

**СЕРИЯ 8**

**СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ  
МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗЕМЛИ**

**О.КУЛХАНЕК**

**ВВЕДЕНИЕ  
В ЦИФРОВУЮ  
ФИЛЬТРАЦИЮ  
В ГЕОФИЗИКЕ**

**НЕДРА**



# **INTRODUCTION TO DIGITAL FILTERING IN GEOPHYSICS**

by  
Ota Kulhaneck

Seismological Institute  
University of Uppsala, Sweden

О. КУЛХАНЕК


---

3686

# ВВЕДЕНИЕ В ЦИФРОВУЮ ФИЛЬТРАЦИЮ В ГЕОФИЗИКЕ

Перевод с английского канд. техн. наук А. А. Богданова  
Научный редактор д-р техн. наук Е. А. Козлов

МОСКВА «НЕДРА» 1981



Кулханек О. Введение в цифровую фильтрацию в геофизике. — Пер. с англ. М.: Недра, 1981. — 198 с. Пер. изд. Нидерланды, 1976.

Изложены основы цифровой фильтрации применительно к обработке данных сейсмологии, гравиметрии и магнитометрии, способы расчета и действие низкочастотных, полосовых, одно-, двух- и трехкаскадных рекурсивных фильтров. Рассмотрены корреляционная и оптимальная фильтрации.

Автор книги — профессор Сейсмологического института г. Упсала (Швеция).

Книга будет полезна геофизикам и геологам, занимающимся обработкой данных на ЭВМ, а также студентам вузов соответствующих специальностей.

Табл. 5, ил. 32, список лит. — 235 назв.

К  $\frac{20804-206}{043(01)-81}$  99-81 1904050000

Современная техника измерений в любой области науки и техники, включая и геофизику, не обеспечивает получение записи наблюдаемых данных, свободных от помех. Поэтому весьма вероятно, что при анализе наблюдаемых данных начинающие исследователи встретятся с проблемами фильтрации сигналов на фоне помех во всей их сложности. Теория фильтров и связанные с ней вопросы достаточно хорошо освещены в литературе по системам связи и иным отраслям. Тем не менее для лиц, изучающих сейсмологию и другие геофизические дисциплины, может оказаться довольно обременительным чтение учебников по проблемам связи и просмотр обширной литературы по данному вопросу.

В предлагаемой книге сделана попытка представить имеющуюся информацию о технике фильтрации, применяемой в геофизике, в систематизированной форме. Большая часть собранной информации не является новой, однако она рассеяна по многочисленным разрозненным публикациям, относящимся к геофизике и системам связи. Автор старался доступно изложить основные принципы различных способов техники фильтрации, ориентируясь на студентов и начинающих исследователей в области геофизики. Примеры даны в основном применительно к сейсморазведке, но и другие геофизические методы — гравиразведка, магниторазведка и т. д. — также не оставлены без внимания. Несмотря на большое число ссылок на публикации, перечень цитируемой литературы не следует считать исчерпывающим. Это, скорее, перечень типичных примеров, выбранных по усмотрению автора. Хотя имеется в виду, что процедура фильтрации реализуется на ЭВМ, попыток рассматривать машинные программы не делалось. Их можно найти в других источниках.

Фильтрация данных является общей задачей, которую приходится решать при анализе любых зарегистрированных физических величин. Поэтому начинающие исследователи, специализирующиеся в других, не геофизических, областях науки, также смогут найти в книге полезные сведения. Книга может быть использована также читателями, математическая подготовка которых включает комплексные переменные и интегральное исчисление.

В главах 1 и 2 рассмотрены принципы цифровой обработки и основные подходы к задаче построения фильтров. Главы 3—6 посвящены более подробному рассмотрению тех категорий фильтров, с которыми чаще всего приходится встречаться при решении различных геофизических задач.

Впервые меня побудил написать эту книгу профессор Маркус Бат, мнение которого о необходимости иметь монографию по технике фильтрации в геофизике я разделяю. На выбор тем и стиль

изложения оказали влияние лекции, которые я читал по данному предмету в Сейсмологическом институте г. Упсала.

Я рад воспользоваться представившейся возможностью, чтобы поблагодарить профессора Маркуса Бата за его огромную помощь в подготовке книги, особенно за критический просмотр рукописи, ценные замечания и предложения, послужившие основой для совершенствования текста. Я признателен также моему коллеге доктору Джону С. Фарнбаху за полезную дискуссию и помощь в редактировании текста. Руководство Сейсмологического института предоставило мне необходимые условия для подготовки рукописи. Я выражаю также благодарность мисс Улла Хелмквист за помощь в печатании части окончательного текста рукописи и миссис Истер Дрейманис за подготовку рисунков. Я с признательностью принимаю финансовую поддержку, оказанную Советом естественных наук Швеции. И, наконец, мне приятно поблагодарить мою жену Иву за помощь в печатании черновиков, так же как и части окончательного текста рукописи. Ее поддержка и постоянный оптимизм в значительной мере содействовали успеху работы над книгой на различных стадиях ее эволюции.

*Сейсмологический институт  
г. Упсала, Швеция*

*Ота Кулханек  
Январь, 1975*

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $a_i, b_i$  —  $i$ -й коэффициент соответственно числителя и знаменателя  $H(z)$   
 $A, K, c, d$  — вещественные константы  
 $A_i, B_i$  — соответственно  $i$ -й нуль и полюс функции  $H(z)$  в  $z$ -плоскости  
 $C_N(\omega)$  — полином Чебышева  $N$ -го порядка  
 $d$  — отклик обратного фильтра на единичный импульс в области времен  
 $d_n$  —  $n$ -й отсчет последовательности  $d$   
 $D(z)$  — системная функция обратного фильтра  
 $e$  — основание натурального логарифма  
 $e$  — последовательность значений погрешности  
 $e_n$  —  $n$ -й отсчет последовательности  $e$   
 $e_{in}$  —  $n$ -й отсчет последовательности  $e_i$ ; индекс  $i$  указывает на применение аппроксимации  
 $e(t), e(\omega), e(\omega, N)$  — погрешности как функции времени, частоты и т. п.  
 $f$  — частота в Гц  
 $f_s$  — частота дискретизации (квантования по времени)  
 $f_N$  — частота Найквиста  
 $F\{h(t)\}$  — преобразование Фурье функции  $h(t)$   
 $F^{-1}\{H(\omega)\}$  — обратное преобразование Фурье функции  $H(\omega)$   
 $g, y$  — последовательности отсчетов выходного сигнала  
 $g_n, y_n$  —  $n$ -й отсчет соответственно  $g$  и  $y$   
 $g_{in}$  —  $n$ -й отсчет последовательности  $g_i$ ; индекс  $i$  указывает на применение аппроксимации  
 $g(t), y(t)$  — аналоговые выходные сигналы  
 $G(z), Y(z)$  —  $z$ -трансформанты соответственно  $g$  и  $y$   
 $h, \{h_n\}$  — импульсная реакция фильтра, представленная временным рядом  
 $\hat{h}$  — усеченный временной ряд, представляющий импульсную реакцию  $h$   
 $h_n$  —  $n$ -й отсчет последовательности  $h$   
 $h(t)$  — аналоговая импульсная реакция фильтра (аналоговая весовая функция)  
 $H(p)$  — передаточная функция  
 $H(z)$  — системная функция ( $z$ -трансформанта)  
 $H(\omega)$  — частотная характеристика (функция отклика, системная функция)  
 $H^*(\omega), X^*(\omega)$  — комплексно-сопряженные величины соответственно  $H(\omega)$  и  $X(\omega)$   
 $H_B(p), H_C(p)$  — передаточные функции соответственно фильтра Баттерворта и Чебышева  
 $H_L(\omega), H_H(\omega)$  — передаточные функции соответственно низкочастотного и высокочастотного фильтров  
 $i, k, l, m, n, L, M, N, P, R$  — целые числа  
 $j = \sqrt{-1}$   
 $k, k_x, k_y$  — волновые числа  
 $\mathbf{k}$  — вектор волнового числа  
 $k_N$  — наибольшее различное волновое число  
 $\ln$  — натуральный логарифм  
 $\log$  — десятичный логарифм  
 $\mathcal{L}\{h(t)\}$  — преобразование Лапласа функции  $h(t)$   
 $\mathcal{L}^{-1}\{H(p)\}$  — обратное преобразование Лапласа функции  $H(p)$

- $M$  — постоянный коэффициент передачи  
 $M(\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика (коэффициент передачи)  
 $M_B(\omega)$ ,  $M_{\text{Ч}}(\omega)$  — амплитудно-частотные характеристики соответственно фильтров Баттерворта и Чебышева  
 $M_L(\omega)$ ,  $M_H(\omega)$  — амплитудно-частотные характеристики соответственно низкочастотного и высокочастотного фильтра  
 $n_i$  — временная последовательность значений шума в  $i$ -м канале  
 $n_{in}$  —  $n$ -й отсчет последовательности  $n_i$   
 $n(t)$  — аналоговый шум  
 $p$  — комплексная переменная  
 $p_i$  —  $i$ -й полюс функции  $H(p)$   
 $p_i^*$  — величина комплексносопряженная  $p_i$   
 $P(\omega)$ ,  $Q(\omega)$  — соответственно действительная и мнимая части функции  $H(\omega)$   
 $Q$  — отношение сигнал/шум  
 $R_{xx}(\tau)$  — автокорреляционная функция  
 $\text{Re}$ ,  $\text{Im}$  — соответственно действительная и мнимая части функции  
 $s_i$  — временная последовательность значений сигнала в  $i$ -м канале  
 $s_{in}$  —  $n$ -й отсчет последовательности  
 $s(t)$  — аналоговый сигнал  
 $t$ ,  $t_1$ ,  $\tau$ ,  $\tau_1$  — времена  
 $v_k$  — кажущаяся скорость  
 $w$  — временная последовательность отсчетов во временном окне  
 $w_n$  —  $n$ -й отсчет последовательности  $w$   
 $w(t)$  — временное окно  
 $W(\omega)$  — преобразование Фурье функции  $w(t)$   
 $x$ ,  $\{x_n\}$  — последовательность отсчетов входного сигнала  
 $x_n$  —  $n$ -й отсчет последовательности  $x$   
 $x_S(t)$  — выходной сигнал устройства дискретизации  
 $x(t)$  — аналоговый входной сигнал  
 $X(\omega)$  — преобразование Фурье функции  $x(t)$   
 $y(k, \theta)$  — характеристика направленности группы  
 $y_d(t)$  — желаемый аналоговый выходной сигнал  
 $z$  — комплексная переменная  
 $z_i$  —  $i$ -й полюс функции  $H(z)$   
 $Z\{x_n\}$ ,  $X(z)$  —  $z$ -преобразование функции  $x$   
 $Z^{-1}\{X(z)\}$  — обратное  $z$ -преобразование функции  $X(z)$   
 $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  — соответственно  $i$ -й нуль и полюс функции  $H(z)$  в  $z^{-1}$  плоскости  
 $\delta$ ,  $\{\delta_n\}$  — временная последовательность единичных импульсов («гребенка» Дирака)  
 $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака  
 $\delta_{\Delta t}(t)$  — идеальная функция дискретизации  
 $\Delta t$  — шаг дискретизации  
 $\Delta x$  — расстояние между соседними точками приема  
 $\lambda$  — длина волны  
 $\sigma$  — действительная часть функции  $p$   
 $\Phi(\omega)$  — фазовая характеристика  
 $\Phi_{xx}(\omega)$  — спектральная плотность мощности, или спектр мощности, функции  $x(t)$   
 $\omega$  — угловая частота  
 $\omega_c$ ,  $\omega_L$ ,  $\omega_H$  — угловые частоты среза фильтров  
 $\omega_s$  — угловая частота дискретизации (квантования по времени)  
 $\omega_N$  — угловая частота Найквиста (граничная угловая частота)  
 $\Omega$  — постоянная угловая частота

Термин фильтр используется для характеристики системы, которая может выполнять эффективное заданное разделение желаемой информации, переносимой сигналом, от нежелательной ее части, обычно называемой шумом. Разделение может осуществляться, например, по частоте, скорости или по характеристике поляризации соответственно с помощью частотных, скоростных или поляризационных фильтров. На протяжении всей книги предполагается, что фильтры реализуются с помощью ЭВМ. Поэтому основное внимание сосредоточено на изучении соотношений между входом и выходом (также называемых терминальными соотношениями) или, другими словами, на исследовании взаимосвязи между поступающим на вход фильтра возмущением и соответствующим ему откликом. В связи с этим внутренняя структура физической системы, т. е. построение фильтра из электронных, механических, оптических или других компонент, в книге не рассматривается.

### 1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При осуществлении фильтрации на цифровых вычислительных машинах термин «фильтр» довольно удачно заменяется термином «оператор фильтра». В общей постановке будет описано преобразование входной функции  $x(t)$  в соответствующую выходную функцию  $y(t)$  так, что

$$y(t) = \partial \{x(t)\}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\partial$  — оператор, обеспечивающий данное преобразование. Предполагается также, что в уравнении (1.1) входная и выходная функции являются функциями времени. В главе 6 будут рассмотрены фильтры, сигналы на входе и выходе которых представляют функции других переменных. В данной книге в качестве входных и выходных рассматриваются только вещественные функции.

Проектирование оператора  $\partial$ , т. е. нахождение его математического вида, базирующегося на предшествующих знаниях и опыте, и с учетом различных априорных требований, предъявляемых к процессу фильтрации, называется синтезом фильтра. Обратная процедура — анализ фильтра означает исследование свойств заданного оператора фильтра. Вообще синтез фильтра — достаточно сложный процесс, поскольку уравнение (1.1) должно обеспечить нахождение точного отклика на любое входное воздействие. Тем не менее для определенной категории фильтров этот

процесс довольно прост. Для лучшего понимания сущности процесса синтеза фильтров ограничимся вначале рассмотрением таких одноканальных фильтров, которые являются линейными, инвариантными во времени, устойчивыми и каузальными.

Фильтры с единственным входом и единственным выходом называются одноканальными. Все другие фильтры являются многоканальными. Это название распространяется на системы с несколькими входами, системы с несколькими выходами, а также на системы, имеющие одновременно несколько входов и выходов.

Система называется линейной, если выполняются закон пропорциональности и принцип суперпозиции для любой входной функции  $x(t)$  и произвольно выбранной константы  $A$ . Это означает, что

$$\partial \{Ax(t)\} = A\partial \{x(t)\} \quad \text{— закон пропорциональности или свойств однородности;}$$

$$\partial \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} A_i x(t) \right\} = \sum_{i=0}^{\infty} \partial \{A_i x(t)\} \quad \text{— принцип суперпозиции или свойство аддитивности.} \quad (1.2)$$

Оператор фильтра, удовлетворяющий условию (1.2), называется линейным.

Если свойства системы, оказывающие влияние на соотношение между входом и выходом, не меняются во времени, считают, что система является инвариантной во времени, или с постоянными, либо фиксированными параметрами. Инвариантность во времени означает, что если система описана дифференциальным уравнением, устанавливающим связь между входным и выходным сигналами, то коэффициенты данного уравнения должны быть независимы от времени. Строго говоря, все физические фильтры должны изменять свои характеристики во времени из-за изменений температуры, давления и т. п., а следовательно, они являются фильтрами, переменными во времени. Однако такие изменения имеют достаточно медленный характер по сравнению с длительностью обрабатываемых сигналов, и поэтому, если не будет специально оговорено, они в книге не рассматриваются.

Устойчивость системы становится особенно важным показателем, когда выходной сигнал или определенная его часть рециркулирует обратно на вход системы (системы с обратной связью). Система считается устойчивой, если произвольный ограниченный сигнал на входе создает ограниченный выходной сигнал. Это условие может быть записано следующим образом: если  $|x(t)| \leq A$ , то  $|y(t)| \leq KA$ , где  $A$  и  $K$  — некоторые константы; независимые от входного сигнала. Проблема устойчивости системы более подробно рассматривается в следующем разделе книги и главным образом в разделе 1.8.

В соответствии с основополагающим принципом причинности и следствия сигнал на выходе любой физической системы не может

предшествовать по времени соответствующему сигналу на входе, т. е., если  $x(t) = 0, t < t_1$ , то

$$y(t) = \partial \{x(t)\} = 0, \quad t < t_1. \quad (1.3)$$

Условие (1.3) называется условием каузальности. Говорят, что система или оператор фильтра, удовлетворяющие этому условию, являются каузальными или физически осуществимыми. Если для физических фильтров каузальность — обязательное требование, то для фильтров, реализуемых на ЭВМ, оно теряет свою важность.

Познакомившись с названными основными определениями, можно предположить, что одноканальные, линейные, устойчивые, инвариантные во времени и физически осуществимые фильтры составляют небольшую и особую группу фильтров. Однако, как будет показано ниже, верно обратное. Эти фильтры (для реализуемых на ЭВМ фильтров свойство каузальности исключается) составляют наиболее представительную категорию.

## 1.2. ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ВХОДНЫМ И ВЫХОДНЫМ СИГНАЛАМИ

Попытаемся найти связь между входом и выходом фильтра во временной и частотной областях в предположении, что фильтр является линейным, каузальным и инвариантным во времени. В наиболее общем случае синтеза фильтра задается входной сигнал и предъявляются требования к форме желаемого выходного сигнала. При этом основной целью синтеза является проектирование характеристик фильтра способом, гарантирующим наилучшее совпадение между действительным и желаемым выходными сигналами. Связь между входным, выходным сигналами и характеристиками системы имеет существенное значение при любом способе проектирования фильтра.

### 1.2.1. Соотношения во временной области

Предположим, что на вход системы воздействует единичный импульс  $\delta(t)$  на времени  $t=0$ . Единичный импульс, или дельта-функция Дирака, может рассматриваться как прямоугольный импульс бесконечно малой ширины  $dt$ , имеющий единичную площадь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

За пределами временного интервала  $dt$  амплитуда импульса равна нулю [Paroulis, 1962, с. 270; Bath, 1968, с. 247]. Обозначим отклик системы на единичный импульс через  $h(t)$ . Функцию  $h(t)$  часто называют импульсной реакцией. В начальный момент система находится в состоянии покоя (это условие в дальней-

шем будет всегда иметься в виду, если не оговорено особо). При наложении дополнительного условия каузальности необходимо, чтобы импульсная реакция  $h(t)$  была равна нулю для  $t < 0$ . При возбуждении фильтра с постоянными коэффициентами единичным импульсом, задержанным на время  $t = \tau$ , на выходе фильтра получим отклик, задержанный на тот же интервал времени. Так, например, импульс  $\delta(t - \tau)$  на входе фильтра дает на его выходе отклик  $h(t - \tau)$ . Если площадь входного импульса равна некоторой постоянной величине  $A \neq 1$ , то отклик на задержанный входной импульс равен  $Ah(t - \tau)$ , когда соблюдается условие линейности.

Естественно, что использование в качестве входной функции единичного импульса является особым случаем. Поэтому рассмотрим возбуждение фильтра произвольной функцией времени  $x(t)$ . Тогда входную функцию можно представить в виде большого числа прямоугольных импульсов, каждый из которых имеет бесконечно малую длительность  $dt$ . Прямоугольный импульс, проходя через фильтр, воздействует на него как независимый входной импульс и создает на выходе фильтра свой выходной сигнал. Суммарный выходной сигнал, получаемый при прохождении через фильтр всего входного сигнала  $x(t)$ , можно рассматривать как сумму индивидуальных выходных сигналов с учетом их временных сдвигов. Например, входной сигнал на времени  $t = \tau$  имеет длительность  $d\tau$ , высоту  $x(\tau)$  и площадь  $x(\tau)d\tau$ . В соответствии с изложенным выше производная выходного сигнала

$$dy(t) = x(\tau) dh(t - \tau). \quad (1.4)$$

Представим теперь входной сигнал серией узких прямоугольных импульсов на всем интервале его существования от бесконечно далекого прошлого вплоть до текущего времени  $t$ . Тогда, суммируя все производные выходных сигналов  $dy(t)$  в формуле (1.4), получаемые при воздействии каждого входного импульса, для полного выходного сигнала на времени  $t$  можно записать

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (1.5)$$

Правая часть уравнения, называемая интегралом свертки или интегралом суперпозиции, характеризует систему (через причинную связь) с помощью интегрального оператора. Соотношение входа и выхода для любой линейной инвариантной во времени системы задается функцией  $h(t)$ . Уравнение (1.5) устанавливает связь между входным, выходным сигналами и импульсной реакцией фильтра, и поэтому является основополагающим в синтезе фильтров. Поскольку эти три величины являются функциями времени, синтез фильтров с использованием уравнения (1.5) называется синтезом во временной области.

Дополнительные сведения, касающиеся принципов свертки физических (аналоговых) и цифровых сигналов, можно найти в работах М. Б. Добрина и С. Х. Ворда (1962), Н. А. Анстея (1964),

Д. Силвермана (1967) и других авторов. Интересное толкование интеграла свертки на примере аппарата искусственных линий задержки дается Х. Дж. Джонсом и др. (1955).

Форма функции  $h(t)$  имеет решающее значение в оценке степени влияния прошлых значений входного сигнала  $x(t)$  до момента времени  $t$  на выходной сигнал на том же времени  $t$ . Под длинной реакцией фильтра будем понимать интервал времени, на котором значения функции  $h(t)$  существенно отличаются от нуля. Вообще, чем длиннее реакция фильтра, тем более отдаленные значения входного сигнала вносят свой вклад в выходной сигнал на времени  $t$ .

Уравнение (1.5) может быть модифицировано. Например, исходя из свойства каузальности можно заметить, что, поскольку  $h(t-\tau)=0$  для  $\tau>t$ , в значение интеграла в правой части уравнения (1.5) не будет вноситься вклад из интервала  $t<\tau<\infty$ . Таким образом, можно заменить верхний предел интегрирования на бесконечность и переписать формулу следующим образом:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (1.6)$$

Из уравнений (1.5) и (1.6) следует, что процесс свертки состоит из четырех операций: сдвига, обращения во времени, умножения и интегрирования. Пусть из двух функций в правой части уравнений (1.5) и (1.6)  $x(t)$  представляет собой входной сигнал, а  $h(t)$  — импульсную реакцию фильтра. Тогда значение выходного сигнала на времени  $t=t_1$  может быть получено последовательным выполнением указанных операций. Вначале сдвигаем импульсную реакцию фильтра на величину  $t_1$ , затем переворачиваем ее по оси времени вокруг координаты  $t=0$  и умножаем на  $x(t)$ . Величину выходного сигнала на времени  $t=t_1$  получим интегрированием результатов во всем интервале переменной  $t$ . Названные операции приведены в табл. 1.

Другую форму интеграла свертки можно получить простой заменой  $\tau_1=t-\tau$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1. \quad (1.7)$$

Таблица 1. Четыре операции свертки

Свертываемые сигналы	$x(t)$	$h(t)$
Временной сдвиг на величину $t_1$ Переворачивание сигнала относительно $t=0$ Умножение	$x(t) h(t_1 - t)$	$h(t + t_1)$ $h(t_1 - t)$
Интегрирование	$y(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) h(t_1 - t) dt$	

Выходной сигнал  $y(t)$  можно рассматривать как взвешенную сумму значений сигнала  $x(t)$  по всему времени его существования. Веса задаются импульсной реакцией  $h(t)$ , которую иногда называют также весовой функцией. Уравнения (1.6) и (1.7) подтверждают важное свойство свертки — перестановочность: результат свертки остается одним и тем же независимо от того, какая из свертываемых функций сдвигается по оси времени, если эта функция одновременно обращается во времени. В линейном фильтре импульсная реакция и входной сигнал могут меняться местами. Предполагая свойство каузальности, интегрирование в уравнении (1.7) можно начать с момента времени  $\tau_1=0$ , поскольку величина интеграла не зависит от значений сигнала для  $\tau_1 < 0$ . Следовательно, для выходного сигнала можно записать

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1. \quad (1.8)$$

Уравнения (1.5)—(1.8) показывают различные возможности записи выражения для выходного сигнала  $y(t)$  во временной области через функции  $x(t)$  и  $h(t)$ . Для практического использования наиболее приемлемы некоторые из них. Фактически для вывода соотношения вход — выход могут использоваться также и другие виды входных функций, а не только единичный импульс. Например, соотношение вход — выход может быть определено при возбуждении фильтра единичной функцией [см. Paroulis, 1962, с. 87—88]. Получение этого соотношения имеет особо важное значение для технических приложений, поскольку в реальных системах генерировать сигналы в форме единичных функций проще, чем в форме единичных импульсов.

Связь между функциями  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $h(t)$  в уравнении (1.8) описывает процесс фильтрации через известный входной сигнал и характеристики фильтра. Можно рассмотреть еще два случая. Во-первых, обратный процесс, т. е. нахождение входного сигнала по известному выходному сигналу и характеристикам фильтра. Это процесс восстановления сигнала, используемый, например, для решения сейсмологических задач, когда требуется устранить влияние регистрирующей системы с целью получения истинной формы регистрируемых колебаний почвы (см. главу 5). При этом сейсмограмма рассматривается в качестве выходного сигнала, а система сейсмограф — регистратор как фильтр. Во-вторых, нахождение характеристики системы по известным входному и выходному сигналам это задача идентификации системы.

С помощью отклика на единичный импульс может быть также проверена устойчивость системы. Рассмотрим для этого линейную, инвариантную во времени систему с ограниченным сигналом на ее входе. Тогда должна существовать некоторая постоянная  $A$ , при которой  $|x(t)| \leq A$  для всех  $t$ .

Согласно уравнению (1.7) абсолютное значение входного сигнала

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau.$$

Из условия ограниченности входного сигнала следует, что

$$|y(t)| \leq A \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau.$$

Предполагая абсолютную интегрируемость импульсной реакции системы, запишем:

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty. \quad (1.9)$$

Тогда и выходной сигнал системы также будет ограниченным, поскольку

$$|y(t)| \leq KA,$$

и система будет устойчивой. Следовательно, абсолютная интегрируемость импульсной реакции системы гарантирует ее устойчивость.

Системы, меняющие свои свойства во времени, не могут быть описаны только одной импульсной реакцией, так как параметры системы зависят от времени. Таким системам отвечают целые семейства импульсных реакций. Смену импульсных реакций с течением времени отображают, используя для весовой функции фильтра обозначение  $h(t_1, t)$ . Функция  $h(t_1, t)$  является откликом системы, измеренным на времени  $t$ , при возбуждении импульсом в момент  $t-t_1$ . Разность  $t-t_1$  определяет временной интервал между моментом возбуждения системы единичным импульсом и моментом наблюдения выходного сигнала. Ж. К. Кларк (1968) назвал разность  $t-t_1$  «возрастом» выходного сигнала. При замене  $h(\tau_1)$  в уравнении (1.8) функцией  $h(t_1, t)$  более общего характера выражение для выходного сигнала переменной во времени линейной системы принимает вид

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, t) x(t-t_1) dt_1. \quad (1.10)$$

Как следует из уравнения (1.10), при вычислении выходного сигнала систем, описываемых двумерными весовыми функциями, важен не только интервал  $t-t_1$ , но и конкретное время  $t$ , на котором наблюдается система. Такие системы являются физически осуществимыми, если  $h(t_1, t) = 0$  для  $t_1 < 0$  независимо от  $t$ .

### 1.2.2. Соотношения в частотной области

Линейная, инвариантная во времени система также может быть описана ее частотной характеристикой  $H(\omega)$

(обычно сокращенно функцией отклика) или системной функцией, которая определяется как преобразование Фурье импульсной реакции системы

$$H(\omega) = F\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.11)$$

где действительная переменная  $\omega$  — угловая частота. Следует заметить, что функция  $H(\omega)$  здесь является просто функцией угловой частоты. Для нелинейных систем  $H(\omega)$  зависит также от входного возмущения, а для изменяющихся во времени систем она является и функцией времени. Обратное преобразование Фурье позволяет получить функцию  $h(t)$  из  $H(\omega)$

$$h(t) = F^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.12)$$

Частотная характеристика  $H(\omega)$  является комплексной функцией действительной переменной и может быть записана в виде

$$H(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1.13)$$

где  $M(\omega) = |H(\omega)| = [P^2(\omega) + Q^2(\omega)]^{1/2}$  — амплитудно-частотная характеристика или коэффициент передачи системы;  $\varphi(\omega) = \arctg [Q(\omega)/P(\omega)]$  — фазово-частотная характеристика системы. Амплитудно-частотная характеристика определяет величину усиления для спектральной составляющей сигнала на частоте при прохождении его через систему. Наклон фазово-частотной характеристики для любой частоты определяет временную задержку, создаваемую фильтром на заданной частоте. Характеристики  $M(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  совместно полностью характеризуют фильтр через частотные составляющие сигнала, которые могут быть пропущены фильтром. Разделяя функцию  $h(t)$  на четные и нечетные составляющие [см., например, Papoulis, 1962, с. 12—13], можно установить следующее свойство симметрии систем с вещественными сигналами на их входе и выходе:

$$|H(\omega)| = |H(-\omega)|; \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega).$$

Обозначая через  $X(\omega)$  и  $Y(\omega)$  комплексные спектры входного и выходного сигналов и применяя теорему свертки к уравнению (1.6), получаем соответствующее соотношение в частотной области:

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega) = X(\omega) M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) является эквивалентом уравнения (1.6) в частотной области и устанавливает связь между участвующими в (1.6) тремя функциями через их спектры. Поэтому, если применить обратное преобразование Фурье (1.12) к правой части урав-

нения (1.14), то получим выходной сигнал через временную функцию:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) M(\omega) e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} d\omega. \quad (1.15)$$

Сравнивая уравнения (1.6) и (1.15), видим, что линейная, инвариантная во времени система одинаково хорошо описывается импульсной реакцией или частотной характеристикой соответственно во временной или в частотной области. Во временной области результат фильтрации сигнала может быть вычислен непосредственно через интеграл свертки, а в частотной области — через прямое и обратное преобразования Фурье. На рис. 1.1 показаны принципы фильтрации во временной и в частотной областях.

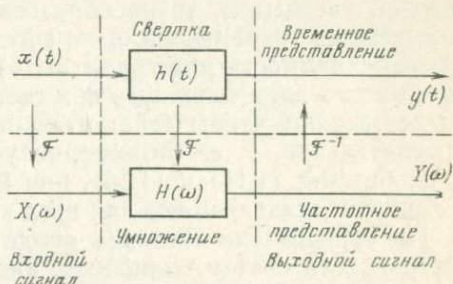


Рис. 1.1. Принцип фильтрации во временной и в частотной областях

Кроме того, как следует из уравнения (1.13), системная функция также может быть определена через ее действительную и мнимую части или амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики. Проектирование фильтров в частотной области через амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики является наиболее широко применяемым подходом. Удобство этого подхода объясняется тем, что желаемые характеристики фильтра обычно наиболее просто описываются его амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристиками. Расчет фильтров во временной области через импульсную характеристику используется реже, а частотные функции  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  в некоторой степени имеют теоретическое значение.

Для широкой категории системных функций  $M(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ , так же как  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ , не являются независимыми друг от друга: каждая из них может быть однозначно определена из другой функции с помощью преобразования Гильберта. Обсуждение этой проблемы выходит за рамки настоящей книги, и поэтому здесь не дается. Читатели, интересующиеся этой проблемой, могут обратиться к работам Я. В. Ли (1960), А. Папулиса (1962) или Р. Брейсвела (1965).

Другим способом описания поведения системы в частотной области является использование передаточной функции  $H(p)$ , ко-

торая получается преобразованием Лапласа импульсной реакции системы

$$H(p) = \mathfrak{L}\{h(t)\} = \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt, \quad p = \sigma + j\omega. \quad (1.16)$$

При этом предполагается, что функция  $h(t)$  определена для интервала  $t \geq 0$ , т. е. выполняется одностороннее преобразование Лапласа (далее просто преобразование Лапласа). Соответствующее преобразование для функций, определенных на всем интервале вещественной переменной  $t$ , называется двусторонним преобразованием Лапласа. Заметим, что если интеграл Фурье функции  $H(\omega)$  является функцией вещественной угловой частоты  $\omega$ , то преобразование Лапласа  $H(p)$  — функция комплексной переменной  $p = \sigma + j\omega$ . Чтобы гарантировать необходимую сходимость интеграла (1.16) для временных функций, наиболее часто встречающихся при геофизических наблюдениях, обычно достаточно, чтобы действительная часть переменной  $p$  не была отрицательной, т. е. соблюдение условия  $\operatorname{Re}(p) \geq 0$ . Как следует из уравнений (1.11) и (1.16), при  $\operatorname{Re}(p) = 0$  трансформанты Фурье и Лапласа эквивалентны для всех каузальных систем.

Преобразование Лапласа является полезным при изучении устойчивости систем. Линейная, инвариантная во времени система является устойчивой, если функция  $H(p)$  не имеет полюсов в правой части плоскости  $p$ , включая ось  $j\omega$ . Критерий устойчивости вытекает из соотношений, устанавливаемых через преобразование Лапласа. Весовая функция  $h(t)$ , быстро стремящаяся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , имеет трансформанту  $\mathfrak{L}\{h(t)\}$ , у которой все полюсы расположены слева от мнимой оси.

Изучение свойств каузальности систем посредством передаточных функций — довольно сложная задача; общего решения существующей проблемы не найдено [см. Papoulis, 1962, с. 212—214].

### 1.3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТАТИСТИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ

Кроме интеграла свертки, устанавливающего связь между входным  $x(t)$  и выходным  $y(t)$  сигналами линейной системы, важная тесная зависимость может быть найдена между соответствующими автокорреляционными функциями  $R_{xx}(\tau)$  и  $R_{yy}(\tau)$ . Как и в случае свертки, соотношения между автокорреляционными функциями имеют эквивалент в частотной области, выражаемый через спектральные плотности мощности (далее просто спектры мощности)  $\Phi_{xx}(\omega)$  и  $\Phi_{yy}(\omega)$ . Известная также формула, в которой используется взаимно-корреляционная функция  $R_{xy}(\tau)$  входного и выходного сигналов. Использование корреляционных функций и/или спектров мощности особенно удобно при изучении помех и сигналов, имеющих случайную природу. В данном разделе дается краткий обзор некоторых важных зависимостей, более полное из-

ложение этого вопроса можно найти в работах Г. П. Водсворта и других (1953), Я. В. Ли (1960) или В. В. Солодовникова (1960). Положим, что система линейна и инвариантна во времени и входные и выходные сигналы являются стационарными случайными сигналами (т. е. такими, статистические свойства которых не изменяются во времени). Рассмотрим случайный сигнал

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda$$

на выходе системы, получаемый при возбуждении системы случайным входным сигналом  $x(t)$ , а также задержанный сигнал

$$y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) x(t + \tau - \eta) d\eta.$$

Здесь обе переменные  $\lambda$  и  $\eta$  имеют физический смысл времени, а  $h(t)$  представляет собой импульсную реакцию системы. Найдем форму автокорреляционной функции  $R_{yy}(\tau)$  и ее связь с  $R_{xx}(\tau)$ .

Согласно определению [Lee, 1960, с. 51] автокорреляционная функция стационарного выходного сигнала<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{T_1} y(t) y(t + \tau) dt = \\ &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{T_1} dt \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) x(t + \tau - \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования, находим:

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) \times \\ &\times \left[ \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{T_1} x(t - \lambda) x(t + \tau - \eta) dt \right] d\eta. \end{aligned}$$

Величина в квадратных скобках — автокорреляционная функция  $R_{xx}(\tau + \lambda - \eta)$  входного сигнала. Следовательно, автокорреляционная функция выходного сигнала

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) d\eta R_{xx}(\tau + \lambda - \eta). \quad (1.17)$$

Полагая  $\tau=0$ , получаем среднюю квадратическую величину случайного выходного сигнала в виде

$$\overline{y^2(t)} = R_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) d\eta R_{xx}(\lambda - \eta). \quad (1.18)$$

<sup>1</sup> Следует добавить также условие  $E\{x(t)\} = E\{y(t)\} = 0$ , так как приведенные ниже в данном разделе соотношения справедливы только применительно к центрированным сигналам. (Прим. перев.)

Для некоторых частных случаев более подходящей будет другая форма уравнения (1.17). В целях упрощения введем в уравнение (1.17) замену  $v = \eta - \lambda$ :

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(v + \lambda) dv R_{xx}(\tau - v).$$

Изменив порядок интегрирования, получим:

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - v) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) h(\lambda + v) d\lambda \right] dv,$$

где из определения автокорреляционной функции переходного процесса [Lee, 1960, с. 37], выражение в квадратных скобках является автокорреляционной функцией  $R_{hh}(\tau)$  импульсной реакции. Таким образом,

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{hh}(v) R_{xx}(\tau - v) dv. \quad (1.19)$$

Уравнение (1.19) выражает зависимость, аналогичную зависимости (1.6) для временных функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $h(t)$ . Средняя квадратическая величина выходного сигнала соответственно может быть записана как

$$\overline{y^2(t)} = R_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{hh}(v) R_{xx}(v) dv. \quad (1.20)$$

При переходе от (1.19) к (1.20) используется свойство четности автокорреляционной функции.

Уравнение (1.19) интересно тем, что автокорреляционная функция выходного сигнала определяется через импульсную реакцию и автокорреляционную функцию входного сигнала, без знания самого выходного сигнала.

Существует еще одно важное соотношение, используемое при обработке случайных процессов. Оно включает в себя взаимокорреляционную функцию  $R_{xy}(\tau)$  входа и выхода. Согласно определению

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) y(t + \tau) dt.$$

Поскольку

$$y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) x(t + \tau - \eta) d\eta,$$

после изменения порядка интегрирования имеем:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) \left[ \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) x(t + \tau - \eta) dt \right] d\eta.$$

Здесь величина в квадратных скобках — автокорреляционная функция входного сигнала  $R_{xx}(\tau - \eta)$ . Таким образом,

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) R_{xx}(\tau - \eta) d\eta. \quad (1.21)$$

Из выражения (1.21) видно, что взаимно-корреляционная функция входного и выходного сигналов есть результат свертки импульсной реакции и автокорреляционной функции входного сигнала. Другими словами, при возбуждении линейной системы сигналом, представленным функцией  $R_{xx}(\tau)$ , на ее выходе получаем отклик  $R_{xy}(\tau)$ .

Автокорреляционная функция и соответствующий ей спектр мощности образуют пару преобразований Фурье. Например, для выходного сигнала

$$\Phi_{yy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.22)$$

После подстановки вместо  $R_{yy}$  ее значения из уравнения (1.17), включения сомножителей  $e^{\pm j\omega\lambda}$  и  $e^{\pm j\omega\eta}$ , а также разделения переменных получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{yy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) e^{-j\omega\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{j\omega\lambda} \times \\ &\times d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau + \lambda - \eta) e^{-j\omega(\tau + \lambda - \eta)} d\tau. \end{aligned}$$

Согласно уравнению (1.11) первый интеграл представляет собой частотную характеристику  $H(\omega)$  системы. Второй интеграл — комплексно-сопряженная частотная характеристика  $H^*(\omega)$ , третий по определению — спектр мощности  $\Phi_{xx}(\omega)$ . Таким образом,

$$\Phi_{yy}(\omega) = H(\omega) H^*(\omega) \Phi_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 \Phi_{xx}(\omega). \quad (1.23)$$

#### 1.4. ИСКАЖЕНИЕ СИГНАЛА ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ ФИЛЬТР

Возьмем в качестве примера гармонический сигнал простой формы:

$$x(t) = A \sin \Omega t,$$

где  $A$  и  $\Omega$  — постоянные.

Этот сигнал в течение бесконечно-длительного интервала времени (установившийся сигнал) воздействует на вход линейной, инвариантной во времени системы. Его преобразование Фурье

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = (1/j) A\pi [\delta(\omega - \Omega) - \delta(\omega + \Omega)].$$

Согласно уравнению (1.15) отклик системы на приложенный входной сигнал  $x(t)$  имеет вид

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ = \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \Omega) - \delta(\omega + \Omega)] |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega.$$

Из определения единичного импульса следует, что подынтегральное выражение равно нулю везде, кроме  $\omega = \pm\Omega$ . Следовательно,

$$y(t) = \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \Omega) M(\Omega) e^{j\varphi\Omega} - \\ - \delta(\omega + \Omega) M(-\Omega) e^{j\varphi(-\Omega)}] e^{j\omega t} d\omega.$$

Используя свойство симметрии функции отклика, выходной сигнал можно записать в виде

$$y(t) = AM(\Omega) \sin[\Omega t + \varphi(\Omega)]. \quad (1.24)$$

Уравнение (1.24) показывает, что отклик системы на синусоидальный входной сигнал также является синусоидальным сигналом постоянной частоты с амплитудой, равной  $A|H(\omega)|$ , и фазовым сдвигом  $\varphi(\omega)$ . Как следует из уравнения (1.24) и как можно было интуитивно ожидать, линейная система искажает амплитуду и фазу входного сигнала, причем оба эффекта являются частотно-зависимыми. Частотная характеристика  $H(\omega)$  линейной, инвариантной во времени системы может быть легко определена экспериментально. Для этого будем возбуждать систему входным синусоидальным сигналом с угловой частотой  $\Omega$  и измерять соответствующий выходной сигнал. Отношение  $A|H(\Omega)|/A$  амплитуд выходного и входного сигналов даст амплитудно-частотную характеристику  $|H(\omega)|$  для  $\omega = \Omega$ , а разность фаз выходного и входного сигналов — фазовую характеристику  $\varphi(\omega)$  для той же частоты. Варьируя частоту  $\Omega$  во всем интересующем нас диапазоне частот, можно измерить амплитудно-частотную и фазовую характеристики как функции переменной  $\omega$ . Действительные установившиеся сигналы, безусловно, реализовать не удастся, но практически для всех встречающихся случаев использование обозримо длительных сигналов обеспечивает получение вполне приемлемых результатов.

Соотношение (1.24) может быть легко распространено на любой входной сигнал, который возможно разложить на элементарные синусоидальные составляющие, т. е. на любой сигнал, для которого существует преобразование Фурье. Модифицируя каждую составляющую сигнала в соответствии с (1.24) и суммируя полученные результаты, на основе свойства аддитивности линейных систем получим выходной сигнал  $y(t)$ .

Как непосредственно следует из уравнений (1.14), (1.15) и (1.24), при прохождении сигнала через фильтр форма его изменяется под влиянием амплитудно-частотной и фазовой характеристик фильтра. Функции  $M(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  вносят в частотные составляющие входного сигнала соответственно частотно-зависимое ослабление сигнала и фазовый сдвиг. А как результат этого влияния — форма выходного сигнала будет отличаться от формы входного. Очевидно, что фазовые сдвиги не способствуют подавлению нежелательных частотных составляющих, поэтому их влияние должно быть сведено к минимуму.

Непосредственное влияние фазовой характеристики выражается обычно во внесении временного сдвига между входным и выходным сигналами. Более того, в различные частотные составляющие будут внесены разные временные задержки, и эти составляющие окажутся сдвинуты относительно друг друга в выходном сигнале системы. Другими словами, на выходе фильтра появляются частотно-зависимые временные сдвиги. Естественно, что данное обстоятельство является серьезным препятствием для решения многих задач сейсмологии. При анализе сейсмограмм с записью слабых сейсмических сигналов нас будет интересовать увеличение отношения сигнал/шум, но не за счет нарушения времени вступления изучаемых сигналов.

Таким образом, перед нами стоит задача выявления условий неискажающей передачи сигналов. Фильтр считается неискажающим, если форма его отклика на произвольный входной сигнал совпадает с формой входного сигнала. Вначале рассмотрим наиболее простой случай, когда выходной сигнал является копией входного сигнала, отличающейся только постоянным коэффициентом усиления  $M$ . Тогда

$$y(t) = Mx(t). \quad (1.25)$$

Согласно уравнению (1.15) это условие справедливо только в том случае, когда  $H(\omega) = M = \text{const}$ , а  $\varphi(\omega) = 0$  (нуль-фазовая характеристика). Условие (1.25) также означает, что усиление постоянно и независимо от частоты, а фазовый сдвиг равен нулю во всем частотном диапазоне. При этом характеристика  $H(\omega)$  должна быть вещественной и постоянной для всех частот. Следовательно, необходимо, чтобы соответствующая импульсная реакция фильтра, которая предполагается вещественной, была четной функцией времени. Однако поскольку каузальность и четность импульсной реакции, т. е. физическая осуществимость фильтра и равенство нулю фазовой характеристики, являются противоречивыми требованиями, не может быть и каузальной системы, которая бы абсолютно удовлетворяла условию (1.25).

Рассмотрим теперь второй случай, когда выходной сигнал является сдвинутой по времени копией входного сигнала:

$$y(t) = Mx(t - t_1). \quad (1.26)$$

Постоянная временная задержка  $t_1$  фильтра вносит временной сдвиг между входным и выходным сигналами. При этом данный сдвиг должен оставаться постоянным для любой частотной составляющей сигнала, чтобы обеспечить неискаженную передачу формы сигнала, прошедшего через фильтр. Следовательно, этот сдвиг есть не что иное, как задержка выходного сигнала по времени на постоянную величину  $t_1$ . Относительный временной сдвиг может быть легко вычислен, например, путем нахождения функции взаимной корреляции между входным и выходным сигналами. Положение максимума функции взаимной корреляции покажет величину временного сдвига  $t_1$ .

В соответствии с выражением (1.14) имеем:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Mx(t-t_1)e^{-j\omega t} dt.$$

После замены переменных  $\tau = t - t_1$  получим:

$$Y(\omega) = M \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp[-j\omega(\tau + t_1)] d\tau = M \exp(-j\omega t_1) X(\omega).$$

Из этого уравнения следует, что частотная характеристика в данном случае имеет вид

$$H(\omega) = M \exp(-j\omega t_1).$$

Полученный результат непосредственно вытекает из хорошо известной теоремы запаздывания. Вообще для неискажающей передачи сигнала необходимо, чтобы усиление было постоянным и частотно-независимым, а фазовая характеристика — линейной функцией частоты. Если  $|H(\omega)|$  не является постоянной величиной, передача сигналов будет амплитудно-искажающей и, если  $\varphi(\omega)$  — нелинейная функция частоты, передача будет фазово-искажающей. Амплитудные и фазовые искажения сейсмического импульса при прохождении его через заданную фильтрующую систему продемонстрировал М. К. Смит (1958). С. Н. Доменико (1965) приводит пример фазово-неискажающей фильтрации, реализуемой фильтром на магнитных линиях задержки.

Приняв условие неискажающей передачи в уравнении (1.12), для соответствующей импульсной характеристики системы будем иметь

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M \exp[j\omega(t-t_1)] d\omega.$$

Используя формулу Эйлера и отбросив мнимую часть, получаем:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M \cos \omega(t-t_1) d\omega.$$

Из полученного выражения следует, что функция  $h(t)$  является симметричной относительно  $t=t_1$ . Другими словами, импульсная реакция фазово-неискажающего фильтра есть симметричная функция времени. Функция  $h(t)$  сдвинута<sup>1</sup> по оси времени на величину  $t_1$ , определяющую наклон линейной фазовой характеристики. Поскольку постоянная задержка по времени вносится во все частотные составляющие сигнала, она определяет относительный временной сдвиг между выходным и входным сигналами фильтра.

## 1.5. АНАЛОГО-ЦИФРОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Напряжение на выходе сейсмоприемника является непрерывной функцией времени и носит аналоговый характер. Это также справедливо и для других величин, измеряемых при геофизических исследованиях. Отсюда становится очевидным, что перед обработкой на цифровых вычислительных машинах геофизические данные должны быть преобразованы в цифровую форму. Это справедливо для любых цифровых вычислительных машин, поскольку при обработке на ЭВМ не в реальном масштабе времени входные данные хранятся в форме конечной последовательности чисел. Процесс преобразования аналогового сигнала в последовательность числовых значений называется оцифровкой (digitization). Он состоит из двух самостоятельных операций: дискретизации и квантования. При дискретизации выбираются моменты времени, в которых должны браться отсчеты сигнала, а квантованием осуществляется преобразование амплитуд непрерывного сигнала, измеренных в точках отсчета, в последовательность чисел. В рамках настоящей книги, если это не будет специально оговорено, дискретизация ведется через эквидистантные интервалы времени, называемые интервалом, или шагом, дискретизации  $\Delta t$ . Правда, при некоторых геофизических наблюдениях в зависимости от характера наблюдаемых данных на первом этапе цифровое преобразование проводится по неравномерной сетке, но затем эти данные интерполируются в эквидистантные точки [см., например, Naidu, 1968]. Будем считать, что погрешности квантования достаточно малы и ими можно пренебречь. Эффекты, создаваемые погрешностями преобразования в цифровую форму геофизических данных, описаны, например, В. А. Аном (1965) и Г. Манзони (1967).

Наиболее простым способом преобразования аналог — код является ручная оцифровка записей сигналов, сделанных в крупном масштабе, хотя сегодня существуют и широко используются автоматические и полуавтоматические преобразователи [см., например, Белотелов, Рыкунов, 1963; Wickens and Kollar, 1967]; а также цифровые станции [см. De Bremaecker et al., 1962, 1963; Haubrich and Iyer, 1962; Miller, 1963; Phinney and Smith, 1963; Smith, 1965;

<sup>1</sup> Относительно положения, соответствующего нуль-фазовой характеристике  $\varphi(\omega) = 0$ . (Прим. перев.).

Burke et al., 1970 Allsopp et al., 1972]. Принципы преобразования аналоговых электрических сигналов (напряжения) в цифровую форму рассмотрены М. Б. Добриным и С. Х. Уордом (1962).

Теоретически преобразование аналог — код может выполняться с достаточно высокой плотностью отсчетов, гарантирующей достижение хорошего подобия между цифровым сигналом и его аналоговым эквивалентом. Однако, с одной стороны, отсчеты сигналов в близко расположенных точках являются сильно коррелированными

и несут избыточную информацию, что неоправданно увеличивает общий объем данных, затрудняет и удорожает вычисления. С другой стороны, взятие отсчетов через большие интервалы времени может привести к искажениям как низко-, так и высокочастотных составляющих в исходном сигнале. Очевидно, выбор интервала  $\Delta t$  должен быть разумным компромиссом



Рис. 1.2. Преобразование непрерывного сигнала в дискретный.

а — схема действия дискретизатора; б — непрерывный входной сигнал  $x(t)$ ; идеальная функция дискретизации  $\delta_{\Delta t}(t)$  и сигнал  $x_s(t)$  на выходе дискретизатора

между двумя противоречащими друг другу требованиями. Опыт показывает, что хорошие результаты получаются при выборе  $\Delta t$  в пределах от  $1/10$  до  $1/5$  периода спектральных составляющих, представляющих интерес [см. также Melton, 1967].

Необходимо подчеркнуть, что подобие между аналоговой и цифровой формами представления сигнала может исчезнуть при трансформации сигналов в частотную область. Это остается справедливым, даже если их сходство во временной области было почти совершенным. Кажущееся несоответствие в частотной области должно правильно оцениваться в каждом конкретном случае проектирования фильтров. В дальнейшем эта проблема будет рассмотрена более подробно.

Поскольку техническая реализация аналого-цифрового преобразователя не имеет прямого отношения к теме настоящей монографии, ограничимся рассмотрением идеального устройства дискретизации (рис. 1.2), имеющего следующие характеристики:

- 1) устройство работает в режиме мгновенного открытия и закрытия ключа;
- 2) устройство периодически осуществляет отсчет сигналов с интервалом дискретизации, равным  $\Delta t$ ;
- 3) длительность импульса, получаемая в замкнутом положении ключа, существенно меньше интервала дискретизации.

Конечно, устройство дискретизации выполняет только первую операцию цифрового преобразования, т. е. дискретизацию. Квантование по уровню выполняется дополнительным цифровым измери-

тельным устройством (устройством квантования, не показанным на рис. 1.2, а), например цифровым вольтметром.

Обозначим входной аналоговый сигнал  $x(t)$ , а сигнал на выходе устройства дискретизации  $x_s(t)$ . Пусть  $\delta_{\Delta t}$  — идеальная функция дискретизации, представляющая собой бесконечную последовательность эквидистантных единичных импульсов

$$\delta_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t). \quad (1.27)$$

Здесь  $\Delta t = \text{const}$  — интервал следования импульсов. Сигнал на выходе устройства дискретизации

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t) \delta_{\Delta t}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t), \end{aligned} \quad (1.28)$$

где  $x(n\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - n\Delta t) dt$  — амплитуда  $n$ -го отсчета сигнала.

Уравнение (1.28) показывает, что функцию  $x_s(t)$ , получаемую в результате перемножения функции дискретизации с аналоговым входным сигналом, можно представить как результат амплитудно-импульсной модуляции (см. рис. 1.2). По определению [см. выражение (1.27)]  $\delta_{\Delta t}(t)$  является периодической функцией с периодом  $\Delta t$ . Следовательно, ее можно представить в форме ряда Фурье

$$\delta_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_s t). \quad (1.29)$$

Здесь  $\omega_s$  — угловая частота дискретизации (в рад/с)

$$\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/\Delta t;$$

$c_n$  — коэффициенты ряда Фурье

$$c_n = (1/\Delta t) \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \delta_{\Delta t}(t) \exp(-jn\omega_s t) dt = 1/\Delta t.$$

Следует заметить, что в интервале от  $-\Delta t/2$  до  $\Delta t/2$  функция  $\delta_{\Delta t}(t)$  имеет ненулевое значение только при  $t=0$ , а сам импульс характеризуется единичной площадью. Подставляя  $c_n$  в уравнение (1.29), получаем формулу для идеальной функции дискретизации:

$$\delta_{\Delta t}(t) = (1/\Delta t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(jn\omega_s t).$$

Соотношение вход — выход для идеального устройства дискретизации, задаваемое уравнением (1.28), теперь может быть записано в виде

$$x_s(t) = (1/\Delta t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \exp(jn\omega_s t). \quad (1.30)$$

Применяя теорему запаздывания в частотной области, получаем пару преобразований Фурье:

$$x(t) \exp(j\omega_s t) \leftarrow \rightarrow X(\omega - \omega_s).$$

Преобразование Фурье уравнения (1.30) дает

$$X_s(\omega) = (1/\Delta t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s). \quad (1.31)$$

Здесь  $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$  — преобразование Фурье сигнала на выходе устройства дискретизации. Уравнение (1.31) отображает фундаментальную особенность дискретизированных сигналов: в

то время как спектр аналогового сигнала на входе устройства дискретизации — непериодическая функция, спектр соответствующего дискретного сигнала на выходе устройства дискретизации является периодической функцией частоты с периодом, равным  $\omega_s$

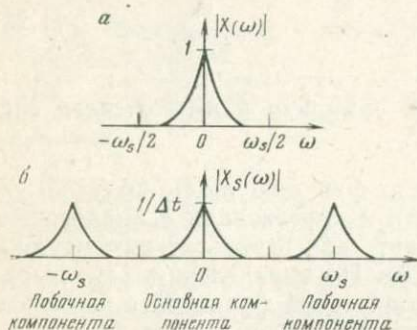


Рис. 1.3. Амплитудно-частотные спектры:

*a* — непрерывного сигнала, *б* — сигнала, дискретизированного с шагом  $\Delta t$

периодическим частотным спектром. (Вспомним, что периодические временные функции имеют дискретные частотные спектры). Полагая спектр сигнала на входе устройства дискретизации известным, спектр выходного сигнала можно легко найти из уравнения (1.32). На рис. 1.3, *б* показан пример спектра выходного сигнала. Он состоит из основной и побочных компонент. Форма основной компоненты не отличается от формы спектра входного сигнала (см. рис. 1.3, *a*) с учетом нормирующего множителя, в данном случае равного  $1/\Delta t$ ; побочные же компоненты идентичны основной, но смещены относительно нее на величину  $\pm n\omega_s$ .

Предположим, что входной сигнал устройства дискретизации существует в ограниченном частотном диапазоне, т. е. его спектр отличен от нуля только в пределах некоторого конечного диапазона частот, например от  $-\omega_c$  до  $\omega_c$ , или  $|X(\omega)| = 0$  для  $|\omega| > \omega_c$ . Далее будет показано, что имеется возможность восстановить входной сигнал по спектру сигнала на выходе устройства дискретизации

$$X_s(\omega) = X_s(\omega + n\omega_s), \quad (1.32)$$

где  $n$  — постоянное число. Другими словами, дискретные функции времени, получаемые в результате периодической дискретизации сигнала, обладают

при условии, что  $\omega_s/2 > \omega_c$ . Другими словами, при выполнении этого условия дискретный сигнал эквивалентен его аналоговой форме в том смысле, что в процессе дискретизации не потеряно какой-либо информации, содержащейся в исходном сигнале. Величина  $\omega_s/2 = \pi/\Delta t$  (в рад/с) называется угловой частотой наложения или угловой частотой Найквиста.

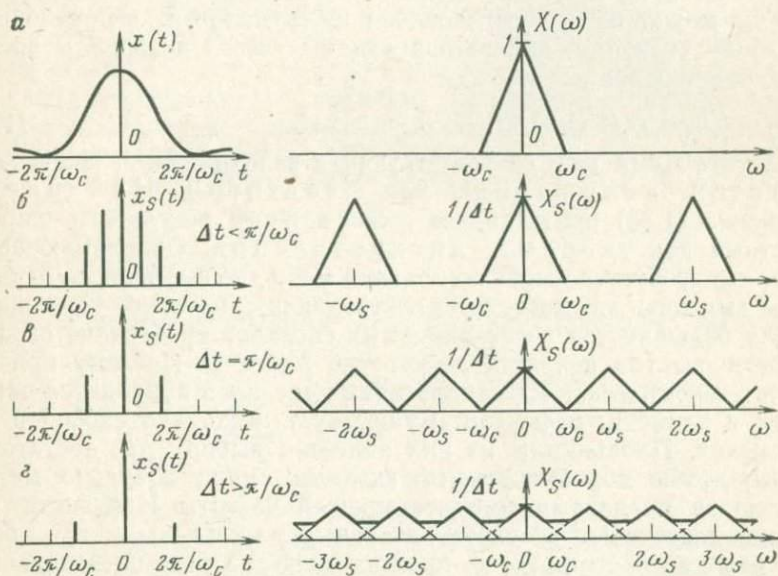


Рис. 1.4. Влияние величины шага дискретизации на форму спектра дискретного сигнала.

Слева — сигнал, справа — его спектр; а — непрерывный сигнал; б — в — дискретный сигнал,  $\Delta t < \pi/\omega_c$  (б),  $\Delta t = \pi/\omega_c$  (в),  $\Delta t > \pi/\omega_c$  (в)

Влияние величины интервала  $\Delta t$  на форму спектра  $X_s(\omega)$  может быть показано с помощью простого примера (рис. 1.4). Предположим, что некоторая непрерывная, вещественная и четная функция  $x(t)$  имеет ограниченный спектр  $X(\omega)$  (см. рис. 1.4, а). Амплитуда спектра  $X(\omega)$  отличается от нуля только в диапазоне  $-\omega_c, \omega_c$ . Четность функции  $x(t)$  введена здесь с целью получения вещественного спектра  $X(\omega)$ , что упрощает его графическое представление. Пусть функция  $x(t)$  дискретизирована с частотой  $\omega_s = 2\pi/\Delta t$  при условии, что  $\omega_s/2 > \omega_c$  (см. рис. 1.4, б). Тогда с учетом нормирующего множителя, равного  $1/\Delta t$ , основная и побочные компоненты являются точными копиями спектра входного сигнала и полностью разрешены между собой. Следовательно, имеется возможность полного восстановления входного сигнала по спектру сигнала на выходе устройства дискретизации. С возрастанием периода дискретизации  $\Delta t$  до величины, при которой  $\omega_s/2 = \omega_c$  (см. рис. 1.4, в), картина не изменится. При дальнейшем увеличении  $\Delta t$

начнется взаимное наложение основной и побочных компонент спектра (эляйсинг-эффект, см. рис. 1.4,  $z$ ). Восстановление входного сигнала по выходному вследствие искажения его спектра становится невозможным. Обобщая сказанное, можно констатировать, что функция с ограниченным спектром полностью определена ее отсчетами, взятыми через равные интервалы времени, которые не превышают  $\pi/\omega_c$ . Другими словами, самая высокая частота, которая еще может быть восстановлена из сигналов с ограниченным частотным спектром, дискретизированных через интервалы времени  $\Delta t$ , будет равна

$$f_N = t_s/2 = \omega_s/4\pi = 1/2\Delta t. \quad (1.33)$$

Частота  $f_N$  (в Гц), соответствующая величине  $\omega_s/2$ , называется частотой наложения или частотой Найквиста. Уравнение (1.33) представляет собой важный результат, широко известный как теорема дискретизации. Она заключается в том, что требуется иметь по крайней мере две выборки на период, чтобы выделить эту частотную составляющую в исходном сигнале<sup>1</sup>.

Для большинства регистрируемых сигналов требование ограниченности спектра является достаточно жестким. Поэтому при обработке сейсмических или аналоговых сигналов приходится встречаться с эляйсинг-эффектом. Существует несколько способов его устранения. Простейшим из них является выбор  $\Delta t$  достаточно малым, чтобы обрабатываемые сигналы имели довольно малую энергию за пределами соответствующей частоты Найквиста  $f_N$ . Вообще достаточно удовлетворительные результаты могут быть получены для частоты  $f_N$ , по крайней мере в 2 раза превышающей наибольшую из прогнозируемых частот. Однако при малом  $\Delta t$  возрастает объем данных и повышается стоимость вычислений. Другой возможностью устранения эляйсинг-эффекта является предварительная фильтрация аналоговых сигналов с помощью антиэляйсинговых фильтров [Donnell, 1967]. Идеальный низкочастотный фильтр (см. главу 3), включенный последовательно с устройством дискретизации, позволяет еще до момента дискретизации сигнала удалить из него все частотные составляющие, превышающие предписанный диапазон. При этом предполагается, что подавленные частотные составляющие несут лишь второстепенную информацию. Предварительно фильтрованные сигналы теперь могут рассматриваться как сигналы с ограниченным спектром. Альтернативным способом устранения нежелательного эляйсинг-эффекта является дискретизация сигналов с переменным по вре-

<sup>1</sup> Имеется в виду, очевидно, теорема Котельникова. Следует помнить, что при двух выборках на период частотную составляющую можно передать только при строго определенном фазовом сдвиге этой составляющей относительно функции дискретизации  $\sigma_{\Delta t}(t)$ , а именно: экстремумы передаваемой частотной составляющей должны располагаться против ненулевых значений функции  $\sigma_{\Delta t}(t)$ . Так как для импульсных сигналов гарантировать такой сдвиг в общем случае невозможно, практически считается достаточным не менее четырех-пяти точек на период. (Прим. перев.).

мени интервалом [см. также Bath, 1974, с. 151]. Такой режим не соответствует приведенным выше характеристикам устройства дискретизации, поскольку требует аperiodической дискретизации, поэтому в дальнейшем он не будет рассматриваться.

### 1.6. z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Выходной сигнал устройства дискретизации можно рассматривать как последовательность чисел  $x_n = x(n\Delta t)$ , где  $n$  — целое число. Числа  $x_n$  генерируются при дискретизации непрерывного входного сигнала в моменты времени, разделенные интервалом  $\Delta t$ . Такое представление удобно использовать относительно сигналов, подлежащих обработке на ЭВМ. Выполняя преобразование Фурье обеих частей уравнения (1.28), получаем:

$$X_S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n \Delta t}.$$

Вводя новую переменную  $z = e^{j\omega \Delta t}$ , представим это выражение в форме:

$$X(z) = Z\{x_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}. \quad (1.34)$$

В то время как  $X_S(\omega)$  — функция вещественной угловой частоты,  $X(z)$  есть функция комплексной переменной  $z = e^{j\omega \Delta t} = \cos \omega \Delta t + j \sin \omega \Delta t$ . Для любой угловой частоты  $\omega$  абсолютная величина  $|z| = 1$ . Уравнение (1.34) определяет  $z$ -преобразование при условии, что независимая переменная  $z$  лежит на единичной окружности. В случае изменения  $\omega$  от  $-\infty$  до  $\infty$  комплексная переменная  $z$  вращается по единичной окружности в  $z$ -плоскости. При любом изменении  $\omega$  на величину  $\pm 2\pi/\Delta t$  в  $z$ -плоскости происходит циклическое повторение, которое должно рассматриваться как прямое следствие процесса дискретизации.

Предположим, например, что  $\omega$  возрастает скачками, равными  $\pi/2\Delta t$  в интервале от 0 до  $2\pi/\Delta t$ . Тогда соответствующие значения  $z$  легко вычисляются из соотношения  $z = e^{j\omega \Delta t}$

$$\begin{array}{ccccccc} \omega & 0 & \pi/2\Delta t & \pi/\Delta t & 3\pi/2\Delta t & 2\pi/\Delta t & \\ z & 1 & j & -1 & -j & 1 & \end{array}$$

При дальнейшем увеличении  $\omega$  от  $\omega_s$  до  $2\omega_s$  значения  $z$  будут повторяться, и этот процесс будет воспроизводиться периодически в случае любого увеличения или уменьшения частоты на величину  $\omega_s$ .

Как следует из уравнения (1.34), результат  $z$ -преобразования последовательности отсчетов сигнала  $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$  представляет собой многочлен по степеням  $z$  с коэффициентами, равными соответствующим значениям дискретных отсчетов сигнала. Таким образом, в соответствии с (1.34)

$$X(z) = \dots + x_{-2}z^2 + x_{-1}z + x_0 + x_1z^{-1} + \\ + x_2z^{-2} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}. \quad (1.35)$$

Умножение  $z$ -трансформанты на множитель  $z^{-1}$  физически означает не что иное, как сдвиг членов последовательности на один интервал дискретизации в направлении возрастания времени. Иногда многочлен (1.35) может быть записан в конечной форме, а для некоторых наиболее распространенных функций  $z$ -трансформанта может быть получена аналитически.

Ниже приводятся несколько таких примеров. Строчные буквы в них обозначают временные последовательности, а прописные — соответствующие им  $z$ -трансформанты.

**Дельта-функция.** Пусть дискретный эквивалент единичного импульса представляет собой последовательность

$$x = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots),$$

↑

где вертикальная стрелка указывает на начало координат по оси времени, т. е.  $t=0$  [Robinson, 1976, с. 103]. Тогда

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = 1.$$

Между временной последовательностью  $x = (1, 0, 0, \dots)$  и единичным импульсом  $\delta(t)$ , определенными соответственно в области дискретных и аналоговых систем, существует четкая аналогия.

Допустим, что единичный импульс задержан, например, на два интервала дискретизации, т. е.

$$x = (\dots, 0, 0, 0, 1, 0, \dots).$$

↑

$z$ -трансформанта в этом случае становится равной  $X(z) = z^{-2}$ . Единичная функция.

$$x = (\dots, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$$

↑

имеет  $z$ -преобразование

$$X_1(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = (1 - z^{-1})^{-1}, \quad |z^{-1}| < 1.$$

Пусть эта же последовательность сдвинута по времени на два интервала дискретизации, т. е.

$$x = (\dots, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots).$$

↑

Ее  $z$ -преобразование в этом случае

$$X_2(z) = z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = z^2 X_1(z), \quad |z^{-1}| < 1.$$

32 Таблица 2. Преобразование Лапласа, z-преобразование и соответствующие обратные преобразования для некоторых часто встречающихся функций и несколько основных теорем

Описание функции	Функция времени	Преобразование Лапласа	z-преобразование	Временная последовательность
Единичный импульс (дельта-функция)	$\delta(t)$	1	1	$\delta(n\Delta t) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$
Единичная функция	$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$u(n\Delta t) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$
Единичное возрастание	$t$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{-\Delta t z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$n\Delta t$
Единичное ускорение (парабола)	$\frac{1}{2} t^2$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{\Delta t^2 z^{-1} (1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\frac{1}{2} (n\Delta t)^2$
Спадающие экспоненты	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{1}{1-e^{-\alpha\Delta t} z^{-1}}$	$e^{-\alpha n\Delta t}$
	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$\frac{e^{-\alpha\Delta t} z^{-1}}{(1-e^{-\alpha\Delta t} z^{-1})^2}$	$n\Delta t e^{-\alpha n\Delta t}$
	$t^2 e^{-\alpha t}$	$\frac{2}{(p+\alpha)^3}$	$\frac{e^{-\alpha\Delta t} z^{-1} (1+e^{-\alpha\Delta t} z^{-1})}{(1-e^{-\alpha\Delta t} z^{-1})^3}$	$(n\Delta t)^2 e^{-\alpha n\Delta t}$

33

34 Продолжение табл. 2

Описание функции	Функция времени	Преобразование Лапласа	z-преобразование	Временная последовательность
Единичный уровень минус спадающая экспонента	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\frac{(1 - e^{-\alpha\Delta t}) z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-\alpha\Delta t} z^{-1})}$	$1 - e^{-\alpha n\Delta t}$
Синусоида	$\sin \Omega t$	$\frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2}$	$\frac{z^{-1} \sin \Omega \Delta t}{1 - z^{-1} 2 \cos \Omega \Delta t + z^{-2}}$	$\sin \Omega n\Delta t$
Косинусоида	$\cos \Omega t$	$\frac{p}{p^2 + \Omega^2}$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \Omega \Delta t}{1 - z^{-1} 2 \cos \Omega \Delta t + z^{-2}}$	$\cos \Omega n\Delta t$
Затухающая синусоида	$e^{-\alpha t} \sin \Omega t$	$\frac{\Omega}{(p+\alpha)^2 + \Omega^2}$	$\frac{z^{-1} e^{-\alpha\Delta t} \sin \Omega \Delta t}{1 - z^{-1} 2 e^{-\alpha\Delta t} \cos \Omega \Delta t + z^{-2} e^{-2\alpha\Delta t}}$	$e^{-\alpha n\Delta t} \sin \Omega n\Delta t$
Затухающая косинусоида	$e^{-\alpha t} \cos \Omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \Omega^2}$	$\frac{1 - z^{-1} e^{-\alpha\Delta t} \cos \Omega \Delta t}{1 - z^{-1} 2 e^{-\alpha\Delta t} \cos \Omega \Delta t + z^{-2} e^{-2\alpha\Delta t}}$	$e^{-\alpha n\Delta t} \cos \Omega n\Delta t$
Теорема линейности	$x_1(t) \pm x_2(t)$	$X_1(p) \pm X_2(p)$	$X_1(z) \pm X_2(z)$	$x_1(n\Delta t) \pm x_2(n\Delta t)$
Теорема сдвига	$x(t - k\Delta t)$	$e^{-k\Delta p} X(p)$	$z^{-k} X(z)$	$x(n\Delta t - k\Delta t)$
Теорема масштабирования	$e^{\pm \alpha t} x(t)$	$X(p \pm \alpha)$	$X(e^{\pm \alpha\Delta t} z)$	$e^{\pm \alpha n\Delta t} x(n\Delta t)$

Экспоненциальная функция. Для экспоненциальной функции, представленной отсчетами

$$x_n = Ae^{-\alpha n \Delta t}, \quad n \geq 0,$$

выбранными с шагом  $\Delta t$ ,  $z$ -трансформанта

$$\begin{aligned} X(z) &= A[1 + e^{-\alpha \Delta t} z^{-1} + e^{-2\alpha \Delta t} z^{-2} + \dots] = \\ &= \frac{A}{(1 - e^{-\alpha \Delta t} z^{-1})}, \quad |e^{-\alpha \Delta t} z^{-1}| < 1. \end{aligned}$$

В табл. 2 приведены некоторые примеры, иллюстрирующие преобразование Лапласа,  $z$ -преобразование и их обратные преобразования для некоторых часто встречающихся функций времени. Более представительные данные можно найти в работе Э. И. Джурри (1958).

Заметим, что наряду с уравнением (1.34) иногда используют другое определение  $z$ -преобразования последовательности  $\{x_n\}$  — определение Лапласа, выражаемое соотношением

$$\tilde{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^n.$$

В дальнейшем, если не будет специально оговорено, в книге будет использоваться первое из них, которое чаще применяется в литературе прикладного характера. Переход от одной формы  $z$ -преобразования к другой выполняется просто заменой  $z$  на  $z^{-1}$ . Это следует иметь в виду при использовании других литературных источников.

В большинстве случаев временная последовательность импульсов задается только для положительных значений  $n$  (см., например, экспоненциальную функцию), и тогда преобразование называется односторонним. В противном случае оно является двусторонним [см., например, уравнение (1.34)].

$z$ -преобразование не ограничивается только единичной окружностью, как в уравнении (1.34), а может быть распространено на всю комплексную плоскость. Имея это в виду, рассмотрим аналоговый каузальный сигнал  $x(t)$ . Его дискретная форма, согласно выражению (1.28),

$$x_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \delta(t - n\Delta t). \quad (1.36)$$

Вместо преобразования Фурье [см. уравнение (1.34)] применим к обеим частям уравнения (1.36) преобразование Лапласа. Тогда

$$X_S(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathcal{L}\{\delta(t - n\Delta t)\}.$$

Учитывая, что  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ , и применяя теорему запаздывания  $\mathcal{L}\{x(t - n\Delta t)\} = e^{-p\Delta t} \mathcal{L}\{x(t)\}$ ,

находим:

$$X_S(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-pn\Delta t}.$$

Здесь  $p = \sigma + j\omega$  — комплексная переменная. Используя подстановку

$$z = e^{p\Delta t} = e^{\delta\Delta t} e^{j\omega\Delta t}, \quad (1.37)$$

получаем:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}. \quad (1.38)$$

Операция (1.38) широко известна как  $z$ -преобразование, которое определено в области комплексной плоскости, где ряд (1.38) сходится. Сходимость ряда для одного какого-либо значения является достаточным условием того, что ряд  $\{x_n\}$  может быть подвергнут  $z$ -преобразованию, т. е. является  $z$ -трансформируемым.

По форме выражение (1.38) совпадает с соотношением (1.34) за исключением нижнего предела. Есть, однако, неявное, но более существенное различие между ними. Оно заключается в том, что в случае (1.38) модуль  $e^{\sigma\Delta t}$  может иметь любую величину, а следовательно, комплексная переменная  $z$  определена на всей комплексной площади, тогда как в случае (1.34) переменная  $z$  определена только на единичной окружности  $|z|=1$ . В этом смысле преобразование (1.34) может рассматриваться как особый случай более общего  $z$ -преобразования, определенного уравнением (1.38).

Как следует из уравнения (1.38),  $z$ -преобразование функции  $x(t)$  зависит от значений функции только в точках отсчета. Добавление любой другой функции времени, принимающей нулевые значения в точках отсчета и произвольные величины в промежутках между ними, не изменяет полученную ранее  $z$ -трансформанту. Следовательно, существует бесконечное множество функций с идентичными  $z$ -трансформантами, т. е.  $z$ -преобразование не учитывает вариации аналоговой функции между точками отсчета.

Обратное  $z$ -преобразование может быть записано через контурный интеграл

$$x_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C X(z) z^{n-1} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где контур интегрирования  $C$  включает все точки  $x(z)$ , а интегрирование ведется против часовой стрелки. Контур  $C$  должен выбираться таким образом, чтобы он полностью лежал внутри области сходимости ряда (1.38) и включал в себя начало координат  $z=0$ . Величина контурного интеграла определена особыми точками подынтегрального выражения [см. Bath, 1968]. Применяя теорему Коши, получаем:

$$x_n = \sum \text{res} [X(z) z^{n-1}], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где суммируются все особые точки, заключенные в контуре  $C$ .

При проектировании эффективных цифровых фильтров зачастую требуется использовать некаузальные временные последовательности  $x(n\Delta t)$ , имеющие ненулевые значения как для положительных  $n$ , так и для отрицательных. Напомним, что выражение (1.38) описывало каузальные временные последовательности.  $z$ -преобразование некаузальных функций дает двустороннюю  $z$ -трансформанту, формально идентичную уравнению (1.34),

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

Здесь предполагается, что бесконечный ряд  $\{x_n\}$  имеет радиус сходимости  $R_1 < |z| < R_2$ . Обратное преобразование функции  $X(z)$  выполняется таким же образом, как и в случае одностороннего  $z$ -преобразования. При удовлетворении условий сходимости интегрирование может проводиться вдоль единичной окружности  $\Gamma$ . Как и в предыдущем случае, запишем:

$$x_n = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz, \quad -\infty < n < \infty.$$

Поскольку особые точки  $\dot{X}(z)$  могут лежать как внутри, так и вне контура интегрирования, теорема Коши обеспечивает получение двух возможностей при нахождении  $x_n$ , а именно:

$$x_n = \Sigma \operatorname{res} [X(z) z^{n-1}],$$

т. е. все полюсы внутри единичной окружности;

$$x_n = -\Sigma \operatorname{res} [X(z) z^{n-1}],$$

т. е. все полюсы вне единичной окружности. Оба варианта справедливы для всех  $n$ .

Более подробные сведения по рассматриваемому вопросу можно найти в работе Э. И. Джури (1964). Другие способы нахождения ряда  $\{x_n\}$  по известному  $x(z)$  будут рассмотрены в последующих разделах книги.

Подстановку  $z = e^{p\Delta t}$  можно рассматривать как функцию отображения, используемую для переноса области  $p$ -плоскости в область  $z$ -плоскости. Для точек на мнимой оси  $p$ -плоскости  $\sigma=0$  и абсолютное значение  $z=1$ . При этом предполагается, как отмечалось ранее, что часть мнимой оси  $p$ -плоскости, лежащей между  $\omega=0$  и  $\omega=2\pi/\Delta t = \omega_s$ , отображается на единичную окружность  $z$ -плоскости. Остальные части мнимой оси просто накладываются друг на друга на единичной окружности. Как следует из выражения (1.37), любая линия  $\sigma = \text{const}$  в  $p$ -плоскости отображается в  $z$ -плоскости как окружность с центром  $z=0$  и радиусом  $e^{\sigma\Delta t}$ . Для любой точки в левой  $p$ -полуплоскости ( $\sigma < 0$ ) справедливы соотношения  $e^{\sigma\Delta t} < 1$  и  $|z| < 1$ . Следовательно, основная полоса  $p$ -плоскости  $-\infty < \sigma < 0$ ,  $-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$  отобразится в область внутри

единичной окружности  $z$ -плоскости, образуя один лист поверхности Римана [см. Bath, 1968]. Побочные полосы  $-\infty < \sigma < 0$ ,  $3\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$  и т. д. в  $p$ -плоскости дают другие листы в  $z$ -плоскости с общей секущей линией на отрицательной части действительной оси, простирающейся от  $z = -1$  до  $z = 0$  (рис. 1.5). Правая половина  $p$ -плоскости ( $\sigma > 0$ ,  $|z| > 1$ ) отображается в область вне единичной окружности  $z$ -плоскости. Прикладная разновидность

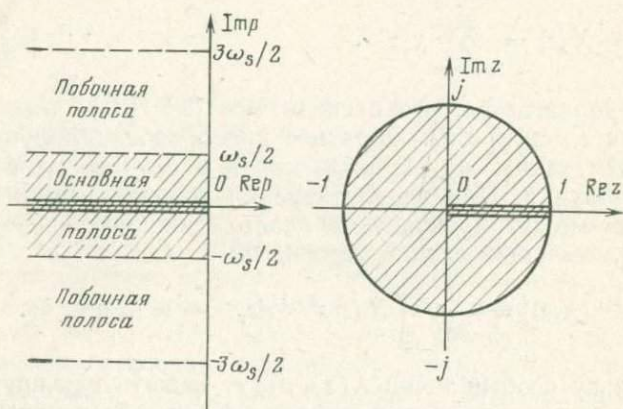


Рис. 1.5. Отображение  $p$ -плоскости в  $z$ -плоскость

определения рассматриваемого общего случая  $z$ -преобразования связана с вариантом Лапласа как  $X(z) = \tilde{X}(z^{-1})$ . Легко убедиться, что область внутри единичной окружности  $z$ -плоскости соответствует области вне единичной окружности в  $z^{-1}$ -плоскости.

Согласно выражению (1.34)  $z$ -преобразование, ограниченное условием — область единичной окружности в  $z$ -плоскости, — есть не что иное, как преобразование Фурье последовательности  $\{x_n\}$ . Полагая  $\sigma = 0$ , т. е.  $|z| = 1$ , и делая обратную замену  $z = e^{j\omega\Delta t}$  в равенстве (1.38), или же просто используя уравнение (1.34), получаем комплексный спектр как функцию вещественной переменной  $\omega$ :

$$X(z) = X(e^{j\omega\Delta t}) = x_0 + x_1 e^{-j\omega\Delta t} + x_2 e^{-2j\omega\Delta t} + \dots \quad (1.39)$$

Это важное свойство  $z$ -представлений может быть использовано, например, для графического представления  $X(e^{j\omega\Delta t})$ . В соответствии с выражением (1.39) для данной частоты  $\omega = \Omega$  комплексный спектр может быть найден как сумма векторного ряда. Подтвердим это простым примером — найдем комплексный спектр  $X(z)$  последовательности  $x = (\dots, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 0, \dots)$  для частот  $\omega$ , равных нулю,  $\pi/2\Delta t$ ,  $2\pi/2\Delta t$  и  $3\pi/2\Delta t$ . [Подобное единичное нарастание исследовалось также Я. Т. Хуанем (1966)]. Из выра-

жения (1.39) следует, что значение спектра для  $\omega=0$  можно найти простым скалярным суммированием

$$X(1) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$

поскольку все экспоненциальные множители  $e^{-j\omega\Delta t}$  в (1.39) становятся вещественными и равными единице. Для более высоких частот имеем:

$$\omega = \pi/2\Delta t, \quad X(e^{j\omega\Delta t}) = 1 + 2e^{-j\pi/2} - 3 + 4e^{-j3\pi/2} = -2 + 2j;$$

$$\omega = \pi/\Delta t, \quad X(e^{j\omega\Delta t}) = 1 + 2e^{-j\pi} + 3 + 4e^{-j\pi} = -2;$$

$$\omega = 3\pi/2\Delta t, \quad X(e^{j\omega\Delta t}) = 1 + 2e^{-j3\pi/2} - 3 + 4e^{-j\pi/2} = -2 - 2j.$$

Значения амплитудно-частотного и фазового спектров для данных частот  $\omega$  будут следующими:

$\omega$	Амплитудно-частотный спектр	Фазовый спектр
0	10	0
$\pi/2\Delta t$	$2\sqrt{2}$	$3\pi/4$
$\pi/\Delta t$	$\sqrt{2}$	$-\pi$
$3\pi/2\Delta t$	$2\sqrt{2}$	$-3\pi/4$

Значения амплитудно-частотного и фазового спектров для частоты  $\omega=2\pi/\Delta t$  будут такими же, как и для частоты  $\omega=0$ , в силу свойства периодичности спектра (напомним, что  $2\pi/\Delta t = \omega_s$ ). При использовании определения Лапласа амплитудно-частотный спектр не изменится, а фазовый изменит знак на обратный.

### 1.7. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВХОДОМ И ВЫХОДОМ В ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ

Цифровой системой будем называть систему, сигналы на входе и выходе которой представлены последовательностями дискретных величин. Из уравнения (1.6) следует, что интеграл свертки описывает соотношение сигналов на входе и выходе для системы с аналоговыми сигналами. Пусть аналоговый сигнал  $x(t)$  вначале был дискретизирован с шагом  $\Delta t$ , а затем подан на вход цифровой системы (рис. 1.6, а). Значения входного сигнала в точках  $n\Delta t$  будут соответственно равны  $x_n = x(n\Delta t)$ , где  $n$  — целое число. Подобно тому, как это делалось при рассмот-



Рис. 1.6. Блок-схемы основных цифровых систем.

а — дискретный вход, непрерывный выход; б — дискретный вход, дискретный выход

рении аналоговых систем, найдем отклик системы на каждый индивидуальный отсчет сигнала отдельно. Полный выходной сигнал при этом будет равен сумме всех откликов на единичные воздействия. Из интеграла свертки следует, что отклик на дискретный отсчет  $x_n$ , попавший на вход системы в момент времени  $t = n\Delta t$ , равен  $\Delta t x_n h(t - n\Delta t)$ , где  $h(t)$  — импульсная реакция системы. Отсчеты

$$x = (\dots, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots)$$

сигнала на входе инициируют следующие индивидуальные отклики:

$$\Delta t x_{-n} h(t + n\Delta t);$$

$$\Delta t x_{-n+1} h(t + n\Delta t - \Delta t);$$

.....

$$\Delta t x_{-1} h(t + \Delta t);$$

$$\Delta t x_0 h(t);$$

$$\Delta t x_1 h(t - \Delta t);$$

.....

$$\Delta t x_{n-1} h(t - n\Delta t + \Delta t);$$

$$\Delta t x_n h(t - n\Delta t);$$

.....

Полный же выходной сигнал

$$y(t) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n h(t - n\Delta t).$$

Пока мы рассматривали интеграл свертки, в котором выходной сигнал является непрерывной функцией времени, несмотря на то, что сигнал на входе — дискретный. Полагая далее, что выходной сигнал подвергается дискретизации синхронно с приходом текущих отсчетов входного сигнала (см. рис. 1.6, б), получим достаточно хорошую аппроксимацию цифровой системы. При этом выходной сигнал в моменты времени  $t = k \Delta t$  может быть записан в виде

$$y_k = y(k\Delta t) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n h(k\Delta t - n\Delta t). \quad (1.40)$$

Далее положим, что шаг дискретизации  $\Delta t$  равен единице (исключения будут специально оговорены). Это позволяет счи-

тать амплитуду сигнала функцией индекса и вместо выражения (1.40) использовать более простую запись

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n h_{k-n}. \quad (1.41)$$

Из уравнения (1.41) становится очевидным, что в силу дискретного характера сигналов соотношение вход — выход для цифровых систем описывается конволюционным суммированием. В уравнении (1.41) на последовательности  $x$  и  $h$  не накладывается особых ограничений. В случае некаузальных систем выходной сигнал  $y_k$  будет зависеть не только от прошлых отсчетов входной последовательности, но и от будущих. Если входной сигнал и/или импульсная реакция системы — установившийся сигнал бесконечной длительности, выходной сигнал будет также представлен последовательностью бесконечной длины.

Рассмотрим другой случай, когда односторонняя входная последовательность и импульсная реакция каузальной системы имеют бесконечную длину:

$$x = ( \dots, 0, 0, x_0, x_1, x_2, \dots );$$
$$h = ( \dots, 0, 0, h_0, h_1, h_2, \dots ),$$

где первые ненулевые дискретные значения соответствуют началу отсчета времени  $t=0$ . Тогда выходная последовательность

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} x_n h_{k-n}. \quad (1.42)$$

Из свойства каузальности и уравнения (1.42) следует, что каждое значение сигнала  $y_k$  зависит только от текущего и прошлых значений входного сигнала. Свойство каузальности также гарантирует не более  $k+1$  слагаемых  $x_n h_{k-n}$  под знаком суммы в уравнении (1.42). Поскольку отклик фильтра имеет бесконечную длину, выходной сигнал также будет представлен бесконечной временной последовательностью.

Импульсные реакции применяемых в геофизической аппаратуре фильтров, как правило, имеют форму затухающего колебания, поэтому могут быть усечены, т. е. могут рассматриваться в пределах лишь конечного временного интервала без существенного снижения точности, получаемой при обработке сигналов. То же можно сказать о многих категориях входных сигналов. Например, колебания почвы, вызванные приходом удаленных сейсмических сигналов достаточной магнитуды, создают резкое увеличение амплитуд сигналов на сейсмограммах с хорошо выраженными вступлениями волн. Эти амплитуды сигналов остаются относительно большими в течение определенного интервала времени, затем экспоненциально затухают, пока полностью не исчезнут в фоне помех. Таким образом, записи землетрясений могут рассматриваться как быстро меняющиеся колебания с отчетливым вступ-

лением и плохо выраженным концом. В то же время существуют сейсмические сигналы бесконечной длины, такие как микросейсм, чей почти стационарный характер не позволяет отметить ни начало, ни конец сигнала. Если сигналы землетрясений и импульсные реакции каузальных устойчивых систем могут рассматриваться как односторонние сигналы, имеющие конечную длину, то микросейсм представляют собой типичные двусторонние сигналы бесконечной длины.

Усеченный на времени  $t = M \Delta t$  односторонний оператор фильтра

$$h = ( \dots, 0, 0, h_0, h_1, \dots, h_{M-1}, h_M, 0, 0, \dots )$$

и входной сигнал, заданный временной последовательностью

$$x = ( \dots, 0, 0, x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N, 0, 0, \dots ),$$

создают выходной сигнал

$$y_k = \sum_{n=0}^N x_n h_{k-n}, \quad 0 \leq k \leq M + N, \quad (1.43)$$

имеющий конечную длину  $M + N - 1$ . Длина выходной последовательности на один временной интервал меньше суммарной длины входной последовательности и оператора фильтра, т. е. отфильтрованный сигнал не может быть короче соответствующего входного сигнала.

Путем  $z$ -преобразования обеих частей уравнения (1.43) находим:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M+N} y_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{M+N} \sum_{n=0}^N x_n h_{k-n} z^{-k}. \quad (1.44)$$

Произведя замену  $k - n = l$ , получим

$$Y(z) = \sum_{l=0}^M \sum_{n=0}^N x_n h_l z^{-(l+n)},$$

а затем

$$Y(z) = \sum_{n=0}^N x_n z^{-n} \sum_{l=0}^M h_l z^{-l}.$$

Это уравнение согласно ряду (1.38) представляет собой произведение  $z$ -трансформант временных последовательностей входного сигнала и отклика системы. Следовательно,  $z$ -преобразование конволюционного суммирования, или  $z$ -преобразование выходной последовательности, имеет вид

$$Y(z) = X(z) H(z), \quad (1.45)$$

где  $X(z)$  — трансформанта входной последовательности;  $H(z)$  — передаточная, или системная, функция, представляющая собой  $z$  — преобразование импульсной реакции фильтра.

Соотношения эти того же характера, что и в случае преобразования Фурье или Лапласа. Комплексная величина  $H(z)$ , определенная на единичной окружности в  $z$ -плоскости, т. е. для  $|z| = |e^{j\omega\Delta t}| = 1$ , определяет частотную характеристику цифровой системы. Уравнения (1.43) и (1.45) описывают соотношение вход — выход цифровой системы соответственно во временном и частотном представлениях. Свертке (1.43) во временной области соответствует перемножение спектров (1.45) в частотной области. Таким образом, получена тесная аналогия между преобразованиями аналоговых и цифровых сигналов. Свертка двух временных последовательностей  $x$  и  $h$  может выполняться несколькими различными способами. Используя сигналы простой формы, рассмотрим следующие варианты процесса свертки: с помощью дискретного интегрирования, путем различных графических способов и алгебраической операции на основе  $z$ -преобразования.

Дискретное интегрирование. Пусть входной сигнал и импульсная реакция системы представлены временными последовательностями

$$x = (1, 2, 3, 4); \quad h = (2, 1).$$

Это — односторонние временные последовательности конечной длины, равной соответственно четырем и двум отсчетам. Выходной сигнал в таком случае имеет длину  $(4+2-1)$  отсчета. Согласно уравнению (1.43) отсчеты выходной последовательности

$$y_0 = x_0 h_0 = 2;$$

$$y_1 = x_0 h_1 + x_1 h_0 = 1 + 4 = 5;$$

$$y_2 = x_1 h_1 + x_2 h_0 = 2 + 6 = 8;$$

$$y_3 = x_2 h_1 + x_3 h_0 = 3 + 8 = 11;$$

$$y_4 = x_3 h_1 = 4.$$

Способ скользящей строки. Вначале перевернем по оси времени функцию  $h$ , затем запишем входную последовательность и перевернутый оператор фильтра  $h$  в две строки в виде

$$\begin{array}{cccc} h_1 & h_0 & \rightarrow & \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3. \end{array}$$

Будем перемещать строку с отсчетами оператора  $h_0$  и  $h_1$  относительно строки с отсчетами входной последовательности до тех пор, пока  $h_0$  не окажется против  $x_0$ . Перемножая эту вертикальную пару чисел, получим  $y_0$ .

Для получения члена  $y_1$  необходимо сместить оператор фильтра  $h$  на один интервал вправо, перемножить образовавшиеся вертикальные пары и сложить полученные произведения. Повторяя эти операции при каждом новом сдвиге строки с отсчетами  $h$ , получаем все остальные члены выходной последовательности.

Очевидно, что свертка коротких сигналов может быть достаточно быстро выполнена даже с помощью настольного калькулятора.

Способ свертки методом скользящей строки аналогичен операции получения функции взаимной корреляции сигналов  $x$  и  $h$ . При вычислении как свертки, так и взаимной корреляции используется сдвиг функций, умножение и суммирование членов временных последовательностей (дискретное интегрирование). Основное различие между указанными операциями заключается в том, что при свертке вначале переворачивают функцию по оси времени, а при взаимной корреляции — нет. Однако, если  $h$  представлена четной дискретной временной функцией, то в переворачивании нет необходимости, и при свертке и взаимной корреляции будет получен одинаковый результат.

**Н а л о ж е н и е ф у н к ц и й.** Запишем входную последовательность и оператор фильтра, а также произведение отсчетов входной последовательности на соответствующие отсчеты оператора в виде

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ h_0 x_0 h_0 & x_1 h_0 & x_2 h_0 & x_3 h_0 \\ h_1 x_0 h_1 & x_1 h_1 & x_2 h_1 & x_3 h_1 \end{array}$$

Суммируя произведение по диагоналям, получаем:

1.  $x_0 h_0 = 2$ ;
2.  $x_0 h_1 + x_1 h_0 = 5$ ;
3.  $x_1 h_1 + x_2 h_0 = 8$ ;
4.  $x_2 h_1 + x_3 h_0 = 11$ ;
5.  $x_3 h_1 = 4$ .

Мы видим, что такая техника тоже позволяет получить искомым результат [Robinson, 1967, с. 114].

**У м н о ж е н и е м н о г о ч л е н о в.** В общем виде  $z$ -трансформанты входного сигнала и импульсной реакции фильтра представляют собой степенные ряды

$$\begin{aligned} X(z) &= x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots \\ H(z) &= h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Подставим эти степенные ряды в уравнение (1.45):

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = (x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots)(h_0 + h_1 z^{-1} + \\ &+ h_2 z^{-2} + \dots) = x_0 h_0 + (x_0 h_1 + x_1 h_0) z^{-1} + \\ &+ (x_0 h_2 + x_1 h_1 + x_2 h_0) z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (1.46)$$

Приравняем коэффициенты слагаемых обеих частей уравнения (1.46) с одинаковыми степенями  $z$ :

$$y_0 = x_0 h_0;$$

$$y_1 = x_0 h_1 + x_1 h_0;$$

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Здесь  $y_0, y_1, \dots$  — отсчеты выходного сигнала. Таким образом, свертка двух сигналов может быть получена посредством умножения степенных рядов. Умножение двух  $z$ -трансформант, как показано в уравнении (1.45), является операцией в частотной области. Переход во временную область осуществляется путем приравнивания коэффициентов обеих частей уравнения (1.46).

В нашем числовом примере  $z$ -трансформанта

$$\begin{aligned} Y(z) &= (1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3})(2 + z^{-1}) = \\ &= 2 + 5z^{-1} + 8z^{-2} + 11z^{-3} + 4z^{-4} \end{aligned}$$

или во временной области.

$$y = (2, 5, 8, 11, 4).$$

## 1.8. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

В начале данной главы уже упоминалось условие стабильности фильтрующих систем: при ограниченном сигнале на входе устойчивая система должна давать ограниченный выходной сигнал. Обычно свойство устойчивости определяют через форму системной функции и/или импульсной реакцией системы. Этот подход является наиболее приемлемым и часто используется при проектировании фильтров. Существует ряд методик, таких как тест Раута, критерий Найквиста и т. п. [см.; например, Del Togo and Parker, 1960], которые были разработаны для выяснения устойчивости линейных аналоговых систем. С некоторыми изменениями какие-то из приемов, первоначально использовавшихся для аналоговых систем, оказались пригодными также для проверки устойчивости цифровых систем. Детально рассмотрим критерий, базирующийся на подобии между аналоговыми и цифровыми системами.

Пусть передаточная функция  $H(p)$  задана в форме отношения двух полиномов по степеням  $p$ . Полную характеристику устойчивости дает расположение полюсов  $p_i = \sigma_i + j\omega_i$  функции  $H(p)$  на комплексной  $p$ -плоскости. В общем случае полюсы  $p_i$  располагаются на действительной оси или являются комплексно-сопряженными парами и могут быть любого порядка. Достаточное условие устойчивости системы формулируется просто: система является устойчивой, если все полюсы  $p_i$  лежат в левой части  $p$ -плоскости с  $\text{Re } p_i = \sigma_i < 0$ . В этом случае выходной сигнал будет содержать только те составляющие, которые убывают по экспоненциальному

закону при возрастании времени, обеспечивая получение ограниченного отклика системы на произвольный ограниченный входной сигнал.

Аналогичный подход может быть использован при изучении устойчивости цифровых систем. Поскольку системная функция  $H(z)$  является функцией комплексной переменной  $z$ , требования устойчивости могут быть заданы положением полюсов в  $z$ -плос-

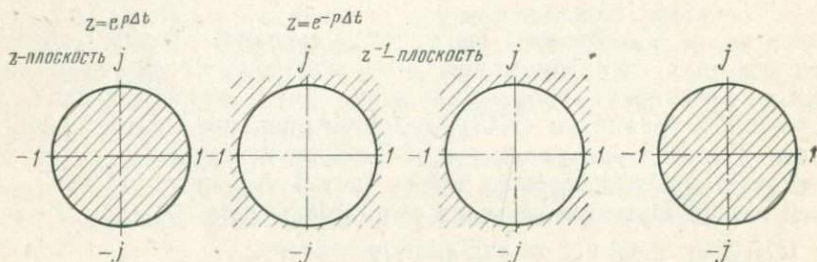


Рис. 1.7. Области устойчивости (заштрихованы) в  $z$ - и  $z^{-1}$ -плоскостях для двух определений переменной  $z$

кости. Нули не влияют на устойчивость системы, поэтому могут лежать где угодно. Используя результаты, полученные при анализе устойчивости аналоговых систем, приходим к выводу о том, что для полюсов в  $z$ -плоскости необходимо искать область, которая соответствует левой половине  $p$ -плоскости. Следует помнить, что для  $z$ -преобразования могут применяться различные определения, и быть особенно осторожным, когда речь идет о сравнении результатов, приводимых в различных источниках. В частности, аргументом функции  $H(z)$  может быть как  $z$ , так и  $z^{-1}$ . Следовательно, устойчивость системы может быть проверена как в  $z$ -плоскости, так и в  $z^{-1}$ -плоскости. Любые упомянутые выше операции, разумеется, должны давать одинаковый результат, поскольку меняется только метод исследования, а не сама система.

В обширной литературе на эту тему [см., например, Bracewell, 1965; Robinson, 1967; Ackroyd, 1973; Kanasewich, 1973] могут встретиться оба определения  $z$ -преобразования (см. табл. 3).

Таблица 3. Сравнение двух определений  $z$ -преобразования

Определение $z$ -преобразования	Переменная	Ссылки на литературу
$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n}$	$z = e^{p\Delta t}$	Bracewell (1965), Ackroyd (1973), Kulhanek
$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$	$z = e^{-p\Delta t}$	Robinson (1976B), Kanasewich (1973)

На рис. 1.5 показано отображение  $p$ -плоскости в  $z$ -плоскости. При  $z = e^{p\Delta t}$  основная и побочные полосы, составляющие левую половину  $p$ -плоскости, отображаются в  $z$ -плоскость в виде бесконечной серии поверхностей, находящихся внутри единичной окружности. Таким образом, «устойчивые полюсы» в  $p$ -плоскости соответствуют полюсам внутри единичной окружности в  $z$ -плоскости. Если полюсы имеют вид

$$z_i = \exp(p_i \Delta t) = \exp(\sigma_i \Delta t) \exp(j\omega_i \Delta t),$$

то условие устойчивости цифровой системы может быть выражено неравенством

$$|z_i| = \exp(\sigma_i \Delta t) < 1 \quad \text{для всех } i.$$

Если же используется комплексная переменная  $z = e^{-p\Delta t}$ , имеет место альтернативное условие устойчивости, а именно:

$$|z_i| = \exp(-\sigma_i \Delta t) > 1 \quad \text{для всех } i.$$

Согласно этому условию все полюсы в  $z$ -плоскости должны располагаться вне единичной окружности, что гарантирует устойчивость системы. При рассмотрении  $z^{-1}$ -плоскости могут также появиться другие возможности. Области устойчивости для всех четырех случаев сопоставлены на рис. 1.7.

## ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

В зависимости от способа получения выходной последовательности цифровые фильтры делятся на нерекурсивные и рекурсивные.

Нерекурсивная, или конволюционная, фильтрация. Выходной сигнал фильтра зависит только от приложенного входного сигнала и характеристик фильтра. Вычисление последовательности выходного сигнала дается алгоритмом конволюционного суммирования (1.43). Системная функция  $H(z)$  нерекурсивного, или конволюционного, фильтра представляет собой многочлен конечной длины относительно  $z^{-1}$ , т. е.  $H(z)$  имеет только нули и не содержит полюсов. Поскольку полином  $H(z)$  представлен конечным числом членов, соответствующая ему импульсная реакция фильтра  $h$  тоже имеет конечную длительность. Нерекурсивные фильтры также называют фильтрами с конечной памятью.

Рекурсивная фильтрация, или фильтрация с обратной связью. Выходной сигнал фильтра зависит как от приложенного входного сигнала и характеристик фильтра, так и от самого выходного сигнала. Системная функция рекурсивного фильтра записывается отношением двух многочленов относительно  $z^{-1}$ . Поскольку частное от деления многочленов в принципе дает степенной ряд бесконечной длины, рекурсивные фильтры имеют импульсную характеристику бесконечной длительности, их иногда называют фильтрами с бесконечной памятью.

Применение рекурсивных фильтров обычно более эффективно, так как на вычисление затрачивается меньше времени по сравнению с конволюционными фильтрами.

Кроме рекурсивной и нерекурсивной фильтрации в настоящей главе рассматриваются разнообразные приемы проектирования цифровых систем и обсуждаются эффекты, вызванные квантованием при цифровой фильтрации.

### 2.1. НЕРЕКУРСИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Как следует из уравнения (1.45), системная функция в общем случае может быть записана в виде отношения двух многочленов относительно  $z$  или  $z^{-1}$

$$H(z) = \frac{g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + g_M z^{-M}}{f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots + f_L z^{-L}} = \frac{\sum_{k=0}^M g_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^L f_k z^{-k}}, \quad (2.1)$$

где значения коэффициентов  $g_k$  и  $f_k$  определяют тип фильтрации — рекурсивный или нерекурсивный. В общем случае числитель и знаменатель выражения (2.1) могут быть представлены многочленами как по положительным степеням  $z$ , так и по отрицательным. Если по крайней мере один из коэффициентов  $g_k \neq 0$  и одновременно равны нулю все коэффициенты  $f_k$ , кроме первого, т. е.  $f_0 \neq 0$ , то выходная последовательность будет зависеть только от текущих и прошлых значений последовательности входного сигнала, и фильтрация является нерекурсивной. В то же время, когда, хотя бы один из коэффициентов  $g_k \neq 0$ ,  $f_0 \neq 0$  и имеется по крайней мере еще один ненулевой коэффициент  $f_k$ , то последовательность выходного сигнала зависит от текущих и прошлых значений входного сигнала, а также от прошлых значений выходного сигнала. В этом случае фильтрация является рекурсивной, т. е. фильтрацией с обратной связью. Синтезировать фильтр с желаемой характеристикой можно, выбирая определенным образом коэффициенты  $g_k$  и  $f_k$ . Рекурсивные фильтры могут быть трансформированы в соответствующие нерекурсивные простым делением многочленов. Обратное же преобразование является довольно трудоемким [см., например, Shanks, 1967], поэтому имеет в основном только теоретическое значение.

Для выполнения конволюционного суммирования при рекурсивной фильтрации необходимо знать импульсную реакцию фильтра. Поскольку задать характеристику желаемого фильтра непосредственно через его импульсные реакции  $h(t)$  или  $h$  бывает затруднительно, обычно вначале задают  $H(p)$  или  $H(z)$  и затем от этих функций переходят к  $h(t)$ . В уравнении (2.1) функция  $H(z)$  представлена в виде отношения двух многочленов, и следовательно, свертка в соответствии с уравнением (1.43) не может быть выполнена. Одним из возможных путей преодоления этого затруднения является предварительное осуществление полиномиального деления, предусмотренного уравнением (2.1). В результате функция  $H(z)$  разлагается в многочлен по степеням  $z^{-1}$

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots$$

Обычно этот степенной ряд имеет бесконечную длину, т. е. бесконечное число ненулевых коэффициентов  $h_0, h_1, h_2, \dots$ ; реализовать такой фильтр на ЭВМ невозможно. Однако для устойчивых фильтров можно найти приемлемое приближение. В самом деле, заменяя в уравнении (1.9) интегрирование суммированием, можно записать условие устойчивости цифрового фильтра в виде неравенства

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n| < \infty, \quad (2.2)$$

которое означает, что члены ряда  $h$  при  $n \rightarrow \pm \infty$  стремятся к нулю. Следовательно, системная функция может быть аппроксими-

рована с любой заранее заданной степенью точности многочленом по степеням  $z^{-1}$  с конечным числом членов

$$H(z) \simeq \tilde{H}(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_N z^{-N}.$$

Коэффициенты многочлена могут быть использованы при конволюционном суммировании (1.43) для получения отфильтрованного сигнала.

Пусть на вход цифрового фильтра, заданного аппроксимирующей функцией  $\tilde{H}(z)$ , подана последовательность  $x$ . Тогда согласно выражению (1.43) выходная последовательность будет аппроксимирована рядом

$$\tilde{y}_n = \sum_{k=0}^N x_k \tilde{h}_{n-k}, \quad (2.3)$$

где  $\tilde{h} = (h_0, h_1, \dots, h_N)$  обозначает усеченную импульсную характеристику фильтра. Очевидно, чем больше длительность  $h$ , тем лучше аппроксимация функций  $H(z)$  и  $y_n$  [см., например, Jones и др., 1955]. Однако увеличение длительности  $h$  снижает эффективность операции свертки (2.3) из-за возрастания времени вычислений каждого члена выходной последовательности  $y_n$ . Как видно, эффективность и точность вычисления входного сигнала отвечают прямо противоположным требованиям, и поэтому необходимо найти подходящий компромисс между ними. Ниже показано несколько вариантов проектирования фильтров с конечной памятью.

В разделе 1.2.2 было показано, что частотная характеристика аналоговых систем  $H(\omega)$  и соответствующая ей импульсная реакция  $h(t)$  образуют пару преобразований Фурье при условии интегрирования в бесконечных пределах [см., например, выражение (1.11)]. Предположим теперь, что время представлено дискретной, а не непрерывной независимой переменной, т. е. некаузальная функция  $h(t)$  определена только в дискретные моменты времени  $t = n \Delta t$ , где  $n$  изменяется во всем диапазоне целых чисел от  $-\infty$  до  $\infty$ . Преобразование Фурье бесконечного ряда  $h$  дает аппроксимацию функции  $H(\omega)$  в частотной области в диапазоне частот  $-\omega_s/2 \leq \omega_s/2$  (см. также рис. 1.4). Вообще функция  $\tilde{H}(\omega)$  будет лучше аппроксимировать  $H(\omega)$  для диапазона частот, наиболее удаленного от частоты Найквиста, т. е. погрешность  $e(\omega) = \tilde{H}(\omega) - H(\omega)$  является функцией частоты. Поскольку на вычислительных машинах не представляется возможным обрабатывать бесконечно длинные последовательности, рассмотрим усеченную импульсную характеристику конечной длины  $2N+1$ , где  $-N \leq n \leq N$ . Если функция  $h(t)$  и интервал дискретизации  $\Delta t$  фиксированы, погрешность аппроксимации будет зависеть от общего числа членов ряда  $h$ , т. е.  $e(\omega, N) = \tilde{H}(\omega) - H(\omega)$ . Дж. Ф. Ормсби (1961) изучал поведение погрешности  $e(\omega, N)$  для специального класса фильтров (см. также главу 3). Полученные им эмпирические зависимости позволили определять минималь-

ное число  $N$  членов ряда, необходимое для получения желаемой точности аппроксимации. Для данного класса цифровых фильтров  $N \approx 80$  обычно обеспечивает аппроксимацию с погрешностью  $e(\omega, N) \leq 1,5\%$ . Особенно большие погрешности<sup>1</sup> приурочены к точкам разрыва  $dH(\omega)/d\omega$ , в связи с чем появляется еще одна возможность снижения погрешностей  $e(\omega, N)$  путем устранения самих точек разрыва. С этой целью Дж. Ф. Ормсби предложил параболическое сглаживание идеальной функции  $H(\omega)$  вблизи точки разрыва, приуроченной к срезу частотной характеристики фильтра. Использование фильтров Мартина — Грэма, рассматриваемых в следующей главе, может дать в этом случае также положительные результаты. Аппроксимация фильтра во временной области была использована М. Галли и П. Ренди (1967) при обработке барометрических данных.

Другой интересный метод проектирования нерекурсивного фильтра с использованием ряда Фурье описан Дж. Ф. Кайзером (1966) и другими авторами. Пусть передаточная функция  $H(\omega) = F\{h(t)\}$  аналогового фильтра определена в частотном диапазоне  $-\omega_s/2 \leq \omega \leq \omega_s/2$ . Функция  $H(\omega)$  цифрового варианта такого же фильтра, как указано выше, становится периодической функцией частоты с периодом  $\omega_s = 2\pi/\Delta t$  и амплитудой, уменьшенной в  $1/\Delta t$  раз.

Амплитудно-частотная характеристика  $|H(\omega)|$  наилучшим образом отображает частотную селективность фильтра. Функция  $|H(\omega)|$  может быть разложена в интересующем нас частотном диапазоне в бесконечный ряд Фурье [см. также Aguilera et al., 1970]

$$|H(\omega)| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega n \Delta t,$$

где  $n$ -й коэффициент записывается в виде

$$a_n = \frac{2}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} |H(\omega)| \cos(\omega n \Delta t) d\omega.$$

При использовании подстановки  $z = e^{j\omega \Delta t}$  (переменная  $z$  перемещается по единичной окружности в  $z$ -плоскости) каждый косинусный член ряда можно переписать в виде

$$\cos n \omega \Delta t = (z^n + z^{-n})/2.$$

Системная функция нерекурсивного цифрового фильтра, аппроксимирующая исходную аналоговую систему  $H(\omega)$ , оказывается равной

$$H(z) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n + z^{-n}) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \quad (2.4)$$

<sup>1</sup> Связанные с явлениями Гиббса. (Прим. перев.).

где  $a_{-n} = a_n$ . Заметим также, что значение импульсной реакции для любого  $n$   $h_n = a_n/2$ .

Несколько интересных свойств этого фильтра следуют непосредственно из уравнения (2.4). Во-первых, фильтр уже не является каузальной системой, поскольку временная последовательность импульсной реакции фильтра содержит ненулевые значения с отрицательными индексами времени. Будем называть части импульсной реакции цифрового фильтра, отвечающие положительным и отрицательным индексам времени, соответственно памятью и упреждением фильтра. Из выражения (2.4) видно, что рассматриваемый фильтр имеет как память, так и упреждение, следовательно, на выходной сигнал оказывают влияние прошлые (по отношению к текущему времени  $t$ ), а также будущие элементы входной последовательности. В связи с этим необходимо, чтобы входной сигнал был зарегистрирован заранее и доступен в «законсервированной» форме. При обработке на вычислительных машинах не в реальном масштабе времени данное требование обычно не создает дополнительных трудностей. Во-вторых, импульсная реакция фильтра представлена четным временным рядом, т. е. упреждение и память фильтра являются зеркальным отображением друг друга, и фильтр — симметричный. Как прямое следствие этой симметрии, мнимая часть  $H(z)$  отсутствует (стремится к нулю),  $H(e^{j\omega\Delta t}) = |H(e^{j\omega\Delta t})|$  и фильтр имеет нулевую фазовую характеристику. Таким образом, система, описываемая уравнением (2.4), производит фазонейскажающую передачу (см. также раздел 1.4), т. е. обладает свойствами, обычно необходимыми при обработке геофизических данных. Дж. Ф. Кайзером (1966) предложена также аппроксимация с использованием бесконечных синусоидальных или косинусоидальных рядов. Из этих двух вариантов выбирается тот, который лучше соответствует поведению функции  $H(\omega)$  на частотах, близких к нулю.

Для иллюстрации подхода, основанного на разложении в ряд Фурье, рассмотрим простой нерекурсивный симметричный фильтр:

$$H(\omega) = \begin{cases} M & \text{для } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c, \quad |\omega_c| < |\omega_s/2| \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Функция  $H(\omega)$  представляет собой фильтр нижних частот с постоянным усилением  $|H(\omega)| = M$  в низкочастотном диапазоне  $|\omega| \leq \omega_c$  и нулевым усилением за его пределами. Коэффициенты ряда

$$a_n = \frac{2A}{\omega_s} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \cos(\omega n \Delta t) d\omega = \frac{2M\omega_c \Delta t}{\pi} \frac{\sin \omega_c n \Delta t}{\omega_c n \Delta t}$$

Интуитивно можно ожидать, что коэффициенты  $a_n$  зависят как от формы фильтра, так и от интервала дискретизации. Подставляя значения  $a_n$  в уравнение (2.4), получаем системную

функцию желаемого фильтра. Поскольку бесконечные сигналы не могут быть обработаны на ЭВМ, ряд  $h$  должен быть усечен. К сожалению, данный ряд медленно сходится, и поэтому для достижения малых значений коэффициентов  $h_n$  приходится сохранять достаточно большое число членов ряда  $n$ . Например, при интервале дискретизации  $\Delta t = 0,1$  с и частоте среза фильтра  $\omega_c = \pi$  рад/с ( $f_c = 0,5$  Гц) требуется сохранить 55 отсчетов ( $n = 27$ ) импульсной характеристики для достижения коэффициентом  $h_n$  величины, составляющей менее 10% от максимального значения  $h_0$ .

При усечении оператора фильтра вносятся относительно большие погрешности аппроксимации в области точек разрыва функции  $H(\omega)$  из-за явлений Гиббса [см., например, Ormsby, 1961]. Несмотря на это, влияние усечения может быть сведено к минимуму путем специальной модификации членов ряда  $h_n$ . Для этого взамен величин  $h_n$  рассмотрим взвешенные величины  $w(n\Delta t)h_n$ . Пусть весовая функция будет четной, т. е.  $w(t) = w(-t)$ , и ограниченной во времени, т. е.  $w(t) = 0$  для  $t > N\Delta t$ . Тогда взвешенные члены ряда  $w(n\Delta t)h_n$  составят конечный ряд с ненулевыми членами только для  $-N \leq n \leq N$ . Взвешенные коэффициенты образуют системную функцию в форме

$$H(z) = \frac{1}{2} h_0 w(0) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N h_n w(n\Delta t) [z^{-n} + z^n] = \\ = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N w(n\Delta t) h_n z^n.$$

Умножение на  $w(t)$  во временной области соответствует свертке с  $W(\omega)$  в частотной области, где  $w(t)$  и  $W(\omega)$  составляют пару преобразования Фурье. Если выбрать  $w(\omega)$  так, чтобы свертка ее с фильтром  $H(\omega)$  несущественно влияла на желаемые характеристики фильтра  $H(\omega)$ , то получим эффективный нерекурсивный фильтр. Импульсная характеристика фильтра аппроксимируется рядом конечной длины с сохранением селективных свойств системы. Функции  $w(t)$  и  $W(\omega)$  называются соответственно временным и спектральным окнами.

Имеется обширная литература [Blackman and Tukey, 1958; Kurita, 1969; Kanasevich, 1973; Bath, 1974 и др.], посвященная выбору удобной формы окон. Соответствующую процедуру иногда называют «вырезанием» окон. К таким функциям предъявляют следующие основные требования.

1. Функция  $W(\omega)$  должна иметь максимум в области центральной частоты. Другими словами, основной максимум  $W(\omega)$  должен быть узкополосным и его ширина в общем случае соизмерима с шириной самых мелких деталей характеристики  $H(\omega)$ . Шириной главного максимума можно управлять с помощью числа членов ряда  $w(n\Delta t)$ : чем больше число членов ряда  $N$ , тем меньше ширина главного максимума.

2. Побочные максимумы  $W(\omega)$  должны быть существенно меньше главного максимума, поскольку они могут вносить значительный вклад при формировании  $H(\omega)$  из частотных диапазонов, удаленных от центральной частоты. Такое явление называется утечкой [см., например, Коортманс, 1974, с. 185]. На амплитуду побочных максимумов влияет вид усечения. Усечение в форме плавного сглаживания обычно уменьшает амплитуду побочных максимумов.

Правильно подобранные окна сглаживают резкие изменения характеристики  $H(z)$ , тем не менее сохраняя основные характеристики фильтра. Простые временные окна, как окно Хемминга [Blackman and Tukey, 1958]

$$w_{1n} = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos(\pi n/N), & |n| = 0, 1, 2, \dots, N; \\ 0, & |n| > N, \end{cases}$$

или окно фон Ханна [Blackman and Tukey, 1958]

$$w_{2n} = \begin{cases} 0,50 + 0,50 \cos(\pi n/N), & |n| = 1, 1, 2, \dots, N; \\ 0, & |n| > N \end{cases}$$

обычно удовлетворяют упомянутым выше требованиям. Использование этих двух окон называют соответственно хеммингом и ханнингом. Хемминг дает меньшие амплитуды побочных максимумов по сравнению с ханнингом. В то же время функция  $w_{2n}$  затухает быстрее, чем функция  $w_{1n}$ . Использование спектрального весового ряда (0,25; 0,5; 0,25) иногда называют фильтрацией Ханнинга. Э. А. Робинсон (1972) предложил окно, сохраняющее форму характеристики в пределах первого побочного максимума. В пределах второго побочного максимума функция линейно уменьшается от единицы до нуля. Другие типы весовых функций, применяемых при нерекурсивной фильтрации, можно найти, например, в работах Дж. Ф. Кайзера (1966) или других авторов.

Из указанного выше следует, что нерекурсивные фильтры, дающие хорошую аппроксимацию соответствующих аналоговых фильтров, требуют использования длинных импульсных реакций, что делает вычислительный процесс неэкономичным. Рекурсивные фильтры, описываемые в следующем разделе, обеспечивают приемлемую степень аппроксимации при высокой эффективности вычислений.

## 2.2. РЕКУРСИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Пусть цифровой фильтр задан его системной функцией [а не аппроксимирующей  $\hat{H}(z)$ , описываемой уравнением (2.1)]. Положим, что  $x = (x_0, x_1, \dots, x_p)$  — односторонний входной сигнал конечной длины. Тогда  $z$ -преобразование выходного сигнала, имеющего в общем случае бесконечную длину,

$$Y(z) = H(z) X(z) = \frac{\sum_{n=0}^M g_n z^n}{\sum_{n=0}^L f_n z^{-n}} \sum_{n=0}^P x_n z^{-n}.$$

Выражая  $Y(z)$  степенным рядом и умножая обе части уравнения на  $\sum_{n=0}^L f_n z^{-n}$ , получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \sum_{n=0}^L f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^M g_n z^{-n} \sum_{n=0}^P x_n z^{-n}. \quad (2.5)$$

В общем случае уравнение (2.5) остается справедливым для любой длины входного и выходного сигналов и какой угодно степени многочлена  $H(z)$ . Таким образом, любой отсчет выходной последовательности может быть найден путем приравнивания между собой коэффициентов одинаковой степени  $z$  из правой и левой частей уравнения (2.5). Например, первые два члена выходной последовательности

$$y_0 = x_0 g_0 / f_0; \quad y_1 = (x_1 g_0 + x_0 g_1 - y_0 f_1) / f_0$$

и  $n$ -значение выходного сигнала будет иметь вид

$$y_n = \frac{1}{f_0} \sum_{i=0}^M g_i x_{n-i} - \frac{1}{f_0} \sum_{i=1}^L f_i y_{n-i}. \quad (2.6)$$

При использовании уравнения (2.6) постоянный множитель опускают: системная функция (2.1) не изменится, если числитель и знаменатель умножить на константу  $1/f_0$  при условии, что  $f_0 \neq 0$ . Уравнение (2.1) принимает вид

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_L z^{-L}}. \quad (2.7)$$

Здесь  $a_i = g_i / f_0$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, M$ ;  $b_j = f_j / f_0$ ,  $j=1, 2, \dots, L$ .

При этом  $n$ -й отсчет выходного сигнала

$$y_n = \sum_{i=0}^M a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^L b_i y_{n-i}, \quad (2.8)$$

где  $y_n$  полагается равным нулю для  $n < 0$ . Уравнения (2.6) и (2.8) описывают операцию рекурсивной фильтрации. Они представляют собой вычислительные алгоритмы получения выходной последовательности для возрастающих значений  $n$ . Воспользовавшись уравнением (2.8), можно легко найти систему  $n+1$  уравнений для получения  $n+1$  значений отфильтрованного сигнала. Заметим, что в общем случае величины выходного сигнала определяются через прошлые и текущие значения входного сигнала и прошлые зна-

чения выходного сигнала. Цифровой фильтр полностью определен временными последовательностями  $a$  и  $b$  (или  $g$  и  $f$ ), поэтому проектирование фильтра заключается в нахождении констант  $a_i$  и  $b_i$ , удовлетворяющих заданным параметрам фильтрации (требованиям к фильтру).

Как следует из уравнения (2.8), каждый отсчет выходной последовательности  $y$  получают, выполняя 2 раза процедуру дискретной свертки. Первая сумма в правой части уравнения (2.8)

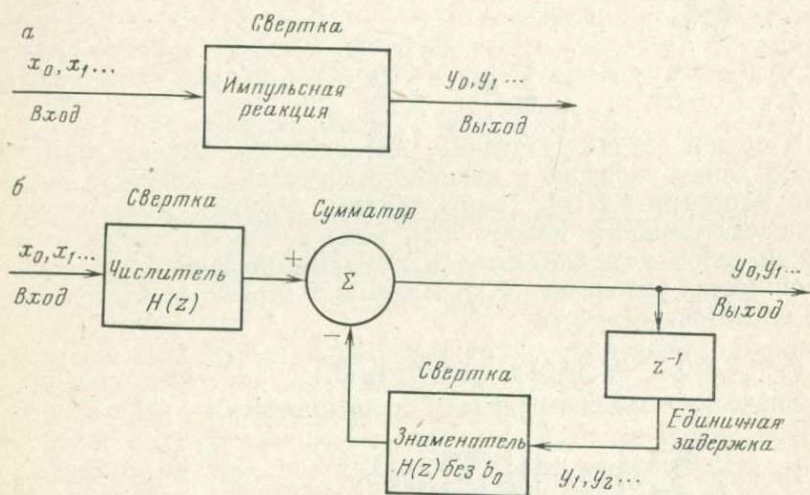


Рис. 2.1. Блок-схемы сверточных (а) и рекурсивной (б) фильтров.

Блок с индексом  $z^{-1}$  означает задержку на один интервал дискретности

представляет собой операцию свертки числителя функции  $H(z)$  с входным сигналом, вторая — свертки знаменателя функции  $H(z)$  с выходным сигналом, задержанным на один шаг дискретности. Так как часть выходного сигнала поступает обратно на вход фильтра и вычитается из входного сигнала, рекурсивная фильтрация (2.8) может рассматриваться как система с обратной связью. Воспользовавшись  $z$ -представлениями, получим:

$$Y(z) = H(z) X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_L z^{-L}} X(z)$$

или

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}) X(z) - (b_1 + b_2 z^{-1} + \dots + b_L z^{-L+1}) z^{-1} Y(z).$$

Операция свертки и рекурсивная фильтрация иллюстрируются рис. 2.1.

### 2.2.1. Рекурсивная фильтрация первого порядка

В зависимости от степени знаменателя (2.7) могут проектироваться фильтры различных порядков. Например, простейшая форма рекурсивной фильтрации первого порядка имеет вид

$$y_n = ax_n - by_{n-1}. \quad (2.9)$$

Этот фильтр использует только одно входное значение и одно предыдущее значение выходного сигнала. Здесь снова проявляется свойство каузальности: выходной сигнал не может появиться раньше отсчета  $x_0$  входного сигнала, т. е.  $y_n = 0$  для  $n < 0$ . Воспользовавшись выражением (2.9), найдем значения выходного сигнала:

$$\begin{aligned} y_0 &= ax_0; \\ y_1 &= ax_1 - by_0 = ax_1 - abx_0; \\ y_2 &= ax_2 - by_1 = ax_2 - abx_1 + ab^2x_0 \\ &\dots \\ &\dots \\ y_n &= ax_n - by_{n-1} = ax_n - abx_{n-1} + \dots + (-1)^n ab^n x_0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из системы уравнений (2.10) следует, что устойчивость фильтра обеспечивается в случае, когда член обратной связи удовлетворяет неравенству  $-1 < b < 1$ .

Очевидно, что при  $|b| > 1$  часть выходного сигнала, поступающего обратно на вход фильтра, неограниченно возрастает с увеличением индекса  $n$ . В результате этого полный выходной сигнал будет неограниченно возрастать даже при ограниченном сигнале на входе.

Системная функция простейшего фильтра (2.9) имеет числитель, представленный одним членом, и знаменатель с двумя членами. В самом деле, при применении  $z$ -преобразования к обеим частям соотношения (2.9) имеем

$$Y(z) = aX(z) - bz^{-1}Y(z),$$

так что системная функция

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a}{1 + bz^{-1}}.$$

Многие авторы в случае нахождения системной функции используют переменную  $z$ , а не  $z^{-1}$ . Очевидно, что  $H_1(z)$  при этом не изменяется, так как можно найти новую функцию  $H_2(z)$ , если умножить числитель и знаменатель  $H_1(z)$  на  $z$

$$H_2(z) = \frac{az}{z + b}.$$

Поскольку фильтр остается неизменным, отсчеты выходной последовательности описываются той же системой уравнений

(2.10) и критерий устойчивости  $|b| < 1$  сохраняется. Тем не менее необходимо подчеркнуть одно существенное различие между этими случаями: если функция  $H_1(z)$  имела полюс  $\beta_1 = -1/b$  в  $z^{-1}$ -плоскости, то функция  $H_2(z)$  имеет полюс  $B_1 = -b$  в  $z$ -плоскости. Для устойчивых систем это означает, что в первом случае полюс находится вне единичной окружности, а во втором — внутри нее. Для обеих функций  $H_1(z)$  и  $H_2(z)$  единичная окружность делит  $z^{-1}$ -плоскость и  $z$ -плоскость на устойчивую и неустойчивую области. Как показано ранее в разделе 1.8 (см. также рис. 1.7), критерий, обеспечивающий положение полюсов внутри  $z^{-1}$ -плоскости или снаружи  $z$ -плоскости, полностью выполняется для всех устойчивых систем. Однако при сравнении положения полюсов, даваемого различными авторами, может возникнуть путаница относительно критерия устойчивости систем.

Полагая  $z = e^{j\omega\Delta t}$ , т. е.  $|z| = 1$ , для системы первого порядка имеем:

$$H(z) = H(e^{j\omega\Delta t}) = \frac{a}{1 + be^{-j\omega\Delta t}} = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.11)$$

Функция (2.11) является комплексной функцией отклика фильтра. Перемещением комплексной переменной  $z$  по единичной окружности в  $z$ -плоскости или, что то же, изменением угловой частоты  $\omega$  в интересующем интервале частот можно найти амплитудно-частотную и фазовую характеристики фильтра.

Для получения системной функции в форме полинома и импульсной реакции фильтра достаточно выполнить деление  $a/(1 + bz^{-1})$  или найти выходную последовательность при возбуждении системы входным импульсом  $x = (1, 0, 0, \dots)$ . Отклик системы на сигнал  $x$ -импульсная реакция, а ее  $z$ -трансформанта представляет собой системную функцию  $H(z)$ . Из системы уравнений (2.10) при подстановке в качестве входного сигнала  $x$  найдем:

$$y = (a, -ab, ab^2, -ab^3, ab^4, \dots).$$

Подставляя в полученное выражение числовые значения, например  $a=1$  и  $b=0,90$ , получаем импульсную реакцию в виде последовательности чисел:

$$h = (1; -0,900; 0,810; -0,729; 0,656; \dots).$$

Приведенный пример показывает эффективность применения рекурсивных фильтров по сравнению с конволюционными. Для нахождения каждого отсчета выходной последовательности при использовании рекурсивного фильтра первого порядка (2.9) требуется выполнить одно умножение и одно сложение. В случае  $a=1$  и  $b=0,90$  (см. числовой пример выше) ряд  $h$  сходится достаточно медленно, и необходимо вычислить по крайней мере 20 членов ряда, прежде чем их величина станет меньше 0,1. Это означает, что при выполнении нерекурсивной фильтрации на ЭВМ для получения каждого отсчета выходной последовательности требуется выполнить около 20 парных операций сложения — ум-

ножения, чтобы обеспечить удовлетворительную точность. В рассмотренном же случае рекурсивной фильтрации на вычисления нужно приблизительно в 20 раз меньше времени.

Убывание (по абсолютной величине) отсчетов импульсной реакции рекурсивного фильтра первого порядка определяется величиной коэффициента  $b$ . При приближении  $b$  к единице это убывание замедляется. Например, Дж. Л. Шенксом (1967) предложен рекурсивный фильтр первого порядка с коэффициентами  $a=1$  и  $b=-0,95$ . Значения отсчетов импульсной реакции такого фильтра достигают 10% от величины  $h_0$  только лишь после 45 отсчетов. Блок-схема рекурсивного фильтра первого порядка приведена на рис. 2.1, б.

### 2.2.2. Рекурсивная фильтрация второго порядка

Полагая, что коэффициенты  $b_1$  и  $b_2$  в знаменателе уравнения (2.7) не равны нулю, получаем системную функцию рекурсивного фильтра второго порядка:

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}, \quad (2.12)$$

где для простоты все коэффициенты числителя, кроме  $a_0$ , считаются равными нулю. По аналогии с предыдущим случаем  $z$ -трансформанту выходного сигнала можно записать в виде

$$Y(z) = a_0 X(z) - b_1 z^{-1} Y(z) - b_2 z^{-2} Y(z).$$

Приравнявая коэффициенты левой и правой частей уравнения при одинаковых степенях  $z$ , получаем соотношение входных и выходных сигналов:

$$y_n = a_0 x_n - b_1 y_{n-1} - b_2 y_{n-2}. \quad (2.13)$$

Значения выходного сигнала зависят от текущего значения входного сигнала и двух самых последних значений выходного сигнала. Как следует из уравнения (2.13), в блок-схеме этого фильтра необходимо иметь два элемента задержки. Прямая форма реализации фильтра, отвечающая непосредственно уравнению (2.13), представлена блок-схемой на рис. 2.2, а.

Другие формы фильтра могут быть получены в результате преобразования выражения для  $H(z)$ . Уравнение (2.12) представляет системную функцию в виде отношения константы к многочлену второй степени по степеням  $z^{-1}$ . Таким образом, рациональная функция  $H(z)$  может быть представлена либо произведением сомножителей

$$H(z) = \frac{a_0}{(z^{-1} - \beta_1)(z^{-1} - \beta_2)}, \quad (2.14)$$

либо суммой простых дробей:

$$H(z) = \frac{K_1}{z^{-1} - \beta_1} + \frac{K_2}{z^{-1} - \beta_2}, \quad (2.15)$$

Здесь  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — полюсы функции  $H(z)$ , отвечающие корням знаменателя;  $K_1, K_2$  — константы. Полагая, например, что функция  $H(z)$  имеет два вещественных полюса первого порядка, константы легко определить следующим образом:

$$K_i = [(z^{-1} - \beta_i)H(z)]_{z^{-1}=\beta_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.16)$$

Правая часть выражения (2.14) представляет собой произведение системных функций двух простых фильтров первого порядка. Таким образом,  $H(z)$  может рассматриваться как частотная характеристика двух последовательно- или

каскадно-соединенных подсистем первого порядка, когда выход одной подсистемы является входом для другой. Блок-схема такого фильтра приведена на рис. 2.2, б. Аналогично уравнение (2.15) может интерпретироваться как параллельное соединение двух подсистем первого порядка. Обе подсистемы имеют общий вид, а выходная последовательность  $y$  представлена суммой выходных сигналов подсистем (см. рис. 2.2, в). Этапы проектирования блок-схем более подробно обсуждаются, например, М. Х. Аккройдом (1973).

На блок-схемах, представленных на рис. 2.2, принят ряд упрощений. Во-первых, числитель  $H(z)$  представлен одним членом  $a_0$ , что является частным случаем. В общем случае числитель записывается многочленом по степеням  $z^{-1}$ , а следовательно, на блок-диаграммах необходимо было бы показать элементы задержки также и в прямой цепи. Но на рис. 2.2 элементы задержки показаны только в цепи обратной связи.

Рис. 2.2. Блок-схемы упрощенных рекурсивных фильтров второго порядка  
Формы: а — прямая, б — каскадная, в — параллельная

Во-вторых, предполагается, что функция  $H(z)$  имеет только вещественные полюсы первого порядка, хотя  $H(z)$  может иметь кратные и комплексно-сопряженные полюсы. Для кратных полюсов уравнение (2.16) заменяется более сложной формулой (см. раздел 2.5.1). В случае комплексно-сопряженных полюсов величины  $K_1$  и  $K_2$  также являются комплексно-сопряженными, и поэтому разложение многочлена на сомножители не выполняется, а используется формула (2.12). Из нее следует важный вывод: для

Во-вторых, предполагается, что функция  $H(z)$  имеет только вещественные полюсы первого порядка, хотя  $H(z)$  может иметь кратные и комплексно-сопряженные полюсы. Для кратных полюсов уравнение (2.16) заменяется более сложной формулой (см. раздел 2.5.1). В случае комплексно-сопряженных полюсов величины  $K_1$  и  $K_2$  также являются комплексно-сопряженными, и поэтому разложение многочлена на сомножители не выполняется, а используется формула (2.12). Из нее следует важный вывод: для

вещественных входного и выходного сигналов рекурсивный фильтр любого порядка, имеющий вещественные или комплексно-сопряженные полюсы, может быть заменен последовательным соединением фильтров первого и/или второго порядков.

### 2.2.3. Рекурсивная фильтрация $L$ -го порядка

В наиболее общей форме системная функция рекурсивного фильтра  $L$ -го порядка описывается уравнением (2.7), когда все коэффициенты  $b_i$  при  $i > L$  равны нулю, а  $b_L \neq 0$ . Освобождаясь от знаменателей в уравнении (2.7), получаем:

$$\begin{aligned} (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_L z^{-L}) Y(z) = \\ = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}) X(z). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Выполнение умножения в правой и левой частях уравнения (2.17) и обратное  $z$ -преобразование результатов дают для выходной последовательности рекурсивную формулу, идентичную уравнению (2.8):

$$\begin{aligned} y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_{M-1} x_{n-M+1} + a_M x_{n-M} - \\ - b_1 y_{n-1} - b_2 y_{n-2} - \dots - b_{L-1} y_{n-L+1} - b_L y_{n-L} = \\ = \sum_{i=0}^M a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^L b_i y_{n-i}. \end{aligned}$$

Из формулы следует, что текущее значение выходного сигнала зависит как от текущего значения входного сигнала и  $M$  его последних значений, так и от  $L$  последних значений выходного сигнала. Прямая форма реализации фильтров показана на рис. 2.3, а. Левая часть блок-схемы содержит  $M$  элементов задержки в прямой ветви в соответствии с числом членов числителя  $H(z)$ . В правой части блок-схемы имеется  $L$  элементов задержки сообразно порядку фильтра. Другую каноническую форму реализации блок-схемы получим, если перепишем уравнение (2.7) в виде:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^L b_i z^{-i}}. \quad (2.18)$$

Отсюда

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 + \sum_{i=1}^L b_i z^{-i}} \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} = U(z) \sum_{i=0}^M a_i z^{-i}, \quad (2.19)$$

где

$$U(z) = \frac{X(z)}{1 + \sum_{i=1}^L b_i z^{-i}}. \quad (2.20)$$

Очевидно, что блок-схема фильтра, осуществляющего фильтрацию в соответствии с уравнениями (2.18) — (2.20), может рассматриваться как комбинация двух цепей. Первая представляет собой

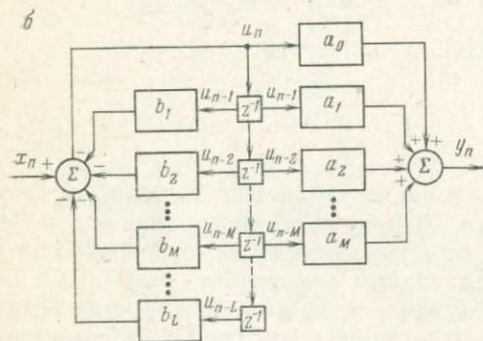
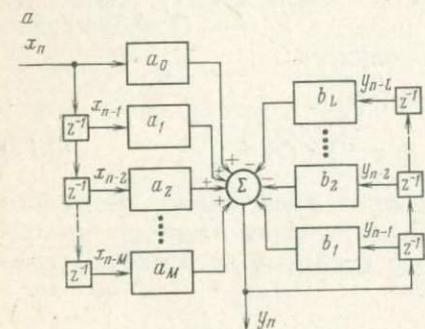


Рис. 2.3. Блок-схемы рекурсивных фильтров  $L$ -го порядка.

Формы:  $a$  — прямая,  $b$  — каноническая —  $L > M$

пользуются как в прямой ветви, так и в ветви цепи обратной связи, т. е. для нулей и полюсов функции  $H(z)$ .

Последовательная форма представления блок-схем получается разложением многочлена на сомножители, а параллельная — разложением системной функции на простые дроби независимо от порядка фильтра. Как уже указывалось, обе формы могут быть реализованы, например, лишь с помощью простых фильтров первого и второго порядка. Но при этом, как и следовало ожидать, требуется знание нулей и полюсов функции  $H(z)$ . Нахождением корней многочленов высокого порядка, являющихся числителем и знаменателем функции  $H(z)$ , можно создать дополнительные трудности.

цепь обратной связи, на входе которой действует сигнал  $x$ , а с выхода снимается сигнал  $u$ , соответствующий выражению (2.20). Вторая цепь содержит только прямую ветвь, на вход которой согласно с уравнением (2.19) подается сигнал  $u$ . В результате обратного  $z$ -преобразования функций  $U(z)$  и  $Y(z)$  имеем

$$u_n = x_n - \sum_{i=1}^L b_i u_{n-i};$$

$$y_n = \sum_{i=0}^M a_i u_{n-i}.$$

Поскольку сигнал  $u$  является входным для второй цепи, общая блок-схема может быть построена в канонической форме (см. рис. 2.3, б). Основным ее преимуществом является минимальное число элементов задержки при ее реализации. Кроме того, одни и те же элементы задержки используются как в прямой ветви, так и в ветви цепи обратной связи, т. е. для нулей и полюсов функции  $H(z)$ .

### 2.3. СИСТЕМНЫЕ ФУНКЦИИ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

В разделе 1.4 было показано, что можно составить представление о частотной характеристике аналоговой системы, рассматривая ее воздействие на гармонический входной сигнал. Подобный подход пригоден и для анализа цифровых систем.

Рассмотрим каузальную систему с импульсной передаточной функцией  $H(z) = Z\{h_n\}$  и стационарным сигналом

$$x_n = \sin \Omega n = (1/2j) [e^{j\Omega n} - e^{-j\Omega n}]$$

на ее входе, дискретизированным через интервал  $\Delta t = 1$  с. Согласно выражению (1.42)  $n$ -й член выходной последовательности

$$y_n = (1/2j) \sum_{i=0}^{\infty} [e^{j\Omega(n-i)} - e^{-j\Omega(n+i)}] h_i.$$

После перестановки членов в правой части уравнения и замены  $z = e^{j\Omega}$  получим

$$y_n = (1/2j) [e^{j\Omega n} - e^{-j\Omega n}] \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} h_i = H(e^{j\Omega}) \sin \Omega n. \quad (2.21)$$

Таким образом, выходной сигнал цифровой системы при возбуждении ее дискретным синусоидальным сигналом имеет в качестве множителя частотную характеристику  $H(e^{j\Omega})$  для значения  $z$ , соответствующего частоте  $\omega = \Omega$  на единичной окружности. Меняя угловую частоту  $\Omega$ , либо, что то же, смещая переменную  $z$  по единичной окружности в комплексной  $z$ -плоскости, из уравнения (2.21) находим частотную характеристику для всего интересующего диапазона частот.

Наиболее важная особенность поведения системной функции непосредственно следует из уравнения (2.21). Поскольку

$$H(e^{j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega \pm j2\pi n}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

системная функция любого цифрового фильтра является периодической функцией частоты с периодом  $2\pi$  при интервале дискретизации, равном единице. Для произвольной величины  $\Delta t$  найдем аналогичное соотношение

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega \Delta t}) &= H^*(e^{j\Omega \Delta t \pm j2\pi n}) = \\ &= H \left[ \exp \left\{ j\Delta t \left( \Omega \pm \frac{2\pi n}{\Delta t} \right) \right\} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в общем случае период функции  $H(e^{j\Omega \Delta t})$  по оси  $\Omega$  равен  $2\pi/\Delta t$ . Для определения амплитудно-частотной и фазовой характеристик запишем комплексную функцию в полярной форме. При  $\omega = \Omega$  и  $\Delta t = 1$  с

$$H(z) = H(e^{j\Omega}) = M(\Omega) e^{j\varphi(\Omega)} =$$

$$= [P^2(\Omega) + Q^2(\Omega)]^{1/2} \exp \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Q(\Omega)}{P(\Omega)} \right], \quad (2.22)$$

где  $P(\Omega) = \operatorname{Re} H(e^{j\Omega})$ ;  $Q(\Omega) = \operatorname{Im} H(e^{j\Omega})$ .

В качестве примера возьмем простую систему, рассмотренную в разделе 1.7, с системной функцией

$$H(z) = 2 + z^{-1}.$$

Чтобы определить значения функции  $H(z)$  для произвольной угловой частоты  $\omega = \Omega$ , придадим переменной  $z$  значение  $z = e^{j\Omega}$  на единичной окружности в  $z$ -плоскости. Подставляя  $z^{-1} = e^{-j\Omega}$  в  $H(z)$ , получаем значение частотной характеристики для  $\omega = \Omega$ . Например, для  $\omega = 0$  переменная  $z^{-1} = 1$  и  $H(z) = H(1) = 2 + 1 = 3$ . В полярной форме имеем:  $M(0) = 3$  и  $\varphi(0) = 0$ . Числовые значения функций  $M(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  легко найти для следующих значений угловых частот:

$\omega$	$H(e^{j\omega})$	$M(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	3	3	0
$\pi/2$	$2 - j$	$\sqrt{5}$	$\operatorname{arc} \operatorname{tg}(-1/2) = -27^\circ$
$\pi$	1	1	0
$3\pi/2$	$2 + j$	$\sqrt{5}$	$\operatorname{arc} \operatorname{tg}(1/2) = 27^\circ$
$2\pi$	3	3	0

Амплитудно-частотная  $M(\omega)$  и фазовая  $\varphi(\omega)$  характеристики показаны на рис. 2.4. С точки зрения обычных требований амплитудно-частотная характеристика системы не очень хороша, поскольку искажает спектр входного сигнала на всех частотах от  $\omega = 0$  до частоты Найквиста  $\omega_N = \pi$ . Повторяемость характеристики с периодом  $2\pi$  очевидна из рис. 2.4.

Уравнения (2.21) и (2.22) едва ли пригодны для применения при проектировании фильтров. Разделение действительной и мнимой частей, как было показано выше, обычно трудно даже для простейших систем. Еще более важным является то, что частотная избирательность характеристики в явном виде не очевидна из указанных уравнений. Это, безусловно, усложняет проектирование фильтров. В дальнейшем будет рассмотрен метод нулей и полюсов, который в общем случае достаточно эффективен и имеет простую физическую интерпретацию.

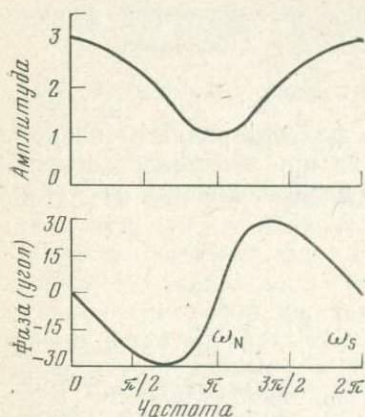


Рис. 2.4. Амплитудно-частотная (в произвольных единицах) и фазовая характеристики системы  $H(z) = 2 + z^{-1}$

## 2.4. МЕТОД НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ

В разделах 2.1 и 2.2 системные функции были представлены либо многочленами, либо рациональными дробями по степеням  $z^{-1}$ . Во втором случае числитель и знаменатель  $H(z)$  возможно разложить на сомножители, и функция  $H(z)$  может быть однозначно определена с точностью до постоянного множителя своими нулями и полюсами для любого значения  $z^{-1}$ . В первом случае системная функция определяется исключительно своими

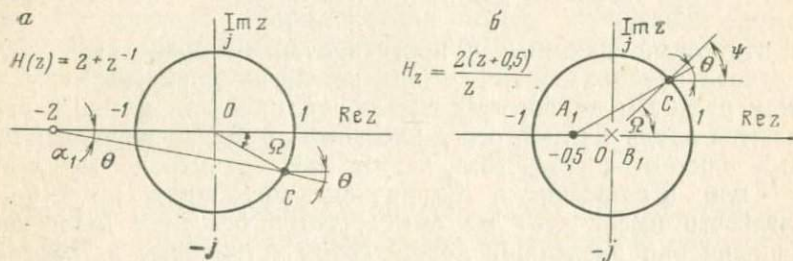


Рис. 2.5. Геометрическая интерпретация системной функции  $H(z) = 2 + z^{-1} = 2(z + 0,5)/z$ .

*a* — в  $z^{-1}$ -плоскости, *б* — в  $z$ -плоскости

полюсами, поскольку вообще не имеет нулей. Преимущество метода одновременного использования нулей и полюсов может быть показано на примерах простейших систем. Так, системная функция  $H(z) = 2 + z^{-1}$  имеет единственный нуль  $\alpha_1 = -2$ . Положение этого нуля относительно единичной окружности в  $z^{-1}$ -плоскости показано на рис. 2.5, *a*. В дальнейшем положение нулей и полюсов в  $z$ - или в  $z^{-1}$ -плоскостях будем отмечать соответственно кружками и крестиками. Точка *C* на единичной окружности, отвечающая угловой частоте  $\Omega$  при интервале дискретизации  $\Delta t = 1$  с, является изображением комплексной величины  $z^{-1} = e^{-j\Omega}$ . Как следует из рис. 2.5, *a*, значение амплитудно-частотной характеристики  $M(\omega)$  для  $\omega = \Omega$  определяется расстоянием между точкой *C* и нулем  $\alpha_1$ . Значение  $M(\omega)$  для других частот можно получить перемещением переменной  $z^{-1}$  по единичной окружности и измерением для каждого положения  $z^{-1}$  расстояний  $\overline{C\alpha_1}$ . При этом фазовый сдвиг, измеряемый углом  $\theta$ ,  $\varphi(\omega) = \theta(\omega)$ .

Некоторые авторы используют положительную степень  $z$ . В этом случае системная функция переписывается в виде

$$H(z) = 2 + z^{-1} = 2(z + 0,5)/z.$$

Такая функция  $H(z)$  имеет один нуль первого порядка в точке  $A_1 = -0,5$  и один полюс первого порядка в точке  $B_1 = 0$ . Поскольку сама системная функция остается неизменной, метод нулей и полюсов должен давать одинаковый результат независимо от

формы представления  $H(z)$ . Точка  $C$  на единичной окружности теперь отображает комплексную переменную  $z=e^{j\Omega}$ . Из рис. 2.5, б видно, что амплитудно-частотная и фазовая характеристики для  $\omega=\Omega$  соответственно равны

$$M(\Omega) = \frac{\overline{2CA_1}}{\overline{CB_1}}; \quad \varphi(\omega) = \theta - \Psi.$$

Значения характеристик для других угловых частот могут быть найдены при перемещении переменной  $z$  по единичной окружности. Например, вычисления для значений частот  $\omega$ , равных 0,  $\pi/2$ ;  $\pi$ ;  $3\pi/2$ ;  $2\pi$ , дают результаты, идентичные получаемым по формуле (2.22).

Читателям, знакомым с проектированием аналоговых систем на основе преобразования Лапласа, легко увидеть параллель между расчетом аналоговых систем, частоты для которых отсчитываются вдоль мнимой оси  $p$ -плоскости, и проектированием цифровых систем с отсчетом частот по единичной окружности в  $z^{-1}$ - или в  $z$ -плоскости. Единичная окружность в  $z^{-1}$ - или в  $z$ -плоскости имеет тот же смысл, что и ось  $j\omega$  в  $p$ -плоскости, поскольку они разделяют между собой устойчивые и неустойчивые области.

При использовании графического способа интерпретации метода нулей и полюсов можно строить частотную характеристику в виде функции угловой частоты. Например, из рис. 2.5, а видно, что усиление<sup>1</sup> системной функции  $H(z)$ , выраженное через  $\overline{CA_1}$ , достигает максимальной величины при  $\omega=0$ . С возрастанием угловой частоты усиление функции  $H(z)$  уменьшается, достигая минимума для частоты Найквиста  $\omega=\omega_N=\pi$ . В силу периодичности функция является симметричной относительно  $\omega_N$ . Наименьшее усиление при частоте  $\omega=\pi$  составляет 1/3 от максимального усиления в случае  $\omega=0$ . Минимальное усиление можно снизить до нулевого простым смещением нуля из точки  $a_1=-2$  в точку  $a_2=-1$ . Полученная система  $H_1(z)=1+z^{-1}$  будет полностью подавлять частотные составляющие на частоте  $\omega=\omega_N$ . Простейший фильтр  $H_1(z)$  здесь упомянут только для иллюстрации метода нулей и полюсов, сам же фильтр существенной практической ценности не представляет. Наряду с подавлением составляющей на частоте  $\omega=\omega_N$  этот фильтр вносит также искажения в спектр входного сигнала во всем частотном диапазоне, что в общем случае является нежелательным свойством.

Предложенным выше способом можно также рассчитать системную функцию фильтра, подавляющего постоянную составляющую сигнала. Такие фильтры представляют особый интерес, поскольку они подавляют самые низкочастотные составляющие во входном сигнале. Рассмотрим системную функцию  $H(z)=1-z^{-1}$ , имеющую нуль первого порядка  $a_1=1$ .

<sup>1</sup> Имеется в виду абсолютное значение  $M(\omega)$  функции  $H(z)$  при данном  $\omega$ . (Прим. перев.).

Для простоты снова ограничимся только частотами  $\omega$ , равными 0,  $\pi/2$ ,  $\pi$ ,  $3\pi/2$  и  $2\pi$ . Соответствующие им значения усиления  $M(\omega)$  будут составлять 0,  $\sqrt{2}$ , 2,  $\sqrt{2}$  и 0. Такая система является режекторным фильтром постоянной составляющей, так как ее усиление равно нулю на нулевой частоте; максимум достигается на частоте  $\omega=\pi$ . Этот фильтр также является искажающим во всем диапазоне частот, следовательно, он мало пригоден для практического применения. Идеальный режекторный фильтр постоянной составляющей должен иметь нулевое усиление при  $\omega=0$  и равномерную полосу пропускания для остальных частот диапазона. Приемлемая аппроксимация такого идеального фильтра может быть реализована добавлением полюса первого порядка, т. е. использованием системы

$$H_2(z) = \frac{H(z)}{1-bz^{-1}} = \frac{1-z^{-1}}{1-bz^{-1}}.$$

Функция  $H_2(z)$  имеет нуль  $\alpha_1=1$  и полюс  $\beta_1=1/b$ . Для любой частоты  $\omega$  амплитудно-частотная характеристика представляет собой отношение  $\overline{C\alpha_1}/C\beta_1$ , где  $C$  — точка на единичной окружности. Ясно, что усиление  $M_2(\omega)$  равно нулю при  $\overline{C\alpha_1}=0$  и приблизительно постоянно и близко к единице для частот, на которых  $\overline{C\alpha_1} \approx \overline{C\beta_1}$ . Другими словами, полюс  $\beta_1$  должен располагаться ближе к  $\alpha_1$ , для того чтобы приблизить значение характеристики к единице для любой частоты  $\omega$ , кроме  $\omega \rightarrow 0$ . Еще одно требование вытекает из критерия устойчивости  $|b| < 1$ : полюс должен находиться вне единичной окружности.

Например, для  $b=0,95$

$$H_2(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-0,95z^{-1}}. \quad (2.23)$$

Амплитудно-частотные характеристики, нормализованные относительно максимального усиления (для  $\omega=\pi$ ), показаны на рис. 2.6. Как и следовало ожидать, фильтр полностью подавляет постоянную составляющую и пропускает все интересующие более высокие частоты практически с постоянным усилением. Так, для частот, равных  $0,03\omega_N$  и  $0,15\omega_N$ , усиление соответственно равно  $0,95M_{\max}$  и  $0,99M_{\max}$ . Другими словами, фильтр  $H_2(z)$  является достаточно хорошим режекторным фильтром постоянной составляющей. Основным параметром, влияющим на форму характеристики  $M_2(\omega)$ , является расстояние  $\alpha_1\beta_1$  между полюсом и нулем. Чем короче расстояние  $\alpha_1\beta_1$ , тем уже диапазон подавляемых частот.

Умножая обе части формулы (2.23) на  $(1-0,95z^{-1})X(z)$ , имеем:

$$(1-0,95z^{-1})Y(z) = (1-z^{-1})X(z).$$

Отсюда вытекает рекурсивная формула для получения  $n$ -го значения выходного сигнала

$$y_n = x_n - x_{n-1} + 0,95y_{n-1}.$$

Блок-схема фильтра должна иметь два элемента задержки в прямой ветви и в цепи обратной связи.

Режекторная фильтрация может быть использована для подавления не только постоянной составляющей спектра сигнала,

но и любой другой в диапазоне от нуля до  $\omega_N$ . Предположим, что зарегистрированный сигнал содержит нежелательную синусоидальную составляющую с периодом 4 с или с угловой частотой  $\Omega = 2\pi/4 = 0,5$  рад/с. При оцифровке сигналов трассы с интервалом дискретизации  $\Delta t = 0,5$  с частота Найквиста  $\omega_N = \pi/\Delta t = 2\pi$  рад/с. С учетом этого для подавления составляющей  $\Omega = 0,25 \omega_N$  поместим комплексный нуль функции в точку на единичной окружности, соответствующую углу  $(\Omega/\omega_N) \times 180^\circ = 45^\circ$ . Поскольку предполагается, что вещественный входной сигнал создает вещественный выходной сигнал, системная функция не может иметь одиночных комплексных нулей и/или полюсов. Комплексные особые точки системной функции всегда должны быть представлены комплексно-сопряженными парами.

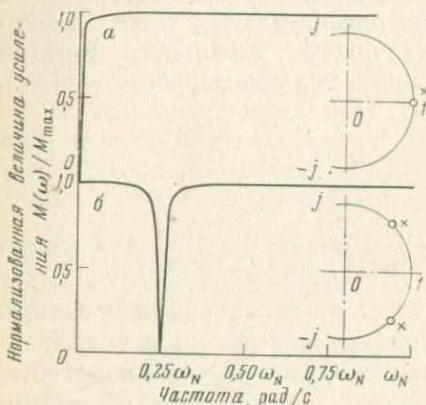


Рис. 2.6. Нормализованные амплитудно-частотные характеристики и расположение полюсов (крестики) и нулей (кружки) в  $z$ -плоскости для режекторных фильтров, настроенных на подавление.

$a$  — постоянной составляющей,  $H_1(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-0,95z^{-1}}$ ;  $b$  — частоты  $0,25\omega_N$ ,  $H_2(z) = \frac{1-1,414z^{-1}+z^{-2}}{1,103-1,480z^{-1}+z^{-2}}$

но-сопряженными парами. Для этого поместим второй нуль в точку, соответствующую углу  $-45^\circ$ . Комплексно-сопряженные нули

$$\alpha_{1,2} = \cos 45^\circ \pm j \sin 45^\circ = 0,707 \pm j 0,707.$$

Для улучшения формы амплитудно-частотных характеристик поместим, как и в предыдущем случае, пару комплексно-сопряженных полюсов вблизи  $\alpha_{1,2}$  и вне единичной окружности. Выберем полюсы

$$\beta_{1,2} = 0,740 \pm j 0,740,$$

которые совместно с  $\alpha_{1,2}$  дают системную функцию

$$H(z) = \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}{(z - \beta_1)(z - \beta_2)} = \frac{1 - 1,414z^{-1} + z^{-2}}{1,103 - 1,480z^{-1} + z^{-2}}. \quad (2.24)$$

Амплитудно-частотные характеристики, нормализованные по максимальной величине усиления, приведены на рис. 2.6. На частоте около  $0,25 \omega_N$  заметно резкое уменьшение усиления, а на частотах от нуля до 1 Гц относительная величина усиления остается постоянной и близкой к единице. Составляющие на частоте  $0,25 \omega_N$  подавляются полностью, в то время как на частотах ниже  $0,2 \omega_N$  и выше  $0,3 \omega_N$  фильтр является практически неискажающим. Фильтр с подобной характеристикой называют вырезающим, или фильтром-пробкой. Как и в ранее рассмотренном случае, основным фактором, влияющим на крутизну срезов характеристики фильтра, является расстояние полюс — нуль.

Рекурсивная формула такого фильтра вытекает из уравнения (2.24). Разделив числитель и знаменатель  $H(z)$  на коэффициент, равный 1,103, и освобождаясь от знаменателей, получаем:

$$(1 - 1,342z^{-1} + 0,907z^{-2}) Y(z) = (0,907 - 1,282z^{-1} + 0,907z^{-2}) X(z).$$

Отсюда

$$y_n = 0,907x_n - 1,282x_{n-1} + 0,907x_{n-2} + 1,342y_{n-1} - 0,907y_{n-2}.$$

Члены выходной последовательности  $y$  зависят от текущего, двух последних значений входного сигнала и двух последних значений выходного сигнала. Блок-схема данного фильтра должна иметь четыре элемента задержки — два в прямой ветви и два в цепи обратной связи.

Используя геометрический способ интерпретации особых точек системной функции в  $z$ -плоскости или в  $z^{-1}$ -плоскости, можно определить амплитудно-частотную и фазовую характеристики. Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$  и  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$  — соответственно нули и полюсы функции, а точка  $C$  на единичной окружности отвечает угловой частоте  $\omega = \Omega$ . Тогда амплитудно-частотная характеристика

$$M(\Omega) = K \prod_{i=1}^M \frac{1}{C\alpha_i} \prod_{i=1}^L C\beta_i, \quad (2.25)$$

где  $K$  — вещественная постоянная, а фазовая характеристика (см. рис. 2,5, б)

$$\varphi(\Omega) = \sum_{i=1}^M \theta_i - \sum_{i=1}^L \Psi_i. \quad (2.26)$$

Рассмотренные примеры иллюстрируют действенность метода нулей и полюсов при проектировании цифровых систем [см. также Shanks, 1967; Mooney, 1968]. К сожалению, сложность метода быстро возрастает при увеличении числа особых точек системных функций, поэтому применимость его ограничена фильтрами низкого порядка. Для проектирования более сложных систем требуется специальный подход.

Поведение большого числа фильтров, успешно реализуемых в настоящее время с помощью цифровых систем, описывалось и широко использовалось в аналоговой форме задолго до появления ЭВМ. В литературе можно найти обширный перечень аналоговых фильтров, удовлетворяющих разнообразным требованиям, возникающим на практике. Естественно, представляется заманчивым использовать для проектирования цифровых систем те многочисленные результаты, которые были получены в ходе развития теории синтеза аналоговых фильтров. Ниже рассматриваются возможности проектирования системной функции  $H(z)$ , практически мало отличающейся от заданной характеристики аналоговой системы.

### 2.5.1. Способ инвариантности импульсной реакции

Одной из возможностей аппроксимации является нахождение такой цифровой системы, отклик которой на единичный импульс сходен с откликом заданной аналоговой системы. Другими словами, нужно найти такую цифровую систему  $H(z)$ , импульсная реакция которой, представленная рядом отсчетов  $h_n$ , эквивалентна импульсной реакции  $h(t)$  аналоговой системы, т. е.

$$h_n = [h(t)]_{t=n\Delta t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

где  $h_n$  —  $n$ -й отсчет импульсной реакции  $h$ . Данный подход реализуется с помощью способа инвариантности импульсной реакции [Rader and Gold, 1967; Gold and Rader, 1969]. Процедура включает следующие операции.

1. Задается передаточная функция  $H(p)$ .
2. Выполняется обратное преобразование Лапласа для нахождения импульсной реакции  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\}$ .
3. Функция  $h(t)$  дискретизируется через интервал  $\Delta t$  для нахождения ряда  $\{h_n\}$ .
4. Выполняется  $z$ -преобразование ряда  $\{h_n\}$  для получения искомой системной функции  $H(z) = \mathcal{L}\{h_n\}$ . Сравнением исходной и вновь найденной функции можно установить меру соответствия между  $H(p)$  и  $H(z)$ . При этом можно воспользоваться табл. 2, в которой приведены преобразования Лапласа и  $z$ -трансформанты наиболее широко применяемых временных функций, что существенно упростит процедуру в целом. Далее эта процедура рассматривается применительно к функции  $H(p)$  общего вида.

Передаточная функция  $H(p)$  линейной аналоговой системы с постоянными параметрами обычно задается в виде частного от деления двух многочленов относительно  $p$

$$H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{u_M p^M + u_{M-1} p^{M-1} + \dots + u_1 p + u_0}{v_L p^L + v_{L-1} p^{L-1} + \dots + v_1 p + v_0} =$$

$$= \frac{U(p)}{V(p)}, \quad L \gg M,$$

что по форме аналогично системной функции (2.1) цифрового фильтра. Способ инвариантности импульсной реакции не ограничивается только действительными полюсами  $H(p)$  первого порядка, а использует также кратные и комплексно-сопряженные полюсы. Из многих возможных комбинаций полюсов и нулей рассмотрим три случая.

Функция  $H(p)$  содержит полюсы только первого порядка. Предположим, что корни многочлена  $V(p)$  действительны и точно определены. Тогда передаточная функция  $H(p)$  может быть представлена суммой простых дробей

$$H(p) = \frac{U(p)}{V(p)} = \sum_{i=1}^L \frac{K_i}{(p - p_i)}. \quad (2.28)$$

Здесь  $p_i$  — полюсы функции  $H(p)$ ;  $K_i$  — константы, заданные [см. Bath, 1968, с. 23] в виде

$$K_i = \left[ \frac{U(p)}{V(p)} (p - p_i) \right]_{p=p_i}.$$

Константы  $K_i$  могут быть также заданы формулой

$$K_i = \frac{U(p_i)}{V'(p_i)}, \quad (2.29)$$

где  $V'(p_i)$  — производная  $(d/dp)V(p)$ , вычисленная для  $p = p_i$ . Для особого случая, когда  $M=L$ , чтобы получить функцию  $H(p)$  в надлежащем виде перед разложением многочлена на сумму простых дробей, необходимо выполнить полиномиальное деление. Найдем теперь в табл. 2 формулу обратного преобразования Лапласа для правой части уравнения (2.28):

$$\mathcal{S}^{-1} \left\{ \frac{K_i}{p - p_i} \right\} = K_i \exp(p_i t).$$

Таким образом, в результате обратного преобразования обеих частей уравнения (2.28) получим импульсную реакцию

$$h(t) = \mathcal{S}^{-1} \{H(p)\} = \sum_{i=1}^L K_i \exp(p_i t). \quad (2.30)$$

Для нахождения функции  $h(t)$  могут использоваться и другие способы. Например, И. М. Лонгмен и М. Шерир (1971) предложили способ вычисления  $h(t)$  с помощью бесконечных рядов. Эта процедура не требует нахождения корней  $p_i$  в уравнении (2.28).

Следует заметить, что выражение (2.30) дает общий критерий устойчивости непосредственно через передаточную функцию  $H(p)$ . В разделе 1.2.1 упоминалось, что устойчивость системы обеспечи-

вается абсолютной интегрируемостью  $h(t)$ . Следовательно, для устойчивости системы необходимо, чтобы все члены  $K_i \exp(p_i t)$  для  $i=1, 2, \dots, L$  под знаком суммы в уравнении (2.30) уменьшались с возрастанием времени. Очевидно, это условие удовлетворяется только в случае, когда действительные части  $p_i$  для всех  $i$  являются отрицательными. Иначе говоря, аналоговая система устойчива, если все полюсы передаточной функции лежат в левой половине комплексной  $p$ -плоскости.

Вводя дискретные интервалы времени в уравнение (2.30), получаем ряд

$$h_n = \sum_{i=1}^L K_i \exp(p_i n \Delta t),$$

представляющий собой импульсную реакцию цифровой системы с инвариантным откликом на единичный импульс. Используя выражение для  $z$ -преобразования экспоненциальной функции, полученное в разделе 1.6,  $z$ -трансформанту функции  $\{h_n\}$  получаем в виде

$$Z\{h_n\} = H(z) = \sum_{i=1}^L \frac{K_i}{1 - \exp(p_i \Delta t) z^{-1}} = \sum_{i=1}^L \frac{z}{z - \exp(p_i \Delta t)},$$

где  $\operatorname{Re} p_i < 0$ ,  $i=1, 2, \dots, L$ . Очевидно, что в способе инвариантности отклика на единичный импульс основное требование, устанавливаемое уравнением (2.27), обеспечивается через подобие функций  $H(p)$  и  $H(z)$

$$\sum_{i=1}^L \frac{K_i}{(p - p_i)} \rightarrow \sum_{i=1}^L \frac{K_i}{1 - \exp(p_i \Delta t) z^{-1}}.$$

Заметим, что постоянные  $K_i$  и  $p_i$  определяют цифровой фильтр через функцию  $H(z)$ , полученную непосредственно из функции  $H(p)$ .

Необходимо подчеркнуть, что способ инвариантности импульсной реакции сохраняет положение полюсов при переходе от  $p$ -плоскости в  $z$ -плоскость, но не учитывает положение нулей. Очевидно, этот факт может отразиться на соответствии характеристик  $H(p)$  и  $H(z)$ . Имеется важная категория аналоговых фильтров (см. главу 3) с передаточной функцией

$$H(p) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N (p - p_i)}.$$

Соответствующая системная функция  $H(z)$ , получаемая при разложении ряда на простые дроби, в общем случае имеет конечные нули, несмотря на то, что функция  $H(p)$  конечных нулей не имеет. Однако в большинстве практических случаев влияние этих

нулей может быть сведено к минимуму использованием, например, достаточно малого интервала дискретизации. Более подробно с данным вопросом можно ознакомиться в работах Ч. М. Рэйдера и Б. Голда (1967).

Функция  $H(p)$  содержит пару комплексно-сопряженных полюсов. В этом случае знаменатель функции  $H(p)$  может быть записан в виде

$$V(p) = (p - p_1)(p - p_1^*),$$

где  $p_1 = -\sigma_1 + j\omega_1$ ;  $p_1^* = -\sigma_1 - j\omega_1$ . Тогда соответствующие коэффициенты  $K_1$  и  $K_2^*$  также являются комплексно-сопряженными и передаточная функция

$$H(p) = \frac{U(p)}{V(p)} = \frac{K_1}{(p - p_1)} + \frac{K_1^*}{(p - p_1^*)} = \frac{c + jd}{p + \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{c - jd}{p + \sigma_1 + j\omega_1}. \quad (2.31)$$

Используя уравнение (2.29) и разделяя действительные и мнимые части, находим:

$$c + jd = \frac{U(p_1)}{V'(p_1)}.$$

Передаточная функция может быть записана в модифицированной форме

$$H(p) = \frac{2c(p + \sigma_1) - 2d\omega_1}{(p + \sigma_1)^2 + \omega_1^2}.$$

Из табл. 2 для такой функции  $H(p)$  получаем:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = 2c \exp(-\sigma_1 t) \cos \omega_1 t - 2d \exp(-\sigma_1 t) \sin \omega_1 t.$$

Вновь используя табл. 2, находим дискретную системную функцию:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n} = \frac{2c [1 - \exp(-\sigma_1 \Delta t) \cos(\omega_1 \Delta t) z^{-1}] - 2d \exp(-\sigma_1 \Delta t) \sin(\omega_1 \Delta t) z^{-1}}{1 - 2 \exp(-\sigma_1 \Delta t) \cos(\omega_1 \Delta t) z^{-1} + \exp(-2\sigma_1 \Delta t) z^{-2}}.$$

Таким образом, постоянные  $c$ ,  $d$ ,  $\sigma_1$  и  $\omega_1$ , определяющие фильтр  $H(z)$ , получены непосредственно по известному аналоговому варианту системы.

Функция  $H(p)$  содержит кратные полюсы. Пусть корень  $p_1$  является кратным корню  $N$ -го порядка функции  $V(p)$ . Разлагая функцию  $H(p)$  на простые дроби, находим:

$$H(p) = \frac{K_1}{(p - p_1)^N} + \frac{K_2}{(p - p_1)^{N-1}} + \dots + \frac{K_{N-1}}{(p - p_1)^2} + \frac{K_N}{(p - p_1)}, \quad (2.32)$$

где действительные величины  $K_i$  для  $i=1, 2, \dots, N$

$$K_1 = \frac{1}{(i-1)!} \left[ \frac{d^{i-1}}{dp^{i-1}} (p - p_1)^N H(p) \right]_{p=p_1}.$$

Сравнивая члены правой части уравнения (2.32) с трансформантами, приведенными в табл. 2, находим следующее соответствие между ними:

$$\frac{K_i}{(p - p_1)^i} \rightarrow \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dp^{i-1}} \left[ \frac{K_i}{1 - \exp(p_1 \Delta t) z^{-1}} \right].$$

Как и в двух предыдущих случаях, постоянные  $K_i$  и  $p_i$  также получены из заданного аналогового варианта передаточной функции  $H(p)$ .

Подводя итоги, можно утверждать, что принцип инвариантности импульсной реакции применим для любой степени многочлена  $H(p)$ . Передаточная функция может содержать полюсы: единственный, кратный, либо действительные или комплексные, а также любые их комбинации. При сочетании основных рассмотренных случаев можно найти желаемые цифровые системы. Вместе с тем следует отметить некоторые недостатки описанного способа. Во-первых, поскольку последовательность коэффициентов импульсной реакции  $h$  представляет собой цифровую форму функции  $h(t)$ , можно ожидать высокую степень подобия также между характеристиками  $H(p)$  и  $H(z)$  в частотной области. Термин «высокая степень подобия» здесь имеет особый смысл. Из-за эйлинг-эффекта несоответствие формы рассмотренных характеристик в частотной области возрастает при приближении к частоте Найквиста. Другими словами, близкого сходства этих характеристик можно ожидать лишь для частот, значительно меньших  $\omega_N$ . Во-вторых, в случае использования способа инвариантности импульсной реакции усиление фильтра становится зависимым от периода квантования  $\Delta t$ , что может привести к переполнению разрядной сетки при вычислениях на ЭВМ.

### 2.5.2. Аппроксимация интеграла свертки

Возьмем аналоговую систему  $H(p)$ , обладающую требуемыми фильтрующими свойствами, которая возбуждается произвольным входным сигналом  $x(t)$  и создает на выходе сигнал  $g(t)$ . Будем искать такую цифровую систему, которая при воздействии на ее вход последовательностью

$$x = [x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), \dots]$$

отреагирует дискретным откликом, с достаточной точностью аппроксимирующий сигнал  $g(t)$  в точках отсчета. Обозначим аппроксимирующую цифровую систему через  $\hat{H}_i(z)$ , где  $i$  — номер использованного типа аппроксимации. Способ инвариантности импульсной реакции, рассмотренный в предыдущем разделе,

может рассматриваться как частный случай более общего способа инвариантности выходного сигнала. Если в первом случае сравнивается отклик аналоговой и цифровой систем на единственный импульс, то теперь сопоставляются отклики систем на входной сигнал произвольной формы. Функции  $x(t)$ ,  $g(t)$  и  $h(t)$  являются непрерывными функциями времени, поэтому их амплитуды могут быть измерены в любые произвольные моменты времени, например  $t=0; \Delta t; 2\Delta t; \dots; N\Delta t$ . Отсчеты перечисленных функций в эти моменты равны  $x(n\Delta t)$ ,  $g(n\Delta t)$  и  $h(n\Delta t)$ , где  $n=1, 2, \dots, N$ . В отличие от аналоговой системы цифровая система оперирует дискретными входными и выходными сигналами. При возбуждении системы  $\tilde{H}_i(z)$  последовательностью  $x$  на выходе появится последовательность отсчетов  $y_n$ , которые в общем случае будут отличаться от  $g(n\Delta t)$ . Это различие помимо эляйсинг-эффекта можно объяснить тем, что если аналоговый входной сигнал возбуждает систему  $H(p)$  непрерывно, то цифровой воздействует на систему только в дискретные моменты времени, когда функция имеет ненулевые значения. В промежутках между отсчетами времени система не получает информации. Будем проектировать такую систему  $\tilde{H}_i(z)$ , которая позволит минимизировать разность  $y_n - g(n\Delta t)$ . Для этого воспользуемся подходом, предложенным Р. Вичом (1968).

Известно, что соотношение между входным и выходным сигналами в аналоговой системе согласно уравнению (1.6) определяется интегралом свертки. Пусть каузальная система возбуждается односторонним сигналом  $x(t)$ , имеющим четкое вступление в начале координат на времени  $t=0$  [т. е.  $x(t)=0$  для  $t \leq 0$ ]. Изменяя пределы интегрирования в формуле (1.6) на нуль и  $t$ , получаем выражение для выходного сигнала:

$$g(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Для определения мгновенных значений  $g(n\Delta t)$  полученного сигнала вычислим интеграл свертки во временном интервале  $0 \leq \tau \leq n\Delta t$ . Предполагая эквидистантное кодирование с периодом дискретизации  $\Delta t$ , воспользуемся формулой Грегори [Hamming, 1962, с. 140]:

$$\int_0^{n\Delta t} u(x) dx = \Delta t \left[ \sum_{k=0}^n u_k - \frac{1}{2} (u_0 + u_n) + \frac{1}{12} (\Delta u_0 - \Delta u_{n-1}) - \frac{1}{24} (\Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_{n-2}) + \frac{19}{720} (\Delta^3 u_0 - \Delta^3 u_{n-3}) - \dots \right], \quad (2.33)$$

где  $\Delta$  — оператор получения первой конечной разности, так что

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n.$$

Для разностей более высоких порядков

$$\Delta^r u_n = \Delta [\Delta^{r-1} u_n] = \Delta^{r-1} u_{n+1} - \Delta^{r-1} u_n.$$

В зависимости от числа членов в формуле Грегори имеют место прямоугольная (сохраняется только первый член), трапецидальная (первые два члена), параболическая (первых три члена) и более высокие степени аппроксимации интеграла свертки.

Прямоугольная аппроксимация. Воспользовавшись выражением (2.33), найдем значение выходного сигнала для  $t = n\Delta t$ :

$$g_n = g(n\Delta t) = \Delta t \sum_{i=0}^n x_i h_{n-i} + e_{1n},$$

где сумма всех членов ряда (2.33), кроме первого, обозначена  $e_{1n}$  и здесь является погрешностью вычисления  $n$ -го отсчета функции  $g_n$  при прямоугольной аппроксимации. Последняя определяется выражением

$$e_{1n} = g_n - e_{1n} = \Delta t \sum_{i=0}^n x_i h_{n-i}. \quad (2.34)$$

Члены последовательности  $e_{1n}$  пропорциональны интервалу дискретизации  $\Delta t$  [Vich, 1968]. В области  $z$ -трансформант уравнению (2.34) отвечает выражение

$$G_1(z) = \Delta t X(z) H(z),$$

где  $X(z) = Z(x_n)$ ;  $H(z) = Z\{h_n\}$ . Соответствующая системная функция

$$\tilde{H}_1(z) = \frac{G_1(z)}{\Delta t X(z)} = H(z).$$

При сравнении полученного результата с соотношением, приводимым в предыдущем разделе, можно заметить, что способ инвариантности импульсной реакции и прямоугольная аппроксимация в методе инвариантности выходного сигнала дают одинаковые результаты.

Трапецидальная аппроксимация. Если взять первые два члена в формуле интегрирования, получим рекурсивное соотношение:

$$g_{2n} = g_n - e_{2n} = \Delta t \left[ \sum_{i=0}^n x_i h_{n-i} - (x_0 h_n + x_n h_0)/2 \right]. \quad (2.35)$$

Отсчеты погрешности  $e_{2n}$  пропорциональны величине  $(\Delta t)^2$ . Применим  $z$ -преобразование к обеим частям уравнения (2.35):

$$G_2(z) = \Delta t [X(z) H(z) - x_0 H(z)/2 - X(z) h_0/2].$$

Таблица 4. Типы аппроксимации интеграла свертки, базирующегося на интегральной формуле Гретори [Vich, 1968]

Типы аппроксимации	Рекурсивные соотношения	Системные функции	Погрешности
Прямоугольная	$\frac{g_1^n}{\Delta t} = \sum_{i=0}^n x_i h_{n-i}$	$\tilde{H}_1(z) = H(z)$	$e_{1n} \sim \Delta t$
Трапецидальная	$\frac{g_2^n}{\Delta t} = \sum_{i=0}^n x_i h_{n-i} - \frac{1}{2} (x_0 h_n + x_n h_0)$	$\tilde{H}_2(z) = H(z) - \frac{1}{2} h_0, \quad x_0 = 0$	$e_{2n} \sim (\Delta t)^2$
Параболическая (только с первой производной)	$\frac{g_3^n}{\Delta t} = \sum_{i=0}^n x_i h_{n-i} - \frac{7}{12} (x_0 h_n + x_n h_0) + \frac{1}{12} (x_1 h_n + x_{n-1} h_1)$	$\tilde{H}_3(z) = H(z) - \frac{7}{12} h_0 + \frac{1}{12} h_2 z^{-1}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0$	$e_{3n} \sim (\Delta t)^3$
Использование второй производной	$\frac{g_4^n}{\Delta t} = \sum_{i=0}^n x_i h_{n-i} - \frac{5}{8} (x_0 h_n + x_n h_0) + \frac{1}{6} (x_1 h_{n-1} + x_{n-1} h_1) - \frac{1}{24} (x_2 h_{n-2} + x_{n-2} h_2)$	$\tilde{H}_4(z) = H(z) - \frac{5}{8} h_0 + \frac{1}{6} h_1 z^{-1} - \frac{1}{24} h_2 z^{-2}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$	$e_{4n} \sim (\Delta t)^4$

Поскольку до сих пор рассматривались односторонние входные сигналы, начинающиеся с нуля в точке отсчета  $|x(t)|_{t=0}x_0=0$ ,  $z$ -трансформанта  $G_2(z)$  может быть записана более просто

$$G_2(z) = \Delta t X(z) [H(z) - h_0/2].$$

Очевидно, соответствующая системная функция имеет вид

$$\tilde{H}_2(z) = \frac{G_2(z)}{\Delta t X(z)} = H(z) - h_0/2.$$

Аналогично может быть получено выражение для более высокой степени аппроксимации интеграла свертки. Сравнивая выражения для различных системных функций, замечаем, что функцию  $\tilde{H}_i(z)$  можно существенно упростить, если определить ее исключительно через  $H(z)$  и  $h_0, h_1, \dots, h_{i-2}$  в предположении, что начальные отсчеты входного сигнала  $x_0, x_1, \dots, x_{i-2}$  равны нулю. Интересно заметить, что при равенстве нулю также и члена  $h_0$  оказывается, что  $H(z) = \tilde{H}_1(z) = \tilde{H}_2(z)$ . В этом случае ( $x_0$  и  $h_0$  равны нулю) прямоугольная и трапецидальная аппроксимации дают одинаковые результаты. В табл. 4 приведены рекурсивные соотношения, системные функции и оценки погрешностей для случаев аппроксимации с использованием конечных разностей первого и второго порядков. В некоторых особых случаях может потребоваться и более высокая степень аппроксимации, однако следует подчеркнуть, что для широкого круга геофизических задач наиболее простая прямоугольная аппроксимация обычно обеспечивает вполне приемлемую точность.

### 2.5.3. Аппроксимация способом билинейного преобразования

В силу периодичности системной функции значения  $H(z)$ , определенные на единичной окружности в  $z^{-1}$ -плоскости, в принципе будут отличаться от значений функции  $H(p)$ , найденных на оси  $j\omega$  в  $p$ -плоскости, особенно для частот, близких к  $\omega_N$ . Напомним, что периодичность функции появляется при замене  $z = e^{p\Delta t}$ . Эта и есть функция отображения, которая трансформирует любую побочную полосу на  $p$ -плоскости, имеющую ширину  $\omega_s$ , в один лист римановской поверхности на  $z^{-1}$ -плоскости. Для устранения влияния эляйсинг-эффекта воспользуемся преобразованием, отображающим всю левую половину  $p$ -плоскости (а не только единственную полосу шириной  $\omega_s$ ), на внешнюю относительно единичной окружности часть  $z^{-1}$ -плоскости. В этом случае частоты будут ограничены диапазоном от  $-\omega_N = -\pi/\Delta t$  до  $\omega_N = \pi/\Delta t$ , однако различия, связанные со свойством периодичности, исчезнут, поскольку здесь периодичности не существует. Процесс такого отображения может быть реализован путем билинейного преобразования

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{z - 1}{z + 1}, \quad (2.36)$$

которому соответствует цифровой фильтр с системной функцией

$$H(z) = [H(p)]_p = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Более полную информацию о данном типе преобразования можно найти в работах Дж. М. Тоя (1959, с. 465—479), И. М. Рэй-дера и Б. Голда (1967), М. Бата (1968, с. 36—38) и других авторов.

Билинейное преобразование имеет важное свойство: если функция  $H(p)$  выражается отношением двух многочленов по степеням  $p$  (что обычно имеет место), то и функция  $H(z)$ , получаемая в результате билинейного преобразования, также бывает представлена отношением двух полиномов. Порядок многочленов в числителе и знаменателе функции  $H(z)$  должен быть таким же, как и у функции  $H(p)$ . Обратные преобразования

$$z^{-1} = \frac{1-p}{1+p}; \quad z = \frac{1+p}{1-p} \quad (2.37)$$

описывают процесс отображения соответственно из  $z^{-1}$ - или  $z$ -плоскости на  $p$ -плоскость.

В результате прямого билинейного преобразования ось  $j\omega$  заменяется единичной окружностью в  $z^{-1}$ - или  $z$ -плоскости. Результаты отображения некоторых важных точек показаны в табл. 5. Из табл. 5 следует интересная особенность билинейного

Таблица 5. Отображение из  $p$ -плоскости в  $z^{-1}$  и  $z$ -плоскостях в результате билинейного преобразования

$p$ -плоскость	$z^{-1}$ -плоскость	$z$ -плоскость
0	1	1
-1	$\infty$	0
1	0	$\infty$
$j$	$-j$	$j$
$-j$	$j$	$-j$
$\infty$	-1	-1
Мнимая ось	Единичная окружность	Единичная окружность
Действительная ось	Действительная ось	Действительная ось

преобразования: точки, распределенные вдоль мнимой оси в  $z^{-1}$ -плоскости, отображаются в точки на единичной окружности в  $z^{-1}$ - и  $z$ -плоскости. Сместим точку по единичной окружности из положения  $C_1=1$  в положение  $C_2=-j$ . Как уже указывалось, эти две точки отвечают значениям  $\omega_D \Delta t = 0$  и  $\omega_D \Delta t = \omega_N/2$  переменной  $\omega_D \Delta t$ , где  $\omega_D$  — текущая частота при оперировании с дискретными системами. Соответствующая точка в  $p$ -плоскости будет перемещаться по мнимой оси из положения  $p=0$  в положение  $p=j$ . Таким образом, текущая частота  $\omega_A$ , используемая при оперировании аналоговыми системами, изменяется непрерывно от нуля

до единицы. Дальнейшему смещению точки в  $z^{-1}$ -плоскости по единичной окружности из положения  $C_2 = -j$  в положение  $C_3 = -1$ , т. е. от  $\omega_D \Delta t = \omega_N/2$  до  $\omega_D \Delta t = \omega_N$ , соответствует переход точки в  $p$ -плоскости из положения  $p = j$  в положение  $p \rightarrow \infty$ . Очевидно, нелинейная зависимость между  $\omega_A$  и  $\omega_D \Delta t$  является результатом устранения эйлинсг-эффекта.

Согласно формуле (2.36) для точек на мнимой оси

$$p = j\omega_A = \frac{1 - \exp(-j\omega_D \Delta t)}{1 + \exp(-j\omega_D \Delta t)} = j \operatorname{tg}(\omega_D \Delta t/2)$$

или

$$\omega_A = \operatorname{tg}(\omega_D \Delta t/2); \quad \omega_D = (2/\Delta t) \operatorname{arctg} \omega_A. \quad (2.38)$$

Таким образом, если частоты  $\omega_A$  и  $\omega_D$  связаны между собой соотношением (2.38), функции  $H\{p = j\omega_A\}$  и  $H\{z = \exp(j\omega_D \Delta t)\}$  будут иметь одинаковую величину. Некоторые авторы называют частоту  $\omega_A$  фиктивной, а  $\omega_D$  — фактической. Существует возможность компенсации нелинейного масштаба частотной шкалы путем предварительной деформации шкалы фиктивных частот. Такой вид компенсации особенно удобен для фильтров, у которых амплитудно-частотные характеристики имеют четко разграниченные области пропускания и подавления с ясно определенными частотами срезов. Рассмотренные выше частоты могут быть модифицированы в соответствии с формулой (2.38), и тогда цифровой фильтр  $H(z)$  получается из функции  $H(p)$  простой заменой  $p$  на  $(1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})$ . Такая подстановка без предварительной деформации масштаба должна привести к изменению фильтрующих свойств  $H(z)$  из-за сдвига частотной характеристики относительно истинных частот  $\omega_D$  (на месте истинных частот окажутся фиктивные  $\omega_A$ ). Билинейное преобразование, используемое при проектировании цифровых систем, достаточно точно моделирующих известные аналоговые системы, сводится к двум процедурам.

1. Заданным значениям  $\omega_{iD}$  частот, для которых требуется вычислить значения системной функции  $H(p)$  цифрового фильтра, с помощью соотношения

$$\omega_{iA} = \operatorname{tg}(\omega_{iD} \Delta t/2)$$

ставятся в соответствие значения фиктивных («аналоговых») частот  $\omega_A$ .

2. Функцию  $H(z)$  находят, заменяя  $p$  на  $(1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})$  в выражении для передаточной функции  $H(p)$  исходной аналоговой системы с одновременной заменой переменной  $\omega$  на  $\omega_A$  в  $H(p)$ .

Данный способ назван Р. Б. Блекманом (1965, с. 74—75) методом трансформации частот. Проиллюстрируем эту процедуру числовым примером.

Рассмотрим простейшую аналоговую систему

$$H(p) = \frac{1}{p + \Omega}.$$

Амплитудно-частотная характеристика системы достаточно равномерна в диапазоне  $0 < \omega \leq \Omega$  рад/с и имеет спад с крутизной, равной  $-20$  дБ/октаву, для частот  $\omega > \Omega$ . Истинная характеристика не отклоняется от данной более чем на 3 дБ с максимальным отклонением на частоте среза  $\omega = \Omega$ . Вместо амплитудно-частотной характеристики  $|H(p)|$  фактически используется  $20 \log |H(p)|$ . Если частота  $\omega$  выражена в логарифмическом масштабе, получаем логарифмическую диаграмму, обычно используемую радиоинженерами. Построение таких диаграмм отличается простотой, поскольку они хорошо аппроксимируются ломаной линией.

Для получения системной функции, во-первых, преобразуем угловую частоту  $\Omega$  в фиктивную, используя соотношение (2.38):

$$\Omega \rightarrow \operatorname{tg}(\Omega \Delta t / 2) = \omega_A.$$

Во-вторых, выполняя замену (2.36) и подставляя  $\omega_A$  вместо  $\Omega$ , находим:

$$H(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1}) + \operatorname{tg}(\Omega \Delta t / 2)}.$$

Эта функция в определенной степени моделирует поведение аналоговой системы  $H(p)$ .

Пусть требуется подавить все частоты выше 0,5 Гц для данных с дискретностью  $\Delta t = 0,1$  с. Тогда

$$\Omega = 3,14 \text{ рад/с}; \quad \omega_A = \operatorname{tg}(\Omega \Delta t / 2) = 0,16 \text{ рад/с}.$$

В этом случае системная функция

$$H(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1}) + 0,16} = \frac{1 + z^{-1}}{0,84(1,38 - z^{-1})}.$$

Функция  $H(z)$  имеет единственный нуль  $\alpha_1 = -1$  и единственный полюс  $\beta_1 = 1,38$ ; следовательно, соответствующая амплитудно-частотная характеристика может быть легко найдена с использованием способа нулей и полюсов.

Дж. Ф. Кайзер (1966) предложил использовать билинейное преобразование для проектирования специальной категории фильтров нижних частот. Билинейное преобразование было применено также Х. Нейнхофером (1971) с целью получения передаточной функции сейсмографа. Известны и другие приложения билинейного преобразования.

Фазовую характеристику рекурсивного фильтра можно представить в виде

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} H(e^{j\omega\Delta t})}{\operatorname{Re} H(e^{j\omega\Delta t})}, \quad (2.39)$$

где согласно уравнению (2.7)

$$H(z) = H(e^{j\omega\Delta t}) = \frac{\sum_{n=0}^M a_n e^{-j\omega n\Delta t}}{1 + \sum_{n=1}^L b_n e^{-j\omega n\Delta t}}.$$

Из уравнения (2.39) следует, что в общем случае рекурсивный фильтр не обладает ни нулевой, ни линейной фазовой характеристикой, поэтому на выходе фильтра нельзя получить фазонеискаженный сигнал. Как правило, искажения сигнала, создаваемые амплитудно-частотными характеристиками, неизбежны и вполне допустимы, в то время как дополнительные искажения, вызванные воздействием фазовых характеристик, нежелательны и должны быть устранены. Одно из преимуществ цифровых фильтров и заключается в том, что построить фильтр с нуль-фазовой характеристикой сравнительно несложно. Рассмотрим некоторые способы расчета таких фильтров.

Пусть цифровая система определена ее системной функцией

$$H_1(z) = \frac{\sum_{n=0}^M a_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^L b_n z^{-n}},$$

где  $M, L$  — некоторые целые числа.

Как следует, например, из выражения (1.39), комплексная функция  $H_1(z) = H_1(e^{j\omega\Delta t})$ , может рассматриваться как векторная сумма для произвольной угловой частоты  $\omega$ . Для любой частоты  $\omega$  величина и направление результирующего вектора соответственно дают амплитудно-частотную и фазовую характеристики. Создаваемый фильтром фазовый сдвиг можно полностью устранить, например, с помощью дополнительной процедуры, обеспечивающей постоянное удерживание результирующего вектора в направлении действительной оси для любой частоты  $\omega$ . Для этого может быть использована системная функция, подобная  $H_1(z)$ ,

$$H_2(z) = \frac{\sum_{n=0}^M a_n z^n}{1 + \sum_{n=1}^L b_n z^n}.$$

При графическом построении функции  $H_1(z)$  индивидуальные векторные компоненты вращаются по часовой стрелке, а в случае  $H_2(z)$  — против часовой стрелки. Следовательно, амплитудно-частотные характеристики  $H_1(z)$  и  $H_2(z)$  одинаковы, а фазовые характеристики различаются только знаком. Полезность функции  $H_2(z)$  становится очевидной при рассмотрении произведения  $H_1(z)H_2(z)$ : оно обладает системной функцией с нулевой фазовой характеристикой и амплитудно-частотной характеристикой, равной  $|H_1(z)|^2$ . Другими словами, последовательное соединение фильтров  $H(z)$  и  $H(z^{-1})$  обеспечивает фазово-нейскажающую передачу с частотной избирательностью, определяемой квадратом характеристики основного фильтра. В том случае, если важна и форма амплитудно-частотной характеристики,  $H_1(z)$  и  $H_2(z)$  должны выбираться из условия  $|H_1(z)| = |H_2(z)| = \sqrt{|H(z)|}$ , где  $H(z)$  — характеристика желаемого фильтра. Предложенный метод может быть успешно применен только к сигналам конечной длины. Последовательное соединение двух фильтров реализуется аналитически. Системная функция результирующего фильтра имеет вид

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{\sum_{n=0}^M a_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^L b_n z^{-n}} \frac{\sum_{n=0}^M a_n z^n}{1 + \sum_{n=1}^L b_n z^n}.$$

После умножения получаем:

$$H(z) = \frac{a_M z^M + (a_M a_1 + a_{M-1}) z^{M-1} + \dots +}{1 + b_L z^L + (b_L b_1 + b_{L-1}) z^{L-1} + \dots +} \rightarrow$$

$$\frac{+ \sum_{n=0}^M a_n^2 + \dots + (a_{M-1} + a_M a_1) z^{-M+1} + a_M z^{-M}}{+ \sum_{n=1}^L b_n^2 + \dots + (b_{L-1} + b_L b_1) z^{-L+1} + b_L z^{-L}}.$$

Поскольку показатели степени  $z$  при одинаковых коэффициентах отличаются только знаком, числитель и знаменатель функции  $H(z)$  формируют симметричные степенные ряды, где  $a_n = a_{-n}$  для  $n=1, 2, \dots, M$ ,  $b_n = b_{-n}$  для  $n=1, 2, \dots, L$ . После подстановки  $z = e^{j\omega\Delta t}$  как числитель, так и знаменатель становятся действительными функциями угловой частоты. Следовательно,  $H(z)$  также является действительной функцией, т. е. ее фазовая характеристика равна нулю для всех частот.

Представляет интерес исследовать более детально поведение функций  $H_1(z)$  и  $H_2(z)$ . Для этого рассмотрим некоторую простейшую систему

$$H_1(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}},$$

на вход которой воздействует сигнал, представленный коротким рядом  $x = (x_0, x_1)$ . Члены выходной последовательности  $y = (y_0, y_1, y_2)$  определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $z$  в уравнении

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1}) X(z) - (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) Y(z), \quad (2.40)$$

где  $X(z) = Z\{x_n\}$ ;  $Y(z) = Z\{y_n\}$ . Рассмотрим теперь обращенный по оси времени входной сигнал  $\bar{x} = (x_1, x_0)$ . Соответствующая выходная последовательность получается из уравнения (2.40) после подстановки  $X(z) = x_1 + x_0 z^{-1}$ . Первые три отсчета выходного сигнала, выраженные через  $x_0$  и  $x_1$ , имеют вид

$$y_0 = a_0 x_1;$$

$$y_1 = a_0 x_0 + a_1 x_1 - b_1 y_0 = a_0 x_0 + a_1 x_1 - a_1 b_1 x_1;$$

$$y_2 = a_1 x_0 - b_1 y_1 - b_2 y_0 = a_1 x_0 - a_0 b_1 x_0 - a_1 b_1 x_1 + a_0 b_1^2 x_1 - a_0 b_2 x_1.$$

Проанализируем передачу сигнала системой  $H_2(z)$ . Модифицируя уравнение (2.40) с учетом положительного знака степени  $z$ , получаем соотношение сигналов на входе и выходе в области  $z$ -трансформант:

$$U(z) = (a_0 + a_1 z) X(z) - (b_1 z + b_2 z^2) U(z), \quad (2.41)$$

где  $U(z) = Z\{u_n\}$ .

Умножение на  $z$  равносильно опережающему сдвигу сигнала по времени на один интервал дискретизации. В связи с этим система  $H_2(z)$  должна иметь два элемента, создающих опережение в целях прямой и обратной связи. Следовательно, отсчеты выходного сигнала будут подвержены влиянию текущих и будущих значений входного сигнала и будущих значений выходного сигнала. Зависимость выходного сигнала от будущих значений входного сигнала делает систему физически не осуществимой, хотя это не является препятствием при обработке заранее зарегистрированных сигналов. Данная проблема создает дополнительные трудности, поскольку текущие значения сигнала также зависят от еще не определенных отсчетов. Однако с помощью простого приема можно найти реализуемый вычислительный алгоритм. Для этого вместо расчета отсчетов выходного сигнала в возрастающем порядке начинают вычисление в обратном порядке с последнего выходного отсчета. Из соотношения (2.41) получим рекурсивную зависимость:

$$u_n^* = a_0 x_n + a_1 x_{n+1} - b_1 u_{n+1} - b_2 u_{n+2}.$$

Подавая на вход системы сигнал  $x = (x_0, x_1)$ , выходной сигнал получаем в виде  $u_1, u_0, u_{-1}$ . Три последних отсчета выходной последовательности, выраженные через значения входного сигнала, имеют вид

$$u_1 = a_0 x_1;$$

$$u_0 = a_0 x_0 + a_1 x_1 - b_1 u_1 = a_0 x_0 + a_1 x_1 - a_1 b_1 x_1;$$

$$u_{-1} = a_1 x_0 - b_1 u_0 - b_2 u_1 = a_1 x_0 - a_0 b_1 x_0 - a_1 b_1 x_1 + a_0 b_1^2 x_1 - a_0 b_2 x_1.$$

Сравнение выходных сигналов фильтров  $H_1(z)$  и  $H_2(z)$  обнаруживает интересное и важное свойство. Замена системы  $H_1(z)$  системой  $H_2(z)$  эквивалентна пропусканию обращенного по оси времени входного сигнала через систему  $H_1(z)$  с последующим обращением выходного сигнала. Другими словами, две выходные последовательности  $y$  и  $u$  идентичны, если одна из них перед приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях обращается по оси времени. Например, первый член  $y$  эквивалентен последнему члену  $u$  и т. п. Благодаря данному свойству систему  $H_2(z)$  иногда называют фильтром обратного времени.

Другая форма фазонеискажающих фильтров может быть реализована через суммирование или вычитание выходных последовательностей  $H_1(z)$  и  $H_2(z)$ . Для уяснения принципа предложенного метода рассмотрим простые системы:

$$H_1(z) = 1 - z^{-1}; \quad H_2(z) = 1 - z$$

и произвольную последовательность входного сигнала  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ .  $z$ -трансформанты выходных сигналов представлены соотношениями

$$Y_1(z) = (1 - z^{-1})X(z); \quad Y_2(z) = (1 - z)X(z),$$

где  $X(z) = Z\{x_n\}$ . Соответствующие рекурсивные зависимости принимают вид

$$y_{1n} = x_n - x_{n-1}; \quad y_{2n} = x_n - x_{n+1}.$$

При почленном суммировании и вычитании этих выходных последовательностей получаем:

$$u_{1n} = y_{1n} + y_{2n} = -x_{n+1} + 2x_n - x_{n-1};$$

$$u_{2n} = y_{1n} - y_{2n} = x_{n+1} - x_{n-1}.$$

Очевидно, что результирующие сигналы  $u_1$  и  $u_2$  являются выходными сигналами фильтров

$$U_1(z) = -z + 2 - z^{-1}; \quad U_2(z) = z - z^{-1}$$

при условии, что они возбуждаются одним и тем же входным сигналом  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ . Из формы сигналов непосредственно следует, что как  $U_1(z)$ , так и  $U_2(z)$  — фильтры с симметричными импульсными реакциями (первый — четный, второй — нечетный), и следовательно, обеспечивают фазово-неискажающую передачу сигналов.

Теперь исследуем соотношение между исходной системой  $H_1(z)$  и системами  $U_1(z)$  и  $U_2(z)$ . Для этого подставим  $z = e^{j\omega\Delta t}$  в выражение для  $H_1(z)$ :

$$H_1(z) = 1 - z^{-1} = 1 - e^{-j\omega\Delta t} = 1 - \cos \omega\Delta t + j \sin \omega\Delta t.$$

Разделяя действительную и мнимую части, имеем:

$$2 \operatorname{Re} H_1(z) = 2(1 - \cos \omega\Delta t) = 2 - e^{j\omega\Delta t} - e^{-j\omega\Delta t} = -z + 2 - z^{-1};$$

$$2 \operatorname{Im} H_1(z) = 2 \sin \omega\Delta t = -j(e^{j\omega\Delta t} - e^{-j\omega\Delta t}) = -j(z - z^{-1}).$$

Нетрудно догадаться, что

$$U_1(z) = 2 \operatorname{Re} H_1(z); \quad U_2(z) = j2 \operatorname{Im} H_1(z).$$

Полученные результаты носят общий характер и могут быть подытожены следующим образом [см. также Моoney, 1968]. Во-первых, почленное суммирование  $y_{1n} + y_{2n}$  имитирует нуль-фазовый фильтр с системной функцией вида  $2 \operatorname{Re} H_1(z)$ , во-вторых, почленное вычитание  $y_{1n} - y_{2n}$  имитирует фазосдвигающий (на  $90^\circ$ ) фильтр с системной функцией  $j2 \operatorname{Im} H_1(z)$ .

Не вызывает сомнения факт, что фильтры  $U_1(z)$  и  $U_2(z)$  выполняют идеальную фазово-неискажающую передачу. Однако в каждом конкретном случае необходимо проверять, в какой мере функции  $\operatorname{Re} H_1(z)$  и  $\operatorname{Im} H_1(z)$  сохраняют желаемые фильтрующие свойства. В то время как при последовательном соединении фильтров амплитудно-частотные характеристики  $|H_1(z)|^2$  можно получить в удобной форме, действительная и мнимая части  $H_1(z)$  не поддаются непосредственной интерпретации с точки зрения избирательных свойств системы. Первый из рассмотренных подходов удобен при проектировании фильтров, предназначенных для сигналов, представленных в виде коротких входных последовательностей, а второй — в виде длинных.

Существует широкий класс фильтров, имеющих только комплексные нули, расположенные на единичной окружности (см., например, простой режекторный фильтр для подавления частоты  $0,25 \omega_N$ , рассматривавшийся в разделе 2.4). Такое распределение нулей функции  $H(z)$  предпочтительнее при проектировании фазово-неискажающих фильтров. Рассмотрим общее выражение для системной функции:

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_L z^{-L}}.$$

Как было показано на рис. 2.6, полюсы режекторных фильтров обычно располагают вблизи нулей функции  $H(z)$ , чтобы обеспечить возможно большую равномерность амплитудно-частотной характеристики вне пределов диапазона подавления. Как следствие, многочлены в числителе и знаменателе функции  $H(z)$  имеют один и тот же порядок  $M=L$ . Соотношение сигналов на входе и выходе имеет вид

$$Y(z) = \frac{A(z)}{B(z)} X(z), \quad (2.42)$$

где  $Y(z)$  и  $X(z)$  —  $z$ -трансформанты соответственно выходного и входного сигналов.

Если переписать уравнение (2.42) в том же виде, что и уравнение (2.19), получим:

$$Y(z) = U(z) A(z),$$

где  $U(z) = X(z)/B(z)$ . Такое представление может быть проинтерпретировано как замена рекурсивного фильтра (2.42) последовательным соединением конволюционного фильтра  $A(z)$  и рекурсивного фильтра  $1/B(z)$ . Поскольку ранее предполагалось, что все нули функции  $H(z)$  располагаются на единичной окружности, числитель системной функции может быть записан в виде

$$A(z) = \prod_{i=1}^{M/2} a_0 [z^{-1} - \exp(-j\Omega_i)] [z^{-1} \exp(j\Omega_i)], \quad (2.43)$$

где  $\exp(\pm j\Omega_i)$  —  $i$ -ая пара из  $M/2$  пар комплексно-сопряженных нулей функции  $H(z)$ . Чтобы предотвратить появление мнимых частей в отсчетах выходного сигнала, наличие комплексных нулей подобно комплексным полюсам допускается только в комплексно-сопряженных парах. Следовательно, в нашем случае число  $M$  должно быть четным. Для каждой  $i$ -й пары сомножителей в уравнении (2.43) можно записать

$$[z^{-1} - \exp(-j\Omega_i)] [z^{-1} - \exp(j\Omega_i)] = z^{-2} - 2 \operatorname{Re}[\exp(j\Omega_i)] z^{-1} + 1.$$

Полученный результат всегда выражается симметричным многочленом второго порядка по степеням  $z^{-1}$ . Числитель  $A(z)$ , представленный произведением таких же многочленов, тоже является симметричным многочленом. Следовательно, свертка с фильтром  $A(z)$  не вносит в сигнал фазовых искажений. Для соблюдения условия устойчивости полюсы не должны располагаться на единичной окружности. Знаменатель же  $B(z)$  не является симметричным многочленом, поэтому вносит нелинейные фазовые искажения. Для устранения фазовых искажений за счет рекурсивной части  $1/B(z)$  фильтра  $H(z)$ , как упоминалось ранее, можно использовать обращенные во времени сигналы. Тогда входной сигнал вначале проходит через рекурсивный фильтр  $1/B(z)$ , затем через соответствующий фильтр обратного времени и конволюционный фильтр  $A(z)$ . Следует заметить, что результирующая система отличается от фильтра, описываемого уравнением (2.42). Если исходная амплитудно-частотная характеристика имеет вид

$$|H(z)| = |A(z)/B(z)|,$$

то ее фазово-неискажающая модификация

$$|H_1(z)| = |A(z)/B(z)|^2,$$

и соответственно вместо выходной последовательности  $\{y_h\}$  генерируется последовательность  $\{y_{1h}\}$ . При этом требуется применять специальные меры, чтобы реализованная система  $H_1(z)$  удовлетворяла заданным фильтрующим свойствам  $H(z)$ . Данная процедура представляется достаточно сложной по сравнению с ранее рассмотренными способами, и поэтому имеет скорее теоретическое значение, чем практическое [см. также Göncz and Zelei, 1972].

Согласно определению аналоговые величины принимают в некотором диапазоне непрерывные значения, измеримые числами с произвольным количеством значащих цифр. Практически это количество ограничивается точностью используемого измерительного устройства, хотя сама по себе измеряемая величина не вносит никаких ограничений. В противоположность этому термин «цифровой» всегда подразумевает квантованные значения, т. е. величины, представленные набором уровней, отличающихся числом ступеней, или шагов квантования, по уровню  $E$ . Другими словами, истинное значение сигнала аппроксимируется ближайшим квантованным значением. Выбор величины шага квантования  $E$  рассматривается, например, В. Зерном (1974). Поскольку цифровые вычислительные машины оперируют словами с конкретным числом разрядов, отсчеты сигналов могут быть представлены в ЭВМ только конечным числом уровней. Это означает, что параметры цифрового фильтра, так же как и результат фильтрации, предусмотренный вычислительным алгоритмом, могут быть получены только с конечной точностью [см., например, Donnell, 1967; Bendat and Piersol, 1971]. Разность между квантованной и точной величинами не превосходит половины шага квантования, т. е.  $E/2$ . Фиксированная длина слова любой вычислительной машины вносит погрешности трех основных типов. Первый тип погрешности вызван квантованием входного сигнала, второй связан с округлением результатов арифметических операций, третий обусловлен квантованием значений параметров фильтра. Эти погрешности далее рассматриваются самостоятельно.

### 2.7.1. Погрешности, вызванные квантованием входного сигнала

Естественно, в случае, когда входной сигнал является по своей природе цифровым, погрешности первого типа не возникают<sup>1</sup>. Наоборот, если входной сигнал  $x(t)$  — аналоговый, то перед его обработкой на ЭВМ он подвергается аналогово-цифровому преобразованию; на выходе преобразователя получается квантованный сигнал  $x_n$ , имеющий ступенчатую форму. Таким образом, процесс аналогово-цифрового преобразования является основным источником погрешностей первого типа. Например, для амплитуд аналоговых сигналов, равных  $0, \pm E, \pm 2E, \dots$ , любое отклонение, меньшее  $\pm E/2$ , не изменяет результатов квантования. Если погрешности квантования малы по сравнению с амплитудами сигнала  $x(t)$ , они создают приблизительно такой же эффект, как наложение на входной сигнал  $x(t)$  случайного шума. В этом смысле квантованный входной сигнал можно записать в виде

$$x_n = x(n\Delta t) + q(n\Delta t),$$

<sup>1</sup> Если отсчеты входного сигнала представлены числом разрядов, не превышающим разрядности машинного слова. (Прим. перев.).

где  $x(n \Delta t)$  — точные значения входного сигнала, дискретизированного с интервалом  $\Delta t$ ;  $q(n \Delta t)$  — привносимый шум;  $n$  — целое число. Полагая отсчеты  $q(n \Delta t)$  взаимно независимыми и равномерно распределенными внутри интервала  $-E/2 \leq q(n \Delta t) \leq E/2$  с плотностью вероятности  $p(q) = 1/E$ , оценим дисперсию погрешностей первого рода:

$$\bar{q}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 p(q) dq = \frac{1}{E} \int_{-E/2}^{E/2} q^2 dq = \frac{E^2}{12}.$$

Для анализа влияния погрешностей квантования входного сигнала при его преобразовании некоторой конкретной системой можно применить один из следующих подходов. В случае достаточно точного кодирования входного сигнала  $q(n \Delta t)$  трактуется как случайный аддитивный шум. Квантование входного сигнала незначительно изменяет его форму и обычно не создает дополнительных проблем при обработке. Для простых систем удобно аналитически вычислять влияние входного шума  $q(n \Delta t)$  на характеристики выходного сигнала. Другой подход состоит в моделировании на ЭВМ передачи шума  $q(n \Delta t)$  исследуемой системой с использованием генератора случайного шума. О. Кулханек и К. Клима (1970) изучали погрешности первого типа в частотной области. Они использовали аналитические импульсы Берлаге и оценивали частотные диапазоны надежного аналогово-цифрового преобразования применительно к определенному устройству квантования и различным формам спектра входного сигнала.

### 2.7.2. Погрешности, вызванные округлением результатов при операциях умножения

Вторым источником погрешностей является округление промежуточных и окончательных результатов, получаемых в процессе обработки сигнала. Этот источник представляет собой более серьезную проблему. Наиболее подробное ее обсуждение, которое включает числовые примеры и позволяет оценить требуемую длину машинного слова, выполнено Ч. М. Рэйдером и Б. Голдом (1967). Ниже рассмотрим принципы исследования некоторых статистических характеристик этого типа погрешностей.

В качестве примера используем простой рекурсивный фильтр первого порядка, описываемый рекурсивным соотношением

$$y_n = x_n - 0,5y_{n-1},$$

и входную последовательность

$$x = (1, 1, 1, \dots).$$

В результате умножения и вычитания (см. рекурсивное соотношение) найдем несколько первых отсчетов выходной последовательности:

$$y = (1; 0,5; 0,75; 0,625; 0,6875; 0,65625; 0,671875; \dots).$$

Отсюда видно, что на каждом итерационном шаге число разрядов справа от запятой, представляющих точно вычисленное значение  $y_n$ , увеличивается на единицу. Очевидно также, что это повышение числа разрядов обусловлено количеством десятичных разрядов коэффициента  $b_1=0,5$  в цепи обратной связи фильтра. Поскольку в приведенном примере ( $b_1=0,5$ ), число десятичных разрядов справа от запятой возрастает на единицу при каждой итерации для отсчетов выходной последовательности. В случае неограниченного увеличения числа отсчетов выходной последовательности, т. е. при  $n \rightarrow \infty$ , для точного представления выходной последовательности  $\{y_n\}$  даже в данном простом примере потребуются использовать числа с бесконечно большим количеством разрядов. Так как это требование не может быть удовлетворено ни в одной вычислительной машине, погрешности округления результатов умножения при цифровой фильтрации являются неизбежными.

Как видно из приведенного примера, данный тип погрешностей связан, прежде всего, с действием цепи обратной связи, являющейся обязательным элементом рекурсивного фильтра. Нерекурсивные фильтры, не имеющие цепи обратной связи, практически не подвержены влиянию округления результатов умножения. Именно подача части выходного сигнала обратно на вход фильтра представляет главный источник погрешностей округления. Таким образом, влияние погрешностей округления на выходной сигнал, проявляющегося при итерационном процессе, зависит от способа реализации и параметров используемого фильтра. Рассмотрим общую прямую форму реализации рекурсивного фильтра  $L$ -го порядка  $H(z) = A(z)/B(z)$ , показанного на рис. 2.3, а. Пусть погрешности округления представлены последовательностью  $r_n$ . Тогда в соответствии с результатами, полученными в разделе 2.2.3 [см. также Rader and Gold, 1967], рекурсивное выражение для выходного сигнала, отягченного погрешностями округления, можно записать в виде

$$y_n = \sum_{i=0}^M a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^L b_i y_{n-i} + r_n,$$

где  $M, L$  — соответственно порядок многочленов в числителе и знаменателе функции  $H(z)$ . При переходе к  $z$ -трансформантам получим:

$$Y(z) = X(z) \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^L b_i z^{-i}} + R(z) \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^L b_i z^{-i}}. \quad (2.44)$$

Здесь  $z$ -трансформанта выходного сигнала представлена как сумма двух слагаемых. Из сравнения выражения (2.44) с уравнением (2.19), приведенным в разделе 2.2.3, очевидно, что первое

слагаемое описывает передачу через фильтр  $H(z)$  входной последовательности  $\{x_n\}$ , свободной от погрешностей округления, а второе — передачу только шума, создаваемого погрешностями округления  $\{r_n\}$ , через фильтр с системной функцией  $1/B(z)$ , представляющий собой цепь обратной связи фильтра  $H(z)$ . Как и в предыдущем случае, округление результатов умножения создает такой же эффект, как и случайный входной шум. Вообще погрешности округления могут возникать либо на выходе прямой цепи, либо в цепи обратной связи блок-схемы фильтра (см. рис. 2.3, а). В первом случае появление или неоявление погрешности округления зависит от числа значащих разрядов, которыми представлены отсчеты выходного сигнала и коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_M$ . Далее этот тип погрешностей не будет приниматься во внимание. Во втором же случае округление неизбежно из-за присущей рекурсивным фильтрам обратной связи. Погрешности, появляющиеся на выходе отдельных элементов в цепи обратной связи, могут быть заменены одним источником ошибок  $\{r_n\}$ , приложенным к выходу фильтра  $\{y_n\}$ , как это показано в формуле (2.44). Для данной реализации фильтра среднее квадратическое значение шумовой составляющей в выходной последовательности  $\{y_n\}$  может быть вычислено через величину шага квантования  $E$ . Рассмотрим только второе слагаемое правой части уравнения (2.44). Из уравнения (2.44) следует, что выходной шум может рассматриваться в качестве выходного сигнала системы  $1/B(z)$ , возбуждаемой шумом, создаваемым погрешностями округлений  $\{r_n\}$ .

Чтобы охарактеризовать поведение выходного шума, используем некоторые статистические характеристики, а именно среднее квадратическое значение сигнала, выраженное через автокорреляционную функцию или спектр мощности. Будем считать, что  $\{r_n\}$  некоррелированная последовательность, т. е. белый шум. Для таких последовательностей значение автокорреляционной функции при временном сдвиге

$$R_{rr}(m) = \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N r_n r_{n+m} = \frac{E^2}{12} = \bar{r}^2 & \text{для } m = 0; \\ 0, & m \neq 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Здесь  $2N+1$  — число отсчетов последовательности  $\{r_n\}$ . Так как автокорреляционная функция  $R_{rr}(m)$  и соответствующий ей спектр мощности  $\Phi_{rr}(z)$  связаны соотношением

$$\Phi_{rr}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{rr}(m) z^{-m} = \frac{E^2}{12},$$

то с учетом выражения (2.45) имеем:

$$\Phi_{rr}(z) = R_{rr}(0) = \frac{E^2}{12}.$$

Это соотношение справедливо только тогда, когда  $\{r_n\}$  — белый шум. В общем случае

$$\bar{r}^2 = R_{rr}(0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \Phi_{rr}(z) z^{-1} dz. \quad (2.46)$$

В то время как спектр мощности входного шума в соответствии с предположением о его некоррелированности во всем частотном диапазоне равен константе  $E^2/12$ , спектр мощности  $\Phi_{nn}(z)$  на выходе фильтра  $1/B(z)$ , представляющего собой цепь обратной связи системы  $H(z)$ , согласно уравнению (1.23) имеет вид

$$\Phi_{nn}(z) = \frac{1}{B(z)B(z^{-1})} \frac{E^2}{12}.$$

По аналогии с выражением (2.46) дисперсия  $\bar{n}_r^2$  шума на выходе

$$\bar{n}_r^2 = \frac{E^2}{24\pi j} \int_{\Gamma} \frac{z^{-1} dz}{B(z)B(z^{-1})}. \quad (2.47)$$

Очевидно, что величина  $\bar{n}_r^2$  определяется шагом квантования  $E$  и положением полюсов системной функции  $H(z)$ .

Аналогичная процедура может использоваться и при канонической форме реализации фильтра. Из рис. 2.3, б следует, что в этой блок-схеме рециркулирует не последовательность  $\{y_n\}$ , как в предыдущем случае, а последовательность  $\{u_n\}$ . Следовательно, влияние погрешностей квантования может рассматриваться как наложение шума на сигнал  $u$ . Подобно случаю прямой формы реализации все индивидуальные источники шумов в цепи обратной связи блок-схемы заменены на один общий источник шума. Используя выражения (2.19) и (2.20), запишем соотношения сигналов на входе и выходе в виде

$$Y(z) = U(z) \sum_{i=0}^M a_i z^{-i};$$

$$U(z) = \frac{X(z) + V(z)}{1 + \sum_{i=1}^L b_i z^{-i}},$$

где  $V(z)$  —  $z$ -трансформанта шумовой последовательности  $\{v_n\}$ . Этим выражениям в области времен соответствуют рекурсивные соотношения

$$y_n = \sum_{i=0}^M a_i u_{n-i}; \quad u_n = x_n - \sum_{i=1}^L b_i z^{-i} + v_n.$$

Подставляя значения  $U(z)$  в уравнение для  $Y(z)$ , получаем:

$$Y(z) = \frac{[X(z) + V(z)] \sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^L b_i z^{-i}} = X(z)H(z) + V(z)H(z). \quad (2.48)$$

Как и в случае прямой формы реализации цепи, правая часть уравнения (2.48) представлена двумя слагаемыми. Первое слагаемое описывает процесс прохождения через фильтр  $H(z)$  входного сигнала  $x$ , свободного от погрешностей квантования, а второе — прохождение шума  $v$  через систему  $H(z)$ . Различие между прямой и канонической формами реализации заключается в том, что если при прямой форме шум квантования проходит только через цепь обратной связи [используется только знаменатель  $H(z)$ ], то при канонической шум проходит через систему, включая цепь обратной связи. В соответствии с выражением (2.47) среднее квадратическое значение выходного шума  $\bar{n}_v^2$  для канонической формы реализации

$$\bar{n}_v^2 = \frac{E^2}{24\pi j} \int_{\Gamma} H(z)H(z^{-1})z^{-1} dz. \quad (2.49)$$

Подводя итоги, можно сказать, что статистические характеристики второго типа погрешностей квантования возможно определить путем ввода в рассмотрение фиктивных внешних источников белого шума, воздействующих на вход бесшумового фильтра. Простое добавление шума на выходе фильтра, как в случае погрешностей первого типа, здесь уже не приемлемо, поскольку положение источника шума в системе зависит от формы реализации цифровой системы. Дисперсия шума на выходе в случае прямой и канонической форм реализации цепи определяется соответственно уравнениями (2.47) и (2.49). Из этих уравнений следует, что дисперсия обуславливается величиной шага квантования и положением особых точек системной функции. Ч. М. Рэйдер и Б. Голд (1967) путем использования однополюсного фильтра показали, что дисперсия шума на выходе быстро возрастает при приближении полюса к единичной окружности.

### 2.7.3. Погрешности, вызванные квантованием параметров фильтра

Погрешности третьего типа, связанные с квантованием параметров фильтра, которые первоначально заданы с неограниченной степенью точности, меняют характеристики фильтра. Очевидно, любое отклонение коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_M$  и  $b_1, b_2, \dots, b_L$  от точных значений вызывает изменение положения нулей и полюсов системной функции. С увеличением порядка системной функции и при приближении полюсов к единичной окружности зависимость

параметров фильтра от точности их представления возрастает. Например, Б. Голд и Ч. М. Рэйдер (1969) рекомендуют ограничиться фильтрами только первого и второго порядков. Фильтры более высокого порядка, даже если они были сконструированы с соблюдением условия устойчивости, из-за неточного расчета их параметров могут легко создавать нестабильные выходные сигналы. Таким образом, использование фильтров высокого порядка требует принятия специальных мер предосторожности при расчетах коэффициентов системной функции. Альтернативным и значительно лучшим в смысле точности решением является замена исходной системы несколькими субфильтрами первого и второго порядков. Разложение отношения двух многочленов на простые дроби рассматривалось в разделе 2.5.1. Это разложение рекомендуется выполнять в  $p$ -плоскости, а не в  $z$ -плоскости.

Интересным свойством погрешностей третьего типа является их зависимость от интервала дискретизации  $\Delta t$ . Плотная дискретизация, т. е. меньшее значение  $\Delta t$ , в общем случае требует более высокой точности вычисления параметров системы. Если принимать во внимание погрешности квантования, то может оказаться, что простое уменьшение  $\Delta t$  не обязательно даст лучшую аппроксимацию аналогового фильтра, а наоборот, приведет к потере устойчивости фильтра. Более подробно взаимосвязь между положением полюсов, порядком фильтра, периодом дискретизации и точностью коэффициентов фильтра отражена в работах Дж. Ф. Кайзера (1966), а также Б. Голда и Ч. М. Рэйдера (1969).

В настоящей главе рассматриваются свойства трех основных категорий фильтров, различающихся формой частотных характеристик. Имея в виду идеальные амплитудно-частотные характеристики с бесконечно крутыми срезами, эти три категории определяют следующим образом:

- 1) **низкочастотные фильтры** — фильтры, амплитудно-частотные характеристики которых имеют постоянное усиление в полосе пропускания  $|\omega| \leq \omega_L$  и нулевое вне ее;
- 2) **высокочастотные фильтры** — фильтры, амплитудно-частотные характеристики которых имеют постоянное усиление в полосе пропускания  $|\omega| \geq \omega_H$  и нулевое вне ее;

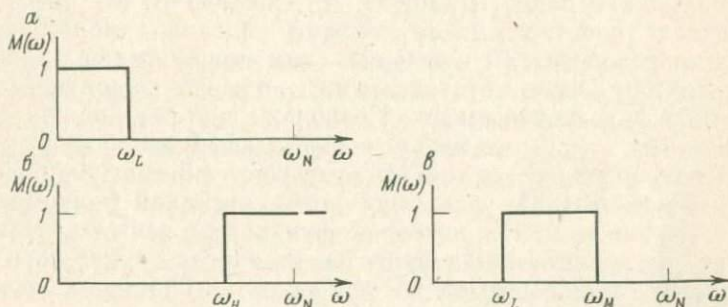


Рис. 3.1. Амплитудно-частотные характеристики основных идеальных фильтров. а — низкочастотного; б — высокочастотного; в — полосового; показаны только области положительных частот

3) **полосовые фильтры** — фильтры, обеспечивающие равномерное усиление в полосе пропускания  $\omega_L \leq |\omega| \leq \omega_H$  и нулевое усиление (бесконечное подавление) за пределами указанного диапазона.

Частоты  $\omega_L$  и  $\omega_H$  называются граничными частотами, или частотами среза фильтра.

На рис. 3.1 показаны амплитудно-частотные характеристики идеальных фильтров. Характеристики реальных фильтров по указанным выше причинам являются лишь более или менее хорошими аппроксимациями идеальных характеристик. Все категории фильтров обсуждаются далее отдельно, однако основное внимание уделяется изучению низкочастотных фильтров, поскольку они дают основу для получения главных соотношений при проектировании других категорий фильтров.

Высокочастотные фильтры могут рассматриваться как обратные по отношению к низкочастотным, а полосовые — как комбинация низкочастотного и высокочастотного. Перечень разновидностей фильтров будет неполным, если не упомянуть о заграждающем полосовом или о режекторном фильтрах. Но о них уже указывалось в главе 2, поэтому здесь они не рассматриваются. Характеристики заграждающих полосовых фильтров могут быть определены через характеристики полосовых пропускающих фильтров и/или комбинацию низкочастотных и высокочастотных фильтров. Некоторые авторы [см., например, Wood, 1968] для всех упомянутых категорий фильтров используют общее название *пропускающие фильтры*.

### 3.1. НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ФИЛЬТРЫ

По определению идеальный низкочастотный фильтр должен пропускать без искажения все частоты ниже  $|\omega| \leq \omega_L$  и подавлять частоты выше  $|\omega| > \omega_L$ . Низкочастотная фильтрация может рассматриваться как операция нахождения среднего арифметического в скользящем окне [Шварц С. А., Соколов В. М., 1954].

В целях удобства математического описания процесса фильтрации принимаются во внимание как положительные частоты, так и отрицательные, хотя последним обычно не приписывается какой-либо физический смысл. Поскольку система должна давать вещественный отклик на любой вещественный входной сигнал, ее импульсная реакция должна быть вещественной функцией времени, а действительная и мнимая части системной функции будут соответственно четной и нечетной функциями частоты. Наибольший интерес представляют фильтры, не вносящие фазового сдвига, поэтому, где это возможно, используются системные функции, мнимая часть которых равна нулю.

#### 3.1.1. Идеальные низкочастотные фильтры

Рассмотрим идеальный фильтр

$$H(\omega) = \begin{cases} A, & |\omega| \leq \omega_L; \\ 0, & |\omega| > \omega_L, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $A$  — действительное число, определяющее усиление фильтра в полосе пропускания. Обычно принято нормализовать системную функцию таким образом, чтобы усиление в полосе пропускания фильтра было равным единице, т. е.  $A=1$ . Поскольку  $H(\omega)$  является действительной величиной, равной  $A$  или нулю, то ни в одну из частотных составляющих  $\omega$  не вносится фазового сдвига. Импульсная реакция и функция  $H(\omega)$ , заданная в уравнении (3.1), образуют пару преобразования Фурье, так что

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_L}^{\omega_L} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{\pi} \int_0^{\omega_L} \cos \omega t d\omega =$$

$$= \frac{A}{\pi t} \sin \omega_L t = \frac{A \omega_L}{\pi} \frac{\sin \omega_L t}{\omega_L t}. \quad (3.2)$$

Очевидно, что функция  $h(t)$ , определенная для произвольного значения  $t$ , имеет форму  $(\sin x)/x$ . Определим отсчеты дискретной весовой функции  $\{h_n\}$ . Пусть шаг дискретности по времени и частота Найквиста равны соответственно  $\Delta t$  и  $\omega_N$ . Полагая  $|\omega_N| > |\omega_L|$ , из уравнения (1.33) находим:

$$1/\Delta t = \omega_N/\pi.$$

Тогда дискретные времена отсчета функции

$$n\Delta t = n\pi/\omega_N,$$

где  $n$  — целое число. Заменяем непрерывное время  $t$  квантованным  $n\Delta t$  и, используя выражения (3.2), находим коэффициенты фильтра:

$$h_n = \frac{A}{\pi} \int_0^{\omega_L} \cos(\omega n\Delta t) d\omega = \frac{A \omega_L}{\pi} \frac{(\omega_L n\Delta t)}{\omega_L n\Delta t}, \quad (3.3)$$

где  $n$  принимает значения от  $-\infty$  до  $\infty$ . Другими словами, для точной реализации идеального низкочастотного фильтра, представленного уравнением (3.1), требуется бесконечная последовательность коэффициентов. Поскольку функция  $\{h_n\}$  представлена ненулевыми отсчетами в области как положительных значений времени, так и отрицательных, цифровой фильтр  $H(z) = Z\{h_n\}$  является физически неосуществимым.

Нуль-фазовая характеристика фильтра представляет достаточное, но не необходимое условие отсутствия фазовых искажений. Как было показано в главе 1, для этого фактически необходимо обеспечить лишь линейность фазовой характеристики. Таким образом, идеальный фазово-неискажающий низкочастотный фильтр в общем случае может быть записан в виде

$$H(\omega) = \begin{cases} A \exp(-j\omega t_1), & |\omega| \leq \omega_L; \\ 0, & |\omega| > \omega_L, \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $t_1$  — постоянная времени, определяющая фазовую характеристику фильтра. В соответствии с теоремой запаздывания [Proulis, 1962, с. 14—15] импульсная реакция этого фильтра

$$h(t) = \frac{A \omega_L}{\pi} \frac{\sin \omega_L (t - t_1)}{\omega_L (t - t_1)}.$$

Если время  $t_1$  кратно шагу квантования, т. е.  $t_1 = m \Delta t$ , то для дискретного времени

$$h_n = \frac{A \omega_L}{\pi} \frac{\sin \omega_L \Delta t (n - m)}{\omega_L \Delta t (n - m)}. \quad (3.5)$$

Из уравнения (3.3) следует, что при нуль-фазовой характеристике последовательность  $\{h_n\}$  симметрична относительно  $n=0$ . В случае линейной фазовой характеристики  $\{h_n\}$  также симметрична, но только относительно  $n=m$ .

Таким образом, фильтр (3.4) или (3.5) вносит некоторый временной сдвиг между сигналами на входе и выходе. Временной интервал  $m \Delta t$  при  $m > 0$  называется временной задержкой, а при  $m < 0$  временным опережением. Фильтры с нуль-фазовой характеристикой ( $m=0$ ) могут рассматриваться как частные случаи более общих фильтров, имеющих линейные фазовые характеристики. При  $m=0$  не появляется никаких сдвигов, и выходной сигнал возникает немедленно в ответ на любое возбуждение входа фильтра.

Чтобы оценить импульсную реакцию фильтра<sup>1</sup>  $\{h_n\}$ , можно воспользоваться разложением в ряд Фурье, как показано в главе 2. Для цифровых фильтров с шагом дискретности  $\Delta t$  частотная характеристика  $H(\omega)$  в уравнении (3.1) становится периодической функцией частоты с периодом повторения  $\omega_s = 2\pi/\Delta t$ . В соответствии с результатами, приведенными в главе 1 (см. рис. 1.3), характеристика  $H(\omega)$  дискретного цифрового фильтра представлена основной и побочными компонентами, амплитуда максимума которых в  $1/\Delta t$  раз меньше амплитуды характеристики аналогового фильтра. Импульсная реакция последнего является огибающей функции  $\{h_n\}$ . Если ограничиться лишь основной компонентой характеристики, то четную периодическую функцию  $H_S(\omega) = H_S(\omega \pm k\omega_s)$  можно представить в виде

$$H_S(\omega) = \begin{cases} A/\Delta t, & |\omega| \leq \omega_L; \\ 0, & \omega_L < |\omega| \leq \omega_s/2. \end{cases}$$

Периодическая функция  $H_S(\omega)$  может быть выражена суммой косинусидальных членов

$$H_S(\omega) = \frac{h_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cos \omega n \Delta t.$$

Поскольку частотные составляющие из диапазона  $\omega_L < |\omega| \leq \omega_s/2$  не вносят никакого вклада,

$$h_n = \frac{2}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} H_S(\omega) \cos \omega n \Delta t d\omega = \frac{2A}{\omega_N \Delta t} \int_0^{\omega_L} \cos \omega n \Delta t d\omega$$

или

$$h_n = \begin{cases} \frac{2A\omega_L}{\Delta t \omega_N} \frac{\sin \omega_L n \Delta t}{\omega_L n \Delta t}, & n = 1, 2, \dots; \\ \frac{2A\omega_L}{\Delta t \omega_N}, & n = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

<sup>1</sup> По заданной частотной характеристике. (Прим. перев.).

Заменяя  $\omega_N = \pi/\Delta t$  в соотношении (3.6), находим коэффициенты  $h_n$  с использованием периода квантования и частоты среза фильтра:

$$h_n = \begin{cases} \frac{2A\omega_L}{\pi} \frac{\sin \omega_L n \Delta t}{\omega_L n \Delta t}, & n = 1, 2, \dots; \\ \frac{2A\omega_L}{\pi}, & n = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Системная функция  $H_S(\omega)$  является действительной и четной функцией частоты, и следовательно, соответствующая ей импульсная реакция  $\{h_n\}$  — четная временная функция, для которой  $h_n = h_{-n}$ . В выражении (3.7) представлены отсчеты  $\{h_n\}$  только для неотрицательного времени. Однако это соотношение можно распространить и на отрицательную часть оси времени простым делением коэффициентов фильтра  $h_n, n=1, 2, \dots$  на два. Тогда коэффициенты, получаемые из выражения (3.7), будут аналогичны коэффициентам в уравнении (3.3) и системная функция примет вид

$$H(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}, \quad (3.8)$$

где  $h_{-n} = h_n$ , что фактически совпадает с результатом, уже полученным в уравнении (2.4).

### 3.1.2. Усеченная импульсная реакция фильтра

Из рассмотренного ранее можно сделать вывод, что низкочастотные фильтры с временными характеристиками, представленными в уравнениях (3.3), (3.5) и (3.7), осуществляют идеальное разделение желаемых частотных составляющих от нежелательного шума. Если спектр сигнала в частотном диапазоне  $(-\omega_L, \omega_L)$  передается без искажений, то составляющие спектра шума на частотах  $|\omega| > \omega_L$  полностью подавляются. В действительности существует ряд факторов, в силу которых реализация идеальных фильтров, описанных в предыдущих разделах, невозможна [см. также Jones et al., 1955].

Как следует из соотношения (3.6), идеальный фильтр должен иметь бесконечную импульсную реакцию. Но, поскольку реализуемые на ЭВМ фильтры не могут быть представлены бесконечными рядами, импульсные реакции приходится усекать. Усечение характеристики, наряду с другими нежелательными эффектами [Tomar, 1965; Jackson, 1967; Ulrych, 1972], приводит к появлению колебательного процесса на амплитудно-частотных характеристиках как в полосе пропускания, так и в области подавления. Наличие колебательного процесса на амплитудно-частотных характеристиках нарушает условие (3.1) постоянства усиления в интер-

вале частот  $|\omega| \leq \omega_L$  и равенство его нулю для частот  $|\omega| > \omega_L$  [см. Bath, 1974, с. 100—105). Это означает, что некоторые нежелательные составляющие будут пропускаться реализуемым на практике фильтром, а часть частотных составляющих в полосе пропускания будет подавляться больше, чем другие.

Из спектрального анализа временных рядов известно (см. также раздел 2.1), что колебательные искажения характеристики могут быть уменьшены путем специального взвешивания коэффициентов  $\{h_n\}$ . Чтобы сгладить резкий скачок функции  $\{h_n\}$  в точке усечения, вводится специальная весовая функция, что ослабляет колебания амплитудно-частотной характеристики.

Если амплитудно-частотная характеристика  $|H(\omega)|$  непрерывна, то системная функция (3.8) вполне удовлетворительно аппроксимирует форму  $H(\omega)$  при достаточно большом числе  $n$ . Однако на частоте среза фильтра  $\omega = \pm \omega_L$  рассматриваемая функция  $|H(\omega)|$  испытывает разрыв, меняя скачком свое значение от  $A$  до 0. Прямым следствием этой особенности формы  $|H(\omega)|$  является появление у практически реализуемых<sup>1</sup> системных функций выбросов вблизи точек разрыва, известных как явление Гиббса. Такие выбросы могут привести к недопустимым отклонениям от желаемой формы характеристики. Указанное явление не может быть устранено простым увеличением длины импульсной реакции, но его возможно свести к минимуму сглаживанием разрывов требуемой амплитудной характеристики [Meyerhoff, 1968 a, b, c]. Поэтому обычно разрывную функцию  $|H(\omega)|$  аппроксимируют в окрестностях точки разрыва плавной кривой и затем вычисляют весовую функцию, отвечающую сглаженной  $|H(\omega)|$ . В большинстве случаев это — компромисс по отношению к исходному требованию идеального разделения полезной и нежелательной компонент входной последовательности.

Упомянутая аппроксимация амплитудно-частотной характеристики означает, что нужно ввести переходную зону, в пределах которой усиление плавно уменьшается от максимального значения в полосе пропускания до минимального в зоне подавления. Форма характеристики в переходной зоне зависит от конкретной реализации фильтров, но плавный переход в ней всегда вызывает ослабление части полезного сигнала и пропускания части шума на выход фильтра. Импульсная реакция может быть найдена из гладкой амплитудно-частотной характеристики через обратное преобразование Фурье.

Существует множество способов проектирования ограниченных по длине операторов низкочастотных фильтров. Большинство из них строится в соответствии с требованиями, предъявляемыми к частотной характеристике. Способы расчета таких фильтров приводятся в следующих разделах настоящей главы. В отличие от такого подхода С. Х. Чан и Л. С. Леон (1972, 1974) предложили

<sup>1</sup> Т. е. соответствующих усеченным весовым функциям с конечным числом отсчетов. (Прим. перев.).

интересную технику конструирования фильтров непосредственно во временной области. Они сглаживали зашумленную трассу в скользящем окне полиномом фиксированной степени путем использования метода наименьших квадратов. С. Х. Чан и Л. С. Леон успешно использовали эту технику для сглаживания гравиметрических данных с целью выделения скрытых аномалий. Они показали, что обработка с использованием симметричного полиномиального оператора эквивалентна фазово-нейскажающей низкочастотной фильтрации. Характеристики оператора фильтра зависят от степени полинома и числа отсчетов сигнала. Для повышения эффективности обработки сигналы многократно пропускают через один и тот же фильтр.

Другим примером симметричного низкочастотного фильтра является фильтр Страхова. П. С. Наиду (1968) использовал этот фильтр для сглаживания наблюдаемых аэромагнитных данных. Сглаживание полиномами и поведение их  $z$ -трансформант обсуждалось Л. Ч. Вудом и С. Н. Хокенсом (1970). Р. Шапиро (1970) описал операции сглаживания одномерных и двумерных последовательностей с использованием низкочастотной, высокочастотной и полосовой фильтраций. Сглаживание результатов наблюдений с морскими гравиметрами во временной области с помощью трех различных весовых функций изучалось Е. А. Боярским и М. Г. Коганом (1968).

### 3.1.3. Фильтры Ормсби и Мартин-Грэма

В данном разделе кратко описывается интересный подход, предложенный Э. Б. Андерсом и др. (1964), который позволяет упростить довольно трудоемкий процесс вычислений и допускает широкую свободу выбора формы амплитудно-частотной характеристики в переходной зоне (в области среза).

Пусть имеется некоторая идеальная частотная характеристика  $L(\omega)$ , являющаяся четной функцией частоты, с единичным усилением в полосе пропускания и нулевым — за пределами указанного диапазона. Функции  $L(\omega)$  соответствует идеальная импульсная реакция  $l(t)$ . Задавая форму переходной зоны фильтра, можно найти близкую к идеальной гладкую частотную характеристику  $H(\omega)$  и соответствующую ей импульсную реакцию  $h(t)$ . Если предположить, что определенный вид взвешивания функции  $l(t)$  даст характеристику  $h(t)$ , то можно записать

$$h(t) = l(t) w(t), \quad (3.9)$$

где  $w(t)$  — весовая функция, которая должна выбираться в соответствии с требуемой формой среза характеристики. Согласно теореме о свертке, умножению во временной области соответствует свертка в частотной. Следовательно,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega - \nu) W(\nu) d\nu, \quad (3.10)$$

где  $W(\omega) = F\{\omega(t)\}$ . Пусть переходная зона задана диапазоном частот  $\Omega_1 \leq |\omega| \leq \Omega_2$ , а  $L(\omega)$  — характеристика идеального низкочастотного фильтра, так что

$$L(\omega) = L_1(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq (\Omega_1 + \Omega_2)/2; \\ 0 & \text{за пределами диапазона;} \end{cases}$$

$$l_1(t) = \frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t\right).$$

Естественно потребовать, чтобы аппроксимирующая функция  $H_1(\omega)$  удовлетворяла условию

$$H_1(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \Omega_1; \\ 0, & |\omega| > \Omega_2. \end{cases}$$

Далее потребуем, чтобы в переходной зоне  $\Omega_1 \leq |\omega| \leq \Omega_2$  функция  $H_1(\omega)$  была непрерывной и, кроме того, четной. Из определения функции  $L_1(\omega)$  следует, что

$$L_1(\omega - \nu) = \begin{cases} 1, & |\omega - \nu| \leq (\Omega_1 + \Omega_2)/2; \\ 0, & |\omega - \nu| > (\Omega_1 + \Omega_2)/2. \end{cases}$$

Следовательно, бесконечные пределы интегрирования в уравнении (3.10) могут быть заменены на  $\omega \pm (\Omega_1 + \Omega_2)/2$ , а подынтегральное выражение упрощено

$$H_1(\omega) = \int_{\omega - (\Omega_1 + \Omega_2)/2}^{\omega + (\Omega_1 + \Omega_2)/2} W_1(\omega) d\omega. \quad (3.11)$$

Чтобы вычислить значение  $H_1(\omega)$  для произвольной частоты  $\omega = \Omega$ , интегрирование ведется в интервале длиной  $\Omega_1 + \Omega_2$  с частотой  $\Omega$  в его центре. Требования к частотному диапазону подавления фильтра  $H_1(\omega)$  удовлетворяются при любой четной функции  $W_1(\omega)$ , принимающей нулевые значения для  $|\omega| > (\Omega_1 + \Omega_2)/2$ . Для получения единичного усиления в полосе пропускания функция  $W_1(\omega)$  должна иметь единичную площадь. Проще всего выбрать  $W_1(\omega)$  в виде прямоугольника

$$W_1(\omega) = \begin{cases} 1/\Delta\Omega, & |\omega| \leq \Delta\Omega/2; \\ 0 & \text{за пределами диапазона,} \end{cases}$$

где  $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ ;

$$w_1(t) = \frac{1}{\pi t \Delta\Omega} \sin \frac{t \Delta\Omega}{2}.$$

Интеграл (3.11) обеспечивает линейный срез амплитудно-частотной характеристики (рис. 3.2), так что в целом она описывается выражением

$$H_1(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \Omega_1; \\ 0, & |\omega| > \Omega_2; \\ (\omega + \Omega_2)/\Delta\Omega, & -\Omega_2 \leq \omega < -\Omega_1; \\ (\Omega_2 - \omega)/\Delta\Omega, & \Omega_1 < \omega \leq \Omega_2. \end{cases}$$

Импульсная реакция  $h_1(t)$  согласно выражению (3.9) принимает вид

$$h_1(t) = I_1(t) \omega_1(t) = \frac{1}{\pi t} \sin \frac{(\Omega_1 + \Omega_2)t}{2} \frac{1}{\pi t \Delta\Omega} \sin \frac{t\Delta\Omega}{2} = \frac{\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_2 t}{2\pi^2 t^2 \Delta\Omega} \quad (3.12)$$

Выбирая отсчеты импульсной реакции  $h_1(t)$  в эквидистантных точках  $t = n\Delta t$ , где  $n$  — целое число в диапазоне от  $-\infty$  до  $\infty$ , получаем весовую функцию аппроксимирующего фильтра. Особое внимание требуется при вычислениях  $h_n$  для  $n=0$ . Функции  $H_1(\omega)$  и/или  $h_1(t)$  описывают низкочастотный фильтр Ормсби, амплитудно-частотная характеристика которого имеет срез первого порядка [Ormsby, 1961; Anders et al., 1964].

Соотношение (3.12) отличается от выражения для  $h_1(t)$ , полученного Э. Б. Андерсом и другими (1964), на коэффициент, равный  $1/2 \pi$ . Это различие объясняется тем, что в своих расчетах авторы использовали циклическую частоту  $f$ , а не угловую  $\omega$ .

Для аппроксимации амплитудно-частотной характеристики в переходной зоне могут использоваться другие виды весовых функций. Например, в фильтрах Мартин-Грэма [Anders et al., 1964] переходная зона представляется косинусоидой, так что функция  $W(\omega)$  в уравнении (3.10) имеет вид

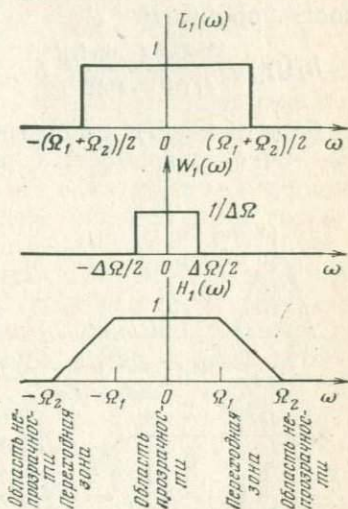


Рис. 3.2. Идеальная передаточная функция (частотная характеристика)  $L_1(\omega)$ , частотный спектр  $W_1(\omega)$  весовой функции и аппроксимирующая передаточная функция  $H_1(\omega)$  фильтра Ормсби со срезом первого порядка

$$W_2(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\Delta\Omega} \cos \frac{\pi\omega}{\Delta\Omega}, & |\omega| \leq \Delta\Omega/2; \\ 0 & \text{за пределами диапазона.} \end{cases}$$

Коэффициент  $\pi/2 \Delta\Omega$  введен здесь для нормализации площади функции  $W_2(\omega)$  до единичного значения. Поскольку весовые функции  $W_2(\omega)$  и  $\omega_2(t)$  образуют пару преобразования Фурье, можно записать

$$\omega_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2\Delta\Omega} \cos \frac{\pi\omega}{\Delta\Omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\Delta\Omega} \int_0^{\Delta\Omega/2} \cos \frac{\pi\omega}{\Delta\Omega} \cos \omega t d\omega = \frac{\cos(t\Delta\Omega/2)}{2\pi [1 - (t\Delta\Omega/\pi)^2]}$$

Как и в предыдущем случае, импульсная реакция, аппроксимирующая оператор идеального фильтра, записывается в виде

$$h_2(t) = l_2(t) \omega_2(t).$$

Допустим, как и прежде, что требуется аппроксимировать прямоугольный фильтр нижних частот. Его импульсную реакцию найдем, если взять  $l_2(t)$  вместо  $l_1(t)$ :

$$h_2(t) = \frac{1}{2\pi^2 t} \sin \frac{(\Omega_1 + \Omega_2)t}{2} \frac{\cos(t\Delta\Omega/2)}{1 - (t\Delta\Omega/\pi)^2}.$$

После упрощений

$$h_2(t) = \frac{\sin \Omega_2 t + \sin \Omega_1 t}{4t(\pi^2 - t^2 \Delta\Omega^2)}. \quad (3.13)$$

Функция  $h_2(t)$  имеет три особые точки на временах  $t$ , равных

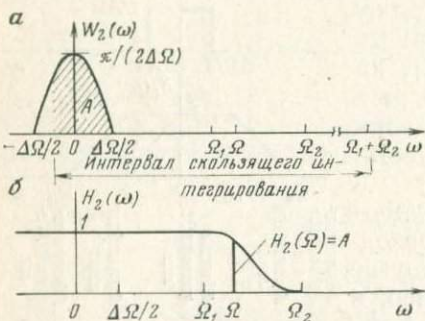


Рис. 3.3. Характеристики фильтра Мартин-Грэма.

Заштрихованная зона имеет площадь  $A$ ; точка  $\Omega$  — средняя точка скользящего интервала интегрирования для положения этого интервала, показанного на рисунке; усиление фильтра для  $\omega = \Omega$  в переходной зоне равно площади заштрихованной зоны

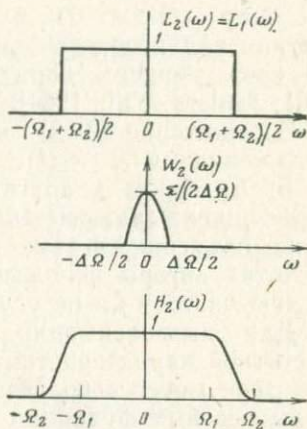


Рис. 3.4. Идеальная передаточная функция  $L_2(\omega)$ , весовая функция  $W_2(\omega)$  и аппроксимирующая передаточная функция  $H_2(\omega)$  фильтра Мартин-Грэма с косинусоидальной формой среза характеристики

нулю и  $\pm\pi/\Delta\Omega$ , которые должны правильно выбираться при ее дискретизации. Передаточная функция (частотная характеристика) фильтра Мартин-Грэма вычисляется по формуле (3.11). При этом в диапазоне  $|\omega| < \Omega_1$  внутри пределов интегрирования оказывается вся «арка» косинусоиды, представляющей весовую функцию  $W_2(\omega)$ , что приводит к равномерности частотной характеристики в полосе пропускания (рис. 3.3). В переходной же зоне в зависимости от значения текущей частоты внутри пределов интегрирования оказывается только та или иная часть «арки» косинусоиды  $W_2(\omega)$ , поэтому в области среза амплитудно-частотная характеристика монотонно убывает от единицы при  $\omega = \Omega_1$  до нуля при  $\omega = \Omega_2$ . Для  $|\omega| > \Omega_2$  частотная характеристика равна нулю, по-

скольку вся «арка» косинусоиды лежит за пределами интервала интегрирования. В целом получаемая таким образом функция  $H_2(\omega)$  описывается соотношением (рис. 3.4).

$$H_2(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \Omega_1; \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi(\omega - \Omega_1)}{\Delta\Omega} \right], & \Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2; \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi(\omega + \Omega_1)}{\Delta\Omega} \right], & -\Omega_2 \leq \omega \leq -\Omega_1; \\ 0, & |\omega| > \Omega_2. \end{cases}$$

Передаточные функции  $H_1(\omega)$  и  $H_2(\omega)$  являются действительными и четными функциями частоты. Это значит, что рассмотренные фильтры Ормсби и Мартин-Грэма обеспечивают передачу сигналов без фазовых искажений.

Переходя в уравнениях (3.12) и (3.13) к дискретному времени, получаем коэффициенты степенных рядов, определяющих соответственно системные функции  $H_1(z)$  и  $H_2(z)$ . Как  $H_1(z)$ , так и  $H_2(z)$  описывают нерекурсивные фильтры, довольно не экономичные при обработке входных последовательностей значительной длины. Эти фильтры являются физически неосуществимыми, поэтому данные, подвергаемые фильтрации, должны быть заранее записаны в запоминающем устройстве, либо в них должны быть введены временные задержки в соответствии с уравнением (3.5). Как следует из обобщения результатов, полученных в разделе 1.2.1, для обеспечения устойчивости фильтра требуется абсолютная интегрируемость его импульсной реакции. Существует бесконечное множество функций, которые могут быть использованы в качестве весов от функции  $W(\omega)$ . Их разумный выбор позволяет адекватно аппроксимировать желаемые фильтрующие свойства. Э. Б. Андерс и другие (1964) предложили пять различных типов функций  $W(\omega)$  и соответствующих им импульсных реакций и системных функций; подобные примеры могут быть найдены и в других источниках.

### 3.1.4. Фильтры Баттерворта

В предыдущем разделе на примере фильтров Ормсби и Мартин-Грэма было показано, как влияют разрывность амплитудно-частотной характеристики и усечение импульсной реакции на амплитуду колебаний Гиббса и каким образом можно ослабить этот эффект. Здесь рассматривается качественно иной подход, позволяющий минимизировать выбросы на амплитудно-частотной характеристике. В соответствии с этим подходом строятся фильтры Баттерворта, наиболее точно аппроксимирующие характеристику идеального фильтра. Усиление  $M_B(\omega)$  этих фильтров монотонно убывает при возрастании частоты. У амплитудно-частотной характеристики отсутствует какой-либо колебательный

процесс как в полосе пропускания, так и за ее пределами. На частоте  $\omega=0$  фильтры Баттерворта обеспечивают максимальное постоянство амплитудно-частотной характеристики. Преимуществом их является также простота аналитического выражения для  $M_B^2(\omega)$  и легкость управления степенью подавления в переходной зоне. Фильтры Баттерворта обычно задаются квадратом амплитудно-частотной характеристики  $M_B^2(\omega)$  в виде

$$M_B^2(\omega) = |H_B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_L)^{2n}},$$

где  $\omega_L$  — частота среза фильтра;  $n$  — целое число, определяющее порядок фильтра. Из формулы видно, что для очень низких частот

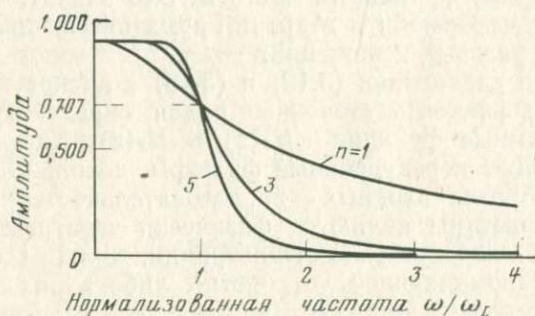


Рис. 3.5. Амплитудно-частотные характеристики  $M_B(\omega)$  фильтров Баттерворта первого, третьего и пятого порядков

$\omega \rightarrow 0$  усиление фильтра стремится к единице. Вводя в целях удобства некоторую нормализованную частоту  $v = \omega/\omega_L$ , получаем:

$$M_B^2(\omega) = \frac{1}{1 + v^{2n}}. \quad (3.14)$$

На рис. 3.5 приведены амплитудно-частотные характеристики  $M_B(\omega)$ , как функции нормализованной частоты  $v$  для фильтров первого, третьего и пятого порядков. Как видно, чем выше порядок фильтра, тем быстрее функция  $M_B^2(\omega)$  приближается к прямоугольной характеристике идеального низкочастотного фильтра. При  $v=1$  характеристика  $M_B(\omega)$  принимает значение  $1/\sqrt{2} = 0,707$  (ослабление около 3 дБ) независимо от значения  $n$ . Величину  $n$  выбирают, ориентируясь прежде всего на желаемую степень ослабления в полосе подавления фильтра. Пусть требуется найти порядок фильтра Баттерворта, ослабляющего по крайней мере на 10 дБ частоты, превышающие  $2\omega_L$ . Для предварительного выбора характеристики можно использовать палетки, подобные показанным на рис. 3.5. Снижение усиления на 10 дБ соответствует 30% от эталонного уровня, выбранного на частоте  $\omega=0$ , т. е. в данном случае означает уменьшение амплитуды до 0,3 от максимальной.

Из рис. 3.5 следует, что фильтр третьего порядка с избытком удовлетворяет этим требованиям по степени подавления, а первого порядка — нет. Проверим аналитически, можно ли в этом случае выбрать фильтр второго порядка (не показан на рис. 3.5). В логарифмическом масштабе

$$20 \log [M(v_0)/M(v_2)] = 10 \log [M^2(v_0)/M^2(v_2)], \quad (3.15)$$

где  $v_0$  — нормализованная эталонная частота, в данном случае  $v=0$ . Поскольку сравниваются амплитуды на частотах  $v_0$  и  $v_2=2$ , из выражений (3.14) и (3.15) следует

$$10 \log \frac{1}{1/(1+2^{2n})} = 10 \log (1+2^{2n}) = 10,$$

откуда

$$1+2^{2n} = 10; \quad n = 1, 6.$$

Таким образом, фильтр Баттерворта даже сравнительно низкого порядка ( $n=2$ ) обеспечивает требуемое ослабление в полосе подавления.

Следующей задачей является преобразование амплитудно-частотной характеристики  $H(\omega)$  аналогового фильтра в соответствующую системную функцию  $H(z)$  цифрового фильтра. Одним из возможных подходов к решению этой задачи является нахождение полюсов характеристики  $H(\omega)$  с последующим использованием приемов построения системной функции, описанной в главе 2. Используя преобразование Лапласа, т. е. принимая в качестве независимой переменной комплексную частоту  $p = \sigma + j\omega$ , находим квадрат модуля амплитудно-частотной характеристики:

$$|H_B(p)|^2 = H_B^*(p) H_B(p) = \frac{1}{1 + (-1)^n p^{2n}}, \quad (3.16)$$

где  $H_B^*(p)$  — величина, комплексно-сопряженная функции  $H_B(p)$ . В уравнении (3.16) использованы нормализованные частоты; в противном случае в знаменателе правой части уравнения вместо  $p$  необходимо брать  $p/\omega_L$ .

Из выражения (3.16) следует, что функция  $H_B(p) H_B^*(p)$  не имеет конечных нулей, а положение полюсов определяется соотношением

$$p^{2n} + (-1)^n = 0. \quad (3.17)$$

Из теории комплексных переменных известно, что корни уравнения (3.17) в  $p$ -плоскости равномерно распределены по единичной окружности с угловым интервалом, равным  $\pi/n$ . Для четных значений  $n$  положение первого полюса соответствует углу  $\pi/2n$ , а для нечетных — нулю. Если вместо нормализованной частоты  $v$  брать ненормализованную частоту  $\omega$ , то полюсы будут равномерно распределены по окружности в  $p$ -плоскости с радиусом, рав-

ным  $\omega_L$ . На рис. 3.6 показано распределение полюсов фильтров Баттерворта второго и третьего порядков соответственно для нормализованной и действительной частот. Как следует из рис. 3.6, в первом случае полюсы

$$p_{1,2} = \cos 45^\circ \pm j \sin 45^\circ = 0,707 \pm j0,707;$$

$$p_{3,4} = -\cos 45^\circ \pm j \sin 45^\circ = -0,707 \pm j0,707,$$

а во втором

$$p_5 = \omega_L;$$

$$p_{6,7} = (0,5 \pm j0,866) \omega_L;$$

$$p_{8,9} = (-0,5 \pm j0,866) \omega_L;$$

$$p_{10} = -\omega_L.$$

Подобным образом могут быть легко найдены полюсы в  $p$ -плоскости для любого конечного порядка  $n$ .

Уместно напомнить, что по уравнениям (3.14) и (3.16) можно найти квадрат модуля системной функции, а не саму системную

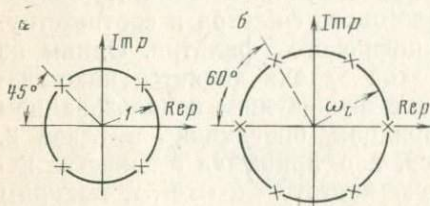


Рис. 3.6. Расположение полюсов квадратичной амплитудно-частотной характеристики фильтра Баттерворта в  $p$ -плоскости.

$a - n=2$ , нормализованная частота;  $b - n=3$ , действительная частота

функцию; при этом для фильтра любого порядка  $n$  полюсы расположены на  $p$ -плоскости симметрично относительно как действительной оси, так и мнимой (см. рис. 3.6). Симметрия расположения полюсов позволяет принимать во внимание только полюсы, размещенные в той части  $p$ -плоскости, которая находится слева от мнимой оси (использование полюсов, лежащих справа от этой оси, дает нестабильную систему, см. главу 2). При использовании лишь полюсов, расположенных слева от мнимой оси, во-первых, функция  $H_B(p)$  будет иметь только действительные и/или комплексно-сопряженные полюсы, во-вторых, распределение полюсов обеспечивает устойчивость системы, в-третьих, квадрат амплитудно-частотной характеристики аналогичен результату, получаемому в уравнениях (3.14) или (3.16).

Для фильтров второго и третьего порядков, рассмотренных выше, с точностью до постоянных соответственно имеем:

$$H_2(p) = \frac{1}{(p-p_3)(p-p_4)} = \frac{1}{(p+0,707-j0,707)(p+0,707+j0,707)};$$

$$H_3(p) = \frac{1}{(p+\omega_L)(p+0,5\omega_L-j0,866\omega_L)(p+0,5\omega_L+j0,866\omega_L)}.$$

Для получения единичного усиления на частоте  $\omega \rightarrow 0$  функции  $H_2(\omega)$  и  $H_3(\omega)$  должны быть умножены соответственно на  $p_3 p_4 p_8 p_9 p_{10}$ . В целях удобства изложения оба этих множителя здесь опущены. Системные функции могут быть получены путем разложения функции  $H(p)$  в ряд. В случае  $H_2(p)$  в этом нет необходимости, так как функция

$$H_2(p) = \frac{1}{(p + 0,707)^2 + 0,707^2}$$

представлена в табл. 2 (затухающая синусоида), откуда находим

$$H_2(z) = \frac{e^{-0,707\Delta t} \sin(0,707\Delta t) z^{-1}}{0,707 [1 - 2e^{-0,707\Delta t} \cos(0,707\Delta t) z^{-1} + e^{-1,414\Delta t} z^{-2}]} \quad (3.18)$$

Разложением в ряд достигается перевод полюсов из  $p$ -плоскости в  $z$ -плоскость, однако при этом разложении не сохраняется положение нулей. Сравнение характеристик  $H_2(p)$  и  $H_2(z)$  показывает, что если первая из них не имеет конечных нулей, то вторая содержит нуль при  $z^{-1} = 0$ . При использовании геометрической интерпретации способа нулей и полюсов на  $z$ -плоскости можно заметить, что нуль не влияет на амплитудно-частотные характеристики фильтра Баттерворта второго порядка. Для фильтров более высокого порядка необходимо соблюдать предосторожность в отношении конечных нулей, вносимых разложением в ряд. При достаточно высокой частоте дискретизации эти нули обычно оказывают незначительное влияние в полосе пропускания. Более подробные сведения читатель может найти в работе Б. Голда и Ч. М. Рэйдера (1969).

Другой возможностью нахождения цифрового варианта  $H(p)$  является использование билинейного преобразования. Пусть выбранный фильтр второго порядка имеет заданную крутизну характеристики с граничной частотой среза  $\omega_L = 4\pi$  рад/с шагом дискретности  $\Delta t = 0,1$ . Согласно правилам, приведенным в разделе 2.5.3, вначале трансформируем частоту среза фильтра в область фиктивных частот. Используя выражения (2.38), получаем:

$$\omega_A = \operatorname{tg}(\omega_L \Delta t / 2) = \operatorname{tg}(0,4\pi/2) = 0,727 \text{ рад/с.}$$

Соответствующий фильтр Баттерворта второго порядка имеет пару комплексно-сопряженных полюсов  $p_{1,2} = (-0,707 \pm \pm j 0,707) 0,727$ . Без учета коэффициента усиления передаточная функция в области фиктивных частот имеет вид

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 1,028p + 0,528}$$

Чтобы получить цифровой вариант  $H(p)$ , т. е. системную функцию  $H(z)$ , заменим  $p$  в  $H(p)$  на  $(1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1})$ :

$$H(z) = \frac{1}{[(1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1})]^2 + 1,028 (1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1}) + 0,528} =$$

$$= 0,391 \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0,022z^{-1} - 0,196z^{-2}}$$

Следовательно, рекурсивное соотношение для  $n$ -го отсчета выходной последовательности имеет вид

$$y_n = 0,391x_n + 0,782x_{n-1} + 0,391x_{n-2} - 0,022y_{n-1} + 0,196y_{n-2}.$$

Если требуется сохранить единичное усиление при  $\omega=0$ , системная функция  $H(z)$  должна быть умножена на коэффициент, равный 0,528 (заметим, что для  $\omega=0$  переменная  $z = e^{j\omega\Delta t} = 1$ ).

Билинейное преобразование может быть применено непосредственно к квадрату амплитудно-частотной характеристики  $M_B^2(\omega)$ . Переводя в выражении (3.16) частоту среза в область фиктивных частот в соответствии с формулой (2.38) и выполняя замену  $p = (1-z^{-1})/(1+z^{-1})$ , находим:

$$\begin{aligned} |H_{2n}(z)|^2 &= \frac{1}{1 + (-1)^n [(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]^{2n} / \operatorname{tg}^{2n}(\omega_L \Delta t / 2)} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^{2n}(\omega_L \Delta t / 2)}{\operatorname{tg}^{2n}(\omega_L \Delta t / 2) + (-1)^n [(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]^{2n}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Эта функция содержит как устойчивые полюсы, так и неустойчивые. Повторяя ту же процедуру, что и при операциях в  $p$ -плоскости, получаем устойчивую системную функцию  $H_n(z)$  желаемого фильтра Баттерворта. Для этого находим полюсы функции  $|H_{2n}(z^2)|$  и, включая только устойчивые ее полюсы и исключая неустойчивые, строим  $H_n(z)$ .

Уравнение (3.19) интересно также с другой точки зрения. Заменяя  $z$  в отношении  $(1-z^{-1})/(1+z^{-1})$  на  $e^{j\omega\Delta t}$ , получаем:

$$\left[ \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]_{z=e^{j\omega\Delta t}} = \frac{1-e^{-j\omega\Delta t}}{1+e^{-j\omega\Delta t}} = \operatorname{tg}(j\omega\Delta t / 2) = j \operatorname{tg}(\omega\Delta t / 2).$$

Перепишем уравнение (3.19) в виде

$$|H_{2n}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\operatorname{tg}(\omega\Delta t / 2) / \operatorname{tg}(\omega_L \Delta t / 2)]^{2n}}. \quad (3.20)$$

Фильтры, у которых квадрат амплитудно-частотной характеристики задан выражением (3.20), называются тангенциальными и относятся к широкому классу тригонометрических фильтров (синусных, косинусных, тангенциальных). Связь тангенциальных фильтров с билинейным преобразованием непосредственно следует из уравнения (3.19). Цифровой вариант тангенциального фильтра дается правой частью этого уравнения, если при этом рассматриваются только устойчивые полюсы. Местоположение полюсов и нулей функции  $|H_{2n}(z)|^2$  в  $z$ -плоскости детально рассмотрено Б. Голдом и Ч. М. Рэйдером (1969), а также М. Х. Акройдом (1973). Характеристики некоторых основных типов тригонометри-

ческих фильтров описаны Х. Холтцем и Ч. Т. Леондесом (1966). Более подробно тангенциальные и синусоидальные фильтры рассмотрены Р. К. Отнесом и Л. Энохсоном (1972). Фильтры Баттерворта применялись, например, Г. Ф. Флойдом (1969) для снятия помех с гравиметрических данных.

### 3.1.5. Фильтры Чебышева

Другой категорией низкочастотных фильтров, которые могут быть заданы местоположением их полюсов, являются низкочастотные фильтры Чебышева. Фильтр Чебышева так же, как и фильтр Баттерворта, задается квадратом своей амплитудно-частотной характеристики

$$M_{\text{Ч}}^2(\omega) = |H_{\text{Ч}}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\omega/\omega_L)}. \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) определяет фильтр Чебышева с характеристикой  $M_{\text{Ч}}^2(\omega)$ , имеющей только одиночный выброс в полосе пропускания и монотонно убывающей в области подавления (рис. 3.7). Размах  $\delta_A$  этого выброса (рис. 3.7) может быть найден по формуле [см., например, Rader and Gold, 1967 или Rabiner et al., 1972]

$$\delta_A = 1 - (1 + \varepsilon^2)^{-1/2}.$$

В уравнении (3.21)  $C_N(\omega)$  представляет собой полином Чебышева  $N$ -го порядка. Такие полиномы получают, используя трехчленное рекурсивное соотношение [см. Hamming, 1962, с. 251]

$$C_0(\omega) = 1;$$

$$C_1(\omega) = \omega;$$

$$C_{N+1}(\omega) + C_N(\omega) = 2\omega C_N(\omega).$$

В качестве примера возьмем  $\varepsilon = 0,6$  (при этом  $\delta_A = 0,14$ ),  $N = 3$ . В пределах полосы пропускания амплитудно-частотная характеристика ундулирует в диапазонах от 0,86 до 1,0, что приблизительно соответствует величине 1,3 дБ. Характеристика  $M_{\text{Ч}}^2(\omega)$  для  $N = 3$  и  $\varepsilon = 0,6$  показана на рис. 3.7, где для сравнения приведена также характеристика фильтра Баттерворта третьего порядка. Из рис. 3.7 видно, что фильтр Чебышева имеет большую крутизну среза, чем фильтр Баттерворта того же порядка. «Платой» за увеличение крутизны среза является появление выброса на характери-

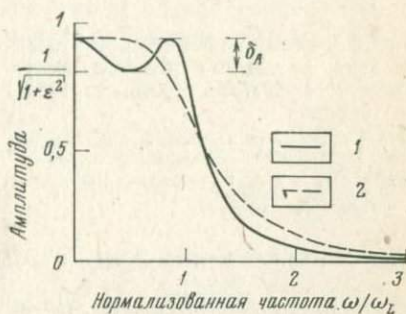
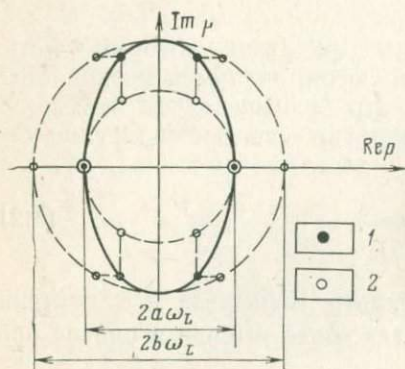


Рис. 3.7. Сравнение амплитудно-частотных характеристик фильтров Чебышева и Баттерворта третьего порядка.

Размах (удвоенная амплитуда) колебания характеристики в полосе пропускания  $\delta_A = 0,14$ ; 1 — фильтр Чебышева ( $\varepsilon = 0,6$ ); 2 — фильтр Баттерворта

стике в полосе пропускания. Следует заметить, что амплитудно-частотная характеристика на частоте  $\omega=0$  для нечетного  $N$  имеет амплитуду, равную единице, а для четного  $N$   $1-\delta_A$ .

С целью получения цифрового варианта фильтра Чебышева необходимо найти полюсы характеристики  $M_{\text{ч}}^2(\omega)$ , т. е. корни знаменателя правой части уравнения (3.21). Как и в случае фильтра Баттерворта, полюсы в  $p$ -плоскости распределены симметрично от-



носительно действительной и мнимой осей, образуя таким образом комбинацию устойчивых и неустойчивых полюсов. Для получения устойчивого фильтра характеристика  $H_{\text{ч}}(\omega)$  должна содержать все полюсы только левой половины  $p$ -плоскости. Применяя любой из способов получения цифрового варианта характеристики, например билинейное преобразование функции  $H_{\text{ч}}(\omega)$ , находим системную функцию  $H(z)$ .

Рис. 3.8. Геометрический способ определения положения полюсов низкочастотного фильтра Чебышева третьего порядка.

Для нахождения полюсов используют две окружности Баттерворта с диаметрами  $2a\omega_L$  и  $2b\omega_L$ : 1 — фильтр Чебышева; 2 — фильтр Баттерворта

Ч. М. Рэйдер и Б. Голд (1967) предложили достаточно простой метод нахождения полюсов характеристики  $M_{\text{ч}}^2(\omega)$  при заданных параметрах  $\epsilon$ ,  $N$  и  $\omega_L$ . Полюсы располагаются на эллипсе (рис. 3.8), имеющем вертикальную и горизонтальную оси, равные соответственно  $2b\omega_L$  и  $2a\omega_L$ , причем

$$b, a = [\sqrt{\epsilon^{-2} + 1} + \epsilon^{-1}]^{1/N} \pm \sqrt{\epsilon^{-2} + 1} + \epsilon^{-1}]^{-1/N} / 2.$$

Здесь величине  $b$  отвечают знак плюс, а величине  $a$  — знак минус.

На рис. 3.8 показано положение полюсов на эллипсе для фильтра Чебышева третьего порядка, заданное с помощью двух окружностей Баттерворта диаметром  $2a\omega_L$  и  $2b\omega_L$ .

Так же, как и в случае фильтров Баттерворта, можно сконструировать несколько тригонометрических фильтров Чебышева. Например, тангенциальный низкочастотный фильтр Чебышева может быть представлен [см., например, Rader and Gold, 1967; Askroyd, 1973] квадратом модуля частотной характеристики

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2[\text{tg}(\omega\Delta t/2)/\text{tg}(\omega_L\Delta t/2)]}$$

Другие формы характеристик фильтров можно найти в работах Р. К. Отнеса и Л. Энохсона (1972) и в других публикациях.

### 3.2. ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ФИЛЬТРЫ

При применении подхода, описанного в разделе 3.1, можно найти характеристики не только низкочастотных фильтров, но и высокочастотных. Вернемся к представлениям об отрицательных частотах, что позволяет построить четную амплитудно-частотную характеристику  $M(\omega)$ . Если ограничиться частотами  $|\omega| \leq \omega_N = \omega_S/2$ , то выражение для нуль-фазовой частотной характеристики идеального высокочастотного фильтра можно записать в виде

$$H(\omega) = M(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_H; \\ A, & |\omega| \geq \omega_H, \end{cases} \quad (3.22)$$

где  $A$  — действительное число, определяющее усиление фильтра в полосе пропускания. Импульсную реакцию этого фильтра для непрерывного времени можно получить Фурье-преобразованием характеристики  $H(\omega)$  при соответствующих пределах интегрирования

$$h(t) = \frac{A}{\pi} \int_{\omega_H}^{\omega_N} \cos \omega t d\omega = \frac{A}{\pi t} [\sin \omega_N t - \sin \omega_H t]. \quad (3.23)$$

Переходя к дискретному времени  $t = n\Delta t$ , замечаем, что первый член в скобках для любого целого  $n$  обращается в нуль, так как  $\omega_N = \pi/\Delta t$ . Следовательно, отсчеты импульсной реакции

$$h_n = -\frac{A\omega_H}{\pi} \frac{\sin \omega_H n\Delta t}{\omega_H n\Delta t}, \quad |n| = 1, 2, \dots$$

При вычислении значения  $h(t)$  для  $t=0$  необходимо применить правило Лопиталя, согласно которому

$$h(0) = h_0 = A(\omega_N - \omega_H)/\pi.$$

Аналогия между выражениями (3.3) и (3.23) позволяет легко найти последовательность  $h_n$ ,  $|n|=1, 2, \dots$  через импульсную реакцию соответствующего низкочастотного фильтра. Для этого вначале определяют отсчеты импульсной реакции, задавая частоту среза, равную  $\omega_H$ , а затем меняют знак у всех полученных отсчетов. Вычисления, полностью выполняемые во временной области, удобны для нахождения высокочастотных нерекурсивных фильтров при условии, что весовая функция (импульсная реакция) соответствующего низкочастотного фильтра известна.

Высокочастотные фильтры могут проектироваться на основе известных низкочастотных фильтров также и в области частот. Например, высокочастотный фильтр Баттерворта может быть получен через амплитудно-частотную характеристику соответствующего низкочастотного фильтра с помощью соотношения.

$$M_H^2(\omega) = 1 - M_L^2(\omega), \quad (3.24)$$

где  $M_H^2(\omega)$ ,  $M_L^2(\omega)$  — квадраты амплитудно-частотных характеристик соответственно высокочастотного и низкочастотного фильт-

ров;  $\omega_L = \omega_H$  — частоты срезов соответствующих фильтров. Подставляя выражение (3.14) с учетом того, что  $v = \omega/\omega_H$  имеем:

$$M_H^2(\omega) = 1 - \frac{1}{1 + (\omega/\omega_H)^{2n}} = \frac{(\omega/\omega_H)^{2n}}{1 + (\omega/\omega_H)^{2n}}. \quad (3.25)$$

Из сравнения формул для характеристик  $M_H^2(\omega)$  и  $M_L^2(\omega)$  видно, что  $M_H^2(\omega)$  имеет нуль второго порядка при  $\omega=0$ , но  $M_L^2(\omega)$  не содержит конечных нулей. В то же время обе функции обладают одинаковым распределением полюсов. Техника преобразований при переходе от аналоговых фильтров к цифровым, рассмотренная в разделе 3.1.4, также применима без изменений. Другая возможность преобразования низкочастотных фильтров в соответствующие высокочастотные заключается в трансформации частот. Например, решение может быть получено трансформацией  $\omega = 1/v$ .

В результате замены  $\omega = 1/v$  и  $\omega_H = \omega_L = 1/v_L$  в формуле для квадрата амплитудно-частотной характеристики фильтра Баттерворта получим:

$$\begin{aligned} M_H^2(v) &= M_L^2\left(\omega = \frac{1}{v}\right) = \\ &= \frac{(v/v_L)^{2n}}{1 + (v/v_L)^{2n}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что полученный результат совпадает с правой частью уравнения (3.25). Преобразование низкочастотных фильтров в высокочастотные может быть выполнено и непосредственно в  $z$ -области. Высокочастотный фильтр получается из низкочастотного путем замены  $z$  на  $z^{-1}$ . Если частота среза исходного фильтра была  $f_L$ , то новая частота среза  $f_H = 1/2\Delta t - f_L$  [см. Ackroyd, 1973].

На рис. 3.9 показана амплитудно-частотная характеристика фильтра Баттерворта третьего порядка, рассчитанная с помощью билинейного преобразования. Фильтр был применен к сейсмограмме (см. рис. 3.9, а) с записью телесеismicких сигналов для подавления помех, имеющих преобладающий период около 6 с. Эффективность фильтрации иллюстрируется результирующей отфильтрованной трассой (см. рис. 3.9, а), на которой помехи неразличимы.

В общем случае для заданной характеристики  $H_L(\omega)$  низко-

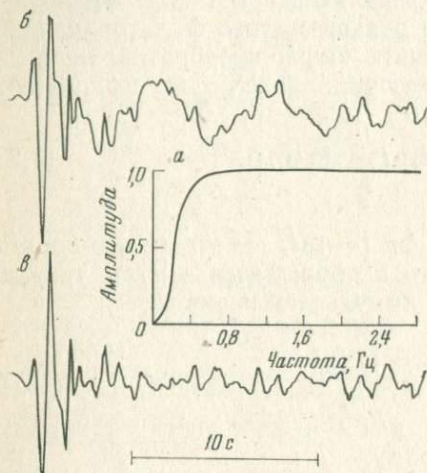


Рис. 3.9. Амплитудно-частотная характеристика высокочастотного фильтра Баттерворта третьего порядка (а), входная (б) и выходная (в) трассы

частотного фильтра характеристика соответствующего высокочастотного фильтра  $H_H(\omega)$  может быть определена из соотношения

$$|H_H(\omega)|^2 = 1 - |H_L(\omega)|^2$$

при условии, что  $|H_L(\omega)|^2$  является монотонной функцией частоты  $\omega$ . Пример высокочастотной фильтрации с помощью низкочастотных фильтров приведен Дж. Л. Холлоуэйем (1958), выполнившим таким образом фильтрацию барометрических данных.

### 3.3. ПОЛОСОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Проектирование полосовых фильтров нетрудно осуществить, используя приемы построения низкочастотных фильтров. Рассмотрим некоторые возможности такого проектирования. Так как, имеется в виду построения фазово-неискажающих нуль-фазовых фильтров, будем оперировать только с вещественными и четными частотными характеристиками.

Пусть задан идеальный симметричный низкочастотный фильтр с частотой среза  $\omega_L$ , частотная характеристика  $H_L(\omega)$  которого имеет единичное усиление в полосе частот  $|\omega| \leq \omega_L$ . Простым смещением характеристики  $H_L(\omega)$  вправо на величину  $\omega_0 > \omega_L$  можно получить характеристику полосового фильтра с полосой  $2\omega_L$  и центральной частотой  $\omega_0$ . Для сохранения свойств четности разделим характеристику  $H_L(\omega)$  на две идентичные части, каждая из которых имеет усиление, равное  $1/2$ . Сместим  $H_L(\omega)/2$  вправо на  $\omega_0$  и на основании уравнения (3.2) и теоремы смещения в частотной области найдем импульсную реакцию полосового фильтра:

$$h_1(t) = [\exp(j\omega_0 t) \sin \omega_L t] / 2\pi t.$$

Таким же образом сместим характеристику  $H_L(\omega)/2$  влево на ту же величину  $\omega_0$  и найдем:

$$h_2(t) = [\exp(-j\omega_0 t) \sin \omega_L t] / 2\pi t.$$

Очевидно, импульсная реакция (весовая функция) симметричного полосового фильтра

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) = \frac{\omega_L}{\pi} \frac{\sin \omega_L t}{\omega_L t} \cos \omega_0 t, \quad (3.26)$$

где  $\omega_L$  — половина ширины полосы пропускания фильтра.

Полосовой фильтр, представленный уравнением (3.26), был использован С. Крэмпином и М. Батом (1965) для разделения поверхностных сейсмических волн и подавления микросейсм на сейсмограммах [см. также Landisman et al., 1969, или Неггманн, 1973]. Для минимизации эффекта усечения применялось сглаживание во временном окне с треугольной весовой функцией. Разделение различных групп поверхностных волн с помощью низкочастотных фильтров выполнялось Е. Ф. Саваренским и Г. Л. Косаревым

(1967). Полосовой фильтр Баттерворта третьего порядка с частотой среза 1,2 и 3,2 Гц использовался для подавления нежелательных помех, зарегистрированных с длинной сейсмологической группой (NORSAR) в Норвегии [Gjøystdal and Husebye, 1972].

Заменяя выражение (3.2) на уравнение (3.26) и полагая усиление в полосе пропускания единичным, получаем:

$$h(t) = 2h_L(t) \cos \omega_0 t, \quad (3.27)$$

где  $h(t)$  — импульсная реакция эквивалентного низкочастотного фильтра, определяемого уравнением (3.2). Функция  $h(t)$ , выраженная таким образом, может рассматриваться как амплитудно-моделированный сигнал с огибающей  $2h_L(t)$  и несущей частотой  $\omega_0$ .

Уравнение полосового фильтра может быть также получено как разность характеристик двух низкочастотных фильтров  $H_1(\omega)$  и  $H_2(\omega)$ .

Предположим, что частоты среза соответственно равны  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , где  $\omega_1 < \omega_2$ , и оба фильтра имеют единичное усиление в полосе пропускания. Тогда искомую характеристику можно записать в виде [см., например, Zelei, 1971]

$$H(\omega) = H_2(\omega) - H_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2; \\ 0 & \text{за пределами диапазона.} \end{cases}$$

Это соотношение представляет собой идеальный прямоугольный полосовой фильтр. Импульсная реакция  $h(t)$  определяется как разность импульсных реакций двух исходных низкочастотных фильтров

$$h(t) = h_2(t) - h_1(t) = (\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t) / \pi t. \quad (3.28)$$

Из уравнения (3.28) видно, что величина  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  — центральная частота, а  $(\omega_2 - \omega_1)/2$  — половина полосы пропускания. С учетом этого легко установить идентичность выражений (3.26) и (3.28) с помощью известных тригонометрических соотношений.

Если при конструировании конволюционных полосовых фильтров используется вычитание двух фильтров, описанное выше, то рекурсивные фильтры строятся с применением теоремы свертки.

Таким образом, любой полосовой фильтр может быть представлен последовательным соединением соответствующего низкочастотного и высокочастотного фильтров. Входной сигнал вначале проходит через низкочастотный фильтр, который устраняет мешающую часть высокочастотных составляющих сигнала. Результат поступает на вход высокочастотного фильтра, отсекающего нежелательную низкочастотную часть спектра входного сигнала. В итоге результирующий выходной сигнал будет содержать только составляющие, попадающие в частотный диапазон, который определяется частотами и крутизнами срезов частотных характеристик обоих фильтров.

Поскольку умножение в частотной области соответствует свертке во временной области, результирующий полосовой фильтр  $H(\omega)$

получается перемножением характеристик  $H_L(\omega)$  и  $H_H(\omega)$  низко- и высокочастотного фильтров. Так как фильтрация является линейной процедурой, перемена мест характеристик низкочастотного и высокочастотного фильтров не влияет на окончательный результат. Х. М. Муни (1968) предложил упрощенный способ нулей и полюсов, который позволяет конструировать низко- и высокочастотные фильтры, а также полосовые и режекторные. Этот способ предполагает такое размещение полюсов и нулей в  $z$ -плоскости, чтобы получать требуемые формы характеристик фильтра (см. раздел 2.4). Практический опыт и использование палеток позволяет выбирать положение полюсов и нулей более или менее интуитивно. Таким образом способ Муни дает возможность быстро находить нужное решение. Поскольку конструирование фильтра выполняется непосредственно в  $z$ -плоскости, перехода к цифровым версиям характеристик не требуется. Аналогичный подход к конструированию режекторных полосовых фильтров предложен Г. Гонцем и А. Зелем (1972).

В настоящей главе основное внимание уделено вопросам использования статистических характеристик второго порядка, т. е. корреляционных функций и спектров мощности, при синтезе фильтров, обеспечивающих эффективное разделение сигнала и шума. Показано, что в определенных условиях статистические характеристики могут иметь значение фильтров.

Большая часть главы посвящена проектированию оптимальных фильтров, т. е. фильтров, осуществляющих наилучшее разделение сигналов и шумов в соответствии с определенным критерием. Существует несколько критериев оптимальности, но здесь рассматриваются два из них, положенных в основу согласованного и винеровского оптимальных фильтров.

В последнем разделе приводятся краткие сведения о поляризованных фильтрах, представляющих собой частный случай корреляционных.

Принципы построения фильтров иллюстрируются примерами, взятыми из практики обработки геофизических данных. Детальных математических выкладок при изложении материала автор старался избегать; заинтересованные в них читатели могут обратиться к работам В. Б. Давенпорта и В. Л. Рута (1958), Ч. В. Хелстрема (1960), Я. В. Ли (1960), В. В. Солодовникова (1960) или других авторов. Перечень применения фильтров в различных областях науки можно найти, например, в работе Н. А. Анстее (1964).

#### 4.1. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФИЛЬТРЫ

Для ряда практических применений иногда необходимо выяснить существование некоторой периодической составляющей сигнала, скрытой в шумах зарегистрированной трассы  $x(t)$ . Это типичная задача, решаемая с использованием автокорреляционных функций. В некоторых случаях можно выделять и аperiodические сигналы, используя их взаимную корреляцию с входными трассами.

##### 4.1.1. Обнаружение периодических сигналов с использованием функций автокорреляции

Начнем с простого случая, когда сейсмическая трасса представлена периодической функцией с периодом  $T$ , т. е.  $x(t) = x(t + nT)$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Представим эту трассу в виде ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),$$

где  $\Omega = 2\pi/T$ . Автокорреляционная функция  $R_{xx}(\tau)$  зарегистрированной трассы может быть записана через коэффициенты ряда Фурье [см., например, Lee, 1960, с. 11—14, или Солодовников, 1960, с. 53] в виде

$$R_{xx}(\tau) = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos n\Omega\tau. \quad (4.1)$$

Другими словами, автокорреляционная функция периодического сигнала также является периодической функцией с периодом повторения  $T = 2\pi/\Omega$ . Функция  $R_{xx}(\tau)$  содержит все частотные составляющие сигнала  $x(t)$  без фазовых сдвигов и с амплитудами, равными средним квадратическим значениям соответствующих коэффициентов ряда Фурье. Таким образом, если трасса представляет собой идеальное синусоидальное колебание  $x(t) = A \sin(\Omega t + \phi)$ , то функция  $R_{xx}(\tau)$  будет иметь амплитуду, равную  $A^2/2$ , что соответствует изменению амплитуды в  $A/2$  раз. Поскольку степень изменения амплитуды при переходе от  $x(t)$  к  $R_{xx}(t)$  зависит от самой амплитуды сигнала, такой переход является нелинейной процедурой.

До сих пор зарегистрированную трассу считали периодической, что на практике встречается редко. Более общую модель сейсмической трассы можно описать следующим образом. Сейсмические волны, пройдя некоторый путь в толще земли, регистрируются на поверхности Земли или вблизи нее на фоне различных помех. Среда, в которой распространяются волны, изменяет их частотный состав подобно тому, как изменяют рассмотренные выше фильтры спектр сигнала [см. Backus, 1959; Lindsey, 1960; Sengbush et al., 1961; Treitel, 1966, a]. Такая модель применима не только к сейсмическим задачам, но и к изучению других геофизических полей [см., например, George et al., 1964].

В соответствии с описанной моделью представим трассу как сумму периодического сигнала  $s(t)$  и случайного шума  $n(t)$ :

$$x(t) = s(t) + n(t).$$

Предположим, что шум является аperiodическим, имеет нулевое среднее значение и не коррелируется с сигналом  $s(t)$ . В этом случае

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{T_1} x(t)x(t+\tau) dt = \\ &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{T_1} [s(t) + n(t)][s(t+\tau) + n(t+\tau)] dt = \\ &= R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Так как  $s(t)$  и  $n(t)$  не коррелированы между собой, последние два члена правой части уравнения (4.2) равны нулю. Каковы бы

ни были частные особенности спектрального состава аperiodического шума, его автокорреляционная функция  $R_{nn}(\tau)$  имеет огибающую, которая всегда убывает с возрастанием  $\tau$ . Это означает, что, начиная с некоторого значения  $\tau = \tau_1$ , членами ряда функции  $R_{nn}(\tau)$  в уравнении (4.2) можно пренебречь.

Для  $\tau > \tau_1$  автокорреляционная функция трассы может быть аппроксимирована просто функцией  $R_{ss}(\tau)$ . Как следует из выражения (4.1), для достаточно больших  $\tau$  функция  $R_{ss}(\tau)$  будет иметь периодичность, совпадающую с периодом сигнала, зарегистриро-

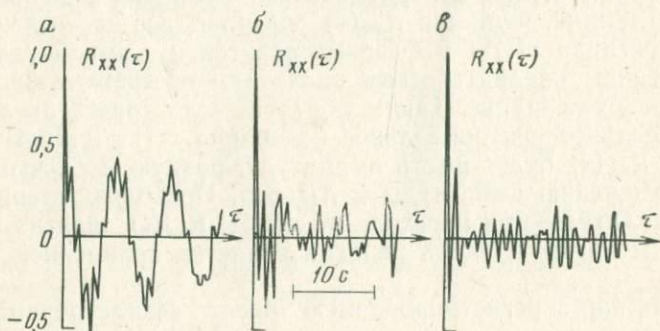


Рис. 4.1. Нормализованные автокорреляционные функции трех афтершоков землетрясений на Курильских островах, зарегистрированных с различным отношением сигнал/шум.

Отношение сигнал/шум: *а* — малое, *б* — среднее, *в* — большое

ванного на трассе  $x(t)$ . Следовательно, автокорреляционная функция трассы выявляет наличие сигнала  $s(t)$  в смеси сигнала и шума на трассе  $x(t)$ . Функция  $R_{xx}(\tau)$ , хотя и не повторяет форму сигнала  $s(t)$ , однако этот вид обнаружения сигнала имеет преимущество, поскольку не требуется априорного знания периода сигнала  $s(t)$ .

При обработке сейсмических сигналов положение может быть осложнено тем, что шум, представленный, например, микросейсмами, в свою очередь включает в себя периодическую составляющую. Применимость метода в этом случае будет зависеть от соотношения мощностей сигнала и шума. На рис. 4.1 показаны нормализованные автокорреляционные функции трех афтершоков землетрясений на Курильских островах, зарегистрированных с различным отношением сигнал/шум. Автокорреляционная функция, показанная на рис. 4.1, *а* (малое значение отношения сигнал/шум), представлена хорошо выраженными низкочастотной и высокочастотной составляющими. Первая из них обусловлена микросейсмами с преобладающим периодом около 7 с, в то время как вторая связана с зарегистрированными афтершоком, имеющим преобладающий период около 1 с. На рис. 4.1, *б* (среднее значение отношения сигнал/шум) длиннопериодная составляющая менее выражена, чем в предыдущем случае. На рис. 4.1, *в* (большое значение отношения сигнал/шум) компонента автокорреляционной функции, отвечающая по-

мехам, слишком слаба и визуально не выделяется. Из рис. 4.1 следует, что автокорреляционная функция не сохраняет вида исходной трассы, но четко выявляет периодичность сигнала, если она существует. Построение автокорреляционных функций использовалось, например, З. Микульским и М. Микульской (1973) для исследования периодичности гидрометеорологических явлений.

#### 4.1.2. Обнаружение сигналов с помощью взаимно-корреляционных функций

Взаимно-корреляционная функция двух колебаний является мерой степени сдвигов этих колебаний. Функция взаимной корреляции двух похожих по форме трасс имеет большую амплитуду, а различающихся — малую. Это основное свойство может быть использовано для обнаружения сигналов, замаскированных помехами.

На основе нашего опыта и знаний некоторые основные характеристики сигнала, в частности преобладающие периоды, иногда могут быть более или менее точно предсказаны. В этом случае нахождение сигнала с использованием взаимно-корреляционных функций может рассматриваться как поиск на трассе сигналов определенной формы, другими словами, обнаружение копии ожидаемого сигнала на зарегистрированной трассе. Очевидно, что успех фильтрации с помощью взаимно-корреляционных функций зависит прежде всего от точности предсказания зарегистрированных сигналов.

Например, если трасса содержит периодический сигнал, то взаимная корреляция этой трассы с синусоидой, имеющей тот же период, позволяет извлечь сигнал на фоне случайного шума. Получаемая взаимно-корреляционная функция будет содержать составляющие только той частоты, что и синусоидальное колебание. Когда ожидаемый сигнал представляет собой бесконечное по длительности синусоидальное колебание, операция взаимной корреляции сигналов будет эквивалентна воздействию фильтра с бесконечно узкой полосой пропускания.

Сходство операций нахождения взаимно-корреляционных функций и фильтрации часто используется при обработке данных.

Рассмотрим некоторые соотношения как во временной, так и в частотной областях. Пусть временные функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  имеют одну и ту же основную частоту  $\Omega = 2\pi/T$ . При разложении их в ряд Фурье получим:

$$x_1(t) = \frac{a_{10}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n} \cos n\Omega t + b_{1n} \sin n\Omega t)$$

$$x_2(t) = \frac{a_{20}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} \cos n\Omega t + b_{2n} \sin n\Omega t).$$

Согласно Я. В. Ли (1960, с. 19—20), соответствующая взаимно-корреляционная функция

$$R_{12}(\tau) = \frac{a_{10}a_{20}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_{1n}^2 + b_{1n}^2)(a_{2n}^2 + b_{2n}^2)]^{1/2} \cos(n\Omega\tau + \theta_{2n} - \theta_{1n}), \quad (4.3)$$

где  $\theta_n = \text{tg}^{-1}(-b_n/a_n)$ . Например, при взаимной корреляции двух стационарных синусоидальных колебаний одной и той же частоты  $\Omega$  и разной амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  получим косинусоидальную взаимно-корреляционную функцию с периодом  $\Omega$  и новой амплитудой  $A_1A_2/2$ . Заметим, что нулевая частота так же, как основная и более высокие гармоники, представлены в выражении (4.3) произведениями соответствующих коэффициентов ряда Фурье. Это означает, что, если хотя бы один из двух периодических сигналов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  не содержит одной из этих гармоник, то она будет отсутствовать и в функции взаимной корреляции. Другими словами, взаимно-корреляционная функция двух периодических функций является также периодической и содержит только частотные составляющие, общие для обеих функций. Как следует из выражения (4.3), в отличие от автокорреляционной функции, определяемой уравнением (4.1), функция  $R_{12}(\tau)$  сохраняет разность фазовых сдвигов  $\theta_{2n} - \theta_{1n}$ . Примеры использования взаимно-корреляционных функций при обработке сейсмических данных можно найти, например, у Р. Х. Меркеля и С. С. Александера<sup>1</sup> (1969). В. Л. Бимансанкарам и другие (1973) использовали нахождение взаимно-корреляционных функций между профилями для обнаружения скрытых аномалий по данным площадной магнитной съемки. Чтобы установить принадлежность гравитационных и магнитных аномалий к одному и тому же геологическому телу, Р. Ботезату и К. Калота (1973) также применяли корреляционную технику. Ими показано, что взаимная корреляция между кривыми гравитационных и магнитных аномалий, зафиксированными на одном и том же профиле, позволяет успешно решать упомянутые выше проблемы.

Обращаясь к более общему случаю, предположим, что зарегистрированная трасса представляет сумму периодического сигнала  $s(t)$  и случайного шума  $n(t)$ , т. е.  $x(t) = s(t) + n(t)$ . Период сигнала известен или может быть определен путем нахождения автокорреляционной функции. Взаимно-корреляционная функция между  $x(t)$  и периодическим сигналом  $v(t)$ , имеющим тот же период, что и сигнал  $s(t)$ ,

$$R_{xv}(\tau) = R_{sv}(\tau) + R_{nv}(\tau). \quad (4.4)$$

Взаимно-корреляционная функция  $R_{nv}(\tau)$  двух колебаний, которые не обладают никаким сходством, близка к нулю, и в уравнении (4.4) ею можно пренебречь, т. е.

$$R_{xv}(\tau) \simeq R_{sv}(\tau).$$

<sup>1</sup> Еще более широко эта техника применяется при обработке данных сейсмо-разведки в случае коррекции статических поправок, обработке материалов широкого профиля, автоадаптации фильтров и др. (*Прим. перев.*).

Функция  $R_{xv}(\tau)$  содержит только частоты, общие для  $s(t)$  и  $v(t)$ , и следовательно, операция взаимной корреляции может рассматриваться как обычная фильтрация.

Для того чтобы показать аналогию между взаимной корреляцией и фильтрацией, рассмотрим соответствующие соотношения в частотной области. Возьмем линейную систему с импульсной реакцией  $h(t)$ , на вход которой подан сигнал  $x(t)$ . Согласно определению [см., например, Солодовников В. В., 1960, с. 97] взаимный спектр

$$\Phi_{hx}(\omega) = H^*(\omega) X(\omega), \quad (4.5)$$

где  $H(\omega) = F\{h(t)\}$ ;  $X(\omega) = F\{x(t)\}$ . Выражение  $H^*(\omega) = F\{h(-t)\}$  означает комплексно-сопряженную величину  $H(\omega)$ . Сравнение соотношений (4.5) и (1.14) показывает, что корреляция любой функции  $h(t)$  с произвольным входным сигналом  $x(t)$  эквивалентна пропусканию  $x(t)$  через фильтр, амплитудно-частотная характеристика которого представляет собой амплитудный спектр  $h(t)$  колебания, а фазовая характеристика отличается от его фазового спектра только знаком.

В общем случае зарегистрированные геофизические сигналы характеризуются не одной конкретной частотой, а некоторым диапазоном частот. Следовательно, взаимная корреляция с синусоидальным колебанием не всегда представляется удовлетворительным средством обнаружения сигналов. Значительно более эффективным оказывается использование колебаний с линейно изменяемой во времени частотой, т. е. применение фильтра, имеющего частотно-модулированную импульсную реакцию с линейно изменяемой частотой (chirp filtering). Отрезок частотно-модулированного сигнала длиной  $L$  с линейно изменяемой частотой может быть записан в виде

$$h(t) = \begin{cases} \sin \theta(t) = \sin 2\pi [f_0 + (f_1 - f_0)t/(2L)]t, & 0 \leq t \leq L; \\ 0 & \text{за пределами диапазона.} \end{cases}$$

Здесь  $f_0, f_1$  — соответственно начальная и конечная частоты колебания. Текущая частота этого колебания на времени  $t=t_1$  определяется как производная сигнала по времени

$$\left[ \frac{d\theta(t)}{dt} \right]_{t=t_1}$$

На рис. 4.2 показан пример функции  $h(t)$  с параметрами  $L=20$  с,  $f_0=1$  Гц,  $f_1=3$  Гц. Из-за конечной длины временной функции амплитудный спектр  $h(t)$  лишь приближенно аппроксимирует прямоугольную характеристику идеального фильтра. Тем не менее из рис. 4.2, б видно, что форма амплитудного спектра близка к прямоугольной с довольно крутыми срезами на частотах, близких к 1 и 3 Гц. За пределами этого диапазона амплитуда спектра быстро стремится к нулю.

Отсюда следует, что взаимная корреляция трассы с временной функцией, имеющей форму частотно-модулированного колебания с

линейно изменяемой частотой, эквивалентна полосовой фильтрации. Несмотря на хорошую форму амплитудно-частотной характеристики, такая фильтрация может вносить существенные фазовые искажения. Эти искажения могут быть устранены, например, путем использования приемов, рассмотренных в разделе 2.6. Крутизну срезов характеристики можно существенно повысить, если увеличить длину функции  $h(t)$ . Заметим также, что амплитуда функции  $h(t)$  по всей ее длине остается постоянной, хотя нетрудно придать

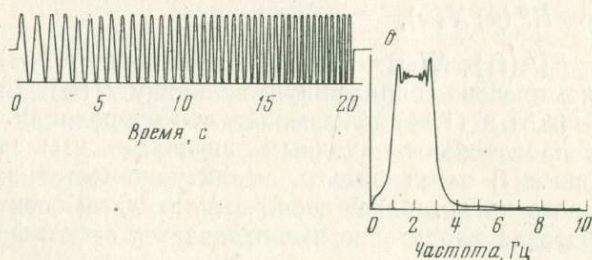


Рис. 4.2. Колебание с линейно-изменяемой частотой (а) и его амплитудный спектр (б).

Частота колебаний линейно изменяется от 1 Гц в начале до 3 Гц в конце в течение 20 с

различные веса разным участкам  $h(t)$  для подчеркивания или подавления некоторых частотных составляющих в полосе пропускания. Однако из теоретических соображений [Сарон et al. 1969] следует, что наличие вариаций амплитуды мало влияет на степень повышения отношения сигнал/шум.

Из указанного выше следует, что успешное выделение слабых сигналов на фоне шумов средствами взаимной корреляции требует априорного знания некоторой существенной информации о сигнале и шуме. Особенно важны сведения о частотном составе и приблизительных временах прихода сигналов. Обычно, чем полнее наши знания о скрытом в шумах сигнале, тем более качественного его обнаружения можно ожидать. Фильтры, основанные на априорном знании статистических свойств сигнала и шума, иногда называют параметрическими детекторами [Cochran, 1973]. При обработке записей сейсмологических наблюдений их частотный состав может быть установлен путем анализа менее зашумленных трасс, зарегистрированных при идентичных условиях возбуждения или в соседних пунктах приема. В этом случае предполагается идентичность регистрирующей аппаратуры и однородность условий установки. Распознавание многократных отражений может основываться на предположении о высокой степени подобия формы падающих и отраженных сигналов. Иногда наблюдается хорошее сходство между зарегистрированными  $P$  и  $pP$ -фазами [Howell et al, 1967]. Используя это свойство, можно выделять слабые вступления  $pP$ , замаскированные  $P$ -волнами, из зашумленных записей с помощью взаимной корреляции сигналов трассы с сигналом ис-

точника в скользящем окне. Такая методика дает хорошие результаты и в случае, когда фаза имеет обратную полярность по отношению к фазе Р. Эффективность корреляционной техники обнаружения сигналов при обработке синтетических записей показана Х. Дж. Джойсом и Дж. А. Морисоном (1954). Они подмешивали импульс эталонной формы к трассе с зарегистрированным шумом. Взаимная корреляция импульса с модельной трассой шумов и сигнала позволила выделить импульс эталонной формы даже на записях с малым значением отношения сигнал/шум.

#### 4.2. СОГЛАСОВАННЫЕ ФИЛЬТРЫ

Рассмотрим еще один подход к построению корреляционных фильтров. Пусть на входе и выходе линейной системы с импульсной характеристикой  $h_1(t)$  действуют соответственно сигналы  $x(t)$  и  $y(t)$ . Для любой формы входной функции можно найти систему, импульсная реакция которой является обращенным во времени входным сигналом, т. е.

$$h_1(t) = x(-t). \quad (4.6)$$

Если  $x(t)$  представляет собой короткий импульс с плавным спадом амплитуды на заднем фронте, то импульсная характеристика (4.6) в явной форме относится к физически неосуществимой системе. Тем не менее не представляет труда модифицировать  $h_1(t)$  так, чтобы получить физически осуществимую систему. Поскольку входной сигнал представляет собой четко выраженное вступление, он может быть усечен на некотором времени  $t_1$ , после которого значениями  $x(t)$  можно пренебречь. В этом случае система становится физически осуществимой, и ее импульсная реакция принимает вид

$$h_2(t) = \begin{cases} x(t_1 - t), & 0 \leq t \leq t_1; \\ 0 & \text{за пределами диапазона.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Условие (4.7) важно для физически осуществимых фильтров; что же касается систем, реализуемых на ЭВМ, то для них произвольная задержка  $t_1$  может быть игнорирована и использовано более простое соотношение (4.6).

Применяя интеграл свертки, находим выходной сигнал на времени  $t = t_0$ :

$$y(t_0) = \int_0^{\infty} x(\tau) h_1(t_0 - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} x(\tau) x(\tau - t_0) d\tau = R_{xx}(t_0). \quad (4.8)$$

Соотношение (4.8) показывает, что выходная трасса представляет собой автокорреляционную функцию входного сигнала. Это интересное явление можно было предсказать интуитивно, поскольку операции свертки и корреляции отличаются друг от друга только обращением по времени сигнала в первой из них. Для вещественной и четной функции  $h(t)$  обе математические операции идентичны.

Фильтры, описываемые уравнениями (4.6) и/или (4.7), называются согласованными. Как следует из обоих уравнений, импульсная реакция согласованного фильтра, настроенного на конкретный сигнал, является копией сигнала, обращенного во времени. Популярное изложение теории согласованных фильтров дано Г. Л. Тюриным (1960).

Обозначим трансформанты Фурье входного сигнала и импульсной реакции фильтра соответственно через  $x(t)$  и  $H(\omega)$ . Если обеспечить выполнение условия (4.6) и взять вещественную временную функцию  $x(t)$  в качестве входного сигнала, то получим:

$$H_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-j\omega t} dt = X^*(\omega). \quad (4.9)$$

Игнорируя постоянную временную задержку в уравнении (4.7), введенную для получения физически осуществимого фильтра, замечаем, что частотная характеристика (4.9) согласованного фильтра представляет комплексно-сопряженный спектр входного сигнала. Поэтому согласованный фильтр иногда называют сопряженным.

Особенность этой важной категории фильтров заключается в том, что они воздействуют на сигналы оптимальным образом с точки зрения отношения сигнал/шум. Рассмотрим это свойство.

Различные авторы по-разному определяют отношение сигнал/шум. Здесь определим его как отношение квадрата амплитуды сигнала  $|y(t_0)|^2$  на некотором времени  $t_0$  к средней квадратической амплитуде  $n_0^2$  выходного шума:

$$\frac{|y(t_0)|^2}{n_0^2}. \quad (4.10)$$

Фильтр, обеспечивающий наибольшую величину выражения (4.10), будем считать оптимальным в смысле отношения сигнал/шум. Чтобы получить частотную характеристику такого фильтра, выразим соотношение (4.10) через преобразования Фурье соответствующих функций. В общем случае

$$y(t) = F^{-1}\{Y(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.11)$$

где  $X(\omega)$ ,  $H(\omega)$  — соответственно спектр входного сигнала и импульсной реакции фильтра. Далее, используя соотношения (2.46) и (1.23), определяющие спектр мощности входного и выходного сигналов,

$$\begin{aligned} \overline{n_0^2} &= R_{00}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{00}(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) H^*(\omega) \Phi_{ii}(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $R_{00}(0)$  — значение автокорреляционной функции выходного шума для нулевого сдвига;  $\Phi_{00}(\omega)$  — спектр мощности выходного шума;  $\Phi_{ii}$  — спектр мощности входного шума.

Если подставить выражения (4.11) и (4.12) в соотношение (4.10), то выразим отношение сигнал/шум через спектр входного сигнала  $X(\omega)$ , спектр мощности шума  $\Phi_{ii}(\omega)$  и частотную характеристику  $H(\omega)$ . В соответствии с указанным выше фильтром, оптимальный в смысле отношения сигнал/шум, имеет такую частотную характеристику  $H(\omega)$ , которая максимизирует отношение

$$\frac{|y(t_0)|^2}{n_0^2} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) \exp(j\omega t_0) d\omega \right|^2}{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) H^*(\omega) \Phi_{ii}(\omega) d\omega}. \quad (4.13)$$

Величина  $t_0$  в уравнении (4.13) отвечает моменту времени, когда функция  $y(t)$  достигает своего наибольшего значения по абсолютной величине. Если сделать перестановку в числителе уравнения (4.13) и применить неравенство Шварца [Тюрин, 1960; Толстой, 1973, с. 384], то получим оптимальную характеристику в виде

$$H_{\text{опт}}(\omega) = \frac{X^*(\omega)}{\Phi_{ii}(\omega)} \exp(-j\omega t_0). \quad (4.14)$$

Характеристика  $H_{\text{опт}}(\omega)$  максимизирует соотношение (4.13). Если спектр входного шума  $n_i(t)$  равномерен в пределах частотного диапазона, занимаемого сигналом (белый шум), соотношение (4.14) может быть упрощено

$$H_{\text{опт}}(\omega) = Kx^*(\omega) \exp(-j\omega t_0), \quad (4.15)$$

где  $K$  — положительная константа, определяющая уровень спектра мощности входного шума. Коэффициент  $K$  может не учитываться при конструировании фильтров и далее не рассматривается. Сравнение выражений (4.15) и (4.9) показывает, что фильтры, согласованные с входными сигналами, осуществляют оптимальную фильтрацию этих сигналов в смысле максимума отношения сигнал/шум на выходе. Экспоненциальный множитель в соотношениях (4.14) и (4.15) является временной задержкой  $t_0$ , вводимой в соответствующую импульсную характеристику. Согласованные фильтры, описываемые выражением (4.9), позволяют получать максимальное отношение сигнал/шум только в особом случае, когда на вход фильтра воздействует белый шум. Использование согласованных фильтров при обработке сейсмограмм МОВ в предположении равномерности спектра шума описано, например, Ф. Мюром, и Ф. У. Хейлсом (1955). В случае окрашенного входного шума (когда шум нельзя считать белым) для обеспечения оптимальности фильтрации характеристика фильтра должна быть выбрана соответственно выражению (4.14). Рекурсивная реализация согласованных фильтров описана А. А. Никитиным и А. К. Яновским (1973).

Очевидно, что при проектировании таких фильтров необходимы априорные знания сигнала  $x(t)$  или его спектра  $X(\omega)$ . Однако в практических случаях, естественно, могут быть получены только оценки этих величин, и реализованные фильтры оказываются лишь аппроксимацией идеальных согласованных фильтров [см., например, Яновский, 1967, 1968; Штеменко, 1971; Кац, 1972]. В идеальном случае соотношение (4.8) показывает, что выходной сигнал согласованного фильтра представляет собой автокорреляционную функцию  $R_{xx}(\tau)$ , обычно имеющую форму быстро затухающего с

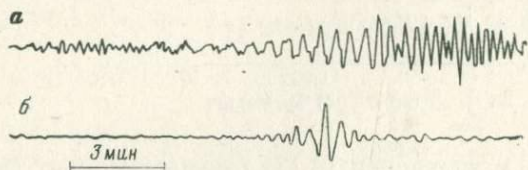


Рис. 4.3. Исходная сейсмическая трасса с записью релейской волны (а) и выходной сигнал согласованного фильтра (б).

Максимальная амплитуда указывает на вступление волны, имеющей период 30 с; импульсная реакция фильтра — сигнал с частотой, линейно меняющейся от 0,02 до 0,06 Гц, и длительностью около 630 с [Bruland and Rygg, 1971]; выходной сигнал можно рассматривать как функцию взаимной корреляции входного сигнала и обращенной импульсной реакции фильтра

ростом ( $\tau$ ) колебательного процесса, представленного несколькими полупериодами. Хотя функция  $R_{xx}(\tau)$  не повторяет форму входного сигнала, тем не менее она позволяет обнаружить слабые сигналы на фоне помех. С. Трейтел и Э. А. Робинсон (1969) предложили фильтры выходной энергии, при построении которых принимается во внимание не единственное значение выходного сигнала на времени  $t=t_0$ , как в случае оптимальных фильтров, а сумма квадратов амплитуд, т. е. энергия выходного сигнала в некотором интервале времени. Критерием оптимальности является максимизация отношения этой энергии к энергии шума  $n_0^2$ .

Согласованные фильтры применяются довольно широко при обработке геофизических данных. Так, например, К. С. Клей и У. Л. Лианг (1962) для глубоководных исследований методом сейсмического профилирования использовали фильтры, согласованные с формой сигнала в источнике. Л. Бруланд и Э. Ригг (1971) применили согласованные фильтры при дисперсионном анализе поверхностных сейсмических волн в предположении, что частотно-модулированное колебание с линейно изменяемой частотой, рассмотренное ранее, достаточно хорошо соответствует зарегистрированным колебаниям поверхностных волн. Результаты, представленные Дж. Капоном и П. Э. Грином (1968), подтверждают справедливость данного предположения. Следовательно, частотно-модулированные колебания с линейно изменяемой частотой могут быть эффективно использованы в качестве операторов соответствующих согласованных фильтров. В этом случае обработка может рассматриваться и как согласованная фильтрация, и как воздействие опе-

ратора, представленного частотно-модулированным колебанием с линейно изменяемой частотой. Как следует из рис. 4.3, согласованная фильтрация является результативным средством обнаружения поверхностных волн, преобладающий период которых заранее известен.

Высокая эффективность согласованного фильтра — следствие значительного сходства между анализируемым входным сигналом и частотно-модулированным колебанием, использованным в качестве импульсной реакции фильтра.

В случае, когда принятые основные предпосылки не являются удовлетворительными, полученные результаты могут легко привести к ошибочным выводам.

#### 4.3. ОПТИМАЛЬНЫЕ ВИНЕРОВСКИЕ ФИЛЬТРЫ

Если в наблюдаемых данных сигнал и шум занимают различные частотные диапазоны, то идеальные прямоугольные фильтры, рассмотренные ранее, позволяют полностью разделить между собой сигнал и шум. Однако на практике спектра сигнала и шума часто занимают перекрывающиеся частотные диапазоны. При этой ситуации прямоугольные фильтры будут или подавлять определенную часть полезной информации, или пропускать некоторую часть нежелательного шума, или, что наиболее вероятно, осуществлять то и другое. Таким образом, при перекрывающихся спектрах прямоугольные фильтры неспособны полностью выделить сигнал на фоне помех. В этом случае возникает вопрос: какой фильтр наилучшим образом разделит между собой сигнал и шум? Другими словами, каким образом должны выбираться характеристики фильтра для наилучшего подавления шума и одновременно возможно более полного сохранения информации, содержащейся в сигнале? Исчерпывающий ответ на поставленный вопрос дает винеровская теория оптимальной фильтрации (1949). Приведем основные положения этого подхода в форме, предложенной Я. В. Ли (1960) и В. В. Солодовниковым (1960).

##### 4.3.1. Оптимальные физически неосуществимые системы

Постановка задачи сводится к следующему. Исходя из известных статистических характеристик сигнала и шума требуется построить такой фильтр, который будет воспроизводить искомый сигнал наилучшим образом с точки зрения некоторого критерия. Предположим, что сигнал и шум являются стационарными некоррелированными между собой случайными временными функциями, а синтезируемый фильтр должен быть линейным и постоянным во времени.

Пусть зарегистрированная трасса  $x(t)$  представлена суммой сигнала и шума.

$$x(t) = s(t) + n(t).$$

Из-за присутствия шума  $n(t)$  полное восстановление сигнала  $s(t)$  из трассы  $x(t)$  с помощью линейной системы невозможно. Фактический выходной сигнал  $y(t)$  всегда будет в той или иной степени отличаться от  $s(t)$ . Здесь не рассматривается тривиальный случай, когда точно известны  $s(t)$  или  $n(t)$ . Чтобы обосновать рассматриваемый подход, введем некоторую функцию  $y_d(t)$  — идеальный или желаемый выходной сигнал. Функцию  $y_d(t)$  можно определить по-разному в зависимости от наших требований. Пусть, например, желаемым выходным сигналом является точная копия сигнала  $s(t)$ , т. е.

$$y_d(t) = s(t). \quad (4.16)$$

Для большинства практических применений временной сдвиг сигнала на постоянную величину  $t_1$  не вносит искажений. Поэтому можно выбрать и такой желаемый выходной сигнал

$$y_d(t) = s(t \pm t_1), \quad (4.17)$$

где  $t_1$  — вещественная неотрицательная константа. В зависимости от положительного или отрицательного знака в уравнении (4.17) фильтры соответственно называются фильтрами предсказания либо фильтрами запаздывания. В первом случае желаемым является опережающий сигнал  $s(t+t_1)$ , во втором — задержанный сигнал  $s(t-t_1)$ .

Фильтр предсказания прогнозирует будущие значения сигнала по предшествующим значениям («истории») сигнала и шума. Система проектируется таким образом, чтобы при пропускании через нее зашумленной трассы  $x(t)$  действительный сигнал на выходе системы наилучшим образом аппроксимировал опережающий сигнал  $s(t+t_1)$ . Случай, когда  $t_1=0$  [см. уравнение (4.16)], соответствует фильтру с нулевой задержкой или сглаживающему.

Существует несколько возможных критериев оптимальности выделения сигнала, используемых при проектировании фильтров. Как следует из описанного выше, фактический выходной сигнал будет отличаться от желаемого на некоторую величину

$$e(t) = y(t) - y_d(t), \quad (4.18)$$

которую можно рассматривать как погрешность воспроизведения желаемого сигнала. Очевидно, что любая положительная функция погрешности  $e(t)$  может служить мерой качества работы системы. Существуют два приемлемых варианта такой функции:  $|e(t)|$  и  $e^2(t)$ . Критерий минимума среднего квадратического отклонения, предложенный в оригинальной работе И. Винера (1949), придает большой вес значительным погрешностям и игнорирует малые; в то же время он предоставляет некоторые преимущества с математической точки зрения. Величина  $e^2(t)$  может быть определена с помощью импульсной реакции фильтра и статистических характеристик входных и выходных сигналов. Более детальные исследова-

ния поведения погрешности  $e^2(t)$  в зависимости от параметров фильтра выполнены Р. А. Уиггинсом (1967).

При подстановке выражения (4.17) в соотношение (4.18) и использовании интеграла свертки для нахождения выходного сигнала  $y(t)$  среднюю квадратическую погрешность можно описать выражением

$$\overline{e^2(t)} = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{T_1} [h(\tau)x(t-\tau)dt - s(t \pm t_1)]^2 dt,$$

где  $h(t)$  — импульсная реакция фильтра. Если ввести корреляционные функции [см., например, Lee, 1960, с. 359], то приведенное выражение примет вид

$$\begin{aligned} \overline{e^2(t)} = & \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) d\sigma R_{xx}(\tau - \sigma) - \\ & - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau R_{xs}(\tau \pm t_1) + R_{ss}(0). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Здесь  $R_{xx}(\tau)$  — автокорреляционная функция входной трассы;  $R_{xs}(\tau)$  — взаимно-корреляционная функция входной трассы и желаемого выходного сигнала;  $R_{ss}(0)$  — среднее квадратическое значение желаемого выходного сигнала. Уравнение (4.19) показывает, что для любой системы  $h(t)$  дисперсия погрешности  $\overline{e^2(t)}$  полностью определяется корреляционными функциями, поскольку входные и выходные сигналы не входят в выражение (4.19). Следовательно, существует бесчисленное множество входных трасс и желаемых выходных сигналов, для которых дисперсия погрешности будет одной и той же.

Следующим шагом является оптимизация функции  $h(t)$ , заключающаяся в нахождении такой импульсной реакции, которая минимизирует выражение (4.19). Это довольно сложная проблема, решаемая методами вариационного исчисления. Можно показать [см., например, Davenport and Root, 1958, с. 223—224; Lee, 1960, с. 360—369; Солодовников, 1960, с. 186—188], что функция  $h(t)$ , обеспечивающая минимальную величину погрешности  $\overline{e^2(t)}$ , должна удовлетворять интегральному уравнению

$$R_{xs}(\tau \pm t_1) - \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{опт}}(\sigma) R_{xx}(\tau - \sigma) d\sigma = 0. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20), известное как уравнение Винера — Хопфа<sup>1</sup>, выражает условие оптимальности фильтра в смысле минимума среднего квадратического отклонения. Для того чтобы подчеркнуть оптимальность импульсной реакции, в подынтегральное выражение (4.20) введен индекс «опт». Основные трудности при решении уравнения Винера — Хопфа представляют ограничение

<sup>1</sup> В отечественной литературе оно называется иногда также уравнением Колмогорова — Винера [см., например, В. В. Солодовников, 1960]. (Прим. перев.).

$\tau \geq 0$  и выбор нижнего предела интегрирования в уравнении (4.20), обусловленный требованием физической осуществимости фильтра.

В большинстве случаев для фильтров, реализуемых на ЭВМ, можно снять требование физической осуществимости. Тогда уравнение (4.20) можно записать в виде

$$R_{xs}(\tau \pm t_1) - \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{опт}}(\sigma) R_{xx}(\tau - \sigma) d\sigma = 0. \quad (4.21)$$

Поскольку второе слагаемое левой части уравнения (4.21) представляет собой интеграл свертки, решение уравнения можно легко найти, выполнив преобразование Фурье для обеих частей.

$$\Phi_{xs}(\omega) \exp(\pm j\omega t_1) - H_{\text{опт}}(\omega) \Phi_{xx}(\omega) = 0.$$

Здесь  $H_{\text{опт}}(\omega)$  — оптимальная частотная характеристика системы;  $\Phi_{xs}(\omega)$  и  $\Phi_{xx}(\omega)$  — спектры мощности, соответствующие функциям  $R_{xs}(\tau)$  и  $R_{xx}(\tau)$ . Экспоненциальный множитель с переменной  $t_1$  определяет тип оптимального фильтра: при  $t_1 < 0$  оптимальный фильтр является запаздывающим, при  $t_1 = 0$  — сглаживающим, при  $t_1 > 0$  — фильтром предсказания (упреждающим). Характеристики оптимального фильтра можно записать в следующем виде:

$$H_{\text{опт}}(\omega) = \frac{\Phi_{xs}(\omega)}{\Phi_{xx}(\omega)} \exp(\pm j\omega t_1); \quad (4.22)$$

$$h_{\text{опт}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{xs}(\omega)}{\Phi_{xx}(\omega)} \exp[j\omega(t \pm t_1)] d\omega.$$

Принимая во внимание некоррелированность сигнала и шума между собой, а также учитывая, что среднее значение сигнала и шума (или только одного из них) равно нулю, перепишем уравнение (4.22) в более удобном виде:

$$H_{\text{опт}}(\omega) = \frac{\Phi_{ss}(\omega)}{\Phi_{ss}(\omega) + \Phi_{nn}(\omega)} \exp(\pm j\omega t_1); \quad (4.23)$$

$$h_{\text{опт}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{ss}(\omega) \exp[j\omega(t \pm t_1)]}{\Phi_{ss}(\omega) + \Phi_{nn}(\omega)} d\omega.$$

Поскольку  $\Phi_{ss}(\omega)$  и  $\Phi_{nn}(\omega)$  являются вещественными функциями частоты,  $H_{\text{опт}}(\omega)$  представляет собой фазово-ненскажающий фильтр.

Указанное выше можно подытожить следующим образом. Уравнение (4.23) описывает оптимальный винеровский фильтр в предположении, что: 1) система является линейной и инвариантной во времени, 2) сигнал и шум — стационарные случайные временные функции, 3) сигнал и шум не коррелированы между собой, а их среднее значение равно нулю, 4) в основу фильтра положен кри-

терий минимума средней квадратической погрешности, 5) оптимальная система является физически неосуществимой.

Полученные в данном разделе результаты относятся только к физически неосуществимым системам. Физически осуществимые оптимальные фильтры могут быть реализованы только при решении уравнения (4.20). Решение этой интересной, но довольно сложной математической задачи выходит за рамки настоящей книги, в связи с чем читатель, интересующийся данной проблемой или связанными с ней, может обратиться, например, к работе Я. В. Ли (1960, с. 371—395).

#### 4.3.2. Особенности проектирования оптимальных винеровских фильтров

Остановимся на некоторых свойствах уравнений (4.21) и/или (4.23), важных с практической точки зрения.

Во-первых, экспериментально могут быть определены только функции  $\Phi_{xx}(\omega)$  и  $\Phi_{nn}(\omega)$ . Функция  $\Phi_{xx}(\omega)$  вычисляется как спектр мощности зарегистрированной трассы  $x(t)$ , а функция  $\Phi_{nn}(\omega)$  — как спектр мощности шума в области до первых вступлений сигнала. Поскольку при наблюдениях практически невозможно получить записи без фона помех, спектр мощности  $\Phi_{ss}(\omega)$  не может быть оценен непосредственно. В связи с этим синтезируемые фильтры являются только аппроксимациями оптимальных винеровских фильтров.

Во-вторых, практически лишь в исключительных случаях сигнал и шум не меняют своих статистических свойств во времени. Например, при обработке сейсмических записей шумы, создаваемые микросейсмами, могут рассматриваться как стационарные во времени только в первом приближении. Более того, сигналы, зарегистрированные при землетрясениях, имеют ярко выраженный неустановившийся и нестационарный характер. Следовательно, с помощью фильтра, настроенного на некоторый конкретный сигнал, можно не получить удовлетворительных результатов при использовании его для фильтрации какой-либо другой сейсмической записи.

Ограничения, накладываемые стационарностью сигнала и другими перечисленными выше факторами, могут быть устранены использованием в уравнении (4.23) зависимых во времени двумерных спектров мощности. Такие спектры, являясь функциями частоты и времени, зависят как от абсолютного значения времени, так и от относительного временного сдвига между сигналом или шумом. Такие оптимальные фильтры будут представлять собой переменные во времени системы [см. также Wang, 1969; Robinson, 1972]. Вместо классического метода описания системы с помощью ее импульсной реакции для этого может быть использована система линейных дифференциальных уравнений. Если предыдущий метод имеет определенные преимущества для систем, рассматриваемых как «черный ящик», то последний предпочтителен для систем с априорно известной внутренней структурой.

Подход, основанный на решении системы дифференциальных уравнений, используется при конструировании фильтров Калмана [Bayless and Brigham, 1970; Ott and Meder, 1972]. Эти фильтры являются оптимальными по винеровскому критерию, но при их проектировании предположения о стационарности не требуются.

В-третьих, до сих пор рассматривались аналоговые сигналы, следовательно, уравнение (4.23) характеризует оптимальную аналоговую систему. Для построения цифрового варианта системы полученные здесь уравнения должны быть преобразованы. Чтобы иметь возможность применить некоторые из методов, рассмотренных в главе 2, функции  $H_{\text{опт}}(\omega)$  и  $h_{\text{опт}}(t)$  должны быть записаны в аналитической форме. Однако на практике функции  $\Phi_{ss}(\omega)$  и  $\Phi_{nl}(\omega)$  получают в результате измерений и расчетов, и аналитические их выражения остаются неизвестными. Следовательно, еще до перехода к цифровым вариантам необходимо аппроксимировать функцию  $H_{\text{опт}}(\omega)$

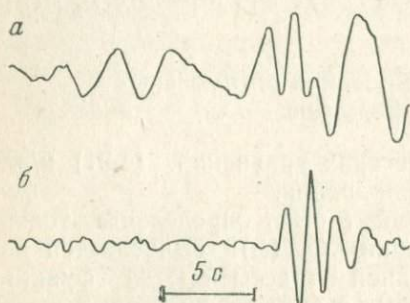


Рис. 4.4. Пример оптимальной сглаживающей фильтрации сейсмической записи.

Фильтр вносит фазовый сдвиг; трассы фильтра: а — входная, б — выходная

подходящей аналитической функцией. [см. Kulhanek, 1967]. Несколько способов аппроксимации предложены, например, В. В. Солодовниковым (1960, с. 169—182). Очевидно, что любая аппроксимация функции  $H_{\text{опт}}(\omega)$  является дополнительным источником отклонений от условия оптимальности фильтра.

На рис. 4.4 показан пример оптимальной сглаживающей фильтрации сейсмической записи. На исходной сейсмограмме (см. рис. 4.4, а) сигнал и шум имеют приблизительно одинаковую интенсивность, поэтому визуально выделить вступление сигнала затруднительно. После прохождения трассы через фильтр, разумно аппроксимирующий оптимальную систему, отношение сигнал/шум заметно повысилось. На выходной трассе (см. рис. 4.4, б) теперь можно легко выделить первое вступление сигнала. Использовался фильтр десятого порядка, вносящий фазовые искажения [подробно рассмотрен Кулханеком (1967)]. Интервал дискретности его импульсной реакции (весовой функции) равен 0,138 с. Построение цифрового варианта характеристики фильтра осуществлено с использованием разложения на простые дроби.

Синтез фильтра можно выполнить непосредственно в области дискретного времени. Н. Левинсон (1949) использовал дискретную форму уравнения Винера—Хопфа [см. также Robinson, 1967 b; Shanks, 1967; Robinson and Treitel, 1967]

$$R_{xx}(m) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\text{опт } n} R_{xx}(m-n) = 0, \quad -\infty \leq m \leq \infty, \quad (4.24)$$

где  $m, n$  — целые числа;  $R_{xs}(m), R_{xx}$  — корреляционные функции, определяемые соотношениями:

$$R_{xs}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n s_{n+m};$$

$$R_{xx}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n+m}.$$

Полагая, что характеристика  $h_{\text{опт}n}$  затухает с ростом  $|n|$ , и выбирая достаточно большое число  $N$ , изменяем пределы суммирования в уравнении (4.24):

$$R_{xs}(m) - \sum_{n=-N}^N h_{\text{опт}n} R_{xx}(m-n) = 0, \quad -N \leq m \leq N. \quad (4.25)$$

Следовательно, условие оптимальности фильтра может быть выражено системой  $2N+1$  уравнений, выполняющих те же функции, что и интегральное уравнение Винера — Хопфа в непрерывном времени. Коэффициенты этих уравнений представляют заранее известные величины — отсчеты автокорреляционной функции входной трассы, функции взаимной корреляции входной трассы и желаемого выходного сигнала. Неизвестными величинами являются отсчеты оптимальной импульсной реакции. При решении системы уравнений получаем оптимальную последовательность  $\{h_{\text{опт}}\}$  длиной  $2N+1$ . Таким образом, вычисление интеграла при синтезе аналоговых систем заменено решением системы линейных алгебраических уравнений в области дискретного времени. Приближенное решение уравнения (4.25) с использованием итерационной техники описано Р. Дж. Вэнгом и С. Трейтелем (1973).

Применим  $z$ -преобразование к уравнению (4.24):

$$R_{xs}(z) = H_{\text{опт}}(z) R_{xx}(z).$$

Системная функция оптимального фильтра будет иметь вид

$$H_{\text{опт}}(z) = \frac{R_{xs}(z)}{R_{xx}(z)} = \frac{R_{ss}(z)}{R_{ss}(z) + R_{nn}(z)}, \quad (4.26)$$

где  $H_{\text{опт}}(z), R_{xs}(z), R_{xx}(z)$  —  $z$ -трансформанты соответствующих функций в уравнении (4.24). Уравнение (4.26) позволяет непосредственно определить отсчеты весовой функции цифрового винеровского фильтра. Заметим также, что в общем случае функции  $R_{xs}(z)$  и  $R_{xx}(z)$  в уравнении (4.26) представляют собой бесконечные ряды, следовательно, для практического их применения требуется решить проблему усечения этих рядов. Более того, в частотной области обычно проще получить оценки сигнала и шума, необходимые для решения уравнения (4.23), чем во временной области, как этого требует уравнение (4.26).

Кроме подхода, предложенного Н. Винером (1949) и Н. Левин-

соном (1949), используются другие методы конструирования оптимальных сглаживающих и прогнозирующих фильтров. Например, Х. Р. Фрэнк и В. Э. Доти (1953) обнаружили, что оптимальное улучшение отношения сигнал/шум можно получить с помощью фильтра, амплитудно-частотная характеристика которого имеет пик на частоте, соответствующей максимальному отношению сигнал/шум.

Группа геофизического анализа в Массачусетском технологическом институте [Wadsworth et al, 1953] использовала линейный прогнозирующий оператор для обнаружения замаскированных отражений на сейсмических записях. Идея этого способа основана на предположении о том, что стационарные участки сейсмической записи, не содержащие отражений, предсказуемы по записям на предшествующих интервалах с более высокой точностью, чем участки, к которым приурочены вступления отраженных волн. Другими словами, интервалы трассы с большими погрешностями предсказания совпадают с вступлениями отраженных волн. Погрешность предсказания в этом случае есть разность предсказанной и наблюдаемой записей. Зависимость погрешности предсказания от длины оператора прогнозирующего фильтра изучалась Дж. Н. Гэлбрейтом (1971).

Г. П. Вэдсворт и другие (1953) показали преимущество расчета операторов этих фильтров по стационарным участкам двух трасс, зарегистрированных в соседних точках приема, по сравнению с вычислением по одной трассе. Операторы, получаемые таким способом, могут считаться фильтрами с многоканальным входом, осуществляющими прогнозирование по нескольким входным трассам. В ряде представленных авторами числовых примеров использовался шаг дискретизации  $\Delta t = 2,5$  мс. Весовые функции оптимального фильтра определялись по отсчетам трасс на интервале длиной 125 мс. Расчет сводился к решению системы линейных алгебраических уравнений, в которые входили прошлые (по отношению к времени прогноза) значения отсчетов двух трасс и неизвестные отсчеты искомого оператора фильтра. Интервал предсказания выбирался равным 5; 10 и 15 мс, а само предсказание делалось по значениям текущего и трех предыдущих отсчетов двух входных трасс. Краткое описание этой методики можно найти также у С. А. Шварца и В. М. Соколова (1954). Аналогичную концепцию использовали Г. М. Молчан и другие (1964 г.) в случае обнаружения слабых сейсмических сигналов в одноканальном варианте и Дж. Ф. Клэрбо (1964) при многоканальных процедурах обработки.

Э. А. Робинсон (1957, 1967а) предложил способ расчета оператора одноканального прогнозирующего фильтра. Он ввел в рассмотрение концепцию сейсмической трассы, как суперпозиции сейсмических импульсов одинаковой формы, имеющих различные амплитуды и времена вступления. Способ обработки, обусловленный таким подходом, им назван прогнозирующим разложением (predictive decomposition).

С. М. Симпсоном (1955) предложен линейный оптимальный фильтр, основанный на предположении об идентичности формы сигналов на многоканальных сейсмограммах и отсутствии сдвигов между ними по времени. Шум рассматривался как стационарный случайный процесс. Оптимизация фильтра осуществлялась путем преобразования, позволяющего получить наилучшее совпадение по форме между отфильтрованными трассами по крайней мере в интервале регистрации сигналов.

Оптимальный оператор прогнозирующего фильтра, использованный для предсказания обвалов горных пород в ограниченной горной выработке предложили Дж. Бубен и Рудаев (1974). Они полагают, что появление выбросов носит случайный характер, интервалы времени между выбросами и энергия выбросов взаимно независимы. Исходные данные были представлены последовательностями величин, характеризующих сейсмическую активность (в рассматриваемом случае — чисел выбросов в течение 1 мес, энергия которых не выходит за пределы заданного интервала). Такие последовательности сглаживались методом скользящего среднего, что позволяло получить линейно затухающую функцию автокорреляции, определяющую отсчеты оператора прогнозирующего фильтра.

#### 4.3.3. Многомерные винеровские оптимальные фильтры

Теория винеровских оптимальных фильтров может быть распространена и на многомерные фильтры. Применительно к геофизическим задачам особое значение приобретают двухмерные и трехмерные оптимальные фильтры. К двумерным относятся векторные фильтры по волновым числам или фильтры по двум координатам: волновому числу и частоте, к трехмерным — векторные фильтры по волновым числам (две координаты) и частоте (третья координата). Оптимальная двухмерная частотная характеристика задается в виде

$$H_{\text{опт}}(k_x, k_y) = H_{\text{опт}}(\mathbf{k}) = \Phi_{xs}(k_x, k_y) / \Phi_{xx}(k_x, k_y), \quad (4.27)$$

где  $k_x, k_y$  — волновые числа соответственно по осям  $x$  и  $y$ ;  $\mathbf{k}$  — векторное волновое число;  $\Phi_{xs}(k_x, k_y)$  — двухмерный взаимный спектр мощности входного и желаемого выходного сигналов;  $\Phi_{xx}(k_x, k_y)$  — двухмерный спектр мощности входного сигнала. Спектры мощности могут быть получены через соответствующие двухмерные корреляционные функции. Импульсная реакция фильтра (4.27) является также двухмерной функцией, определенной на плоскости  $(x, y)$ . Ж. К. Кларк (1969) применил фильтры вида (4.27) для повышения качества гравиметрических и магнитных карт, в частности, для оптимального (по винеровскому критерию) продолжения поля вниз и вычисления его вторых производных.

Кроме того, теория двухмерных оптимальных фильтров рассматривалась в различных аспектах (см., например, главу 6) Р. А. Уиггинсом (1966), Р. Л. Сенгбушем и М. Р. Фостером

(1968) и другими авторами. П. Дж. Ганном (1972) был описан способ использования двухмерной сглаживающей функции Хемминга в области времен.

Передаточная функция оптимального трехмерного фильтра имеет вид

$$H_{\text{опт}} = (f, k_x, k_y) = H_{\text{опт}}(f, \mathbf{k}) = \Phi_{xs}(f, k_x, k_y) / \Phi_{xx}(f, k_x, k_y), \quad (4.28)$$

где  $\Phi_{xs}(f, k_x, k_y)$ ,  $\Phi_{xx}(f, k_x, k_y)$  — спектры мощности. Эти спектры мощности могут быть вычислены через трехмерные преобразования Фурье соответствующих корреляционных функций. Теория трехмерных винеровских фильтров была адекватно разработана Дж. П. Баргом (1964). Очевидно, что фильтры (4.27) и (4.28) являются обобщением одномерного оптимального фильтра (4.25).

#### 4.4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ФИЛЬТРЫ

Как будет показано ниже, поляризационная фильтрация существенно отличается от фильтраций, рассмотренных в предыдущих разделах. Тем не менее построение поляризационных фильтров представляет собой интересный подход к использованию автокорреляционных функций для повышения отношения сигнал/шум, в связи с чем краткое описание поляризационной фильтрации включено в данную главу. Трехкомпонентные сейсмограммы позволяют обрабатывать зарегистрированные сигналы как векторные функции времени. По записям, полученным с согласованными трехкомпонентными сейсмоприемниками, можно восстановить и проанализировать картину колебаний частиц (их поляризацию). Движения частиц, связанные, например, с распространением Р-волн, как известно, имеют продольную поляризацию, совпадающую с направлением распространения волн. Направление подхода волны к сейсмоприемнику зависит как от положения источника волны, так и от строения среды в области приема колебаний.

С точки зрения фильтрации явление поляризации можно использовать двояким образом. Во-первых, появляется возможность разделять сигналы по различному типу поляризации, т. е. разграничивать сигналы с продольной поляризацией от сигналов с другим типом поляризации, например, эллиптическим. Во-вторых, зарегистрированные колебания Р-волн могут быть разделены по направлению поляризации. Другими словами, становится возможным из ряда фокальных областей выбрать одну, представляющую особый интерес, что может быть использовано при создании автоматических систем предупреждения [см. Levin and Price, 1964].

Вообще эффективность обоих типов фильтрации зависит от степени линейности и направленности траекторий колебаний частиц в точке приема [см., например, Flinn, 1965; Montalbetti and Kanasewich, 1970]. В данном разделе будут рассмотрены принципы построения поляризационных фильтров, используемых для выделения вступлений Р-волн на фоне сильных помех.

Предположим, что интересующий нас сигнал является вступлением Р-волны с продольной поляризацией колебаний. Пусть отсчеты двух горизонтальных и одной вертикальной компонент записи равны соответственно  $s_{1n}$ ,  $s_{2n}$  и  $s_{3n}$ . Шумы представлены микросейсмками, три компоненты которых обозначим  $n_{1n}$ ,  $n_{2n}$  и  $n_{3n}$ . Тогда записи трасс имеют вид

$$x_{1n} = s_{1n} + n_{1n}; \quad x_{2n} = s_{2n} + n_{2n}; \quad x_{3n} = s_{3n} + n_{3n}.$$

Допустим далее, что микросейсмки распространяются как релеевские волны, у которых траектории частиц имеют эллиптическую поляризацию. Благодаря продольной поляризации Р-волн фазовый сдвиг между компонентами сигнала точно равен нулю или  $180^\circ$ . Следовательно, при взаимной корреляции любых двух компонент сигнала из трех получают нормализованные значения, равные единице или минус единице. Поскольку между тремя компонентами помех вообще не ожидается существенного сходства, абсолютные значения их взаимно-корреляционных функций будут значительно меньше единицы. Взаимно-корреляционная функция двух горизонтальных трасс, очевидно, имеет вид

$$R_{12}(\tau) = R_{s_1 s_2}(\tau) + R_{s_1 n_2}(\tau) + R_{s_2 n_1}(\tau) + R_{n_1 n_2}(\tau). \quad (4.29)$$

Первое слагаемое правой части уравнения (4.29) равно единице или минус единице, тогда как остальные слагаемые могут быть игнорированы, поскольку сигнал и шум не коррелированы, так же как и разные компоненты шума между собой, между сигналом и шумом. Более подробный анализ выполнен Ю. Б. Шаубом (1963).

Уравнение (4.29) описывает действие поляризационного фильтра и показывает принцип обнаружения линейно-поляризованных сигналов на фоне нелинейно-поляризованного шума. В качестве входных данных могут быть использованы записи любых двух компонент из трех. На выходной трассе фильтра разрастания амплитуд наблюдаются в области вступлений полезных сигналов.

Вообще, взаимно-корреляционные функции  $R_{12}(\tau)$ ,  $R_{13}(\tau)$  и  $R_{23}(\tau)$  не обеспечивают высокой разрешающей способности по времени: точность определения вступлений волн снижается. Кроме того, с помощью взаимно-корреляционных функций обеспечивается только выделение продольно-поляризованных волн, информация об энергии зарегистрированных сигналов теряется. Разрешающая способность по времени может регулироваться размером окна, в котором оцениваются функции взаимной корреляции. Более короткие интервалы обеспечивают высокую разрешающую способность, тогда как более длинные — лучшее подавление нелинейно-поляризованных составляющих трассы. Приемлемый компромисс

должен выбираться с учетом конкретных особенностей обрабатываемого материала.

Несколько примеров практического применения поляризационных фильтров описаны М. Шимшони и С. У. Смитом (1964). Они использовали горизонтальную радиальную компоненту  $x_{4n}$  и вертикальную компоненту  $x_{3n}$  и взамен вычисления взаимно-корреляционной функции взяли взаимные произведения компонент  $M_j$ , определяемые соотношением

$$M_j = \sum_{n=-N}^N x_{3n+j} x_{4n+j}, \quad (4.30)$$

где  $2N+1$  — длина окна. Произведение  $M_j$  также является мерой продолжности поляризации, но при этом сохраняется информация об интенсивности зарегистрированных сигналов. В случае идеальной продолжности  $M_j$  — положительная величина ( $x_{3n}$  и  $x_{4n}$  всегда находятся в фазе), что не способствует обеспечению высокой разрешающей способности по времени и детальности дальнейшего анализа. Поэтому М. Шимшони и С. У. Смит опробовали несколько других функций  $M_j$ , а именно  $x_{3j}M_j$ ,  $x_{4j}M_j$ ,  $(x_{4j}M_j)^{1/3}$  и  $x_{4j}|M_j|^{1/2}$ , и получили превосходные результаты. Они использовали сигналы, зарегистрированные от мощного подземного ядерного взрыва в Неваде, которые смешивали с шумом, меняя его энергетический уровень. Таким образом были получены трассы с различным отношением сигнал/шум, на которых проверялась эффективность действия фильтра.

Будем считать идеальной запись, содержащую продольно-поляризованные сигналы и нелинейно-поляризованный шум. В практических ситуациях такой случай встречается редко. Например, шумы, генерируемые сигналом (реверберация в зоне приема), и строение земной коры под точкой приема обуславливают отклонения от идеальной продолжности поляризации сигналов.

Как указывалось выше, поляризационные фильтры существенно отличаются от большинства фильтров, рассмотренных ранее. Во-первых, разделение сигналов и шума базируется на различии не частотных составляющих, а типа поляризации. Следовательно, сигналы и помехи, которые занимают перекрывающиеся частотные диапазоны, но отличающиеся типом поляризации, могут быть эффективно разделены. Во-вторых, поскольку уравнения (4.29) и (4.30) не удовлетворяют условию пропорциональности (1.2), поляризационная фильтрация является нелинейной процедурой, такой же, например, как автокорреляционная фильтрация. В-третьих, при поляризационной фильтрации всегда используются две входные компоненты сигнала, следовательно, поляризационные фильтры относятся к классу простых многоканальных фильтров.

Э. Дж. Меркадо (1968) разработал линейный вариант поляризационного фильтра для разделения между собой продольных и

релеевских волн. В то время как записи Р-волн имеют аналогичную форму на вертикальном и горизонтальном каналах, релеевская волна регистрируется на них со сдвигом фаз на  $90^\circ$ . Временные сдвиги между двумя компонентами, обусловленные фазовым сдвигом  $90^\circ$ , являются частотно-зависимыми и могут использоваться при разделении различных мод релеевских волн. Эти соображения были положены в основу двухканального фильтра, пропускающего синфазные сигналы, которые зарегистрированы на двух трассах, и подавляющего сигналы, записанные с определенными временными сдвигами. Ж. Чоу и К. Мак-Кеми (1973) спроектировали поляризационный фильтр для повышения качества записи волн, поляризованных как релеевские.

Задача устранения нежелательных эффектов, создаваемых собственными процессами используемых датчиков, возникает во многих областях науки. Например, в геофизике форма зарегистрированных колебаний на сейсмограммах в общем случае отличается от действительной формы колебаний частиц земной поверхности. Эта проблема приобретает особенно серьезное значение при сопоставлении записей, зарегистрированных различными сейсмоприемниками. Снижение до минимума влияния собственных процессов сейсмоприемников с помощью использования дополнительных фильтрующих систем, имеющих передаточные функции, обратные по отношению к передаточным функциям сейсмоприемников, обычно приводит к возрастанию фона шумов, который может стать доминирующим на записи. Поэтому приходится искать компромисс между допустимым фоном шумов и нежелательными искажениями, вносимыми регистрирующей аппаратурой.

Кроме того, в точности обратные по отношению к заданным нерекурсивные системы имеют импульсные реакции бесконечной длительности, что препятствует их применению при обработке на ЭВМ. Поскольку по своим фильтрующим свойствам большинство геофизических систем, в частности элементы сейсмического канала, подобны полосовым фильтрам, точное обращение передаточной функции приводит к нестабильным операторам независимо от того, рекурсивной или нерекурсивной была исходная система. Это создает дополнительные трудности при проектировании систем с обратными передаточными функциями. В некоторых случаях зарегистрированные трассы можно рассматривать как результат суперпозиции волновых импульсов, имеющих одинаковую форму, но отличающихся временем вступлений. При этом разрешающая способность записи может быть улучшена разложением трассы на исходные волновые импульсы путем применения обратного фильтра.

В настоящей главе рассмотрены примеры практического использования обратных нерекурсивных фильтров как для устранения эффектов, вносимых сейсмоприемниками, так и для повышения разрешающей способности записей.

### 5.1. ИДЕАЛЬНАЯ ДЕКОНВОЛЮЦИЯ

Рассмотрим линейную инвариантную во времени систему, заданную ее импульсной реакцией  $h$ , т. е.  $(h_0, h_1, \dots)$ , которая в общем случае имеет бесконечную длительность. Если  $x$  и  $y$  являются соответственно входным и выходным сигналами системы, то они связаны с системой  $h$  во временной области конволюционным суммированием (1.41). В частотной области эта связь устанавли-



Если подставить  $d_0=1$  во второе уравнение, то получим  $d_1$ . Подставляя значение  $d_1$  в третье уравнение, находим  $d_2$  и т. д. Искомая импульсная реакция  $d = (1, -h_1, h_1^2, -h_2, \dots)$ . В общем случае система (5.5) будет состоять из бесконечного числа уравнений, описывающих бесконечную по длительности импульсную реакцию обратного фильтра.

Из соотношения (5.3) с помощью полиномиального деления находим:

$$D(z) = d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots} = \\ = 1 - h_1 z^{-1} + (h_1^2 + h_2) z^{-2} - \dots \quad (5.6)$$

Коэффициенты при соответствующих степенях  $z$  снова представляют собой импульсную реакцию  $d = (1, -h_1, h_1^2, -h_2, \dots)$ . Обобщая изложенное выше, приходим к выводу, что умножение полиномов (5.3) или свертка функций (5.4) приводят к бесконечной импульсной реакции обратного фильтра.

Далее предстоит решить две проблемы. Во-первых, функция из-за ее бесконечной длины не может быть использована для обработки сигналов на ЭВМ. Во-вторых, без введения каких-то дополнительных условий нельзя гарантировать устойчивость системы (см. раздел 1.8). Устойчивость и конечная длина оператора обратной системы, безусловно, являются необходимыми требованиями, предъявляемыми к обратному фильтру.

## 5.2. ПРИБЛИЖЕННАЯ ДЕКОНВОЛЮЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЕЧЕННЫХ ОБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Итак, требуется найти такие способы аппроксимации идеальных обратных фильтров, которые гарантируют устойчивость и конечную длину обратных операторов. С этой целью идеальные обратные фильтры могут дополняться корректирующими фильтрами, которые обеспечивают постоянство полного усиления системы [Berckheimer and Jacob, 1968] либо равенство его нулю [Bogert, 1962; Burch et al., 1964] в области высоких и низких частот. Итеративная техника решения этой задачи во временной области была предложена Э. О. Брайхэмом и др. (1968) и Х. Нейнхофером (1971).

Другой подход, основанный на использовании минимально- и максимально-задержанных импульсных реакций, предложен С. Трейтелем и Э. А. Робинсоном (1964) и Э. А. Робинсоном (1967 b). Рассмотрим его более подробно.

Исследуем устойчивость обратных фильтров на примере простой системы с нормализованной импульсной реакцией, представленной только двумя членами ряда:  $h = (1, h_1)$ . Такая форма реакции была названа Э. А. Робинсоном (1967 b) нормализованным диполем. Рассмотрим поведение функций  $d$  и  $D(z)$  об-

ратного фильтра, представленных в форме нормализованных диполей. Используя выражение (5.6) и подставляя  $h_n=0$  для  $n=2, 3, \dots$ , получаем импульсную реакцию:

$$d = (1, -h_1, h_1^2, -h_1^3, \dots). \quad (5.7)$$

Соответствующую ей системную функцию запишем в виде

$$D(z) = 1 - h_1 z^{-1} + h_1^2 z^{-2} - h_1^3 z^{-3} + \dots$$

По выражению (5.7) можно непосредственно судить об устойчивости системы. Очевидно, что при  $|h_1| < 1$  система является устойчивой, а в случае  $|h_1| > 1$  — неустойчивой. По определению Э. А. Робинсона и С. Трейтеля (1964), функция  $h = (1, h_1)$  в первом случае называется минимально-задержанной импульсной реакцией, а соответствующая ей обратная импульсная реакция  $d$  является устойчивой. Во втором случае функция  $h$  называется максимально-задержанной импульсной реакцией, а отвечающая ей импульсная реакция обратного фильтра  $d$  является неустойчивой.

Устойчивость импульсной реакции, обратной по отношению к данному нормализованному диполю, может быть оценена также и в частотной области. Как следует из выражения (5.6), системная функция такого диполя имеет вид

$$H(z) = 1 + h_1 z^{-1},$$

а соответствующая ей обратная системная функция

$$D(z) = 1/(1 + h_1 z^{-1}).$$

Из рис. 1.7 следует, что при  $|h_1| < 1$  обеспечивается условие устойчивости обратного фильтра, а при  $|h_1| > 1$  обратный фильтр является неустойчивым. Тем не менее существует возможность превратить максимально-задержанную импульсную реакцию в устойчивую, применив для этого упреждающую функцию, т. е. функцию, воздействующую только на будущее по отношению к данному значению входного сигнала. Возьмем нормализованный диполь  $h = (1, h_1)$ , для которого  $|h_1| > 1$ , и будем искать импульсную реакцию обратного фильтра в виде  $d = (\dots, d_{-3}, d_{-2}, d_{-1})$ . Подставив выражения для  $h$  и  $d$  в уравнение (5.3), найдем:

$$(\dots, d_{-3}z^3 + d_{-2}z^2 + d_{-1}z) = 1/(1 + h_1 z^{-1}).$$

После выполнения полиномиального деления правую часть уравнения можно представить в виде многочлена по положительным степеням

$$(\dots, d_{-3}z^3 + d_{-2}z^2 + d_{-1}z) = h_1^{-1}z - h_1^{-2}z^2 + h_1^{-3}z^3 - \dots$$

Поскольку в рассматриваемом случае  $|h_1| > 1$ , импульсная реакция обратного фильтра имеет вид

$$d = (\dots, h_1^{-5}, -h_1^{-4}, -h_1^{-3}, -h_1^{-2}, h_1^{-1}) \quad (5.8)$$

и представляет собой устойчивую систему. Таким образом, оказывается, что можно спроектировать устойчивый фильтр независимо от того, была ли исходная последовательность  $h = (1, h_1)$  минимально- или максимально-задержанной. Если в первом случае ( $|h_1| < 1$ ) решение обеспечивается через физически осуществимую систему (импульсная реакция представлена только компонентой памяти), то во втором случае оно достигается использованием упреждающей импульсной реакции, свойственной физически неосуществимым системам.

Выходные сигналы  $x_n$  обратных фильтров (5.7) и (5.8) выражаются соответственно соотношениями.

$$x_n = \sum_{m=0}^{\infty} d_m y_{n-m}; \quad (5.9)$$

$$x_n = \sum_{m=-\infty}^{-1} d_m y_{n-m}. \quad (5.10)$$

В обоих случаях обратные фильтры являются устойчивыми системами и, следовательно, выходные последовательности (5.9) и (5.10) являются сходящимися. Это дает возможность получить достаточно точный результат, даже если отбросить пренебрежимо малые члены каждого из рядов (5.7) и (5.8), т. е. использовать усеченную аппроксимацию весовой функции обратного фильтра. После замены бесконечных пределов суммирования в выражениях (5.9) и (5.10) на разумно выбранные конечные обратную фильтрацию можно выполнять на ЭВМ.

Однако на практике импульсная реакция в форме нормализованного диполя не встречается. Поэтому интересно рассмотреть более общий случай, когда исходная система описывается импульсной реакцией вида  $h = (h_0, h_1, \dots, h_M)$  длиной  $M+1$  отсчетов. Соответствующая ей системная функция

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_M z^{-M} \quad (5.11)$$

представляет собой многочлен, который можно представить в виде произведения  $M$  диполей

$$H(z) = (\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1})(\beta_0 + \beta_1 z^{-1}) \dots (\epsilon_0 + \epsilon_1 z^{-1}). \quad (5.12)$$

Величины  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \dots, \epsilon_0, \epsilon_1$  зависят от значения корней многочлена (5.11). Величины могут быть как вещественными числами, так и комплексными. При вещественных числах  $h_0, h_1, \dots, h_M$  комплексные корни всегда будут представлены комплексно-сопряженными парами. Следовательно, если входная последовательность — вещественная, то и выходная последовательность будет всегда вещественной. Разложение системной функции (5.12) на сомножители может интерпретироваться как последовательное соединение  $M$  нерекурсивных фильтров первого порядка; соответствующую ей импульсную реакцию можно получить через  $M$  операций свертки

$$h = (\alpha_0, \alpha_1) * (\beta_0, \beta_1) * \dots * (\epsilon_0, \epsilon_1). \quad (5.13)$$

Каждый из диполей в выражении (5.13) является либо минимально-, либо максимально-задержанным. Устойчивые формы импульсной реакции фильтров, обратных таким диполям, определены уравнениями (5.7) и (5.8). Свертка этих  $M$  импульсных реакций дает импульсную реакцию  $d$ , которая является устойчивой и обратной по отношению к исходной последовательности  $h$ . Начиная с некоторых достаточно малых членов ряда, импульсная реакция  $d$  обратного фильтра может быть усечена, что обеспечивает возможность реализации этого фильтра на ЭВМ.

Если каждый из диполей в выражении (5.13) является минимально-задержанным, то и результирующая последовательность  $h$  будет минимально-задержанной. Аналогично, когда все диполи — максимально-задержанные, последовательность  $h$  представляет максимально-задержанную функцию. Смесь максимально- и минимально-задержанных диполей дает смешанно-задержанную последовательность. По определению Э. А. Робинсона и С. Трейтеля (1965), основная доля энергии в минимально-задержанном импульсе сосредоточена в его начале, а в максимально-задержанном — в конце. Смешанно-задержанные импульсы занимают промежуточное положение между этими крайними случаями.

### 5.3. ПРИБЛИЖЕННАЯ ДЕКОНВОЛЮЦИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Простое усечение теоретической весовой функции обратного фильтра, рассмотренное в предыдущем разделе, не гарантирует наилучшую аппроксимацию идеального обратного фильтра. Можно найти семейство обратных фильтров, операторы которых имеют одну и ту же длину и позволяют получить на выходе желаемый сигнал с меньшей погрешностью, чем это можно достичь при обычном усечении импульсной реакции идеального обратного фильтра. Ниже рассмотрены обратные фильтры с операторами конечной длины, обеспечивающие наилучшую аппроксимацию желаемого выходного сигнала, т. е. соблюдение условия минимума средней квадратической погрешности. Они называются минимально-квадратичными приближенными обратными фильтрами.

В качестве примера возьмем простой случай. Пусть исследуемая импульсная реакция обратного фильтра представлена единственным членом  $d=d_0$ , а исходная система — минимально-задержанной функцией  $h(1, h_1)$ ,  $|h_1| < 1$ . При этом на исходную систему воздействует единственный импульс  $x=(1, 0, \dots)$ . Поскольку в результате свертки произвольного сигнала с единственным импульсом на выходе системы воспроизводится входной сигнал, имеем:  $y=x*h=h$  (см. рис. 5.1). Исходный и обратный фильтры преобразуют сигнал последовательно, так что на выходе обратного фильтра

$$g = y * d = h * d = (1, h_1) * d_0 = (d_0, d_0 h_1).$$

За счет конечной длины оператора обратного фильтра получаемая на его выходе последовательность  $g$  будет воспроизводить желаемый выходной сигнал  $x$  с погрешностью

$$\begin{aligned} e &= x - g = (1, 0, \dots) - (d_0, d_0 h_1) = \\ &= (1 - d_0, -d_0 h_1) = (e_0, e_1). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Теперь необходимо найти такую величину  $d_0$ , которая будет минимизировать погрешность (5.14) в соответствии с выбранным критерием — минимумом среднего квадрата отклонения  $e$ . Для этого определим энергию сигнала ошибки как сумму квадратов  $e_0^2 + e_1^2$  и в соответствии с правилами поиска экстремума функции приравняем нулю ее производную по  $d_0$ :

$$\frac{\partial}{\partial d_0} [(1 - d_0)^2 + (-d_0 h_1)^2] = 0.$$

Из этого выражения следует, что условию минимума среднего квадратического отклонения  $g$  от  $x$  отвечает величина

$$d_0 = 1/(1 + h_1^2). \quad (5.15)$$

Положительный знак второй производной энергии по  $d_0$  показывает, что найденный экстремум действительно является минимумом.

Ряд авторов [например, Robinson, 1967 b; Kanasewich, 1973] предпочитают выражать весовую функцию оптимального обратного фильтра через автокорреляционную функцию  $R_{hh}(n)$  диполя  $h = (1, h_1)$ . Автокорреляционная функция для данного  $n$  представлена тремя ненулевыми отсчетами

$$\begin{aligned} R_{hh}(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{k+n} h_k = (\dots, 0, h_1, 1 \uparrow + h_1^2, h_1, 0, \dots) = \\ &= (R_{-1}, R_0, R_1), \end{aligned}$$

где вертикальная стрелка указывает на начало координат по оси времени, т. е.  $n=0$  (см. также раздел 1.6). Подставляя выражение автокорреляционной функции для  $n=0$  в соотношение (5.15), получаем:

$$d_0 = 1/(1 + h_1^2) = 1/R_{hh}(0) = 1/R_0.$$

Допустим теперь, что весовая функция обратного фильтра представлена двумя отсчетами, т. е.  $d = (d_0, d_1)$ . Применяя, как и прежде, метод наименьших квадратов, находим:

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1 + h_1^2}{1 + h_1^2 + h_1^4} = \frac{R_0}{R_0^2 - R_1^2}; \\ d_1 &= \frac{-h_1}{1 + h_1^2 + h_1^4} = \frac{-R_1}{R_0^2 - R_1^2}. \end{aligned} \quad (5.16)$$



смешанно-задержанных последовательностей  $h$  единичный импульс должен находиться в средней части желаемого выходного сигнала, чтобы при деконволюции соблюдалось условие минимума средней квадратической погрешности [см. также Treitel and Robinson, 1966 b; Кондратьев, 1968].

В. Т. Форд и Дж. Х. Херн (1966) предложили обратный фильтр, трансформирующий минимально-задержанную последовательность, задаваемую ее автокорреляционной функцией, в единичный импульс. Обратные фильтры, оптимизированные по критерию минимума погрешностей корреляционных функций и энергетических спектров, описаны У. Р. Барнсом (1968). Ч. В. Фрэзер (1972) использовал технику деконволюции для разделения вступлений  $P$ - и  $rP$ -волн на записях колебаний от атомных взрывов в Неваде. Э. Б. Девис и Э. Дж. Меркадо (1968) использовали деконволюцию применительно к многоканальным системам. Однако при обработке полевых записей многоканальная обратная фильтрация дает незначительное улучшение результата по сравнению с одноканальной. Принципы обратной фильтрации с многоканальным входом и многоканальным выходом детально разработаны С. Трейтелем (1970).

Подход, основанный на критерии минимума средней квадратической погрешности, может быть распространен на случай, когда желаемым выходным сигналом является не единичный импульс, а сигнал произвольно выбранной формы. Такой обратный фильтр наилучшим (в смысле минимума среднего квадратического отклонения) образом превращает входную последовательность  $h$  в импульс выбранной формы, и поэтому называется формирующим фильтром. Уравнение формирующего фильтра может быть найдено подстановкой в правую часть уравнения (5.17) отсчетов функции взаимной корреляции между входом  $h$  и выбранным желаемым импульсом [Robinson, 1976 b, с. 176]. Заметим, что оценка функции взаимной корреляции в случаях как единичного, так и произвольного желаемых импульсов является сложной задачей. Основные трудности связаны с конечной длиной и нестационарностью зарегистрированных колебаний [Burns, 1968; Foster et al., 1968].

#### 5.4. ПОВЫШЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СИГНАЛОВ ТРАСС

Наряду со снятием собственных процессов регистрирующей аппаратуры обратная фильтрация может быть успешно применена для повышения разрешенности записи [см., например, d'Hoegaene, 1962; Rice, 1962; Kunetz and Fourmann, 1968]. При обработке сейсмических записей наложение сигналов на сейсмограммах осложняет выделение последующих вступлений сейсмических волн на фоне первых вступлений. Если бы длительность отдельных сейсмических сигналов на сейсмограммах могла быть достаточно сокращена, то более поздние вступления волн проявлялись бы в области записи, свободной от многофазовых колебаний, вызван-

ных приходом волн. Это облегчило бы выделение вступлений волн на сейсмограммах.

При изложении материала настоящего раздела принято существенное допущение, заключающееся в том, что все сейсмические импульсы, например, группы Р-волн, зарегистрированных от одного и того же источника, считаются имеющими одинаковую и относительно простую форму. Однако, поскольку волны различных типов (Р, рР, РсР, РР или многократно-отраженные внутри поверхностных слоев и т.п.) распространяются от источника до приемника различными путями, форма сигналов в действительности меняется и, что еще более важно, каждый импульс приобретает индивидуальный временной сдвиг. Поэтому получаемая запись может рассматриваться как суперпозиция определенным образом искаженных и сдвинутых во времени импульсов. При этом предполагается, что аддитивные помехи незначительны и ими можно пренебречь.

Изменения формы импульсов и свойственных им временных сдвигов могут рассматриваться как результат воздействия на каждый  $i$ -й импульс некоторой фильтрующей системы с системной функцией  $H_i(z)$  и импульсной реакцией  $h_i$ . Пусть  $u$  — последовательность, описывающая исходную, неискаженную форму сейсмического импульса, общую для всей трассы. Последовательность  $u$  может рассматриваться как первоначальный, или исходный импульс. Тогда  $i$ -й импульс, прошедший свой индивидуальный путь, будет зарегистрирован на сейсмограмме в виде

$$s_i = u * h_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь  $N$  — общее число импульсов в рассматриваемой группе волн. Результирующая запись  $s$  этой группы волн может быть представлена суммой

$$s_i^j = \sum_{i=1}^N s_i = \sum_{i=1}^N u * h_i. \quad (5.18)$$

Подобный же подход был предложен О. М. Сакрисоном и другими (1967) применительно к записям многократных отражений. Они выразили последовательность  $s$  через коэффициенты отражения различных слоев и временные задержки, отвечающие временам отражений от этих слоев.

При изменении порядка операций в сумме (5.18) ее можно переписать в виде

$$s = u * \sum_{i=1}^N h_i = u * h, \quad (5.19)$$

где  $h$  — полная импульсная реакция среды. Для данного сигнала  $u$  существует точное соответствие между  $s$  и  $h$ . При выборе формы  $u$ , иногда даже безотносительно физического смысла этой функции, можно уменьшить длительность колебаний в последовательности  $h_i$  по сравнению с участком трассы  $s_i$ .

Этот благоприятный случай имеет место, если между  $u$  и  $s_i$  сохраняется значительное сходство. В идеальном случае, когда  $u$  и  $s_i$  различаются только амплитудой и временной задержкой, функция  $h_i$  приобретает вид единичного импульса, высота которого соответствует относительной амплитуде конкретной волны. Положительный импульс на оси времени дает временную задержку  $i$ -й волны. Если такое подобие соблюдается для всех импульсов  $i$ , исходная трасса  $s$  преобразуется (разлагается) в последовательность единичных импульсов на временах вступлений регистрируемых волн, умноженных на амплитуды этих волн. Отрицательный знак единичных импульсов указывает на изменение полярности сейсмических сигналов. В то же время, поскольку затухание, поглощение, геометрическое расхождение и т. п. существенно изменяют форму вступлений отдельных волн, подходящее разложение трассы  $s$  на единичные импульсы может быть получено только с использованием изменяющегося во времени исходного сейсмического импульса. В соответствии с этим сам процесс разложения является переменной во времени деконволюцией сигналов [Clarke, 1968].

Разнообразие условий применения сейсморазведки оправдывает произвольный выбор подходящей последовательности  $u$  для аппроксимации формы сейсмического импульса. Э. А. Робинсон (1957) в своем статистическом подходе использовал импульсы Риккера [Ricker, 1940]. Р. Б. Райс (1962), также применяя импульсы Риккера, достиг уменьшения длительности исходных импульсов более чем на 50%. Б. Ф. Хоуэлл и другие (1967) использовали подход, предполагающий высокую степень подобия между формой сигналов в первых и последующих вступлениях, что позволило, хотя и не вполне однозначно, выделить скрытые вступления волн рР.

Р. Э. Уайт и Р. Ф. Меру (1972) применяли концепцию разложения трасс<sup>1</sup> на единичные импульсы при осуществлении обратной фильтрации записей преломленных волн, полученных в случае подводных взрывов. Они предложили способ определения формы исходного импульса по известным параметрам источника. К. Клима и О. Кулханек (1970) использовали аналитическую форму импульса Берлаге

$$u(t) = t^\alpha e^{-\beta t} \sin \omega_0 t, \quad t \geq 0.$$

Форма этого импульса может существенно изменяться соответствующим выбором  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\omega_0$ . Кроме вступлений рР- и РсР-волн на телесеизмических записях после разложения трасс на единичные импульсы было обнаружено несколько неидентифицированных вступлений волн. Это явление типично для описываемого способа

<sup>1</sup> Термин «разложение трасс» (trace decomposition) не получил широкого распространения в отечественной литературе. В качестве его эквивалента используется термин «деконволюция» или «обратная фильтрация». (Прим. перев.).

обработки. Из-за низкой помехоустойчивости на выходных записях могут появиться ложные вступления, вызванные помехами, неидентифицированными волнами, ошибками квантования и т. п.

К. Л. Пикок и С. Трейтель (1969) рассматривали процесс деконволюции как оптимальную прогнозирующую фильтрацию с переменным интервалом предсказания. Поскольку интервал предсказания определяет длительность сейсмического импульса на выходе обратного фильтра, в определенных условиях возможно получать выходные трассы с желаемой разрешенностью. Качественно отличный подход к задаче обратной фильтрации, а именно использование фильтров Калмана, упомянутых в разделе 4.3, описан Дж. У. Бэйлессом и Э. О. Брайхэмом (1970), Н. Отто и Х. Ж. Медером (1972), а также С. Краппом (1974).

Группирование сейсмоприемников не является чем-то новым в сейсмологии. Профильные расстановки сейсмоприемников применяются в методе отраженных волн начиная с 20-х годов. Однако начало применения группирования в сейсмологии при изучении землетрясений относится лишь к началу 1960 г. Первоначально для повышения отношения сигнал/шум с целью идентификации землетрясений и слабых подземных ядерных взрывов по рекомендации Женевской конференции экспертов в 1958 г. производилось суммирование сигналов трасс, зарегистрированных отдельными сейсмоприемниками. В настоящее время для локализации эпицентров возбуждения, изучения строения Земли, свойств помех и т. п. используются расстановки длиной до 100 км и более.

Вообще расчет групп, т. е. взаимного расположения определенного числа идентичных сейсмоприемников в данном районе, базируется на предположении о когерентности сигналов, регистрируемых сейсмоприемниками группы, и некогерентности шумов<sup>1</sup>. Различия в степени когерентности сигналов и шумов используются для повышения отношения сигнал/шум (см. раздел 6.4). Но, как показано ниже, некоторые виды сейсмических шумов могут также являться когерентными на базе группы. Различные когерентные сигналы и помехи могут распространяться в изучаемом районе с разными кажущимися скоростями и, следовательно, могут быть разделены между собой с использованием скоростной фильтрации (см. раздел 6.5).

При суммировании некоторым образом выходных сигналов индивидуальных сейсмоприемников можно увеличить отношение сигнал/шум и повысить надежность выделения сигналов с определенными кажущейся скоростью и направлением прихода.

В последующих разделах книги детально описываются принципы нескольких основных способов обработки сигналов, таких как простое суммирование (ПС), суммирование с задержками (СЗ), весовое суммирование с задержками (ВСЗ) и способ суммирования с предварительной фильтрацией (ФС). Первые три способа суммирования, т. е. ПС, СЗ и ВСЗ, иногда объединяют под общим названием способы формирования сейсмического луча. Способ ФС может рассматриваться как взвешивание сигналов в частотной области, когда узким частотным диапазонам обрабатываемого сигнала приписываются различные веса. Вообще, группирование

<sup>1</sup> Теории группирования, развитые советскими учеными, — частотная (Б. М. Гольцман) и энергетическая (Б. И. Беснятов) — охватывают случаи как некогерентных, так и когерентных помех. (Прим. перев.).

представляет собой систему со многими входами. Рассматриваемые здесь группы являются горизонтальными. Выходные сигналы сейсмоприемников обрабатываются с помощью линейной техники (исключение составляет способ УК, упоминаемый в разделе 6.4).

Некоторые способы непосредственно могут использоваться в качестве фильтрации по волновым числам, например при обработке гравиметрических или магнитных данных.

### 6.1. ПРОСТОЕ СУММИРОВАНИЕ

Простое суммирование выходов сейсмоприемников, составляющих группу (рис. 6.1, а), является самым элементарным способом

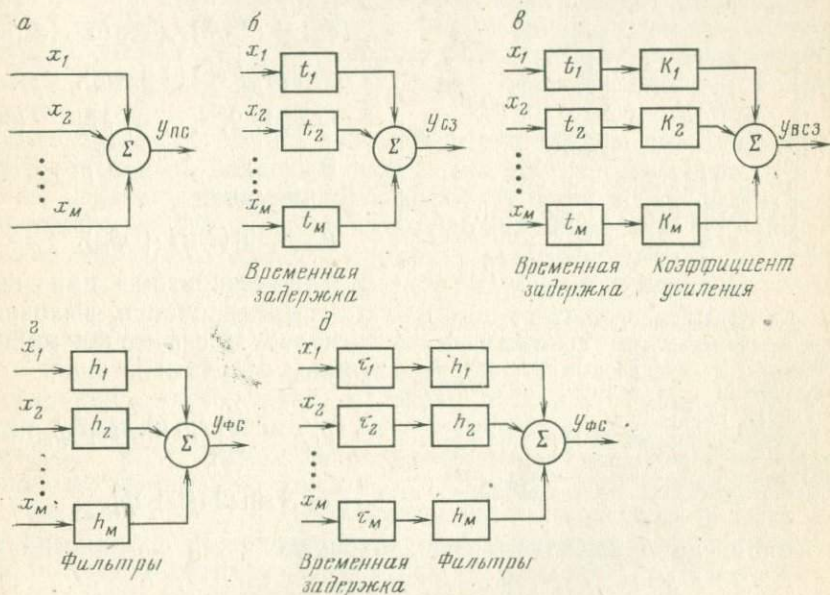


Рис. 6.1. Блок-схемы основных способов суммирования сигналов  $M$  сейсмоприемников и скоростной фильтрации.

а — простое суммирование; б — суммирование с задержками; в — весовое суммирование с задержками; г — высокоскоростная фильтрация; д — полосовая скоростная фильтрация

группирования. Возьмем группу из  $M$  идентичных сейсмоприемников, произвольно расположенных на горизонтальной дневной поверхности. Ни к одному из  $M$  выходных сигналов сейсмоприемников дополнительная фильтрация не применяется. Положение сейсмоприемников группы относительно начала координат задается векторами  $r_m$  или их полярными координатами  $(r_m, \alpha_m)$ , где  $m=1, 2, \dots, M$  (рис. 6.2, а). Когерентные составляющие сигнала распространяются вдоль группы сейсмоприемников с кажущейся

скоростью  $v_k$ , так что для всех приходящих сигналов, за исключением вертикальных, между выходными сигналами сейсмоприемников появляются фазовые сдвиги  $\phi_m$ . Будем считать, что строение исследуемой толщи в районе расположения группы идентично, и рассмотрим синусоидальную волну, подходящую к группе под углом  $\theta$  к горизонту; длина волны  $\lambda = 1/k = v_k/f$ , где  $k$  — волновое число,  $f$  — частота колебаний. Поместим начало координат в центр группы и положим, что форма волны в этой точке равна  $\sin(2\pi ft)$ . Согласно рис. 6.2,а фазовый сдвиг для  $m$ -го сейсмоприемника

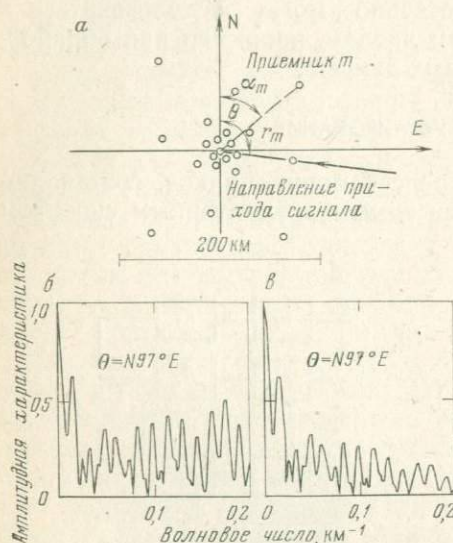


Рис. 6.2. Экспериментальная установка сейсмоприемников на большой базе (LASA) и ее характеристика направленности по азимуту  $\theta = N97^\circ E$  [по Lacoss, 1965].

а — конфигурация групп из 21-го сейсмоприемника; б — характеристика направленности этой установки; в — характеристика направленности группы из 525 сейсмоприемников

для  $m$ -го сейсмоприемника

$$\begin{aligned} \phi_m &= (2\pi/\lambda) r_m \cos(\theta - \alpha_m) = \\ &= 2\pi r_m k \cos(\theta - \alpha_m), \\ m &= 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Выходной сигнал  $m$ -го сейсмоприемника

$$y_m = \sin(2\pi ft + \phi_m).$$

Таким образом, при простом суммировании выходных сигналов  $M$  сейсмоприемников группы получим:

$$\begin{aligned} y_{\text{ГС}} &= \sum_{m=1}^M \sin(2\pi ft + \phi_m) = \\ &= A \sin(2\pi ft + \phi). \end{aligned}$$

Амплитуда  $A$  выходного сигнала определяется соотношениями

$$A \sin \phi = \sum_{m=1}^M \sin \phi_m;$$

$$A \cos \phi = \sum_{m=1}^M \cos \phi_m;$$

$$A^2 = \left( \sum_{m=1}^M \cos \phi_m \right)^2 + \left( \sum_{m=1}^M \sin \phi_m \right)^2.$$

Нормализованная функция отклика (характеристика направленности) определяется как отношение амплитуды  $A$  к числу сейсмоприемников  $M$

$$|y(k, \theta)| = \frac{|y_{\text{ГС}}|}{M} = \frac{1}{M} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \cos \phi_m \right)^2 + \left( \sum_{m=1}^M \sin \phi_m \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (6.2)$$

$$|y(k, \theta)|^2 = \frac{|y_{\text{пс}}|^2}{M} = \frac{1}{M} \left[ \left( \sum_{m=1}^M \cos \phi_m \right)^2 + \left( \sum_{m=1}^M \sin \phi_m \right)^2 \right]. \quad (6.3)$$

Для данной группы сейсмоприемников характеристики (6.2) и (6.3) являются двумерными функциями волнового числа  $k$  и угла  $\theta$ . При исследовании характеристик направленности группы удобно представлять  $|y(k, \theta)|$  или  $|y(k, \theta)|^2$  в виде контурных изображений в плоскости  $(k, \theta)$ . Независимые переменные задаются полярными координатами — радиусом  $k$  и азимутом  $\theta$ . Дж. У. Бертилл и Ф. Э. Уайтвей (1965) исследовали энергетические характеристики простого суммирования для круговой, симметричной крестовой,  $L$ -образной и треугольной групп. Другой пример можно найти у Дж. П. Барга (1964). Имеется возможность изображать сечения характеристик группы. В этом случае, скажем, двумерная функция  $|y(k, \theta)|$  трансформируется в одномерную  $|y(k)|$  с параметром  $\theta$ .

Вообще, требуется найти такую форму группы сейсмоприемников, при которой максимум характеристики направленности приурочен к началу координат плоскости  $(k, \theta)$ , т. е. к области  $k \rightarrow 0$ , а величина ее за пределами некоторого диапазона значений  $k$  по обе стороны от начала координат является достаточно малой и не содержит резких выбросов. Область низких значений характеристики за пределами основного максимума определяется свойствами шумов и сигналов, которые требуется подавить. Если характеристика группы удовлетворяет этим требованиям, простое суммирование эффективно выделяет сигналы с достаточно малыми волновыми числами на фоне шумов, имеющих более высокие волновые числа. Из соотношения (6.1) следует, что для вертикально распространяющихся волн, т. е. при  $k=0$  и  $\lambda=\infty$ , выходные сигналы всех  $M$  сейсмоприемников находятся в фазе  $\phi_m$  для  $m=1, 2, \dots, M$ , и суммирование без сдвигов дает максимальный выходной сигнал независимо от угла  $\theta$ . При уменьшении длины волны (увеличении  $k$ ) суммарный выходной сигнал снижается довольно быстро. Однако с дальнейшим уменьшением  $\lambda$  на характеристике появляется ряд побочных максимумов. Для любой конечной величины  $\lambda$  на характеристику влияет также угол  $\theta$ . Естественно, форма характеристики направленности будет зависеть от конфигурации и числа сейсмоприемников в группе. Например, на рис. 6.2, а показана 21-элементная экспериментальная большая сейсмическая установка (LASA) с базой, равной примерно 200 км, и вычисленная для нее амплитудная характеристика направленности по азимуту  $\theta = N97^\circ E$  (см. рис. 6.2, б).

Простое суммирование может быть также применено к одноканальным системам, регистрирующим повторяющиеся сигналы. Такой подход используется, например, в сейсмической разведке на небольшие глубины, когда при многократно повторяющихся уда-

рах сигналы регистрируются одним и тем же сейсмоприемником. Суммирование трасс, скорректированных за отметку момента возбуждения (вертикальное накапливание), улучшает качество повторяющихся компонент сигнала по сравнению с шумами. С увеличением числа суммируемых трасс наблюдается общее улучшение соотношения сигнал/шум. Для повышения качества результатов сигналы индивидуальных трасс до суммирования могут быть предварительно отфильтрованы с помощью, например, оптимальных винеровских фильтров [Meueghoff, 1966].

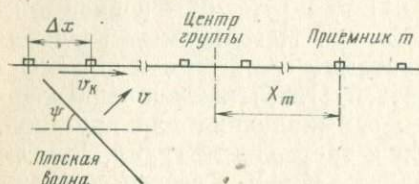


Рис. 6.3. Схема распространения плоской волны на базе приема.  
 $\psi$  — угол подхода волны к линии наблюдения

В качестве частного случая простого суммирования рассмотрим эквидистантную группу из  $M$  сейсмоприемников, распределенных вдоль прямой линии, проходящей через источник колебаний, — продольную линейную (одномерную) группу. Предполагается, что такой группой

регистрируются плоские волны, распространяющиеся со скоростью  $v$  и подходящие к каждому из сейсмоприемников группы последовательно. Время регистрации волны двумя соседними сейсмоприемниками группы отличается на  $\tau$ .

В соответствии с рис. 6.3 волны распространяются вдоль установки на поверхности Земли с кажущейся скоростью  $v_k = v/\sin \psi$ . Скорость  $v_k$  зависит как от направления прихода волны, так и от особенностей строения среды в зоне приема. Величина кажущейся скорости совпадает со скоростью  $v$  для горизонтально распространяющихся волновых фронтов и достигает бесконечности для вертикальных волн. Таким же образом можно найти кажущуюся длину волны  $\lambda = v_k/f$  и горизонтальное волновое число  $k_a = 1/\lambda$  для регистрируемых волн.

Пусть ближайшим к источнику возбуждения сейсмоприемником регистрируется стационарное колебание  $A \sin 2\pi f t$ , создаваемое плоским волновым фронтом, распространяющимся вдоль группы под углом  $\psi$  к горизонту. Каждым из последующих сейсмоприемников волна будет регистрироваться с задержкой  $A \sin 2\pi f t$ ,  $A \sin 2\pi f (t + \tau)$ , ...,  $A \sin 2\pi f [t + (M-1)\tau]$  [см. также Fail and Layotte, 1970]. Последнее колебание при этом регистрируется самым дальним сейсмоприемником. Временный сдвиг  $\tau$  между соседними сейсмоприемниками — константа

$$\tau = (\Delta x \sin \psi)/v = \Delta x/v_k.$$

Если использовать формулы для суммы геометрического ряда Эйлера, то можно показать, что амплитуда суммарного выход-

ного сигнала группы, нормализованная по числу сейсмоприемников в группе, равна  $KA$ , где

$$K = \frac{\sin M2\pi f\tau/2}{M \sin 2\pi f\tau/2}.$$

Поскольку амплитудная характеристика группы зависит от числа сейсмоприемников, частоты регистрируемых сигналов и временного сдвига, она может быть использована для описания различных свойств группы. Очевидно, что временной сдвиг сигнала можно вычислить через расстояние между сейсмоприемниками и кажущуюся скорость. Последняя, в свою очередь, может быть определена через кажущуюся длину волны или волновое число. В качестве аргумента возможно также использовать угол  $\psi$ . Ф. У. Хэйлс и Т. Э. Эдвардс (1955) предложили ряд диаграмм, показывающих зависимость величины  $K$  от угла  $\psi$ , т. е. избирательность по направлению подхода волн в плоскости профиля. Они также исследовали частотную избирательность для заданных угла  $\psi$  и расстояния между сейсмоприемниками  $\Delta x$ . Характеристики направленности как функции полной длины группы сейсмоприемников, длины волны сигнала и числа сейсмоприемников в группе рассмотрены Л. В. Ломбарди (1955). Сравнение характеристик направленности для двух, четырех, девяти и бесконечного числа сейсмоприемников в группе показывает, что амплитуда побочных максимумов уменьшается при возрастании числа сейсмоприемников. М. К. Смит (1956) изучал направленность системы, представленной группой из десяти сейсмоприемников, выходные сигналы которых просуммированы без сдвига и поданы на полосовой фильтр, в зависимости от частоты и волнового числа. Р. К. Верма и А. Рой (1970) предложили графический способ расчета характеристик направленности группы. Г. П. Винник (1963) исследовал направленность группы горизонтальных сейсмоприемников, расположенных в узлах регулярной прямоугольной сетки.

## 6.2. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К СЕЙСМИЧЕСКИМ ГРУППАМ

Выбор конфигурации группы и числа ее элементов является весьма сложной задачей. Удовлетворительное решение обычно можно получить, если использовать подобие метода проб и ошибок и привлечь статистические данные по исследуемому вопросу за большой промежуток времени [Lacoss, 1965]. Характеристики некоторых равномерных групп обсуждались Р. А. Хубрихом (1968). Поскольку детальное рассмотрение этих вопросов выходит за рамки настоящей книги, здесь обсуждаются лишь несколько основополагающих принципов. Подробные сведения читатель может получить, например, в работах П. Э. Грина (1965), Р. Т. Лакосса (1965) или в других источниках.

База группы определяет разрешающую способность по волновым числам, т. е. ширину максимумов характеристик направленности. Высокая разрешающая способность необходима для надежного разделения сигналов с близкими параметрами ( $k, \theta$ ). Например, максимум характеристики шириной около  $0,01 \text{ км}^{-1}$  (сравни с рис. 6.2, б) требует минимальной длины базы, приблизительно равной 100 км. Выбор числа сейсмоприемников в группе диктуется рядом противоречивых требований. Увеличение  $M$  снижает средний уровень нежелательных побочных максимумов, но, очевидно, удорожает стоимость работ и усложняет обработку сигналов. Форма побочных максимумов в определенных пределах может регулироваться весами, приписываемыми выходным сигналам отдельных элементов группы [Green et al., 1965]. По-видимому, решающим фактором, который должен приниматься во внимание, является пространственный эляйсинг-эффект, обусловливаемый равномерным квантованием по оси расстояний. Дискретность группы обеспечивает периодическую повторяемость характеристики направленности вдоль оси волновых чисел с периодом  $1/\Delta x$ , где  $\Delta x$  — шаг между сейсмоприемниками. Наибольшим пропускаемым группой волновым числом является  $k_N = 1/2 \Delta x$ . Пространственный эляйсинг-эффект существенно не отличается от того же эффекта по частоте, о котором упоминалось в главе 1. Например, если  $\Delta x = 10 \text{ км}$ , то  $k_N = 0,05 \text{ км}^{-1}$ , что представляет очень малую величину.

Заметим, что Р-волны, распространяющиеся вдоль группы сейсмоприемников с кажущейся скоростью около 8 км/с и выше и с доминирующими частотами сигналов, близкими к 1 Гц, будут характеризоваться волновыми числами  $k \leq 0,13 \text{ км}^{-1}$ . Это означает, что при шаге между сейсмоприемниками в группе  $\Delta x = 10 \text{ км}$  большая часть энергии Р-волн сместится в область зеркальных частот. Чтобы уменьшить пространственный эляйсинг-эффект до необходимых пределов, шаг между сейсмоприемниками должен быть менее 1 км. Однако при базе, равной 100 км, это потребует включения в группу более 100 сейсмоприемников. Кроме того, такая плотная установка сейсмоприемников, естественно, приведет к нежелательному увеличению когерентности помех на соседних каналах.

Более дешевым и оригинальным способом предотвращения эляйсинг-эффекта является использование нерегулярных групп. Для установок LASA удовлетворительное решение было достигнуто при совместном использовании 21 подгруппы сейсмоприемников, каждая из которых в диаметре имела 7 км и состояла из 25 сейсмоприемников. Общая (составная) группа включала 525 сейсмоприемников и занимала площадь диаметром около 200 км. Конфигурация составной группы показана на рис. 6.2, а, где каждый из 21 элементов соответствует группе из 25 сейсмоприемников, в которой минимальное расстояние между сейсмоприемниками равно 0,25 км. Влияние числа сейсмоприемников в группе на уровень побочных максимумов характеристики видно

из рис. 6.2, б, в. Однако следует отметить, что трудности установки этой составной группы велики, а существенного улучшения характеристики для  $k \leq 0,1 \text{ км}^{-1}$  не наблюдается (сравни рис. 6.2, б и 6.2, в).

Кроме конфигурации групп и числа элементов в них на эффективность группирования большое влияние оказывает степень подобия сигналов, регистрируемых каждым из сейсмоприемников. Решающее значение при этом имеет геологическое строение района расположения группы. Высокая степень подобия принимаемых сигналов наблюдается в случае горизонтальных границ раздела и однородной верхней части геологического разреза.

### 6.3. СУММИРОВАНИЕ С ЗАДЕРЖКАМИ И ВЕСОВОЕ СУММИРОВАНИЕ С ЗАДЕРЖКАМИ

Простое суммирование, описанное в разделе 6.1, обеспечивает наиболее эффективное повышение качества сигналов с бесконечными или очень большими длинами волн. Однако не все полезные сигналы удовлетворяют этому условию. Можно модифицировать характеристику группы таким образом, чтобы сместить основной максимум в произвольную область плоскости  $(k, \theta)$ . Пусть необходимо усилить сигнал с параметрами  $(k_1, \theta_1)$  и кажущейся скоростью  $v_k$ . Для этого введем в выходной сигнал каждого сейсмоприемника группы некоторый фазовый сдвиг

$$\gamma_m = 2\pi r_m k_1 \cos(\theta_1 - \alpha_m), \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Тогда произвольный сигнал с параметрами  $(k, \theta)$  на выходе  $m$ -го сейсмоприемника будет иметь относительно среднего сейсмоприемника группы фазовый сдвиг

$$\rho_m = \varphi_m - \gamma_m = 2\pi r_m (k \cos(\theta - \alpha_m) - k_1 \cos(\theta_1 - \alpha_m)), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (6.4)$$

Из уравнения (6.4) следует, что для сигналов с параметрами  $(k = k_1, \theta = \theta_1)$  выходные сигналы всех  $M$  сейсмоприемников оказываются синфазными при  $\rho_m = 0$ , а суммарный выходной сигнал группы имеет максимальное значение.

Различие между простым суммированием и суммированием с задержками очевидно из уравнения (6.4). Если в первом способе выполняется непосредственное суммирование сигналов сейсмоприемников, то во втором осуществляется суммирование задержанных во времени сигналов. Для  $m$ -го сейсмоприемника величина задержки во времени

$$t_m = [r_m \cos(\theta_1 - \alpha_m)]/v_{\text{кл}}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (6.5)$$

Временной сдвиг  $t_m$  соответствует фазовому сдвигу  $\gamma_m$ . Блок-схема суммирования с задержками показана на рис. 6.1, б.

Внесение в сигналы временных задержек называют регули-

ровкой направленностью группы, или фазированием группы. Сфазированные вступления волн соответствуют некоторым фиктивным фронтам волн, подходящим к группе вертикально снизу. Таким образом, в данном способе характеристика направленности группы рассматривается в плоскости  $(k, \theta)$ , где происходит смещение максимума из положения  $(k=0, \theta=0)$  в новое положение  $(k=k_1, \theta=\theta_1)$ . Отсюда очевидна зависимость направленности группы от величины кажущейся скорости и азимута прихода волн. Несколько более сложный способ суммирования со сдвигами, включающий нелинейные операции, предложен Э. Р. Канасевичем и др. (1973).

Существует несколько методов выбора значения кажущейся скорости, на пропускание которой настраивается группа. Самый простой из них — визуальная оценка кажущихся скоростей полезных сигналов. Выходные сигналы сейсмоприемников сдвигаются во времени в соответствии с измеренными значениями временного сдвига между вступлениями полезной волны на соседних сейсмоприемниках. По существу для этого может использоваться любой хорошо прослеживаемый экстремум полезной волны, если не наблюдается явной ее дисперсии; выделение первых вступлений здесь необязательно. О. Кулханеком (1973) показано<sup>1</sup>, что ошибки визуальной корреляции для короткопериодных сигналов хорошего качества не превышают  $\pm 0,1$  с. С особой осторожностью следует выполнять корреляцию квазипериодических сигналов, так как в этом случае корреляция может пройти не по одноименным экстремумам, может возникнуть эляй синг-эффект по скорости.

Для более точного фазирования временные сдвиги волны в соседних точках приема могут быть априорно определены по формуле (6.5) в предположении, что волны — плоские и кажущиеся скорости в пределах базы приема постоянны. У. Ч. Дин (1965) отметил, что из-за возможных аномалий скорости распространения волн вблизи расставленных сейсмоприемников этот способ может не дать желаемых результатов.

Наконец, нахождение временных сдвигов возможно путем вычисления взаимно-корреляционных функций между выходными сигналами среднего и каждого сейсмоприемника группы для оценки временных сдвигов по положению максимумов полученных функций взаимной корреляции [см., например, Dean, 1965, или Kulhanek, 1973]. Этот способ применим к трассам с большими значениями отношения сигнал/шум, поскольку при малой величине отношения можно сфазировать шум, а не сигнал. Однако, использование взаимно-корреляционных функций позволяет учитывать вероятные аномалии скорости.

Полагая, по-прежнему, что средним сейсмоприемником регистрируется колебание  $\sin 2\pi ft$ , и задавая фазовые сдвиги в соот-

<sup>1</sup> Имеются в виду сейсмологические наблюдения. (Прим. перев.).

ветствии с уравнением (6.4), для выходного сигнала  $m$ -го сейсмоприемника имеем:

$$y_m = \sin(2\pi ft + \rho_m).$$

Амплитудная характеристика направленности

$$\frac{|y_{СЗ}|}{M} = \frac{1}{M} \left| \sum_{m=1}^M y_m \right| = \frac{1}{M} \left\{ \left[ \sum_{m=1}^M \cos(\varphi_m - \gamma_m) \right]^2 + \left[ \sum_{m=1}^M \sin(\varphi_m - \gamma_m) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.6)$$

Способ весового суммирования с задержками является естественным обобщением способа СЗ. Блок-схема его показана на рис. 6.1, в. При использовании весовых коэффициентов  $K_m$ , где  $m=1, 2, \dots, M$ , можно образовать группу с различной (например, убывающей от центра к периферии) чувствительностью сейсмоприемников. Представим выходной сигнал каждого сейсмоприемника в виде

$$y_m = K_m \sin(2\pi ft + \rho_m).$$

Амплитудная характеристика группы при этом выражается соотношением

$$\frac{|y_{ВСЗ}|}{M} = \frac{1}{M} \left\{ \left[ \sum_{m=1}^M K_m \cos(\varphi_m - \gamma_m) \right]^2 + \left[ \sum_{m=1}^M k_m \sin(\varphi_m - \gamma_m) \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Как и в предыдущем случае,  $|y_{ВСЗ}|$  представляет собой функцию волнового числа и азимута прихода волн. Правильно выбранные коэффициенты  $K_m$  повышают отношение сигнал/шум и подавляют нежелательные побочные максимумы характеристики направленности. Ч. Х. Сэвит и др. (1958) опубликовали результаты, полученные при использовании группы из 21 сейсмоприемника с чувствительностью, убывающей от центра группы к ее периферии. При введении весовых коэффициентов можно получить существенное улучшение характеристики направленности такой группы по сравнению с характеристикой группы, имеющей равномерную чувствительность, которое заключается в уменьшении относительного уровня побочных максимумов. (Для гармонических входных сигналов взвешивание выходных сигналов сейсмоприемников группы и внесение в них фазовых сдвигов является единственной возможностью минимизации побочных максимумов). Повышение отношения сигнал/шум за счет применения способов СЗ и ВСЗ подробнее рассматривается в следующем разделе.

#### 6.4. ПОВЫШЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ СИГНАЛ/ШУМ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОСТОГО И ВЗВЕШЕННОГО СУММИРОВАНИЯ С ЗАДЕРЖКАМИ

Настройка группы сейсмоприемников обеспечивает синфазность суммирования сигналов от индивидуальных сейсмоприемников группы. Однако она не меняет условий суммирования помех, не коррелированных в пространстве. Рассмотрим возможность повышения отношения сигнал/шум при применении СЗ и ВСЗ.

Пусть группа состоит из  $M$  идентичных сейсмоприемников, распределенных на базе, длина которой сравнима с длиной полезных волн. Полагаем, что сигналы имеют высокую когерентность в пределах группы по сравнению с когерентностью помех, которой можно пренебречь. Определим дисперсию  $\sigma_x^2$  трассы  $x_i$  в виде

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2,$$

где  $N$  — число отсчетов трассы на рассматриваемом отрезке;  $\bar{x}$  — средняя амплитуда трассы. В литературе описано множество способов определения отношения сигнал/шум, один из них рассмотрен в разделе 4.2. Здесь в качестве отношения сигнал/шум для  $m$ -й трассы будем использовать отношение их мощностей на этой трассе:

$$Q_m = \frac{\sigma_{sm}^2}{\sigma_{nm}^2}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (6.7)$$

где  $\sigma_{sm}^2, \sigma_{nm}^2$  — дисперсия соответственно сигнала и шума.

Трассы, зарегистрированные индивидуальными сейсмоприемниками, могут рассматриваться как суперпозиция когерентного сигнала и шума. При этом предполагается, что средние значения сигналов и шума равны нулю. Тогда для  $M$  сейсмоприемников имеем:

$$x_{1i} = s_{1i} + n_{1i};$$

$$x_{2i} = s_{2i} + n_{2i};$$

.....  
 .....  
 .....

$$x_{Mi} = s_{Mi} + n_{Mi}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Дисперсия суммы синфазных составляющих, т. е. дисперсия выходного сигнала группы,

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s_{1i} + s_{2i} + \dots + s_{Mi})^2,$$

Полагая, что  $s_{1i} = s_{2i} = \dots = s_{Mi}$  для любого  $i$ , получаем:

$$\sigma_s^2 = \frac{M^2}{N} \sum_{i=1}^N s_i^2, \quad (6.8)$$

где  $s_i$  — цифровой сигнал, зарегистрированный одним из  $M$  сейсмоприемников.

Для суммы случайных реализаций шума в выходном сигнале группы сейсмоприемников имеем:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (n_{1i}^2 + n_{2i}^2 + \dots + n_{Mi}^2).$$

Ограничимся простейшим случаем, когда уровень шума одинаков на всей базе приема:

$$\sum_{i=1}^N n_{1i}^2 = \sum_{i=1}^N n_{2i}^2 = \dots = \sum_{i=1}^N n_{Mi}^2.$$

Тогда дисперсия помехи выходного сигнала группы

$$\sigma_n^2 = \frac{M}{N} \sum_{i=1}^N n_i^2, \quad (6.9)$$

где  $n_i$  — цифровые значения шума на выходе любого из  $M$  сейсмоприемников. Подставляя в выражение (6.7) значения дисперсий (6.8) и (6.9), определяем отношение мощностей сигнала и шума в суммарном выходном сигнале:

$$Q_{сз} = \frac{\frac{M^2}{N} \sum_{i=1}^N s_i^2}{\frac{M}{N} \sum_{i=1}^N n_i^2} = MQ. \quad (6.10)$$

При введенных допущениях суммирование с задержками обеспечивает повышение отношения  $Q$  сигнал/шум пропорционально числу сейсмоприемников. Подчеркнем, что уравнение (6.10) характеризует отношение мощностей (энергий) сигнала и шума. Если в этом случае требуется оценить возрастание амплитудного отношения сигнал/шум, то вместо величины  $M$  необходимо брать величину  $\sqrt{M}$  [см., например, Коортманс, 1961].

При коррелированном или частично коррелированном шуме выражение (6.10) должно быть соответственно модифицировано. Д. Денхам (1963) в предположении о неизвестности уровня шума на выходе каждого сейсмоприемника установил, что повышение амплитудного отношения сигнал/шум при СЗ пропорционально величине  $\frac{M}{[M + (M^2 - M)\bar{\rho}]^{1/2}}$ , где  $\bar{\rho}$  — среднее значение коэффициентов корреляции шума. Например, в группе из трех сейсмо-

приемников  $\bar{\rho} = (\rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{23})/3$ . Отношение сигнал/шум, вычисленное Д. Денхамом, незначительно отличается от отношения (6.7), однако очевидно, что в случае полностью случайного шума, т. е. при  $\bar{\rho} = 0$ , повышение амплитудного отношения сигнал/шум снова равно  $\sqrt{M}$ .

Постоянство уровней сигнала и шума по всему району расположения группы сейсмоприемников, предполагавшееся при выводе уравнения (6.10), является почти идеальным случаем. Различный относительный уровень шума, особенности установки сейсмоприемников, аппаратурные эффекты, тонкослоистая геологическая структура разреза в области расположения группы и т. д. обуславливают неодинаковость отношения (6.7) сигнал/шум на выходных трассах индивидуальных сейсмоприемников. В этом случае простое суммирование с задержками (СЗ) не обеспечивает эффективного решения. Для повышения выходного отношения  $Q$  сигнал/шум производится поканальное взвешивание сигналов, т. е. суммирование реализуется в форме ВСЗ. Реализация способа ВСЗ показана на рис. 6.1, в.

Применим весовые коэффициенты  $K_1, K_2, \dots, K_M$  к выходным сигналам всех  $M$  сейсмоприемников:

$$x_{1i} = K_1(s_{1i} + n_{1i});$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$x_{2i} = K_2(s_{2i} + n_{2i});$$

$$x_{Mi} = K_M(s_{Mi} + n_{Mi}), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Снова допуская, что формы сигнала на базе приема одинаковы, т. е.  $s_{1i} = s_{2i} = \dots = s_{Mi}$ , находим дисперсию сигнала после взвешенного суммирования:

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_1 s_{1i} + K_2 s_{2i} + \dots + K_M s_{Mi})^2 = \left( \sum_{m=1}^M \sigma_{sm} K_m \right)^2,$$

где  $\sigma_{sm}$  — дисперсия сигнала на любой из  $M$  трасс.

Аналогично для некоррелированного шума

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K_1 n_{1i} + K_2 n_{2i} + \dots + K_M n_{Mi})^2 = \sum_{m=1}^M \sigma_{nm}^2 K_m^2.$$

Следовательно, отношение мощностей сигнала и шума в суммарном выходном сигнале группы сейсмоприемников

$$Q_{\text{ВСЗ}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} = \frac{\left( \sum_{m=1}^M \sigma_{sm} K_m \right)^2}{\sum_{m=1}^M \sigma_{nm}^2 K_m^2}. \quad (6.11)$$

Для нахождения весовых коэффициентов  $K_m$ , минимизирующих  $Q_{\text{ВСЗ}}$ , приравняем каждую из  $M$  производных  $\partial Q_{\text{ВСЗ}}/\partial K_m$  нулю и проверим знак второй производной. После преобразований находим, что оптимальные коэффициенты удовлетворяют условию:

$$K_m = K \sigma_{sm} / \sigma_{nm}^2,$$

где  $K$  — произвольная постоянная [см. также Birtill and Whiteway, 1965]. Подставляя оптимальные величины  $K_m$  в выражение (6.11), имеем:

$$Q_{\text{ВСЗ}} = \sum_{m=1}^M \sigma_{sm}^2 / \sigma_{nm}^2. \quad (6.12)$$

Соотношение (6.12) означает, что применение оптимальных амплитудных весовых коэффициентов дает энергетическое отношение  $Q_{\text{ВСЗ}}$  сигнал/шум, равное сумме индивидуальных отношений мощностей сигнала и шума, при условии одинаковых форм сигнала на базе приема группы.

Рассмотрим в качестве примера группу из трех сейсмоприемников при следующих дисперсиях сигнала и шума:

$$\sigma_{s1} = \sigma_1; \quad \sigma_{s2} = \sigma_1; \quad \sigma_{s3} = \sigma_1;$$

$$\sigma_{n1} = \sigma_2; \quad \sigma_{n2} = 2\sigma_2; \quad \sigma_{n3} = 3\sigma_2.$$

Найдем три оптимальных весовых коэффициента:

$$K_1 = \sigma_1 / \sigma_2^2; \quad K_2 = \sigma_1 / (4\sigma_2^2); \quad K_3 = \sigma_1 / (9\sigma_2^2).$$

Из уравнения (6.12) получим:  $Q_{\text{ВСЗ}} = 1,36\sigma_1/\sigma_2^2$ . По отношению к первому сейсмоприемнику (наилучшее отношение мощностей сигнала и шума) способ ВСЗ дает выигрыш в 1,36 раза. При отсутствии взвешивания, когда  $K_1 = K_2 = K_3 = 1$ , это отношение  $Q_{\text{ВСЗ}} = 0,64\sigma_1/\sigma_2^2$ . Таким образом, простое суммирование фактически ухудшает энергетическое отношение сигнал/шум по сравнению с выходом «лучшего» из одиночных сейсмоприемников группы.

При выборе весовых коэффициентов  $K$  наряду с максимизацией отношения сигнал/шум на выходе можно использовать и другие критерии оптимальности. Например, М. Гольцман (1963 г.) и Л. В. Петров (1963) поставили задачу выбора таких весовых коэффициентов, при которых реализуемая характеристика направленности линейной группы сейсмоприемников наилучшим образом (в смысле минимума среднего квадратического отклонения) аппроксимирует прямоугольную характеристику. Оказалось, что такому условию отвечают коэффициенты  $K$ , задаваемые полиномами Чебышева. Для одной и той же крутизны срезов основного максимума характеристики оптимальная чебышевская

группа обеспечивает наименьшее усиление и минимальные амплитуды побочных максимумов в зоне подавления. Предельный случай нулевых побочных максимумов для чебышевской группы приводит к биномиальной группе с коэффициентами  $K_{i+1} = (i^n)$ , где  $n = M - 1$ ,  $i = 0, 1, \dots, M - 1$ . «Платой» за нулевой уровень характеристики в зоне подавления является довольно большая ширина и пологие срезы основного максимума. Дополнительное улучшение характеристики направленности чебышевской группы предложено М. Шенбергером (1970).

Заметим, что повышение отношения сигнал/шум, устанавливаемое уравнениями (6.10) и (6.12), является теоретической величиной, достижимой только в идеальных условиях. Реальное возрастание этого отношения может быть значительно ниже теоретического. Заметим также, что увеличение числа  $M$  сейсмоприемников может привести к повышению когерентности помех на суммарных трассах, что сопровождается уменьшением величин  $Q_{СЗ}$  и  $Q_{ВСЗ}$ . Р. А. Хартенбергер и Р. Ж. Ван Ностранд (1972) показали, что с возрастанием числа сейсмоприемников при пропорциональном увеличении базы приема (т. е. неизменном шаге между сейсмоприемниками) отношение сигнал/шум асимптотически стремится к некоторому предельному значению. Это означает, что при достижении величинами  $Q_{СЗ}$  и  $Q_{ВСЗ}$  некоторого уровня дальнейшего их повышения можно достичь лишь ценой дополнительных затрат. Физически это, скорее всего, объясняется ухудшением когерентности сигнала в пределах увеличивающейся базы приема.

В некоторых случаях, особенно когда сейсмоприемники группы образуют две независимые подгруппы (например, крестообразные,  $L$ -образные и т. п.), может успешно применяться способ взаимной корреляции, иногда называемый UK [см. Ryall, 1964; Somers and Manchee, 1966; Iyer, 1968; King et al., 1973]. Взаимная корреляция выходных сигналов обеих подгрупп приводит к повышению отношения сигнал/шум [Birtill and Whiteway, 1965].

## 6.5. СКОРОСТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

В настоящем разделе рассматриваются способы выделения высоко- и среднескоростных регулярных волн. Скоростные фильтры могут применяться как при линейных группах сейсмоприемников, так и при площадных. Они позволяют разделять регулярные волны с различными кажущимися скоростями, в связи с чем можно выделять полезные сигналы, находящиеся в том же частотном диапазоне, что и мешающие регулярные и нерегулярные волны. Как будет показано далее, фильтрация по скоростям осуществляется с помощью многоканальных фильтров при обработке совокупностей трасс. Характеристики таких фильтров представляют собой двух- и трехмерные функции соответственно для линейных и площадных групп.

Области применения многомерных скоростных и одномерных частотных фильтров, рассчитанных для каждого канала, существенно различаются.

### 6.5.1. Характеристики сигнала и шума

Рассмотрим основные характеристики полезных сейсмических сигналов и шума.

**Телесеismicические сигналы.** Кажущаяся скорость регистрируемых сигналов зависит от типа волн, положения источника и строения земной коры в районе расположения приемной группы. Наблюдаемые кажущиеся скорости сигналов Р-волн превышают 8 км/с, S-волн — около 4 км/с. При регистрации с помощью широкополосной сейсмологической аппаратуры для первого типа волн доминирующей является частота около 1 Гц, а для второго — более низкая. Скорости поверхностных волн, являющиеся частотно-зависимыми, могут достигать 4,5 км/с. Предполагается, что телесеismicические сигналы в пределах базы приема — когерентные.

**Микросейсмы.** Этот тип шумов, называемый также океаническими микросейсмами, распространяется как релеевские волны со скоростью 2,5—4,0 км/с. Доминирующие частоты занимают достаточно широкий низкочастотный диапазон. В зависимости от расстояния до источника и шага между сейсмоприемниками определенная часть микросейсм может оказаться когерентной на базе приема.

**Некогерентные шумы.** Они обычно вызваны деятельностью человека (работа промышленных предприятий, транспорт, строительство), действием ветра, малых водных бассейнов и других источников, генерирующих сравнительно высокочастотные шумы (выше 1 Гц). Кажущиеся скорости таких шумов варьируют в зависимости от типа источника, но, как правило, невелики (около 1 км/с). При шаге между сейсмоприемниками, превышающем несколько километров, высокочастотные шумы на базе приема оказываются когерентными независимо от того, где находится источник шумов, внутри или вне пределов группы.

**Шумы, генерируемые сигналом.** Это шумы, создаваемые полезным сигналом в окрестности сейсмоприемника, например многократные отражения, обменные волны и т. п. Они могут подходить к группе с различными кажущимися скоростями и создавать когерентные колебания на базе приема.

В зависимости от типа источника генерируются различные сейсмические сигналы и шумы. Не пытаясь дать более подробную характеристику их общих свойств, подчеркнем, что применительно к каждому конкретному случаю приведенные данные могут быть существенно дополнены.

## 6.5.2. Скоростная фильтрация<sup>1</sup> с помощью одномерных групп

На рис. 6.4 показано идеализированное распределение телесейсмических Р-волн и когерентных шумов на плоскости частот и волновых чисел. Волны Р, имеющие кажущиеся скорости в диапазоне от 8 км/с до бесконечности, занимают на этой плоскости треугольную область пропускания фильтра. Все когерентные шумы с кажущимися скоростями между 2,5 и 4 км/с распределены внутри другой треугольной области.

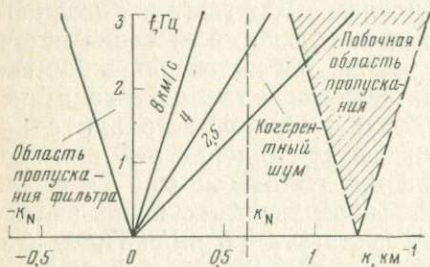


Рис. 6.4. Области  $(f, k)$ -плоскости, соответствующие сигналу (область пропускания фильтра) и помехам.

Шаг между сейсмоприемниками  $\Delta x = 0,8$  км/с, шаг дискретизации по времени  $\Delta t = 0,1$  с

проходящими через начало координат в плоскости  $(f, k)$ . Единственное ограничение, накладываемое на частоты и волновые числа, связано с дискретностью обрабатываемых данных. Пространственное квантование, выраженное в дискретности точек приема эквидистантной группы, обуславливает периодичность ее амплитудной характеристики по волновым числам. На рис. 6.4 заштрихованная треугольная зона представляет собой первую «положительную» побочную область пропускания. За счет элайсинг-эффекта скоростной фильтр может пропускать некоторую часть энергии когерентных шумов, область существования которых накладывается на побочные зоны пропускания (см. рис. 6.4). Величина этой энергии до некоторой степени может контролироваться выбором параметра  $k_N$ , т. е. шагом между сейсмоприемниками, как уже упоминалось в разделе 6.2. Если область значений  $(f, k)$ , свойственных когерентным шумам, не перекрывается с областью  $(f, k)$  сигналов, то скоростная фильтрация позволит идеально выделить сигнал на фоне когерентных шумов.

Передаточная функция и импульсная реакция скоростного фильтра — двумерные функции. Первая из них является функ-

<sup>1</sup> Под скоростной фильтрацией О. Кулханек здесь подразумевает способ обработки, известный в отечественной литературе как веерная фильтрация. (Прим. перев.).

цией частоты и волнового числа, вторая — функцией времени и удаления сейсмоприемника от центра группы. Таким образом, скоростная фильтрация с помощью линейных групп представляет собой двумерную многоканальную ( $M$  сейсмоприемников) процедуру обработки сигналов. Она принципиально отличается от обычной фильтрации сигналов до суммирования тем, что при фильтрации скоростей выходной сигнал каждого сейсмоприемника группы пропускается через индивидуальный фильтр, специально спроектированный для заданного удаления от центра группы, в то время как при обычной частотной фильтрации применяемые одноканальные фильтры одинаковы для всех трасс или, во всяком случае, выбираются безотносительно от расстояния до центра группы. Таким образом, скоростная фильтрация основана на использовании двумерных фильтров, т. е. фильтров, характеристики которых являются функциями частоты и положения сейсмоприемника в группе. Математический аппарат двумерной скоростной фильтрации можно найти в ряде работ, например Дж. П. Фэйла и Ж. Гро (1963), П. Эмбри и других (1963), Р. А. Уиггинса (1966) или С. А. Нахамкина (1969). У. Т. Фордом (1967) рассматривалась возможность применения теоремы Грина при проектировании двумерных фильтров, задаваемых в плоскости  $(f, k)$ . Здесь в основном используются разработки П. Эмбри и др. (1963).

Пусть необходимо пропустить колебания с волновыми числами, лежащими в диапазоне —  $|f|/v_k < k < |f|/v_k$ , и подавить сигналы за пределами этого диапазона. Иначе говоря, желаемая двумерная передаточная функция

$$H(f, k) = \begin{cases} 1, & -\frac{|f|}{v_k} \leq k \leq \frac{|f|}{v_k}; \\ 0 & \text{за пределами диапазона.} \end{cases} \quad (6.13)$$

Вид функции  $H(f, k)$  (зоны пропускания и режекции) показан на рис. 6.5, а по виду функции фильтрация получила название «кусочек пирога» («пай-слайс») [Embree et al., 1963], а также веерной [Fail and Grau, 1963; Treitel et al., 1967].

Двухмерная (пространственно-временная) импульсная реакция двумерного фильтра может быть определена через обратное преобразование Фурье функции  $H(f, k)$  [см., например, Bath, 1974, с. 63—66].

$$h(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(f, k) e^{j2\pi(ft+kx)} df dk, \quad (6.14)$$

где  $t$  — время;  $x$  — удаление сейсмоприемника от центра группы. Ввиду периодичности функции  $H(f, k)$  по волновым числам требуется ограничиться только разрешенным диапазоном волновых чисел

$$-k_N \leq k \leq k_N.$$

Как следует из соотношения  $f = v_k k$ , при заданной кажущейся скорости  $v_k$  и частоте  $|f| > v_k k_N$  в плоскости  $(f, k)$  можно попасть в побочную область пропускания фильтра. Следовательно, диапазон частот разумно выбранной передаточной функции определяется выражением

$$-f_N \leq f \leq f_N,$$

где  $f_N = v_k k_N = v_k / 2\Delta x$ . После определения частоты Найквиста  $f_N$  найдем период квантования  $\Delta t$ , позволяющий сохранить всю информацию в диапазоне частот от  $-f_N$  до  $f_N$ :

$$\Delta t = 1/2f_N.$$

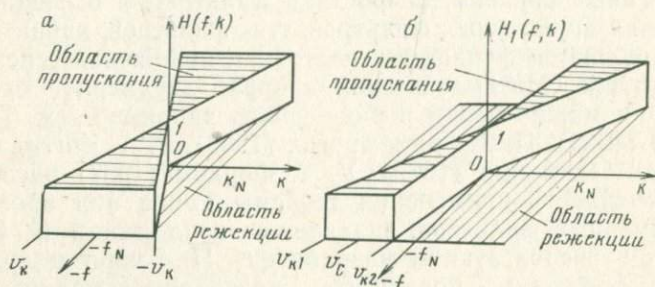


Рис. 6.5. Идеальные двумерные передаточные функции высокоскоростного (а) и полосового (б) скоростного фильтров.

Побочные области пропускания не показаны

Из последнего соотношения следует, что граничная кажущаяся скорость фильтра

$$v_k = f_N / k_N = \Delta x / \Delta t.$$

Таким образом, в область пропускания попадают сигналы, кажущаяся скорость которых превышает  $v_k$ . Иначе говоря, при заданном шаге между сейсмоприемниками временной сдвиг сигнала  $\tau$  должен удовлетворять условию  $\tau \leq \Delta t$ .

Показанная на рис. 6.4 характеристика соответствует случаю  $\Delta x = 0,8$  км и  $\Delta t = 0,1$  с.

Если подставить конечные пределы интегрирования  $\pm f_N$ ,  $\pm k_N$  в уравнение (6.14), то его можно переписать в виде

$$h(t, x) = \int_{-f_N}^{f_N} \int_{-k_N}^{k_N} e^{i2\pi(ft+kx)} df dk. \quad (6.15)$$

П. Эмбри и другие (1963), И. Финетти и другие (1971), Э. Р. Канасевич (1973), а также иные авторы представили решение уравнения (6.15) для четного числа сейсмоприемников, которое можно записать в виде

$$h(T_n, X_m) = \{\pi^2 [(X_m/\Delta x)^2 - (T_n/\Delta t)^2]\}^{-1}. \quad (6.16)$$

Здесь  $X_m$  — расстояние  $m$ -го сейсмоприемника от центра группы;  $T_n = n\Delta t$  —  $n$ -отсчет времени. Как следует из уравнения (6.16),  $h(T_n, X_m)$  есть действительная и четная функция в плоскости  $(T_n, X_m)$ . Следовательно, любой скоростной фильтр, определенный уравнением (6.16), представляет собой фазово-неискажающую систему. Блок-схема фильтра (6.16), пропускающего высокоскоростные волны, показана на рис. 6.1, *з*.

Формулу (6.16) можно также рассматривать как уравнение системы, представляющей собой набор частотных фильтров  $H_m(f)$ ,  $m=1, 2, \dots, M$ ; на вход  $m$ -го фильтра подается сигнал от  $m$ -го сейсмоприемника, а выходы всех  $M$  фильтров соединены между собой. Р. Л. Сэнгбушем и М. Р. Фостером (1968) предложена система уравнений, определяющая набор фильтров  $H_m(f)$ , оптимальных в смысле винеровского критерия минимума среднего квадратического отклонения реального результата скоростной фильтрации от ожидаемого. При этом рассмотрены как пропускающие фильтры, так и режекторные. Дж. Н. Галбрейт и Р. А. Уиггинс (1968) распространили концепцию оптимальной многоканальной фильтрации на системы с многими входами и многими независимыми выходами.

Уравнение (6.13) определяет высокоскоростной фильтр, обеспечивающий пропускание скоростей, больших  $v_k$ . Сигналы с меньшими скоростями подавляются. Такой фильтр может быть использован так же как полосовой. Пусть диапазон пропускаемых скоростей задан в пределах от  $v_{k1}$  до  $v_{k2}$  с центральной скоростью диапазона, равной  $v_c$ . Передаточная функция  $H_1(f, k)$  такого фильтра показана на рис. 6.5, *б*. Вращая функцию  $H_1(f, k)$  относительно начала координат против часовой стрелки до совмещения  $v_c$  с осью ординат (бесконечно большая скорость), трансформируем функцию  $H_1(f, k)$  в передаточную функцию высокоскоростного фильтра, аналогичную  $H(f, k)$ . Сигналы, распространяющиеся вдоль базы приема со скоростью  $v_c$ , будут регистрироваться соседними сейсмоприемниками с временным сдвигом  $\tau_c$ . После поворота функции  $H_1(f, k)$  скорость  $v_c \rightarrow \infty$ , а сдвиг  $\tau_c \rightarrow 0$ . Следовательно, вращение функции в области  $(f, k)$  соответствует временному сдвигу во временной области. При совпадении кажущихся скоростей вступлений сигналов со скоростью  $v_c$  функция (6.16) может использоваться, как показано на рис. 6.1, *д*. Другими словами, временной сдвиг и высокоскоростная фильтрация выполняют роль полосовой скоростной фильтрации. Примеры полосовых скоростных фильтров можно найти в работах М. Р. Фостера и др. (1964), Э. Р. Канасевича (1973) или у иных авторов.

Для получения результата  $y$  скоростной фильтрации необходимо выполнить свертку выходных сигналов  $M$  сейсмоприемников с двумерным оператором  $h$ , а затем их просуммировать

$$y_n = \sum_{m=1}^M x_{mn} * h_{mn}, \quad (6.17)$$

где  $x_{mn}$ ,  $h_{mn}$  — соответственно входные сигналы и импульсные реакции фильтров;  $m$  — индекс входного сигнала;  $n$  — индекс времени. Операция свертки проведена во временной области. Выходной сигнал фильтра соответствует точке  $X_m=0$ , т. е. сигнал отфильтрованной трассы относится к центру группы. Заметим, что в формулу не входят временные задержки. Имеется в виду, что выравнивание сигналов является функцией самого фильтра.

Благодаря пространственной симметрии оператора  $h_{mn}$  сигналы трасс пары сейсмоприемников, расположенных симметрично относительно центра группы, свертываются с одним и тем же оператором фильтра  $h(T_n, X_m)$ . Поэтому удобно предварительно образовать суммы  $u_1=x_1+x_M$ ;  $u_2=x_2+x_{M-1}$ ; ...;  $u_{M/2}=x_{M/2}+x_{M/2+1}$  и, пользуясь линейностью фильтра, вместо выражения (6.17) применять

$$y_n = \sum_{m=1}^{M/2} u_{mn} * h_{mn}.$$

При этом общее число операций свертки уменьшится с  $M$  в предыдущем случае до  $M/2$ . Возможность дальнейшего сокращения числа операций свертки была обоснована С. Трейтелем и др. (1967). Они предложили рекурсивные соотношения для скоростного фильтра П. Эмбри и др. (1963), которые позволяют выполнять лишь одну свертку с целью получения выходной трассы, независимо от общего числа сейсмоприемников в группе. Полученные результаты распространены на режекторные скоростные фильтры.

Теоретическая функция отклика, соответствующая импульсной реакции (6.16) фильтра в области времени и пространства, может быть определена через двумерное преобразование Фурье [см., например, Robinson, 1967b, с. 319]

$$H(f, k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n \neq 0} h(T_n, X_m) \exp[-j2\pi(fT_n + kX_m)].$$

Практически можно выполнить только конечное число суммирований и, следовательно, функция  $H(f, k)$  может быть лишь аппроксимирована. Интуитивно можно ожидать, что крутизна границы перехода между зонами пропускания и подавления должна увеличиваться, а амплитуда побочных максимумов снижаться с возрастанием числа сейсмоприемников в группе [см. также Cassano and Rocca, 1974]. Формула, устанавливающая связь между числом сейсмоприемников на единицу длины, граничным волновым числом и расстоянием сейсмоприемника от центра группы, представлена Т. Креем и Ф. Тотом (1973). При сейсмических наблюдениях необходимо иметь по крайней мере 6—12 сейсмоприемников в группе. Реальная амплитудная характеристика 12-трассового скоростного фильтра представлена Дж. П. Фэйлом и Ж. Гро (1963), а также П. Эмбри и др. (1963). Примеры можно

найти также в работах С. Трейтеля и других (1967), а также в иных источниках. Дж. Х. Мак-Клеллан и Т. В. Паркс (1972) приводят описание способа расчета скоростных фильтров, обладающих максимально равномерными характеристиками направленности в областях пропускания и подавления при максимальной крутизне их срезов. Способ базируется на чебышевской аппроксимации прямоугольных функций.

### 6.5.3. Двухмерная фильтрация по волновым числам

Фильтрация скоростей на сейсмических трассах является не единственной областью применения двухмерных фильтров. Двухмерные пространственные фильтры часто используются при анализе гравиметрических и магнитных карт, например для разделения региональных и локальных особенностей наблюдаемого поля. Основные принципы двухмерной цифровой фильтрации по волновым числам рассмотрены, в частности, У. Ж. Клементом (1973). Входными данными для двухмерных фильтров могут быть результаты наблюдений по сетке профилей в плоскости  $(x, y)$  на земной поверхности. Характеристики таких фильтров обычно задаются диапазоном волновых чисел (или других параметров, связанных с пространственной частотой) по двум направлениям  $x$  и  $y$  [Buerly, 1965; Dampney, 1965; Black and Scollar, 1969; Clarke, 1969; Agarwal and Lal, 1970; Mufti, 1972; Лапина, Страхов, 1973]. Реже эти фильтры задаются в плоскости  $(f, k)$ .

Если задачей интерпретации является выяснение природы небольших флуктуаций поля на гравиметрических и магнитных картах, часто прибегают к вычислению поля вторых производных или к продолжению поля вниз. Преобразованные поля могут оказаться более информативными, чем исходные данные. Пусть измерения  $f(x, y)$  проводились на поверхности Земли по регулярной сетке. Тогда каждый из упомянутых способов можно рассматривать как воздействие на исходное поле оператором  $h(x, y)$  или  $H(k_x, k_y)$  [Mesko, 1965, 1966; Darby and Davies, 1967; Ku et al., 1971; Bhattacharyya, 1972]

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y);$$

$$G(k_x, k_y) = H(k_x, k_y)F(k_x, k_y),$$

где  $g(x, y)$  — результат преобразования;  $H, F$  — преобразования Фурье соответственно функций  $h, f$ .

В области волновых чисел операторы, реализующие соответственно вычисление вторых производных и продолжение поля вниз, имеют простой вид [см., например, Clarke, 1969]

$$H_1(k_x, k_y) = k_x^2 + k_y^2;$$

$$H_2(k_x, k_y) = \exp\left(z \sqrt{k_x^2 + k_y^2}\right).$$

Заметим, что  $H_1(k_x, k_y)$ , так же как и  $H_2(k_x, k_y)$ , безгранично возрастает при увеличении независимых переменных. Следовательно, такой подход применим только в том случае, когда функция  $F(k_x, k_y)$  сходится быстрее, чем оператор  $H(k_x, k_y)$ . Практически обычно вместо точных выражений используются некоторые приближенные формулы. Как непосредственно следует из приведенных выше уравнений для  $g(x, y)$  или  $G(k_x, k_y)$ , оба этих способа могут рассматриваться как двумерная фильтрация. Некоторые авторы [см. Bath, 1974, с. 267—269] называют такую технику обработки двумерной фильтрацией по волновым числам. У. А. Меско (1966) детально рассмотрел шесть различных фильтров, используемых в способе вторых производных. Ж. К. Кларком (1969) предложен способ расчета оптимальных (по критерию Винера) фильтров, реализующих вычисление вторых производных и продолжение поля вниз<sup>1</sup>. Сглаживающая, или низкочастотная, фильтрация двумерных наблюдаемых данных рассматривалась В. Н. Страховым и М. Н. Лапиной (1967).

В своей сугубо теоретической работе Р. Л. Сакс (1966) использовал двумерную фильтрацию с целью снижения неоднозначности наблюдаемых гравиметрических данных, в частности для подчеркивания эффекта, обусловленного изменениями плотности в данном слое, в то время как влияние изменений плотности во всех других слоях требовалось минимизировать. Системная функция фильтра, решающего эту задачу, определена через функцию отклика, которая характеризует возмущение поля на земной поверхности. Последнее обусловлено относительными плотностными неоднородностями в данном слое, выраженными в единицах плотностных неоднородностей в других слоях.

Иногда фильтры, реализующие продолжение поля вниз или вычисление вторых производных, не наилучшим образом решают ту или иную конкретную задачу. В этом случае могут использоваться фильтры других типов. Например, Э. Ж. Зурфле (1967) описал двумерные фильтры по длинам волн, которые используются для разделения гравитационных и магнитных аномалий, имеющих различную протяженность в горизонтальном направлении. Рассмотрены три типа фазово-неискажающих фильтров: региональный (низкочастотный), остаточный (высокочастотный) и полосовой. Поскольку эти фильтры базируются только на различии сигналов по длинам волн, они могут применяться при обработке любых двумерных полей. П. М. Лавин и Дж. Ф. Девейн (1970) рассчитали двумерные низкочастотные фильтры в явной форме. Полученные ими фильтры являются фазово-неискажающими, имеют плоскую форму характеристики в полосе пропускания и регулируемые граничные волновые числа. Низкочастотные фильтры по длинам волн рассматривались Т. Дж. Улрихом (1968). Ж. К. Кларк (1971) описал применение пространственного

<sup>1</sup> См. также раздел 4.3.3.

фильтра со многими входами для снятия поверхностных эффектов при обработке геофизических карт.

П. С. Найду (1967) распространил теорию одномерных фильтров Страхова на двумерные фильтры. Приводится алгоритм расчета коэффициентов фильтра для выделения гравиметрических и магнитных аномалий на фоне шумов. При этом предполагается, что свойства шумов однозначно определяются через их автокорреляционные функции.

#### 6.5.4. Скоростная фильтрация при использовании двумерных групп сейсмоприемников

В случае линейных групп сейсмоприемников невозможно обеспечить разделение сигналов, подходящих по различным азимутам. Поэтому в разделе 6.1 допускалось, что источник располагается на линии профиля. Двумерные группы заданной геометрии позволяют не только определять кажущуюся скорость, но и вычислять азимут прихода волн при условии, что известны два или более независимых приращения времени прихода сигнала на непараллельных базах. Измеренные кажущаяся скорость и горизонтальное волновое число могут быть использованы для определения направлений прихода волн в горизонтальной плоскости относительно азимута линии приемник — источник. При обработке данных, зарегистрированных двумерными группами, удобно рассматривать эти две величины как векторы. В дальнейшем будем полагать, что в цепь каждого сейсмоприемника группы могут быть дополнительно включены индивидуальные частотные фильтры.

Пусть группа состоит из  $M$  сейсмоприемников, распределенных на земной поверхности определенным образом. Положение сейсмоприемников относительно центра группы описывается векторами  $r_m$  или парой координат  $x_m$  и  $y_m$ ,  $m=1, 2, \dots, M$ . Импульсная реакция и комплексная частотная характеристика  $m$ -го канала соответственно равны  $h_m(t)$  и  $H_m(f)$ . Функции  $h_m(t)$  и  $H_m(f)$  описывают весь  $m$ -й канал, включая сейсмоприемник и индивидуальный фильтр, если таковой имеется. Когерентный сигнал распространяется вдоль базы приема группы с определенной кажущейся скоростью  $v_k$ , поэтому за исключением случая вертикального подхода волн сигналы на выходе индивидуальных каналов появляются с временными сдвигами  $t_m$ . Временной сдвиг на выходе  $m$ -го сейсмоприемника относительно среднего сейсмоприемника группы (см. рис. 6.2, а) можно найти из уравнения (6.5). Очевидно, когда ось  $x$  ориентирована по широте, а  $y$  — по меридиану, угол  $\theta$  становится азимутом направления источник — приемник. При этом считается, что фронты волн — плоские, а кажущиеся скорости постоянны на базе приема. Отклик  $m$ -го сейсмоприемника на единичный импульс, распространяющийся на базе приема с параметрами  $v_k$  и  $\theta$ , представим в виде:

$$h_m(t - t_m) = h_m \left[ t - \frac{r_m \cos(\theta - \alpha_m)}{v_k} \right]. \quad (6.18)$$

Заметим, что в то время как импульсная реакция  $h_m(t)$  зависит только от времени, функция  $h_m(t-t_m)$  зависит и от времени, и от положения, занимаемого соответствующим сейсмоприемником. Таким образом, использование оператора  $h_m(t-t_m)$  может рассматриваться как пространственно-временная фильтрация [см. также Gangi and Disher, 1968]. Применяя теорему смещения к функции (6.18), преобразование Фурье от функции  $h_m(t-t_m)$  запишем в виде

$$\begin{aligned} F\{h_m(t-t_m)\} &= H_m(f) \exp[-j2\pi f r_m \cos(\theta - \alpha_m)/v_R] = \\ &= H_m(f) \exp[-j2\pi r_m k \cos(\theta - \alpha_m)], \end{aligned} \quad (6.19)$$

где  $k=1/\lambda$  — волновое число сигнала;  $\lambda$  — длина волны сигнала. Рассматривая правую часть выражения (6.19) как скалярное произведение двух векторов, упростим это уравнение следующим образом:

$$F\{h_m(t-t_m)\} = H_m(f, \mathbf{k}) = H_m(f) \exp(-j2\pi r_m \mathbf{k}). \quad (6.20)$$

Здесь  $\mathbf{k}$  — вектор волнового числа. Трехмерная функция (6.20) является функцией отклика по частоте и волновому числу  $m$ -го сейсмоприемника. В силу линейности функция отклика всей группы, деленная на общее число сейсмоприемников, выражается соотношением

$$H(f, \mathbf{k}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_m(f, \mathbf{k}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_m(f) \exp(-j2\pi r_m \mathbf{k}). \quad (6.21)$$

Уравнение (6.21) — характеристика трехмерного фильтра, реализованного с использованием двухмерной группы из  $M$  сейсмоприемников. Если вектор волнового числа разложить на его составляющие  $x$  и  $y$ , то уравнение (6.21) можно переписать в виде

$$H(f, k_x, k_y) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M H_m(f) \exp[-j2\pi(x_m k_x + y_m k_y)]. \quad (6.22)$$

Графическое изображение трехмерной функции  $H(f, k_x, k_y)$  построить затруднительно. Эту трудность обычно обходят, ограничиваясь построением серии функций отклика в  $\mathbf{k}$ -плоскости для интересующих нас дискретных частот. Наибольший интерес представляет абсолютная величина характеристики направленности (6.22), поэтому прежде всего привлекает внимание амплитудная  $|H(k_x, k_y)|$  или энергетическая  $\text{Re}^2 H(k_x, k_y) + \text{Im}^2 H(k_x, k_y)$  характеристика. Принципиально можно построить амплитудную или энергетическую характеристику в виде функции волновых чисел для заданного азимута — двухмерная диаграмма [см., например, Saron et al., 1968], или использовать изображение в изолиниях на  $\mathbf{k}$ -плоскости для всех азимутов — трехмерная диаграмма [см., например, Burg, 1964]. Введением необходимых временных сдвигов  $t_m$  в индивидуальные каналы главный максимум

функции  $H(f, \mathbf{k})$  может быть перемещен в любую желаемую точку  $(f, \mathbf{k})$ -пространства. В результате система будет пропускать только сигналы, которые приходят по ожидаемому направлению с кажущимися скоростями, лежащими внутри предписанного диапазона. Например, У. Дж. Ханнон и Р. Л. Ковач (1966) использовали такую фильтрацию скоростей для выделения волн, распространяющихся в земной коре с кажущимися скоростями в интервале 24—100 км/с.

В предположении о равновероятности прихода сигналов и когерентных помех по любому направлению соответствующие характеристики сигнала и помех в  $(f, \mathbf{k})$ -плоскости могут быть изображены коническими поверхностями, получаемыми вращением клинообразных зон на рис. 6.4 вокруг оси частот. Когерентным сигналам, распространяющимся вдоль базы приема с кажущейся скоростью  $v_k \geq 8$  км/с, соответствует область внутри конической поверхности  $f/|\mathbf{k}| = 8$  км/с при условии отсутствия дисперсии скоростей. Когерентным помехам с кажущимися скоростями, равными 2,5—4,0 км/с, отвечает зона между коническими поверхностями с отношением  $f/|\mathbf{k}|$ , составляющим 2,5 и 4,0 км/с. Некогерентный шум на любой частоте имеет равномерное распределение по всей  $\mathbf{k}$ -плоскости. Как следует из выбранной модели, использование двумерных групп позволяет полностью разделить между собой когерентные сигналы и помехи<sup>1</sup>, но подавление некогерентного шума целиком невозможно.

При скоростной фильтрации важно правильно выбрать функцию отклика  $H(f, k_x, k_y)$ . В простейшем случае игнорируются фильтрующие свойства каналов, выражаемые функциями  $H_m(f)$ , а сейсмоприемники, составляющие группы, считаются идентичными и широкополосными. Тогда характеристика  $H(f, k_x, k_y)$  становится функцией лишь векторов волнового числа. Отсюда следует, что данный подход представляет простое суммирование применительно к двумерной группе. Так как  $H(k_x, k_y)$  не меняется с частотой, результаты, получаемые при таком суммировании, достаточно удовлетворительны только в ограниченном диапазоне частот [Burg, 1964].

Дальнейшее улучшение результатов может быть достигнуто использованием способа, включающего фильтрацию до суммирования. В уравнении (6.22) такую фильтрацию описывает функция  $H_m(f)$ , представляющая собой частотную характеристику всего  $m$ -го канала, включая специально подобранные фильтры. Заметим, что функция частоты  $H_m(f)$  выбирается в зависимости от положения сейсмоприемника в группе. В силу ненулевого расстояния между сейсмоприемниками в группе задание набора функций  $H_m(f)$  ведет к многоканальной обработке. Среди способов задания характеристик  $H_m(f)$ , удовлетворяющих поставленным требованиям, наиболее часто при обработке сейсмических данных

<sup>1</sup> Если их кажущиеся скорости и азимуты направления прихода не перекрываются. (Прим. перев.).

используются винеровский подход и способ максимального правдоподобия. Способ максимального правдоподобия включает в себя частотную фильтрацию выходов индивидуальных сейсмоприемников группы и обеспечивает минимальные частотные искажения выходного сигнала. Суммирование выходных сигналов  $M$  фильтров обуславливает широкополосность результирующей характеристики системы, несмотря на то, что характеристики индивидуальных фильтров могут иметь совершенно иной характер. В итоге колебания, приходящие по определенному направлению с ожидаемой кажущейся скоростью, пропускаются практически без искажений, другие же колебания подавляются. Как было показано ранее, винеровская фильтрация минимизирует среднее квадратическое отклонение между выходным и желаемым сигналами. В общем случае могут использоваться оба способа формирования выходного сигнала, который рассматривается как оценка неизвестного входного сигнала. Наиболее полно эти вопросы обсуждаются в работах М. Дж. Левина (1964), Дж. Капона и Р. Дж. Гринфильда (1965), П. Э. Грина и других (1966), Э. Дж. Фаррела (1971) и др.

В качестве примера можно привести результаты, полученные с помощью многоканальной винеровской фильтрации. Дж. П. Барг (1964) показал, что частотные характеристики  $H_m(f)$ , рассчитанные для винеровского критерия оптимальности при данном  $M$  и заданной геометрии группы, должны удовлетворять условию

$$\sum_{n=1}^M [S_{mn}(f) + N_{mn}(f)] H_n^*(f) = S_{m0}(f), \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

где  $S_{mn}(f)$  — взаимный спектр мощности сигнала  $m$ -го и  $n$ -го сейсмоприемников;  $N_{mn}(f)$  — взаимный спектр мощности помех для этой же пары каналов;  $S_{m0}(f)$  — взаимный спектр сигнала  $m$ -го сейсмоприемника и сигнала сейсмоприемника в центре группы, форма которого принимается за желаемую; знак «\*» обозначает комплексно-сопряженную функцию. Числовые результаты, представленные Дж. П. Баргом, показывают преимущества многоканальной винеровской фильтрации по сравнению с простым суммированием и одноканальной винеровской фильтрацией суммарного сигнала группы. Соответствующее решение во временной области обсуждалось П. Хурбалом (1972). С. Дж. Ластером и А. Ф. Линвиллом (1966) детально рассмотрены оптимальные многоканальные фильтры для разделения дисперсионных волн.

Пять различных многоканальных фильтров, спроектированных в соответствии с различными моделями сигнала и помехи, описаны М. Бакусом и др. (1964). Характеристики этих фильтров проверялись на группе из 19 сейсмоприемников в сейсмологической обсерватории Кемберлендского плато. Обычно многоканальная фильтрация существенно повышает отношение сигнал/шум по сравнению с простым суммированием (ПС). У. А. Шнейдер и другие (1965) применяли многоканальный фильтр для эффек-

тивной режекции многократных отражений. Они объединили способ горизонтального суммирования по общей глубинной точке с трехканальной оптимальной винеровской фильтрацией, описанной Дж. П. Баргом (1964).

В настоящее время в большинстве случаев сейсмоприемники групп располагаются на поверхности Земли или вблизи нее. Однако теоретические расчеты и наблюдаемые данные показывают, что уровень помех уменьшается с возрастанием глубины погружения сейсмоприемников. Группа сейсмоприемников, расположенная на некоторой глубине под поверхностью Земли, должна была бы обеспечить лучшее отношение сигнал/шум. Р. Б. Роден (1965, 1968) теоретически показал, что группа неглубоко погруженных сейсмоприемников, выходные сигналы которых подаются на многоканальный фильтр, имеет преимущество по сравнению с поверхностной группой при прочих равных условиях. В то же время выходные сигналы поверхностных (линейных) и вертикальных (располагаемых в скважинах) групп существенно не различаются между собой. В случае использования вертикальных групп эффект интерференции между прямой и отраженной от поверхности волнами создавал дополнительные трудности при обработке. Другим препятствием для применения вертикальных групп является ослабление не только шумов, но и сигналов при удалении сейсмоприемников вглубь от поверхности Земли. Под термином «неглубоко погруженные» Р. Б. Роден имел в виду глубину около 100 м или несколько больше, на которой ожидаемый уровень некогерентных шумов достаточно низок по сравнению с уровнем сигнала.

З. А. Дер (1970) описывает эксперимент с вертикальной группой из трехкомпонентных сейсмоприемников. Эффективность горизонтальных и вертикальных групп на море дана А. М. Мерцеров (1972).

- Ан В. А. Возможности использования преобразования аналог/код для регистрации микровариаций электромагнитного поля Земли. — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1965, № 9, с. 647—649.
- Белотелов В. А., Рыкунов А. Н. Устройство для цифрования сейсмограмм. — Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, № 3, с. 473—475.
- Боярский Е. А., Коган М. Г. Линейное сглаживание измерений с морскими гравиметрами. — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1968, № 10, с. 640—643.
- Винник Г. П. Пространственная фильтрация сейсмических сигналов. — Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, № 6, с. 521—527.
- Кац С. А. Дискретные квази-оптимальные и минимальные фильтры. — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1972, № 9, с. 594—598.
- Кондратьев И. К. Теория обратной фильтрации волновых процессов. — Изв. АН СССР. Сер. физика Земли, 1968, № 4, с. 231—237.
- Лапина М. Н., Страхов В. Н. Нормализованные алгоритмы для фильтрации потенциальных полей. — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1973, № 9, с. 442—453.
- Нахамкин С. А. Веерная фильтрация. — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1969, № 11, с. 686—691.
- Никитин А. А., Яновский А. К. Алгоритмы рекурсивной фильтрации сейсмических сигналов. — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1973, № 4, с. 227—232.
- Петров Л. В. Использование Чебышевских полиномов для расчета сейсмических групп. — Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, № 5, с. 431—440.
- Саваренский Е. Ф., Косарев Г. Л. Цифровая фильтрация длиннопериодных колебаний Аляскинского землетрясения 1964 г. — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1967, № 12, с. 57—59.
- Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
- Страхов В. Н., Лапина М. Н. Способ сглаживания потенциальных полей. — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1967, № 8, с. 511—520.
- Шауб Ю. Б. Использование корреляционного анализа для обработки геофизических данных. — Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, № 4, с. 358—364.
- Шварц С. А., Соколов В. М. Фильтрация, связанная с селективной выборкой геофизических данных. — Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1954, № 19, с. 402—419.
- Штеменко Ю. Н. Дискриминация сейсмических сигналов с помощью автоадаптивного декорреляционного фильтра. — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1971, № 3, с. 217—221.
- Яновский А. К. Статистическая модель сейсмограммы и проблемы фильтрации. — Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, 1967, № 6, с. 356—359.
- Яновский А. К. Критерии оптимальной фильтрации случайных процессов в применении к сейсмическим исследованиям. — Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1968, № 6, с. 361—366.
- Ackroyd, M. H., 1973. Digital Filters. Butterworths, 82 pp.
- Agarwal, B. N. P. and Lal, T., 1970. Application of frequency analysis in two-dimensional gravity interpretation. *Geoexploration*, 10: 91—100.
- Aguilera, R., De Bremaecker, J. C. and Hernandez, S., 1970. Design of recursive filters. *Geophysics*, 35: 247—253.
- Allsopp, D. F., Burke, M. D. and Cumming, G. L., 1972. A digital seismic recording system. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 62: 1641—1648.
- Anders, E. B., Johnson, J. J., Lasaine, A. D., Spikes, P. W. and Taylo, J. T., 1964. Digital Filters. NASA Contr. Rep. CR-136, 132 pp.
- Anstey, N. A., 1964. Correlation techniques—a review. *Geophys. Prospect.*, 12: 355—382.

- Backus, M. M.*, 1959. Water reverberations—their nature and elimination. *Geophysics*, 24: 233—261.
- Backus, M., Burg, J., Baldwin, D. and Bryan, E.*, 1964. Wide-band extraction of mantle P-waves from ambient noise. *Geophysics*, 29: 672—692.
- Bath, M.*, 1968. *Mathematical Aspects of Seismology*. Elsevier, 415 pp.
- Bath, M.*, 1974. *Spectral Analysis in Geophysics*. Elsevier, 563 pp.
- Bayless, J. W. and Brigham, E. O.*, 1970. Application of the Kalman filter to continuous signal restoration. *Geophysics*, 35: 2—23.
- Bendat, J. S. and Piersol, A. G.*, 1971. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. Wiley-Interscience, 407 pp.
- Berckhemer, H. and Jacob, K. H.*, 1968. Investigation of the dynamical process in earthquake foci by analyzing the pulse shape of body waves. *Ber. Inst. Meteorol. Geophys. Univ. Frankfurt/Main*, 13: 1—85.
- Bhattacharyya, B. K.*, 1972. Design of spatial filters and their application to high-resolution aeromagnetic data. *Geophysics*, 37: 68—91.
- Bhimasankaram, V. L. S., Tarkhov, A. G., Nikitin, A. A. and Seshagiri Rao, S. V.*, 1973. Interprofile correlation and self-setting filtration method of analysis of geophysical data. *Geophys. Prospect.*, 21: 464—471.
- Birtill, J. W. and Whiteway, F. E.*, 1965. The application of phased arrays to the analysis of seismic body waves. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 258: 421—493.
- Black, D. I. and Scollar, I.*, 1969. Spatial filtering in the wave-vector domain. *Geophysics*, 34: 916—923.
- Blackman, R. B.*, 1965. *Linear Data-Smoothing and Prediction in Theory and Practice*. Addison-Wesley, 182 pp.
- Blackman, R. B. and Tukey, J. W.* 1958. *The Measurement of Power Spectra*. Dover Publications, 190 pp.
- Bogert, B. P.*, 1962. Correction of seismograms for the transfer function of the seismometer. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 52: 781—792.
- Botezatu, R. and Calota, C.*, 1973. Cross-correlation as an aid in simultaneous gravity and magnetic analysis. *Geophys. Prospect.*, 21: 472—483.
- Bracewell, R.*, 1965. *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, 381 pp.
- Brigham, E. O., Smith, H.-W., Jr., Bostick, F. X., Jr. and Dueterhoeft W. C., Jr.*, 1968. An iterative technique for determining inverse filters. *IEEE Trans.*, GF-6: 86—96.
- Bruland, L. and Rygg, E.*, 1971. Experiments with chirp filtering of surface waves. *Rep. No. 6, Seismol. Obs., Univ. of Bergen*, 34 pp.
- Buben, J. and Rudajev, VI.*, 1974. Statistical prediction of rock bursts. (In Czech with an English summary) *Publ. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci.*, 67: 3—31.
- Burch, J. J., Green, A. W., Jr. and Grote, H. H.*, 1964. Restoration and correction of time functions by the synthesis of inverse filters on analog computers. *IEEE Trans.*, GE-2: 19—24.
- Burg, J. P.*, 1964. Three-dimensional filtering with an array of seismometers. *Geophysics*, 29: 693—713.
- Burke, M. D., Kanasewich, E. R., Malinsky, J. D. and Montalbetti, J. F.*, 1970. A wide-band digital seismograph system. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 60: 1417—1427.
- Burns, W. R.*, 1968. A statistically optimized deconvolution. *Geophysics*, 33: 255—263.
- Byerly, P. E.*, 1965. Convolution filtering of gravity and magnetic maps. *Geophysics*, 30: 281—283.
- Capon, J. and Green, P. E.*, 1968. Recent results from the Large-Aperture Seismic Array. *Supplemento al Nuovo Cimento*, 6: 82—95.
- Capon, J. and Greenfield, R. J.*, 1965. Asymptotically optimum multidimensional filtering for sampled-data processing of seismic arrays. *M. I. T. Lincoln Lab.*, Tech. Note 1965—57, 39 pp.
- Capon, J., Greenfield, R. J., Kolker, R. J. and Lacoss, R. T.*, 1968. Short-period

signal processing results for the Large Aperture seismic Array. *Geophysics*, 33: 452—472.

*Capon, J., Greenfield, R. J. and Lacoss, R. T.*, 1969. Long-period signal processing results for the Large Aperture Seismic Array. *Geophysics*, 34: 305—329.

*Cassano, E. and Rocca, F.*, 1974. After-stack multichannel filters without mixing effects. *Geophys. Prospect.*, 22: 330—344.

*Chan, S. H. and Leong, L. S.*, 1972. Analysis of least-squares smoothing operators in the frequency domain. *Geophys. Prospect.*, 20: 892—900.

*Chan, S. H. and Leong, L. S.*, 1974. Filtering of discrete time series by symmetric least-squares operators. *Math. Geol.* 6: 153—171.

*Choy, G. and McCamy, K.*, 1973. Enhancement of long-period signals by time-varying adaptive filters. *J. Geophys. Res.*, 78: 3505—3511.

*Claerbout, J. F.*, 1964. Detection of P-waves from weak sources at great distances. *Geophysics*, 29: 197—211.

*Clarke, G. K. C.*, 1968. Time-varying deconvolution filters. *Geophysics*, 33: 936—944.

*Clarke, G. K. C.*, 1969. Optimum second-derivative and downward-continuation filters. *Geophysics*, 34: 424—437.

*Clarke, G. K. C.*, 1971. Linear filters to suppress terrain effects on geophysical maps. *Geophysics*, 36: 963—966.

*Clay, C. S. and Liang, W. L.*, 1962. Continuous seismic profiling with matched filter detector. *Geophysics*, 27: 786—795.

*Clement, W. G.*, 1973. Basic principles of two-dimensional digital filtering. *Geophys. Prospect.*, 21: 125—145.

*Cochran, M. D.*, 1973. Seismic signal detection using sign bits. *Geophysics*, 38: 1042—1052.

*Crampin, S. and Bath, M.*, 1965. Higher modes of seismic surface waves: Mode separation. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 10: 81—92.

*Crump, N. D.*, 1974. A Kalman filter approach to the deconvolution of seismic signals. *Geophysics*, 39: 1—13.

*Dampney, C. N. G.*, 1965. Three criteria for the judgement of vertical continuation and derivative methods of geophysical interpretation. *Geoexploration*, 4: 3—24.

*Darby, E. K. and Davies, E. B.*, 1967. The analysis and design of two-dimensional filters for two-dimensional data. *Geophys. Prospect.*, 15: 383—406.

*Davenport, W. B., Jr. and Root, W. L.*, 1958. An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise. McGraw-Hill, 393 pp.

*Davies, E. B. and Mercado, E. J.*, 1968. Multichannel deconvolution filtering of field recorded seismic data. *Geophysics*, 33: 711—722.

*Dean, W. C.*, 1965. P-wave correlations and array alignments. *Proc. IEEE*, 53: 1861—1865.

*De Bremaecker, J. C., Donoho, P. and Michel, J. G.*, 1962. A direct digitizing seismograph. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 52: 661—672.

*De Bremaecker, J. C., Sitton, G. A., Rusk, S. K., Graham, M. H. and Schutz, T. C.*, 1963. The Rice digital seismograph system. *J. Geophys. Res.*, 68: 5029—5034.

*Del Toro, V. and Parker, S. P.*, 1960. Principles of Control Systems Engineering. McGraw-Hill. 686 pp.

*Denham, D.*, 1963. The use of geophone groups to improve the signal-to-noise ratio of the first arrival in refraction shooting. *Geophys. Prospect.*, 11: 389—408.

*Der, Z. A.*, 1970. Some data processing results for a vertical array of triaxial seismometers. *Geophysics*, 35: 337—343.

*d'Hoeraene, J.*, 1962. Déconvolution de traces réelles. *Geophys. Prospect.*, 10: 68—83.

*Dobrin, M. B. and Ward, S. H.*, 1962. Tools for tomorrow's geophysics. *Geophys. Prospect.*, 10: 433—452.

*Domenico, S. N.*, 1965. Phase-distortionless filtering. *Geophysics*, 30: 32—50.

*Donnell, W. F.*, 1967. Sources of error in a seismic digital recording system. *Geophys. Prospect.*, 15: 246—261.

- Embree, P., Burg, J. P. and Backus, M. M.*, 1963. Wide-band velocity filtering—the pie-slice process. *Geophysics*, 28: 948—974.
- Fail, J. P. and Brau, G.*, 1963. Les filtres en éventail. *Geophys. Prospect.*, 11: 131—163.
- Fail, J. P. and Layotte, P. C.*, 1970. Méthode de filtrage du fantôme: Application à des cas réels. *Geophys. Prospect.*, 28: 434—464.
- Farrell, E. J.*, 1971. Sensor-array processing with channel-recursive bayes technique. *Geophysics*, 36: 822—834.
- Finetti, I., Nicolich, R. and Sancin, S.*, 1971. Review on the basic theoretical assumptions in seismic digital filtering. *Geophys. Prospect.*, 19: 292—320.
- Flinn, E. A.*, 1965. Signal analysis using rectilinearity and direction of particle motion. *Proc. IEEE*, 53: 1874—1876.
- Floyd, G. F.*, 1969. Gravimeter filters. *Geophysics*, 34: 968—973.
- Ford, W. T.*, 1967. Application of Green's theorem in two-dimensional filtering. *Geophysics*, 32: 739—740.
- Ford, W. T. and Hearne, J. H.*, 1966. Least-squares inverse filtering. *Geophysics*, 31: 917—926.
- Foster, M. R., Sengbush, R. L. and Watson, R. J.*, 1964. Design of sub-optimum filter systems for multi-trace seismic data processing. *Geophys. Prospect.*, 12: 173—191.
- Foster, M. R., Sengbush, R. L. and Watson, R. J.*, 1968. Use of Monte Carlo techniques in optimum design of the deconvolution process. *Geophysics*, 33: 945—949.
- Frank, H. R. and Doty, W. E. N.*, 1953. Signal-to-noise ratio improvements by filtering and mixing. *Geophysics*, 18: 587—604.
- Frasier, C. W.*, 1972. Observations of pP in the short-period phases of NTS explosions recorded at Norway. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 31: 99—109.
- Galbraith, J. N.*, 1971. Prediction error as a criterion for operator length. *Geophysics*, 36: 261—265.
- Galbraith, J. N., Jr. and Wiggins, R. A.*, 1968. Characteristics of optimum multi-channel stacking filters. *Geophysics*, 33: 36—48.
- Galli, M. and Randi, P.*, 1967. On the design of the optimum numerical filter with a prefixed response. *Ann. Geofis.*, 20: 401—414.
- Gangi, A. F. and Disher, D.*, 1968. A space-time filter for seismic models. *Geophysics*, 33: 88—104.
- George, C. F., Jr., Smith, H. W. and Bostick, F. X., Jr.*, 1964. Application of inverse filters to induction log analysis. *Geophysics*, 29: 93—104.
- Gjøystad, H. and Husebye, E. S.*, 1972. A comparison of performance between prediction error and bandpass filters. *NORSAR Tech. Rep.*, No. 48, 8 pp.
- Gold, B. and Rader, C. M.*, 1969. *Digital Processing of Signals*. McGraw-Hill, 269 pp.
- Göncz, G. and Zelei, A.*, 1972. Recursion band-filters and their design. *Geophys. Trans. Hung. Geophys. Inst. Roland Eötvös*, 3—4: 59—71.
- Green, P. E., Jr.*, 1965. A Large Aperture Seismic Array. *M., I. T. Lincoln Lab.*, Group Rep. 1965—1, 25 pp.
- Green, P. E., Jr., Frosch, R. A. and Romney, C. F.*, 1965. Principles of an experimental Large Aperture Seismic Array (LASA). *Proc. IEEE*, 53: 1821—1833.
- Green, P. E., Jr., Kelly, E. J., Jr., and Levin, M. J.*, 1966. A comparison of seismic array processing methods. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 11: 67—84.
- Gunn, P. J.*, 1972. Application of Wiener filters to transformations of gravity and magnetic fields. *Geophys. Prospect.*, 20: 860—871.
- Hales, F. W. and Edwards, T. E.*, 1955. Some theoretical considerations on the use of multiple geophones arranged linearly along the line of traverse. *Geophys. Prospect.*, 3: 65—73.
- Hamming, R. W.*, 1962. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 411 pp.
- Hannon, W. J. and Kovach, R. L.*, 1966. Velocity filtering of seismic core phases. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 56: 441—454.
- Hartenberger, R. A. and Van Nostrand, R. G.*, 1972. Influence of number and spacing of sensors on the effectiveness of seismic arrays. *Geophys. Prospect.*, 20: 771—784.
- Haubrich, R. A.*, 1968. Array design. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 58: 977—991.

- Haubrich, R. A. and Iyer, H. M.*, 1962. A digital seismograph system for measuring earth noise. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 52: 87—93.
- Helstrom, C. W.*, 1960. *Statistical Theory of Signal Detection*. Pergamon Press, 364 pp.
- Herrmann, R. B.*, 1973. Some aspects of band-pass filtering of surface waves. *Bull. Seismol Soc. Am.*, 63: 663—672.
- Holloway, J. L., Jr.*, 1958. Smoothing and filtering of time series and space fields. *Adv. Geophys.*, 4: 351—389.
- Holtz, H. and Leondes, C. T.*, 1966. The synthesis of recursive digital filters. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 13: 262—280.
- Holzman, M.*, 1963. Chebyshev optimized geophone arrays. *Geophysics*, 28: 145—155.
- Howell, B. F., Jr., Lavin, P. M., Watson, R. J., Cheng, Y. Y. and Lin, J. L.*, 1967. Method for recognizing repeated pulse sequences in a seismogram. *J. Geophys. Res.*, 72: 3225—3232.
- Huang, Y. T.*, 1966. Spectral analysis of digitized seismic data. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 56: 425—440.
- Hurbal, P.*, 1972. Three-dimensional optimum multichannel velocity filters. *Geophys. Prospect.*, 20: 28—46.
- Iyer, H. M.*, 1968. Determination of frequency-wave-number spectra using seismic arrays. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 16: 97—117.
- Jackson, P. L.*, 1967. Truncation and phase relationships of sinusoids. *J. Geophys. Res.*, 72: 1400—1403.
- Jones, H. J. and Morrison, J. A.*, 1954. Cross-correlation filtering. *Geophysics*, 19: 660—683.
- Jones H. J., Morrison, J. A., Sarrafian, G. P. and Spieker, L. J.*, 1955. Magnetic delay line filtering techniques. *Geophysics*, 20: 745—765.
- Jury, E. I.*, 1958. *Sampled-Data Control Systems*. Wiley, 453 pp.
- Jury, E. I.*, 1964. *Theory and Application of the z-Transform Method*. Wiley, 330 pp.
- Kaiser, J. F.*, 1966. Digital filters. In: F. F. Kuo and J. F. Kaiser (Editors), *System Analysis by Digital Computers*. Wiley, 438 pp.
- Kanasewich, E. R.*, 1973. *Time Sequence Analysis in Geophysics*. The University of Alberta Press, 352 pp.
- Kanasewich, E. R., Hemmings, C. D. and Alpaslan, T.*, 1973. Nth-root stack non-linear multichannel filter. *Geophysics*, 38: 327—338.
- King, D. W., Mereu, R. F. and Muirhead, K. J.*, 1973. The measurement of apparent velocity and azimuth using adaptive processing techniques on data from the Wararamunga seismic array. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 35: 137—167.
- Klima, K. and Kulhanek, O.*, 1970. Seismic signals processing by using the method of digital deconvolution. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 21: 403 (abstract).
- Koopmans, L. H.*, 1961. An evaluation of a signal-summing technique for improving the signal-to-noise ratio for seismic events. *J. Geophys. Res.*, 66: 3879—3893.
- Koopmans, L. H.*, 1974. *The Spectral Analysis of Time Series*. Academic Press, 366 pp.
- Krey, T. and Toth, F.*, 1973. Remarks on wavenumber filtering in the field. *Geophysics*, 38: 959—970.
- Ku, C. C., Telford, W. M. and Lim, S. H.*, 1971. The use of linear filtering in gravity problems. *Geophysics*, 36: 1174—1203.
- Kulhanek, O.*, 1967. Seismic noise filtering using digital computers. *Trav. Inst. Geophys. Acad. Tchecoslov. Sci.*, 273: 255—286.
- Kulhanek, O.*, 1973. Signal and noise coherence determination for the Uppsala Seismograph Array Station. *Pure Appl. Geophys.*, 109: 1653—1671.
- Kulhanek, O. and Klima, K.*, 1970. The reliable frequency band for amplitude spectra corrections. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 21: 235—242.
- Kunetz, G. and Fourmann, J. M.*, 1968. Efficient deconvolution of marine seismic records. *Geophysics*, 33: 412—423.
- Kurita, T.*, 1969. Spectral analysis of seismic waves. Part 1. Data windows for the analysis of transient waves. *Spec. Contrib. Geophys. Inst., Kyoto Univ.*, 9: 97—122.

- Lacoss, R. T.*, 1965. Geometry and patterns of Large Aperture Seismic Arrays. M. I. T. Lincoln Lab., Tech. Note 1965—64, 83 pp.
- Landisman, M., Dziewonski, A. and Sato, Y.*, 1969. Recent improvements in the analysis of surface wave observations. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 17: 369—403.
- Laster, S. J. and Linville, A. F.*, 1966. Application of multichannel filtering to the separation of dispersive modes of propagation, *J Geophys. Res.*, 71: 1669—1701.
- Lavin, P. M. and Devane, J. F.*, 1970. Direct design of two-dimensional digital wavenumber filters. *Geophysics*, 35: 1073—1078.
- Lee, Y. W.*, 1960. *Statistical Theory of Communication*. Wiley, 509 pp.
- Levin, M. J.*, 1964. Maximum-likelihood array processing. *Seismic Discrimination*, M. I. T. Lincoln Lab., Semiann. Tech. Summ., 31: 21—23.
- Levin, M. J. and Price, R.*, 1964. Automatic alarm systems. *Seismic Discrimination*, M. I. T. Lincoln Lab., Semiann. Tech. Summ., 30: 15—17.
- Levinson, N.*, 1949. The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction. Appendix in: *Wiener* (1949, pp. 129—148).
- Lindsey, J. P.*, 1960. Elimination of seismic ghost reflections by means of a linear filter. *Geophysics*, 25: 130—140.
- Lombardi, L. V.*, 1955. Notes on the use of multiple geophones. *Geophysics*, 20: 215—226.
- Longman, I. M. and Sharir, M.*, 1971. Laplace transform inversion of rational functions. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 25: 299—305.
- Manzoni, G.*, 1967. Theoretical evaluation of the perturbation on power spectra due to random errors in the spacing of the sampling instants. *Boll. Geofis. Teor. Appl.*, 9: 248—252.
- McClellan, J. H. and Parks, T. W.*, 1972. Equiripple approximation of fan filters. *Geophysics*, 37: 573—583.
- Melton, B. S.*, 1967. Analog-to-digital conversion—a problem or «decibels to digits.» *IEEE Trans.*, GE-5: 18—25.
- Mercado, E. J.*, 1968. Linear phase filtering of multicomponent seismic data. *Geophysics*, 33: 926—935.
- Merkel, R. H. and Alexander, S. S.*, 1969. Use of correlation analysis to interpret continental margin ECOOE refraction data. *J. Geophys. Res.*, 74: 2683—2697.
- Merzer, A. M.*, 1972. Horizontal and vertical arrays at sea. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 29: 367—370.
- Mesko, A.*, 1965. Some notes concerning the frequency analysis for gravity interpretation. *Geophys. Prospect.*, 13: 475—488.
- Mesko, C. A.*, 1966. Two-dimensional filtering and the second derivative method. *Geophysics*, 31: 606—617.
- Meyerhoff, H. J.*, 1966. A self-adjusting filter for shallow seismic exploration. *Geophysics*, 31: 340—345.
- Meyerhoff, H. J.*, 1968a. Realization of sharp cut-off frequency characteristics on digital computers (Part I). *Geophys. Prospect.*, 16: 208—219.
- Meyerhoff, H. J.*, 1968b. Realization of sharp cut-off frequency characteristics on digital computers (Part II). *Geophys. Prospect.*, 16: 220—246.
- Meyerhoff, H. J.*, 1968c. Realization of sharp cut-off frequency characteristics on digital computers (Part III). *Geophys. Prospect.*, 16: 491—510.
- Mikulski, Z. and Mikulska, M.*, 1973. Untersuchung der Periodizität von hydrometeorologischen Erscheinungen nach der Autokorrelationsmethode von Fuhrich. *Gerlands Beitr. Geophys.*, 82: 187—193.
- Miller, W. F.*, 1963. The Caltech digital seismograph. *J. Geophys. Res.*, 68: 841—847.
- Moltschan, G. M., Pissarenko, V. F. and Smirnova, N. A.*, 1964. Some statistical methods of detecting signals in noise. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 8: 319—323.
- Montalbetti, J. F. and Kanasevich, E. R.*, 1970. Enhancement of teleseismic body phases with a polarization filter. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 21: 119—129.
- Mooney, H. M.*, 1968. Pole-and-zero design of digital filters. *Geophysics*, 33: 354—360.
- Mufti, I. R.*, 1972. Design of small operators for the continuation of potential field data. *Geophysics*, 37: 488—506.
- Muir, F. and Hales, F. W.*, 1955. A rational approach to the design of electrical

- filters and of shothole and geophone patterns in seismic reflection prospecting. *Geophys. Prospect.*, 3: 350—358.
- Naidu, P. S.*, 1967. Two dimensional Strakhov's filter for extraction of potential field signal. *Geophys. Prospect.*, 15: 135—150.
- Naidu, P. S.*, 1968. An example of linear filtering in aeromagnetic interpretation. *Geophysics*, 33: 602—612.
- Neunhöfer, H.*, 1971. Deconvolution of the seismogram concerning the parameters of the seismograph. *Gerlands Beitr. Geophys.*, 80: 475—482.
- Ormsby, J. F. A.*, 1961. Design of numerical filters with applications to missile data processing. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 8: 440—466.
- Otnes, R. K. and Enochson, L.*, 1972. *Digital Times Series Analysis*. Wiley, 467 pp.
- Ott, N. and Meder, H. G.*, 1972. The Kalman filter as a prediction error filter. *Geophys. Prospect.*, 20: 549—560.
- Papoulis, A.*, 1962. *The Fourier Integral and its Applications*. McGraw-Hill, 318 pp.
- Peacock, K. L. and Treitel, S.*, 1969. Predictive deconvolution: Theory and practice. *Geophysics*, 34: 155—169.
- Phinney, R. A. and Smith, S. W.*, 1963. Processing of seismic data from an automatic digital recorder. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 53: 549—562.
- Rabiner, L. R., Cooley, J. W., Helms, H. D., Jackson, L. B., Kaiser, J. F., Rader, C. M., Schafer, R. W., Steiglitz, K. and Weinstein, C. J.*, 1972. Terminology in digital signal processing. *IEEE Trans.*, AU-20: 322—337.
- Rader, C. M. and Gold, B.*, 1967. Digital filter design techniques in the frequency domain. *Proc. IEEE*, 55: 149—171.
- Ragazzini, J. R. and Franklin, G. F.*, 1958. *Sampled-Data Control Systems*. McGraw-Hill, 331 pp.
- Rice, R. B.*, 1962. Inverse convolution filters. *Geophysics*, 27: 4—18.
- Ricker, N.*, 1940. The form and nature of seismic waves and the structure of seismograms. *Geophysics*, 5: 348—366.
- Robinson, E. A.*, 1957. Predictive decomposition of seismic traces. *Geophysics*, 22: 767—778.
- Robinson, E. A.*, 1967a. Predictive decomposition of time series with application to seismic exploration. *Geophysics*, 32: 418—484.
- Robinson, E. A.*, 1967b. *Statistical Communication and Detection with special reference to Digital Data Processing of Radar and Seismic Signals*. Griffin, 362 pp.
- Robinson, E. A. and Treitel, S.*, 1964. Principles of digital filtering. *Geophysics*, 29: 395—404.
- Robinson, E. A. and Treitel, S.*, 1965. Dispersive digital filters. *Rev. Geophys.*, 3: 433—461.
- Robinson, E. A. and Treitel, S.*, 1967. Principles of digital Wiener filtering. *Geophys. Prospect.*, 15: 311—333.
- Robinson, J. C.*, 1972. Computer-designed Wiener filters for seismic data. *Geophysics*, 37: 235—259.
- Roden, R. B.*, 1965. Horizontal and vertical arrays for teleseismic signal enhancement. *Geophysics*, 30: 597—608.
- Roden, R. B.*, 1968. Seismic experiments with vertical arrays. *Geophysics*, 33: 270—284.
- Ryall, A.*, 1964. Improvement of array seismic recordings by digital processing. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 54: 277—294.
- Sakrison, D. J., Ford, W. T. and Hearne, J. H.*, 1967. The z-transform of a realizable time function. *IEEE Trans.*, GE-5: 33—41.
- Savit, C. H., Brustad, J. T. and Sider, J.*, 1958. The moveout filter. *Geophysics*, 23: 1—25.
- Sax, R. L.*, 1966. Application of filter theory and information theory to the interpretation of gravity measurements. *Geophysics*, 31: 570—575.
- Schneider, W. A., Prince, E. R., Jr. and Giles, B. F.*, 1965. A new data-processing technique for multiple attenuation exploiting differential normal moveout. *Geophysics*, 30: 348—362.
- Schoenberger, M.*, 1970. Optimization and implementation of marine seismic arrays. *Geophysics*, 35: 1038—1053.

- Sengbush, R. L. and Foster, M. R.*, 1968. Optimum multichannel velocity filters. *Geophysics*, 33: 11—35.
- Sengbush, R. L., Lawrence, R. L. and McDonal, F. J.*, 1961. Interpretation of synthetic seismograms. *Geophysics*, 26: 138—157.
- Shanks, J. L.*, 1967. Recursive filters for digital processing. *Geophysics*, 32: 33—51.
- Shapiro, R.*, 1970. Smoothing, filtering and boundary effects. *Rev. Geophys.*, 8: 359—387.
- Shimshoni, M. and Smith, S. W.*, 1964. Seismic signal enhancement with three-component detectors. *Geophysics*, 29: 664—671.
- Silverman, D.*, 1967. The digital processing of seismic data. *Geophysics*, 32: 988—1002.
- Simpson, S. M., Jr.*, 1955. Similarity of output traces as a seismic operator criterion. *Geophysics*, 20: 254—269.
- Smith, M. K.*, 1956. Noise analysis and multiple seismometer theory. *Geophysics*, 21: 337—360.
- Smith, M. K.*, 1958. A review of methods of filtering seismic data. *Geophysics*, 23: 44—57.
- Smith, S. W.*, 1965. Seismic digital data acquisition system. *Rev. Geophys.*, 3: 151—156.
- Somers, H. and Manchee, E. B.*, 1966. Selectivity of the Yellowknife seismic array. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 10: 401—412.
- Swartz, C. A. and Sokoloff, V. M.*, 1954. Filtering associated with selective sampling of geophysical data. *Geophysics*, 19: 402—419.
- Tolstoy, I.*, 1973. *Wave Propagation*. McGraw-Hill, 466 pp.
- Toman, K.*, 1965. The spectral shifts of truncated sinusoids. *J. Geophys. Res.*, 70: 1749—1750.
- Tou, J. T.*, 1959. *Digital and Sampled-Data Control Systems*. McGraw-Hill, 631 pp.
- Treitel, S.*, 1970. Principles of digital multichannel filtering. *Geophysics*, 35: 785—811.
- Treitel, S. and Robinson, E. A.*, 1964. The stability of digital filters. *IEEE Trans.*, GE-2: 6—18.
- Treitel, S. and Robinson, E. A.*, 1966a. Seismic wave propagation in layered media in terms of communication theory. *Geophysics*, 31: 17—32.
- Treitel, S. and Robinson, E. A.*, 1966b. The design of high-resolution digital filters. *IEEE Trans.*, GE-4: 25—38.
- Treitel, S. and Robinson, E. A.*, 1969. Optimum digital filters for signal to noise ratio enhancement. *Geophys. Prospect.*, 17: 248—293.
- Treitel, S., Shanks, J. L. and Frasier, C. W.*, 1967. Some aspects of fan filtering. *Geophysics*, 32: 789—800.
- Turin, G. L.*, 1960. An introduction to matched filters. *IRE Trans.*, IT-6: 311—329.
- Ulrych, T. J.*, 1968. Effects of wavelength filtering on the shape of the residual anomaly. *Geophysics*, 33: 1015—1018.
- Ulrych, T. J.*, 1972. Maximum entropy power spectrum of truncated sinusoids. *J. Geophys. Res.*, 77: 1396—1400.
- Verma, R. K. and Roy, A.*, 1970. A graphical method for computing geophone group response. *Geophysics*, 35: 704—707.
- Vich, R.* 1968. Selective properties of digital filters obtained by convolution approximation. *Electronics Letters*, 4.
- Wadsworth, G. P., Robinson, E. A., Bryan, J. G. and Hurley, P. M.*, 1953. Detection of reflections on seismic records by linear operators. *Geophysics*, 18: 539—586.
- Wang, R. J.*, 1969. The determination of optimum gate lengths for time-varying Wiener filtering. *Geophysics*, 34: 683—695.
- Wang, R. J. and Treitel, S.*, 1973. The determination of digital Wiener filters by means of gradient methods. *Geophysics*, 36: 310—326.
- White, R. E. and Mereu, R. F.*, 1972. Deconvolution of refraction seismograms from large underwater explosions. *Geophysics*, 37: 431—444.
- Wickens, A. J. and Kollar, F.*, 1967. A wide range seismogram digitizer. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 57: 91—98.

Wiener, N., 1949. Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications. The Technology Press of M. I. T. and Wiley, 163 pp.

Wiggins, R. A., 1966. w-k filter design. Geophys. Prospect., 14: 427—440.

Wiggins, R. A., 1967. Use of expected error in the design of least-squares optimum filters. Geophys. Prospect., 15: 288—296.

Wood, L. C., 1968. A review of digital pass filtering. Rev. Geophys., 6: 73—97.

Wood, L. C. and Hockens, S. N., 1970. Least-squares smoothing operators. Geophysics, 35: 1005—1019.

Zelei, A., 1971. On the design of numerical filters. Ann. Geofis., 24: 457—474.

Zurflueh, E. G., 1967. Applications of two-dimensional linear wavelength filtering. Geophysics, 32: 1015—1035.

Zürn, W., 1974. Detectability of small harmonic signals in digitized records. J. Geophys. Res., 79: 4433—4438.

- Анализ фильтра 9  
 Анти-эляйсинговый фильтр 30  
 Аппроксимация аналоговой системы  
 — интеграла свертки 74  
 — параболическая 76, 77  
 — прямоугольная 76—78  
 — способом билинейного преобразования 78, 79, 109  
 — трапецидальная 76—78  
 — цифровой системы 40
- Баттерворта фильтр 105, 106, 111, 113, 116  
 — окружность 112  
 Берлаге импульс 89, 152  
 Блок-схема фильтров 59, 155  
 — каноническая 61, 62  
 — каскадная (последовательная) 60, 62, 83, 87, 146  
 — параллельная 60, 62  
 — прямая 59, 61
- Вектор волнового числа 178  
 Весовая функция фильтра 15  
 Взаимный спектр 123  
 Винера — Хопфа уравнение 131, 134, 135  
 Волновое число, 137  
 — векторное 137  
 — горизонтальное 158  
 Восстановление сигнала 14  
 Временная задержка 98  
 Временное окно 53, 115  
 — опережение 98
- Гиббса явление 53, 100  
 Гильберта преобразование 17  
 Грегори формула 75, 77  
 Группа биномиальная 168  
 — вертикальная 181  
 — горизонтальная 155  
 — линейная 158  
 — одномерная 158  
 — оптимальная чебышевская 167  
 — составная 160  
 — с чувствительностью убывающей от центра группы к ее периферии 163
- Группирование сейсмоприемников 157, 159, 160
- Дельта-функция Дирака 11  
 Детектор параметрический 124  
 Диаграмма логарифмическая 81  
 Диполь нормализованный 144  
 Дискретизация 25  
 Дискриминация (разделение) по поляризационным свойствам 9  
 — по скорости 9  
 — по частоте 9  
 Длина волны кажущаяся 158
- Единичная окружность 31  
 Единичное нарастание 38
- Идентификация системы 14  
 Импульс исходный 151  
 — единичный 11  
 Импульсная реакция 11  
 — обратного фильтра 144  
 — винеровского оптимального фильтра 131  
 — высокочастотного фильтра 113  
 — низкочастотного фильтра 96, 98  
 — Ормсби 103  
 — пространственно-временного фильтра 171  
 — фильтра 11\*  
 — максимально задержанная 149  
 — минимально задержанная 149  
 — пространственно-временная 171  
 — согласованного фильтра 125

— — усеченная 41, 99  
Импульсная передаточная (системная) функция 42

— — — — фильтра Баттерворта 108—110

— — — — оптимального фильтра 135

Инвариантность импульсной реакции 70, 76

Интеграл свертки 12, 75

— суперпозиции 12

Интегрирование дискретное 43

Интегрируемость импульсной реакции абсолютная 15, 72

Интервал квантования (шаг дискретности) 88, 91, 92

Кальмана-фильтр 134

Квантование 25, 88

— параметров фильтра 93

Колебание с линейно-изменяемой частотой 123

Компонента основная 28, 29, 98

— побочная 28, 29, 98

Коши теорема 36

Коэффициенты весовые 52, 99, 163, 167

Критерий (условие) минимума среднего квадратического отклонения 148

— устойчивости системы 18, 71

Лапласа преобразование 18, 33, 34

Линейная (одномерная) группа 158

Линейный оператор фильтра 10

— фильтр 9

Максимумы побочные 54

Метод (способ) нулей и полюсов 65, 117

— трансформации частот 80

Микросейсмь 120, 169

Модуляция амплитудно-импульсная 27

Найквиста критерий 45

Наложение функций 44

Направленность 138

Нормальное уравнение 149

Область устойчивости 46, 66

Окно спектральное 53

— Хемминга 54

— фон Ханна 54

Оператор фильтра 9

— — двухмерный 175

— — прогнозирующий 136

Ослабление 106

Ошибки квантования 88, 89, 93

— округления 89, 90, 91

Передача амплитудно-искажающая 24

— фазово-искажающая 24

— фазово-неискажающая 24, 25

Плоскость  $p$  36, 45, 79, 107

—  $z$  36, 46, 79

—  $z^{-1}$  46, 79

Побочная полоса 38, 78

— область пропускания веерного фильтра 170

Погрешность 76

— квантования входного сигнала 88

— округления результата 89—91

Подгруппа сейсмоприемников 160

Подсистема 60

Полоса пропускания с учетом эляйсинга-эффекта 170

— полосового фильтра 116

Полюсы комплексно-сопряженные 73

— кратные 73

— первого порядка 71

— устойчивые 47, 110

— Чебышева 112

Поляризация 138, 139

— продольная 138

— эллиптическая 138

Последовательность смешанно-задержанная 147

Преобразование билинейное 79, 80, 109

— двустороннее 18

— одностороннее 18

— обратное Фурье 16

- Фурье 16
- Преобразование  $z$  32—35, 46
  - двустороннее 35, 37
  - одностороннее 35
  - Лапласа 35
- Преобразователь аналого-цифровой 26
- Принцип суперпозиции 10
- Прямая ветвь фильтра 68
  - форма реализации фильтра 61
- Разложение функции (многочлена) на простые дроби 62, 71, 73
  - прогнозирующее (predictive decomposition) 136
- Разрешающая способность по полновым числам 160
- Расчет групп 154
- Реализация фильтров 59, 92
  - каноническая форма 92, 93
  - прямая форма 59, 93
- Регулировка направленности группы 162
- Риккера импульс 152
- Риммана поверхность 38, 78
- Свертка 12, 13
  - дискретная 12
- Свойство однородности 10
  - симметрии распределения полюсов 108
- Связь обратная 62, 68
- Сглаживание параболическое 51
- Сдвиг фазовый 156, 161
  - частотно-зависимый 23
- Сигнал 9
  - аналоговый 26
  - входной обращенный по оси времени 84
  - выходной желаемый 11, 130, 148
  - задержанный во времени 161
  - конечной длины 42
  - линейной инвариантной во времени системы 14
  - ограниченный 10, 14
  - случайный 19
  - с ограниченным частотным спектром 30
- средний квадратической величины 19, 20
- стационарный 19
- устройства дискретизации 27
- фактический 130
- фильтра выходной энергии 128
- с ограниченным частотным спектром 28
- периодический 119, 120
- случайный стационарный 19
- телесеismicкий 169
- установившийся 21
- Сигнал/шум отношение 127, 140, 162, 164, 166, 167, 169
- Синтез во временной области 12
  - фильтра 9, 49
- Система инвариантная во времени 10
  - каузальная 11
  - с несколькими входами 10
  - — — — и выходами 10
  - — — — — выходами 10
  - с обратной связью 10, 56
  - с постоянными (или фиксированными) параметрами 10
  - устойчивая 10
  - физическая 9
  - физически осуществимая 11, 132
  - цифровая 39
- Системная функция 42, 48
  - нерекурсивного фильтра 51
  - нульфазового фильтра 83
  - рекурсивного фильтра второго порядка 59
  - первого порядка 57
  - фильтра Баттерворта 110
  - цифрового фильтра 63
- Склон характеристики 101, 102, 104, 105
  - косинусный 105
  - линейный 102
  - первого порядка 103
  - фильтра Чебышева 106
- Скорость кажущаяся 154, 158
- Соотношение вход—выход для аналоговых систем 12
  - в частотной области 16
  - для цифровых систем 41

- идеального устройства дискретизации 27
- рекурсивного фильтра первого порядка 57
- рекурсивного фильтра второго порядка 59
- между статистическими характеристиками входного и выходного сигналов 18
- Спектр выходного сигнала устройства дискретизации 28
  - мощности 92, 127
  - взаимный 123
- Способ вторых производных 175
  - инвариантности импульсной реакции 70
  - максимального правдоподобия 180
  - нулей и полюсов 65, 117
  - продолжения поля - вниз 175
  - формирования сейсмического луча 154
- Страхова фильтр 101
- Субфильтр 94
- Суммирование весовое 14
  - конволюционное 41, 48, 49
  - с задержкой 154, 161
  - простое 154, 155
  - с предварительной фильтрацией 154
- Теорема дискретизации 30
  - смещения в частотной области 28, 115
- Терминальные соотношения 9
- Тест Раута 45
  - устойчивости 45
- Траектория колебания частиц 138
- Умножение многочленов (полиномов) 44
- Упреждение фильтра 52
- Уровень побочных максимумов 163
- Усечение 54
  - функции 54, 99
- Усиление фильтра 67, 69
- Условие каузальности 11
- Устойчивость 15
  - нерекурсивного фильтра 49
  - режекторного фильтра 67
  - рекурсивного фильтра первого порядка 57, 58
  - системы 10, 45
- Устройство дискретизации 26
- Утечка частоты 54
- Фазирование группы 162
- Фильтр 9
  - временной 10
  - высокочастотный 30, 52, 95, 113, 116
  - Баттерворта 113, 114
  - нерекурсивный 113
  - нуль-фазовый 113
  - выходной энергии 128
  - двумерный 137
  - деконволюционный 143
  - запаздывания 130
  - идеальный 95
  - каузальный 11
  - комплексно-сопряженный 118, 125, 126
  - конволюционный 48
  - корректирующий 144
  - корреляционный 118, 125
  - линейный 10
  - Мартин-Грэма 51, 101, 103—105
  - многоканальный 10
  - многоканальный винеровский 180
  - многомерный 137, 154
  - неискажающий 132
  - неискажающей передачи 23, 24
  - нерекурсивный 48, 51
  - низкочастотный 30, 52, 95, 116
  - винеровский 118, 129, 158
  - второй производной 176
  - фазово-неискажающий 97
  - Чебышева 111, 112
  - обратного времени 85
  - обратный 142
  - оптимальный 118
  - по минимуму среднего квадратического отклонения 131
  - Ормсби 51, 101, 103, 105
  - по вектору волнового числа 137

- по волновым числам и частоте 137
  - полосовой 95, 116, 124
  - Баттерворта 116
  - поляризационный 118, 138, 140
  - предсказания 130
  - пропускающий 96
  - режекторный 69
  - рекурсивный 48, 54—56
  - первого порядка 57, 89
  - второго порядка 59
  - L-го порядка 61
  - с бесконечной памятью 48
  - сглаживающий 130
  - сжимающий задерживающий 149
  - симметричный 52, 98
  - с конечной памятью 48, 50
  - скоростной 9
  - с нулевой задержкой 130
  - с обратной связью 48
  - согласованный 118, 125, 126
  - тангенциальный 110
  - тригонометрический 110
  - формирующий 150
  - частотный 9
  - эквивалентный низкочастотный 116
- Фильтра память** 52
- Фильтрация веерная (pie slice processing)** 170
- нерекурсивная 48, 56
  - по волновым числам двумерная 175
  - пространственно-временная 177
  - скоростная 154, 168
  - фазово-неискажающая 24, 82, 83, 85, 97, 101, 132, 173
  - частотно-модулированная с линейно-изменяемой частотой (chirp filtering) 123, 124
- Функция автокорреляционная** 91, 118—120, 125, 127, 148
- входного сигнала 18, 20, 21
  - весовая 14, 53, 100, 101, 104
  - двумерная 15
  - взаимно корреляционная 121, 122, 123
  - между входным и выходным сигналами 20
  - дискретизация 27
  - передаточная 17
  - двумерная 171
  - идеальная 101, 103
  - оптимальная двумерная 137
  - оптимальная трехмерная 138
  - отображения 37, 78, 79
  - полосового скоростного фильтра 173
  - пропускающего высокие скорости фильтра 173
  - прямоугольная 102
- Ханнинг** 54
- Характеристика** 16
- амплитудно-частотная 16, 22, 51, 64, 66
  - в  $k$ -плоскости 178
  - по частоте и волновому числу 178
  - двумерная 174
  - идеальная 95
  - направленности 159
  - группы 156—159
  - фазово-частотная (или фазовая) 22, 64
  - рекурсивного фильтра 82
  - частотная 15
- Хемминг** 54
- Частота Найквиста** 30
- наложения 30
  - угловая 29, 65
  - среда фильтра 52, 80, 95, 106, 109, 113, 114
  - фактическая 80
  - фиктивная (аналоговая) 80, 110
  - центральная 115, 116
- Чебышева полином** 111
- Шумы** 9
- аперiodические 119
  - генерируемые сигналом 169
  - когерентные 170
  - некогерентные 169

- нелинейно-поляризованные 139
- случайные 119
  
- Эквивалент единичного импульса дискретный 32
  - единичной функции цифровой 32
  - экспоненциальной функции цифровой 35
- Эляйсинг 30, 74, 78
  - по волновым числам 160
  - по скорости 162
  - по пространственным частотам 160
  - эффект 30, 74, 78
- Эффекты квантования 48, 88, 92

Предисловие . . . . .	5
Принятые обозначения . . . . .	7
<b>Глава 1. Основные соотношения теории цифровой фильтрации . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1. Основные определения . . . . .	9
1.2. Взаимосвязь между входным и выходным сигналами . . . . .	11
1.2.1. Соотношения во временной области . . . . .	11
1.2.2. Соотношения в частотной области . . . . .	15
1.3. Соотношения между статистическими характеристиками входных и выходных сигналов . . . . .	18
1.4. Искажение сигнала при прохождении через фильтр . . . . .	21
1.5. Аналого-цифровое преобразование . . . . .	25
1.6. z-преобразование . . . . .	31
1.7. Соотношения между входом и выходом в цифровых системах . . . . .	39
1.8. Устойчивость цифровых систем . . . . .	45
<b>Глава 2. Принципы построения цифровых фильтров . . . . .</b>	<b>48</b>
2.1. Нерекурсивная фильтрация . . . . .	48
2.2. Рекурсивная фильтрация . . . . .	54
2.2.1. Рекурсивная фильтрация первого порядка . . . . .	57
2.2.2. Рекурсивная фильтрация второго порядка . . . . .	59
2.2.3. Рекурсивная фильтрация L-го порядка . . . . .	61
2.3. Системные функции рекурсивных фильтров . . . . .	63
2.4. Метод нулей и полюсов . . . . .	65
2.5. Аппроксимация аналоговых систем . . . . .	70
2.5.1. Способ инвариантности импульсной реакции . . . . .	70
2.5.2. Аппроксимация интеграла свертки . . . . .	74
2.5.3. Аппроксимация способом билинейного преобразования . . . . .	78
2.6. Фазово-неискажающие фильтры . . . . .	82
2.7. Эффекты квантования в цифровых фильтрах . . . . .	88
2.7.1. Погрешности, вызванные квантованием входного сигнала . . . . .	88
2.7.2. Погрешности, вызванные округлением результатов при операциях умножения . . . . .	89
2.7.3. Погрешности, вызванные квантованием параметров фильтра . . . . .	93
<b>Глава 3. Низкочастотные, высокочастотные и полосовые фильтры . . . . .</b>	<b>95</b>
3.1. Низкочастотные фильтры . . . . .	96
3.1.1. Идеальные низкочастотные фильтры . . . . .	96
3.1.2. Усеченная импульсная реакция фильтра . . . . .	99
3.1.3. Фильтры Ормсби и Мартин-Грэма . . . . .	101
3.1.4. Фильтры Баттерворта . . . . .	105
3.1.5. Фильтры Чебышева . . . . .	111
3.2. Высокочастотные фильтры . . . . .	113
3.3. Полосовые фильтры . . . . .	115
<b>Глава 4. Корреляционные и оптимальные фильтры . . . . .</b>	<b>118</b>
4.1. Корреляционные фильтры . . . . .	118
4.1.1. Обнаружение периодических сигналов с использованием функций автокорреляции . . . . .	118
4.1.2. Обнаружение сигналов с помощью взаимно-корреляционных функций . . . . .	121
4.2. Согласованные фильтры . . . . .	125
4.3. Оптимальные винеровские фильтры . . . . .	129
4.3.1. Оптимальные физически неосуществимые системы . . . . .	129

4.3.2. Особенности проектирования оптимальных винеровских фильтров	133
4.3.3. Многомерные винеровские оптимальные фильтры	137
4.4. Поляризационные фильтры	138
<b>Глава 5. Обратные фильтры</b>	<b>142</b>
5.1. Идеальная деконволюция	142
5.2. Приближенная деконволюция с использованием усеченных обратных операторов	144
5.3. Приближенная деконволюция на основе метода наименьших квадратов	147
5.4. Повышение разрешающей способности сигналов трасс	150
<b>Глава 6. Многомерные фильтры</b>	<b>154</b>
6.1. Простое суммирование	155
6.2. Основные требования, предъявляемые к сейсмическим группам	159
6.3. Суммирование с задержками и весовое суммирование с задержками	161
6.4. Повышение отношения сигнал/шум при использовании простого и взвешенного суммирования с задержками	164
6.5. Скоростная фильтрация	168
6.5.1. Характеристики сигнала и шума	169
6.5.2. Скоростная фильтрация с помощью одномерных групп	170
6.5.3. Двухмерная фильтрация по волновым числам	175
6.5.4. Скоростная фильтрация при использовании двухмерных групп сейсмоприемников	177
Список литературы	182
Предметный указатель	191

ОТА КУЛХАНЕК

**ВВЕДЕНИЕ В ЦИФРОВУЮ ФИЛЬТРАЦИЮ  
В ГЕОФИЗИКЕ**

Редактор издательства Ф. И. Чумакова  
Обложка художника Е. П. Рожкова  
Художественный редактор В. В. Шутько  
Технический редактор В. В. Соколова  
Корректор С. В. Зиминая  
ИБ № 4028

Сдано в набор 10.02.81. Подписано в печать 07.05.81.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага типографская № 3.  
Гарнитура «Литературная». Печать высокая.  
Усл. печ. л. 12,50. Усл. кр.-отг. 12,87.  
Уч.-изд. л. 12,92. Тираж 2300 экз. Заказ 161/8105-3.  
Цена 85 коп.

Издательство «Недра», 103633, Москва, К-12,  
Третьяковский проезд, 1/19

Московская типография № 6 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли.  
109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.

В издательстве «Недра» готовятся к печати новые книги

**ДЕЛИНДЖЕР П.** Морская гравиметрия: Пер. с англ. 20 л., 1 р. 60 к.

Первая сводная монография, освещающая состояние морских гравиметрических исследований. Изложены основы теории гравитационного поля Земли, принципы работы гравиметрической аппаратуры, методика измерений. Основное внимание уделено интерпретации гравитационных аномалий, вызванных сложными структурами, и построению карт и профилей аномалий силы тяжести над континентальными окраинами и океаническими структурами.

Для инженеров-гравиметристов. Наиболее интересна специалистам, занимающимся проведением морских гравиметрических исследований и обработкой получаемых материалов.

**СИЛЬВИА М., РОБИНСОН Э.** Обратная фильтрация геофизических временных рядов при разведке на нефть и газ: Пер. с англ. 17 л., 1 р. 40 к.

Рассмотрены вопросы распространения сейсмических волн согласно классическому подходу и подходу, развиваемому автором. Освещены теория метода, методика и техника работ. Описаны различные варианты обратной сейсмической фильтрации (сжатие сейсмических импульсов, подавление многократных волн), повышающие разрешенность сейсмической записи. Обоснованы преимущества кепстральной (гоморфной) обратной фильтрации при подавлении полнократных волн. Рассмотрен метод пространства состояний, квалифицируемый как средство совершенствования обратной фильтрации.

Для геофизиков, занимающихся разработкой и реализацией цифровых методов обработки сейсморазведочных данных.

Интересующие Вас книги Вы можете приобрести в местных книжных магазинах, распространяющих научно-техническую литературу, или заказать через отдел «Книга — почтой» магазинов:

№ 17 — 199178, Ленинград, В. О., Средний проспект, 61;

№ 59 — 127412, Москва, Коровинское шоссе, 20.

85 коп.

3686