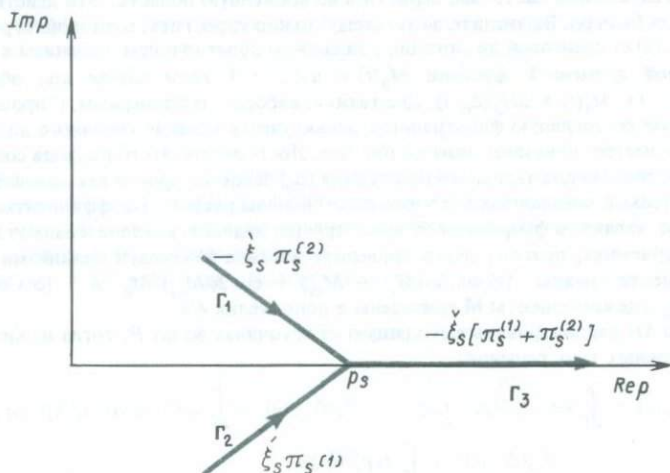
Если рассматривается взрывной источник, необходимо только решение  $P_3$ . Для выходящих из источника  $SV$ -волн мы в общем случае должны пользоваться двумя основными решениями:

$$SV_1(\Delta_0, \omega) = \int_{\Gamma} \sin j_\xi \cos j_\xi f(p, \omega) dp, \quad SV_2(\Delta_0, \omega) = \int_{\Gamma} (1 - 2 \sin^2 j_\xi) f(p, \omega) dp.$$

В основе проведенного нами рассмотрения лежит неявное допущение, что аппроксимации ВКБ точны для вертикальных волновых функций, оцененных на уровне источника  $r_s$ . Это допущение было бы очевидным, если бы мы дали формальный вывод, например, уравнения (4). Это повлекло бы за собой обычную процедуру представления источника, эквивалентного  $\mathbf{M}$ , через разрывы в компонентах смещения и напряжения [174, 175] и оценивания возбуждения излучаемых волн путем преобразований по частоте, горизонтальному расстоянию и азимуту (разд. 7.4). Когда необходимо дифференцировать по вертикальной переменной в точке  $r_s$ , результат в преобразованной плоскости будет (если применить методы ВКБ) подобен умножению на  $i\omega\xi_s$  с плюсом или минусом для  $P$ -волн и на  $i\omega\eta_s$  для  $S$ -волн. Это происходит потому, что вертикальные волновые функции имеют фазовые множители вида  $\exp(\pm i\omega|\xi|dr)$ . Ясно, что мы выбрали сокращенный путь, не давая строгого вывода формулы (4), и вместо этого записали ее, используя выражение из теории ВКБ для характеристики излучения, выведенной в гл. 4.

Для волн с лучами, выходящими из источника круто вниз и вверх, теория ВКБ будет точна, однако для лучей, выходящих почти горизонтально, необходимо применить более точный метод. Здесь возникают сразу две трудности. Во-первых, аппроксимация ВКБ для  $e\xi_s$  (или  $e\eta_s$ ) в (5) — (7) может приводить к значительным погрешностям. Во-вторых, выбор пути интегрирования в плоскости комплексного  $p$  усложняется из-за необходимости рассматривать волновые функции для лучей, отклоняющихся как вверх, так и вниз. Пер-

вая проблема легко решается использованием равномерной асимптотической аппроксимации типа (9.66). (Заметим, что для выходящих вниз лучей требуется, чтобы  $\varepsilon \xi_s = \xi_s$ , поскольку  $\xi_s$  имеет фазу, которая увеличивается, если  $r_s$  увеличивается над точкой поворота, а для выходящих вверх лучей требуется, чтобы  $\varepsilon \xi_s = -\xi_s$ .) Решение второй проблемы состоит в том, чтобы разбить расчет на три отдельных линейных интеграла способом, очень близким к тому, который использовался при решении задачи шепчущей галереи (см. рис. 9.30, б, в, г). Критический лучевой параметр  $p_s$ , при котором сам уровень источника



Плоскость комплексного лучевого параметра с показанными на ней контуром  $\Gamma_1$  для луча, отклоняющегося от источника вверх,  $\Gamma_2$  для луча, отклоняющегося от источника вниз, и  $\Gamma_3$  для комбинированного подынтегрального выражения, дающего оценку просачивания энергии вверх от глубины источника. Возле каждого контура указаны соответствующие волновые функции и обобщенные вертикальные медленности для уровня источника  $r_s$ .

является точкой поворота, равен  $p_s = r_s/\alpha_s$ . Слева от этой точки в плоскости комплексного лучевого параметра, как показано на приведенном выше рисунке, мы рассчитываем отклоняющиеся вниз волны по пути  $\Gamma_2$  с  $\xi_s = \xi_s \pi_s^{(1)}$  в подынтегральном выражении и используем путь  $\Gamma_1$  (с  $\xi_s = -\xi_s \pi_s^{(2)}$ ) для волн, отклоняющихся вверх. Оба подынтегральных выражения объединяются в точке вблизи  $p_s$ . Вправо на пути  $\Gamma_3$  подынтегральное выражение затухает экспоненциально, что описывает эффект просачивания энергии по туннелю вверх от уровня источника  $r_s$  до уровня точки поворота в слое с источником, и от этого уровня она может распространяться дальше вверх, но со сравнительно малыми потерями.

Наконец, заметим, что для описания объемных волн, образованных системой пар сил, нужны пять различных линейных комбинаций компонент  $M_{ij}$ . [Из (1) и (2) мы видим, что три различных комбинации элементов тензора момента нужны для волн  $P$  и  $SV$  и еще две комбинации появляются в (3) для  $SH$ .] Формулы для поверхностных волн в дальней зоне, полученные в гл. 7, (7.147) — (7.150), также можно записать, используя те же самые пять линейных комбинаций  $M_{ij}$ . Следовательно, для каждого значения азимута от источника можно надеяться в лучшем случае получить (из данных в дальней зоне) только пять линейных ограничений для шести независимых компонент  $\mathbf{M}$ .

для в распределении скорости, по всей вероятности, оказывает наибольшее влияние на объемные волны с такими лучевыми траекториями, которые испытывают поворот вблизи аномальной структуры. Иными словами, волны, содержащие максимум информации о некоторой скоростной аномалии, — это те волны, которые затрачивают наибольшее время на прохождение в окрестности этой аномалии. Следовательно, они будут идти горизонтально на глубине аномалии (т.е. иметь там точку поворота). По отношению к этим проблемам методы Каньяра и Фукса отличаются друг от друга, поскольку первый основан на обобщенных лучах (а рассчитывать более нескольких сотен лучей непрактично), в то время как второй включает все многократные волны в заданном интервале глубин и заданном диапазоне медленностей ( $dT/d\Delta$ ). Сравнение этих методов см. на рис. 9.9.

В методе Схольте расчеты вблизи точек поворота проводятся так же, как в задачах для отражений под малыми углами. Однако важно уметь точно рассчитывать вертикальные волновые функции. Именно несоблюдение этого условия приводит к неточности сейсмограмм ВКБ для задач при скользящем падении луча. Используется ли аппроксимация Лангера либо численное интегрирование уравнений движения, на расчетную форму волны должен оказывать влияние способ, которым проведена интерполяция скоростей (в модели Земли). Чаще всего модели Земли задаются значениями плотности и скоростей  $P$ - и  $S$ -волн на дискретных глубинах, и среди геофизиков нет согласия относительно того, как получать значения параметров на промежуточных уровнях. Обычно проводят линейную интерполяцию, но может быть принят и закон  $ar^b$  (где  $a$  и  $b$  постоянны для данного слоя). Аппроксимация Земли плоской моделью наряду с пачкой однородных плоских слоев, используемой в методах Каньяра и Фукса, представляет собой другую форму интерполяции (см. рисунок в дополнении 9.9). Вероятно, прежде чем решить, какой из методов расчета сейсмограмм объемных волн наиболее приемлем для конкретной задачи, необходимо полностью изучить и оценить влияние различных законов интерполяции в исходной модели Земли

## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ

- Abramovic F.* Numerical seismograms for a layered elastic solid. Bulletin of the Seismological Society of America, **60**, 1861 — 1876, 1970.
- Budden K. G.* Radio Waves in the Ionosphere. Cambridge University Press, 1961.
- Буллен К. Е.* Введение в теоретическую сейсмологию. — М.: Мир, 1966.
- Chapman C. H., Phinney R. A.* Diffracted seismic signals and their numerical solution. In B. A. Bolt (editor), Seismology: Body Waves and Sources (Methods of Computational Physics, Vol. 12). New York: Academic Press, 1972.
- Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
- Dey-Sarkar S. K., Chapman C. H.* A simple method for the computation of body-wave seismograms. Bulletin of the Seismological Society of America, **68**, 1577 — 1593, 1978.
- Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978.
- Fuchs K.* The reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density. Journal of the Physics of the Earth, **16**, special issue, 27 — 41, 1968.

Fuchs K., Müller G. Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison of observations. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 23, 417-433, 1971.

Heading J. An Introduction to Phase-Integral Methods. London: Methuen and Co., 1962.

HelMBERGER D. V., MalONE S. D. Modeling local earthquakes as shear dislocations in a layered half-space. Journal of Geophysical Research, 80, 4881-4888, 1975.

Nussenzveig H.M. High-frequency scattering by an impenetrable sphere. Annals of Physics (New York), 34, 23-95, 1965.

Wait J.R. Electromagnetic Waves in Stratified Media. New York: MacMillan, 1962.

Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.

Wiggins R.A., HelMBERGER D. V. Synthetic seismogram computation by expansion in generalized rays. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 37, 73-90, 1974.

\*Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.

\*Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.

## ЗАДАЧИ

- 9.1. а) Выбрав обобщенный луч, показанный на рис. 9.1 и 9.2, и путь Каньяра  $p = p(r)$ , который удовлетворяет уравнению (9.5), покажите, что расстояние  $L$ , проходимое головной волной в слое  $(n + 1)$ , будет

$$L = \frac{d\tau}{dp} \Big|_{n=1/\alpha_{n+1}}$$

- б) Покажите, что для точек на пути Каньяра вблизи и справа от  $p = 1/\alpha_{n+1}$

$$\xi_{n+1} = -i \left[ \frac{2}{L\alpha_{n+1}} (\tau - t_n) \right]^{1/2},$$

где  $t_n$  — время вступления головной волны, равное

$$t_n = \frac{r}{\alpha_{n+1}} + \text{SUM} \left( \frac{1}{\alpha_{n+1}} \right).$$

Из (5.38) и (5.39) можно получить, что

$$\dot{p}\dot{p}'_n = \frac{A - \xi_{n+1}B}{A' + \xi_{n+1}B'},$$

где

$$A = A(p) = bF\xi_n - a(a + d\xi_n\eta_{n+1})p^2,$$

$$B = cF - d\eta_n(a + d\xi_n\eta_{n+1})p^2,$$

$$A' = bF\xi_n + aGp^2,$$

$$B' = cF - d\eta_nGp^2,$$

а  $a, b, c, d, F, G$ , взяты из (5.38) с индексами  $n$  и  $n + 1$ , используемыми в данном случае для обозначения параметров, относящихся к слою непосредственно выше или ниже границы соответственно. Заметим, что  $A, B, A', B'$  действительны для  $p$  на пути Каньяра вблизи  $1/\alpha_{n+1}$ .

- в) Получите функцию  $\psi(t)$  [см. (9.7)] вблизи  $t = t_h$ . Затем воспользуйтесь соотношением

$$\frac{2}{\pi t^{1/2}} * [(t - t_h)^{1/2} H(t - t_h)] = (t - t_h) H(t - t_h)$$

и покажите, что давление в головной волне, возбужденной источником давления в виде единичной ступеньки на расстоянии  $R_S$ , приблизительно равно

$$\left(\frac{1}{rL^3}\right)^{1/2} \frac{R_S}{\alpha_{n+1}} \left[ (\dot{P}\dot{P})_1 \cdots (\dot{P}\dot{P})_{n-1} \frac{AB' + A'B}{\xi_1 A'^2} (\dot{P}\dot{P})_{n-1} \cdots (\dot{P}\dot{P})_1 \right]_{p=1/\alpha_{n+1}} \times (t - t_h) H(t - t_h).$$

Это асимптотический результат, справедливый при  $t \rightarrow t_h$ , и пример первого члена разложения волнового фронта.

Начало головной волны имеет здесь типичную форму импульса, которую мы ожидали исходя из результатов гл. 6, т.е. это интеграл по времени от импульса, излучаемого источником.

9.2. Для конкретной лучевой траектории в слоистой среде при описании формы волны, связанной с данным лучом, часто полезно определить две функции — ВРЕМЯ ( $p$ ) и РАССТОЯНИЕ ( $p$ ). Определим функцию ВРЕМЯ ( $p$ ) как время пробега вдоль луча от источника к приемнику при переменном положении приемника (но с фиксированной глубиной), а РАССТОЯНИЕ ( $p$ ) — просто как расстояние, измеренное по горизонтали между источником и приемником (т.е. горизонтальная протяженность для плоскослоистого случая и угол  $\Delta$  для сферической модели). Следовательно, для закритического отражения на рис. 9.1, б

$$\text{ВРЕМЯ } (p) = \frac{Th_1 - d_1}{\alpha_1 \cos i_1} + \frac{2Th_2}{\alpha_2 \cos i_2} + \cdots + \frac{2Th_n}{\alpha_n \cos i_n} + \frac{Th_1 - d_2}{\alpha_1 \cos i_1},$$

$$\text{РАССТОЯНИЕ } (p) = (Th_1 - d_1) \operatorname{tg} i_1 + 2Th_2 \operatorname{tg} i_2 + \cdots + 2Th_n \operatorname{tg} i_n + (Th_1 - d_2) \operatorname{tg} i_1.$$

- а) При переменном положении приемника (на фиксированной глубине) покажите, что

$$p = \frac{d(\text{ВРЕМЯ})}{d(\text{РАССТОЯНИЕ})}$$

(т.е. лучевой параметр является производной годографа).

- б) Покажите, что путь Каньяра (9.5) задается выражением

$$\tau = pr + \text{ВРЕМЯ } (p) - p \cdot \text{РАССТОЯНИЕ } (p)$$

Теперь зададим несколько вопросов о приближенном описании закритических отражений и соответствующих им особенностях в плоскости лучевого параметра.

- в) Покажите, что  $d\tau/dp = r - \text{РАССТОЯНИЕ } (p)$ .

Отметим, что тогда  $d\tau/dp = 0$  для лучевого параметра  $p_0$ , при условии что это значение соответствует реальному лучу, связывающему источник с приемником, т.е. решению уравнения  $\text{РАССТОЯНИЕ}(p) = r$ .

- г) Покажите, что  $d^2\tau/dp^2 = -d(\text{РАССТОЯНИЕ}) (p) / dp$  и, следовательно, что  $d^2\tau/dp^2$  всегда отрицательно для однократных отражений в плоскослоистой среде.

- д) Покажите, пользуясь выражением

$$\tau = \tau_{\text{refl}} + (p - p_0) \frac{d\tau}{dp} + \frac{(p - p_0)^2}{2} \frac{d^2\tau}{dp^2} + \cdots,$$

где  $t_{\text{refl}}$  — время вступления за критического отражения, что путь Каньяра  $p = p(\tau)$  действительно *должен* отклониться от действительной оси  $p$  под прямым углом при  $p = p_0$ , когда действительное  $\tau$  увеличивается, проходя значение  $t_{\text{refl}}$ .

е) Покажите, что для времен, близких к  $t_{\text{refl}}$ ,

$$\frac{dp}{d\tau} \sim \frac{1}{(t_{\text{refl}} - \tau)^{1/2}} \frac{1}{\left(2 \frac{d}{dp} \text{РАССТОЯНИЕ}\right)^{1/2}} \quad \tau < t_{\text{refl}},$$

$$\sim \frac{i}{(\tau - t_{\text{refl}})^{1/2}} \frac{1}{\left(2 \frac{d}{dp} \text{РАССТОЯНИЕ}\right)^{1/2}} \quad \tau > t_{\text{refl}}.$$

ж) Для приближенной оценки отклика на ступеньку  $(2/\pi) \int_0^t \psi(\tau)/(t-\tau)^{1/2} d\tau$  [см. (9.7)]

при временах вблизи  $t_{\text{refl}}$  вполне приемлемо заменить все медленно меняющиеся коэффициенты  $\psi(\tau)$  их значениями при  $\tau = t_{\text{refl}}$  (т.е.  $p = p_0$ ) и свернуть  $t^{-1/2}$  с единственным быстро меняющимся множителем, равным  $dp/d\tau$ .

Из п. (е) следует, что  $1/t^{1/2} * dp/dt$  для времен вблизи  $t_{\text{refl}}$  имеет вид

$$\left(2 \frac{d}{dp} \text{РАССТОЯНИЕ}\right)^{1/2} \left[ i\pi H(t - t_{\text{refl}}) - \ln\left(\frac{t - t_{\text{refl}}}{t_{\text{refl}}}\right) \right].$$

Воспользуйтесь этим результатом, чтобы получить отклик на ступенчатую функцию для за критического отражения в виде

$$R_S \left[ \frac{1}{\xi_1} \left( \frac{p}{r \frac{d}{dp} \text{РАССТОЯНИЕ}} \right)^{1/2} (\dot{P}\dot{P}_1) \cdots (\dot{P}\dot{P}_{n-1}) (\dot{P}\dot{P}_{n-1}) \cdots (\dot{P}\dot{P}_1) \right]_{p=p_0}$$

$$\times \left[ \text{Re}(\dot{P}\dot{P}_n) H(t - t_{\text{refl}}) - \frac{\text{Im}(\dot{P}\dot{P}_n)}{\pi} \ln\left(\frac{t - t_{\text{refl}}}{t_{\text{refl}}}\right) \right].$$

(Напомним, что  $R_S$  — расстояние, на котором падающая из источника волна является единичной ступенчатой функцией давления. Предполагается, что  $R_S$  не столь велико, чтобы помещать калибровочный приемник вне первого слоя.)

з) Геометролучевая теория гл. 5 утверждает, что отклик на единичную ступень задается выражением

$$\frac{R_S}{\mathcal{R}(x, \xi)} H(t - T(x, \xi)) \times \text{коэффициент, учитывающий потери энергии на границах,}$$

где  $T(x, \xi)$  — время пробега между источником в  $\xi$  и приемником в  $x$ , а  $\mathcal{R}(x, \xi)$  — функция геометрического расхождения. Ясно, что  $T(x, \xi) = t_{\text{refl}}$ . Используйте метод, примененный в задаче 4.3., чтобы показать, что

$$\mathcal{R}(x, \xi) = \xi_1 \left( \frac{r}{p} \frac{d}{dp} \text{РАССТОЯНИЕ} \right)^{1/2}.$$

(Напомним, что источник и приемник находятся в первом слое.)

и) Поскольку все коэффициенты преломления для нашего обобщенного луча вещественны и только  $\dot{P}\dot{P}_n$  — комплексный, используйте результаты п. (з) и задачи 5.14, чтобы дать вывод приближенного выражения для отклика на сту-

пень, альтернативный тому, который мы получили в п. (ж) с помощью приближения метода Каньяра.

**9.3.** Покажите, что элементы матричного пропагатора  $P(z_m, z_n)$  (для волн  $SH$  или  $P - SV$  в среде, состоящей из однородных плоских слоев, где  $z_m$  и  $z_n$  могут быть разделены несколькими различными слоями) не имеют разрывов, обусловленных  $\xi_m, \eta_m$  или любой другой вертикальной медленностью.

Выпишите в виде (9.16) точное выражение для преобразования Фурье полного давления в точке  $(r, z_0 + d_2)$  для случая, показанного на рис. 9.1, б [т.е. с включением всех многократных волн и с источником (9.1)]. Покажите, что разрезы для подынтегрального выражения в  $p$ -плоскости связаны только с  $\xi_{n+1}, \eta_{n+1}$  и  $J_0(\omega r)$ . Этот результат сильно облегчает рассмотрение деформирования пути интегрирования. Заметим, что соответствующее подынтегральное выражение для одного только обобщенного однократного отражения от Мохо, описанного формулой (9.2) для преобразования Лапласа, имеет гораздо большее число разрывов.

**9.4.а)** Покажите, что при глубоком источнике в сферически-симметричной среде луч, выходящий горизонтально, является лучом с максимальным лучевым параметром. Покажите, что этот луч соответствует перегибу годографа  $T = T(\Delta)$  и, следовательно, нулевому значению  $dp/d\Delta$ , поэтому обычное выражение для геометрического расхождения (9.44) применить невозможно.

**б)** Рассмотрим точечный источник  $S$  на расстоянии  $r_s$  в сферически-симметричной модели Земли, характеризующейся профилем скорости  $\alpha(r)$ . Допустим, что луч, выходящий горизонтально из  $S$ , регистрируется в точке  $P$  (радиус  $r$ , расстояние  $\Delta$  от  $S$ ). Покажите, что в этом случае геометрическое расхождение в  $P$  задается формулой

$$\mathcal{R}(P, S) = r \left( \frac{\sin \Delta \cos i(r)}{[1 - \zeta(r_s)]} \right)^{1/2},$$

где  $\zeta(r)$  — нормированный градиент скорости  $r/\alpha(r)(d\alpha/dr)$ . (Обратите внимание на следующее: Что такое  $\mathcal{R}^2(S, P)$  по отношению к  $\delta r_s / \delta i(r)$ ? Как можно получить  $\delta r_s / \delta i(r)$  из  $r_s / \alpha(r_s) = p$ ?)

**9.5.** В теории ВКБ фаза вертикальной волновой функции определяется заданием  $\omega \alpha^{-1} \cos i$  в качестве вертикального волнового числа и интегрированием этой величины по вертикальному расстоянию, пройденному от некоторой опорной глубины. Имея это в виду, проинтерпретируйте сумму волн  $g_n^{(1)}(r) + g_n^{(2)}(r)$  на уровне  $r > r_p$  относительно падающей волны  $g_n^{(2)}$  и отраженной волны  $g_n^{(1)}$  и покажите, что фазовое опережение  $\pi/2$  возникает при «отражении» от точки поворота.

**9.6.** Если в диапазоне глубин  $r > r_p$  используется аппроксимация ВКБ для

$$P(r, \omega) = g_{\omega p - \frac{1}{2}}^{(1)}(r) Q_{\omega p - \frac{1}{2}}^{(2)}(\cos \Delta),$$

покажите, что фаза функции  $P$  меняется наиболее быстро вдоль траекторий, на которых  $r(\sin i)/\alpha(r) = p$ .

**9.7.** По ассоциации с аппроксимацией ВКБ для  $R_i^0$  и  $S_i^0$  покажите, что  $\pi^{(j)}$  и  $\Sigma^{(j)}$ , аппроксимированные формулами (9.60) и (9.61), имеют свойство сохранять скорость потока энергии через горизонтальные сечения конусов с телесным углом  $\sin \Delta \delta \Delta \delta \phi$ , имеющим вершину в центре Земли.

**9.8.** Покажите, что групповая скорость объемных волн с временем пробега  $T$  на расстоянии  $\Delta$  на сферической поверхности Земли равна  $\Delta/T$ . Покажите, что при  $\Delta \rightarrow 0$  групповая скорость отраженной объемной волны  $ScS$  стремится к нулю, а фазовая скорость  $(d\Delta/dT)$  — к бесконечности.

**9.9.** Каковы должны быть в общем случае типичные свойства сейсмических волн вблизи каустики, зависящие от частоты и расстояния?

# Принципы сейсмометрии

## 10.1. ОСНОВНАЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ АППАРАТУРА

Данные, на которых базируется сейсмология, представляют собой записи движений почвы. Поэтому мы начнем с определения понятия «смещение почвы». Рассмотрим частицу внутри среды, которая в момент времени  $t_0$  расположена в точке  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  в декартовой системе координат, связанных с инерциальной системой отсчета. В момент  $t$  эта частица имеет координаты  $\mathbf{u} + \mathbf{x} = (u + x, v + y, w + z)$  в той же системе: смещение  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и есть *смещение почвы*. Прибор, который в момент  $t_0$  прикреплен к точке  $\mathbf{x}$  почвы и реагирует на зависящее от времени смещение  $\mathbf{u}$ , называется *сейсмометром*. Если этот прибор записывает движение почвы, его часто называют *сейсмографом*.

В принципе возможно измерить движения Земли датчиком, зафиксированным по отношению к инерциальной системе отсчета. Примером служит использование радиосигналов от квазара для измерения движений почвы в интерферометрии на больших базах; такие наблюдения становятся важным инструментом геодезических измерений. Однако все существующие сейсмометры и сейсмографы привязаны к Земле. Приемник сейсмических волн движется вместе с объектом, внутри которого распространяются волны. Далее, система отсчета, по отношению к которой обычно измеряются сейсмические движения, является инерциальной, она вращается, совершая один оборот каждые 24 ч. Тот факт, что наблюдатель во время землетрясения движется вместе с объектом, создает существенное различие между экспериментальной сейсмологией и наблюдениями в большинстве других областей физики.

В настоящее время применяются два основных метода измерения сейсмических движений. Наиболее широко используется один из них, основанный на принципе инерции, и таким инерционным датчиком в этом случае служит *маятниковый сейсмометр*. Другой метод основан на измерении деформации малой области Земли, и датчиком здесь является *деформометр*, или *стрейнсейсмометр*.

В будущем, как нам кажется, может найти применение метод, основанный на принципе сохранения момента количества движения. Перспективным для измерения жесткого вращения точки на Земле является *гироскоп*. Положим, что быстро вращающийся маховик гироскопа подвешен в отбалансированном, лишенном трения кардановом подвесе, поэтому он может совершенно свободно двигаться относительно своего центра тяжести. В отсутствие внешнего момента сил направление момента количества движения гироскопа остается неизменным по отношению к инерциальной системе отсчета, что позволяет измерять угол вращения карданового подвеса, связанного с Землей. Другое полезное свойство гироскопа — прецессию под действием момента сил — можно использовать

обнаружения вращения. Такие устройства широко используются в инерциальных навигационных системах и должны найти применение в сейсмологии, что позволит более полно описывать движения почвы. Однако достигнутые к настоящему времени чувствительность и стабильность еще недостаточны для проведения информативных геофизических измерений.

### 10.1.1. МАЯТНИКОВЫЙ СЕЙСМОМЕТР

Маятниковый сейсмометр состоит из массы  $M$ , связанной с некоторой точкой на поверхности Земли при помощи параллельно действующих пружины и демпфера (рис. 10.1). Предполагая, что движение происходит только в направлении  $x$ , обозначим движение этой точки Земли в инерциальной системе отсчета  $u(t)$  и движение массы  $M$  по отношению к точке Земли  $\xi(t)$ . Сила, с которой пружина действует на  $M$ , пропорциональна растяжению пружины  $\xi - \xi_0$ , а сила действия демпфера — скорости перемещения массы относительно точки Земли  $\dot{\xi}(t)$ . Если обозначить коэффициенты пропорциональности соответственно как  $k$  и  $D$ , уравнение движения примет вид

$$M \frac{d^2}{dt^2} [\xi(t) + u(t)] + D \frac{d\xi(t)}{dt} + k[\xi(t) - \xi_0] = 0. \quad (10.1)$$

Переобозначив смещение  $\xi(t) - \xi_0$  относительно положения равновесия  $\xi_0$  как  $\xi(t)$ , получим

$$\ddot{\xi} + 2\varepsilon\dot{\xi} + \omega_s^2\xi = -\ddot{u}, \quad (10.2)$$

где  $2\varepsilon = D/M$  и  $\omega_s^2 = k/M$ .

Приведенное уравнение показывает, что линейная комбинация  $\xi(t)$  и его производных по времени (которые могут быть измерены) позволяет воспроизвести

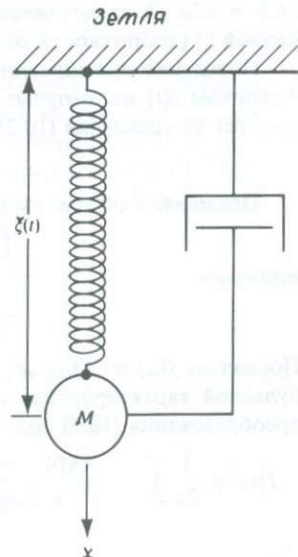


Рис. 10.1. Маятниковый сейсмометр представляет собой массу, подвешенную при помощи параллельно расположенных пружины и демпфирующего устройства.

ускорение  $\ddot{u}$  движения почвы. При очень быстрых движениях в левой части (10.2) доминирует первый член и  $\ddot{\xi}$  становится почти равным  $-\ddot{u}$ . Другими словами, при быстрых движениях запись  $\xi(t)$  воспроизводит смещение  $-u(t)$ . При очень медленных движениях доминирует третий член  $\omega_s^2 \xi$ , который становится почти равным  $-\ddot{u}$ . Таким образом, при медленных движениях запись  $\xi(t)$  воспроизводит ускорение  $\ddot{u}$ . Чувствительность пропорциональна  $T_s^2$ , где  $T_s = 2\pi/\omega_s$  — собственный период незагашенного маятника, а  $\omega_s$  — соответствующая ему угловая частота.

Отклик маятникового сейсмометра на синусоидальное смещение почвы  $\exp(-i\omega t)$  можно представить как  $X(\omega) \exp(-i\omega t)$ .  $X(\omega)$  называют *частотной характеристикой*; она полностью описывает работу маятника. При  $u(t) = \exp(-i\omega t)$  и  $\xi(t) = X(\omega) \exp(-i\omega t)$  уравнение (10.2) дает

$$X(\omega) = \frac{-\omega^2}{\omega^2 + 2i\varepsilon\omega - \omega_s^2}.$$

Определяя амплитудную характеристику  $|X(\omega)|$  и фазовую характеристику (задержку)  $\phi(\omega)$  как

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{i\phi(\omega)},$$

находим

$$|X(\omega)|^{-1} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}}$$

и

$$\phi(\omega) = -\arctg \frac{2\varepsilon\omega}{\omega^2 - \omega_s^2} + \pi. \quad (10.3)$$

При  $\omega \gg \omega_s$   $|X(\omega)| \rightarrow 1$  и  $\phi(\omega) \rightarrow \pi$ . Другими словами, маятник без искажений, записывает смещение почвы, изменяя, правда, его знак. Обращение полярности обычно устраняется указанием направления движения на записи. На рис. 10.2 показаны  $|X(\omega)|$  и  $\phi(\omega)$  [без члена, равного  $\pi$ , в (10.3)]. Параметром кривых является  $h = \varepsilon/\omega_s$ ;  $h$  представляет собой *затухание*, равное половине величины, обратной  $Q$  (добротности осциллятора с затуханием).

Поведение маятникового сейсмометра можно также полностью описать его откликом  $f(t)$  на импульс ускорения  $\ddot{u}(t) = \delta(t)$ , где  $\delta$  — функция Дирака. Как следует из уравнения (10.2),  $f(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\ddot{f} + 2\varepsilon\dot{f} + \omega_s^2 f = -\delta(t). \quad (10.4)$$

Применяя к обеим частям уравнения (10.4) преобразование Фурье и полагая

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt = f(\omega), \quad (10.5)$$

получаем

$$f(\omega) = \frac{-1}{-\omega^2 - 2i\varepsilon\omega + \omega_s^2}.$$

Поскольку  $f(\omega) = X(\omega)/\omega^2$ , частотную характеристику можно получить из импульсной характеристики преобразованием Фурье и наоборот. Из обратного преобразования (10.5) получаем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t) d\omega}{\omega^2 + 2i\varepsilon\omega - \omega_s^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t) d\omega}{(\omega - \omega_1 + i\varepsilon)(\omega + \omega_1 + i\varepsilon)}, \quad (10.6)$$

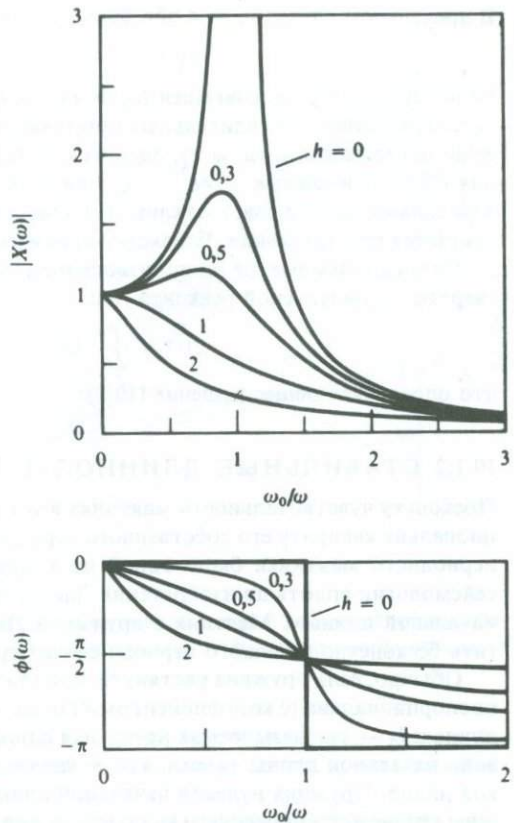


Рис. 10.2. Амплитудная характеристика  $|X(\omega)|$  и фазовая характеристика (задержка)  $\phi(\omega)$  маятникового сейсмометра согласно (10.3).

где  $\omega_1^2 = \omega_s^2 - \varepsilon^2$ . Если мы продолжим  $\omega$  в комплексную область, то найдем, что полюсы подынтегрального выражения всегда лежат в нижней полуплоскости, поскольку  $\varepsilon > 0$ . Тогда при  $t < 0$  интеграл вдоль действительной оси можно заменить интегралом по полуокружности бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости, который равен нулю благодаря множителю  $|\exp(-i\omega t)| = \exp(+\text{Im}\{\omega t\})$ . Таким образом,

$$f(t) = 0, \quad t < 0. \quad (10.7)$$

Для  $t > 0$  вклады вычетов в полюсах дают при  $\omega_s > \varepsilon$

$$f(t) = \frac{-1}{\omega_1} e^{-\varepsilon t} \sin \omega_1 t, \quad (10.8)$$

а в случае  $\omega_s < \varepsilon$ ,

$$f(t) = \frac{-1}{2\sqrt{\varepsilon^2 - \omega_s^2}} \{ \exp[-(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \omega_s^2})t] - \exp[-(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \omega_s^2})t] \}. \quad (10.9)$$

В предельном случае  $\omega_s = \varepsilon$  обе формулы дают

$$f(t) = -te^{-\varepsilon t}, \quad t > 0. \quad (10.10)$$

Если сейсмометр недозагашен ( $\omega_s \gg \varepsilon$ ), импульсный отклик содержит нежелательный «звон» (т.е. длительные незатухающие колебания). С другой стороны, если он переагашен ( $\omega_s \ll \varepsilon$ ), одна из констант в показателях экспонент уравнения (10.9), а именно  $\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \omega_s^2}$ , близка к  $1/2 (\omega_s^2/\varepsilon)$ , и чем больше затухание, тем сильнее запаздывает отклик. По этим причинам наилучший результат достигается при затухании, близком к критическому,  $\omega_s = \varepsilon$ .

Отклик сейсмометра на произвольное ускорение почвы  $\ddot{u}(t)$  можно получить сверткой с импульсной реакцией  $f(t)$ :

$$\xi(t) = \int_0^{\infty} \ddot{u}(t - \tau)f(\tau) d\tau, \quad (10.11)$$

что определяет общее решение (10.2).

### 10.1.2. СТАБИЛЬНЫЕ ДЛИННОПЕРИОДНЫЕ МАЯТНИКИ

Поскольку чувствительность маятника к ускорению на низких частотах пропорциональна квадрату его собственного периода, построение стабильного длиннопериодного маятника было одной из важнейших проблем инструментальной сейсмологии вплоть до изобретения Лакостом в 1935 г. [202] пружины «нулевой начальной длины». Маятник с пружиной Лакоста может теоретически достигать бесконечно большого периода без потери стабильности.

Обычно, если пружина растянута, приложенная к массе возвращающая сила  $f$  пропорциональна (с коэффициентом  $k$ ) ее удлинению  $l - l_0$ , где  $l$  — фактическая длина и  $l_0$  — так называемая начальная длина. Таким образом, пружина «нулевой» начальной длины такова, что ее натяжение пропорционально ее фактической длине. Пружина нулевой начальной длины должна быть намотана с крутящим усилием, приложенным к проволоке при намотке, и имеет остаточное натяжение даже при отсутствии нагрузки вследствие конечного размера витков. При малой нагрузке остаточное натяжение сохраняет длину пружины неизменной до тех пор, пока нагрузка не увеличится до определенной величины. Тогда витки начинают разделяться, и длина пружины будет увеличиваться пропорционально нагрузке  $f = kl$ .

Простой, но довольно точный тест, позволяющий проверить, имеет ли данная пружина нулевую начальную длину, проводится следующим образом: подвесим пружину вертикально и приложим к ней нагрузку, приводящую ее к некоторой новой равновесной длине  $l$ . Пусть она совершает вертикальные колебания относительно этого положения равновесия; измерим период колебаний. Для любой пружины, подчиняющейся закону Гука, как нетрудно показать, должно выполняться соотношение  $T = 2\pi[(l - l_0)/g]^{1/2}$ , откуда можно найти  $l - l_0$ . Если это  $l - l_0$  равно непосредственно измеренному значению  $l$ , пружина имеет нулевую начальную длину.

На рис. 10.3 показано, каким образом такая пружина используется для измерения вертикальной составляющей движения почвы. Масса  $M$  закреплена на стержне, который вращается вокруг шарнира (точка  $B$ ). Один конец пружины нулевой начальной длины прикреплен к точке  $A$  короткой гибкой струной, а дру-

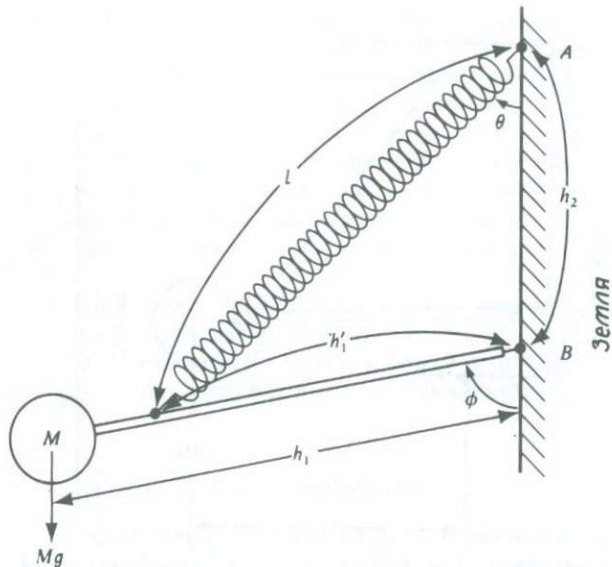


Рис. 10.3. Вертикальный маятник (Лакоста) с пружиной нулевой начальной длины. Поскольку маятник реагирует на изменения силы тяжести, этот прибор иногда называют гравиметром.

гой конец тем же способом прикреплен к точке на стержне недалеко от массы  $M$ . Точка  $A$  расположена на одной вертикали с точкой  $B$  выше нее, и обе они связаны с почвой.

Рассмотрим равновесие маятника, когда отсутствуют движения почвы. Момент сил относительно точки  $B$  благодаря силе тяжести, действующей на  $M$ , равен  $Mgh_1 \sin \phi$ , где  $h_1$  — длина стержня и  $\phi$  — угол между стержнем и вертикалью. Благодаря нулевой начальной длине момент сил, создаваемый пружиной, равен  $klh_2 \sin \theta$ , где  $l$  — длина пружины,  $k$  — коэффициент упругости пружины,  $h_2$  — расстояние между  $A$  и  $B$ ,  $\theta$  — угол между пружиной и вертикалью. В положении равновесия два момента сил уравнивают друг друга:

$$Mgh_1 \sin \phi = klh_2 \sin \theta.$$

С другой стороны, из геометрических соображений следует

$$l \sin \theta = h'_1 \sin \phi, \quad (10.12)$$

где  $h'_1$  — расстояние вдоль стержня от  $B$  до точки прикрепления пружины. Следовательно, условие равновесия принимает вид

$$Mgh_1 \sin \phi = kh'_1 h_2 \sin \phi,$$

или

$$Mgh_1 = kh'_1 h_2. \quad (10.13)$$

Интересно, что это условие не зависит от  $\phi$ . Другими словами, если длины и масса выбраны правильно, то восстанавливающая сила отсутствует, и любое

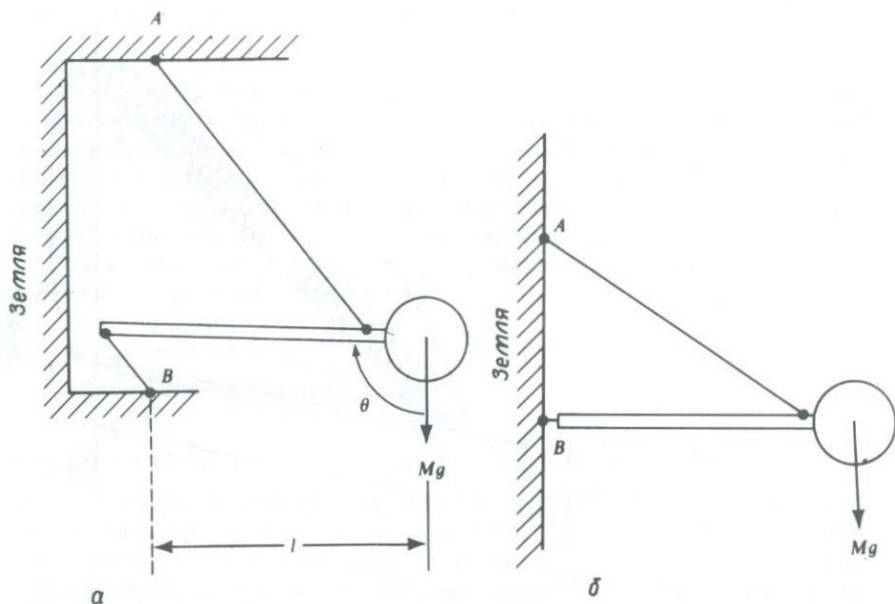


Рис. 10.4. Горизонтальные маятники. *а* — подвес Цельнера. Обе струны находятся под натяжением по избежание продольной неустойчивости. *б* — подвес типа «калитки». Линия *АВ*, связанная с землей, слегка отклоняется от вертикали в случаях *а* и *б*. На практике опора *В* в случае *б* и на рис. 10.3 снабжена кронштейном, так что опора *В* находится под натяжением.

положение массы есть положение равновесия. Это означает, что маятник имеет бесконечный собственный период колебаний.

Есть много способов подвеса массы и пружины, отличающихся от показанного на рис. 10.3 и также позволяющих получить бесконечный период. На практике бесконечный период недостижим из-за неточности длины пружины и положения шарниров, конечной величины восстанавливающей силы шарниров, а также вариаций коэффициента упругости  $k$  вследствие изменений температуры, вариаций силы тяжести и других возмущений. Сейсмометр с максимальным периодом, равным 80 с, применявшийся в регулярных наблюдениях, был разработан Ф. Ленером из Сейсмологической лаборатории Калифорнийского технологического института. Стандартные длиннопериодные сейсмометры обычно имеют периоды от 15 до 30 с.

Как было сказано выше, чувствительность маятника к ускорению на длинных периодах пропорциональна квадрату периода маятника  $T_s$ . Согласно (10.2), при постепенном изменении ускорения на величину  $-\Delta a$  мы получаем

$$\xi = \frac{\Delta a}{\omega_s^2} = \frac{\Delta a}{(2\pi)^2} T_s^2.$$

Например, если  $T_s \approx 60$  с, то  $\xi = \Delta a \cdot 10^2$  см. Масса маятника переместится на 1 мм, если ускорение изменится на 1 мГал ( $1 \text{ мГал} = 10^{-3} \text{ см/с}^2$ ).

Устойчивые длиннопериодные маятники для сейсмометров, измеряющих горизонтальную компоненту, известны уже давно. Длиннопериодный горизонтальный маятник современного стандартного сейсмографа схематически показан на рис. 10.4,а. Верхняя и нижняя струны, поддерживающие массу и стержень, находятся под натяжением их веса. Этот способ подвеса, изобретенный Цельнером [345], устраняет трение в точке опоры, возникавшее в горизонтальных маятниках ранних конструкций (основной принцип которых показан на рис. 10.4,б). При колебаниях малой амплитуды маятник движется в плоскости, наклонной под углом  $\theta$  к вертикальной плоскости. Компонента силы тяжести в этой плоскости равна  $g \cos \theta$ .

Следовательно, период маятника равен  $2\pi\sqrt{l/(g \cos \theta)}$ , где  $l$  — длина стержня. По мере приближения маятника к горизонтальному положению ( $\theta \rightarrow \pi/2$ ) период колебаний приближается к бесконечности и маятник теряет устойчивость. Максимальный устойчивый период, достигнутый в стандартных приборах, составляет около 30 с.

### 10.1.3. ИЗМЕРЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО УСКОРЕНИЯ

Почти все конструкции маятниковых сейсмометров не позволяют разделить эффекты горизонтального ускорения почвы и вклад силы тяжести под действием наклона. На рис. 10.5 эта ситуация проиллюстрирована на примере простого маятника. Когда корпус сейсмометра наклонен на угол  $\delta\psi$ , на шарнир будет действовать момент сил, он вызовет движение маятника относительно корпуса. Эффект этого момента сил такой же, как создаваемый горизонтальным ускорением величиной  $g \sin \delta\psi$ .

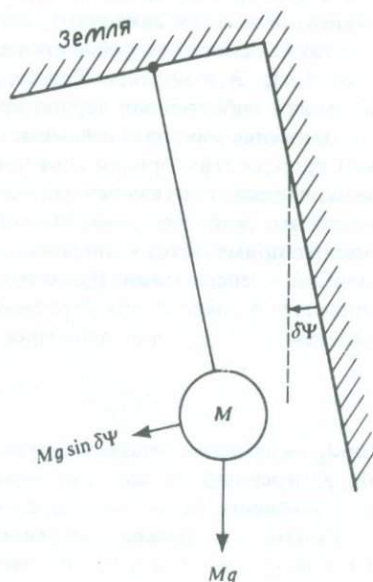


Рис. 10.5. Наклон вызывает кажущееся горизонтальное ускорение подвешенной массы.

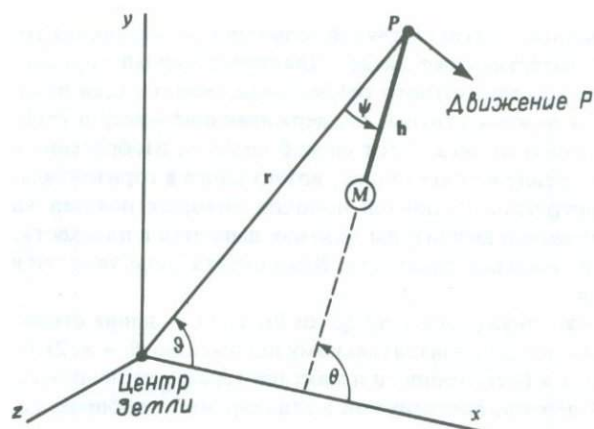


Рис. 10.6. Движение маятника, находящегося под действием силы притяжения, направленной к центру Земли. Система декартовых координат, показанная на рисунке, является инерциальной.

Первая попытка разделить эффекты наклона и горизонтального ускорения была сделана Фарвелом [115] при помощи гироскопа, но до настоящего времени большинство сейсмологов удовлетворялось довольно слабо обоснованным предположением, что в конкретном сигнале преобладает либо ускорение, либо наклон. Реакцию горизонтального маятника (см. рис. 10.4) детально анализировал Роджерс [276]; помимо невозможности разделить наклоны и горизонтальное ускорение, он описал другую особенность, присущую этим конструкциям. Хотя прибор чувствителен главным образом к горизонтальным ускорениям (и эквивалентным им наклонам), перпендикулярным к стержню, на его отклик влияет также полное ускорение стержня и компоненты наклона, изменяющие угол  $\theta$  (рис. 10.4). Эти эффекты Роджерс назвал «параметрическими», поскольку они изменяют собственный период прибора.

Движение маятника сейсмометра обычно принято рассматривать в декартовых координатах, причем сила притяжения действует параллельно оси  $z$ . На самом деле сила притяжения направлена к точке, центру Земли. Прибор, использующий это свойство гравитационного поля, называется маятником Шулера. Он широко применяется в инерциальной навигации и в будущем может найти применение в сейсмологии. Идею его устройства иллюстрирует рис. 10.6. Маятник подвешен в точке  $P$ , для упрощения описания мы ограничим его движение плоскостью  $xu$ . Уравнение движения маятника имеет вид

$$J_p \frac{d^2\theta}{dt^2} = M(\mathbf{h} \times \mathbf{g})_z - M \left( \mathbf{h} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)_z, \quad (10.14)$$

где  $J_p$  — момент инерции маятника относительно  $P$ ,  $\theta$  — угол поворота маятника, измеренный от оси  $x$ ,  $M$  — масса маятника,  $\mathbf{h}$  — расстояние массы от  $P$ ,  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести,  $\mathbf{r}$  — расстояние  $P$  от центра Земли.

Рассмотрим движение маятника при горизонтальных перемещениях точки  $P$ , т.е. в направлении, перпендикулярном направлению к центру Земли. В этом слу-

чае компоненты вектора ускорения  $d^2\mathbf{r}/dt^2$  равны  $(-r\ddot{\vartheta} \sin \theta, r\ddot{\vartheta} \cos \theta, 0)$ , где  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{r}$  и осью  $x$ . Компоненты других векторов равны  $\mathbf{h} = (-h \cos \theta, -h \sin \theta, 0)$  и  $\mathbf{g} = (-g \cos \vartheta, -g \sin \vartheta, 0)$ . Уравнение (10.14) можно теперь записать как

$$J_p \frac{d^2\theta}{dt^2} = Mhg \sin(\vartheta - \theta) + Mhr\ddot{\vartheta}. \quad (10.15)$$

Поскольку угол  $\psi$  отклонения маятника от вертикали равен  $\theta - \vartheta$ , можно записать это же уравнение иначе:

$$J_p \left( \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \right) + Mgh \sin \psi = Mhr\ddot{\vartheta} \quad (10.16)$$

или

$$J_p \left( \frac{d^2\psi}{dt^2} \right) + Mhg \sin \psi = -(J_p - Mhr)\ddot{\vartheta}. \quad (10.17)$$

Период маятника  $T_0$  при малых  $\psi$ , когда  $\sin \psi \approx \psi$ , находится из соотношения

$$\frac{2\pi}{T_0} = \left( \frac{Mgh}{J_p} \right)^{1/2}. \quad (10.18)$$

Сила, вызванная горизонтальным ускорением, становится равной нулю при  $J_p = Mhr$ . Это условие эквивалентно

$$\frac{2\pi}{T_0} = \left( \frac{Mgh}{Mhr} \right)^{1/2} = \left( \frac{g}{r} \right)^{1/2}, \quad (10.19)$$

где  $T_0$  — период математического маятника с длиной, равной радиусу Земли. Соответствующий период — 84 мин. Маятник с таким периодом называют *маятником Шулера*.

Если установить маятник Шулера на самолете, он всегда будет направлен к центру Земли, и на него не будет влиять горизонтальное ускорение. Если мы установим на маятнике Шулера акселерометр для измерения горизонтальных ускорений во время полета из одной точки Земли к другой и затем дважды проинтегрируем это ускорение по времени, то сможем измерить расстояние между двумя точками.

Аппаратура, разработанная для инерциальной навигации, потенциально применима для более точного описания движений точек Земли, например для разделения ускорений и наклонов. Однако чувствительность современных приборов еще недостаточна для практического применения в геофизике.

#### 10.1.4. ИЗМЕРЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ И ВРАЩЕНИЙ

Рассмотрим стрейнсейсмометр (деформометр), измеряющий относительное смещение двух близких точек в Земле так, как это показано на рис. 10.7,а. Движение  $P_1$  при помощи стержня, закрепленного в  $P_1$ , передается в  $P'_1$ , и измеряется относительное расположение  $P'_1$  и  $P_2$ . Поскольку измеряемое движение почвы на практике имеет значительно более длинные периоды, чем собственный период волн в стержне, деформациями в самом стержне можно пренебречь, и его можно считать абсолютно жестким.

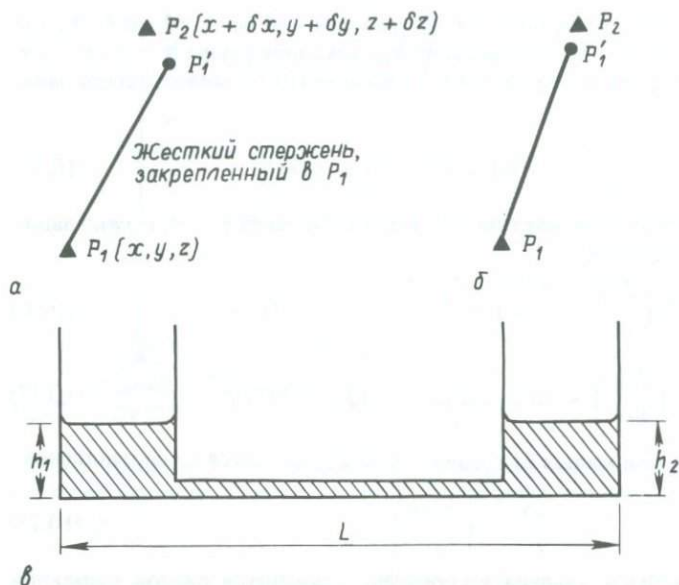


Рис. 10.7. Измерение деформации и наклона. *а* — стержень  $P_1P_1'$  закреплен в  $P_1$  и вращается относительно  $P_1$ . *б* — стержень  $P_1P_1'$  закреплен в  $P_1$ , но  $P_1, P_1'$  и  $P_2$  практически лежат на одной прямой; это достигается либо помещением в  $P_1$  шарнира, либо использованием в качестве датчика расстояния  $P_1'P_2$  емкостного детектора, нечувствительного к малым отклонениям  $P_1, P_1', P_2$  от единой прямой. *в* — наклономер состоит из двух резервуаров с жидкостью, связанных трубой. Контролируются уровни жидкости  $h_1$  и  $h_2$ , и изменения величины  $(h_2 - h_1)/L$  со временем интерпретируются как наклон. Об эффектах температур на измерения наклона см. [29].

Первоначально  $P_1$  находится в точке  $\mathbf{x}$ , а  $P_2$  — в  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ . Эти точки претерпевают смещения, равные соответственно  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$ , так что  $P_2$  перемещается в  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\delta\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ . (Мы пользуемся здесь лагранжевым описанием движения; см. разд. 2.1).

Смещение  $P_1'$  равно смещению  $P_1$  плюс дополнительный член, обусловленный вращением  $(\text{rot } \mathbf{u})/2$  [см. уравнение (2.2)]. С точностью до членов первого порядка длина и ориентация стержня определяются вектором  $\delta\mathbf{x}$ , так что смещение  $P_2$  относительно  $P_1'$  равно  $\mathbf{u} + (\delta\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{u} - [1/2 (\text{rot } \mathbf{u})] \times \delta\mathbf{x}$ . Можно представить  $i$ -ю компоненту этого вектора как

$$\delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon_{ijk} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \delta x_k,$$

или, в ином виде, как  $e_{ij}\delta x_j$ , где  $e_{ij}$  — декартовы компоненты тензора деформаций

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Этот результат подтверждает, что деформометр действительно чувствителен к компонентам деформаций, а не к вращению.

На практике измеряется не вектор  $e_{ij}\delta x_j$ , а скалярная разность между  $P_2P_1$  и  $P'_1P_1$ , так что  $P_1$  должно обеспечивать только опору для стержня, а сам «стержень» может быть и проволокой. Вращение не принимается во внимание, и  $P_2P_1$  и  $P'_1P_1$  располагают в одну линию (как на рис. 10.7,б). В соответствии с уравнением (2.3) длина  $P_2P'_1$ , равная  $|\delta x + \delta u| - |\delta x|$ , в этом случае будет  $e_{ij}v_j|\delta x|$ , где  $v$  — единичный вектор, направленный вдоль стержня. Чтобы определить шесть компонент деформаций, нам нужно иметь в общем случае шесть различных деформометров, каждый из которых имеет свое направление  $v$ . Если измерения проводятся вблизи свободной поверхности Земли, условие нулевых напряжений накладывает три линейных ограничения на компоненты тензора напряжений, так что для полного определения тензора деформаций нужны только три деформометра. На измерения местного поля деформаций может влиять множество побочных локальных факторов, что делает его отличным от интересующего геофизиков поля деформаций. Например, значительное влияние может оказывать сама выемка [150], в которую помещен инструмент, или рельеф земной поверхности в месте установки.

Для измерения деформаций и вращений можно использовать группу маятниковых сейсмометров, расположив их на некотором участке земной поверхности; однако эффективность такой группы ограничена из-за значительной неоднородности строения верхних слоев Земли [281].

Датчик вращения можно получить, подвесив тело в точке, являющейся его центром масс, и связав его с поверхностью Земли при помощи пружины и демфера. Этот подход опробовался не раз, но никогда не приводил к надежным результатам.

Другой подход основан на использовании гироскопа. В соответствии с законом сохранения момента количества движения вращающееся тело, подвешенное в центре масс, при отсутствии внешних моментов сил будет сохранять в инерциальной системе координат неизменное положение оси вращения. Это позволяет измерять движение Земли относительно инерциальной системы координат. Здесь мы подходим к возможности измерения чандлеровских колебаний и перемещений литосферных плит при помощи гироскопа. Однако достигнутый уровень чувствительности датчиков вращения еще не позволяет использовать их в практике геофизических измерений.

Особый случай вращения вокруг горизонтальной оси называется в геофизике *наклоном*. Вектор малого вращения можно описать тремя компонентами; наклон описывается двумя горизонтальными компонентами. Мы уже отмечали, что принципы, на которых основаны современные наклономеры и горизонтальные акселерометры, ни в коей мере не позволяют разделить эти два эффекта. Маятниковые наклономеры широко использовались, как подробно описал Мельхиор [227], для измерения упругих земных приливов. Помимо маятников для измерения наклонов в геофизике широко применяются уровенные приборы, состоящие из двух заполненных жидкостью резервуаров, соединенных трубкой; измеряется разность уровней в резервуарах (рис. 10.7,в). Пространственные флуктуации температуры жидкости могут порождать случайные сигналы; они становятся слабее, если два резервуара соединяет не труба, а открытый, наполо-

вину заполненный канал. С наклономером такого типа при расстоянии между резервуарами 150 м и интерферометрами в качестве датчиков уровня воды Майкельсону и Гейлу в 1919 г. [230] удалось зарегистрировать приливные наклоны.

Сравнительно недавно стал популярен способ измерений, основанный на наблюдении за перемещением воздушного пузыря внутри рабочей жидкости, заключенной под слегка изогнутой горизонтальной пластиной. Эти измерения наклонов производятся на сравнительно коротких базах (~ 20 см). Положение пузыря непрерывно контролируется, и при наличии наклона генерируется сигнал, пропорциональный смещению пузыря. Приборы такого типа применяются в групповых измерениях в центральной Калифорнии для контроля наклонов почвы, которые могут быть связаны с активизацией разлома Сан-Андреас [220]. Харрисон [151] описал, как функционирует похожий прибор, у которого пузырек воздуха заключен под оптической плоскостью. Если возникает наклон, эта плоскость выравнивается так, чтобы удержать пузырек в том же положении. Используя эту обратную связь, Харрисону удалось в результате трехмесячных наблюдений измерить прилив  $M_2$  с точностью примерно 0,5%. Однако наклономеры с короткой базой неустранимо чувствительны к весьма локальным условиям установки, которые пока что трудно описать количественно. Если горные породы вблизи приборов неоднородны по своим свойствам, деформация среды в целом может вызвать локальные наклоны; это частично объясняет, почему близко расположенные наклономеры с короткой базой не всегда генерируют одинаковые сигналы.

## 10.2. ЧАСТОТНЫЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ ДИАПАЗОН СЕЙСМИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Большинство сигналов, изучаемых в сейсмологии, являются неустановившимися, т.е. практически ограничены во времени. Именно таковы сигналы, создаваемые взрывами и землетрясениями. Для такого неустановившегося сигнала  $f(t)$  существует преобразование Фурье вида

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt, \quad (10.20)$$

и

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (10.21)$$

где  $t$  — время и  $\omega$  — угловая частота. Мы будем называть амплитудным спектром абсолютное значение  $f(\omega)$ ; этот спектр и фазовый спектр (спектр фазовой задержки)  $\phi(\omega)$  определим уравнением

$$f(\omega) = |f(\omega)| e^{i\phi(\omega)}. \quad (10.22)$$

Почему мы называем  $\phi(\omega)$  фазовой задержкой, мы объяснили в дополнении 5.5. Поскольку  $f(t)$  вещественно, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= f(-\omega), & |f(\omega)| &= |f(-\omega)|, \\ \phi(\omega) &= -\phi(-\omega), \end{aligned} \quad (10.23)$$

где звездочка указывает на комплексно-сопряженную величину.

Единицей измерения  $|f(\omega)|$  служит единица измерения  $f(t)$ , деленная на единицу измерения частоты  $(\omega/2\pi)$ . Например, если  $f(t)$  — смещение почвы в см, то  $|f(\omega)|$  измеряется в см/Гц. Единицами для измерения фаз  $\phi(\omega)$  обычно являются радиан и цикл, равный  $2\pi$  радиан.

Имеются три характерных вида сигналов, для которых обычного преобразования Фурье не существует. Один из них — суперпозиция синусоидальных колебаний с частотами  $\omega_n$ . Примером может служить приливная деформация Земли, вызванная гравитационным притяжением Солнца и Луны. В этом случае мы определим амплитуду  $A_n$  и фазовую задержку  $\phi_n$  следующим образом:

$$f(t) = \sum_n A_n \exp(-i\omega_n t + i\phi_n), \quad (10.24)$$

где  $A_n$  имеет ту же физическую размерность, что и  $f(t)$ .

Другой тип сигналов, который нам предстоит рассмотреть, — это стационарный стохастический процесс, например существующий повсеместно сейсмический шум, вызываемый атмосферой, океанами, некоторыми вулканическими процессами, промышленной деятельностью, движением транспорта. Такие сигналы невозможно описать с помощью (10.21) или (10.24). Мы должны ввести понятие спектра мощности  $P(\omega)$ , являющегося преобразованием Фурье от автокорреляционной функции  $P(\tau)$ . Последняя определяется формулой

$$P(\tau) = \langle f(t)f(t + \tau) \rangle$$

где символы  $\langle \rangle$  означают осреднение по времени  $t$ . Тогда

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (10.25)$$

Единица измерения  $P(\omega)$  — квадрат единицы измерения  $f(t)$ , деленный на единицу измерения частоты  $(\omega/2\pi)$ . Если смещение  $f(t)$  измеряется в см, единицей измерения  $P(\omega)$  будет см<sup>2</sup>/Гц.  $P(\omega)$  не содержит информации о фазе. Сигнал такого типа можно представить (гл. 11) в виде свертки белого шума  $w(t)$  с весовой функцией  $g(t)$ :

$$f(t) = \int_{-\infty}^t w(t')g(t - t') dt', \quad (10.26)$$

где  $g(t)$  имеет преобразование Фурье  $g(\omega)$ , связанное с  $P(\omega)$  формулой

$$P(\omega) = g^*(\omega)g(\omega) = |g(\omega)|^2. \quad (10.27)$$

Фазовый спектр для  $g(\omega)$  может быть определен по  $|g(\omega)|$ , если логарифм от  $g(\omega)$  — аналитическая функция в верхней полуплоскости комплексного  $\omega$ .

Наконец, последний тип сигнала, который мы должны рассмотреть, — это нестационарный несинусоидальный сигнал, поведение которого вне ограниченного интервала, соответствующего нашей записи, неизвестно. Сигналы такого типа мы будем называть «дрейфом». Если пытаться аппроксимировать их как зависящее от времени общее изменение уровня, то их можно будет описать величиной всего изменения и временем нарастания. Эти сигналы можно аппроксимировать линейным трендом, и тогда его параметром будет скорость изменения уровня.

Если сигнал близок по форме к синусоиде с некоторой частотой, его амплитуду можно измерить непосредственно на записи. Когда ширина частотной поло-

сы сигнала известна, можно в результате оценить соответствующее ей значение амплитудного спектра или спектра мощности. Аналогично этому, если известны спектральная амплитуда и ширина полосы, можно оценить амплитуду сигнала.

Для грубых оценок можно принять, что амплитуда сигнала равна произведению спектральной амплитуды и ширины полосы. Например, если  $|f(\omega)| = F$  (константа) при  $-\omega_0 < \omega < \omega_0$  и  $|f(\omega)| = 0$  вне этого интервала, а  $\phi(\omega) = 0$  для всех  $\omega$ , то соответствующий сигнал  $f(t)$  запишется в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F \exp(-i\omega t) d\omega = 2 \cdot F f_0 \cdot \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t},$$

где  $f_0 = \omega_0/2\pi$ . Максимальная амплитуда достигается в момент  $t = 0$  и равна  $F \cdot 2f_0$ , поскольку  $x^{-1} \sin x = 1$  при  $x = 0$ . Точно так же для сигнала, пропущенного в полосе частот  $\omega_0 < |\omega| < \omega_1$  с постоянной спектральной амплитудой  $|f(\omega)| = F$ , при  $|f(\omega)| = 0$  вне этого интервала и  $\phi(\omega) = 0$  получаем

$$f(t) = 2Ff_1 \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} - 2Ff_0 \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t},$$

где  $f_1 = \omega_1/2\pi$ . Максимальная амплитуда достигается в момент  $t = 0$ :

$$f(t)_{t=0} = F \cdot 2(f_1 - f_0), \quad (10.28)$$

она равна произведению спектральной амплитуды на ширину полосы сигнала.

В случае, когда задан спектр мощности шума  $P(\omega)$ , мы имеем

$$P(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (10.29)$$

что является преобразованием, обратным (10.25). Тогда

$$P(\tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega.$$

С другой стороны, по определению

$$P(\tau) \Big|_{\tau=0} = \langle f^2(t) \rangle.$$

Следовательно, мы имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \langle f^2(t) \rangle. \quad (10.30)$$

Например, если  $P(\omega) = P$  для  $\omega_0 < |\omega| < \omega_1$  и  $P(\omega) = 0$  вне этого интервала, получаем

$$\langle f^2(t) \rangle = P \cdot 2(f_1 - f_0). \quad (10.31)$$

Таким образом, в грубом приближении средний квадрат амплитуды шума во временной области равен произведению значения спектра мощности в пределах полосы сигнала на ширину полосы. Используя (10.28) и (10.31) и зная ширину частотной полосы сигнала, мы можем приблизительно связать спектральную амплитуду с амплитудой и спектр мощности со среднеквадратичной амплитудой.

Рассмотрим теперь виды сейсмических сигналов и исследуем частотный и динамический диапазоны, покрываемые разными видами наблюдений. В каждом случае мы будем описывать наблюдаемые данные как один из четырех видов рассмотренных выше сигналов.

## 10.2.1. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ С ПЕРИОДАМИ ОКОЛО 20 С

Наиболее сильными сигналами, регистрируемыми стандартными длиннопериодными сейсмографами, в особенности классическими механическими сейсмографами, при неглубоких удаленных землетрясениях являются поверхностные волны с периодами около 20 с. Объемные волны имеют меньшие амплитуды из-за более сильного геометрического расхождения по сравнению с поверхностными волнами. Поверхностные волны с периодами менее 10 — 15 с испытывают сильное рассеяние на близповерхностных неоднородностях среды. Затухание поверхностных волн минимально на периодах около 20 с, потому что на периодах более 25 с они начинают терять энергию в астеносферу. Кроме того, на периодах более 20 с начинает уменьшаться увеличение стандартных сейсмографов. Поэтому вполне естественным было введение Гутенбергом и Рихтером в 1936 г. [143] шкалы магнитуд  $M_s$ , базирующейся на амплитудах поверхностных волн с периодом около 20 с (см. приложение 2 в конце этого тома).

На рис. 10.8 показана амплитуда поверхностных волн от неглубокого землетрясения с магнитудой  $M_s = 3$  как функция эпицентрального расстояния. Кривая получена по таблице из книги Рихтера [273, с. 322 русс. изд.]. Наиболее чувствительный длиннопериодный сейсмограф может зарегистрировать удаленное землетрясение с  $M_s \approx 3$  при амплитуде смещения почвы 100 мкм ( $10^{-5}$  см) на  $\Delta = 20^\circ$  и 10 мкм на  $\Delta = 80^\circ$ . С другой стороны, наиболее сильное из возможных землетрясений ( $M_s = 8\frac{1}{2}$ ) вызовет колебания почвы с амплитудой в несколько сантиметров на  $\Delta = 20^\circ$  и в несколько миллиметров на  $\Delta = 80^\circ$ . Столь большой динамический диапазон (от  $10^{-6}$  до 1 см) создает серьезные требования к сейсмической аппаратуре и носителям записей (см. дополнение 11.1).

Как было описано в разд. 10.1, в сейсмологии могут использоваться три основных типа датчиков: инерционный датчик, чувствительный к ускорению; деформометр, измеряющий деформации в Земле вблизи места его установки; гироскоп, который позволяет измерять вращения. Будет полезно указать значения ускорения  $\alpha$ , деформации  $\varepsilon$  и вращения  $\theta$ , связанных с 20-секундными поверхностными волнами при слабом землетрясении, например с магнитудой  $M_s \approx 3$ . Для плоских волн Рэлея с периодом 20 с, фазовой скоростью 3,5 км/с и амплитудой смещения 0,1 мкм имеем

$$\alpha \approx \left(\frac{2\pi}{20}\right)^2 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}^2 \approx 10^{-6} \text{ Гал} = 10^{-9} \text{ г},$$

$$\varepsilon \approx \frac{2\pi}{3.5 \times 10^5 \times 20} \cdot 10^{-5} \approx 10^{-11},$$

$$\theta \approx \varepsilon = 10^{-11} \approx 2 \times 10^{-6} \text{ дуг.с.}$$

Большие взрывы, такие как подземные ядерные испытания, также могут генерировать 20-секундные поверхностные волны с амплитудой, примерно пропорциональной их мощности. Взрыв мощностью в 1 мегатонну в скальных породах соответствует примерно  $M_s \approx 5\frac{3}{4}$ , и, следовательно, наиболее чувствительный длиннопериодный сейсмометр сможет обнаружить удаленный взрыв мощностью в несколько килотонн (что соответствует  $M_s \approx 3$ ).

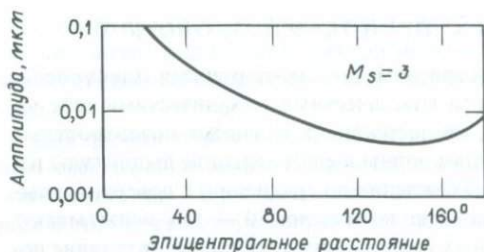


Рис. 10.8. Амплитуда поверхностных волн от мелкофокусного землетрясения с магнитудой  $M_s = 3$  как функция эпицентрального расстояния.

### 10.2.2. ВОЛНЫ $P$ В ДИАПАЗОНЕ $5^\circ < \Delta < 110^\circ$

Уровень сигнала в волнах  $P$  удаленного землетрясения можно оценить при помощи калибровочной кривой Гутенберга (см. 373, с. 630 русс. изд.). Применяемой для определения магнитуды по объемным волнам  $m_b$ . На рис. 10.9 показано поведение величины  $A/T$  как функции эпицентрального расстояния для мелкофокусного землетрясения с  $m_b = 4$  (здесь  $A$  — амплитуда смещений почвы в микронах, а  $T$  — период в секундах). Эту кривую можно использовать для определения магнитуды  $m_b$  любого мелкофокусного землетрясения в соответствии с формулой

$$m_b = \log(A/T)_{\text{набл}} - \log(A/T)_{m_b=4} + 4,$$

в которой  $(A/T)_{\text{набл}}$  — наблюдаемое значение  $A/T$  на некотором (известном) эпицентральном расстоянии, а  $(A/T)_{m_b=4}$  — значение, найденное по кривой на рис. 10.9 для этого расстояния. У волн  $P$ , записанных стандартным сейсмографом,  $T$  обычно порядка 1 с, и при  $m_b = 4$  амплитуда близка к 10 мкм на  $\Delta = 20^\circ$  и 1 мкм на  $\Delta = 90^\circ$ . Эти сигналы могут быть обнаружены наиболее чувствительными короткопериодными сейсмометрами. Самое сильное из возможных землетрясений ( $m_b \approx 8$ ) даст  $A/T$  порядка 1 мм/с на  $\Delta = 20^\circ$ . Для таких крупных землетрясений  $T$  будет порядка 10 с, а амплитуда около 1 см. Здесь также требуется аппаратура с весьма значительным динамическим диапазоном от  $10^{-7}$  до 1 см.

Смещение в 1 мкм на периоде 1 с соответствует ускорению  $4 \cdot 10^{-10} g$ , а вращениям и деформациям порядка  $10^{-12}$ .

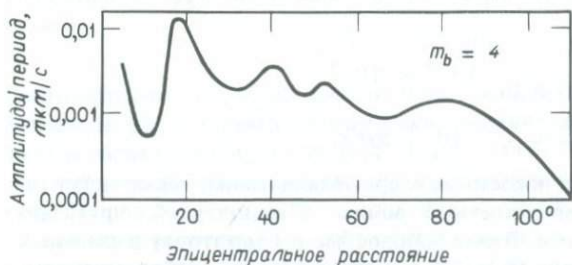


Рис. 10.9. Отношение амплитуды  $A$  к периоду  $T$  для мелкофокусного землетрясения с  $m_b = 4$  как функция эпицентрального расстояния.

10.2.3. ДИАПАЗОН СПЕКТРАЛЬНЫХ АМПЛИТУД  
 ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН И ВОЛН Р

На рис. 10.8 и 10.9 мы привели амплитуды сигналов в функции расстояния. На рис. 10.10 показан амплитудный спектр, определенный в разд. 10.2, для поверхностных волн и волн Р на  $\Delta = 90^\circ$ .

Сплошные линии с указанными рядом с ними магнитудами представляют собой типичные спектральные амплитуды для наиболее слабых обнаружимых и сильнейших событий. Они получены схематизацией эмпирических данных при помощи теоретических спектров, рассчитанных для реалистичной модели Земли (гл. 7), с использованием закона подобия для землетрясений (гл. 14, рис. 14.4).

Пунктирные линии указывают ориентировочные границы спектральных диапазонов, в которых обычно изучается каждый из типов волн. Для поверхностных волн при телесейсмических наблюдениях высокочастотный предел соответствует примерно 10 с. Более короткие волны либо скрыты в сильном сейсмическом шуме, показанном далее на рис. 10.11, либо рассеяны сильными горизонтальными неоднородностями вблизи поверхности Земли. Этот эффект зависит от пути: пересечение океанических бассейнов устраняет волны Рэлея с перио-

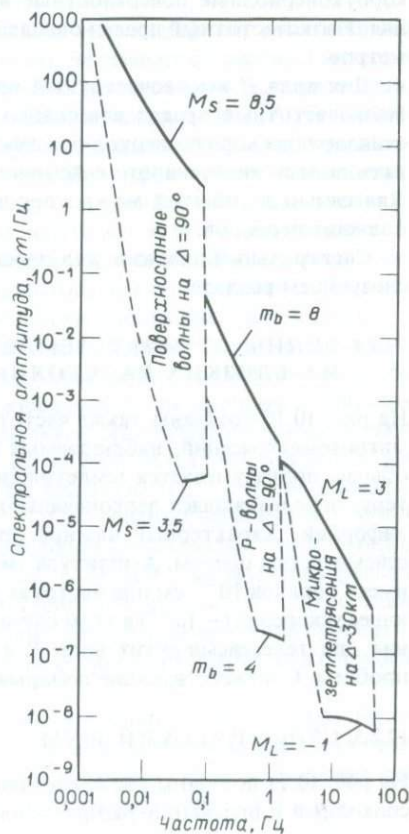


Рис. 10.10. Диапазоны спектральных амплитуд для поверхностных волн на эпицентральной расстоянии  $90^\circ$ , соответствующих диапазону  $M_s$  от  $3\frac{1}{2}$  до  $8\frac{1}{2}$ , а

также для волн Р на расстоянии  $90^\circ$ , соответствующих диапазону  $m_b$  от 4 до 8, и для волн S от микроземлетрясений на расстоянии 30 км, соответствующих магнитуде  $M_L$  от -1 до 3.

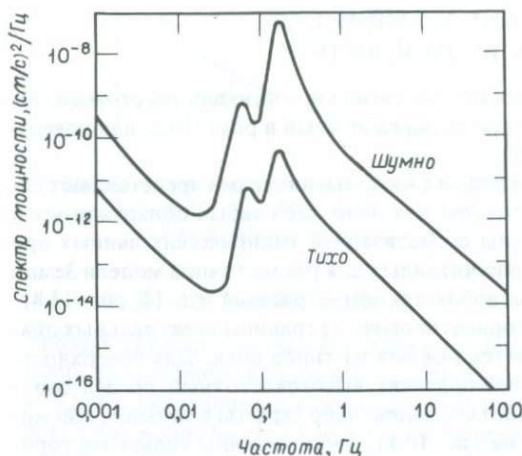


Рис. 10.11. Спектр мощности сейсмического шума в «шумных» и «тихих» условиях для типовой станции на плотных скальных породах.

дами короче 15 с, в то время как, распространяясь по континентальным щитам, короткопериодные поверхностные волны могут проходить большие расстояния. Низкочастотный предел определяется чувствительностью типовых сейсмометров.

Для волн  $P$  высокочастотный предел связан в основном с их затуханием. Низкочастотный предел для слабых событий определяется характеристиками стандартных короткопериодных сейсмографов, настроенных так, чтобы подавлять полосу интенсивного сейсмического шума, о котором пойдет речь ниже. Для сильных событий можно продвинуть спектральный диапазон в сторону больших периодов.

Спектральный диапазон для сигналов от микроземлетрясений обсуждается в следующем разделе.

#### 10.2.4. ВОЛНЫ ОТ МИКРОЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ НА БЛИЗКИХ РАССТОЯНИЯХ

На рис. 10.10 показаны также частотный и динамический диапазоны волн  $S$  от микроземлетрясений, наблюдаемых на  $\Delta \approx 30$  км. Под микроземлетрясением обычно подразумевается землетрясение с  $M_L < 3$ , где  $M_L$  — магнитуда по Рихтеру, определявшаяся первоначально для местных землетрясений в южной Калифорнии. Характерный нижний предел магнитуды  $M_L \approx -1$  определяется сейсмическим шумом. Амплитуда смещения почвы на  $\Delta = 30$  км при  $M_L \approx -1$  имеет порядок  $10^{-7}$  см при частотах до нескольких десятков герц. Соответствующее ускорение ( $\sim 10^{-6}$ ) в этом случае значительно выше, чем пороги обнаружения для телесеизмических волн  $P$  и  $S$ , что облегчает решение аппаратурных проблем. Соответствующие деформация и вращение — порядка  $10^{-9}$ .

#### 10.2.5. СЕЙСМИЧЕСКИЙ ШУМ

На рис. 10.11 показаны два представительных спектра сейсмического шума — в спокойный и шумный периоды — для типичной станции на плотном скальном

основании, удаленной от областей человеческой деятельности, при отсутствии сильного ветра вблизи станции. Кривые получены из кривой, опубликованной в [157], с использованием более поздних наблюдений. Наиболее существенное исправление сделано в области периодов длиннее 30 с. Основанием для этого послужили исследования Савино и др. [290], обнаруживших на записях восьми длиннопериодных сейсмометров с большим увеличением (HGLP) [259], установленных в разных точках земного шара, минимум мощности шума на периодах между 30 и 40 с.

Главными особенностями спектра шума являются два пика на частотах 0,14 и около 0,07 Гц. Оба они обусловлены океаническими волнами. Меньший пик приходится на частоту, присущую большинству океанических волн; его приписывают действию океанических волн на берега (это предположил еще Вихерт в 1904 г. [333]). Главный пик, как объяснил Лонге-Хиггинс в 1950 г. [216], вызван давлением стоячих океанических волн, которые могут возбуждаться волнами, бегущими в противоположных направлениях, в области образования шторма или вблизи берега. Такой механизм генерирует сейсмические волны с частотой, в два раза большей, чем у океанических волн. Хассельман [156] показал, что обе теории количественно объясняют наблюдения сейсмических и океанических волн.

Уровень шумов, записанных вертикальными сейсмографами, помещенными в герметичных контейнерах на крепких породах, не зависит от местных метеорологических условий и мощности слоя наносов. С другой стороны, горизонтальные длиннопериодные сейсмографы (такие, как сейсмографы HGLP), если камера, где установлен прибор, находится неглубоко, подвержены шуму, вызванному местными метеорологическими условиями. Этот эффект быстро ослабевает с углублением камеры. Уровень шумов может быть снижен до 10% от уровня на поверхности при заглублении сейсмографа на 100 м. Этот существенный спад шума правильно предсказал Соррел [302], который моделировал источник шума полем ветрового давления, распространяющегося как плоская волна со скоростями, свойственными ветру вблизи земной поверхности (см. задачу 10.3).

Спектр мощности на рис. 10.11 приведен для скоростей движения почвы в единицах  $(\text{см}/\text{с})^2/\text{Гц}$ . Сравнивая этот спектр с диапазоном уровней сигнала, приведенным на рис. 10.10, мы видим, что пробел между диапазонами для поверхностных и  $P$ -волн вызван наибольшим из пиков сейсмического шума. Спектр мощности в пике составляет  $10^{-7} (\text{см}/\text{с})^2/\text{Гц}$  на частоте 0,15 Гц. Принимая ширину полосы за половину частоты пика, находим из (10.31), что средний квадрат скорости частиц равен  $1,5 \cdot 10^{-8} (\text{см}/\text{с})^2$ . Тогда среднеквадратичное значение скорости составит  $\sim 10^{-4} \text{ см}/\text{с}$  и соответствующее среднеквадратичное значение смещения для шума равно примерно  $10^{-4} \text{ см}$ . С другой стороны, спектральная амплитуда сигнала с амплитудой  $10^{-4} \text{ см}$  и шириной полосы 0,075 Гц составит около  $7 \cdot 10^{-4} \text{ см}/\text{Гц}$ . Это объясняет причину существования узкого пробела на рис. 10.10 между диапазонами поверхностных волн и волн  $P$ ; край этого пробела находится в точке (0,1 Гц,  $10^{-3} \text{ см}/\text{Гц}$ ).

Аналогичным образом уровень шумовых смещений на частоте 0,01 Гц составляет  $10^{-5} \text{ см}$ , и соответствующая спектральная амплитуда для порогового сигнала равна  $10^{-3} \text{ см}/\text{Гц}$ . Этим объясняется низкочастотное ограничение диапазона сигналов для поверхностных волн, показанное на рис. 10.10.

## 10.2.6. АМПЛИТУДА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМЛИ

Амплитуда собственных колебаний, возбуждаемых землетрясением, затухает со временем. Начальную амплитуду с учетом затухания для сильнейшего Чилийского землетрясения 1960 г. оценили Беньофф и др. [34]. Измерение было выполнено по записи деформометра, и начальные амплитуды деформаций для основной моды сфероидальных собственных колебаний  ${}_0S_2$  ( $T = 54$  мин),  ${}_0S_5$  (20 мин),  ${}_0S_{19}$  (6 мин) были равны соответственно  $2 \cdot 10^{-11}$ ,  $8 \cdot 10^{-11}$  и  $2 \cdot 10^{-9}$ .

Собственные колебания, возбужденные тем же землетрясением, наблюдались также с помощью приливного гравиметра Лакоста — Ромберга. Спектральный анализ мощности Нессом и др. [239] выявил несколько спектральных пиков с амплитудой, равной примерно  $0,1 - 1 \cdot (10^{-9} g)^2 / (\text{цикл/ч})$ , и шириной полосы, составляющей малую долю от 1 цикл/ч. Следовательно, амплитуда вертикальных ускорений при этих колебаниях была близка к  $10^{-9} g$ .

Абе [1] оценил амплитуды начального смещения для землетрясения, происшедшего на Курильских островах 13 октября 1963 г. ( $M_s = 8\frac{1}{4}$ , сейсмический момент =  $7,5 \times 10^{28}$  дин · см), и для сильнейшего Аляскинского землетрясения 28 марта 1964 г. ( $M_s = 8,3$ , сейсмический момент =  $7,6 \times 10^{29}$  дин · см). Начальные амплитуды при втором из этих землетрясений составили для мод от  ${}_0S_{10}$  до  ${}_0S_{14}$  около  $10^{-2}$  см.

Один из наиболее чувствительных датчиков ускорения [44] может обнаруживать пики собственных колебаний более высокого порядка для относительно слабых землетрясений с магнитудой порядка  $M_s = 6,5$ . Уровень сигнала в этих пиках в частотном диапазоне от 10 до 20 цикл/ч составляет примерно  $10^{-21} g^2 / (\text{цикл/ч})$ .

## 10.2.7. АМПЛИТУДЫ ПРИЛИВОВ ТВЕРДОЙ ЗЕМЛИ, ЧАНДЛЕРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ, ВРАЩЕНИЯ ПЛИТ И ЛУНОТЯСЕНИЙ

Наиболее сильными сигналами в диапазоне частот ниже 1 цикл/ч являются суточный и полусуточный земные приливы. Амплитуда ускорений, измеренная от максимума до минимума, в этом случае равна примерно  $3 \cdot 10^{-7} g$ , а амплитуда деформаций около  $10^{-7}$ .

Изменение широты вследствие свободной нутации Земли предсказал Эйлер в 1765 г.; по имени торговца из Кембриджа (шт. Массачусетс, США) Чандлера, определившего экспериментально период этих колебаний как 428 суток, они были названы чандлеровскими. Амплитуда колебаний примерно 0,2 дуг.с, или  $10^{-6}$  рад.

Самым быстрым относительным вращением литосферных плит является вращение Тихоокеанской плиты относительно Антарктической; его скорость [209] равна  $10^{-6}$  град/год, или  $2 \cdot 10^{-8}$  рад/год.

Естественные лунотрясения (категории А [208]) зарегистрированы с амплитудами в диапазоне  $10^{-8} - 10^{-7}$  см при периодах около 1 с. Спектры шума для Земли (рис. 10.11) таковы, что подобного рода телесеismicкие сигналы на Земле необнаружимы.

## 10.2.8. СЕЙСМИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В ЭПИЦЕНТРАЛЬНЫХ ЗОНАХ

На рис. 10.12 показана зависимость пикового горизонтального ускорения (в единицах ускорения силы тяжести) от расстояния до ближайшего поверхностного проявления подвижки по разлому для трех диапазонов магнитуд землетрясений [250]. Наибольшее значение равно  $1,25 \text{ g}$  и зарегистрировано на скальном хребте в 3 км от плоскости разлома во время землетрясения 1971 г. в Сан-Фернандо (магнитуда 6,6).

Типичный амплитудный спектр ускорений показан на рис. 10.13, он соответствует наблюдениям на станции в 8 км от зоны разлома при землетрясении средней силы (запись станции Темблор во время землетрясения в Паркфилде, Калифорния, 28 июня 1966 г.;  $M_s = 6,3$ ,  $M_L = 5,5$ , сейсмический момент =  $1,4 \cdot 10^{25}$  дин · см). Кривая получена спектральным анализом фактической записи для периодов короче 1 с и экстраполяцией на более длинные периоды (при помощи соответствующей модели теории дислокаций).

Для полного описания механизма очага землетрясения необходимо провести наблюдения в широком спектральном диапазоне, подобном показанному на рис. 10.13. Это требование ставит трудную проблему перед создателями сейсмической аппаратуры. Как показано на рис. 10.13, пиковая спектральная амплитуда ускорения основного сигнала равна  $100 \text{ (см/с}^2\text{)/Гц}$  на частоте 3 Гц, что соответствует амплитуде ускорения  $0,3 \text{ g}$ . С другой стороны, амплитуда ускорения сигнала, содержащегося в спектральной полосе вблизи частоты  $0,01 \text{ Гц}$ , составляет около  $10^{-6} \text{ g}$ . Задача состоит в выделении низкочастотного сигнала с амплитудой, составляющей  $10^{-6}$  от амплитуды регистрируемого одновременно с ним высокочастотного сигнала. Отсюда вытекает, что при широкополосных

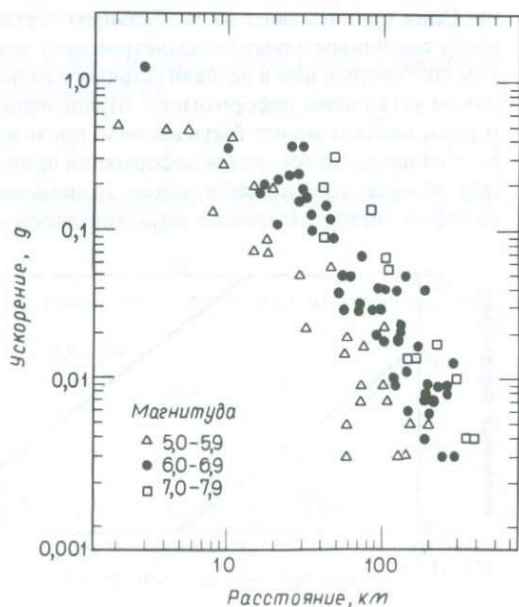


Рис. 10.12. Пиковое горизонтальное ускорение почвы (в единицах ускорения силы тяжести) как функция расстояния до ближайшего проявления подвижки по разлому на поверхности. Для различных диапазонов магнитуд используются разные обозначения. (Из работы [250]; с разрешения Американской ассоциации за прогресс в науке.)

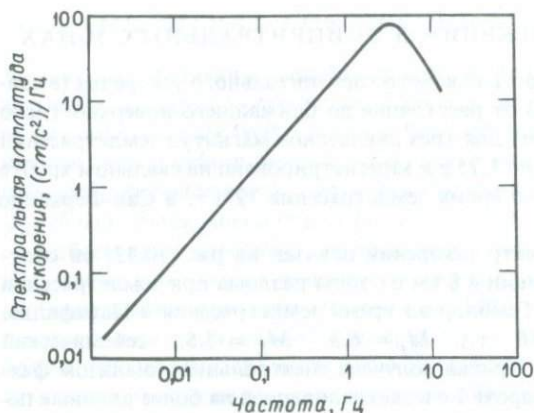


Рис. 10.13. Пример амплитудного спектра ускорений в эпицентральной зоне землетрясения средней силы.

наблюдениях сейсмических явлений в ближней зоне важным требованием к аппаратуре является линейность. Поскольку не существует идеально линейных датчиков, малая часть высокочастотных волн будет детектироваться и появится как фиктивное медленное колебание, искажающее запись длиннопериодных сигналов.

#### 10.2.9. СКАЧКИ ДЕФОРМАЦИЙ

Чувствительный деформометр часто регистрирует ступенчатое изменение деформаций во время удаленного землетрясения [261]. На рис. 10.14 показана амплитуда изменения деформации как функция магнитуды землетрясения и эпицентрального расстояния [332]. Причина возникновения таких скачков еще не ясна. Одни приписывают их глобальным статическим деформациям, непосредственно связанным с очагом землетрясения; другие ищут объяснение в аппаратурном гистерезисе или в незначительных изменениях свойств массива пород, в котором установлен деформометр. Малое непрерывное смещение вдоль трещин в горном массиве может быть вызвано прохождением сейсмических волн; некоторые наблюдавшиеся скачки деформации приписывали эффекту ливней. Японская сеть обсерваторий по наблюдению за движениями земной коры наблюдала скачки деформаций, связанные с землетрясением в Гифу в сентябре 1969 г. В отличие

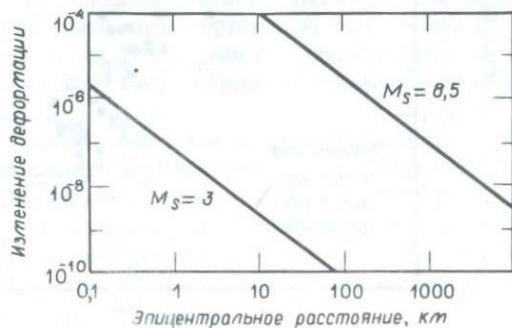


Рис. 10.14. Скачки деформации как функция эпицентрального расстояния для магнитуд 3 и 8,5 [332].

от прямых, показанных на рис. 10.14, эти данные свидетельствуют о том, что амплитуда изменения деформации в среднем убывает пропорционально кубу расстояния, как предсказано теорией для дислокации в неограниченной среде [для получения деформаций надо продифференцировать уравнение (4.34)].

### 10.3. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

Теперь, когда мы получили представление о частотном и динамическом диапазоне сейсмических сигналов, рассмотрим более практические вопросы работы сейсмических датчиков. Прежде всего, конечно, сейсмометр должен быть достаточно чувствительным, чтобы обнаружить сигнал. Чувствительность датчика ограничивается только тепловым шумом, генерируемым его рассеивающими элементами.

#### 10.3.1. КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА СЕЙСМОМЕТРА, ВЫЗВАННЫЕ БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ

Маятник с одной степенью свободы (движением только в одном направлении) имеет среднюю кинетическую энергию  $kT/2$  ( $k$  — постоянная Больцмана), если он находится в тепловом равновесии с окружающим воздухом при абсолютной температуре  $T$  (в градусах шкалы Кельвина). Если энергия маятника выше, он будет нагревать воздух, ускоряя движение его молекул. Если энергия ниже, столкновения с молекулами воздуха будут сообщать ускорение маятнику.

Вернемся к рис. 10.1 и уравнениям (10.1) и (10.2). Движение маятника под действием силы  $e(t)$ , вызываемой столкновением с молекулами воздуха, является решением уравнения

$$M\ddot{\xi} + D\dot{\xi} + k\xi = e(t). \quad (10.32)$$

Решение уравнения находится сверткой функции  $e(t)$  с откликом на единичный импульс  $f(t)$ , найденным ранее в уравнении (10.8):

$$\xi(t) = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^t e(t') f(t - t') dt'. \quad (10.33)$$

Поскольку движения отдельных молекул независимы и некоррелированы, автокорреляционная функция для  $e(t)$  должна иметь вид

$$\langle e(t)e(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t'), \quad (10.34)$$

где  $\sigma^2$  определяется из условия, что средняя кинетическая энергия маятника равна  $kT/2$ . Из (10.33) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M \langle \dot{\xi}^2(t) \rangle &= \frac{1}{2M} \int_{-\infty}^t \dot{f}(t - t') \int_{-\infty}^t \langle e(t') e(t'') \rangle \dot{f}(t - t'') dt'' \\ &= \frac{\sigma^2}{2M} \int_{-\infty}^t [\dot{f}(t - t')]^2 dt' = \frac{\sigma^2}{2M} \int_0^{\infty} [\dot{f}(\tau)]^2 d\tau. \end{aligned}$$

Затем, используя уравнения (10.7) и (10.8), мы приходим к равенству

$$\frac{1}{2} M \langle \dot{\xi}^2(t) \rangle = \frac{\sigma^2}{2M} \cdot \frac{1}{4\epsilon} = \frac{1}{2} kT, \quad (10.35)$$

или

$$\sigma^2 = 4M\epsilon kT.$$

Поскольку масса маятника под действием силы  $e(t)$  движется со скоростью  $\dot{\xi}(t)$ , приобретенная мощность будет равна

$$\langle \dot{\xi}(t)e(t) \rangle = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^t \langle e(t)e(t') \rangle \dot{f}(t-t') dt' = \frac{\sigma^2}{M} \dot{f}(0) = 4\epsilon kT. \quad (10.36)$$

Отсюда следует, что при  $\epsilon = 0$  мощность теплового шума равна нулю. Другими словами, если элемент с потерями отсутствует, система не потребляет энергии, так как приток и отток энергии должны уравнивать друг друга. Только демпфирующее устройство может преобразовывать свою кинетическую энергию в тепло, а масса и пружина к этому не способны.

Чтобы яснее показать, как происходит генерация шума демпфирующим устройством, уберем пружину и вновь оценим мощность:

$$\langle \dot{\xi}(t)e(t) \rangle = \frac{\langle e(t)e(t) \rangle}{2\epsilon M} = \frac{\sigma^2 \delta(0)}{2\epsilon M}. \quad (10.37)$$

Мощность оказалась бесконечно большой! Однако спектр мощности, определенный в (10.25), ограничен. Поскольку  $\delta(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) d\omega$ , полученное выражение можно представить в виде

$$\langle \dot{\xi}(t)e(t) \rangle = \frac{\sigma^2 \delta(0)}{2\epsilon M} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma^2}{2\epsilon M} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega = \int_0^{\infty} 4kT df, \quad (10.38)$$

где  $f = \omega/(2\pi)$ . Другими словами, реализуемая тепловая мощность демпфирующего устройства в частотной полосе шириной  $\Delta f$  равна  $4kT\Delta f$ . Полученное выражение для тепловой мощности не зависит от  $\epsilon$ ; оно применимо не только к любой механической диссипативной системе, но и к электрической системе с диссипацией энергии. Например, ширина полосы частот нашей маятниковой системы близка к  $\epsilon$ , и, согласно уравнению (10.36), полная мощность шума равна  $4\epsilon kT$ , что дает значение спектра мощности  $4kT$ . Мощность шума для электрического сопротивления  $R$  можно представить как  $\langle V^2 \rangle / R$ , где  $V$  — напряжение. Приравняв эту мощность величине  $4kT\Delta f$ , получаем хорошо известную формулу для джонсоновского шума:

$$\langle V^2 \rangle = 4RkT \Delta f. \quad (10.39)$$

Рассмотрим теперь ускорение грунта  $\alpha(t)$ , которое вызвало бы колебания маятника, эквивалентные его «броуновскому движению». Поскольку ускорение создает силу  $M\alpha(t)$ , реализуемая мощность шума демпфирующего устройства равна

$$M \langle \dot{\xi}(t)\alpha(t) \rangle = \frac{M}{2\epsilon} \langle \alpha(t)\alpha(t) \rangle = 4kT\Delta f$$

или

$$\langle \alpha^2(t) \rangle = \frac{8\epsilon kT \Delta f}{M}. \quad (10.40)$$

Отсюда можно найти ускорение почвы, эквивалентное «броуновским» колебаниям маятника. Учитывая, что  $Q^{-1} = 2\epsilon/\omega_s$ , где  $2\pi/\omega_s$  — период незатухающего

маятника, (10.40) можно представить в виде

$$\frac{\langle \alpha^2(t) \rangle}{\Delta f} = \frac{\omega_s}{MQ} \cdot 4kT. \quad (10.41)$$

Таким образом, спектр мощности эквивалентного шуму ускорения обратно пропорционален произведению массы, добротности  $Q$  и периода маятника.

Большинство сейсмографов имеют критическое затухание, которому соответствует  $Q = 1/2$ . В этом случае

$$\frac{\langle \alpha^2(t) \rangle}{\Delta f} = \frac{\omega_s}{M} \cdot 8kT. \quad (10.42)$$

Вычислим спектр мощности скорости движения почвы  $v$ , эквивалентной тепловому шуму, и сравним его со спектрами сейсмического шума, приведенными на рис. 10.11. Имеем

$$\frac{\langle v^2 \rangle}{\Delta f} = \frac{8\omega_s kT}{(2\pi f)^2 M}. \quad (10.43)$$

Из рассмотрения этого рисунка следует очень интересный вывод, что «наблюдаемые» спектры шума почвы имеют примерно одинаковую частотную зависимость вида  $f^{-2}$  в двух поддиапазонах, а именно для периодов длиннее 30 с и короче 3 с (обратите внимание на асимптотическое поведение спектров при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ ). Для кривой, соответствующей «тихому» интервалу времени, такие участки с зависимостью от частоты  $f^{-2}$  соответствуют

$$\begin{aligned} \frac{8\omega_s kT}{(2\pi)^2 M} &= 10^{-17} \text{ (см/с)}^2 \cdot \text{Гц для длинных периодов,} \\ &= 10^{-13} \text{ (см/с)}^2 \cdot \text{Гц для коротких периодов.} \end{aligned} \quad (10.44)$$

Подставляя сюда период маятника  $T_s = 2\pi/\omega_s$  и  $kT = 4 \cdot 10^{-14}$  эрг, находим, что для маятника с критическим затуханием условие того, чтобы его шум был слабее шума почвы, имеет вид

$$MT_s > 5 \times 10^3 \text{ г}\cdot\text{с для длинных периодов}$$

и

$$MT_s > 5 \times 10^{-1} \text{ г}\cdot\text{с для коротких периодов.}$$

Стандартный длиннопериодный сейсмограф имеет массу около 10 кг и период 15 — 30 с и, следовательно, отвечает указанному требованию. Акселерометр Блока — Мура [44], помещенный в глубокий вакуум ( $10^{-7}$  мм рт. ст.) при жестком контроле температуры, имеет необычайно малую массу 10 г и относительно короткий период 1 с и тем самым не удовлетворяет сформулированному выше требованию. Низкий уровень теплового шума обеспечивается в этом приборе использованием маятника с малым затуханием ( $Q = 200$ ), а также емкостного преобразователя и электростатической обратной связи (т.е. «замораживанием» электронов).

Однако даже при столь высоком значении  $Q$  мы обнаруживаем, что уровень спектра мощности теплового шума в акселерометре Блока — Мура слегка превышает уровень сейсмического шума в тихие интервалы времени, найденные Савино и др. [290]; в их работе использовались записи приборов, созданных Помером и др. [259], с массой 10 кг и периодом 30 с. Низкий шум этих приборов

был достигнут благодаря жесткому контролю условий установки и помещению системы в герметическую камеру.

Типовые короткопериодные сейсмометры имеют период маятника от 0,1 до 1 с. Масса, необходимая для выполнения требования, предъявляемого к уровню теплового шума, составляет при этом всего лишь 0,5 — 5 г. Обычно же в короткопериодных сейсмометрах используется значительно большая масса. Как показано в следующем разделе, преобразователь, применяемый в этих приборах (катушка, движущаяся в магнитном зазоре), для получения достаточно мощных сигналов нуждается в большей массе маятника.

Подробное рассмотрение тепловых шумов, возникающих в системе из маятника, связанного с ним электромагнитного преобразователя, усилителя и гальванометра, дано Бирном [67].

### 10.3.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ СКОРОСТИ

Движение маятника относительно основания сейсмометра чаще всего измеряется при помощи электромагнитного преобразователя по скорости, схематически показанного на рис. 10.15. Разность напряжений  $V(t)$  генерируется на концах катушки, прикрепленной к массе  $M$  и перемещающейся в магнитном поле со скоростью  $\dot{\xi}(t)$ . Катушка зашунтирована сопротивлением  $R$ . Пусть  $l$  — длина обмотки катушки,  $B$  — индукция магнитного поля; примем, что направления дви-

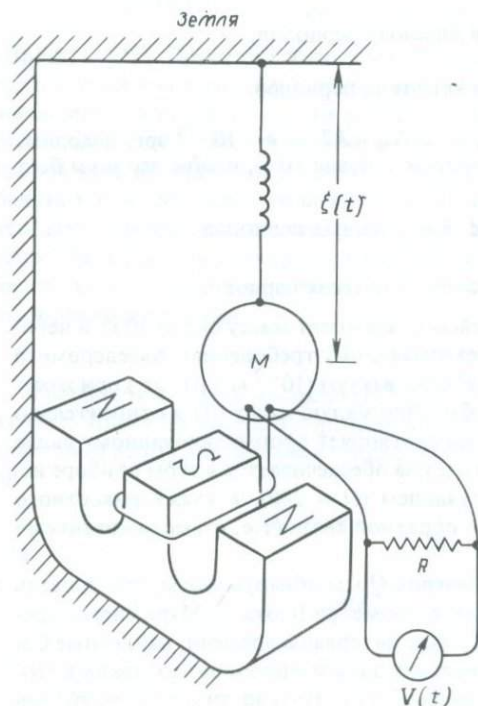


Рис. 10. 15. При движении катушки, скрепленной с массой, в магнитном поле на ее концах генерируется напряжение, пропорциональное относительной скорости массы и магнита.

жения катушки, магнитного поля и электрического тока в катушке ортогональны друг другу.

Рассмотрим сначала механическую работу, которую выполняет масса, движущаяся в магнитном поле. Сила  $F$ , возникающая при этом, согласно закону Био — Савара равна

$$F = IlB, \quad (10.45)$$

где  $I$  — сила тока в катушке. Потребляемая при этом механическая мощность равна

$$F\dot{\xi} = IlB\dot{\xi}. \quad (10.46)$$

Эта мощность должна быть рассеяна на сопротивлении  $R + R_0$  ( $R$  — сопротивление шунта,  $R_0$  — сопротивление катушки), поскольку других диссипативных элементов в системе нет. Отсюда получаем

$$VI = IlB\dot{\xi},$$

или

$$V = lB\dot{\xi}. \quad (10.47)$$

Если обозначить  $G = lB$ , то мы приходим к интересному результату:  $V = G\dot{\xi}$  и  $F = GI$ . Это частный случай теоремы взаимности Онзагера в термодинамике необратимых процессов.

Из сказанного выше следует, что

$$I = \frac{G\dot{\xi}}{R_0 + R} \quad (10.48)$$

и

$$F = \frac{G^2\dot{\xi}}{R_0 + R}.$$

При воздействии на массу силой  $F$  уравнение движения маятника имеет вид

$$\ddot{\xi} + \omega_s^2 \xi = -\ddot{u} - \frac{G^2}{R_0 + R} \frac{\dot{\xi}}{M}. \quad (10.49)$$

Сравнивая (10.49) и уравнение для маятника с демпфирующим устройством (10.2), находим

$$2\varepsilon = \frac{G^2}{(R_0 + R)M}. \quad (10.50)$$

В общем случае, если механическое затухание маятника равно не нулю, а  $\varepsilon_0$ , полное затухание выражается формулой

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{G^2}{2(R_0 + R)M}. \quad (10.51)$$

Электрическая мощность, генерируемая в шунтирующем сопротивлении движением маятника  $\dot{\xi}(t)$ , согласно (10.48) равна

$$\langle VI \rangle = R \langle I^2 \rangle = \frac{RG^2}{(R_0 + R)^2} \langle \dot{\xi}^2(t) \rangle. \quad (10.52)$$

Чтобы датчик обладал достаточной мощностью, величина  $G^2/(R + R_0)$  должна быть велика. Тогда из (10.51) мы найдем, что это требование можно

удовлетворить только увеличением затухания  $\epsilon$ , что приводит, однако, к потере чувствительности маятника к движению почвы. Чтобы сохранить  $\epsilon$  малым, мы должны увеличить  $M$ . Вот почему для чувствительного прибора, не снабженно электронным корректирующим усилителем, необходима большая масса.

Если пренебречь  $\epsilon_0$ , то критическое затухание достигается в случае, когда

$$\frac{\epsilon}{\omega_s} = \frac{G^2}{2(R_0 + R)M\omega_s} = 1, \quad (10.53)$$

или

$$\frac{G^2}{R_0 + R} = 2M\omega_s. \quad (10.54)$$

Подставляя (10.54) в (10.52), получаем выражение для мощности

$$\langle VI \rangle = \frac{R}{R_0 + R} \cdot 2M\omega_s \langle \dot{\xi}^2 \rangle. \quad (10.55)$$

Мощность пропорциональна массе и обратно пропорциональна периоду маятника. У правильно сконструированного прибора внутреннее сопротивление катушки преобразователя не должно значительно превышать шунтирующее сопротивление. Для типового сейсмографа с массой 5 кг и периодом 1 с из (10.55) получаем

$$\langle VI \rangle \sim 5 \times 10^3 \times 2\pi \times \langle \dot{\xi}^2 \rangle.$$

Максимальный уровень шума почвы (такой, какой вызывает уличное движение в городе, построенном на рыхлых осадочных грунтах) может достигать  $\sqrt{\langle \dot{\xi}^2 \rangle} \approx 10^{-2}$  см/с. Тогда

$$\langle VI \rangle \approx 1 \text{ эрг/с} = 10^{-7} \text{ Вт.}$$

Отсюда видно, что идея генерации электроэнергии при помощи сейсмографов, реагирующих на транспортные шумы, не слишком практична.

Электромагнитный преобразователь был впервые применен в сейсмологии Голицыным в 1914 г. [127]. Голицын ввел в сейсмометрию прецизионные методы экспериментальной физики и раз и навсегда решил вопрос об идентификации волн  $P$  и  $S$  от телесеismicических событий.

Для измерения э.д.с., генерируемой электромагнитным преобразователем, Голицын использовал гальванометр. Гальванометр представляет собой рамку, подвешенную за центр ее массы в магнитном поле при помощи тонких тоководов; электрический ток, проходящий через рамку, будет создавать в ней момент сил, вызывающий ее поворот относительно подвесов. К рамке прикреплено зеркальце, отклонения которого записываются оптическим путем. И до сего времени описанная система — одна из наиболее широко применяемых в сейсмометрии.

Реакция этой системы на мощность сигнала, как видно из (10.55), пропорциональна массе маятника. Если масса велика, то, как следует из (10.50), ее колебания трудно загасить электромагнитным способом. Для получения сейсмометра с большим увеличением нам нужно большое значение  $G$ . До 1939 г. качество магнитов было низким и достижимая величина магнитной индукции — весьма ограниченной; поэтому единственным способом увеличить  $G$  было увеличение длины  $l$  катушки. В электромагнитном сейсмографе Беньоффа [30] большое зна-

чение  $G$  достигалось путем использования магнита в качестве массы маятника, движущейся между двух катушек, прикрепленных к корпусу прибора. В таком приборе обеспечивалось критическое затухание массы 100 кг на периодах около 1 с. Сейсмограф Беньоффа позволил получить весьма ценные данные о короткопериодных объемных волнах на телесеismicических расстояниях.

Рин [274] оценил объем магнита, необходимого, чтобы обеспечить критическое затухание маятника с массой  $M$  и периодом  $T$  для магнитного материала типа ALNICO V:  $V \text{ (см}^3\text{)} = 50M(\text{кг})/T(\text{с})$ .

Поскольку качество магнитов теперь улучшилось, нам больше не нужна масса 100 кг, чтобы получить желаемую чувствительность на коротких периодах. Вилмор [338] подвел итоги достижений в разработке электромагнитных датчиков и сделал вывод, что масса маятника 5 кг — это как раз то, что нужно для системы, непосредственно связанной с гальванометром. Он показал также, что для маятников с периодом более 1 с можно свести к минимуму общий вес системы, используя магнит в качестве массы маятника.

Дальнейшего уменьшения массы можно достичь использованием усилителей или преобразователей смещений. Акселерометр Блока — Мура с массой 10 г может реагировать на смещение 1 мкм на периодах около 5 с. В классическом маятниковом сейсмографе Вихерта необходимо было преодолевать трение пера о записывающую бумагу. Наибольшая масса сейсмографа Вихерта равнялась 17 т; в нем достигалось увеличение  $10^4$ , что соответствовало минимальному обнаружимому смещению более 10 мкм на периоде 5 с.

### 10.3.3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАНДАРТИЗОВАННЫХ СЕЙСМОГРАФОВ

В типовых сейсмографах сейсмологических обсерваторий, например Мировой сети стандартных seismicических станций (WWSSN), ток катушки электромагнитного преобразователя подается на чувствительный гальванометр через электрический контур, показанный на рис. 10.16.  $V_1$  — э.д.с., возникающая в катушке преобразователя,  $V_2$  — э.д.с. в катушке гальванометра. Силы тока  $I_1$  и  $I_2$  можно выразить через перемещения этих двух катушек. С другой стороны, уравнения движения катушек содержат члены, описывающие силы, которые возникают благодаря этим токам. Полное описание отклонения рамки гальванометра, соответствующего заданному движению почвы, требует решения дифференциального уравнения четвертого порядка. Исторический обзор анализа этой задачи дан в работе [110]. В нашем изложении мы следуем Хагваре [146], давшему простое и удобное для практических целей описание решения.

На смещение сейсмометра  $\xi$  влияет возвращающая сила  $-G_1 I_1$ , где  $G_1$  — электродинамическая постоянная сейсмометра (характеризующая катушку и магнит), так что уравнение движения сейсмометра имеет вид

$$\ddot{\xi} + 2\varepsilon_0 \dot{\xi} + \omega_s^2 \xi = -\ddot{u} - \frac{G_1 I_1}{M}. \quad (10.56)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  — механическое затухание сейсмометра,  $\omega_s$  — резонансная частота незагашенного прибора,  $u$  — смещение почвы,  $M$  — подвижная масса из (10.2).

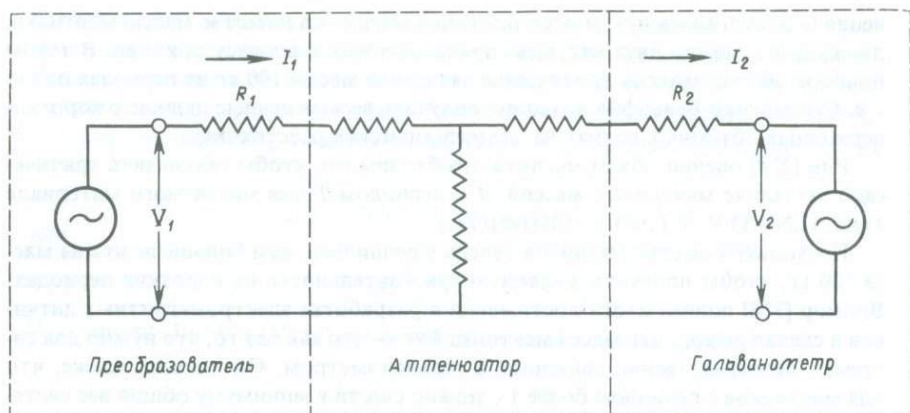


Рис. 10.16. Электрическая схема типового сейсмографа.

Ток  $I_2$  в гальванометре создает пару сил  $G_2 I_2$ , поворачивающую зеркальце гальванометра на угол  $\Phi$ ;  $G_2$  — электродинамическая постоянная гальванометра и

$$\ddot{\Phi} + 2\varepsilon_{0g}\dot{\Phi} + \omega_g^2\Phi = \frac{G_2 I_2}{K}, \quad (10.57)$$

где  $\varepsilon_{0g}$  — механическое затухание гальванометра,  $\omega_g$  — его собственная частота при отсутствии затухания и  $K$  — момент инерции катушки гальванометра и зеркальца. Силу тока  $I_1$  можно рассматривать как сумму двух сил тока, создаваемых двумя отдельными источниками напряжения:

$$\begin{aligned} I_1 &= (\text{сила тока через } R_1 \text{ при } V_2 = 0) + (\text{сила тока через } R_1 \text{ при } V_1 = 0) \\ &= I_1|_{V_2=0} + I_1|_{V_1=0} \end{aligned} \quad (10.58)$$

Здесь  $R_1$  — сопротивление катушки сейсмометра.  $V_2$  можно сделать равным нулю, если зафиксировать (*арретировать*) катушку гальванометра; точно так же  $I_1/V_1 = 0$  обеспечивается фиксацией катушки сейсмометра. Из (10.48) получаем

$$I_1|_{V_2=0} = \frac{G_1}{Z_{11}} \dot{\xi},$$

где  $Z_{11}$  — отношение  $V_1/I_1$  при арретированном гальванометре. Аналогичным образом

$$I_2|_{V_1=0} = -\frac{G_2}{Z_{22}} \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $Z_{22}$  — импеданс  $V_2/I_2$  при арретированном сейсмометре. В последнем случае ток разветвляется на идущий через электрический контур и идущий через катушку сейсмометра, так что

$$I_1|_{V_1=0} = -\frac{\mu_2 G_2}{Z_{22}} \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\mu_2 = (I_1/I_2)/V_1 = 0$  — коэффициент ослабления. Из (10.58) вытекает, что

$$I_1 = \frac{G_1}{Z_{11}} \dot{\xi} - \frac{\mu_2 G_2}{Z_{22}} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (10.59)$$

и аналогично

$$I_2 = \frac{\mu_1 G_1}{Z_{11}} \dot{\xi} - \frac{G_2}{Z_{22}} \frac{d\Phi}{dt}, \quad \text{где } \mu_1 = \left( \frac{I_2}{I_1} \right)_{V_2=0} \quad (10.60)$$

Если мы подставим (10.59) в уравнение сейсмометра (10.56), то увидим, что появляется дополнительный член, описывающий затухание, и уравнение принимает вид

$$\ddot{\xi} + 2\varepsilon_s \dot{\xi} + \omega_s^2 \xi = -\ddot{u} + \frac{\mu_2 G_1 G_2}{Z_{22} M} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (10.61)$$

где  $\varepsilon_s$  теперь описывает полное затухание сейсмометра, т.е.  $\varepsilon_{0s} + \frac{1}{2} G_1^2 / (Z_{11} M)$  [ср. с (10.51)]. Реакция гальванометра на движения сейсмометра численно выражена последним слагаемым в (10.61).

Если подставить (10.60) в уравнение гальванометра (10.57), то найдем, что

$$\ddot{\Phi} + 2\varepsilon_g \dot{\Phi} + \omega_g^2 \Phi = \frac{\mu_1 G_1 G_2}{Z_{11} K} \dot{\xi}, \quad (10.62)$$

где  $\varepsilon_g$  — полное затухание гальванометра, равное  $\varepsilon_{0g} + \frac{1}{2} G_2^2 / (Z_{22} K)$ .

Реакцию сейсмографа  $\Phi(t)$  на заданный входной сигнал  $u(t)$  можно найти, решив уравнение четвертого порядка, получающееся при исключении  $\xi$  из (10.61) и (10.62). Находим, что

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} + 2(\varepsilon_s + \varepsilon_g) \dot{\Phi} + [\omega_s^2 + \omega_g^2 + 4\varepsilon_s \varepsilon_g (1 - \sigma^2)] \ddot{\Phi} \\ + 2(\varepsilon_s \omega_g^2 + \varepsilon_g \omega_s^2) \dot{\Phi} + \omega_s^2 \omega_g^2 \Phi = -\frac{\mu_1 G_1 G_2}{Z_{11} K} \ddot{u}, \end{aligned} \quad (10.63)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{\mu_1 \mu_2 G_1^2 G_2^2}{4Z_{11} Z_{22} M K \varepsilon_s \varepsilon_g} = \frac{\mu_1 \mu_2 (\varepsilon_s - \varepsilon_{0s})(\varepsilon_g - \varepsilon_{0g})}{\varepsilon_s \varepsilon_g}.$$

Величина  $\sigma^2$  — безразмерная характеристика связи между сейсмометром и гальванометром. Эта связь мала, когда ослабление в электрическом контуре значительно, и при этом электромагнитное затухание мало по сравнению с механическим. Влияние ее на форму частотной характеристики сейсмографа наиболее велико при равенстве периодов маятника и гальванометра. Но даже тогда, согласно Хагиваре [146], если мы примем  $\sigma^2 < 1/4$ , максимальное отклонение от характеристики при нулевой связи составляет около 20% по амплитуде и  $15^\circ$  по фазе. Если пренебречь этой связью ( $\sigma^2 = 0$ ), слагаемое в отклике, содержащее  $d\Phi/dt$  в (10.61), станет равным нулю и частотную характеристику сейсмографа легко вычислить. Если мы примем  $u = U \exp(-i\omega t)$ , решение (10.61) будет иметь вид  $\xi = \omega^2 U \exp(-i\omega t) / [-\omega^2 - 2i\varepsilon_s \omega + \omega_s^2]$ . Принимая его за входной сигнал в (10.62), находим

$$\Phi = \frac{\mu_1 G_1 G_2 (-i\omega)}{Z_{11} K [-\omega^2 - 2i\varepsilon_g \omega + \omega_g^2]} \frac{\omega^2 U \exp(-i\omega t)}{[-\omega^2 - 2i\varepsilon_s \omega + \omega_s^2]}. \quad (10.64)$$

Для больших  $\omega$  получим

$$\Phi \sim \frac{\mu_1 G_1 G_2}{Z_{11} K} \left( \frac{1}{i\omega} \right) U \exp(-i\omega t), \quad (10.65)$$

а для малых  $\omega$

$$\Phi \sim \frac{\mu_1 G_1 G_2}{Z_{11} K} \left( \frac{\omega^3}{i\omega_s^2 \omega_g^2} \right) U \exp(-i\omega t). \quad (10.66)$$

Приведенные выше формулы показывают, что амплитудная характеристика имеет пик на частотах между  $\omega_s$  и  $\omega_g$ , спадает при увеличении частоты на высоких частотах как  $\omega^{-1}$  и спадает с увеличением периода на длинных периодах как  $T^{-3}$ .

Абсолютное значение чувствительности сейсмографа определяется отношением  $G_1 G_2 \mu_1 / Z_{11} K$ , которое нетрудно измерить. Например, если подать на катушку гальванометра постоянный ток  $I_0$ , отклонение зеркала  $\Phi$ , согласно (10.57), будет равно

$$\Phi = \frac{G_2}{K \omega_g^2} I_0,$$

откуда можно найти  $G_2/K$ . Другие величины рассматривались ранее.

Пользуясь (10.64), легко вычислить фазовую характеристику. Если положить  $\Phi = |\Phi| \exp[-i\omega t + i\phi(\omega)]$ , то  $\phi(\omega)$  описывает аппаратную фазовую задержку. Здесь возникает некоторая трудность с выбором знака в (10.64), т.е. с неопределенностью в фазе величиной  $\pi$ . Выбор знака определяется способом калибровки. Допустим, что мы калибруем вертикальный сейсмограф и прикладываем к массе маятника импульс, направленный вниз. Трасса сейсмограммы, фиксирующая это отклонение гальванометра, испытает смещение в направлении, которое будет обозначено как «вверх», поскольку движение массы вниз соответствует движению почвы вверх. При импульсном возбуждении реакция сейсмографа будет соответствовать высокочастотной асимптотической характеристике (10.65). Если знак выбран в соответствии с (10.64) — (10.66), отклик будет подобен отрицательной ступеньке, поскольку именно такой временной сигнал соответствует  $1/(i\omega)$  в выражении для спектра при  $\omega \rightarrow \infty$ . Но поскольку мы обозначили направление отклонения гальванометра как «вверх» при импульсном смещении почвы «вверх», мы изменяем знак (10.65) так, что

$$\Phi \sim \frac{\mu_1 G_1 G_2}{Z_{11} K} U \cdot \frac{1}{\omega} \exp(-i\omega t + i\pi/2) \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty.$$

Необходимо также изменить знак в (10.64) и (10.66). Фазовая задержка для бесконечной частоты равна  $\pi/2$ , монотонно уменьшается с ростом частоты и достигает  $-\pi/2$  на нулевой частоте (см. дополнение 10.1).

Фазы, показанные на графиках в работе Хагивары, нужно исправить на  $\pi$ , для того чтобы они согласовывались с этим стандартным способом, которым отмечается направление движения почвы на записях. Заметим также, что на его рисунках приведены фазовые задержки, так как он использовал  $\exp(+i\omega t)$ . Исправленные фазовые задержки, а также амплитудные характеристики показаны на рис. 10.17 при различных постоянных связи  $\sigma^2$  для случаев  $\omega_s/\omega_g = 6$  и

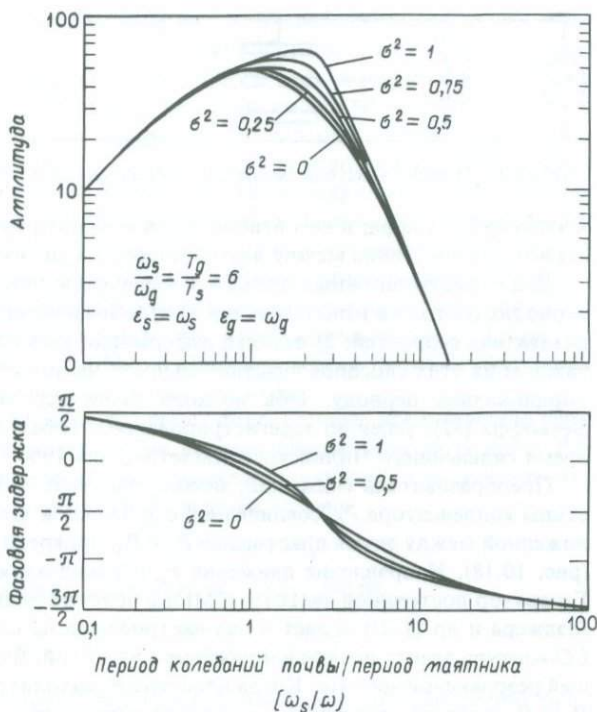


Рис. 10.17. Амплитудная и фазовая характеристики при различных значениях постоянной  $\sigma^2$  [14<sup>6</sup>].

$\epsilon_s/\omega_s = \epsilon_g/\omega_g = 1$ , что приблизительно соответствует длиннопериодным сейсмографам станций WWSSN. (Такие сейсмографы часто называют «приборами 15 — 100»). Эти числа соответствуют собственным периодам маятника и гальванометра. Весьма распространены также приборы 30 — 100. Для типового короткопериодного прибора характерна комбинация 1 — 0,75.)

#### 10.3.4. ПОВЫШЕНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ НА ДЛИННЫХ ПЕРИОДАХ

Частотная характеристика стандартного сейсмографа с преобразователем по скорости и гальванометром, как показано в (10.66), спадает на длинных периодах пропорционально кубу периода. Диапазон сильного ослабления чувствительности с увеличением периода можно сдвинуть в область больших периодов путем увеличения периода маятника. В разд. 10.1 мы упоминали маятник Лакоста, сохраняющий устойчивость на периодах в несколько десятков секунд. Другой, относительно недавней попыткой в этом направлении является ртутный на-

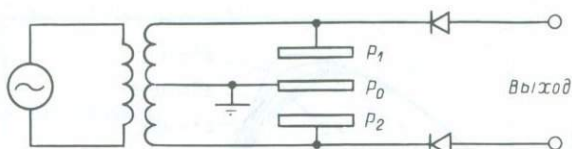


Рис. 10.18. Преобразователь смещений, используемый в деформометре Беньоффа.

клономер Беньоффа; в нем используется инерция ртути, совершающей длинно-периодные колебания между двумя резервуарами, соединенными трубой.

Два существенно иных подхода к улучшению чувствительности на длинных периодах состоят в использовании 1) преобразователя смещений вместо преобразователя скоростей, 2) датчика деформаций вместо инерционного датчика. В каждом из этих способов чувствительность на длинных периодах обратно пропорциональна периоду. Оба подхода были использованы в деформометре Беньоффа [32], успешно зарегистрировавшем собственные колебания Земли во время сильнейшего Чилийского землетрясения 1960 г.

Преобразователь смещений, использованный Беньоффом, состоит из пластины конденсатора  $P_0$ , соединенной с подвижной частью сейсмометра и расположенной между двумя пластинами  $P_1$  и  $P_2$ , прикрепленными к корпусу прибора (рис. 10.18). Направление движения  $P_0$  перпендикулярно плоскости пластины. Генератор постоянной частоты (5МГц в приборе Беньоффа и 1,5МГц в приборе Мэджера и др. [222]) подает в два настроенных на одну частоту параллельных LC-контура электрическое напряжение с частотой, близкой, но не равной их общей резонансной частоте. Когда пластина  $P_0$  находится ровно посередине между  $P_1$  и  $P_2$ , среднее напряжение на выходе равно нулю. Движение  $P_0$  приближает один из контуров к резонансному состоянию, а другой удаляет от резонанса. Результирующая разбалансировка в величинах напряжений почти пропорциональна смещению  $P_0$ . Связь между выходным напряжением и смещением схематически иллюстрирует рис. 10.19. Поскольку при больших смещениях возникает заметная нелинейность, в более поздних конструкциях преобразователей смещений используются иные электронные схемы.



Рис. 10.19. Характеристика преобразователя смещений, показанного на рис. 10.18.

Новый тип контура, показанный на рис. 10.20, работает следующим образом. Генератор постоянной частоты (16 кГц в приборе Блока и Мура [43], 3 кГц в приборе Стейси и др. [307] и 500 кГц в приборе Бака и др. [61]) при помощи трансформатора с двумя вторичными обмотками подает на пластины конденсатора  $P_1$  и  $P_2$  равные напряжения противоположного знака. Центральная точка вторичной обмотки заземлена. Когда пластина  $P_0$  находится посередине, напряжение на ней относительно земли равно нулю. Поскольку емкость конденсатора из двух параллельных пластин обратно пропорциональна расстоянию между пластинами, напряжение на  $P_0$  прямо пропорционально смещению  $P_0$  относительно срединного положения. Это напряжение можно весьма точно измерить с помощью резонансного усилителя (синхронизированного усилителя или детектора), поскольку частота сигнала генератора известна весьма точно. Такой датчик успешно использовали Блок и Мур в акселерометре, а также Стейси с соавторами и Бак с соавторами в ртутных наклономерах.

Стрейнсейсмометр (деформометр) имеет определенные преимущества перед инерционным сейсмометром в качестве датчика длиннопериодных волн. Рассмотрим простую гармоническую волну, распространяющуюся со скоростью  $c$  в направлении  $x$ . Пусть смещение  $u$  в направлении  $x$  равно

$$u = U \exp[-i\omega(t - x/c)].$$

Тогда деформация растяжения в направлении  $x$  будет равна

$$\frac{\partial u}{\partial x} = i \frac{\omega}{c} U \exp[-i\omega(t - x/c)].$$

Если используется преобразователь смещений, выходное напряжение пропорционально  $\omega U/c$ . С другой стороны, смещение маятника относительно корпуса прибора на более длинных периодах, чем период маятника, пропорционально  $\omega^2 U$  [см. (10.2)]. Другими словами, как уже отмечалось, частотная характеристика датчика деформаций лучше, чем датчика смещений, и различие увеличений на длинных периодах растет пропорционально периоду.

Другое преимущество стрейнсейсмометра в том, что он может регистрировать вековые изменения деформаций, в то время как маятниковый сейсмометр не может регистрировать сигналы нулевой частоты, за исключением вызванных наклонами или изменениями силы тяжести.

Недостатком стрейнсейсмометра является использование в нем как части прибора вмещающих пород. Присутствие трещин, отдельностей, рыхлых пород, воды и других слабых материалов с непредсказуемыми механическими характеристиками вносит нежелательные шумы и делает систему нелинейной и даже нестационарной.

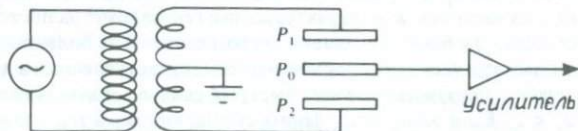


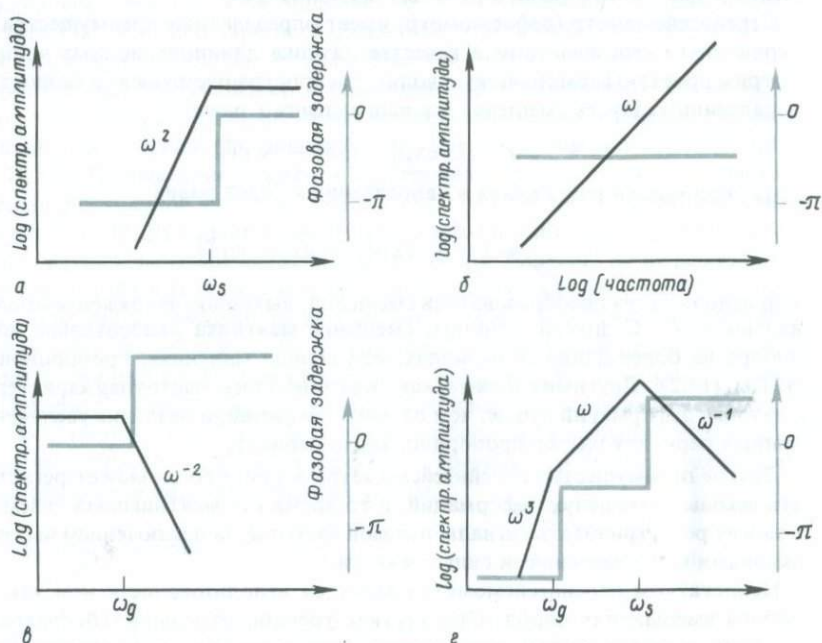
Рис. 10.20. Преобразователь смещений. Несмотря на внешнее сходство с показанным на рис. 10.18, он действует по-иному.

## ДОПОЛНЕНИЕ 10.1

## Основные свойства частотных характеристик приборов

Как мы видели, можно считать, что прибор, записывающий сейсмические колебания, состоит из нескольких составных частей. Целесообразно оценивать частотные характеристики каждой части, используя, если это потребуется, для получения явных формул приближенные методы. Мы получим характеристики, пропорциональные различным степеням частоты, поэтому наилучшее представление о них дают графики в двойном логарифмическом масштабе.

В качестве примера основного инерционного датчика мы рассмотрели маятниковые сейсмометры. Для этих устройств выходной сигнал  $\xi$  (см. рис. 10.1) имеет амплитудную характеристику  $|X(\omega)|$ , определяемую (10.3).  $|X(\omega)|$  — это просто отношение амплитудных спектров сигналов на выходе и входе,  $|\xi(\omega)|/|u(\omega)|$ . На высоких частотах  $|X(\omega)|$  стре-



**а** — основными свойствами характеристики преобразователей смещений являются постоянство амплитуд на частотах выше  $\omega_s$  и быстрый спад с уменьшением частоты (12 дБ/октава) ниже  $\omega_s$ . **б** — частотная характеристика преобразователя пропорциональна частоте на всех частотах. **в** — характеристика гальванометра постоянна ниже его собственной частоты ( $\omega_g$ ) и быстро спадает с ростом частоты на более высоких частотах. **г** — складываемые первые три частотные характеристики, представленные в двойном логарифмическом масштабе, обнаруживаем очень быстрый спад чувствительности на низких частотах в случае  $\omega_g < \omega_s$ . Если же  $\omega_g > \omega_s$ , форма суммарной характеристики такая же, как у преобразователя. Заметим, что двойное дифференцирование для получения характеристики по ускорению соответствует умножению графика **а** на  $\omega^{-2}$ , так что результирующая кривая горизонтальна для частот ниже  $\omega_s$  и спадает как  $\omega^{-2}$  на более высоких частотах.

мится к постоянному значению, а на низких частотах пропорционально  $\omega^2$ , так что его поведение схематически описывается частью *a* приведенного ниже рисунка.

Следующей частью системы может быть преобразователь (катушка), для которого  $\xi(\omega)$  — входной сигнал, а сила тока  $I(\omega)$  — выходной. Согласно (10.48), амплитудная характеристика этой части системы пропорциональна  $\omega$  (см. часть *b* рисунка), так как  $\xi(\omega) = -i\omega\xi(\omega)$ .

Следующая часть системы — гальванометр, входным сигналом для которого служит  $I(\omega)$ , а отклонение зеркала  $\Phi(\omega)$ , вероятно умноженное на какую-нибудь частотно-независимую постоянную, является выходным сигналом. Мы сделали упрощающие предположения, что сила тока в гальванометре пропорциональна силе тока в катушке сейсмометра и что ни один из этих токов не создает обратной связи, влияющей на движение маятника. Из (10.57) следует, что характеристика гальванометра  $\Phi(\omega)/I(\omega)$  имеет постоянную амплитуду на низких частотах и амплитуду, убывающую как  $\omega^{-2}$ , на высоких частотах (часть *в* рисунка).

Полная характеристика системы равна произведению характеристик составляющих ее частей; при использовании двойного логарифмического масштаба это равносильно суммированию. Для систем с преобразователем по скорости результирующая характеристика чаще всего имеет вид, как показано в части *г* рисунка. Если в инерционном датчике в электрический сигнал на выходе преобразуются перемещения, а не скорости движения маятника, то результирующая характеристика является просто суммой кривых *a* и *в*. В современных приборах выход сейсмометра (инерционного датчика с преобразователем) может служить входом разнообразных электронных усилителей с различными частотными характеристиками; в таком случае кривые *a* и *б* нужно сложить с частотной характеристикой усилителя.

Спектр фазовой задержки для инерционного датчика аппроксимируется скачком от  $-\pi$  до 0 при прохождении возрастающего  $\omega$  через значение  $\omega_s$ . [Предполагается правильное обозначение направления движения, как предложено при обсуждении уравнения (10.3).] Фазовая задержка преобразователя постоянна и равна  $-\pi/2$ , а для гальванометра она имеет ступеньку (от нуля до  $\pi$ ) при прохождении частоты через  $\omega_g$ . Эти задержки показаны на рисунке пунктирными линиями.

### 10.3.5. НЕЛИНЕЙНОСТЬ СЕЙСМИЧЕСКОГО ДАТЧИКА

Амплитудная характеристика любой физической системы нелинейна, если только амплитуда входного сигнала не является очень малой. Сейсмограф не составляет исключения. Рассмотрим сначала нелинейные свойства стандартного сейсмографа, описанного в разд. 10.3.3. Беркхемер и Шнайдер [37] детально исследовали смещение почвы, решив дифференциальное уравнение четвертого порядка для сейсмографа Голицына — Вилипа (с периодом маятника сейсмометра  $T_s = 12$  с, периодом гальванометра  $T_g = 12$  и 50 с) и сейсмографа Пресса — Юнга ( $T_s = 30$  с,  $T_g = 100$  с) на аналоговой вычислительной машине в Штутгартском технологическом институте.

Записи землетрясений, сделанные на больших расстояниях, указывают на то, что смещение почвы после прохождения сейсмических волн возвращается к исходному положению. С другой стороны, вид записей от близких землетрясений указывает на остаточные смещения, или, точнее, на параболический рост смещений, соответствующий ступенчатому изменению ускорения. Типичная запись такого длиннопериодного переходного процесса показана на рис. 10.21. Чтобы

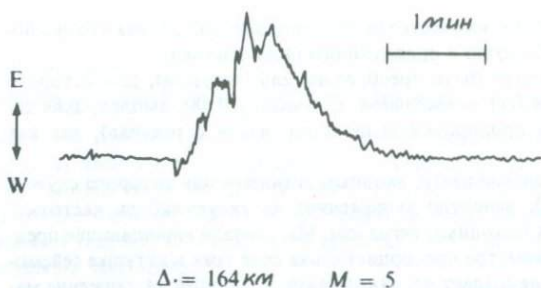


Рис. 10.21. Типичная запись близкого землетрясения, полученная стандартным длиннопериодным сейсмографом.

объяснить эти записи, нужно предположить, что землетрясение магнитуды 5 создает ступенчатое изменение ускорения порядка  $10^{-7} - 10^{-8}$  на расстоянии около 100 км. Это равносильно изменению силы тяжести на 0,01 — 0,1 мгал для вертикальной компоненты и наклону  $10^{-7} - 10^{-8}$  рад для горизонтальной компоненты. Пресс [261] высказал предположение, что причиной явления служит аппаратный гистерезис, поскольку наблюдаемый наклон в три-четыре раза превышал расчетный для землетрясения такой силы. Беркхемер и Шнайдер, напротив, рассматривали наклон как реальное явление, но отрицали реальность изменений силы тяжести. Они приписывали этот эффект нелинейности вертикального сейсмометра.

Рассмотренная ими нелинейность обусловлена струнным эффектом спиральной пружины. Сильное землетрясение на близком расстоянии создает значительные вибрации сейсмометра и может вызвать колебания пружины, подобные показанным на рис. 10.22. Если рассматривать только основную синусоидальную моду таких колебаний с амплитудой  $a$  в центре, длина пружины будет равна

$$l \sim l_0 \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{a\pi}{l_0} \right)^2 \right].$$

С другой стороны, угол  $\delta\theta$  равен

$$\delta\theta \sim \frac{a\pi}{l_0}.$$

Момент сил, создаваемый пружиной, равен

$$(T + \delta T)h \sin(\theta + \delta\theta) \sim Th \sin \theta + \delta T h \sin \theta + Th \cos \theta \delta\theta - Th \sin \theta \frac{(\delta\theta)^2}{2},$$

где  $T$  — сила натяжения, создаваемая пружиной, стремящейся сохранить свою длину  $l_0$ , а  $\delta T$  — изменение  $T$ , обусловленное струнным эффектом.

Для пружины нулевой начальной длины обнаружен еще один загадочный эффект. Обозначив коэффициент пружины  $k$ , для пружины нулевой начальной длины имеем

$$T = kl_0$$

и

$$\delta T = k \frac{l_0}{4} \left( \frac{a\pi}{l_0} \right)^2.$$

Тогда

$$(T + \delta T)h \sin(\theta + \delta\theta) = Th \sin \theta \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{a\pi}{l_0} \right)^2 \right] + Th \cos \theta \delta\theta.$$

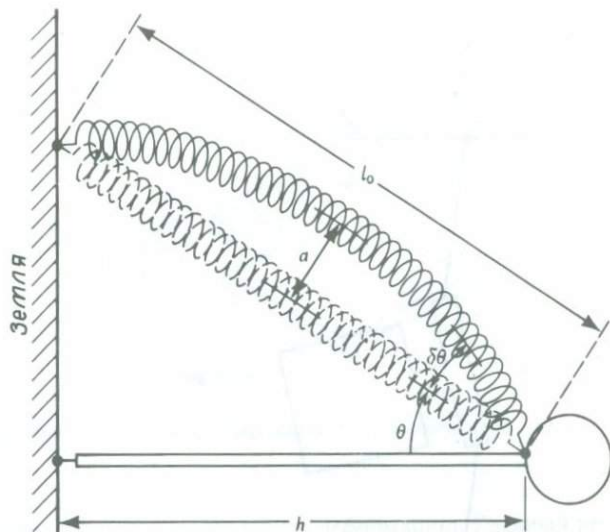


Рис. 10.22. Струнный эффект спиральной пружины.

Поскольку  $\delta\theta$  — слабое, обусловленное струнным эффектом, — быстро осциллирует, оно в среднем равно нулю. Поэтому струнный эффект, осредненный по времени, всегда уменьшает момент сил пружины и понижает положение массы. Этот эффект преобразует высокочастотное возмущение в фиктивный длиннопериодный сигнал. Для вертикального сейсмометра типа прибора Лакоста этот эффект всегда будет проявляться как кажущееся ступенчатое увеличение силы тяжести.

Преимуществом акселерометра Блока — Мура перед гравиметром Лакоста является простота конструкции маятника, минимизирующая нелинейные эффек-

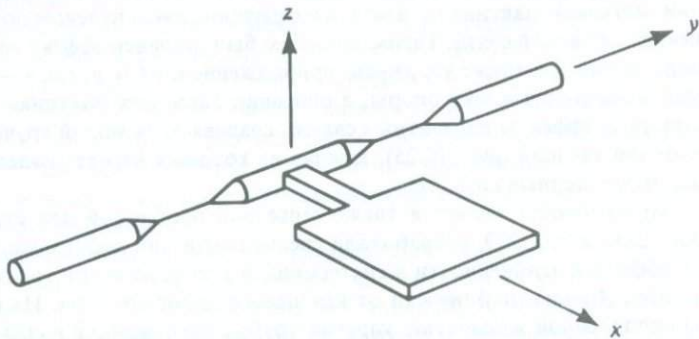


Рис. 10.23. Металлическая пластина прикреплена к короткому кварцевому стержню, две части которого вытянуты в нити. Пластина невелика ( $\sim 10 \text{ см}^2$ ) и удерживается в горизонтальном положении крутящим усилием нитей. В акселерометре Блока — Мура она играет роль вертикального маятника (из [44]; с разрешения Американского геофизического союза).

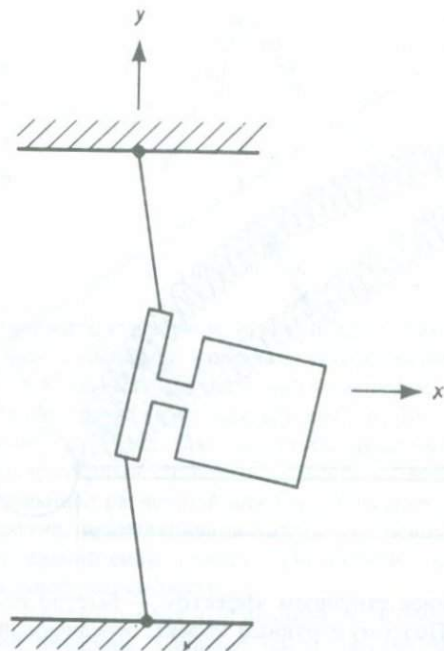


Рис. 10.24. Мода кручения (из [44]; с разрешения Американского геофизического союза).

ты. Их маятник представляет собой медную пластину, соединенную с цельным элементом из плавленного кварца, частично растянутым в две нити (рис. 10.23). Такая конструкция полностью свободна от струнного эффекта, но допускает другие высокочастотные моды колебаний, которые могут создавать фиктивные длиннопериодные сигналы, интерферирующие с основным колебанием. Блок и Мур рассмотрели несколько возможных причин нелинейности. Прежде всего они заставили маятник оставаться в фиксированном нулевом положении применением обратной связи. Таким способом был устранен эффект неоднородности в поле датчика, а также устранено приближение  $\sin \theta \approx \theta$ , где  $\theta$  — угол поворота маятника вокруг точки опоры, в описании движения маятника. Затем они рассмотрели эффекты паразитных связей, создаваемых модой кручения (рис. 10.24) и модой качания (рис. 10.25), каждая из которых может создавать фиктивные длиннопериодные сигналы.

Нелинейность является также серьезной проблемой для стрейнсейсмометров. Сакс и др. [279] разработали специальный тип деформометра, свободный от эффектов нелинейности и гистерезиса и установили три таких прибора в Мацусиро, Япония, поблизости от кварцевого деформометра. Их прибор состоял из наполненной жидкостью упругой трубы, погруженной в скважину и находящейся в плотном контакте со стенками скважины. Контакт между стенками и трубой обеспечивался при помощи расширяющегося цемента. Предполагалось, что труба будет реагировать на малые отклонения скважины с точностью до

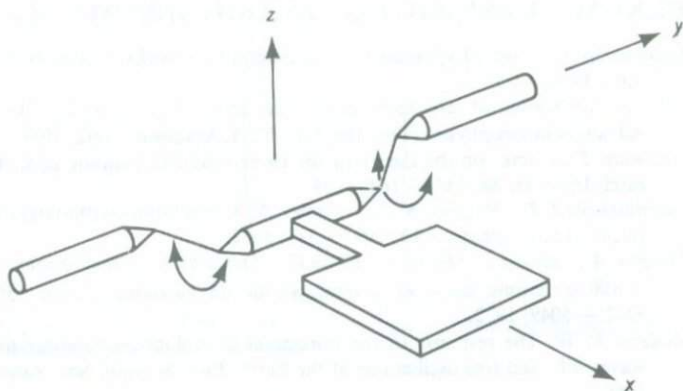


Рис. 10.25. Мода качения (из [44]; с разрешения Американского геофизического союза).

$10^{-6}$  мкм. Такой прибор измеряет только объемную деформацию. Главный результат заключался в том, что множество изменений деформаций, связанных с близкими землетрясениями, были записаны кварцевым деформометром, но не обнаруживались новым прибором. Чувствительность последнего оценивалась сравнением амплитуд *P*-волн и волн Рэлея, записанных этим прибором и стандартным маятниковым сейсмографом. Этот результат показывает, что многие изменения деформаций, наблюдаемые с кварцевым деформометром, могут быть фиктивными.

Недавно начала осуществляться программа модернизации Мировой сети стандартных сейсмических станций путем установки новых типов приборов в специально выбранных точках; эти станции получили название Сейсмических исследовательских обсерваторий (SRO) [255]. Чтобы уменьшить шум на горизонтальных компонентах (разд. 10.2.5), приборы размещают в скважине диаметром семь дюймов на глубине около 100 м. Механическая конфигурация датчиков ближе к общепринятой, чем у Блока и Мура. Используются маятник Лакоста для вертикальной компоненты и подвесы типа «калитки» (см. рис. 10.4,б) для горизонтальных компонент. Для обеспечения линейности и стабильности датчик уравнивается при помощи обратной связи с использованием емкостного преобразователя. Датчики помещены в герметичные контейнеры, подвергнуты термоконтролю и вакуумизации для устранения воздуха и влаги, что позволяет избежать внутренней конвекции.

Другая новая программа, получившая название IDA (Мировая сеть акселерометров) и осуществляемая Калифорнийским университетом в Сан-Диего, намечает размещение в различных точках Земли 20 станций [4]. Каждая станция должна оборудоваться цифровым гравиметром Лакоста — Ромберга. Динамический диапазон записи 120 дБ. Сигнал перед регистрацией проходит фильтрацию, причем один канал предназначен для изучения земных приливов, а другой усиливает полосу частот между 1 и 30 цикл/ч для изучения нормальных мод.

## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ

- Beauchamp K. G.* (ed.) Exploitation of seismograph networks. Leiden, Noordhoff: International Publishing, 1975.
- Beger J.* Application of laser techniques to geodesy and geophysics. In Landsberg H. E. (ed.), *Advances in Geophysics* (Vol. 16). New York: Academic Press, 1973.
- Hagiwara T.* A note on the theory of the electromagnetic seismograph. *Bull. Earthquake Research Institute*, **36**, 139 — 164, 1958.
- Kosminskaya I. P., Puzirev N. N., Alexeev A. S.* Explosion seismology, its past, present and future. *Tectonophysics*, **13**, 309 — 323, 1972.
- Murphy A., Savino J., Rynn J., Choy G., McCamy K.* Observations of long-period (10s — 100 s) seismic noise at several worldwide locations. *Journ. of Geoph. Res.*, **77**, 5042 — 5049, 1972.
- Rodgers P. W.* The response of the horizontal pendulum seismometer to Rayleigh and Love waves, tilt, and free oscillations of the Earth. *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, **58**, 1384 — 1406, 1968.
- Sax L. R.* Stationarity of seismic noise. *Geophysics*, **33**, 668 — 674, 1968.
- Shapiro I. I., Knight C. A.* Geophysical applications of long-baseline radio interferometry. In Mansinha L., Smylie D. E., Beck A. E. (ed.), *Earthquake Displacement fields and the rotation of the Earth*. New York: Springer-Verlag, 284 — 301, 1970.
- Willmore P. L.* The detection of earth movements. In Runcorn S. K. (ed.), *Methods and Techniques in Geophysics* (Vol. 1), New York: Interscience, 1960.
- \* *Колесников Ю. А., Мацневский С. А.* Применение емкостных преобразователей линейных перемещений в сейсмометрии. В сб. «Вопросы прогноза землетрясений и строения Земли» (Вычисл. сейсмология, вып. 11). — М.: Наука, 1978.
- \* *Феофилактов В. Д.* Помехи в длиннопериодной сейсмометрии. — М.: Наука, 1977.
- \* *Колесников Ю. А., Токсёз М. Н.* Уменьшение чувствительности длиннопериодных вертикальных сейсмометров к колебанию атмосферного давления. В кн. «Математические модели строения Земли и прогноза землетрясений» (Вычислит. сейсмология, вып. 14). — М.: Наука, 1982.

## ЗАДАЧИ

10.1. Покажите, что свертку (10.11) можно также представить в виде

$$\zeta(t) = \int_0^{\infty} u(t - \tau) \ddot{f}(\tau) d\tau.$$

10.2. Покажите, что период  $T$  колебаний массы, подвешенной с помощью вертикальной пружины, равен  $2\pi[(l - l_0)/g]^{1/2}$ , где  $l$  — длина уравновешенной пружины (под нагрузкой, обусловленной силой тяжести) и  $l_0$  — начальная длина (при отсутствии натяжения).

10.3. Эта задача вызвана необходимостью оценить, какая часть движения почвы вызвана атмосферными возмущениями и насколько это движение (для большинства задач являющееся шумом) можно ослабить погружением сейсмометров на некоторую глубину [302].

- а) Рассмотрите однородное полупространство с поверхностью  $z = 0$ . Предположим, что к поверхности приложено движущееся давление, моделируемое граничными условиями  $\tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ ,  $\tau_{zz} = -P \exp[i\omega(x/c - t)]$ .
- б) Покажите, что колебания  $P - SV$  в полупространстве определяются вектором движения-напряжения  $\mathbf{f} = \mathbf{F}\omega$ , где  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{F}$  выражаются при помощи (5.60) и (5.65) и

$$\mathbf{w} = \frac{iP}{\omega\rho\beta^2\mathbf{R}(p)} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right) \frac{1}{\alpha} \\ -2p\xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $p = c^{-1}$ ,  $\mathbf{R}(p)$  — функция Рэлея (5.54) и  $\xi = (1/\alpha^2 - p^2)^{1/2}$ .

в) Пусть  $c \ll \beta$  и  $\omega z c / 2\beta^2 \ll 1$ . Покажите, что горизонтальная и вертикальная компоненты смещений равны соответственно

$$u_x = \frac{icP}{\omega\rho\beta^2} \left[ \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{\omega z}{c} \right] e^{-\omega z/c} \exp \left[ i\omega \left( \frac{x}{c} - t \right) \right]$$

и

$$u_z = \frac{cP}{\omega\rho\beta^2} \left[ \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{\omega z}{c} \right] e^{-\omega z/c} \exp \left[ i\omega \left( \frac{x}{c} - t \right) \right].$$

10.4. Как оценить дисперсию поверхностных волн по записям маятникового сейсмометра и деформометра, установленных в одном и том же месте? (Иными словами, как можно изучить частотную зависимость фазовой скорости  $c(\omega)$ , где  $c$  выражается через частоту и горизонтальное волновое число как  $c = \omega/k$ ?)

## Словарь волн

**ВИДИМЫЕ ВОЛНЫ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ** (*visible earthquake waves*). Медленно распространяющиеся колебания с большим периодом и малыми длинами волн, наблюдавшиеся визуально в эпицентральной зоне сильнейшего землетрясения [214].

**ВОЗДУШНЫЕ ВОЛНЫ** (*air waves*). Слышимые звуки, иногда порождаемые землетрясениями; местное землетрясение может «звучать» как отдаленный гром. Инструментальные измерения показывают, что эти звуки вступают одновременно с первыми волнами  $P$  [167]. Очень сильные землетрясения возбуждают длиннопериодные (от минут до часов) акустико-гравитационные волны. Те же волны возбуждаются при извержении вулканов, падении метеоритов и ядерных взрывах в атмосфере [148].

**ВУЛКАНИЧЕСКОЕ ДРОЖАНИЕ** (*volcanic tremors*). Сейсмические сигналы, возбуждаемые вулканической деятельностью и существенно различные по характеру. Иногда они неотличимы от сигналов, создаваемых тектоническими землетрясениями, в других случаях имеют вид непрерывных колебаний, амплитудные спектры которых содержат ряд острых пиков. Непрерывные колебания называют вулканическим или гармоническим дрожанием [7, 231].

**ГЛУБИННЫЕ ФАЗЫ** (*depth phases*)  $pP$ ,  $pS$ ,  $sP$ ,  $sS$ . Символ  $pP$  используется для обозначения  $P$ -волны, которая распространяется вверх от гипоцентра, отражается вниз от свободной поверхности и наблюдается на телесеismicких расстояниях.  $sS$ ,  $sP$  и  $pS$  имеют аналогичный смысл. Например,  $sP$  соответствует фазе, которая, распространяясь вверх от источника падает на свободную поверхность как  $S$ , а после отражения от нее подходит к регистрирующей станции как волна  $P$ . Эти фазы используются для уточнения глубины очага. Объяснение фазы  $sS$  см. на рис. 9.15.

**ГОЛОВНЫЕ ВОЛНЫ** (*head waves*). Наблюдаются в полупространстве, находящемся в жестком контакте с другим полупространством с большей скоростью волн, когда сейсмический источник расположен в низкоскоростной среде. Головная волна распространяется вдоль границы, и ее фронт в низкоскоростном полупространстве представляет собой часть расширяющейся конической поверхности. Поэтому головные волны часто называют «коническими» волнами. Примером головных волн служит волна  $P_n$  с траекторией луча вдоль кровли мантии.

**ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ** (*gravity waves*). На длиннопериодные нормальные моды в поверхностном слое с очень низкой скоростью поперечных волн, как, например, в рыхлых осадках, сильное влияние может оказывать сила тяжести [131]. Она не только уменьшает длину волны нормальных мод, но и делает возможным возникновение волн, подобных гравитационным волнам в жидком слое. Предполагают, что так называемые «видимые волны» с большими амплитудами и относительно длинными периодами, наблюдаемые в эпицентральной зоне очень сильного землетрясения, являются гравитационными волнами [214].

**ДИФРАГИРОВАННАЯ ВОЛНА  $P$**  (*diffracted P*). Волна  $P$  от поверхностного источника, касающаяся земного ядра, появляется на поверхности Земли на эпицентральной расстоянии около  $103^\circ$ . Хотя геометрическая оптика предсказывает отсутствие прямых вступлений волн  $P$  в зоне тени за этим расстоянием, мы продолжаем наблюдать такие во-

льны, в особенности длиннопериодные, по крайней мере до  $130^\circ$ . Эти волны дифрагируют на границе ядра. См. рис. 9.23, б.

**ЗАСТЫВШИЕ ВОЛНЫ** (*frozen waves*). В эпицентральной зоне сильного землетрясения стены, плотины и другие сооружения иногда приобретают как бы форму волны. Возникновение таких «застывших волн» объясняют образованием открытых трещин в грунте на гребнях волн, иногда сопровождающимся выбросами песка и воды.

**ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ** (*flexural waves*). Нормальная мода в бесконечной пластине, находящейся в вакууме, с движением, антисимметричным относительно срединной плоскости пластины. Примеры в природе — волны в плавучих льдах. (Для короткопериодных волн характеристическое уравнение нормальных мод сводится к уравнению для изгибных волн в пластине, слегка модифицированному из-за наличия воды. Однако для длиннопериодных волн в характеристическом уравнении доминирует член, обусловленный силой тяжести, и эта мода приближенно описывает гравитационные волны в воде.)

**КАНАЛОВЫЕ ВОЛНЫ** (*guided waves*). Волны, захваченные волноводом в результате полного внутреннего отражения или рефракции лучей у подошвы и кровли слоя. Ярким примером служат акустические волны в низкоскоростном канале в океане (ПЗК). Поскольку коэффициент поглощения звука для частот порядка сотен герц в морской воде очень мал, становится возможным сверхдальнее распространение звука. Если рассматривать поверхность Земли как верхнюю границу волновода, то поверхностные волны (такие, как волны Рэлея, Лява и их высшие моды) также будут канальовыми волнами. Волны, связанные с низкоскоростным каналом в коре или мантии, можно интерпретировать как нормальные моды с концентрацией энергии в канале. Там, где они существуют, канальные волны могут распространяться на значительные расстояния, так как они испытывают практически лишь двумерное расхождение.

**КОДА МЕСТНОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ** (*coda waves of a local earthquake*). На сейсмограммах местного землетрясения после прохождения объемных и поверхностных волн обычно наблюдаются длительные колебания. Эта часть записи вплоть до ее конца называется кодой. Полагают, что она создается рассеянными волнами, вызванными горизонтальными неоднородностями в земной коре и верхней мантии [6].

**КРЭРИ ВОЛНЫ** (*Crary waves*). Волны Крэри представляют собой цуг синусоидальных волн с приблизительно постоянной частотой, наблюдаемый в плавучих льдах. Они образованы многократно-отраженными волнами SV с горизонтальной фазовой скоростью, близкой к скорости продольных волн для льда.

**ЛЯВА ВОЛНЫ** (*Love waves*). Волны SH с наибольшими амплитудами, удерживаемые вблизи поверхности упругого тела. Их существование в однородном слое, лежащем на однородном полупространстве со скоростью волн S большей, чем скорость волн в слое, впервые предсказал А. Ляв. Эти волны могут существовать и в других вертикально-неоднородных средах. Однако они не могут существовать в однородном полупространстве, имеющем плоскую поверхность.

**МАНТИЙНЫЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ** (*mantle Rayleigh waves*). Длиннопериодные волны Рэлея иногда называют мантийными волнами Рэлея.

**МИКРОСЕЙСМЫ** (*microseisms*). Непрерывное движение почвы, создающее фон шумов в любом сейсмическом эксперименте. Микросейсм с частотами выше 1 Гц обычно вызываются искусственными источниками — работой транспорта и различных механизмов. Их иногда называют микродрожанием, чтобы отличить от длиннопериодных микросейсм, вызываемых природными возмущениями. На типичной станции в глубине континента микросейсм имеют преобладающие периоды около 6 с. Они возбуждаются давлением стоячих океанических волн, которые образуются в области возникновения шторма или вблизи берега из волн, распространяющихся в противоположных направлениях [216].

**НЕОДНОРОДНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ** (*inhomogeneous plane waves*). Плоские волны с амплитудами, изменяющимися в направлении, отличном от направления распростране-

ния. Скорость распространения таких волн меньше, чем скорость распространения обычных плоских волн. Их также называют быстрозатухающими волнами (*evanescent waves*).

**НОРМАЛЬНЫЕ МОДЫ** (*normal modes*). Нормальные моды первоначально были определены как собственные колебания системы с конечным числом степеней свободы (например, конечное число частиц, соединенных безынерционной пружиной). Каждая мода описывает простое гармоническое колебание определенной частоты, называемой собственной частотой. Число независимых мод определяется числом степеней свободы. Произвольное движение системы можно выразить через суперпозицию нормальных мод. Собственные колебания сплошного тела конечных размеров, такого как Земля, также называют нормальными модами. В этом случае имеется бесконечное число нормальных мод и произвольное движение выражается их суперпозицией. Концепция нормальных мод обобщена на случай волноводов, в которых могут существовать свободные волны с определенной фазовой скоростью при отсутствии внешней силы. Примерами являются волны Рэлея в полупространстве и волны Лява в слоистом полупространстве. Однако в этих случаях произвольное движение нельзя представить как суперпозицию нормальных мод.

**ОБМЕННЫЕ ВОЛНЫ** (*converted waves*). Обмен волн  $P$  на  $S$  и  $S$  на  $P$  происходит на границах при наклонном падении луча. Эти обменные волны иногда видны на сейсмограммах в виде четких вступлений между вступлениями волн  $P$  и  $S$  и могут использоваться для определения положения границы.

**ОБЪЕМНЫЕ ВОЛНЫ** (*body waves*). Волны, распространяющиеся в безграничной сплошной среде, называются объемными в противоположность поверхностным волнам, распространяющимся вдоль граничной поверхности.

**ОТРАЖЕНИЯ ОТ ПОВЕРХНОСТИ** (*surface reflections*) ( $PP$ ,  $SS$ ,  $SP$ ,  $PS$ ,  $PPP$ ,  $SSS$ ). Волны  $P$ , претерпевшие одно отражение от поверхности на пути до регистрирующей станции, обозначаются  $PP$ , если волна распространялась из гипоцентра вниз (в отличие от  $pP$ , когда волна распространяется вверх). Волны, дважды отраженные от поверхности, обозначаются  $PPP$ . Аналогично этому  $PS$  — однократно отраженная волна, претерпевшая обмен при отражении волны  $P$  и вступающая на станцию как  $S$ .

**ПЛАСТИННЫЕ ВОЛНЫ** (*plate waves*). Характеристическое уравнение нормальных мод в бесконечной пластине в вакууме можно превратить в два уравнения. Одно из них определяет моду с движением, симметричным относительно срединной плоскости пластины, а другое — моду с антисимметричным движением. Первую иногда называют волной  $M_1$ , а вторую —  $M_2$ . Например,  $M_{11}$  и  $M_{12}$  — это соответственно основная и первая высшая моды волны  $M_1$ . На очень коротких периодах  $M_{11}$  и  $M_{21}$  аппроксимируют волны Рэлея в упругом полупространстве, образованном из того же материала, что и пластина. При длинах волн, во много раз превышающих мощность пластины,  $M_{21}$  называют изгибными волнами. Они обладают дисперсией, и с возрастанием длины волны их фазовая скорость уменьшается до нуля [282].

**ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ГРУНТЕ** (*ground roll*). Термин, используемый в сейсморазведке для описания поверхностных волн-помех, возбуждаемых взрывами. Они характеризуются малой скоростью, низкой частотой, большой амплитудой и наблюдаются в областях, где близкоповерхностные напластования образованы слабо цементированными низкоскоростными осадками, подстилаемыми уплотненными породами с более высокой скоростью. Обычно состоят из волн Рэлея.

**ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВОЗДУШНЫМИ** (*air-coupled surface waves*). Несмотря на огромную разницу в плотности воздуха и грунта, возмущения атмосферного давления, перемещаясь вдоль земной поверхности, могут усиливать поверхностные волны, если их фазовая скорость равна скорости звука в воздухе. Такое взаимодействие с воздухом наблюдается для изгибных волн во льдах, плавающих по поверхности океана, и для волн Рэлея, возникающих в среде с низкоскоростными поверхностными слоями [262]. Одновременное вступление воздушных волн и приливных возмущений наблюдалось после знаменитого извержения вулкана Кракатуа в 1883 г.

**ПОВЕРХНОСТНЫЕ P-ВОЛНЫ** (*surface P-waves*). Луч поверхностной волны  $P$  состоит из двух отрезков: отрезка луча волны  $S$  от источника до свободной поверхности с кажущейся горизонтальной скоростью, равной скорости волны  $P$ , и отрезка луча волны  $P$ , идущего вдоль свободной поверхности к приемнику. Поверхностные волны  $P$  появляются на критическом расстоянии и могут иметь более резкие вступления, чем прямые волны  $S$ , хотя очень быстро затухают с расстоянием.

**ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ** (*longitudinal waves*). Смещение, связанное с волной  $P$  в дальней зоне, в однородном изотропном твердом теле параллельно направлению распространения. Поэтому волны  $P$  называют также продольными волнами.

**ПРОСАЧИВАЮЩИЕСЯ МОДЫ** (*leaking modes*). Нормальные моды в слоистом полупространстве, как правило, имеют граничные частоты, ниже которых фазовые скорости превосходят скорости  $P$ - и (или)  $S$ -волн в полупространстве, и энергия просачивается в подстилающее однородное полупространство в виде объемных волн. Из-за этого амплитуды просачивающихся мод экспоненциально затухают с расстоянием.

**РЭЛЕЯ ВОЛНЫ** (*Rayleigh waves*). Важнейший тип поверхностных волн с наибольшими амплитудами вблизи плоской свободной границы упругого тела. В случае однородного тела скорость распространения этих волн составляет от 0,88 до 0,95 от скорости поперечной волны в зависимости от коэффициента Пуассона. Волны Рэлея в вертикально-неоднородном полупространстве имеют частотно-зависимые фазовые и групповые скорости. В вертикально-неоднородном полупространстве могут существовать высшие моды этих волн.

**СЕЙШИ** (*seiche*). Свободные колебания поверхности замкнутого водоема, например озера, пруда или залива с узким входом. Они иногда возбуждаются землетрясениями или цунами. Период колебаний меняется от нескольких минут до нескольких часов, а само колебание может длиться от нескольких часов до одного-двух дней.

**СТОНЛИ ВОЛНЫ** (*Stoneley waves*). Граничные волны, имеющие наибольшие амплитуды вблизи плоской границы раздела двух упругих сред. Они всегда возможны на границе между твердым телом и жидкостью, но могут существовать и на границе двух твердых тел, но только при жестком условии, что скорости поперечных волн в обеих средах приблизительно равны.

**ТРУБНЫЕ ВОЛНЫ В СКВАЖИНЕ** (*tube waves in a borehole*). В пустых цилиндрических скважинах вдоль оси скважины могут распространяться волны типа поверхностных с энергией, сосредоточенной вблизи от скважины. Они обладают дисперсией, и их фазовая скорость возрастает с увеличением длины волны. При длинах волн, много меньших радиуса скважины, они сходны с волнами Рэлея. Фазовая скорость достигает скорости поперечных волн при длинах волн, равных примерно трем радиусам скважины. За этой граничной длиной волны они быстро затухают, излучая волны  $S$ . В заполненной жидкостью цилиндрической скважине кроме ряда многократно-отраженных конических волн, распространяющихся в жидкости, существуют трубные волны во всем диапазоне периодов без ограничений. При малых длинах волн они сходны с волнами Стоули, распространяющимися вдоль плоской границы жидкости и твердой среды. При длинах волн, больших 10 радиусов скважины, скорость трубных волн становится постоянной и определяется модулем всестороннего сжатия  $\chi$  жидкости и модулем сдвига  $\mu$  твердого тела:  $v = c(1 + \chi/\mu)^{-1/2}$ , где  $c$  — скорость звука в жидкости [40, 331].

**ЦУНАМИ, ИЛИ «ПРИЛИВНАЯ ВОЛНА»** (*tsunami, or "tidal wave"*). Гравитационные волны, создаваемые на поверхности моря возмущениями морского дна. Такое возмущение может быть поднятием или опусканием, вызванным подводным землетрясением, обвалом или извержением вулкана.

**ЭЙРИ ФАЗА** (*Airy phase*). Участки диспергирующих волновых пучков, связанные с максимумами и минимумами кривой групповой скорости. К ним неприменима аппроксимация стационарной фазы, но способ, описанный в задаче 7.8, еще достаточно точен. Для приближенного расчета формы колебаний также можно использовать функцию Эйри

[287]. Примерами являются волны Рэлея на континентах с периодами около 15 с и мантийные волны Рэлея с периодами 200 — 250 с.

*c.* Этот символ используется для указания отражения от границы между мантией и ядром, когда волны падают со стороны мантии. Например, отраженные волны, распространяющиеся в мантии как *S*, обозначаются *S c S*. Обширное исследование волн *P c P* описано в [118].

*G*-волны (*Gn*). Другое название длиннопериодных волн Лява. Поскольку групповая скорость волн Лява в Земле в диапазоне периодов от 40 до 300 с практически постоянна (4,4 км/с), они имеют форму импульсов, и эти импульсные волны получили дополнительное название *G*-волн в честь Гутенберга. Чтобы обождать Землю, *G*-волнам нужно 2,5 ч. После сильного землетрясения мы наблюдаем серию *G*-волн: *G1, G2, G3... Gn* в соответствии с временами их вступлений. Нечетные номера даны волнам, бегущим в направлении от эпицентра к станции, а четные — волнам, уходящим от эпицентра в противоположном направлении и подходящим к станции со стороны антипода эпицентра. См. задачу 7.9 и рис. 8.5.

*I, i.* Символ *I* обычно указывает, что в лучевой траектории имеется звено волны *P*, пересекающее внутреннее ядро Земли. Например, *PKIKP* — это волна *P*, которая проникает во внутреннее ядро и возвращается на поверхность, нигде не меняясь на волну *S*. С другой стороны, *i* обычно указывает на отражение от границы между внешним и внутренним ядрами, точно так же как *c* обозначает отражение от границы ядра и мантии.

*J.* Этот символ указывает, что часть пути, приходящуюся на внутреннее ядро Земли, волна проходит как волна *S*.

*K.* Волны *P* во внешнем ядре обозначаются как *K*. Например, волны *S*, падающие из мантии, претерпевающие обмен на волны *P* на границе мантии и внешнего ядра, распространяющиеся как волны *P* во внешнем ядре и вновь перешедшие в *S* при возвращении в мантию, обозначаются *SKS*. Как *PP, PPP* и т.д. обозначают отражения от земной поверхности, так и *KK, KKK* и т.д. обозначают волны *P* в ядре, отразившиеся снизу от границы ядра и мантии.

*L (LQ, LR).* Символ *L* используется для обозначения длиннопериодных поверхностных волн. Когда тип волны известен, для волн Лява и волн Рэлея используются соответственно обозначения *LQ* и *LR*.

*Lg*-волны. Короткопериодные (1 — 6 с) вступления с большими амплитудами и с преобладающим поперечным движением [112]. *Lg*-волны распространяются вдоль поверхности со скоростями, близкими к средней скорости поперечных волн в верхней части континентальной коры [162]. Они наблюдаются только тогда, когда путь волны полностью проходит по континенту. Включения даже столь малого океанического отрезка, как 2°, достаточно, чтобы уничтожить эти волны. Когда волны *Lg* приходят в виде обособленных групп, их называют *Lg1* и *Lg2*. Скорость их 3,5 км/с.

*Li*-волны. Волны, подобные волнам *Lg*, но их существование не так широко признано, как *Lg*. Скорость волн *Li* равна 3,8 км/с, и их можно отнести к нижней части континентальной коры [27, 28].

*M.* Символ используется для обозначения на сейсмограмме группы волн с максимальной амплитудой.

*M1 и M2-волны.* *M1* и *M2* — симметричные и антисимметричные нормальные моды бесконечной пластины в вакууме. Каждая содержит последовательность из основной и высших мод, обозначаемых как *M11, M12, ...* или *M21, M22, ...*. Подобная классификация была одно время принята для основной и высших мод волн Рэлея в слое на полупространстве. Однако различие между модами *M1* и *M2* (иногда называемой волной Сезавы) для слоистого полупространства не столь отчетливо, как для пластины.

*P-волны.* Упругие волны сжатия в сейсмологии называют волнами *P*. «*P*» означает «первые» (*primary*). В однородном изотропном теле скорость этих волн равна  $\sqrt{(\chi + \frac{1}{2}\mu)/\rho} \approx \gamma \delta \epsilon \chi, \mu$  и  $\rho$  — соответственно модули объемного сжатия и сдвига и плотность. Смещение частицы, связанное с волной *P*, обычно параллельно направлению распространения волны. Поэтому *P*-волны называют также продольными волнами.

*P-кода.* Часть записи волн *P* после вступления первых волн. Они могут быть вызваны обменом волн *P* на *S* на границах, многократными отражениями в слоях или рассеянием на трехмерных неоднородностях.

*P\**. Так обозначают волны *P*, рефрагирующие в промежуточном слое земной коры со скоростью 6,5 км/с. Верхняя граница этого слоя называется границей Конрада. См. дополнение 6.4.

*P'*. Еще одно обозначение волн *PKP*.

*PdP*. Эта волна сходна с волной *PP*, отраженной от земной поверхности, но отражение здесь происходит от границы на глубине *d* (выраженной в километрах, например *P<sub>600P</sub>*).

*P<sub>d</sub>, P<sub>u</sub>, P<sub>r</sub>*. Резкое возрастание скорости в верхней мантии под низкоскоростным слоем приводит к образованию петли годографа волн *P* вблизи  $\Delta = 20^\circ$ . Три ветви обозначаются в порядке уменьшения  $dt/d\Delta$ : как *P<sub>d</sub>* (прямая), *P<sub>u</sub>* (верхняя) и *P<sub>r</sub>* (рефрагированная).

$\bar{P}(Pg)$ . Годографы на коротких расстояниях (до нескольких сотен километров) для сейсмических источников в коре обычно выглядят как две пересекающиеся прямые. Одной из них, для меньших расстояний, отвечает скорость 6 км/с, а другой, для больших расстояний, — скорость 8 км/с. Первую относят к прямым волнам *P*, распространяющимся в коре, и обозначают  $\bar{P}$  или *Pg*, что символизирует гранитный слой.

*PL-волны.* Цуг длиннопериодных волн (от 30 до 50 с), наблюдаемый в интервале между волнами *P* и *S* на расстояниях менее  $30^\circ$ . Они обладают дисперсией, причем раньше приходят более длиннопериодные колебания. Эти волны интерпретируют как просачивающуюся моду в волноводе, образованном корой и мантией [246, 316].

*PL-волны, связанные с поперечными*, т.е. *S — PL (shear-coupled PL-waves)*. Это длиннопериодный волновой цуг, следующий за волной *S* на расстояниях до  $80^\circ$ . Объясняется как результат взаимодействия волн *S* с просачивающейся модой волновода, образованного корой и мантией, т.е. с волнами *PL*. Наблюдалось также взаимодействие волн  $\bar{P}$  с *SS* и *SSS* [72, 260].

*P<sub>n</sub>-волны.* За некоторым критическим расстоянием (обычно в интервале от 100 до 200 км) первое вступление от сейсмических источников в коре соответствует волнам, преломленным в кровле мантии. Эти волны, называемые *P<sub>n</sub>*, относительно слабые, обладающие длинными периодами; за ними следуют более интенсивные и четкие волны с меньшими периодами, называемые  $\bar{P}$  и распространяющиеся в коре. Волны *P<sub>n</sub>* долгое время интерпретировали как головные (конические) волны, распространяющиеся вдоль границы двух

однородных сред — коры и мантии. Однако наблюдаемая амплитуда обычно больше, чем предсказывается для головных волн. Это означает, что существует не просто скачок скорости, а область с конечным градиентом в переходной зоне между корой и мантией или ниже нее. В последние годы обозначение  $P_n$  используется для короткопериодных  $P$ -волн, распространяющихся на значительные расстояния (даже до  $20^\circ$ ) с горизонтальными фазовыми скоростями в диапазоне 7,8 — 8,3 км/с. Так Херрин (1969) определил  $P_n$  как «первые вступления сейсмической энергии в диапазоне от нескольких градусов до расстояния, где годограф заметно искривляется». Интерпретация таких волн как головных, связанных с границей Мохо, в этом случае неудовлетворительна (хотя и может объяснить горизонтальную скорость и времена пробега), так как головная волна должна быстро затухать с расстоянием. Более правдоподобна трактовка этих волн как каналовых внутри слоя с высоким  $Q$  мощностью в несколько десятков километров, расположенного в кровле мантии. См. описание соответствующей волны  $S_n$ .

**Rg-волны.** Короткопериодная основная мода волн Рэлея (в диапазоне периодов от 8 до 12 с), наблюдаемая на континентальных траекториях, иногда обозначается как Rg [112].

**S-волны.** Упругие волны сдвига в сейсмологии называют волнами  $S$ , что значит «вторичные» (secondary). В однородном изотропном теле скорость волн  $S$  равна  $\sqrt{\mu/\rho}$ , где  $\mu$  и  $\rho$  — соответственно модуль сдвига и плотность. Смещение частицы, связанное с  $S$ -волнами, обычно перпендикулярно направлению распространения волны, и поэтому их также называют поперечными волнами.

**Sa-волны.** Волны  $Sa$ , как правило, имеют периоды от 10 до 30 с и групповую скорость распространения вдоль поверхности 4,4 — 4,5 км/с. Они могут содержать как  $SV$ -, так и  $SH$ -компоненты движения. Форма колебаний обычно сложная и нерегулярно меняется от станции к станции [54].

$\bar{S}(Sg)$ . Волны  $S$ , распространяющиеся в коре подобно  $\bar{P}$ , или  $Pg$ .

**SH-волны.** Волны  $S$  со смещением только в горизонтальном направлении. В вертикально-неоднородной среде волны  $SH$  не взаимодействуют с волнами  $P$  и их поведение проще, чем волн  $SV$ .

**$S_n$ -волны.** Раньше это обозначение использовалось для короткопериодных волн  $S$ , распространяющихся, как предполагалось, в виде головных волн вдоль границы коры и мантии. Теперь его также часто применяют к интенсивным вступлениям короткопериодных поперечных волн, имеющим прямолинейный годограф, которые можно наблюдать на таких больших эпицентральных расстояниях, как  $40^\circ$  [232]. Стифенз и Айзекс [311] полагают, что эти волны распространяются в волноводе, расположенном в кровле мантии. Распространение волн более коротких периодов происходит эффективнее, так как значительная часть энергии длиннопериодных волн захватывается веществом с малым  $Q$  на большей глубине и быстро затухает. Примеры волн  $S_n$  на больших расстояниях даны в [329].

**SV-волны.** Для изотропного однородного тела смещение, связанное с волнами  $S$  в дальней зоне, ограничено плоскостью, перпендикулярной направлению распространения. Движение частиц в этой плоскости можно описать двумя ортогональными векторами, один из которых направлен горизонтально, а другой перпендикулярно ему. Последняя компонента и является волной  $SV$ . В вертикально-неоднородной среде волны  $SV$  взаимодействуют с волнами  $P$ .

**T-фаза.** Буква  $T$  означает «третичные» (tertiary) волны (после  $P$  и  $S$ ). Используется для указания поздних фаз с периодом менее 1 с, наблюдаемых на островных или прибрежных станциях при землетрясениях, для которых траектория распространения волн пролегает в основном по океану. Они проходят океаническую часть пути со скоростью звука в воде, вероятно по ПЗК [113, 210].

## Определения магнитуд

Магнитуда землетрясения была первоначально определена Рихтером [272] как логарифм максимума амплитуды, измеренной в микронах на записи стандартного крутильного сейсмографа с периодом маятника 0,8 с, увеличением 2800 и постоянной затухания 0,8, расположенного на расстоянии 100 км от эпицентра. Такой стандартный прибор, известный по имени его создателей как сейсмограф Вуда — Андерсона, состоит из маленького медного цилиндра (с массой менее 1 г и вертикальной осью), прикрепленного к вертикальной металлической нити. Нить находится под натяжением, создающим восстанавливающую силу. Прибор как целое чувствителен к горизонтальным движениям, которые обнаруживаются с помощью пучка света, отраженного от маленького зеркала внутри цилиндра. Рихтер построил калибровочную кривую для перехода от амплитуд, наблюдаемых на произвольном эпицентральной расстоянии, к амплитудам, ожидаемым на расстоянии 100 км. Этот тип магнитуды теперь называется местной магнитудой  $M_L$ .

Шкала магнитуд, основанная на телесейсмических поверхностных волнах, описана Гутенбергом и Рихтером [143] и получила дальнейшее развитие в работе Гутенберга [142]. Для мелкофокусных землетрясений на расстояниях  $15^\circ < \Delta < 130^\circ$  он вывел формулу

$$M_s = \log A + 1,656 \log \Delta + 1,818, \quad (A.1)$$

где  $A$  — горизонтальная компонента наибольшего смещения грунта (в микронах), вызванного поверхностными волнами с периодами порядка 20 с.

После этой формулы Гутенберга было предложено много формул для  $M_s$ . Они рассмотрены Ванеком и др. в [324], где предложена формула

$$M_s = \log(A/T)_{\max} + 1,66 \log \Delta + 3,3, \quad (A.2)$$

официально принятая затем IASPEI (Международной ассоциацией сейсмологии и физики земных недр). В уравнении (A.2)  $(A/T)_{\max}$  — максимум из всех величин  $A/T$  (амплитуда/период) у различных волновых групп на сейсмограмме. Для  $T = 20$  с уравнение (A.2) почти идентично (A.1).

Другая важная шкала магнитуд основана на амплитуде телесейсмических объемных волн. Она определяется формулой

$$m_b = \log(A/T) + Q, \quad (A.3)$$

где  $Q$  — функция эпицентрального расстояния и глубины очага, эмпирически определенная Гутенбергом и Рихтером [144] для исключения влияния пути на наблюдаемую амплитуду (см. рис. 10.9).  $A/T$  — это максимум в одной из волновых групп  $P$ ,  $PP$  или  $SH$ ; каждая фаза имеет свои таблицы и диаграмму для  $Q$ . Ванек и др. [324] дали сводку формул для  $m_b$  и предложили новую калибровочную функцию для  $Q$ .

Однако практическое определение  $m_b$ , осуществляемое Геологической службой США для текущих бюллетеней, существенно отличается от методики, предложенной Гутенбергом и Рихтером. Наиболее важное различие заключается в характеристике прибора, используемого для определения  $m_b$ . Гутенберг и Рихтер анализировали записи широкополосных приборов, регистрирующих при сильных землетрясениях относительно длиннопериодные  $P$ -волны (4—10 с). Измерения же геологической службы США обычно основаны на записях короткопериодных приборов WSSN, где волны  $P$  практически всегда имеют период около 1 с. Более того, правила геологической службы требуют, чтобы  $(A/T)$  было измерено на первых 5 с записи. Ранее же рассматривались максимумы сигнала длительностью примерно до 10 с, что имеет значение для землетрясений с плавным началом.

# Литература

1. *Abe K.*, Determination of seismic moment and energy from the Earth's free oscillation. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **4**, 49-61, 1970.
2. *Abramowitz M., and Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions. U.S. National Bureau of Standards, 1964.
3. *Adams R. D.* Multiple inner core reflections from a Novaya Zemlya explosion. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **62**, 1063 — 1071, 1972.
4. *Agnew D., Berger J., Buland R., Farrell W., and Gilbert F.* International deployment of accelerometers: A network for very long period seismology. *EOS, Transactions of the American Geophysical Union*, **51**, 180 — 188, 1976.
5. *Aki K.* Generation and propagation of *G* waves from the Niigata earthquake of June 16, 1964. 2. Estimation of earthquake movement, released energy, and stress — strain drop from *G* wave spectrum. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, **44**, 23 — 88, 1966.
6. *Aki K., and Chouet L. B.* Origin and coda waves: Source, attenuation, and scattering effects. *Journal of Geophysical Research*, **80**, 3322 — 3342, 1975.
7. *Aki K, Fehler M., and Das S.* Source mechanism of volcanic tremor; fluid-driven crack models and their application to the 1973 Kilauea eruption. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **2**, 259-287, 1977.
8. *Алексеев А. С., Михайленко Б. Г.* Решение задачи Лэмба для вертикально-неоднородного упругого полупространства. *Известия АН СССР, Физика Земли*, № 12, 11-25, 1976.
9. *Alsop L. E., Sutton G. H., and Ewing M.* Free oscillations of the Earth observed on strain and pendulum seismographs. *Journal of Geophysical Research*, **66**, 631 — 641, 1961.
10. *Alsop L. E., Sutton G. H., and Ewing M.* Measurement of *Q* for very long period free oscillations. *Journal of Geophysical Research*, **66**, 2911 — 2915, 1961.
11. *Alterman Z., Jarosch H., and Pekeris C. L.* Oscillations of the Earth. *Proceedings of the Royal Society of London A252*, 80 — 95, 1959. [Имеется перевод: Собственные колебания Земли. — М.: Мир, 1964, с.154 — 177.]
12. *Anderson D. L., and Archambeau C. B.* The anelasticity of the Earth. *Journal of Geophysical Research*, **69**, 2071 — 2084, 1964.
13. *Anderson D. L., Ben-Menahem A., and Archambeau C. B.* Attenuation of seismic energy in the upper mantle. *Journal of Geophysical Research*, **70**, 1441 — 1448, 1965.
14. *Andrianova Z. S., Keilis-Borok V. I., Levshin A. L., and Neigauz M. G.* *Seismic Love Waves*. New York: Consultants Bureau, 1967.
15. *Ansell J. H.* On the scattering of *SH* waves from a point source by a sphere. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **54**, 359 — 387, 1978.
16. *Archambeau C. B., Flinn E. A., and Lambert D. G.* Fine structure of the upper mantle. *Journal of Geophysical Research*, **74**, 5825 — 5865, 1969.
17. *Arons A. B., and Yennie D. R.* Phase distortion of acoustic pulses obliquely reflected from a medium of higher sound velocity. *Journal of the Acoustical Society of America*, **22**, 231 — 237, 1950.
18. *Азими Ш. А., Калинин А. В., Калинин В. В., Пивоваров Б. Л.* Импульсные и переходные характеристики сред с линейными и квадратичными законами поглощения. *Изв. АН СССР, Физика Земли*, № 2, 42 — 54, 1968.
19. *Backus G.* A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. *Annals of Physics (N.Y.)*, **4**, 372 — 447, 1958.
20. *Backus G.* Possible forms of seismic anisotropy in the uppermost mantle under oceans. *Journal of Geophysical Research*, **70**, 3429 — 3439, 1965.

21. *Backus G., and Gilbert F.* The rotational splitting of the free oscillations of the earth. Proceedings of the National Academy of Science, **47**, 362 — 371, 1961.
22. *Backus G., Gilbert F.* Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **13**, 247 — 276, 1967.
23. *Backus G., and Gilbert F.* The resolving power of gross Earth data. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **16**, 169 — 205, 1968.
24. *Backus G., and Gilbert F.* Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **A 266**, 123 — 192, 1970.
25. *Backus G., and Mulcahy M.* Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. I. Continuous displacements. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **46**, 341 — 361, 1976.
26. *Backus G., and Mulcahy M.* Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. II. Discontinuous displacements. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **47**, 301 — 329, 1976.
27. *Båth M.* The elastic waves  $L_g$  and  $R_g$  along Eurasian paths. Arkiv Geophysik, **2**, 295 — 342, 1954.
28. *Båth M.* A continental channel wave guided by the intermediate layer in the crust. Geofisica pura e applicata, **38**, 19 — 31, 1957.
29. *Beavan J., and Bilham R.* Thermally induced errors in fluid tube tiltmeters. Journal of Geophysical Research, **82**, 5699 — 5704, 1977.
30. *Benioff H.* A new vertical seismograph. Bulletin of the Seismological Society of America, **22**, 155 — 169, 1932.
31. *Benioff H.* Long waves observed in the Kamchatka earthquake of November, 4, 1952. Journal of Geophysical Research, **63**, 589 — 593, 1958.
32. *Benioff H.* Fused-quartz extensometer for secular, tidal, and seismic strain. Bulletin of the Geological Society of America, **70**, 1019 — 1032, 1959.
33. *Benioff H., Gutenberg B., and Richter C. F.* Progress report. Transactions of the American Geophysical Union, **35**, 979 — 987, 1954.
34. *Benioff H., Press F., and Smith S. W.* Excitation of the free oscillations of the Earth by earthquakes. Journal of Geophysical Research, **66**, 605 — 620, 1961.
35. *Ben-Menahem A., Smith S. W., and Teng T.-L.* A procedure for source studies from spectrums of long-period seismic body waves. Bulletin of the Seismological Society of America, **55**, 203 — 235, 1965.
36. *Ben-Menahem A., Rosenman M., and Harkrider D. G.* Fast evaluation of source parameters from isolated surface-wave signals. I. Universal tables. Bulletin of the Seismological Society of America, **60**, 1337 — 1387, 1970.
37. *Berckhemer H., and Schneider G.* Near earthquakes recorded with long-period seismographs. Bulletin of the Seismological Society of America, **54**, 973 — 985, 1964.
38. *Berry M. J. and West G. F.* Reflected and head wave amplitudes in a medium of several layers. In: The Earth Beneath Continents (Geophysical Monograph 10). American Geophysical Union, 1966.
39. *Bessonova E. N., Fishman V. M., Shnirman M. G., Sitnikova G. A., and Johnson L. R.* The tau method for inversion of travel times. II. Earthquake data. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **46**, 87 — 108, 1976.
40. *Biot M. A.* Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid. Journal Applied Physics, **23**, 997 — 1005, 1952.
41. *Biswas N. N. and Knopoff L.* Exact earth-flattening calculation for Love waves. Bulletin of the Seismological Society of America, **60**, 1123 — 1137, 1970.
42. *Block B., Dratler J., and Moore R. D.* Earth and normal modes from a 6.5 magnitude earthquake. Nature, **226**, 343 — 344, 1970.
43. *Block B., and Moore R. D.* Measurements in the earth mode frequency range by an electrostatic sensing and feedback gravimeter. Journal of Geophysical Research, **71**, 4361 — 4375, 1966.
44. *Block B., and Moore R. D.* Tidal to seismic frequency investigations with a quartz accelerometer of new geometry. Journal of Geophysical Research, **75**, 1493 — 1506, 1970.
45. *Bolt B. A.* Gutenberg's early PKP observations. Nature, **196**, 122 — 124, 1962.
46. *Bolt B. A.* The velocity of seismic waves near the Earth's center. Bulletin of the Seismological Society of America, **54**, 191 — 208, 1964.

47. *Borcherdt R. D.* Energy and plane waves in linear viscoelastic media. *Journal of Geophysical Research*, **78**, 2442 — 2453, 1973.
48. *Borcherdt R. D.* Reflection and refraction of type II. *S* waves in elastic and anelastic media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **67**, 43 — 67, 1977.
49. *Bortfeld R.* Approximation to the reflection and transmission coefficients of plane longitudinal and transverse waves. *Geophysical Prospecting*, **9**, 485 — 502, 1961.
50. *Bracewell R. B.* *The Fourier Transform and Its Applications*. New York: McGraw-Hill, 1965.
51. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973 (гл.4).
52. *Bromwich T. J. I'A.* On the influence of gravity on elastic waves, and, in particular, on the vibrations of an elastic globe. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol.30, 1898.
53. *Brune J. N.* Attenuation of dispersed wave trains. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **52**, 109 — 112, 1962.
54. *Brune J. N.* The *S<sub>a</sub>* phase from the Hindu Kush earthquake of July 6, 1962. *Pure and Applied Geophysics*, **62**, 81 — 95, 1965.
55. *Brune J. N.* Seismic moment, seismicity, and rate of slip along major fault zones. *Journal of Geophysical Research*, **73**, 777 — 784, 1968.
56. *Brune J. N., and Dorman J.* Seismic waves and Earth structure in the Canadian Shield. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **53**, 167 — 210, 1963.
57. *Brune J. N., Nafe J. E., and Alsop L. E.* The polar phase shift of surface waves on a sphere. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **51**, 247 — 257, 1961.
58. *Brune J. N., Nafe J. E., and Oliver J.* A simplified method for the analysis and synthesis of dispersed wave trains. *Journal of Geophysical Research*, **65**, 287 — 304, 1960.
59. *Buchbinder G. G. R.* Travel times and velocities in the outer core from *PmKP*. *Earth and Planetary Science Letters*, **14**, 161 — 168, 1972.
60. *Buchen P. W.* Plane waves in linear viscoelastic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **23**, 531 — 542, 1971.
61. *Buck S. W., Press F., Shepard D., Toksöz M. N., and Trantham H.* Development of a mercury tiltmeter for seismic recording. Final Technical Report to the Advanced Research Projects Agency on Contract No. F44620-69-C-0126, Massachusetts Institute of Technology, 1971.
62. *Buland R. P., and Gilbert F.* The theoretical basis for the rapid and accurate computation of normal mode eigenfrequencies and eigenfunctions. In: *Retrieving the Seismic Moment Tensor*, Ph.D. thesis of R.P. Buland, University of California, San Diego, 1976.
63. *Buland R. P. and Gilbert F.* The rapid and accurate computation of normal mode eigenfrequencies and eigenfunctions. *Journal of Computational Physics*, 1980.
64. *Bullen K. E.* The ellipticity correction to travel-times of *P* and *S* earthquake waves. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement*, **4**, 143 — 157, 1937.
65. *Bullen K. E.* Notes on cusps in seismic travel-times. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **3**, 354 — 359, 1960.
66. *Burridge R., and Knopoff L.* Body force equivalents for seismic dislocations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **54**, 1875 — 1888, 1964.
67. *Byrne C. J.* Instrument noise seismometers. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **51**, 69 — 84, 1961.
68. *Cagniard L.* *Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves*. Trans. by E.A. Flinn and C.H. Dix. New York: McGraw-Hill, 1962.
69. *Červený V.* Seismic rays and ray intensities in inhomogeneous anisotropic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **29**, 1 — 13, 1972.
70. *Červený V.* Reflection and transmission coefficients for transition layers. *Studia Geophysica et Geodaetica*, **18**, 59 — 68, 1974.
71. *Červený V., and Ravindra R.* *Theory of Seismic Head Waves*. University of Toronto Press, 1971.
72. *Chander R., Alsop L. E., and Oliver J.* On the synthesis of shear-coupled *PL* waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **58**, 1849 — 1877, 1968.
73. *Chapman C. H.* On the computation of seismic ray travel times and amplitudes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **61**, 1267 — 1274, 1971.

74. *Chapman C. H.* Lamb's problem and comments on the paper. 'On Leaking Modes' by Usha Gupta. *Pure and Applied Geophysics*, **94**, 233 — 247, 1972.
75. *Chapman C. H.* The Earth flattening transformation in body wave theory. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **35**, 55 — 70, 1973.
76. *Chapman C. H.* The turning point of elastodynamic waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **39**, 613 — 621, 1974.
77. *Chapman C. H.* Exact and approximate generalized ray theory in vertically inhomogeneous media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **46**, 201 — 233, 1976.
78. *Chapman C. H.* A first motion alternative to geometrical ray theory. *Geophysical Research Letters*, **3**, 153 — 156, 1976.
79. *Chapman C. H.* A new method for computing seismograms. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **54**, 481 — 518, 1978.
80. *Chapman C. H.* Body waves in seismology. In: J. Miklowitz and J.D. Achenbach (editors), *Modern Problems in Elastic Wave Propagation*. New York: Wiley, 1978.
81. *Chapman C. H., and Phinney R. A.* Diffracted seismic signals and their numerical solution. In: B. A. Bolt (editor), *Seismology: Body Waves and Sources (Methods in Computational Physics, Vol.12)*, New York: Academic Press, 1972.
82. *Choy, G. L.* Theoretical seismograms of core phases calculated by a frequency-dependent full wave theory, and their interpretation. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **51**, 275 — 311, 1977.
83. *Choy G. L., and Richards P. G.* Pulse distortion and Hilbert transformation in multiply reflected and refracted body waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **65**, 55 — 70, 1975.
84. *Cisternas A., Betancourt O., and Leiva A.* Body waves in a "real Earth". Part I. *Bulletin of the Seismological Society of America* **63**, 145 — 156, 1973.
85. *Coddington E. A., and Levinson N.* *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1955. [Имеется перевод: Коддингтон Э. Л., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ., 1958.]
86. *Cormier V., and Richards P. G.* Full-wave theory applied to a discontinuous velocity increase. The inner core boundary. *Journal of Geophysics*, **43**, 3 — 31, 1977.
87. *Crampin S.* The dispersion of surface waves in multi-layered anisotropic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **21**, 387 — 402, 1970.
88. *Crampin S.* The propagation of surface waves in anisotropic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **25**, 71 — 87, 1971.
89. *Crampin S.* Distinctive particle motion of surface waves as a diagnostic of anisotropic layering. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **40**, 177 — 186, 1975.
90. *Crampin S.* A review of the effects of anisotropic layering on the propagation of seismic waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **49**, 9 — 27, 1977.
91. *Crampin S., and Bamford D.* Inversion of *P*-wave anisotropy. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **49**, 123 — 132, 1977.
92. *Crampin S., and King D. W.* Evidence for anisotropy in the upper mantle beneath Eurasia from the polarization of higher mode surface waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **49**, 59 — 85, 1977.
93. *Crossley D. J., and Gubbins D.* Static deformation of the Earth's a liquid core. *Geophysical Research Letters*, **2**, 1 — 4, 1975.
94. *Currie R. G.* Period and  $Q_w$  of the Chandler wobble. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **38**, 179 — 185, 1974.
95. *Dahlen F. A.* The normal modes of a rotating elliptical Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **16**, 329 — 467, 1968.
96. *Dahlen F. A.* The normal modes of a rotating elliptical Earth. II. Near-resonance multiplet coupling. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **18**, 397 — 436, 1969.
97. *Dahlen F. A.* Elastic dislocation for a self-gravitating elastic configuration with an initial static stress field. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **28**, 357 — 383, 1972.
98. *Dahlen F. A.* Elastic dislocation theory for a self-gravitating elastic configuration with an initial static stress field. II. Energy release. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **31**, 469 — 484, 1973.

99. *Dahlen F. A.* Seismic faulting in the presence of a large compressive stress. *Geophysical Research Letters*, **3**, 245 — 248. (Correction, p. 506.), 1976.
100. *Dahlen F. A.* The passive influence of the oceans upon the rotation of the Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **46**, 363 — 406, 1976.
101. *Dahlen F. A.* The balance of energy in earthquake faulting. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **48**, 239 — 261, 1977.
102. *Dahlen F. A., and Smith M. L.* The influence of rotation on the free oscillations of the Earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A279**, 583 — 629, 1975.
103. *Davies D., and McKenzie D. P.* Seismic travel-time residuals and plates. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **18**, 51 — 63, 1969.
104. *Dewey J., and Byerly P.* The early history of seismometry (to 1900). *Bulletin of the Seismological Society of America*, **59**, 183 — 277, 1969.
105. *Doornbos D. J., and Husebye E. S.* Array analysis of PKP phases and their precursors. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **5**, 387 — 399, 1972.
106. *Dorman J., and Ewing M.* Numerical inversion of seismic surface wave dispersion data and crust-mantle structure in the New York — Pennsylvania area. *Journal of Geophysical Research*, **67**, 5227 — 5241, 1962.
107. *Dunkin J. W.* Computation of modal solution in layered, elastic media at high frequencies. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **55**, 335 — 358, 1965.
108. *Dziewonski A. M., Hales A. L., and Lapwood E. R.* Parametrically simple Earth models consistent with geophysical data. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **10**, 12 — 48, 1975.
109. *Dziewonski A. M., and Gilbert F.* The effect of small aspherical perturbations on travel-times and a re-examination of the corrections for ellipticity. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **44**, 7 — 17, 1976.
110. *Eaton J. P.* Theory of the electromagnetic seismograph. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **74**, 37 — 75, 1957.
111. *Eshelby J. D.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London*, **A241**, 376 — 396, 1957.
112. *Ewing M., Jardetzky W., and Press F.* *Elastic Waves in Layered Media*. New York: McGraw-Hill, 1957.
113. *Ewing M., Press F., and Worzel J. L.* Further study of the *T* phase. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **42**, 37 — 51, 1952.
114. *Ewing M., and Worzel J. L.* Long-range sound transmission. *Geological Society of America Memoir*, **27**, 1948.
115. *Farrell W. E.* A gyroscopic seismometer: measurements during the Borrego earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **59**, 1239 — 1246, 1969.
116. *Forsyth D. W.* The early structural evolution and anisotropy of the oceanic upper mantle. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **43**, 103 — 162, 1975.
117. *Frasier C. W.* Discrete time solution of plane *P* — *SV* waves in a plane layered medium. *Geophysics*, **35**, 197 — 219, 1970.
118. *Frasier C. W., and Chowdury D. K.* Effect of scattering on *PcP/P* amplitude ratios at LASA from 40° to 84° distance. *Journal of Geophysical Research*, **79**, 5469 — 5477, 1974.
119. *Frazer L. N.* Synthesis of shear-coupled *PL*. Ph.D. Thesis, Princeton University, 1977.
120. *Friedman B.* Propagation in a non-homogeneous atmosphere. *Communications of Pure and Applied Mathematics*, **4**, 317 — 350, 1951.
121. *Fuchs K.* The reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density. *Journal of Physics of the Earth, Special Issue*, **16**, 27 — 41, 1968.
122. *Fuchs K.* On the determination of velocity depth distributions of elastic waves from the dynamic characteristics of the reflected wave field. *Zeitschrift für Geophysik*, **36**, 531 — 548, 1970.
123. *Fuchs K.* The method of stationary phase applied to the reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density. *Zeitschrift für Geophysik*, **37**, 89 — 117, 1971.

124. *Fuchs K., and Müller G.* Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison of observations. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **23**, 417 — 433, 1971.
125. *Fuchs K., and Schulz K.* Tunneling of low-frequency waves through the subcrustal lithosphere. *Journal of Geophysics*, **42**, 175 — 190, 1976.
126. *Futterman W. I.* Dispersive body waves. *Journal of Geophysical Research*, **67**, 5279 — 4291, 1962.
127. *Голыцын Б. Б.* Лекции по сейсмометрии. СПб, типогр. А.Н., 1912.
128. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
129. *Гервер М. Л., Маркушевич В. М.* Определение по голографу скорости распространения сейсмической волны. — Сб.: Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений. Вычислит. сейсмология, вып.3. — М.: Наука, 3 — 51, 1967.
130. *Gerver M., and Markushevitch V.* On the characteristic properties of travel curves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **13**, 241 — 246, 1967.
131. *Gilbert F.* Gravitationally perturbed elastic waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **57**, 783 — 794, 1967.
132. *Gilbert F.* Excitation of the normal modes of the Earth by earthquake sources. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **22**, 223 — 226, 1971.
133. *Gilbert F.* The representation of seismic displacements in terms of traveling waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **44**; 275 — 280, 1976.
134. *Gilbert F., and Backus G.* Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*, **31**, 326 — 332, 1966.
135. *Gilbert F., and Dziewonski A. M.* An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A278**, 187 — 269, 1975.
136. *Gilbert F., and Helmberger D. V.* Generalized ray theory for a layered sphere. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **27**, 57 — 80, 1972.
137. *Gilbert F., and Laster S. J.* Experimental investigation of *PL* modes in a single layer. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **52**, 59 — 66, 1962.
138. *Gilbert F., Laster S. J., Backus M. M., and Schell R.* Observations of pulses on an interface. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **52**, 847 — 868, 1962.
139. *Gladwin M. T., and Stacey F. D.* Anelastic degradation of acoustic pulses in rock. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **8**, 332 — 336, 1974.
140. *Green G.* On the laws of reflexion and refraction of light. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society (Vol.7)*. (Reprinted in *Mathematical Papers of George Green*, pp.245 — 269, London, 1871), 1839.
141. *Gutenberg B.* Über die Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus Erdbebenbeobachtungen. *Zeitschrift für Geophysik*, **14**, 1217 — 1218, 1913.
142. *Gutenberg B.* Amplitudes of surface waves and magnitudes of shallow earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **25**, 3 — 12, 1945.
143. *Gutenberg B., and Richter C. F.* Magnitude and energy of earthquakes. *Science (New Series)*, **83**, 183 — 185, 1936.
144. *Gutenberg B., and Richter C. F.* Earthquake magnitude, intensity, energy and acceleration. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **46**, 105 — 145, 1956.
145. *Haddon R. A. W.* Corrugations on the mantle-core boundary or transition layers between inner and outer cores? *EOS, Transactions of the American Geophysical Union*, **53**, 600, 1972.
146. *Hagiwara T.* A note on the theory of the electromagnetic seismograph. *Earthquake Research Institute Bulletin of Tokyo University*, **36**, 139 — 164, 1958.
147. *Hales A. L., and Roberts J. L.* The Zoeppritz amplitude equations: More errors. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **64**, 285, 1974.
148. *Harkrider D. G.* Theoretical and observed acoustic-gravity waves from explosive sources in the atmosphere. *Journal of Geophysical Research*, **69**, 5295 — 5321, 1964.
149. *Harkrider D. G., and Anderson D. L.* Surface wave energy from point sources in plane layered Earth models. *Journal of Geophysical Research*, **71**, 2967 — 2980, 1966.
150. *Harrison J. C.* Cavity and topographic effects in tilt and strain measurements. *Journal of Geophysical Research*, **81**, 319 — 328, 1976.

151. *Harrison J. C.* Tilt observations in the Poorman Mine near Boulder, Colorado. *Journal of Geophysical Research*, **81**, 329 — 336, 1976b.
152. *Haskell N. A.* The dispersion of surface waves in multilayered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **43**, 17 — 34, 1953.
153. *Haskell N. A.* Crustal reflection of plane *SH* waves. *Journal of Geophysical Research*, **65**, 4147 — 4150, 1960.
154. *Haskell N. A.* Crustal reflection of plane *P* and *SV* waves. *Journal of Geophysical Research*, **67**, 4751 — 4767, 1962.
155. *Haskell N. A.* Radiation pattern of surface waves from point sources in a multi-layered medium. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **54**, 377 — 394, 1964.
156. *Hasselmann K.* A statistical analysis of the generation of microseisms. *Review of Geophysics*, **1**, 177 — 210, 1963.
157. *Haubrich R. A.* Microseisms. In S. K. Runcorn (editor), *International Dictionary of Geophysics*. London: Pergamon Press, 1967.
158. *HelMBERGER D. V.* The crust — mantle transition in the Bering Sea. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **58**, 179 — 214, 1968.
159. *HelMBERGER D. V., and Harkrider D. A.* Modeling earthquakes with generalized ray theory. In: J. Miklowitz and J. D. Achenbach (editor), *Modern Problems in Elastic Wave Propagation*. New York: Wiley, 1978.
160. *HelMBERGER D. V., and Malone S. D.* Modelling local earthquakes as shear dislocations in a layered half space. *Journal of Geophysical Research*, **80**, 4881 — 4888, 1975.
161. *Herrera I.* A perturbation method for elastic propagation. I. Non-parallel boundaries. *Journal of Geophysical Research*, **69**, 3845 — 3851, 1964.
162. *Herrin E., and Richmond J.* On the propagation of the *Lg* phase. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **50**, 197 — 210, 1960.
163. *Hess H.* Seismic anisotropy of the uppermost mantle under oceans. *Nature*, **203**, 629 — 631, 1964.
164. *Hildebrandt F. B.* *Methods of Applied Mathematics* (2 nd ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1952.
165. *Hill D. P.* Velocity gradients and anelasticity from crustal body wave amplitudes. *Journal of Geophysical Research*, **76**, 3309 — 3325, 1971.
166. *Hill D. P.* Velocity gradients in the Earth's crust from head-wave amplitudes. *American Geophysical Union Monograph*, Ed. by J. G. Heacock, **14**, 71 — 75, 1971.
167. *Hill D. P., Fischer F. G., Lahr K. M. and Coakely J. M.* Earthquake sounds generated by body-wave ground motion. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **66**, 1159 — 1172, 1976.
168. *Hobson E. W.* *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. New York, Chelsea Publishing, Co., 1955. [Имеется перевод: Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. — М.: ИЛ, 1952.]
169. *Hoop A. T., de.* Representation theorems for the displacement in an elastic solid and their applications to elastodynamic diffraction theory. D. Sc. Thesis, Technische Hogeschool, Delft, 1958.
170. *Hoop A. T., de.* A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems. *Applied Science Research*, **B8**, 349 — 356, 1960.
171. *Hron F.* Criteria for selection of phases in synthetic seismograms for layered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **61**, 765 — 779, 1971.
172. *Hron F.* Numerical methods of ray generation in multilayered media. In: B.A. Bolt (editor), *Seismology: Body Waves and Sources* (Methods in Computational Physics, Vol.12), New York: Academic Press, 1972.
173. *Hudson J. A.* The total internal reflection of *SH* waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **6**, 509 — 531, 1962.
174. *Hudson J. A.* A quantitative evaluation of seismic signals at teleseismic distances. I. Radiation from seismic sources. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **18**, 233 — 249, 1969.
175. *Hudson J. A.* A quantitative evaluation of seismic signals at teleseismic distances. II. Body waves and surface waves from an extended source. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **18**, 353 — 370, 1969.

176. *Isacks B., Oliver J., and Sykes L. R.* Seismology and the new global tectonics. *Journal of Geophysical Research*, **73**, 5855 — 5899, 1968.
177. *Jackson D. D., and Anderson D. L.* Physical mechanisms of seismic-wave attenuation. *Review of Geophysics and Space Physics*, **8**, 1 — 63, 1970.
178. *Jeffreys H.* On compressional waves in two superposed layers. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **23**, 472 — 481, 1926.
179. *Jeffreys H.* On the cause of oscillatory movement in seismograms. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement*, **2**, 407 — 416, 1931.
180. *Jeffreys H.* Rock creep, tidal friction and the Moon's ellipticities. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **118**, 14 — 17, 1958.
181. *Jeffreys H.* Small correction in the theory of surface waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **6**, 115 — 117, 1961.
182. *Jeffreys H.* *Cartesian Tensors*. Cambridge University Press., 1965.
183. *Jeffreys H., and Jeffreys B. S.* *Methods of Mathematical Physics* (3rd ed.). Cambridge University Press, 1972. [Имеется перевод: Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. — М.: Мир, 1969.]
184. *Johnson L. E., and Gilbert F.* Inversion and inference for teleseismic ray data. In: B. A. Bolt (editor), *Seismology: Body Waves and Sources* (Methods in Computational Physics, Vol. 12). New York: Academic Press, 1972.
185. *Jordan T. H., and Anderson D. L.* Earth structure from free oscillations and travel times. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **36**, 411 — 459, 1974.
186. *Jordan T. H., and Frazer L. N.* Crustal and upper mantle structure from  $S_p$  phases. *Journal of Geophysical Research*, **80**, 1504 — 1518, 1975.
187. *Julian B. R., and Anderson D. L.* Travel times, apparent velocities and amplitudes of body waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **58**, 339 — 366, 1968.
188. *Julian B. R., and Sengupta M. K.* Seismic travel time evidence for lateral inhomogeneity in the deep mantle. *Nature*, **242**, 443 — 447, 1973.
189. *Kanamori H.* Re-examination of the Earth's free oscillations excited by the Kamchatka earthquake of November 4, 1952. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **11**, 216 — 226, 1976.
190. *Kanamori H.* The energy release in great earthquakes. *Journal of Geophysical Research*, **82**, 2981 — 2987, 1977.
191. *Karal F. C., and Keller J. B.* Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media. *Journal of the Acoustical Society of America*, **31**, 694 — 705, 1959.
192. *Кейлис-Борок В. И., Яновская Т. Б.* Зависимость спектра поверхностных волн от глубины источника в пределах земной коры. *Изв. АН СССР, сер. геофиз.*, № 11, 1532 — 1539, 1962.
193. *Keith C., and Crampin S.* Seismic body waves in anisotropic media; reflection and refraction at a plane interface. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **49**, 181 — 208, 1977.
194. *Kennett B. L. N., Kerry N. J., and Woodhouse J. H.* Symmetries in the reflection and transmission of elastic waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **52**, 215 — 229, 1978.
195. *Kind R.* Computation of reflection coefficients for layered media. *Journal of Geophysics*, **42**, 191 — 200, 1976.
196. *Kind R.* The reflectivity method for a buried source. *Journal of Geophysics*, **44**, 603 — 512, 1978.
197. *King D. W., Haddon R. A. W., and Cleary J. R.* Array analysis of precursors to PKIKP in the distance range 128° to 142°. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **37**, 157 — 173, 1974.
198. *Knopoff L.* Diffraction of elastic waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, **28**, 217 — 229, 1956.
199. *Knopoff L. Q.* Review of Geophysics, **2**, 625 — 660, 1964.
- 199a. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **54**, 431 — 438, 1964.
200. *Knott C. G.* Reflection and refraction of elastic waves with seismological applications. *Philosophical Magazine, Series 5*, **48**, 64 — 97, 1899.

201. *Костров Б. В.* Сейсмический момент, энергия землетрясений и сейсмическое течение горных масс. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 1, 23 — 40, 1974.
202. *LaCoste L. J. C.* A simplification in the conditions for the zero-length-spring seismograph. Bulletin of the Seismological Society of America, **25**, 176 — 179, 1935.
203. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **A203**, 1 — 42, 1904.
204. *Landisman M., Usami T., Satô Y., and Massé R.* Contributions of theoretical seismograms of the study of modes, rays, and the Earth. Review of Geophysics and Space Physics, **8**, 533 — 589, 1970.
205. *Langer R. E.* Asymptotic solutions of a differential equation in the theory of microwave propagation. Communications of Pure and Applied Mathematics, **3**, 427 — 438, 1951.
206. *Langston C. A., and Helmberger D. V.* A procedure for modelling shallow dislocation sources. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **42**, 117 — 130.
207. *Lapwood E. R.* The disturbance to a line source in a semi-infinite elastic medium. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **A242**, 63 — 100.
208. *Latham G., Ewing M., Dorman J., Lammlein D., Press F., Toksöz N., Sutton G., Duennebier F., and Nakamura Y.* Moonquakes. Science, **174**, 687 — 692, 1971.
209. *LePichon X.* Sea-floor spreading and continental drift. Journal of Geophysical Research, **73**, 3661 — 3697, 1968.
210. *Linehan D.* Earthquakes in the West Indian region. Transactions of the American Geophysical Union, **21**, 229 — 232, 1940.
211. *Liu H.-P., Anderson D. L., and Kanamori H.* Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **47**, 41 — 58, 1976.
212. *Lomnitz C.* Creep measurements in igneous rocks. Journal of Geology, **64**, 473 — 479, 1956.
213. *Lomnitz C.* Linear dissipation in solids. Journal of Applied Physics, **28**, 201 — 205, 1957.
214. *Lomnitz C.* Some observations of gravity waves in the 1960. Chile earthquake. Bulletin of the Seismological Society of America, **60**, 669 — 670, 1970.
215. *Longman I. M.* A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads. 2. Computations and numerical results. Journal of Geophysical Research, **68**, 485 — 496, 1963.
216. *Lonquet-Higgins M. S.* A theory of the origin of microseisms. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **A243**, 1 — 35, 1950.
217. *Love A. E. H.* Some Problems of Geodynamics. Cambridge University Press, 1911.
218. *Love A. E. H.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. New York: Dover Publications. [First published by Cambridge University Press, 1892.] [Имеется перевод: Ляв А. Математическая теория упругости. — М. — Л.: ОНТИ, 1935]
219. *Luh P. C., and Dziewonski A. M.* Theoretical seismograms for the Colombian earthquake of 1970, July 31. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **43**, 679 — 695, 1975.
220. *McHugh S., and Johnston M. J. S.* Short-period nonseismic tilt perturbations and their relation to episodic slip. Journal of Geophysical Research, **81**, 6341 — 6346, 1976.
221. *McKenzie D. P.* The relation between fault plane solutions for earthquakes and the directions of the principal stresses. Bulletin of the Seismological Society of America, **59**, 591 — 601, 1969.
222. *Major M. W., Sutton G. H., Oliver J. E., and Metsger P.* On elastic strain of the Earth in the period range 5 seconds to 100 hours. Bulletin of the Seismological Society of America, **54**, 295 — 346, 1964.
223. *Malvern L. E.* Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Englewood Cliffs, New-Jersey: Prentice-Hall, 1969.
224. *Mantovani E., Schwab F., and Knopoff L.* Generation of complete theoretical seismograms for SH-II. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **48**, 531 — 536, 1977.
225. *Maruyama T.* On the force equivalents of dynamic elastic dislocations with reference to the earthquake mechanism. Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University, **41**, 467 — 486, 1963.
226. *Mason W. P.* Physical Acoustics and the Properties of Solids. London: D. Van Nostrand, 1958.

227. *Melchior P.* The Earth Tides. London: Pergamon Press. [Имеется перевод: Мельхиор П. Земные приливы. — М.: «Мир», 1968.]
228. *Mellman G. R., and Helmberger D. V.* High-frequency attenuation by a thin high-velocity layer, Bulletin of the Seismological Society of America, **64**, 1383 — 1388, 1974.
229. *Mendiguren J.* Identification of free oscillation spectral peaks for 1970, July 31, Colombian deep shock using the excitation criterion. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **33**, 281 — 321, 1973.
230. *Michelson A. A., and Gale H. G.* The rigidity of the Earth. Astrophysical Journal, **50**, 330 — 345, 1919.
231. *Minakami T.* Seismology of volcanoes in Japan. In: L. Civetta, P. Jaspardini, G. Luongo, and A. Rapolla (editors), Physical Volcanology. Amsterdam: Elsevier, 1974.
232. *Molnar P., and Oliver J.* Lateral variations of attenuation in the upper mantle and discontinuities in the lithosphere. Journal of Geophysical Research, **74**, 2648 — 2682, 1969.
233. *Müller G.* Amplitude studies of core phases. Journal of Geophysical Research, **78**, 3469 — 3490, 1973.
234. *Müller G.* Correction. Journal of Geophysical Research, **82**, 2541 — 2542, 1977.
235. *Müller G., and Kind R.* Observed and computed seismogram sections for the whole Earth. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **44**, 699 — 716, 1976.
236. *Musgrave M. J. P.* Crystal Acoustics. San Francisco, Holden-Day, 1970.
237. *Nafe J. E.* Reflection and transmission coefficients at a solid-solid interface of high velocity contrast. Bulletin of Seismological Society of America, **47**, 205 — 219, 1957.
238. *Nakanishi K., Schwab F., and Knopoff L.* Generation of complete theoretical seismograms for SH-I. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **48**, 525 — 530, 1977.
239. *Ness N. F., Harrison J. C., and Slichter L. B.* Observations of the free oscillations of the Earth, Journal of Geophysical Research, **66**, 621 — 629, 1961.
240. *Nowick A. S., and Berry B. S.* Anelastic Relaxation in Crystalline Solids. New York, Academic Press, 1972.
241. *Nussenzweig H. M.* High-frequency scattering by an impenetrable sphere. Annals of Physics (N.Y.), **34**, 23 — 95, 1965.
242. *Nussenzweig H. M.* Causality and Dispersion Relations (Mathematics in Science and Engineering, Vol.95). R. Bellman, series editor. New York, Academic Press, 1972.
243. *O'Connell R. J., and Budiandy B.* Measures of dissipation in viscoelastic media. Geophysical Research Letters, **5**, 5 — 8, 1978.
244. *Okal E., and Mechler P.* On the problem of the convergence of the eikonal expansion for synthetic seismograms. Bulletin of the Seismological Society of America, **63**, 1315 — 1319, 1973.
245. *Oliver J.* On the long-period character of shear waves. Bulletin of the Seismological Society of America, **51**, 1 — 12, 1961.
246. *Oliver J., and Major M.* Leaking modes and the PL phase. Bulletin of the Seismological Society of America, **50**, 165 — 180, 1960.
247. *Olver F. W. J.* The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **A247**, 307 — 327, 1954.
248. *Olver F. W. J.* The asymptotic expansion of Bessel functions of large order. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **A247**, 328 — 368, 1954.
249. *Orcutt J. A., Kennett B. L. N., and Dorman L. M.* Structure of the East Pacific Rise from an ocean bottom seismometer survey. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, **45**, 305 — 320, 1976.
250. *Page R. A., Blume J. A., and Joyner W. B.* Earthquake shaking and damage to buildings. Science, **189**, 601 — 608, 1975.
251. *Pao Y.-H., and Gajewski R. R.* The generalized ray-theory and transient responses of layered elastic solids. In W. P. Mason (editor), Physical Acoustics (Vol.13). New York, Academic Press, 1977.
252. *Pekeris C. L.* Theory of propagation of explosive sound in shallow water. Geological Society of America Memoirs No. 27, 1948. [Имеется перевод: Пекерис С. В сб. «Распространение звука в океане». — М.: ИЛ, 1951.]
253. *Pekeris C. L., Alterman Z., and Jarosch H.* Rotational multiplets in the spectrum of the

- Earth. *Physics Review*, **122**, 1692 — 1700, 1961. [Имеется перевод в сб.: *Собственные колебания Земли*. — М.: Мир, 1964, 257 — 283.]
254. *Pekeris C. L., and Accad Y.* Dynamics of the liquid core of the Earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A273**, 237 — 260, 1972.
255. *Peterson J., Butler H. M., Holcomb L. G., and Hutt C. R.* The seismic research observatory. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **66**, 2049 — 2068, 1976.
256. *Phinney R. A.* Leaking modes in the crustal wave-guide. I. The oceanic *PL* wave. *Journal of Geophysical Research*, **66**, 1445 — 1469, 1961.
257. *Phinney R. A., and Alexander S.* *P*-wave diffraction theory and the structure of the core mantle boundary. *Journal of Geophysical Research*, **71**, 5943 — 5958, 1966.
258. *Phinney R. A., and Cathles L. M.* Diffraction of *P* by the core: A study of long-period amplitudes near the edge of the shadow. *Journal of Geophysical Research*, **74**, 1556 — 1574, 1969.
259. *Pomeroy P. W., Hade G., Savino J., and Chander R.* Preliminary results from high-gain wide-band long-period electromagnetic seismograph systems. *Journal of Geophysical Research*, **74**, 3295 — 3298, 1969.
260. *Poupinet G., and Wright C.* The generation and propagation of shear-coupled *PL* waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **62**, 1699 — 1710, 1972.
261. *Press F.* Displacements, strains, and tilts at teleseismic distances. *Journal of Geophysical Research*, **70**, 2395 — 2412, 1965.
262. *Press F., Crary A. P., Oliver J., and Katz S.* Air-coupled flexural waves in floating ice. *Transactions of the American Geophysical Union*, **32**, 166 — 172, 1951.
263. *Rayleigh, Lord.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **17**, 4 — 11, 1887.
264. *Rayleigh, Lord.* The problem of the whispering gallery. *Philosophical Magazine*, **20**, 1001 — 1004, 1910.
265. *Rayleigh, Lord.* On the propagation of waves through a stratified medium, with special reference to the question of reflection. *Proceedings of the Royal Society of London*, **A86**, 207 — 226, 1912.
266. *Rayleigh, Lord.* *The Theory of Sound* (2 vols.). New York, Dover Publications, 1945. [Имеется перевод: *Стретен В. Дж. (Рэлей).* Теория звука. — М.: ГИТТЛ, 1955.]
267. *Richards P. G.* An elasticity theorem for heterogeneous media, with an example of body wave dispersion in the Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **22**, 453 — 472, 1971.
268. *Richards P. G.* Calculation of body waves, for caustics and tunnelling in core phases. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **35**, 243 — 264, 1973.
269. *Richards P. G.* Weakly coupled potentials for high-frequency elastic waves in continuously stratified media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **64**, 1575 — 1588, 1974.
270. *Richards P. G.* On the adequacy of plane-wave reflection/transmission coefficients in the analysis of seismic body waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **66**, 701 — 717, 1976.
271. *Richards P. G., and Frasier C. W.* Scattering of elastic waves from depth-dependent inhomogeneities. *Geophysics*, **41**, 441 — 458, 1976.
272. *Richter C. F.* An instrumental earthquake magnitude scale. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **25**, 1 — 32, 1935.
273. *Richter C. F.* *Elementary Seismology*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1958. [Имеется перевод: *Рихтер Ч. Ф.* Элементарная сейсмология. — М.: ИЛ, 1963.]
274. *Rihn W. J.* The design of electromagnetic damping circuits. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **59**, 967 — 972, 1969.
275. *Robin L.* *Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroïdales* (3 vols.). Paris: Gautier-Villars, 1957.
276. *Rodgers P. W.* The response of the horizontal pendulum seismometer to Rayleigh and Love waves, tilt and free oscillations of the Earth. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **58**, 1384 — 1406, 1968.
277. *Rodi W. L., Glover P., Li T. M. C., and Alexander S. S.* A fast, accurate method for computing group-velocity partial derivatives for Rayleigh and Love modes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **65**, 1105 — 1114, 1975.
278. *Rosenbaum J. H.* The long-time response of a layered elastic medium to explosive sound. *Journal of Geophysical Research*, **65**, 1577 — 1613, 1960.

279. *Sacks I. S., Suyehiro S., and Evertson D. W.* Sacks-Evertson strainmeter, its installation in Japan and some preliminary results concerning strain steps. *Proceedings of the Japanese Academy*, **47**, 707 — 712, 1971.
280. *Saito M.* Excitation of free oscillations and surface waves by a point source in a vertically heterogeneous Earth. *Journal of Geophysical Research*, **72**, 3689 — 3699, 1967.
281. *Saito M.* Synthesis of rotational and dilatational seismograms. *Journal of Physics of the Earth*, **16**, 53 — 62, 1968.
282. *Satō Y.* Study on surface waves. II. Velocity of surface waves propagated upon elastic plates. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, **29**, 223 — 261, 1951.
283. *Satō Y.* Numerical integration of the equation of motion for surface waves in a medium with arbitrary variation of material constants. *Bulletin of the Seismological Society of America* **49**, 57 — 77, 1959.
284. *Satō Y., Usami T., and Ewing M.* Basic study on the oscillation of a homogeneous elastic sphere. IV. *The Geophysical Magazine*, **31**, 237 — 242, 1962.
285. *Savage J. C.* Radiation from a realistic model of faulting. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **56**, 577 — 592, 1966.
286. *Savage J. C.* Steketee's paradox. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **59**, 381 — 384, 1969.
287. *Savage J. C.* A new method of analyzing the dispersion of oceanic Rayleigh waves. *Journal of Geophysical Research*, **74**, 2608 — 2617, 1969.
288. *Savage J. C.* Anelastic degradation of acoustic pulses in rock — comments. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **11**, 284 — 285, 1976.
289. *Savage J. C., and O'Neill M. E.* The relation between the Lomnitz and Futterman theories of internal friction. *Journal of Geophysical Research*, **80**, 249 — 251, 1975.
290. *Savino J., McCamy K., and Hade G.* Structures in Earth noise beyond twenty seconds — A window for earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **62**, 141 — 176, 1972.
291. *Scholte J. G. J.* The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement*, **5**, 12 — 126, 1947.
292. *Scholte J. G. J.* On seismic waves in a spherical Earth. *Koninkl. Ned. Meteorol. Inst. Publ.*, **65**, 1 — 55, 1956.
293. *Schwab F., and Knopoff L.* Surface wave dispersion computations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **60**, 321 — 344, 1970.
294. *Seckler B. D., and Keller J. B.* Asymptotic theory of diffraction in inhomogeneous media. *Journal of the Acoustical Society of America*, **31**, 206 — 216, 1959.
295. *Shimshoni M., and Ben-Menahem A.* Computation of the divergence coefficient for seismic phases. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **21**, 285 — 294, 1970.
296. *Smith M. L.* Wobble and nutation of the Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **50**, 103 — 140, 1977.
297. *Smith M. L., and Dahlen F. A.* The azimuthal dependence of Love and Rayleigh wave propagation in a slightly anisotropic medium. *Journal of Geophysical Research*, **78**, 3321 — 3333, 1973.
298. *Smith W. D.* A non-reflecting plane boundary for wave propagation problems. *Journal of Computational Physics*, **15**, 492 — 503, 1974.
299. *Smith W. D.* The application of finite element analysis to body wave propagation problems. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **42**, 747 — 768, 1975.
300. *Solomon S. C.* Seismic-wave attenuation and partial melting in the upper mantle of North America. *Journal of Geophysical Research*, **77**, 1483 — 1502, 1972.
301. *Solomon S. C.* Shear wave attenuation and melting beneath the Mid-Atlantic Ridge. *Journal of Geophysical Research*, **78**, 6044 — 6059, 1973.
302. *Sorrels G. G.* A preliminary investigation into the relationship between long-period seismic noise and local fluctuations in the atmospheric pressure field. *Geophysical Journal*, **26**, 71 — 82, 1971.
303. *Spencer T. W.* The method of generalized reflection and transmission coefficients. *Geophysics*, **25**, 625 — 641, 1960.
304. *Spencer T. W.* Long-time response predicted by exact elastic ray theory. *Geophysics*, **30**, 363 — 368, 1965.

305. *Spudich P. K. P., and Helmberger D. V.* Synthetic seismograms from model ocean bottoms. *Journal of Geophysical Research*, **84**, 189 — 204, 1979.
306. *Stacey F. D., Gladwin M. T., McKavanagh B., Linde A. T., and Hastie L. M.* Anelastic damping of acoustic and seismic pulses. *Geophysical Survey*, **2**, 133 — 157, 1975.
307. *Stacey F. D., Rynn J. M. W., Little E. C., and Croskell C.* Displacement and tilt transducers of 140 db range. *Journal of Scientific Instrumentation (J.Phys., E)*, Series 2.2, 945 — 949, 1969.
308. *Stauder W.* Mechanism of the Rat Island earthquake sequence of February 4, 1965, with relation to island arcs and sea-floor spreading. *Journal of Geophysical Research*, **73**, 3847-3858, 1968.
309. *Stein S., and Geller R. J.* Time domain observation and synthesis of split spheroidal and torsional free oscillations of the 1960 Chilean earthquake: Preliminary results. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **68**, 325 — 332, 1978.
310. *Steketee J. A.* Some geophysical applications of the elasticity theory of dislocations. *Canadian Journal of Physics*, **36**, 1168 — 1197, 1958.
311. *Stephens C., and Isacks B. L.* Toward an understanding of  $S_n$ : Normal modes of Love waves in oceanic structure. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **67**, 69 — 78, 1977.
312. *Sternberg E.* On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity. *Archive for Rational Mechanics*, **6**, 34 — 50, 1960.
313. *Stoneley R.* Elastic waves at the surface of separation of two solids. *Proceedings of the Royal Society of London*, **A106**, 416 — 428, 1924.
314. *Strick E.* Propagation of elastic wave motion from an impulsive source along a fluid/solid interface. II. Theoretical pressure pulse. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A251**, 465 — 523, 1959.
315. *Strick E.* A predicted pedestal effect for pulse propagation in constant- $Q$  solids. *Geophysics*, **35**, 387 — 403, 1970.
316. *Su S. S., and Dorman J.* The use of leaking modes in seismogram interpretation and in studies of crust-mantle structure. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **55**, 989 — 1021, 1965.
317. *Sykes L. R.* Mechanism of earthquakes and nature of faulting on the mid-oceanic ridges. *Journal of Geophysical Research*, **72**, 2131 — 2153, 1967.
318. *Takeuchi H., and Kobayashi N.* Surface waves propagating along a free surface of a semi-infinite elastic medium of variable density and elasticity. Part 1. *Journal of the Seismological Society of Japan (Series 2)*, **12**, 115 — 121, 1959.
319. *Takeuchi H., and Saito M.* Seismic surface waves. In: B. A. Bolt (editor), *Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations (Methods in Computational Physics, Vol. 11)*. New York: Academic Press, 1972.
320. *Thomson W. T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid. *Journal of Applied Physics*, **21**, 89 — 93, 1950.
321. *Titchmarsh E. C.* Conjugate trigonometrical integrals. *Proceedings of the London Mathematical Society (Series 2)*, **24**, 109 — 130, 1926.
322. *Titchmarsh E. C.* *The Theory of Functions* (2nd ed.). Oxford University Press, 1939. [Имеется перевод: Титчмарш Е. Теория функций, 2-е изд. — М.: Наука, 1980.]
323. *Tsai Y., and Aki K.* Amplitude spectra of surface waves from small earthquakes and underground nuclear explosions. *Journal of Geophysical Research*, **76**, 3440 — 3452, 1971.
324. *Ванек И., Затопек А., Карник В., Кондорская Н. В., Ризниченко Ю. В., Саваренский Е. Ф., Соловьев С. Л., Шебакин Н. В.* Стандартизация магнитудных шкал. *Изв. АН СССР, сер. геофиз.*, № 2, 153 — 158, 1962.
325. *Vered M., and Ben-Menahem A.* Application of synthetic seismograms to the study of low-magnitude earthquakes and crustal structure in the northern Red Sea region. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **64**, 1221 — 1237, 1974.
326. *Vlaar N. J.* The field from an  $SH$ -point source in a continuously layered inhomogeneous medium. 1. The field in a layer of a finite depth. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **56**, 715 — 724, 1966.
327. *Vlaar N. J.* Ray theory for an anisotropic inhomogeneous elastic medium. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **58**, 2053 — 2072, 1968.
328. *Введенская А. В.* Определение полей смещений при землетрясениях при помощи теории дислокаций. *Изв. АН СССР, сер. геофиз.*, № 3, 227 — 284, 1956.

329. Walker D. A., McCreely C. C., Sutton G. H., and Dunnebeir F. K. Spectral analyses of high frequency  $P_n$  and  $S_n$  phases observed at great distances in the western Pacific. *Science*, **199**, 1333 — 1335, 1978.
330. Wesson R. L. A time integration method for computation of the intensities of seismic rays. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **60**, 307 — 316, 1970.
331. White J. E. *Seismic Waves*. New York: McGraw Hill, 1965.
332. Wideman C. J., and Major M. W. Strain steps associated with earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **57**, 1429 — 1444, 1967.
333. Wiechert E. Ein astatische Pendel höher Empfindlichkeit zur mechanischen Registrierung von Erdbeben. *Beitr. Geophys.*, **6**, 435 — 450, 1904.
334. Wiggins R. A. Body wave amplitude calculations. II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **46**, 1 — 10, 1976.
335. Wiggins R. A. A fast, new computational algorithm for free oscillations and surface waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **47**, 135 — 150, 1976.
336. Wiggins R. A., and Helmberger D. V. Synthetic seismogram computation by expansion in generalized rays. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **37**, 73 — 90, 1974.
337. Wiggins R. A., and Saito M. Evaluation of computational algorithms for the associated Legendre polynomials by internal analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **61**, 375 — 381, 1971.
338. Willmore P. L. The detection of Earth movement. In: S. K. Runcorn (editor), *Methods and Techniques in Geophysics*. New York: Interscience, pp.230 — 276, 1960.
339. Woodhouse J. H. On Rayleigh's principle. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **46**, 11 — 22, 1976.
340. Woodhouse J. H. Asymptotic results for elastodynamic propagator matrices in plane stratified and spherically stratified Earth models. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **54**, 263 — 280, 1978.
341. Wyss M., and Brune J. N. Seismic moment, stress and source dimensions for earthquakes in the California-Nevada region. *Journal of Geophysical Research*, **73**, 4681 — 4694, 1968.
342. Wyss M., and Brune J. N. Regional variations of source properties in Southern California estimated from the ratio of short- to long-period amplitudes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **61**, 1153 — 1167, 1971.
343. Young G. B., and Braile L. W. A computer program for the application of Zoeppritz's amplitude equations and Knott's energy equations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **66**, 1881 — 1885, 1976.
344. Zener C. M. *Elasticity and Anelasticity of Metals*. The University of Chicago Press, 1948.
345. Zöllner F. Veber eine neue Methode zur Messung anziehender und abstossender Kräfte. *Ber. sächs. Akad. Wis. Math.-nat. Klasse*, **21**, 280 — 284, 1869.
346. Zoeppritz K. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 529 — 549, 1907.

# Оглавление

ТОМ I

От переводчиков .....	5
Предисловие к русскому изданию.....	8
Предисловие.....	9
<b>Глава 1. ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>11</b>
<b>Глава 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УРУГОСТИ.....</b>	<b>18</b>
2.1. Определения.....	19
2.2. Связь напряжений и деформаций; упругая энергия.....	28
2.3. Теоремы единственности и взаимности.....	31
2.4. Введение функции Грина в динамической теории упругости.....	34
2.5. Теоремы представления.....	36
2.6. Соотношения между деформациями и смещениями и между смещениями и напряжениями в обобщенной ортогональной криволинейной системе координат.....	39
Рекомендации по дальнейшему чтению.....	42
Задачи .....	43
<b>Глава 3. ОПИСАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ.....</b>	<b>44</b>
3.1. Теоремы представления для внутренней поверхности; эквивалентные объемные силы для разрывов в напряжении и смещении.....	45
3.2. Простой пример подвижки по внутреннему разрыву.....	49
3.3. Общий анализ разрывов смещений на внутренней поверхности $\Sigma$ .....	56
3.4. Объемные источники: основы теории и простые примеры.....	62
Рекомендации по дальнейшему чтению.....	65
Задачи .....	
<b>Глава 4. УПРУГИЕ ВОЛНЫ, ИЗЛУЧАЕМЫЕ ТОЧЕЧНОЙ ДИСЛОКАЦИЕЙ.....</b>	<b>67</b>
4.1. Определения: потенциалы упругих смещений.....	67
4.2. Решение для функции Грина динамической теории упругости в однородной, изотропной, неограниченной среде.....	73
4.3. Решение для двойной пары сил в бесконечной однородной среде.....	80
4.4. Лучевая теория для волн $P$ и $S$ в дальней зоне, возбужденных точечным источником.....	87
4.5. Диаграмма направленности излучения объемных волн в дальней зоне точечной сдвиговой дислокацией произвольной ориентации в сферически-симметричной среде.....	106

	Рекомендации по дальнейшему чтению.....	118
	Задачи .....	118
<b>Глава 5.</b>	<b>ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ И ИХ ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ НА ПЛОСКИХ ГРАНИЦАХ.....</b>	<b>121</b>
5.1.	Основные свойства плоских волн в упругих средах.....	122
5.2.	Элементарные формулы для коэффициентов отражения и преломления.....	130
5.3.	Неоднородные волны, фазовые сдвиги и граничные волны.....	150
5.4.	Матричный метод анализа плоских волн в однородных средах.....	158
5.5.	Распространение волн в поглощающей среде: основы теории плоских волн .....	162
5.6.	Распространение волн в упругой анизотропной среде: основы теории плоских волн.....	178
	Рекомендации по дальнейшему чтению.....	182
	Задачи .....	182
<b>Глава 6.</b>	<b>ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН. ЗАДАЧА ЛЭМБА.....</b>	<b>186</b>
6.1.	Сферические волны как суперпозиция плоских и цилиндрических волн	187
6.2.	Отражение сферических волн от плоской границы; акустические волны .....	192
6.3.	Сферические волны в упругом полупространстве; полюс Рэлея.....	206
6.4.	Методы Каньяра — де Хоопа для линейных источников.....	215
6.5.	Методы Каньяра — де Хоопа для точечных источников.....	293
6.6.	Сводка основных результатов и сравнение различных методов.....	242
	Рекомендации по дальнейшему чтению.....	245
	Задачи .....	245
<b>Глава 7.</b>	<b>ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ.....</b>	<b>247</b>
7.1.	Основные свойства поверхностных волн.....	247
7.2.	Задача на собственные значения для вектора движения-напряжения...	257
7.3.	Вариационные принципы для волн Лява и Рэлея.....	271
7.4.	Поверхностно-волновая часть функции Грина для вертикально-неоднородной среды.....	281
7.5.	Волны Лява и Рэлея от точечного источника с произвольным сейсмическим моментом.....	297
7.6.	Просачивающиеся моды.....	301
	Рекомендации по дальнейшему чтению.....	313
	Задачи .....	314
<b>Глава 8.</b>	<b>СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗЕМЛИ.....</b>	<b>316</b>
8.1.	Собственные колебания однородной жидкой сферы.....	317
8.2.	Возбуждение собственных колебаний точечным источником.....	326
8.3.	Поверхностные волны на сферической Земле.....	334
8.4.	Собственные колебания гравитирующей Земли.....	340
8.5.	Расщепление нормальных мод, обусловленное вращением Земли.....	353
	Рекомендации по дальнейшему чтению.....	357
	Задачи .....	358

<b>Глава 9.</b>	<b>ОБЪЕМНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ СО СВОЙСТВАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ГЛУБИНЫ.....</b>	<b>359</b>
9.1.	Метод Каньяра для многослойной среды с плоскопараллельными границами. Анализ обобщенного луча.....	362
9.2.	Метод отражений для среды с большим числом плоских слоев.....	368
9.3.	Классическая лучевая теория в сейсмологии.....	381
9.4.	Распространение волн в средах с плавным изменением скорости с глубиной при наличии точек поворота.....	387
9.5.	Задачи об объемных волнах для моделей Земли с границами.....	407
	Рекомендации по дальнейшему чтению.....	445
	Задачи.....	446
<b>Глава 10.</b>	<b>ПРИНЦИПЫ СЕЙСМОМЕТРИИ.....</b>	<b>450</b>
10.1.	Основная измерительная аппаратура.....	450
10.2.	Частотный и динамический диапазон сейсмических сигналов.....	462
10.3.	Обнаружение сигналов.....	473
	Рекомендации по дальнейшему чтению.....	492
	Задачи.....	492
Приложение 1.	СЛОВАРЬ ВОЛН.....	494
Приложение 2.	ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТУД.....	501
Литература.....		502
ТОМ 2		
	ВВЕДЕНИЕ.....	525
<b>Глава 11.</b>	<b>АНАЛИЗ СЕЙСМИЧЕСКИХ ДАННЫХ.....</b>	<b>527</b>
11.1.	Сейсмические данные и связанные с ними открытия.....	527
11.2.	Качество сейсмических данных.....	544
11.3.	Анализ временных последовательностей с целью подавления шумов.....	552
11.4.	Анализ данных, получаемых при использовании сейсмических групп.....	575
11.5.	Некоторые примеры эффективных методов обработки.....	590
	Рекомендации по дальнейшему чтению.....	603
	Задачи.....	603
<b>Глава 12.</b>	<b>ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В СЕЙСМОЛОГИИ.....</b>	<b>605</b>
12.1.	Обратная кинематическая задача.....	607
12.2.	Обратные задачи в сейсмике отраженных волн.....	622
12.3.	Обратная задача для линеаризованных систем.....	637
	Рекомендации по дальнейшему чтению.....	675
	Задачи.....	676
<b>Глава 13.</b>	<b>СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ТРЕХМЕРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ.....</b>	<b>678</b>
13.1.	Лучевые построения в неоднородной среде.....	679
13.2.	Упругие волны в слабонеоднородных средах.....	685

13.3.	Рассеяние, возникающее вследствие скоростной неоднородности среды .....	692
13.4.	Горизонтальные неоднородности в слоистой среде .....	706
13.5.	Расщепление спектра собственных колебаний вследствие горизонтальной неоднородности Земли .....	720
13.6.	Метод конечных разностей .....	727
	Рекомендации по дальнейшему чтению .....	747
	Задачи .....	749
<i>Глава</i> 14.	<b>СЕЙСМИЧЕСКИЙ ИСТОЧНИК: КИНЕМАТИКА</b> .....	751
14.1.	Кинематика землетрясения по наблюдениям в дальней зоне .....	752
14.2.	Кинематика землетрясения по наблюдениям в ближней зоне .....	777
	Рекомендации по дальнейшему чтению .....	798
	Задачи .....	799
<i>Глава</i> 15.	<b>СЕЙСМИЧЕСКИЙ ИСТОЧНИК: ДИНАМИКА</b> .....	801
15.1.	Динамика трещины, распространяющейся с заданной скоростью .....	802
15.2.	Динамика спонтанно распространяющегося разрыва .....	831
	Рекомендации по дальнейшему чтению .....	856
	Задачи .....	856
	Литература .....	858
	Именной указатель .....	869
	Предметный указатель .....	872

**УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!**

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и др. просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д.2, изд-во «Мир».

Кэйити Аки, Пол Ричардс

**КОЛИЧЕСТВЕННАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ**

т. 1

Научный редактор В. А. Пантаева. Мл. научный редактор Н. В. Саввон. Художник Б. П. Кузнецов.  
Художественный редактор М. В. Кузьмина. Технический редактор Н. Б. Панфилова.  
Корректоры А. Ф. Рыбальченко, Р. Л. Випке

ИБ № 3227

Подписано к печати 05.07.83. Формат 60 × 90<sup>1/16</sup>. Бумага офсетная № 1. Гарнитура таймс.  
Печать офсетная. Объем 16,25 бум. л. Усл. печ. л. 32,50. Усл. кр. отт. 54,50. Уч.-изд. л. 37,90.  
Изд. № 27/2015. Тираж 2350 экз. Зак. 554 Цена 6 руб.

Набрано в редакции по подготовке оригинал-макетов издательства «Мир»  
на фотоаборном комплексе «Компьюграфик»  
129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Отпечатано в Тульской типографии Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Тула, проспект им. В. И. Ленина, 109

8075.

103

4151