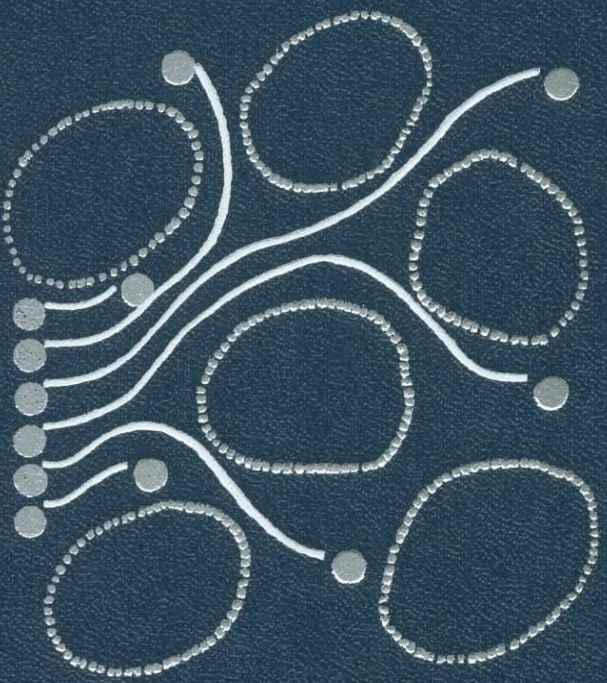
Ж. Фрид

ЗАГРЯЗНЕНИЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД



Моим родителям
за их безграничное терпение

GROUNDWATER POLLUTION

Theory, Methodology, Modelling and Practical Rules

JEAN J. FRIED

Professor of Fluid Mechanics
at the University of Strasbourg
Scientific Adviser at the
Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris



ELSEVIER SCIENTIFIC PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM — OXFORD — NEW YORK 1975

Ж. ФРИД

ЗАГРЯЗНЕНИЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Теория, методика, моделирование и практические приемы

Перевод с английского
В. З. Махлина, Н. С. Петрова,
В. К. Учаева, Н. А. Ярцева

3635

Под редакцией
д-ра геол.-мин. наук В. А. Мироненко
и канд. геол.-мин. наук А. А. Рошаля



МОСКВА «НЕДРА» 1981



УДК 556.3.383—82—03.20

Фрид Ж. Загрязнение подземных вод: Пер. с англ. — М.: Недра, 1981. — 304 с. — Пер. изд.: Нидерланды, 1975.

Широко и многосторонне освещены проблемы охраны подземных вод от загрязнения. Приведены сведения по теории массопереноса при фильтрации в пористой среде с примерами решения проблемы на конкретных объектах. Рассмотрены причины и физические аспекты процесса загрязнения подземных вод. Изложены данные о существующих математических моделях процесса загрязнения подземных вод и пути их реализации.

Загрязнения водоносных горизонтов рассмотрены в результате деятельности горнодобывающих предприятий, при внедрении соленых морских вод в прибрежные горизонты, в связи с радиоактивными отходами химического производства. Описана общая методика управления водными ресурсами. Приведен анализ дифференциальных уравнений, описывающих процесс загрязнения подземных вод.

Для научных и инженерно-технических работников и широкого круга читателей, интересующихся проблемой охраны геологической среды и, в частности, водных ресурсов.

Табл. 8, ил. 173, список лит. — 284 назв.

Ф $\frac{20806\text{-}154}{043(01)\text{-}81}$ 51-81 1904060000

Copyright © 1975 Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam

© перевод на русский язык, «Недра», 1981

БЛАГОДАРНОСТИ

Идея написать эту книгу появилась во время моего пребывания в 1973 г. в качестве приглашенного профессора в университете штата Западная Австралия в г. Перте, где я прочитал два курса лекций по загрязнению подземных вод и применению численных методов в гидрогеологии. Пользуюсь этой возможностью, чтобы поблагодарить всех сотрудников университета за великолепные условия, которые были мне предоставлены для работы.

Большая часть исследований была выполнена во время моего пребывания в Высшей Национальной Горной школе в Париже, и я обязан И. Эмселлему, бывшему главе Центра геологической информации, а ныне Генеральному президенту-директору Арлаба за многочисленные подсказанные мне идеи и плодотворные дискуссии.

Недлэндс (Западная Австралия)
Страсбург (Франция), 1974

ПЛАН ПОСТРОЕНИЯ КНИГИ

Мы надеемся, что эта книга будет интересна для инженеров, студентов и специалистов по прикладной математике, и нам хотелось бы дать некоторые общие указания для более эффективного ее чтения и использования.

В главе 1 рассматриваются главные загрязнители и характер их смешения, что составляет основу изучения процессов загрязнения подземных вод с помощью теорий переноса смешивающихся жидкостей.

В главе 2 излагаются основы теории дисперсии в интерпретации Фрида и Комбарну [110], и подчеркивается отклонение математических представлений от лабораторных экспериментов и их ограничение.

В главе 3 даются методические правила количественного изучения загрязнения подземных вод. В ней показано, как решать такую задачу и определена последовательность операций. Чтобы проиллюстрировать предложенную методику, в книге приводятся две типовые схемы, которые могут быть использованы как модели задач для изучения загрязнения подземных вод (в особенности в случае загрязнения от полей фильтрации). В главе 6 описываются некоторые типичные случаи, которые объясняют, как применять

методику, в главе 4 описываются основные полевые эксперименты и формулы, необходимые для получения различных параметров, а в главе 5 рассматриваются некоторые полезные численные модели с их конечноразностной дискретизацией.

В главе 7 мы попытались расширить объект исследования, показав, что загрязнение подземных вод составляет часть более крупных экономических проблем, связанных с управлением водными ресурсами. Мы показываем, что методика, характерная для загрязнения подземных вод, описанная в главе 3, является результатом применения общих методов, подкрепленных математическим аппаратом и улучшенными математическими методами обработки данных, которые мы кратко описали. Затем мы даем основные концепции экономического и политического подхода к проблемам водных ресурсов и загрязнения подземных вод.

Хотя глава 8 является следствием рассмотрения результатов экспериментальных данных, она оказалась в высшей степени математической и теоретической и была написана, чтобы показать специалистам по прикладной математике, что, казалось бы, даже далекие от математики проблемы загрязнения предоставляют им весьма широкие возможности для развития их собственных математических исследований и приводят их к мысли заняться этой столь прикладной отраслью физики и тем самым помочь ей своими математическими знаниями.

В главе 9 развиваются методы и процессы численного анализа, необходимые для численной постановки задачи загрязнения и ее решения на ЭВМ. Здесь отмечается тесная взаимосвязь между физической сущностью явления и моделированием.

В четырех приложениях, помещенных в конце книги, содержится специальная информация по некоторым вопросам. В приложении I приводятся данные по гидрогеологии, достаточные для правильного понимания движения подземных вод и их загрязнения. В приложении II излагаются основы геофизических методов, которые широко используются в полевой практике для обнаружения загрязнения без нарушения среды при ограниченном числе буровых скважин.

Приложение III является краткой сводкой основных алгебраических понятий, необходимых для понимания методов, изложенных в главе 9. Специалист, не являющийся математиком, такой как геолог, должен уметь построить математическую модель, пользуясь приложением III и главами 5 и 9.

Приложение IV представляет собой описание международных норм, касающихся питьевой воды и порогов концентрации, используемых при изучении загрязнений.

Для инженера наиболее полезны главы 3, 4, 5, 6 и 9, в которых даны практические знания и решения задач, связанных с загрязнением. Если такой практик отвечает целиком за проект, то ему может оказаться полезной глава 7.

Специалист по прикладной математике или ученый-исследователь заинтересуются главами 2 и 8, которые являются теорети-

ческими и тесно связанными с лабораторными опытами. Конечно, им следует прочитать и другие главы, объясняющие физическую картину явлений.

Эта книга может быть использована как учебник, обеспечивающий понимание и количественную оценку проблем загрязнения подземных вод. Мы чувствуем, что глава 8 может быть пропущена, за исключением раздела 8.4.1, который является введением в теорию моделирования. На студенческом уровне глава 2 по дисперсии представляет собой основу для лабораторных и математических работ; специалисту следует изучить главы по методике (3 и 7) и по полевым экспериментам.

ВВЕДЕНИЕ

Загрязнение становится все более и более растущим чудовищем, которое угрожает нашей цивилизации (по меньшей мере оставшейся ее части), — Молохом, который в конце концов проглотит нас. Именно так утверждают средства массовой информации и может быть это так; но возможно, что такой прогноз ошибочен или, по крайней мере, слишком пессимистичен. Мы чувствуем, что реальная опасность — не загрязнение, а игнорирование проблем загрязнения. Эта книга, построенная на примерах загрязнения подземных вод, представляет собой попытку объяснить и количественно оценить проблему и показать, что опасностью загрязнения нельзя пренебрегать, но, разумеется, ее не следует и преувеличивать. В книге подчеркивается, что задачи загрязнения могут быть описаны хорошими физико-математическими теориями и что эти задачи имеют технические и математические решения. Акцентируется тот факт, что обычные приемы, математические и экспериментальные, разработанные в других областях, могут с успехом применяться в большинстве случаев загрязнения, после того как установлены правильные условия их применения. Кроме того, в ней показано, что борьба с загрязнением хорошо укладывается в рамки обычных финансовых и технических возможностей любой страны. Это скорее вопрос желания, организации и технического мастерства, нежели вопрос денег.

В книге подчеркивается важность математического моделирования как необходимой практической основы предлагаемых методик, а также содержится предостережение читателю, что любая математическая модель, по определению, представляет собой приближение к действительности. Так же как эффективное использование инструмента зависит от рабочего, эффективное применение модели зависит от исследователя и, вероятно, более от его физического мышления, чем от математических способностей. Отличный математик без физического склада ума не может быть хорошим специалистом по моделированию. Им может оказаться хороший физик или инженер с основами математических знаний.

Короче говоря, мы надеемся доказать, что решение задач загрязнения подземных вод может быть достигнуто, и мы приводим некоторые приемы получения этих решений. Эти приемы базируются на лабораторных и полевых экспериментальных методах, математическом моделировании и характеризуются постоянным сопоставлением математического аппарата и физической сущности явлений.

ГЛАВА 1

ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Теоретически для существования человеку достаточно всего 5 л воды в день и иногда меньше. Помимо того, для бытовой и личной гигиены человеку нужно от 40 до 50 л воды в день; больше воды требуется для сельского хозяйства, сельский житель нуждается по крайней мере в 100 л воды в день. В промышленных районах обычно требуется 400—500 л воды на жителя. Для удовлетворения столь быстро растущего спроса на воду следует постоянно осваивать существующие водные ресурсы и искать новые источники. Необходимо мобилизовать все имеющиеся источники и в особенности подземные воды.

Вследствие очищающих свойств грунтов подземные воды обычно являются хорошим источником питьевой воды; они также используются для ирригации и орошения, а там, где поверхностных вод мало, — для промышленных нужд. Во многих аридных и полуаридных зонах именно подземные воды являются главным источником водоснабжения. Водоносный горизонт образует естественное хранилище воды обычно высокого качества. Хотя подземные воды лучше защищены, чем поверхностные, но и они подвержены загрязнению, т. е. явлению, которое может быть определено следующим образом.

Загрязнение — это изменение физических, химических и биологических свойств воды, ограничивающих или исключающих их использование в различных направлениях, где вода обычно играет существенную роль.

1.2. ИСТОЧНИКИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Загрязнения подземных вод по своему происхождению подразделяются на четыре основные группы: промышленная, бытовая, сельскохозяйственная и природная, каждая из которых в свою очередь подразделяется на два типа — постоянный и случайный.

1. Промышленное загрязнение привносится в водоносный горизонт следующим образом:

— с использованными водами, содержащими химические соединения и следы элементов (таких, как металлы, например), или имеющими довольно высокую температуру. Радиоактивное за-

грязнение от атомных электростанций может поступать в водоносный горизонт таким же путем;

— с дождевой водой, инфильтрующейся через отвалы промышленных отходов;

— при авариях трубопроводов.

2. Бытовое загрязнение поступает в водоносный горизонт:

— с дождевой водой, инфильтрующейся на полях фильтрации;

— при авариях, например септических резервуаров.

3. Сельскохозяйственное загрязнение происходит в связи с выносом ирригационными или дождевыми водами удобрений, минералов, солей, гербицидов и пестицидов.

4. Природное загрязнение происходит, главным образом, вследствие внедрения морской воды в прибрежный водоносный горизонт.

З а м е ч а н и е. Бактериологическое загрязнение возникает главным образом в бытовых отходах, таких, как фекальные стоки, и специально в данной работе не рассматривается. Основные возможные загрязнители и индикаторы загрязнения приведены ниже.

Общая минерализация

ХПК (химическое поглощение кислорода)

БПК (биологическое поглощение кислорода)

Углерод (органических соединений)

Водород (органических соединений)

Азот

Детерленты

Фенолы

Кислород

Сульфаты (SO_4^{2-})

Сероводород

Нитраты (NO_3^-)

Нитриты (NO_2^-)

Аммоний (NH_4^+)

Свободный углекислый газ

Бикарбонаты (HCO_3)

Железо (Fe^{2+})

Общее железо (Fe^{2+} и Fe^{3+})

Марганец

Натрий

Калий

Кальций

Магний

Общая жесткость

Хлориды

Фториды

Фосфаты (HPO_4^{2-})

Цинк

Свинец

Медь

Мышьяк

Кремний

Температура

pH

Проводимость

Редокс потенциал

Присутствие этих элементов и соединений в воде не обязательно означает, что она загрязнена. Действительно, критерии загрязнения зависят от характера использования воды: например, питьевая вода может также использоваться и для личной гигиены, отдыха (плавательные бассейны) и ирригации. Хорошо известно, что в последних случаях опасность меньше, чем при использовании воды для питья, и не существует никаких норм и международных правил для контроля качества. Международные нормы рекомендованы Всемирной Организацией Здравоохранения (1972 г.) только для питьевой воды. Эти нормы представлены в приложении IV.

1.3. ФИЗИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Внимательное рассмотрение перечисленных выше загрязнителей, а также уровней допустимых загрязнений и предельных содержаний (см. прилож. IV) показывает, что наиболее опасными и частыми формами загрязнения подземных вод являются загрязнители, смешивающиеся с водой водоносного горизонта; если они не смешиваются, то их критические массы достаточно малы, чтобы их можно было рассматривать как индикаторы воды, и движение «меченой» воды в воде является лучшим примером переноса смеси. Конечно, нефтяное загрязнение несмесимо с водой, но было показано [69], что нефть, достигающая нефтеносного горизонта, не движется больше вниз, и что загрязнение скважин углеводородами может происходить благодаря растворимым компонентам или легким элементам, которые ведут себя как трассеры. Их движение может быть описано теорией массопереноса смешивающихся жидкостей.

Эти рассуждения, которые подтверждаются большинством полевых экспериментов, приводят нас к тому, чтобы в основу этой книги положить теорию движения двух несмешивающихся жидкостей, характеризующихся явлениями дисперсии. Все же мы принимаем в расчет тот факт, что поведение смешивающихся жидкостей иногда хорошо описывается при условии пренебрежения эффектами смешения: это случаи некоторых крупномасштабных исследований, а также, например, движение загрязнения по наиболее предпочтительным путям, особенно когда количества загрязнения очень малы, а их токсичность довольно высока.

Короче говоря, загрязнение подземных вод управляется дисперсией (случай дисперсии), за исключением тех случаев, когда его движение, обусловленное скоростью воды, намного значительнее, чем его смешение с водой водоносного горизонта (конвективный случай). Описываются оба случая и их связи.

ГЛАВА 2
ТЕОРИЯ ДИСПЕРСИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Теория дисперсии в пористой среде представляет собой качественное описание и количественную оценку поведения смешивающихся жидкостей, замещающих друг друга в пористой среде.

При совместном движении двух жидкостей в начальный момент времени образуется резкая граница раздела, которая преобразуется в переходную зону, по мере того как различия между физическими свойствами жидкостей (например, концентрации) выравниваются со временем. Этот общий эффект является результатом одновременного влияния различных физико-химических явлений таких, как молекулярная диффузия, а также следствием изменчивости проницаемости пористой среды.

Исторически теория дисперсии развивалась в три этапа.

1. Лабораторные эксперименты, изучающие распространение смешивающихся жидкостей в пористой среде.

2. Изучение математических процессов, вывод уравнений и формул, описывающих лабораторные эксперименты и обеспечивающих объяснение их результатов, а также общих уравнений механизма дисперсии.

3. Применение формул и уравнений дисперсии к натурным исследованиям и реальным загрязнителям.

Лабораторные эксперименты, математическая интерпретация и теория неотделимы и в значительной степени зависят друг от друга. Применение теории дисперсии в натурных исследованиях началось сравнительно недавно, но она быстро получила широкое распространение из-за настоятельной необходимости прогноза и контроля загрязнений подземных вод. Использование теории дисперсии в натурных исследованиях показывает, что прогнозные оценки не всегда совпадают с действительностью. Таким образом, возникает новый этап исследования — возврат к лабораторным экспериментам и систематическим полевым опытам с целью усовершенствования теории [110].

2.1. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ДИСПЕРСИИ

2.1.1. Простой пример

Пусть цилиндрическая трубка заполнена пористой средой и насыщена чистой водой. В начальный момент времени $t = 0$ в трубку вместо чистой воды начинает поступать раствор вещества с концентрацией C_0. Профиль концентрации в начальный момент времени представлен ступенчатой функцией (рис. 2.1.1). Поток

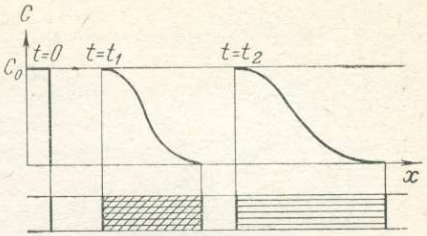


Рис. 2.1.1. Развитие переходной зоны во времени

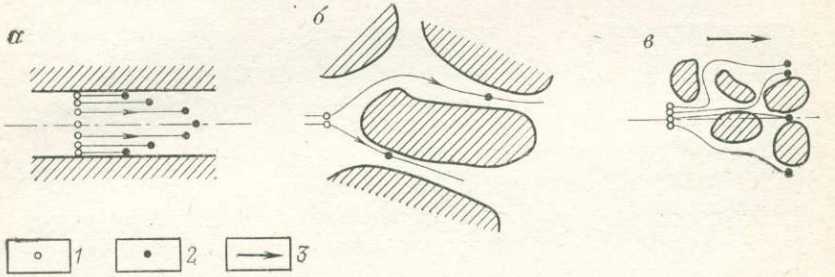


Рис. 2.1.2. Компоненты дисперсии.

Частицы жидкости: *1* — в момент времени t, *2* — в момент времени $t + dt$; *3* — направление потока

жидкости является одномерным, скорость подачи раствора постоянная, предполагается также, что физико-химические процессы, подобные, к примеру, адсорбции, между жидкой и твердой фазой отсутствуют. Концентрация вводимого химического компонента изменяется во времени; профиль концентрации во времени имеет типичный *S*-образный вид (см. рис. 2.1.1).

Переходная зона представляет собой участок, на котором концентрация вводимой жидкости изменяется от 0 до C_0. Ширина переходной зоны увеличивается со временем. Это является результатом типичного проявления дисперсии, количественное описание которой ведет к различным уравнениям дисперсии.

2.1.2. Понятие дисперсии

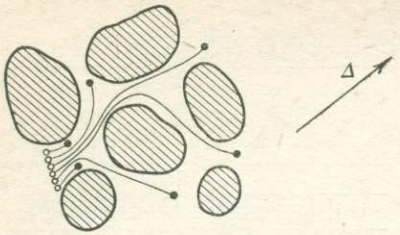
Дисперсия потока жидкости в пористой среде — это образование и развитие во времени переходной зоны между областями распространения двух фаз различного химического состава.

Образование и развитие переходной зоны между двумя движущимися смешивающимися жидкостями может быть объяснено тенденцией к выравниванию концентрации в растворе, хотя мы еще увидим, что механизмы дисперсии являются комплексными и не могут рассматриваться с одной точки зрения.

2.1.3. Механизмы дисперсии

Дисперсия представляет собой результат одновременного действия как чисто механических, так и физико-химических процессов.

Рис. 2.1.3. Главный аспект дисперсии



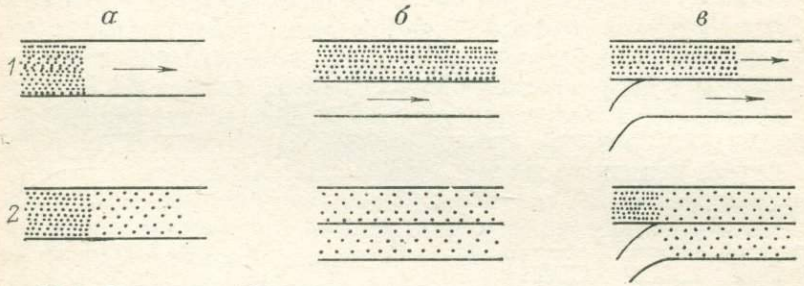


Рис. 2.1.4. Влияние диффузии на дисперсию.
1 — момент времени t; *2* — момент времени $t + \Delta t$

1. Механическое воздействие: при движении жидкости в пористой среде имеет место неоднородность поля скоростей. Это приводит к различным граничным эффектам на поверхности твердой фазы:

1) известно, что жидкость обладает вязкостью, а скорость жидкости на поверхности твердой фазы равна нулю. Это создает градиент скорости в жидкой фазе, подобно тому, что мы наблюдаем в капиллярных трубках (рис. 2.1.2, *а*);

2) изменение размеров пор также приводит к неоднородности поля максимальных (вдоль продольных осей пор) скоростей (рис. 2.1.2, *б*);

3) направления элементарных линий тока в отдельных порах отклоняются от среднего направления потока (рис. 2.1.2, *в*).

Все эти механические эффекты проявляются одновременно и приводят к «механической дисперсии» (рис. 2.1.3).

Изучение этих элементарных явлений наводит на мысль о геометрическом аспекте дисперсии: а именно — о существовании двух основных эффектов, первый из которых проявляется в направлении Δ средней скорости и вызван неоднородностью поля скоростей вдоль Δ, а второй проявляется в плоскости перпендикулярной Δ, причина его — неоднородность поля скоростей в данной плоскости. Эти эффекты соответственно названы «продольной дисперсией» и «поперечной дисперсией». Мы увидим далее, что эти эффекты являются фундаментальными как в теории дисперсии, так и в ее приложении к проблемам загрязнения.

2. Физико-химическое воздействие: физико-химическая дисперсия сводится к молекулярной диффузии, которая возникает

при наличии химического потенциала; последний коррелирует с концентрацией вещества. Молекулярная диффузия имеет место и в покоящейся жидкости.

Как в случае механической дисперсии, влияние молекулярной диффузии может быть подразделено по типам. Рассматривая для упрощения поток как совокупность трубок тока, будем различать два типа диффузии:

1) внутри трубки — концентрация вдоль оси трубки имеет тенденцию к выравниванию. Это — продольный эффект (рис. 2.1.4, *а*);

2) между двумя примыкающими друг к другу трубками — перенос массы вещества, также приводящий к выравниванию концентраций. Это поперечный эффект (рис. 2.1.4, *б* и *в*).

В действительности молекулярная диффузия всегда имеет место в процессе дисперсии и является наиболее важным фактором, регулирующим механическую дисперсию. Она в значительной степени определяет поперечную дисперсию и делает возможной аналогию между математическими представлениями дисперсии и теплопереноса.

2.1.4. Характерные параметры дисперсии

Выделяют два вида характерных параметров дисперсии: параметры, числовые значения которых характеризуют дисперсию количественно, и параметры, оказывающие влияние на процесс дисперсии.

Параметры, характеризующие дисперсию количественно. Количественный подход к дисперсии требует определения уровня и масштаба, на которых проводятся измерения. Понятие масштаба имеет большое значение в физике и особенно в теории течения жидкости в пористой среде; оно будет являться доминирующим и в нашем курсе в качестве фундаментального понятия методики, управляющей изучением загрязнения подземных вод.

В теории дисперсии обычно используются три основных уровня: микроскопический, внутрипоровый и макроскопический.

Локальный (микроскопический) уровень. На этом уровне параметры описывают физическую величину в точке, т. е. в «бесконечно малом» элементе объема, сопоставимом с молекулярно-физическим уровнем. Это — обычный уровень, принятый в механике жидкости, где, к примеру, движение подчиняется уравнениям Новье—Стокса.

Внутрипоровый уровень. На этом уровне параметры определяются путем осреднения соответствующих локальных параметров в конечном объеме жидкости. В пористой среде на этом определении основывается понятие «поровые величины» (такие, как действительная скорость фильтрации), и осреднение берется по серии пор. Осреднение определяется в каждом конкретном случае, особенно при неаддитивности величин.

Макроскопический уровень. Этот уровень изучения используется в теории движения жидкости через пористую среду с целью определения непрерывного эквивалента для всей совокупности жидкости и твердой фазы. Параметры определяются путем осреднения соответствующих локальных параметров в конечном объеме пористой среды.

Дисперсия определяется тремя физическими величинами (т. е. величинами, которые имеют прямой физический смысл и числовые значения которых могут быть определены непосредственно, по крайней мере теоретически) и рядом математических величин (т. е. величин, являющихся результатом математической интерпретации теории дисперсии). Физическими величинами являются плотности, концентрации и скорости. Математические величины называются «коэффициентами дисперсии» [1].

Плотности. Символ ρ используется только для обозначения обычной плотности при изучении дисперсии на внутрипоровом и макроскопическом уровнях. На этих уровнях изучения ρ_i является удельной плотностью компонента i, а ρ — удельной плотностью раствора. Мы можем иногда использовать ρ на микроскопическом уровне исследований, но тогда этот символ всегда соединяется с символом скорости или концентрации, который и определяет масштаб (например, ρu является характеристикой движения на микроскопическом уровне изучения). Имеем:

$$\rho = \sum_i c_i,$$

где c_i — концентрация, понятие которой определяется ниже.

Концентрации. Могут быть использованы различные определения микроскопической концентрации вещества A в растворе M.

Массовая концентрация представляет собой массу m_a вещества A в малом объеме v раствора, деленную на объем v:

$$c = m_a/v.$$

Такое определение концентрации полезно в том случае, когда смешение происходит без изменения объема, т. е. общий объем v раствора двух химических веществ с начальными объемами v_1 и v_2 определяется как:

$$v = v_1 + v_2.$$

Массовая доля c^* представляет собой массу m_a вещества A, деленную на массу m_m вещества M, содержащихся в некотором объеме:

$$c^* = m_a/m_m,$$

[1] Обозначения: строчные буквы используются для описания микроскопического уровня, а прописные — для описания макроскопического и внутрипорового уровней.

c^* — параметр, который не зависит от физико-химических способов смешения веществ. c и c^* связаны взаимоотношением:

$$c = \rho c^*,$$

где ρ — плотность раствора.

Молекулярная концентрация c_M представляет собой число n_a молекул вещества A, деленное на объем раствора v, который содержит эти молекулы, или:

$$c_M = n_a/v.$$

Молекулярная доля c_M^* представляет собой число n_a молекул вещества A в объеме раствора, деленное на общее число n_M смеси молекул раствора в некотором объеме:

$$c_M^* = n_a/n_m.$$

На внутрипоровом уровне могут быть использованы те же определения, но отнесенные к бóльшему объему. В этом случае массовая концентрация обозначается C, массовая доля C^*, молекулярная концентрация C_M^* и молекулярная доля C_M.

Локальные (микроскопические) скорости Различные i-е компоненты раствора движутся с неодинаковыми скоростями u_i. Обычно используются два определения средней локальной скорости. Средняя массовая скорость u:

$$u = \left(\sum_i c_i u_i\right) \Big/ \left(\sum_i c_i\right) = \left(\sum_i c_i u_i\right) \Big/ \rho,$$

где c_i — массовая концентрация i-го компонента.

Средняя молекулярная скорость u_M:

$$u_M = \left(\sum_i C_{Mi} u_i\right) \Big/ \left(\sum_i C_{Mi}\right).$$

где C_{Mi} — молекулярная концентрация i-го компонента.

Эти скорости соотносятся со стационарными координатными осями. Однако диффузия и дисперсия являются в основном относительными явлениями и поэтому может представлять интерес введение относительной скорости, определяющей движение одного из компонентов по отношению к движению раствора: величина $u_i - u$ представляет собой скорость диффузии или дисперсии i-го компонента по отношению к скорости u, а $u_i - u_M$ — скорость диффузии или дисперсии i-го компонента по отношению к u_M. Скорости u_i, u и u_M в механике течения жидкости являются обычными локальными, или микроскопическими скоростями.

Определение средней скорости на внутрипоровом и макроскопическом уровнях. В любом объеме жидкости B (например, в объеме трубки тока или в объеме нескольких пор) средние скорости определяются следующим образом.

3635

Средняя массовая скорость раствора:

$$U = \left(\int_B \rho u dx\right) \Big/ \left(\int_B \rho dx\right).$$

Средняя массовая скорость U_i одного из компонентов:

$$U_i = \left(\int_B c_i u_i dx\right) \Big/ \left(\int_B c_i dx\right).$$

U можно также определить по формуле:

$$U = \left(\sum_i C U_i\right) \Big/ \rho.$$

На макроскопическом уровне скорость является обычной скоростью фильтрации V. Когда величина U определяется для большого числа пор, она связана с V соотношением:

$$U = V/\Phi,$$

где Φ — пористость среды.

Коэффициенты дисперсии и диффузии. Математическая модель явлений дисперсии и диффузии сводится к дифференциальному уравнению в частных производных, коэффициенты которого (называемые коэффициентами диффузии или дисперсии) обычно являются измеряемыми параметрами, используемыми в расчетных оценках; например, они входят в формулы, описывающие ширину переходной зоны.

Эти коэффициенты имеют физическую размерность L^2T^{-1}. Можно показать, что они являются тензорными величинами. В дальнейшем будем использовать символ D для обозначения тензора диффузии (D_i^j — для компоненты тензора) и K — для обозначения тензора дисперсии (K_i^j — для компоненты тензора).

Параметры, непосредственно влияющие на дисперсию. Эти параметры могут быть разделены на группы: 1) параметры, характеризующие пористую среду; 2) характеристики жидкости; 3) характеристики смешения вещества.

Пористая среда. Она влияет на дисперсию своей геометрической структурой. В общем случае можно определить эту структуру, пользуясь теоретическими положениями дифференциальной геометрии и вводя координаты и кривизну для каждой точки поверхности поры. Такая полная характеристика геометрической структуры пористой среды не может быть получена экспериментально, и это требует использования осредненных параметров. Обычно используется два ряда геометрических характеристик пористой среды [239].

В первый ряд входят коэффициент пористости или пористость Φ и проницаемость k, отвечающая закону Дарси. Среда считается сплошной.

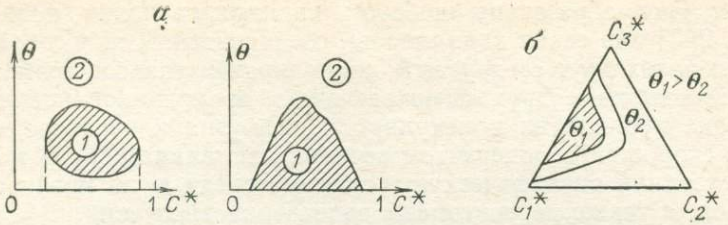


Рис. 2.1.5. Кривые смешения для двух- (а) и трехкомпонентных (б) растворов. *1* — смешение имеет место, *2* — смешение отсутствует; θ — температура

Во второй ряд входят параметры, посредством которых стремятся отразить следующие поровые характеристики: удельную поверхность, представляющую собой отношение поверхности пор в образце к объему образца; распределение зерен по размеру — для неконсолидированной среды; распределение пор по размерам, которое может быть определено различными способами; степень консолидации.

Если на поверхности пор имеют место физико-химические процессы, такие как адсорбция, то необходимо учитывать химический состав породы.

Жидкая фаза. В целом жидкая фаза характеризуется скоростью и плотностью, причем оба эти параметра определяются как функции ее химического состояния. Может случиться так, что жидкости смешиваются неполностью, в этом случае необходимо использовать кривые смешения жидкостей, чтобы выяснить, будет ли дисперсия иметь место [253]. На рис. 2.1.5 представлены кривые смешения для двух- и трехкомпонентных растворов (соответственно рис. 2.1.5, *а* и *б*).

Поскольку, как отмечалось выше, молекулярная диффузия представляет собой важную составную часть дисперсии, то коэффициент диффузии D для бинарного раствора является одним из параметров формул дисперсии.

Характеристики смешения вещества. На дисперсию влияют два показателя смешения: распределение скоростей и расстояние, пройденное переходной зоной.

2.2. КОНЦЕПТУАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИСПЕРСИИ

Для математического описания механизма дисперсии двух смешивающихся жидкостей в пористой среде разработано несколько моделей, которые можно подразделить на три категории: геометрические, статистические геометрические и вероятностные. Эти модели подробно рассмотрены в работах Фрида и Комбарну [110], Бэра [17].

Геометрические модели были первыми довольно простыми попытками объяснения дисперсии и не являются представитель-

ными. Они образованы набором капилляров (один капилляр [259, 260] или серия капилляров), соединенных между собой или независимых друг от друга. В капиллярах изучалось асимптотическое поведение двух смешивающихся движущихся жидкостей на фоне проявления молекулярной диффузии и неоднородности поля скоростей в поперечном сечении капилляра. Такие модели представляли специфическую пористую среду и не могли обобщаться, а также не учитывали поперечной дисперсии.

Следующий шаг в изучении дисперсии — использование вероятностных капиллярных моделей [237, 238, 60], которые представляли системы пор правильной формы, распределенных и ориентированных случайно и соединенных между собой. Их размеры соответствовали реальным, характерным для природных поровых сред. В таких моделях рассчитывалась функция распределения смешения частиц в порах по истечении определенного периода времени, которая и характеризовала величину дисперсии.

Поры правильной формы не соответствуют реальной пористой среде, однако на таких моделях появилась возможность учесть поперечную дисперсию и оценить ее роль по отношению к продольной дисперсии.

Статистические геометрические модели значительно усовершенствованы Бэром и Бахметом [18]; они достаточно хорошо описываются уравнением дисперсии, используемым в настоящее время во всех практических расчетах по изучению загрязнения. По этой причине рассмотрим более детально данный подход [17].

Авторы используют положение о трех уровнях регулярности дисперсии (см. раздел 2.1.4). Их модель представляет собой набор случайно взаимосвязанных между собой каналов различных длин, поперечных сечений и ориентаций. Каждый канал, ограниченный твердой поверхностью, представляет собой трубку тока, ось которой является аналитической кривой. Общий объем соединений между каналами намного меньше, чем объем самих каналов. При этом в точках соединений каналов функциональные зависимости между параметрами потока, такими как скорости и давления, и параметрами канала нарушаются. Жидкость несжимаемая ньютоновская, с изменяющимися плотностью и вязкостью. Режим потока ламинарный; конвективное ускорение отсутствует, а потери энергии в точках соединений каналов малы по сравнению с потерями в самих каналах.

Расчеты проводятся в три этапа, согласно трем уровням регулярности: 1) вывод уравнений сохранения массы и движения для частиц жидкости в канале; 2) осреднение уравнений по сечению канала с целью получения локальных уравнений; 3) осреднение локальных уравнений в представительном элементарном объеме среды для получения уравнений на макроскопическом уровне.

Представительный элементарный объем (ПЭО) в точке определяется по отношению к пористости: это минимальный объемный элемент, содержащий данную точку, пористость которого инва-

риантна по отношению к дальнейшему увеличению его размеров.

Осреднение $\bar{a}$ величины a в представительном элементарном объеме Δv_0 с центром в точке P определяется интегралом:

$$\bar{a}(P) = \frac{1}{\Phi \Delta v_0 (P)} \int\limits_{\Phi \Delta v_0 (P)} a dv,$$

где dv — элемент порового объема; Φ — пористость, значение $\bar{a}$ принимается дважды дифференцируемым в любой точке пространства.

Далее получаем следующие уравнения.

1. Уравнение сохранения массы:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(D\bar{T}^{ij}\frac{\partial \bar{c}}{\partial x^j} - \overline{cu}^i\right) - \overline{cu}^i \frac{\partial (\Phi \Delta v_0)/\partial x^i}{\Phi \Delta v_0}, \qquad (2.2.1)$$

где

$$T^{ij} = \frac{d\xi^i}{d\sigma}\frac{d\xi^j}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2;$$

Δv_0 — объем ПЭО; ξ^j — декартова координата точки в канале; σ и s — соответственно криволинейные абсциссы точек на линии тока в канале и на оси канала, отсчитываемые от одного и того же конца канала; D — коэффициент молекулярной диффузии.

Микроскопический массовый расход потока, претерпевшего дисперсию cu^i, состоит из двух частей: cU^i — конвективный перенос со средней скоростью в ПЭО и $c\tilde{u}^i$ — конвекция, отвечающая флюктуации локальной скорости:

$$cu^i = cU^i + c\tilde{u}^i, \qquad (2.2.2)$$

Далее считаем:

$$\overline{\tilde{c}\tilde{u}^i} = -K^{ij}\frac{\overline{\partial c}}{\partial x^j} \qquad (2.2.3)$$

причем K^{ij} вычисляют по зависимости:

$$K^{ij} \simeq \overline{u^i u^j}\,\frac{L}{U}\left[1 + 2\frac{D}{LU} + 4\frac{D}{LU}\left(\frac{L}{a}\right)^2\right]^{-1}, \qquad (2.2.4)$$

где L — средняя длина канала; a — характерный размер сечения; U — средняя массовая действительная скорость фильтрации; D — коэффициент молекулярной диффузии. Жидкость несжимаема. Уравнения (2.2.1), (2.2.2) и (2.2.3) дают:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[(DT^{ij} + K^{ij})\frac{\partial \bar{c}}{\partial x^j} - U^i \bar{c}\right] + K^{ij}\frac{\partial \bar{c}}{\partial x^j}\frac{\partial (\Phi \Delta v_0)/\partial x}{\Phi \Delta v_0}, \qquad (2.2.5)$$

в правой части уравнения учитывается неоднородность среды.

2. Уравнение неразрывности для неоднородной жидкости:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[(DT^{ij} + K^{ij})\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x^j}\right] - U^i \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x^i} + K^{ij}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x^j}\frac{\partial (\Phi \Delta v_0)/\partial x^i}{\Phi \Delta v_0},$$

где $\bar{\rho}$ — плотность жидкости. (2.2.6)

3. Уравнение движения:

$$U^i = -\frac{k^{ij}}{\Phi\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x^j} + \bar{\rho} g \frac{\partial z}{\partial x^j}\right) - \frac{B\bar{\rho}}{\mu}\frac{\partial U^i}{\partial t}, \qquad (2.2.7)$$

где B — проводимость канала; $k^{ij} = \overline{\Phi B T^{ij}}$ — проницаемость. Это уравнение получено при условии, что плотность и вязкость зависят линейно от концентрации, корреляционные связи между давлением и пористой средой, а также между жидкостью и средой отсутствуют; считается, что диффузией можно пренебречь.

Другой подход, сугубо вероятностный, также дал возможность получить уравнение дисперсии, подобное (2.2.5), но физический смысл коэффициентов дисперсии при этом не столь ясен, как в определении (2.2.5).

Для того чтобы свести к минимуму число предположений о геометрии пористой среды, вполне естествен концептуальный подход к общему представлению дисперсии. Это приводит к вероятностным моделям [239], основанным на предположении о том, что пористая среда полностью определена, хотя сведения о ней носят случайный характер. Наиболее общий путь моделирования такой ситуации заключается в представлении среды рядом случайных переменных. Шейдеггер дает некоторые концептуальные правила для этого типа модели:

1) должны быть сделаны предположения об осредняющих свойствах пористой среды;

2) должны быть заданы зависимости между силами, действующими на жидкость, свойствами самой жидкости и скоростью в течение элементарного интервала времени;

3) должны быть выбраны вероятностные законы для каждого события на период элементарных интервалов времени.

Он получает модель случайного блуждания в однородной и изотропной пористой среде. Время разбивается на элементарные интервалы, и события в каждом интервале являются независимыми от таковых в другом интервале. Считается справедливой эргодическая гипотеза: среднее значение величины в пористой среде равно пределу осреднений некоторых величин в заданной точке среды по времени. Отклонения скоростей от средней скорости являются случайными, а поток — ламинарным. Концентрация вещества жидкости в какой-то точке потока отвечает вероятности нахождения частицы в этой точке. Результатом является уравнение диффузии:

$$K\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t}$$

для одномерного потока с постоянной скоростью. Экспериментальные исследования позволяют обобщить это уравнение:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \operatorname{grad} c = \operatorname{div} (\mathbf{K} \operatorname{grad} c),$$

где U — действительная скорость фильтрации и $\mathbf{K}$ — тензор дисперсии. Данное уравнение аналогично уравнению Бэра для случая однородной среды и постоянной скорости потока.

Уравнение дисперсии может быть усовершенствовано [110] по аналогии с диффузионным массопереносом. В случае молекулярной диффузии перенос зависит от градиента C^* — безразмерного числа, выраженного через отношение масс; уравнение диффузии имеет вид:

$$\operatorname{div} (\mathrm{D}\rho \otimes \operatorname{grad} C^*) - \operatorname{div} \left(\frac{C^* U}{\rho} \right) = \frac{\partial (C^*/\rho)}{\partial t}$$

или

$$\operatorname{div} (\mathbf{D}\rho \otimes \operatorname{grad} C^*) - \operatorname{div} (CU) = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Такая форма записи предполагает, что для общего случая явление дисперсии может вполне удовлетворительно описываться уравнением:

$$\operatorname{div} (\mathbf{K}\rho \otimes \operatorname{grad} C^*) - \operatorname{div} (CU) = \partial C/\partial t. \qquad (2.2.8)$$

Для случая трассера эта форма записи уравнения аналогична обычной, когда ρ является константой:

$$\operatorname{div} (\mathbf{K} \otimes \operatorname{grad} C) - \operatorname{div} (CU) = \partial C/\partial t, \quad \rho C^* = C.$$

Как и в случае смешивающихся жидкостей с различными плотностями, уравнение (2.2.8) может быть использовано и когда ρ зависит от концентраций. Обратим внимание, что имеет место корреляционная зависимость между уравнением неразрывности жидкой фазы и уравнением дисперсии.

При диффузии двух компонентов 1 и 2 из принципа взаимности Онзагера следует, что коэффициент диффузии компонента 2 в компоненте 1 будет тем же, что и коэффициент диффузии компонента 1 в компоненте 2. Аналогично можно предположить, что коэффициенты дисперсии не зависят от состава раствора.

Для двухкомпонентного раствора уравнения дисперсии имеют вид:

$$\operatorname{div} (\mathbf{K}\rho \otimes \operatorname{grad} C_i^*) - \operatorname{div} (C_i U) = \frac{\partial C_i}{\partial t} \quad (i = 1 \text{ и } 2). \qquad (2.2.9)$$

Согласно предыдущему замечанию, K не зависит от i. Принимая во внимание определение значений C и C^*, а также равенства $C_1 + C_2 = \rho$ и $C_1^* + C_2^* = 1$ можно получить уравнение неразрывности сложением выражений вида (2.2.9) для $i = 1$ и $i = 2$:

$$\operatorname{div} [\mathbf{K}\rho \otimes \operatorname{grad} (C_1^* + C_2^*)] - \operatorname{div} [(C_1 + C_2) U] = \partial (C_1 + C_2)/\partial t$$

или

$$\mathrm{div}\,(\rho U) + \partial\rho/\partial t = 0$$

Это значит, что система, включающая в себя только одно уравнение дисперсии и уравнение неразрывности, достаточна для правильной постановки проблемы дисперсии.

2.3. КРИТИКА КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДИСПЕРСИИ

Уравнение, называемое «общим уравнением дисперсии», получено с помощью различных методов. Это уравнение представляет собой математическую модель, используемую в настоящее время для описания реальных случаев дисперсии, связанных с загрязнением подземных вод.

Как это и подразумевает само понятие «модель», это уравнение имитирует реальное явление и тем самым обеспечивает аппроксимацию дисперсии, основанную на различных допущениях, согласно предыдущему разделу. Проблема состоит в том, чтобы выяснить, будут ли погрешности этой аппроксимации соответствовать погрешностям, допускаемым в различных экспериментах по изучению дисперсии.

Мы увидим, что в отношении характера и точности полевых результатов, а также точности определения коэффициентов данной модели in situ, это уравнение достаточно корректно и дает результаты в пределах экспериментальных погрешностей. Однако на уровне точных лабораторных экспериментов появляются некоторые расхождения между теоретическими и экспериментальными результатами. Сейчас мы проиллюстрируем эти расхождения и предложим возможные способы усовершенствования концептуального представления явления дисперсии.

2.3.1. Экспериментальные результаты

Ряд экспериментальных лабораторных результатов, полученных независимо друг от друга разными исследователями, являются источником сомнений в обоснованности классического уравнения дисперсии. Эти исследователи отмечают расхождения между экспериментальными и теоретическими результатами, полученными при применении классического уравнения дисперсии к их лабораторным данным. Они показали, что в основе этих различий лежит нечто большее, нежели только экспериментальные погрешности.

Наличие систематических ошибок отметил Шейдеггер [239] (рис. 2.3.1). Он пытался объяснить их вычислительными ошибками, связанными с заданием граничных условий на конечных расстояниях, что, однако, не подтвердилось. Он также предположил

в своей теории, что временные шаги не являются независимыми и допустил наличие автокорреляции между последовательными шагами *. Для того чтобы обеспечить корреляцию между направлениями, по которым частица движется в моменты времени t и $t + \tau$, он использовал коэффициент корреляции Лагранжа $R(\tau)$ в системе координат, движущейся со средней скоростью потока;

$$R(\tau) = \overline{[\tilde{u}(t) \cdot \tilde{u}(t+\tau)]}/\overline{(\tilde{u}^2)},$$

Шейдеггер заканчивает свою теорию телеграфным уравнением:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U\frac{\partial \psi}{\partial x} = K\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - A\left(U^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2U\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right),$$

где A и K зависят от динамических параметров, таких как скачок давления. К сожалению, это уравнение дает решения, которые не соответствуют экспериментальным результатам (рис. 2.3.2): в точке $x' = (K/A)^{1/2}\, t$ имеет место разрыв, перемещающийся со скоростью $(K/A)^{1/2}$.

Гуднайт, Фэтт, Коатс и Смит [43, 129, 130] пытаются объяснить наблюдаемые различия между теорией и экспериментом наличием тупиковых пор (рис. 2.3.3), в которых жидкость неподвижна и массоперенос вещества осуществляется только путем молекулярной диффузии.

Фэтт выводит общее уравнение диффузии с учетом существования тупиковых пор, предполагая однородное их распределение в среде, отсутствие связей между ними и стационарность диффузионного потока через устья этих пор.

Он получает систему:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{D}{\theta^2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{Vd}{V_1}\frac{\partial C_1}{\partial t},$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = \frac{DA_0}{l_0 V_c}(C - C_1),$$

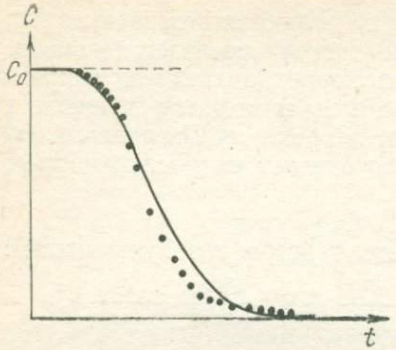
где D — коэффициент диффузии, $C_1(x, t)$ — концентрация в тупиковых порах, θ — извилистость среды, V_1 — объем проточных каналов, V_d — общий объем тупиковых пор, V_c — объем одной тупиковой поры, l_0 и A_0 — длина и поперечное сечение устья тупиковой поры (рис. 2.3.4). Эти уравнения ограничиваются рассмотрением диффузионного процесса.

Аналогично, распространяя на дисперсионные процессы, Коатс и Смит выводят следующее макроскопическое уравнение:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} = K_L\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - (1 - f)\frac{\partial c_1}{\partial t}, \qquad (2.3.1)$$

где f — часть порового объема, занятого движущейся жидкостью и $c_i(x, t)$ — концентрация в тупиковых порах в точке x в момент

* Напомним, что речь идет о методе случайного блуждания. — *Прим. ред.*



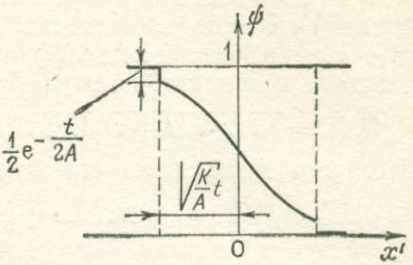
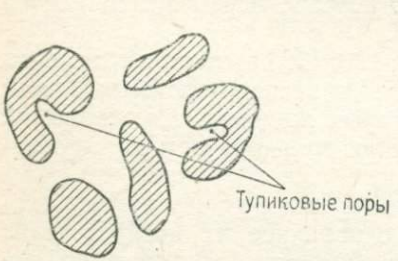


Рис. 2.3.1. Сравнение расчетной кривой Шейдеггера с экспериментальными результатами

Рис. 2.3.2. Решение телеграфного уравнения Шейдеггера [239]



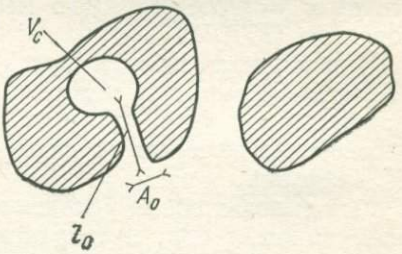


Рис. 2.3.3. Тупиковые поры в гранулированной среде

Рис. 2.3.4. Устье тупиковой поры

времени t; это значит, что без учета тупиковых пор ($f = 1$) уравнение (2.3.1) представляет собой классическое макроскопическое уравнение. К (2.3.1) может быть добавлено уравнение диффузии в тупиковой поре:

$$\gamma (c_1 - c) = (1 - f) \frac{\partial c_1}{\partial t},$$

где γ — коэффициент массообмена между тупиковыми и открытыми порами. Это уравнение легко распространяется на случай многомерного потока и поперечной дисперсии.

Что же касается объяснения вышеупомянутых различий, то эта теория является не вполне удовлетворительной, так как концептуально молекулярная диффузия является составной частью дисперсии и уже принята во внимание при выводе классического уравнения (которое отвечает нулевой скорости, когда коэффициенты дисперсии совпадают с коэффициентами диффузии в пористой среде, см. раздел 2.4.).

Симпсон [249] и Крайн и Гарднер [46] показали наличие расхождений между теорией и экспериментом для экстремальных значений относительной концентрации. Поэтому Симпсон предпо-

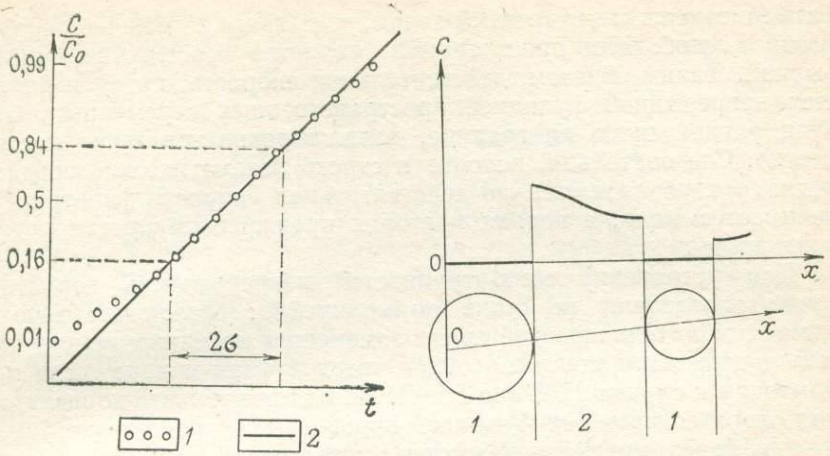


Рис. 2.3.5. Сравнение расчетной кривой Пфанкаша с экспериментальными результатами.
1 — эксперимент; *2* — теория

Рис. 2.3.6. Разрывность в распределении концентраций в пористой среде.
1 — твердая фаза; *2* — свободное пространство

ложил, что распределение концентраций не подчиняется нормальному закону; это означает, что классическое уравнение (решение которого описывается гауссовой кривой) не удовлетворяется. Некоторые экспериментаторы также указали в своих работах на подобные расхождения (рис. 2.3.5), но не объяснили их [28, 22, 212].

В некоторых случаях интерпретация этих расхождений проводилась с целью усовершенствования уравнения дисперсии. Дадим далее общие соображения о происхождении упомянутых расхождений и попытаемся выработать общий подход к ним.

2.3.2. Критика концепции сплошной среды

Классические математические модели одновременно используют три следующие предпосылки:

1) средняя скорость группы частиц жидкости представляет собой действительную макроскопическую скорость или действительную скорость фильтрации, которая грубо равна скорости фильтрации, деленной на пористость среды (см. прилож. I);

2) макроскопическая пористая среда является сплошной, т. е. любой бесконечно малый элемент пористой среды содержит как твердую фазу, так и пустоты;

3) концентрация является функцией, дважды дифференцируемой в любой точке пространства.

Эти три предпосылки могут противоречить друг другу. На языке математики вторая предпосылка означает, что твердая

фаза не содержит внутренней точки, т. е. граница между твердой фазой и свободным пространством является повсеместно непрерывной. Таким образом, действительная скорость, которая является непрерывной функцией пространственных переменных, будучи равной нулю на границе, должна равняться нулю повсеместно. Следовательно, используя строго математические определения, мы убеждаемся, что действительная скорость фильтрации не имеет смысла, а первая и вторая предпосылки противоречат друг другу.

Для устранения этих трудностей непрерывность пористой среды определяют не столь прямолинейно: бесконечно малый элемент макроскопической среды заменяется конечным ее элементом, содержащим конечный объем твердой фазы и пор; тогда мы приходим к случаю ПЭО (по Бэру). Но в этом варианте концентрация, которая является функцией порового пространства не будет уже дифференцируема в любой точке, так как существует разрыв на границе между твердой фазой и свободным пространством. В самом деле, концентрация, измеряемая в процессе эксперимента, является дважды дифференцируемой в каждой точке порового пространства; она принимается постоянной в твердой фазе и претерпевает разрыв на границе (рис. 2.3.6).

Этот ряд противоречий характеризует основную трудность в теории дисперсии: как учесть влияние границы между твердой фазой и порами? Еще раз подчеркнем, что это главный вопрос при изучении пористой среды. Пористая среда является очень сложной, и хотя в большинстве случаев основные уравнения (движения, неразрывности и т. д.) для пор хорошо известны, граничные условия трудно задать вследствие весьма сложного характера границы между твердой и жидкой фазами. В разделе 2.2 отмечено, что моделирование течения жидкости в пористой среде представляет собой замену хорошо известных систем уравнений с упрощенными условиями на очень сложных границах системой уравнений с простыми условиями на простых границах. Достижение эквивалентности между двумя системами является не простой проблемой и, по всей вероятности, представляет интерес для дальнейших исследований.

В моделях случайного блуждания границы не учитываются, и модель Бэра предполагает, что осредненные значения переменных (вычисленных в пределах ПЭО, который является аппроксимацией бесконечно малого элемента макроскопической среды в определенном выше смысле) являются дважды непрерывно дифференцируемыми за исключением некоторых точек, кривых и поверхностей пористой среды, не удовлетворяющих ранее принятым допущениям (т. е. предположению, что эти переменные повсеместно удовлетворяют дифференциальным уравнениям в частных производных).

Итак, наша цель — высказать некоторые соображения относительно возможного развития этого направления исследований и показать, что учет граничных условий приводит к уравнению,

не совпадающему с классическим уравнением дисперсии. Эти соображения даются на основе принципа пространственного осреднения.

2.3.3. Влияние граничных условий [103]

Назовем микроскопическим пространством пористую среду, изучаемую на гранулометрическом (микроскопическом, см. раздел 2.1.4) уровне. На этом уровне справедливы уравнения молекулярной диффузии и Новье-Стокса.

Назовем макроскопическим пространством пористую среду, изучаемую на макроскопическом уровне. На этом уровне скорости течения жидкости могут подчиняться закону Дарси (см. приложение I), и имеет смысл говорить о дисперсии.

Бесконечно малый элемент макроскопического пространства аналогичен ПЭО (по Бэру). Очертим шар радиусом r с центром в каждой точке x микроскопического пространства; r может быть определен графически аналогично тому, как изображено на рис. 2.3.7, *в*. Микроскопическая концентрация подчиняется уравнению конвективной диффузии:

$$\operatorname{div}(\mathrm{D}\operatorname{grad} c) - \operatorname{div}(uc) = \frac{\partial c}{\partial t}, \tag{2.3.2}$$

где D — тензор диффузии и u — конвективная скорость частиц жидкости. Для упрощения тензор D принимается постоянным и шаровым для всей среды. Концентрация c определяется в пределах порового пространства (например, нулевая). Тогда функция $(x, t) \to c(x, t)$ разрывной функции по x на границе S между поровым пространством и твердой фазой и уравнение диффузии (2.3.2) на этой границе не удовлетворяется. Будучи локально интегрируемой, c характеризует некоторое распределение * [243]; тогда можно распространить уравнение диффузии на все пространство, особо выделяя поверхностные распределения с базисом на границе S, связанные с разрывами функции c.

Предположим S регулярна, т. е. дифференцируема. Применяя оператор Лапласа к функции c, понимаемой в смысле распределения, получим [243]:

$$\Delta c = [\Delta c] + \sigma_\vartheta \delta_{(S)} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sigma_0 \delta_{(S)},$$

где $[\Delta c]$ — обычные производные функции c (там, где они существуют); σ_ϑ и σ_0 — соответственно скачок нормальной производной функции c и скачок c на границе S; $\delta_{(S)}$ — означает, что распределение $\sigma_\vartheta \delta_{(S)}$ имеет свой базис на S и может являться «мерой Дирака» для S.

---

* В вероятностном смысле. — *Прим. ред.*

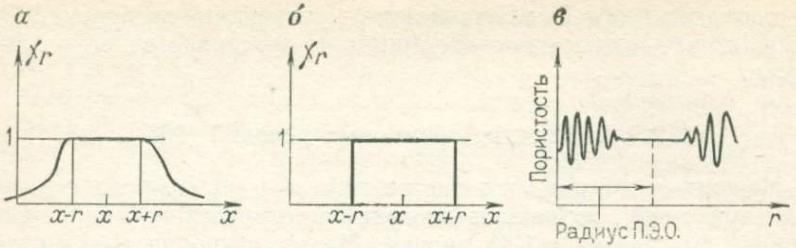


Рис. 2.3.7. Пример $C^{\infty}\chi_r$-функции (*а*); регуляризующая функция Бэра (*б*); зависимость пористости от объема микроскопического пространства (*в*)

Уравнение диффузии, записанное теперь относительно распределения и справедливое для всего микроскопического пространства, принимает вид:

$$D\Delta c - \operatorname{div}(uc) = \frac{\partial c}{\partial t} + \sigma_{\vartheta}\delta_{(S)} + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\sigma_0\delta_{(S)}. \qquad (2.3.3)$$

Пусть χ_r — семейство функций, сходящихся с δ-мерой Дирака при $r = 0$. Уравнение дисперсии, получаемое регуляризацией уравнения (2.3.3) посредством χ_r при малых r (т. е. сверткой посредством χ_r), назовем макроскопическим уравнением дисперсии:

$$\chi_r^*(D\Delta c) - \chi_r^* \operatorname{div}(uc) = \lambda_r^* \frac{\partial c}{\partial t} + \chi_r^* \sigma_{\vartheta}\delta_{(S)} + \chi_r^* \frac{\partial}{\partial \vartheta}\sigma_0\delta_{(S)}, \qquad (2.3.4)$$

r — радиус шара с центром x, представляющим собой, согласно определению ПЭО, величину, отличную от нуля. Макроскопическое пространство состоит из x — точек микроскопического пространства, а физические величины в этих точках являются средними значениями совокупности микроскопических величин в пределах шара, взвешенными посредством χ_r. Если мы принимаем, что χ_r принадлежит c^{∞} (рис. 2.3.7, *а*), то регуляризирующие функции принадлежат c^{∞}.

З а м е ч а н и е. Теория Бэра использует классическое осреднение, т. е. свертку с ядром ПЭО, которое дает регуляризирующую функцию на принадлежащую c^{∞}.

Регуляризирующая функция C от c называется макроскопической концентрацией и подчиняется уравнению:

$$D\Delta C - \operatorname{div}(\chi_r^* uc) = \frac{\partial C}{\partial t} + \chi_r^* \sigma_{\vartheta}\delta_{(S)} + \chi_r^* \frac{\partial}{\partial \vartheta}\sigma_0\delta_{(S)}. \qquad (2.3.5)$$

Согласно интерпретации Бэра, мгновенный микроскопический массовый поток uc представляет собой сумму массового потока со средней скоростью и массовых потоков, отвечающих флуктуациям скорости (см. раздел 2.2); сохраняя его феноменологическую интер-

претацию конечного (результирующего) потока в терминах коэффициентов дисперсии, мы получаем классическое уравнение дисперсии с дополнительными членами, отвечающими δ_0 и δ_ϑ:

$$\operatorname{div}(D + K^{ij}) \operatorname{grad} C - \operatorname{div}(UC) = \frac{\partial C}{\partial t} +$$

$$+ \chi_r^* \sigma_\vartheta \delta_{(S)} + \chi_r^* \frac{\partial C}{\partial \vartheta} \sigma_0 \delta_{(S)}, \qquad (2.3.6)$$

где $\chi_r^* \delta_\vartheta \delta_{(S)}$ — распределение с базисом на S, а $\chi_r^* \partial / \partial_\vartheta [\delta_0 \delta_{(S)}]$ — проекция равнодействующей совокупности диполей с плотностью моментов δ_0 на нормаль к S (в каждой точке поверхности S); они характеризуют влияние границы *. Таким образом, даже если физико-химические процессы на границе между твердой и жидкой фазами отсутствуют, эта граница оказывает свое влияние на ряд физических показателей как совокупность разрывов; на данной совокупности микроскопические уравнения не удовлетворяются, так что любой регуляризующий процесс должен принимать это во внимание.

2.3.4. Критика концепции пространственного усреднения

Пространственное усреднение является естественным процессом регуляризации, который, однако, не является инвариантным: макроскопические величины зависят от метода регуляризации.

Определение ПЭО зависит, по крайней мере, от точности измерений пористости и методов оценки масштабов однородности среды. Добавим, что должен быть определен и способ заполнения микроскопического пространства посредством ПЭО: имеется в виду выбор геометрии ПЭО (шары, параллелепипеды и т. д.) и то, как они заполняют пространство (например, перекрывают друг друга или нет).

Замечание. Регуляризация уравнения диффузии посредством свертки обычно изменяет уравнение. Это просто доказать. Допустим:

$$A = \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x^j} + \gamma.$$

Тогда уравнение диффузии записывается в виде:

$$Ac = \frac{dc}{dt}.$$

Если χ — быстро возрастающая функция C^∞, то, полагая $C = \chi \times c$ и регуляризируя $Ac = dc/dt$ посредством χ, получим:

$$\chi^* Ac = \frac{dC}{dt}.$$

* Точнее — разрывов на границе. — *Прим. ред.*

Определяя оператор L выражением:

$$L(\chi^*) = (\chi^*)A - A(\chi^*),$$

мы имеем:

$$\chi^* Ac = LC + AC$$

и

$$\frac{dC}{dt} = AC + LC.$$

Если A имеет постоянные коэффициенты, L равно 0, то мы получаем уравнение диффузии. В противном случае операция $A + L$ обычно не дает уравнения диффузии. L может быть рассчитано путем использования композиционных теорем псевдодифференциальных операторов [266, 267].

2.3.5. Заключение

Отмечаются систематические расхождения между решениями классического уравнения дисперсии и экспериментальными результатами. Классические процессы, моделирующие дисперсию в пористой среде с помощью уравнения диффузии, содержит некоторый элемент необоснованности, особенно в том, что касается способа учета границы раздела между порами и твердой фазой.

Читателю, если он непосредственно занимается этой тонкой научной проблемой, предлагается подумать по поводу критического обзора, изложенного в этой главе, а также тех предложений о перспективных разработках будущих исследований, которые мы даем здесь в виде заключения.

Основой теории дисперсии является проблема измерений. В пористой среде концентрацию измеряют несколькими способами. Необходимо, во-первых, убедиться, что измеряемая физическая величина (концентрация, например) не зависит от экспериментального метода. Например, теоретическая макроскопическая концентрация, которая появляется в математических моделях, должна соответствовать экспериментальной концентрации, добиться чего, как мы уже видели, не просто.

Модель дисперсии можно представить двояко: 1) новым глобальным уравнением, отталкивающимся непосредственно от некоторых феноменологических зависимостей, справедливых на глобальном уровне, рассматривая локальный уровень как черный ящик; 2) более широким пониманием классического уравнения, идентифицируя осредненные теоретические концентрации модели с измеряемыми концентрациями.

Наличие различных концептуальных подходов к проблеме дисперсии и критический анализ предложенных моделей показывают, что область исследования дисперсии — часть общей для физики в целом проблемы смены масштаба.

2.4. ЛАБОРАТОРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИСПЕРСИИ (ОДНОРОДНАЯ СРЕДА)

С целью проверки концептуальных представлений о механизме дисперсии было проведено множество лабораторных экспериментов. В основном они преследовали две цели:

1) проверка и усовершенствование основных положений и теоретических моделей дисперсии;

2) изучение влияния на дисперсию различных параметров, таких как характеристики жидкости и свойства пористой среды.

Мы уже видели, что эксперименты поднимают вопрос относительно достоверности моделей и предлагают возможные пути усовершенствования их (см. раздел 2.3). Кроме того, лабораторные исследования приобретают особую актуальность при изучении процессов загрязнения; их результаты отражают взаимоотношения между безразмерными величинами, которые непосредственно используются при решении практических проблем.

Основная часть этих лабораторных экспериментов выполнена на однородных пористых средах. Конечно, в природных условиях мы, как правило, имеем дело с гетерогенными средами; на некотором уровне их можно, как мы увидим, представить однородными, поэтому была также проведена серия лабораторных опытов с использованием гетерогенных пористых сред. Хотя многие авторы рассматривают опыты с гетерогенными средами как составную часть описания основ теории дисперсии (а в этом разделе — и основ теории загрязнения), мы полагаем, что эти эксперименты представляют также интерес и с позиций перехода от лабораторных исследований к полевым; именно поэтому они рассматриваются отдельно в разделе 2.5.

Эксперименты проводятся при следующих ограничивающих условиях: 1) тензор дисперсии сводится к своим главным коэффициентам K_L или K_T; 2) граничные условия обычно задаются так, что можно пренебречь или продольной или поперечной дисперсией; 3) движение потока в модели равномерное, т. е. устраняется возможность образования «языков»; 4) начальные профили концентрации обычно представляют собой ступенчатые функции. Выбранная модель является классическим уравнением дисперсии:

$$\operatorname{div}\left(\mathrm{K}\rho \operatorname{grad}\frac{C}{\rho}\right) - \operatorname{div}(UC) = \frac{\partial C}{\partial t}. \qquad (2.4.1)$$

Основные результаты экспериментов получены для случая трассера (например, для низких концентраций NaCl); это позволяет легко провести интерпретацию результатов, поскольку основные уравнения получены именно для этого случая. Более того, и некоторые практические задачи сводятся к случаю трассера. Однако отметим, что часто в реальных задачах имеют место потоки различной плотности и вязкости (например, вытеснение сырой нефти растворенным газом). Даже при загрязнении при интрузии

морской воды, содержание соли в ней таково, что задача не может быть сведена к случаю трассера. Для последнего случая также имеются лабораторные результаты, позволяющие делать некоторые полезные интерпретации.

В этом разделе мы приводим результаты экспериментальных исследований, начиная с анализов размерностей и переходя затем к изучению технических аспектов определения коэффициентов дисперсии. Результаты даны как для случая трассера, так и для общего случая. Последняя часть раздела посвящена подробному рассмотрению технических аспектов экспериментов.

2.4.1. Анализ размерностей

Физический анализ показывает, что дисперсия зависит от следующих параметров: вязкостей μ_i и плотностей ρ_i обеих жидкостей ($i = 1$ или 2), силы тяжести g, средней действительной скорости фильтрации U, коэффициента диффузии D, а также текстурных параметров, таких как проницаемость породы k.

Анализ размерностей охватывает простой случай, отвечающий ряду ограничений:

1) считается, что взаимное смешение жидкостей происходит без изменения их объема, а влияние различий плотностей жидкостей ρ_1 и ρ_2 за счет гравитации может быть отражено одним параметром: $g(\rho_1 - \rho_2) = g\Delta\rho$;

2) молекулярная диффузия описывается одним коэффициентом D, который считается независимым от концентрации. В пористой среде молекулярная диффузия отражается через параметр K_0;

3) дисперсия зависит только от вязкостей обеих жидкостей μ_1 и μ_2 до их смешения, т. е. дисперсия не зависит от функции $\mu(C)$, описывающей вязкость раствора. Это допущение не очень корректно, особенно если эта функция не является монотонной (рис. 2.4.1).

Дисперсию можно описать зависимостью, включающей в себя семь параметров:

$$K = f(g\Delta\rho,\ \mu_1,\ \mu_2,\ U,\ K_0,\ k).$$

Согласно π-теореме, это уравнение может быть записано в виде зависимости с четырьмя безразмерными числами. Изучение описывающих дисперсию уравнений и анализ экспериментальных результатов показывают, что такими безразмерными числами, которыми наиболее полно характеризуется процесс, являются:

$$K/K_0,\quad Uk^{1/2}/K_0,\quad \mu_1/\mu_2,\quad (g\Delta\rho k^{3/2})/(\mu_1 K_0), \qquad (2.4.2)$$

где K/K_0 — безразмерный коэффициент дисперсии; $Uk^{1/2}/K_0$ — число Пекле, которое характеризует влияние скорости; μ_1/μ_2 — количественная оценка различия вязкостей жидкостей; $(g\Delta\rho^{3/2})/(\mu_1 K_0)$ — количественная оценка различия плотностей жидкостей, которая имеет ту же форму, что и число Релея, исполь-

зуемое для описания свободной термальной конвекции. Выбор μ_1 является произвольным, в то время как μ_2 задается. В целях симметрии вязкость раствора обычно приводится к относительной концентрации, равной 0,5.

Использование K_0 в безразмерных критериях может вызвать удивление физика, который привык применять для изучения проблемы дисперсии член K/D. В действительности же существуют две причины, которые предопределяют выбор K_0 вместо D:

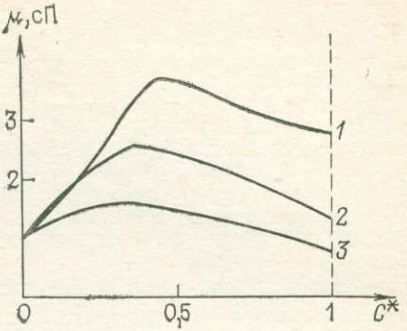


Рис. 2.4.1. Графики зависимости вязкости смеси от относительной концентрации спирта ($\theta = 20$ °C).
Вода в смеси со спиртом: *1* — изопропановым, *2* — этиловым, *3* — метиловым

1) молекулярная диффузия в жидкой фазе никогда не проявляется независимо от влияния скелета породы. При низких скоростях влияние молекулярной диффузии отображает только параметр K_0;

2) оценку D для пар жидкостей трудно найти в литературе и трудно получить экспериментально. Наиболее простой, часто используемый способ определения D заключается в измерении K_0 при нулевых скоростях. Тогда D определяется по формуле:

$$(K/D)_0 = K_0/D = 1/(F\Phi),$$

где F — структурный фактор.

В выражении (2.4.2) величина $k^{1/2}$ отражает текстуру среды — это простой способ ввести характерную длину пористой среды. Для неконсолидированной среды, состоящей из шаров, можно использовать их диаметр d и тогда безразмерные числа записываются в виде:

$$K/D,\ Ud/D,\ \mu_1/\mu_2,\ (g\Delta\rho d^3)/(\mu_1 D). \qquad (2.4.3)$$

При изучении дисперсии в случае трассера используются, очевидно, два первых члена из совокупностей (2.4.2) и (2.4.3). Численное определение K по данным эксперимента основано на аналитическом или численном решении уравнения (2.4.1). Решения уравнения (2.4.1) представлены в разделе 4.1.

2.4.2. Случай трассера — продольная дисперсия

Основная часть экспериментальных исследований по техническим соображениям проводилась в неконсолидированных пористых средах. Как отмечалось выше, экспериментальные результаты представляются в безразмерной форме на графиках двух типов: K/D в зависимости от Pe_D (рис. 2.4.2) и $K/(Ud)$ в зависимо-

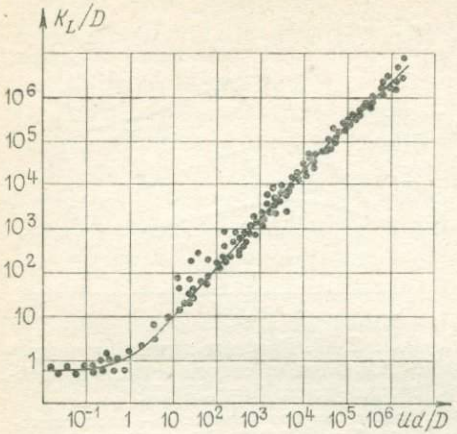


Рис. 2.4.2. Результаты эксперимента в случае трассера (продольная дисперсия)

сти от Pe_D (рис. 2.4.3), где Pe_D — дисперсионное число Пекле ($Pe_D = Ud/D$).

Следует подчеркнуть, что невозможно подобрать единую серию кривых, отвечающих различным типам пористых сред. Для неконсолидированных пористых сред все эксперименты выполнены со средами, представленными в виде шариков. Такая среда может быть охарактеризована геометрическим параметром, выбранным по отношению или к поровому пространству или к твердой фазе; обычно за такой параметр принимается размер зерен, поскольку его легко определить.

Серия экспериментальных результатов по определению продольной дисперсии в неконсолидированных средах представляет собой наиболее полный набор количественных данных по дисперсии. Это, в свою очередь, дает возможность провести полный физический анализ явления и вывод основных формул.

Результаты по изучению дисперсии в пористых средах, составленных из шаров, используются в качестве первого шага для изучения других сред. Предполагая, что график зависимости коэффициента дисперсии от средней скорости потока имеет идентичный вид для всех пористых сред, можно построить график фактически по небольшому числу экспериментов (рис. 2.4.4). Конечно, подобная экстраполяция возможна только при использовании безразмерных параметров.

Неконсолидированная пористая среда. Анализ графиков, представленных на рис. 2.4.2 и 2.4.3, позволяет выделить пять режимов дисперсии.

а) чисто молекулярная диффузия. Этот режим проявляется при малых значениях средней скорости. Молекулярная диффузия является единственным компонентом дисперсии, а отношение K_L/D является константой. Как уже отмечалось Фридом и Комбарну ([110], стр. 192), пористая среда замедляет диффузионный процесс. Например, для однородной среды, представленной одинаковыми шариками:

$$(K_L/D)_0 = 0{,}67; \qquad (2.4.4)$$

б) суперпозиция. Вклад механической дисперсии становится ощутимым;

в) преобладание механической дисперсии. Однако в этом случае молекулярной диффузией пренебречь нельзя, она уменьшает

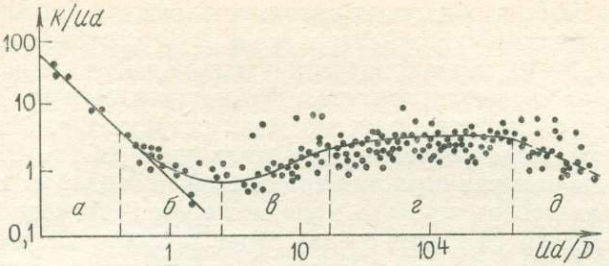


Рис. 2.4.3. Различные режимы дисперсии по экспериментальным данным.
а — чисто молекулярная дисперсия; *б* — переходный режим; *в* — преобладание механической дисперсии; *г* — чисто механическая дисперсия; *д* — дисперсия за пределами закона Дарси

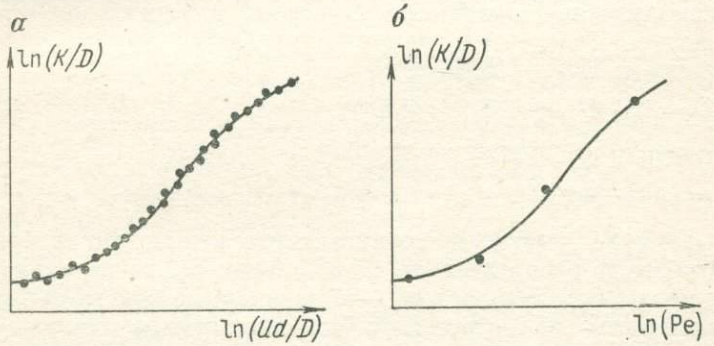


Рис. 2.4.4. Экстраполяция кривой (K/D равно числу Пекле) для произвольной среды на основе большого числа результатов, полученных из экспериментов с шариками.
а — среда представленная шариками; *б* — изучаемая пористая среда

эффект механической дисперсии. Принимая во внимание линейную зависимость, наблюдаемую между K_L/D и Pe, может быть получена следующая формула:

$$K_L/D = (K_L/D)_0 + \alpha (Ud/D)^m. \qquad (2.4.5)$$

г) чисто механическая дисперсия. Справедливо следующее соотношение:

$$K_L = (K_L/D)_0 + \beta Ud. \qquad (2.4.6)$$

Вследствие малой точности билогарифмических кривых, даже когда сходимость довольно хорошая (см. рис. 2.4.2), значение β колеблется в пределах $1{,}8 \pm 0{,}4$. Влияние молекулярной диффузии незначительно; величиной $(K_L/D)_0$ можно пренебречь. Для практических целей при режиме «Г» довольно часто используется формула ($K_L = \alpha U$);

д) механическая дисперсия при режиме течения жидкости, выходящем за рамки закона Дарси. Напомним, что режим фильтрации может быть охарактеризован числом Рейнольдса, а именно

отношением Ud/ϑ, и область применимости закона Дарси ограничивается значениями числа Рейнольдса от 0 до критических значений порядка 1—10. Можно подчеркнуть, что действительная турбулентность наблюдается при числе Рейнольдса больше 100. Для этого режима дисперсии получено мало результатов. Изменение режимов легко фиксируется на графиках рис. 2.4.2 и 2.4.3.

Консолидированная пористая среда. В консолидированных пористых средах проведено очень мало экспериментов. Можно предвидеть, что дисперсия в этих средах будет проявляться в большей степени, чем в неконсолидированных. В самом деле, распределение пор по размеру в консолидированных средах варьирует в более широких пределах, чем в неконсолидированных, а, следовательно, распределение скоростей будет меняться в большем диапазоне. Здесь используются различные формулы, аналогичные (2.4.5), такие как:

Лагатски и Катц [169]

$$K_L/D = (K_L/D)_0 + 0{,}5\,[(U\eta d)/D]^m, \tag{2.4.7}$$

Раймонди и др. [222]

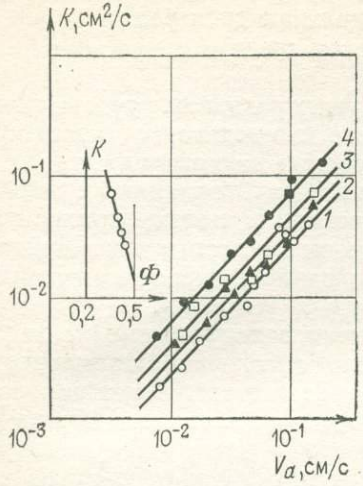
$$K_L = (K_L)_0 + \eta' dU. \tag{2.4.8}$$

Эти формулы выведены по аналогии с неконсолидированной средой, поэтому распределение пор по размеру характеризуется параметром ηd (или $\eta' d$). η и η' — безразмерные константы, которые изменяются в соответствии со стандартным отклонением распределения скорости; параметр d для консолидированной среды не имеет ясного количественного смысла. Для неконсолидированной среды, представленной однородными шариками, $\eta = 1$, d — диаметр шарика и справедлива формула (2.4.7). Величина $\eta' d$ значительно изменяется в зависимости от среды, что подтверждено экспериментально; например, Раймонди и др. [222] дают значения $\eta' d$, которые изменяются от 0,001 (неконсолидированная среда) до 0,2 (консолидированная среда) при одинаковых значениях проницаемости.

Серия экспериментов, выполненных Клотцем и Мозером [159], показала возрастание дисперсии с уменьшением пористости, т. е. с возрастанием компактности; объясняется это тем, что возрастание компактности приводит к увеличению разветвленности потока. Параметр K_L более или менее соответствует Φ^{-3}, где Φ — общая пористость (рис. 2.4.5).

2.4.3. Случай трассера — поперечная дисперсия

Изучения поперечной дисперсии менее обширны и начаты сравнительно недавно по сравнению с изучением продольной дисперсии. Однако из-за лучшей технической оснащенности экспериментов (несмотря на малое их число) результаты эти не менее надежны и обоснованны. Эксперименты выполнены в основ-



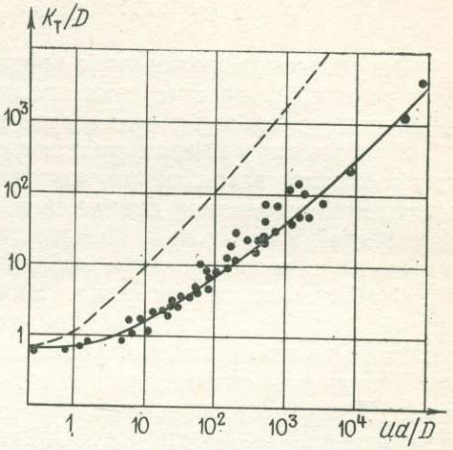


Рис. 2.4.5. Зависимость коэффициента продольной дисперсии K от скорости V_a для различных степеней уплотнения (песок 0,5—1,5 мм, $d_{50} = 0{,}75$) и от общей пористости Ф при $V_a = 0{,}1$ см/с. Температура воды 20 °С.
1 — $\Phi = 0{,}418$; *2* — $\Phi = 0{,}399$; *3* — $\Phi = 0{,}368$; *4* — $\Phi = 0{,}366$ [159]

Рис. 2.4.6. Экспериментальные результаты для случая с трассером.
Сплошная линия — поперечная дисперсия; пунктирная — продольная дисперсия

ном с неконсолидированной средой, представленной шариками (см. раздел 2.4).

Неконсолидированная пористая среда. Эксперименты проводились при числах Пекле, изменяющихся от 10^{-2} до 10^4, и позволили выделить четыре режима дисперсии (рис. 2.4.6):

а) чисто молекулярная диффузия, которая имеет место при низких средних скоростях. Для однородной среды, представленной однородными шариками, значение $(K_T/D)_0$ приблизительно равно 0,7;

б) суперпозиция, когда влияние механической дисперсии ощутимо;

в) механическая дисперсия, когда ее влияние становится преобладающим. При этом:

$$K_T/D = (K_T/D_0) + \alpha\,(Ud/D)^m, \qquad (2.4.9)$$

где $\alpha = 0{,}025$, $m = 1{,}1$;

г) чистая механическая дисперсия, когда справедлива формула (2.4.9) при значении $m = 1$.

Консолидированная пористая среда. Насколько нам известно, эксперименты с сильно консолидированной пористой средой не проводились. Симпсон [249] использовал в своих экспериментах очень слабо консолидированную среду, где консолидация не оказала заметного влияния на поперечную дисперсию. Результаты показаны на рис. 2.4.6.

2.4.4. Общий случай—продольная дисперсия (неконсолидированная среда)

Результаты, изложенные в предыдущих разделах, представляют определенный интерес для полевого исследования процессов дисперсии с помощью трассеров, особенно радиоактивных.

При решении многих практических задач, связанных с движением фронта загрязнения или вытеснением нефти, приходится учитывать совместное движение жидкостей с разными значениями плотностей и вязкостей. Поэтому проводилось экспериментальное изучение такого случая в лабораторных условиях.

Стабильность вытеснения. Учитывая задачу наших исследований, отметим, что наиболее важно определить стабильность условий вытеснения смешивающихся жидкостей. Подобная стабильность зависит от плотностей, вязкости и скорости U жидкостей. Для известных значений плотностей и вязкостей существует критическая скорость ограничивающая область стабильности. Изучение условий развития произвольного возмущения приводит к весьма приближенной формуле для критической скорости U_c [181]:

$$U_c = [kg(\rho_2 - \rho_1)]/[\Phi(\mu_2 - \mu_1)], \qquad (2.4.10)$$

где g — вектор силы тяжести, а индексы 1 и 2 характеризуют соответственно выше и ниже располагающиеся жидкости, причем ось z считается направленной вертикально вверх; а скорости U и U_c являются алгебраическими величинами.

Возможно два случая вытеснения жидкостей в зависимости от соотношения вязкостей:

1) если $\mu_2/\mu_1 > 1$, то вытеснение стабильно для $U > U_c$ и нестабильно для $U < U_c$;

2) если $\mu_2/\mu_1 < 1$, то вытеснение нестабильно для $U > U_c$ и стабильно для $U < U_c$.

Разность плотностей $(\rho_2 - \rho_1)$ влияет на знак скорости U_c: например, восходящее вертикальное вытеснение $(U > 0)$ при $\mu_2 > \mu_1$ и $\rho_2 > \rho_1$ всегда стабильно (рис. 2.4.7), так как U_c отрицательно. Когда вытеснение нестабильно, появляются «языки», которые при большом масштабе (превышающем макроскопический) могут рассматриваться как развитие процесса дисперсии.

Сравнение экспериментальных и теоретических результатов. Второй важный момент, который следует отметить, заключается в том, что классическое уравнение дисперсии, выведенное для случая трассера, может быть использовано, даже когда различия в плотности и вязкости жидкостей значительны. Однако если начальный профиль распределения концентрации представляет собой ступенчатую функцию, то получаемое решение отклоняется от теоретической кривой, отвечающей функции ошибок, несколько больше, чем в случае трассера.

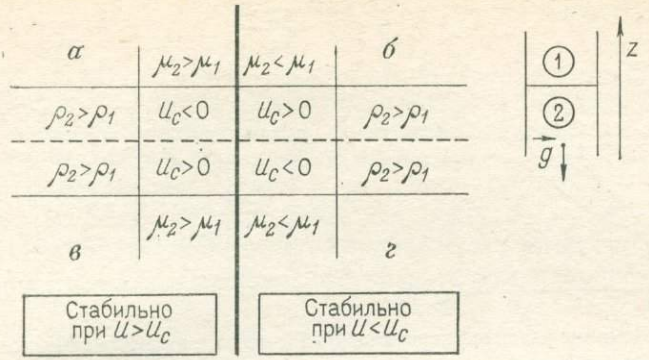


Рис. 2.4.7. Условия стабильности для вытеснения смешивающихся жидкостей. *а* — восходящее, всегда стабильное; *б* — нисходящее, всегда стабильное; *в* — нисходящее, всегда нестабильное; *г* — восходящее всегда нестабильное

И, наконец, обратим внимание на изучение влияния других параметров, роль которых может быть охарактеризована тремя безразмерными величинами (см. раздел 2.4.1). Очевидно, прежде всего это число Пекле Ud/D, а два других параметра M и R отражают влияние плотностей и вязкостей жидкостей:

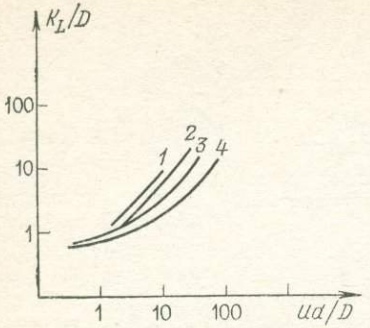
$$M = \mu_1/\mu_2, \quad R = [g\Delta\rho\,(k)^{3/2}]/(\mu D),$$

где μ — вязкость раствора при относительной концентрации, равной 0,5. Индекс соответствует вытесняемой жидкости. Опубликованные к настоящему времени результаты получены для случая неконсолидированной среды. Эксперименты проводились при постоянных значениях M или R, при которых соответственно изменились R или M. Вытеснение осуществлялось как путем восходящей [22], так и нисходящей [256, 159] фильтрации.

Влияние отношения вязкостей M. Серия экспериментов со значениями R, приблизительно равным 6700, была проведена Тахаром [256]. Значение R может показаться довольно высоким, но часто в полевых условиях значение R может быть и выше (более 100 000 — в некоторых технологических процессах при вытеснении нефти). Результаты экспериментов Тахара представлены на рис. 2.4.8 и 2.4.9.

Чем больше относительная вязкость вытесняющей жидкости, тем меньше коэффициент дисперсии. Более того, параметр M не оказывает влияния на перенос вещества в зоне чисто молекулярной диффузии. Клотц и Мозер [159] отмечают влияние на дисперсию температуры, обусловленное сопутствующими изменениями вязкостей жидкостей. Коэффициент дисперсии возрастает при увеличении вязкости с уменьшением температуры. Величина K_L приблизительно пропорциональна $v^{0,3}$ (рис. 2.4.10).

Влияние параметра R. В экспериментальных работах Бен Салаха [22] значение M принималось равным 0,214. Результаты



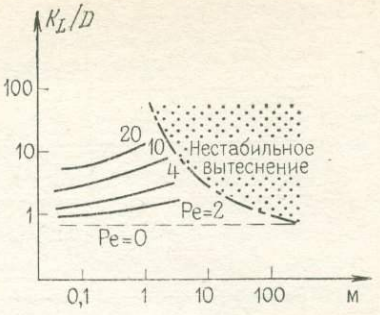


Рис. 2.4.8. Влияние различий вертикального вытеснения смешивающихся жидкостей от их вязкости.
1 — $M = 2{,}79$; *2* — $M = 1$; *3* — $M = 0{,}358$; *4* — $M = 0{,}047$ [256]

Рис. 2.4.9. Зависимость вертикального вытеснения смешивающихся жидкостей от относительной вязкости [256]

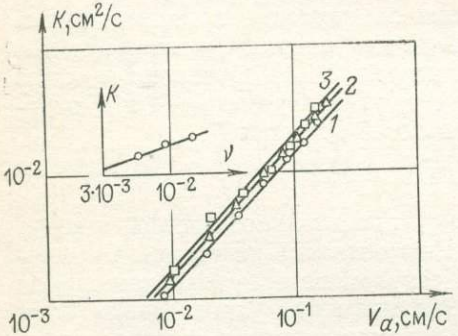
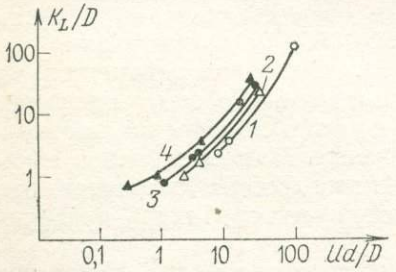


Рис. 2.4.10. Зависимость коэффициента продольной дисперсии от скорости V_a (для различных значений температуры воды T) и от кинематической вязкости ν для $V_a =$ $= 0{,}1$ см/с (песок 0,9—1,12 мм и шарики $d_{50} = 1{,}0$ мм).
1 — $T = 45$ °С; *2* — $T = 21$ °С; *3* — $T = 5$ °С [159]



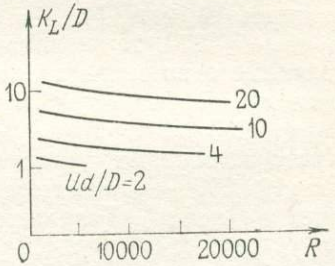


Рис. 2.4.11. Влияние различий плотности на вертикальное вытеснение смешивающихся жидкостей.
1 — $R = 650$; *2* — $R = 2450$; *3* — $R = 5200$; *4* — $R = 19\,600$ [22, 256]

Рис. 2.4.12. Зависимость вертикального вытеснения смешивающихся жидкостей от комплексной величины R [22, 256]

этих исследований приведены на рис. 2.4.11 и 2.4.12. Можно заметить, что чем больше отличия в значениях плотностей жидкостей, тем меньше коэффициент дисперсии. Этот эффект имеет место даже в диапазоне чисто молекулярной диффузии.

2.4.5. Общий случай—поперечная дисперсия

Результаты аналогичны полученным для продольной дисперсии. Различия значений вязкости и плотности жидкостей приводят к уменьшению коэффициента поперечной дисперсии. Различия в плотностях жидкостей сказываются даже в зоне чисто молекулярной диффузии.

Влияние различий плотностей изучалось посредством варьирования направлением средних скоростей в пористой среде, которое задавалось под различными углами к горизонтальной плоскости [28].

2.5. ЛАБОРАТОРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИСПЕРСИИ В ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЕ

Реальные задачи дисперсии связаны с гетерогенными средами. Однородная среда предопределяет простые условия и дает возможность довольно легко разделить относительное влияние различных параметров. Это позволило хорошо изучить основные механизмы дисперсии. В гетерогенных средах параметры тесно взаимосвязаны; они влияют друг на друга, и результаты могут существенно отличаться от тех, которые ожидаются согласно теории дисперсии в однородных средах. Почему же тогда напрасно затрачивалось время на изучение идеальной («академической») среды, если она во многом не соответствует реальным средам? К счастью, особенно это касается исследователей, которые посвятили так много работ этой проблеме, существует тесная взаимосвязь между теоретическими и практическими результатами. Можно дышать легче!

Интуитивно, мы представляем себе этот процесс как процесс изменения масштаба исследований от микроскопического до макроскопического уровня. Нельзя ли по аналогии с осреднением эффектов молекулярной и конвективной диффузии при описании дисперсии осреднить и сами дисперсионные эффекты, с тем чтобы описать некоторое сверхмакроскопическое явление в эквивалентной однородной среде? С целью ответа на этот вопрос мы приведем некоторые типичные эксперименты.

З а м е ч а н и е. Эта книга — не детективная история; поэтому еще до конца раздела полезно представить себе, что ответ на поставленный вопрос будет положительным!

2.5.1. Слоистая среда

Простейшей моделью гетерогенной среды является слоистая среда. Кроме того, часто встречающиеся в природе осадочные формации можно также отнести к слоистым, выделяя в пределах толщи пласты с различными значениями пористости и проницаемости. Для упрощения примем поток одномерным и параллельным наслоению, а плотность ρ жидкой фазы считаем постоянной. Урав-

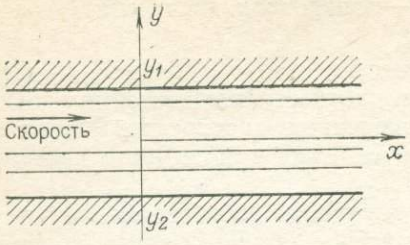


Рис. 2.5.1. Система координат

нение тогда — двумерное, причем ось x совпадает с направлением потока, а ось y перпендикулярна напластованию (рис. 2.5.1).

В этом простом случае тензор дисперсии сводится к двум компонентам K_L и K_T — коэффициентам продольной и поперечной дисперсии, которые зависят от y. Значение ρ постоянно, поток — одномерный, величина скорости U не зависит от x. Кроме того, полагаем, что Φ зависит от y.

Уравнение и граничные условия:

$$K_L(y)\Phi(y)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left[K_T(y)\Phi(y)\frac{\partial C}{\partial y}\right]-$$

$$-\Phi(y)\left(U\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial t}\right)=0,$$

$$\partial c/\partial y=0 \text{ для } y=y_1 \text{ и } y=y_2 \qquad (2.5.1)$$

Покажем теперь, что для больших промежутков времени, т. е. при достижении асимптотического режима в распределении концентрации, уравнение (2.5.1) можно свести к одномерному:

$$K_M\frac{\partial^2\bar{C}}{\partial x^2}-U_M\frac{\partial\bar{C}}{\partial x}=\frac{\partial\bar{C}}{\partial t}, \qquad (2.5.2)$$

где K_M — эквивалентный коэффициент дисперсии, $\bar{C}$ и U_M — осредненные значения концентрации и скорости.

Для решения задачи используется метод моментов Ариса, основные принципы которого приводятся ниже. Эксперименты проведены на моделях, выполненных в виде двух однородных пластов с различными физическими характеристиками; эти эксперименты подтверждают теоретические результаты.

Замечание. Идея замены сложной проблемы подобной хорошо известной элементарной проблемой вполне естественна и основана на принципе изменения масштаба. Этот подход аналогичен замене ряда сопротивлений эквивалентным в теории электрического тока.

Метод моментов Ариса. Решение уравнения (2.5.1) представляет собой распределение концентрации $C(x, y, t)$. Данное решение [184] может быть получено с использованием моментов $C^{(n)}(y, t)$ по x от распределения $C(x, y, t)$. Эти моменты определяются формулой:

$$C^{(n)}(y,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n C(x,y,t)\,dx.$$

Конечно, здесь возникает чисто математическая проблема: сходятся ли эти интегралы? Сходимость имеет место, если C уменьшается быстрее, чем любая степень от x, что отвечает случаю, когда концентрация C, возникающая от некоторого начального ступенчатого импульса, является гауссовой функцией (рис. 2.5.2).

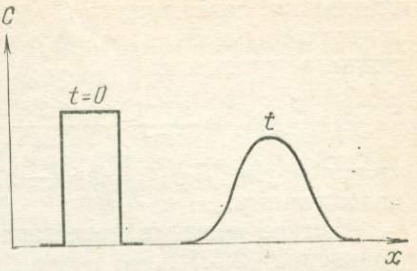


Рис. 2.5.2. Развитие ступенчатого импульса в результате дисперсии.
C — концентрация для данного y

Это условие не является сильным ограничением, так как новые решения, будучи линейными, могут быть получены методом суперпозиции. Интерес представляет исследование физического смысла первых моментов: $C^{(0)}$ — общее количество жидкости претерпевшей дисперсию; $C^{(1)}$ — координата центра масс выходной кривой; $C^{(z)}$ — характеристика переходной зоны.

Пусть моменты рассчитываются в системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью $\overline{U}$, определяемой выражением:

$$\overline{U} = \left(\int_{y_1}^{y_2} \Phi U dy\right) \Big/ \left(\int_{y_1}^{y_2} \Phi dy\right).$$

В этой системе скорость определяется как $W = U - \overline{U}$.

Арис рассчитывает различные моменты для распределения концентраций (т. е. для решения уравнения (2.5.1)) из ряда уравнений моментов, полученных из (2.5.1) путем вычисления моментов различных порядков для каждого из его членов:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial}{\partial y}\left(K_T \Phi \frac{\partial C^{(n)}}{\partial y}\right) - \frac{\partial C^{(n)}}{\partial t} = -nWC^{(n-1)} - n(n-1)K_L C^{(n-2)},$$

$$\partial C^{(n)}/\partial y = 0 \text{ для } y = y_1 \text{ и } y = y_2. \qquad (2.5.3)$$

Эта система затем решается методом индукции, начиная с $n = 0$. Для $n = 0$ выражение (2.5.3) дает:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial}{\partial y}\left(K_T \Phi \frac{\partial C^{(0)}}{\partial y}\right) - \frac{\partial C^{(0)}}{\partial t} = 0,$$

$$\partial C^{(0)}/\partial y = 0 \text{ для } y = y_2 \text{ и } y = y_1. \qquad (2.5.4)$$

Уравнение (2.5.4) решается методом разделения переменных и дает конечную серию решений вида:

$$a_i(y)\exp(-\omega_i t), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 < \ldots < \omega_{i-1} < \omega_i < \ldots$$

Для $n = k$ правая часть уравнения (2.5.3) известна из решений, определенных для $n < k$. Следовательно, общее решение уравнения (2.5.3) для $n = k$ является суммой их решений однородного

уравнения, содержащего $C^{(n)}$ в левой части (что идентично (2.5.4), и частного решения полного уравнения. Общим решением однородного уравнения

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial}{\partial y}\left(K_T\Phi\frac{\partial C^{(n)}}{\partial y}\right)-\frac{\partial C^{(n)}}{\partial t}=0$$

является ряд $\sum_i a_i(y)\exp(-w_i t)$, определенный согласно вышеизложенному.

Частное решение представляет собой суперпозицию решений уравнения (2.5.3), где правая часть последовательно заменяется рядами для $C^{(n-1)}$ и $C^{(n-2)}$, вычисленными по индукции из $C^{(0)}$. Легко определить и главный член ряда при $t\to\infty$. Различные моменты при этом выражаются так:

$$\begin{aligned}
C^{(0)} &= a_0+O(y,t),\\
C^{(1)} &= a_0\psi(y)+O(y,t),\\
C^{(2)} &= 2\overline{K}a_0t+Q(y)+O(y,t),\\
&\cdots\\
C^{(2p)} &= \frac{(2p)!\,(2\overline{K}t)^p}{2^p p!}a_0+t^p\cdot O(y,t),\\
C^{(2p+1)} &= \frac{(2p+1)!\,(2\overline{K}t)^p}{2^p p!}a_0\psi(y)+t^p\cdot O(y,t),\\
&\cdots
\end{aligned}\qquad(2.5.5)$$

где функция $0(y,\ t)\to 0$ при $t\to\infty$.

$$\begin{aligned}
\psi(y) &= -\int_{y_1}^{y}\frac{\varphi(y)}{K_T\Phi}\,dy+\text{const},\\
\varphi(y) &= \int_{y_1}^{y}\Phi W\,dy,\quad \varphi(y_1)=\varphi(y_2)=0,\\
\overline{K} &= \frac{2}{(y_2-y_1)\,\overline{\Phi}}\left(\int_{y_1}^{y_2}K_L\Phi\,dy+\int_{y_1}^{y_2}\frac{\varphi^2}{K_T\Phi}dy\right),\\
Q(y) &= \int_{y_1}^{y}\frac{2}{K_T\Phi}\left[\int_{y_1}^{y}(\overline{K}-W\psi(\xi)-K_L)\,\Phi\,d\xi\right]dy,\\
\overline{\Phi} &= \frac{1}{y_2-y_1}\int_{y_1}^{y_2}\Phi\,dy.
\end{aligned}\qquad(2.5.6)$$

Эквивалентный коэффициент дисперсии. Моменты $C^{(n)}$ сравниваются (для больших значений t) с моментами, вычисленными по решениям (распределениям концентрации) для более простых систем. Хорошим вариантом такой упрощенной системы может являться уравнение одномерной дисперсии для однородного пласта, которое позволяет получить эквивалентный коэффициент дисперсии. Это уравнение повторяется здесь:

$$K_M \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} - \left(U_M \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{C}}{\partial t} \right) = 0.$$

В системе отсчета, движущейся со скоростью U_M, моменты для решения этого уравнения таковы:

$$\begin{aligned}
&\overline{C}^{(0)} = \text{const}, \\
&\overline{C}^{(1)} = \text{const}, \\
&\overline{C}^{(2)} = 2K_M t + \text{const}, \\
&\overline{C}^{(2p)} = \frac{(2p)!\,(2K_M t)^p}{2^p p!}\,\overline{C}^{(0)} + t^p O(t), \\
&\overline{C}^{(2p+1)} = \frac{(2p+1)!\,(2K_M t)!}{2^p p!}\,\overline{C}^{(1)} + t^p O(t).
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Идентичность систем (2.5.5) и (2.5.7) будет иметь место, когда:

$$\begin{aligned}
&\overline{C} = \frac{1}{\overline{\Phi}(y_2 - y_1)} \int_{y_1}^{y_2} \Phi C \, dy, \\
&U_M = \overline{U} = \int_{y_1}^{y_2} \Phi U \, dy \Big/ \int_{y_1}^{y_2} \Phi \, dy, \\
&K_M = \overline{K} = \frac{1}{\overline{\Phi}(y_2 - y_1)} \left(\int_{y_1}^{y_2} K_L \Phi \, dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\varphi^2}{K_T \Phi} dy \right).
\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Таким образом, асимптотический режим слоистой пористой среды идентичен режиму эквивалентной однородной среды, определяемой выражениями (2.5.8). Для решения реальных проблем часто требуется хорошее знание именно асимптотического режима процесса дисперсии, так что полученные здесь результаты являются достаточно важными.

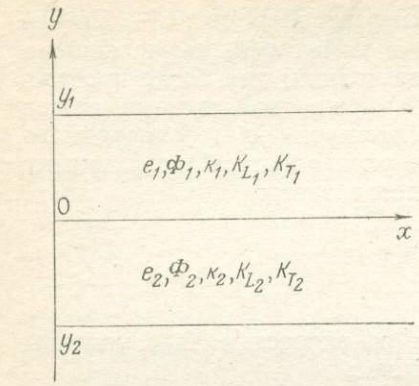


Рис. 2.5.3. Характеристики модели двуслойного пласта (мощность, пористость, проницаемость и коэффициенты дисперсии)

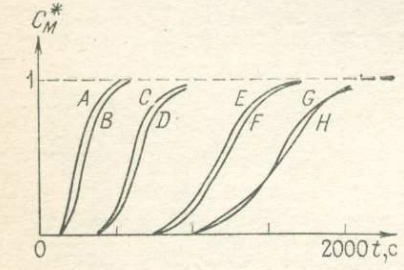




Рис. 2.5.4. Изменение концентрации водорода во времени в восьми точках измерения в четырех сечениях двухслойной модели (начальный импульс концентрации — ступенчатый, скорость постоянна)

Рис. 2.5.5. Профили концентраций в двухслойном пласте в различные периоды времени.
1 — $t = 400$ с; *2* — $t = 700$; *3* — $t = 1000$ с; *4* — $t = 1300$ с

Пример двухслойного пласта [184]. Характеристику такого пласта дает рис. 2.5.3. Уравнение и граничные условия:

$$K_{L_1}\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + K_{T_1}\frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} - U_1\frac{\partial C_1}{\partial x} = \frac{\partial C_1}{\partial t};$$

$$K_{L_2}\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + K_{T_2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} - U_2\frac{\partial C^2}{\partial x} = \frac{\partial C_2}{\partial t}; \qquad (2.5.9)$$

$$y = y_1, \quad \partial C_1/\partial y = 0; \quad y = y_2, \quad \partial C_2/\partial y = 0;$$

$$y = 0, \quad \Phi_1 K_{T_1}(\partial C_1/\partial y) = \Phi_2 K_{T_2}(\partial C_2/\partial y).$$

Средняя скорость U_M определяется из выражения:

$$U_M = (\Phi_1 e_1 U_1 + \Phi_2 e_2 U_2)/(\Phi_1 e_1 + \Phi_2 e_2),$$

где U_1 и U_2 — значения средних скоростей в каждом слое.

Использование метода Ариса дает следующие результаты: асимптотический режим для распределения средней концентрации

отвечает решению эквивалентного уравнения (2.5.2), в котором K_M определяется выражением вида:

$$K_M = \frac{\Phi_1 e_1 K_{L_1} + \Phi_2 e_2 K_{L_2}}{\Phi_1 e_1 + \Phi_2 e_2} + \frac{1}{3} \frac{\Phi_1^2 \Phi_2^2 e_1^2 e_2^2}{(\Phi_1 e_1 + \Phi_2 e_2)^3} \times$$

$$\times \left[\frac{e_1}{\Phi_1 K_{T_1}} + \frac{e_2}{\Phi_3 K_{T_2}} \right] (U_1 - U_2)^2. \qquad (2.5.10)$$

Другой интересный результат, характеризующий асимптотический режим, состоит в том, что для каждой трубки тока $(y,\ y + \mathrm{d}y)$ координата центра тяжести профиля концентрации имеет фиксированное положение в движущейся системе координат. Кроме того, профиль концентрации по оси слоя 2 может быть получен преобразованием профиля, отвечающего оси слоя 1.

Лабораторные эксперименты для двухслойного пласта были проведены с газами (водород—азот, этилен—азот), которые имеют высокие значения коэффициентов диффузии (асимптотический режим достигается быстро). Результаты представлены на рис. 2.5.4 и 2.5.5.

1. Наблюдается асимптотический режим, что подтверждается наличием двух идентичных профилей концентраций в каждом слое, причем расстояние между обоими профилями является постоянным (см. рис. 2.5.4).

2. Асимптотический режим идентичен режиму, наблюдаемому в однородных средах: в специальных координатах получаются классические прямолинейные профили концентраций (см. рис. 2.5.5).

Формула (2.5.10) подтверждается экспериментально.

2.5.2. Гетерогенная нестратифицированная среда

Экспериментальные работы проведены [186] на блоках песчаников Фонтенебло различной длины с растворами NaCl, а также с азотом и CO_2. Они показали, что:

1) асимптотический режим действительно достигается и он эквивалентен таковому в однородной среде; вместе с тем этот режим достигается только в том случае, когда расстояние, пройденное переходной зоной, велико по сравнению с размерами неоднородностей;

2) значения эквивалентного коэффициента дисперсии больше, чем в однородной среде (рис. 2.5.6);

3) предлагается формула, идентичная (2.4.5):

$$K = \left(\frac{K}{D} \right)_0 D + \beta U^m D^{1-m},$$

где β — параметр дисперсии, зависящий от степени гетерогенности среды.

Замечание: В практических оценках величину m обычно принимают равной 1.

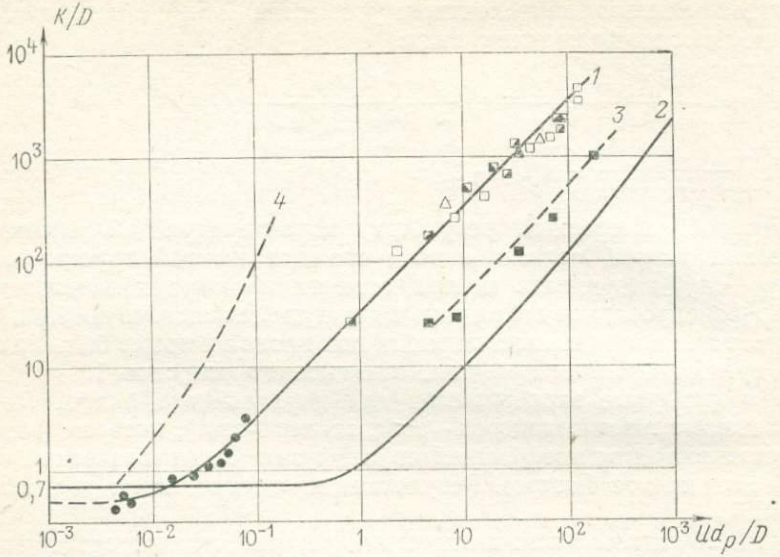


Рис. 2.5.6. Графики сравнения значений коэффициентов продольной дисперсии, полученные для гетерогенной среды (*1* и *3*) и однородной среды (*2* и *4*), соответствующей двухслойной модели [186]

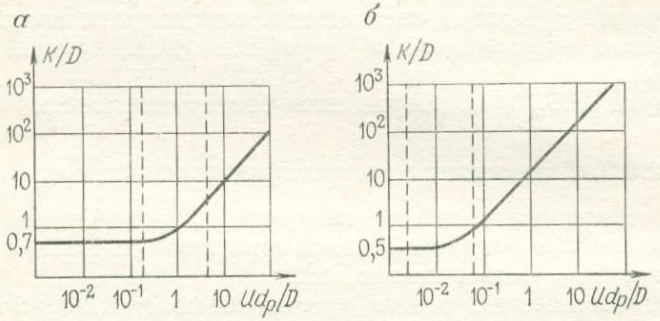


Рис. 2.5.7. Режимы дисперсии.

а — однородная среда; *б* — гетерогенная среда [186]

2.5.3. Вывод

Теория дисперсии может быть распространена на любую среду. Результаты, полученные для однородной среды, являются справедливыми и для гетерогенных сред, но область соответствующих числовых критериев изменяется. Полуэмпирические формулы типа (2.4.5), соотнесенные с различными режимами дисперсии, будут иметь место и в этом случае; заметим, однако, что область доминирующей роли диффузии для гетерогенных сред может быть значительно меньше, чем для однородных (рис. 2.5.7).

ГЛАВА 3
МЕТОДИКА И ТЕХНИКА ИЗУЧЕНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЙ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Методика изучения загрязнений подземных вод основана на том, что в большинстве случаев загрязнители смешиваются с подземными водами или, по крайней мере, ведут себя как трассеры, и что развитием некоторых переходных зон пренебрегать нельзя. Мы уже видели в предыдущей главе, что смешивающийся с природной водой поток загрязнителей подчиняется законам теории дисперсии. Конечно, процесс распространения некоторых загрязнителей не может быть однозначно объяснен этой теорией, но так как в большинстве практических случаев их движение отвечает закону Дарси и уравнению неразрывности, то, как мы увидим, они также «автоматически» охватываются общей методикой, одной из задач которой является установление различий между явлениями дисперсионного и чисто конвективного переноса.

Масштаб процесса загрязнения определяет методы, используемые для борьбы с ним. Таким образом, задача методики состоит в том, чтобы оценить этот масштаб и выбрать средства, которые могли бы повлиять на процесс загрязнения. Достигается это путем проведения различных экспериментов с последующим привлечением математического аппарата, подходящего для изучения явления загрязнения.

3.1. ПРОБЛЕМА МАСШТАБА

Эта проблема имеет два аспекта.

1. Иногда можно пренебречь дисперсионными эффектами и трактовать явление как перенос несмешивающегося загрязнения.

Например, представим одномерный поток с постоянной скоростью и запуск загрязнителя с постоянным расходом. Расширение переходной зоны пропорционально квадратному корню времени (см. раздел 4.1.1); пройденный путь L пропорционален времени согласно формуле $L = ut$. Таким образом, ширина e переходной зоны пропорциональна $L^{1/2}$, а относительная ширина e/L пропорциональна $L^{1/2}/L$. Когда L возрастает, $L^{1/2}/L$ уменьшается; это означает, что при больших расстояниях эффекты дисперсии ослабевают и менее важны по сравнению с эффектами конвекции. Тогда поток смешивающихся загрязнений может трактоваться как перенос несмешивающегося загрязнения, т. е. поршневое вытеснение со средней действительной скоростью фильтрации, если пройденные пути велики по сравнению с размерами источника загрязнения.

2. Лабораторное изучение и многие полевые эксперименты дают локальные результаты (например, значений коэффициента дисперсии). Реальные загрязнения могут быть значительно более экстенсивными, так что может потребоваться большее число экспериментов, обычно дорогостоящих, для получения всех необходимых характерных параметров. Представительные значения полевых параметров должны определяться в относительно небольших объемах, чтобы поставить в разумные рамки стоимость экспериментов без значительной потери точности при моделировании. Таким образом, методика должна обосновываться так, чтобы теория загрязнения подземных вод, разработанная при лабораторном изучении дисперсии, была применима к реальным полевым условиям. Это, главным образом, проблема изменения масштаба, которая появляется, когда лабораторная теория дисперсии применяется к полевому загрязнению, а также в поле, когда некоторые масштабы загрязнения изучаются одновременно (масштаб загрязнения, который определяется общим количеством случайного загрязнения, мощностью источника загрязнения и вовлеченным в загрязнение объемом грунта).

3.2. МЕТОДИКА

3.2.1. Критерий принятия решения

Лица, сталкивающиеся с проблемой загрязнения подземных вод и ответственные за ее решение, должны ответить на ряд вопросов:

1. Какова природа загрязнения:
— смешивается ли оно с водой?
— каковы его физические и химические свойства?
— какую опасность оно представляет?
2. Каков масштаб загрязнения:
— каково общее количество загрязнения?
— какова мощность источника загрязнения?
— каковы размеры и геометрические характеристики источника загрязнения?
— каков вовлеченный в загрязнение объем грунта?
— какова продолжительность загрязнения?

Предварительные ответы на эти вопросы, даже весьма ориентировочные, являются критериями принятия решения, необходимыми для выбора адаптированной модели и методов исследования. Эти ответы вытекают из изучения имеющихся данных; но иногда все же трудно принять решение. Например, коэффициенты дисперсии являются существенно локальными параметрами (полное математическое доказательство этой особенности дается в главе 8); следовательно, явления дисперсии тоже являются локальными, переходная зона увеличивается медленно, и в конечном итоге теория дисперсии имеет смысл только для больших проме-

жутков времени (этим объясняется, почему большинство лабораторных работ по дисперсии выполняется для асимптотического режима, при котором достигается некоторое стационарное состояние, что показано в главе 2); между тем, как уже показано в разделе 3.1, для очень больших промежутков времени дисперсия мала по сравнению с размером загрязненной площади. Правда, на деле асимптотический режим обычно достигается достаточно быстро, что позволяет легче принять решение о том, какой тип модели загрязнения следует выбрать.

Типичной задачей является определение количества загрязнения, переносимого через водоносный горизонт в реки, и среднего времени пребывания загрязнения в водоносном горизонте. Это — региональная задача; можно установить, что ширина переходной зоны мала по сравнению с размерами изучаемой площади и пригодна модель поршневого вытеснения (т. е. модель движения без дисперсии). Другой проблемой является определение зоны санитарной охраны для водозаборной скважины; это локальная задача, и в ней дисперсию следует учитывать.

Пусть имеет место случайное загрязнение. Критическое значение концентрации в скважине может быть достигнуто из-за дисперсии еще до подхода фронта загрязнения (по схеме поршневого вытеснения), или это значение вообще не будет достигнуто из-за разбавления. В последнем случае вполне пригодна модель гидродисперсии (модель, которая учитывает и дисперсию, и конвекцию).

В общем случае, решение первого вопроса сводится к выбору типа структуры загрязнения и ее моделированию. При этом учитывается, что наиболее опасные и частые загрязнители водоносного горизонта смешиваются с пластовой водой, а несмешивающиеся соединения могут вести себя как трассеры и также рассматриваться как смешивающиеся вещества. Масштабные факторы являются наиболее важными критериями принятия решения и с трудом поддаются изучению. Например, дисперсию следует принимать во внимание в случае значительных источников загрязнения, но нередко также — и в случаях источников с малыми размерами, если должна критически оцениваться возможность достижения концентраций.

3.2.2. Дисперсионная схема

Назовем «дисперсионной» схемой следующую систему уравнений:
1) уравнение дисперсии:

$$\operatorname{div}\left[K\rho\left(\operatorname{grad}\frac{c}{\rho}\right)\right] - \operatorname{div}(uc) = \frac{\partial c}{\partial t},$$

2) уравнение неразрывности:

$$\operatorname{div}(\rho u) = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

3) уравнение Дарси:

$$u = -\frac{\mathbf{k}}{\mu\Phi}(\operatorname{grad} p + \rho g \operatorname{grad} z),$$

4) уравнения состояния смеси:

$$\rho = f(c), \quad \mu = g(c), \quad D = D(c),$$

где c — концентрация загрязнения; D — коэффициент молекулярной диффузии; $\mathbf{K}$ — тензор дисперсии; $\mathbf{k}$ — тензор проницаемости; p — давление; t — время; u — действительная скорость; Φ — пористость; μ — динамическая вязкость; ρ — плотность смеси. Дисперсионная схема замыкается граничными начальными условиями, зависящими от задачи.

Замечание. Температура в водоносном горизонте изменяется незначительно и не принимается во внимание в уравнениях состояния.

Математически дисперсионную схему можно представить в виде нелинейной системы уравнений в частных производных, поскольку коэффициенты уравнения дисперсии зависят от решения уравнения, которое выражается через плотность и скорость движения смеси. Прямого метода, позволяющего решить эту систему не существует, поэтому следует ввести упрощающие допущения, чтобы получить эффективный метод, дающий практические решения, т. е. такие, которые, будучи не слишком строгими с математической точки зрения, могут быть найдены с достаточно высокой точностью именно людьми, ответственными за решение проблемы загрязнения. Упрощение дисперсионной схемы осуществляется согласно определенному набору правил, которые даются как часть общей методологии под названием практическое применение дисперсионной схемы.

3.2.3. Практическое применение дисперсионной схемы

Существует два основных варианта применения дисперсионной схемы: 1) плотность и вязкость смеси изменяются с концентрацией (общий случай); 2) плотность и вязкость смеси постоянны (случай трассера).

Замечание. В примерах, разобранных в главе 6, изменениями вязкости можно всегда пренебречь.

Оба случая представлены на блок-схемах (рис. 3.2.1 и 3.2.2), которые показывают их принципиальные различия [110].

1. В случае трассера гидродинамические уравнения не зависят от уравнения дисперсии, поскольку плотность и вязкость постоянны, скорость смеси не зависит от концентрации загрязнения. Дисперсионная схема становится линейной системой уравнений в частных производных и решается в соответствии со следующей процедурой. Сначала решаются гидродинамические уравнения (уравнение Дарси и уравнение неразрывности), обычно опреде-

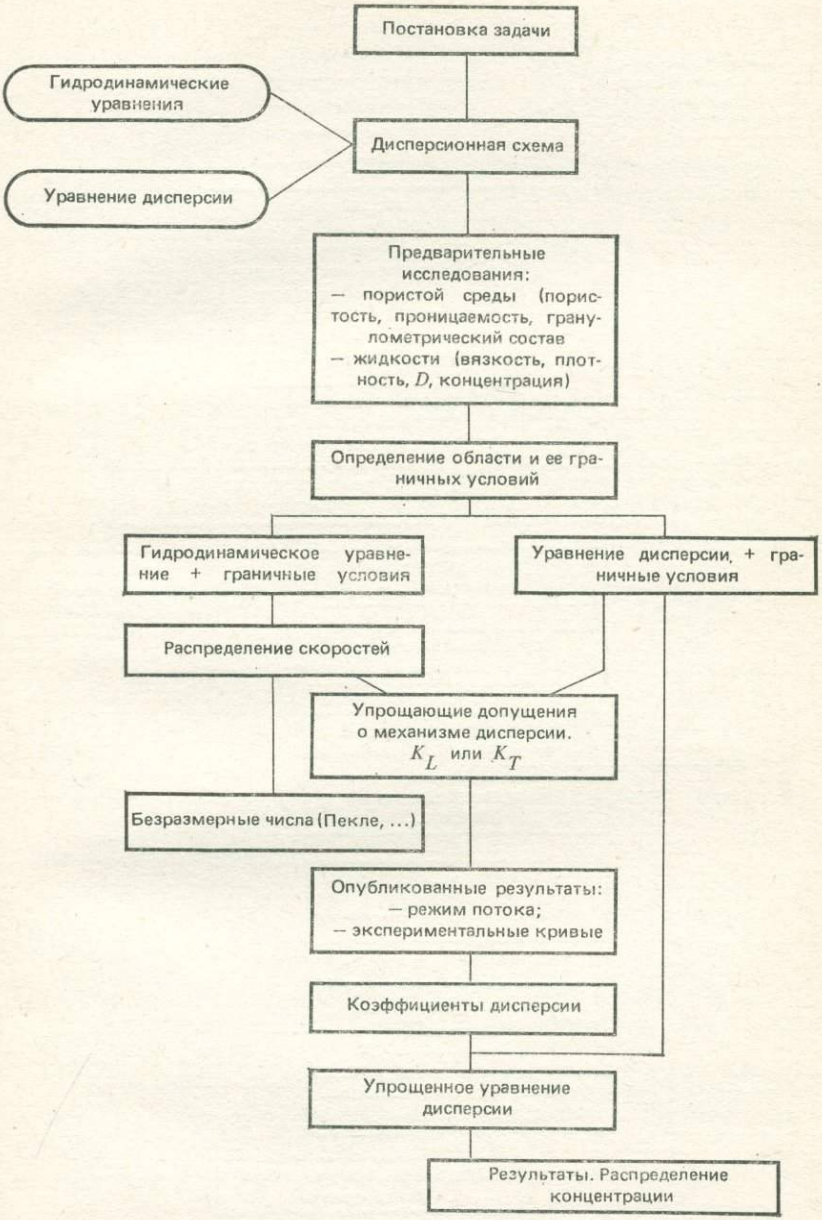


Рис. 3.2.1. Использование дисперсионной схемы в случае трассера

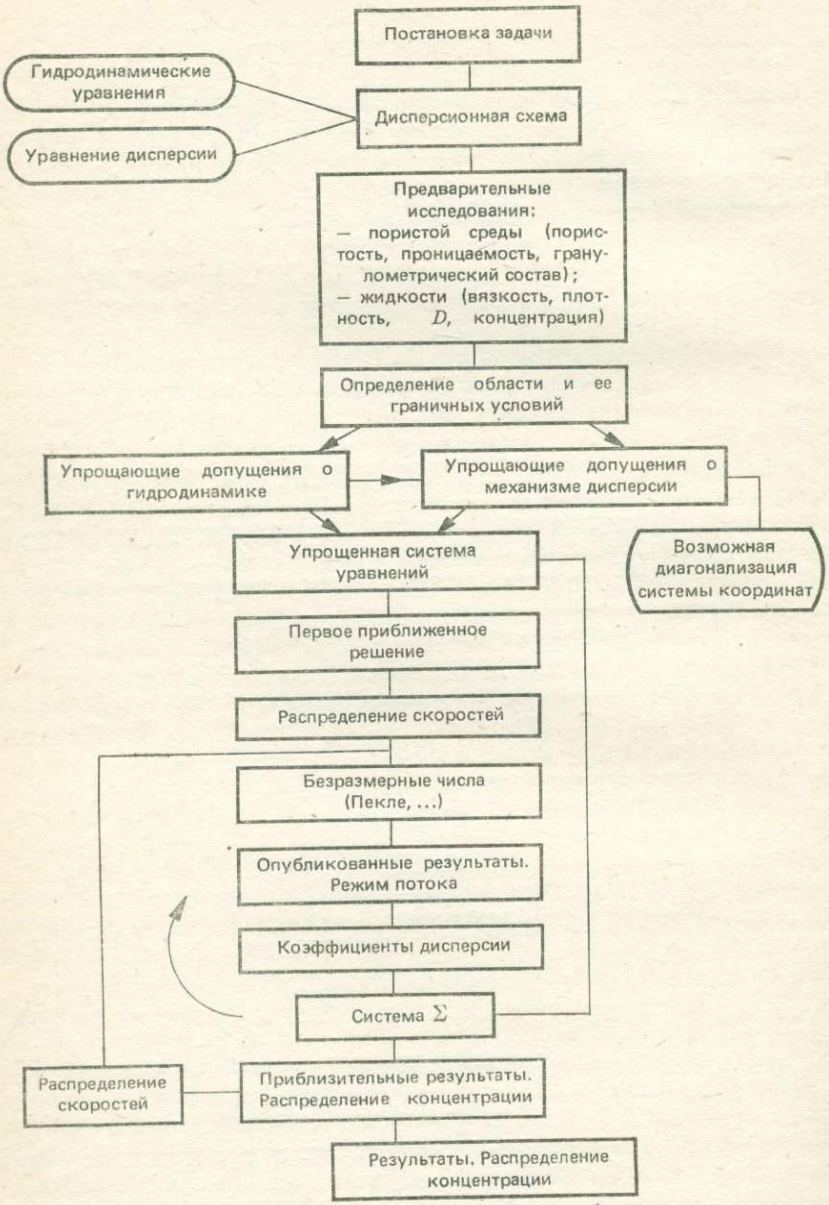


Рис. 3.2.2. Использование дисперсионной схемы в общем случае

ляются напоры или давления при заданных граничных явлениях и начальных условиях. Таким образом, получается распределение скорости в пространстве и во времени для всех временных шагов эксперимента. Затем на каждом временном шаге коэффициент уравнения дисперсии выражается через скорости и из уравнения дисперсии, его граничных и начальных условий (глава 5) определяется распределение концентраций в пространстве и во времени для всех временных шагов.

2. В общем случае гидродинамические и дисперсионные уравнения зависят друг от друга, так как коэффициенты уравнения дисперсии являются функциями скорости смеси, которая в свою очередь является функцией концентрации загрязнения, выраженной через вязкость и плотность. Одновременно решение всех уравнений дисперсионной схемы, как требуется в точной математической постановке, получить не удается, поэтому вводится процедура приближенного решения. По известному распределению концентрации на момент времени t рассчитывается соответствующее распределение вязкостей и плотностей; вязкости и плотности предполагаются постоянными для всего временного шага $\mathrm{d}t$ и из соответствующего распределения скоростей рассчитываются концентрации на момент времени $t + \mathrm{d}t$ (конечно, в пределах одного временного шага). Процедура повторяется до достижения сходимости по c (см. главу 5).

Эти блок-схемы нуждаются в некоторых пояснениях.

1. Теоретически все коэффициенты тензора дисперсии могут быть подсчитаны либо прямыми экспериментами, либо по определяющим его значениям параметров, определенным экспериментально, с использованием формул связи тензора с изменениями координат. Однако общее уравнение дисперсии со смешанными частными производными второго порядка (такими, как $\partial/\partial x\,\partial y$) довольно трудно решить численно. Поэтому очень важно попытаться упростить это уравнение изъятием прямоугольных производных, что можно сделать, записывая уравнение в главных направлениях тензора дисперсии и вводя главные значения коэффициентов дисперсии K_L и K_T (см. блок 8 рис. 3.2.1 и 6 на рис. 3.2.2).

2. Еще большее упрощение дисперсионной схемы может быть получено представлением трехмерной схемы в виде двух двумерных, каждая из которых записана в плоскости двух главных направлений дисперсии.

3. Существует пять режимов дисперсии, зависящих от дисперсионного числа Пекле. Коэффициенты дисперсии описываются полуэмпирической формулой:

$$K/D = \alpha\,(Ud/D)^m + \beta,$$

каждый режим характеризуется значениями коэффициентов α, β, m и областью графика (K/D и Ud/D), что детально рассмотрено в разделе 2.4.

В каждом эксперименте режим дисперсии определяется вычислением числа Пекле. Сравнение с уже опубликованными кривыми (см. рис. 2.4.2 и 2.4.6) дает значения α, β, m (см. блоки 9, 10, 11 рис. 3.2.1 и 10, 11, 22 рис. 3.2.2).

Замечание. Необходимо отметить, что в большинстве аллювиальных водоносных горизонтов режим дисперсии загрязнения является чисто динамическим режимом дисперсии и коэффициенты K пропорциональны действительной скорости фильтрации. Они записываются в виде $K = \alpha U$, где α — структурный параметр, зависящий от вида грунта, проницаемости и консолидации. В других случаях формула $K = \alpha U$ может быть часто использована как удовлетворительное приближение.

Ниже приводится сводка практических правил, которых необходимо придерживаться при изучении дисперсии.

1. Выделяются два случая: а — случай трассера, когда коэффициент молекулярной диффузии, плотность и вязкость постоянны; схема дисперсии линейна и гидродинамические уравнения не зависят от уравнения дисперсии и решаются первыми для всех временных шагов; б — общий случай, когда система не линейна; уравнения взаимосвязаны и используются только численные методы, такие как итерационные процедуры, принимающие во внимание эту зависимость.

2. Тензор дисперсии приводится к диагональному виду в системе координат, образуемой касательной к линии тока и перпендикуляром к ней.

3. Главные значения коэффициентов K тензора дисперсии могут быть записаны в виде:

$$K/D = \alpha\,(Pe)^m + \beta,$$

где все коэффициенты определены в разделе 2.4.2.

4. Для расчетов распределения концентрации загрязнения, коэффициенты дисперсии и скорости должны быть известными в пространстве и во времени. Скорости получаются по данным полевых измерений (прямые методы) и на основе гидрологических моделей (пьезометрические методы), а коэффициенты дисперсии определяются из полевых наблюдений на участках загрязнения или из трассерных опытов.

3.2.4. Общая методика

Общая методика включает четыре стадии.

1. Предварительное изучение имеющихся данных для оценки параметра потока и возможных типов загрязнения (локальное, региональное, горизонтальное, вертикальное и т. д.). Эти данные обычно включают проницаемости, морфологические параметры грунтов, концентрации загрязнения.

2. Формулировка рабочей гипотезы на основе предварительного изучения: математическое представление выбирается в соот-

ветствии с размером области и масштабом загрязнения; обычно это или конвективная модель поршневого вытеснения (несмешивающийся поток без дисперсии), или дисперсионная модель. Если выбрана первая модель, то задача загрязнения сводится к классической гидрогеологической задаче, где определяется только движение подземных вод. Если выбрана дисперсионная модель, то методика включает в себя еще две стадии.

3. Использование дисперсионной схемы.

4. Сбор полевых параметров. Обычно на этой стадии возможно два варианта: либо имеются источники загрязнения и модели приспосабливаются к природным распределениям концентраций трассера, на базе которых определяются коэффициенты дисперсии, либо никакого загрязнения нет и необходимо ввести те или иные трассеры. Определяемые полевые параметры — обычно скорости и коэффициенты дисперсии.

3.3. ПРИМЕРЫ. ТИПОВЫЕ ПРОЕКТЫ

С целью иллюстрации возможного применения методики изучения загрязнения подземных вод рассмотрим некоторые типовые проекты, которые могут представить собой основу для заключения контрактов по изучению загрязнений.

3.3.1. Изучение возможного загрязнения подземных вод крупного водоносного горизонта, используемого для водоснабжения городов

Цели изучения. Основная цель изучения — обеспечение защиты водозаборных скважин от различных возможных загрязнений, в их числе:

— внедрение загрязнений, локализованных во времени и пространстве (случайные загрязнения),

— внедрение загрязнений, локализованных в пространстве, но длительных во времени (захоронения отходов),

— внедрение крупномасштабных и длительных во времени загрязнений (например, внесение удобрений).

Задачи исследований:

1. Оперативная оценка вероятности случайного попадания загрязнения в водозаборную скважину.

2. Определение поступления существующих или неизбежных загрязнений в скважине, особенно с учетом режимов откачки.

3. Выделение зон, подверженных быстрому загрязнению с целью выбора участков расположения новых скважин.

4. Построение крупномасштабной модели, как количественной основы прогноза и управления.

5. Оповещение общественности о развитии загрязнения простыми наглядными иллюстрациями.

Проблема. Для составления программы опытных исследований возникает необходимость правильной постановки проблемы.

На этой стадии, исходя из ориентировочных предварительных исследований, должен быть сделан выбор моделей и сформулированы критерии принятия решений.

Эти предварительные исследования включают анкетный опрос местных властей, чтобы собрать некоторые данные о типе существующего и ожидаемого загрязнений. Кроме того, из формулировки целей видно, что данная проблема многоплановая. Поэтому наиболее вероятно, что окажутся необходимыми обе модели — поршневого вытеснения и дисперсионная, и в программу должна быть включена последовательность их решений. Короче говоря, эта задача разноплановая, дисперсионная при малых, а подчас и при больших масштабах исследования и чисто конвективная модель поршневого вытеснения — при больших масштабах.

Программа. Программа включает этапы, которые отражают необходимость тщательного выделения различных масштабов и последовательного перехода от локального к региональному масштабу.

На основе предварительных исследований область разделяется на однородные в геологическом отношении зоны. Каждая зона подразделяется на экспериментальные участки, включающие одну или несколько скважин. Чтобы представить порядок величин, отметим, что эксперименты в аллювиальных водоносных горизонтах проводились на опытных участках площадью от 0,002 до 3 км^2, в зонах площадью от 10 до 50 км^2 и в областях — 50—300 км^2, а в водоносных горизонтах, сложенных трещиноватыми горными породами, площади областей исследования загрязнений достигали 3000 км^2 (см. главу 6).

На каждом участке затем должны быть выполнены эксперименты для определения гидрогеологических параметров (таких, как пористость и проницаемость) и параметров загрязнения (коэффициенты дисперсии). Эти параметры используются в прогнозных моделях, отвечающих задачам 1 и 2.

Такой экспериментальный участок представляет собой элементарный блок более крупной модели, соответствующей выделенной зоне. Сначала с помощью моделей участков устанавливается совместимость условий на границе блоков, особенно условия неразрывности потоков. Затем строится осредненная эквивалентная модель (путем расчета нового набора эквивалентных коэффициентов дисперсии), включающая граничные условия блоков и использующая новые — зональные граничные условия.

Зональные модели направлены на изучение существующего загрязнения и отвечают задаче 3. Тогда зоны используются как элементарные блоки в модели области — сначала путем совмещения зональных моделей с соблюдением условий совместимости на их границах, а затем в пределах модели, представляющей область, с эквивалентными крупномасштабными коэффициентами.

На этой стадии дисперсией иногда можно пренебречь, и модель области будет представлена моделью поршневого вытеснения,

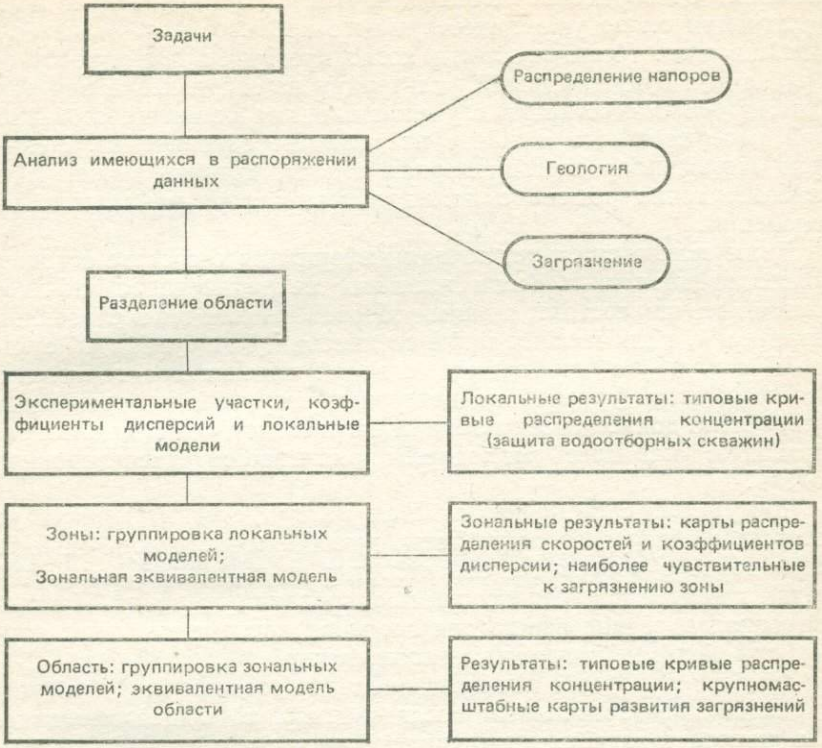


Рис. 3.3.1. Типовая схема. Изучение загрязнения водоносного горизонта, используемого для городского водоснабжения

т. е. условием соблюдения баланса вещества; она отвечает задачам 4 и 5.

Эта программа резюмирована на блок-схеме рис. 3.3.1.

Модели. В общем случае модели областей двумерны. Используется полная матрица дисперсии (а не только диагональная форма) в канонических прямоугольных координатах с классическими покоординатными формулами перехода от общей формы к диагональной и наоборот.

Результаты. Результаты представляют собой прогнозные модели, планы зон, подверженных загрязнению (планы скоростей и коэффициентов дисперсии), и типичные кривые концентраций.

3.3.2. Размещение полей фильтрации вблизи городских территорий

Проблема. Быстро развивающийся город увеличивает потребление воды, откачиваемой из нижележащего безнапорного водоносного горизонта, что приводит к расширению сети водозаборных

скважин; одновременно необходимо построить два новых поля фильтрации около уже существующего поблизости от водозаборных скважин. Местные власти хотят предвидеть влияние существующих и будущих полей фильтрации на загрязнение при различных режимах откачки с учетом влияния сезонных особенностей поверхностного питания на развитие загрязнения. Это — ярко выраженная нестационарная задача, которая может быть наиболее точно решена с помощью математической модели загрязнения.

Даже если отсутствует точная информация о составе отходов, можно предположить (если властями не установлено что-либо другое), что они состоят, главным образом, из отходов застроенных территорий, включающих такие соединения, как сульфаты, сульфиды и т. д., смешивающиеся с водой водоносного горизонта; для выявления уровней концентрации загрязнения, сравнимых с предельно допустимыми нормами загрязнения воды водоносного горизонта, наиболее подходящей оказывается дисперсионная модель.

Программа. Она подразделяется на три стадии, каждая из которых обеспечивает результаты, дающие возможность оценить загрязнение с возрастающей точностью и переходить от одной стадии к другой при финансовом планировании операции. Поэтапное финансирование важно для городов, которые не могут планировать большие издержки единовременно.

Стадия 1 — это начальные полевые исследования, соответствующие предварительным исследованиям по общей методике. Она включает изучение имеющихся данных с целью установить предельные концентрации различных загрязнений, геологические особенности (в частности, наличие зон, где может ожидаться значительная неоднородность по вертикальной проницаемости), распределение напоров и ожидаемое положение линий тока.

Помимо того, и это наиболее важно, существующие поля фильтрации могут рассматриваться как источники трассеров, характеризующих среду, и должны контролироваться посредством уже существующих скважин — отбором проб воды из них на химические анализы, а также бурением новых скважин различной глубины в точках, выбранных с помощью карты гидроизогипс.

Стадия 2, соответствующая полевому определению параметров, необходимых для моделирования загрязнения (скорости, коэффициенты дисперсии), включает контроль за существующим загрязнением (например, измерением удельных электрических сопротивлений воды методом каротажа, если исследования на стадии 1 показали, что загрязнение вызывает изменения удельного сопротивления воды), уточнение геологических данных на выбранных участках (бурением новых скважин или геофизическими методами), сбор необходимых данных для определения параметров дисперсии (закачкой искусственного смешивающегося загрязнителя, например соленой воды, с фиксацией его распростра-

нения методами электропрофилирования, при этом выделить влияние нижнего и верхнего водоносных горизонтов), определение коэффициентов дисперсии (путем интерпретации полевых экспериментов с помощью численной модели).

Стадия 3, соответствующая построению и использованию математической прогнозной модели, включает объединение различных результатов, полученных на стадиях 1 и 2 в фильтрационную и дисперсионную модели, охватывающие всю область в пределах влияния захороненных отходов.

Результаты. Стадия 1 дает общее представление о поведении загрязнения, обусловленного предполагаемыми захоронениями отходов (а именно, о природе потенциальных загрязнений, о возможном, в среднем, распространении фронта загрязнения во времени по горизонтальному и вертикальному направлениям, о наличии слоев, наиболее чувствительных и подверженных загрязнению), и об основных правилах выбора прогнозной модели и ее масштаба (а именно, оценка поведения загрязнения в вертикальном разрезе, выбор схем полевых экспериментов с трассерами с целью получения параметров дисперсии, определение положения и числа необходимых скважин для проведения дальнейших экспериментов по определению параметров дисперсии).

Стадия 2 позволяет получить численные значения коэффициентов дисперсии на различных участках, численные значения скоростей движения воды в водоносном горизонте и уточненную карту линий тока, детализированное представление о геологических условиях вблизи участков загрязнения, полное представление о вертикальных и горизонтальных путях движения загрязнений и набор примерных правил, позволяющих предсказывать загрязнение для стационарных условий при различных расположениях скважин.

Стадия 3 обеспечивает получение математической модели, объединяющей фильтрационную и дисперсионную модели в целях управления качеством воды в зоне захоронения отходов и обоснования в сети станций предупреждения для постоянной проверки и корректировки методов прогноза применительно к местным условиям.

ГЛАВА 4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Лабораторные эксперименты показывают, что в полевых условиях следует определять действительную скорость фильтрации и коэффициенты дисперсии. При этом предполагается, что другие характеристики водоносного горизонта (такие, как геологическое строение и литологический состав) должны быть заранее известны; методика их определения описана во многих работах и стала классической. Здесь мы будем рассматривать только специфические методы гидрогеологических исследований, применяемые при решении задач охраны подземных вод от загрязнения (это, однако, не ограничивает круг их применения только указанной тематикой).

Настоящая глава состоит из двух частей. В разделе 4.1 приводятся точные формулы, выраженные через явные функции (некоторые авторы называют их «аналитическими формулами»). Эти формулы являются решениями для простых, идеализированных математических моделей и очень часто используются в лабораторных исследованиях (см. разделы 2.4 и 2.5), при которых можно подобрать достаточно простые условия проведения опыта. Использовать эти формулы для решения практических задач из-за слишком многочисленных упрощений трудно. Как бы то ни было, в некоторых случаях они представляют интерес либо как способ проверки порядка величины, либо как непосредственный вычислительный инструмент, когда идеализация природных условий не приводит к значительной потери точности.

В разделах 4.2 и 4.3 описаны полевые методы, обычно включающие в себя ряд экспериментальных приемов и обработку результатов на основе математической модели на ЭЦВМ. Принципиальной особенностью этих методов является то, что они различны в зависимости от масштаба задачи (3.1). При описании экспериментов для каждого употребляемого масштаба основное внимание уделяется не технической их стороне, а материалам и рекомендациям по методике определения параметров загрязнения водоносных горизонтов в наиболее типичных задачах загрязнения.

Последовательность определения коэффициентов дисперсии показана на блок-схеме (рис. 4.0.1).

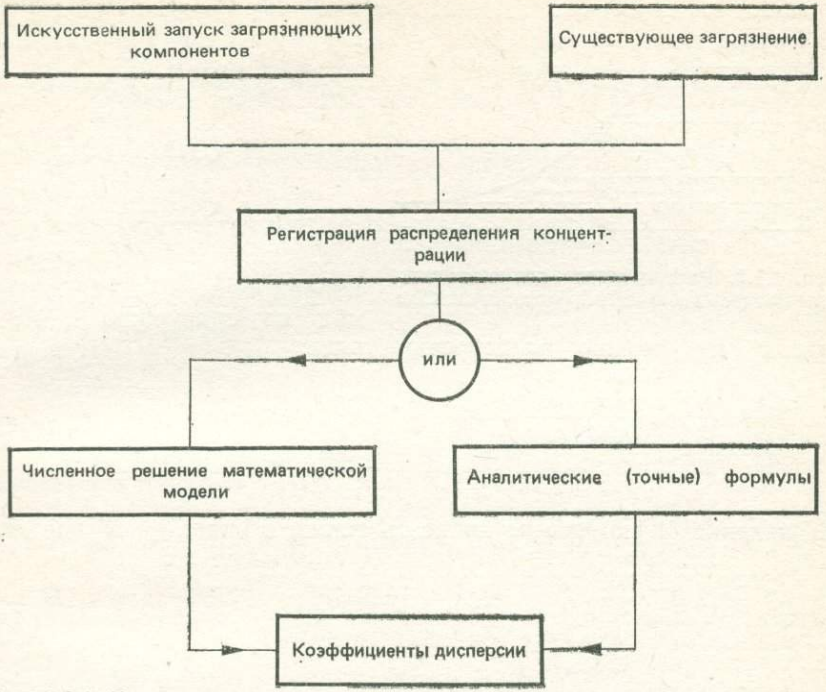


Рис. 4.0.1. Блок-схема

4.1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИСПЕРСИИ

Количественная оценка дисперсионных явлений производится по данным об изменении концентрации либо в пространстве на определенный момент времени, либо во времени в определенной точке пространства. При этом для определения коэффициентов дисперсии используются формулы, вытекающие из решения классического уравнения гидродисперсии для простейших экспериментальных условий: одномерной фильтрации с постоянной скоростью, скачкообразного изменения концентрации на входной границе в начальный момент времени. Вязкость и плотность раствора при этом также принимаются постоянными.

4.1.1. Коэффициент продольной дисперсии

Непрерывный запуск. Рассмотрим систему:

$$K_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t}, \qquad (4.1.1)$$

$$C(x, 0) = 0; \quad C(0,t) = C_0; \quad C(\infty, t) = 0.$$

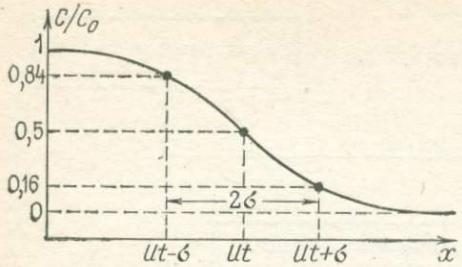


Рис. 4.1.1. Распределение концентрации, отвечающее классической функции ошибок

Решение (4.1.1) имеет вид:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-Ut}{2(K_L t)^{1/2}}\right) + \right.$$

$$+ \exp(Ux/K_L) \times$$

$$\left. \times \operatorname{erfc}\left(\frac{x+Ut}{2(K_L t)^{1/2}}\right)\right]. \quad (4.1.2)$$

Второй член в (4.1.2) очень мал по сравнению с первым и им можно пренебречь; тогда:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x-Ut}{2(K_L t)^{1/2}}\right) = \pi^{-1/2} \int_{\frac{x-Ut}{2(K_L t)^{1/2}}}^{\infty} \exp(-\eta^2)(\mathrm{d}\eta). \quad (4.1.3)$$

Выражение (4.1.3) можно записать также в виде:

$$\frac{C}{C_0} = (2\pi)^{-1/2} \int_{\frac{x-Ut}{(2K_L t)^{1/2}}}^{\infty} \exp(-\eta^2/2)\,\mathrm{d}\eta. \quad (4.1.4)$$

Когда на определенный момент времени переменной является x, решение (4.1.4) представляет собой функцию нормального распределения $1 - N[(x-m)/\sigma]$ с математическим ожиданием $m = Ut$ и стандартным отклонением $\sigma = (2K_L t)^{1/2}$. Классическим свойством функции нормального распределения $N[(x-m)/\sigma]$ является:

$$N(1) = 0{,}8413 \approx 0{,}84, \quad N(-1) = 0{,}1587 \approx 0{,}16. \quad (4.1.5)$$

На основе этого свойства легко определить величину стандартного отклонения σ по графику пространственного распределения концентрации. Кроме того, довольно часто за размер переходной зоны принимают расстояние между точками x, в которых относительная концентрация равна 0,16 и 0,84 (рис. 4.1.1).

Так как в данный момент времени ширина переходной зоны

$$e = 2\sigma = x_{0,16} - x_{0,84} = 2(2K_L t)^{1/2}, \quad (4.1.6)$$

величина K_L определится соотношением:

$$K_L = (x_{0,16} - x_{0,84})^2/(8t). \quad (4.1.7)$$

Измерения очень часто производятся в определенной точке x (например на нижнем конце пористой среды), и тогда фиксируется изменение концентрации во времени.

Полагая $x_i = (x - Ut_i)/(2K_L t_i)^{1/2}$, из соотношений (4.1.4) и (4.1.5) получим:

$$(x - Ut_{0,16})/(2K_L t_{0,16})^{1/2} - (x - Ut_{0,84})/(2K_L t_{0,84})^{1/2} = 2,$$

откуда K_L можно определить по формуле:

$$K_L = \frac{1}{8}\left[(x - Ut_{0,16})/(t_{0,16})^{1/2} - (x - Ut_{0,84})/(t_{0,84})^{1/2}\right]^2. \qquad (4.1.8)$$

Часто длина переходной зоны бывает мала по сравнению с расстоянием от верхнего конца среды до точки измерения; в этом случае $t_{0,16}$ и $t_{0,84}$ могут быть грубо приняты равными $t_{0,5}$. Тогда соотношение (4.1.8) примет вид:

$$K_L = (8t_{0,5})^{-1} U^2 (t_{0,84} - t_{0,16})^2. \qquad (4.1.9)$$

Примем $\sigma' = (t_{0,84} - t_{0,16})/(2t_{0,5})$, $t_{0,5} = x/U$, тогда выражение (4.1.9) можно записать в другой полезной форме:

$$K_L = \frac{1}{2}(\sigma')^2 xU. \qquad (4.1.10)$$

Это выражение может быть использовано в тех случаях, когда на нижнем конце среды вместо времени измеряется объем профильтровавшегося раствора. Соотношение между объемом раствора, прошедшим через единицу площади поперечного сечения пористой среды, и временем имеет вид $V_i = Ut_i$. Таким образом, график зависимости C/C_0 (где C — концентрация на нижнем конце среды) относительно V_i будет иметь вид, близкий к графику функции нормального распределения, стандартное отклонение которой равно $(V_{0,84} - V_{0,16})/(2V_{0,5})$.

Запуск трассерной волны. Рассмотрим систему:

$$K\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t},$$

$$C(x, 0) = 0,$$

$$C(0, t) = 1 \quad t < t_0,$$

$$C(0, t) = 0 \quad t > t_0, \qquad (4.1.11)$$

$$C(\infty, t) = 0,$$

отвечающую запуску трассерной волны (рис. 4.1.2).

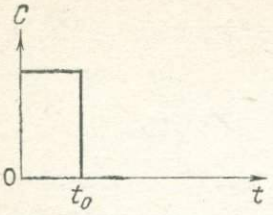


Рис. 4.1.2. Граничное условие, соответствующее запуску индикаторной волны

Решение уравнения (4.1.11) имеет вид:

$$C = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\frac{x-ut}{\sqrt{2Kt}}}^{\frac{x-u(t-t_0)}{\sqrt{2K(t-t_0)}}} \exp(-\eta^2/2)\, d\eta.$$

Из этого выражения получим ряд следствий, которые используем для приведения математических моделей в соответствие с экспериментальными распределениями концентрации в случае, когда запуск проводится по схеме трассерной волны.

Найдем положения максимума величины C в пространстве на определенный момент времени через производную функции C' по x:

$$C' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\sqrt{2K(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{[x-u(t-t_0)]^2}{4K(t-t_0)}\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2Kt}} \exp\left\{-\frac{(x-ut)^2}{4Kt}\right\}\right] = 0.$$

Тогда

$$\frac{(x-ut)^2}{4Kt} - \frac{[x-u(t-t_0)]^2}{4K(t-t_0)} = \ln\sqrt{\frac{t-t_0}{t}},$$

$$x^2\left[-\frac{t_0}{t(t-t_0)}\right] + u^2 t_0 = 2K \ln\frac{t-t_0}{t},$$

$$x^2 = \frac{2K\ln\frac{t-t_0}{t} - u^2 t_0}{-\frac{t_0}{t(t-t_0)}}.$$

Для асимптотического режима (при достаточно большом t) имеем:

$$x^2 \approx 2K(t-t_0) + u^2 t(t-t_0) \approx u^2 t(t-t_0) + 2\alpha u(t-t_0), \quad (4.1.12)$$

где $K = \alpha u$.

Следствие 1. Формулу (4.1.12) можно использовать для определения действительной скорости фильтрации u при известной величине α и при допущении, что изменением ширины переходной зоны вследствие дисперсии можно пренебречь по сравнению с ее шириной. В таком случае x представляет собой расстояние между пусковой и наблюдательной скважинами, а t_m — время прихода максимальной концентрации. Тогда будем иметь:

$$u = [-\alpha(t_m - t_0) + \{\alpha^2(t_m - t_0)^2 + $$
$$+ x^2(t_m - t_0)\, t_m\}^{1/2}]/[t_m(t_m - t_0)].$$

Следует отметить, что величина u отличается от скорости продвижения максимума концентрации x/t_m. Поскольку методы определения величины α требуют предварительного знания u, данная формула может использоваться лишь для проверочных целей.

Следствие 2. Предполагая асимптотический режим переноса и малое изменение ширины переходной зоны вследствие гидродисперсии, значение коэффициента K можно получить как функцию скорости движения трассера из выражения (4.1.12):

$$K = [x^2 - u^2 t_m (t_m - t_0)]/[2(t_m - t_0)], \qquad (4.1.13)$$

где x — абсцисса точки измерения и t_m — время подхода к ней максимума концентрации трассера. Так как величина c_m в свою очередь также может быть измерена, можно получить другое соотношение между K и u:

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{x - ut_m}{\sqrt{2Kt_m}}}^{\frac{x - u(t_m - t_0)}{\sqrt{2K(t_m - t_0)}}} \exp(-\eta^2/2)\, d\eta,$$

где K по физическим соображениям всегда положителен. Отсюда

$$u < x/[t_m (t_m - t_0)]^{1/2} = u_0.$$

Можно показать [103], что эти три соотношения позволяют найти одну и только одну пару значений (K, u) в силу монотонности функции $c_m(u)$ и положительности K. Этим свойством обосновывается метод согласования модели для схемы трассерной волны; максимум кривой, который дает единственное значение коэффициента дисперсии, будет совпадать с расчетным при следующих допущениях: 1) время прихода трассера велико по сравнению с продолжительностью запуска; 2) ширина переходной зоны при прохождении волны через точку регистрации мало изменяется вследствие дисперсии.

На основании сравнения численных примеров этот вывод распространяется и на случай радиальной фильтрации.

Кроме того, этот способ согласования обосновывается тем, что максимум находится в средней части концентрационной кривой, которая, как показано в разделе 2.3, хорошо описывает явление дисперсии.

Замечание. Погрешность определения величины K по формуле (4.1.13) равна:

$$|dK| = Ut_m\, du + \frac{x^2}{2(t_m - t_0)^2}\, dt_0,$$

так как x и t_m обычно определяются точно.

4.1.2. Коэффициент поперечной дисперсии

Классическая постановка экспериментов описана Фридом и Комбарнесом [110]. При этом режим концентрации является асимптотическим (что означает стационарное распределение концентрации в измеряемом сечении для больших моментов времени), а перенос неодномерным. Таким образом, уравнение дисперсии принимает вид:

$$U\,(\partial C/\partial x) = K_T\,(\partial^2 C/\partial y^2). \tag{4.1.14}$$

Расчеты проводятся как для чистого трассера, так и для более общего случая, когда жидкости отличаются по плотности и вязкости. Для того чтобы решить вторую задачу, в которой скорости меняются по сечению, можно использовать два метода: 1) «локальный метод», который учитывает распределение скоростей и позволяет найти для каждого эксперимента кривую зависимости коэффициента дисперсии от локального числа Пекле; и 2) «глобальный метод», сводящий общий случай к случаю с трассером путем введения средней скорости.

Второй метод показал хорошую аппроксимацию решения (рис. 4.1.3), так что ограничимся в этом разделе рассмотрением только случая трассера.

Пористая среда, которая является двумерной, рассматривается неограниченной в обоих направлениях. Уравнение (4.1.14) решается для граничных условий:

$$\begin{aligned} &\partial C/\partial y = 0 \quad \text{при } y = \pm\infty, \\ &C\,(0,\ y) = C_0 \quad \text{при } 0 < y < +\infty \\ &C\,(0,\ y) = 0 \quad \text{при } -\infty < y < 0. \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Решение при условиях (4.1.15) имеет вид:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\frac{y}{2\,(K_T x/U)^{1/2}}\right]. \tag{4.1.16}$$

Полагая, что σ является стандартным отклонением при $x = x_0$, определяемым по формуле

$$\sigma = \frac{1}{2}\,[y\,(x_0,\ C/C_0 = 0{,}84) - y\,(x_0,\ C/C_0 = 0{,}16)],$$

получим из (4.1.16):

$$K_T = \frac{1}{2}\,\sigma^2\,(U/x_0). \tag{4.1.17}$$

4.1.3. Радиальный поток

Область применения приведенных выше формул в действительности очень ограничена такими условиями, как одномерность потока, однородность среды, постоянство скорости и скачкообразное изменение концентрации на входе в начальный момент времени. В полевых условиях очень трудно добиться выполнения всех этих

условий. Однако для некоторых экспериментов при однородном составе пород система (4.1.1) дает достаточно хорошее приближение. Это позволяет использовать формулы из раздела 4.1.1.

Чаще всего полевые исследования проводятся в скважинах в радиальном потоке. Рядом авторов были предприняты попытки получить формулы для радиального потока, аналогичные формулам для одномерного потока [166, 222], исходя из уравнения дисперсии в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\rho K_r r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c}{\rho}\right)\right] - \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ruc) = \frac{\partial c}{\partial t}, \qquad (4.1.18)$$

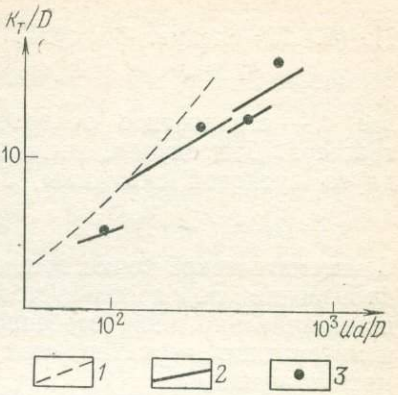


Рис. 4.1.3. Результаты обработки опытов по поперечной дисперсии различными методами.
1 — опыты с чистым трассером; *2* — «локальный» метод; *3* — «глобальный» метод

где K_r — коэффициент продольной дисперсии, u — действительная скорость фильтрации, ρ — плотность раствора.

При этом предполагалось, что режим дисперсии динамический и справедливы выражения:

$$u = \frac{A}{r}$$

$$K_r = \alpha \frac{A}{r}$$

где α — структурный параметр гидродисперсии, u — действительная скорость стационарной фильтрации, а плотность постоянна. Тогда уравнение (4.1.18) принимает вид:

$$\alpha \frac{A}{r}\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} - \frac{A}{r}\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial t}. \qquad (4.1.19)$$

Затем принималось допущение о том, что на некотором удалении от источника дисперсия мала по сравнению с конвективным переносом, так что:

$$\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{r}{A}\frac{\partial}{\partial t}. \qquad (4.1.20)$$

При условии (4.1.20) уравнение (4.1.19) преобразуется:

$$\alpha \frac{r}{A}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - \frac{A}{r}\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial t}. \qquad (4.1.21)$$

Решением последнего является:

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2}\operatorname{erf}\left[\left(\frac{r^2}{2} - At\right)\Big/\frac{4}{3}\alpha r^3\right]. \qquad (4.1.22)$$

Из (4.1.22) следует формула:

$$\sigma = (2/3\alpha r)^{1/2}, \qquad (4.1.23)$$

где σ — стандартное отклонение распределения концентрации трассера. Для случая, когда нельзя пренебрегать величиной радиуса пусковой скважины, Лоу дает следующее соотношение:

$$\sigma = [2/3\alpha (r - r_0^3/r^2)]^{1/2}. \qquad (4.1.24)$$

С математической точки зрения задача, в которой вместо второй производной по r используется вторая производная по t, является принципиально иной (особенно при сингулярности в источнике), и математики, вероятно, станут резко возражать против такого преобразования.

С других позиций математическая модель может признаваться правильной, пока она удовлетворительно описывает природное явление. В случае, когда выполняется довольно грубое физическое приближение (4.1.20), можно получить очень ориентировочную оценку величины α путем определения σ по экспериментальной кривой. Но в большинстве случаев и когда это возможно представляется правильнее сохранить классическую форму (4.1.19) и использовать прямые методы сопоставления экспериментальных данных с численным решением уравнения (4.1.19), применяя ЭЦВМ.

4.1.4. Замечания по поводу гетерогенной среды

При достижении асимптотического режима ориентировочные вычисления можно проводить для эквивалентной однородной среды, используя формулы (4.1.10) и (4.1.17).

Когда геология и литология различных слоев слоистой пористой среды известны, можно попытаться определить эффективный коэффициент дисперсии, используя зависимость (2.5.8). В то же время из-за неопределенности локальных коэффициентов дисперсии эта формула может давать только весьма ориентировочные оценки K, поэтому она используется лишь для проверки порядка величины коэффициента дисперсии.

4.2. ПОЛЕВЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИСПЕРСИИ

Полевые методы обычно подразделяются на четыре группы, соответствующие четырем употребляемым масштабам задач переноса загрязнений. Эти масштабы являются функцией среднего расстояния переноса:

— локальный масштаб от 2,5 до 4 м;
— средний масштаб от 4 до 20 м;
— крупный масштаб от 20 до 100 м;
— региональный масштаб более 100 м (обычно до нескольких километров).

4.2.1. Локальный масштаб. Односкважинный импульсный метод

Рассмотрим совершенную по степени и характеру вскрытия скважину. Она заполняется водой, содержащей радиоактивный трассер, так, что концентрация по всей глубине скважины одинакова. Раствор вытесняется раствором такой же концентрации, а затем пресной водой. После этого из скважины производится откачка. В каждом слое непрерывно регистрируется концентрация во времени, а измерения интерпретируются по двум направлениям: 1) по изменению концентрации трассера во времени в данном слое, и по глубине на данный момент времени оцениваются относительные проницаемости литологических слоев [174]; 2) по изменению концентрации во времени для данного слоя можно провести количественную оценку коэффициентов продольной гидродисперсии для каждого слоя, используя для этого дисперсионную схему (см. раздел 3.2) и математические модели [99, 117].

Экспериментальные исследования. Радиоактивный трассер запускается в водоносный горизонт через перфорированный пьезометр. Радиоактивность измеряется по всей длине фильтра пьезометра. В каждой точке радиоактивность зависит от: 1) концентрации трассера в самом пьезометре; 2) объема водоносного горизонта, заполненного трассером вокруг точки измерения. Форма ореола распространения искажается в зависимости от гидродинамических свойств каждого слоя: трассер свободно проникает в хорошо проницаемые слои и значительно слабее в слабопроницаемые; 3) объемной радиации, излучаемой объемом: в дополнение к концентрации трассера эта радиация зависит от эффективной пористости и плотности скелета породы.

Характеристики зонда и математическое моделирование показали, что наибольшее значение имеют первый и третий из перечисленных факторов.

Испытывались различные радиоактивные трассеры: ^{82}Br с периодом полураспада 36 ч и максимальной энергией излучения 0,78—1,47 МэВ; ^{131}I с периодом полураспада 8,05 сут и максимальной энергией излучения 0,36—0,64 МэВ; ^{57}Cr с периодом полураспада 27,8 сут и максимальной энергией излучения 0,32 МэВ.

Чаще всего использовались ^{82}B и ^{131}I. Для опытов требуется незначительная радиоактивность (не более нескольких микрокюри). Указанные изотопы используются в виде растворов иодистого и бромистого натрия, упакованных в специальные ампулы. Раствор вытесняется из ампулы водой с помощью двух медицинских игл и постепенно смешивается с 4 $м^3$ воды (для скважины глубиной 30 м) рециркуляционным насосом. Аппаратура, необходимая для таких процессов, очень проста, безопасна и применима в полевых условиях.

Такие трассеры обладают рядом важных свойств:

— не представляют угрозы для обслуживающего персонала и окружающей среды, благодаря своей низкой активности и небольшому периоду полураспада;

— хорошо определяются;

— не меняют плотности воды.

Замеры радиоактивности осуществляются с помощью зонда, в котором располагается сцинтилляционный датчик. Сигнал от зонда поступает через трос-кабель на интегратор и на шкалу счетчика. Каротажная диаграмма регистрируется самописцем, который управляется движением зонда вниз (рис. 4.2.1).

Замечание. По ряду причин зонд может искажать сигналы, которые он принимает, поэтому перед экспериментом необходимо установить его характеристики. При этом важны две характеристики: разрешающая способность зонда и размер зоны влияния. Далее, рассмотрим примеры возможных методов определения этих характеристик.

Определение разрешающей способности зонда. Измерения выполняются с потерей информации, которая связана с разрешающей способностью зонда. Исключить этот эффект можно с помощью процесса обращения свертки, полагая:

$$s(j) = \sum [e(j-i)\,\Phi(i)],$$

где $s(j)$ — измеренная активность в некоторой точке на глубине j, e — распределение концентрации трассера вдоль ствола пьезометра, Φ — функция ядра свертки, представляющая собой характеристику зонда применительно к определенному изотопу.

Экспериментальная установка состоит из слоистой среды, в один из пропластков которой вводится трассер с концентрацией, равной 1. С помощью численного обращения свертки [81] проводится вычисление функции Φ (рис. 4.2.2) для шагов перемещения зонда, равных 5 см. Затем, проводя обращение s с помощью функции Φ, можно найти распределение концентрации трассера в пусковой скважине. На рис. 4.2.3 показаны результаты серии измерений, выполненные с интервалом в 10 см (здесь концентрация 1 соответствует активности, равной 1000). Для получения распределения e каротажная диаграмма обращается с помощью функции Φ, а затем для проверки метода проводится численная свертка распределения e с помощью функции Φ.

Размеры области влияния. Исследование проводилось в контейнере емкостью 1 м^3, разделенном на цилиндрические коаксиальные секторы. Это позволяло вводить трассер в любой из секторов. Было установлено, что при расстоянии от пьезометра, превышающем 1 м, концентрический ореол трассера не обнаруживается (рис. 4.2.4).

Диаметр пьезометра должен выбираться исходя из диаметра зонда. Пьезометр оборудуется фильтром на всю мощность водоносного горизонта (скважность должна быть больше 20%). Фильтровая труба обертывается нейлоновым полотном, ширина ячеек

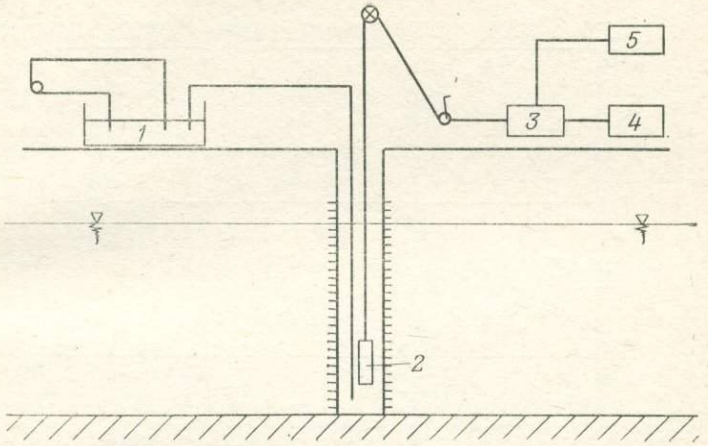


Рис. 4.2.1. Схема установки для запуска трассерной волны.

1 — смеситель; *2* — зонд; *3* — интегратор; *4* — шкала счетчика; *5* — самопишущее устройство

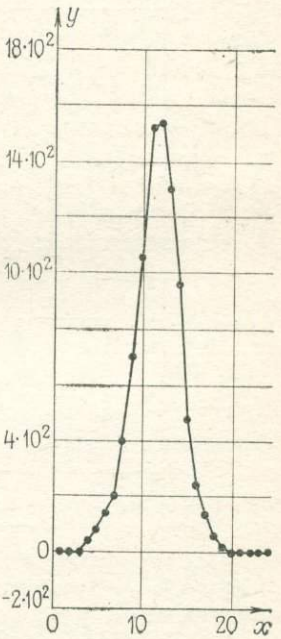


Рис. 4.2.2. Импульсная характеристика зонда.

y — активность (имп/с); *x* — расстояние (шаг измерения равен 5 см)

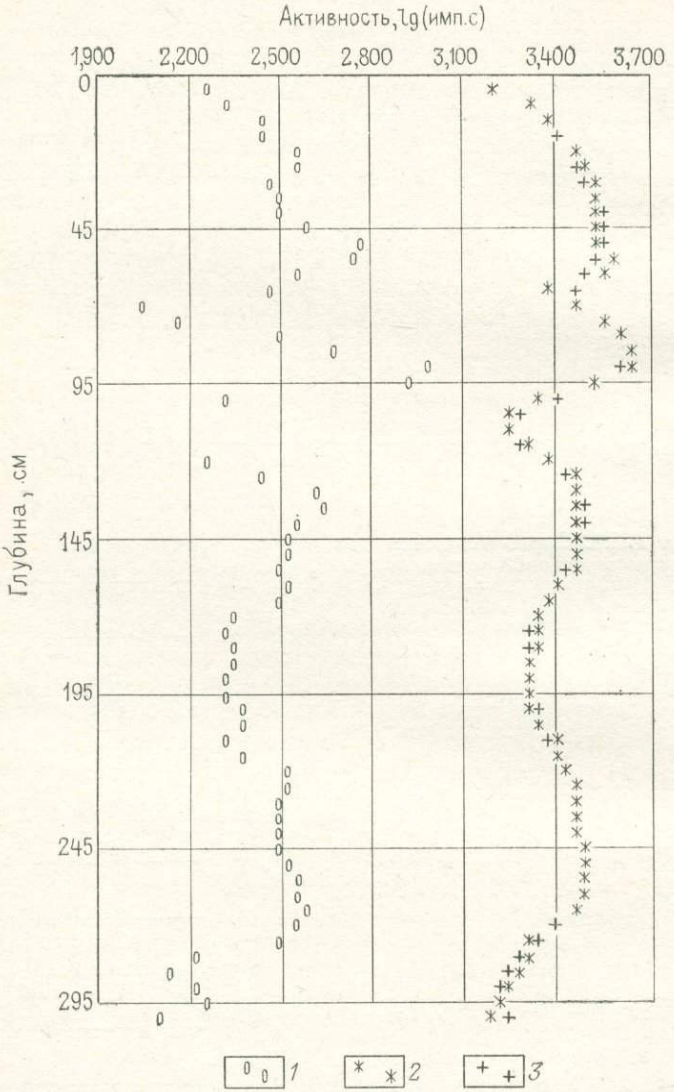


Рис. 4.2.3. Результаты обращения (зависимость активности от глубины).

1 — результаты обращения («истинное» распределение активности); *2* — результаты полевых измерений; *3* — расчетное распределение измеренной активности, вычисленное путем свертки «истинного» распределения с учетом разрешающей способности зонда

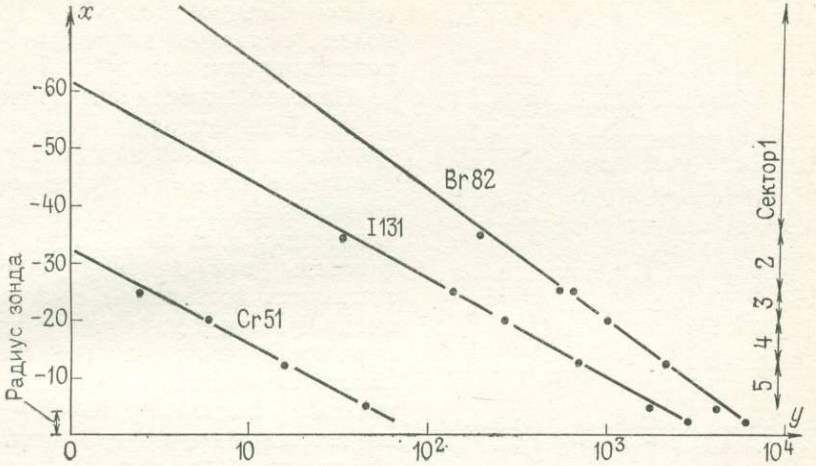


Рис. 4.2.4. Лабораторные исследования объема, влияющего на зонд. Секторы насыщались трассером в следующей последовательности.

1; 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5. Концентрация трассера и уровень измеряемой энергии такие же, как в полевых опытах. *y* — активность, имп/с

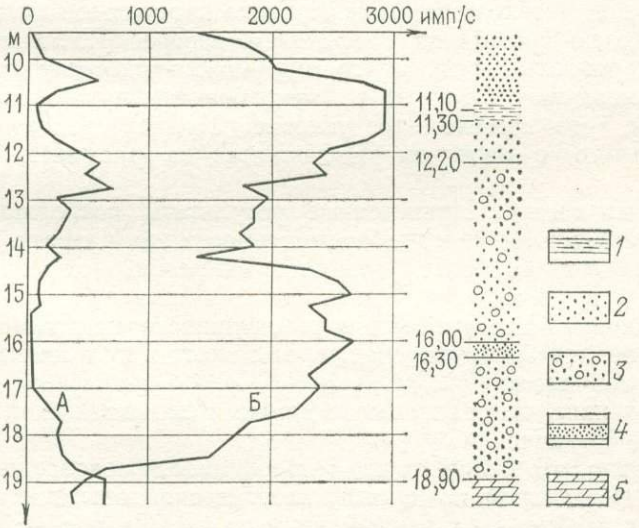


Рис. 4.2.5. Результаты запуска в скважину трассера ^{82}Br.

Кривые соответствующие: *А* — концу налива чистой воды (22 ч 15 мин), *Б* — концу налива трассерного раствора (19 ч 50 мин). *1* — торф; *2* — песок и гравий с включениями глинистых линз; *3* — песок и гравий; *4* — крупнозернистый песок; *5* — тяжелый мергель

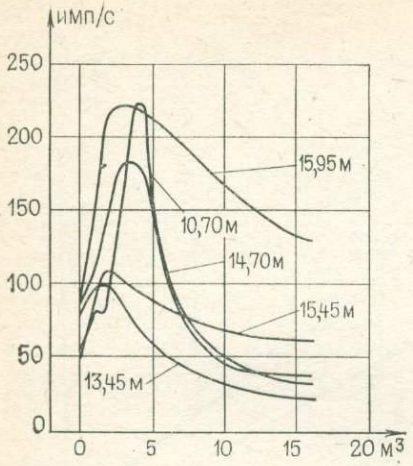


Рис. 4.2.6. Зависимость активности от объема откаченного раствора для слоев различной проницаемости

которого составляет 0,5—1 мм. Не должно быть никакой гравийной обсыпки, поскольку она может исказить информацию, регистрируемую зондом.

Полевой эксперимент проводится в четыре стадии. Пьезометрическая колонна заполняется раствором трассера путем откачки из ее верхней части при нагнетании в ее дно. Когда активность откачиваемой воды становится постоянной, откачка прекращается и начинается запуск трассерного раствора (необходимо создавать незначительный подъем уровней в водоносном горизонте, чтобы обеспечить безопасность и предотвратить перетекание трассера из исследуемого пласта). После этого производится налив обычной воды. Затем осуществляется откачка воды из опытной скважины и по каждому слою регистрируется возвращающийся радиоактивный ореол.

На каждом этапе опыта расход должен быть достаточно мал, чтобы время, необходимое на построение каротажной диаграммы, было мало по сравнению с временем перераспределения трассера в горизонте. Тогда диаграмму можно рассматривать как единовременную. При этом, чем больше нужно получить диаграмм, тем важнее это условие. Пример такого опыта, выполненного с изотопом ^{82}Br, показан на рисунках 4.2.5 и 4.2.6.

Замечание. Приведенные результаты позволяют качественно оценить изменение проницаемости по разрезу. Можно выделить два наиболее проницаемых слоя, характеризующихся:

— максимальными значениями активности при наливе;

— наиболее быстрым спадом активности при наливе нерадиоактивной воды;

— большим, по сравнению с другими слоями, выходом трассера при откачке.

Очевидно, что основная доля проводимости водоносного горизонта, определенной по данным классической опытной откачки, относится именно к указанным двум слоям. На рис. 4.2.6 показано изменение радиоактивности для слоев различной проницаемости. Можно отметить, что в большинстве случаев общее количество возвратившегося радиоактивного трассера около 85—95%.

Математические модели. Модели базируются на основном уравнении дисперсии:

$$\operatorname{div}\left[K\rho\cdot\left(\operatorname{grad}\frac{c}{\rho}\right)\right]-\operatorname{div}(uc)=\frac{\partial c}{\partial t},$$

которое упрощается на основе следующих предположений.

Среда представляется в виде однородных, горизонтально залегающих, не взаимодействующих между собой слоев. Используется незначительное количество трассера, что обеспечивает неизменность плотности и вязкости по сравнению с пресной водой. Координатная система выбирается так, чтобы она совпадала с главными осями тензора коэффициента дисперсии. Скоростной режим предполагается таким, что имеет место динамическая дисперсия и коэффициент дисперсии может быть записан в виде:

$$K=\alpha|u|,$$

где u — действительная скорость фильтрации, α — структурный параметр гидродисперсии, имеющий размерность длины.

Задача состоит в определении величины α_L — структурного параметра продольной гидродисперсии, который считается равным соответствующему параметру в радиальном потоке [146]. Предположим, что вертикальной и горизонтальной поперечной дисперсией можно пренебречь. Тогда модель примет вид:

$$\operatorname{div}(\alpha|u|\operatorname{grad}c)-\operatorname{div}(uc)=\frac{\partial c}{\partial t}, \tag{4.2.1}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}, \tag{4.2.2}$$

$$u=u_n-\frac{k\rho g}{\mu\Phi}\operatorname{grad}h, \tag{4.2.3}$$

где h — напор в водоносном горизонте в процессе налива или откачки, u_n — действительная скорость фильтрации естественного потока, μ — динамическая вязкость, Φ — пористость, k — коэффициент проницаемости, T — проводимость и S — коэффициент водоотдачи. Система дополняется соответствующими граничными и начальными условиями. Рассмотрим два случая: без учета и с учетом естественного фильтрационного потока.

1. $u_n=0$: дисперсия имеет чисто радиальный характер и можно использовать радиальные координаты для записи уравнения дисперсии:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\alpha r|u|\frac{\partial c}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial(ruc)}{\partial r}=\frac{\partial c}{\partial t}. \tag{4.2.4}$$

2. Величиной u_n нельзя пренебрегать: главные направления тензора коэффициента дисперсии будут совпадать с образовав-

шимися тангенциальными линиями тока и гидроизопьезами. При этом уравнение (4.2.1) преобразуется к виду (см. раздел 5.3):

$$u^2 \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\alpha |u| \frac{\partial c}{\partial \Phi}\right) - u^2 \frac{\partial c}{\partial \Phi} = \frac{\partial c}{\partial t}, \tag{4.2.5}$$

в координатах Φ и ψ, где $\Phi = \text{const}$ — изолинии равных напоров, $\psi = \text{const}$ — линии тока.

Определение коэффициентов дисперсии можно проводить двумя способами: на основании полуаналитической формулы, вытекающей из (4.2.4), или моделированием прямых задач и приближением решения к опытной кривой.

Полуаналитическая формула. Предположим, что условия опыта соответствуют первому случаю, когда величина u_n пренебрежимо мала. Можно показать, что довольно быстро устанавливается стационарный режим фильтрации (через несколько минут после начала налива или откачки) и действительная скорость фильтрации

$$u = \frac{A}{r},$$

где $A = Q/2\pi b\Phi$, b — мощность водоносного горизонта, Q — расход при наливе, Φ — пористость. Поток направлен от опытной скважины (для откачки следует принять знак минус). Тогда, исходя из (4.2.4), параметр α равен:

$$\alpha = \frac{r\frac{\partial c}{\partial t} + A\frac{\partial c}{\partial t}}{A\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}}. \tag{4.2.6}$$

Поскольку величина производной $\partial c/\partial t$ определяется из эксперимента, выражение (4.2.6) можно переписать так:

$$\alpha = \frac{r_2 \frac{c_{n+2}(1) - c_{n+1}(1)}{\mathrm{d}t} + \frac{c_{n+3}(1) - c_{n+2}(1)}{r_3 - r_2} A}{\frac{2A}{r_3 - r_1}\left[\frac{c_{n+3}(1) - c_{n+2}(1)}{r_3 - r_2} - \frac{c_{n+2}(1) - c_{n+1}(1)}{r_2 - r_1}\right]}, \tag{4.2.7}$$

где $c_n(i)$ — концентрация в момент времени t_n в точке i, находящейся на расстоянии r_i от оси скважины, r_1 — радиус опытной скважины.

Формула (4.2.7) получена путем дискретизации зависимости (4.2.6) при допущении, что изменением размеров переходной зоны за относительно короткий промежуток времени $\mathrm{d}t$ можно пренебречь. Затем полагается, что трассер движется без дисперсии так, что его концентрация в скважине в момент $t + \mathrm{d}t$ равна концентрации в точке на расстоянии $r_1 + \mathrm{d}r$ от скважины в момент времени t, где $\mathrm{d}r$ определится формулой:

$$\mathrm{d}r = \int_t^{t+\mathrm{d}t} u\,\mathrm{d}t.$$

Таким образом,

$$c_{n+1}(3) = c_{n+3}(1),$$

$$c_{n+1}(2) = c_{n+2}(1).$$

Например:

$$c_n(2) = c_{n+1}(1),$$

$$r_3 = \sqrt{4A\,dt + r_1^2},$$

$$r_2 = \sqrt{2A\,dt + r_1^2}.$$

Чем меньше промежуток времени dt, тем точнее определяется величина параметра α. Таким образом, если величина A известна с достаточной точностью, то путем простых вычислений по формуле (4.2.7) можно быстро оценить порядок величины α.

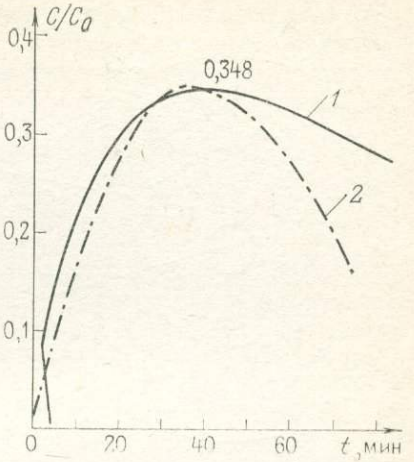


Рис. 4.2.7. График изменения относительной концентрации трассера во времени на определенной глубине.
1 — кривая, вычисленная для $\alpha = 10$ см; *2* — экспериментальная кривая

Моделирование. Для моделирования используется конечноразностная форма уравнений (4.2.1), (4.2.2) и (4.2.3). Ввиду симметрии эти уравнения можно свести к их одномерным (по пространственным переменным) аналогам (см. раздел 9.6).

Для моделирования уравнения (4.2.1) используется полностью неявная схема с разностью назад по направлению скорости фильтрации. Для решения системы линейных конечноразностных уравнений используется трехдиагональный метод исключения Гаусса.

Для получения хорошего совпадения численных решений с экспериментальной кривой используется метод последовательных приближений. На рис. 4.2.7 показано изменение концентрации во времени на определенной глубине скважины; в этом опыте определения параметров гидродисперсии были проведены через каждые 25 см (см. главу 6).

Заключение. Односкважинный импульсный метод позволяет дать количественную оценку коэффициентов продольной дисперсии для каждого слоя при масштабе опробования 2—4 м. На его основе можно выделить слои, наиболее опасные с точки зрения распространения загрязнений, и проводить для них прогнозные расчеты.

Важно также отметить, что большая часть радиоактивного трассера откачивается обратно из водоносного горизонта и, если время жизни радиоактивного элемента небольшое, то эти эксперименты совершенно безопасны и отсутствует угроза заражения.

4.2.2. Средний масштаб. Многоскважинный метод

Эти опыты в своей основе очень просты. Нагнетаемый в пласт раствор трассера обнаруживается группой наблюдательных скважин. Кривые изменения концентрации во времени количественно

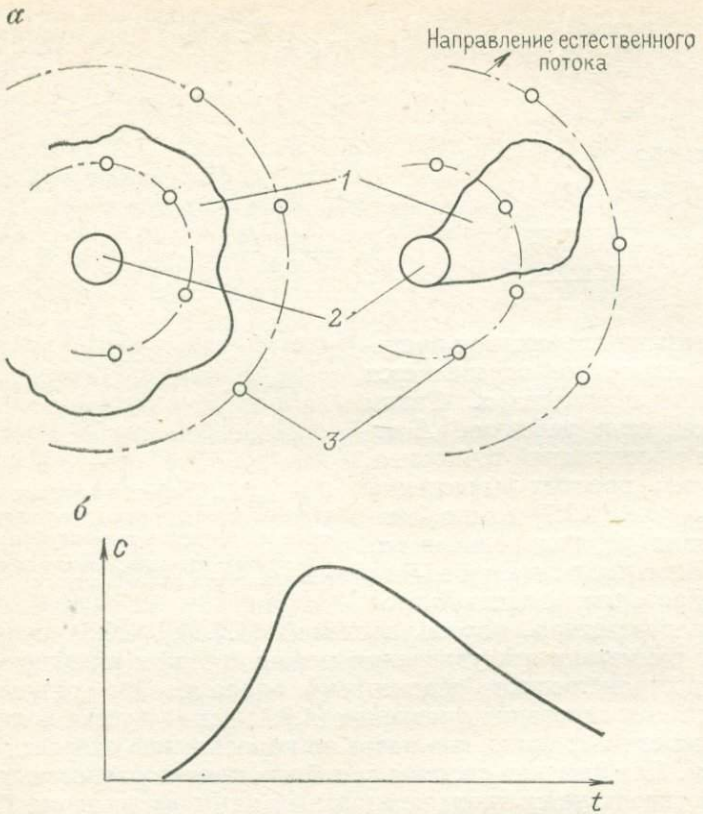


Рис. 4.2.8. Схема проведения многоскважинного опыта.

а — принудительный налив; *б* — запуск в естественный поток; *в* — импульсная переходная характеристика для наблюдательной скважины. *1* — ореол распространения трассера; *2* — пусковые скважины; *3* — наблюдательные скважины

интерпретируются для определения коэффициента продольной дисперсии (рис. 4.2.8).

З а м е ч а н и е. Многоскважинные эксперименты проводились также в лабораторных условиях [146]. Естественно, что методы исследований здесь отличались от полевых экспериментов, поскольку в последних решающее значение имеют соображения экономического характера: объем экономических затрат обычно сильно зависит от масштаба эксперимента.

Методика. Методика состоит в следующем. Рассмотрим пусковую скважину и группу наблюдательных скважин, расположенных по концентрическим окружностям вокруг пусковой. Все скважины являются совершенными по степени вскрытия водоносного горизонта. Трассер вводится в пусковую скважину, равномерно распределяется в ней и трассерный раствор интенсивно вытесняется в пласт. Таким образом, реализуется начальное условие,

соответствующее запуску трассерного «пакета», а по наблюдательным скважинам анализируется импульсная переходная характеристика. Изучаемые функции представляют собой зависимости концентрации трассера от времени в точках пространства.

Что происходит с раствором трассера после его запуска в водоносный горизонт? Существуют две возможности: либо он переносится со скоростью естественного потока подземных вод, либо вытесняется при более высокой скорости.

В первом случае можно воспользоваться простой расчетной схемой: при масштабе 6—12 м скорость фильтрации не изменяется и справедлива схема плоскопараллельного потока. Это позволяет использовать точные формулы, подобные приведенным в разделе 4.1, и предыдущие аналитические решения уравнений. Ряд примеров будет рассмотрен позже в этом разделе. Отметим, однако, что такие эксперименты являются продолжительными и это не позволяет использовать короткоживущие радиоактивные изотопы. Использование же тяжелых растворов повышенной концентрации приводит к необходимости учета гравитационных эффектов, которые становятся заметным нарушающим фактором.

Во втором случае вынуждающая скорость движения трассера либо настолько велика, что можно пренебречь скоростью естественного потока, либо эти две скорости должны складываться. Хотя было бы и желательно пренебречь скоростью естественного потока (опыт проводится быстро, а модель является чисто радиальной), эти условия трудно достижимы: вынуждающая скорость является радиальной и, таким образом, более или менее пропорциональной $1/r$ (где r — расстояние от пусковой скважины), тем самым уменьшается очень быстро. Возникает необходимость поддержания высокого давления и расхода при наливе, что не всегда возможно в условиях опыта.

В обоих случаях необходимо предварительно знать направление и скорость естественного потока. Такие данные необходимы для определения расхода при наливе и для оптимального размещения наблюдательных скважин. В первом случае знание скорости естественного потока позволяет бурить наблюдательные скважины только по направлению движения трассера, сокращая число скважин и соответственно денежные затраты. Во втором случае, если известна скорость естественного потока, можно подобрать такой расход при наливе, чтобы поток трассера был радиальным. При этом нет необходимости в определении направления скорости естественного потока, и наблюдательные скважины можно располагать в любом направлении поблизости от центральной.

Замечание. При этом масштабе опытов можно обычно принимать направление скорости естественного потока везде параллельным данному направлению.

Обычные упрощающие допущения и математические модели
Начальная концентрация используемого трассера выбирается с таким расчетом, чтобы его вязкость и плотность оставались постоянными и не отличались от соответствующих характеристик чистой воды. Скорость движения раствора должна быть постоянной в ходе эксперимента и равной либо естественной скорости, либо суперпозиции естественной и радиальной скоростей, последняя из которых искусственно поддерживается постоянным расходом или напором в скважине (как отмечалось выше, действительная скорость фильтрации в естественных условиях иногда мала по сравнению с радиальной). Поэтому скорость движения раствора или измеряется или задается один раз и навсегда в последующем эксперименте.

Скоростной режим создается таким, чтобы имела место только гидродисперсия, т. е. коэффициент дисперсии был линейной функцией действительной скорости фильтрации (см. 2.4.2):

$$K_L = \alpha_L u.$$

При этом предполагается, что структурные параметры продольной дисперсии α_L имеют одинаковые значения в случаях радиального и одномерного потоков [146]. Поток является горизонтальным; вертикальной и горизонтальной поперечной дисперсией можно пренебречь по сравнению с продольной дисперсией.

Первый случай. Одномерная, плоскопараллельная схема. При пакетном запуске трассера коэффициент дисперсии определяется по формуле (4.1.13).

Второй случай. Когда можно пренебречь естественным потоком, процесс в однородной среде носит плановый радиальный характер. При этом:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\rho K_r r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c}{\rho}\right)\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ruc) = \frac{\partial c}{\partial t}, \qquad (4.2.8)$$

где K_r — коэффициент продольной дисперсии, u — действительная скорость фильтрации, ρ — плотность раствора. С учетом изложенных упрощений уравнение (4.2.8) можно переписать в виде:

$$\frac{\alpha A}{r}\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} - \frac{A}{r}\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial t}, \qquad (4.2.9)$$

где $u = A/r$, $A = Q/2\pi b\Phi$, Q — расход налива, b — мощность водоносного горизонта, Φ — пористость. Когда в скважину вводится «пакет» трассера, экспериментальная кривая представляет собой импульсную переходную характеристику. При этом отметим, что положение максимума зависит от действительной скорости фильтрации, а его амплитуда от дисперсии (как при

запуске трассерной волны, см. раздел 4.1.1). Модель здесь имеет вид:

$$\frac{\alpha A}{r}\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}-\frac{A}{r}\frac{\partial c}{\partial r}=\frac{\partial c}{\partial t},$$

$$c(r,\ 0)=0,$$

$$c(r_0,\ t)=c_0,\quad 0<t<T; \tag{4.2.10}$$

$$c(r_0,\ t)=0,\quad T<t;$$

$$c(\infty,\ t)=0,$$

где T — время окончания пакетного запуска, r_0 — радиус пусковой скважины. Величина A постоянна в течение всего эксперимента, благодаря тому что после запуска трассера в скважину производится налив чистой воды с тем же расходом.

З а м е ч а н и е. Допущение о стационарности фильтрационного потока является корректным, так как она достигается в течении нескольких минут (численные и экспериментальные результаты см. в [103]). В тех случаях, когда нельзя пренебречь естественным потоком подземных вод, суммарная скорость представляет собой суперпозицию скорости радиального потока A/r и одномерной скорости естественного потока u_n (рис. 4.2.9). Тогда модель представляется в системе координат гидродинамической сетки (см. раздел 5.2) уравнением (4.2.5), при этом используется симметрия профилей поля скоростей.

Примеры. Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих возможности многоскважинных методов.

П е р в ы й с л у ч а й. Экспериментальная схема приводится на рис. 4.2.10 [1]. Опыты проводились в ходе изучения лионского водоносного горизонта, геологическая характеристика которого приводится в разделе 6.2. Было мгновенно запущено 100 г иода (в виде NaI). С целью измерения средней по глубине концентрации трассера в пусковую и в некоторые наблюдательные скважины опускалось смесительное устройство, показанное на рис. 4.2.11. Концентрация определялась путем химических анализов проб, отобранных на глубинах 6 м и 12 м пробоотборником. Использовался также радиоактивный трассер (2 мК ^{131}I); схема устройства для непрерывного измерения показана на рис. 4.2.11. Эксперимент длился 160 ч; измерения концентрации трассера в каждой из семи наблюдательных скважин проводились через 2—10 ч.

Результаты (зависимости концентрации I от времени) в пусковой скважине и в наблюдательной скважине A_2 показаны соответственно на рис. 4.2.12 и 4.2.13. На рис. 4.2.14 показаны максимальные значения концентрации трассера, отмеченные в семи наблюдательных скважинах. Полученные кривые можно использовать для определения действительной скорости фильтрации (см. раздел 4.3) и для определения коэффициента продольной

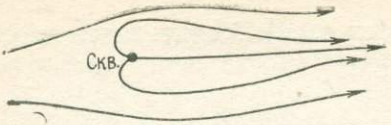


Рис. 4.2.9. Суперпозиция радиальной вынуждающей скорости и естественного фильтрационного потока

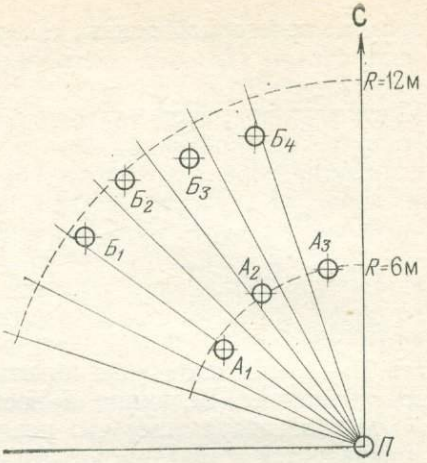
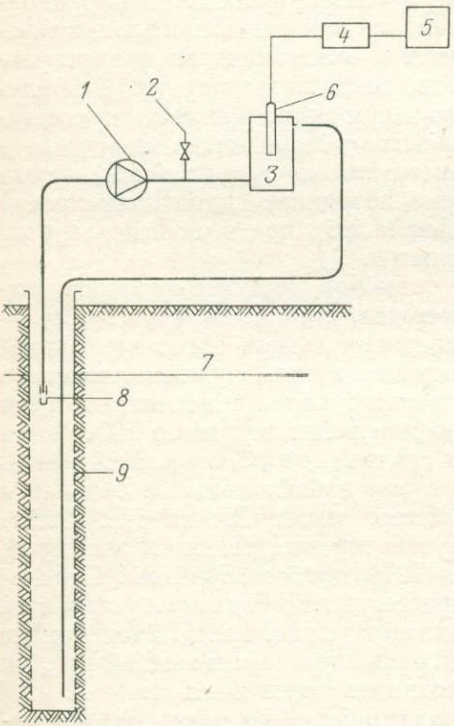


Рис. 4.2.10. Схема расположения скважин при выполнении многоскважинного эксперимента.

А и *Б* — наблюдательные скважины; *П* — пусковая скважина



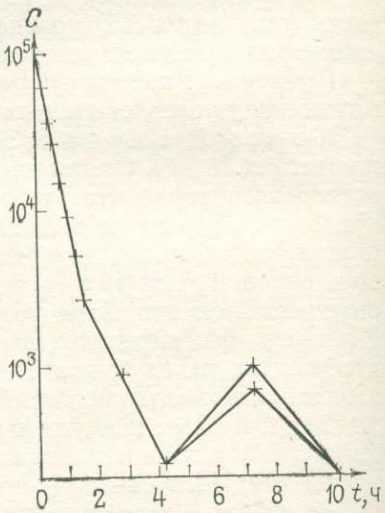


Рис. 4.2.11. Измерительное устройство для опытов с радиоактивными трассерами.

1 — насос; *2* — кран для отбора проб; *3* — циркуляционная камера; *4* — счетчик импульсов; *5* — самописец; *6* — зонд-регистратор; *7* — пьезометрический уровень; *8* — фильтр; *9* — фильтр скважины

Рис. 4.2.12. Изменение концентрации трассера (части на млрд) во времени в пусковой скважине

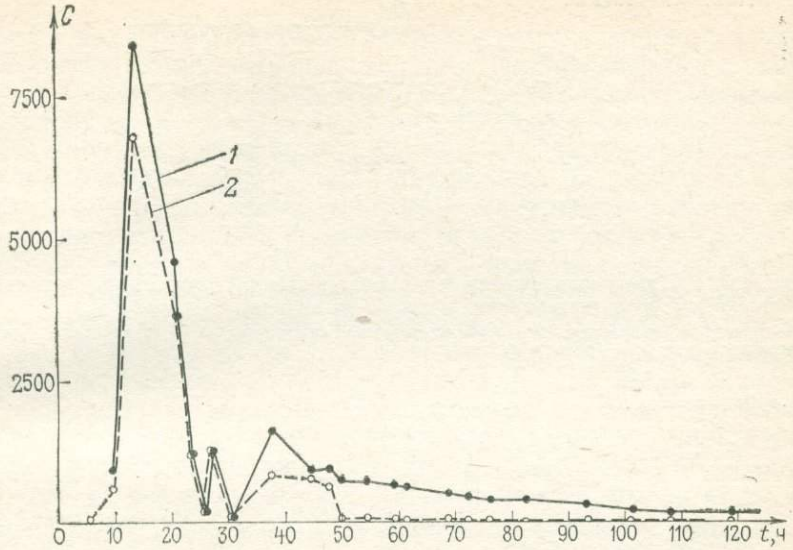


Рис. 4.2.13. Изменение концентрации трассера (части на млрд) во времени в наблюдательной скважине A_2 для двух глубин: *1* — 12 м; *2* — 6 м

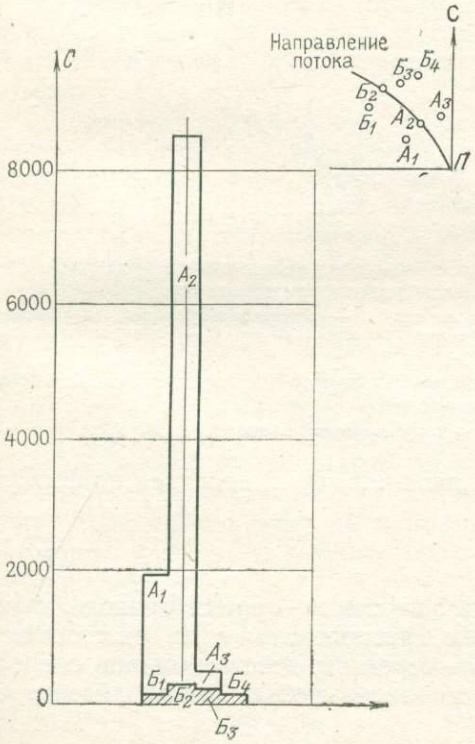


Рис. 4.2.14. Распределение максимумов концентрации трассера (части на млрд.) в различных скважинах (ось абсцисс на графике не имеет количественного смысла)

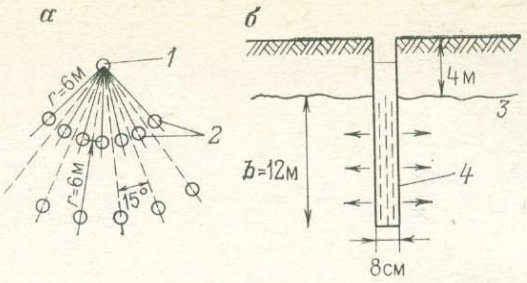


Рис. 4.2.15. План расположения (*а*) и конструкция (*б*) скважин при проведении многоскважинного эксперимента в рейнском водоносном горизонте.

1 — пусковая скважина; *2* — наблюдательные скважины; *3* — статический уровень подземных вод; *4* — фильтр скважины

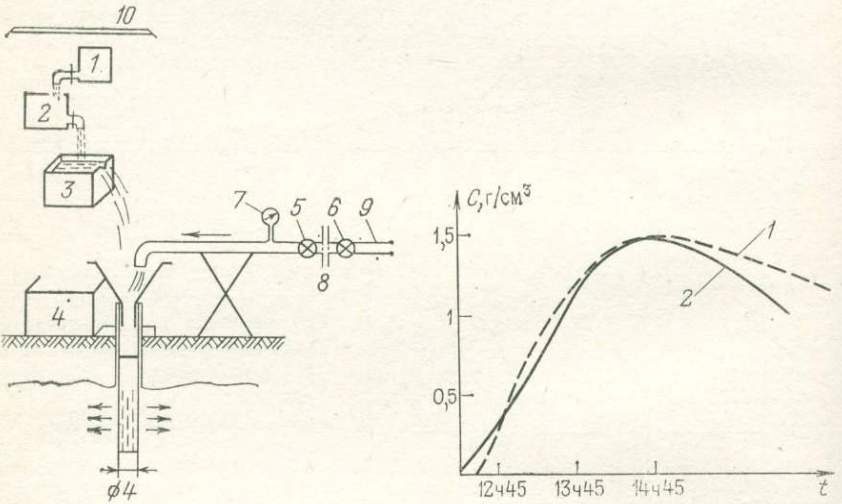


Рис. 4.2.16. Устройство для запуска трассера, использованное в ходе многоскважинного эксперимента в рейнском водоносном горизонте.

1 и *2* — емкости с насыщенным раствором соли; *3* — емкость с водосливом; *4* — емкость; *5* и *6* — краны; *7* — расходомер; *8* — водопроводная труба; *9* — водопроводная сеть; *10* — ограждение

Рис. 4.2.17. Опытные и вычисленные результаты многоскважинного эксперимента в рейнском водоносном горизонте.

1 — экспериментальная кривая; *2* — теоретическая кривая

дисперсии. В этом примере параметр α_L вычислялся по формуле (см. раздел 4.1.1):

$$\alpha_L = \frac{x^2 - u^2 t\,(t - t_0)}{u\,(t - t_0)}, \qquad (4.2.11)$$

где t_0 — продолжительность запуска, t — время прихода максимума концентрации в точке, расположенной на расстоянии x от пусковой скважины, u — средняя действительная скорость фильтрации. Для описанного эксперимента было найдено, что $\alpha = 425$ см.

Второй случай. С помощью многоскважинного метода в условиях чисто радиального потока производилось изучение процесса загрязнения рассолами рейнского водоносного горизонта (см. главу 6). Этот водоносный горизонт сложен хорошо проницаемыми песчано-гравийными отложениями. Расположение пусковой и наблюдательных скважин показано на рис. 4.2.15. В ходе опыта в водоносный горизонт производился налив соленой воды с минерализацией 10 г/л и расходом 10 м³/ч, который был достаточен для создания чисто радиального фильтрационного потока внутри первого кольца наблюдательных скважин. Схема оборудования пусковой скважины, обеспечивающего постоянный расход налива, приведена на рис. 4.2.16. В наблюдательных скважинах раствор перемешивался. Значения концентрации непрерывно регистрировались с помощью резистивиметра и контролировались путем отбора проб. Измерения велись в течение 12 ч после прекращения запуска индикатора. Результаты (зависимости концентрации соли от времени) обрабатывались на основе модели радиальной дисперсии (рис. 4.2.17) и дали $\alpha_L = 1100$ см.

4.2.3. Крупный масштаб. Односкважинный метод

Для данного масштаба характерные размеры составляют от 20 до 100 м. Многоскважинные методы, описанные в разделе 4.2.2, при этом масштабе можно применять только в следующих условиях.

1. Для того чтобы точно определить дисперсионный фронт, необходимо ввести значительное количество трассера. Объем запускаемого раствора должен быть соизмерим с объемом опробуемого пласта. В противном случае трассер будет распространяться только в пределах узкой зоны в направлении естественного потока.

2. Скорость потока является результатом суперпозиции естественных уровней подземных вод и повышений уровней, вызванных наливом. Обычно, за исключением области вблизи пусковой скважины, можно учитывать только скорость естественного потока; схема радиального потока здесь невозможна.

3. Направление естественного потока необходимо устанавливать достаточно точно. Иначе потребуется значительное число наблюдательных скважин, что существенно удорожает эксперимент. Конечно, эти условия в принципе выполнимы.

Однако с научной и финансовой точек зрения, представляет интерес другой метод, который был специально разработан для изучения процессов загрязнения подземных вод. Это односкважинный метод, при котором движение запускаемого раствора электролита контролируется по изменению электропроводности пласта средствами электроразведки. Измерения проводятся с поверхности земли и не нарушают среду. Поток подземных вод при этом имеет естественную скорость. Эксперимент такого рода дает воз-

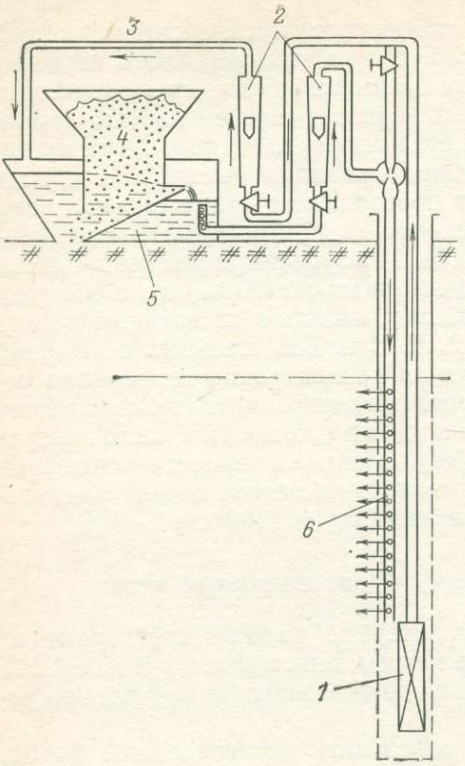


Рис. 4.2.18. Односкважинный геоэлектрический метод: устройство для запуска трассера.

1 — насос; *2* — расходомеры; *3* — вода, поступившая из скважины; *4* — соль; *5* — насыщенный раствор соли; *6* — инъекционная колонна

можность определить: во первых, направление и величину действительной скорости подземных вод (см. раздел 4.3.2) и, во-вторых, коэффициенты дисперсии по данным об изменении концентрации трассера во времени в точках измерения (расчеты выполняются по величинам кажущихся сопротивлений).

Эксперимент. Методика проведения геофизических наблюдений описана в прилож. II. В качестве индикатора чаще всего используется раствор NaCl благодаря его дешевизне и хорошим электролитическим свойствам. Конечно, можно использовать и другие химические соединения, если их стоимость и свойства сравнимы с поваренной солью.

Замечание. NaCl рекомендуется использовать при достаточно высоком электрическом сопротивлении грунта, когда разумным количеством NaCl можно существенно изменить предельные значения сопротивлений. В других случаях можно использовать субстанцию, повышающую сопротивление: например, если грунт загрязнен солями, можно нагнетать пресную воду и регистрировать увеличение сопротивления. Устройство для налива соленой воды показано на рис. 4.2.18.

Для того чтобы обеспечить хорошую однородность смеси, вода скважины рециркулируется и затем вводится в пласт по всей его мощности. При этом также уменьшается опасность осаждения соли на дно скважины. Соль растворяется при относительно высоком давлении и запускается с постоянным расходом: в окрестностях скважины может наблюдаться локальный радиальный эффект (отклонение потока от плоскопараллельного), вызванный наложенным дополнительным расходом соленой воды. Этот эффект контролируется в процессе измерений.

Используются совместно три геофизических метода (см. прилож. II): вертикальное электрозондирование ВЭЗ, электропрофилирование ЭП и метод потенциалов МП.

Перед началом опыта для изучения начального ненарушенного геоэлектрического состояния грунта по сетке электродов проводится вертикальное электрозондирование, электропрофилирование и измерение потенциалов.

В ходе эксперимента проводится электропрофилирование (например, 5 раз в сутки), а также двукратное (в середине и в конце налива) вертикальное электрозондирование и потенциометрия.

После окончания налива электропрофилирование и измерение потенциалов проводятся в точках, которые могут считаться пригодными для этих целей согласно предыдущим измерениям, с частотой, зависящей от чувствительности измерения и контрастов сопротивлений и потенциалов.

Обычные упрощающие допущения и модели. При односкважинном методе предполагается, что литологические, геологические и гидродинамические характеристики всей изучаемой зоны такие же, как в месте расположения скважины. Тип расчетной схемы (криволинейные или канонические прямоугольные координаты) зависит от геометрии линий тока. Обычно допускается, что в пределах опробуемой области линии тока являются прямыми. Исключение может составлять небольшой участок вблизи скважины, в пределах которого происходит поперечное расширение опробуемой зоны. Этот эффект обычно приписывается радиальной скорости, вызванной наложенным на поток дополнительным расходом соленой воды при наливе. Этим локальным эффектом можно пренебречь на некотором небольшом расстоянии от скважины, и входная граница области сдвигается на это расстояние по потоку (рис. 4.2.19).

Из других обычных допущений (прежде всего для аллювиальных водоносных горизонтов) следует отметить слоистое строение пласта, которое подтверждается геологическим разрезом по скважине, отсутствие заметного перетекания между слоями (слои независимы и скорости в них постоянны). Гравитационными эффектами можно пренебречь так же, как изменениями плотности раствора.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что эти упрощающие допущения являются в большинстве случаев вполне разумными. Конечно, если в этом возникает необходимость, они могут быть преобразованы или изменены. Например, можно учесть вертикальные перетоки между отдельными слоями, путем введения в двумерную горизонтальную модель распределенных источников в соответствующем уравнении (см. раздел 9.5.2).

При этих допущениях модель представляет собой ряд двумерных горизонтальных моделей дисперсии; скорости, коэффициенты дисперсии и граничные условия изменяются от слоя к слою (рис. 4.2.20. Здесь Q_i — расход потока на входной границе слоя i).

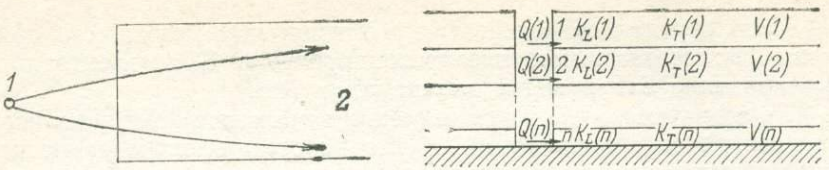


Рис. 4.2.19. Односкважинный геоэлектрический метод. Определение моделируемой области.
1 — пусковая скважина; *2* — моделируемая область

Рис. 4.2.20. Многослойная модель.
a — расход загрязняющего потока; K_L и K_T — коэффициенты дисперсии; V — скорость фильтрации в водоносном горизонте

Каждая модель основывается на уравнении дисперсии:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_L \frac{\partial c}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_T \frac{\partial c}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(uc) = \frac{\partial c}{\partial t}, \qquad (4.2.12)$$

записанному в классических прямоугольных координатах, образованных направлением средней скорости и перпендикулярным к ней направлением в горизонтальной плоскости xOy слоя. Моделируемая область, таким образом, представляется полуограниченной полосой с входной границей на скважине.

На входной границе в зоне засоления концентрация равна концентрации в скважине, а на других ее участках — фоновой концентрации. На прочих границах сохраняется фоновая концентрация.

Таким образом, начальные и граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &C(x,\ y,\ 0) = C_0(x,\ y),\\ &C(x,\ \pm L,\ t) = C_0(x,\ \pm L),\\ &C(0,\ y,\ t) = C_0(y,\ t), \quad -a < y < +a,\\ &C(0,\ y,\ t) = C_0(0,\ y), \quad |y| > a,\\ &C(M,\ y,\ t) = C_0(M,\ y). \end{aligned} \qquad (4.2.13)$$

Фоновая концентрация в ряде случаев может приниматься постоянной. Концентрация на входной границе вычисляется по формуле разбавления через расход потока соленой воды и расход естественного потока по каждому слою. Полагая, что Q salt — расход налива соленой воды (размерность MT^{-1}), а Q aquif (j) — расход естественного потока через скважину в j-ом слое (размерность L^3/T^{-1}), можно записать:

$$Q_{\text{aquif}}(j) = u(j) \cdot dy \cdot h(j),$$

где $u(j)$ — действительная скорость фильтрации в j-ом слое, $h(j)$ — мощность слоя, dy — приращение ширины. Полагая, что $Q_s(j)$ — расход соленой воды в j-ом слое, получим:

$$Q_s(j) = Q_{salt} \cdot k(j) \cdot h(j) / \sum_j h(j) \cdot k(j),$$

где $k(j)$ — проницаемость j-го слоя. Тогда концентрация в скважине равна:

$$C_p(j) = Q_s(j) / Q_{aquif}(j).$$

Концентрация по всей глубине скважины постоянна и равна:

$$Q_{salt} / \sum_j Q_{aquif}(j).$$

Определяемые геофизическими измерениями количественные экспериментальные данные представляют собой средние по мощности пласта величины. Для приспособления модели к этим условиям необходимо определенным образом установить эти средние величины (рис. 4.2.21). Здесь можно использовать теорию приведения к однородной пористой среде, рассмотренную в разделе 2.5.1, т. е. следующие формулы (обозначения даны в разделе 2.5.1):

для пористости

$$\overline{\Phi} = \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} \Phi \, dy,$$

для концентраций

$$\overline{c} = \frac{1}{\overline{\Phi}(y_2 - y_1)} \int_{y_1}^{y_2} \Phi c \, dy,$$

для скоростей

$$\overline{u} = \int_{y_1}^{y_2} \Phi U \, dy \Big/ \int_{y_1}^{y_2} \Phi \, dy,$$

для коэффициентов дисперсии

$$\overline{K} = \frac{1}{\overline{\Phi}(y_2 - y_1)} \left(\int_{y_1}^{y_2} K_L \Phi dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\varphi^2}{K_T \Phi} \, dy \right)$$

и

$$\varphi = \int_{y_1}^{y_2} \Phi (u - \overline{u}) \, dy, \quad \varphi(y_1) = \varphi(y_2) = 0.$$

Согласование модели с экспериментальными кривыми. Модель согласовывается с типичными кривыми кажущихся сопротивлений, выраженных в процентах изменений по отношению к значению при фоновой концентрации (рис. 4.2.22).

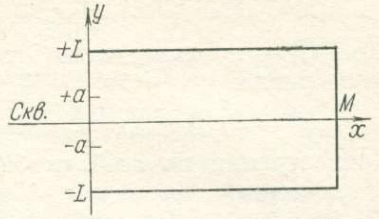
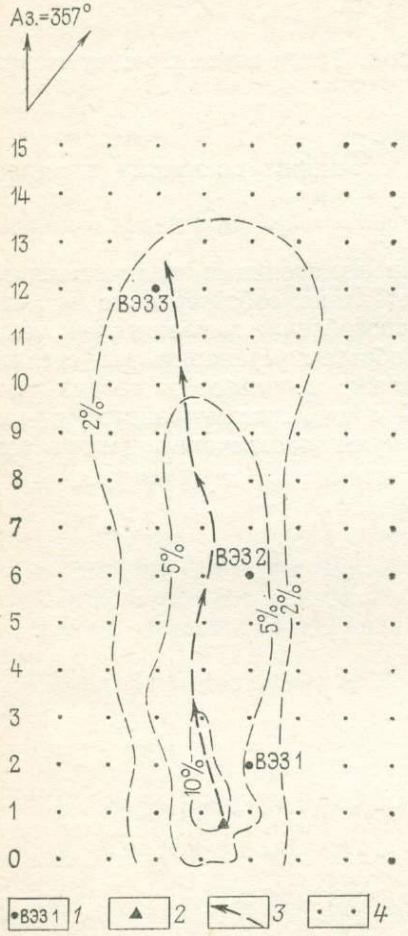


Рис. 4.2.21. Моделируемая область и положение скважины -



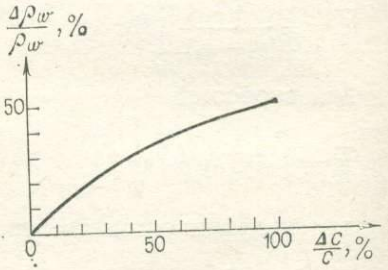


Рис. 4.2.22. План изменений кажущихся сопротивлений (в процентах). Масштаб 1 : 400.

1 — точки вертикального электрозондирования; *2* — пусковая скважина; *3* — направление потока; *4* — точки измерения

Рис. 4.2.23. График изменения относительного электрического сопротивления водного раствора NaCl (в процентах) в зависимости от изменения его относительной концентрации (в процентах) при температуре 13 °С

Обозначим через c_0 постоянную фоновую концентрацию, а через c_1 постоянную концентрацию в скважине. Из (4.2.12) следует решение:

$$c = (c_1 - c_0) f(x, t) + c_0,$$

где $f(x, t)$ — функция ошибок некоторого вида. При небольшой амплитуде изменения концентрации электрическое сопротивление обычно линейно зависит от относительного изменения концентрации (рис. 4.2.23) (но это требует проверки). Тогда:

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{(c_1 - c_0) f(x, t)}{c_0} = A \frac{\Delta \rho}{\rho}.$$

В скважине измеренное изменение равно:

$$\frac{c_1 - c_0}{c_0} = A \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_p.$$

План изменений электрических сопротивлений приводится к плану относительных изменений электрических сопротивлений с помощью соотношения:

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right) \Big/ \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_p.$$

Из модели непосредственно вычисляется:

$$(c_1 - c_0) f(x, t)/(c_1 - c_0) = f(x, y).$$

Таким образом, необходимо согласовать распределение $f(x, t)$ в плане с распределением

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \Big/ \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_p.$$

Под концентрацией при этом понимается ее среднее значение в пласте. Согласование проводится в два этапа.

1. Положение, мощность и проницаемость каждого слоя определяется по геологическому разрезу скважины. Эти величины в процессе согласования подвергаются изменению. Следует отметить, что суммарная проводимость и мощность пласта при этом являются фиксированными значениями. Метод последовательных приближений, используемый для определения послойных характеристик, базируется на прямой качественной интерпретации результатов геофизических исследований. Например, имеет место небольшое изменение электропроводности по сравнению с запущенным количеством электролита; на этом основании делается вывод о том, что вблизи подошвы пласта имеется слой очень высокой проницаемости и это следует учитывать при использовании метода последовательных приближений. Детали частных характеристик слоев могут уточняться другими методами, такими, как электрокаротаж и опыты с трассерами.

2. Коэффициенты продольной и поперечной дисперсии задаются по слоям либо в виде произведения, либо в виде цельных коэффициентов. При этом константы в произведении (структурные параметры гидродисперсии) задаются по экспериментальным или литературным данным: например, по данным [118] структурный параметр продольной гидродисперсии равен единице, а структурный параметр поперечной гидродисперсии — величине, обратно пропорциональной проницаемости. Последний результат объясняется тем фактом, что встречающиеся в пласте слабопроницаемые зоны играют роль погребенных дамб, вызывающих расширение зоны загрязнения. Гидродинамический эффект таких зон является частью механизма поперечной дисперсии.

Согласование выполняется путем преобразования цельных коэффициентов в соответствии со следующей блок-схемой (рис. 4.2.24).

З а м е ч а н и е. Поскольку для согласования модели используются изменения концентраций, то достаточно иметь только геофизические данные. Реальные же концентрации не могут быть установлены геофизическими методами. Для уточнения величин концентраций, выданных моделью и зависящих от допущений об условиях разбавления, необходим дополнительный эксперимент.

Пример экспериментальных результатов и их интерпретации. В качестве примера приведем результаты исследований, выполненных в комплексе исследований, проведенных для лионского водоносного горизонта (см. раздел 6.2). Связь между изменениями концентрации подземных вод и их электрическим сопротивлением при данной температуре определяется кривыми Шлюмберже (рис. 4.2.25). Относительное изменение кажущегося сопротивления зависит от относительного изменения эквивалентной концентрации NaCl (сопротивления других химических составляющих подземных вод не изменялось). Такая зависимость показана на рис. 4.2.23.

На первом этапе согласования устанавливались положения хорошо проницаемых слоев в разрезе, путем сопоставления экспериментальной кривой вертикального электрозондирования с кривыми, соответствующими ряду сред и рассчитанными при перемещении проницаемого слоя вниз по пласту (рис. 4.2.26). В этом примере было установлено, что лучше всего подходит седьмой вариант. Результаты исследований показаны на рис. 4.2.27, 4.2.28 и 4.2.29.

Продолжительность запуска трассера составляла 225 ч, было введено более 40 т соли. План фоновых электрических сопротивлений (см. рис. 4.2.27), построенный при расстоянии между питающими электродами $AB = 90$ м, показал наличие зоны повышенной электропроводности параллельной оси схемы. Путем проведения вертикального электрозондирования в трех точках было выяснено, что изменения кажущихся сопротивлений обус-

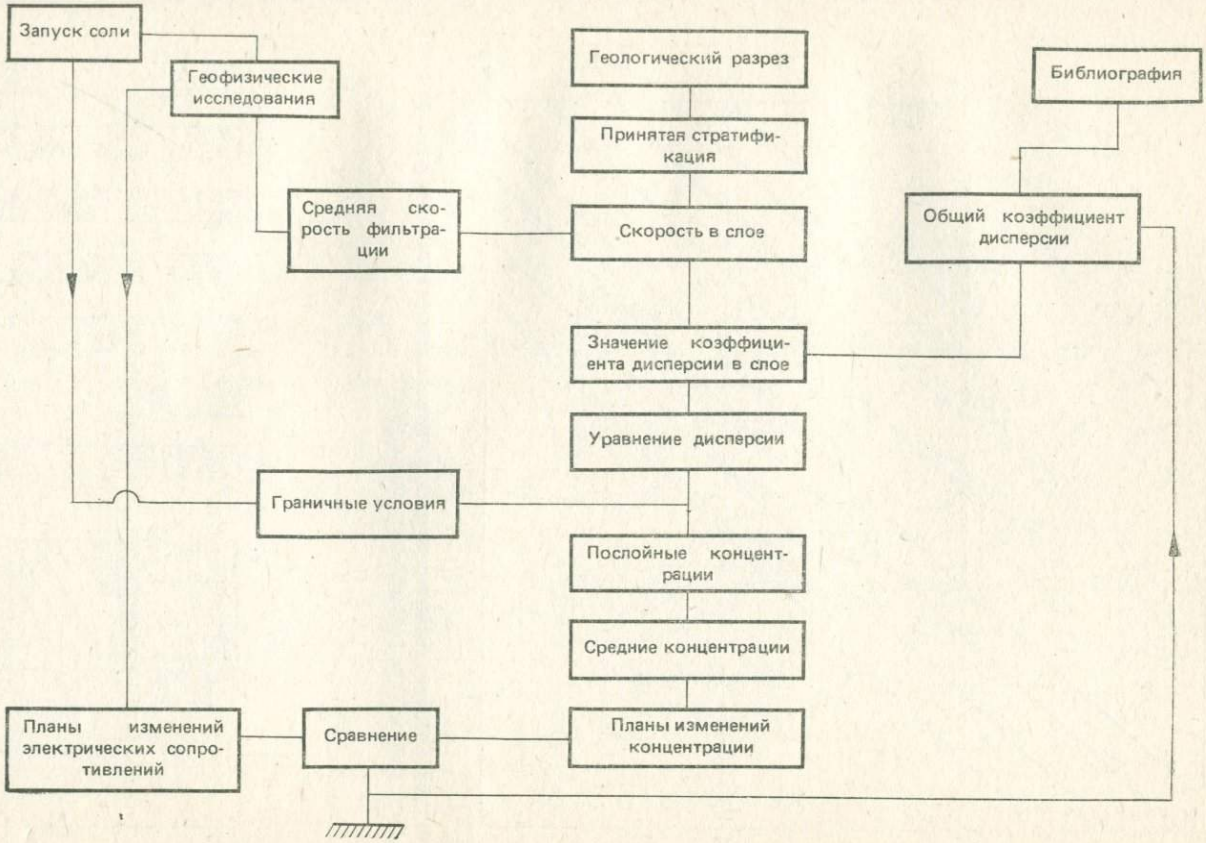


Рис. 4.2.24. Блок-схема последовательности операций

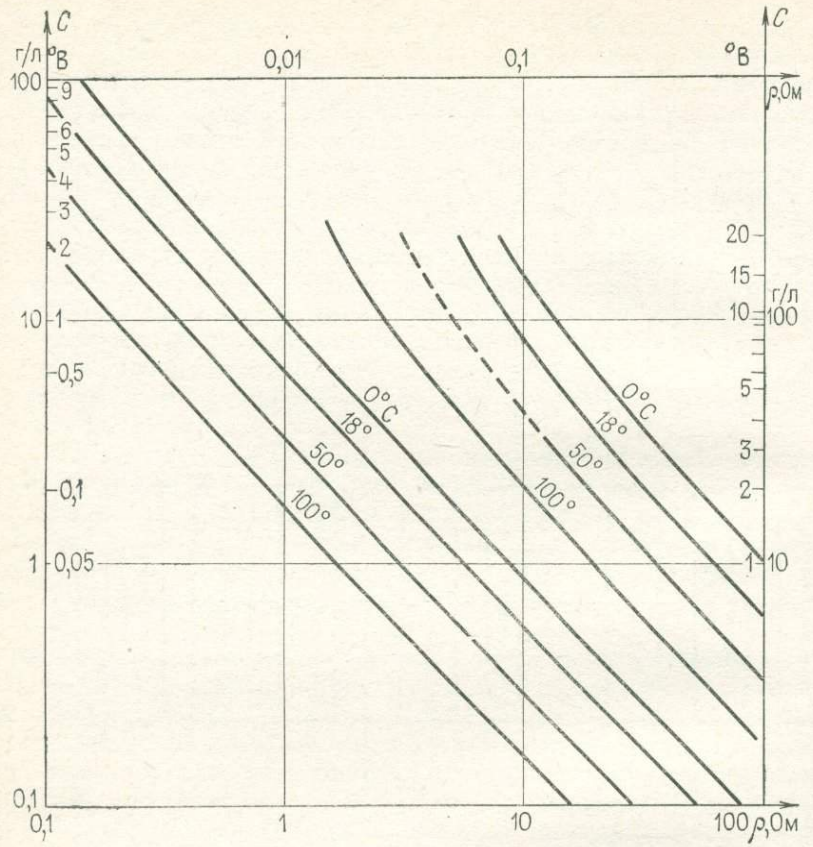


Рис. 4.2.25. Графики зависимости электрического сопротивления растворов NaCl от концентрации при различных температурах

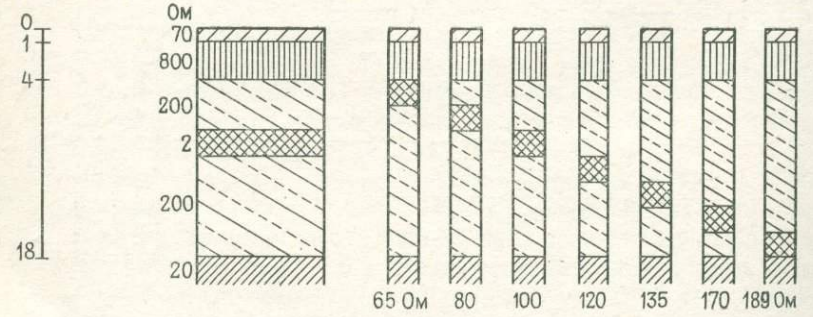


Рис. 4.2.26. Геоэлектрические эквиваленты различных слоистых сред

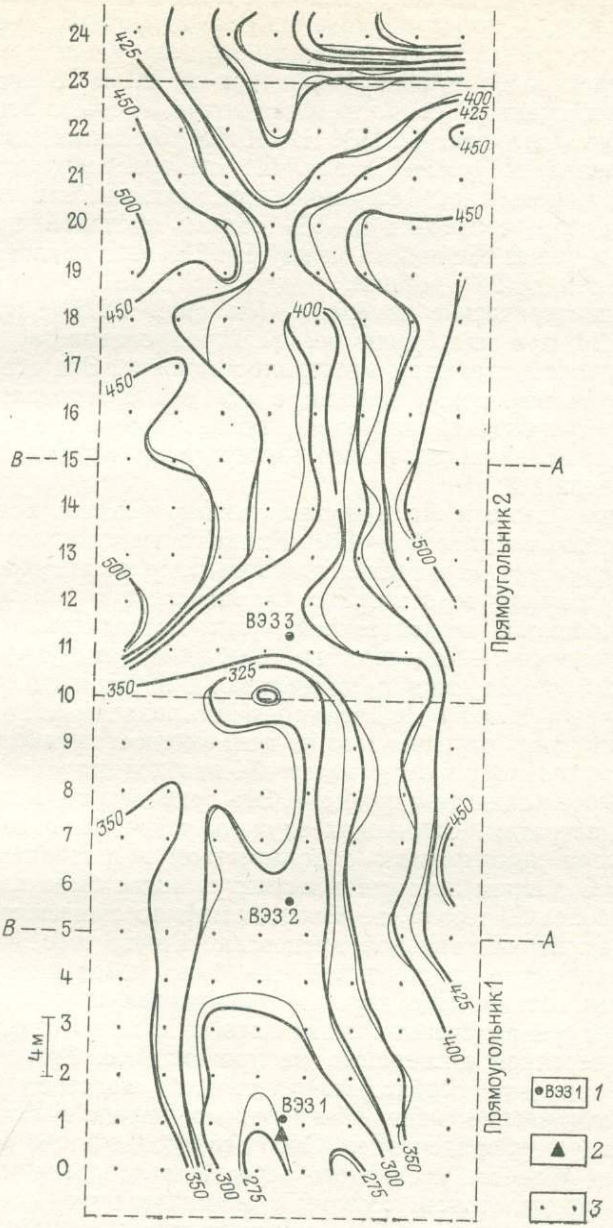


Рис. 4.2.27. План распределения кажущихся сопротивлений.

1 — точки вертикального электрозондирования; *2* — пусковые скважины; *3* — точки измерений

ловлены изменчивостью сопротивлений аллювиальных отложений в зоне аэрации. К концу периода запуска изменения, вызванные соленой водой имели место, главным образом, вдоль оси расположения электродов и обнаруживались до 23 и 24 профилей. За указанной границей сопротивления в течение опыта оставались стабильными (см. рис. 4.2.27). В результате этих измерений была установлена узкая аномалия электропроводности (см. рис. 4.2.28); изменения кажущихся сопротивлений в пределах чувствительности составили 4—5% вблизи пусковой скважины и 2% в 45 м от нее. Величины между 1 и 2% наблюдались по оси потока вплоть до 24 профиля.

Потенциометрические измерения (см. рис. 4.2.29), протянувшиеся до 14 профиля, дали ось электропроводности, соответствующую узкой аномалии электропроводности. Эта ось принималась в качестве оси x модели, а ось y — ортогональной ей. Модель воспроизводила ситуацию, показанную на рис. 4.2.28; скорости вычислялись из такого эксперимента методом, описанным в разделе 4.3.

Некоторые выводы по однoскважинному геофизическому методу. Крупный масштаб (20—100 м) характерен для многих классических случаев загрязнения и соответствует размерам зоны санитарной охраны водозаборных скважин.

Здесь проявляются два важных фактора: слоистость и поперечная дисперсия. Конечно, по соображениям, изложенным в разделе 2.5, также важна и продольная дисперсия, но она имеет значение уже при меньших масштабах (см. разделы 4.2.1 и 4.2.2).

Для получения осредненного по всей мощности пласта дисперсионного эффекта при этом масштабе необходимо использовать очень большое количество трассера. Это приводит к значительным денежным затратам. Во многих случаях такое большое количество трассера несоизмеримо с количеством загрязнения в этом масштабе. В данном примере к моменту, когда было израсходовано уже более 30 т соли, не было достигнуто существенного осреднения экспериментальной дисперсии. Ввиду того, что запущенное количество трассера все еще было небольшим, трассер переносился только через хорошо проницаемые слои, а экспериментального упорядочения, связанного с молекулярной диффузией и поперечной дисперсией, не происходило. Это свидетельствует о том, что необходимо учитывать слоистость разреза.

Геоэлектрические измерения, однако, представляют собой искусственное упорядочение. Оно воспроизводится в модели с помощью процесса численного осреднения. Модель имитирует слоистую среду, затем «создает» эквивалентную однородную среду, которая согласуется с геоэлектрическими измерениями. Затем модель «возвращается» к слоистой среде, с помощью которой выводятся локальные параметры. Сам по себе такой математический процесс не дает однозначного решения. Единственность достигается путем сопоставления модельной слоистости с геоло-

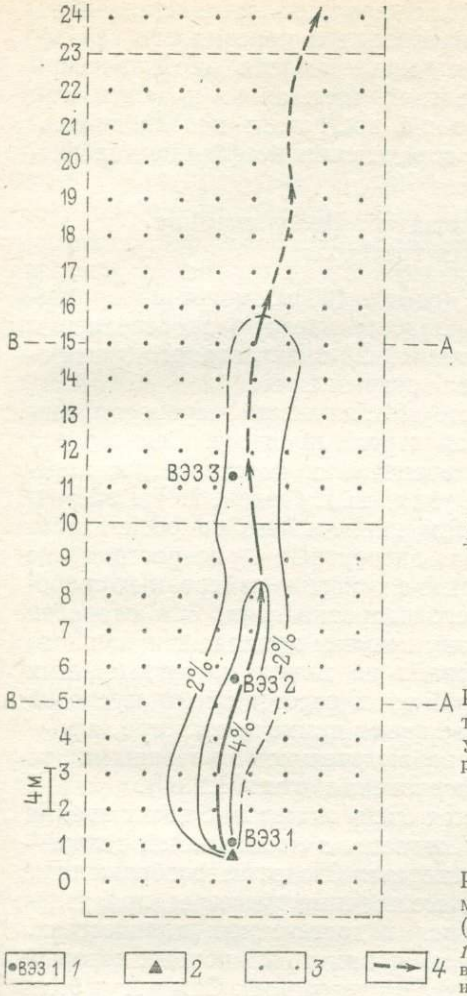


Рис. 4.2.29. План распределения электрических потенциалов.

Условные обозначения аналогичны рис. 4.2.28

Рис. 4.2.28. План распределения изменений кажущихся сопротивлений (в процентах).

1 — точки вертикального электрозондирования; *2* — пусковая скважина; *3* — точки измерений; *4* — направление потока

гическим разрезом и с данными геофизической стратификации среды (см. рис. 4.2.26).

Для этого метода требуются две математические модели, серия геофизических измерений в одиночной скважине и геологический разрез пусковой скважины. Нет необходимости в оборудовании наблюдательных скважин. Это сравнительно легкий и дешевый метод и он не нарушает среду. Конечно, как уже отмечалось, соль можно заменить другим трассером-электролитом.

Таким образом, предложенная методика сводится к следующему.

1. Экспериментальный этап: построение геологического разреза пусковой скважины; проведение геоэлектрических измерений

движения подходящего трассера с помощью односкважинного метода (запуск в скважину и измерения с поверхности земли).

2. Этап моделирования: построение модели геофизической стратификации с целью определения положения и мощностей слоев для геофизических измерений; построение модели дисперсии в слоистом пласте с целью определения коэффициентов дисперсии.

4.2.4. Региональный масштаб. Использование естественных трассеров

При региональном масштабе (свыше 100 м) могут обнаруживаться два типа эффектов: 1) значительного распространения небольшого количества загрязнения, 2) значительного распространения большого количества загрязнения.

Первый тип обусловлен чисто механическим переносом, являющимся наиболее характерной чертой процесса. Связано это с тем, что здесь не возникает перемещения (механическое перемешивание и молекулярная диффузия, см. в разделе 2.1) и загрязнение распространяется по путям наименьшего сопротивления. В этом случае можно пренебрегать дисперсией, а распространение загрязнения может быть рассчитано с помощью измеренных скоростей воды по путям наименьшего сопротивления. Эти скорости устанавливаются по минимальному времени прихода запущенного трассера, которое зарегистрировано на линии наблюдательных скважин, расположенных на требуемом расстоянии от пусковой скважины: если t — минимальное время прихода трассера, а x — расстояние между пусковой и наблюдательной скважинами, то x/t — скорость продвижения загрязнения (рис. 4.2.30).

Второй тип, очевидно, является очень тяжелым с точки зрения имитации загрязнения, которое создается с единственной целью— определения коэффициентов дисперсии. По этим соображениям можно рассчитывать только на естественные трассеры, при условии, конечно, что они содержатся в достаточных количествах. Под «естественным» трассером будем понимать компонент, который содержится в грунте перед началом исследований. Они могут быть природными (например, природные изотопы или интрузии морской воды), «полуискусственными» (например, тритий, образовавшийся в результате испытаний атомных бомб) или «искусственными» (загрязнения, связанные с хозяйственной деятельностью).

До сих пор использовались главным образом искусственные трассеры и интрузии морских вод. Для того чтобы провести выверку математической модели по экспериментальным кривым, полученным по данным полевых измерений, проводится подбор коэффициентов дисперсии. Затем эта модель используется на стадии прогноза для расчета новых распределений концентраций при измененных граничных условиях. Проиллюстрируем такую методику двумя примерами.

Загрязнение подземных вод промышленными стоками. Полное описание примера, включающее геологическое строение и математическую модель, рассматривается в разделе 6.1. Двумерная плановая однослойная модель дисперсии в канонических прямоугольных координатах согласовывалась методом последовательных приближений со значениями концентраций, измеренными вдоль потока вблизи солеотвала. Согласование осуществлялось путем изменения значений коэффициентов продольной и поперечной дисперсии при данной средней скорости, вычисленной по данным замеров уровней. Процесс согласования выполнялся для каждого солеотвала и, таким образом, был составлен план коэффициентов дисперсии для всей области.

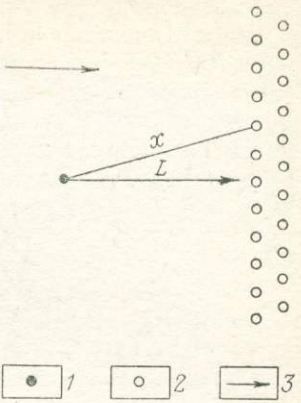


Рис. 4.2.30. Расположение наблюдательных скважин при проведении крупномасштабных определений скорости распространения загрязнения в подземных водах (расстояние L является большим).

1 — пусковая скважина; *2* — наблюдательные скважины; *3* — среднее направление потока

На рис. 4.2.31 показан пример рассчитанных и измеренных распределений концентрации для данного солеотвала. Расчетные кривые даны для различных моментов времени и различных принятых значений проницаемости. По этим данным найдены структурные параметры дисперсии $\alpha_L = 15$ м, $\alpha_T = 1$ м.

Загрязнение, обусловленное санитарными полями фильтрации. Ситуация описывается в разделе 6.2. Направление потока подземных вод было установлено на основании геофизических измерений кажущегося электрического сопротивления; величина скорости подземных вод в среднем направлении потока определялась на основе аналогии с другими участками по геофизическим данным (см. раздел 6.2), которая показывает идентичность геологических условий (в смысле значений проницаемости). Конечно, при таком масштабе исследований (600—1000 м) среднее значение скорости определяется достаточно точно по замерам уровней.

Измерения электропроводности воды производились по группе наблюдательных скважин, расположенных ниже по потоку от поля фильтрации. Эти данные использовались для согласования с двумерной, плановой однослойной моделью дисперсии аналогично модели предыдущего примера. Состав не дифференцировался по содержанию различных ионов и в расчет принималась только общая электропроводность раствора. Выверенные кривые подобны кривым, показанным на графике рис. 4.2.31. Величины структурных параметров гидродисперсии составили $\alpha_L = 12$ м, $\alpha_T = 4$ м.

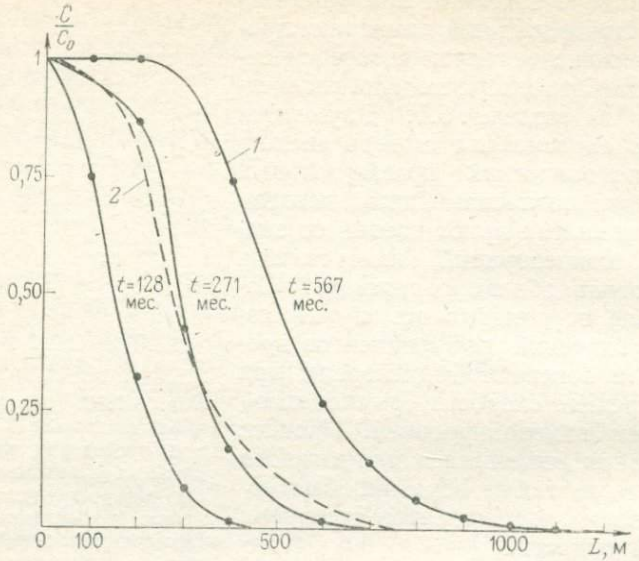


Рис. 4.2.31. Зависимость расчетной и наблюденной концентрации соли в подземных водах от расстояния до солеотвала (L) на различные моменты времени. *1* — теоретические результаты; *2* — экспериментальные результаты

Замечание. Конечно, для выверки модели могут использоваться и другие экспериментальные критерии. Например, по данным химических анализов можно определить общее количество растворенного вещества и использовать его в качестве естественного трассера.

4.3. ПОЛЕВЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Все используемые в указанных целях полевые методы могут быть разбиты на две группы: 1) косвенное определение скоростей фильтрации на основании закона Дарси и известных значений гидродинамических параметров водоносных горизонтов; 2) прямое определение скоростей фильтрации.

4.3.1. Косвенный метод определения скорости на основании закона Дарси

В приложении I, где изложены основные теоретические положения гидрогеологии, в качестве основного уравнения, которому подчиняется процесс фильтрации в водоносных горизонтах, дается закон Дарси. Он определяет следующую зависимость между скоростью фильтрации v и градиентом давлений:

$$v = -\frac{k}{\mu}(\operatorname{grad} p + \rho g \operatorname{grad} z), \qquad (4.3.1)$$

где k — тензор коэффициента проницаемости, g — ускорение силы тяжести, p — давление в жидкости, μ и ρ — соответственно динамическая вязкость и плотность воды, z — вертикальная координата. Очевидно, что в используемой нами классической прямоугольной системе координат вектор силы тяжести направлен параллельно оси Oz. В приложении I показано, как из закона Дарси и уравнения неразрывности выводится основное уравнение неустановившейся фильтрации, имеющее вид:

$$\operatorname{div}(T \operatorname{grad} h) = S \frac{\partial h}{\partial t} + q, \tag{4.3.2}$$

где T — проводимость водоносного горизонта, S — коэффициент водоотдачи, q — характеризует особые точки (сингулярности) поля фильтрации, h — напор, который при неизменной плотности ρ равен:

$$h = \frac{p}{\rho g}.$$

Замечание. Постоянство величины ρ является нормальным допущением при решении обычных задач фильтрации. При решении же задач загрязнения подземных вод этим допущением следует пользоваться со значительно бóльшей осторожностью. Безусловно приемлемым оно будет, пожалуй, только при индикаторных исследованиях.

Сущность косвенных методов состоит в предварительном определении коэффициента проницаемости (или проводимости) и в последующем вычислении скоростей фильтрации на основании закона Дарси с использованием известных значений градиентов напоров.

Как уже указывалось ранее в связи с коэффициентами дисперсии, использование того или иного метода определения проницаемости (проводимости) определяется масштабом исследования. В целом их можно разделить на две группы: 1) экспериментальные методы, такие, как откачки или методы электроразведки, применяются обычно в средне- и крупномасштабных исследованиях; 2) математические методы, которые заключаются в интерпретации карт гидроизогипс с использованием основных уравнений динамики подземных вод или в последовательном приближении фактической и расчетной карт гидроизогипс методом проб и ошибок, а также другими методами решения обратных задач. Результирующие параметры справедливы для крупномасштабных и региональных оценок.

Замечание. В случае высокой степени однородности водоносных горизонтов значения проводимости, определенные в ходе средне- и крупномасштабных опытов, могут использоваться в моделях регионального масштаба.

Откачки. Как нестационарные [251, 42, 160], так и стационарные методы интерпретации откачек с использованием упро-

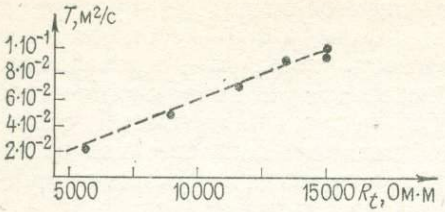


Рис. 4.3.1. График зависимости проводимости водоносного горизонта от его поперечного электрического сопротивления [71]

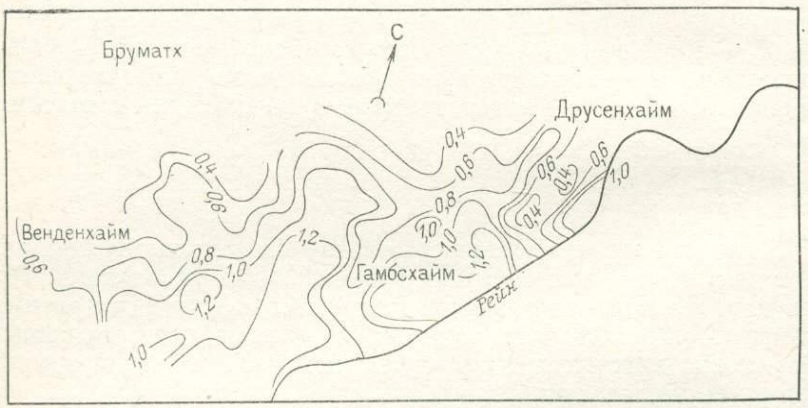


Рис. 4.3.2. План распределения проводимости (в 10^{-1} м²/с) [71]

щающих допущений (предпосылки Дюпюи—Форгеймера) подробно описаны в ряде руководств. Они стали уже классическими и мы не будем подробно останавливаться на этих методах, имея в виду, что их можно непосредственно использовать и при решении задач загрязнения подземных вод. Заметим только, что помимо откачивающей скважины необходимо иметь наблюдательную скважину на расстоянии, исключающем заметные погрешности в определении градиента напоров.

Методы электроразведки. Методы электроразведки, более подробно описанные в приложении II, могут быть использованы для определения проводимости водоносного горизонта без предварительного бурения скважин. Хотя вопросы использования геофизических методов в указанных целях продолжают изучаться, мы приведем здесь некоторые экспериментальные результаты, которые иллюстрируют возможности этих методов.

Предложенная методика [265, 71] основана на переходе от значений поперечного электрического сопротивления разреза, полученных путем вертикального электрического зондирования, к фильтрационной проводимости слагающих его водоносных пород. Эти исследования были проведены на одном из участков рейнского водоносного горизонта (Восточная Франция), сло-

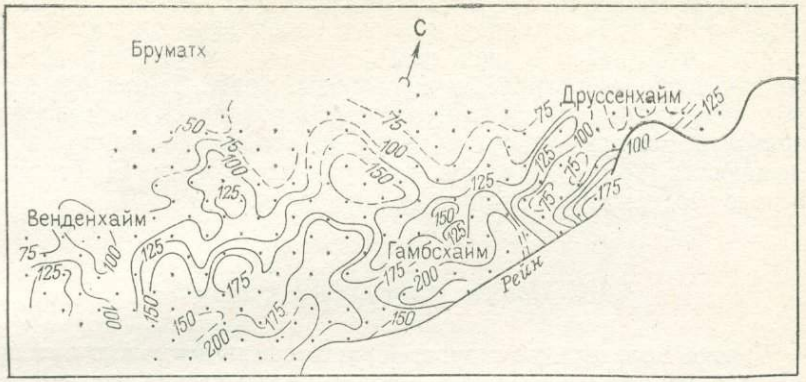


Рис. 4.3.3. План распределения исправленных значений поперечного электрического сопротивления водоносного горизонта (в 100 Ом·м²) [71]

женном аллювиальными песчано-гравийными и галечными отложениями, содержащими тонкие глинистые линзы. Данный водоносный горизонт залегает на непроницаемом основании, является безнапорным, уровень залегает на глубине нескольких метров, при откачках он может быть принят в качестве условно неограниченного горизонта.

Соотношение между проводимостью водоносного горизонта T и величиной его поперечного электрического сопротивления R_t определялось путем сопоставления результатов откачек по шести скважинам с данными зондирования, выполнявшегося параллельно вблизи скважин. Оценки, полученные по другим районам, подтверждают справедливость результирующего графика зависимости T от R_t, приведенного на рис. 4.3.1; он имеет вид, близкий к прямой линии. Была составлена карта проводимостей (рис. 4.2.2) на основании рис. 4.3.1 и карты изолиний электрических сопротивлений водоносного горизонта (рис. 4.3.3).

З а м е ч а н и е. Значение R_t является в нашем случае исправленным значением кажущегося электрического сопротивления, полученного путем электрического зондирования. Такое исправление потребовалось ввести в связи с различным электрическим сопротивлением самой воды на различных участках водоносного горизонта. В этих целях можно воспользоваться соотношением Арчи:

$$\rho_a / \rho_w = \Phi^{-m}, \qquad (4.3.3)$$

из которого видно, что кажущееся сопротивление водоносного горизонта ρ_a прямо пропорционально электрическому сопротивлению находящейся в нем воды ρ_w; Φ — пористость водоносного горизонта, m — коэффициент его консолидации. Это соотношение

показывает, что электрическое сопротивление водоносного горизонта всегда прямо пропорционально электрическому сопротивлению находящейся в нем воды. Поэтому, определив среднее электрическое сопротивление проб воды, можно вычислить величины исправленного электрического сопротивления водоносного горизонта, которые могут объективно отражать свойства водовмещающих пород, включая их гранулометрический состав и среднее содержание глинистых прослоев.

4.3.2. Прямое определение скоростей

Прямое определение скоростей фильтрации возможно при проведении как крупно- и средне-, так и мелкомасштабных экспериментов.

Многоскважинный метод. При определении коэффициентов дисперсии опыты можно вести по схеме, показанной на рис. 4.2.15. В водоносный пласт вводится индикатор (радиоактивный или обычный, например ^{131}I или NaI) в количествах, достаточно малых, чтобы не нарушить естественный фильтрационный поток. В то же время запускная концентрация должна быть достаточно большой для надежной регистрации прихода индикатора к наблюдательным точкам. При этом, конечно, предполагается наличие низких фоновых содержаний индикатора в водоносном горизонте. Схема пускового устройства приводится на рис. 4.2.11. В ходе опыта наблюдательные скважины следует располагать так, чтобы можно было определить направление движения индикатора.

Замечание. Одним из недостатков многоскважинных методов является необходимость априорных представлений о направлении потока, для того чтобы определить оптимальное местоположение наблюдательных скважин. Это, в свою очередь, означает необходимость проведения предварительных исследований, хотя, конечно, наблюдательные скважины можно расположить и по всей окружности около пусковой, что сделает наш эксперимент довольно дорогостоящим. При рассмотрении конкретных примеров в разделе 6.2 мы увидим, что совмещая несколько методов, можно добиться снижения стоимости эксперимента и получить требуемые результаты.

На рис. 4.2.12 и 4.2.13 показано, как индикатор уходит из пусковой скважины и появляется в наблюдательной. Если условие на входной границе отвечает δ-функции Дирака, то функция распределения для времени нахождения индикатора в пласте будет отвечать зависимости:

$$E(t) = \frac{c(t)}{\int_0^\infty c(t)\,dt}, \qquad (4.3.4)$$

с учетом которой средняя действительная скорость фильтрации может быть определена с помощью формул:

$$\bar{u} = \frac{\int_0^\infty u(t)\, c(t)\, dt}{\int_0^\infty c(t)\, dt}, \tag{4.3.5}$$

$$u(t) = L/t,$$

$$\bar{u} = L \int_0^\infty \frac{1}{t} E(t)\, dt, \tag{4.3.6}$$

где L — расстояние между пусковой и наблюдательной скважинами.

Односкважинный метод — точечное разбавление. Результаты описанных экспериментов могут быть использованы для определения локальных скоростей в окрестностях пусковой скважины по скорости уменьшения в ней концентрации индикатора. При этом предполагается, что в процессе разбавления происходит хорошее перемешивание индикаторного раствора по всей скважине. Расход трассера отвечает его массе, выносимой из пусковой скважины за время dt:

$$Suc\, dt = -v\, dc, \tag{4.3.7}$$

где c — концентрация индикатора в момент времени t, S — поперечное сечение фильтрующей части скважины, v — объем фильтрующей части скважины, u — скорость фильтрации.

Интегрируя уравнение (4.3.7), получим:

$$u = \frac{v}{St} \ln(c_0/c),$$

где c_0 — начальная концентрация индикатора. Горизонтальный фильтрационный поток в окрестностях скважины будет нарушаться самим ее присутствием. Если поправочный коэффициент θ, учитывающий искривление линий тока вблизи скважины, определять как:

$$\theta = Q_b/Q_f,$$

(где Q_b — горизонтальный поток подземных вод через фильтрующую часть скважины, Q_f — то же, через эквивалентное по площади сечение водоносного горизонта), то формула для определения скорости фильтрации примет вид:

$$u_f = \frac{v}{\theta St} \ln(c_0/c).$$

Односкважинный геоэлектрический метод. Односкважинный метод, описанный в разделе 4.2.3, может использоваться для

определения средней и максимальной действительной скорости фильтрации при средне- и крупномасштабных экспериментах. Фактически, этот геоэлектрический метод впервые был применен для определения действительной скорости фильтрации и только позднее распространен на оценку дисперсионных коэффициентов.

Идея заключается в использовании хорошо известного метода потенциалов (см. прилож. II). После введения электролита (например, раствора NaCl) в пусковую скважину на поверхности земли отмечается смещение эквипотенциалей электрического поля в направлении потока. Таким образом, удается найти направление фильтрации в водоносном горизонте, что очень важно для определения местоположения наблюдательных скважин (например, при проведении опытов по многоскважинной схеме) [41]. Позднее с помощью этого же метода было предложено определять действительную скорость фильтрации подземных вод [265] путем оценки смещения эквипотенциалей в различных точках поверхности на различных этапах эксперимента.

Метод потенциалов используется для выявления направления фильтрации (рис. 4.3.4), а электропрофилирование дает средние и максимальные скорости (рис. 4.3.5). Попадая в водоносный горизонт, подсоленная вода постепенно снижает его электрическое сопротивление, которое по прошествии определенного промежутка времени (длительность его зависит от условий проведения эксперимента) достигает своего минимального значения; осредненная максимальная действительная скорость фильтрации рассчитывается по моментам появления первых порций индикатора в различных точках регистрации.

Мы уже видели, как, интерпретируя план изолиний электрических сопротивлений водоносного горизонта (см. рис. 4.2.22), можно оценить его параметры дисперсий (см. раздел 4.2.3). Тот же самый план позволяет оценить и направление фильтрации, что подтверждается рис. 4.3.4.

В целях достижения более чистых условий проведения опыта должны быть приняты следующие меры (упоминавшиеся ранее при описании экспериментов при определении параметров дисперсии):

1) количество поступившего в пласт индикаторного раствора не должно существенно искажать естественный фильтрационный поток;

2) следует стремиться поддерживать на постоянном уровне расход поступающего в водоносный горизонт трассерного раствора;

3) количество запущенной соли должно быть достаточным для заметного изменения электрических свойств водоносного пласта;

4) до начала эксперимента необходимо снять фоновые значения геохимических и геоэлектрических параметров среды, которые при составлении математической модели эксперимента войдут в совокупность начальных условий.

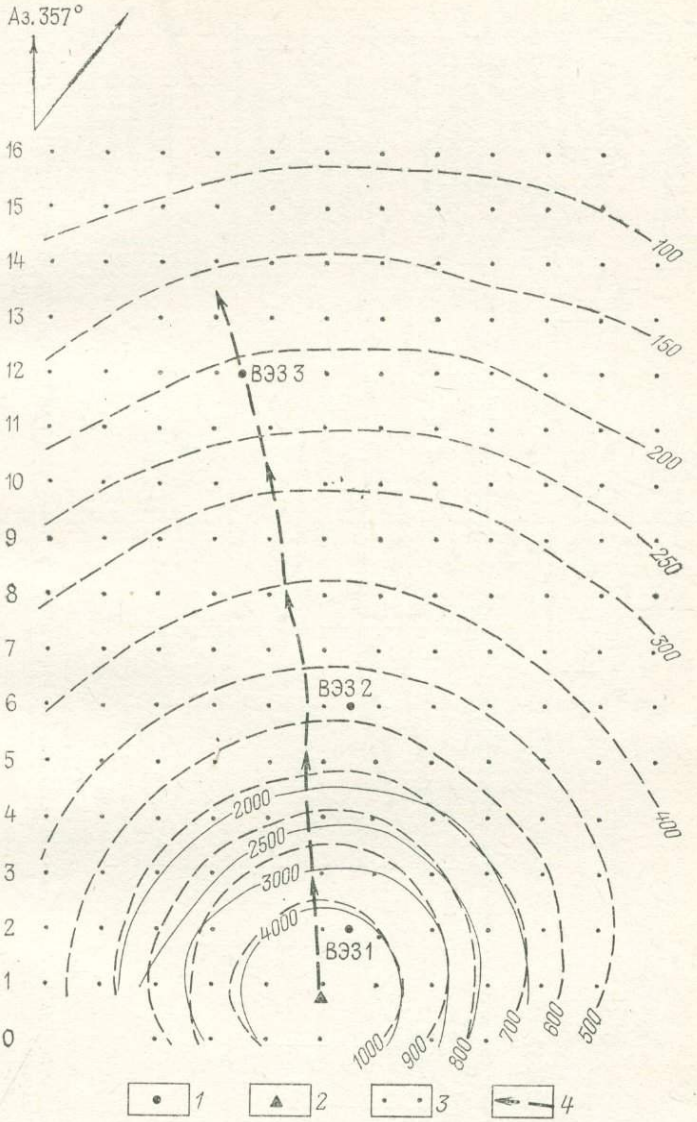


Рис. 4.3.4. Изменение положения линий равных электрических потенциалов во времени. Масштаб 1 : 400.

1 — точки вертикального электрозондирования; *2* — пусковая скважина; *3* — точки измерений; *4* — направление потока

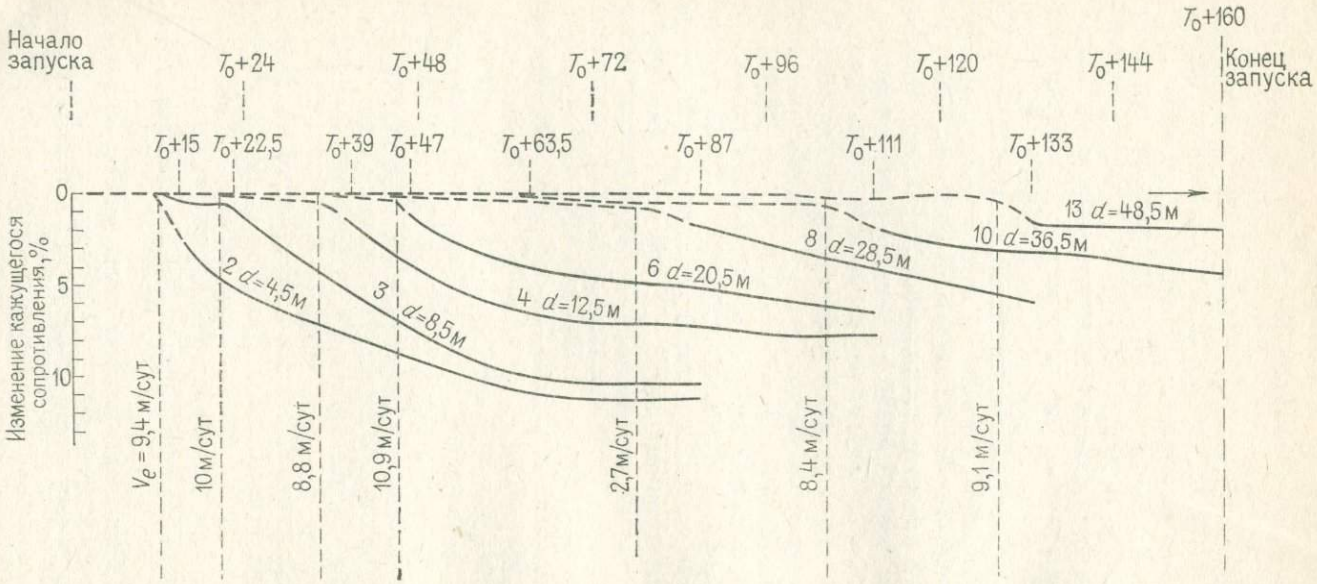


Рис. 4.3.5. Оценка скорости потока в ходе налива.

2, 3, 4, 6, 8, 10, 13 — номера профилей; d — расстояние от профиля до пусковой скважины; $T_0 + 48$ — момент времени через 48 ч после начала запуска трассера

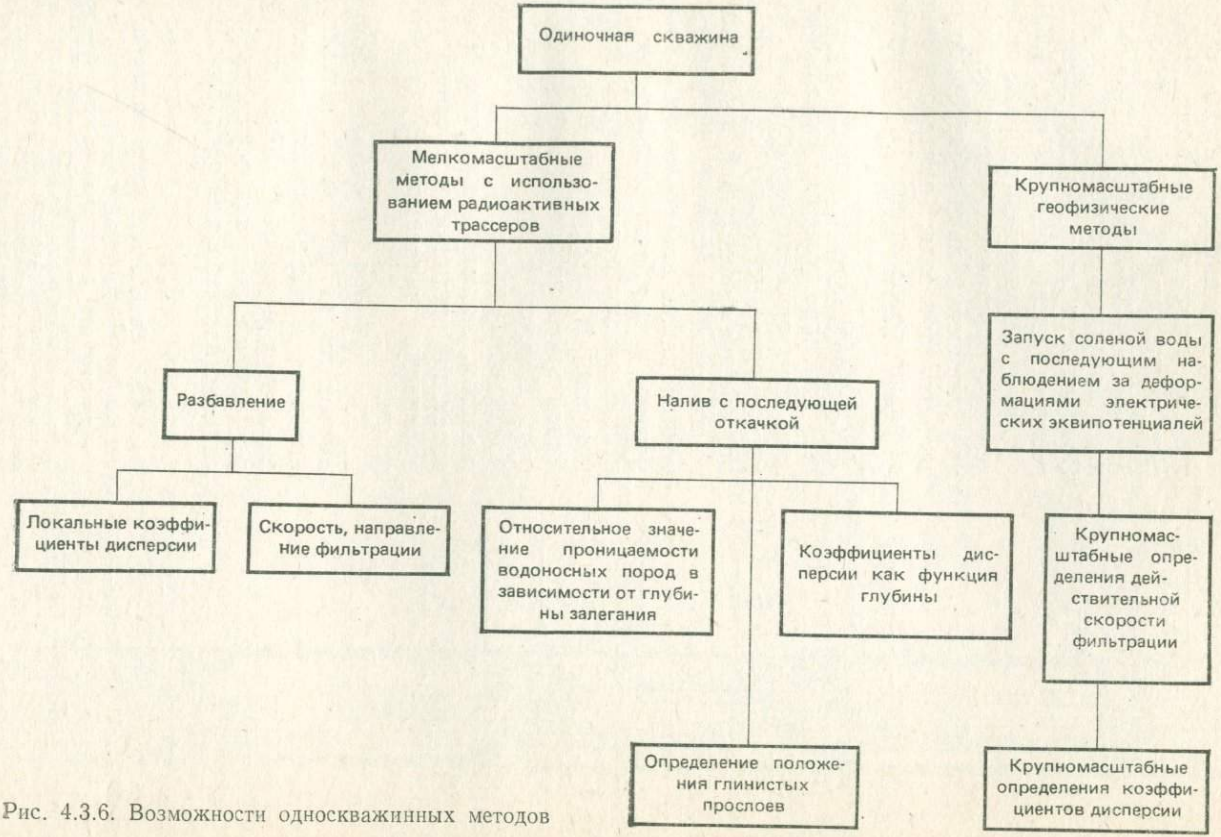


Рис. 4.3.6. Возможности односкважинных методов

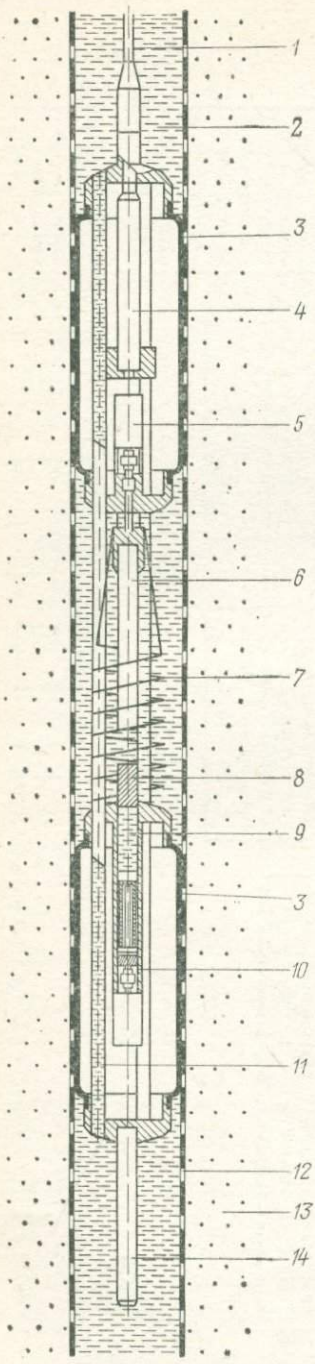


Рис. 4.3.7. Скважинный зонд для определения скоростей фильтрации [70].

1 — трос-кабель; *2* — подземные воды; *3* — резиновый пакер; *4* — сцинцилляционный детектор № 1; *5* — двигатель для вращения змеевика; *6* — сцинцилляционный детектор № 2; *7* — змеевик-смеситель; *8* — свинцовый экран; *9* — раствор трассера; *10* — инъекционный шприц; *11* — труба, уравнивающая напоры (выше и ниже зонда); *12* — фильтр скважины; *13* — гравийная обсыпка скважины; *14* — сцинцилляционный детектор № 3

4.3.3. Возможности односкважинного метода

Односкважинные методы были введены в практику гидрогеологических исследований благодаря тому, что они приводят лишь к минимальному нарушению опробуемой среды. Возможности этих методов схематически отражены нами на рис. 4.3.6.

Мы не затрагиваем вопросы определения пространственного положения глинистых линз в разрезе водоносного горизонта; они достаточно детально разработаны П. Левекью [173].

Односкважинные методы до сих пор довольно успешно использовались при решении целого ряда гидрогеологических задач, их широкое применение определяется в основном технической простотой. Разрабатываются также некоторые локальные методы, в частности основанные на использовании радиоактивных индикаторов. В качестве примера упомянем здесь установку, предложенную Дростом и др. [70], которая может обслуживаться одним гидрогеологом, знакомым с работой измерительной техники и с основными правилами радиационной безопасности.

Конструкция скважинного зонда приводится на рис. 4.3.7: детектор, инжектор и змеевик-смеситель помещены внутри рабочего объема зонда; резиновыми пакерами осуществляется надежная изоляция рабочего объе-

ма зонда от остальной части скважины, контроль изоляции ведется с помощью детекторов, расположенных в верхней и нижней части зонда. Возможность перетоков через гравийную обсыпку скважины устраняется присутствием проходящей через весь зонд специальной трубы, посредством которой напоры в верхней и нижней частях скважины уравниваются между собой; таким образом, полностью исключается влияние вертикальных перетоков в скважине на измерения скорости фильтрации. Указанный зонд может опускаться в скважины диаметром 5 см и более на тросе-кабеле диаметром 1 см.

4.3.4. Замечания по поводу определения пористости водонасыщенных пород

При косвенном способе определения действительной скорости фильтрации, с которой распространяется загрязнение (основанном на законе Дарси и использовании данных о проницаемости или проводимости водоносного горизонта), всегда необходимо знать величину эффективной пористости пород Ф. Вспомним, что соотношение между скоростью фильтрации v и действительной скоростью фильтрации u имеет вид:

$$u = v/\Phi.$$

Существует немало методов определения величины Ф [17]. Мы здесь упомянем только те методы, которые можно применять при изучении процессов загрязнения подземных вод и прежде всего — двускважинный метод, связанный с запуском радиоактивных индикаторов, а также односкважинный геоэлектрический метод.

Методика определения пористости водонасыщенных пород основывается на приближенном равенстве между пористостью породы и относительной величиной ее объема, занятого водой.

При использовании двухскважинного метода меченая вода вводится в одну из наблюдательных скважин, в то время как из центральной скважины производится откачка. Тогда:

$$v = \pi r^2 b \Phi,$$

где b — мощность водоносного горизонта, r — расстояние между скважинами. Данная формула справедлива только при следующих условиях [149]: 1) расход откачки настолько велик, что можно пренебречь существованием естественного потока, т. е. рассматривать чисто радиальную фильтрацию; 2) мощность водоносного горизонта достаточно мала по сравнению с расстоянием между пусковой и откачивающей скважинами; 3) объем депрессионной воронки достаточно мал по сравнению с суммарным объемом откачанной воды.

Взаимный массообмен между вовлеченными в движение и граничащими с ними водами, а также дисперсионные эффекты могут явиться причиной погрешности при интерпретации опыта по ука-

занной схеме, поэтому результат выполненного таким образом определения величины пористости может находиться где-то между ее истинным значением и величиной общей пористости.

При пакетном запуске радиоактивной метки в качестве V принимается объем воды, откачанной с момента запуска до появления пикового содержания трассера в откачиваемой воде, при этом величина этого объема определяется по графику зависимости радиоактивности от $V^{1/2}$ [139]. Тогда пористость можно найти из выражения:

$$\Phi = V/\pi r^2 b.$$

Геоэлектрические односкважинные методы основаны на использовании в качестве трассеров электролитов. В ходе опыта определяется электрическое сопротивление как самой воды ρ_w, так и опробуемого водоносного слоя ρ_a. Методика определения этих сопротивлений дается в прилож. II. Соотношение между величинами указанных сопротивлений носит название формационного фактора F и имеет вид:

$$F = \rho_a/\rho_w = \Phi^{-m},$$

известный как формула Арчи, в которой коэффициент m может принимать значения от 1 до 2 в зависимости от степени консолидации водоносного слоя. В этом случае значение пористости будет определяться из выражения:

$$\Phi = F^{-1/m}.$$

ГЛАВА 5

КЛАССИЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИХ ЧИСЛЕННАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Эта глава предназначена главным образом для инженеров и должна дать им необходимые численные формулировки и правила обращения с математическими моделями загрязнения подземных вод. Она содержит три части: канонические модели в прямоугольных координатах, модели в криволинейных координатах и специальные модели (аналитические, обращения).

Также рассматриваются методы конечно-разностной дискретизации, которые являются наиболее употребимыми (методы конечных элементов, хотя и начинают использоваться в моделировании загрязнения, однако еще находятся в исследовательской стадии моделирования дисперсии).

5.1. КАНОНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

5.1.1. Двумерная однослойная модель

Процесс распространения загрязнения является горизонтальным, плановым и неустановившимся. Плотность смеси — линейная функция концентрации. Движение одномерное в плане и давление зависит только от x. Режим — чисто динамическая дисперсия с коэффициентами дисперсии, пропорциональными скорости. Математическая задача определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial\left[\rho\alpha_L\,|u_x|\,\dfrac{\partial\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\partial x}\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[\rho\alpha_T\,|u_x|\,\dfrac{\partial\left(\frac{c}{\rho}\right)}{\partial y}\right]}{\partial y}-\frac{\partial(u_x c)}{\partial x}=\frac{\partial c}{\partial t},$$

$$u_x=-\frac{k_x}{\mu\Phi}\,\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$u_y=0,$$

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}=-\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

$$\rho=ac+b,$$

где u_x и u_y — компоненты скорости смеси, k_x — проницаемость вдоль оси Ox, p — давление; ρ, μ, Φ — соответственно, плотность, вязкость и пористость; a и b — константы, задаваемые по таблицам.

Моделируемая область показана на рис. 5.1.1 и является симметричной относительно оси Ox.

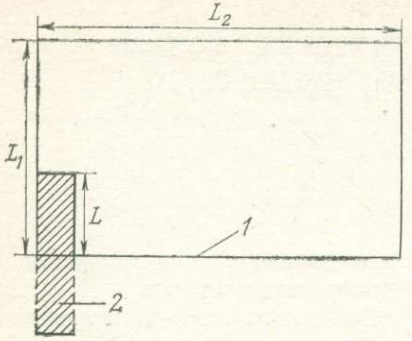


Рис. 5.1.1. Моделируемая область.
1 — ось симметрии, *2* — источник загрязнения

Начальные и граничные условия следующие:

$$c(x,\ y,\ 0) = c_0,$$

$$p(x,\ 0) = p_W + [p_E - p_W]\frac{x}{L_2},$$

$$c(0,\ y,\ t) = c_s \quad \text{при } 0 \leqslant y \leqslant L,$$

$$c(0,\ y,\ t) = c_0 \quad \text{при } L < y \leqslant L_1,$$

$$c(x,\ L_1,\ t) = c_0,$$

$$c(L_2,\ y,\ t) = c_0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}(x,\ 0,\ t) = 0,$$

$$p(0,\ t) = p_W,$$

$$p(L_2,\ t) = p_E,$$

где c_s и c_0 — постоянные, представляющие собой концентрацию загрязнения в источнике и начальную концентрацию загрязнения в моделируемой области соответственно; p_W и p_E — постоянные.

Эта система представляется в конечных разностях согласно неявной схеме метода переменных направлений (НСМПН). Конвективный член представляется разностями назад по отношению к направлению потока. Плотность ρ и скорость u являются постоянными в течение временного шага. Возможная схема дискретизации имеет вид:

$$\frac{\alpha_L}{dx^2}\left[\frac{\rho(i+1,\ j)\,|u(i+1,j)| + \rho(i,\ j)\,|u(i,\ j)|}{2}\left\{\frac{c^+(i+1,\ j)}{\rho(i+1,\ j)} - \frac{c^+(i,\ j)}{\rho(i,\ j)}\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{\rho(i,\ j)\,|u(i,\ j)| + \rho(i-1,\ j)\,|u(i-1,\ j)|}{2}\left\{\frac{c^+(i,\ j)}{\rho(i,\ j)} - \frac{c^+(i-1,\ j)}{\rho(i-1,\ j)}\right\}\right] +$$

$$+ \frac{\alpha_T}{dy^2}\left[|u(i,\ j)|\frac{\rho(i,\ j+1) + \rho(i,\ j)}{2}\left\{\frac{c(i,\ j+1)}{\rho(i,\ j+1)} - \frac{c(i,\ j)}{\rho(i,\ j)}\right\} - \right.$$

$$\left. - |u(i,\ j)|\frac{\rho(i,\ j) + \rho(i,\ j-1)}{2}\left\{\frac{c(i,\ j)}{\rho(i,\ j)} - \frac{c(i,\ j-1)}{\rho(i,\ j-1)}\right\}\right] -$$

$$- \frac{u(i,\ j)\,c^+(i,\ j) - u(i-1,\ j)\,c^+(i-1,\ j)}{dx} = \frac{c^+(i,\ j) - c(i,\ j)}{dt\,(n)/2};$$

$$\frac{\alpha_L}{dx^2}\left[\frac{\rho(i+1,\ j)\,|u(i+1,\ j)| + \rho(i,\ j)\,|u(i,\ j)|}{2}\left\{\frac{c^+(i+1,\ j)}{\rho(i+1,\ j)} - \frac{c^+(i,\ j)}{\rho(i,\ j)}\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{\rho(i,\ j)\,|u(i,\ j)| + \rho(i-1,\ j)\,|u(i-1,\ j)|}{2}\left\{\frac{c^+(i,\ j)}{\rho(i,\ j)} - \frac{c^+(i-1,\ j)}{\rho(i-1,\ j)}\right\}\right] +$$

$$+ \frac{\alpha_T}{dy^2}\left[|u(i,\ j)|\frac{\rho(i,\ j+1) + \rho(i,\ j)}{2}\left\{\frac{c(i,\ j+1)}{\rho(i,\ j+1)} - \frac{c(i,\ j)}{\rho(i,\ j)}\right\} - \right.$$

$$\left. - |u(i,\ j)|\frac{\rho(i,\ j) + \rho(i,\ j-1)}{2}\left\{\frac{c(i,\ j)}{\rho(i,\ j)} - \frac{c(i,\ j-1)}{\rho(i,\ j-1)}\right\}\right] -$$

$$- \frac{u(i,\ j)\,c^+(i,\ j) - u(i-1,\ j)\,c^+(i-1,\ j)}{dx} = \frac{c(i,\ j) - c^+(i,\ j)}{dt\,(n)/2};$$

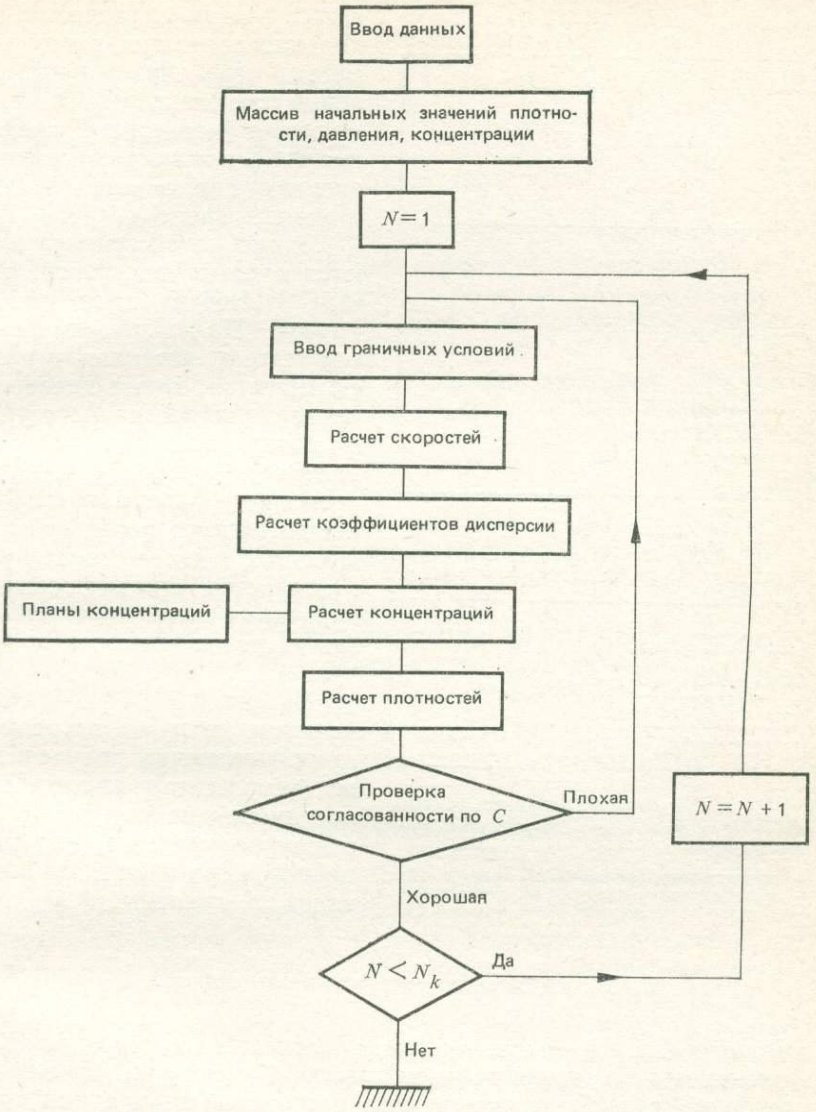


Рис. 5.1.2. Двумерная плановая модель. Блок-схема расчета

$$\frac{k_x}{\mu\Phi\,dx^2}\left[\frac{\rho(i+1,\ j)+\rho(i,\ j)}{2}\{p(i+1)-p(i)\}-\frac{\rho(i,\ j)+\rho(i-1,\ j)}{2}\times\right.$$
$$\left.\times\{p(i)-p(i-1)\}\right]=\frac{\rho(i,\ j)-\rho^{-}(i,\ j)}{dt\,(n)};$$
$$\rho(i,\ j)=ac(i,\ j)+b;$$
$$u(i,\ j)=-\frac{k_x}{\mu\Phi}\,\frac{p(i)-p(i-1)}{dx}\quad\text{для всех } j,$$

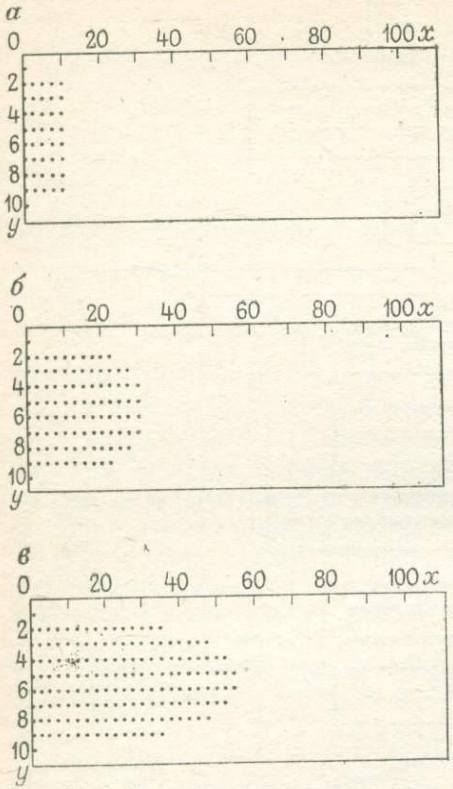


Рис. 5.1.3. Развитие загрязнения во времени для двумерного случая трассера. Концентрация >1 г/л; x, y даны в м.

а — площадь загрязнения 64 м², время 0, 22ч;
б — площадь загрязнения 208 м², время 3,28 ч;
в — площадь загрязнения 360 м², время 4,54 ч

где c^+ — промежуточная величина, введенная в теории метода переменных направлений (см. раздел 9.4.4) и не имеющая физического смысла; ρ^- — плотность в момент времени $t\,(n)$ и ρ плотность в момент времени $t\,(n+1)$.

Линейные системы решаются прямым трехдиагональным методом исключения Гаусса. На каждом временном шаге ρ^- известно, ρ рассчитывается, затем делается проверка согласованности по c (обычно процедура повторяется в пределах одного временного шага, пока не будет достигнута хорошая сходимость), далее процедура повторяется при следующем временном шаге. Этот метод резюмирован на блок-схеме рис. 5.1.2.

На рис. 5.1.3 показано развитие интрузии загрязнения во времени, полученное по результатам расчета на модели при постоянных ρ и μ (случай трассера) для линейного источника вдоль всей западной границы.

5.1.2. Двумерная многослойная модель

Водоносный горизонт является многослойным и в каждом слое загрязнение плановое и горизонтальное. Имеет место трассер и одномерное в плане движение при постоянной измеренной скорости. Экспериментально находятся только средние значения концентраций загрязнения (например, измерениями сопротивлений с поверхности), а модель выдает значения концентрации, осредненные по мощности водоносного горизонта. Слои представляются независимыми.

Математическая задача определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_L |u| \frac{\partial c}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_T |u| \frac{\partial c}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(uc) = \frac{\partial c}{\partial t},$$

$$\overline{\Phi} = [1/(z_2 - z_1)] \int_{z_1}^{z_2} \Phi \, dz,$$

$$\overline{c} = [1/\overline{\Phi}(z_2 - z_1)] \int_{z_1}^{z_2} \Phi c \, dz,$$

где α_Z, α_T и u — структурный параметр продольной и поперечной дисперсии и скорость в каждом слое соответственно; Φ и $\overline{\Phi}$ — пористость в слое и средняя пористость; c и $\bar{c}$ — концентрация в слое и средняя концентрация; z — мощность водоносного горизонта.

Дискретизация уравнения дисперсии идентична дискретизации двумерной однослойной модели, в которой ρ и u принимаются постоянными. Оно решается по неявной схеме методом переменных направлений (НСМПН) для граничных условий в каждом слое такого же типа. Тогда $\bar{c}$ вычисляется путем осреднения концентраций в каждом слое по z для данных x и y. К моменту опубликования этой книги в стадии изучения находился более сложный вариант многослойной модели. Задача такая же, но загрязнение может переноситься вертикально из одного слоя в другой. В уравнения дисперсии добавляются точечные источники в ячейках сетки, получающих это вертикальное загрязнение. Для этого прежде всего следует оценить интенсивность инфильтрации.

5.2. МОДЕЛИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

5.2.1. Криволинейные координаты. Некоторые определения

Пусть $Oxyz$ обычная прямоугольная система координат в R^3. Предположим, что координаты x, y, z точки P могут быть выражены через переменные x^1, x^2, x^3 и, наоборот, что x^1, x^2, x^3 могут быть выражены через x, y, z; допустим далее, что функции $x\,(x^1, x^2, x^3)$, $y\,(x^1, x^2, x^3)$, $z\,(x^1, x^2, x^3)$, $x^1\,(x, y, z)$, $x^2\,(x, y, z)$, $x^3\,(x, y, z)$ являются однозначными и непрерывно дифференцируемыми. Тогда соответствие между системой (x, y, z) и системой (x^1, x^2, x^3) является единственным. Система (x^1, x^2, x^3) называется криволинейной системой координат точки P.

В моделировании процессов загрязнения подземных вод применяются три криволинейные системы координат:

1) цилиндрическая система (рис. 5.2.1, *а*), определяемая уравнениями:

$$x = r\cos\theta \quad x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = z,$$

$$y = r\sin\theta,$$

$$z = z;$$

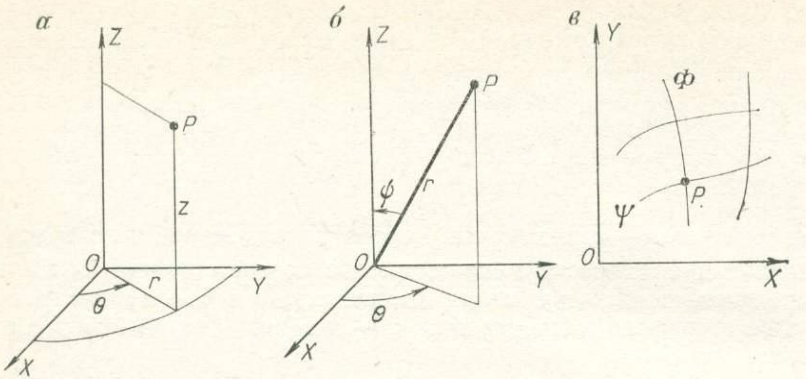


Рис. 5.2.1. Классические криволинейные системы координат, используемые при решении задач загрязнения подземных вод.

а — цилиндрическая система; *б* — сферическая система; *в* — система эквипотенциалей — линий тока

2) сферическая система (рис. 5.2.1, *б*), определяемая уравнениями:

$$x = r\sin\psi\cos\theta; \quad x^1 = r,\ x^2 = \psi,\ x^3 = \theta,$$

$$y = r\sin\psi\sin\theta,$$

$$z = r\cos\psi;$$

3) система эквипотенциалей — линий тока или $\Phi - \psi$-система (рис. 5.2.1, *в*), где $x^1 = \Phi(x, y)$ и $x^2 = \psi(x, y)$.

Линейный элемент ds в криволинейной системе координат (x^1, x^2, x^3) определяется следующим образом:

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j,$$

где используется правило суммирования Эйнштейна ($g_{ij}\,dx^i dx^j = g_{11}\,dx^1\,dx^1 + g_{12}\,dx^1\,dx^2 + \ldots$). g_{ij} — дважды ковариантный тензор [252], называемый метрическим тензором.

В обычной прямоугольной системе координат g_{ij} определяется следующим образом:

$$g_{ij} = 1 \text{ при } i = j, \quad g_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Дважды контрвариантный тензор (g^{ij}), определяемый следующим образом:

$$g^{ij}g_{ik} = 1 \text{ при } j = k \text{ и } g^{ij}g_{ik} = 0, \text{ при } k \neq j$$

при использовании правила суммирования, называется тензором, сопряженным с метрическим. Ассоциируя квадратную матрицу (g_{ij}) с метрическим тензором, мы тем самым ассоциируем обратную матрицу от (g_{ij}) с сопряженным тензором. Детерминант матрицы (g^{ij}) записывается как g.

Эти два тензора используются для перехода от контравариантных к ковариантным координатам и наоборот, и они появляются в криволинейной форме уравнений в частных производных. Дивергенция вектора $V = (v^i)$, $i = 1, 2, 3$ дается соотношением:

$$\operatorname{div} V = g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{1/2} v^i),$$

Основное уравнение дисперсии в ортогональной криволинейной системе координат (т. е. в криволинейной системе, в которой $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$) записывается в виде:

$$g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(g^{1/2} g^{kp} K_p^i \rho \frac{\partial C^*}{\partial x^i} \right) - g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(g^{1/2} \frac{U^k C}{g_{kk}^{1/2}} \right) = \frac{\partial C}{\partial t}, \tag{5.2.1}$$

где K_p^i — компонента (i, p) тензора дисперсии, U^k — физическая составляющая k скорости и $C^* = c/\rho$.

Физические компоненты вектора являются проекциями вектора на касательную к координатным кривым. Если V_x, V_y, V_z являются компонентами вектора в обычной прямоугольной системе, V^1, V^2, V^3 — его компоненты в криволинейной системе, то имеют место следующие соотношения:

$$V^1 = g_{11}^{1/2} V_x; \quad V^2 = g_{22}^{1/2} V_y; \quad V^3 = g_{33}^{1/2} V_z.$$

Ниже метрический тензор, сопряженный с ним тензор, детерминант g и (5.2.1) выражаются в обычных криволинейных системах координат [177, 12].

1) цилиндрическая система:

$$(g_{pq}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (g)^{pq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$g = r^2,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r K_1^1 \rho \frac{\partial (c/\rho)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[K_2^2 \rho \frac{\partial (c/\rho)}{\partial \theta} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[K_3^3 \rho \frac{\partial (c/\rho)}{\partial z} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U^1 c) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (U^2 c) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z} (U^3 c) = \frac{\partial c}{\partial t}. \tag{5.2.2}$$

2) сферическая система:

$$(g_{pq}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \psi \end{bmatrix}, \quad (g^{pq}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2 \sin^2 \psi \end{bmatrix},$$

$$g = r^4 \sin^2 \psi,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 K_{1\rho}^1 \frac{\partial}{\partial r}(c/\rho)\right] + \frac{1}{r^2 \sin \psi}\frac{\partial}{\partial \psi}\left[\sin \psi\, K_{2\rho}^2 \frac{\partial}{\partial \psi}(c/\rho)\right] +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[K_{3\rho}^3 \frac{\partial}{\partial \theta}(c/\rho)\right] - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 U^1 c) -$$

$$- \frac{1}{r \sin \psi}\frac{\partial}{\partial \psi}(\sin \psi U^2 c) - \frac{1}{r \sin \psi}\frac{\partial}{\partial \theta}(U^3 c) = \frac{\partial c}{\partial t}. \qquad (5.2.3)$$

3) Φ — ψ-система (двумерная)

$$(g_{pq}) = \begin{bmatrix} [(\partial\Phi/\partial x)^2 + (\partial\Phi/\partial y)^2]^{-1} & 0 \\ 0 & [(\partial\Psi/\partial x)^2 + (\partial\Psi/\partial y)^2]^{-1} \end{bmatrix},$$

$$(g^{pq}) = \begin{bmatrix} (\partial\Phi/\partial x)^2 + (\partial\Phi/\partial y)^2 & 0 \\ 0 & (\partial\Psi/\partial x)^2 + (\partial\Psi\, \partial y)^2 \end{bmatrix}.$$

Действительная скорость фильтрации определяется выражением:

$$U = -\text{grad}\, \Phi,$$

а Φ и ψ связываются условиями Коши:

$$\partial\Phi/\partial x = \partial\psi/\partial y, \quad \partial\Phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x.$$

Физическими составляющими скорости по определению являются:

$$U^1 = U, \quad U^2 = 0$$

и они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$g^{1/2} = 1/U^2, \quad g_{11} = g_{22} = 1/U^2.$$

Уравнение дисперсии (5.2.1) принимает вид:

$$U^2 \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\rho K_\Phi \frac{\partial C^*}{\partial \Phi}\right) + U^2 \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\rho K_\Psi \frac{\partial C^*}{\partial \Psi}\right) - U^2 \frac{\partial C}{\partial \Phi} = \frac{\partial C}{\partial t}, \qquad (5.2.4)$$

где $C^* = c/\rho$.

5.2.2. Модель односкважинного импульсного метода

Водоносный горизонт напорный и горизонтальнослоистый Слои однородные и независимые друг от друга. Режим дисперсии — чисто динамическая дисперсия и коэффициент дисперсии

пропорционален скорости смеси. Имеет место случай трассера, когда плотность смеси постоянна. Модель используется для определения локальных коэффициентов дисперсии по данным налива и откачки радиоактивного трассера из одной и той же скважины. Радиоактивность регистрируется в скважине. Вблизи скважины естественной скоростью в водоносном горизонте можно пренебречь по сравнению со скоростью, обусловленной откачкой или наливом трассера. Поток и дисперсия принимаются осесимметричными (см. раздел 4.2.1). Математическая задача определяется системой уравнений:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\alpha|u|\frac{\partial c}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ruc)=\frac{\partial c}{\partial t},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}=\frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}, \qquad (5.2.5)$$

$$u=-\frac{k\rho g}{\varphi\mu}\frac{\partial h}{\partial r},$$

где c — концентрация индикатора, h — пьезометрический напор, k — коэффициент фильтрации, r — расстояние от скважины, u — действительная скорость фильтрации смеси, S — коэффициент водоотдачи, T — водопроводимость, φ, ρ, μ — соответственно, пористость грунта, плотность и вязкость смеси.

Начальные и граничные условия следующие:

1) в процессе нагнетания:

$c(r_0, t) = 1$ — в период нагнетания трассера,

$c(r_0, t) = 0$,

$c(\infty, t) = 0$ — в период нагнетания пресной воды, используемой для вытеснения трассера,

где r_0 — радиус скважины (начало координат совмещено с центром скважины).

Налив обычно производится при постоянном напоре на скважине:

$$h(r_0, t) = h_0,$$

$$h(\infty, t) = 0.$$

Начальные условия определяются ступенчатой входной функцией:

$$c(r, 0) = 0,$$

$$h(r, 0) = 0.$$

2) в процессе обратной откачки:

$$\frac{\partial c}{\partial r}(r_0, t) = 0,$$

$$c(\infty, t) = 0.$$

Условие нулевого потока отвечает мгновенному перемешиванию трассера в скважине. Это означает, что концентрация в скважине

равна концентрации вблизи скважины. Изменения концентрации, обусловленные дисперсией, могут не учитываться на пространственном шаге. Полное граничное условие должно иметь следующий вид;

$$Uc - K\frac{\partial c}{\partial r} = Uc_W,$$

где c_W обозначает концентрацию в скважине. Здесь мы имеем:

$$c_W = c\,(r_0,\ t).$$

Откачка обычно производится при постоянном напоре h_0':

$$h\,(r_0,\ t) = -h_0',$$

$$h\,(\infty,\ t) = 0.$$

В качестве начальных условий используются условия, существующие в водоносном горизонте в конце периода налива:

$$c\,(r,\ t_1) = c_1\,(r,\ t_1)$$

(где t_1 — время окончания налива и $c\,(r,\ t_1)$ — решение системы для момента времени t_1 при начальных и граничных условиях для налива),

$$h\,(r,\ t_1) = 0$$

в предположении, что водоносный горизонт возвращается к состоянию естественного равновесия между концом нагнетания и началом откачки.

Эта система дискретизируется согласно полностью неявной конечно-разностной схеме. Конвективный член уравнения дисперсии (частная производная первого порядка) дискретизируется как разность назад по отношению к направлению скорости. Линейные системы решаются методом прямого исключения Гаусса для тридиагональных матриц (§ 9.3.2).

Ниже приводится возможная форма дискретизированных уравнений с изменяющимися по пространству приращениями $\mathrm{d}r\,(i)$ и переменными во времени временными шагами $\mathrm{d}t\,(n)$.

1. Период налива:

$$\frac{r(i)\,|u(i)| + r(i+1)\,|u(i+1)|}{2}\left[\frac{c(i+1) - c(i)}{\mathrm{d}r(i+1)}\right] -$$

$$- \frac{\alpha}{r(i)}\,\frac{\dfrac{r(i)\,|u(i)| + r(i-1)\,|u(i-1)|}{2}\left[\dfrac{c(i) - c(i-1)}{\mathrm{d}r(i)}\right]}{\dfrac{\mathrm{d}r(i+1) + \mathrm{d}r(i)}{2}} -$$

$$- \frac{1}{r(i)}\,\frac{r(i)\,u(i)\,c(i) - r(i-1)\,u(i-1)\,c(i-1)}{\mathrm{d}r(i)} = \frac{c(i) - c^{-}(i)}{\mathrm{d}t\,(n)}.$$

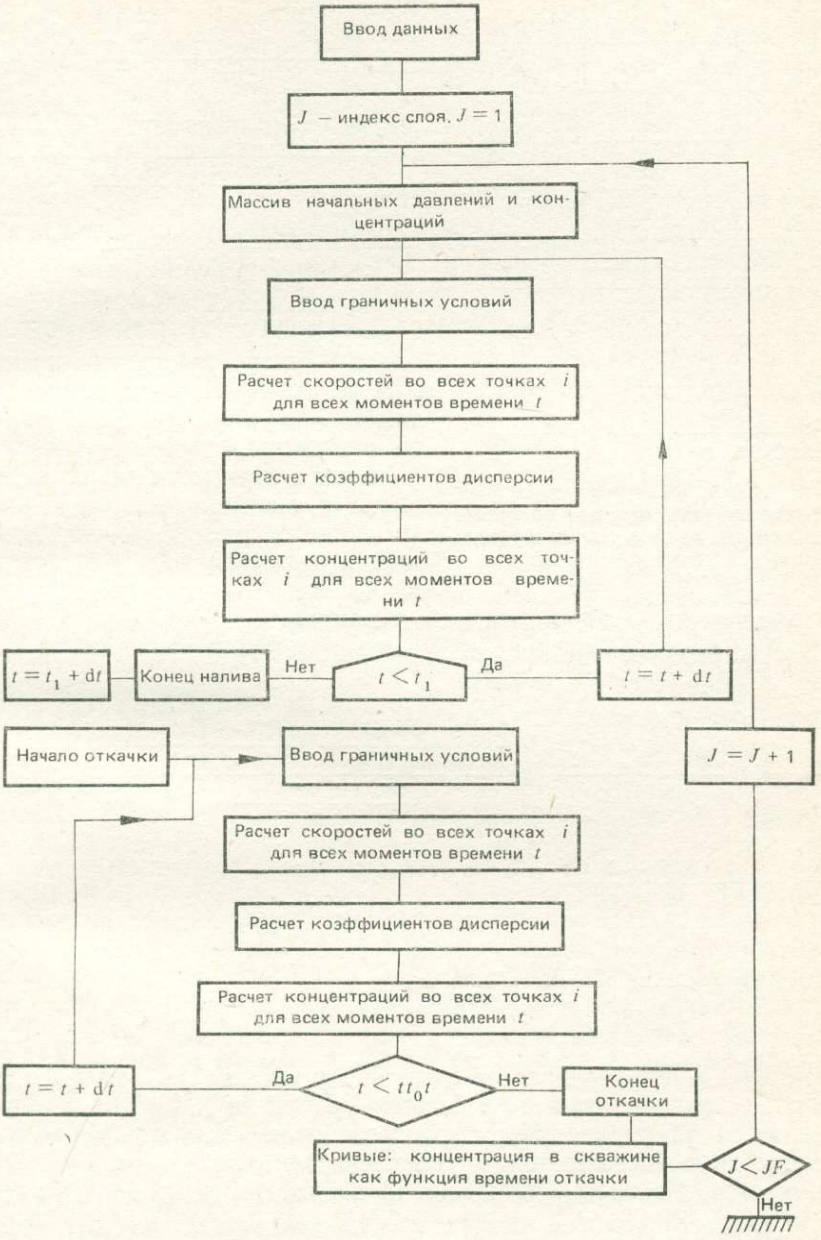


Рис. 5.2.2. Модель односкважинного импульсного метода. Блок-схема расчета

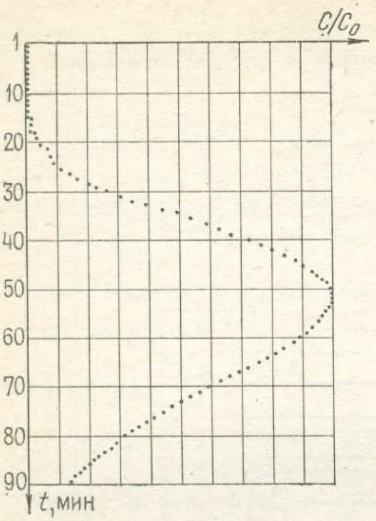


Рис. 5.2.3. Рассчитанная кривая изменения концентрации во времени в скважине на заданной глубине. Расход откачки постоянный

2. Период обратной откачки:

$$[r(i)|u(i)|+r(i+1)|u(i+1)|]\times$$

$$\times\frac{c(i+1)-c(i)}{dr(i+1)}-\frac{\alpha}{r(i)}\times$$

$$\times\frac{[r(i)|u(i)|+r(i-1)|u(i-1)|]\dfrac{c(i)-c(i-1)}{dr(i)}}{\dfrac{dr(i+1)+dr(i)}{2}}-$$

$$-\frac{1}{r(i)}\frac{r(i+1)u(i+1)c(i+1)-r(i)u(i)c(i)}{dr(i+1)}=$$

$$=\frac{c(i)-c^{-}(i)}{dt(n)},$$

где n — число временных шагов, $c(i)$ и $c^{-}(i)$ — концентрации в точке i в моменты n и $n-1$ соответственно.

Если откачка или налив проводятся с постоянными расходами, то соответствующая модель получается подстановкой $r(i)\,u(i)=A$, где A — постоянная, определяемая из условий откачки и налива.

Для периодов откачки и налива уравнения движения и скорости записываются в виде:

$$\frac{1}{r(i)}\frac{h(i)-h(i-1)}{dr(i)}+\frac{\dfrac{h(i+1)-h(i)}{dr(i+1)}-\dfrac{h(i)-h(i-1)}{dr(i)}}{\dfrac{dr(i)+dr(i+1)}{2}}=$$

$$=\frac{S}{T}\frac{h(i)-h^{-}(i)}{dt(n)},$$

$$u(i)=-\frac{k(i)\rho g}{\varphi\mu}\frac{h(i)-h(i-1)}{dr(i)},$$

где $h(i)$ и $h^{-}(i)$ — напоры в точке i в моменты n и $n+1$. На каждом временном шаге решается уравнение движения и определяется пространственное распределение скоростей, значения скорости подставляются в уравнение дисперсии, которое затем решается. Уравнение движения не зависит от уравнения дисперсии (рис. 5.2.2).

На рис. 5.2.3 показана кривая концентрации, полученная в скважине в процессе откачки при постоянном расходе; $ru=$ $=$ const.

5.2.3. Модель многоскважинного метода

Водоносный горизонт однородный и изолированный. Режим дисперсии — чисто динамическая дисперсия, а коэффициент дисперсии пропорционален скорости смеси. Скорость смеси слагается из естественной скорости водоносного горизонта и скорости, обусловленной запуском трассера в скважину. Плотность смеси постоянная (случай трассера). Поперечной дисперсией можно пренебречь.

Матрица дисперсии приводится к диагональному виду в криволинейной системе координат, определяемой линиями тока и эквипотенциалями (см. рис. 5.2.1, *в*). Расход налива постоянный, что соответствует установившемуся движению воды. Математическая задача определяется системой уравнений:

$$u^2 \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\alpha |u| \frac{\partial c}{\partial \Phi}\right) - u^2 \frac{\partial c}{\partial \Phi} = \frac{\partial c}{\partial t},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}, \qquad (5.2.6)$$

$$u_1 = -\frac{k\rho g}{\Phi \mu}\frac{\partial h}{\partial r},$$

$$u = u_N + u_1,$$

где u_1 — скорость, обусловленная наливом, u_N — естественная скорость водоносного горизонта. Начальные и граничные условия следующие:

в скважине $c = 1$, на бесконечности $c = 0$, $h = 0$ при $t = 0$; $h(r_0, t) = h_0$, $h(\infty, t) = 0$, где r_0 — радиус скважины.

Необходимо добавить соотношения между u, Φ и ψ:

$$u = \frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Psi}{dn}, \qquad (5.2.7)$$

где ds и dn — проекции приращений криволинейных координат на линию тока и эквипотенциаль. Обычно $ds = dn$.

Система дискретизируется согласно полностью неявной конечно-разностной схеме, как в разделе 5.2.2. Получающиеся в результате системы решаются методами прямого исключения Гаусса для тридиагональных матриц. Уравнения движения дискретизируются, как в разделе 5.2.2, а дискретизация уравнения дисперсии может иметь вид:

$$\alpha u^2(i) \frac{\frac{|u(i)|+|u(i+1)|}{2}[c(i+1)-c(i)] - \frac{|u(i)|+|u(i-1)|}{2}[c(i)-c(i-1)]}{d\Phi^2} -$$

$$- u^2(i)\frac{(c(i)-c(i-1)}{d\Phi} = \frac{c(i)-c^-(i)}{dt}.$$

Шаг $d\Phi$ выбирается постоянным и достаточно малым, чтобы уменьшить погрешность численной дисперсии. Вычисления выполняются на оси Ox, которая является линией тока и дискретизируются в соответствии с уравнением (5.2.7). Значения концентраций переносятся затем в область xy по эквипотенциальным линиям. Шамир и Харлеман [247] рассматривают другие возможные численные схемы в координатах Φ, ψ, особенно в случае общего уравнения дисперсии (5.2.4), когда поперечной дисперсией нельзя пренебречь. Дискретизация в этом случае аналогична принятой в разделе 9.4.4, а метод решения — неявный метод переменных направлений (см. 9.4.4).

5.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Аналитические решения уравнения дисперсии существуют только для очень небольшого числа случаев, подробно рассмотренных Бэром [17]. Аналитическое решение, если оно существует, представляет интерес тем, что оно не содержит ошибок, обусловленных численной дисперсией, и ошибок, вызванных конечно-разностной аппроксимацией.

Для отыскания аналитических решений могут быть применены различные математические методы, такие как метод функции Грина, преобразования Лапласа или преобразования Фурье. В качестве иллюстрации здесь приводятся два основных примера методов, которые могут быть использованы для построения типичных кривых загрязнения для одномерного или двумерного потока.

5.3.1. Одномерная модель

Допустим, что имеет место продольная дисперсия при постоянной скорости U в полуограниченной среде и ступенчатой начальной функции.

Математическая задача определяется системой уравнений:

$$K\,(\partial^2 C/\partial x^2) - U\,(\partial C/\partial x) = dC/\partial t,$$

$$C\,(x = 0,\ t > 0) = C_0,\ C\,(x = \infty,\ t \geqslant 0) = 0, \qquad (5.3.1)$$

$$C\,(x \geqslant 0,\ t = 0) = 0.$$

Задача решается с помощью преобразования Лапласа.

Замечание. Пусть f — функция переменной x, определенная для всех x и равная нулю при $x < 0$. Преобразование Лапласа f есть функция:

$$L(f) = \bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx, \qquad (5.3.2)$$

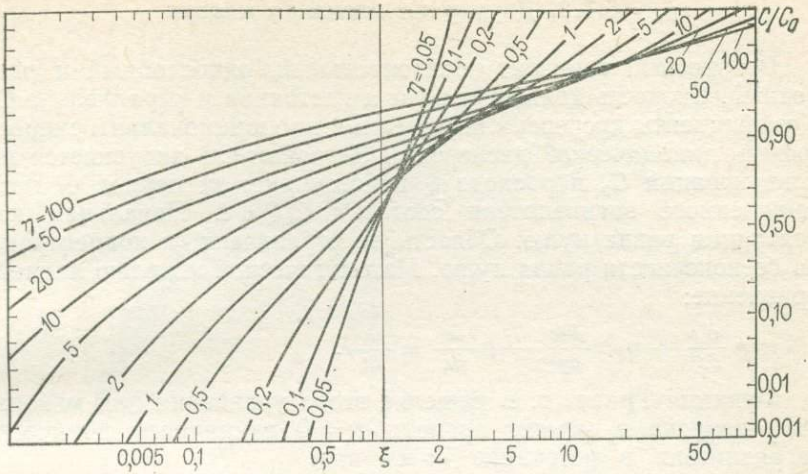


Рис. 5.3.1. Типичные кривые одномерной дисперсии; скорость постоянна [204]

при условии, что этот интеграл существует; p — комплексное число, равное $\eta + i\xi$. Если η равно нулю, то $\bar{f}(p)$ есть преобразование Фурье.

Здесь используются следующие свойства преобразования Лапласа:

$$L(\bar{f}') = p\bar{f}(p) - f,(0)$$

$$L(\bar{f}'') = p^2\bar{f}(p) - p\bar{f}(0) - f'(0).$$

Они легко проверяются применением преобразования (5.3.2) к функциям $f'(x)$ и $f''(x)$. Подставляя в (5.3.1) $c(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} c(x, t)\, dt$, получим:

$$K(d^2\bar{c}/dx^2) - U(d\bar{c}/dx) = p\bar{c}, \qquad (5.3.3)$$

$$\bar{c}(x = 0) = c_0/p, \quad \bar{c}(x = \infty) = 0,$$

Из выражения (5.3.3) следует решение:

$$C = \frac{C_0}{p} \exp\left[\frac{U - (U^2 + 4pK)^{1/2}}{2K}\, x\right] =$$

$$= C_0 \exp\left(\frac{Ux}{2K}\right) \cdot \frac{1}{p} \exp\left[\frac{-x}{K^{1/2}}\left(\frac{U^2}{4K} + p\right)^{1/2}\right].$$

Из таблиц преобразования Лапласа получаем:

$$C = \frac{C_0}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{x - Ut}{2(Kt)^{1/2}}\right] + \frac{C_0}{2} \exp\left(\frac{Ux}{K}\right) \operatorname{erfc}\left[\frac{x + Ut}{2(Kt)^{1/2}}\right]. \qquad (5.3.4)$$

На рис. 5.3.1 приведены типичные кривые соответствующие этому решению.

5.3.2. Двумерная плановая модель

Водоносный горизонт горизонтальный, однослойный и однородный. Скорость движения воды u постоянна и параллельна Ox. Коэффициенты дисперсии постоянны и пропорциональны скорости (режим динамической дисперсии). Загрязнитель запускается при концентрации C_0 и расходе Q в источнике; за период $\mathrm{d}t$ масса запущенного загрязнителя составит $C_0 Q\,\mathrm{d}\,t$. Начальная концентрация равна нулю. Область не ограничена, а концентрация на бесконечности равна нулю. Математической моделью является уравнение:

$$\alpha_L u \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \alpha_T u \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Функция Грина, т. е. решение этого уравнения для мгновенного запуска в момент времени $t = 0$ единичного количества загрязнителя в источнике имеет вид:

$$G(x, y, t) = \frac{1}{4\pi u t (\alpha_L \alpha_T)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-ut)^2}{4\alpha_L u t} - \frac{y^2}{4\alpha_T u t}\right],$$

и решением задачи тогда будет:

$$C(x, y, t) = \frac{C_0 Q\,\mathrm{d}t}{4\pi u t (\alpha_L \alpha_T)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-ut)^2}{4\alpha_L u t} - \frac{y^2}{4\alpha_T u t}\right].$$

Для непрерывного налива при расходе Q решение для момента времени t будет:

$$C(x, y, t) = \frac{C_0 Q}{4\pi u (\alpha_L \alpha_T)^{1/2}} \int_0^t \exp\left[\frac{(x-u\theta)^2}{4\alpha_L u\theta} - \frac{y^2}{4\alpha_T u\theta}\right] \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta}. \quad (5.3.5)$$

Установившийся режим может быть получен при $t = \infty$:

$$C(x,y) = \frac{C_0 Q}{2\pi u (\alpha_L \alpha_T)^{1/2}} \exp(x/2\alpha_L)\, \mathrm{K}_0\left(\frac{x^2}{4\alpha_L^2} + \frac{y^2}{4\alpha_L \alpha_T}\right), \quad (5.3.6)$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка. Необходимо отметить, что на оси Ox ($y = 0$), когда α_T стремится к нулю, концентрация стремится к бесконечности, что не имеет физического смысла. Тогда следует обратиться к одномерному случаю. Если скорость u возрастает, то концентрация повсюду уменьшается: загрязнение быстро выносится. Если Q и u — постоянны, c стремится к нулю при α_L, стремящемся к бесконечности: при увеличении дисперсии концентрация в точке уменьшается.

Интересный расчет по (5.3.5), принадлежащий Эмселлему [5], приводит к полезным типичным кривым посредством введения табулированной функции Хантуша $W(u, b)$:

$$\mathrm{W}(u, b) = \int_u^\infty \exp(-y - b^2/4y) \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

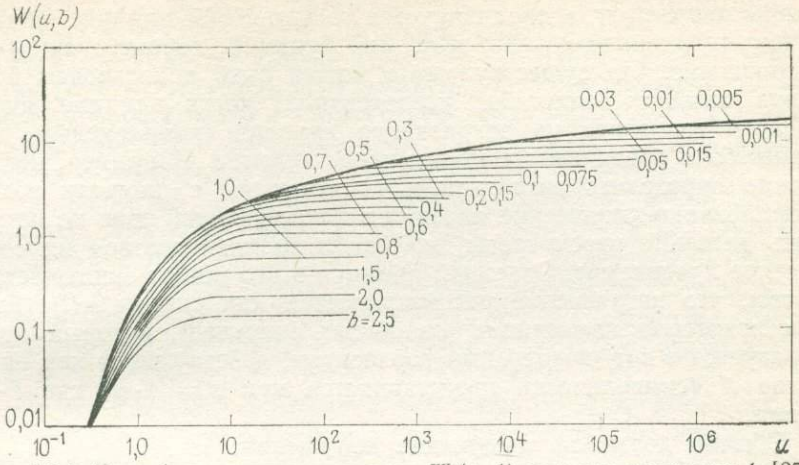


Рис. 5.3.2. Типичные кривые зависимости $W(u, b)$ от u для различных b [270]

Решение (5.3.5) можно записать в виде:

$$C(x, y, t) = \frac{C_0 Q}{4\pi u (\alpha_L \alpha_T)^{1/2}} \exp(x/2\alpha_L) \int_0^t \exp\left[-\frac{u\theta}{4\alpha_L} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{x^2}{4\alpha_L u} + \frac{y^2}{4\alpha_T u}\right)\frac{1}{\theta}\right] \frac{d\theta}{\theta}.$$

Подставляя $y = u\theta/4\alpha_L$, будем иметь:

$$C(x, y, t) = \frac{C_0 Q}{4\pi u (\alpha_L \alpha_T)^{1/2}} \exp(x/2\alpha_L) \int_0^t \exp(-y - b^2/4y) \frac{dy}{y},$$

где $b^2 = \frac{x^2}{4\alpha_L^2} + \frac{y^2}{4\alpha_L \alpha_T}$,

и окончательно:

$$C(x, y, t) = \frac{C_0 Q}{4\pi u (\alpha_L \alpha_T)^{1/2}} \exp(x/2\alpha_L) [W(0, b) - W(t, b)]. \quad (5.3.7)$$

Значения $W(t, b)$ могут быть найдены в таблицах функции Хантуша, приведенных, например, в работе [270]. На рис. 5.3.2 показаны значения функции, необходимые для самых простых задач загрязнения, полученные из решения (5.3.7).

5.4. МОДЕЛЬ «ЧЕРНОГО ЯЩИКА»

Как будет показано в главе 7, иногда представляет интерес трактовать задачу загрязнения методом «черного ящика»: водоносный горизонт рассматривается как черный ящик, в который поступает и из которого выходит загрязнение. Механизм внутри

ящика неизвестен, и анализируется только общее влияние ящика путем изучения входной и выходной функций, характеризующих загрязнение. По существу метод может быть использован при очень больших масштабах исследований, когда влияние водоносного горизонта на загрязнение является комплексным, но может быть объединено в единое представление. Например, когда нужно определить загрязнение, поступающее с площади водосбора физико-химические явления в ненасыщенной зоне не могут быть детально рассмотрены, но может анализироваться их совместное проявление. Основной принцип этого метода заключается в том, что загрязнение рассматривается как сигнал $e(t)$ (или как некоторая композиция единичных сигналов), который преобразуется в $s(t)$ водоносным горизонтом, действующим как оператор A (символически представляется как $s = A \cdot e$), где t — время.

Обычно делаются следующие допущения:

1) преобразование $e \rightarrow s$ существует, т. е. имеется оператор такой, что $s = Ae$;

2) s — линейная функция от e, т. е. A — линейный оператор. Так, если s соответствует e, то λs соответствует λe; если s_1 соответствует e_1 и s_2 соответствует e_2, то $s_1 + s_2$ соответствует $e_1 + e_2$;

3) любой сдвиг по времени на входе e влечет за собой такой же сдвиг по времени на выходе s (т. е. преобразование $e \rightarrow s$ происходит со сдвигом по времени);

4) преобразование A непрерывно, т. е., если последовательность $e_n(t)$ стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности, то последовательность $s_n(t) = Ae_n(t)$ стремится к нулю.

Тогда может быть доказано [148], что это преобразование есть свертка, записываемая в виде:

$$s = A * e.$$

Моделью загрязнения является оператор A, который называется «импульсной переходной характеристикой», или «единичным откликом», или передаточной функцией водоносного горизонта для загрязнения и задача состоит в том, чтобы рассчитать этот единичный отклик. Если A известен, модель может быть использована в двух направлениях: либо при известном e рассчитывается e (это обращение свертки).

Для примера рассмотрим водосборную площадь с водоносным горизонтом и некоторыми реками. Вода потоков используется для питьевых целей. На заводах складируются отходы, которые загрязняют водоносный горизонт при инфильтрации, обусловленной дождями. Загрязнения, поступающие из этих отходов, представляют собой вход $e(t)$ и для выработки техники безопасности, касающейся заводов (например, выбор времени накопления загрязнений или сжигания), необходим прогноз выхода $s(t)$ при разгрузке водоносного горизонта в реки. Если известен A,

который характеризует водоносный горизонт, то можно вычислить $s(t)$ при данном $e(t)$ с помощью свертки $A * e$.

Наконец, если необходимо соблюсти санитарные нормы загрязнения (которые накладывают ограничения на функцию s) и определить возможный вход e выполняют обращение s на e. Конечно, сначала должны быть выполнены эксперименты по обращению свертки с известными s и e, для того чтобы определить A.

Хотя свертка довольно просто выполняется численно, можно показать, что обращение ее является неустойчивой численной операцией и что необходимо использовать специальные численные методы. После обзора некоторых классических численных методов рассмотрим численный метод, основанный на алгоритме Эмселлема [81] и развитый Пуатриналом [81]. Этот метод устойчив и уже довольно широко используется.

Из этого следует допущение, что оператор A представляет собой интегрируемую функцию и что уравнение свертки записывается в виде:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t-\tau)\, e(\tau)\, d\tau.$$

Другое важное допущение состоит в том, что A и e равны нулю при отрицательном времени, что приводит уравнение свертки к виду:

$$s(t) = \int_{0}^{t} A(t-\tau)\, e(\tau)\, d\tau.$$

5.4.1. Классические методы обращения

Преобразование Фурье. Преобразование Фурье для функции определяется так:

$$F(f) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi x\xi)\, f(x)\, dx,$$

при соответствующих условиях сходимости по f.

Преобразование свертки $f \times q$ по Фурье представляет собой обычное произведение $\hat{f} \cdot \hat{g}$ и отсюда очевидный метод обращения состоит в следующем: свертка преобразуется по Фурье, делится на известную функцию и обратным преобразованием Фурье находится неизвестная функция:

$$s = A * e \to \hat{s} = \hat{A} \cdot \hat{e} \to \hat{e} = \hat{s}/\hat{A} \to e = F^{-1}(\hat{s}/\hat{A}).$$

Прямая идентификация. Уравнение свертки дискретизируется с единичным временным шагом: входы задаются в виде $e(0)$, $e(1)$, ..., $e(n)$ и единичный отклик A выдается в виде $A(0)$, $A(1)$, ..., $A(n)$. Каждый $e(p)$ есть импульс с амплитудой $e(p)$, который вызывает отклик $e(p)\, A(n-p)$.

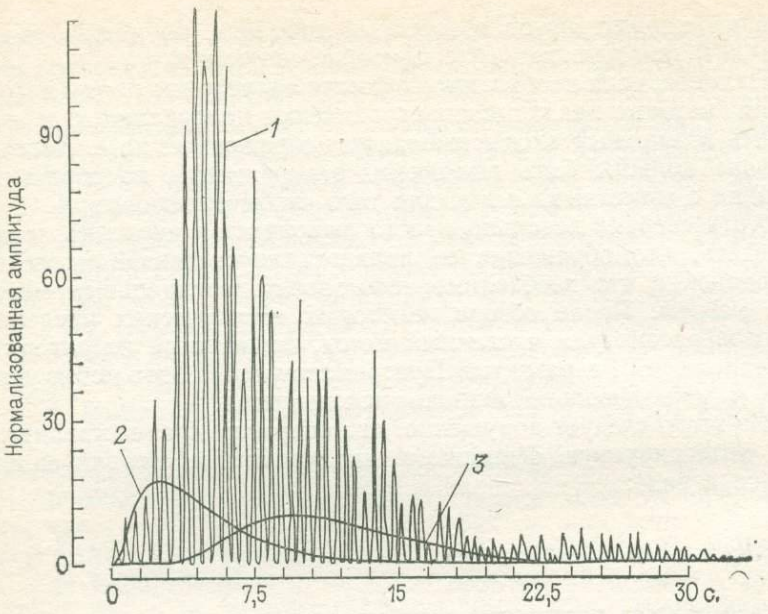


Рис. 5.4.1. Обращение методом преобразования Фурье.
1 — рассчитанная импульсная переходная характеристика; *2* — вход; *3* — выход

Уравнение свертки тогда дает линейную систему:

$$s(0) = e(0)\,A(0),$$

$$s(1) = e(0)\,A(1) + e(1)\,A(0),$$

$$s(n) = e(0)\,A(n) + e(1)\,A(n-1) + \cdots + e(p)\,A(n-p) + \\ + \cdots + e(n)\,A(0), \qquad (5.4.1)$$

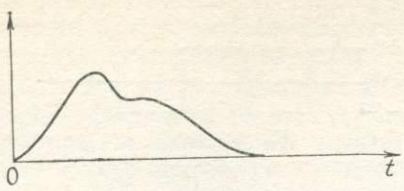
Неизвестными являются $e(0)$, $e(n)$, и система (5.4.1) легко решается.

Эти методы очень неустойчивы, когда данные сопровождаются некоторыми ошибками и неточно соответствуют уравнению свертки (рис. 5.4.1).

Классические средства, такие как сглаживание преобразований Фурье, полностью эти методы не улучшают. Сейчас рассматриваются некоторые другие методы, такие как аналоговое обращение.

5.4.2. Метод обращения Эмселлема

Основной принцип этого метода заключается в том, чтобы получить единичный отклик методом последовательных приближений. Каждое новое приближение является исправленным предыдущим при нулевом среднем. Эти приближения рассчитываются



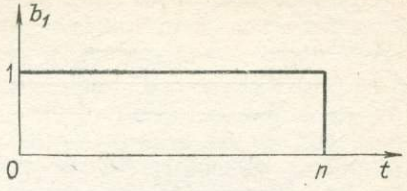
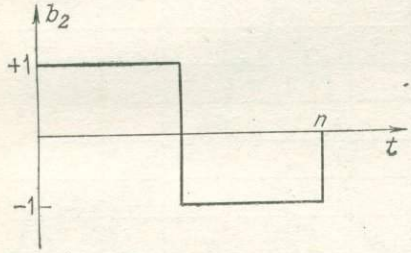


Рис. 5.4.2. Импульсная переходная характеристика

Рис. 5.4.3. Вектор b_1



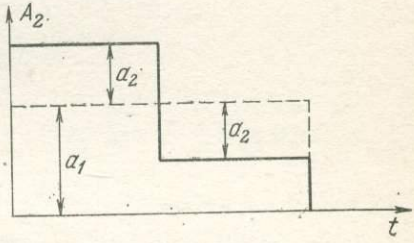


Рис. 5.4.4. Вектор b_2

Рис. 5.4.5. Приближение A_2 с помощью b_1 и b_2

по проекциям на специальный ортогональный векторный базис, наилучшим образом ограничивающий влияние экспериментальных (измерительных) ошибок. Сначала определяется опытом время n, когда единичный отклик становится равным нулю (рис. 5.4.2). **Первое приближение.** Это постоянная функция, которая при свертке с реальным входом дает такой выход, что разность между фактическим и рассчитанным выходом будет минимальной по всему интервалу изменений. Эта разность обычно минимизируется методом наименьших квадратов. Рассмотрим вектор базиса b_1, равный 1 на $(0, n)$ (рис. 5.4.3).

Проекция $A_1(i)$ единичного отклика удовлетворяет уравнению:

$$A_1(i) = a_1 b(i),$$

где a_1 — постоянная функция, которая определяется минимизацией разности между известной и рассчитанной выходной функцией во всех точках, где она известна.

$$s(j) - \sum_0^n e(j-i)\, A_1(i) = s(j) - \sum_0^n e(j-i)\, a_1 b_1(i) =$$

$$= s(j) - a_1 \sum_0^n e(j-i)\, b_1(i) = E(j).$$

Оптимальная величина a_1 определяется из соотношений:

$$\partial \left[\sum_j E^2(j) \right] \Big/ \partial a_1 = 0,$$

$$a_1 = \left[\sum_j \left\{ s(j) \sum_{i=0}^n e(j-i)\, b_1(i) \right\} \right] \Big/ \sum_j \left\{ \sum_{i=0}^n e(j-i)\, b_1(i) \right\}^2.$$

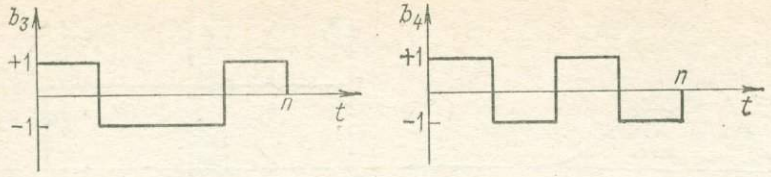


Рис. 5.4.6. Векторы b_3 и b_4

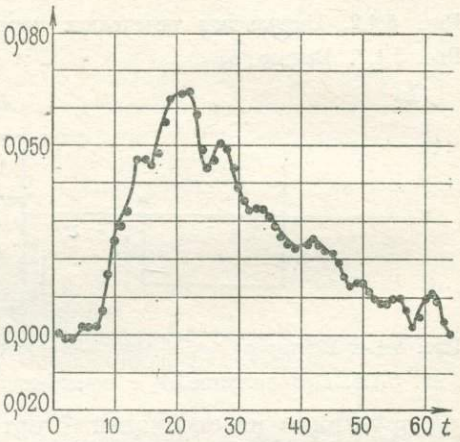


Рис. 5.4.7. Импульсная переходная характеристика, рассчитанная методом обращения Эмселлема по данным рис. 5.4.1

Второе приближение. Величина a неизвестна, интервал $(0, n)$ делится на два интервала и рассматривается базисный вектор b_2, равный 1 на $(0, n/2)$ и -1 на $(n/2, n)$ (рис. 5.4.4).

Вторым приближением A является оператор A_2, определяемый выражением:

$$A_2(i) = a_1 b_1(i) + a_2 b_2(i),$$

$a_2 b_2(i)$, очевидно, представляет собой исправленное первое приближение с нулевой средней. График A_2 показан на рис. 5.4.5.

a_2 определяется так же, как и a_1:

$$E(j) = s(j) - a_1 \sum_{i=0}^{n} e(j-i)\, b_1(i) - a_2 \sum_{i=0}^{n} e(j-i)\, b_2(i),$$

$$\frac{\partial \sum_j E^2(j)}{\partial a_2} = 0,$$

$$a_2' = \left[\sum_j s(j) - a_1 \sum_0^n e(j-i)\, b_1(i) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_0^n e(j-i)\, b_2(i) \right] \Big/ \sum_j \sum_0^n e(j-i)\, b_2(i).$$

Последующие приближения. Эти приближения получаются делением $(0, n)$ на 3, 4, ... интервала и определением векторов b_3, b_4, ... (рис. 5.4.6).

Векторы легко получаются один из другого итерационным процессом: b_3 и b_4 определяются соответственно по b_2 и b_1 делением опорного интервала на четыре части и умножением соответствующих значений b_2 и b_1 новых интервалов на $+1$, -1; векторы от b_5 до b_8 получаются из векторов от b_4 до b_1 таким же образом. Эти векторы ортогональны. Конечно, если отрезок $(0, n)$ представляет собой некоторую степень от 2, то это упрощает алгоритм. a_3 и a_4 могут быть подсчитаны одновременно из этих уравнений:

$$A_{34}(i) = a_1 b_1(i) + a_2 b_2(i) + a_3 b_3(i) + a_4 b_4(i),$$

$$E(j) = s(j) - \sum_{i=0}^{n} e(j-i)\, A_{34}(i) =$$

$$= s(j) - a_1 \sum_{i=0}^{n} e(j-i)\, b_1(i) - \cdots - a_4 \sum_{i=0}^{n} e(j-1)\, b_4(i),$$

$$\frac{\partial \sum E^2(j)}{\partial a_3} = 0, \quad \frac{\partial \sum E^2(j)}{\partial a_4} = 0.$$

Эти расчеты повторяются для других приближений.

Под фазой понимается система векторов при данном расчленении интервала $(0, n)$ (например, фаза 1 есть b_1), фаза 2 — (b_1, b_2), фаза 3 — $(b_1, b_2, b_3, b_4 \ldots)$. Для каждой фазы вычисления повторяются до тех пор, пока не будет достигнуто минимальное значение минимума $\Sigma E^2(j)$: на фазе 2, подсчитывается a_2, затем уточняется a_1 возвращением назад к фазе 1. После этого опять уточняется a_2 и так далее, прежде чем приступить к расчету a_3, a_4. Когда два последующих минимума $\Sigma E^2(j)$ будут почти равны, можно переходить к следующей фазе, в противном случае следует вернуться к фазе 1.

Алгоритм Эмселлема имеет следующие свойства:

1) каждая фаза представляет собой более дробное расчленение единичного отклика по сравнению с предыдущей фазой: если достигнутое приближение считается достаточно точным, процедура может быть остановлена;

2) каждый вектор вносит уточнение в нулевую среднюю предыдущего приближения;

3) каждый вектор видоизменяет единичный отклик на всем интервале $(0, n)$; в процессе свертки базисного вектора и входной функции ошибки на входе, если они не являются систематическими, уравновешивают друг друга и генерируют меньшие ошибки в подсчитываемой проекции.

Пример этого метода приведен в разделе 4.2.1 при определении передаточной функции радиоактивной пробы.

Рис. 5.4.7 представляет собой единичный отклик, подсчитанный методом Эмселлема с использованием данных рис. 5.4.1.

ГЛАВА 6
ПРИМЕРЫ ЗАГРЯЗНЕНИЙ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Для иллюстрации возможного применения методики нами подобран ряд примеров, которые подразделены на три группы: 1) описание существующего загрязнения и развития его во времени; 2) прогноз возможного загрязнения; мероприятия по предупреждению загрязнений; 3) внедрение морских вод в прибрежный водоносный горизонт.

6.1. ОПИСАНИЕ СУЩЕСТВУЮЩЕГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ И ЕГО ЭВОЛЮЦИИ: ЗАГРЯЗНЕНИЕ РЕЙНСКОГО ВОДОНОСНОГО ГОРИЗОНТА ОТХОДАМИ ГОРНОДОБЫВАЮЩЕЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

О загрязнении солями водоносного горизонта в Южном Эльзасе (Восточная Франция) известно уже давно. Оно фиксируется по возрастающему во времени содержанию хлора в водозаборных скважинах г. Колмара (рис. 6.1.1).

Загрязнение образуется в зонах добычи и обогащения калийных рудников за счет остаточных солей, содержащих хлористый натрий (85%) и глины (15%). В течение долгого времени отходы складировались на поверхность земли; атмосферные осадки, фильтруясь через отвалы, выносили растворенную соль (NaCl) в подземные воды. Чтобы предотвратить такое засоление подземных вод, раствор NaCl стали сбрасывать по трубопроводу в Рейн, так что в отвалы теперь складируются отходы с очень малым содержанием соли. Однако ситуация не улучшалась, так как, во-первых, Рейн сейчас интенсивно загрязняется и эта проблема приобрела международное значение, а во-вторых, отвалы сохранились, и, хотя и они не обновляются, все же благодаря своим большим размерам (средняя высота 20 м, с примерной площадью основания 100×100 м) продолжают оставаться постоянным источником загрязнения водоносного горизонта. Исходя из этого, исследования проводились с целью:

— охарактеризовать механизм загрязнения подземных и поверхностных вод;

— дать количественную оценку: а) ежегодного поступления солей в гидрографическую сеть, проходящую через горнодобывающий район, и б) развития во времени засолонения подземных вод.

Исследованиями выявлено два типа загрязнения: 1) слабое загрязнение сильно разбавленными солеными водами, поступающими в водоносный горизонт в результате наличия гидравли-

ческой связи между поверхностными и подземными водами, 2) сильное загрязнение подземных вод крепкими рассолами, инфильтрующимися в водоносный горизонт на территории отвалов во время дождей.

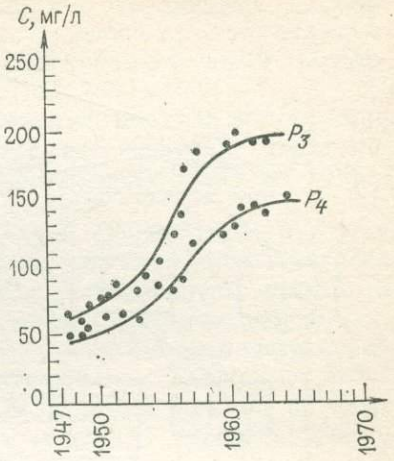


Рис. 6.1.1. Содержание хлора в воде, откачиваемой из скважин в Колмаре

6.1.1. Общее описание проблемы

Водоносный горизонт сложен четвертичными аллювиальными песками, гравием и галькой (в различных соотношениях) с линзами глин и подстилается мергелем; он обладает большой проницаемостью (коэффициенты фильтрации порядка 10^{-3} м/с). Мощность водоносного горизонта изменяется от 50 до 200 м. Среднегодовая сумма осадков составляет 700 мм. Выделенные два типа нагрязнения локализуются в двух различных зонах; слабое загрязнение в зоне 1, где исследования были направлены на фиксирование содержания солей в речных водах, на описание механизма гидравлической взаимосвязи речных и подземных вод и на оценку увеличения минерализации подземных вод за счет поступления загрязнения из рек, сильное засолонение происходит в зоне 2, где исследования имели целью установление годового баланса инфильтрации в водоносный горизонт, количественное описание механизма формирования потока соленых вод по разным направлениям от отвалов и прогнозное моделирование для всего горного округа.

Процесс засоления отражен на рис. 6.1.2.

6.1.2. Проведение экспериментов

Порядок проведения экспериментов показан на блок-схеме (рис. 6.1.3) [113, 114]. Ниже приводятся соображения, которые помогут понять блок-схему.

Выявление загрязнения геофизическими методами. Электроразведка дает данные о строении водоносного горизонта. Применение электроразведки оправдывается тем, что, с одной стороны, удельное сопротивление пород водоносного горизонта пропорционально удельному сопротвлению воды, которую они содержат, а с другой — удельное сопротивление воды обратно пропорционально количеству содержащейся в ней соли; отсюда следует, что кажущееся удельное сопротивление данных горных пород (в нашем случае, современного аллювия) уменьшается с увеличе-

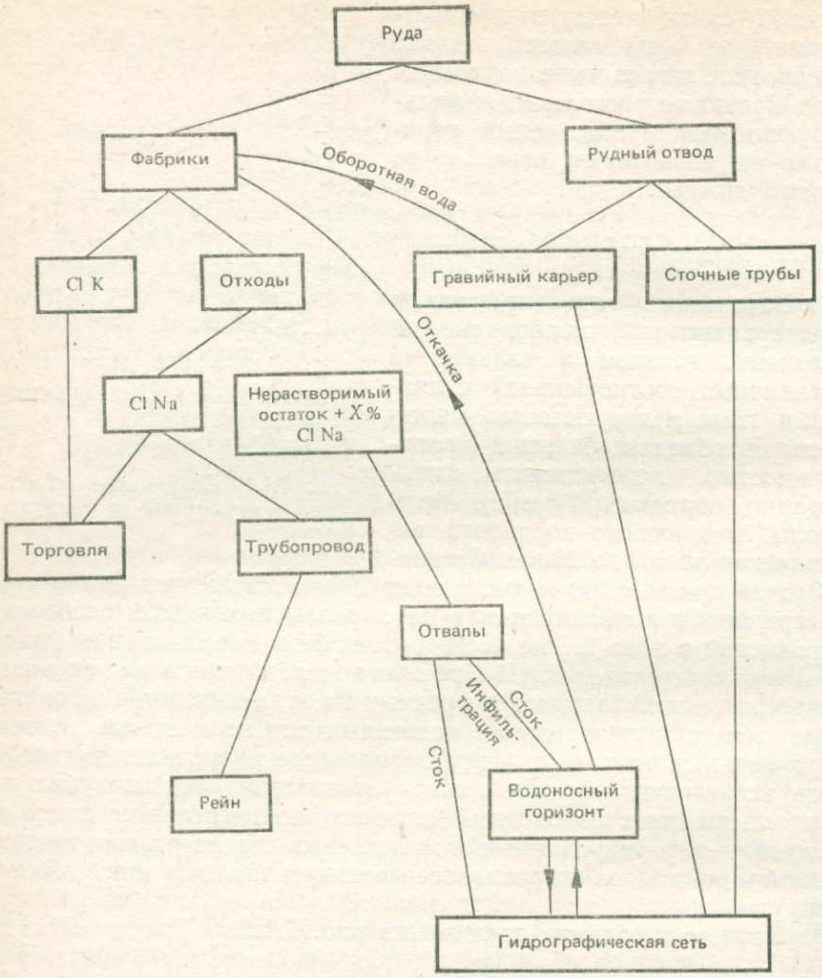


Рис. 6.1.2. Кругооборот руды и загрязнения на калийных рудниках

нием в воде растворимых солей. Это явление количественно оценивается соотношением:

$$\rho_c = \rho_w A/\Phi,$$

где ρ_c — удельное сопротивление водонасыщенного грунта, ρ_w — удельное сопротивление насыщающей воды, A — коэффициент, зависящий от степени консолидации грунта, Φ — эффективная пористость.

Так, пески с пористостью 25%, насыщенные водой с удельным сопротивлением 40 Ом·м (при температуре 18 °С), что отвечает 135 мг/л чистого NaCl в сухом остатке, будут иметь удельное сопротивление 240 Ом·м. Поскольку в аллювии могут быть встре-

чены только слабо проводящие ток глинистые породы, то большинство проводящих зон, показанных на картах кажущегося электрического сопротивления, будут соответствовать зонам засоления.

На рис. 6.1.4, 6.1.5 и 6.1.6 показаны три вида материалов, полученных геофизическими методами исследований: карта подошвы водоносного горизонта и распределения удельных сопротивлений в разрезе и в плане.

Измерения и контроль за загрязнением. Основными средствами измерений и контроля являются пьезометры глубокого и мелкого заложения и поверхностные устройства (самописцы уровня и минерализации). На рис. 6.1.7 показаны некоторые результаты, полученные с помощью этих средств: плановое распространение минерализованных вод в зоне 2, вблизи отвалов. Данные рис. 6.1.7 следует сравнить с геофизическими данными рис. 6.1.6. Конкретные виды экспериментальных средств рассматриваются ниже.

О средствах измерения и контроля [115, 116].

1. Уровни водоносного горизонта. Для установления взаимосвязи между рекой и водоносным горизонтом использован поперечник пьезометров глубиной по 25 м и с фильтрами на последних 5 м. Уровнемеры представляют собой электрические датчики на емкостном эффекте: используется различие диэлектрических постоянных воздуха и воды; любой подъем уровня воды вызывает изменение электрической емкости датчика. Уровнемеры тарировались непосредственно в пьезометрах с тем, чтобы учесть влияние труб и грунтов. Характеристики такого уровнемера приведены на рис. 6.1.8.

2. Уровни рек. Для параллельной регистрации уровня использовалось два типа устройств: механический лимнограф с противовесом и поплавком и пневматический лимнограф с воздушной линией, передающей давление ртутному резервуару, где уровень измеряется поплавком с противовесом. Аналоговый цифровой переход совершается механически, глубина уровней через каждые 15 мин наносится на перфоленту; анализ и обработка лент выполняется вычислительной машиной. Тарировочные кривые связи высоты стояния уровня и расхода поверхностного потока устанавливались на этих станциях на основе инструментального измерения скоростей потока.

3. Наблюдения за концентрацией соли в реках. Эти наблюдения выполнялись периодическим путем отбора проб и измерения удельного сопротивления воды; на рис. 6.1.9 схематически описывается соответствующее устройство.

Можно воспользоваться и сканирующим устройством, состоящим из нескольких датчиков (малая серия которых может быть заранее запрограммирована). Температурная компенсация и приведение полученной измерением величины удельного сопротивления к 20 °С обеспечивается вторым электродом, подобным измери-

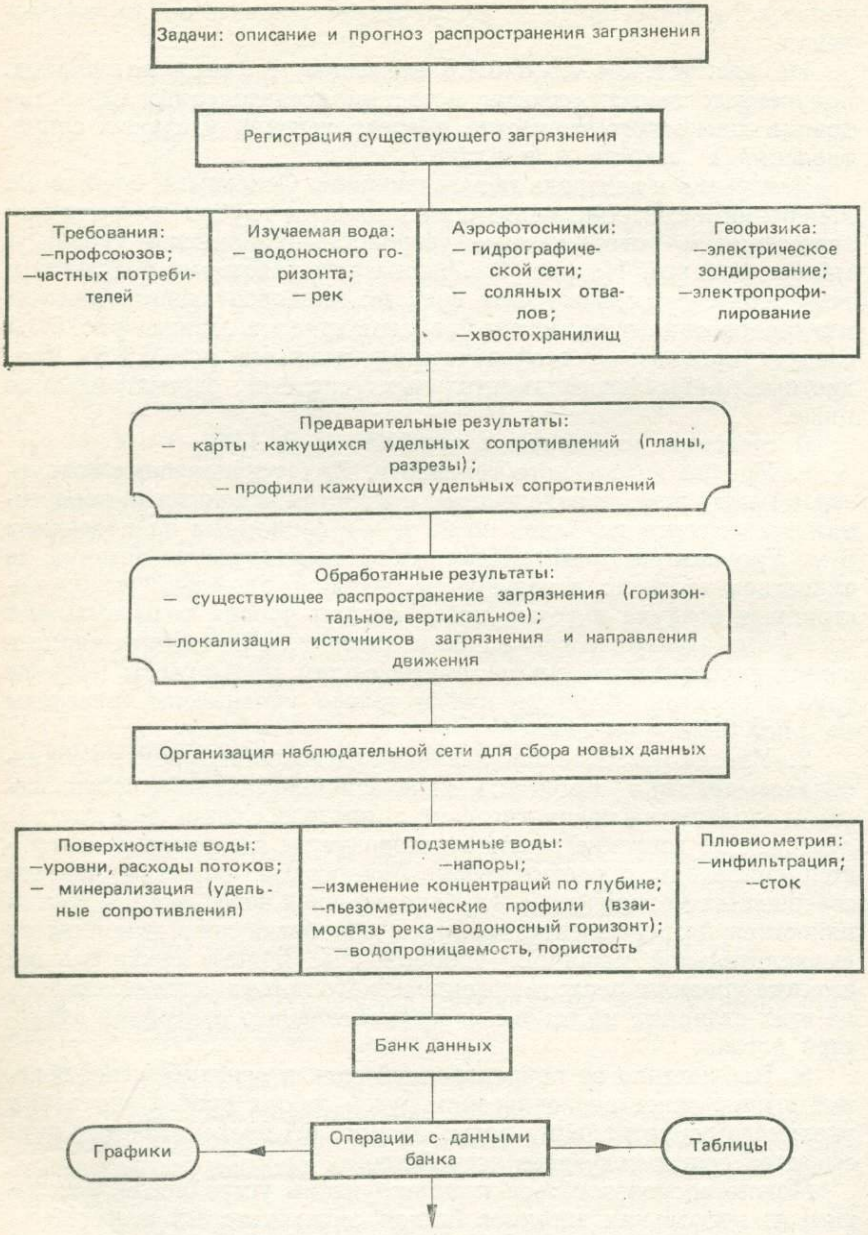
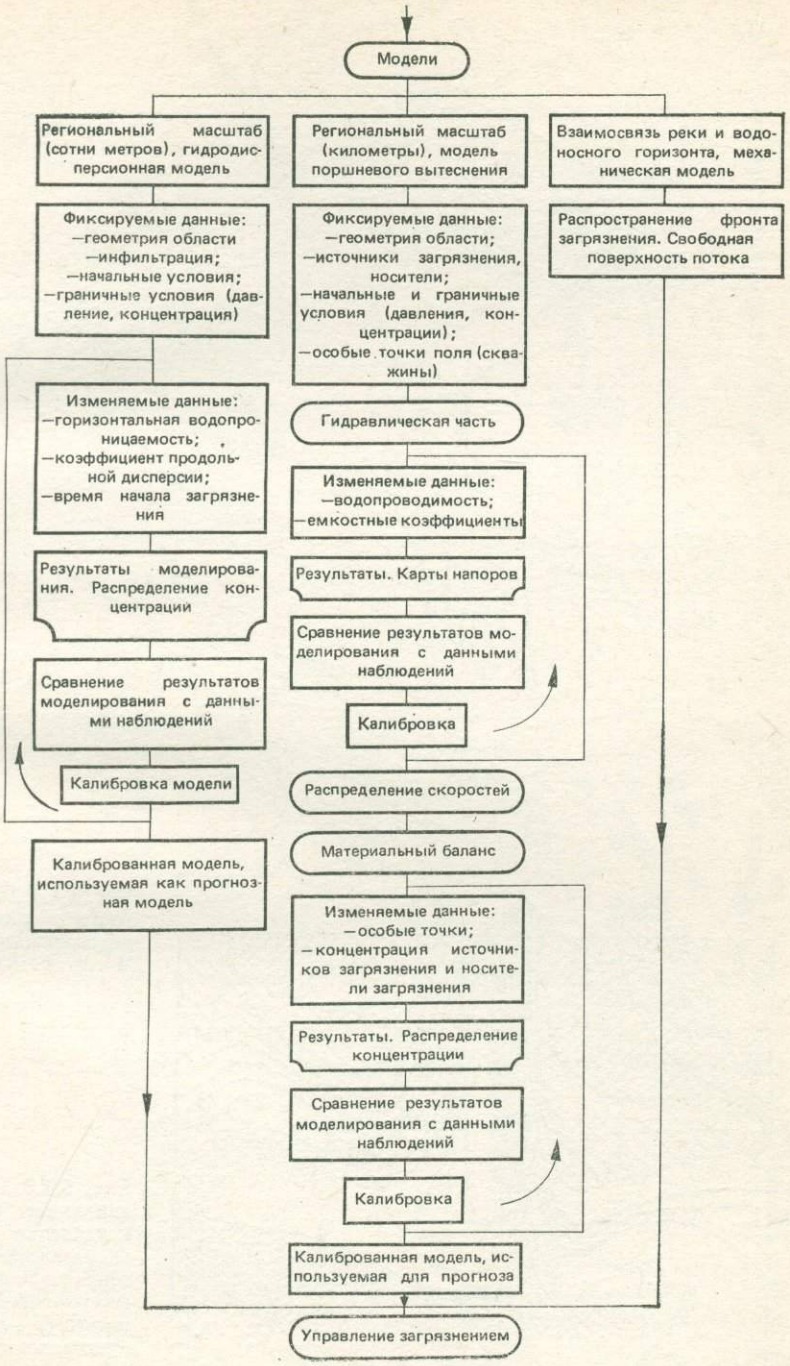


Рис. 6.1.3. Загрязнение промышленными отходами. Блок-схема операции


Модели
Региональный масштаб (сотни метров), гидродисперсионная модель
Региональный масштаб (километры), модель поршневого вытеснения
Взаимосвязь реки и водоносного горизонта, механическая модель
Фиксируемые данные:
—геометрия области
—инфильтрация;
—начальные условия;
—граничные условия (давление, концентрация)
Фиксируемые данные:
—геометрия области;
—источники загрязнения, носители;
—начальные и граничные условия (давления, концентрации);
—особые точки поля (скважины)
Распространение фронта загрязнения. Свободная поверхность потока
Изменяемые данные:
—горизонтальная водопроницаемость;
—коэффициент продольной дисперсии;
—время начала загрязнения
Гидравлическая часть
Изменяемые данные:
—водопроводимость;
—емкостные коэффициенты
Результаты моделирования. Распределение концентраций
Результаты. Карты напоров
Сравнение результатов моделирования с данными наблюдений
Сравнение результатов моделирования с данными наблюдений
Калибровка
Калибровка модели
Распределение скоростей
Материальный баланс
Калиброванная модель, используемая как прогнозная модель
Изменяемые данные:
—особые точки;
—концентрация источников загрязнения и носители загрязнения
Результаты. Распределение концентрации
Сравнение результатов моделирования с данными наблюдений
Калибровка
Калиброванная модель, используемая для прогноза
Управление загрязнением

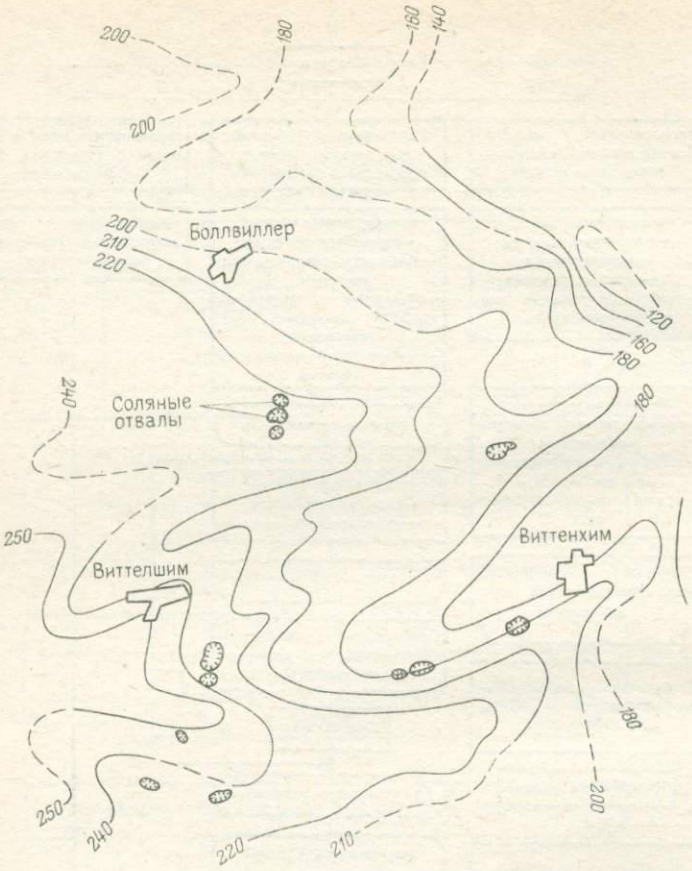


Рис. 6.1.4. План изогипс кровли коренных пород. Масштаб 1:80000

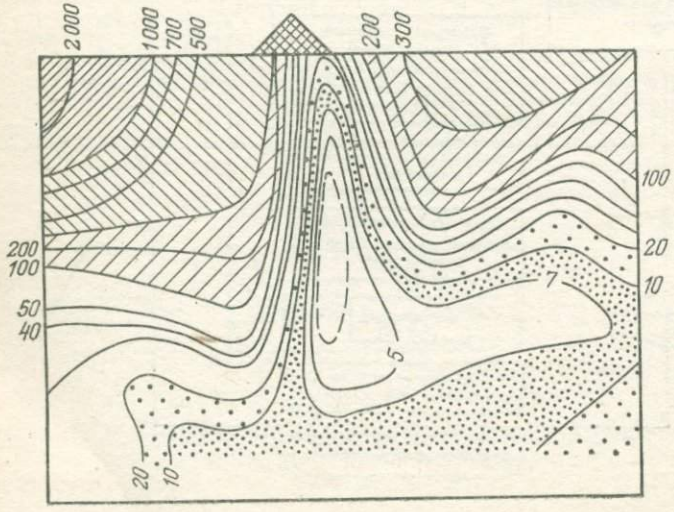


Рис. 6.1.5. Вертикальное распределение электрических сопротивлений (искаженный масштаб) — геоэлектрический метод

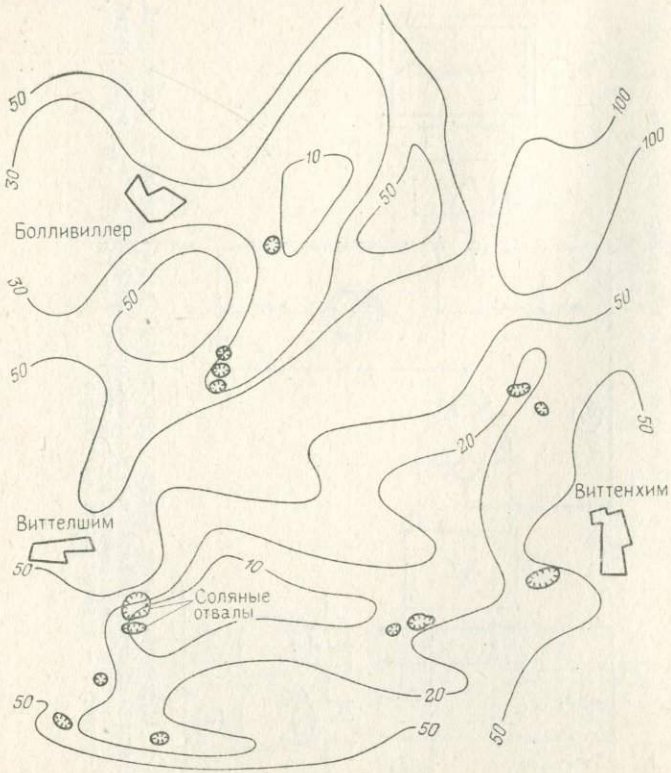


Рис. 6.1.6. Плановое распределение электрических сопротивлений — геоэлектрический метод. Масштаб 1 : 100 000

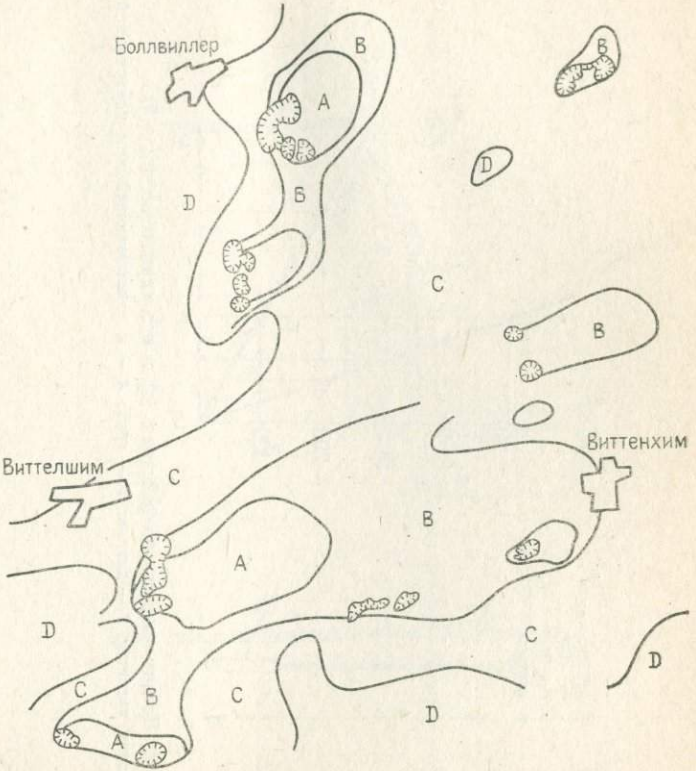


Рис. 6.1.7. Степень минерализации по данным измерений в скважинах. Масштаб 1 : 80000.

A — >10 г/л; *B* — >1 г/л; *C* — >100 мг/л, *D* — <100 мг/л

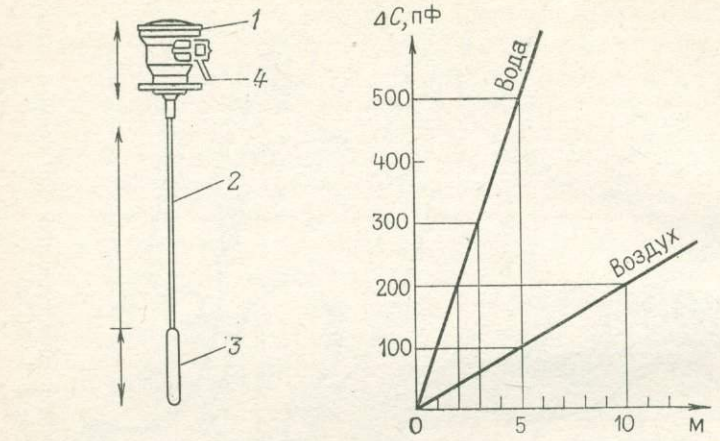


Рис. 6.1.8. Датчик емкостного действия (*а*) и его характеристика (*б*).
1 — оголовок датчика; *2* — датчик; *3* — груз; *4* — к записывающей или контрольной аппаратуре

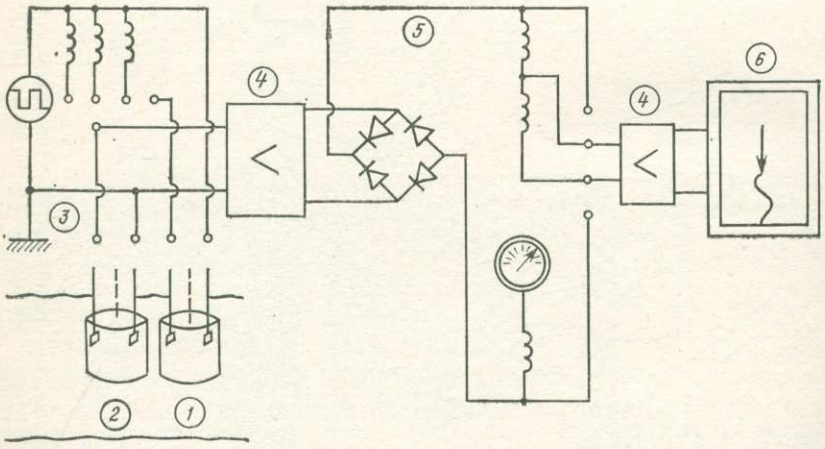


Рис. 6.1.9. Принципиальная схема резистивиметра с тепловой компенсацией.
1 — эталонный электрод (эталонное удельное сопротивление ρ′); *2* — измерительный электрод (неизвестное сопротивление ρ); *3* — источник; *4* — усилитель; *5* — измерительное устройство; *6* — записывающее устройство

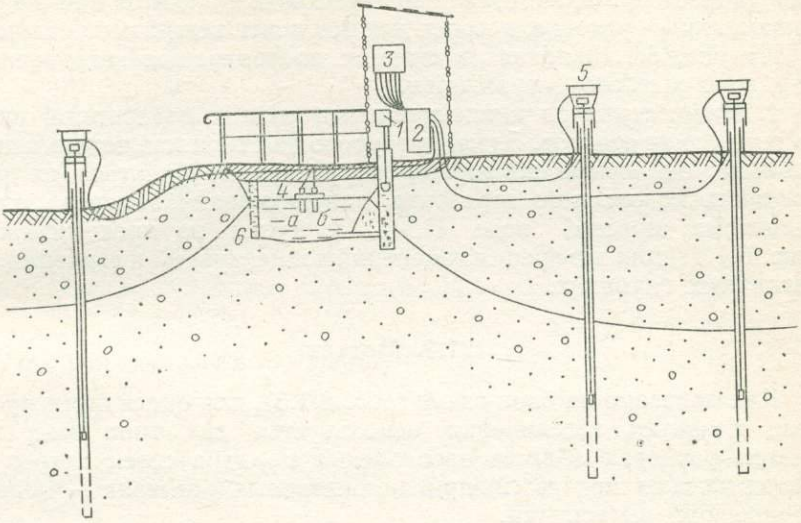


Рис. 6.1.10. Установка для измерения напора.

1 — лимнограф; *2* — регистрирующий резистивиметр; *3* — самописец пьезометрических уровней; *4* — эталонный (*а*) и измеряемый (*б*) датчики; *5* — пьезометр емкостного действия; *6* — рейка

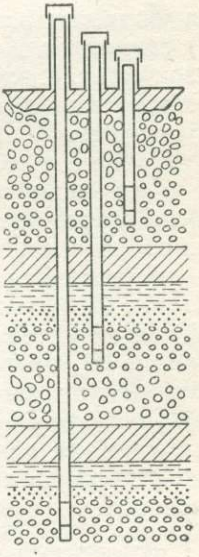


Рис. 6.1.11. Куст скважин для измерения давления и концентрации на различных глубинах

тельному, который погружен в тарировочный раствор того же ионного состава, что и опробуемая вода, и удельное сопротивление (ρ') которого при 20 °С известно. Компенсация может считаться удовлетворительной, если оба электрода находятся в тепловом равновесии — условие, которое для рек почти всегда соблюдается.

На рис. 6.1.10 показана станция по измерению загрязнения для зоны слабого загрязнения.

4. Наблюдения за концентрациями соли и давлениями вниз по течению от отвалов. Здесь пробурено два типа наблюдательных скважин: одиночные скважины, оборудованные фильтром на всю мощность водоносного горизонта, для измерения напоров, эквивалентных пресной воде [180], и кусты из трех скважин (рис. 6.1.11) для измерения изменений концентраций и давления на различных глубинах.

6.1.3. Модели

Как показано на блок-схеме (рис. 6.1.3), для описания и прогноза развития засолонения используется два типа моделей: 1) при размерах области засолонения порядка сотен метров — дисперсионная модель; 2) при километровых размерах — модель поршневого вытеснения.

Дисперсионная модель. В ней используется дисперсионная схема (см.гл. 3), упрощенная благодаря следующим допущениям:

1) при размерах области загрязнения порядка сотен метров среда является однородной;

2) отвалы соли непосредственно контактируют с водоносным горизонтом, т. е. влияние ненасыщенной зоны предполагается пренебрежимо малым (очень сильное допущение);

3) вязкость μ постоянная, а плотность ρ линейно зависит от концентрации, т. е. $\rho = ac + b$, где a и b константы, определяемые с помощью типовых кривых;

4) на основе рис. 6.1.5 сделано допущение, что соль достигает подошвы водоносного горизонта и концентрация соли под отвалами максимальна и постоянна по всей мощности водоносного горизонта (это тоже очень сильное допущение);

5) каждому отвалу отвечает своя модель. Направление скорости постоянно и горизонтально (см. рис. 6.1.6).

Эти допущения приводят к плановой двумерной модели, которой описывается двумерное распространение соли. Осям координат отвечают направление скорости и перпендикуляр к нему, а тензор дисперсии является диагональным. Дисперсионная схема приводится к уравнению следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[K_L \rho \partial (c/\rho)/\partial x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K_T \rho \partial (c/\rho)/\partial y\right] - \partial (uc)/\partial x = \partial c/\partial t,$$

$$u_x = -\frac{k}{\Phi \mu}(\partial p/\partial x),$$

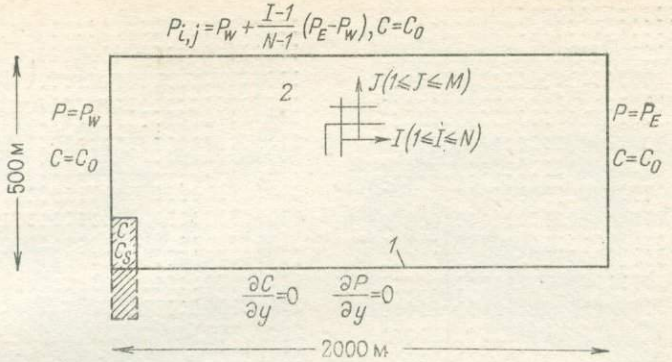


Рис. 6.1.12. Область математической модели.
1 — ось симетрии; *2* — сетка

$$u_y = 0,\ \partial(\rho u_x)/\partial x = -\partial\rho/\partial t,$$

$$\rho = ac + b,$$

где K_L и K_T — соответственно продольная и поперечная компоненты коэффициента дисперсии. Все другие обозначения определены в главе 3.

Оценка средней скорости фильтрации по данным откачек из скважины, среднего гранулометрического состава горных пород и коэффициента молекулярной диффузии NaCl позволяет рассчитать дисперсионное число Пекле, которое показывает, что преобладает механическая дисперсия (раздел 2.4.2). Тогда K_L и K_T записываются в виде:

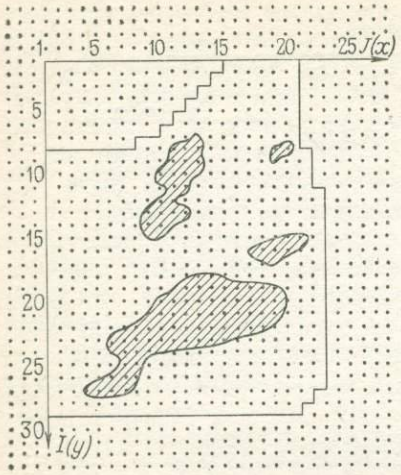
$$K_L = \alpha|U|,\ K_T = \alpha'|U|.$$

Граничные условия поясняются на рис. 6.1.12.

Вычислительная схема отвечает неявному методу переменных направлений (раздел 9.4.4); дисперсионная схема представляет собой общий случай, детально рассмотренный в главе 3 и сводящийся к следующей итерационной процедуре: в момент времени t известны ρ, c и U; в предположении о постоянстве ρ вычисляется U на момент времени $t+\Delta t$ из уравнения неразрывности и закона Дарси. Значение c на момент времени $t+\Delta t$ тогда определяется уравнением дисперсии, а ρ — уравнение состояния. Разумеется, в пределах одного временного шага выполняется несколько итераций, пока не будет обеспечена необходимая сходимость.

Калибровка модели производится путем сравнения с картой рис. 6.1.7 и тарировочными кривыми на рис. 4.2.31.

Модель поршневого вытеснения. Предполагается, что различия по плотности и вязкости двух жидкостей (соленая вода, инфильтрующаяся из рек или из соляных отвалов, и пресная вода



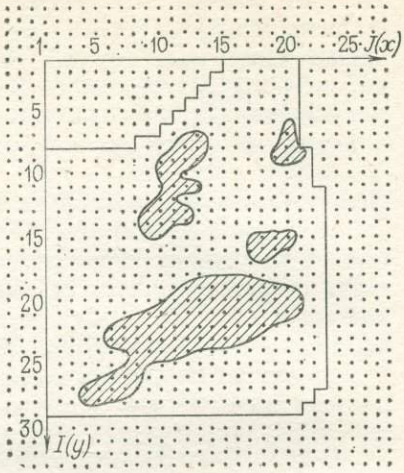


Рис. 6.1.13. Интрузия соленых вод, наблюдавшаяся в течение 1970 г.

Рис. 6.1.14. Рассчитанная интрузия соленых вод в течение 1970 г.

водоносного горизонта) пренебрежимо малы. Это допущение хорошо обосновано, если учесть километровые размеры модели (т. е. размеры бассейна реки) и относительно небольшие различия в концентрации в случае гидравлической взаимосвязи между рекой и водоносным горизонтом (1 г/л в реке и 100 мг/л в водоносном горизонте).

Модель чисто конвективная, т. е. дисперсионный член общего уравнения дисперсии пренебрежимо мал. Классическая схема дисперсии (см. гл. 3) сводится к гидравлической модели, с помощью которой определяются скорости, и к уравнению сохранения массы, которое оказывается чисто конвективным. Концентрации в ячейках сетки подсчитываются путем осреднения содержания соли на входе и выходе из ячейки.

Поток двумерный и неограниченный в плане, он удовлетворяет предпосылке Дюпюи, т. е. эквипотенциальные поверхности принимаются вертикальными, а поток в основном горизонтальным; распределение давления — гидростатическое. Фильтрационный поток описывается уравнением Буссинеска:

$$\frac{\partial}{\partial x} K_{xx} (h - \eta) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_{yy} (h - \eta) \frac{\partial h}{\partial y} = S_y \frac{\partial h}{\partial t} + Q,$$

где $h\ (x,\ y,\ t)$ и $\eta\ (x,\ y,\ t)$ — превышения над некоторой заданной плоскостью сравнения соответственно свободной поверхности и подошвы водоносного горизонта; S_y — коэффициент водоотдачи, Q — удельный водоотбор (см. раздел 9.5).

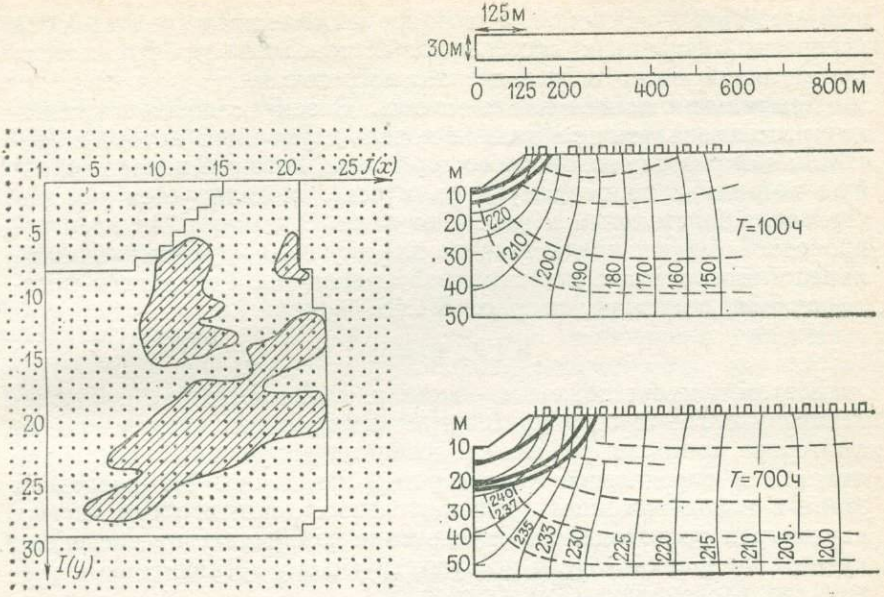


Рис. 6.1.15. Рассчитанная интрузия соленых вод для 1975 г.

Рис. 6.1.16. Модель из электропроводной бумаги.
Положение фронта загрязнения на различные моменты времени (жирные линии).
а — неискаженный масштаб; *б* — искаженный масштаб

Изменение концентрации во времени описывается конвективным уравнением:

$$\operatorname{div}(Uc) = -\frac{\partial c}{\partial t}.$$

Сначала решается уравнение движения, причем член Q в правой части уравнения включает все сосредоточенные расходы воды при откачке или наливе. Отвалы соли заменяются нагнетательными скважинами в соответствии с результатами дождемерных наблюдений; взаимосвязь река — водоносный горизонт моделируется линией скважин, питающих или дренирующих водоносный горизонт в зависимости от характера взаимосвязи. Затем решается конвективное уравнение. Расчет новых распределений напоров и концентраций выполняется методом линейной верхней релаксации.

Прежде чем использовать модель для прогноза возможного загрязнения подземных вод, она должна быть прокалибрована по годовому циклу наблюдений. Расчетная сетка и некоторые результаты моделирования представлены на рис. 6.1.13, 6.1.14 и 6.1.15.

Эти данные указывают на значительное распространение загрязнения, которое связывается с постепенным исчезновением промышленных отстойников, использовавшихся для сбора боль-

шей части вредных стоков. Указанное явление представляет собой интересный парадокс: постепенное исчезновение промышленных предприятий ведет к увеличению загрязнения.

Профильная конвективная модель. В зоне слабого загрязнения использовалась профильная модель двумерного потока в вертикальном разрезе водоносного горизонта, который имеет единичную ширину и перпендикулярен к реке. Моделируется распространение загрязнения к реке и от реки. Эта модель из электропроводной бумаги предназначена для изучения неустановившихся явлений посредством итерационной процедуры. Результаты моделирования показаны на рис. 6.1.16.

6.1.4. Выводы

В этом примере показаны основные этапы методики, представленной в главе 3: сбор предварительных данных, формулировка критериев принятия решений и основных допущений, построение моделей и определение параметров загрязнения. На последнем этапе с использованием предварительных данных о скоростных параметрах производилось определение коэффициентов дисперсии путем калибровки модели по существующему загрязнению с учетом его региональных масштабов.

Применительно к рассмотренному случаю основные результататы исследований свелись к построению прогнозных моделей в двух масштабах (в масштабе отвала и в масштабе всего округа) и более широко — к организации сети наблюдений за водоносным горизонтом и реками, дающей полное представление о своевременном загрязнении и обеспечивающей возможность проверки модельных прогнозов загрязнения.

6.2. ЗАЩИТА ВОДОНОСНОГО ГОРИЗОНТА ОТ ВОЗМОЖНОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ

Городские власти планируют защиту своих скважин, дающих питьевую воду, от обычного и аварийного городского загрязнения. В качестве примера здесь приводится описание исследований, проведенных в близи г. Лиона в Центральной Франции для построения математических моделей, предназначенных, с одной стороны, для описания неустранимого городского загрязнения и выработки правил охраны источников водоснабжения, а с другой — для оценки полезности возможных мероприятий и допустимых сроков их реализации в случае аварии вблизи скважины. Исследование было выполнено в строгом соответствии с методикой, изложенной в главе. 3 [103, 113].

6.2.1. Предварительное изучение имеющихся данных

Водоносный горизонт — аллювиальный, сложенный песками, гравием и галькой с редкими линзами глин; местами он имеет многослойное строение, но в основном однослойный, на что ука-

зывают результаты опытных откачек при неустановившемся движении, проводившиеся для определения проницаемости в зоне влияния скважин. Однако проницаемость, подсчитанная по гранулометрическому составу образцов грунтов, заметно меняется по вертикали. Средняя действительная скорость фильтрации, с учетом данных опытных откачек, может быть принята равной 5 м/сут. В то же время, имеются участки со средним диаметром зерен d_{50}, равным 1,5 см. Водоносный горизонт имеет мощность 20 м и зеркало подземных вод на глубине от 4 до 5 м.

Главными неустранимыми загрязнениями являются углеводороды (в небольших пропорциях, менее чем 0,4 мг/л), сульфаты и нитраты. Кроме того, оказывается, что наибольшая опасность загрязнения исходит от грузовиков, перевозящих химикаты, смешивающиеся с водой, а также от легких углеводородов, таких как бытовое топливо, которое, достигнув уровня воды, могут переноситься вниз по течению.

Таким образом, следует рассматривать только смешивающиеся с водой загрязнения, для чего должны быть построены модель поршневого вытеснения или гидродисперсионная модель.

6.2.2. Рабочая гипотеза

Так как требуется обоснование зон охраны вокруг эксплуатационных скважин, размером от 20 до 100 м (что отвечает крупному масштабу), то была выбрана многослойная дисперсионная модель, учитывающая изменение водопроницаемости по вертикали. Модель представляет собой локально многослойный водоносный горизонт, однако концентрации на ней осредняются по глубине благодаря чему имитируется однослойный водоносный горизонт крупного масштаба. Слои залегают горизонтально и поэтому принята горизонтальная многослойная дисперсионная модель, в которой тензор дисперсии имеет диагональный вид, так как при имеющем место масштабе изучения линии тока близки к параллельным прямым. Число Пекле, подсчитанное по среднему коэффициенту диффузии, равно: $\mathrm{Pe} = (5 \cdot 10^{-3} \times 1{,}5)\ 10^{-5} = 750$. Таким образом, возможные загрязнения будут подчиняться режиму динамической дисперсии, а коэффициенты дисперсии задаются выражением $K = \alpha u$. Параметрами, подлежащими определению, являются региональные скорости u и параметры дисперсии α.

6.2.3. Определение параметров дисперсии

Для уточнения положения отдельных слоев в разрезе, а также для определения коэффициентов дисперсии этих слоев, которые могут быть использованы для моделирования процессов загрязнения подземных вод легкими углеводородами, попадающими в верхнюю часть водоносного горизонта, проводились мелкомасштабные односкважинные эксперименты с запуском радиоактивных трассеров (см. раздел 4.2.1). Таким образом, было получено вертикальное распределение коэффициентов продольной дисперс-

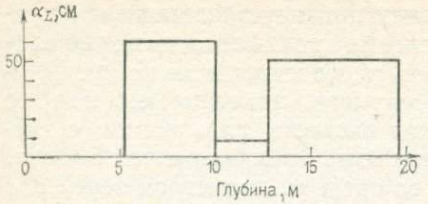


Рис. 6.2.1. Вертикальное распределение параметра продольной дисперсии

сии на участке опробования (рис. 6.2.1.).

В крупном масштабе параметры дисперсии определялись на пяти экспериментальных участках с целью составления карты распределения коэффициентов дисперсии, охватывающей площадь в 35 км^2 (рис. 6.2.2.). Выбор представительных экспериментальных участков проводился с учетом их геологического строения и литологического состава пород.

Один из таких экспериментальных участков располагается вблизи санитарных полей фильтрации; коэффициенты дисперсии здесь были получены методом прослеживания перемещения естественного трассера на расстоянии 600—1000 м. На остальных четырех экспериментальных участках параметры дисперсии были получены с использованием односкважинных опытов с запуском соленой воды и прослеживанием ее перемещения в водоносном горизонте наземными геофизическими методами. Хотя эти методы подробно рассмотрены в разделе 4.2.3, все же остановимся на некоторых деталях выполненных экспериментов.

1. Общее время опыта на каждом участке, включая оборудование скважины, запуск трассера в скважину, контрольные и геофизические измерения, бурение наблюдательных скважин и демонтаж оборудования, составило 15 дней. В ходе опыта средний расход соли (NaCl) составлял 200 кг в час; время запуска на различных участках менялось от 160 до 225 ч. Пусковые скважины оборудовались фильтром на всю мощность водоносного горизонта.

2. Предварительные данные, непосредственно использованные при планировании экспериментов, приведены в табл. 1, а результаты интерпретации эксперимента — в табл. 2. Результаты экспериментов, проведенных на опытном участке 5, даны в разделе 4.2.4.

Таблица 1

Общая характеристика опытных участков

Номер участка	Глубина скважины, м	Глубина залегания подземных вод, м	Мощность водоносного горизонта, м	Проводимость, м^2/с	Горизонтальная проницаемость, м/с	Водоотдача, %	Электрическое сопротивление перед запуском соли Ом·см	Концентрация NaCl при 18 °С, мг/л	Количество пьезометров
1	20	3,3	16,7	$5{,}5 \cdot 10^{-2}$	$3{,}3 \cdot 10^{-3}$	—	—	—	5
2	23,5	4,5	19	$1{,}4 \cdot 10^{-1}$	$7{,}0 \cdot 10^{-3}$	—	1658	350	2
3	35	16,5	18,5	$5{,}0 \cdot 10^{-2}$	$2{,}8 \cdot 10^{-3}$	—	2180	250	—
4	19,6	2,06	17,5	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$	$5{,}5 \cdot 10^{-3}$	13	3375	160	2
5	18,3	2,40	15,90	$3{,}0 \cdot 10^{-3}$	$2{,}0 \cdot 10^{-3}$	—	—	—	22

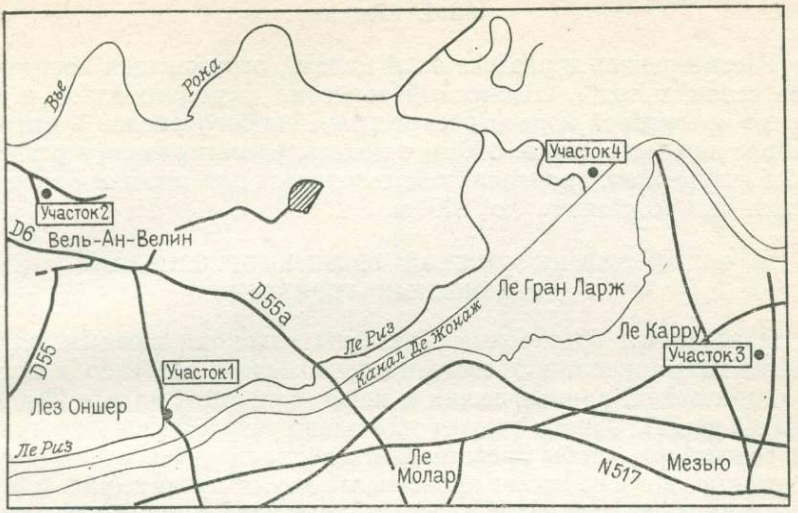


Рис. 6.2.2. Местоположение экспериментальных участков. Масштаб 1 : 100 000

Таблица 2

Принятые характеристики отдельных пластов и результаты эксперимента

Номер участка	Номер слоя	Мощность, м	Проницаемость, м/с	Пористость	Средняя скорость, м/сут	Скорость движения воды в каждом слое, м/сут	Параметр продольной дисперсии, м	Параметр поперечной дисперсии, м	Проводимость м²/с
1	1	5,5	0,0040	0,2	7,2	7,9	12,00	7,000	0,055
	2	7,5	0,0020	0,2		3,9		14,000	
	3	2,0	0,0090	0,2		17,7		3,110	
2	1	4,0	0,0005	0,2	9,6	0,7	8,00	1,000	0,140
	2	7,0	0,0010	0,2		1,3		0,500	
	3	6,0	0,0110	0,2		14,3		0,045	
	4	2,0	0,0325	0,2		42,3		0,015	
3	1	5,8	0,0050	0,2	13,00	24,6	5,00	0,290	0,050
	2	10,2	0,001	0,2		0,5		14,500	
	3	2,0	0,0050	0,2		24,6		0,290	
	4	1,0	0,0100	0,2		49,2		0,145	
4	1	8,5	0,0005	0,2	9,00	0,8	7,00	1,000	0,100
	2	2,8	0,0020	0,2		3,1		0,250	
	3	3,0	0,0010	0,2		1,5		0,500	
	4	2,0	0,0160	0,2		24,8		0,031	
	5	1,0	0,0551	0,2		85,2		0,009	

6.2.4. Модели

Рассмотренная в разделе 4.2.4 модель, отражающая поступление соленых вод в водоносный горизонт, использовалась в качестве прогнозной модели распространения загрязнения в данном районе на расстояние до 100 м, а модель, рассмотренная в разделе 4.2.5 (двумерная, плановая) использовалась для прогноза загрязнения на расстояние до 500 м.

6.3. ВНЕДРЕНИЕ СОЛЕНОЙ ВОДЫ В ПРИБРЕЖНЫЙ ВОДОНОСНЫЙ ГОРИЗОНТ

Прибрежные водоносные горизонты являются важным источником хозяйственно-питьевого водоснабжения, особенно в полуаридных зонах, примыкающих к морю (например, на юге Италии или в Тунисе). Однако следует тщательно разрабатывать программу водоотбора, чтобы предотвратить проникновение соленых вод в пресные, которое может происходить двумя путями (рис. 6.3.1); 1) соленая вода проникает в водозаборную скважину, что вызывает увеличение минерализации откачиваемой воды; 2) широкое внедрение морской воды в пресные может пагубно отразиться на земледелии (в частности, такое загрязнение угрожает виноградникам Медок на юго-западе Франции).

При значительной потребности в воде бывает выгодно производить почти полный водоотбор, а затем сокращать его для восполнения запасов водоносного горизонта, после чего снова повторить процесс. При этом необходимо учитывать наличие переходной зоны, изменение ее ширины, перемещение ее под влиянием приливно-отливных процессов и пульсирующего режима откачки. Чтобы понять механизм этого частного типа загрязнения, было начато методическое исследование, отдельные этапы которого представлены в главе 3. Задачи исследования — во-первых, выяснить какие эксперименты, модели и правила необходимы для определения режима откачки в прибрежной зоне; во-вторых, определить расположение контрольных и наблюдательных точек. Эти эксперименты проводились на водоносном горизонте Малика в Сенегале.

6.3.1. Предварительные исследования

Водоносный горизонт находится в 20 км от Дакара. Представлен линзой пресной воды глубиной до 50 м, залегающей повсеместно на соленых водах. Ширина линзы около 1 км. С севера она ограничена океаном, с юга — солеными водами (на земной поверхности соленые воды образуют озера, вытянутые вдоль береговой линии). Соленость озер изменяется от 14 до 53 г/л (рис. 6.3.2) [55].

Водоносный горизонт относительно однородный и сложен песками с линзами глин и включениями гравия и гальки; уровень

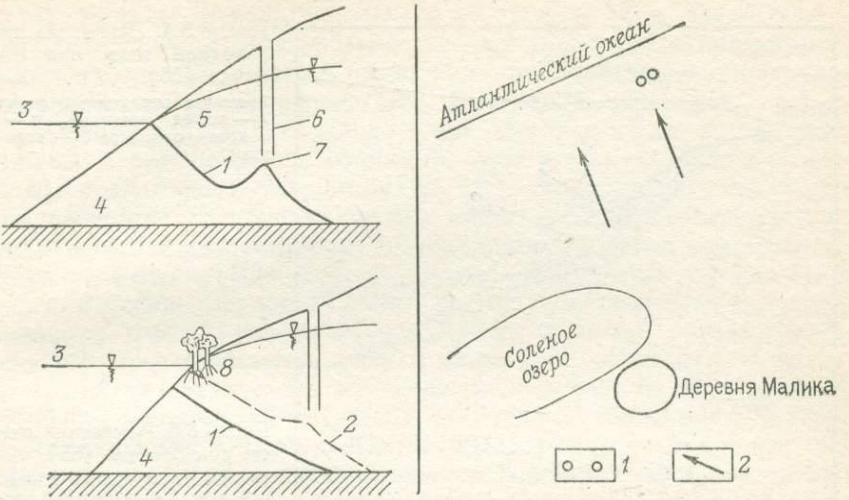


Рис. 6.3.1. Внедрение соленой воды в прибрежный водоносный горизонт.

1 — до откачки; *2* — после откачки; *3* — море; *4* — соленый «язык»; *5* — водоносный горизонт; *6* — откачивающая скважина; *7* — образование конуса; *8* — корни

Рис. 6.3.2. Расположение водоносного горизонта [55].

1 — водозаборные скважины; *2* — направление потока

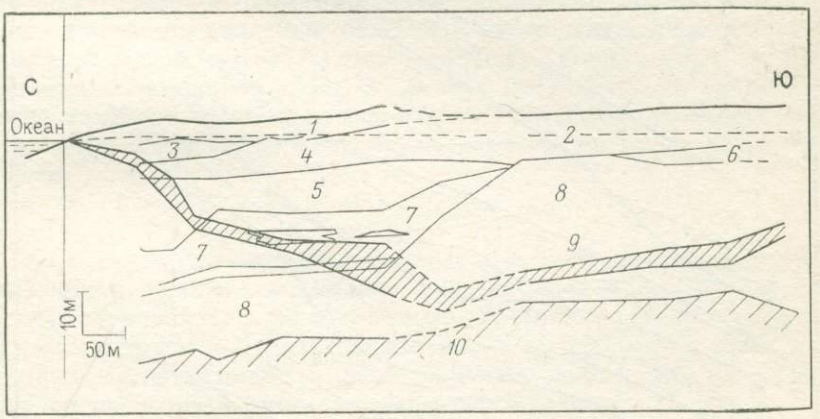


Рис. 6.3.3. Разрез водоносного горизонта с переходной зоной и неоднородностями [55].

1 — дюна; *2* — уровень воды до откачки; *3* — новый пляж; *4* — дюны; *5* — желтые пески; *6* — старый пляж; *7* — пески с лизнами глины и гравия ожелезненные; *8* — белые пески; *9* — переходная зона; *10* — водоупор

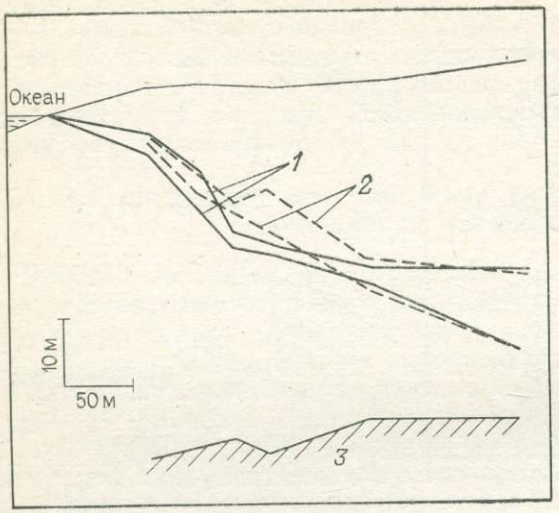
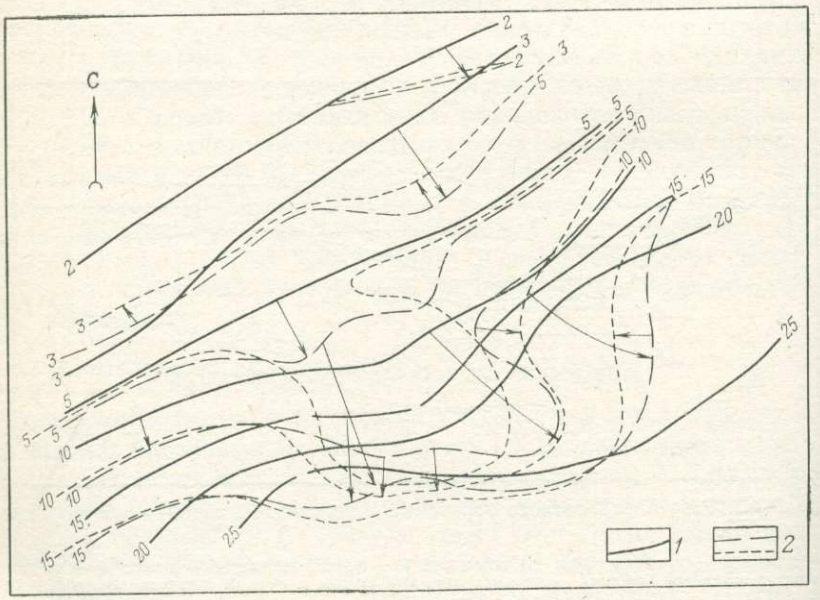


Рис. 6.3.4. Изменение переходной зоны при откачке [55].

Границы переходной зоны: *1* — перед откачкой, *2* — в конце откачки; *3* — водоупор

Рис. 6.3.5. Изменение изоом при откачке [55].

Изоомы, полученные *1* — до откачки, *2* — во время и после откачки



грунтовых вод залегает на глубине от 3 до 6 м. Водоносный горизонт разгружается в море, а также в южное озеро, линия водораздела перемещается в зависимости от времени года. Были оборудованы скважины для проведения постоянных резистивиметрических измерений, которые позволяют приблизительно определить геометрические характеристики переходной зоны (рис. 6.3.3).

Переходная зона, обусловленная приливно-отливными явлениями и сезонными колебаниями, при отсутствии систематического водоотбора имеет ширину 2—12 м. Если принять ее среднее положение за поверхность раздела между пресной и соленой водой, то отношение высот пресной воды над и под уровнем моря изменяется в пределах $1/5 \div 1/75$, что сильно отличается от известной оценки Гибен—Герцберга (1/40). Было также замечено, что после сильных дождей, питающих водоносный горизонт, границы переходной зоны смещаются вниз и ширина ее меняется.

Откачка проводилась в течение трех месяцев из двух скважин с общим расходом 26 $м^3/с$. Было откачено 63 400 $м^3$ воды. Вокруг водозабора были пробурены наблюдательные скважины для определения положения депрессионной воронки. Были подсчитаны средняя проводимость, равная $6 \cdot 10^{-3}$ $м^2/с$, и коэффициент водоотдачи, равный 0,17.

Откачка оказывала влияние на переходную зону в радиусе 200 м (рис. 6.3.4). Измерения методом вертикального электрозондирования при откачке показали изменения изоом на поверхности. Результаты нанесены на планы, примером которых служит рис. 6.3.5, показывающий внедрение соленой воды в пресные.

Анализируя имеющиеся данные нужно отметить, что в водоносном горизонте регистрируются приливные волны: наблюдались изменения давления (более или менее сглаженные в зависимости от строения пласта) при различных уровнях моря, соответствующие приливным движениям. Эти результаты интерпретируются как проявление горизонтальной стратификации водоносного горизонта и связываются с эффективной пористостью различных слоев.

6.3.2. Рабочая гипотеза

Предварительные данные показывают, что мы имеем дело с загрязнением среднего масштаба, возникающим в результате смешения загрязнителя с водой. Размер источника загрязнения (море) и регистрируемые относительные размеры переходной зоны позволяют сделать вывод о необходимости использования модели дисперсии и разработки дисперсионной схемы.

6.3.3. Использование дисперсионной схемы

Прежде чем ввести само уравнение, были разработаны фильтрационные модели для уточнения сведений о многослойном водоносном горизонте — о геометрии пласта (распространение и

мощности), о гидрогеологических параметрах (коэффициенты горизонтальной и вертикальной фильтрации, коэффициенты водоотдачи) и о расходе потока пресной воды в море.

В качестве первого приближения было введено допущение о несмешиваемости пресной и соленой воды, после чего были подобраны вертикальные фильтрационные модели — по средней величине переходной зоны в стационарном режиме и по приливным пьезометрическим колебаниям в нестационарном режиме.

Затем использовалась слоистая, горизонтальная фильтрационная модель с вертикальным перетоком воды между слоями. Она дополнялась плановой (так же слоистой) моделью дисперсии с вертикальным переносом между слоями. Модель дисперсии согласовывалась по кривым, аналогичным линиям удельных сопротивлений (рис. 6.3.5), путем моделирования изменения средних размеров «соленого языка». Для этой модели было предложено использовать метод конечных элементов, который в настоящее время проходит испытания.

6.3.4. Трудности исследований

Согласно Бэру [17] основная трудность в моделировании распространения соленых вод состоит не только в том, что дисперсионная схема нелинейна, но и в том, что неизвестна моделируемая область, так как некоторыми ее границами служат свободные поверхности. Первым результатом настоящего исследования и было выявление различного рода трудностей, которые мы теперь рассмотрим детально.

Механизмы движения и дисперсии изучены слабо, но некоторые экспериментальные факты дают основу для создания теории: было замечено, что на побережьях морей, не имеющих приливов (как Средиземное море), переходная зона обычно очень узка или иногда совсем отсутствует; на побережьях морей с приливами (как, например, на побережье Атлантического океана) переходная зона может быть довольно значительной (см. рис. 6.3.3.).

Теория заключается в следующем. В отсутствие приливов и водоотбора и при пренебрежении сезонным восполнением запасов подземных вод за счет атмосферных осадков (это допущение особенно справедливо при полуаридном климате) средняя поверхность раздела пресной и соленой воды не перемещается. Единственным движением является течение пресной воды в море по поверхности соленой воды (рис. 6.3.6). Это вызывает, вероятно, незначительную поперечную дисперсию, обусловленную вертикальной проницаемостью. Кроме того, соленая вода, попадающая в водоносный горизонт благодаря дисперсии, выносится пресной водой.

При наличии приливных волн горизонтальная составляющая скорости «соленого языка» больше, чем вертикальная (особенно если водоносный горизонт горизонтально-слоистый), что приводит к интенсивной продольной дисперсии. Эта дисперсия и является

причиной наблюдаемых нами довольно значительных переходных зон. Конечно, приливы и сезонные пополнения запасов подземных вод — это периодические явления, поэтому они должны вызывать возвратно-поступательное движение «языка». В связи с периодичностью движения возникает вопрос: будет ли переходная зона расширяться со временем или достигнет некоторого равновесия? Опираясь на известные данные, можно предположить, что на практике равновесие достигается, вероятно, благодаря упоминавшемуся явлению вымывания: часть соленой воды, поступающей благодаря дисперсии в водоносный горизонт, вытесняется обратно в море при его естественной разгрузке. Другое объяснение (не противоречащее первому) состоит в том, что дисперсия в некотором отношении обратима и часть переходной зоны, созданная при перемещении соленой воды вглубь, разрушается встречным движением.

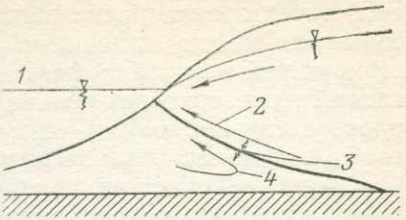


Рис. 6.3.6. Обратная дисперсия при движении пресной воды к морю.
1 — море; *2* — поток пресной воды; *3* — дисперсия; *4* — поток соленой воды

Мы рассмотрели здесь развитие зоны дисперсии в естественных условиях (дожди, приливы). Основная задача — проверить справедливость этой теории в условиях водоотбора и выяснить, будет ли вытеснение соленой воды из водоносного горизонта компенсировать возможные дисперсионные эффекты. В этом и заключается цель упомянутых здесь исследований, проводимых в настоящее время. Если откачка не влияет на ширину зоны дисперсии, то можно использовать модели поверхности раздела несмешивающихся соленой и пресной вод, и нет необходимости проводить полевые эксперименты с целью определения коэффициентов дисперсии, которые всегда трудно выполнить в достаточно широком масштабе.

Теория дисперсии в приложении к внедрению соленой воды важна для обоснования режима водоотбора в полуаридных зонах, где каждая капля пресной воды на учете и иногда планируется сверхусиленная эксплуатация водоносного горизонта, т. е. создание обратного градиента, что вызывает интенсивную интрузию соленых вод. Эта интрузия затем вытесняется обратно в море естественным питанием водоносного горизонта в период дождей, и необходимо определить, остается ли при этом какое-то загрязнение. Ответ могла бы дать «осцилляционная» теория дисперсии, учитывающая вытеснение и обратимость процесса.

6.4. РАДИОАКТИВНОЕ ЗАГРЯЗНЕНИЕ ЖИДКИМИ ОТХОДАМИ

В связи с продолжающимся ростом использования атомной энергии в ближайшие несколько лет опасность радиоактивного загрязнения, вероятно, возрастет. С психологической и физиче-

ской точек зрения радиоактивное загрязнение опасно и требует соответствующего отношения. Как, например, случай, иллюстрирующий методику, представленную в главе 3, кратко описываемый ниже, не очень сильно отличается от случая загрязнения промышленными солями, описанного в разделе 6.1. Несмотря на то что общие масштабы загрязнения, конечно, различны, моделирование и технические приемы остаются в основном теми же. Предпочтительно описать этот случай отдельно, чтобы подчеркнуть важность применения технических приемов изучения смешивающихся загрязнений для специфического типа загрязнений. Таким образом, акцент делается не на методику, а на общий характер данных и на масштабные аспекты.

Факты, изложенные здесь, касаются вопроса удаления жидких отходов Опытной станции национального реактора в восточной части долины р. Снейк в Южном Айдахо (США), изучавшегося Геологической службой Соединенных Штатов [230].

6.4.1. Предварительные исследования

Геологические условия. Восточная часть долины р. Снейк представляет собой мульдообразный бассейн площадью 31 000 км^2. Он сложен тонкими потоками базальтовых лав и переслаивающимися с ними осадками общей мощностью, возможно, до 1500 м. Поток водоносного горизонта долины р. Снейк движется на юго-запад (рис. 6.4.1) с большими скоростями (1,5—8 м/сут.), а его проводимость изменяется от 10^4 до 10^6 м^2/сут. Коэффициент водоотдачи изменяется от 0,001 до 0,02, а на участке удаления отходов — от 0,01 до 0,06. Большая часть потока водоносного горизонта приурочена к верхнему и нижнему контактам смежных базальтовых потоков, в которых отмечены трещины и разрывы.

Опытная станция национального реактора (ОСНР) занимает 2320 км^2 этой долины. На рис. 6.4.2 показаны границы ОСНР и гидроизогипсы, которые используются для расчета скорости основного потока водоносного горизонта.

Отходы. Имеется два главных источника, а именно, площадка опытного реактора (ПОР) и химико-технологический завод штата Айдахо (АХТЗ), которые сбрасывают 80% всех химических и свыше 90% всех радиоактивных отходов. Глубина залегания уровня воды на этих площадках около 140 м.

Загрязнители, т. е. отходы, которые влияют на качество воды, представлены как нерадиоактивными разновидностями, такими как хлориды натрия, хром и тепло, так и радиоактивными, как тритий, стронций-90 и цезий-137.

Хлориды постоянно присутствуют в отходах на обеих площадках. Естественная концентрация хлоридов водоносного горизонта изменяется от 10 до 20 мг/л. Величина 15 мг/л принята как нижний предел загрязнения отходами. Средняя исходная концентрация на АХТЗ с 1962 по 1972 гг. была 245 мг/л.

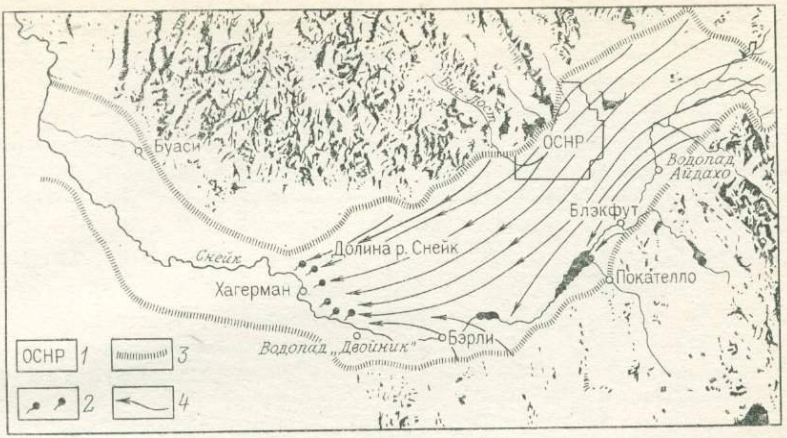


Рис. 6.4.1. Схема расположения ОСНР, долины р. Снейск и предполагаемых линий тока для водоносного горизонта [229].

1 — опытная станция национального реактора (ОСНР), *2* — источники; *3* — приблизительная граница долины р. Снейк; *4* — обобщенная линия тока подземных вод

Натрий сбрасывается с хлоридами в виде хлорида натрия; он ведет себя как хлорид, но движение его тормозится сорбцией (ионный обмен). Например, в наблюдательных скважинах, где концентрация хлоридов равна 60 мг/л, концентрация натрия составляет только 14 мг/л, хотя закачиваемая масса натрия составляет 2/3 массы хлорида.

Загрязнение хромом фиксируется при концентрации 0,01 мг/л, наиболее высокая зарегистрированная концентрация 0,5 мг/л.

Естественная температура воды составляет 12 °С, а температура сбросов на АХТЗ — 21 °С. Перенос тепла создал «язык» теплой воды площадью около 3 км^2.

Тритий — наиболее распространенный радиоизотоп отходов, встречающийся в виде тритиевой воды. Природная концентрация трития в воде водоносного горизонта меньше 0,2 пКи/мл. В качестве нижнего предела для картирования трития используется величина 2 пКи/мл (точность определения трития в анализах АХТЗ). Средние концентрации трития в сбросах на ПОР и АХТЗ соответственно равны 615 и 430 пКи/мл (с 1962 по 1972 г.).

Максимальная концентрация стронция-90 на АХТЗ была 0,15, нижний предел установлен на уровне 0,005 пКи/мл. Большое значение имеет сорбция, она уменьшает скорость распространения загрязнения, что при наличии радиоактивного распада приводит к уменьшению концентрации. Цезий-137 сбрасывается в тех же количествах, что и стронций-90, но благодаря сильной сорбции нигде не обнаружен.

Способы сброса отходов. На ПОР образуется несколько различных типов жидких отходов и используется четыре типа систем сброса.

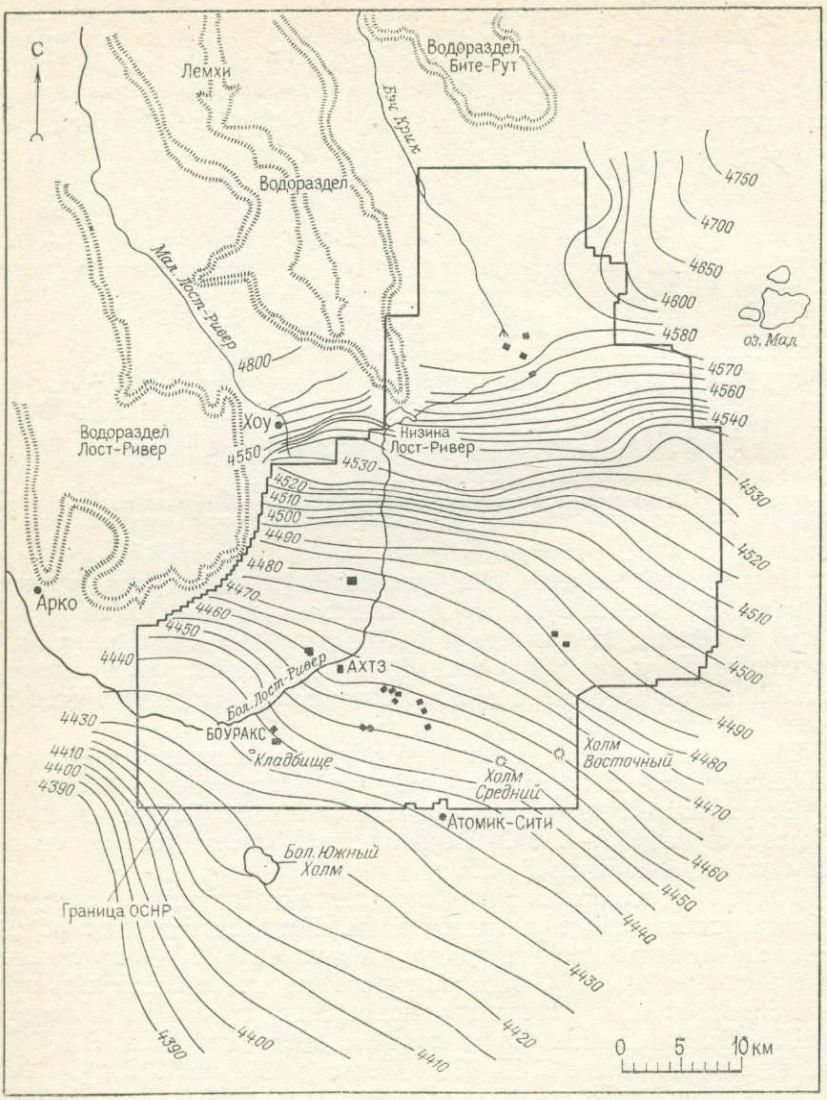


Рис. 6.4.2. Схема гидроизогипс 20а (в футах над уровнем моря) в районе ОСНР [228]

1. Отходы с низким уровнем радиации сбрасываются в три взаимосвязанных инфильтрационных бассейна и просачиваются на уровнень подземных вод.

2. Коррозионные, но нерадиоактивные химические отходы сбрасываются в отдельный инфильтрационный бассейн.

3. Нерадиоактивные отходы градирни сбрасываются непосредственно в водоносный горизонт через скважину глубиной 385 м. Они

обычно содержат 12000 мг/л растворенных веществ природного происхождения (в пять раз больше, чем в подземных водах).

4. Санитарные отходы сбрасываются в отдельный инфильтрационный бассейн. АХТЗ сбрасывает все свои стоки в водоносный горизонт через скважину глубиной 180 м. Перед сбросом почти вся радиоактивность устраняется из стоков дистилляцией или ионным обменом, за исключением трития и небольших количеств стронция-90 и цезия-137.

6.4.2. Критерии принятия решений

Очевидно, что мы имеем дело с загрязнителем, смешивающимся с водой водоносного горизонта. Задача состоит в определении детальности исследований.

Объемы различных сбрасываемых загрязнителей известны, но более интересны планы, отражающие концентрации загрязнений во времени и пространстве. Они более реально фиксируют масштаб загрязнения. На рис. 6.4.3 изображены такие планы для случая хлоридного загрязнения. Для других загрязнителей планы имеют аналогичный вид.

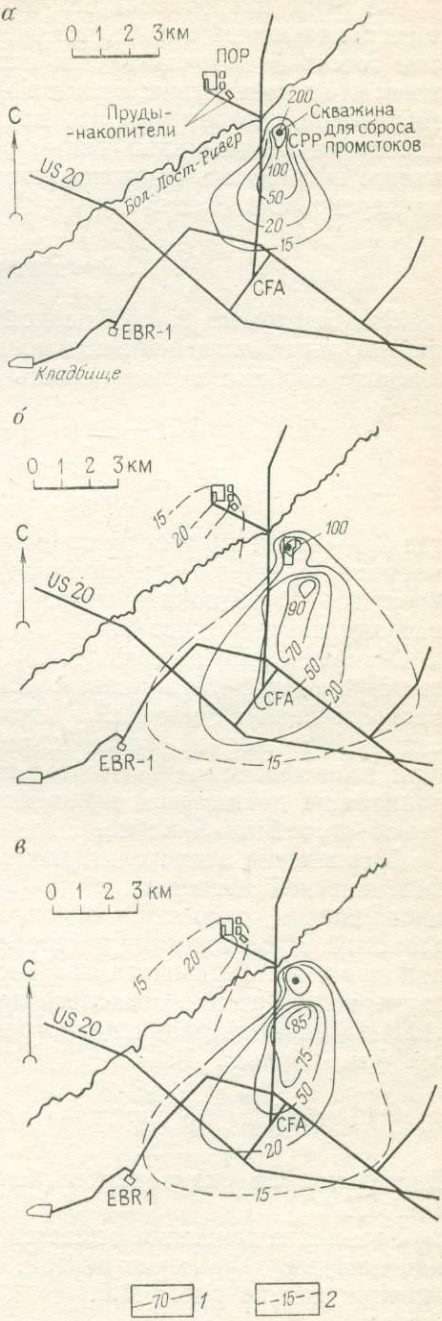


Рис. 6.4.3. Схемы распределения хлоридного загрязнения в водоносном горизонте долины р. Снейк:

а — на октябрь 1958 г.; *б* — на апрель 1969 г.; *в* — на ноябрь 1972 г. [229] *1* — изолинии концентрации хлоридов (мг/л); *2* — то же, предполагаемые

Из этих планов следует, что загрязнение распространяется в региональном масштабе, что средства сброса отходов эквивалентны точечным источникам, но интенсивность этих источников такова, что должны учитываться эффекты дисперсии. Сам вид языка загрязнения показывает, что как продольная, так и поперечная дисперсия значительны. Таким образом, моделирование основывается на рабочем предположении, что загрязнения подчиняются дисперсионной схеме.

6.4.3. Дисперсионная схема

Она базируется на обобщенной форме обычного уравнения дисперсии, учитывающей эффекты поглощения, радиоактивный распад, влияние сорбции и сжимаемость среды:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(K \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(UC) - C\alpha \frac{\partial p}{\partial t} - QC_s - \\ - \lambda C - \frac{\partial}{\partial t}[(1 - \Phi) N], \qquad (6.4.1)$$

где C_s — концентрация раствора в источнике или стоке, α — сжимаемость среды, λ — постоянная радиоактивного распада раствора, N — сорбционная емкость твердой фазы. Остальные обозначения даны в главе 3.

Умножая левую часть (6.4.1) на $\Phi/[\Phi + A(1 - \Phi)]$, можно также смоделировать ионный обмен (здесь введен коэффициент распределения A, который представляет собой отношение радиоактивности твердой фазы к радиоактивности жидкой фазы). При этом делаются дополнительные предположения о том, что равновесие достигается мгновенно, является обратимым и изотерма адсорбции линейна.

Загрязнение происходит, как в случае трассера и при режиме динамической дисперсии с коэффициентами дисперсии, пропорциональными скорости. Водоносный горизонт горизонтально-слоистый. Наблюдениями установлено, что большинство загрязнений движется горизонтально. Тогда модель дисперсии является двумерной. Поток водоносного горизонта управляется обычным уравнением фильтрации для ограниченных водоносных горизонтов (см. прилож. I):

$$\operatorname{div}(T \operatorname{grad} H) = S \frac{\partial h}{\partial t} + q.$$

Дисперсионная схема может быть дискретизирована на сетке рис. 6.4.4.

Уравнение движения решается НМПН *, а уравнение дисперсии методом характеристик (см. раздел 9.4.6). Пример такого решения дан на рис. 6.4.5.

---

* Неявный метод переменных направлений. — *Прим. ред.*

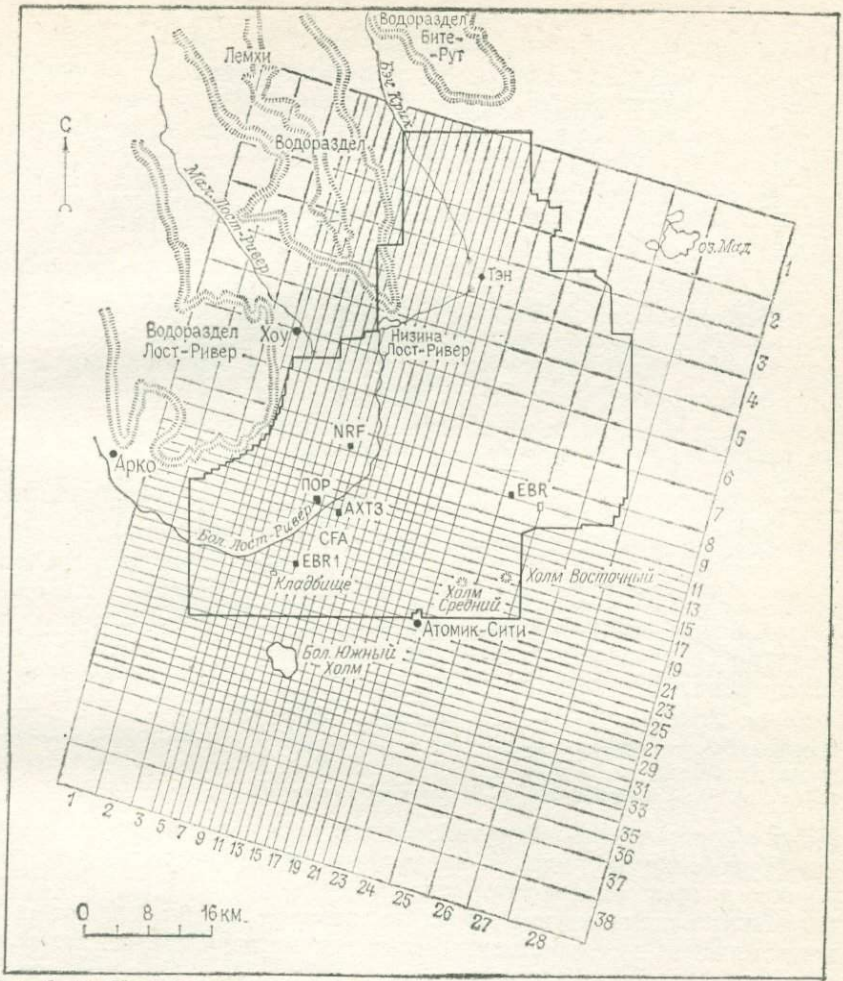


Рис. 6.4.4. Конечноразностная сетка для прогноза миграции загрязнения [228]

6.4.4. Определение коэффициентов дисперсии

Известно, чтобы оперировать дисперсионной схемой, необходимо определить полевыми опытами коэффициенты дисперсии. Исследование выполнено в крупном региональном масштабе и коэффициенты дисперсии были определены по данным загрязнений, которые рассматривались как естественные трассеры.

Хороший естественный трассер не должен вступать в химические реакции (такие, например, как ионный обмен и осаждение) и не должен взаимодействовать со средой. Начальные и граничные условия должны быть известны (особенно закачиваемые объемы и их распределение во времени). Исходя из этого, были выбраны хлориды как самый простой и самый точный индикатор дисперсии.

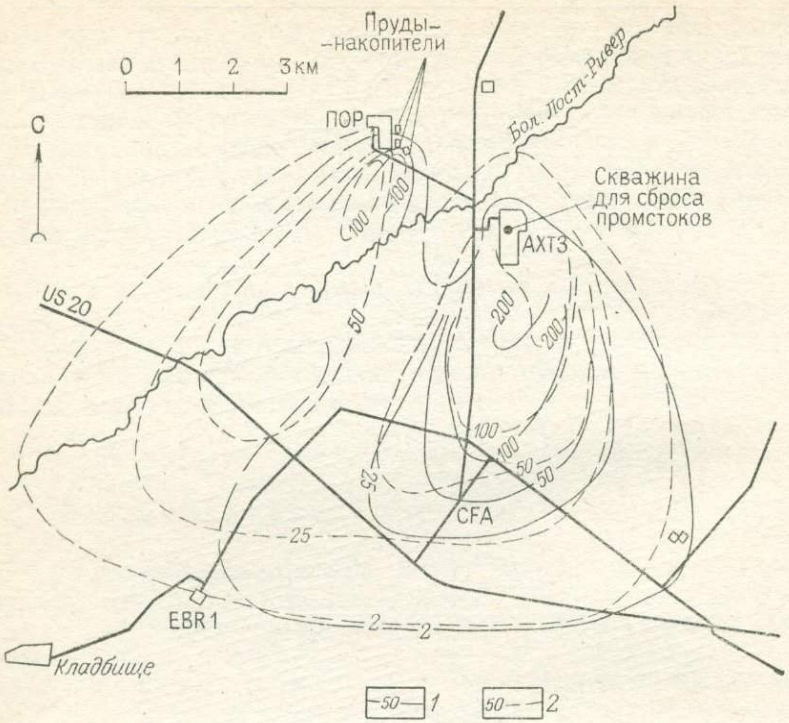


Рис. 6.4.5. Сопоставление наблюдаемых и рассчитанных изолиний концентрации трития (в пКи/мл) на 1968 г.

1 — по пробам из скважин; *2* — по результатам вычислений

Можно использовать и тритий, но его поведение более сложное, чем поведение хлорида, из-за сильно изменяющихся расходов сброса и радиоактивного распада.

Можно использовать и хром, но, конечно, не натрий, который непригоден из-за адсорбции. Дисперсия согласовывалась по кривым концентрации хлорида.

Полученные значения α_L и α_T были равны: $\alpha_L = 91$ м и $\alpha_T = 137$ м.

Эти значения были использованы, чтобы согласовать «тритиевую» модель по экспериментальным кривым концентрации с учетом радиоактивного распада (см. рис. 6.4.5) и «стронциевую» модель при постоянном коэффициенте распределения для сорбции. Большие значения коэффициента поперечной дисперсии, вероятно, обусловлены очень большим масштабом модели и трещинным характером водоносного горизонта.

6.4.5. Прогнозная модель загрязнения

Дисперсионную схему можно использовать как прогнозную модель для различных гидрогеологических условий и режимов сброса отходов.

ГЛАВА 7

ЗАГРЯЗНЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ВОДНЫМИ РЕСУРСАМИ ОБЩАЯ МЕТОДИКА

Экономическое значение воды очевидно. С ростом потребностей становятся важными все ее ресурсы и особенно ресурсы подземных вод, накопленные в естественных бассейнах. Вода используется в двух главных направлениях: для водопотребления (хозяйственно-питьевого, сельскохозяйственного, промышленного) и для транспортирования. Под последним подразумевается удаление бытовых и промышленных отходов. Конечно, такое удаление отходов водой ведет к нарастающему ухудшению ее качества, которое иногда снижается процессами самоочищения и обычно управляется процессами дисперсии.

Представим двух потребителей воды одного и того же водоносного горизонта. Загрязнение воды потребителем, расположенным выше по течению, может вызвать экономические трудности у потребителя ниже по течению, если в процессе транспортирования загрязнение не будет уменьшено до приемлемого уровня. Пусть, например, предприятию необходима вода с определенными требованиями к качеству, которым может не соответствовать уже загрязненная вода. Тогда оно должно вложить средства в очистные устройства или получать воду издалека. Экономика предприятия будет зависеть от загрязнения, влияющего как на качество, так и количество потребляемой воды.

В общем можно сказать, что загрязнение — это постоянный фактор деградации воды, который влияет как на ее качество, так и на количество. Например, потребителя могут прежде всего интересовать характеристики качества воды (например, при ее использовании для охлаждения), а не ее количество. Однако качество воды зависит от интенсивности загрязнения, которое является функцией как переносимого количества загрязнения, так и переносящего его количества воды.

Таким образом, качество и количество воды взаимосвязаны и экономическая оценка загрязнения воды, т. е. ее качества, тесно связана с экономической оценкой самой воды. Изучение загрязнения является частью проблемы управления водными ресурсами.

Загрязнение подземных вод — это фактор в задаче управления подземными водами, которая в свою очередь сама является частью проблемы управления водой. Таким образом, загрязнение подземных вод нельзя рассматривать в отрыве от других экономических аспектов воды.

В предыдущих главах мы видели, что задачи загрязнения имеют вполне удовлетворительные технические решения. Теперь перед нами стоит вопрос: должны ли мы рассматривать загрязнение как экономическую проблему? Так ли дорого бороться с загрязнением? Преодолимы ли финансовые трудности?

Чтобы ответить на эти вопросы сошлемся на пример, приведенный Эмселлемом [78] для речных вод, но, конечно, тем более справедливый для подземных вод. Можно оценить затраты на предотвращение всех поступлений загрязнений в реки Франции и обнаружить, что эта стоимость довольно небольшая. Человек и его экономическая деятельность заменяется эквивалентным жителем, «стоящим» трех жителей, так что во Франции оказывается 150 миллионов таких «эквивалентных жителей». Средние капитальные вложения на одного эквивалентного жителя составляют 30 долларов. Стоимость поддержания очистных станций составляет около 6% в год от капитальных вложений. Капитальные вложения, таким образом, составят $150 \text{ млн} \times 30 = 4\,500$ млн. долларов.

В целях упрощения задачи программа может финансироваться на долгосрочной основе. Учитывая проценты, которые должны быть уплачены за десять лет, приведенная сумма должна быть удвоена. Это дает $9000/10 + 0{,}06 \times 4500 = 1170$ млн. долларов.

Полученную величину следует сравнить с бюджетом страны, который составляет 4000 млн. долларов. Обработка загрязнений или их складирование не столь дороги, как думают!

Таким образом, проблема состоит не в том, что «загрязнение — трагедия века», так как существуют как технологическое, так и финансовое ее решения. Она относится к числу проблем развития нашего общества и состоит в том, должны ли мы дать приоритет проблемам загрязнения? Если ответ положительный, что само по себе является достаточно хорошим решением, то можем ли мы иметь надлежащие финансовые, административные и технические средства для достижения поставленной цели, не пренебрегая другими первоочередными задачами?

Реальная трудность проблемы — не загрязнение само по себе, а политическое определение национальных целей: программы изучения загрязнения должны быть включены в группу первоочередных задач, обсуждаемых на политическом уровне.

В этой главе приводятся основы комплексных (как технических, так и экономических) исследований по управлению водными ресурсами и описывается методика, которая используется для подготовки технических файлов, являющихся ядром исследований, а также практический экономический подход, который уже успешно используется в решении проблем водных ресурсов. Эта методика является обобщением методики, представленной в главе 3, где она рассматривалась применительно только к задачам загрязнения подземных вод, и кратко описывается математический аппарат, который в ней используется. При экономическом

рассмотрении специфические экономические модели подробно не описываются — это не является целью настоящей книги и должно быть предоставлено экономистам, — но мы даем инженеру, гидрогеологу и физику некоторые простые практические приемы, чтобы помочь им понять и направлять совместное изучение водных ресурсов с учетом факторов загрязнения.

7.1. ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА

Управление водными ресурсами имеет экологический и экономический аспекты. Качество воды может быть выражено количественно введением понятий: содержание загрязнений, диффузия, дисперсия, конвекция и объединением их в иммитационных моделях. Выведенные иммитационные модели обычно используются для прогноза. Это, главным образом, математические модели. Эти модели «количества—качества» занимают место между полевыми работами и экономическими и политическими решениями. Они используются для определения и обработки параметров, определенных в поле, а также для прогноза их изменения при различных рабочих допущениях. Результаты моделирования образуют отправные точки экономических моделей.

В методике четко определены необходимые операции, которые должны быть выполнены от поля до прогнозных моделей с целью оптимизации сбора и обработки полевых данных.

Методика резюмирована в блок-схеме рис. 7.1.1, которая показывает логическую последовательность операций [84].

Операции начинаются с исследований в поле. Они дают два потока информации: численных и нечисленных данных. Численные данные представлены гидрометеорологической, геофизической, гидравлической и химической информацией; нечисленные — информацией о геологии, литологии и структуре.

Эти данные сортируются и используются для идентификации систем. Система определяется ее структурой, параметрами ее элементарных блоков и ее поведением при возмущениях. Следует отметить, что знание структуры и параметров дает возможность определить поведение системы, так же как знание структуры и поведения дает возможность определить параметры. Это очень полезно, так как информация об этих трех характеристиках может быть всегда получена. Отсюда появляется возможность построения и проверки моделей по соответствию между моделью и информацией.

Как только модель построена, может оказаться необходимым из-за недостатка информации вернуться к полевым исследованиям, которые могут быть оптимизированы с помощью ЭВМ. Как только модель выверена, она используется для прогноза поведения гидравлической системы при новых операциях и новых обстоятельствах. Конечно, прогноз должен проверяться, для чего должны быть созданы и оптимизированы с помощью ЭВМ средства контроля.

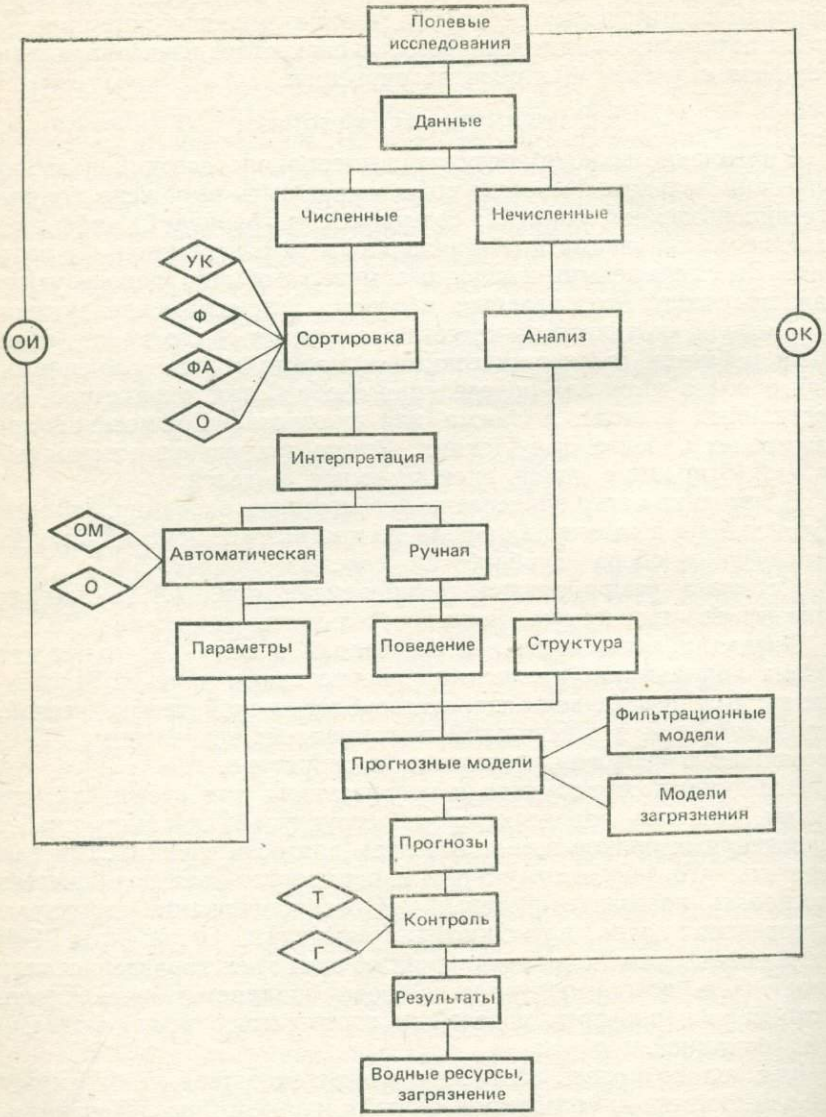


Рис. 7.1.1. Блок-схема общей методики.

УК — универсальный крайкинг; Ф — фильтрация; ФА — факторный анализ; О — обращение; ОМ — обратные методы; ОИ — оптимизация исследований; ОК — оптимизация контроля; Т — трассеры; Г — геофизика

Таким образом, методика должна включать две части: 1) подготовку и обработку информации, 2) построение и использование моделей.

Различие между этими двумя аспектами фундаментальное, так как построение и использование моделей должно включать систему контроля для локализации ошибок в имеющихся данных и в принятой при моделировании структуре интерпретации. В разделе 7.2 рассматриваются различные средства, используемые при подготовке и обработке информации, а в разделе 7.3 описываются принятые модели.

7.2. ПОДГОТОВКА И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Блок-схема включает четыре блока, которые абсолютно необходимы для обоснования и использования моделей: 1) идентификация системы; 2) сортировка численной информации; 3) структуризация вычисленной информации; 4) оптимизация систем исследований и контроля. Далее приводится некоторая информация о различных средствах, которые должны применяться в пределах каждого блока.

7.2.1. Идентификация системы

Поведение системы при возмущении определяется двумя возможными способами.

1. Система исследуется изнутри, чтобы определить ее строение и измерить значения ее характерных параметров. Затем наблюдением за поведением системы и рассмотрением физических законов, управляющих явлениями в системе, устанавливаются зависимости между этими параметрами. Строится модель, которая отражает действительность настолько точно, насколько это возможно.

2. Исследователь не пытается понять физику системы. Он рассматривает систему как черный ящик и измеряет отклик системы на заданное внешнее возмущение. Этот метод возрастающего перекрытия, применение которого представляет собой анализ импульсных переходных характеристик или обращение. Он состоит в оценке значения неизвестного переменного, которое наилучшим образом удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных во всей области, затем рассматривается расчленение области на подобласти и для каждой подобласти вычисляются средние значения, наилучшим образом удовлетворяющие уравнению в частных производных. Процесс повторяется путем расчленения подобластей. Основная идея этого метода заключается в том, что исходные данные содержат ошибки, неодинаково распределенные в пространстве или времени; любое локальное изменение оценки параметра влечет за собой такое же изменение параметров повсюду, что сглаживает грубые локальные

ошибки и обеспечивает численную устойчивость. Этот метод был применен к обратным задачам, таким как определение водопроводимостей по пьезометрическим данным [82], и к задачам обращения, таким как определение единичных гидрографов [81].

Поведение системы может быть определено количественно типовыми кривыми по данным испытаний системы методом импульсных переходных характеристик. Этот метод подробно рассматривался в разделе 5.3.

7.2.2. Сортировка численной информации

Как только структура информации определена, она сортируется, для чего могут быть использованы различные методы.

Универсальный крайгинг. Крайгинг — это метод оценки, введенный Ж. Матероном [187, 189, 190] * в приложениях к горному делу. Метод дает наилучший возможный линейный оператор оценки блока с учетом всей имеющейся информации, т. е. результатов испытания разнообразных отобранных проб внутри, так и вне данного блока. Крайгинг приписывает вес каждому испытанию образца; эти веса подсчитываются для того, чтобы минимизировать результирующие оценки отклонений в соответствии с геометрическими характеристиками задачи (форма, размеры, относительное положение блока и образцов). Интуитивно малый вес должен быть приписан дальним образцам и наоборот, за исключением сложных случаев.

Эффективный расчет оптимальных весов, присущих образцам, базируется на определенных допущениях о структурных особенностях изучаемого рудного тела, в основе которых лежит вариограмма случайной функции, реализацией которой является набор точечных испытаний.

Такая случайная функция, названная Матероном пространственной случайной переменной, является функцией пространства, значения которой изменяются от одной точки к другой с некоторой непрерывностью и изменчивость которой не может быть представлена экстраполирующим математическим законом. Например, реализацией такой пространственной переменной является ряд глубин дна моря, полученных промером с корабля.

Экстремальный случай пространственной переменной имеет место, когда ее значения, взятые в любых двух точках, являются независимыми. Возможны все промежуточные структурные случаи вплоть до полной организации пространства.

Наиболее важным инструментом для описания этих структурных случаев является вариограмма. Возьмем x и $x + h$ — две точки пространства (одно-, дву- или трехмерного) и поставим им в соответствие $f(x)$, $f(x + h)$ — величины пространственной

---

* Ж. Матерон. Основы прикладной геостатистики. М., Мир, 1968 — *Прим. ред.*

переменной f. Вариограмма, вернее полувариограмма, является функцией $\gamma(h)$, определяемой следующим образом:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[f(x+h) - f(x)]^2,$$

где $E(x)$ — математическое ожидание величины x.

Принимая очевидную гипотезу, т. е., что для любого вектора h приращение $f(x_0 + h) - f(x_0)$ имеет ожидание и случайную составляющую, которые не зависят от опорной точки x_0', мы видим, что γ не связана с каким-либо особым положением x, а связана с приращением между двумя движущимися точками x, $x + h$. Вариограмма помогает количественно оценить, что происходит в одной точке, по тому, что в среднем происходит на отрезке h и наоборот. Она количественно определяет понятие зоны влияния образца и строения тела в основном по поведению ее около нуля и в бесконечности.

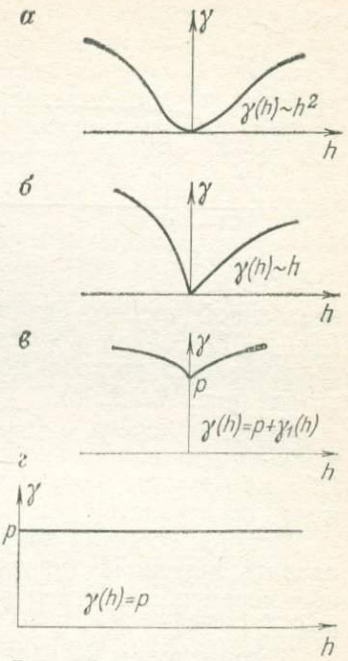


Рис. 7.2.1

1. Непрерывность и регулярность в пространстве f выражается поведением $\gamma(h)$ вблизи нуля. Грубо говоря, имеется четыре случая (рис. 7.2.1):

а) параболический тренд: $\gamma(h)$ дважды дифференцируема при $h = 0$, $f(x)$ тогда дифференцируема и весьма регулярна (в среднеквадратичном *);

б) линейный тренд: $\gamma(h)$ непрерывна, но недифференцируема при $h = 0$, f непрерывна (в среднеквадратичном), но недифференцируема и значительно менее регулярна;

в) эффект самородка: $\gamma(h)$ не стремится к нулю, когда h стремится к нулю, f не является непрерывной даже в среднеквадратичном;

г) $f(x)$ и $f(x + h)$ является независимыми для любых двух определенных точек; это «белый шум» физиков.

2. Поведение γ в бесконечности показывает связь между блоками изучаемых систем: если вариограмма заканчивается гори-

---

* Случайная функция $y(x)$ называется непрерывной в среднеквадратичном, если мы имеем $E[\{Y(x+h) - Y(x)\}^2] \to 0$ при $h \to 0$.

В одномерном пространстве мы определяем случайную функцию $Y'(x)$ как производную в среднеквадратичном смысле от случайной функции $Y(x)$, если $E[\{[Y(x+h) - Y(x)]/h - Y'(x)\}^2] \to 0$ при $h \to 0$.

Имеются подобные определения для n-мерных пространств при $n > 1$.

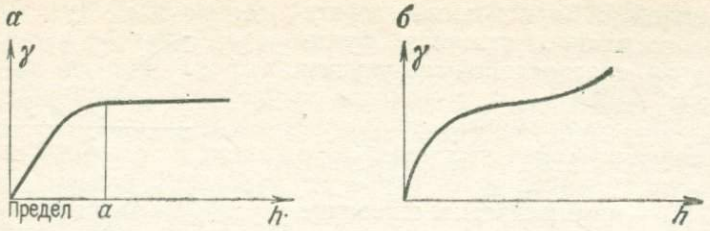


Рис. 7.2.2

зонтальной частью, начинающейся с предела a (рис. 7.2.2., $а$), $f(x)$ и $f(x+h)$ не коррелируются для $h > a$; если вариограмма заканчивается восходящей частью, то имеется пространственный тренд (рис. 7.2.2, $б$).

Конечно предел a будет зависеть от направления вектора h и обнаружит направления преимущественного изменения в поле. Обычно различное поведение вариограмм в различных направлениях пространства указывает на анизотропию.

Матерон обобщил крайгинг в универсальный крайгинг, чтобы оценить тенденцию (иногда называемую трендом) пространственных переменных. Тренд функции $f(x)$ есть ее априорное ожидание $E[f(x)]$.

В применении к гидрогеологии и загрязнению крайгинг прежде всего дает планы величин, измеренных в дискретной системе точек (например, если концентрации загрязнителей измеряются в ряде точек в данное время t, то крайгинг дает непрерывное распределение концентраций в пространстве в момент времени t. Крайгинг, в отличие от метода простой интерполяции, дает структуру явления в пространстве, оценку «белого шума» и ее ошибку, т. е. показывает, как надежна оценка во всем пространстве. Далее отметим важность его для оптимизации сетей измерения и для оптимального определения отсутствующих данных.

Фильтрация. Измерения реальных величин, которые содержат информацию и шум, всегда сопровождаются экспериментальными ошибками. Экспериментальные данные должны быть профильтрованы путем использования информации о сигнале (регулярности, частоте, энергии) и о шуме (нулевые средние или оценка стандартного отклонения шума).

Могут быть использованы крайгинг и стандартные статистические методы. Данные обычно используются в моделях; должен быть выполнен анализ чувствительности моделей к ошибкам, теоретический пример которого рассмотрен в главе 8.

Факторный анализ соотношений. Измерения данного явления приводят к выделению отдельных индивидуумов (измеряемых объектов), которые определяются рядом свойств (измерений): например, ряд измерений уровней на данные даты (свойства)

для группы пьезометров (индивидуумы), или ряд химических анализов (свойства) группы проб воды (индивидуумы).

Анализ соотношений представляет индивидуумы и их свойства точками, а группы точек, объединенные в «облака», показывают организацию системы. «Облака» и их дисперсия дает необходимые параметры и грубость интерпретации структуры при данной обработке [23].

В задачах загрязнения форма такого анализа, называемая факторным анализом устойчивости и эволюции, применяется для того, чтобы ввести временную переменную [195]. Она описывает главные особенности развития процесса загрязнения без априорных допущений относительно пространственно-временных соотношений. Кроме того, она делает возможным сравнения теоретических и наблюдаемых пространственных эволюций процесса со случайными местными флюктуациями.

Факторный анализ соотношений может быть использован для решения следующих вопросов.

1. Описательный анализ причин и следствий с помощью определения главных осей инерции «облаков» и минимального числа переменных, представляющих систему с достаточным диапазоном изменений; это — фильтрация, которая сглаживает шум. Группируются индивидуумы с подобными профилями, которые образуют группы индивидуумов и группы свойств.

2. Структурный анализ по эллипсам. Свойство фиксируется для группы индивидуумов, их «облака» имеют оси инерции, которые проектируются на факториальную плоскость и представляются эллипсами. Эти эллипсы можно классифицировать, чтобы усовершенствовать структуризацию данных.

3. Структурный анализ на основе факторного анализа соотношений вариограмм. Когда несколько переменных измеряются одновременно, важно определить сравнимые зоны и оценить, какой измеренный фактор порождает вероятное отклонение. В каждой зоне рассчитывается локальная вариограмма. Локальные вариограммы затем классифицируются на основе анализа соотношений, что дает возможность выделить зоны, однородные по строению. Конечно, такой процесс должен применяться с осторожностью, хотя он сейчас автоматизирован.

Обращение. Измерение некоторой величины делается с помощью экспериментальных средств. Если это средство измеряет не точечные значения, а определяет и интегрирует все значения около исследуемой точки, необходимо обработать результаты, чтобы получить реальные величины в этой точке. Например, при исследованиях радиоактивности в водоносном горизонте [117] зонд не дает значений в точке, а интегрируют радиоактивность в грунте около этой точки. Обычно можно допустить, что операция линейна и является сверткой; пространственные свойства способа измерения описываются некоторыми функциями $f(x)$, действительные

значения — функцией $E(x)$ и наблюденные значения — $s(x)$, f, E и s удовлетворяют зависимости:

$$s(x) = \int_S f(x - t)\, e(t)\, dt,$$

где S — пространство, в котором производятся измерения.

Задача тогда заключается в том, чтобы, зная f и s, определить e, пространственное распределение реальных величин; конечно, сначала надо определить f как функцию способа измерения, называемую импульсной переходной характеристикой системы (s равно f, если e есть δ — функция Дирака). Задача решается методом обращения, кратко описанным в разделе 5.4.2.

7.2.3. Структуризация нечисленной информации

В большинстве случаев информация является как численной, так и нечисленной. Например, во время эксперимента по загрязнению необходимы гидрогеологические параметры водоносного горизонта, но так как их определения дороги, мы должны использовать геологические и литологические описания грунтов, полученные из прямых полевых исследований.

Количественное представление этих данных невозможно, но именно эти нечисленные данные дают верхний и нижний пределы параметров модели. Например, можно выделить классы грунтов, для которых определены диапазоны изменения гидрогеологических параметров и параметров загрязнения. Затем при хорошем опыте отнести к тому или иному классу и, таким образом, сократить диапазон оценки его параметров. Такой анализ приведен в главе 3 с целью распространить результаты, полученные на данной площади, на другие площади, пользуясь геологическими аналогиями.

7.2.4. Оптимизация разведочных и режимных сетей

Оптимизация разведки. Полевые данные используются для построения имитационных и прогнозных моделей и на каждом этапе исследований задача состоит в том, чтобы определить, достаточно ли имеющейся информации и достаточно ли она точна, т. е. достаточно ли точных измерений, чтобы построить «выразительную» модель.

Например, рассмотрим пьезометрические измерения в водоносном горизонте; оптимизация исследований характеристик водоносного горизонта (пьезометрические уровни) состоит в оценке минимального числа точек измерения (скважин), чтобы получить данные сведения о характеристиках.

Оптимизация сначала достигается крайгингом, в основном следующим образом: первоначальная сеть точек измерения подверга-

ется крайгингу и строится план отклонений оценки на площадях, где отклонения оценки больше, чем ожидаемые экспериментальные ошибки, сеть пополняется новыми точками измерения и процесс крайгинга повторяется. Таким образом, крайгинг автоматически выделяет точки, которые максимально улучшают общее представление, и сокращает число точек измерения.

Если состояние знаний уже довольно хорошее, обратные методы и крайгинг могут быть использованы совместно. Например, пьезометрические уровни используются, чтобы определить водопроводимость водоносного горизонта решением обратных задач методом возрастающего перекрытия (см. раздел 7.2.1). В процессе идентификации в подобластях появляются невязки связанные с ошибками интерпретации и эти невязки могут уменьшаться или стабилизироваться во время итерационного процесса; если они стабилизируются, это означает, что имеющаяся информация не может дать большего и что:

— данные ошибочны;
— данные недостаточны по количеству;
— принципы интерпретации неверны.

Наложение планов идентификационных невязок и оценок отклонений показывает на площадях с высокими значениями идентификационных невязок, что: 1) густота пьезометрических измерений недостаточна и необходимо ее увеличить путем бурения новых скважин (большие отклонения); 2) пьезометрические измерения ошибочны (большие отклонения и большая плотность измерений); 3) гидрогеологические сведения о структуре неправильны (небольшие отклонения).

Если и идентификационные невязки и отклонения невелики, значит достигнуты оптимальные условия и работы прекращаются.

Оптимизация режимных наблюдений. Прогнозные модели должны подвергаться проверке в процессе работы; некоторые параметры должны постоянно измеряться, чтобы удостовериться, что прогноз хорош; но измерения дороги и желательно сократить их число (без слишком большой потери информации), сохраняя пока оптимальную сеть измерений, для того чтобы можно было определить информацию, которая не измеряется.

Факторный анализ обеспечивает автоматическую классификацию сравнимых групп измерений и в каждой группе делается только одно измерение, чтобы определить другие. Сокращение числа точек измерения зависит от требуемой точности отсутствующих данных.

7.3. МОДЕЛИ

Как видно из всех разделов этой книги, при обращении к моделям загрязнения (или моделям качества, как их часто называют) требуется знать динамику потока подземных вод и прежде всего скоростей. Иногда скорости определяются непосредственно (в случае изучения локального загрязнения), но в большинстве случаев,

особенно при управлении загрязнением на больших площадях, они должны вычисляться на моделях. Поэтому рассмотрим здесь кратко различные типы возможных гидравлических моделей; но поскольку модели могут быть «решены» без рассмотрения вопросов качества, они даны отдельно от моделей загрязнения.

7.3.1. Гидравлические модели

Гидравлические модели подразделяются на три категории: потока подземных вод, поверхностного потока и потока в ненасыщенной зоне. Для загрязнения подземных вод наиболее важны модели потока подземных вод, использование которых мы детально рассмотрим в главе 9 и дадим их основные характеристики в приложении II. Но поверхностный поток и поток в ненасыщенной зоне определяют граничные условия фильтрационной модели и модели загрязнения подземных вод.

Модели подземных вод. Рассмотрим некоторый кубический элемент водоносного горизонта. Горизонтальный поток воды, проходя через вертикальные поверхности этого элемента, поступает из соседних элементов или в соседние элементы. Эти потоки положительны или отрицательны в зависимости от направления движения. Вертикальный поток воды проходит через горизонтальные поверхности элемента из верхнего и нижнего элементов. Такой поток называется фильтрационным.

Алгебраическая сумма этих потоков называется транзитным потоком. Кроме того, питание из независимых источников, таких как осадки, реки или откачки из скважин, обусловливает поток воды, называемый притоком *, и который принимается положительным, если вода поступает в блок, и отрицательным, если она забирается из блока. В течение некоторого времени блок либо получает, либо теряет некоторое количество воды. Алгебраическая сумма этих количеств называется скоростью пополнения запасов. Основное соотношение для моделирования подземных вод имеет вид:

$$\text{скорость пополнения запасов} = \text{транзитный поток} + \text{приток} \tag{7.3.1}$$

Транзитный поток выражается через проводимости и пьезометрические уровни самого блока и соседних с ним, приток выражается через дебиты откачек или расходы при наливе, испарение и инфильтрацию; изменения накопленной в блоке воды связываются с изменениями уровней через коэффициент водоотдачи. Из-

* В оригинале два понятия обозначены соответственно терминами «transport flux» и «transit flux» (буквально: «транспортный поток» и «транзитный поток»). Это находится в противоречии с терминологией, использующейся в разделе 9.5.1, где вода, перетекающая из блока (элемента) в блок (элемент), называется «transit water» («транзитная вода»), а вода, поступающая в блок (элемент) из скважины и за счет инфильтрации, называется — «transfer water» («привносимая вода»). — *Прим. ред.*

менения накопленной воды характеризуются изменениями пьезометрических уровней во времени. Для бесконечно малого блока (7.3.1) приводит к классическому уравнению фильтрации:

$$\operatorname{div}(T \operatorname{grad} h) = S \frac{\partial h}{\partial t} + Q, \qquad (7.3.2)$$

где h — напор (пьезометрический), S — коэффициент водоотдачи, T — проводимость, Q — интенсивность притока (см. раздел 5.1).

Область применения модели выбирается возможно бо́льшей, чтобы уменьшить влияние ошибок в граничных условиях на исследуемые площади.

Конечно, (7.3.2) является моделью количества, на что указывает использование понятия проводимости. Это региональная модель, и скорости, которые могут быть определены на ней, являются средними рагиональными скоростями. Чтобы моделировать условия локального потока, необходимо уточнение модели и введение в нее понятия проницаемости на основе закона Дарси и уравнения неразрывности. Так или иначе, в локальном масштабе всегда лучше (если это возможно) измерять скорости экспериментально.

Модели поверхностных вод. Для управления водными ресурсами моделируются два типа задач.

1. Прогноз паводков, что представляет собой проблему безопасности; имеется несколько хорошо известных методик, которые базируются на методе импульсных переходных характеристик и свертки. Чтобы определить количество воды, достигающей рек, данные плювиометрии свертываются с некоторой передаточной функцией водосбора.

2. Взаимосвязь подземных и поверхностных вод. Загрязнение подземных вод непосредственно зависит от этой взаимосвязи. Например, загрязнение от санитарных полей фильтрации определяется плювиометрией, скоростью инфильтрации, а также поверхностным стоком. Последний может не только разбавлять загрязнители, но и расширять зону поверхностного загрязнения, изменяя граничные условия потока загрязнения в подземных водах. Необходимо ввести модели, объединяющие потоки подземных и склоновых вод. Для этого используется классическая модель фильтрации (определяемая, например, уравнением (7.3.2.)). Система склоновых вод определяет граничные условия модели подземных вод.

Входом поверхностной системы являются атмосферные осадки. Он свертывается с передаточными функциями поверхностной системы для получения входа модели подземных вод. Последний переносится на подземные блоки с помощью классических уравнений взаимосвязи между блоками модели.

Поток в ненасыщенной зоне. В отношении загрязнения ненасыщенная зона очень важна, так как большинство химических реакций, таких как биодеградация и самоочищение, происходят

в период, когда поверхностные воды проходят через нее. Но закономерности движения загрязнения и особенно его дисперсии при этом неизвестны. Проведенные лабораторные исследования основаны на физических моделях. Удовлетворительной математической модели не существует. Обычно делается очень осторожное допущение, что ненасыщенная зона не влияет на концентрацию загрязнения, а только задерживает поток загрязнителя. Запаздывание рассчитывается по закону Дарси для гравитационного потока с коэффициентом вертикальной проницаемости без дисперсии.

Что касается водных ресурсов, Эмселлем [76] отметил два явления, связанных с поведением ненасыщенной зоны: эксплуатируемые глубокие водоносные горизонты дренируют вышележащие горизонты и ненасыщенную зону. Влажность этой зоны уменьшается из-за понижения уровней грунтовых вод, а это означает, что уменьшается ее проницаемость. Инфильтрация становится тогда более затрудненной и питание также сокращается, что увеличивает скорость снижения уровней грунтовых вод. Водоотбор из глубоких горизонтов может привести к исчезновению болот и поверхностных водотоков, к сокращению питания реки из водоносного горизонта и осушению ее верховьев. Другое явление состоит в том, что вести сельское хозяйство становится все труднее, так как корни растений не достигают воды, и парадокс заключается в том, что часть этой откачанной подземной воды должна восполняться путем ирригации.

7.3.2. Модели загрязнения

В управлении водными ресурсами используются два типа моделей загрязнения: модели загрязнения подземных вод и модели загрязнения поверхностных вод. Модели загрязнения подземных вод детально рассматриваются в других главах книги. В связи с управлением необходимо подчеркнуть одну особенность: эти модели получены по результатам лабораторных исследований механизма дисперсии, тогда как этот механизм должен устанавливаться полевыми методами исследований.

Благодаря взаимосвязи между поверхностными водотоками и водоносными горизонтами загрязнение этих водотоков может вызывать загрязнение водоносного горизонта и наоборот.

Поверхностный водоток определяет граничные условия фильтрационной модели и модели загрязнения подземных вод, которые задаются соответственно пьезометрическим напором и концентрацией загрязнителя. Условия по концентрации представляют собой выход моделей загрязнения поверхностных водотоков. К последним относятся модели: дисперсии, самоочищения и импульсных переходных характеристик.

1. Модели дисперсии имеют такие же характеристики, что и модели дисперсии в подземных водах. Коэффициенты дисперсии

здесь выводятся из представлений о турбулентности. Такие модели пригодны только для консервативного загрязнителя. Для учета окисления, биологических и физико-химических явлений, уменьшающих загрязнение водотоков, применяются модели самоочищения.

2. Классическая модель самоочищения, используемая во многих научных работах, базируется на уравнениях Стритера—Фелпса.

Обозначая через b биологическую потребность в кислороде (в мг/л) и через d дефицит растворенного кислорода (в мг/л), положим:

$$\frac{db}{dt} = -K_1 b, \quad \frac{dd}{dt} = K_1 b - K_2 d, \tag{7.3.3}$$

где K_1 — норма восстановления за сутки и K_2 — норма окисления за сутки и t — время, сут. Интегрирование (7.3.3) дает следующие выражения для d и b как функций времени:

$$b = b_0 C_1 \text{ и } d = K b_0 (C_1 - C_2) + d_0 C_2, \tag{7.3.4}$$

где b_0 и d_0 — соответственно значения b и d при $t = 0$, $C_1 = \exp(-K_1 t)$, $C_2 = \exp(-K_2 t)$, $K = K_1/(K_2 - K_1)$.

Уравнение (7.3.4) описывает самоочищение в водотоке. Если скорость воды постоянная, время t пропорционально пройденному пути. Тогда выражение (7.3.4) может быть записано для новой переменной, которая представляет собой криволинейную абсциссу точки в водотоке. Скорость воды зависит от расхода потока, так же как K_2; кроме того, K_1 и K_2 являются функциями температуры потока. Это вынуждает некоторых авторов разделять водоток на секции длиной порядка нескольких километров, где скорость потока и температура могут быть приняты постоянными.

3. Так как модели дисперсии теряют свой смысл для сравнительно больших расстояний, вводится методика импульсных переходных характеристик [135]: на контрольной станции обнаруживается волна загрязнения; местонахождение источника загрязнения может быть установлено, если существует план, характеризующий суммарные объемы загрязнения, сбрасываемые известными источниками вдоль водотока.

Предварительное экспериментальное определение передаточной функции реки позволяет установить местоположение источников загрязнения путем обращения зарегистрированной волны загрязнения и сравнения результатов с планом возможных объемов загрязнения.

7.4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Значительная работа в данном направлении была проделана Эмселлемом [77—80], который смог по-новому осветить некоторые, казавшиеся простыми, вопросы.

7.4.1. Место управления загрязнениями в общей проблеме управления водными ресурсами

Ранее вопросы загрязнения вод рассматривались отдельно от других экономических аспектов использования водных ресурсов, и основная идея сводилась к следующему: загрязнитель расплачивался за ее загрязнение, а потребитель воды платил за ее использование. Сумма указанных платежей шла на развитие водного хозяйства и борьбу с загрязнением. Размер платежей устанавливался по договоренности с учетом уровня рыночных цен.

В 1964 г. во Франции были организованы шесть бассейновых агентств, в ведение которых стали входить вопросы планирования использования водных ресурсов и борьба с их загрязнением. В совет агентства входят представители местных органов управления, государственные служащие и представители различных секторов экономики. Как видно из рис. 7.4.1, в 1970 г. сумма вышеупомянутых платежей составила всего лишь одну четвертую часть от средств, необходимых на ликвидацию существовавшего в то время загрязнения. Причем, если бы темпы роста этих платежей оставались на неизменном уровне, данный разрыв со временем продолжал бы увеличиваться. Поэтому с целью постепенного сокращения образовавшегося разрыва агентство должно было изменить существовавший ранее порядок платежей (рис. 7.4.2).

Сущность проблемы (рис. 7.4.1 и 7.4.2) заключается в том, что в силу политических и финансовых условий того времени как в пределах отдельных областей, так и в масштабах всей страны борьба с загрязнением не являлась задачей первостепенной важности. Когда устанавливался размер платежей, финансовые возможности деловых кругов и хозяйственная деятельность, при которой используется или загрязняется вода, находились на таком уровне, что первые поступления от платежей оказались недостаточными для существенного уменьшения уровня загрязнения. Другие отрасли экономики воспользовались некоторыми финансовыми возможностями этих деловых кругов и производства. Это означает, что в условиях того времени загрязнение подземных вод еще не выделялось в обособленную проблему, требующую индивидуального подхода. Конечно, вначале многие последствия проектов, связанных с процессами загрязнения, и их взаимосвязь с другими объектами не были известны. Действительно, многие эффекты в экономике воды не всегда и с достаточной очевидностью взаимосвязаны. Для иллюстрации этого факта рассмотрим плотину гидроэлектростанции. Поскольку все электрические распределительные сети взаимосвязаны, ясно, что эта плотина имеет общенациональное значение. Теперь рассмотрим плотину, которая предохраняет от наводнений или служит для орошения сельскохозяйственных земель: ее влияние локальное. Но было бы неправильно вкладывать капиталы в ее сооружение, принимая во внимание только эти локальные эффекты.

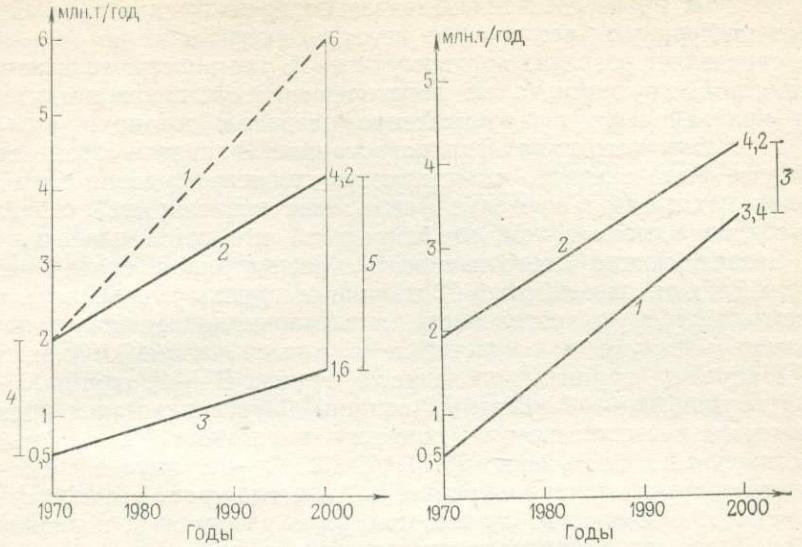


Рис. 7.4.1. Сравнение создаваемого и ликвидируемого загрязнения по данным современного планирования.

1 — создаваемое загрязнение при современном темпе роста (135 000 т/год); *2* — создаваемое загрязнение при темпах роста, учитывающих технологический прогресс (70 000 т/год); *3* — ликвидируемое загрязнение при современном темпе роста (35 000 т/год); *4* — критическая ситуация: остаточные загрязнения в 1970 г. $\left(1{,}5 \frac{\text{млн. т}}{\text{год}}\right)$; *5* — остаточное загрязнение в 2000 г. (2,6 млн. т/год)

Рис. 7.4.2. Планируемое уменьшение уровня загрязнения в водосборном бассейне к 2000 г. (до 80%).

1 — создаваемое загрязнение (70 000 т/год); *2* — ликвидируемое загрязнение (96 000 т/год), *3* — остаточное загрязнение

В хозяйстве страны увеличение степени общественной безопасности или возрастание сельскохозяйственного производства могут вызывать целый ряд финансовых последствий, хотя это неочевидно.

Таким образом, управление процессами загрязнения подземных вод следует рассматривать в качестве составной части более широкой проблемы управления водными ресурсами, которая сама по себе не может быть отделена от других политических целей. Применяемая методика управления водными ресурсами должна в свою очередь учитывать всю имеющуюся информацию относительно управления процессами загрязнения.

7.4.2. Элементы управления водными ресурсами

Основные методики. Управление водными ресурсами включает прежде всего проблему выборов.

1. Выбор приоритетов. Когда ощущается нехватка воды, должна быть составлена классификация различных групп потреби-

телей и их производственной деятельности по приоритетам. Следует подчеркнуть, что наличие источника воды само по себе еще не определяет развитие производственной активности: вода является лимитирующим, а не определяющим фактором развития, по крайней мере в промышленно развитых странах.

2. Выбор источника финансирования. В начале этой главы уже было сказано, что стоимость снижения уровня загрязнения находится в пределах финансовых возможностей страны. Проблема состоит в том, чтобы решить, кто готов платить.

Задачу можно схематизировать, рассматривая страну как черный ящик, охватывающий различные группы населения и их производственную деятельность, и поставив политическую программу развития в соответствие с классификацией объектов. Например, группа A расходует 5, группа B — 9, группа C — 2 и группа D — 13 условных единиц. Спустя некоторое время благодаря естественному механизму экономики A, B, C и D соответственно получают 6, 11, 4, 10. C — в выгоде, A и B остались почти на том же уровне, а D понесла урон. Это означает, что общее руководство страны поощряло развитие C, возможно, потому, что это развитие соответствует общим интересам страны. Эта проблема передачи прав на пользование водой, которая представляет собой политическое стремление развивать C и сдерживать развитие D, ведет к вопросу: действительно ли эта система передачи прав и увеличенный налог на производственную деятельность и на группы потребителей совместимы с такой политикой. Если нет, то надо решить, как изменить экономический, юридический и финансовый инструменты; если да, то необходимо предсказать возникающие трудности, как, например, взаимоотношения с D.

Таким образом, основы методики управления водными ресурсами состоят в следующем: существует несколько политических программ, преследующих осуществление определенных целей путем последовательно принимаемых решений, зависящих от различных возможных капиталовложений. Необходимо исследовать, осуществимы ли эти решения и позволяют ли имеющиеся средства реализовать их при соответствующих финансовых, социологических, технических и юридических возможностях и как эти решения должны быть скорректированы. Тогда анализ последовательностей и средств, характеризующих каждую систему решений, порождает набор искусственных файлов, которые при сравнении друг с другом помогают тем, кто принимает решение, претворяет их в жизнь и несет ответственность за правильный выбор.

Следует подчеркнуть, что на этой стадии никогда не стоит первым вопрос о том, как оптимизировать капиталовложения в проекте развития водного хозяйства. Хорошо поставленная задача всегда подразумевает выбор между несколькими вариантами решений; не экономика водосборного бассейна развивается

ради лучшего использования воды, а вода должна быть использована наилучшим образом при данных предположениях о развитии района.

Элементы планирования. Всю территорию страны следует разбить на однородные в водохозяйственном отношении системы (например, водосборные бассейны). Конечно, каждая из таких систем не должна иметь слишком малые размеры. Одна система при моделировании в региональном масштабе будет разбиваться на блоки, однородные в водохозяйственном, экономическом и административном отношении. Связь между этими блоками будет осуществляться через гидравлические модели и модели загрязнения. Эти модели воспроизводят качественные и количественные потоки и устанавливают соотношения между потребителями, располагающимися выше и ниже по потоку. На образованной сетке проектируется хозяйственная деятельность на различные моменты времени (например, на 1980 и 2000 гг).

После этого производится оценка потребностей района в воде на прогнозный период времени, для чего используются экономические показатели отдельных потребителей. Таким образом, типизация потребителей, выраженная в потребностях по количеству и качеству, проводится на основе реальных данных, собранных в выбранной географической системе. Спецификация потребителей, объединенная с прогнозами уровней деятельности на группу, дает оценку потребности в воде группы и блока сетки. Получается модель циркуляции количественных и качественных потоков, которая является прогнозной моделью.

Необходимо провести сопоставление потребностей и ресурсов. Таким образом, проводится типизация существующих, планируемых и возможных водохозяйственных работ для определения их влияния на гидравлические функции прогнозной модели. Они должны включаться в имитационную модель водохозяйственной системы.

Наконец, проект должен финансироваться. Прежде всего, конечно, необходимо иметь уверенность, что проект может быть полностью реализован. После этого должны быть исследованы все необходимые правовые процедуры, в соответствии с которыми платежи распределяются между источниками финансирования. Путем сравнения передачи прав с целями принятых решений оценивается необходимость внесения в них каких-либо изменений. Такой образ действий отражен в составленной Эмселемом блок-схеме (рис. 7.4.3).

1. Альтернативные политические параметры. Они устанавливаются политическими деятелями, обязанность которых иметь общий взгляд на состояние дел района и его будущее, знать цели и средства его развития. Эти параметры включают социально-экономические предпосылки развития, политику развития и финансовые возможности. Политические деятели должны принять на себя ответственность за соответствие между этими

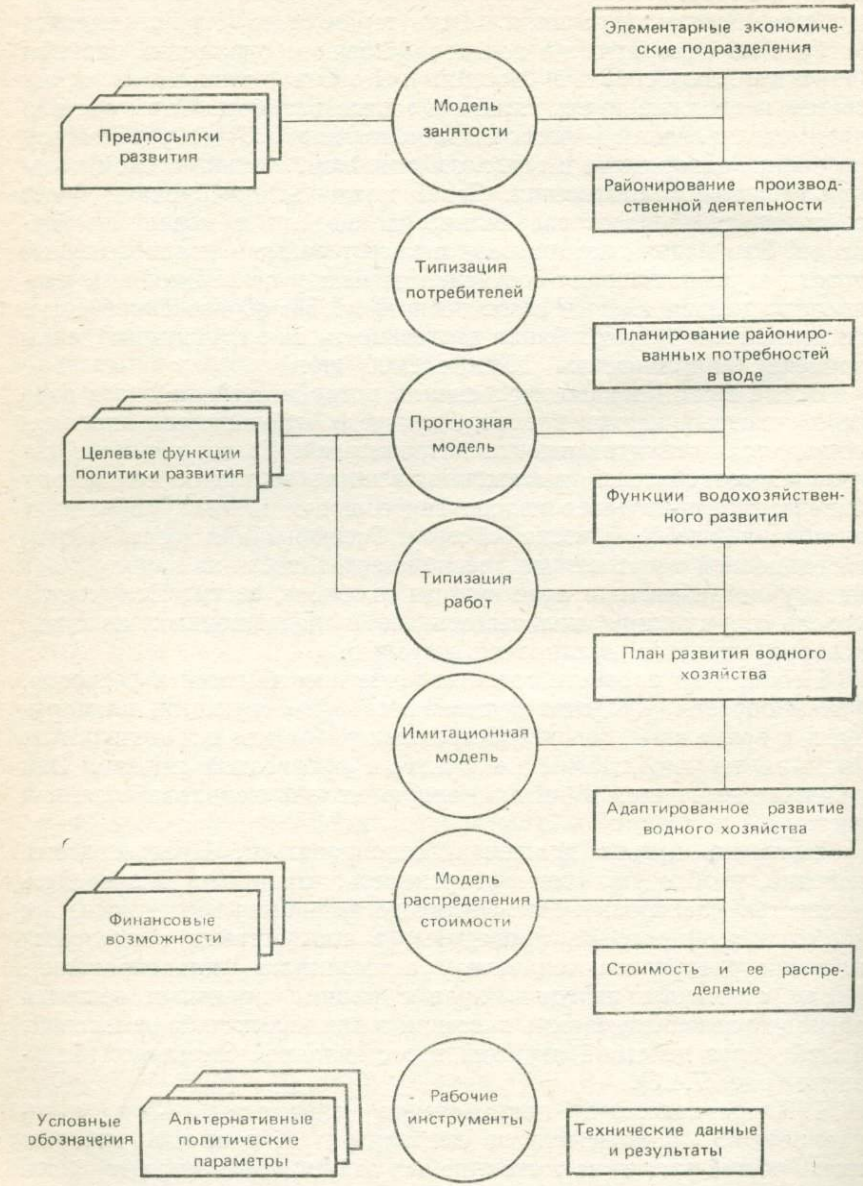


Рис. 7.4.3. Логическая последовательность операционных блоков для управления водными ресурсами

параметрами и приведенной системой трех политических параметров. Конечно, имеется много возможных решений.

2. Инструменты, представленные моделями и типизациями. В их число входят: модель занятости (предполагаемое развитие, выраженное в терминах занятости для определенной группы), прогнозная модель (предполагаемое развитие водного хозяйства с целью удовлетворения известных потребностей) и модель стоимостного распределения (учитывающая возможные изменения в стоимости отдельных проектов и распределение финансирования между отдельными потребителями). Кроме того, могут быть выделены два вида типизаций: типизация потребителей и типизация работ по развитию водного хозяйства.

3. Технические данные и результаты. Это воднохозяйственные решения для данной системы политических параметров.

Конечно, такой подход может привести к бесконечному числу решений, например за счет изменения объемов воднохозяйственных работ. Тогда, чтобы оптимизировать проект водохозяйственного развития при каждом политическом решении, должны быть использованы системы технических параметров, что позволит выбрать приемлемый вариант.

7.4.3. Основные принципы управления водными ресурсами

В заключение этой главы мы предлагаем основные принципы подхода к управлению водными ресурсами на основе альтернативных выборов по Эмселему как образ мышления для экономиста водного хозяйства, инженера и исследователя. Конечно, это не единственный возможный подход, но он дает результаты, которые могут быть прямо применимы в управлении загрязнением подземных вод. Такой подход может служить очень хорошим рабочим инструментом.

Отказ от анализа — стоимости — прибыли (АСП). АСП интересен тем, что вводит унифицированную целевую функцию, которая может анализироваться на ЭВМ. Но он имеет следующие недостатки.

1. Трудно определить и получить путем моделирования такие результаты, которые впоследствии не учитываются: например, налог на промышленность вызывает повышение цен на продукцию, влияет на экспорт и уровень деловой активности.

2. В целях упрощения некоторые аспекты проблемы могут опускаться: например, может рассматриваться только загрязнение, а мы уже видели, что такой подход ошибочен.

3. Время — очень важный фактор, так как оно значительно влияет на цену денег, а следовательно, и на преимущества инвестиционных займов.

4. В целевой функции не рассматриваются ни стресс, ни изменчивость производства. Стресс может быть снят, когда изменчивость производства не достигает своего максимума.

Эти трудности преодолимы, но АСП дает показатель, который представляет собой денежную оценку различных элементов и принимает во внимание только рыночные параметры. Конечно, можно было бы дать оценку идеям или нечисленным параметрам, таким как политика, окружающая среда или условия жизни, но это — нелегкая задача.

Более того, целью этого анализа является оптимальное использование воды, которая рассматривается как единственный конструктивный фактор роста. Это справедливо для засушливых зон, но часто неправильно для индустриально развитых стран, так как в большинстве случаев для индивидуальных потребителей воды это ограничивающий фактор производства, а для групп потребителей вода может использоваться повторно или может быть чем-то заменена.

Наконец, целевая функция должна предоставлять предпочтение коллективам, которое отдается лишь хорошо выраженным коллективам с одним фактором, влияющим на принятие решения. Однако, когда число тех, кто принимает решение, увеличивается и когда индивидуальные интересы расходятся, тогда установить единственную оптимальную целевую функцию очень трудно и нереально. Существует много оптимальных, но совершенно неосуществимых решений.

Принципы. Обычно имеется не один объект и решение принимается не единолично. Метод не должен оптимизировать благополучие, прибыль или какой-либо другой критерий только для одной группы потребителей или хозяйственной деятельности. Чего следовало бы попытаться достигнуть, так это сбалансированного развития различных групп потребителей и видов хозяйственной деятельности в соответствии с законами, действием экономических механизмов и традициями.

Хотя вода и распределяется между потребителями, она должна рассматриваться как общественная собственность: потребители взаимосвязаны и моделирование должно проводиться в пределах географической единицы, выделенной с учетом этой взаимосвязанности. Водосборный бассейн, например, может рассматриваться как подходящая географическая единица для региональных исследований.

Вода характеризуется рядом неупорядоченных географических, механических, физико-химических показателей. Модель должна учитывать различные законы, которые управляют этими количественными и качественными показателями. Действительно, не должно делаться никакого различия между количеством и качеством, так как в большинстве случаев потребности в воде зависят от обоих факторов, рассматриваемых совместно.

Экономическая роль воды зависит от климата: в аридных зонах, например, программы развития могут базироваться на оптимальном регулировании цен на водные ресурсы на национальн-

ном уровне; в странах с умеренным климатом будущие потребности в воде зависят от региональных программ развития.

Но индустриальные страны уже стали осознавать значение экологических проблем. Вода может стать лимитирующим фактором развития. Борьба с загрязнением обычно заменяет одну проблему загрязнения другой, но так как экономический рост вызывает это загрязнение, то критерии роста должны быть дополнены экологическими критериями.

Вследствие загрязнения многие промышленные страны заявляют, что воды недостаточно, даже если они имеют ее в огромных количествах, но, конечно, загрязненной. Такой специфический тип недостатка воды необходимо подчеркнуть особо, чтобы предотвратить серьезные ошибки.

Целью развития могла бы быть не только оптимизация экономического роста, но и оптимизация естественных ресурсов.

Многочисленные водохозяйственные плановые решения соответствуют данной теории социально-экономического развития водосборного бассейна. Метод состоит в том, чтобы помочь сделать политический выбор решения путем сравнения специально разработанных файлов. Каждый файл разрабатывается только для одного политического выбора развития системы групп потребителей воды и хозяйственной деятельности в выделенных географических единицах. Это определяет потребности в воде, которые удовлетворяются системой водохозяйственных работ. Эта система выражает цели развития в водохозяйственных терминах. Водохозяйственные работы затем получают финансирование, а их стоимость распределяется между плательщиками согласно законам передачи прав.

На этом файл заканчивается. Он заключается в сравнении потребностей и ресурсов с учетом влияния загрязнения, распределения налогов и общей стоимости; он определяет невыражаемые количественно преимущества, такие как социально-экономическое развитие, охрана окружающей среды и общая безопасность. Его можно сравнить с другими файлами на основе целей, необходимых средств и последствий. Ничто не оптимизируется как единственный фактор принятия решения. Экономисты и инженеры не заменяют политиков, которые делают окончательный выбор, сравнивая файлы альтернативных решений.

ГЛАВА 8
ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДИСПЕРСИИ. ТЕОРИЯ ТОЧЕЧНОГО РАЗБАВЛЕНИЯ

Излагаемая в этой главе теория является одним из возможных путей решения проблемы изучения и моделирования загрязнения подземных вод, а также определения коэффициентов дисперсии. Эта теория основывается на рассмотрении односкважинного метода и отыскания локальных коэффициентов, когда делается попытка сокращения числа точек измерения. Она показывает возможность расчета коэффициентов операторов диффузии путем постановки серии экспериментов в одной точке среды и обеспечивает точными формулами для их определения.

Теория основана на следующих принципах: задается начальное распределение концентрации в окрестностях точки измерения и проводятся наблюдения в ней за изменением концентрации во времени. По этой концентрации проводится осреднение, взвешенное некоторым образом (в смысле, данном в этой главе), и снова начинается эксперимент, но уже с начальными условиями, более локализованными в окрестности точки измерения. Предел взвешенного осреднения при более локализованных начальных условиях дает коэффициенты дисперсии.

Изучаются последовательно три случая: изотропный оператор дисперсии с постоянными коэффициентами; изотропный оператор дисперсии с изменяющимися коэффициентами; и, наконец, анизотропный оператор дисперсии с изменяющими коэффициентами.

Конечно, учитывается изменение коэффициентов в пространстве, но не во времени. Эта глава завершается изучением устойчивости решений задач дисперсии по отношению к коэффициентам дисперсии, т. е. изучением поведения разности действительного и теоретического решения, рассчитанного с коэффициентом дисперсии, полученным на основе рассматриваемой теории.

8.1. ВВОДНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Эти определения приводятся по Антербергеру [266, 267]. Пусть X — векторное пространство размерности n над R и (Ξ) — его дуальность, $|x|^2$ и dx являются соответственно квадратичной формой и мерой Лебега по x, $|\xi|^2$ и $d\xi$ — соответственно формой и мерой по Ξ. В этой главе мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда $X = R^n$ и $\Xi = R^n$. R^n имеет каноническую структуру Гильбертова пространства.

Определение 1. Пусть S является действительным числом; $H^s(X)$ — пространство распределений $T \in \delta'(X)$ таких, что изображение по Фурье функции $\hat{T}$ удовлетворяет условию:

$$\int_{\Xi} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{T}(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty.$$

Это пространство задается топологией, определяемой нормой:

$$\|T\|_s = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{T}(\xi)\|_{L^2 \Xi},$$

и называется пространством Соболева порядка s.

Определение 2. Пусть m является действительным числом; $(X x \Xi\ m)$ — пространство функций a над $X x \Xi$ с комплексными значениями и принадлежит C^∞ так, что:

$$\forall p,\ q \in N^n,\ \forall M \in N,\ \exists C > 0;$$

$$(1 + |x|^2)^M |D_x^p \partial_\xi^q a(x, \xi)| \leqslant C(1 + |\xi|^2)^{(m - |q|)/2},$$

где

$$p = (p_1, \ldots, p_n),\ q = (q_1, \ldots, q_n),\ D_x^p = \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n},$$

$$\partial_\xi^q = \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{q_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi^n}\right)^{q_n},\ |q| = q_1 + \cdots + q_n.$$

Определение 3. Если $a \in (X x \Xi,\ m)$, то $\mathrm{Op}(a)$ — является оператором, определяемым по $\delta(X)$ формулой:

$$[\mathrm{Op}(a)(u)](x) = \int_{\Xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi.$$

Определение 4. 1) $\in (\Xi,\ m)$ является пространством функций b, C^∞ на Ξ с комплексными значениями, при которых:

$$\forall q \in N^n \exists C > 0:\ |\partial_\xi^q b(\xi)| \leqslant C(1 + |\xi|^2)^{(m - |q|)/2};$$

2) S^m является суммой $\delta(X x \Xi,\ m)$ и $\in (\Xi,\ m)$, тождественной функциональному пространству на $X x \Xi$.

Определение 5. Мы называем оператором порядка $\leqslant m$ некоторый линейный оператор A: $\delta(X) \to \delta'(X)$, который может быть распространен на все s в качестве непрерывного оператора от $H^s(x)$ до $H^{s-m}(x)$; оператором порядка $\leqslant m$ для всех действительных m называют оператор порядка $-\infty$.

8.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФУЗИИ ИЗОТРОПНОГО ОПЕРАТОРА ДИФФУЗИИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Излагаемая ниже общая теория, безусловно, применима к оператору с постоянными коэффициентами. Но результаты общей теории выводятся здесь для случая оператора с постоянными

коэффициентами прямыми методами только на основе классических положений математической физики в объеме, соответствующем большинству учебных курсов для физиков.

Уравнение изотропной дисперсии с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$K\Delta C - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial C}{\partial x^i} + \gamma C = \frac{\partial C}{\partial t},$$

где n — мерность пространства, β_i — компоненты средней скорости потока. Коэффициент γ имеет разное физическое истолкование, например, минус γ — величина, обратная среднему времени распада радиоактивного индикатора.

Л е м м а. Пусть c_τ является модулированным по x решением задачи Коши:

$$K\Delta C = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad c_\tau(x, 0) = \exp[-\pi\tau(x - x_0)^2], \tag{8.2.1}$$

где t и K — действительные и сугубо положительные величины, x_0 принадлежит R^n. Пусть s является действительным числом, заключенным строго между $-n/2$ и 0. Тогда для всех τ справедлива следующая зависимость:

$$\tau^{-s} \int_0^\infty t^{-s-1} C_\tau(x_0, t)\, dt = 2^{2s}\pi^s \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(s + n/2)}{\Gamma(n/2)} K^s. \tag{8.2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для упрощения положим $x_0 = 0$, общий случай немедленно устанавливается перемещением x_0.

Пусть $a^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

Принимая к системе (8.2.1) преобразование Фурье по x

$$-4\pi^2\xi^2 K\hat{c} = \frac{d\hat{c}}{dt}, \quad \hat{c}_\tau(\xi, 0) = \tau^{-n/2} \exp(-\pi\xi^2/\tau),$$

получим:

$$\hat{c}_\tau(\xi, t) = \tau^{-n/2} \exp\left[-\pi\left(4\pi K t + \frac{1}{\tau}\right)\xi^2\right].$$

Путем обратного преобразования Фурье:

$$c_\tau(0, t) = (4\pi K t\tau + 1)^{-n/2}.$$

Подставляя это значение обратно в интеграл (8.2.2) и проводя следующие изменения переменных $\sigma = 4\pi K t\tau$ и $v = 1/(\sigma + 1)$, получим:

$$\tau^{-s}\int_0^\infty t^{-s-1}c_\tau(0,\ t)\,dt = \tau^{-s}\int_0^\infty t^{-s-1}(4\pi Kt\tau + 1)^{-n/2}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty 2^{2s}\pi^s K^s \sigma^{-s-1}(\sigma + 1)^{-n/2}\,d\sigma =$$

$$= 2^{2s}\pi^s K^s \int_0^1 (1 - v)^{-s-1}v^{s+n/2-1}\,dv =$$

$$= 2^{2s}\pi^s K^s B(-s,\ s + n/2) = 2^{2s}\pi^s \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(s + n/2)}{\Gamma(n/2)} K^s, \text{ ч. т. д.}$$

Т е о р е м а. Пусть c_τ является модулированным по x решением задачи Коши:

$$K\Delta C - \sum \beta_i \partial_i C + \gamma C = \frac{\partial c}{\partial t},\quad c_\tau(x,\ 0) = \exp[-\pi\tau(x - x_0)^2], \tag{8.2.3}$$

где τ, K, β, γ — действительные величины; τ и K — сугубо положительные величины, x_0 принадлежит R^n. Пусть s — действительная величина, заключенная строго между $-n/2$ и 0. Тогда для всех $\lambda \leqslant -\gamma$ справедлива следующая зависимость:

$$\lim_{\tau\to\infty} \tau^{-s}\int_0^\infty t^{-s-1}e^{\lambda t}C_\tau(x_0,\ t)\,dt = 2^{2s}\pi^s \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(s + n/2)}{\Gamma(n/2)} K^s. \tag{8.2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о ([101], стр. 47). Положим $x_0 = 0$. Пусть

$$a^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2,\quad ab = \sum_{i=1}^n a_i b_i,\quad dx = dx^1\,dx^2 \ldots dx^n.$$

Применяя к системе (8.2.3) преобразование Фурье по x

$$-4\pi^2\xi^2 K\hat{c} - 2i\pi\beta\xi\hat{c} + \gamma\hat{c} = \frac{d\hat{c}}{dt},\quad \hat{c}_\tau(\xi,\ 0) = \tau^{-n/2}\exp(-\pi\xi^2/\tau),$$

получим:

$$\hat{c}_\tau(\xi,\ t) = \tau^{-n/2}\exp\left(-\pi\frac{\xi^2}{\tau}\right)\exp[(-4\pi^2\xi^2 K - 2i\pi\beta\xi)\,t]\,e^{\gamma t}.$$

Используя обратное преобразование Фурье

$$c_\tau(x,\ t) = (4\pi Kt)^{-n/2}\, e^{\nu t} \int\limits_{R^n} \exp\left[-\pi\tau\,(x-\eta)^2\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{4Kt}(\eta-\beta t)^2\right] d\eta,$$

$$c_\tau(0,\ t) = (4\pi Kt)^{-n/2}\, e^{\nu t} \int\limits_{R^n} \exp\left(-\pi\tau\eta^2\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{4Kt}(\eta-\beta t)^2\right] d\eta.$$

Принимая

$$\xi = \eta - \frac{\beta}{4K\left(\pi\tau+\frac{1}{4Kt}\right)},$$

имеем:

$$c_\tau(0,\ t) = (4\pi Kt)^{-n/2}\, e^{\nu t} \exp\left(-\frac{\beta^2 t}{4K}\right) \exp\left[\frac{\beta^2}{16K^2\left(\pi\tau+\frac{1}{4Kt}\right)}\right] \times$$

$$\times \int \exp\left[\left(-\pi\tau+\frac{1}{4Kt}\right)\xi^2\right] d\xi,$$

или

$$c_\tau(0,\ t) = (4\pi Kt_\tau+1)^{-n/2}\, e^{\nu t} \exp\left(-\frac{\beta^2 t}{4K}\right) \exp\left(\frac{\beta^2 t}{16K^2\pi t\tau+4K}\right).$$

Заменяя $c_\tau\,(0,\ t)$ его значением в интеграле (8.2.4) и полагая $\theta = t\tau$, получим:

$$\int\limits_0^\infty \theta^{-s-1}(4\pi K\theta+1)^{-n/2} \exp\left[(\lambda+\gamma)\frac{\theta}{\tau}\right] \exp\left(-\frac{\beta^2\theta}{4K\tau}\right) \times$$

$$\times \exp\left[\frac{\beta^2\theta}{(16K^2\pi\theta+4K)}\right] d\theta.$$

Обозначим $f\,(\theta,\ \tau)$ как подынтегральную функцию и возьмем τ больше 1. Функция $f\,(\theta,\ \tau)$ является ограниченной независимо от τ интегральной функцией $\theta^{-s-1}\,(4\pi K\theta+1)^{-n/2}\,\exp\,(\beta^2/16K^2)$ так, что, когда τ стремится к бесконечности, функция $f\,(\theta,\ \tau)$ стремится к $\theta^{-s-1}(4\pi K\theta+1)^{-n/2}$. Согласно теореме мажорированной сходимости Лебега и приведенной выше лемме:

$$\int\limits_0^\infty f\,(\theta,\ \tau)\,d\theta \to 2^{2s}\pi^s\Gamma\,(-s)\,\Gamma\,(s+n/2)\,K^s/\Gamma\,(n/2),\ \text{ч. т. д.}$$

Начальное условие $c_\tau\ (x,\ 0) = \exp\,[-\pi\tau\,(x-x_0)^2]$ используется для упрощения интеграла (8.2.4). Результаты могут быть

распространены на функции R^n в R, неограниченно непрерывно дифференцируемые и быстро убывающие, по следующим выражениям:

$$c_\tau(x,\ 0) = c_1\left(x\sqrt{\tau}\right),\quad \hat{c}_\tau(\xi,\ 0) = \tau^{-n/2}\,\hat{c}_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right). \tag{8.2.5}$$

Решение системы (8.2.3) с условиями (8.2.5) имеет вид:

$$c_\tau(x,\ t) = (4\pi K t)^{-n/2}\,e^{\gamma t}\int\limits_{R^n} c_1\left(\eta\sqrt{\tau}\right)\exp\left[-\frac{1}{4Kt}(x-\eta-\beta t)^2\right]d\eta,$$

$$c_\tau(0,\ t) = (4\pi K t)^{-n/2}e^{\gamma t}\int\limits_{R^n} c_1\left(\eta\sqrt{\tau}\right)\exp\left[-\frac{1}{4Kt}(-\eta-\beta t)^2\right]d\eta.$$

Подстановка выражения для $c_\tau^-(0,\ t)$ в интеграл (8.2.4) дает:

$$I = \tau^{-s}\int\limits_0^\infty t^{-s-1}(4\pi K t)^{-n/2}\,e^{(\gamma+\lambda)\,t}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{R^n} c_1\left(\eta\sqrt{\tau}\right)\exp\left\{-\frac{1}{4Kt}(\eta+\beta t)^2\right\}d\eta\right]dt,$$

полагая $t\tau = \theta$ и $\eta\sqrt{\tau} = z$, получим:

$$I = \int\limits_0^\infty \theta^{-s-1}(4\pi K\theta)^{-n/2}\exp\left[(\gamma+\lambda)\frac{\theta}{\tau}\right]\times$$

$$\times\left[\int\limits_{R^n} c_1(z)\exp\left\{-\frac{z+\beta\dfrac{\theta}{\sqrt{\tau}}}{4K\theta}\,dz\right\}\right]d\theta.$$

Используя вторично теорему мажорированной сходимости Лебега, получим (при $\theta + \lambda < 0$):

$$\lim_{\tau\to\infty} I = \int\limits_0^\infty \theta^{-s-1}(4\pi K\theta)^{-n/2}\left[\int\limits_{R^n} c_1(z)\exp\left(-\frac{z^2}{4K\theta}\right)dz\right]d\theta,$$

при $\sigma = 4\pi K\theta$ и $z = y\sqrt{\sigma}$
имеем:

$$\lim_{\tau\to\infty} I = 2^{2s}\pi^s K^s\int\limits_0^\infty \sigma^{-s-1}\left[\int\limits_{R^n} c_1\left(y\sqrt{\sigma}\right)\exp\left(-\pi y^2\right)dy\right]d\sigma;$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\tau^{-s}\int\limits_0^\infty t^{-s-1}e^{\lambda t}c_\tau(x_0,\ t)\,dt =$$

$$= 2^{2s}\pi^s K^s\int\limits_0^\infty \sigma^{-s-1}\left[\int\limits_{R^n} c_1\left(y\sqrt{\sigma}\right)\exp\left(-\pi y^2\right)dy\right]d\sigma.$$

Сопоставления с физическим опытом. Наличие коэффициента $\exp(\lambda t)$, который обеспечивает сходимость интеграла, не изменяет предел (8.2.4). Это означает, что этот интеграл быстро сходится в начальный период времени; нет необходимости проводить длительные эксперименты, и вполне удовлетворительная точность достигается расчетом этого интеграла в пределах довольно короткого промежутка времени.

Принятый здесь тип начального условия обычно можно реализовать экспериментально. Экспериментальная импульсная переходная функция вблизи нуля подобна $\exp(-\pi\tau x^2)$.

8.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПЕРАТОРА ДИФФУЗИИ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

8.3.1. Изотропный оператор диффузии

Рассмотрим оператор диффузии:

$$A = K_{(x)}\Delta + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(x)\frac{\partial}{\partial x} + \gamma(x).$$

Примем, что коэффициенты K, β_j, γ принадлежат C^∞, K — ограничено, как и все его производные до второго порядка, β_j — ограничено, как и все его производные изменения первого порядка и γ — ограничено. Также примем, что K имеет сугубо положительную нижнюю границу. Тогда оператор A является по определению строго эллиптическим.

Согласно Иосиде [279], имеется два действительных числа λ и μ, удовлетворяющие условию $\mu > \lambda$, так что для всех $\alpha > \mu$ оператор $A - \lambda I$ является обратимым и имеет место следующее неравенство:

$$\|(A - \alpha I)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha - \lambda},$$

где $\|\ \|$ — каноническая норма в L^2.

Примем $\nu > \mu$ и положим $c = -A + \nu I$ и $c' = -A + \mu I$, норма $(c' - \alpha I)^{-1}$ существует для $\alpha < 0$ и равна:

$$\|(c' - \alpha I)^{-1}\| = \|\{A - (\mu - \alpha) I\}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\mu - \alpha - \lambda} \leqslant \frac{1}{-\alpha}.$$

Согласно теореме Хилла — Иосиды, $-c'$ представляет собой бесконечно малый генератор стягивающейся полугруппы, т. е.:

$$\|e^{-tc'}\| \leqslant 1,$$

отсюда неравенство:

$$e^{tA} \leqslant e^{\mu}.$$

Л е м м а 1. Интеграл $f(s, c) = \left(\int_0^\infty t^{-s-1} e^{-tc}\, dt\right) \Big/ \Gamma(-s)$ сходится для $\operatorname{Re} s < 0$.

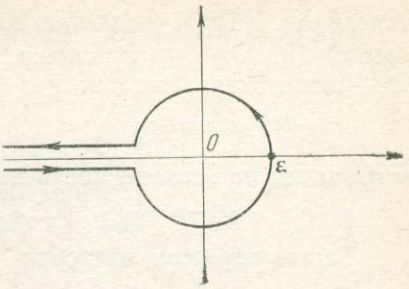


Рис. 8.3.1

Условие $\operatorname{Re} s < 0$ обеспечивает интегрирование в начальной точке. Отметим, что $\| e^{-tc} \| = \| e^{(\mu-\nu)t} \| \| e^{-tc'} \| \leqslant e^{(\mu-\nu)t}$ при $\mu - \nu < 0$. Тогда видно, что $f(s, c)$ является интегрируемой и при бесконечности.

Согласно Силли [245] для $\operatorname{Re}_s < 0$ и при предыдущих условиях по A, оператор c^s может быть определен как:

$$c^s = (-A + \nu I)^s = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma z^s [-A + (\nu - z) I]^{-1}\, dz,$$

где Γ — контур, проходящий от $-\infty$ под действительной осью вокруг начала координат по окружности с радиусом ε и возвращающийся в $-\infty$ над действительной осью (рис. 8.3.1).

Согласно вышеприведенным допущениям, начало координат отнесено к упорядоченному множеству c. Таким образом, существует такое $\varepsilon' > 0$, что $(c - \varepsilon I)^{-1}$ существует при $0 < \varepsilon < \varepsilon'$. Обычное определение $\ln z$ в плане проводится без использования отрицательной полуоси. Тождественность между комплексной степенью оператора c, по определению Силли, и оператором $f(s, c)$ дает доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а. Оператор $f(s, c)$ соответствует оператору C^s.

При заданных условиях $f(s, c)$ и C^s представляют собой голоморфные функции s для $\operatorname{Re} s < 0$. Это достаточно для доказательства эквивалентности при $\operatorname{Re} s < 1$.

Резольвента полугруппы e^{-tC} выражается так:

$$(C - zI)^{-1} = \int_0^\infty e^{-tC} e^{zt}\, dt.$$

следовательно:

$$C^s = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma z^s \left(\int_0^\infty e^{-tC} e^{zt}\, dt\right) dz.$$

Для того чтобы эти два интеграла были коммутативны, достаточно, чтобы интеграл

$$\int_0^\infty \int_\Gamma |z^s| \| e^{-tC} \| e^{(\operatorname{Re} z)t}\, dt\, d\sigma(z)$$

сходился. ($d\sigma(z)$ является элементом криволинейной абсциссы вдоль Γ). Arg z — ограничен, следовательно, $|z^s| < b\,|z|^{\mathrm{Re}\,s}$, где b — константа. Так как $\mathrm{Re}\,s < -1$, то

$$\int |z|^{\mathrm{Re}\,s}\, e^{(\mathrm{Re}\,z)\,t}\, d\sigma(z)$$

ограничен на бесконечности независимо от t. Кроме того,

$$\|e^{-tC}\| \leqslant e^{(\lambda-\nu)\,t} \quad \text{при} \quad \lambda - \nu < 0.$$

Таким образом, интеграл

$$\int_0^\infty \int_\Gamma |z^s|\,\|e^{-tC}\|\, e^{(\mathrm{Re}\,z)\,t}\, dt\, d\sigma(z)$$

сходится. Применяется теорема Фабини и частные интегралы могут быть коммутированы, следовательно:

$$C^s = \frac{1}{2i\pi} \int_0^\infty e^{-tC}\, dt \int_\Gamma z^s e^{zt}\, dz.$$

Формула Ханкеля дает:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma z^s e^{zt}\, dz = \frac{t^{s-1}}{\Gamma(-s)}.$$

Следовательно, тождество между C^s и $f(s, C)$ установлено.

Если $\Phi \in L^2(R^n)$ и $\tau > 0$, то Φ_τ определяется как $\Phi_\tau(x) = \tau^{n/2}\Phi(\tau x)$, так что:

$$\|\Phi_\tau\| = \|\Phi\|, \quad \text{и} \quad \widehat{\Phi}_\tau(\xi) = \tau^{-n/2}\Phi\left(\frac{\xi}{\tau}\right).$$

Лемма 2. Если k действительное число и R оператор δ в δ', так что для каждого действительного числа M, R может быть распространен как непрерывный оператор от $H^M(R^n)$ до $H^{M-K}_{\mathrm{loc}}(R_n)$. Затем, если $-n/2 < M < 0$ и $\alpha \in D$, то существует такое C_1, что $\forall \Phi \in \delta$.

$$\|\alpha R \Phi_\tau\|_{M-k} < C_1 \tau^M (\|\Phi\|_{L^1} + \|\Phi\|_{L^2}).$$

Кроме того, если $k < -n$, то для каждого k из R^n существует такое C_2, что:

$$\forall \Phi \in \delta, \ \sup_K |R\Phi_\tau(x)| < C_2 \tau^M (\|\Phi\|_{L^1} + \|\Phi\|_{L^2}).$$

Доказательство. Для всех $\Phi \in \delta$ при $M < 0$ имеем:

$$\|\Phi_\tau\|^2_M = \tau^{-n} \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^M \left|\widehat{\Phi}\left(\frac{\xi}{\tau}\right)\right|^2 d\xi =$$

$$= \int_{R^n} (1 + \tau^2 |\eta|^2)^M |\widehat{\Phi}(\eta)|^2\, d\eta < \tau^{2M} \int_{R^n} |\eta|^{2M} |\widehat{\Phi}(\eta)|^2\, d\eta <$$

$$< \tau^{2M} \left[\int_{|\eta|<1} |\eta|^{2M} |\widehat{\Phi}(\eta)|^2\, d\eta + \int |\widehat{\Phi}(\eta)|^2\, d\eta \right].$$

Если $M > -n/2$, то $|\eta|^{2M}$ интегрируема. Кроме того, имеем:

$$\|\widehat{\Phi}_\tau\|_{L^\infty} \leqslant \|\Phi\|_{L'}.$$

Следовательно, неравенства примут вид:

$$\|\Phi_\tau\|_M^2 < \tau^{2M}\left(\|\widehat{\Phi}\|_{L^\infty}^2 \int\limits_{|\eta|<1} |\eta|^{2M}\,d\eta + \|\widehat{\Phi}\|_{L^2}^2\right) <$$

$$< C_0\tau^{2M}\left(\|\widehat{\Phi}\|_{L^\infty}^2 + \|\widehat{\Phi}\|_{L^2}^2\right),$$

$$\text{при } C_0 = \sup\left(1, \int\limits_{|\eta|<1} |\eta|^{2M}\,d\eta\right).$$

Так как R — непрерывный оператор от H^M до H_{loc}^{M-k}, то αR также будет непрерывным оператором от H^M до H^{M-k}. Следовательно,

$$\|\alpha R\Phi_\tau\|_{M-k} < C\|\Phi_\tau\|_M < C_1\tau^M(\|\Phi\|_{L^1} + \|\Phi\|_{L^2}).$$

Более того, допустим, что $k \leqslant -n$, тогда $M - k > \frac{1}{2}n$. Для $s > \frac{1}{2}n$, H^s включается в пространство ограниченных непрерывных функций с непрерывным вводом.
Следовательно,

$$\|\alpha R\Phi_\tau\|_{L^\infty} < C_3\tau^M(\|\Phi\|_{L^1} + \|\Phi\|_{L^2}),$$

и доказательством второй части леммы является:

$$\sup_K |R\Phi_\tau(x)| < C_2\tau^M(\|\Phi\|_{L^1} + \|\Phi\|_{L^2}),$$

если α выбирается равным 1 в окрестностях K.

Замечание. Используем предложенный Антербергером [266] результат: задаем $u \in H^s$ при $s > n/2$. Тогда $(1 + |\xi|^2)^{-s/2}$ и $(1 + |\xi|^2)^{s/2}\ \widehat{u}\ \xi$ принадлежат $L^2(R^n)$. Согласно неравенству Шварца, имеем:

$$\int\limits_{R^n} |\hat{a}(\xi)|\,d\xi = \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|^2)^{-s/2}(1 + |\xi|^2)^{s/2}|\hat{a}(\xi)|\,d\xi \leqslant C\|\delta\|_{-s}\|u\|_s,$$

следовательно,

$$\|u\|_{L^\infty} < \|\hat{a}\|_{L'} \leqslant C^1\|u\|_s.$$

Лемма 3. Пусть B является оператором вида:

$$B = \sum_{j=0}^{m} \operatorname{Op}(\tilde{a}_j) + R,$$

где для каждого j, $\tilde{a}_j \in S^{2s-\alpha j}$ при $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots \alpha_n$ ($\tilde{a}j$ (x, ξ) однородность порядка $2s - \alpha_j$ для $|\xi| > 1$) и R является оператором (псевдодифференциальным или нет) порядка $< -n$ *. Предположим $-n/2 < s < 0$. Пусть k является наибольшим целым $\leqslant m$, так что $2s - a_j > -n$ для $j \leqslant k$ и оператор B_j определяется так:

$$(B_j u)(x) = \int a_j(x, \xi)\, \hat{u}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi, \quad u \in \delta,$$

где a_j совпадает с $\tilde{a}_j$ для $|\xi| \geqslant 1$ и является однородностью степени $2s - a_j$ для $|\xi| \neq 0$. Используем функции $\Phi_\tau(x) = \tau^{n/2}\Phi[\tau(x - x_0)]$. Тогда, для каждого $M > -n/2$ и для каждого $x_0 \in R^n$ существует такая постоянная $C > 0$, что для любого распределения $H^r(R^n) \cap L'$ с $r \geqslant 0$ и $r > n/2 + 2s$ любого числа $\tau > 1$ имеем:

$$B\Phi_\tau(x_0) = \sum_{j=0}^{k} \tau^{n/2+2s-\alpha_j} B_j(\Phi)(x_0) + R_\tau(\Phi)(x_0),$$

где

$$|R_\tau(\Phi)(x_0)| \leqslant C\tau^M(\|\Phi\|_{L'} + \|\Phi\|_{L^2}).$$

Доказательство. Дадим доказательство при $x_0 = 0$. Оно справедливо для любой точки x_0 благодаря смещению Φ. Приведем три замечания.

1. Если Φ (также и Φ_τ) $\in H^r$ с $r > n/2 + 2s$, то $B\Phi_\tau(0)$ определяется. B — оператор порядка $2s$. Для каждого значения $\alpha \in D(R^n)$ существует такое $C > 0$, что для каждого $u \in \delta(R^n)$ справедливо:

$$\|\alpha B u\|_{r-2s} < C\|u\|_r.$$

Более того, так как $r - 2s > n/2$, то:

$$\|\alpha B u\|_{L^\infty} < C\|\alpha B u\|_{r-2s},$$

и Bu — непрерывная функция.

B может быть распространен как непрерывный оператор от H^r в пространство непрерывных функций.

2. Если $j < k$, то $2s - a_j > -n$ и, следовательно, $a_j(x, \xi)$ является интегрируемой по $d\xi$ в области, прилегающей к $\xi = 0$. Это позволяет определить оператор B_j, хотя его символ имеет особенность в начальной точке. Более того, $\tilde{B}_j - B_j$ действует от $H^{-\infty}$ до C^∞ как ее центр:

$$K(x, y) = \int |\tilde{a}(x, \xi) - a(x, \xi)\, e^{2i\pi(x-y)\xi}\, d\xi$$

принадлежит всюду C^∞.

---

* Т. е. действующим от $H^t(R^n)$ до $H^{t+n}_{\text{loc}}(R^n)$ для каждого действительного t.

Замечание 1 показывает, что $B_j\Phi_\tau(0)$ также хорошо определен, когда $\Phi \in H^r$ с $r > n/2 + 2s$.

3. $B_j\Phi(0)$ обычно задается формулой:

$$B_j\Phi(0) = \int a_j(0, \xi)\,\widehat{\Phi}(\xi)\,d\xi,$$

где Φ — распределение $H^r(R^n) \cap L'$ с $r > n/2 + 2s - a_j$.

Определение с помощью этой формулы правомерно, когда Φ принадлежит δ и обе части этого равенства непрерывно зависят от Φ для нормы $H^r \cap L'$. Для левой стороны равенства это вытекает из замечаний 1 и 2. Для правой стороны, принимая во внимание, что $a_j(0, \xi)$ принадлежит C^∞ для $|\xi| \neq 0$ и что $\widehat{\Phi}$ измеримо, запишем:

$$\int a_j(0, \xi)\,\widehat{\Phi}(\xi)\,d\xi = \int\limits_{|\xi|<1} a_j(0, \xi)\,\widehat{\Phi}(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{|\xi|>1} a_j(0, \xi)\,\widehat{\Phi}(\xi)\,d\xi,$$

$$\left|\int\limits_{|\xi|<1} a_j(0, \xi)\,\widehat{\Phi}(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \|\Phi\|_{L^1} \int\limits_{|\xi|<1} |a_j(0, \xi)|\,d\xi$$

и интеграл $\int\limits_{|\xi|<1} |a_j(0, \xi)|\,d\xi$ сходится:

$$\left|\int\limits_{|\xi|>1} a_j(0, \xi)\,\widehat{\Phi}(\xi)\,d\xi\right| \leqslant C \int (1 + |\xi|^2)^{s-\alpha_j/2}\,|\widehat{\Phi}(\xi)|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C \int (1 + |\xi|^2)^{s-\alpha_j/2}(1 + |\xi|^2)^{-N/2}(1 + |\xi|^2)^{N/2}\,|\widehat{\Phi}(\xi)|\,d\xi.$$

Согласно неравенству Шварца, имеем

$$\left|\int\limits_{|\xi|>1} a_j(0, \xi)\,\widehat{\Phi}(\xi)\,d\xi\right| < C\left|\int (1 + |\xi|^2)^{2s-\alpha_j-N}\,d\xi\right|^{1/2} \times$$

$$\times \left|\int (1 + |\xi|^2)^N\,|\widehat{\Phi}(\xi)^2\,d\xi\right|^{1/2} < C\|(1 + |\xi|^2)^{s-\alpha_j/2-N/2}\|_{L^2}\,\|\Phi\|_N.$$

Задавая N таким образом, что $n + 2s - \alpha_j < N < r$

$(1 + |\xi|^2)^{s-\alpha_j/2-N/2} \in L^2$ и $\|\Phi\|_N \leqslant \|\Phi\|_r$.

Отсюда неравенство:

$$\left|\int a_j(0, \xi)\,\widehat{\Phi}(\xi)\,d\xi\right| \leqslant C\,|\,\|\Phi\|_r + \|\Phi\|_{L^1}\,|.$$

Теперь докажем лемму 3.

$B - \sum\limits_{j\leqslant k} B_j$ проверяется условиями леммы 1:

$$B - \sum_{j\leqslant k} B_j = \sum_{j\leqslant k} B_j + \sum_{j=k+1}^{m} \widetilde{B}_j + R - \sum_{j\leqslant k} B_j =$$

$$= \sum_{j\leqslant k} (\widetilde{B}_j - B_j) + \sum_{j=k+1}^{m} \widetilde{B}_j + R.$$

Согласно замечанию 2, $\sum (\widetilde{B}_j - B_j)$ действует от $H^{-\infty}$ до $C^{\infty *}$, $\sum\limits_{j=k+1}^{m} B_j$ является оператором порядка $\leqslant -n$ определением по k, R примем за оператор порядка $\leqslant -n$.

Таким образом, в соответствии с леммой 2, имеем:

$$\left| B\Phi_\tau(0) - \sum_{j\leqslant k} B_j \Phi_\tau(0) \right| \leqslant C_2 \tau^M (\| \Phi \|_{L^1} + \| \Phi \|_{L^2}).$$

$B_j \Phi_\tau(0)$ можно вычислить по формуле:

$$B_j \Phi_\tau(0) = \int a_j(0, \xi)\, \widehat{\Phi}_\tau(\xi)\, d\xi = \int a_j(0, \xi)\, \tau^{-n/2}\, \widehat{\Phi}\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi =$$

$$= \tau^{n/2} \int a_j(0, \tau\eta)\, \widehat{\Phi}(\eta)\, d\eta = \tau^{n/2+2s-\alpha_j} \int a_j(0, \eta)\, \widehat{\Phi}(\eta)\, d\eta =$$

$$= \tau^{n/2+2s-\alpha_j} B_j \Phi(0),$$

которая завершает доказательство леммы 3.

На этом этапе особое значение приобретает следующее замечание, определяющее связь с экспериментальной дисперсией: по $R\Phi_\tau$ делаются только локальные оценки (или даже точечные). Таким образом, всегда возможно заменить R значением αR C $\alpha \in D$ и приравнять к 1 в окрестности x_0. Нет необходимости предполагать какое-либо уменьшение по x в символах. Если учитываются только начальные данные Φ_τ с компактным покрытием (для $\tau > 1$), то остаток $R\Phi_\tau(x_0)$ оценивается так:

$$| R\Phi_\tau(x_0) | \leqslant C\tau^M \| \Phi \|_{L^2},$$

Для некоторого компактного множества K существует такая константа C, что для любой функции u от L^2 и с ее покрытием в K имеем:

$$\| u \|_{L^1} \leqslant C \| u \|_{L^2},$$

---

* Кратко напомним: $H^{\infty}_{\text{loc}} = \bigcap H^{s}_{\text{loc}} = C^{\infty}$.

1) H^{∞}_{loc} C C^{∞} : f C H^{∞}_{loc}, $\forall$ α C D, αf C $C^{\infty} \Rightarrow f$ C C^{∞} (принимая $\alpha = 1$);

2) C^{∞} C $H^{\infty}_{\text{loc}} f$: C C^{∞}, $\forall$ α C D, αf C D C δ C $H^{\infty} \Rightarrow f$ C H^{∞}_{loc}.

т. е. согласно неравенству Шварца:

$$\int_{R^n} u\,dx = \int_K u\,dx \leqslant \left(\int_K dx\right)^{1/2} \left(\int_K u^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant C \| u \|_{L^2},$$

Благодаря этому появляется возможность принимать в расчет начальные ступенчатые функции, имеющие определенный физический смысл.

Применим лемму 3 к оператору $B = (-A + \nu I)^s$ с $-n/2 < s < 0$, используя следующие результаты, полученные Силли [245].

Пусть имеется действительная последовательность $(\alpha_j)_j \geqslant 0$, возрастающая к $+\infty$, так что $\forall_j$, $a_j(x, \xi)$ является функцией C^∞ от x и ξ, с однородностью порядка $2s - \alpha_j$ для $|\xi| \geqslant 1$ и характеризуется следующими свойствами:

1) для всех N существует такое n, что оператор $B - \sum_{j=0}^{m} \mathrm{Op}(a_j)$ применим для каждого действительного t от $H^t(R^n)$ до $H^{t-N}_{\mathrm{loc}}(R^n)$;

2) для $|\xi| \geqslant 1$, $a_0(x, \xi) = [K(x)^s/(4\pi^2|\xi|^2)^s$.

Различные предварительные результаты дает следующая теорема, которую с целью упрощения приведем для случая изотропного оператора, т. е. с $a^{ij}(x) = k(x)\,\delta_{ij}$.

Т е о р е м а. Пусть оператор диффузии имеет вид:

$$A = K(x)\,\Delta + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} + \gamma(x).$$

Примем, что коэффициенты K, β_i, γ принадлежат C^∞; K и его производные (порядка $\leqslant 2$) ограничены; β_i и его первая производная ограничены и γ также ограничено. Кроме того, K ограничено сугубо положительным числом.

λ является таким действительным числом, что для каждого $\alpha > \mu$, $(A - \alpha I)$ обратимы и неравенство

$$\| (A - \alpha I)^{-1} \| \leqslant (\alpha - \lambda)^{-1}$$

имеет силу, где норма является канонической в L^2. Выберем $\nu > \mu$ и s таким действительным числом, что $-n/2 < s < 0$.

Существует целое число $k > 0$, возрастающая последовательность $(\alpha_j)_1 \leqslant j \leqslant k$ положительных чисел и последовательность $(B_j)_1 \leqslant j \leqslant k$, так что:

1) для каждого $r > n/2 + 2s$, B_j — является линейным (псевдодифференциальным) оператором по $H^r(R^n)$, принимающим свои значения в пространстве непрерывных функций; 2) для каждого M такого, что $-n/2 < M < 0$, для каждого $x_0 \in R^n$ и для каждого компакта K существует такая константа $C > 0$, что для каждого распределения Φ с его покрытием, заключенным в K и относимым

к H^r (при $r \geqslant 0$ и $r > n/2 + 2s$), и для каждого действительного $\tau > 1$, имеем (принимая $\Phi_\tau(x) = \tau^{n/2}\Phi[\tau(x - x_0)]$):

$$\frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^\infty t^{-s-1} e^{-\nu t} \left(e^{tA}\Phi_\tau\right)(x_0)\, dt =$$

$$= \tau^{n/2+2s} \int_{R^n} [K(x_0)]^s (4\pi^2 |\xi|^2)^s \hat{\Phi}(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \tau^{n/2+2s-\alpha_j} B_j(\Phi)(x_0) + R_\tau(\Phi)(x_0),$$

где

$$|R_\tau(\Phi)(x_0)| \leqslant C\tau^M \|\Phi\|_{L^s}.$$

Это приводит к следующей формуле:

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau^{-n/2-2s}}{\Gamma(-s)} \int_0^\infty t^{-s-1} e^{-\nu t} \left(e^{tA}\Phi_\tau\right)(x_0)\, dt =$$

$$= [K(x_0)]^s \int_{R^n} (4\pi^2 |\xi|^2)^s \hat{\Phi}(\xi)\, d\xi,$$

которая весьма необходима для определения коэффициентов высших порядков.

Условия леммы 3, конечно, могут быть применены к уравнениям с постоянными коэффициентами. Так, например, точная формула для K в начале координат выводится на основании начального условия $\Phi_\tau(x, 0) = \exp(-\pi\tau|x|^2)$:

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau^{-s}}{\Gamma(-s)} \int_0^\infty t^{-s-1} e^{-\nu t} \left(e^{tA}\Phi_\tau\right)(0)\, dt =$$

$$= [K(0)]^s (4\pi^2)^s \int |\xi|^{2s} \exp(-\pi|\xi|^2)\, d\xi =$$

$$= [K(0)]^s (4\pi^2)^s \int_0^\infty \omega_n \exp(-\pi r^2)\, r^{2s+n-1}\, dr,$$

где $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ представляет собой сферическую поверхность в R^n. Тогда последнее выражение примет вид:

$$[K(0)]^s (4\pi^2)^s \frac{\pi^{-s}}{\Gamma(n/2)} \Gamma(s + n/2).$$

Последовательной заменой $r^2 = R$ и $\pi R = y$, находим зависимость:

$$\lim_{\tau\to\infty} \tau^{-s} \int_0^\infty t^{-s-1} e^{-\nu t} \left(e^{tA}\Phi_\tau\right)(0)\, dt =$$

$$= [K(0)]^s\, 2^{2s}\pi^s\, \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(s+n/2)}{\Gamma(n/2)},$$

которая аналогична формуле, полученной в разделе 8.2.

8.3.2. Анизотропный оператор диффузии

Рассмотрим оператор:

$$A = \sum_i \sum_j K^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial x^j} + \sum_{i=1}^n \beta_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \gamma(x).$$

Предыдущие результаты и теоремы имеют силу и в этом случае при следующих допущениях.

Предположим, что $K^{ij}(x)$ являются действительными, принадлежат C^∞ и ограничены так же, как их производные до второго порядка, $\beta_j(x)$ принадлежат C^∞ и ограничены так же, как их производные первого порядка; γ принадлежит C^∞ и ограничена.

Предположение строгой эллиптичности подтверждается $a^{ij}(x)$, т. е. существуют такие две положительные константы λ_0 и μ_0, что для всех $x \in R^n$ и для всех $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n)$ справедливо:

$$\mu_0 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 > a^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j > \lambda_0 \sum_{j=1}^n \xi_j^2.$$

Более того, физические соображения, подобные взаимозависимостям Онзагера, показывают, что K^{ij} являются симметричными и, следовательно, могут быть диагонализированы.

1. Предположим, что главные направления дисперсионно-диффузионного тензора неизвестны. Можно непосредственно использовать результаты Иосиды и Силли при данных допущениях и получить такие же леммы и теоремы, как в изотропном случае. Для учета анизотропии должна быть выбрана начальная проверочная функция Φ_τ:

$$\Phi_\tau(x) = (\det a)^{1/2}\, \tau^{n/2} \Phi(\tau a x),$$

где a — правильная матрица (a_{ij}) с постоянными коэффициентами. Здесь Φ_τ будет концентрироваться в начале координат путем изменения только одного параметра τ.

Предыдущая последовательность лемм обнаруживается, если имеют место:

преобразование Фурье $\Phi_\tau(x)$

$$\frac{\tau^{-n/2}}{(\det a)^{1/2}}\,\hat{\Phi}\left(\frac{a^{-1}\xi}{\tau}\right),$$

и обозначение члена высших степеней

$$a_0(x,\ \xi) = (4\pi^2)^s\,[K(x)\,\xi,\ \xi]^s,$$

где

$$[K(x)\,\xi,\ \xi] = \sum_{ij} K^{ij}(x)\,\xi^i\xi^j,$$

и $B_0\Phi_\tau(0)$ может быть рассчитано так же, как это делалось ранее, т. е.

$$B_0\Phi_\tau(0) = \int (4\pi^2)^s\,[K(0)\,\xi,\ \xi]\,\frac{\tau^{-n/2}}{(\det a)^{-1/2}}\,\hat{\Phi}\left(\frac{a^{-1}\xi}{\tau}\right)d\xi =$$

$$= (4\pi^2)^s\,(\det a)^{1/2}\,\tau^{n/2+2s}\int [K(0)\,a\eta,\ a\eta]^s\,\hat{\Phi}(\eta)\,d\eta,$$

(где $[K(0)\,a\eta,\ a\eta] = K^{ij}_{(0)}\,a_i,\ k\eta^k a_{j1}\eta^1$ с учетом правила Эйнштейна.

Для определения коэффициентов $n\ (n+1)\ 2K^{ij}$ можно вычислить интеграл для $n\,(n+1)/2$ матрицы a. Не существует точной формулировки коэффициентов. Метод дает значение коэффициентов дисперсии и главные направления тензора дисперсии.

2. Главные направления тензора дисперсии известны (например, с физическим соображением).

Предыдущие результаты могут быть применены для начальных условий:

$$\Phi_\tau(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/2} \tau^{n/2}\Phi(\tau a x),$$

где $a = (a_i)$ и является правильной матрицей, диагонализированной в собственной системе тензора дисперсии. Формулы являются теми же, что и для общего случая, но расчет упрощается, если Φ_τ концентрируется с τ в главном направлении, соответствующем рассчитываемым коэффициентам. Матрицы a будут иметь доминантную компоненту в этом направлении.

8.4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ОПЫТ

8.4.1. Соответствие между моделью и опытом

Коэффициенты дисперсии определяются из экспериментов с математической моделью, а теория устанавливается при условиях моделирования. Основное допущение при этом состоит в том, что экспериментальные результаты представляют собой результаты моделирования.

Предположим, что начальное условие Φ_τ задается экспериментально с большой точностью. Оно соответствует экспериментальному распределению концентрации $\tilde{c}_\tau(x, t)$ и обычно $\tilde{c}_\tau(x, t)$ не является решением уравнения диффузии, т. е. мы не получаем

$$\frac{d\tilde{c}_\tau}{dt} = A\tilde{c}_\tau.$$

Задача состоит в оценке коэффициентов дисперсии K как функции экспериментальных концентраций $\tilde{c}_\tau$, которые не удовлетворяют уравнению дисперсии. Эта оценка является отчасти произвольной, но так как она представляет собой всего лишь способ определения $\tilde{K}_\tau$, мы должны задавать определенные условия с целью ограничения произвольного характера оценки настолько, насколько это возможно. Подобная оценка приводит к тому, что $\tilde{K}$ представляет собой приблизительное значение K при выполнении следующих условий:

1) функции $\tilde{c}_\tau(x, t)$ представляют собой точные решения, т. е. $A\tilde{c}_\tau = dc_\tau/dt$, где

$$A = \sum_{ij} K^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\sum_j \beta_j \frac{\partial}{\partial x^j} + \gamma \right), \qquad \tilde{K}^{ij} = K^{ij}.$$

Замечания. Процедура оценки неизбежно включает усечение, и это равенство выполняется, но с погрешностями усечения;

2) $\tilde{K}$ подтверждает свойство стабильности. Примем некоторую начальную функцию и множество $\bar{c}$ теоретических решений, соответствующих $\tilde{K}$, а c — точное решение. Если математическая модель является совместимой, то невязка между $\bar{c}$ и c, определенная в соответствующей норме, должна быть сравнима с экспериментальными погрешностями.

Оценка K^{ij} посредством теории точечного разбавления проверяется условием 1. В дальнейшем проанализируем методы вычисления погрешности определения коэффициента дисперсии. Эти элементы применимы к формулам, получаемым на основе теории точечного разбавления, но, конечно, такой анализ может быть применен к любым методам определения K на основе других теорий. Затем изучается условие 2.

8.4.2. Элементы расчета погрешностей определения коэффициентов дисперсии

Погрешность определения K обусловлена погрешностями измерений, погрешностями усечения временного интеграла и погрешностями усечения по τ при вычислении пределов. Доказательства даются для изотропного оператора с постоянными коэффициентами при начальном условии $\Phi\tau = \exp(-\pi\tau x^2)$, но могут быть обобщены на другие операторы.

Если:

$$\gamma(s) = 2^{2s}\pi^{s}\frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(s+n/2)}{\Gamma(n/2)},$$

то K задается формулой (8.2.4):

$$K^{s} = |\gamma(s)|^{-1}\lim_{\tau\to\infty}\tau^{-s}\int_{0}^{\infty} t^{-s-1}c_{\tau}(0,\,t)\,dt.$$

Как проводится эксперимент? Выбирается значение τ и регистрируется концентрация $\tilde{c}(0,\,t)$ (либо непрерывным, либо дискретным методами) в течение периода времени $(0,\,t_0)$. Конечное число таких экспериментов проводится для возрастающего τ, обязательно ограниченного некоторым τ_0.

Эффективный коэффициент дисперсии K удовлетворяет уравнению:

$$\tilde{K}^{s} = |\gamma(s)^{-1}\,\tau_0^{-s}\int_{0}^{t_0} t^{-s-1}\tilde{c}(0,\,t)\,dt.$$

Погрешность по K возникает из: 1) погрешностей измерений $\tilde{c}(0,\,t)$ или δ_c; 2) погрешности аппроксимации по τ, т. е. погрешности, получаемой путем замены бесконечного t-предела значением

$$\gamma(s)\,\tau_0^{-s}\int_{0}^{\infty} t^{-s-1}\tilde{c}(0,\,t)\,dt.$$

(Эта погрешность называется τ-ошибкой и обозначается δ_τ); 3) погрешность усечения на конечной границе t_0. (Она называется t-ошибкой); 4) погрешности численного интегрирования, которые здесь не рассматриваются.

Заметим, что $c(x,\,t)$ быстро уменьшается до 0, когда t стремится к бесконечности. t_0 не будет слишком большим, так как по истечении небольшого периода времени c меньше, чем ошибка измерений. Отсюда рассчитывается оптимальное значение t_0.

Погрешности измерений не зависят от модели. τ-ошибки и t-ошибки анализируются и минимумизируются.

Пусть δ — погрешность в K^s, тогда:

$$\gamma(s)\,\delta = \delta_\tau + \delta_t + \delta_c.$$

Изучим δ_τ и δ_t, пренебрегая δ_c и используя аналитическое решение:

$$\gamma(s)\,\delta = \left|\tau_0^{-s}\int_{0}^{\infty} t^{-s-1}c(0,\,t) - \lim_{\tau\to\infty}\tau^{-s}\int_{0}^{\infty} t^{-s-1}c(0,\,t)\,dt\right|,$$

Принимая $\tau t = \theta$ и $\tau_0 t_0 = \theta_0$, получим выражение:

$$\gamma(s)\,\delta = \left| \int_0^{\infty} \theta^{-s-1} (1 + 4\pi K\theta)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\beta^2\theta}{4K\tau}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[\frac{\beta^2\theta}{\tau(4K + 16\pi K^2\theta)}\right] d\theta - \int_0^{\infty} \theta^{-s-1}(1 + 4\pi K\theta)^{-n/2}\, d\theta \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\theta_0} \theta^{-s-1} (1 + 4\pi K\theta)^{-n/2} \left[\exp\left\{-\frac{\beta^2\theta}{4K\tau_0} + \frac{\beta^2\theta}{\tau_0(4K + 16\pi K^2\theta)}\right\} - 1\right] + \right.$$

$$+ d\theta + \int_{\theta_0}^{\infty} \theta^{-s-1} (1 + 4\pi K\theta)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\beta^2\theta}{4K\tau_p}\right) +$$

$$\left. \times \exp\left[\frac{\beta^2\theta}{\tau_0(4K + 16\pi K^2\theta)}\right] d\theta - \int_{\theta_0}^{\infty} \theta^{-s-1} (1 + 4\pi K\theta)^{-n/2}\, d\theta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_0^{\theta_0} \theta^{-s-1} (1 + 4\pi K\theta)^{-n/2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\exp\left(-\frac{\beta^2\theta}{4K\tau_0}\right) \exp\left\{\frac{\beta^2\theta}{\tau_0(4K + 16\pi K^2\theta)}\right\} - 1\right] d\theta \right| +$$

$$+ \left| \int_{\theta_0}^{\infty} \theta^{-s-1} (1 + 4\pi K\theta)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\beta^2\theta}{4K\tau_0}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[\frac{\beta^2\theta}{\tau_0(4K + 16\pi K^2\theta)}\right] d\theta \right| + \left| \int_{\theta_0}^{\infty} \theta^{-s-1} (1 + 4\pi K\theta)^{-n/2}\, d\theta \right|,$$

которое запишем в виде:

$$\gamma(s)\,\delta \leqslant R_1 + R_2 + R_3,$$

где R_2 и R_3 оценки для t-ошибок.

Используя формулу

$$|e^{-a}e^{b} - 1| \leqslant |b - a|\, e^{b} \leqslant (a + b)\, e^{b},$$

запишем:

$$R_1 \leqslant \int_0^{\theta_0} \theta^{-s-1}(1+4\pi K\theta)^{-n/2}\left(\frac{\beta^2\theta_0}{4K\tau_0}+\frac{\beta^2}{16\pi K^2\tau_0}\right)\times$$

$$\times \exp\left(\frac{\beta^2}{16\pi K^2\tau_0}\right)\mathrm{d}\theta \leqslant \gamma(s)\,K^s\left(\frac{\beta^2\theta_0}{4K\tau_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta^2}{16\pi K^2\tau_0}\right)\exp\left(\frac{\beta^2}{16\pi K^2\tau_0}\right),$$

$$R_2 \leqslant \int_{\theta_0}^{\infty}(4\pi K)^{-n/2}\theta^{-s-1-n/2}\exp\left(-\frac{\beta^2\theta}{4K\tau_0}\right)\exp\left(\frac{\beta^2}{16\pi K^2\tau_0}\right)\mathrm{d}\theta \leqslant$$

$$\leqslant (4\pi K)^{-n/2}\exp\left(\frac{\beta^2}{16\pi K^2\tau_0}\right)\frac{\theta_0^{-s-n/2}}{s+n/2},$$

$$R_3 \leqslant \int_{\theta_0}^{\infty}(4\pi K)^{-n/2}\theta^{-s-1-n/2}\,\mathrm{d}\theta \leqslant (4\pi K)^{-n/2}\frac{\theta_0^{-s-n/2}}{s+n/2}.$$

И окончательно:

$$\gamma(s)\,\delta \leqslant \gamma(s)\,K^s\left(\frac{\beta^2\theta_0}{4K\tau_0}+\frac{\beta^2}{16\pi K^2\tau_0}\right)\exp\left(\frac{\beta^2}{16\pi K^2\tau_0}\right)+$$

$$+(4\pi K)^{-n/2}\frac{\theta_0^{-s-n/2}}{s+n/2}\left[1+\exp\left(\frac{\beta^2}{16\pi K^2\tau_0}\right)\right].$$

Проверим теперь влияние погрешностей измерений на $\tilde{c}\,(0,\ t)$, δ_c, которые не зависят от математических процедур и являются постоянными:

$$\gamma(s)\,\delta \leqslant \tau_0^{-s}\int_0^{t_0} t^{-s-1}(\delta_c^{=})\,\mathrm{d}t = \frac{\theta_0^{-s}}{-s}\,\delta_c.$$

Погрешность δ, обусловленная измерением $c\,(0,\ t)$, возрастает с увеличением θ_0. Обычно τ_0 задают условиями эксперимента, а t_0 изменяют. Оптимальную погрешность получаем, когда значение:

$$R(\theta_0) = \gamma(s)\,K^{s-1}\frac{\beta^2}{4}\frac{\theta_0}{\tau_0}+2\,(4\pi K)^{-n/2}\frac{\theta_0^{-s-n/2}}{s+n/2}+\frac{\theta_0^{-s}}{-s}\,(\delta_c)$$

является минимальным, а τ_0 достаточно большим, чтобы можно было пренебречь величиной $\beta^2\,(16K^2\pi\tau_0)$. Этот минимум получаем из уравнения:

$$R'(\theta_{\mathrm{opt}}) = \gamma(s)\,K^{s-1}\frac{\beta^2}{4\tau_0}-2\,(4\pi K)^{-n/2}\theta_0^{-s-n/2-1}+\theta_0^{-s-1}(\delta_c)=0,$$

которое можно решить графически, принимая $T = \theta_0^{-s-1}$ и рассчитывая точку пересечения T_0 кривых:

$$Y = \gamma(s) K^{s-1} \frac{\beta^2}{4\tau_0} + T\delta_c,$$

$$Y = 2(4\pi K)^{-n/2} T^{-n/2},$$

$$\theta_{\text{opt}} = T_0^{-1/(s+1)},$$

$$R \leqslant \gamma(s) K^{s-1} \frac{\beta^2}{4} \frac{\theta_{\text{opt}}}{\tau_0} + 2(4\pi K)^{-n/2} \frac{\theta_{\text{opt}}^{-s-n/2}}{s+n/2} + \frac{\theta_{\text{opt}}^{-s}}{-s} \delta_c.$$

Замечание. Полагая, что погрешность измерения равна нулю, можно получить из предыдущих расчетов некоторые элементы сходимости по τ. Тогда погрешность в K^s для достаточно больших τ_0 равна:

$$\gamma(s)\delta \leqslant \gamma(s) K^{s-1} \frac{\beta^2}{4} \frac{\theta_0}{\tau_0} + 2(4\pi K)^{-n/2} \frac{\theta_0^{-s-n/2}}{s+n/2}.$$

Положим:

$$\theta_0^{-n/2-s} = c \frac{\theta_0}{\tau_0},$$

тогда

$$\theta_0 = c_1 \tau^{1/(s+n/2+1)},$$

$$\gamma(s)\delta \leqslant$$

$$\leqslant \tau_0^{-(s+n/2)/(s+1+n/2)} \left[\gamma(s) K^{s-1} \frac{\beta^2}{4} c_1 + 2(4\pi K)^{-n/2} \frac{c_1^{s-n/2}}{s+n/2} \right].$$

Два члена в скобках изменяются взаимно противоположно и их сумма будет минимальной, когда они равны между собой, это дает c_1:

$$c_1 = \left[\frac{2(4\pi K)^{-n/2}}{s+n/2} \times \frac{4K^{-s+1}}{\gamma(s)\beta^2} \right]^{\frac{1}{s+n/2+1}},$$

$$\gamma(s)\delta \leqslant \tau_0^{-\frac{s+n/2}{s+1+n/2}} \left[\gamma(s) K^{s-1} \frac{\beta^2}{4} \left\{ 2 \frac{(4\pi K)^{n/2}}{s+n/2} \times \frac{4K^{-s+1}}{\gamma(s)\beta^2} \right\}^{\frac{1}{s+n/2+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(4\pi K)^{-n/2}}{s+n/2} \left\{ \frac{2(4\pi K)^{-n/2}}{s+n/2} \times \frac{4K^{-s+1}}{\gamma(s)\beta^2} \right\}^{\frac{-s-n/2}{s+n/2+1}} \right].$$

Из этого выражения появляется возможность вычислить τ_0 такое, что для всех $\tau < \tau_0$ $(\delta/K^s) \leqslant \varepsilon$ для заданного положительного ε.

Сходимость по τ является очень медленной: принимая $n = 1$, $K = 1$, $\beta = 10^{-4}$, $s = -0{,}1$, можно найти, что при $\varepsilon = 10^{-2}$ $\tau_0 = 10$, а при $\varepsilon = 10^{-3}$ $\tau_0 = 20\,000$.

8.4.3. Устойчивость теории точечного разбавления

Рассмотрим коэффициент дисперсии $\tilde{K}$, полученный экспериментально на основе теории точечного разбавления. $\tilde{K}$ вводится в уравнение дисперсии, которое затем решается при любых начальных условиях. Примем $\tilde{c}\,(0,\ t)$ за вычисленное решение, а $c\,(0,\ t)$ за точное решение, т. е. за решение уравнения дисперсии для вполне точного K. Конечно, это очень сильное допущение, т. е. при отсутствии полевой экспериментальной погрешности решение строго удовлетворяет уравнению дисперсии.

Отмечалось, что теория точечного разбавления является устойчивой, если невязка между $c\,(0,\ t)$ и $\tilde{c}\,(0,\ t)$ соизмерима с погрешностью эксперимента. Наиболее приемлемой нормой является норма равномерной сходимости:

$$\|c\| = \sup_t |c(x,\ t)|.$$

Применяя преобразование Фурье $\hat{c}\,(\xi,\ t)$ от c по x, получим

$$|c(x,\ t)| \leqslant \int |\hat{c}\,(\xi,\ t)|\,d\xi,$$

$$\|c\| \leqslant \sup_t \int |\hat{c}\,(\xi,\ t)|\,d\xi. \qquad (8.4.1)$$

Задача определяется системой:

$$K\,\Delta c - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\partial c}{\partial x^j} = \frac{\partial c}{\partial t},$$

$$c\,(x,\ 0) = c_0\,(x),$$

где $c_0\,(x)$ принадлежит $\delta\,(R^n)$.

Решение в изображениях Фурье записывается:

$$\hat{c}\,(\xi,\ t) = \hat{c}_0\,(\xi) \exp\left[-\left(4\pi^2 K \xi^2 + 2i\pi\beta\xi\right) t\right].$$

Положим Er, $c = c - \tilde{c}$ и определим ее из (8.4.1):

$$\|\mathrm{Er}\, c\| \leqslant \sup_t \int |\mathrm{Er}\, \hat{c}\,(\xi,\ t)|\,d\xi.$$

Принимая δ за погрешность в K, данную в разделе 8.4.2, имеем:

$$|\mathrm{Er}\, \hat{c}\,| = 4\pi^2 \xi^2 t\,|\,\delta\,|\,|\,\hat{c}_0\,(\xi)\,| \exp\left[-\left(4\pi^2 K \xi^2 + 2i\pi\beta\xi\right) t\right],$$

или

$$\| \operatorname{Er} c \| \leqslant \sup_t \int 4\pi^2 \xi^2 t \, |\delta| \, |\hat{c}_0(\xi)| \exp\left[-(4\pi^2 K\xi^2 + 2i\pi\beta\xi)\, t\right] d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi^2 |\delta| \sup_t A,$$

где

$$A = \int \xi^2 t \, |\hat{c}_0(\xi)| \exp\left[-(4\pi^2 K\xi^2 + 2i\pi\beta\xi)\, t\right] d\xi.$$

Устойчивость зависит от поведения A во времени:

$$A \leqslant \int \xi^2 t \, |\hat{c}_0(\xi)| \exp\left[-4\pi^2 K\xi^2 t\right] d\xi.$$

Следовательно, согласно неравенству Шварца

$$A \leqslant 4\pi^2 \left[\int \xi^{2\alpha} |\hat{c}_0(\xi)|^2 \, d\xi\right]^{1/2} \left[\int t^2 \xi^{4-2\alpha} \exp\left(-8\pi^2 K\xi^2 t\right) d\xi\right]^{1/2},$$

Принимая $\xi = \eta/\tau^{1/2}$, получим:

$$\int t^2 \xi^{4-2\alpha} \exp\left(-8\pi^2 K\xi^2 t\right) d\xi = t^{\alpha - n/2} \int \exp\left(-8\pi^2 K\eta^2\right) \eta^{4-2\alpha} \, d\eta.$$

Этот интеграл является конечным, если $\alpha = n/2$. Для $\alpha = n/2$ получаем:

$$\| \operatorname{Er} c \| < 4\pi^2 |\delta| \, \| c_0 \|_{n/2}.$$

Это означает, что устойчивость имеет место, и погрешность по модельному решению для экспериментального K представляет собой погрешность того же порядка по K, если начальная функция C_0 и ее производные порядка $n/2$ являются функциями, интегрируемыми в квадрате (C_0 принадлежит пространству Соболева $H^{n/2}$).

ГЛАВА 9
ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

В этой главе излагаются основные сведения по аппроксимации, методы и теоремы, необходимые студентам для самостоятельного численного решения задач загрязнения подземных вод.

Особое значение придается очень тесной взаимосвязи между физической сущностью явления и численным анализом задачи: процесс дискретизации должен сохранять физические законы и физические представления как основу любого улучшения численного анализа задачи. Рассмотрим пример.

Мы видели, что конвективная часть уравнения дисперсии записывается в виде — div (uc), uc — поток вещества, определяющийся скоростью подземных вод. Процесс дискретизации состоит в разбивке моделируемой области на блоки с центрами (I) и записи изменений потока между двумя блоками в виде:

$$(uc)(I) - (uc)(J)/IJ,$$

где IJ — расстояние между центрами I и J (рис. 9.0.1).

Эта дискретизация принимает во внимание физическое значение uc как переноса массы загрязнителя через единицу площади в единицу времени.

Теперь представим себе математика, который совершенно не представляет физического смысла модели, но, несмотря на это, намерен решить задачу. Для него div (uc) может быть записана как $u \operatorname{grad} c + c \operatorname{div} u$ и он выполнит дискретизацию div (uc), например, следующим образом:

$$u(I)[c(J) - c(I)]/IJ + c(J)[u(J) - u(I)]/IJ,$$

что не имеет физического смысла; хотя с математической точки зрения оба представления эквивалентны, численно и физически различаются и должны привести к различным результатам.

Вместе с тем, когда физическая сущность явления принята во внимание, весь математический аппарат помогает физику решить задачу. Мы рассматриваем оба аспекта моделирования в двух разделах: в 9.4 излагается теория аппроксимации уравнения диффузии-дисперсии (применимая как таковая, конечно, к основному уравнению фильтрации), основанная на математических соображениях; в нем показано, как может быть использован математический аппарат; в 9.5 рассматривается основное уравнение фильтрации на базе теории баланса потоков и показано, как физические соображения определяют технику дискрети-

зации. В разделах 9.1 и 9.2 собран полезный математический аппарат (итерационные методы и теоремы).

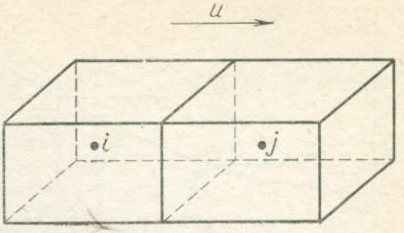


Рис. 9.01

Мы надеемся, что математики не будут обижены, если скажем, что физик, обладающий хорошей экспериментальной и физической интуицией и имеющий лишь основы математических знаний, будет более хорошим специалистом по математическому моделированию, чем хороший математик без знаний физики. Лучше, конечно, когда хороший физик обладает хорошей математической подготовкой.

9.1. ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И ТЕОРЕМЫ

Этот раздел подразделяется на две части: от 9.1.1 до 9.1.3 излагаются основные принципы итерационных процессов, основанные на простых геометрических примерах. Начиная с 9.1.4 рассматриваются итерационные процессы для систем линейных уравнений и приводятся основные и полезные теоремы, используемые в математических моделях загрязнения подземных вод.

9.1.1. Основной принцип

Рассмотрим прямую линию L и кривую C, которая пересекает L в точке H в плоскости xOy, представленной на рис. 9.1.1. Координатами H являются (x_i, y_i). На кривой C задается точка H_0 (x_0, y_0). Задача состоит в том, чтобы, зная уравнения C и L, перейти от H_0 к H. На рис. 9.1.1 показан простой итерационный процесс, позволяющий перейти от H_0 к H с помощью последовательности простых горизонтальных и вертикальных перемещений.

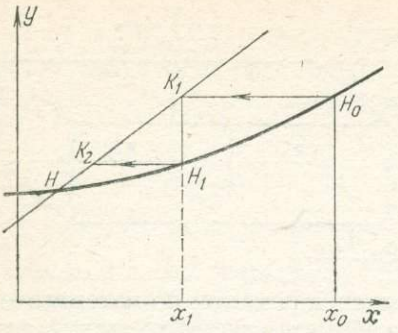
Эти перемещения отыскиваются, исходя из следующих соображений: если H_0 (x_0, y_0) известна, то легко определить абсциссу x_1 точки H_1, которая является абсциссой точки K_1 на линии L. Уравнения C и L представляются соответственно в виде:

$$y = f(x) \text{ и } y = ax + b.$$

Абсциссой x_1 точки K_1 и ординатой y_1 точки H_1 соответственно являются:

$$x_1 = \frac{y_0 - b}{a}, \quad y_1 = f(x_1).$$

Затем процесс повторяется.



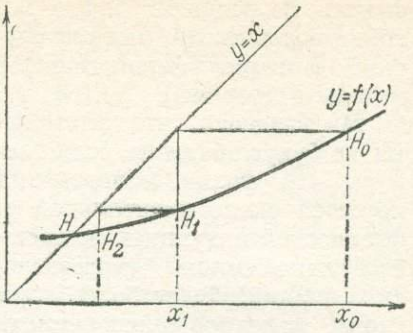


Рис. 9.1.1. Принцип итерационного процесса

Рис. 9.1.2. Усовершенствованный итерационный процесс

Здесь следует отметить, что если мы намерены решить уравнение $F(x) = 0$ * с помощью итерационного процесса, то необходимо построить кривую (или поверхность) C и прямую L так, чтобы точка пересечения H прямой L и кривой C была бы решением $F(x) = 0$ (т. е. координаты x_i точки H должны удовлетворять уравнению $F(x_i) = 0$).

На математическом языке — это задача построения полезных адекватных кривых. Конечно, насколько это возможно, следует стремиться упростить построение. Обычно может быть выбрана прямая $y = x$. Итерационный процесс тогда будет иметь вид (рис. 9.1.2):

$$y_0 = f(x_0),$$

$$x_1 = y_0,$$

$$y_1 = f(x_1),$$

$$x_2 = f(x_{n-1}).$$

что можно также записать в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1), \\ x_n &= f(x_{n-1}). \end{aligned} \qquad (9.1.1)$$

Этот процесс может сходиться к x_i при $n \to \infty$. Далее, если f — непрерывная функция, имеем равенство:

$$x_i = f(x_i),$$

которое показывает, что x_i есть решение уравнения $x = f(x)$, определяющее пересечение C и L.

* Конечно, x представляет координаты вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерном пространстве. В нашем простом примере (см. рис. 9.1.1) мы имеем $x = (x_i, y_i)$.

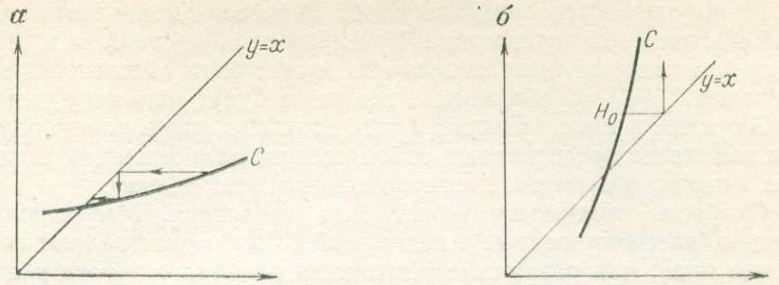


Рис. 9.1.3. Сходимость и расходимость итерационного процесса
а — процесс сходится; *б* — процесс расходится

9.1.2. Сходимость

Сходимость не всегда существует. На рис. 9.1.3 показаны два возможных случая, которые помогают понять, при каких условиях можно ожидать сходимость.

Перепишем (9.1.1) следующим образом:

$$x_1 = f(x_0),$$
$$x_2 - x_1 = f(x_1) - f(x_0),$$
$$x_3 - x_2 = f(x_2) - f(x_1),$$
$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}). \qquad (9.1.2)$$

Кроме того, x_{n+1} удовлетворяет следующему уравнению:

$$x_{n+1} = (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) + x_0. \qquad (9.1.3)$$

Если f достаточно регулярна в окрестности точки пересечения $H(x_L)$, то (согласно классической теореме) имеем:

$$x_2 - x_1 = f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0) f'(\theta_1) \simeq (x_1 - x_0) f'(x_i),$$
$$x_3 - x_2 = f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'\theta_2 \simeq (x_2 - x_1) f'(x_i) \simeq$$
$$\simeq (x_1 - x_0) f'^2(x_L), \qquad (9.1.4)$$
$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) f'(\theta_n) \simeq$$
$$\simeq (x_n - x_{n-1}) f'(x_L) \simeq (x_1 - x_0) f'^n(x_L),$$

где θ_i — действительное число в интервале (x_{i-1}, x_i). Объединяя уравнения (9.1.3) и (9.1.4), получим:

$$x_{n+1} = x_0 + [f(x_0) - x_0][1 + f'(x_L) + f'^2(x_L) + \cdots + f'^n(x_L)].$$

Сходимость x_{n+1} и x_L при $n \to \infty$ зависит от сходимости геометрического ряда $[f'^n(x_L)]$, а мы знаем, что такой ряд сходится при $|f'(x_L)| < 1$ и расходится при $|f'(x_L)| \geqslant 1$.

Итак, сходимость итерационного процесса эквивалентна сходимости геометрического ряда. Критерии сходимости одни и те же. В приведенном примере сходимость может быть обеспечена, если значения $f'(x_L)$ по абсолютной величине будут меньше единицы.

З а м е ч а н и е. Позднее будет показано, что в нашем случае эти величины представляют собой собственные значения некоторых матриц, называемых «итерационными матрицами».

Скорость сходимости может быть повышена. Итерационные методы, рассматриваемые в настоящей книге, представляют собой не что иное, как различные улучшения основного метода в отношении скорости сходимости.

Например, приведенный итерационный метод может быть улучшен. Если аппроксимация

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \simeq (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)$$

считается достаточно хорошей, можно написать:

$$x_L = x_n + (x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1}) + \cdots +$$
$$+ (x_{n+m+1} - x_{n+m}) + \cdots,$$
$$x_L^* = x_n + (x_{n+1} - x_n)[1 + f'(x_n) + f'^2(x_n) +$$
$$+ \cdots + f'^m(x_n) + \cdots] = x_n + (x_{n+1} - x_n)[1/(1 - f'(x_n))],$$

x_L^* — улучшенное приближение x_L по сравнению с x_{n+1}, и процесс повторяется от x_L^*, а не от x_{n+1}.

9.1.3. Построение итерационного процесса

Данная задача заключается в решении уравнения:

$$f(x) = 0. \tag{9.1.5}$$

Предполагается, что решение является единственным для $a < x < b$. Чтобы воспользоваться итерационным методом, необходимо получить кривую C и прямую линию L, пересечение которых давало бы решение [9.5].

Уравнение [9.1.5] эквивалентно

$$f(x) + x = x. \tag{9.1.6}$$

Подстановкой $f(x) + x = g(x)$ задача сводится к решению эквивалентного уравнения:

$$g(x) = x,$$

т. е. к отысканию точки пересечения кривой C и прямой линии L, соответственно выражающимися следующими уравнениями:

$$y = g(x) \text{ и } y = x.$$

Процесс будет сходиться, если:

$$-1 < g'(x) < 1 \text{ (при } a < x < b)$$

или

$$-2 < f'(x) < 0.$$

Конечно, имеются и другие способы построения итерационных процессов, которые мы будем исследовать, применительно к системам линейных уравнений.

9.1.4. Применение к системам линейных уравнений

Задача заключается в решении системы:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

где X — матрица-столбец неизвестных, A — квадратная матрица системы и B — матрица-столбец.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = (a_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Положим, что $\mathbf{A}^{-1}$ существует, т. е. система имеет одно и только одно решение в виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Будем искать это решение путем итерации. Используя (9.1.6), получим:

$$\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{B} + \mathbf{X},$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{X} + \mathbf{B}.$$

I — единичная квадратная матрица:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение представляет собой пересечение кривых:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{X} + \mathbf{B}, \quad (C)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \qquad (L)$$

Тогда можно организовать следующий итерационный процесс:

$$X_n = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\,X_{n-1} + \mathbf{B}. \qquad (9.1.7)$$

Если процесс (9.1.7) сходится, он будет сходиться к пересечению C и L при очевидном условии непрерывности уравнения.

С помощью простого примера проиллюстрируем это построение. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} -x - 1{,}5y = 2 \\ -1{,}5x - y = 0 \end{cases} \text{ или } \mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1{,}5 \\ -1{,}5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & \\ -1{,}5 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

при

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (9.1.7) тогда примет вид:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + 1{,}5y_{n-1} + 2 \\ y_n = 1{,}5x_{n-1} + 2y_{n-1}. \end{cases}$$

Находим начальный вектор $x_0 = 0{,}6$, $y_0 = -1{,}4$. Наблюдается сходимость итерационного процесса к $x = 1{,}6$ и $y = -2{,}4$. Конечно, чтобы повысить точность метода, число итераций должно быть больше. Точное решение может быть получено прямым обращением $\mathbf{A}$, рассматриваемым в разделе 9.3. Часто прямое обращение не дает практических результатов и должны использоваться итерационные методы.

Таблица 3

Переменные	Номера итерации					
	1	2	3	4	5	6
x	1,10	1,35	1,475	1,538	1,569	1,585
y	—1,9	—2,15	—2,275	—2,338	—2,369	—2,385

9.1.5. Линейные системы. Основные теоремы

В предыдущем разделе показано, как строить кривые C и L итерационного процесса. При этом нужно выбрать начальный вектор. Чтобы сделать выбор более легким, можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 1. Итерационный процесс $X_m = \mathbf{M}X_{m-1} + \mathbf{B}$ сходится для любого начального вектора X_0, если и только если все собственные значения матрицы $\mathbf{M}$ строго меньше 1 по абсолютной величине.

Здесь приводится доказательство только для случая матрицы $\mathbf{M}$, которая может быть приведена к диагональному виду. Теорема охватывает также другие матрицы. Подробное доказательство дается Форсайтом и Вазовым [92, с. 215] *, которые, кроме того, показывают, что теорема 1 может быть распространена на случаи, когда некоторые собственные значения равны единице по абсолютной величине. Мы не рассматриваем этих случаев.

Доказательство. $\mathbf{M}$ может быть приведена к диагональному виду. Существует базис собственных векторов $V_1, \ldots, V_n$ n-мерного пространства векторов X_m. В наших обозначениях M является матрицей $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ (см. раздел 9.1.4). Назовем X решением уравнения $\mathbf{A}X = \mathbf{B}$. X представляет собой предел последовательности X_m, если такой предел существует. Необходимое условие: предел X существует.

$$X_1 = \mathbf{M}X_0 + \mathbf{B},$$

$$X_2 = \mathbf{M}X_1 + \mathbf{B},$$

$$X_{m+1} = \mathbf{M}X_m + \mathbf{B},$$

$$X = \mathbf{M}X + \mathbf{B},$$

$$X - X_{m+1} = \mathbf{M}(X - X_m) = \mathbf{M}^2(X - X_{m-1}) = \mathbf{M}^{m+1}(X - X_0).$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, $p \leqslant n$ — собственные значения M. Положим, что существует такое k, при котором

$$|\lambda_k| \geqslant 1.$$

Выбор X_0 производится так, чтобы $X - X_0$ принадлежало собственному подпространству, соответствующему λ_k:

$$X - X_0 = x^i V_i, \quad i \in K.$$

K — система индексов собственных векторов, соответствующая собственному значению λ_k. Согласно правилу Эйнштейна суммируем по i:

$$X - X_{m+1} = \mathbf{M}^{m+1} x^i V_i = \lambda_k^{m+1} x^i V_i.$$

---

* В. Вазов, Г. Форсайт. Разностные методы для решения уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1963 г. — *Прим. ред.*

где x_i — фиксированные данные числа. Таким образом:

$$|\lambda_k|^{m+1}|x^i| \to \infty \text{ при } m \to \infty$$

Последовательность не сходится к X; значение X_0 не может быть выбрано наугад.

Достаточное условие: пусть известно, что X существует и удовлетворяет $\mathbf{A}X = \mathbf{B}$ или $X = \mathbf{M}X + \mathbf{B}$. Сходится ли последовательность X_m, когда все собственные значения по абсолютной величине меньше 1?

$$X - X_{m+1} = \mathbf{M}^{m+1}(X - X_0) = \lambda_i^{m+1} x_i^{\alpha i} V_{\alpha i},$$

где $i = 1, \ldots, p$ и α_i — индексы собственных векторов, соответствующих собственным значениям λ_i. Суммирование производится по i и α_i. Вводя норму, определенную в приложении III, имеем:

$$\|X - X_{m+1}\| \leqslant |\lambda_i|^{m+1} |x^{\alpha i}| \|V_{\alpha i}\|.$$

Эта конечная сумма стремится к нулю при $m \to \infty$, если $|\lambda_i| < 1$. Тогда последовательность X_m стремится к X.

Значение теоремы 1. Значение этой теоремы заключается в том, что X_0 может быть выбрано наугад. Теоретически сходимость может быть получена выбором $X - X_0$ (в собственном подпространстве), соответствующих собственным значениям меньше 1 по абсолютной величине. Практически такой выбор невозможен по двум причинам: 1) обычно ничего не известно о решении X, которое отыскивается; 2) при машинном счете во всех собственных векторах в виде малых компонент присутствуют погрешности округления, вследствие чего последовательность может потерять сходимость.

З а м е ч а н и е. Простой расчет для примера в разделе 9.1.4 дает значения $\mathbf{I} - \mathbf{A}$, $\lambda_1 = 0{,}5$ и $\lambda_2 = 3{,}5$. Начальный вектор X_0 был выбран так, что $X - X_0$ принадлежало подпространству, соответствующему $\lambda_1 = 0{,}5$ (X — вектор решения $x = 1{,}6$ и $y = -2{,}4$). Читатель может легко проверить, что процесс расходится, если $X_0 - X$ имеет компоненты в собственном подпространстве, соответствующие $\lambda_2 = 3{,}5$. (Например для $x_0 = 0$, $y_0 = 0$).

Главная трудность итерационного процесса заключается в оценке собственных значений, которые обычно не могут быть вычислены непосредственно. Следующие теоремы допускают вычисление границ собственных значений.

О п р е д е л е н и е. Матрица $\mathbf{M} = (a_i^j)$ является диагонально доминирующей, если

$$|a_i^i| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_j^i|, \tag{9.1.8}$$

при строгом неравенстве по крайней мере для одного i (i — индекс строки).

Определение. Матрица **M** называется приводимой, если существуют перестановки строк и столбцов (обычно различные) такие, что результирующее построение **M** принимает форму:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

где **A**, **B**, **C** — квадратные матрицы меньшего порядка и **O** — нулевая матрица. В противном случае **M** называется неприводимой матрицей.

Теорема 2. Диагонально доминирующая неприводимая матрица **M** регулярна. Здесь приводится краткое доказательство для случая, когда **M** является строго диагонально доминирующей матрицей, т. е.

$$|a_i^i| > \sum_{j=i} |a_j^i| \; \forall \, i. \tag{9.1.9}$$

Тогда нет необходимости предполагать неприводимость матрицы **M**. Общее доказательство см. у Форсайта и Вазова [92].

Доказательство. Предположим, что **M** нерегулярна. Ее векторы-столбцы не являются независимыми:

$$a_1^i x^1 + a_2^i x^2 + \cdots + a_n^i x^n = 0 \text{ для всех } i.$$

Положим:

$$x^k = \sup |x^i|.$$

Число x^i конечно, таким образом x_k — одно из x^i. Из выражения

$$a_1^k x^1 + \cdots + a_k^k x^k + \cdots + a_n^k x^n = 0$$

получим:

$$|a_k^k x_k| \leqslant \sum_{i \neq k} |a_i^k| |x^k|, \quad |a_k^k| \leqslant \sum_{i \neq k} |a_i^k|,$$

что противоречит (9.1.9). Следовательно, **M** регулярна, что требовалось доказать.

Теорема 3 (теорема Гершгорина). Собственные значения матрицы $\mathbf{M} = (a_i^j)$ заключены в пределах области **D**, которая определяется как объединение всех кругов с центрами a_i^i и соответственно с радиусами $\sum_{j \neq i} |a_j^i|$. Эта теорема является прямым следствием теоремы 2: $\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}$ является особой матрицей, когда λ — собственное значение **M**. Таким образом, $\exists i$:

$$|a_i^i - \lambda| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_j^i|.$$

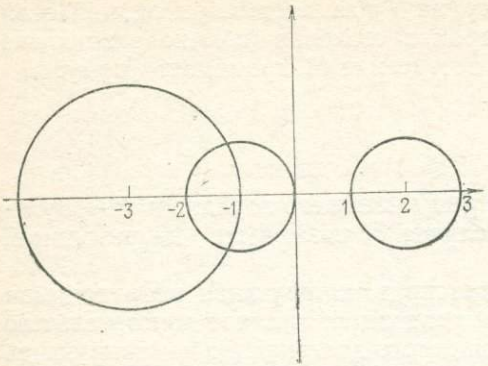


Рис. 9.1.4. Применение теоремы Гершгорина

Пример (рис. 9.1.4):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы завершить обзор основных теорем, дадим оценку наибольшего собственного значения матрицы **M**. Хотя оценка дается только для эрмитовой матрицы, она справедлива для любой матрицы с одним и только одним действительным доминирующим собственным значением [225] и легко поддается программированию для ЭВМ.

M — эрмитова матрица. Она имеет ортонормированный базис собственных векторов (V_1, V_2, ..., V_n), соответствующих действительным собственным значениям λ_1, ..., λ_n, которые могут быть равными или отличаться друг от друга. Любой вектор X_0 может быть записан в виде:

$$X_0 = x^1 V_1 + x^2 V_2 + \cdots + x^n V_n,$$

$$\mathbf{M}X_0 = x^1\lambda_1 V_1 + x^2\lambda_2 V_2 + \cdots + x^n\lambda_n V_n.$$

Рассмотрим итерационный процесс, начиная с X_0:

$$X_m = \mathbf{M}X_{m-1},$$

$$X_m = \mathbf{M}^m X_0 = x^1\lambda_1^m V_1 + x^2\lambda_2^m V_2 + \cdots + x^n\lambda_n^m V_n.$$

Принимая, что λ_1 наибольшее собственное значение, запишем:

$$X_m = \lambda_1^m \left[x^1 V_1 + x^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m V_2 + \cdots + x^n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^m V_n \right].$$

Когда $m \to \infty$, X_m стремится стать параллельным доминирующему собственному вектору V_1, а λ_1 может быть получено вычислением предела отношения скалярных произведений (X_{m+1}, X_m) и (X_m, X_m)

$$\frac{(X_{m+1}, X_m)}{(X_m, X_m)} =$$

$$= \lambda_1 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2m+1} + \cdots + (x^n)^2 \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{2m+1}}{(x^1)^2 + (x^2)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2m} + \cdots + (x^n)^2 \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{2m}} \xrightarrow[m \to \infty]{} \lambda_1.$$

9.2. ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. МЕТОДЫ

Здесь описываются наиболее часто встречающиеся итерационные методы, сначала для очень простого примера, а затем для общих линейных систем.

9.2.1. Простой пример метода Якоби

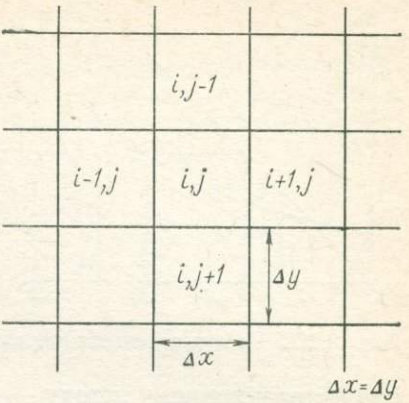


Рис. 9.2.1. Конечноразностная двумерная сетка

Рассмотрим стационарный двумерный поток в пористой среде с однородной проводимостью $T = 1$. Этот поток описывается (см. раздел 9.5) уравнением:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0. \tag{9.2.1}$$

Дискретизируя (9.2.1) по квадратной сетке (рис. 9.2.1) и обозначая через H_{ij} значение напора в узле i, j, получим классическую пятиточечную схему:

$$-4H_{i,\,j} + H_{i-1,\,j} + H_{i,\,j-1} + H_{i+1,\,j} + H_{i,\,j+1} = 0. \tag{9.2.2}$$

Решая (9.2.2) относительно $H_{i,\,j}$, получим:

$$H_{i,\,j} = \frac{H_{i-1,\,j} + H_{i,\,j-1} + H_{i+1,\,j} + H_{i,\,j+1}}{4}. \tag{9.2.3}$$

Уравнение (9.2.3) порождает естественный итерационный процесс, называемый методом Якоби:

$$H_{i,\,j}^{(m+1)} = \frac{H_{i-1,\,j}^{(m)} + H_{i,\,j-1}^{(m)} + H_{i+1,\,j}^{(m)} + H_{i,\,j+1}^{(m)}}{4}. \tag{9.2.4}$$

Процесс начинается с данного произвольного значения H в каждом узле.

9.2.2. Простой пример метода Гаусса—Зейделя

Формула (9.2.4) показывает, что H в каждом узле может быть вычислено в течение одного шага. Чтобы увеличить скорость сходимости, выгодно использовать новые значения H немедленно. После того как сделан шаг по пространству для увеличивающихся i и j, когда рассчитывается $H_{i,\,j}^{(m+1)}$, значения $H_{i-1,\,j}^{(m+1)}$ и $H_{i,\,j-1}^{(m+1)}$ принимаются уже известными. Это замечание привело к улучшен-

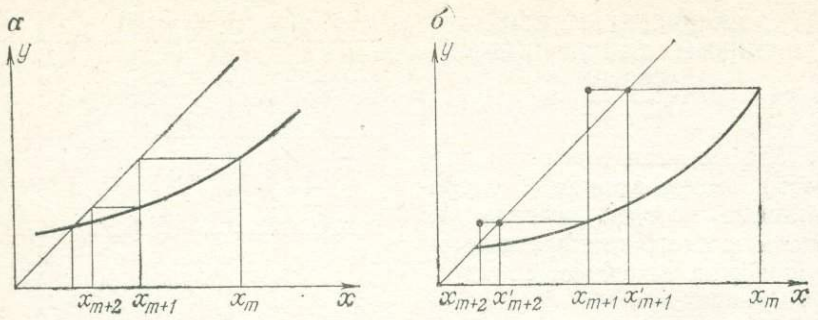


Рис. 9.2.2. Последовательная верхняя релаксация

ному итерационному методу — методу Гаусса — Зейделя, который определяется следующей формулой:

$$H_{i,j}^{(m+1)} = \frac{H_{i-1,j}^{(m+1)} + H_{i,j-1}^{(m+1)} + H_{i+1,j}^{(m)} + H_{i,j+1}^{(m)}}{4}. \qquad (9.2.5)$$

9.2.3. Простой пример метода последовательной верхней релаксации

Может быть получено еще более значительное улучшение скорости сходимости. Вернемся к основным положениям итерационных методов.

Одним из описанных методов мы получаем X'_{m+1}. Чтобы приблизиться к пересечению, умножим вектор $X'_{m+1} - X_m$ на соответствующий коэффициент ω, в результате получим X_{m+1} (рис. 9.2.2). Повторяем процесс, который можно записать следующим образом:

$$X'_{m+1} = f(X_m),$$

$$X_{m+1} = X_m + \omega (X'_{m+1} - X_m).$$

Возвращаясь к нашему простому примеру, находим, что: 1) промежуточное значение $H_{i,j}^{1\,(m+1)}$ вычисляется, например, по формуле Гаусса — Зейделя:

$$H'_{i,j}{}^{(m+1)} = \frac{H_{i-1,j}^{(m+1)} + H_{i,j-1}^{(m+1)} + H_{i+1,j}^{(m)} + H_{i,j+1}^{(m)}}{4}.$$

2) $H_{i,j}^{(m+1)}$ получается затем из выражения:

$$H_{i,j}^{(m+1)} = H_{i,j}^{(m)} + \omega [H'_{i,j}{}^{(m+1)} - H_{i,j}^{(m)}]. \qquad (9.2.6)$$

Очевидная трудность состоит, конечно, в том, как выбрать ω. Оно должно быть достаточно большим, чтобы обеспечить хорошую скорость сходимости, и достаточно малым, чтобы не пропустить пересечение. В разделе 9.2.5 будут даны практические рекомендации относительно ω.

9.2.4. Общие формулы

Рассмотрим систему $AX = B$. Чтобы организовать итерационный процесс, матрица A представляется обычно в виде суммы диагональной матрицы **D**, строго нижнетреугольной матрицы **L** и строго верхнетреугольной матрицы **U**. Например:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\4&0&0\\7&8&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&6\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$$

или

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\,\mathbf{X} = \mathbf{B}. \tag{9.2.7}$$

Уравнение (9.2.7) приводит к различным итерационным формулам для методов:

Якоби

$$\mathbf{X}^{(m+1)} = -\mathbf{D}^{-1}\left[(\mathbf{L} + \mathbf{U})\,\mathbf{X}^{(m)} - \mathbf{B}\right], \tag{9.2.8}$$

Гаусса — Зейделя

$$\mathbf{X}^{(m+1)} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{X}^{(m)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{B}, \tag{9.2.9}$$

последовательной верхней релаксации

$$\mathbf{D}\mathbf{X}'_{m+1} = -\mathbf{L}\mathbf{X}_{m+1} - \mathbf{U}\mathbf{X}_m + \mathbf{B},$$

$$\mathbf{X}_{m+1} = \mathbf{X}_m + \omega\,(-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{X}_{m+1} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{X}_m + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{X}_m), \tag{9.2.10}$$

$$\mathbf{X}_{m+1} = (\omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I} - \omega\,\mathbf{I} - \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U})\,\mathbf{X}_m + \\ + (\omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} + \mathbf{I})^{-1}\,\omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}.$$

Эти формулы могут быть выражены в величинах различных компонент матриц, чтобы приспособить их для ЭВМ; система $AX = B$ тогда записывается так:

$$\sum_j a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и (9.2.7) приводится к виду:

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j + a_{ii}x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда для методов:

Якоби

$$x_i^{(m+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)} - b_i\right], \tag{9.2.11}$$

Гаусса — Зейделя

$$x_i^{(m+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)} - b_i\right], \qquad (9.2.12)$$

последовательной верхней релаксации

$$x_i^{(m+1)} = x_i^{(m+1)} + \omega\left[-\frac{1}{a_{ii}}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)} - b_i\right\} - x_i^{(m)}\right]. \qquad (9.2.13)$$

9.2.5. Сходимость методов

Общее обсуждение сходимости можно найти у Форсайта и Вазова [92], Ремсона и др. [225]. Здесь без доказательства даются некоторые практические результаты, которые используются в моделировании загрязнения подземных вод.

1. **A** — матрица системы $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$; если **A** — диагонально доминирующая неприводимая матрица, то методы Якоби и Гаусса — Зейделя сходятся.

Замечание. Конечно, если **A** — строго диагонально доминирующая матрица, условие неприводимости не требуется.

Следующие определения даются по Ремсону и др. [225].

2. Квадратная матрица **A** порядка n называется обладающей свойством A, если существует перестановочная матрица **P**, такая, что **PAP** является диагонально-блочной трехдиагональной матрицей (рис. 9.2.3), т. е. каждая **D** — диагональная матрица.

3. В системе линейных уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ компоненты x_i и x_j называются связанными, если либо $a_{ij} \neq 0$, либо $a_{ij} \neq 0$.

4. Порядок решения уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ согласуется с этим трехдиагональным представлением, если, рассматривая сетку, пронумерованную с использованием символа i, сделать следующую перестановку: первый узел остается без изменения; другие точки сетки нумеруются с использованием символа $g(i)$ так, что

$$g(p) = g(i) + 1 \text{ при } p \trianglerighteq i,$$

$$g(p) = g(i) - 1 \text{ при } p \trianglelefteq 1$$

для каждой точки p и всех точек i, с которыми связана p (рис. 9.2.4).

Сформулируем очень полезную теорему.

Теорема. Если матрица **A** системы $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ является диагональю доминирующей, согласованно упорядоченной и обла-

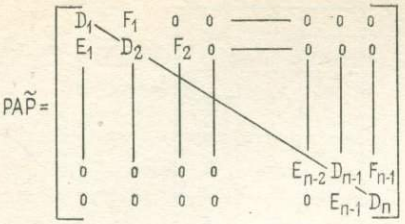


Рис. 9.2.3

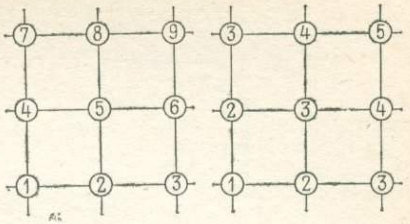


Рис. 9.2.4. Последовательная нумерация [225]

дающей свойством A, то метод последовательной верхней релаксации сходится для $0 < \omega \leqslant 2$ и собственные значения λ итерационной матрицы $(\omega \mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I} - \omega\mathbf{I} - \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U})$ связаны с ω и μ зависимостью:

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2\mu^2\lambda,$$

где μ — собственное значение итерационной матрицы Якоби — $\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$.

Наилучшее значение коэффициента верхней релаксации будет:

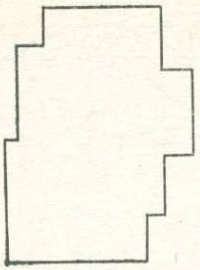
$$\omega_{\text{опт}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu_{max}^2}},$$

где μ_{max} — спектральный радиус матрицы Якоби. Для этого коэффициента число итераций минимально. Задача сводится к определению $\omega_{\text{опт}}$. Некоторые подходы обсуждаются в работе Ремсона и др. [225, с. 199], например метод Карре, который легко может быть запрограммирован.

Мы также рекомендуем прямое вычисление наибольшего собственного значения по отношению скалярных произведений, как это показано в разделе 9.1.5. Может быть полезным также другой результат: в случае прямоугольной сетки из n внутренних столбцов и m внутренних строк наибольшее собственное значение матрицы Якоби, соответствующее дискретизации $\partial^2 H/\partial x^2 + \partial^2 H/\partial y^2$, точно равно:

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{1}{n+1}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{m+1}\pi\right)\right].$$

Этот случай соответствует однородному двумерному водоносному горизонту. Он может быть эмпирически распространен на квазипрямоугольную область (рис. 9.2.5), если принять средние величины числа строк и столбцов.



1	2	3
7	8	9
10	11	12
13	14	15
4	5	6

Рис. 9.2.5. Квази-прямоугольная область
Рис. 9.2.6.

9.2.6. Методы блочной итерации

Ниже сформулировано несколько основных принципов этих методов особенно в связи с применением метода переменных направлений, который будет рассмотрен для случая уравнений, зависящих от времени, в разделе 9.6.

Сущность методов блочной итерации заключается в том, что решение системы $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ заменяется решением последовательности трехдиагональных систем. На каждом шаге итерации используется метод исключения Гаусса и скорость сходимости увеличивается.

Этот метод может быть лучше понят на простом примере однородного водоносного горизонта с проводимостью 1, дискретизированного, как показано на рис. 9.2.6; блоки 1—6 имеют постоянный потенциал; восточная и западная границы водоносного горизонта непроницаемы. Режим установившийся. Суммарные расходы откачки и инфильтрации в каждом блоке различны и изменяются от Q_7 до Q_{15}. Используя метод, описанный в разделе 9.5, получим следующую систему уравнений:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
-3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} H_7 \\ H_8 \\ H_9 \\ \hline H_{10} \\ H_{11} \\ H_{12} \\ \hline H_{13} \\ H_{14} \\ H_{15} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} Q_7 - H_1 \\ Q_8 - H_2 \\ Q_9 - H_3 \\ \\ Q_{10} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \\ \\ Q_{13} - H_4 \\ Q_{14} - H_5 \\ Q_{15} - H_6 \end{bmatrix}. \qquad (9.2.14)$$

Имеется три блока $\mathbf{X} = (H_7H_8H_9)$, $\mathbf{Y} = (H_{10}H_{11}H_{12})$ и $\mathbf{Z} = (H_{13}H_{14}H_{15})$.

Полагая

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_X = \begin{bmatrix} Q_7 - H_1 \\ Q_8 - H_2 \\ Q_9 - H_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_Y = \begin{bmatrix} Q_{10} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_Z = \begin{bmatrix} Q_{13} - H_4 \\ Q_{14} - H_5 \\ Q_{15} - H_6 \end{bmatrix},$$

запишем (9.2.14) в виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_X \\ \mathbf{Q}_Y \\ \mathbf{Q}_Z \end{bmatrix}.$$

Метод решения теперь становится эквивалентным точечному методу решения, коэффициентами становятся матрицы. Например, блочный метод Якоби запишется так:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_{m+1} = \mathbf{Q}_X - \mathbf{I}\mathbf{X}_m,$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_{m+1} = \mathbf{Q}_Y - \mathbf{I}\mathbf{X}_m - \mathbf{I}\mathbf{Z}_m,$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Z}_{m+1} = \mathbf{Q}_Z - \mathbf{I}\mathbf{Y}_m.$$

Таким же образом могут быть определены блочный метод Гаусса — Зейделя и метод верхней релаксации. Инверсию А легко получить методом исключения Гаусса (см. 9.3).

Замечание. Могут быть определены, конечно, другие блоки. В примере мы дали естественное разложение на блоки по столбцам и строкам, которое используется в методе переменных направлений.

9.3. ПРЯМЫЕ ПРОЦЕДУРЫ

Здесь приводится общий прямой метод исключения Гаусса и его упрощенная форма для трехдиагональных матриц.

9.3.1. Общий метод исключения Гаусса

Рассмотрим линейную систему уравнений:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Сначала делим первую строку на a_{11}, затем умножаем на a_{21} и вычитаем из второй строки:

$$\left(a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{11}\right) x_1 + \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{12}\right) x_2 +$$

$$+ \cdots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{1n}\right) x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\, b_1,$$

Коэффициент при x_1 исчезает. Повторяем операцию, умножая первую строку на a_{k1}. Получаем новую систему:

$$x_1 + (a_{12}/a_{11})\, x_2 + \cdots + (a_{1n}/a_{11})\, x_n = b_1/a_{11},$$

$$0 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = b_2 - (a_{21}/a_{11})\, b_1,$$

$$0 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n = b_n - (a_{n1}/a_{11})\, b_1,$$

где $b_{pk} = a_{pk} - (a_{1k}/a_{11})\, a_{p1}$.

Продолжая эти операции для второй новой строки и повторяя процесс таким образом, получим систему:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1,$$

$$x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2,$$

$$x_n = d_n.$$

Последнее уравнение дает x_n, подставив которое в предыдущее уравнение, получим x_{n-1} и так далее.

9.3.2. Трехдиагональный метод исключения Гаусса

Рассмотрим трехдиагональную систему:

$$b_1X_1 + c_1X_2 = d_1,$$

$$a_iX_{i-1} + b_iX_i + c_iX_{i+1} = d_i.$$

$$a_nX_{n-1} + b_nX_n = d_n, \qquad (9.3.1)$$

где $i = 2, \ldots, n-1$,

или

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Записывая

$$X_i = \alpha_i - \beta_i X_{i+1}, \qquad (9.3.2)$$

$$X_n = \alpha_n,$$

где $i = 1, \dots, n-1$

и исключая X_{i-1}, X_i и X_{i+1} из трех уравнений:

$$X_{i-1} = \alpha_{i-1} - \beta_{i-1} X_i,$$

$$\alpha_i X_{i-1} + b_i X_i + c_i X_{i+1} = d_i,$$

$$X_i = a_i - \beta_i X_{i+1},$$

где $i = 2, \dots, n-1$,
получим:

$$a_i \alpha_{i-1} - a_i \beta_{i-1} \alpha_i + \alpha_i b_i = d_i,$$

$$a_i \beta_{i-1} \beta_i - b_i \beta_i + c_i = 0,$$

и

$$\alpha_i = \frac{d_i - a_i \alpha_{i-1}}{b_i - a_i \beta_{i-1}}$$

$$\beta_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \beta_{i-1}},$$

где $i = 2, \dots, n-1$.
Для $i = 1$:

$$b_1 X_1 + c_1 X_2 = d_1,$$

$$X_1 = \alpha_1 - \beta_1 X_2,$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{d_1}{b_1},$$

$$\beta_1 = \frac{c_1}{b_1}.$$

Для $i = n$:

$$\alpha_n X_{n-1} + b_n X_n = d_n,$$

$$X_{n-1} = \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} X_n,$$

$$X_n = \alpha_n,$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{d_n - a_n\alpha_{n-1}}{b_n - a_n\beta_{n-1}}.$$

Решение трехдиагональной системы (9.3.1) находим вычислением α_i и β_i от $i = 1$ до $i = n$ и подстановкой затем их значения в (9.3.2). Этот метод хорошо программируется.

9.4. ТЕОРИЯ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ ДИСПЕРСИИ

9.4.1. Аппроксимация производных

При некоторых условиях регулярности (для наших задач достаточно считать, что c имеет непрерывные производные до четвертого порядка) функция c может быть разложена в ряд Тейлора в окрестностях x; y, z, t являются постоянными:

$$c(x+h,\ y,\ z,\ t) = c(x,\ y,\ z,\ t) + h\frac{\partial c}{\partial x}(x,\ y,\ z,\ t) +$$

$$+ \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,\ y,\ z,\ t) + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 c}{\partial x^3}(x,\ y,\ z,\ t) +$$

$$+ \cdots + \frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n c}{\partial x^n}(x,\ y,\ z,\ t) + O(h^n). \qquad (9.4.1)$$

Остаточный член ряда равен $O(h^n)$. Функция f равна $O(h^n)$, если существует положительное постоянное число k, такое, что $|f| \leqslant k|h^n|$. Таким образом, $|h^n| \to 0$, $|f| \to 0$ по меньшей мере одинаково быстро.

Принимая $h = \Delta x$ и $h = -\Delta x$, соответственно найдем:

$$c(x+\Delta x,\ y,\ z,\ t) = c(x,\ y,\ z,\ t) + \Delta x\frac{\partial c}{\partial x}(x,\ y,\ z,\ t) +$$

$$+ \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,\ y,\ z,\ t) + O(\Delta x^3), \qquad (9.4.2)$$

$$c(x-\Delta x,\ y,\ z,\ t) = c(x,\ y,\ z,\ t) - \Delta x\frac{\partial c}{\partial x}(x,\ y,\ z,\ t) +$$

$$+ \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,\ y,\ z,\ t) + O(\Delta x^3). \qquad (9.4.3)$$

Эти уравнения могут быть решены относительно $\partial c/\partial x$:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{c(x+\Delta x,\ y,\ z,\ t) - c(x-\Delta x,\ y,\ z,\ t)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2),$$

что приводит к аппроксимации производной центральной разностью:

$$\frac{\partial c}{\partial x} \simeq \frac{c(x+\Delta x,\ y,\ z,\ t) - c(x-\Delta x,\ y,\ z,\ t)}{2\Delta x}.$$

Мы отбросили остаточный член ряда, называемый «ошибкой усечения», и равный $O(\Delta x^2)$. Прекращая разложение ряда при $n = 1$ (полагаем $n = 1$ в (9.4.1)), из (9.4.2) и (9.4.3) получим:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{c(x+\Delta x, y, z, t) - c(x, y, z, t)}{\Delta x} + O(\Delta x),$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{c(x, y, z, t) - c(x-\Delta x, y, z, t)}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Это дает аппроксимацию производной разностью вперед:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x, y, z, t) \simeq \frac{c(x+\Delta x, y, z, t) - c(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

и разностью назад:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x, y, z, t) \simeq \frac{c(x, y, z, t) - c(x-\Delta x, y, z, t)}{\Delta x}.$$

Обе аппроксимации имеют ошибку усечения порядка Δx. Чтобы получить аппроксимацию производной второго порядка, комбинируем (9.4.2) и (9.4.3), распространенные на $n = 4$:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, y, z, t) \simeq$$

$$\simeq \frac{c(x+\Delta x, y, z, t) - 2c(x, y, z, t) + c(x+\Delta x, y, z, t)}{(\Delta x)^2},$$

которая имеет ошибку усечения порядка $(\Delta x)^2$.

Таким же самым образом получаем аппроксимации $\partial c/\partial y$, $\partial c/\partial z$, $\partial^2 c/\partial y^2$, $\partial^2 c/\partial z^2$. В задачах дисперсии используется аппроксимация $\partial c/\partial t$ разностью вперед.

9.4.2. Аппроксимация уравнения

Для простоты ограничимся изучением одномерного уравнения дисперсии с постоянными коэффициентами. Методы, которые мы развиваем на этом простом примере, являются общими и могут быть легко распространены самими студентами на другие уравнения дисперсии. Необходимо аппроксимировать

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u\frac{\partial c}{\partial x} + K\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \qquad (9.4.4)$$

Найдем аппроксимацию $\partial c/\partial x$ (вперед, назад или центральную) и аппроксимируем $\partial^2 c/\partial x^2$. Аппроксимация $-u(\partial c/\partial x) + K(\partial^2 c/\partial x^2)$ в точке x и в момент t записывается в виде $\Gamma(x, t)$; и тогда:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) = \Gamma(x, t), \qquad (9.4.5)$$

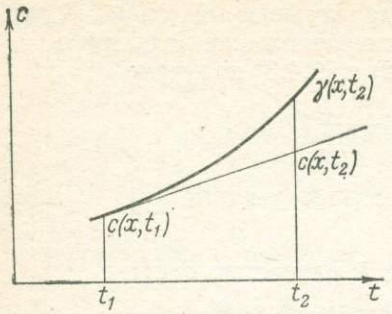


Рис. 9.4.1. Явная аппроксимация

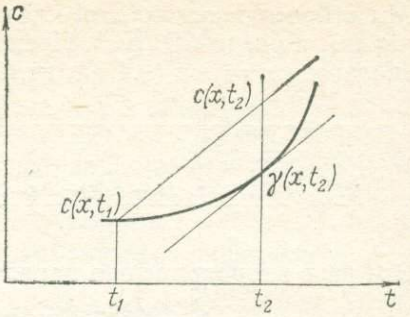


Рис. 9.4.2. Неявная аппроксимация

является первой аппроксимацией уравнения дисперсии. Дискретизация $\partial c/\partial t$ основана на том факте, что мы знаем $c\ (x,\ t_1)$ и ищем $c\ (x_1 t_2)$ при $t_2 > t_1$, что дает

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c\ (x,\ t_2) - c\ (x,\ t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Мы можем теперь искать $\Gamma\ (x,\ t)$ в моменты времени t_1 и t_2 или между ними. Это приводит к трем аппроксимациям уравнения дисперсии.

1. Явная аппроксимация. Берем Γ в момент времени t_1:

$$\frac{c\ (x,\ t_2) - c\ (x,\ t_1)}{t_2 - t_1} = \Gamma\ (x,\ t_1). \tag{9.4.6}$$

Уравнение (9.4.5) имеет геометрическую интерпретацию (9.4.6): $\Gamma\ (x,\ t_1)$ представляет собой тангенс угла наклона касательной к кривой уравнения $t \to c\ (x,\ t)$ в точке t_1. Если $c\ (x,\ t_2)$ — подсчитанное значение и $\gamma\ (x,\ t_2)$ — точное значение, имеем рис. 9.4.1.

2. Неявная аппроксимация. Берем Γ в момент времени t_2:

$$\frac{c\ (x,\ t_2) - c\ (x,\ t_1)}{t_2 - t_1} = \Gamma\ (x,\ t_2). \tag{9.4.7}$$

Геометрическая интерпретация представлена на рис. 9.4.2, $\Gamma\ (x,\ t_2)$ представляет собой тангенс угла наклона касательной в точке t_2 и прямой линии $c\ (x,\ t_2) - c\ (x,\ t_1)$, параллельной этой касательной.

3. Аппроксимация Кранка — Николсона. Принимаем, что $\Gamma\ (x,\ t)$ линейна в интервале $(t_1,\ t_2)$, и записываем:

$$\frac{c\ (x,\ t_2) - c\ (x,\ t_1)}{t_2 - t_1} = \lambda\Gamma\ (x,\ t_1) + (1 - \lambda)\,\Gamma\ (x,\ t_2). \tag{9.4.8}$$

Название «аппроксимации Кранка—Николсона» дано схеме, когда $\lambda = 0{,}5$, что соответствует рис. 9.4.3.

9.4.3. Устойчивость и сходимость аппроксимаций

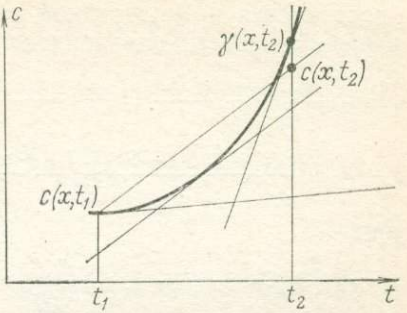


Рис. 9.4.3. Аппроксимация Кранка—Николсона

Цель аппроксимации — получить оценку концентрации в момент времени t_2 по известной концентрации в момент времени t_1. Необходимо, чтобы эта оценка была близкой в некотором смысле * к точному решению уравнения дисперсии, (9.4.4) например, что требует соблюдения двух условий при использовании аппроксимаций: устойчивости и сходимости. Как и раньше, назовем $c(x, t)$— вычисленным решением и $\gamma(x, t)$ — точным решением уравнения дисперсии. Полагаем $t_2 - t_1 = \Delta t$.

Определение сходимости. Конечно-разностная аппроксимация сходится, если разность между $\gamma(x, t)$ и $c(x, t)$ стремится к нулю, когда Δx и Δt стремятся к нулю при данных x и t.

Определение устойчивости. Когда время изменяется, вычисляется $c(x, t + \Delta t)$ по $c(x, t)$. Этот итерационный процесс имеет смысл, если разность между $\gamma(x, t)$ и $c(x, t)$ ограничена в некотором смысле, при $t \to \infty$ для данных Δx и Δt. Если это условие соблюдается, аппроксимация устойчива.

Допустим, что рассмотренные выше аппроксимации сходятся, и исследуем их устойчивость. Необходимо отметить, что устойчивость и сходимость взаимосвязаны и (это можно доказать) при надлежащих условиях эквивалентны.

Выводы по устойчивости приводятся на основе кратких грубых доказательств, главной целью которых является объяснение того, как пользоваться основными теоремами раздела 9.1 в практических задачах.

1. Явная аппроксимация. Уравнение (9.4.6) записывается для промежутка времени между t_n и t_{n+1}, при разбивке

---

* «Близость» двух функций зависит от вида нормы, принятой для функционального пространства, к которому эти функции принадлежат. В данной книге эта задача детально не рассматривается; напомним только, что самые обычные нормы в нашем случае имеют вид $\|f\|_\infty = \mathrm{Sup}\,|f(x)|$ $\|f\|_2 = \left[\int_R f^2(x)\,dx\right]^{1/2}$ или $\|f\|_1 = \int_R |f(x)|\,dx$. Близость f и g тогда определяется действительным положительным числом $\|f - g\|$.

пространства по квадратной сетке (Δx, $2\Delta x$, ..., $i\,\Delta x$, ..., $I\,\Delta x$) и разности назад для конвективного члена:

$$\frac{c(i, t_{n+1}) - c(i, t_n)}{t_{n+1} - t_n} = -U\,\frac{c(i, t_n) - c(i-1, t_n)}{\Delta x} +$$

$$+ K\,\frac{c(i+1, t_n) - 2c(i, t_n) + c(i-1, t_n)}{\Delta x^2},$$

или

$$c(i, t_{n+1}) = c(i-1, t_n)\left(\frac{K\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{U\Delta t}{\Delta x}\right) +$$

$$+ c(i, t_n)\left(1 - \frac{U\Delta t}{\Delta x} - 2\,\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}\right) + c(i+1, t_n)\,\frac{K\Delta t}{\Delta x^2},$$

где $t_{n+1} - t_n = \Delta t$. (9.4.9)

Эта система уравнений может быть записана в матричной форме

$$C(t_{n+1}) = \mathbf{M}C(t_n).$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & | \\ 0 & -a_1 & a_2 & a_3 & -0 \\ | & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix},$$

где

$$a_1 = \frac{K\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{U\Delta t}{\Delta x}; \quad a_2 = 1 - \frac{U\Delta t}{\Delta x} - 2\,\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}; \quad a_3 = \frac{K\Delta t}{\Delta x^2},$$

$C(t_n)$ — вектор с компонентами $c(i, t_n)$.

Согласно теореме Гершгорина (раздел 9.1) собственные значения $\mathbf{M}$ лежат в интервале $[1 - 2(U\,\Delta t/\Delta x) - 4(K\,\Delta t/\Delta x^2), 1]$. Из общей теоремы сходимости (см. раздел 9.1) итерационный процесс, определенный уравнением (9.4.9), расходится, если собственные значения итерационной матрицы больше 1 по абсолютной величине. Таким образом, явная аппроксимация устойчива, если

$$1 - 2\,\frac{U\Delta t}{\Delta x} - 4\,\frac{K\Delta t}{\Delta x^2} > -1,$$

или

$$\Delta t < \Delta t_c, \tag{9.4.10}$$

где

$$\Delta t_c = \frac{\Delta x}{2\,\dfrac{K}{\Delta x} + U},$$

Δt_c называется критическим временным шагом, и аппроксимация называется устойчивой условно при (9.4.10).

Замечание. При использовании разностей вперед или центральных разностей Δt_c конечно различны. Расчет Δt_c очевиден во всех случаях.

2. Неявная аппроксимация. Дискретизируя как раньше, получим

$$c(i-1, t_{n+1})\left(-\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{U\Delta t}{\Delta x}\right)+c(i, t_{n+1})\left(1+\frac{U\Delta t}{\Delta x}+2\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}\right)+$$

$$+c(i+1, t_{n+1})\left(-K\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)=c(i, t_n), \qquad (9.4.11)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{N}C(t_{n+1})=C(t_n),$$

где $\mathbf{N}$ — треугольная матрица;

$$\mathbf{N}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

при

$$a_1=-\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}-\frac{U\Delta t}{\Delta x};\quad a_2=1+\frac{U\Delta t}{\Delta x}+2\frac{K\Delta t}{\Delta x^2};\quad a_3=-\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}.$$

Итерационной матрицей тогда является $\mathbf{N}^{-1}$.

Согласно теореме Гершгорина (см. раздел 9.1) собственные значения лежат в интервале $[1,\ 1+2\,(U\,\Delta t/\Delta x)+4\,(K\,\Delta t/\Delta x^2)]$, из чего следует, что они больше 1. Таким образом, собственные значения $\mathbf{N}^{-1}$ по абсолютной величине меньше 1. Согласно общей теореме сходимости (см. 9.1) итерационный процесс (9.4.11) сходится.

Таким образом, можно утверждать, что неявная аппроксимация безусловно устойчива.

3. Аппроксимация Кранка — Николсона. Используя ту же дискретизацию, что и раньше, имеем:

$$c(i-1, t_{n+1})\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{U\Delta t}{\Delta x}\right)\right]+$$

$$+c(i, t_{n+1})\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{U\Delta t}{\Delta x}+2\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}\right)\right]+$$

$$+c(i+1, t_{n+1})\left[-\frac{1}{2}\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}\right]=c(i-1, t_n)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{U\Delta t}{\Delta x}\right)\right]+$$

$$+c(i, t_n)\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{U\Delta t}{\Delta x}+2\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}\right)\right]+c(i+1, t_n)\left[\frac{1}{2}\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}\right].$$

В матричной форме это уравнение примет вид:

$$\mathbf{M}C(t_{n+1})=\mathbf{N}C(t_n),$$

где $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — трехдиагональные матрицы; коэффициенты в строке являются соответственно коэффициентами при $c(i-1)$, $c(i)$, $c(i+1)$.

Обозначая через **P** трехдиагональную матрицу, строки которой образованы коэффициентами

$$\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}+\frac{U\Delta t}{\Delta x},\quad -\frac{U\Delta t}{\Delta x}-2\frac{K\Delta t}{\Delta x^2},\quad \frac{K\Delta t}{\Delta x^2},$$

отмечаем, что $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}=\mathrm{I}-\frac{1}{2}\mathbf{P}$ и $\mathbf{N}=\mathbf{I}+\frac{1}{2}\mathbf{P}$ имеют одни и те же собственные векторы, из чего следует, что $(\mathbf{I}-\mathbf{P}/2)^{-1}$ и $\mathbf{M}^{-1}\mathrm{N}$ имеют те же собственные векторы, что и P. Поскольку p — соответствующее собственное значение матрицы $\mathbf{P}$, $1-p/2$ и $1+p/2$ — соответствующие собственные значения матриц $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, то соответствующим собственным значением a итерационной матрицы $\mathbf{M}^{-1}\mathrm{N}$ будет:

$$a=\frac{1+p/2}{1-p/2}.$$

Согласно теореме Гершгорина, собственные значения матрицы P заключены в интервале $[-2\{(U\,\Delta t/\Delta x)+2\,(K\,\Delta t/\Delta x^2)\},\ 0]$ и являются отрицательными, из чего видно, что $|a|$ меньше 1. Аппроксимация Кранка—Николсона безусловно устойчива.

9.4.4. Неявный метод переменных направлений (НМПН)

Когда моделируемая двумерная область прямоугольна или по меньшей мере правильная (выпуклая, например), решение часто может быть получено с помощью НМПН, введенного Писманом и Рэшфордом. Этот метод имеет большое преимущество: вместо расчета обратной общей матрицы расчитываются две обратные трехдиагональные матрицы. Рассмотрим НМПН на простом примере. Запишем уравнение дисперсии:

$$K_L\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+K_T\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-u\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{\partial c}{\partial t}.$$

Аппроксимация этого уравнения на одном временном шаге состоит в разделении этого временного шага на два и в выражении производных по x неявно, а производной по y явно для первой половины временного шага. Для второй половины временного шага производные по x выражаются явно, а производная по y неявно:

$$1)\ K_L\frac{c^+(i+1,\,j)-2c^+(i,\,j)+c^+(i-1,\,j)}{\Delta x^2}-U\frac{c^+(i,j)-c^+(i-1,j)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{c^+(i,\,j)-c_1(i,\,j)}{\Delta t/2}-K_T\frac{c_1(i,\,j+1)-2c_1(i,\,j)+c_1(i,\,j-1)}{\Delta y^2},$$

$$2)\ K_T\frac{c_2(i,\,j+1)-2c_2(i,\,j)+c_2(i,\,j-1)}{\Delta y^2}=\frac{c_2(i,\,j)-c^+(i,\,j)}{\Delta t/2}-$$

$$-K_L\frac{c^+(i+1,j)-2c^+(i,\,j)+c^+(i-1,\,j)}{\Delta x^2}+u\frac{c^+(i,\,j)-c^+(i-1,\,j)}{\Delta x},$$

где $c_1(i, j)$ и $c_2(i, j)$ — концентрации в моменты времени t_1 и t_2 ($t_2 - t_1 = \Delta t$) в точках (i, j), а $c^+(i, j)$ — промежуточное значение, которое не имеет физического смысла. Для ускорения решения вычисляем c^+ для всех строк i методом трехдиагонального исключения Гаусса. При этом предполагается, что c_1 известно, а c_2 рассчитывается для каждого столбца j также методом трехдиагонального исключения Гаусса. Можно показать, что НМПН сходится и безусловно устойчив.

9.4.5. Некоторые трудности конечно-разностных аппроксимаций

Конечно-разностные методы легки в обращении, иногда быстры и обычно хорошо известны. Но при численном решении задач дисперсии возникают два затруднения, которые не преодолены до сих пор. Это «всплеск» и численная дисперсия.

1. «В с п л е с к». Рассмотрим запуск загрязнителя при скачкообразном изменении единичной концентрации на входе в одномерный поток, описываемый уравнением:

$$K \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Сравнение аналитического и численного решений на момент времени t приводится на рис. 9.4.4.

Очень часто оказывается, что вычисленная методом конечных разностей концентрация превышает точную величину вблизи оси c. Этот отскок известен под названием «всплеска». Он может быть объяснен тем, что временные шаги и пространственные размеры плохо согласованы и водоносный горизонт не может численно «абсорбировать» запущенную массу загрязнителя. Временные шаги следует подбирать осторожно и приспосабливать к задаче. Часто, принимая приращение во времени равным общему члену геометрической прогрессии ($\Delta t_n = a\,\Delta t_{n-1}$ при $1 < a < 2$), можно добиться сглаживания «всплеска». Например, Шамир и Харлемен [247] в некоторых своих задачах использовали $a = 1{,}3$.

Рекомендуется исследовать некоторую модель при скачкообразном изменении единичной концентрации на входе, чтобы согласовать шаги по времени и пространству прежде чем использовать ее при обычных граничных условиях.

2. Ч и с л е н н а я д и с п е р с и я. Рассмотрим запуск загрязнителя при скачкообразном изменении единичной концентрации на входе в одномерный поток:

$$K \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Примем $K = 0$. Аналитическое и численное решения для момента времени t дано на рис. 9.4.5.

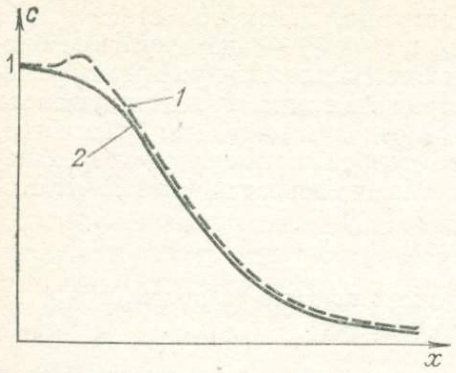


Рис. 9.4.4. Всплеск

1 — численное решение; *2* — аналитическое решение

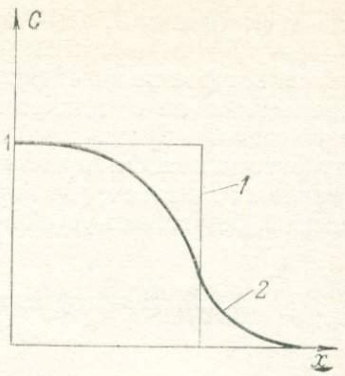


Рис. 9.4.5. Численная дисперсия.

1 — аналитическое решение; *2* — численное решение

Форма рассчитанной кривой объясняет, почему этому явлению дано название «численная дисперсия»: оно ведет себя так, как будто конечно-разностная аппроксимация уравнения — $u\,(\partial c/\partial x) = \partial c/\partial c/\partial t$ была на самом деле аппроксимацией некоторого уравнения дисперсии:

$$D\,\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u\,\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t}\,.$$

Коэффициент D не имеет физического смысла. Некоторые объяснения были даны Лэнцем [164, 165]. Численная дисперсия представляет собой ошибку усечения; конечно-разностные аппроксимации производных первого порядка (как временных, так и пространственных) дают рост ошибочных членов пропорционально производным второго порядка (см. раздел 9.4.1), коэффициенты пропорциональности зависят как от пространственных, так и от временных приращений.

Возьмем наш простой пример; первая пространственная производная аппроксимируется разностью назад:

$$u\,\frac{\partial c}{\partial x} \simeq u\,\frac{c\,(x) - c\,(x - \Delta x)}{\Delta x} - u\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\,.$$

Таким образом, вводится коэффициент численной дисперсии $-u\,\Delta x/2$, который может иметь порядок коэффициента «физической» дисперсии K. Эта искусственная дисперсия имеет большое значение в области динамической дисперсии (когда $K = \alpha u$) для значений порядка $\Delta x/2$. Никакого реального решения для этой аномалии еще не найдено, кроме опробования среднего коэффициента продольной дисперсии вида ($\alpha u - u\,\Delta x/2$), позволяющего несколько сгладить численную дисперсию.

Конечно, в задачах крупномасштабной дисперсии численная дисперсия может быть пренебрежимо малой при соответствующих размерах сетки.

9.4.6. Метод характеристик

Для того чтобы уменьшить или исключить вышеупомянутые трудности, Гарднер и др. [121] ввели экспериментальное улучшение схем классического конечно-разностного решения, которое они назвали методом характеристик. Задача по-прежнему аппроксимируется конечными разностями, но физические соображения о развитии дисперсии приводят к уравнению в частных производных первого порядка, которое эквивалентно уравнению дисперсии и к определению его характеристических линий.

Задача определяется уравнением дисперсии:

$$K_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_T \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - U_x \frac{\partial C}{\partial x} - U_y \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial t},$$

где

$$U_x = -\frac{k}{\Phi\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \frac{\partial h}{\partial x}\right), \quad U_y = -\frac{k}{\Phi\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \frac{\partial h}{\partial y}\right), \quad (9.4.12)$$

Считая, что дисперсией можно пренебречь по сравнению с конвективным переносом, они приравнивают это уравнение к уравнению в частных производных первого порядка и ищут его характеристики, решая обычную систему:

$$dx/dt = U_x, \quad dy/dt = U_y, \quad (9.4.13a)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_T \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (9.4.14a)$$

Характеристики [120] определяют решение. Движущаяся точка (x_p, y_p) связывается с каждой характеристикой p, которая задается ее параметрическим уравнением $x_p(t)$, $y_p(t)$, где t — время.

Экспериментальная область, которая предполагается прямоугольной, разбивается обычной стационарной сеткой на прямоугольники размером Δx и Δy. Каждая точка (i, j) располагается в центре прямоугольника R_{ij}. Первоначально движущиеся точки распределяются произвольно при начальных координатах $x_p(0)$ и $y_p(0)$ и начальной концентрации $C_p(0)$. Двух движущихся точек на интервал сетки достаточно (большее число не увеличивает точности метода).

$C_{i,j,n}$ в точках сетки известны, вязкость и плотность в каждой точке известны, а давление определяется из уравнения (Ф принимается постоянной):

$$\operatorname{div}\left[(k/\mu)(\operatorname{grad} p + \rho g \operatorname{grad} h)\right] = 0.$$

Это уравнение решается методом Писмана и Рэшфорда. С помощью системы (9.4.12) способом билинейной интерполяции определяются

компоненты скорости в центрах интервалов сетки и в любой точке. Новое положение точки (x_p, y_p) определяется из (9.4.13а) следующим образом:

$$x_{p,\,n+1} = x_{p,\,n} + \Delta t_n U_x(x_{p,\,n}, y_{p,\,n}),$$
$$y_{p,\,n+1} = y_{p,\,n} + \Delta t_n U_y(x_{p,\,n}, y_{p,\,n}). \qquad (9.4.13б)$$

Затем проверяются все точки, чтобы определить прямоугольник $R_{i,\,j}$, в котором они лежат. Каждый прямоугольник $R_{i,\,j}$ характеризуется концентрацией $C^+_{i,\,j,\,n}$, равной среднему из концентраций $C_{p,\,n}$ всех точек в их новых позициях в $R_{i,\,j}$. Изменение концентрации, обусловленное дисперсией, в каждом прямоугольнике определяется из уравнения (9.4.14а):

$$\Delta C^+_{i,\,y,\,n} = (\Delta t_n/\Phi)\left(K_L \Delta_x^2 C^+_{i,\,j,\,n} + K_T \Delta_y^2 C^+_{i,\,j,\,n}\right), \qquad (9.4.14б)$$

где Δ_x^2 и Δ_y^2 — аппроксимации $\partial^2 C/\partial x^2$ и $\partial^2 C/\partial y^2$.

Каждая движущаяся точка характеризуется затем новой концентрацией:

$$C_{p,\,n+1} = C_{p,\,n} + \Delta C^+_{i,\,j,\,n}.$$

Изменение концентрации, обусловленное дисперсией, одинаково для всех точек, попадающих в один и тот же прямоугольник.

Концентрации в точках стационарной сетки при новом временном шаге тогда определяются выражением:

$$C_{i,\,j,\,n+1} = C^+_{i,\,j,\,n} + \Delta C^+_{i,\,j,\,n}.$$

Эта процедура затем повторяется для каждого последующего временного шага. Описываемый метод предотвращает численную дисперсию: если дисперсия равна нулю ($K_L = K_T = 0$), нет никаких изменений концентраций $C_{p,\,n}$. Таким образом, любой разрыв в концентрации сохраняется и переносится.

Несмотря на то что численная дисперсия устраняется, «всплеск» остается [223]. Этот метод может представлять интерес для очень частных задач [228], но плохо обобщается. Метод весьма трудоемкий и требует больших затрат машинного времени.

9.4.7. Аппроксимация конечными элементами. Метод Галеркина

Конечно-разностные схемы вводят дискретизацию моделируемой области квадратами, прямоугольниками, либо параллелепипедами. Такое представление неудобно, когда границы имеют криволинейные очертания или когда перенос происходит не по прямым линиям. Очевидно, что конечно-разностная аппроксимация всегда возможна, но она может вносить погрешности усечения больше, чем обычные экспериментальные погрешности. Необходимо улучшить представление области, что достигается аппроксимацией конечными элементами.

Основу аппроксимации конечными элементами составляет разделение моделируемой области на подобласти или конечные элементы, обычно одинаковой формы. Неизвестная функция c аппроксимируется приближенным решением $\hat{c}$ линейной формы:

$$\hat{c} = \sum_{i=1}^{n} a_i U_i,$$

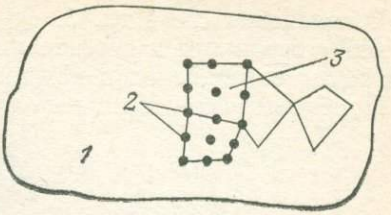


Рис. 9.4.6. Область, разделенная на конечные элементы [201].
1 — область D; *2* — область D_e; *3* — узлы

где U_i — линейно независимые подобранные функции, которые определены на всей моделируемой области и на ее границах, a_i — неизвестные параметры, подлежащие последовательному определению. В дискретизированной области (рис. 9.4.6), обычно в вершинах элементов и в характерных геометрических точках, выделяется n узлов. Приближенное решение представляется по частям, от элемента к элементу по всей области в виде пространственных переменных, узловых значений функции и ее производных.

Имеется, главным образом, два типа методов, а именно: метод невязок и вариационный метод, использующие пробные функции, такие как $\hat{c}$.

1. Если c удовлетворяет некоторому уравнению $L(c) = 0$, то приближенное решение $\hat{c}$ удовлетворяет некоторому уравнению $L(\hat{c})\ R$, где R — невязка. Задача состоит в минимизации R некоторым образом. Обычно это осуществляется путем минимизации весовой функции от R в хорошо выбранном векторном пространстве. Метод Галеркина, подробно рассматриваемый в этом параграфе, является методом невязок. Условия минимизации порождает систему алгебраических уравнений, которая может быть решена классическими методами линейных систем.

2. В вариационном методе решение c дает экспериментальное значение некоторого функционала $F(c)$. Метод заключается тогда в подстановке $\hat{c}$ в F и минимизации $F(\hat{c})$, которая приводит к системе алгебраических уравнений, а решение этой системы (классическими методами линейных систем) дает коэффициенты a_i [201]

Возможность применения метода невязок, названного методом Галеркина, к решению задач дисперсии была обоснована Пиндером [214]. Он применил его к задаче загрязнения водоносного горизонта хромом.

Дисперсионная схема определяется уравнениями:

$$L_c(c) = \operatorname{div}(K \operatorname{grad} c) - \operatorname{div}(uc) - \frac{\partial c}{\partial t} + Qc' = 0,$$

$$L_h(h) = \operatorname{div}(T \operatorname{grad} h) - \frac{\partial h}{\partial t} + Q = 0.$$

Обозначения см. в гл. 3. Q — функция притока, объединяющая дебит скважины и перетекание в напорные слои, а c' — концентрация загрязнения в жидкости источника.
Приближенные решения имеют вид:

$$\hat{c} = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, U_i(x), \quad \hat{h} = \sum_{i=1}^{n} H_i(t)\, \omega_i(x),$$

где x означает $(x, y, z, \ldots)$.

U_i и ω_i $(i = 1, \ldots n)$ — базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям для каждого уравнения. Эти базисные функции линейно независимы и представляют первые n функций полной системы в моделируемой области. Задача состоит в том, чтобы определить коэффициенты функций $C_i(t)$ и $H_i(t)$, которые минимизируют линейные формы $L_c(c)$ и $L_h(h)$.

Минимизация $L_c(c)$ осуществляется приравниванием нулю n интегралов от взвешенных невязок $L_c(\hat{c})$:

$$\int_D L_c(\hat{c})\, U_i \, \mathrm{d}D = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.4.15}$$

Весовыми функциями являются базисные функции U_i. Таким же образом получаем:

$$\int_D L_h(\hat{h})\, \omega_i \, \mathrm{d}D = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.4.16}$$

Замечание. Геометрически эти зависимости выражают тот факт, что если проекции вектора на три обычных координатных оси в пространстве R^3 равны нулю, то и вектор является нулевым. Это свойство распространяется на более общие функциональные пространства, связанные с полными базисами. Система функций U_i называется полной, если любая произвольная функция f, приемлемая для рассматриваемой задачи, может быть аппроксимирована линейной комбинацией

$$\sum_{i=1}^{n} a_i U_i(x),$$

с любой заданной точностью путем подбора достаточно большого n. Когда n стремится к бесконечности, ряд

$$\sum_{i=1}^{n} a_i U_i(x),$$

сходится (в некоторой норме) к f. Полный базис в общем функциональном пространстве выполняет роль, что и обычный базис в n-мерном векторном пространстве, подобном, например, R^3. Пригодность метода Галеркина для применения ЭВМ зависит от выбора базисных функций и элементов. Пиндер использовал криволинейные изопараметрические четырехугольники (рис. 9.4.7).

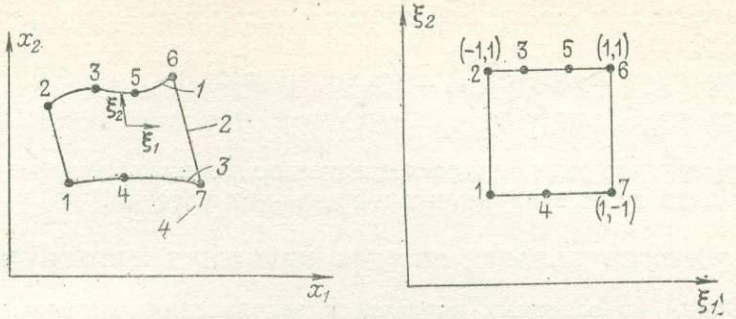


Рис. 9.4.7. Деформированные смешанные изопараметрические четырехугольные элементы в общей (x) и локальной (ξ) системах координат [214].

Цифры в кружках: *1* — кубическая сторона; *2* — линейная сторона; *3* — квадратическая сторона; *4* — номер узла

Линейные, квадратичные, кубические многочленные базисные функции могут быть определены на гранях элементов и на каждой грани использованы функции разных порядков, чтобы приспособиться к геометрии границ или ожидаемой форме неизвестного решения. Для облегчения интегрирования вводится безразмерная криволинейная система локальных (ξ) координат, в которой элементы представляют собой квадраты с узловыми точками, расположенными по середине стороны (квадратическая сторона) или на концах отрезков, равных одной трети стороны (кубическая сторона) (рис. 9.4.7 [201, с. 86]). Функции $U_i(x)$ и $\omega_i(x)$ записываются в переменных и подбираются таким образом, чтобы они удовлетворяли основным требованиям для базисных функций и связывали общие и локальные системы координат [280].

Из дисперсионной схемы и формул (9.4.15) и (9.41.16) можно получить две системы алгебраических уравнений:

$$[\mathbf{N}]\{C\} + [M]\{dC/dt\} + \{F\} = 0, \tag{9.4.17}$$

$$[\mathbf{P}]\{M\} + [\mathbf{R}]\{dH/dt\} + \{U\} = 0, \tag{9.4.18}$$

где $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}$ — матрицы $(n-m)\times(n-m)$ (m — число пассивных узлов, обусловленных граничными условиями задачи Дирихле), C, H, $\mathbf{d}/\mathbf{dt}$ и $\mathbf{d}H/\mathbf{d}t$ — векторы, содержащие неопределенные коэффициенты и их временные производные. Коэффициенты коэффициентных матриц выражаются в величинах интегралов по области базисных функций и их производных. Вычисление этих интегралов производится (лучше в локальной, чем в общей системе координат) в пределах интегрирования от -1 до $+1$ с использованием квадратуры Гаусса. В соответствии с опытом с помощью этих интегралов могут быть получены точные решения. Коэффициенты зависят от граничных условий.

Системы (9.4.17) и (9.4.18) решаются путем аппроксимации временных производных от концентрации и гидравлического на-

пора по конечно-разностной схеме с разностью назад в уравнении дисперсии:

$$[\mathbf{N}]\{C\}_{t+\Delta t} + [\mathbf{M}](\{C\}_{t+\Delta t} - \{C\}_t)/\Delta t + \{F\} = 0,$$

$$[\mathbf{P}]\{H\}_{t+\Delta t} + [\mathbf{R}](\{H\}_{t+\Delta t} - \{H\}_t)\,\Delta t + \{U\} = 0.$$

Эти уравнения решаются последовательно для каждого временного шага, для данных начальных и граничных условий.

9.5. ТЕОРИЯ БАЛАНСА ПОТОКОВ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Одним из основных параметров загрязнения подземных вод является скорость подземных вод. Мы уже исследовали полевые методы, с помощью которых определяется этот фактор. Конечно такие методы не могут быть использованы в прогнозных моделях и в моделях управления, когда водоотбор и восполнение изменяются, когда проектируются новые скважины и предприятия, и вообще всегда, когда режим загрязненного водоносного горизонта изменяется во времени. Таким образом, необходимо проведение математического моделирования движения подземных вод.

Основное уравнение фильтрации имеет вид:

$$\operatorname{div}(T \operatorname{grad} H) = S\,\frac{\partial H}{\partial t} + Q, \tag{9.5.1}$$

где $T = Ke$ — проводимость водоносного горизонта (см. прилож. 1), S — коэффициент водоотдачи, H — напоры, Q — интенсивность источников (например, испарение или скважины).

Это уравнение можно аппроксимировать, используя математические результаты раздела 9.4. Но в этом параграфе рассматривается метод дискретизации, который ближе отвечает физической сущности явления и иллюстрирует принципы моделирования, кратко изложенные во введении. Эти методы дополняют друг друга и в любой реальной задаче могут быть использованы совместно.

Ради простоты рассмотрим двумерный в плане напорный водоносный горизонт, третье измерение включается в значение водопроводимости. Наши результаты могут быть легко распространены на более общие водоносные горизонты и мы представляем это читателям.

9.5.1. Баланс элементарных блоков

Основной принцип заключается в мысленном выделении блока грунта; вода входит в него через некоторую поверхность и выходит через другую; кроме того, некоторое количество воды накапливается в порах. Применим закон сохранения массы, полагая, что если блок получает воду, то полученное количество является положительным, а если он теряет воду, то потерянное количество является отрицательным. Баланс массы тогда запишется:

Накопленная вода = полученная вода — потерянная вода

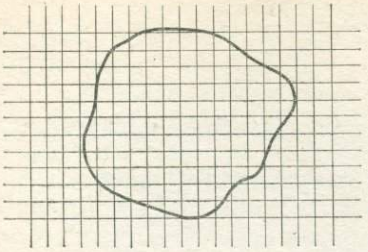


Рис. 9.5.1

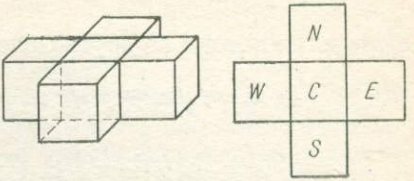


Рис. 9.5.2

Теперь проанализируем различные компоненты этого баланса. Блоки грунта представляются в виде кубических элементов с длиной ребра Δx. Водоносный горизонт дискретизируется, как показано на рис. 9.5.1.

З а м е ч а н и е. Эта теория справедлива и при любой другой дискретизации водоносного горизонта. Простые геометрические условия в примере не предполагают какого-либо упрощения теории.

Центром элементарного блока является C; N, S, E, W — соответственно центры блоков северного, южного, восточного и западного по отношению к C (рис. 9.5.2).

Распределения напоров и фильтрационные параметры определяются путем отнесения среднего значения рассматриваемой величины в этом блоке к его центру и вычисления баланса блока C в промежутке времени от t_1 до t_2. Плотность воды принимается постоянной; таким образом, рассматривается только уравнение сохранения объема.

Накопленная вода. Между моментами времени t_1 и t_2 пьезометрический уровень меняется от H_c до H_c^*. По определению коэффициента водоотдачи, накопленный объем воды алгебраически равен:
(Накопленная вода между t_1 и t_2) $= S_c\,(H_c^* - H_c)\,\Delta x^2$,
— если уровень поднимается, накопление положительное,
— если уровень опускается, накопление отрицательное.

Полученная или теряемая вода. Она имеет два происхождения: 1) вода, которая течет через блок благодаря обмену с соседними блоками, называется транзитной и 2) вода, наливаемая в скважины или откачиваемая из них, испарение, инфильтрация, называется привносимой.

1. Транзитная вода. Поток воды от блока W к блоку C равен:

$$Q_{\omega c} = T_{\omega c}\Delta x \frac{H\omega - Hc}{\Delta x}.$$

$T_{\omega c}$ — средняя проводимость поверхности раздела блоков. Самая грубая аппроксимация (основанная на регулярности свойств водоносного горизонта) имеет вид:

$$T_{\omega c} = \frac{1}{2}(T_\omega + T_c).$$

В соответствии с этой аппроксимацией:

$$Q_{\omega c} = \frac{1}{2}(T_\omega + T_c)(H_\omega - H_c).$$

Определяя потоки из других блоков, получим общий поток $Q_{\text{полн}}$:

$$Q_{\text{полн}} = \frac{1}{2}(T_N + T_C)(H_N - H_C) + \frac{1}{2}(T_S + T_C)(H_S - H_C) +$$

$$+ \frac{1}{2}(T_E + T_C)(H_E - H_C) + \frac{1}{2}(T_W + T_C)(H_W - H_C).$$

2. Привносимая вода. Приток этой воды Q_c равен:
Q_c = + (сумма расходов налива в скважины) — (сумма дебитов откачивающих скважин) + инфильтрация — испарение. За время от t_1 до t_2 количества транзитной и привносимой воды соответственно равны: $Q(t_2 - t_1)$ и $Q_c(t_2 - t_1)$.
Баланс потоков тогда запишется в виде:

$$S_c(H_c^* - H_c)\Delta x^2 = Q_{\text{полн}}(t_2 - t_1) + Q_c(t_2 - t_1),$$

и, полагая $\Delta t = t_2 - t_1$, получим дискретизированную форму уравнения фильтрации:

$$S_c \frac{(H_c^* - H_c)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2}\left[\frac{1}{2}(T_N + T_C)(H_N - H_C) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}(T_S + T_C)(H_S - H_C) + \frac{1}{2}(T_E + T_C)(H_E - H_C) +$$

$$\left. + \frac{1}{2}(T_W + T_C)(H_W - H_C)\right] + \frac{Q_c}{\Delta x^2}. \qquad (9.5.2)$$

Замечание 1. $(H_c^* - H_c)/\Delta t$ представляет собой среднюю скорость изменения пьезометрического уровня за период времени между t_1 и t_2.

Замечание 2. $Q_c/\Delta x^2$ — осредненный приток через единичную площадь поверхности блока. Это значит, что обмен поверхностью (инфильтрация и испарение) и точечные источники (скважины) осредняются в пределах блока.

Уравнение (9.5.2) является аппроксимацией уравнения (9.5.1), которая основана только на законе сохранения массы и отражает физическую сущность уравнения (9.5.1). На самом деле некоторые авторы [83] выводят (9.5.1) из (9.5.2), определяя пределы различных членов, при Δx и Δt, стремящихся к нулю.

9.5.2. Граничные условия

Водоносный горизонт ограничен и обмены водой с внешней областью управляются граничными условиями, которые бывают двух типов:

1. Граничные условия внешние по отношению к уравнению. Наиболее обычными являются:

— постоянные потенциалы; они возникают благодаря наличию прудов, озер, поверхностных водотоков, прорезающих водоносный горизонт.

— нулевой поток; он обусловлен непроницаемой границей;

— потенциалы, изменяющиеся во времени, такие как уровень моря в прибрежных водоносных горизонтах.

2. Граничные условия внутренние по отношению к уравнению. Рассмотрим скважину. Если ее размер мал по сравнению с величиной ячейки сетки, ее расход может рассматриваться как приток в этот блок и включаться в уравнение как некоторый Q_c. Таким же образом испарение и инфильтрация могут рассматриваться либо как условия с переменным расходом, либо как приток, включаемый в уравнение. В зависимости от задачи имеет либо граничные условия, либо особенности, поля включаемые в уравнение как член Q_c.

9.5.3. Простой пример

Рассмотрим водоносный горизонт, дискретизированный в соответствии с рис. 9.5.3. На рис. 9.5.3 показаны значения проводимостей, граничных условий и особенности поля. Режим установившийся, т. е. независящий от времени.

Можно написать уравнения потоков для каждой ячейки сетки (табл. 4).

Расположим коэффициенты H_4, H_5 и H_6 для каждого уравнения в табл. 5.

Таблица 4

Номера ячеек, к которым поступает поток	Поток поступающий из ячейки				Расход
	N	S	E	W	
4	8 (7—H_4)	+8 (11—H_4)	+8 (H_5—H_4)	+0	0
5	5 (8—H_5)	+7 (13—H_5)	+4 (H_6—H_5)	+8 (H_4—H_5)	—7
6	2 (9—H_6)	+4 (13—H_6)	+0	+4 (H_5—H_6)	0

Таблица 5

Номера ячеек	Коэффициенты		
	H_4	H_5	H_6
4	—24	8	0
5	8	—24	4
6	0	4	—10

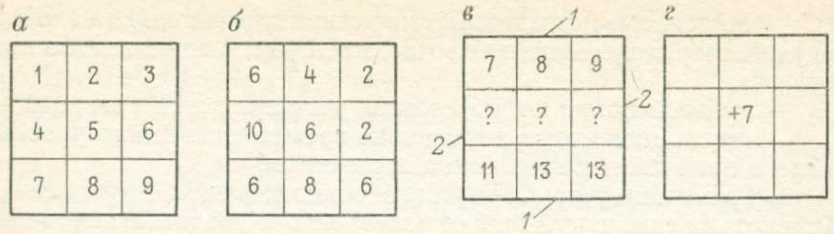


Рис. 9.5.3.

а — нумерация ячеек; *б* — распределение проводимости ($м^2/с \cdot 10^{-3}$); *в* — граничные условия: *1* — постоянные потенциалы, *2* — непроницаемые границы; *г* — расположение и расход ($м^3/с \cdot 10^{-3}$) пусковой скважины

Коэффициенты обычно записываются так:

$$\begin{bmatrix} -24 & 8 & 0 \\ 8 & -24 & 4 \\ 0 & 4 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -144 \\ -138 \\ -70 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты матрицы H_4, H_5, H_6 называются гидравлической матрицей или матрицей проводимости Т.

9.5.4. Некоторые свойства матрицы проводимости

В предыдущем примере мы наблюдали, что матрица проводимости является матрицей диагонально доминирующей и симметричной. Это ее главные свойства.

1. Симметрия. i и j номера двух соседних блоков, поток от i к j равен по абсолютной величине потоку от j к i. Коэффициент при H_i равен коэффициенту при H_j.

2. Доминирование диагонали. Рассмотрим уравнение баланса потоков в точке c при установившемся режиме:

$$T_{NC}(H_N - H_C) + T_{SC}(H_S - H_C) + T_{WC}(H_W - H_C) + \\ + T_{EC}(H_E - H_C) = Q_C;$$

Таблица 6

Номера уравнений	Номера ячеек									Правая часть уравнения
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	$+H_1$									7
2		$+H_2$								8
3			$+H_3$							9
4	$+8H_1$			$+24H_4$	$+8H_5$		$+8H_7$			0
5		$+5H_2$		$+8H_4$	-24_5H_S	$+4H_6$		$+7H_8$		-7
6			$+2H_3$		$+4H_5$	$-10H_6$			$+4H_9$	0
7							$+H_7$			11
8								$+H_8$		12
9									$+H_9$	13

представим этот баланс в виде:

$$T_{NC}H_N + T_{SC}H_S + T_{WC}H_W + T_{EC}H_E -$$

$$-(T_{NC} + T_{SC} + T_{WC} + T_{EC})H_C = Q_C.$$

Оказывается, что коэффициент при H_C лежит на главной диагонали и больше или равен сумме других коэффициентов, которые положительны.

Строгое неравенство может быть в случае, когда блок, скажем N, имеет заданный постоянный потенциал на границе. H_N известно и уравнение баланса потоков тогда можно записать:

$$T_{SC}H_S + T_{WC}H_W + T_{EC}H_E - (T_{NC} + T_{SC} + T_{WC} + T_{EC})H_C =$$

$$= Q_C - T_{NC}H_N,$$

сохраняя неизвестные только в левой части. Неравенство очевидно.

Замечание. Рассмотрим предыдущий пример. Можно записать полную систему уравнений для всех блоков (табл. 6). Это, однако, неэффективно, так как уравнения 1, 2, 3, 7, 8, 9 бесполезны. Запишем матричную систему:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -24 & 8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & -24 & 4 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -10 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \\ H_8 \\ H_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \end{vmatrix}$$

Давление
»
»
Расход
»
»
Давление
»
»

Эта матрица остается еще диагонально доминирующей, но она потеряла свою симметрию, так как в одно и то же время содержит уравнения давления и уравнения потоков. Это как раз то, чего не следует делать.

9.6. ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Мы показали два типа методов:

1) аппроксимация: явная, неявная, Кранка—Николсона или НМПН, которые дают оценку $C(t + \Delta t)$ по $C(t)$;

2) процедуры: точечной или блочной последовательной верхней релаксации, Гаусса—Зейделя или Якоби для решения систем линейных уравнений с помощью итераций. Методом исключения Гаусса системы линейных уравнений решаются прямым обращением матрицы коэффициентов системы.

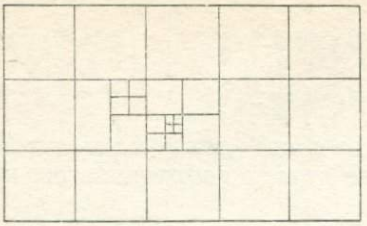


Рис. 9.6.1. Меняющаяся сетка

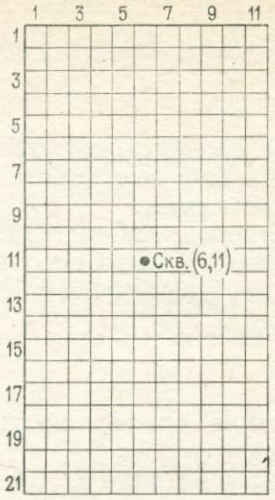


Рис. 9.6.2

Метод полного решения состоит тогда в отыскании аппроксимации нестационарной задачи. Если аппроксимация явная, то $C\,(t + \Delta t)$ вычисляется простым сложением и умножениями; если аппроксимация неявная (или Кранка—Николсона), то чтобы решить систему линейных уравнений на каждом временном шаге необходимо выбрать соответствующую процедуру. Если аппроксимация соответствует НМПН, то на каждом временном шаге с помощью метода исключения Гаусса. В случае стационарной задачи, конечно, должна использоваться какая-либо определенная процедура.

Выбор аппроксимации и процедуры должен зависеть от геометрии области; НМПН должен быть зарезервирован для абсолютно прямоугольных или выпуклых областей; точечная последовательная верхняя релаксация может быть использована в случае сложной геометрии. Блочная последовательная релаксация может быть использована в случае, когда геометрия сложная в одном направлении и простая в другом.

Когда необходимо уточнить сведения о части области, вводится меняющаяся сетка (рис. 9.6.1) и применяется точечная последовательная верхняя релаксация. Такая ситуация возникает, например, когда изучается загрязнение вблизи водоотборной скважины.

В качестве иллюстрации здесь приводятся три основные программы, а именно: две процедуры и трехдиагональное исключение Гаусса. Хотя они, вероятно, не являются оптимальными вариантами записи задачи на Фортране, но могут быть использованы в качестве контроля упражнений студентами.

Процедуры предназначены для решения следующей задачи. Горизонтальный водоносный горизонт представлен дискретизированной областью (рис. 9.6.2). Нужно определить потенциалы, если

известно, что потенциал на границе равен 100 м. Проводимость постоянна и равна 10^{-3} м²/с. Имеется скважина в центре, из которой производится откачка, с дебитом 0,05 м³/с.

Режим установившийся, и модель определяется уравнением (9.5.2) с $H_C^* = H_C$.

1. Процедура Гаусса—Зейделя:

```
PROGRAM GAS(INPUT, OUTPUT)
METHOD OF GAUSS SEIDEL
DIMENSION T(21, 11), Q(21, 11), H1(21, 11)
                              *DATA INPUT*
      READ 100, IMIN, IMAX, JMIN, JMAX
  100 FORMAT (413)
      DO 1 I=MIN, IMAX
      DO 1 J=MIN, JMAX
      T(I, J)=0.001
      Q(I, J)=0.
    1 CONTINUE
      Q(11, 6)=0.05
                              *INITIAL CONDITIONS*
      DO 2 I=IMIN, IMAX
      DO 2 J=JMIN, JMAX
      H1(I, J)=0
    2 CONTINUE
                              *BOUNDARY CONDITIONS*
      DO 3 I=IMIN, IMAX
      H1(I, JMIN)=100.
      H1(I, JMAX)=100.
    3 CONTINUE
      DO 4 J=JMIN, JMAX
      H1(IMIN, J)=100.
      H1(IMAX), J)=100.
    4 CONTINUE
      DO 5 L=1, 150
      U=O.
      IMI=IMIN+1
      IMA=IMAX—1
      JMI=JMIN+1
      JMA=JMAX—1
      DO 6 I=IMI, IMA
      DO 6 J=JMI, JMA
      TN=05*(T(I, J)+T(I—1, J))
      TS=0.5*(T(I, J)+T(I+1, J))
      TE=0.5*(T(I, J)+T(I, J+1))
      TW=0.5*(T(I, J)+T(I, J—1)
      TTOT=TN+TS+TW+TE
      Z=TN*H1(I—1, J)+TS*H1(I+1, J)+TE*H1(I, J+1)+
      +TW*H1(I, J—1)
      Z =Z/TTOT
                              *COMPUTATIOH OF THE RESIDUE*
      U=U+(Z—H1(I, J))*(Z—H1(I, J))
      H1(I, J)=Z
    6 CONTINUE
      IF(U—0.001)8, 8, 7
    7 CONTINUE
      PRINT 1000, L, U
    5 CONTINUE
                              *RESULTS*
```

```
    8 PRINT 1001
      DO 10 I=IMIN, IMAX
      PRINT 1002, I  (H1(I, J), J=JMIN, JMAX)
   10 CONTINUE
 1000 FORMAT(5X, *ITERATION*, 13, *RESIDUE*, E15.8)
 1001 FORMAT(1H1, 5X, *POTENTIAL MAP* //)
 1002 FORMAT(1H, 12, 3X, 11(E10.3, 1X)//)
      STOP
      END
```

2. Последовательная верхняя релаксация

```
PROGRAM SOR(INPUT, OUTPUT)
                              METHOD OF FRANKEL—YOUNG
DIMENSION T(21, 11), Q(21,11), H1 (21, 11)
                              *DATA INPUT*
      R=1.9
      READ 100, IMIN, IMAX, JMIH, JMAX
  100 FORMAT(413)
      DO 1 I=IMIN, IMAX
      DO 1 J=JMIN, JMAX
      T(I, J)=0.001
      Q(I, J)=0.
    1 CONTINUE
      Q(11,6)=0.05
                              *INITIAL CONDITIONS*
      DO 2 I=IMIN, IMAX
      DO 2 J=JMIN, JMAX
      H1(I, J)=0.
    2 CONTINUE
                              *BOUNDARY C BONDITIONS*
      DO 3 I=IMIN, IMAX
      H1(I, JMIN)=100.
      H1(I, JMAX)=100.
    3 CONTINUE
      DO 4 J=JMIN, JMAX
      H1(IMIN, J)=100.
      H1(IMAX, J)=100.
    4 CONTINUE
      DO 5 L=1, 150
      U=0.
      IMI=IMIN+1
      IMA=IMAX—1
      JMI=JMIN+1
      JMA=JMAX—1
      DO 6 I=IMI, IMA
   DO 6 J=JMI, JMA
      TN=0.5*(T(I, J)+T(I—1, J))
      TS=0.5*(T(I,J)+T(I+1, J))
      TE=0.5*(T(I, J)+T(I, J+1))
      TW=0.5*(T(I, J)+T(I, J—1))
      TTOT=TN+TS+TW+TE
      Z=TN*H1(I—1, J)+TS*H1(I+1, J)+TE*H1(I, J+1)+TW
       *H1(I, J—1)
      Z=Z/TTOT
                              *COMPUTATION OF THE RESIDUE*
      V=Z—H1(I, J)
      U=U+V*V
      H1(I, J)=H1(I, J)+R*V
    6 CONTINUE
      IF(U—0.001)8, 8, 7
```

```
    7 CONTINUE
      PRINT 1000, L, U
    5 CONTINUE
                              *RESULTS*
    8 PRINT 1001
      DO 10 I=IMIN, IMAX
      PRINT 1002, I, (H1(1, J), J=JMIN, JMAX)
   10 CONTINUE
 1000 FORMAT(5X,* ITERATION*, 13, *RESIDUE*, E15.8)
 1001 FORMAT(1H1, 5X, *POTENTIAL MAP*11)
 1002 FORMAT(1H, I2, 3X, 11(E10.3, IX)11)
      STOP
      END
```

3. Трехдиагональный метод исключения Гаусса. Решение системы (9.3.1)

```
DIMENSION ALF(N), BETA(N), B(N), C(N), D(N), X(N)
      ALF(1)=D(1)/B(1)
      BETA(1)=C(1)/B(1)
      DØ1I=2, N
      ALF(I)=(D(I)—A(I)*ALF(I—1)/(B(I)—A(I)*BETA(I—1))
      BETA(I)=C(I)/B(I)—A(I)*BETA(I—1))
    1 CONTINUE
      X(N)=ALF(N)
      II=N—I
      DØ2III=1, II
      I=N—III
      X(I)=ALF(I)—BETA(I)*X(I+1)
      CONTINUE
      STOP
      END
```

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДВИЖЕНИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Данное приложение предназначено для того, чтобы дать лишь основные определения, связанные с практическими аспектами движения воды в породе и его измерениями. Например, мы подходим к понятию «напор», только взаимосвязывая его с уровнем воды в скважине, который в действительности является лишь практическим мерилом напора в водоносном горизонте. Если читатель имеет намерение глубже вникнуть в теорию движения подземных вод, то имеется много учебников на эту тему, таких как Д. Бэра [17], Д. Тодда [263], Ди Виста [65], в частности, в них можно найти описание случая непотенциального течения (который мы здесь не рассматриваем) и общих аспектов закона Дарси.

П.1.1. Причина движения подземных вод

Причиной движения подземных вод является гидравлический потенциал или напор. Этот потенциал представлен уровнем воды в буровых скважинах. Разность напоров между двумя точками равна разности уровней воды в двух скважинах, пробуренных в этих точках. Фактически, причиной движения воды является разность потенциалов:

— если жидкость имеет один и тот же напор повсеместно, то движение отсутствует;

— если имеет место разность напоров в пространстве, то вода движется в направлении уменьшающихся напоров (рис. П.1.1).

Краткий экскурс в теорию гидравлики. Из гидростатики известно, что $p_1 = \rho g (h_1 - z_1)$, p — давление, ρ — плотность, g — сила тяжести, h и z обозначены на рис. П.1.2.

$$h_1 = p_1/\rho g + z_1,$$

h_1 — напор в точке 1. Фактически напор задается зависимостью:

$$h = p_1/\rho g + v^2/2g + z,$$

где v — скорость движения воды. В пористой среде величиной v^2 можно пренебречь. Вдоль линии тока, согласно Бернулли, имеем:

$$p_1/\rho g + z_1 = p_2/\rho g + z_2 + \Delta h,$$

где Δh — потеря напора (понижение) за счет необратимого рассеяния энергии, обусловленного вязкостью.

Следовательно, разность напора определяется разностью уровней воды $h_1 - h_2$.

П.1.2. Напорный и безнапорный водоносные горизонты

Скважина бурится на водоносный горизонт, бурение останавливается, как только в скважине появляется вода:

— если при этом уровень воды в скважине устанавливается выше забоя скважины, то водоносный горизонт является напорным;

— если уровень воды в скважине не поднимается, то водоносный горизонт является безнапорным.

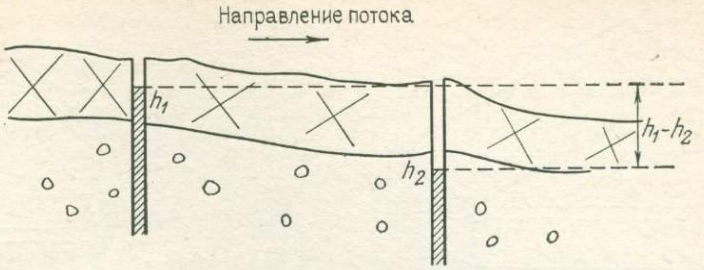


Рис. П.1.1

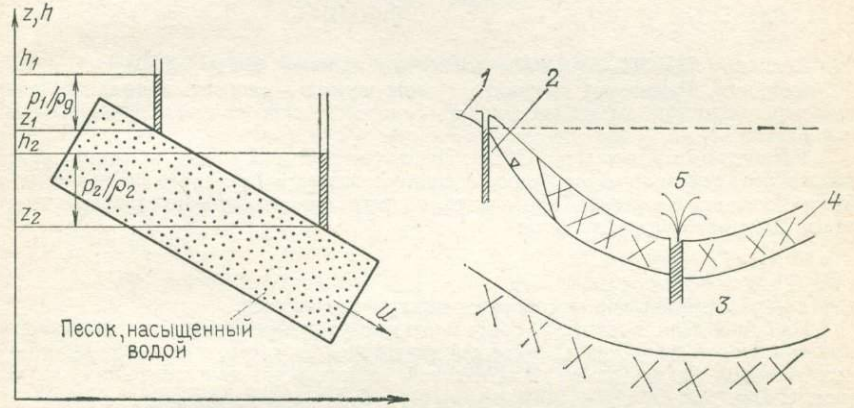


Рис. П.1.2. Иллюстрация к понятию напора

Рис. П.1.3. Напорный и безнапорный водоносные горизонты.

1 — зеркало грунтовых вод; *2* — безнапорный водоносный горизонт; *3* — напорный водоносный горизонт; *4* — водоупорный пласт; *5* — артезианская скважина

Один и тот же водоносный горизонт может быть напорным в некоторых районах и безнапорным в других. Напорность или безнапорность являются локальным «свойством» водоносного горизонта. Здесь мы имеем дело с простейшим применением принципа сообщающихся сосудов (рис. П.1.3).

Вода в буровой скважине стабилизируется на уровне, называемом пьезометрическим. Поверхность, которая объединяет все уровни воды во всех точках, представляет собой пьезометрическую поверхность. Если пьезометрическая поверхность идентична зеркалу грунтовых вод, то она является свободной поверхностью и водоносный горизонт — безнапорный. В противном случае пьезометрическая поверхность всегда выше зеркала грунтовых вод.

П.1.3. Гидравлический градиент и скорости

Гидравлический градиент. Рассмотрим две точки A и B вдоль горизонтальной линии тока и соответствующие им напоры (или пьезометрические уровни) H_A и H_B. Расстояние между A и B вдоль линии тока L (рис. П.1.4).

Гидравлический градиент в направлении от A к B:

$$i = \frac{H_B - H_A}{L}.$$

Он является алгебраической величиной. Если гидравлический градиент берется по направлению потока, то он отрицательный, так как мы отмечали, что поток движется в направлении уменьшающихся напоров.

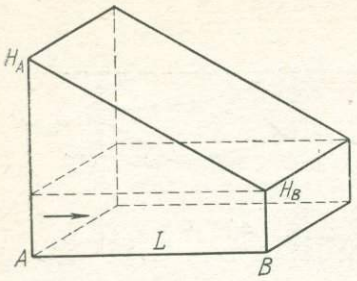


Рис. П.1.4

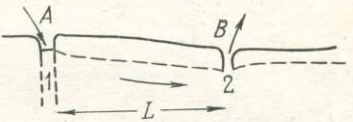


Рис. П.1.5

Величину $H_B—H_A$ называют разностью напоров между точками A и B.

Скорости. Различают скорости: 1) кажущуюся — скорость суммарного потока через пористую среду; 2) истинную — скорость микроскопической капли воды в пористой среде.

Рассмотрим пример (рис. П.1.5). Пусть точки A и B лежат на линии тока; вводим большое количество радиоактивного трассера в скв. 1. По истечении некоторого периода времени T проба в скв. 1 зарегистрирует наличие радиоактивной воды. Действительная скорость:

$$V = L/T,$$

где L — горизонтальное расстояние между скважинами.

На самом деле, в пористой среде молекулы не придерживаются прямолинейных траекторий, скорости их выше действительной скорости, так как из-за влияния твердой фазы длина фактической траектории молекулы больше L (рис. П.1.6).

Кажущаяся скорость называется макроскопической или средней скоростью фильтрации V_M. Действительная скорость фильтрации V_m идентифицируется с микроскопической скоростью.

П.1.4 Закон Дарси

Вдоль линии тока имеем:

$$V_M = -K_M i,$$

где K_M — коэффициент, имеющий размерность скорости. Знак минус появляется из-за уменьшения напора в направлении движения.

Закон Дарси констатирует, что скорость подземных вод пропорциональна гидравлическому градиенту.

П.1.5. Фильтрационный расход потока

Рассмотрим фильтрационный расход через поперечное сечение пласта (рис. П.1.7).

Пусть вода течет через поперечное сечение высотой e и шириной l, перпендикулярное линиям тока. Рассмотрим сначала сильно упрощенное явление — сплошной флюид без твердой фазы. За период времени от t_1 до t_2 через поперечное сечение проходит объем флюида q, что определяет длину L зависимостью:

$$q = leL.$$

L может быть представлено как действительное расстояние, пройденное поперечным сечением потока за период времени $t_2—t_1$.

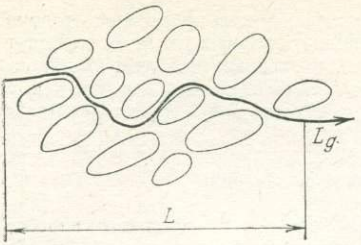


Рис. П.1.6. Действительная (L_g) и осредненная (L) траектории

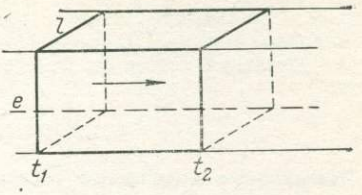


Рис. П.1.7. Элементарный блок породы

Средняя скорость V_M между t_1 и t_2 определяется тогда формулой:

$$V_M = L/(t_2 - t_1),$$

а расход потока Q через поперечное сечение выражается как:

$$Q = q/(t_2 - t_1) = V_M \cdot le.$$

Аналогично расход потока через поперечное сечение пористой среды

$$Q = V_D l \cdot e, \qquad (П.1.1.)$$

где V_D — скорость фильтрации. Из этого следует, что скорость фильтрации не истинная скорость, а абстрактное понятие. Уравнение (П.1.1) определяет V_D через измеряемые величины Q, l и e.

П.1.6. Определение пористости по Дарси

Расход потока может быть также выражен в зависимости от макроскопической скорости V_M:

$$Q = V_M S,$$

где S — площадь пор в поперечном сечении.

Пористость по Дарси определяется формулой:

$$\Phi_D = V_D/V_M,$$

так что, подставляя $K_D = \Phi_D K_M$, получим другую форму записи закона Дарси:

$$V_D = -K_D i,$$

где K_D — коэффициент проницаемости.

Следует подчеркнуть, что пористость по Дарси имеет гидравлический смысл, так как она представляет собой часть пористой среды, проводящей воду под давлением потока. Это — эффективная пористость. Оценки процентного содержания пор в пористой среде дают истинную пористость Ф, бо́льшую, чем Φ_D, что объясняется присутствием тупиковых пор и адсорбированной воды или, в более общем смысле, воды, связанной с твердой фазой, которая не принимает участия в фильтрации.

П.1.7. Проводимость

Фактический расход воды

$$Q = -K_D e l i$$

записывается как: $Q = -(K_D e)\, li = -Tli$,

где $T = K_D e$ — проводимость, измеряемая в L^2T^{-1}.

Например, проводимость 1 м^2 при длине потока $l = 1$ м и градиенте $i = -1$ дает расход 1 м^3/с.

Понятие проводимости обычно используется для напорных водоносных горизонтов, когда e представляет собой мощность горизонта. Это позволяет рассматривать трехмерные случаи с помощью двумерных моделей, особенно при оценке водных ресурсов. Такие модели не столь адекватны при анализе некоторых случаев движения подземных вод, когда требуется обобщенная форма закона Дарси.

П.1.8. Коэффициент водоотдачи

Безнапорные водоносные горизонты. Термин «коэффициент водоотдачи» применяют для безнапорных водоносных горизонтов не вполне правомерно, однако, так или иначе, мы даем его общепринятое определение и для этого случая.

При откачке воды из водоносного горизонта пьезометрический уровень уменьшается от H_A до H_B (рис. П.1.8). Объем воды V_W отбирается с площади A. Объем пористого пласта, ограниченный зеркалом подземных вод, равен:

$$V_p = (H_A - H_B) \cdot A,$$

Тогда

$$V_W = \Phi_D \cdot V_p = \Phi_D (H_A - H_B) \cdot A,$$

а так как $\Phi_D < 1$, то $V_W < V_P$.

Итак, коэффициент водоотдачи совпадает с эффективной пористостью.

Напорные водоносные горизонты. Термин «коэффициент водоотдачи» в действительности приемлем только для напорных водоносных горизонтов. И хотя в обоих случаях схематические представления аналогичны, физические механизмы в корне различны.

Если V_W — фактический объем воды, извлекаемый из объема породы при изменении эффективного давления (рис. П.1.9), то коэффициент водоотдачи определяется зависимостью:

$$V_W = SV_P$$

причем S — безразмерная величина.

Объяснение соответствующего механизма таково *. Когда пьезометрический уровень снижается, вода сжимается меньше, и это дает первые порции воды V_1. Если β — коэффициент сжимаемости воды, определяемый как:

$$\beta = -\frac{\Delta V}{V} \Big/ \Delta p,$$

то

$$|\Delta V| = \beta |\Delta p| V\Phi.$$

Здесь $V\Phi$ — объем воды, заключенный в объеме породы $V = Ae$, где e — мощность водоносного горизонта, A — площадь рассматриваемого участка (см. рис. П.1.8).

Таким образом,

$$V_1 = \beta |(H_B - H_A) \rho g| Ae\Phi,$$

где Φ — пористость водоносного горизонта, $Ae\Phi$ — объем пор. По мере падения давления воды твердая фаза расширяется и «выталкивает» некоторую часть воды V_2

$$V_2 = \alpha [(H_B - H_A) \rho g] Ae (1 - \Phi),$$

где α — коэффициент сжимаемости твердой фазы, $Ae(1 - \Phi)$ — объем твердой фазы. Полный объем V отжатой воды:

$$V = V_1 + V_2 = A |H_B - H_A| [\Phi\beta\rho + (1 - \Phi) \alpha\rho g] e.$$

---

* Приводимое объяснение неполно, ибо оно не учитывает измерения пористости пород при изменении эффективного давления. — *Прим. ред.*

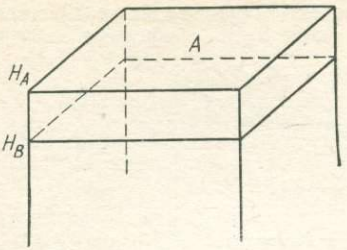
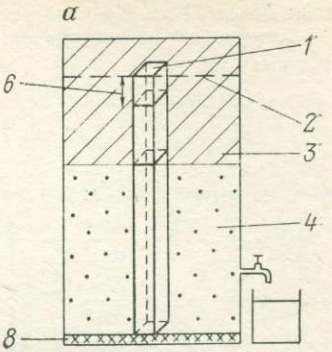


Рис. П.1.8



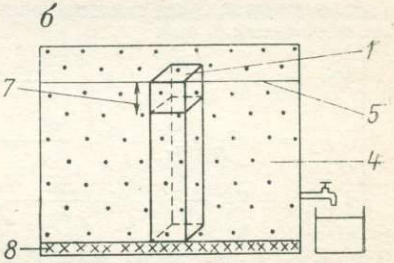


Рис. П.1.9. К определению коэффициента водоотдачи.

а — напорный водоносный горизонт, *б* — безнапорный водоносный горизонт.
1 — единичная площадка; *2* — пьезометрическая поверхность; *3* — водоупорный слой; *4* — водоносный горизонт; *5* — уровень грунтовых вод; *6* — единичное понижение пьезометрической поверхности; *7* — единичное понижение зеркала грунтовых вод; *8* — подошва водоносного горизонта

Тогда коэффициент водоотдачи:

$$S = [\Phi\beta\rho g + (1 - \Phi)\alpha\rho g]\, e.$$

Другое полезное определение S: коэффициент водоотдачи представляет собой объем воды, который водоносный горизонт отдает или принимает на единицу площади пласта при единичном изменении напора вдоль нормали к напластованию.

П.1.9. Обобщение закона Дарси

Гидравлический градиент. Рассмотрим пьезометрический уровень $h(x\ y\ z)$ в точке (x, y, z) и линию тока, проходящую через точки A и B, соответствующих координатам (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) в некоторой системе. Гидравлический градиент между точками A и B представляет собой вектор, определяемый следующим образом:

$$i_{AB}\begin{cases}[h(b_1, b_2, b_3) - h(a_1, a_2, a_3)]/(b_1 - a_1)\\ [h(b_1, b_2, b_3) - h(a_1, a_2, a_3)]/(b_2 - a_2)\\ [h(b_1, b_2, b_3) - h(a_1, a_2, a_3)]/(b_3 - a_3).\end{cases}$$

Это определение градиента непосредственно вытекает из приложения 1.3. Если B стремится к A, то i_{AB} стремится к вектору i_A:

$$i_A\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial x}(a_1, a_2, a_3)\\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(a_1, a_2, a_3)\\ \dfrac{\partial h}{\partial z}(a_1\ a_2, a_3).\end{cases}$$

и i_A мы будем называть гидравлическим градиентом в точке A (grad h).

Закон Дарси. Пусть K_M является коэффициентом макроскопической скорости и K_D — коэффициентом фильтрации; тогда закон Дарси обобщается на первом этапе в виде:

$$V_M = -K_M \operatorname{grad} h,$$

$$V_D = -K_D \operatorname{grad} h,$$

где компоненты векторов V_M и V_D таковы:

$$V_M \begin{cases} V_{Mx} = -K_M \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ V_{My} = -K_M \dfrac{\partial h}{\partial y} \\ V_{Mz} = -K_M \dfrac{\partial h}{\partial z}, \end{cases} \quad V_D \begin{cases} V_{Dx} = -K_D \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ V_{Dy} = -K_D \dfrac{\partial h}{\partial y} \\ V_{Dz} = -K_D \dfrac{\partial h}{\partial z}. \end{cases}$$

Если пористая среда является анизотропной и неоднородной, то закон Дарси далее обобщается в виде:

$$\begin{cases} V_{Dx} = -K_{xx} \dfrac{\partial h}{\partial x} - K_{xy} \dfrac{\partial h}{\partial x} - K_{xz} \dfrac{\partial h}{\partial z} \\ V_{Dy} = -K_{yx} \dfrac{\partial h}{\partial x} - K_{yy} \dfrac{\partial h}{\partial y} - K_{yz} \dfrac{\partial h}{\partial z} \\ V_{Dz} = -K_{zx} \dfrac{\partial h}{\partial x} - K_{zy} \dfrac{\partial h}{\partial y} - K_{zz} \dfrac{\partial h}{\partial z}. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. Более общая форма закона Дарси (по сравнению с использованной до сих пор) применяется для непотенциального течения жидкости:

$$V_D = -\frac{k}{\mu} (\operatorname{grad} p + \rho g \operatorname{grad} z).$$

Эта форма закона Дарси должна использоваться, когда плотность непостоянна, что имеет место в некоторых проблемах загрязнения (мы назвали этот случай «общим случаем» и приводили пример с соляной интрузией из солеотвалов).

В приведенной формуле k — коэффициент проницаемости, μ — динамическая вязкость. Если ρ константа, то получаем обычную форму закона Дарси:

$$V_D = -\frac{k\rho g}{\mu} \operatorname{grad} \left(\frac{P}{\rho g} + z \right) = -K_D \operatorname{grad} h,$$

где

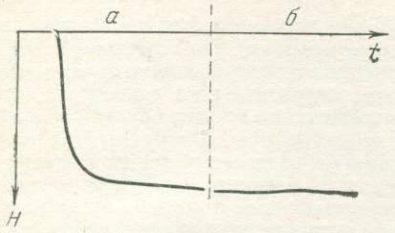
$$K_D = \frac{k\rho g}{\mu} \quad \text{и} \quad h = \frac{P}{\rho g} + z.$$

Представление уравнения фильтрации в гидравлической форме (метод Эмселлема). Уравнение, описывающее движение подземных вод в напорных и безнапорных водоносных горизонтах, выводится из уравнения неразрывности и закона Дарси [65, 17]. Для примера дается вывод гидравлического уравнения для напорного водоносного горизонта согласно Эмселлему [76].

Уравнение (9.5.2) запишем в виде:

$$S \frac{H_C^* - H_C}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2} ({}^1/_2 [(T_N + T_C)(H_N - H_C) + (T_S + T_C)(H_S - H_C) +$$

$$+ (T_E + T_C)(H_E - H_C) + (T_W + T_C)(H_W - H_C)] + Q/\Delta x^2.$$



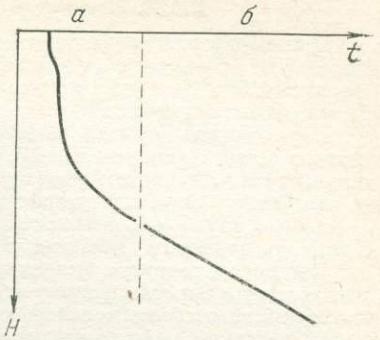
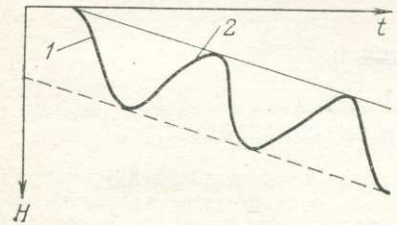


Рис. П.1.10. Неустановившийся (*а*) и стационарный (*б*) режимы

Рис. П.1.11. Неустановившийся (*а*) и квазистационарный (*б*) режимы



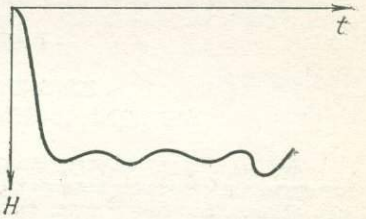


Рис. П.1.12. Циклический режим с дефицитом.
1 — испарение; *2* — инфильтрация

Рис. П.1.13. Циклический режим с питанием

При Δt и Δx, стремящихся к нулю:

$$\frac{H_C^* - H_C}{\Delta t} \to \frac{\partial h}{\partial t}(C),$$

$$\frac{H_N - H_C}{\Delta x} \to \frac{\partial h}{\partial x}(C),$$

$$\frac{\frac{1}{2}(T_N + T_C)\frac{H_N - H_C}{\Delta z} - \frac{1}{2}(T_S - H_C)\frac{H_C - H_S}{\Delta x}}{\Delta x} \to \frac{\partial}{\partial x}\left[T\frac{\partial h}{\partial x}(C)\right],$$

$$\frac{Q}{\Delta x^2} \to q,$$

где q — удельный расход локальных источников.
Уравнение (9.5.2) принимает вид:

$$S\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right) + q,$$

или

$$S\frac{\partial h}{\partial t} = \operatorname{div}(T \operatorname{grad} h) + q.$$

П.1.10. Некоторые замечания о режимах потока

Рассмотрим изолированный водоносный горизонт, т. е. горизонт, в котором отсутствуют источники поступления воды; пусть из этого водоносного горизонта проводится откачка воды с постоянным расходом, будем фиксировать изменение уровня воды во времени.

Первоначально уровень снижается согласно характерной кривой неустановившегося режима (режим распространения возмущения). По истечении некоторого времени можно видеть, что форма пьезометрической поверхности практически не изменяется. Снижение уровня водоносного горизонта идет равномерно, его изменение в какой-либо точке синхронно с изменениями во всех других точках * и скорость снижения одинакова. Этот режим называется однородным **.

Предположим теперь, что дожди привносят в водоносный горизонт определенное количество воды (согласно годовому циклу) и что это количество меньше, чем общий водоотбор. Равномерное снижение, вызванное откачкой, будет нарушаться наличием расходов испарения — инфильтрации; но так как в целом воды атмосферных осадков не покрывают водоотбора, то мы имеем циклический режим с дефицитом (в противном случае — цикл с подпиткой).

Различные режимы отражены на рис. П.1.10—П.1.13.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОФИЗИКИ. МЕТОДЫ НАЗЕМНОЙ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

Методы вертикального электрозондирования широко используются для определения строения водоносных горизонтов, в особенности для аллювиальных водоносных горизонтов, которые по своим электрическим свойствам часто весьма резко отличаются от контактирующих с ними слоев. Эти методы описаны в специальных книгах [162, 263], обобщены Унгемахом [265].

Идея изучения естественных электрических полей с поверхности была высказана еще в 19 веке. Сейчас подобные методы известны под общим названием методов естественного электрического поля (ЕП). Позднее Шлюмберже [241], пропуская электрический ток через грунты и наблюдая несоответствие опытных данных идеальным схемам однородных и изотропных грунтов, получил данные о составе и структуре подстилающих горных пород. Далее рассмотрим различные методы электроразведки, для чего вспомним, что в полуограниченной однородной среде, обладающей удельным электрическим сопротивлением ρ, значение электрического потенциала от точечного источника составит:

$$U(r) = \rho I/2\pi,$$

где r — расстояние от источника, I — сила тока. Коэффициент анизотропии имеет вид:

$$\lambda = \sqrt{\rho_t/\rho_l},$$

где ρ_t — поперечное, а ρ_l — продольное удельное электрическое сопротивление.

П.2.1. Методы потенциалов (МП)

В точке M (при $AM = MB = a$; рис. П.2.1) электрическое поле приблизительно постоянно, параллельно AB и выражается зависимостью:

$$E_x = \frac{\rho I}{\pi a^2} \Big/ (1 + r^2/a^2)^{3/2},$$

а на поверхности земли

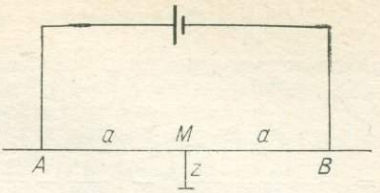
$$E_0 = \rho I/\pi a^2.$$

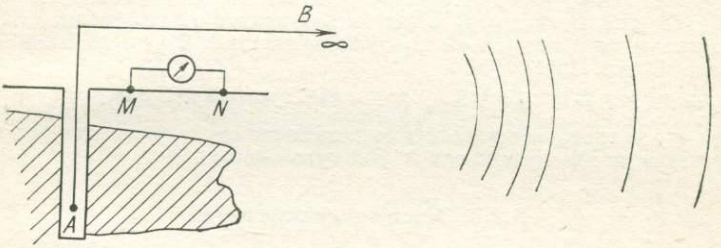
---

* «Во всех» — в данном случае не вполне строго. — *Прим. ред.*

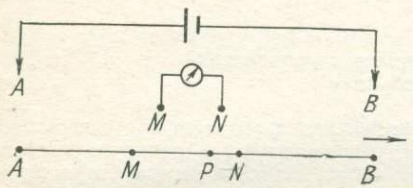
** По принятой в СССР терминологии — квазистационарным. — *Прим. ред.*

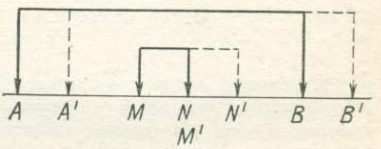
П.2.1. Метод потенциалов





П.2.2. Применение метода потенциалов с одним из электродов, располагаемым в «бесконечности»





П.2.3. Измерения сопротивлений

П.2.4. Электропрофилирование

Эквипотенциальные линии для однородного грунта, которые устанавливаются по измерениям в различных точках, будут иметь форму окружностей. Любое повышение или снижение удельного электрического сопротивления должно привести к изменению сетки эквипотенциалей. Эти изменения, в идеальном случае простой геометрической структуры (сферы, цилиндры, круглые пластины) могут быть определены с помощью точных аналитических формул.

Возможное приложение этого метода к изучению процессов загрязнения подземных вод состоит в следующем: один из питающих электродов помещается в водоносный горизонт, а другой — устанавливается в «бесконечности» (т. е на очень большом расстоянии от первого) и через них пропускается электрический ток. Пусть на первом электроде создается электрический потенциал, равный 100, а на втором — равный 0 (рис. П.2.2).

Потенциалы выражаются в долях разности потенциалов между питающими электродами U_a—U_b и могут быть измерены на электродах MN двумя путями: 1) положение эквипотенциальной линии устанавливается путем перемещения измерительного электрода в электрическом поле до нахождения требуемой величины потенциала, 2) потенциал U_M выражается по отношению к величине, измеренной на неподвижном электроде (например N), обладающем постоянным потенциалом (т. е. расположенном за пределами зоны возмущения). Такая процедура позволяет успешно контролировать динамику достаточно электрически контрастных возмущений.

П.2.2. Измерение сопротивлений

Рассмотрим схему, приведенную на рис. П.2.3. Здесь AB является питающей линией, а MN — измерительной. Величина кажущегося сопротивления ρ_a, соответствующая интегральной характеристике исследуемых слоев для данной длины AB, определяется из соотношения:

$$\rho_a = \left[\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN}\right) - \left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{BN}\right)\right]^{-1} \frac{\Delta U}{I} = K\Delta U/I,$$

где K представляет собой геометрический характеристический коэффициент схемы измерений. Величина ρ_a может быть выражена и как функция отношения потенциалов в пятиэлектродной схеме, когда электрод B перемещается так, как показано на рис. П.2.3:

$$\rho_a = KR, \quad R = \Delta U_{MP}/\Delta U_{PN}, \quad K = (AN - AP)/(AP - AM).$$

Методы определения электрических сопротивлений исследуются при электропрофилировании и при измерениях в прямоугольниках.

П.2.3. Электропрофилирование

Электроды AB и MN одновременно перемещаются вдоль какого-либо выбранного профиля. Расстояние между электродами выдерживается постоянным, поэтому исследуемая глубина разреза, (которая зависит от расстояния AB) (рис. П.2.4), также остается постоянной.

П.2.4. Измерения кажущихся сопротивлений в прямоугольнике

Измерение величин кажущегося сопротивления проводится при данном AB по прямоугольной сетке электродов MN, расположенных в прямоугольниках, размеры которого по отношению к питающей линии являются такими, что электрическое поле может приниматься постоянным за исключением немногих зон неоднородности (рис. П.2.5).

Такой способ измерений хорошо приспособлен для изучения поведения очень локальных зон. При этом требуется производить вычисление коэффициента K для каждой измерительной точки с тем, чтобы вводить поправки на глубину исследования для данного AB. Исследуемая глубина в таком случае будет максимальной в центре прямоугольника и минимальной на его краях.

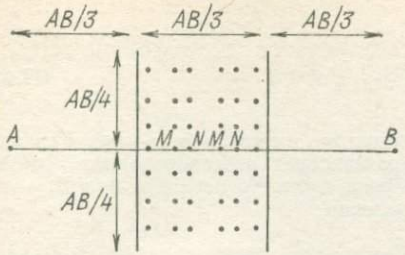
Для того чтобы сгладить электродные эффекты, которые могут возникать на границе прямоугольника, при его перемещении требуется перекрывать измерения.

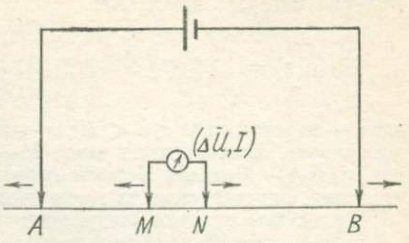
П.2.5. Вертикальное электрозондирование (ВЭЗ)

Вертикальное электрическое зондирование представляет собой метод вертикальной разведки слоистой толщи путем прогрессивного увеличения расстояния между питающими электродами AB при сохранении достаточно малого расстояния между измерительными электродами MN ($MN < \mathrm{AB}/5$). При измерениях по четырехэлектродной схеме Шлюмберже (рис. П.2.6) отклонения, обусловленные контактом электродов с неоднородным грунтом, контролируются перекрытием измерений путем изменения расстояния AB (рис. П.2.7).

Измерения ΔU и I ведутся компенсационным методом с помощью потенциометра, а величины кажущихся сопротивлений ρ_a наносятся на билогарифмическую бумагу в виде функции от $AB/2$. В таком представлении умножение величин сопротивлений или мощностей слоя проводится путем перемещения кривой, параллельной оси x или y.

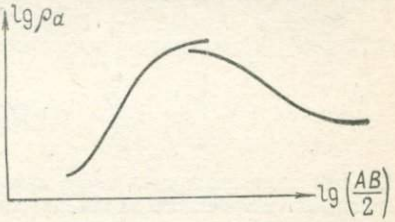
Таким образом, электрическое зондирование дает дискретную последовательность значений кажущихся электрических сопротивлений как функцию расстоя-





П.2.5. Измерение кажущихся сопротивлений в прямоугольнике

П.2.6. Электрическое зондирование четырехэлектродным методом



П.2.7. Кривые электрического зондирования

ния между электродами и источником. Интерпретация результатов измерений является типичной обратной задачей нахождения вертикального распределения ρ (z), соответствующего полученной последовательности ρ_a (r). Опишем, в общих чертах, порядок интерпретации.

Предположим, что полуограниченная среда, представлена однородными горизонтальными слоями. Влияние слоя i на результаты измерения определяется его поперечным сопротивлением R_{ti} и электропроводностью C_{li}, определяемыми по формулам:

$$R_{ti} = \rho_{ti} e_i, \quad C_{li} = e_i / \rho_{li},$$

где ρ_i и e_i — соответственно удельное сопротивление (поперечное или продольное) и мощность слоя i. Принимая во внимание присутствие в породе воды, можно ввести еще один параметр (называемый формационным фактором F), равный отношению действительного удельного сопротивления водонасыщенного слоя породы (скелета и воды) к сопротивлению воды ρ_w. F является функцией пористости слоя. Широко используется представление этой функции в виде соотношения Арчи:

$$F = \rho_i / \rho_w = \Phi^{-m},$$

где Φ — эффективная пористость, m — коэффициент, зависящий от степени консолидации водоносного горизонта ($1 < m < 2$).

Кривая электрического зондирования представляет собой суммарное проявление исследуемых слоев. Для нахождения пространственного спектра этих слоев необходимо вести специальные вычислительные методы. Типизация кривых и полуавтоматическая обработка их проводится в соответствии со следующими принципами.

При стационарном режиме для изотропной среды ($\rho_t = \rho_l$) распределение потенциалов отвечает дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \qquad (П.2.1)$$

решение которого имеет вид:

$$U_i(r, z) = \int_0^\infty [A_i(\lambda)\, e^{\lambda z} + B_i(\lambda)\, e^{-\lambda z}] \cdot I_0(\lambda r)\, d\lambda, \qquad (П.2.2)$$

где i — номер слоя ($1 < i < N$), r — расстояние от источника, z — вертикальная координата, направленная вниз, λ — произвольная интегрированная постоянная, $J_0(\lambda r)$ — функция Бесселя первого рода, нулевого порядка, A_i и B_i — постоянные, определяемые из граничных условий.

Граничные условия следующие:

— на контакте между слоями — постоянство потенциала ($U_i = U_{i+1}$) и нормальной составляющей тока $\partial u_i/\partial n = \partial u_{i+1}/\partial n$;

— на поверхности земли нормальная составляющая тока везде равна нулю, кроме источника;

— для слоя N неограниченной мощности потенциал равен нулю.

Коэффициенты A_i и B_i определяются решением системы из $2N$ линейных уравнений с $2N$ неизвестными.

Функция $A_i(\lambda)\, e^{\lambda z} + B_i(\lambda)\, e^{-\lambda z}$ носит название функции Стефанеско $S[\lambda, \rho(z)]$. Потенциал на поверхности земли равен:

$$U(r, 0) = C\left[\frac{1}{r} + \int_0^\infty S\{\lambda, \rho(z)\} J_0(\lambda r)\, d\lambda\right]. \qquad (П.2.3)$$

Он дает значение приведенного кажущегося сопротивления, определяемого как отношение измеренного на поверхности земли электрического поля к его теоретическому значению, пропорциональному

$$-r^2 \frac{\partial U}{\partial r}(r, 0)$$

или

$$\rho_a'(r) = 1 + 2r^2 \int_0^\infty S[\lambda, \rho(z)]\, \lambda J_1(\lambda r)\, d\lambda. \qquad (П.2.4)$$

Функции S скапливает всю информацию о стратификации и позволяет осуществить дифференциацию кривых «N=слойного» типа. Например, четырехслойные кривые могут быть получены путем разложения выражения (П.2.4) в ряд функций.

Такая типизация кривых может использоваться для идентификации реальных грунтов, учитывая некоторые ограничения метода:

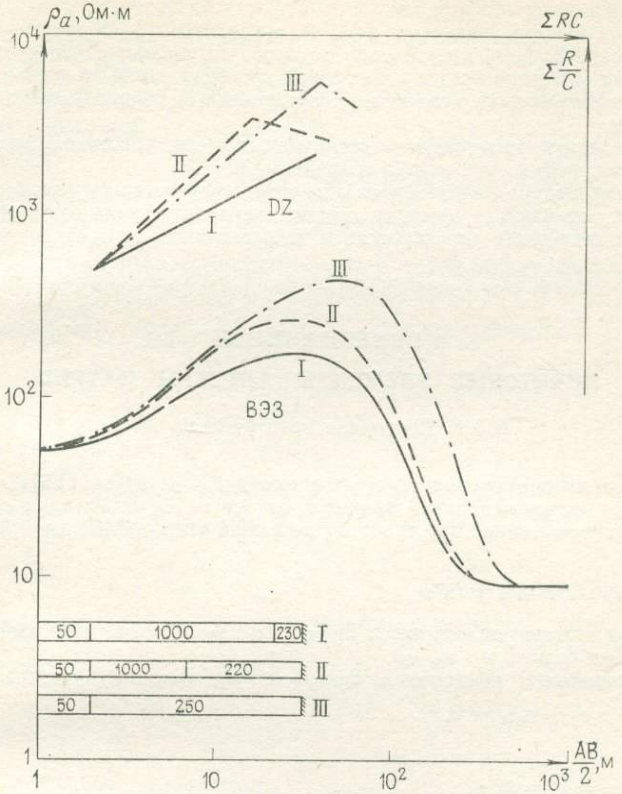
1) принцип эквивалентности; если электропроводный слой залегает между двумя изолирующими слоями (или изолирующий слой i находится между двумя электропроводными), кривые электрозондирования не преобразуются путем умножения e_i и ρ_i на фактор K (или альтернативно путем одновременного умножения e_i и деления ρ_i на фактор K);

2) принцип подавления; изолирующий слой, залегает между высокоэлектропроводным и слабоэлектропроводным слоями, почти не влияет на электрическое зондирование.

Спектральное представление электрического зондирования может быть получено путем расчета суммарного сопротивления и электропроводности, определяемого путем нумерации слоев вниз:

$$R_t(p) = \sum_{i=1}^{p} \rho_i e_i \quad (p = 1, \ldots n),$$

$$C_1(p) = \sum_{i=1}^{p} e_i/\rho_i,$$



П.2.8. Кривые электрического зондирования (ВЭЗ) и кривые суммарного сопротивления (DZ).

На геоэлектрических разрезах даны значения удельных сопротивлений в Ом·м

и построение графиков зависимости

$$\sqrt{R_t(p)/C_1(p)} = f\left[\sqrt{R_t(p)\,C_1(p)}\right]$$

на билогарифмической бумаге.

Для определения величин e_i и ρ_i должны привлекаться также дополнительные данные: опорные скважины с геологическим разрезом или параметрические скважины, позволяющие проводить измерения действительного удельного электрического сопротивления слоев.

При интерпретации данных могут встретиться два случая: 1) кривая полевого электрозондирования соответствует существующему типу кривых; 2) не существует никакого соответствия. В последнем случае необходимо провести сглаживание кривой.

На рис. П.2.8 приводится пример кривых вертикального электрозондирования и кривых суммарного сопротивления электропроводности.

Интерпретация экспериментальных кривых теперь может быть облегчена путем использования методов их автоматической обработки [162]. При этом, однако, необходимо подчеркнуть, что определение сопротивлений по электрическому полю является весьма неустойчивой задачей. Малое изменение ρ дает незначительное изменение электрического поля. Обратное утверждение неверно и (если только мы не имеем абсолютно точных измерений, которые получить практически невозможно) единственность не может быть достигнута.

В связи с этим необходимо:

1) вычислить функцию ядра $\varphi(\lambda, \rho)$, эквивалентную S путем решения интегрального уравнения, второй член которого определяется непосредственными измерениями (это ядро представляет собой преобразование по Фурье последовательности электрических источников, отраженных от границ раздела элементарных слоев);

2) определить последовательность удельных электрических сопротивлений (начиная от поверхности), исходя из функции φ.

Такая процедура, выполненная для одного случая электрического зондирования, дает возможность провести корреляцию между данными электрозондирований (при допущении регулярности и непрерывности соратификации).

ПРИЛОЖЕНИЕ III

НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ МАТРИЦ

П.3.1. Векторное пространство R^n

Рассмотрим прямоугольную систему координат $oxyz$ (рис. П.3.1). На каждой оси зададим вектор единичной длины: e_1 на оси ox, e_2 на оси oy и e_3 на оси oz. Если M является точкой пространства, то любой вектор $\boldsymbol{OM}$ может быть записан в виде:

$$\boldsymbol{OM} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,$$

где система действительных чисел (a_1, a_2, a_3) является системой компонент вектора $\boldsymbol{OM}$ на базисе (e_1, e_2, e_3).

Геометрическим построением векторов a_1e_1, a_2e_2, a_3e_3 устанавливаем, что

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = 0,$$

откуда

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Говорят, что e_1, e_2 и e_3 независимы. Легко проверить, что три вектора с общим началом O, которые не принадлежат одной и той же плоскости, являются независимыми.

Рассмотрим два вектора $\boldsymbol{OV}$ и $\boldsymbol{OW}$ соответственно с компонентами (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3). Скалярное произведение $\boldsymbol{OV}$ на $\boldsymbol{OW}$, которое записывается $\langle \boldsymbol{OV}, \boldsymbol{OW} \rangle$, определяется следующим образом:

$$\langle \boldsymbol{OV}, \boldsymbol{OW} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Говорят, что $\boldsymbol{OV}$ и $\boldsymbol{OW}$ ортогональны, если $\langle \boldsymbol{OV}, \boldsymbol{OW} \rangle = 0$.

Длина вектора $\boldsymbol{OV}$ есть число $L(\boldsymbol{OV})$ такое, что:

$$L(\boldsymbol{OV}) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2} = [\langle \boldsymbol{OV}, \boldsymbol{OW} \rangle]^{1/2}.$$

Она также называется нормой вектора $\boldsymbol{OV}$ и записывается как $\| \boldsymbol{OV} \|$.

Система векторов $\boldsymbol{OM}$ для всех M обычного пространства образует векторное пространство $\boldsymbol{R^3}$ с началом в O.

Все предыдущие определения могут быть распространены на системы векторов с тем же самым началом, но имеющих n компонент, т. е. определяемых системой действительных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Они образуют векторное пространство $\boldsymbol{R^n}$, определенное следующими операциями:

1) сумма двух векторов $\boldsymbol{OM}$ $(a_1, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{ON}$ $(b_1, \ldots, b_n)$;

$$\boldsymbol{OM} + \boldsymbol{ON} = \boldsymbol{OP}\,(a_1 + b_1,\ a_2 + b_2), \ldots,\ a_n + b_n),$$

2) нулевой вектор 00 $(0, \ldots, 0)$.

Для всех действительных чисел λ и μ имеем:

$$\lambda \boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OM}(\lambda a_1, \lambda_{a2}, \ldots, \lambda a_n),$$
$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{OM} = \lambda \boldsymbol{OM} + \mu \boldsymbol{OM},$$
$$\lambda(\boldsymbol{OM} + \boldsymbol{ON}) = \lambda \boldsymbol{OM} + \lambda \boldsymbol{ON},$$
$$\lambda(\mu \boldsymbol{OM}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{OM},$$
$$1 \cdot \boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OM}.$$

Векторы $e_1, \ldots, e_n$ являются независимыми, если

$$a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n = 0 \rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

Базис это система n независимых векторов и любой вектор пространства $\boldsymbol{R}^n$ может быть выражен единственной линейной комбинацией этих векторов. Скалярное произведение: $\langle \boldsymbol{OV}, \boldsymbol{OW} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Длина $\boldsymbol{OV}$: $\langle \boldsymbol{OV}, \boldsymbol{OV} \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} = \| \boldsymbol{OV} \|$.

П.3.2. Матрицы

Рассмотрим линейную систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_1^1 x^1 + a_2^1 x + \ldots + a_n^1 x^n &= b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \ldots + a_n^2 x^n &= b^2, \\ a_1^p x^1 + a_2^p x^2 + \ldots + a_n^p x^n &= b^p. \end{aligned} \qquad (\text{П.3.1})$$

Матрица — это таблица, состоящая из n столбцов и p строк:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1^1 a_2^1 \ \ldots \ a_n^1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_1^p a_2^p \ \ldots \ a_n^p \end{bmatrix}.$$

Полагая, что действительные числа $x^1, \ldots, x^n$ и $b^1, \ldots, b^p$ являются компонентами векторов $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{B}$ из $\boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{R}^p$, мы говорим, что применение матрицы A к $\boldsymbol{X}$ дает вектор $\boldsymbol{B}$ и мы пишем систему (П.3.1) как:

где $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{AX} = \begin{bmatrix} a_1^1 \ \ldots \ a_n^1 \\ a_1^p \ \ldots \ a_n^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 x^1 + \cdots + a_n^1 x^n \\ a_1^p x^1 + \cdots + a_n^p x^n \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ обращает $\boldsymbol{R}^n$ в $\boldsymbol{R}^p$.

В этой книге рассматриваются только квадратные матрицы, т. е. предполагается, что $n = p$. Квадратная матрица порядка n (т. е. с n столбцами и n строками) обращает $\boldsymbol{R}^n$ в $\boldsymbol{R}^n$, т. е. образует вектор с n компонентами в вектор с n компонентами.

Исследуем теперь смысл различных столбцов матрицы порядка n. Рассмотрим обычное пространство и ортогональную систему $oxyz$, как показано на рис. II.3.1. Мы уже определили базис из трех ортонормальных векторов (e_1, e_2, e_3) и в относительной системе, компоненты e_1, e_2 и e_3 соответственно равны (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1).

Рассмотрим матрицу A порядка n с коэффициентами a_i^j ($i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3$). Применим A к e_1 и определим результирующий вектор $\boldsymbol{B}$

$$\mathrm{A}e_1 = \boldsymbol{B}.$$

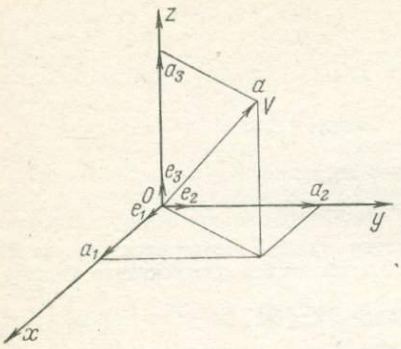


Рис. П.3.1. Обычная система координат

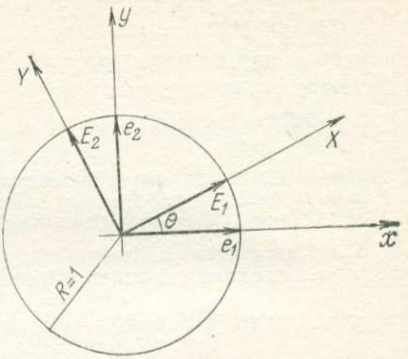


Рис. П.3.2. Поворот на угол θ

Согласно (П.3.1), имеем систему:

$$a_1^1 \times 1 + a_2^1 \times 0 + a_3^1 \times 0 = b^1,$$
$$a_1^2 \times 1 + a_2^2 \times 0 + a_3^2 \times 0 = b^2,$$
$$a_1^3 \times 1 + a_2^3 \times 0 + a_3^3 \times 0 = b^3,$$

которая дает $b^1 = a_1^1$, $b^2 = a_1^2$ и $b^3 = a_1^3$.

Таким образом, преобразованием вектора e_1 матрицей **A** является первый столбец матрицы **A**. Читатель может легко проверить, что преобразования e_2 и e_3 являются соответственно вторым и третьим столбцами **A**.

Эти результаты могут быть легко распространены на векторное пространство R^n. Столбцы матрицы **A**, рассматриваемые как векторы, являются преобразованиями матрицей **A** базиса $(e_1, \ldots, e_n)$, выраженными в том же самом базисе:

$$\mathbf{A}e_1 = a_i^1 e_1 + a_i^2 e_2 + \cdots + a_i^n e_n = \sum_{j=1}^{n} a_i^j e_j. \qquad (\text{П.3.2})$$

Приложение к изменению систем координат. Пусть требуется повернуть систему *oxy* вокруг ее начала на угол θ, чтобы получить *XOУ*. Базисными векторами (единичными векторами) соответственно являются (e_1, e_2) и $(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2)$. Выразим вектор $\boldsymbol{OM}$ в обеих системах. Его компонентами соответственно являются (x, y) и (X, Y). Из рис. П.3.2 имеем:

$$\boldsymbol{OM} = xe_1 + ye_2 = X\boldsymbol{E}_1 + Y\boldsymbol{E}_2;$$
$$\boldsymbol{E}_1 = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2,$$
$$\boldsymbol{E}_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2, \qquad (\text{П.3.3})$$
$$\boldsymbol{OM} = (X\cos\theta - Y\sin\theta)\, e_1 + (X\sin\theta + Y\cos\theta)\, e_2,$$

что дает систему:

$$X\cos\theta - Y\sin\theta = x,$$
$$X\sin\theta + Y\cos\theta = y,$$

которую можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \qquad (\text{П.3.4})$$

Отсюда видно, что изменение системы координат может быть определено с помощью матричной системы, подобной (П.3.4). При этом столбцы матрицы являются преобразованиями векторов старого базиса (здесь $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$), выраженными в том же старом базисе (e_1, e_2). Этот результат может быть обобщен на изменения неортонормированного базиса в R^n.

Полезность матричной теории теперь становится очевидной: она является систематическим представлением системы линейных уравнений и дает правила и теоремы, которые могут быть использованы для решения системы. Углубимся в теорию квадратных матриц введением суммы, произведения и обращения матриц.

В дальнейшем мы пользуемся правилом Эйнштейна: в случае произведения индексированных величин, когда верхний и нижний индексы являются одной и той же буквой, суммирование соответствующих произведений должно производиться по общему индексу:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j b_j = a_i^j b_j \ (j = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} x^i a_i^j \right) e_j = x^i a_i^j e_j \ (i = 1, \ldots, p; \ j = 1, \ldots, n).$$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}$ порядка n, заданную ее коэффициентами $\left(a_i^j\right)$, и скаляр λ; определим произведение $\lambda\mathbf{A}$ как матрицу с коэффициентами $\left(\lambda a_i^j\right)$.

Пример:

$$2\times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 3 & 2\times 4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим две матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ порядка n, заданные их коэффициентами $\left(a_i^j\right)$ и $\left(b_i^j\right)$, и вектор $\boldsymbol{X}$ из R^n, заданный его компонентами (x^i) на базисе $(e_1, \ldots, e_n$. Применим $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ к $\boldsymbol{X}$, что дает два вектора $\boldsymbol{X}_1$ и $\boldsymbol{X}_2$ из R^n, и рассмотрим геометрическую сумму $\boldsymbol{Z}$ из $\boldsymbol{X}_1$ и $\boldsymbol{X}_2$. Сумма $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ есть матрица $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ порядка n, определенная зависимостями:

$$\boldsymbol{X}_1 = \mathbf{A}\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \mathbf{B}\boldsymbol{X},$$

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2 = \mathbf{A}\boldsymbol{X} + \mathbf{B}\boldsymbol{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\boldsymbol{X} = \mathbf{C}\boldsymbol{X},$$

что дает коэффициенты $\left(c_i^j\right)$ матрицы $\mathbf{C}$ на базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Используя определение произведения матрицы на скаляр и уравнение (П.3.2), получим:

$$\boldsymbol{X} = x^i e_i, \ \boldsymbol{X}_1 = \mathbf{A}x^i e_i = x^i a_i^j e_j, \ \boldsymbol{X}_2 = x^i b^j e_j,$$

$$\boldsymbol{Z} = x^i a_i^j e_j + x^i b_i^j e_j = x^i (a_i^j + b_i^j) e_j = x^i c_i^j e_j,$$

$$c_i^j = a_i^j + b_i^j.$$

Пример:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим снова матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и вектор $\boldsymbol{X}$; применим $\mathbf{A}$ к $\boldsymbol{X}$, что дает $\boldsymbol{X}_1$, и $\mathbf{B}$ к $\boldsymbol{X}_1$, что дает $\boldsymbol{Y}$. Произведение $\mathbf{B}$ на $\mathbf{A}$ есть матрица $\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{A}$ порядка n, определенная соотношениями:

$$\boldsymbol{X}_1 = \mathbf{A}\boldsymbol{X}, \ \boldsymbol{Y} = \mathbf{B}\boldsymbol{X}_1 = \mathbf{B}\mathbf{A}\boldsymbol{X} = \mathbf{D}\boldsymbol{X},$$

это дает коэффициенты $\left(d_i^j\right)$ матрицы **D** на базисе $(e_1, \ldots, e_n)$.

$$\boldsymbol{X} = x^i e_i,\ \boldsymbol{X}_1 = x^i a_i^j e_j,\ \boldsymbol{Y} = x^i a_i^j \mathbf{B}(e_j) = x^i a_i^j b_j^k e_k,$$

$$\boldsymbol{Y} = x^i d_i^k e_k,\ \text{при}\ d_i^k = b_j^k a_i^j.$$

Коэффициент d_i^k есть сумма произведений элементов строки k матрицы **B** на элементы столбца i матрицы **A**.

Пример:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

Сумма матриц ассоциативна и коммутативна:

$$\mathbf{(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C},$$

$$\mathbf{A + B = B + A}.$$

Произведение матриц ассоциативно, но некоммутативно:

$$\mathbf{A\,(BC) = (AB)\,C = ABC},$$

$$\mathbf{AB \neq BA}$$

Матрица **I** порядка n с единицами на диагонали и нулями во всех других местах называется единичной матрицей (или матрицей тождественного перехода)

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{I \times A = A \times I = A}$ для любой **A** порядка n.

Если существует матрица **B** такая, что для данной **A**

$$\mathbf{BA = AB = I},$$

говорят, что **B** есть обращение матрицы **A**, тогда

$$\mathbf{B = A^{-1}}.$$

Рассмотрим линейную систему уравнений:

$$\mathbf{AX = B}.$$

Если существует $\mathbf{A^{-1}}$, имеем

$$\mathbf{A^{-1}AX = A^{-1}B = IX}.$$

Система может быть решена и ее решение есть $\mathbf{X = A^{-1}B}$. Методы, приведенные в разделе 9.3 представляют собой численные приемы вычисления $\mathbf{A^{-1}}$. В главе 9 все результаты базируются на теореме: если система из n линейных уравнений с n неизвестными такова, что матрица обратима, то она имеет одно и только одно решение, т. е. существует одна и только одна система чисел (x^i) такая, что

$$a_i^j x^i = b^j\ (i = 1, \ldots, n\ \text{и}\ j = 1, \ldots, n).$$

Предполагается, что матрица обратима тогда и только тогда, когда векторы-столбцы независимы. Обратимая матрица называется невырожденной.

Если матрица диагональная (т. е. все ее коэффициенты, за исключением расположенных на диагонали, равны нулю), ее обращение легко рассчитывается:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_1^1 & . & . & 0 \\ . & a_2^2 & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & a_n^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^1} & . & . & 0 \\ . & \frac{1}{a_2^2} & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & \frac{1}{a_n^n} \end{bmatrix}.$$

Матрица **A** называется симметричной, если

$$a_i^j = a_j^i.$$

Матрица **A** называется антисимметричной, если

$$a_i^j = -a_j^i.$$

Это влечет $a_i^i = 0$. Диагональные коэффициенты равны нулю. Симметричные матрицы — очень важное семейство с интересными свойствами. Они часто встречаются в моделях потоков подземных вод.

П.3.3. Детерминанты

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} ax + by &= \alpha, \\ cx + dy &= \beta, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Вычислим x, умножая первое уравнение на d и второе на b и складывая получившиеся уравнения:

$$x = (\alpha d - \beta b)/(ad - bc).$$

Таким же образом получим:

$$y = (a\beta - \alpha c)/(ad - bc).$$

Отметим, что знаменатель в выражениях для x и y представляет собой разность перекрестных произведений коэффициентов матрицы системы

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Она называется детерминантом системы.
Если детерминант равен нулю, система не может быть решена.
В таком случае

$$ad - bc = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Если $a/b = c/d = \alpha/\beta$, то уравнения пропорциональны, система сокращается до одного уравнения и имеется бесконечное множество решений, заданное выражением $x = (\alpha - by)/a$ для любого значения y. Если $a/b = c/d \neq \alpha/\beta$, то не существует решения. Система несовместна. Необходимо отметить, что детерминант равен нулю тогда и только тогда, когда векторы-столбцы матрицы системы являются пропорциональными (т. е. если матрица вырожденная).

Детерминант записывается:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Как и для матриц, на детерминантах могут быть определены алгебраические операции.

Если два вектора-столбца поменять местами, то детерминант примет противоположный знак:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix},$$

Это, очевидно, влечет:

$$\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0.$$

Если вектор-столбец является суммой двух векторов, детерминант может быть представлен в виде суммы двух детерминантов:

$$\begin{vmatrix} a+e & b \\ c+f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix},$$

что легко подсчитывается из перекрестных произведений

$$(a+e)\,d - b\,(c+f).$$

Вектор-столбец может быть сложен с другим вектором-столбцом без изменения детерминанта

$$\begin{vmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Если столбец умножить на скаляр λ, детерминант умножается на λ:

$$\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda\,(ad - bc) = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Детерминанты обобщаются на линейные системы n уравнений с n неизвестными следующим образом: детерминант A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1^1 \cdots a_n^1 \\ \vdots \quad \vdots \\ a_1^n \quad a_n^n \end{vmatrix},$$

есть число, которое получается следующим образом:

1) составлением всех возможных произведений $a^1_{\alpha_1} a^2_{\alpha_2} \ldots a^n_{\alpha_n}$ из n коэффициентов таких, в которых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ есть перестановки чисел 1, 2, ..., n; при этом ни одно α_i не повторяется;

2) подсчетом числа перестановок $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, т. е. числа перемен двух индексов α_i, необходимых для получения перестановки 1, 2, ..., n. Если это число четное, перед произведением ставится знак «+», если это число нечетное, — знак «—»;

3) сложением всех произведений с их знаками.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9 + 4\times3\times8 + 7\times2\times6 - 1\times8\times6 - 4\times2\times9 - 7\times3\times5.$$

Все следствия, полученные для детерминантов второго порядка справедливы для детерминантов порядка n. Наиболее важным следствием для наших задач является то, что матрица невырождена тогда и только тогда, когда ее детерминант не равен нулю. Тогда мы знаем, что соответствующая система линейных уравнений имеет одно и только одно решение. В противном случае она может быть либо несовместной, либо иметь бесконечное число решений. Таким образом, для проверки возможности существования решения может потребоваться расчет детерми-

нанта. Другой важной особенностью детерминантов является то, что они необходимы для расчета собственных значений и собственных векторов матрицы, которые определены в П.3.4.

Замечание. В некоторых очень простых случаях (два уравнения с двумя неизвестными, как показано) детерминант может быть прямо использован для вычисления решения. Это почти не имеет место в наших задачах загрязнения.

П.3.4. Собственные значения и собственные векторы матрицы порядка n

Для любой матрицы $\mathbf{M}$ существует вектор V_i (отличный от нулевого вектора) и число λ такие, что

$$\mathbf{M}V_i = \lambda_i V_i, \tag{П.3.5}$$

где V_i — собственный вектор $\mathbf{M}$, соответствующий собственному значению λ_i.

Любому собственному вектору V_i соответствует единственное значение λ_i. Любым собственным значениям λ_i соответствуют один или несколько собственных векторов, которые образуют векторное подпространство в R^n, называемое собственным подпространством, соответствующим λ_i.

Матрица порядка n имеет самое большее n различных собственных значений. Уравнение (П.3.5) может быть записано так:

$$(\mathbf{M} - \lambda_i \mathbf{I})\, V_i = 0. \tag{П.3.6}$$

Компонентами V_i являются $(x^1, \ldots, x^n)$, а компонентами векторов-столбцов матрицы $\mathbf{M} - \lambda_i \mathbf{I}$ будут $(A_1, \ldots, A_n)$. Из (П.3.6)

$$x^1 A_1 + \cdots + x^n A_n = 0,$$

из чего следует, что $A_1, \ldots, A_n$ зависимы. Таким образом, матрица $\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I}$ вырожденная и не имеет обратной.

Отсюда следует, что детерминант $\mathbf{M}-\lambda_i\mathbf{I}$ равен нулю; собственные значения матрицы $\mathbf{M}$ являются корнями полиноминального уравнения относительно λ:

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \cdot & a_n^1 \\ \cdot & a_2^2 - \lambda & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & \cdot & a_n^n - \lambda \end{vmatrix}$$

Пример:

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M} - \lambda\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix},$$

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = (4-\lambda)^2 - 4 = 0 = (6-\lambda)(2-\lambda).$$

Собственные значения равны 6 и 2. Компоненты собственных векторов удовлетворяют системам:

$$\lambda = 6 \begin{cases} 4x + 2y = 6x \\ 2x + 4y = 6y, \end{cases} \qquad \lambda = 2 \begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ 2x + 4y = 2y. \end{cases}$$

Соответствующими собственными векторами являются все векторы, пропорциональные, соответственно $V_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ для собственного значения 6 и $V_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$ для собственного значения 2. Мы удостоверились, что обе системы имеют бесконечное число решений, так как $\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}$ вырожденная матрица.

Для нашей задачи польза понятий собственных значений и собственных векторов заключается: 1) в возможности упрощения систем линейных уравнений, 2) во

введении теорем сходимости для итерационных процессов, которые устанавливают простые критерии сходимости последовательностей и рядов матриц.

Система линейных уравнений легко решается, если ее матрица диагональная. В П.3.2 мы видели, что вектор-столбец матрицы является преобразованием вектора-базиса, выраженным в том же базисе. Если, например e_1 является также собственным вектором, соответствующим собственному значению λ, мы имеем:

$\mathbf{A}e_1 = \lambda e_1$

и компоненты $\mathbf{A}e_1$ в базисе $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ суть $(\lambda, 0, \ldots, 0)$.

При этом рассмотрении учитывается теорема: матрица $\mathbf{A}$ из R^n может быть приведена к диагональному виду тогда и только тогда, когда существует базис в R^n, построенный на собственных векторах матрицы $\mathbf{A}$.

Конечно, приведение к диагональному виду не всегда возможно, но матрица всегда может быть приведена к треугольной форме, т. е. только с нулями выше диагонали, или только с нулями ниже диагонали.

В треугольной форме система решается очень просто: 1) если все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ различны, то она может быть приведена к диагональному виду; 2) если действительная матрица симметрична, она всегда может быть приведена к диагональному виду, даже когда собственные значения не отличаются друг от друга. Кроме того, ее собственные векторы ортогональны.

Критерии сходимости излагаются в следующем разделе.

П.3.5. Нормы векторов и матриц

В П.3.1 введена норма вектора $V(x^1, \ldots, x^n)$ как $\|V\| = (x^{1^2} + \ldots + x^{n^2})^{1/2}$. Впрочем, это эвклидова норма вектора V и она, наиболее естественно, прямо вытекает из теоремы Пифагора. Другие нормы могут быть введены следующим образом:

$$\|V\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x^i|,$$

$$\|V\|_\infty = \sup |x^i|.$$

Все нормы удовлетворяют соотношениям:

$$\|V\| \geqslant 0, \quad \|V\| = 0 \langle = \rangle V = 0,$$

$$\|\lambda V\| = |\lambda| \|V\| \quad \text{для всех скаляров } \lambda, \tag{П.3.7}$$

$$\|V + W\| \leqslant \|V\| + \|W\| \quad \text{(неравенство треугольника)}.$$

Таким же образом норма матрицы $\mathbf{A}$ определяется соотношениями:

$$\|\mathbf{A}\| > 0, \quad \|A\| = 0 \langle = \rangle \mathbf{A} = 0$$

$$\|\lambda \mathbf{A}\| = |\lambda| \|\mathbf{A}\| \quad \text{для всех скаляров } \lambda,$$

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \tag{П.3.8}$$

$$\|\mathbf{AB}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|.$$

Теперь рассмотрим матрицу $\mathbf{A}$ порядка n. Определим два типа норм $\mathbf{A}$.

1. Назовем норму матрицы $\mathbf{A}$ (подчиненной векторной норме $\|V\|$) положительное число $\|\mathbf{A}\|$, определенное выражением:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{V \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}V\|}{\|V\|}.$$

$\|\mathbf{A}\|$ удовлетворяет соотношениям (П.3.8). Очевидно, мы имеем: $\|\mathbf{A}V\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \|V\|$ (неравенство Шварца). Матричная и векторная нормы, для которых справедливо неравенство Шварца, являются согласованными. Матричная норма, подчиненная эвклидовой векторной норме, называется спектральной нормой.

2. Другая норма матрицы $\mathbf{A}$, согласованная с эвклидовой нормой вектора V, есть эвклидова норма матрицы $\mathbf{A}$, определенная следующим образом:

$$\|\mathbf{A}\|_E = \left(\sum_{ij} |a_i^j|^2\right)^{1/2}.$$

Она не может быть подчинена какой-либо векторной норме, так как

$$\|\mathbf{I}\|_E = n^{1/2} \neq \|\mathbf{I}\| = 1.$$

Эвклидова норма матрицы $\mathbf{A}$ удобна тем, что она может быть легко вычислена.

Замечание 1. Если V — собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, соответствующий собственному значению λ из неравенства Шварца, имеем:

$$\|\mathbf{A}V\| = \|\lambda V\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \|V\|, \quad |\lambda| \leqslant \|\mathbf{A}\|.$$

Наибольшее собственное значение матрицы $\mathbf{A}$ по абсолютной величине (или спектральный радиус ρ) тогда удовлетворяет неравенству $\rho \leqslant \|\mathbf{A}\|$.

Замечание 2. Если $\mathbf{A}$ — действительная симметричная матрица, то ее спектральный радиус равен ее спектральной норме. В П.3.4 мы говорили, что собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$ являются ортогональным базисом в R^n. Тогда любой вектор V может быть выражен через собственные векторы E_i, как:

$$V = x^i E_i,$$

$$\mathbf{A}V = x^i \mathbf{A} E_i = \lambda_i x^i E_i,$$

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_V \left(\sum \lambda_i^2 x^{i2}\right)^{1/2} \Big/ \left(\sum_i x^{i2}\right)^{1/2} \leqslant \rho.$$

Учитывая замечание 1 имеем: $\rho = \mathbf{A}$.

Теперь примем на веру некоторые критерии сходимости последовательностей и рядов матриц порядка n:

1) $\lim\limits_{p \to \infty} \mathbf{A}^p = 0,$

если $\|\mathbf{A}\| < 1$;

2) $\lim\limits_{p \to \infty} \mathbf{A}^p = 0$

тогда и только тогда, когда $\rho < 1$;

3) ряд $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^p + \cdots$ сходится тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}^p \to 0$; он сходится к $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$;

4) если какая-либо норма $\|\mathbf{A}\|$ меньше единицы, то $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots$ сходится; это не является необходимым условием.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

КАЧЕСТВО ВОДЫ. НОРМЫ И КРИТЕРИИ

Международные нормы качества установлены только для питьевых вод (ВОЗ, 1972); они представляют собой минимальные нормы, которые могут быть достигнуты всеми странами. Так как те или иные страны могут достигнуть более высоких показателей по экономическим и техническим причинам, то ВОЗ предложил Европейские нормы более высоких стандартов (1971). Необходимо подчеркнуть, что эти нормы являются лишь рекомендациями, а вопрос о принятии их решается каждой страной. ВОЗ дает пять классов параметров качества: биологические загрязнители, радиоактивные загрязнители, токсичные соединения, химические соединения, которые могут быть опасны для здоровья, и допустимые пределы загрязнения питьевых вод.

1. Бактериологические нормы биологического загрязнения основаны на обнаружении непатогеничных микроорганизмов. Эти нормальные микробы фекальных загрязнений более многочисленны, чем патогенные бактерии, и они могут быть хорошими легко определенными индикаторами загрязнения; это обычно Escherichia coli (E. coli) и колиформы.

Любые 100 мл хлорированной воды, попадающие в водораспределительную сеть, не должны содержать эти микрооорганизмы. Любые 100 мл нехлорированной воды должны быть свободны от E. coli, и если это условие соблюдено, то в них может содержаться самое большее три колиформы. Все пробы, взятые из водораспре-

Таблица 7

Токсичные компоненты (по данным ВОЗ, 1972 г.)

Соединение	Мышьяк	Кадмий	Цианиды	Общая ртуть	Свинец	Селен
Максимальная концентрация, мг/л	0,05	0,01	0,05	0,001	0,1	0,01

Допустимые пределы загрязнения

Компонент или свойство	Цвет (платино-кобальтовая цветовая шкала)	Запах	Замутненность	Общие твердые, мг/л	pH
Максимальная концентрация предлагаемая	5 единиц	Без ограничения	5 единиц	500	7—8,5
Максимальная концентрация допустимая	50 единиц	Без ограничения	25 единиц	1500	6,5—9,2

делительной сети, должны быть свободными от колиформ, что не всегда возможно; поэтому в отдельных скважинах и источниках верхним пределом для признания воды пригодной для питья является присутствие 10 колиформ.

2. Предлагаемые уровни радиоактивного загрязнения следующие: общая альфа-радиоактивность-3, общая бета-радиоактивность—30. Эти уровни применяются к среднему из всех измерений радиоактивности за период в три месяца.

3. Токсичные соединения. Максимальная концентрация определена исходя из того, что человек средней массы в 70 кг потребляет 2,5 л воды в день. Результаты допустимого содержания токсичных соединений в питьевой воде представлены в табл. 7.

4. Химические вещества, которые могут представлять опасность для здоровья. Верхний и нижний пределы концентрации для фторидов зависят от температуры и изменяются от 0,6 до 0,9 мг/л для нижнего предела и от 0,8 до 1,7 для верхнего. Нитраты, выраженные как NO_3, не должны превышать 45 мг/л. Полициклические ароматические углеводороды канцерогенны и их концентрация не должна превышать 0,0002 мг/л. Для пестицидов пока не предложено каких-либо цифр.

5. Допустимые пределы загрязнения питьевых вод определены исходя из обычных физико-химических анализов воды; они суммированы в табл. 8.

Таблица 8

питьевых вод (по данным ВОЗ., 1972 г.)

Общая жесткость, мг/л $CaCO_3$	Анионные очистители, мг/л	Минеральные масла, мг/л	Фенолы, мг/л	Кальций, мг/л	Хлориды, мг/л Cl	Медь, мг/л	Железо, мг/л	Магний, мг/л	Марганец, мг/л	Сульфаты, мг/л SO_4	Цинк, мг/л
100	0,2	0,01	0,001	75	200	0,05	0,1	<30, если концентрация сульфата >250, в других случаях <150	0,05	200	5,0
500	1,0	0,3	0,002	200	600	1,5	1,0	150	0,5	400	15

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agence* Financière de Bassin Rhône—Méditerranée—Corse, 1971. Etude des risques de pollution de la nappe alluviale de la plaine de Lyon. Intern Rep.

2. *Archie, G. E.*, 1942. The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics. Trans. A. I. M. E., 146: 54—61.

3. *Aris, R.*, 1956. On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube Proc. R. Soc. London, Ser. A., 235; 67—77.

4. *Aris, R.* and *Amundson, N. R.*, 1957. Some remarks on longitudinal mixing or diffusion in fixed beds. J. Am. Inst. Chem. Eng., 3: 280—282.

5. *Arlab*, 1974. Abaques de dispersion (Dispersion Type Curves by Y. Emsellem).

6. *Arthur, K. B.* and *Metanomski, Z. G.*, 1965. Présentation de quelques procèdès d'augmentation de la vitesse de convergence dans les solutions numèriques des problémes de diffusivitè C. R. 2ème Coll. Assoc. Rech. Tech. Forage et Production. Rueil Malmaison, pp. 253—363.

7. *Babot, Y.* and *Simler, L.*, 1970. Pollution des eaux souterraines. Etude bibliographi que. Service Gèologique d'Alsace-Lorraine, 24.2.1970.

8. *Bachmat, Y.*, 1967. On the similitude of dispersion phenomena in nomogeneous and isotropic porous media. Water Resour. Res., 3: 1079—1083.

9. *Bachmat, Y.*, 1969. Hydrodynamic dispersion in a saturated homogeneous porous medium at low Peclet numbers and nonhomogeneous solution. Water Resour. Res., 5: 139.

10. *Bachmat, Y.* and *Bear, J.*, 1964. The general equations of hydrodynamic dispersion. J. Geophys. Res., 69: 2561—2567.

11. *Bachmat, Y.* and *Bear, J.*, 1972. Mathematical formulation of transport phenomena in porous media. Int. Assoc. Hydr. Res. — Int. Soc. Soil Sci, Proc. 2nd Symp. Guelph pp. 174—193.

12. *Bayer M. B.*, 1972. A non-linear mathematical programming model for water guality management. Int. Sump. on Modelling Techniques in Water Resour. Syst. Environment Canada, Ottawa, pp. 341—351.

13. *Bear J.*, 1960. The Transition Zone between Fresh and Salt Waters in Coastal Aquifers. Thesis, Univ. of California, Berkeley, Calif.

14. *Bear J.*, 1961a. On the tensor form of dispersion. J. Geophys. Res., 66. 1185—1197.

15. *Bear J.*, 1961b. Some experiments on dispersion. J. Georhys. Res., 66: 2455—2467.

16. *Bear J.*, 1970. Two liquid flows in porous media. In: V. T. Chow (Editor), Advances in Hydroscience, 6 Academic Press, New York, pp. 142—252.

17. *Bear J.*, 1972. Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier, New York, 764 pp.

18. *Bear J.* and *Bachmat Y.*, 1967. A generalized theory on hydraulic hydrodynamic dispersion in porous media. Int. Assoc. Hydr. Symp. Haifa, Publ., 72: 7—16.

19. *Bear J.* and *Dagan G.* The transition zone between fresh and salt waters in a coastal aquifer. Hydraulic Lab. Technion Haifa Israel IASH; 1962a, Prog. Rep. 1, The steady interface between two immisible fluids in a two-dimensional field of flow; 1962, Prog. Rep. 2, A steady flow to an array of wells above the interface, approximate solution for a moving interface; 1964a, Progr. Rer. 3, The interface below a coastal collestor; 1966, Progr. Rep. 4, Increasing the yield of a coastal collector by means of special operation techniques; 1966a, Progr. Rep. 5, The transition zone at the risinrg interface below the collector.

20. *Bear, J., Zaslavsky, D.* and *Irmay S.*, 1968. Physical Principles of Water Percolation and Seepage, UNESCO, Paris.

21. *Bellman, R., Kalaba, R. E.* and *Lockett J. A.*, 1966. Numerical Inversion of the Laplace Transform. Elsevier, New York.
22. *Ben Salah, M. D.*, 1965. Influence des contrastes de viscositè et de densitè sur le dèplacement en milieu poreux de deux fluides miscibles. Thèse Univ. de Toulouse.
23. *Benzecri, J. P.* et ses collaborateurs, 1973. Vol. I, La Taxinomie, Vol. 2, Analyse des correspondances. Dunod, Paris, 624 pp.
24. *Bird R. B., Stewart, W. E.* and *Lightfoot. E. N.*, 1960.Transport Phenomena. Wiley, New York.
25. *Blackwell R. J.*, 1959. Experiments on mixing by fluid flow in porous media. 52nd. Ann. Meeting Soc. Pet. Eng., San Francisco, Preprint 29.
26. *Blackwell, R. J.*, 1962. Laboratory studies of microscopic disperaion phenomena. Soc. Pet. Eng. J., 2: 1—8.
27. *Blackwell, R. J., Rayne, J. R.* and *Terry, W. M.*, 1959. Factors influencing the efficiency of miscible displacement. Trans A. I. M. E., 217: 1—8.
28. *Blanc, G.*, 1967. Contribution á 1 ètude des dèplacements par fluides miscibles dans un milieu poreux; dispersion transversale. Thèse, Univ. Paris, Editions Technip.
29. *Bochever, F. M.* and *Oradovskaya, A. Y.* 1967. Convective salt diffusion in a radial subsurface stream in relation to the protection of subsurface water from contaminated discharges. s. Sov. Hydrol., Selected papers, 4.
30. *Bolt, G. H.* and *Groenevelt, P. H.*, 1972. Coupling between transport processes in porous media. Int. Assoc. Hydr. Res. — Int. Soc. Soil Sci., Proc. 2nd Symp. Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media. Guelph, pp. 630—652.
31. *Bredenoeft, J. D.*, 1969. Finite-difference approximations to the equations of groundwater flow. Wat. Resour. Res., 5—2: 531—534.
32. *Bredehoeft, J. D.*, 1971. Comment on «Numerical Solution to the Convective Diffusion Equation» by C. A. Oster, J. C. Sonnichsen and R. T. Jaske. Water Res. Res., 7—3: 755—757.
33. *Bredehoeft, J. D.* and *Pinder, G. F.*, 1972. Mass transport in flowing groundwater. Water Resour. Res., 9-1: 194—210.
34. *Brenner, H.*, 1962. The diffusion model of longitudinal mixing in beds of finite length. Numerical values. Chem. Eng. Sci., 17: 229—243.
35. *Brigham, W. E., Reed, P. W.* and *Dew, J. N.*, 1959. Experimets on mixing by fluid flow in porous media. A. I. Ch. E.—A. I. M. E. Symp. Oil Recovery Meth., San Francisco, Preprint 44.
36. *Bruch J. C.* and *Street, R. L.*, 1967. Two—dimensional dispersion. Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 93: 17—39.
37. *Bruch, J. O. Jr.*, 1970. Two-dimensional dispersion experiments in a porous medium Water Resour. Res., 6-3: 791—800.
38. *Cagauan, B. G., Lau, L. S., Green, R. E.* and *Uehara*, G., 1968. Solute disperaion in two Hawaian soils under saturated flow. Trans. 9th Int. Congr. Soil Sci., first parer, 20 pp.
39. *Carslaw, H. S.* and *Jaeger, J. C.*, 1959. Conduction of Heat in Solids. Oxford Univ. Press, Oxford, 510 pp.
40. *Castillo, E., Krizek R. J.* and *Karadi, G. M.*, 1972. Comparaison of disperaion characteristics in fissured rock. Int. Assoc. Hydr. Res.—Int. Soc. Soil Sci. Proc. 2nd Symp. Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, Guelph, pp. 778—797.
41. *Chalengeas, J. L.* 1970. Mesure des directions et vitesse d'ècoulement d'une nappe d'eau souterraine par la mèthode de dèplacement des èquipotentielles. Thèse, Univ. de Strasbourg.
42. *Chow, V. T.*, 1952. On the determination of transmissibility and storage coefficients from pumping test date. Trans. Am. Geophys. Union, 33: 397—404.
43. *Coats, K. H.* and *Smith, B. D.*, 1964. Dead and pore volume and dispersion in porous media. Soc. Pet. Eng., 4: 73—84.
44. *Coe, J. J.*, 1970. Effects of solid waste disposal on groundwater quality. J. Am. Water Assoc., 12: 776—783.

45. *Corompt, P., Gaillard, B., Gulzerix, J., Margrita, R., Molinari, J., Corda R., Crampon, N.* and *Olivier, D.*, 1974. Méthode pour la détermination de caractéristiques de transfert de substances polluantes dans les nappes aquifères. Int. Atomic Energy Agency. Symp. Isotope Techn. in Groundwater Hyqr., Vienna. IAEA—SM., 182—41.

46. *Crane, F. E.* and *Gardner, G. H. F.*,1961. Measurements of transverse dispersion in granular media. J. Chem. Eng. Data, 6 : 283.

47. *Crank, J.*, 1967. The Mathematics of Diffusion. Oxford Univ. Press, Oxford, 347 pp.

48. *Dagan, G.*, 1967. Hydrodynamic dispersion in a nonhomogeneous porous column. J. Geophys. Res., 72: 4075—4080.

49. *Dagan, G.*, 1969. Some aspects of heat and mass transfer in porous media. IAHR Symp. Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, Haifa.

50. *Dagan, G.*, 1971. Perturbation solutions of the dispersion equation in porous mediums. Water Resour. Res., 7: 135—142.

51. *Dagan, G.* and *Bear., J.*, 1968. Solving the problem of local interface upconing in a coastal aquifer by the method of small perturbations.. J. I. A. H. R., 1, 6: 15—44.

52. *Day, P. R.*, 1956. Dispersion of a moving salt-water boundary advancing through a saturated sand. Trans. Am. Geophys Union, 37: 595—601.

53. *Day, P. R.* and *Forsythe, W. M.*, 1957. Hydrodynamic dispersion of solutes in the soil moisture stream. Soil Sci. Soc. Am., Proc., 21: 477—480.

54. *Deans, H. A.*, 1963. A mathematical model for dispersion in the direction of flow through porous media. J. Soc. Pet. Eng., 49—52.

55. *Debuisson, J.*, 1970. La nappe aquifère du cordon dunaire de Malika (Sènègal). Bull. Bur. Rech.Géol. Min., 3-3: 149—161.

56. *Debuisson, J.* and *Moussu, H.*, 1967. Une étude expérimentale de l'intrusion des eaux marines dans une nappe cotière du Sènègal sous l'effet de l'exploitation. Int. Assoc. Sci. Hydr. Symp. of Haifa, Publ. 72: 334—349.

57. *Defives, D.*, 1960. Transfert de matière. Rev. Inst. Fr. Pètrole, 15: 1141—1365.

58. *Degot, B., Levèque, P. C., Courtois, G., Gasnier, M.* and *Godar, S.*, 1963. Deux utilisations du^{82} Br en hydrodynamique souterraine. Int. Atomic Energy Agency. Radioisotopes in hydrology, Tokyo.

59. *Deininger, R. A.*, 1972. Minimum cost regional pollution control systems. Int. Symp. on Modelling Techniques in Water Resour. Syst. Environment Canada, Ottawa, pp. 352—361.

60. *De Josselin de Jong, G.*, 1958. Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits. EOS Trans. Am. Geophys. Union, 39: 67—74.

61. *De Josselin de Jong, G.*, 1969. The tensor character of the dispersion coefficient in anisotropic porous media. I. A. H. R. Symp. on Fundamentals of Transport Pheomena in Porous Media, Haifa, pp. 259—267.

62. *De Josselin de Jong, G.*, 1972. Dispersion of a point injection in an anisotropic porous medium. New Mexico Inst. Min. Techn. Socorro, 69 pp.

63. *De Josselin de Jong, G.* and *Bossen, M. J.*, 1961. Discussion of paper by J. Bear, On the tensor form of dispersion. J. Geophys. Res., 10, 66: 3623—3624.

64. *De Josselin de Jong, G.* and *Shao Chin Way*, 1972. Dispersion in fissured rock. New Mexico Inst. Min. Tech. Socorro, 30 pp.

65. *De Wiest, R. J. M.*, 1965. Geohydrology. Wiley, New York, 366 pp.

66. *De Wiest, R. J. M.* (Editor), 1969. Flow through Porous Media. Academic Press, New York.

67. *Ditkin, V. A.* and *Prudnikov, A. P.*, 1962. Operational Calculus in Two Variables. Int. Ser. Pure Appl. Math., Pergamon Press, London.

68. *Douglas, J. Jr., Peaceman, D. W.* and *Rachford, H. H. Jr.*, 1959. A method for calculating multidimensional immiscible displacement. Trans. A. I. M. E., 216; 297—308.

69. *Dracos, T.* and *Schiegg, H. O.*, 1971. Flow of immiscible fluids in unconfined aquifers. Mitt. Versuch. Wasserbau, Hydr. und Glaz. Eidg. Tech. Hochsch. Zurich, 2.

70. *Drost, W.* and *Neumaier, F.*, 1974. The application of single-borehole methods in groundwater research. Int. Atomic Energy Agency, Symp. on Isotope Techniques in Groundwater Hydr., Vienna, IAEA-SM, 182—12.

71. *Duprat, A., Simler, L.* and *Ungemach, P. O.*, 1970. Contribution de la prospection èlectrique à la recherche des caractèristiques hydrodynamiquns d'un milieu aquifère. Terres et Eaux, V. XXIII-62: 23—31.

72. *Dupuit, J.*, 1863, Etudes thèoriques et pratiques us sur le mouvement des eaux dans les canaux dècouverts et à travers les terrains permèables. Dunod, Paris, 304 pp.

73. *Ebach, E. A.* and *White, R. R.*, 1958. Mixing of fluids flowing through beds of packed solids. J. Am. Inst. Chem—Eng., 2, 4: 161—164.

74. *Elrick, D. E.*, 1969. Dispersion and reaction in unsaturated soils. Application to tracers. Bull. Int. Assoc. Hydr. Sci., 2: 49—60.

75. *Elrick, D. E., Biggar, J. W.* and *Webber, L. R.*, 1966. Soil pollutants: tneir origin and behavior. J. Soil Wat. Conserv., pp. 7—11.

76. *Emsellem, Y.*, 1971. Modèles mathèmatiques pour la gestion intègrèe des ressorces en eau. Ec. Nat. Sup. Mines Paris, LHM/R 71/6.

77. *Emsellem, Y.*, 1972a. Modèles mathèmatiques de pollution pour la gestion intègrèe des ressources en eau. Ec. Nat. Sup. Mines Paris, LHM/R72/13.

78. *Emsellem Y.*, 1972b. La gestion intègrèe des ressources ev eau. Ec. Nat. Sup. Mines Paris, LHM/R72/5.

79. *Emsellem, I.*, 1974a. Options de dèveloppement et gestion intègrèe des ressources en eau. United Nations. Com Ec. Europe. Comitè Problèmes Eau. Coll. Utilis. Techn. Inf. Automation Syst. Ress. en eau, Washington.

80. *Emsellem, Y.*, 1974b. Objectifs gènèraux de l'utilisation des techniques informatiques et de l'automation dans les systèmes de ressources en eau.United Nations. Com. Ec. Europe. Comitè Problèmes Eau. Coll. Utilis. Techm. Inf. et automation Syst. Ress. en eau, Washington.

81. *Emsellem, Y., De Marsily, G., Poitrinal, D.* and *Ratsimiebo, M.*, 1971. Dèconvolution et identification automatique de paramètres en hydrologie. Int. Sym. Nath. Mod. in Hydrology, Warsaw.

82. *Emsellem, Y.* and *De Marsily, G.*, 1971. An automatic solution for the inverse problem. Water Resour. Res. 7-5: 1264—1283.

83. *Emsellem, Y.* and *Fried J. J.*, 1970. Schèma d'ètude d'une pollution. Ec. Nat. Sup. Mines de Paris, LHM/N70/12.

84. *Emsellem, Y., Fried, J. J.* and *Ungemach, P. O.*, 1973. Les modèles de pollution. 2ème Congrès sur la gestion intègrèe de la pollution, Palerme, Preprint.

85. *Emsellem, Y., Fried, J. J.* and *Ungemach, P. O.*, 1974. Modèles de prèvision des pollutions souterraines et mèthodologie de mesure. Colloque Intern. Informatique et Ehvironnement. Fondation Universitaire Luxembourgeoise, Arlon.

86. *Exler, H. J.* 1972. Ausbreitung und Reichweite von Grundwasserverunreinigungen im Unterstrom einer Mulldeponie. Das Gas — und Wasserfach (GWF), Wasser Abwasser, 113: 101—112.

87. *Farkasdi, G., Golwer, A., Knoll, K. G., Matthess, G.* and *Schnetder, W.* 1969. Mikrobiologische und hygienische Untersuchungen von Grundwasserverunreinigungen im Unterstrom von Abfallplätzen. Städtehygiene, 20: 25—31.

88. *Farvolden, R. N.* and *Hughes, G. M.*, 1971. Hydrogeologic implication in solid waste disposal. Int. Union Geodet. Geophys. — Int. Assoc. Sci. Hydr., Symp. Moscow Proc.

89. *Fatt, I.*, 1961. Deductions from the network model concerning diffusion and fluid flow through porous media. Interaction between fluids and particles. Instn. Chem. Eng., London, pp. 304—311.

90. *Feller, R. W.*, 1966. An introduction to the theory of probabilities and its applications. Wiley, New York, Vol. 1: 509 pp.; Vol. 2: 626 pp .

91. *Flint, L. F.* and *Eisenklam, P.*, 1970. Dispersion of matter in transitional flow through straight tubes. Proc. R. Sos. London, Ser. A. 315: 519—533.

92. *Forsythe, G. E.* and *Wasow, W. R.*, 1960. Finite-difference methods for partial differential equations. Wiley, New York, 444 pp.

93. *Freeze, R. A.*, 1972. Subsurface hydrology at waste disposal sites. I. B. M. J. Res. Develop., pp. 117—129.

94. *Fried, J. J.*, 1968a. Les phènomènes de dispersion dans les milieux. poreux. Etude Dir. Gèn. Rech. Sci. Techn. Action concertèe Eau. Secrètariat Permanent pour l'Etude des Problèmes de l'Etau, Paris.

95. *Fried, J. J.*, 1968b. Application pratique des formules de dispersion. Etude Dir. Gèn. Rech. Sci. Techn. Action concertèe Eau. Secrètariat Permanent pour l'Etude des Problèmes de l'Eau, Paris.

96. *Fried, J. J.*, 1968 c. Changement d'èchelle dans un milleu poreux applique à l'ètude de la dispersion d'un traceur dans un fluide. Ann. Ponts Chaussèes, V: 285—295.

97. *Fried, J. J.*, 1969a. Intrusion d'eau de mer dans une nappe cotière: application de la thèrorie de la dispersion a l' ètude de la zone de transition. Ec. Natl. Sup. Mines de Paris. Centre de Morphologie Math., 108.

98. *Fried J. J.*, 1969b. Dètermination des caractèristiques physiques du terrain par la mèthode du puits unique. Ec. Natl. Sup. Mines de Papis. Centre de Morphologie Math., 130.

99. *Fried, J. J.*, 1971a. A mathematical model for the single—well pulse technique. Proc. Symp. Water Resour., Indian Inst. Sci., Bangalore.

100. *Fried, J. J.*, 1971b. Quelques èlèments pour l'ètude de des pollutions d'une nappe aquifere par invasion massive d'hydrocarbures. Ec. Natl. Sup. Mines de Paris, LHM/N71/14.

101. *Fried, J. J.*, 1971 c. Dètermination ponctuelle du coefficient de dispersion de deux fluides miscibles dans un milieu poreux: une thèorie de la dilution ponctuelle. C. Acad. Sci. Paris, 273-A: 47.

102. *Fried, J. J.*, 1971d. Dètermination ponctuelle du coefficient de diffusion-dispersion dans un milien hètèrogène mais isotrope: une thèorie mathèmatique de la dilution. C. R. Acad. Sci., Paris, 273-A: 834.

103. *Fried, J. J.*, 1972a. Etudes thèoriques et mèthodologiques de la dispersion en milieu poreux naturel. Thèse, Univ. de Bordeaux.

104. *Fried, J. J.*, 1972b. Miscible pollutions of groundwater: a study in methodology. Proc. Int. Symp. on Modelling Techniques in Water Resources Syst. Environment Canada, Ottawa, pp. 362—371.

105. *Fried, J. J.* 1972 c. Some recent applications of the theory of dispersion in porous media. Proc. Joint Symp. on Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media. Int. Assoc. Hydr. Res.—Int. Soc. Soil Sci., Guelph, Ontario, pp. 722—731.

106. *Fried, J. J.*, 1973a. Groundwater pollution course. Univ. of Western Australia, Nedlands.

107. *Fried, J. J.*, 1973o. Numerical Methods in hydrogeology. Univ. of Western Australie, Nedlands.

108. *Fried, J. J.*, 1974. Moderne Trends in der Umweltschutzforschung. Koll. Ges. Strahlen und Umweltrorschung, Munich.

109. *Fried, J. J.*, 1975. Pollutions miscibles des nappes souterraines. Rap. Gèn. Rèunion Int. Comitè Milieux Poreux—Int. Assoc. Hydr. Res., Zurich.

110. *Fried, J. J.* and *Combarnous, M. A.*, 1971. Dispersion in porous media. In: V. T. Chow (Editor), Advances in Hydroscience, Academic Press, New York, pp. 169—282.

111. *Fried, J. J.* and *Ungemach, P. O.*, 1971a. A dispersion model for a quantitative study of a groundwater pollution by salt. In: Water Research, 5. Pergamon Press, London, pp. 491—495.

112. *Fried, J. J.*, and *Ungemach, P. O.*, 1971b. Dètermination in—situ du coefficient de dispersion longitudinale d'un milieu poreux naturel. C. R. Acad. Sci., Paris, 172-A, p. 1327.

113. *Fried, J. J.* and *Ungemach, P. O.*, 1973h. Recherche des vitesses et des coefficients de dispersion. Mesures gèophysiques et modèle hydrodispersif. Ec. Natl. Sup. Mines de Paris, LHM/R 73/15.

114. *Fried, J. J.* and *Ungemach, P. O.*, 1973b. Cours de pollution des eaux souterraines. Ec. Natl. Sup. Mines de Paris.

115. *Fried, J. J.*, *Garnier, J. L.* and *Ungemach, P. O.*, 1971b. Etude quantitative d'une pollution de nappe d'eau souterraine: la salure de la nappe phrèati-

que dans le dèpartm ne du Haut—RhBiunet. Il. Bur. Rech. Gèol. Min., Sect. 111, 1: 105—115.

116. *Fried, J. J., Garnier, J. L.* and *Ungemach, P. O.*, 1971b. Aspests mèthoIdologiques d'une ètude de pollution de nappe d'eau souterraine. Symp. I. U. G. G. — Int. Assoc. Sci. Hydr., Moscow, Prèprint.

117. *Fried, J. J.., Levèque, P. C., Poitrinal, D.* and *Severac J.*, 1972. Local studies of miscible pollutions of groundwater: the single-well pulse technique. Proc. Water Pollution, a working Conference. Water Res. Assoc., Reading.

118. *Fried, J. J., Emsellem, Y., De Marsily, G. Ungemach, P. O., Combarnous, M. A., Vachaud, G.* and *Duprat, A.*, 1973. Modèles mathèmatiques et mèthodologie pour la gestion intègrée de la pollution. 2ème Congrès sur la gestion intègrèe des ressources en eau, Palerme, Prèprint.

119. *Fried, J. J., Ungemach, P. O., Emsellem, Y.*, and *Duprat A.*, 1974. Modèles de pollution des eaux souterraines. United Nations Com. Ec. Europe Comité Problems Eau. Coll. utilis. Tech. Inf. et automation Syst. Ress. en eau, Washington.

120. *Garabedian, P. R.*, 1964. Partial Differential Equations. Wiley, New York, 672 pp.

121. *Gardner, A. O. Jr., Peaceman, D. W.* and *Pozzi, A. L. Jr.*, 1964. Numerical calculation of multidimensional miscible displacement by the method of characteristics. Sos. Pet. Eng., J., 4: 26—36.

122. *Gelhar, L. W.* and *Collins, M. A.*, 1971. General analysis of longitudinal dispersion in nonuniform flow. Water Resour. Res., 7: 1511—1521.

123. *Golwer, A.* and *Matthess, G., 1967.* Research on ground water contaminated by deposits of solid waste. Int. Assoc. Sci. Hydr. Bern. Publ. 78: 129—133.

124. *Golmer, A.* and *Matthess, G.*, 1969. Qualitative Beeinträchtigung des Grundwasserdargebotes durch Abfalistoffe. Dts. Gewasserk. Mitt. Sonderh. Dts. gewässerk. Tagung. Koblenz, 1968, pp. 51—55.

125. *Golwer, A.* and *Matthess, G.*, 1972. Die Bedeutung des Gasaustausches in der Grundfuft für die Selbstreinigungsvorgänge in verunreinigten Grundwässern. Z. Geol. Ges., 123: 29—38.

126. *Golwer, A., Matthess, G.* and *Schneider, W.*, 1970. Selbstreinigungsvorgänge im Grundwasserbereich. Vom Wasser, Weinheim, pp. 64—92.

127. *Golwer, A., Matthess, G.* and *Schneider, W.*, 1972a. Contamination de l'eau souterraine par des dèchets et implications pour les mèthodes d'èvacuation des rèsidus. CEBEDEAU, 347: 428—433.

128. *Golwer A., Knoll, K. H., Matthess, G., Schneider, W.* and *Wallhausser, K. H* 1972b. Mikroorganismen im Unterstrom eines Abfallplatzes. Gesundheits-Ingenieur, 93: 142—152.

129. *Goodknight, R. C.* and *Fatt, I.*, 1963. Surface concentration build-up during diffusion in porous media with dead-end pore volume. J. Phys. Chem., 67: 949—950.

130. *Goodknight, R. C., Klikoff, W. A.* and *Fatt, I.*, 1960. Non steady-state fluid flow and diffusion in porous media containing dead-end pore volume. J. Phys. Chem., 64: 1162—1168.

131. *Government of* Inqia Atomic Energy Commission, 1971. A Bibltography on hydrological considerations in (1) Water resources for agriculture; (2) Ground disposal of radioactive wastes. Bhabha Atomic Research Centre, Desalination and Effluent Engineering Division, Bombay, 329 pp.

132. *Greenkorn, R. A.* and *Kessler, D. K.*, 1969. Dispersion in heterogeneous non uniform anisotropic porous media. Flow through Porous Media Symp. Ind. Eng. Chem., 61-9: 14—42.

133. *Groenvelt, P. H.* and *Bolt, G. M.*, 1972. Mixture of fluids and solid particles. Int. Assoc. Hydr. Res.—Int, Soc. Soil Sci., Proc. 2nd Symp. on Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, Guelph, pp. 653—666.

134. *Guelfand, I. M.* and *Chilow, G. E.*, 1962. Les Distributions. Dunod, Paris, 376 pp.

135. *Guizerix J., Emsellem, Y., Corompt, P., Margrita, R.* and *De Marsily, G.*, 1970. Mèthodes de traceur pour la dètermination a priori de la propagation de substances polluantes dans le rèseau hydrograpaique et a posteriori pouir la loca-

lisation d'un point de rèjet inconnu. Coll. Application des Tech. nuclèaires á la mesure et au contrôle de la pollution du mileiu.

136. *Guizarix, J., Margrita, R., Gaillard, B., Corompt, P.* and *Alquier, M.*, 1974. Analyse des informations fournies par les traceurs naturels ou artificiels dans l'ètude des systèmes aquifères en nydrogèologie. Int. Atomic Ehergy Agency, Symp. on Isotope Techniques in Groundwater Hydr., Vienna. IAEA-SM 182/48.

137. *Guymon, G. L.*, 1970. A finite-element solution of the one-dimensional diffusion-convection equation. Water Resour. Res., 6-1: 204—219.

138. *Guymon, G. L., Scott, V. H.* and *Herrmann, L. R.*, 1970. A general solution of the twodimensional diffusion convection equation by the finite-element method. Water Resour. Res., 6-6: 1611—1617.

139. *Halevy, E.* and *Nir, A.*, 1962. The determination of aquifer parameiers with the aid of radioactive tracers. J. Geophys. Res., 61: 2403.

140. *Halevy, E., Moser, H., Zellhafer, O.* and *Zuber, A.*, 1966. Borehole dilution techniques: a critical review. Int. Atomic Ennergy Agency. Symp. on Isotope Techniques in Groundwater Hydr., Vienna, pp. 531—564.

141. *Harleman, D. R. F.* and *Rumer, R. R.* 1962. The dynamics of saltwater intrusion in porous media. M. I. T. Rep., 55.

142. *Harleman, D. R. F.* and *Rumer, R. R.*, 1963. Longitudinal and lateral dispersion in an isotropic porous medium. J. Fluid Mech., 16-3: 385—394.

143. *Harris, W. H.*, 1967. Stratification of fresh and saltwater on barrier Islands as a result of differences in sediment permeability. Water Resour. Res., 3-1: 89—97.

144. *Heller, J. P.*, 1972. Observations of mixing and diffussion in porous media. Int. Assoc. Hydr. Res—Int. Soc. Soil Sci., Proc. 2nd Symp. on Fundamentals of Transport Pheomena in Porous Media, Guelph, pp. 1—26.

145. *Hiby, J. W.*, 1962. Longitudinal and transverse mixing during single—phase flow through granular beds. Symp. Interastion between fluids and particles, Inst. Chem. Eng., London, pp. 312—325.

146. *Hoopes, J. A.* and *Harleman, D. R. F.*, 1967a. Dispersion in radial flow from a recharge well. J. Geophys. Res., 72-14: 3595—3607.

147. *Hoopes, J. A.* and *Harleman, D. R. F.*, 1967b. Waste water recharge and dispersion in porous media. Proc. Am. Soc. Civ. Eng. (Hydraulics Div.), 93-5: 51—71.

148. *Hormander, L.*, 1969. Linear Partial Differential Operators. Springer, Berlin, 285 pp.

149. *Int. Atomic* Energy Agency'UNESCO, 1968. Int. Hydrol. Guidebook on Nuclear Techniques in Hydrology. Vienna, 298 pp.

150. *Jacob, C. E.*, 1947. Flow of groundwater. In: H. Rouse (Editor), Engineering Hydraulics. Wiley, New York, pp. 321—386.

151. *Jacquard, P., Lasvergeres, J. A.* and *Pottier, J.*, 1962. Rèsolution de l'èquation de diffusivitè du dèplacement miscible en milieu radial circulaire. Inst. Fr. Pètrole. c 35/55059.

152. *Jain, C.*, 1968. Etude numèrique des dèplacements miscibles en milieux hètèrogènes. 3rd. Coll. Assoc. Rech. Tech. Forage et Prod., Pau, pp. 491—506.

153. *Javandel, I.* and *Witherspoon, P. A.*, 1968. Application of the finite—element method to transient frow in porous media. J. Soc. Pet. Eng., 8(3): 241—252.

154. *Jeanson, B.* and *Dufort, J.*, 1969. Etude sur modèle physique des conditions de pollution des nappes côtières par l'eau salèe lors de la production. Rapp. Inst. Fr. Pètrole, 17182.

155. *Johnson, A. I.*, 1971. Gen. Rep. Symp. on Pollution of Groundwater. Session on pollution by waste deposits, waste water and miscellaneous sources. 15th Gen. Ass. IUGG, Moscow.

156. *Kato, T.*, 1966. Perturbation Theory for Linear Operators. Springer, Berlin, 592 pp.

157. *Kay, B. D.* and *Elrick D. E.*, 1967. Adsorption and movement of lindane in soils. Soil Sci., 104-5; 314—322.

158. *Klinkenberg, L. J.*, 1957. Pore—size distribution of porous media and displacement experiments with miscible liquids. J. Pet. Tech., 210: 366—369.

159. *Klotz, D.* and *Moser, H.*, 1974. Hydrodynamic dispersion as aquifer characteristic. Model experiments by means of radioactive tracers. Int. Atomic Energy Agency Symp. on Isotope Techniques in Groundwater Hydr., Vienna. IAEA—SM—182/42.

160. *Kohout, F. A.* and *Klein, H.*, 1967. Effect of pulse recharge on the zone of diffusion in the Biscayne aquifer. Int. Assoc. Sci. Hydr. Symp. of Haifa, Publ., 72: 252—270.

161. *Krupp, H. K.* and *Elrick, D. E.* 1968. Miscible displacement in an unsaturated glass bead medium. Water Resour. Res., 4-4: 809—815.

162. *Kunetz G.*, 1966. Pripples of direct current resistivity prospecting. Geoexnciloration (Monograph Ser. I., no. 1) Borntraeger, Berlin, 103 pp.

163. *Landau, L. D.* and *Lifshitz, E. M.*, 1963. Fluid Mechanic Pergamon Press, Oxford, 536 pp.

164. *Lantz, R. B.*, 1969. Rigorous calculation of miscible displacement using immiscible reservoir simulators. Soc. Pet. Eng., Preprint 2594.

165. *Lantz, R. B.*, 1970. Quantitative evaluation of numerical diffusion (truncation error). Soc. Pet. Eng., Preprint 2811.

166. *Lau, L. S.*, *Kaufmann, W. S.* and *Todd, D. K.*, 1959. Dispersion of a water tracer in radial laminar flow throuqh homogeneous proous media. Progr. Rep. 5 Inst. Eng. Res., Ser. 93, Berkeley, Calif.

167. *Lawson, D. W.*, 1971. Improvements in the finite-difference solution of two-dimensional dispersion problems. Water Resour. Res., 7-3: 721—725.

168. *Lawson, D. W.* and *Elrick, D. E.*, 1972. A new method for determining and interpreting dispersion coefficients in porous media. Int. Assoc. Hydr. Res.—Int. Soc. Soil Sci., Proc. 2nd Symp., Guelph, pp. 753—777.

169. *Legatski, M. W.* and *Katz, D. L.*, 1966. Dispersion coefficients for gases flowing in consolidated porous media. Soc. Pet. Eng., Preprint 1594.

170. *Leipholz, H.* 1974. Mechanics of Elastic Stability—Theory of Elasticity. Noordhoff, Leiden, 400 pp.

171. *Lenda, A.* and *Zuber, A.*, 1970. Tracer dispersion in groundwater experiments. Isotope Hydrology. Int. Atomic Energy Agency, Vienna, pp. 619—641.

172. *Levêque, P. C.*, 1969. Emploi des traceurs radioactifs naturels et artificiels en hydrologie souterraine. Houille Blanche, 8: 833.

173. *Levêque, P. C.*, *Giannotti, G. P.*, *Grison, G.*, *Mittempergher, M.* and *Fidoti, G.*, 1971. Critères hydrodynamiques de garantie de perennitè pour le stockage gèologique superficiel des dèchets radioctifs. Assoc. Int. Hydr., 71 Conf. Tokyo, 197, III-71, S, p. 1248.

174. *Levêque, P. C.*, *Gros, J. C.*, *Maurin, C. Severac, J.* and *Viguier, C.*, 1974. Utilisation des techniques isotopiques pour la rèsolution de problèmes hydrologiques en gènie civil. Etude de trois cas prècis. Int, Atomic Energy Agency. Symp. on Isotope Techniques in Groundwater Hydr., Vienna, IAEA—SM—182/43.

175. *Li, W. H.* and *Canale, R. P.*, 1967. Dispersion from sources in nonuniform seepage flow. Proc. Am. Soc. Civ. Eng. (Hydraulics Div.), 93:3: 369—377.

176. *Li, W. H.* and *Yeh, G. T.*, 1968. Dispersion at the interface of miscible liquids in a soil. Water Resour. Res., 4-2: 369—377.

177. *Lichnerowicz, A.*, 1955. Algèbre et analyse linèaires. Masson, Paris, 316 pp.

178. *Lieberstein, H. M.*, 1972. Theory of Partial Differential Equations. Academic Press, New York, 283 pp.

179. *List, E. J.* and *Brooks, H. N.*, 1967. Lateral dispersion in saturated porous media. J. Geophys. Res., 72—10 : 2531—2541.

180. *Lusczynski, N. S.*, 1961. Head and flow of groundwater of variable density. J. Geophys. Res., 12-66 : 4247—4256.

181. *Marle, C.* 1968. Les ècoulements polyphasiques. Cours Ec. Natl. Sup. Pètroles et moteurs. Ed. Technip, Paris.

182. *Marle, C.* and *Defrenne, P.*, 1960. La description mathèmatique de dèplacement de fluides miscibles dans un milieu poreux. Rapp. Inst. Fr. Pètrole, 5433.

183. *Marle, C.* and *Simandoux, P.* 1966. Diffusion avec convection dans un milieu stratifiè. Coll. Centre Natl. Rech. Sci. 160.

184. *Marle, C., Simandoux, P., Pacsirszky, J.* and *Gaulier, C.*, 1967. Etude du dèplacement de fluides miscibles en milieu poreux stratifiè. Rev. Inst. Er. Pètrole, 22-2: 272—294.

185. *Martin, J. M.*, 1969. Dèplacement miscible en milieu naturel de grandes dimensions. Rapp. Inst. Fr. Pètrole, ARTFPA 36/86.001.

186. *Martin, J. M.*, 1971. Dèplacements miscibles dans des milieux poreux naturels de grande extension. Rev. Inst. Fr. Pètrole, 26-11: 1065—1075.

187. *Matheron, G.*, 1965. Les variables règionalisèes et leur estimation: une application de la thèorie des fonctions alèatoires aux sciences de la nature. Masson, Paris, 306 pp.

188. *Matheron, G.*, 1967. Elèments pour une thèorie des milieux poreux. Masson, Paris, 166 pp.

189. *Matheron, G.*, 1969. Le Krigeage universel. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathèmatique. Ec. Natl. Sup. Mines de Paris, 83 pp.

190. *Matheron, G.*, 1971. The theory of regionalized variables and its applications. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathèmatique. Ec. Natl. Sup. Mines de Paris, 211 pp.

191. *Matthess, G.*, 1972. Hydrogeologic criteria for the selfpurication of polluted groundwater. 24th I. G. C., section 11, pp. 296—304.

192. *Matthess, G.*, 1973. Geologische und geohydrologische Probleme bei der Standortwahl von Deponien. Giessener Berichte zum Umweltschutz, Heft 3: 33—50.

193. *Mercado, A.*, 1967. The spreading pattern of injected water in a permeability stratified aquifer. Int. Assoc. Sci. Hydr., Symp. Haifa, Publ. 72: 23—36.

194. *Miller, M. C.*, 1966. Gravity effects in miscible displacement. Soc. Pet. Eng. Preprint 1531.

195. *Monget, J. M., Berline, P., Bordet, J. P., Emsellem, Y. Fontaine, A., Lefoll, Y.* and *Albuisson, M.*, 1974. Traitement des sèries spatio—temporelles sur ordinateur. United Nations. Comm. Econ. Europe. Coll. utill, techn. Inform et Automation Syst. Ress., et. eau, Washington.

196. *Moulu, J. C.*, 1968. Etude expèrimentale du dèplacement miscible dans un milieu nètèrogène à nodule. 3rd Coll. Assoc. Rech. Tech. Forage Production. Pau, no. 30.

197. *Mundorff, M. J., Crosthwaite, E. G., Chabot Kilburn*, 1964. Groundwater for irrigation in the Snake River Basin in Idaho. U. S. Geol. Surv. Water Supply Pap., 1654: 224 pp.

198. *Munera, H. A.*, 1974. Modelos matematicos simplificados para interpretacion de resultados de ensayos por el metodo de marcacion de toda la columna piezometrica. Int. Atomic Energy Agency. Symp. on Isotope Techniques in Groundwater Hydr., Vienna, IAEA-SM-182/44.

199. *Neuman, S. P.* and *Witherspoon, P. A.*, 1970. Finite—element method of analyzing steady seepage with a free surface. Water Resour. Res., 3-6: 889—897.

200. *Noring, F., Frarkasdi, G., Golwer, A., Knoll, K. H., Matthess, G.* and *Schneider, W.*, 1968. Über Abbauvorgänge von Grundwasserverunreinigungen im Unterstrom von Abfalldeponien. Gas—Wasserfach (GWF). Wasser Abwasser, 109, Heft 6: 137—142.

201. *Norrie, D. H.* and *De Vries, G.*, 1973. The finite—element method. Academic Press, New York, 322 pp.

202. *Nunge, R. J.* and *Gill, W. N.*, 1969. Mechanisms affecting dispersion and miscible displacement. Ind. Eng. Chem., 61-9: 33-49.

203. *Ogata, A.*, 1961. Transverse diffusion in saturated isotropic granular media. U. S. Geol. Surv. Prof. Pap., 411—B.

204. *Ogata, A.* and *Banks, R. B.*, 1961. A solution of the differential equation of longitudinal dispersion in porous media. U. S. Geol. Surv. Prof. Pap., 411-A.

205. *Oroveanu, T.*, 1965. Quelques considèrations sur le dèplacement des fluides miscibles dans les milieux poreux. Rev. Roum. Sci. Tech., Ser. Mec. Appl. 10-6: 1365—1377.

206. *Oroveanu, T.* and *Spulber, I.*, 1969. Sur le dèplacement bidimensionnel des fluides miscibles dans les milieux poreux. Int. Assoc. Hydr. Res., 1 st Symp. on Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, Haifa, pp. 276—281.

207. *Oster, C. A., Sonnichsen, J. C.* and *Jaske, T. R.*, 1970. Numerical solution to the convective diffusion equation. Water Resour. Res., 6-6: 1746—1752.

208. *Patel, R. D.* and *Greenkorn, R. A.*, 1969. Prediction of recovery in miscible displacement in porous media using the dispersion equation. Soc. Pet. Eng., Preprint 2657.

209. *Peaceman, D. W.* and *Rachford, H. H.*, 1955. The numerical solution of parabolic and elliptical differential equations. Soc. Indust. Appl. Math., 3-11; 28—41.

210. *Peaceman, D. W.* and *Rachford, H. H.*, 1962. Numerical calculation of multidimensional miscible displacement. Soc. Pet. Eng., J., 2-4: 327—339.

211. *Petrovski, I. G.*, 1966. Lectures on Partial Differential Equations. Wiley, New York, 245 pp.

212. *Pfannkuch, H. O.*, 1963. Contribution á l'ètude des dèplacements de fluides miscibles dans un milieu poreux. Rev. Inst. Fr. Petrole, 18-2: 1—54.

213. *Pfannkuch, H. O.*, 1969. On the correlation of electrical conductivity properties of porous systems with viscous flow transport coefficients. Int. Assoc. Hydr., Res. Ist Symp. on Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, Haifa, pp. 42—54.

214. *Pinder, G. F.*, 1973. A Galerkin finite—element simulation of groundwater contamination on Long Island, New York. Water Resour. Res., 9-6: 1657—1669.

215. *Pinder, G. F.* and *Bredehoeft, J. D.*, 1971. Groundwater chemistry and the transport equations. Int. Assoc. Sci. Hydr. Int. Symp. Math. Mod. Hydr., Warsaw.

216. *Pinder, G. F.* and *Cooper, H. H. Jr.*, 1970. A numerical technique for calculating the transient position of the saltwater front. Water Resour. Res., 6-3: 875—882.

217. *Pinder, G. F.* and *Frind, E. O.*, 1972. Application of Galerkin's procedure to aquifer analysis. Water Resour. Res., 8-1: 108—120.

218. *Pinder, G. F., Frind, E. O.* and *Papadopoulos, S. S.*, 1972. Functional coefficients in the analysis of groundwater flow using finite elements. Water Resour. Res., 9-1: 222—226.

219. *Price, H. S., Cavendish, J. C.* and *Varga, R. S.*, 1968. Numerical methods of higher-order accuracy for diffusion—convection equations. Soc. Pet. Eng. J., 243: 293—303.

220. *Raats, P. A. C.*, 1972. Jump conditions in the hydrodynamics of porous media. Int. Assoc. Hydr. Res.—Int. Soc. Soil Sci. Proc. 2nd Symp. on Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, Guelpn, pp. 155—173.

221. *Raats, P. A. C.* and *Scotter, D. R.*, 1968. Dynamically similar motion of two miscible constituents in porous mediums. Water Resour. Res., 4-3: 561—568.

222. *Raimondi, D., Gardner, G. H. F.* and *Petrick, C. B.*, 1959. Fffect of pore structure and molecular diffusion on the mixing of miscible liquids flowing in porous media. AIChE. Soc. Pet. Eng. 52nd Ann. Meet., San Francisco, Preprint 43.

223. *Reddell, D. L.*, and *Sunada, D. K.*, 1970. Numerical simulation of dispersion in groundwater aquifers. Colo. State Univ., Fort Collins, Hydrol. Pap. 41: 79 pp.

224. *Reid, G. W.*, 1972. Water quality modelling for forecas tive and planning purposes. Int. Symp. on Modelling Techniques in Water Resour. Syst. Environment Canada, Ottawa,pp. 383—390.

225. *Remson, J., Hornberger, G. M.* and *Molz, F. V.*, 1971. Numerical Methods in Subsurface Hydrology. Wiley, New York, 389 pp.

226. *Rifai, N. E., Kaufman, W. J.* and *Todd, D. K.*, 1956. Dispersion phenomena in laminar flow through porous media. Sanit. Eng. Rep. 3. Inst. Res. Ser. 90, Berkeley, Calif.

227. *Roberts, K. V.* and *Weiss, N. O.*, 1966. Convective difference schemes. Math. Comput., 20-94: 272—297.

228. *Robertson, J. B.*, 1974. Application of digital modelling to the prediction of radioisotope migration in groundwater. Int. Atomic Energy Agency. Symp. on Isotope Techniques in Groundwater Hydr., Vienna. IAEA-SM-182/50.

229. *Robertson, J. B.* and *Barraclough, J. T.*, 1973. Radioactive and chemical waste transport in groundwater at National Reactor testing Station, Idaho: 20 year case history, and digital model. Underground waste manag. artif. rech. VI. Am. Assoc. Pet. Geol., U. S. Geol. Surv. Int. Assoc. Hydr. Sci., pp. 291—322.

230. *Robertson, J. B., Schoen, R.* and *Barraclough, J. T.*, 1974. The influence of liquid waste disposal on the geochemistry of water at the National Reactor Testing Station, Idaho, 1952—1970. U. S. Geol. Surv. Open File Rep., IDO-22053: 231 pp.

231. *Roebert, A. J.*, 1972. Fresh water winning and salt water encroachment in the Amsterdam dune water catchment area. Geol. Mijnbouw, 51 : 1: 35—44.

232. *Rubin, H.*, 1973. Effect of solute dispersion on thermal convection in a porous medium layer. Water Resour. Res., 9-4: 968—974.

233. *Rubin, J.* and *James. R. V.*, 1973. Dispersion-affected transport of reacting solutes in saturated porous media: Galerkin method, applied to equilibrium controlled exchange in unidirectional steady water flow. Water Resour. Res., 9-5: 1332.

234. *Rumer, R. R. Jr.*, 1969. On the derivation of a convective dispersion equation bg spatial averaging. Int. Assoc. Hydr. Res. 1st Symp. on Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, Haifa, pp. 268—275.

235. *Rumer, R. R.* and *Harleman, D. R. F.*, 1973. Intruded salt water wedge in porous media . Proc. Am. Soc. Civ. Eng. (Hydraulics Div.) 6-89: 193—220.

236. *Rutledge, R. W.*, 1973. Geostatistics, review paper. Aust. N. Z. Assoc. Adv. Sci. Meet., Sect. 8, Perth, 34 pp.

237. *Saffman, P. G.*, 1959. A theory of dispersion in a porous melium. J. Fluid Mech., 6: 321—349.

238. *Saffman, P. G.*, 1960. Dispersion due to molecular diffusion and macroscopi cmixing in flow through a network on capillaries. J. Fluid Mech., 7. 194—208.

239. *Scheidegger, A. E.* 1963. The Physics of Flow through Porous Media. Univ. of Toronto Press, Toronto.

240. *Scheidegger, A. E.*, 1969. Stability conditions for displacement processes in porous media. Can. J. Phys., 47-2; 209—214.

241. *Schlumberger, C.*, 1970. Etudes sur la prospection èlectrique du sous-sol. Gauthier Villars, Paris, 92 pp.

242. *Schmorak, S.*, 1967. Salt water encroachment in the coastal plain of Israel. Int. Assoc. Sci. Hydr. Symp., Haifa, Publ. 72: 305 : 318.

243. *Schwartz, L.*, 1973. Thèorie des distributions. Hermann, Paris, 418 pp.

244. *Secrètariat* Permanent pour l'Etude des Problèmes de l'Eau—Service de la Carte Gèologique d'Alsace-Lorraine, 1972. Etude bibliographique de la pollution des eaux souterraines par les dèpôts d'ordures mènagères en milieu alluvial. Bur. Rech. Geol. Minières, 101 pp.

245. *Seeley, R. T.*, 1967. The powers AS of an elliptic operator *A*. Proc. Symp. Pure Math. 10, Singular integralas. Am. Math. Soc., pp. 288—307.

246. *Shamir, U. Y.* and *Harleman, D. R. F.*, 1967a. Dispersion in layered porous media. Proc. Am. Soc. Civ. Eng. (Hydraulics Div.) 93-5 : 237—260.

247. *Shamir, U. Y.* and *Harleman, D. R. F.*, 1967b. Numerical solution for dispersion in porous mediums. Water Resour. Res., 3-2: 557—581.

248. *Siemons*, J., 1970. Numerical methods for the solution of diffusion advection equations. Delft Hydraulics Lab. Publ. 88.

249. *Simpson, E. S.*, 1962. Transverse dispersion in liquid flow through porous media. U.S. Geol. Surv. Prof. Pap., 411—C.

250. *Skogerboe, G. V., Walker, W. R.* and *Ayars, J. E.*, 1972. Modelling water quality from agricultural lands Int. Symp. on Modelling Techniques Water Resour. Syst., Environment Canada, Ottawa, pp. 372—382.

251. *Smith, I. M., Farraday, R. V.* and *O'Connor, B. A.*, 1972. Rayleigh-Ritz and Galerkin finite-elements for diffusion—convection problems. Simon Eng. Lab., Univ. of Manchester.

252. *Spiegel, M. R.*, 1959. Vector and Tensor Analysis. Schaum's Outline Series. Schaum Publ., New York, 225 pp.
253. *Stephen, H.* and *Stephen, T.*, 1964. Solubilities of Inorganic and Orqanic Compounds. Pergamon Press, London.
254. *Stone, H. L.* and *Brian, P. L. T.*, 1963. Numerical solution of convective transport problems. A. I. Ch. E. J. 9-5: 651—688.
255. *Tabti, M*, 1968. Dèplacement miscible, zone de transition, 3rd Coll. Assoc. Rech. Tech. Forrage Production, Pau, pp. 546—555.
256. *Tahar, J.*, 1968. Dèplacement miscible: ètude expèrimentale de l'influence du contraste de viscositè. Comm. 26. 3rd Coll. Assoc. Rech.,Tech. Forage Prod., Pau.
257. *Tahar, J.*, 1970. Contribution á l'ètude des dèplacements par fluides miscibles dans les milieux poreux. Dispersion longitudinale: influence du contraste de viscositè. Thèse, Inst. Fr. Pètrole, R 36/85406.
258. *Task* Committee on Saltwater Intrusion of the Committee on Ground-Water Hydrology of the Hydraulics Division, 1969. Saltwater intrusion in the United States. Proc. Am. Soc. Civ. Eng. (Hydraulics Div.) HY5: 1651—1669.
259. *Taylor, G.*, 1953. Dispersion of singuble matter in solvent flowol slowly through a tube. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 219: 186—203.
260. *Taylor, G.* 1954. Conditions under which dispersion of a solute in a stream of solvent can be used to measure molecular diffusion. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 225 : 473.
261. *Theis, C. V.*, 1935. The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage. Trans. Am. Geophys. Union, 16: 519—524.
262. *Thomas, G. H.*, *Countryman, G. R.* and *Fatt, I.*, 1963. Miscible displacement in a multiphase system. Soc. Pet. Eng., J., 3: 189—196.
263. *Todd, D. K.*, 1959. Ground Water Hydrology. Wiley, New York, 336 pp.
264. *Triboix A.*, *Trinh Thieu, B.* and *Zulliox, L.* 1975. Importance des conditions initiales dans l'e'tude de la pènètration d'un liquide miscible dans un ècoulement de nappe à surface libre. Rèunion Int. Comitè Milieux Poreux. Int. Assoc. Hydr. Res., Zurich à surface libre. Rèunion Int. Comitè Milieux Poreux. Int. Assoc. Hydr. Res., Zurich.
265. *Ungemach, P. O.*, 1975. Thèse, Univ. de Strasbourg.
266. *Unterberger, A.* and *Unterberger, J.*, 1970. Opèrateurs pseudo-diffèrentiels. Exposè 3. Sèminaire Goulaouic-Schwarz, Ec. Polytech., Paris.
267. *Unterberger, A.* and *Unterberger, J.*, 1971. Opèrateurs pseudo-diffèrentiels. Exposè. 4. Sèminaire Goulaouic-Schwarz, Ec. Polytech., Paris.
268. *Volker, R. E.* and *Cantatore, W. P.*, 1972. The numerical solution of the steady interface in a confined coastal aquifer. James Cook Univ. of N. Queensland, 26 pp.
269. *Von Rosenberg, D. U.*, 1956. Mechanics of steady state single-phase fluid displacement from porous media. A. I. Ch. E. J. 2-1: 55—58.
270. *Walton, W. C.*, 1962. Selected analytical methods for well and aquifer evaluation. Illinois State Water Surv. Bull. 49: 81 pp.
271. *Webster, D. S.*, *Proctor, J. F.* and *Marine, I. W.*, 1970. Two-well tracer test in fractured crystalline rock. U. S. Geol. Surv. Water Supply Paper, 1544—1.
272. *Welsch, W. F.*, 1955. Groundwater pollution from industrial wastes. Sewage Ind. wastes, 27 : 9: 1065—1072.
273. *Wenk, V. D.*, 1971. A Technology Assessment Methodology Water Pollution: Domestic Wastes. The Mitre Corp.; Nat. Tech. Inf. Serv. U. S. Dept. of Commerce, 6: 293 pp.
274. *Whitaker, S.*, 1967. Diffusion and dispersion in porous media. A. I. Ch. E. J. 13-3: 420—427.
275. *Wooding, R. A.*, 1962. The stability of on interface between miscible fluids in a porous medium. Z. Angew. Math. Phys., 13-3: 255—265.
276. *World* Healtn Organization, 1971. Normes europèennes applicables á l'eau de boisson. Geneva, 2nd ed.

277. *World* Health Organization, 1972. Normes internationales pour l'eau de boisson. Genève, 74 pp.

278. *Yin, C. S.*, 1960. Flow of a non homogeneous fluid in a porous medium. J. Fluid Mech., 10: 133—140.

279. *Yosida, K.*, 1968. Functional Analysis. Springer, Berlin, 465 pp.

280. *Zienkiewicz, O. C.*, 1971. The Finite-Element Method in Engineering Science. McGraw Hill, New York, 521 pp.

281. *Zilliox, L.*, 1974a. Mise en évidence sur modèles physiques de mécanismes hydrodynamiques intervenant dans le développement de pollutions des eaux souterraines. Symp. La Pollution des eaux souterraines. Gand. C. R.: CIPS 74/28.

282. *Zilliox, L.* 1974b. Mécanismes de pollutions d'une nappe d'eau souterraine libre: définition de la source et évolution de la zone contaminée. Séminaire sur contributions gestion qualité des eaux souterraines, Bruxelles.

283. *Zilliox, L.* and *Muntzer, P.*, 1974. Influence de mécanismes hydrodynamiques sur le développement de la pollution des eaux souterraines: mise en évidence sur modèles physiques en milieux poreux saturé. Proc. 7th Int. Conf. Water Pollution Res., Paris. Pergamon Press, London.

284. *Zuber, A.*, 1974. Theoretical possibilities of the two-well pulse method. Int. Atomic Energy Agency. Symp. Isotope Techniques in Groundwater hydr., Vienna. IAEA.-5M 182/45.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Благодарности 5

План построения книги 5

Введение 8

Глава 1. Общее описание процессов загрязнения подземных вод 9

1.1. Определение понятия загрязнения подземных вод . . . 9
1.2. Источники загрязнения подземных вод 9
1.3. Физическая характеристика загрязнения подземных вод 11

Глава 2. Теория дисперсии в пористой среде 12

2.1. Описание процесса дисперсии 12
2.1.1. Простой пример 12
2.1.2. Понятие дисперсии 13
2.1.3. Механизмы дисперсии 13
2.1.4. Характерные параметры дисперсии 15
2.2. Концептуальное представление дисперсии 19
2.3. Критика классических уравнений дисперсии 24
2.3.1. Экспериментальные результаты 24
2.3.2. Критика концепции сплошной среды 27
2.3.3. Влияние граничных условий 29
2.3.4. Критика концепции пространственного усреднения . . . 31
2.3.5. Заключение 32
2.4. Лабораторные исследования дисперсии (однородная среда) 33
2.4.1. Анализ размерностей 34
2.4.2. Случай трассера — продольная дисперсия 35
2.4.3. Случай трассера — поперечная дисперсия 38
2.4.4. Общий случай — продольная дисперсия (неконсолидированная среда) 40
2.4.5. Общий случай — поперечная дисперсия 43
2.5. Лабораторные исследования дисперсии в гетерогенной среде 43
2.5.1. Слоистая среда 43
2.5.2. Гетерогенная нестратифицированная среда 49
2.5.3. Вывод 50

Глава 3. Методика и техника изучения загрязнений подземных вод 51

3.1. Проблема масштаба 51
3.2. Методика 52
3.2.1. Критерии принятия решения 52
3.2.2. Дисперсионная схема 53
3.2.3. Практическое применение дисперсионной схемы . . . 54
3.2.4. Общая методика 58
3.3. Примеры. Типовые проекты 59
3.3.1. Изучение возможного загрязнения подземных вод крупного водоносного горизонта, используемого для водоснабжения городов 59
3.3.2. Размещение полей фильтрации вблизи городских территорий 61

Глава 4. Экспериментальное определение параметров загрязнения подземных вод 64
4.1. Аналитические формулы для оценки коэффициентов дисперсии 65
4.1.1. Коэффициент продольной дисперсии 65
4.1.2. Коэффициент поперечной дисперсии 70
4.1.3. Радиальный поток 70
4.1.4. Замечания по поводу гетерогенной среды 72
4.2. Полевые методы определения коэффициентов дисперсии 72
4.2.1. Локальный масштаб. Односкважинный импульсный метод 73
4.2.2. Средний масштаб. Многоскважинный метод 81
4.2.3. Крупный масштаб. Односкважинный метод 89
4.2.4. Региональный масштаб. Использование естественных трассеров 102
4.3. Полевые методы определения скорости загрязнения подземных вод 104
4.3.1. Косвенный метод определения скорости на основании закона Дарси 104
4.3.2. Прямое определение скоростей 108
4.3.3. Возможности односкважинного метода 114
4.3.4. Замечания по поводу определения пористости водонасыщенных пород 115

Глава 5. Классические математические модели и их численная формулировка 117
5.1. Канонические модели в прямоугольных координатах 117
5.1.1. Двумерная однослойная модель 117
5.1.2. Двумерная многослойная модель 120
5.2. Модели в криволинейных координатах 121
5.2.1. Криволинейные координаты. Некоторые определения 121
5.2.2. Модель односкважинного импульсного метода 124
5.2.3. Модель многоскважинного метода 129
5.3. Аналитические модели 130
5.3.1. Одномерная модель 130
5.3.2. Двумерная плановая модель 132
5.4. Модель «черного ящика» 133
5.4.1. Классические методы обращения 135
5.4.2. Метод обращения Эмселлема 136

Глава 6. Примеры загрязнений подземных вод 140
6.1. Описание существующего загрязнения и его эволюции. Загрязнение рейнского водоносного горизонта отходами горнодобывающей промышленности 140
6.1.1. Общее описание проблемы 141
6.1.2. Проведение экспериментов 141
6.1.3. Модели 150
6.1.4. Выводы 154
6.2. Защита водоносного горизонта от возможного загрязнения 154
6.2.1. Предварительное изучение имеющихся данных . . . 154
6.2.2. Рабочая гипотеза 155
6.2.3. Определение параметров дисперсии 155
6.2.4. Модели 158
6.3. Внедрение соленой воды в прибрежный водоносный горизонт 158
6.3.1. Предварительные исследования 158
6.3.2. Рабочая гипотеза 161
6.3.3. Использование дисперсионной схемы 161

6.3.4. Трудности исследований 162
6.4. Радиоактивное загрязнение жидкими отходами . . . 163
6.4.1. Предварительные исследования 164
6.4.2. Критерии принятия решений 167
6.4.3. Дисперсионная схема 168
6.4.4. Определение коэффициентов дисперсии 169
6.4.5. Прогнозная модель загрязнения 170

Глава 7. Загрязнение и управление водными ресурсами. Общая методика 171

7.1. Техническая методика 173
7.2. Подготовка и обработка информации 175
7.2.1. Идентификация системы 175
7.2.2. Сортировка численной информации 176
7.2.3. Структуризация нечисленной информации 180
7.2.4. Оптимизация разведочных и режимных сетей 180
7.3. Модели 181
7.3.1. Гидравлические модели 182
7.3.2. Модели загрязнения 184
7.4. Основные положения теории управления 185
7.4.1. Место управления загрязнениями в общей проблеме управления водными ресурсами 186
7.4.2. Элементы управления водными ресурсами 187
7.4.3. Основные принципы управления водными ресурсами 191

Глава 8. Обратная задача дисперсии. Теория точечного разбавления 194

8.1. Вводные определения 194
8.2. Определение коэффициентов диффузии изотропного оператора диффузии с постоянными коэффициентами 195
8.3. Определение коэффициентов оператора диффузии с изменяющимися коэффициентами 200
8.3.1. Изотропный оператор диффузии 200
8.3.2. Анизотропный оператор диффузии 209
8.4. Математическая модель и опыт 210
8.4.1. Соответствие между моделью и опытом 210
8.4.2. Элементы расчета погрешностей определения коэффициентов дисперсии 211
8.4.3. Устойчивость теории точечного разбавления 216

Глава 9. Численный анализ задач загрязнения подземных вод 218

9.1. Итерационные процессы. Основные принципы и теоремы 219
9.1.1. Основной принцип 219
9.1.2. Сходимость 221
9.1.3. Построение итерационного процесса 222
9.1.4. Применение к системам линейных уравнений 223
9.1.5. Линейные системы. Основные теоремы 225
9.2. Итерационные процессы для линейных систем. Методы 229
9.2.1. Простой пример метода Якоби 229
9.2.2. Простой пример метода Гаусса—Зейделя 229
9.2.3. Простой пример метода последовательной верхней релаксации 230
9.2.4. Общие формулы 231
9.2.5. Сходимость методов 232
9.2.6. Методы блочной итерации 234
9.3. Прямые процедуры 236
9.3.1. Общий метод исключения Гаусса 236
9.3.2. Трехдиагональный метод исключения Гаусса 236
9.4. Теория аппроксимации уравнения дисперсии 238
9.4.1. Аппроксимация производных 238

9.4.2. Аппроксимация уравнения 239
9.4.3. Устойчивость и сходимость аппроксимаций 241
9.4.4. Неявный метод переменных направлений (НМПН) 244
9.4.5. Некоторые трудности конечно-разностных аппроксимаций 245
9.4.6. Метод характеристик 247
9.4.7. Аппроксимация конечными элементами. Метод Галеркина 248
9.5. Теория баланса потоков уравнения фильтрации . . . 252
9.5.1. Баланс элементарных блоков 252
9.5.2. Граничные условия 254
9.5.3. Простой пример 255
9.5.4. Некоторые свойства матрицы проводимости 256
9.6. Практическое использование методов моделирования и программирования 257
Приложение I. Основные сведения о движении подземных вод . . . 262
П.1.1. Причина движения подземных вод 262
П.1.2. Напорный и безнапорный водоносные горизонты 262
П.1.3. Гидравлический градиент и скорости 263
П.1.4. Закон Дарси 264
П.1.5. Фильтрационный расход потока 264
П.1.6. Определение пористости по Дарси 265
П.1.7. Проводимость 265
П.1.8. Коэффициент водоотдачи 266
П.1.9. Обобщение закона Дарси 267
П.1.10. Некоторые замечания о режимах потока 270
Приложение II. Элементы геофизики. Методы наземной электроразведки 270
П.2.1. Методы потенциалов (МП) 270
П.2.2. Измерение сопротивлений 272
П.2.3. Электропрофилирование 272
П.2.4. Измерения кажущихся сопротивлений в прямоугольнике 272
П.2.5. Вертикальное электрозондирование (ВЭЗ) 272
Приложение III. Некоторые элементы алгебры матриц 276
П.3.1. Векторное пространство R^n 276
П.3.2. Матрицы 277
П.3.3. Детерминанты 281
П.3.4. Собственные значения и собственные векторы матрицы порядка n 283
П.3.5. Нормы векторов и матриц 284
Приложение IV. Качество воды. Нормы и критерии 285
Список литературы 288

Ж. Фрид

ЗАГРЯЗНЕНИЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Теория, методика, моделирование и практические приемы

Редактор издательства Л. Н. Федорова
Переплет художника М. И. Гозенпут
Художественный редактор Е. Л. Юрковская
Технический редактор В. В. Володарская
Корректор Т. М. Кушнер
ИБ № 3895

Сдано в набор 19.08.80. Подписано в печать 30.03.81 Формат 60×90¹/₁₆. Бумага № 2. Гарнитура «Литературная». Печать высокая. Усл. печ. л. 19,0. Усл. кр.-отт. 19,0. Уч.-изд. л. 19,51. Тираж 4000 экз. Заказ 425/8034-2. Цена 3 р. 30 к.

Издательство «Недра», 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

3635