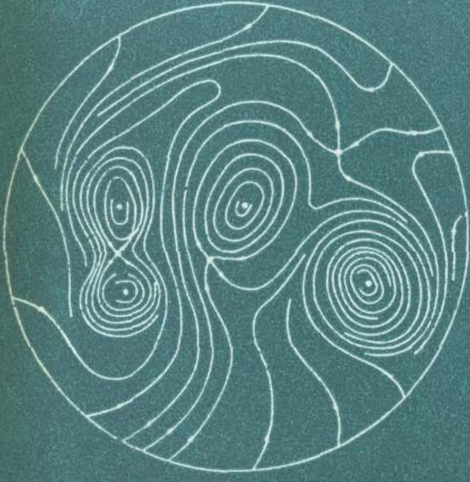
И. Тамура

ТОПОЛОГИЯ СЛОЕНИЙ



Издательство «МИР»

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

葉層のトポロジー

田 村 一 郎 著

数 学 選 書

岩 波 書 店

1976

И. Тамура

ТОПОЛОГИЯ СЛОЕНИЙ

Перевод с японского
А. А. БЕЛЬСКОГО

под редакцией
Д. В. АНОСОВА

Издательство «Мир» Москва 1979

УДК 513.83

Прекрасное введение в теорию слоений, геометрическое по содержанию. Предварительно излагаются необходимые сведения о многообразиях и динамических системах. Оригинально подобранные чертежи и геометрические примеры делают изложение интересным и наглядным.

Книга предназначена для молодых математиков, приступающих к самостоятельным исследованиям. Она доступна студентам младших курсов. Ее с удовольствием прочтут топологи и вообще геометры, алгебраисты, специалисты в области дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Редакция литературы по математическим наукам

1702040000

Т $\frac{20203-010}{041(01)-79}$ 10—79

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория слоений — раздел геометрии, развившийся совсем недавно: большинство основных результатов здесь было получено за последние 20 лет. Книга известного японского математика Тамуры «Топология слоений» является пока что единственной книгой по теории слоений во всей мировой математической литературе (если не считать вышедшей в 1952 г. книги Риба [2] [1]) и двух небольших книжек Камбера — Тондёра [3] и Лоусона [3*], специально посвященных только одному из направлений теории слоений). Эта книга носит учебный характер и рассчитана на читателя, впервые знакомящегося с предметом.

Автор выбрал из накопившегося здесь материала три результата: теорему о глобальной устойчивости, теорему о замкнутом слое и теорему о существовании континуума некобордантных слоений на трехмерной сфере (подробнее см. в предисловии автора). Они принадлежат к числу лучших результатов теории слоений и хотя далеко не исчерпывают этой теории, но вместе со всем тем, что им предшествует (различные определения, примеры, результаты подготовительного характера и т. д.), дают неплохое представление о ее основных понятиях, характере изучаемых задач и применяемых соображений.

Автор сделал определенный выбор также и в другом отношении: в книге рассматриваются только гладкие слоения (в терминологии автора «C^r-слоения с $1 \leqslant r \leqslant \infty$»). Об аналитических или кусочно-линейных слоениях в ней вообще не упоминается, что же касается топологических слоений (C^0-слоения), то в определении C^r-слоения в начале § 16 случай $r=0$ не исключается, но в дальнейшем всегда $r>0$ [2]). Это вполне оправдано тем, что сейчас в теории слоений главную роль играют гладкие слоения. Однако здесь необходимо отметить следующее.

---

[1]) Цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы в конце книги.

[2]) Правда, изложение результатов Риба в гл. 5 сохраняет одну особенность первоначального изложения Риба [2]. Последний стремился к тому, чтобы хоть часть его рассуждений и результатов годилась и для топологических слоений. Видимо, поэтому он и обратился к так называемым «когерентным системам окрестностей» (в гладком случае можно было бы с самого начала систематически использовать трубчатые окрестности и не исключено, что это было бы проще). Тамура в гл. 5 в общем следует Рибу и тоже использует когерентные системы окрестностей, хотя и ограничивается гладкими слоениями.

Обычно в математике гладкие (часто даже только непрерывные) объекты в каком-то смысле можно аппроксимировать аналитическими. Хефлигер обнаружил удивительный факт, что в теории слоений это не так—например, на трехмерной сфере вообще не существует аналитических слоений коразмерности один, а гладкие слоения существуют (см. примечание [17] [1])).

Таким образом, настоящая книга дает представление о теории слоений преимущественно в качественном отношении, на полноту же она не претендует. (В частности, в ней не рассматривается тот вопрос, в решение которого заметный вклад внес сам Тамура,— на каких многообразиях существуют слоения.) В связи с этим в конце книги приводятся рекомендации по поводу литературы, из которой можно получить более полное представление о теории слоений.

Автор стремился сделать книгу доступной читателю, который не знаком не только со слоениями, но и с более классическими вещами. Поэтому собственно теория слоений начинается лишь с гл. 4. В главах *1* и *3* содержатся некоторые сведения о динамических системах (замечу, что приводимые здесь важные примеры Данжуа, Швейцера и Вильсона на русском языке до сих пор не излагались), а в гл. 2—о гладких многообразиях. Пользуясь известным выражением Ленга, можно сказать, что содержание гл. 2 относится к «ничьей земле, лежащей между тремя великими дифференциальными теориями—дифференциальной геометрией, дифференциальной топологией и теорией дифференциальных уравнений». «Ничья земля» используется во многих книгах, но поскольку (пока что?) эти разделы не входят в обязательную университетскую программу и в этом смысле нельзя считать их общеизвестными, то авторы вынуждены специально посвящать им часть текста в книгах, написанных на совсем иные темы. (Когда-то в таком же положении находились векторные пространства и многое другое.)

Для читателя, в какой-то степени уже имевшего дело с многообразиями, гл. 2 послужит систематической сводкой относящихся сюда понятий, обозначений и фактов; читатель же, который раньше не встречался с многообразиями, может начать знакомство с ними с гл. 2. Нужно, однако, предупредить, что, во-первых, некоторые понятия вводятся автором только в той степени общности, которая нужна в пределах настоящей книги [2]), и, во-вторых, время от времени автор

[1]) Ссылки вида [17] относятся к примечаниям редактора в конце книги.

[2]) Например, определение гладкого расслоения в § 17 таково, что проекция прямого произведения $S^1\times[0, 1]$ на первый сомножитель (окружность) не является гладким расслоением в смысле этого определения, а проекция на второй сомножитель—является.

вынужден использовать некоторые сведения, не вошедшие в гл. 2 (и относящиеся уже скорее к элементам топологии, а не к «ничьей земле»).

Перечислю эти дополнительные сведения, чтобы дать представление о подготовке, достаточной для чтения основного текста книги без каких-либо пробелов. Фундаментальная группа и простейшие свойства накрытий, включая связь с ориентацией (гл. 5, 6, отчасти и гл. 1). Степень отображения окружности в окружность и связанные с нею понятия—вращение векторного поля, порядок точки относительно замкнутой кривой (§ 7, а фактически также и доказательство леммы 6.8). Теорема Жордана—простая замкнутая кривая разбивает плоскость на две области (гл 1, 3 и § 25). Классификация одномерных гладких многообразий, построение топологии и гладкости по заданному набору локальных координат (§ 21). Связные односвязные двумерные гладкие многообразия—это сфера и плоскость (доказательство леммы 6.8). В § 7 нужна полная классификация компактных двумерных многообразий, но в моем примечании [1] показано, как без этого обойтись. Ориентируемые S^1-расслоения над одномерным комплексом тривиальны (§ 31). Приведение в «общее положение» посредством «малых шевелений» (§ 25). Простая гладкая замкнутая кривая в гомопотической сфере ограничивает некоторый иммерсированный круг (§ 25). Кроме того, автор обычно предоставляет читателю проверку гладкости конструируемых объектов. Хотя она не требует применения каких-то специальных методов или теорем, но все же полезно иметь некоторый опыт такого рода.

Как видно, большей частью здесь речь идет об использовании отдельных утверждений, по поводу которых даются ссылки на литературу. Как в этих, так и в других случаях автор ссылается исключительно на японскую учебную литературу. При переводе добавлены ссылки на литературу на русском языке, за исключением нескольких теорем анализа, входящих у нас в обязательную университетскую программу и отраженных во многих учебниках, хотя бы с одним из которых читатель, несомненно, знаком.

В заключение мне хочется поблагодарить автора, любезно приславшего замечания и исправления, которые были учтены при подготовке русского перевода.

Д. В. Аносов

Когда на торе задано неособое векторное поле, траектории образуют семейство линий, которое локально выглядит как семейство параллельных отрезков, и тор представляет собой объединение траекторий (рис. 1.10). Когда на многообразии задано слоение, его слои, локально раскладываясь на свои линейно связные компоненты, также выглядят как семейство параллельных евклидовых пространств (рис. 4.2, рис. 4.4). В приведенном выше примере с тором каждая траектория является отдельным слоем. В любом слоении слой сам является многообразием; разность между размерностью многообразия и размерностью слоя называется коразмерностью слоения.

Несмотря на то что все слои слоения (данной коразмерности) на многообразии устроены одинаково локально, они могут сильно различаться с глобальной точки зрения. В предлагаемой «Топологии слоений» и рассматриваются с топологических позиций такие глобальные вопросы о слоениях, как существование компактного слоя, существование плотного слоя, условия гомеоморфности всех слоев и другие.

Для многих специалистов-нематематиков, желающих достаточно подробно познакомиться с современной геометрией, представляет интерес еще одна важная тема—описание локальных свойств слоений. Сюда относятся такие вопросы, как дифференцируемость, продолжение, склейка. К середине 40-х годов после довольно длительной предыстории появилось несколько важнейших работ, в которых сформировалось в явном виде понятие слоения на многообразии. Мы рассмотрим это понятие, строя все объяснения в расчете на запас знаний, который сообщается на первых курсах университета.

Впервые слоения появились при рассмотрении решения интегрируемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений на малом участке. Следуя Рибу, мы изложим самостоятельную теорию слоений, предварительно изучив траектории на торе.

В 1880 г. Пуанкаре опубликовал сочинение «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», в котором были заложены основы топологических представлений[1]) . В 1932 г.

[1]) В теории дифференциальных уравнений и смежных вопросах. В теории функций комплексного переменного топологические представления еще раньше использовались Риманом. Выделение же топологии в самостоятельную науку связано с более поздними работами Пуанкаре. — *Прим. ред.*

Данжуа подверг детальному топологическому изучению траектории на торе, а в 1945 г. Зигель раздвинул границы проблематики за пределы тора и продемонстрировал образец эффективного использования топологических методов. Эти исследования можно рассматривать как начало содержательной топологии слоений. Теорема Пуанкаре — Данжуа — Зигеля помещена в гл. 1, где, в частности, многое разъясняется тщательно выполненными чертежами. Обсуждаемые здесь касательные векторы к тору, касательные плоскости и другие понятия являются полезной психологической подготовкой к гл. 2.

В главе 2 обсуждаются основные понятия, связанные с C^r-многообразиями. Круг обсуждаемых в ней вопросов ограничивается необходимым материалом (см. также гл. 7 в части о дифференциальных формах), и ее можно рассматривать как «учебное пособие по многообразиям». В § 28 излагается как существенный факт о слоениях теорема Фробениуса.

С помощью некоторых изменений в слоении с компактными слоями можно построить слоение без компактных слоев (§ 23). Это построение является обобщением на слоения конструкции динамических систем Вильсона (1966 г.) и Швейцера (1972 г.), излагаемой в гл. 3.

Слоения впервые были четко представлены как предмет геометрического изучения, независимо от аналитических методов, в книге Риба «О некоторых топологических свойствах слоений» (1952 г.). В главе 5 доказываются основные результаты этой книги: теорема о локальной устойчивости и теорема о глобальной устойчивости. В тот же период Эресман, учитель Риба, ввел понятие C^r-расслоения и в связи с ним указал на две аналогичные теоремы.

В главе 6 излагается доказательство теоремы С. П. Новикова (1964 г.) о существовании компактного слоя у всякого слоения коразмерности 1 на 3-мерной сфере. Этот результат встал в один ряд с крупнейшими достижениями в области дифференциальной и алгебраической топологии, в связи с чем Новикову была присуждена Филдсовская премия 1970 г.[1]).

Открытый в 1971 г. инвариант Годбийона — Вея проник во все области геометрии и особенно повлиял на теорию характеристических классов. Он определяется в гл. 8, где вводится и группа кобордизмов 3-мерных слоений, о которой доказывается теорема Тёрстона (1972 г.), показывающая, что в этой группе континуум элементов. Здесь имеется ряд ссылок на теоремы из гл. 7.

---

[1]) Филдсовская премия (точнее, медаль) была присуждена Новикову за совокупность работ, одна из которых посвящена слоениям. — *Прим. ред.*

Таким образом, по ходу изложения в книге с единой точки зрения освещаются снискавшие широкий интерес факты о слоениях на многообразиях низкой размерности. В их числе динамические системы на торе в гл. 1, гипотеза Зейферта для случая слоений коразмерности 2 на сфере S^3 в § 14, теорема Новикова в § 25, упомянутый выше результат из гл. 8. Изложение сопровождается специально подобранными рисунками, которые особенно хорошо поясняют результаты в случае многообразий низкой размерности.

Все главы взаимосвязаны, но вместе с тем в каждой из них есть своя самостоятельно изложенная главная тема. Поэтому теоремы занумерованы внутри каждой главы отдельно и ссылки делаются с указанием нужного места в тексте. Читатель при желании может перелистать страницы с основными определениями и спокойно начинать чтение книги с конца.

После основного текста книги помещен список работ, содержащих результаты о слоениях последнего времени. Стремительное развитие теории слоений, которое наблюдается сегодня, началось с работ Риба; поэтому предшествующий период освещен в библиографии в ограниченном объеме.

В заключение мне хотелось бы сердечно поблагодарить Тюкон Сукоку, Дзюю Итигаку, Моси Синден, Бинси Сэйсин, Синосу Доку, Сёси Тоё за помощь при составлении библиографии и Сюдан Косэй из «Иванами Сётэн» за помощь при подготовке рукописи к публикации.

Февраль 1976 *г.* *Итиро Тамура*

Глава 1

НЕОСОБЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА ТОРЕ

§ 1. «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями»

С 1881 по 1886 г. Пуанкаре опубликовал четыре сочинения под общим названием «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», в которых впервые был предложен геометрический подход к изучению дифференциальных уравнений с помощью определяемых ими кривых. В начале этой работы он писал [1]):

«Полная теория функций, определяемых дифференциальными уравнениями, была бы чрезвычайно полезна для большого числа вопросов математики и механики. К сожалению, сразу видно, что в громадном большинстве случаев, с которыми нам приходится иметь дело, эти уравнения не могут быть проинтегрированы с помощью уже известных нам функций, например с помощью функций, определяемых квадратурами. И если бы мы захотели ограничиться только теми случаями, которые можно изучить при помощи определенных или неопределенных интегралов, то область наших исследований оказалась бы чрезвычайно суженной, и огромное большинство вопросов, встречающихся в приложениях, осталось бы нерешенным».

И тогда Пуанкаре предложил качественное изучение функций, являющихся решениями дифференциальных уравнений.

«Полное исследование функций состоит из двух частей:

(1) качественной (если можно так выразиться) части, или геометрического изучения той кривой, которая определяется этой функцией;

(2) количественной части, или вычисления численных значений функций.

Так, например, для того чтобы исследовать алгебраическое уравнение, мы сначала определяем с помощью теоремы Штурма число действительных корней — это качественная часть; затем находим числовые значения этих корней — в этом заключается количественное изучение уравнения. Точно так же, для того чтобы изучить алгебраическую кривую, мы начнем с построения этой кривой (как принято выражаться в соот-

---

[1]) Цитаты даются по русскому переводу (библиографическую ссылку см. в комментариях, разд. 1).— *Прим. ред.*

ветствующих математических курсах), т. е. определяем наличие замкнутых ветвей, бесконечных ветвей и т. д.

После этого качественного изучения кривой можно точно определить некоторое число ее точек.

Естественно, что именно с качественной части должно начинаться исследование всякой функции; и поэтому проблема, которая в первую очередь встает перед нами,— это *построение кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.*»

Таким образом, по-видимому, Пуанкаре принадлежит идея переключить внимание в первую очередь на качественное изучение функции.

«С другой стороны, это качественное исследование и само по себе представляет первостепенный интерес. К нему могут быть сведены различные, исключительно важные вопросы анализа и механики. Возьмем в качестве примера задачу трех тел. Разве нельзя поставить вопрос, будет ли одно из этих тел всегда оставаться в некотором участке неба или оно сможет удалиться в бесконечность? Или вопрос о том, будет ли расстояние между двумя из этих тел неограниченно убывать или, напротив, это расстояние будет всегда заключено в определенных пределах? Разве нельзя поставить тысячу вопросов такого рода, и все эти вопросы будут разрешены, как только мы сумеем качественно построить траектории этих трех тел. ... Таково обширное поле открытий, простирающееся перед взорами математика.»

Качественный, или, говоря сегодняшним языком, топологический, подход Пуанкаре впервые привлек внимание к таким свойствам кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, которые позволили уловить их особенности с топологической точки зрения. Эта концепция впоследствии привела к теории динамических систем.

В последней главе третьего из четырех упомянутых выше сочинений детально рассматриваются кривые, определенные дифференциальными уравнениями на торе. Здесь исследуется неособая система[1]) дифференциальных уравнений (динамическая система) на торе и описываются соответствующие кривые с помощью введения на нем структуры слоения. Это и послужило отправной точкой для «Топологии слоений». В настоящей главе описываются динамические системы на торе по Пуанкаре и смежные результаты Зигеля и Данжуа.

---

[1]) Под «особенностями» здесь и далее понимаются не особенности в аналитическом смысле, а одновременное обращение правых частей в нуль (в такой точке система не задает никакого направления и поэтому такую точку и называют особой).— *Прим. ред.*

§ 2. Векторные поля на плоскости и их интегральные кривые

Координаты на прямой (а именно: начало отсчета O, фиксированное направление и единица измерения) устанавливают взаимно однозначное соответствие между всеми точками прямой и всеми вещественными числами.

Аналогично на плоскости с помощью координатной оси x и перпендикулярной ей координатной оси y определяется система координат, позволяющая каждой точке P плоскости поставить в соответствие два вещественных числа x, y, составляющих пару координат (x, y), и, наоборот, по любым двум вещественным числам x, y составить пару (x, y) и определить соответствующую ей точку плоскости. Когда (x, y) является парой координат точки P, пишут $P(x, y)$.

Множество всех вещественных чисел будем обозначать через $\mathbf{R}$. Если на плоскости задана система координат, то множество точек плоскости будет обозначаться так:

$$\{P(x, y);\ x, y \in \mathbf{R}\}.$$

Как правило, когда a обладает свойством C, мы будем писать $C(a)$ и множество всех a, обладающих свойством C, обозначать через $\{a; C(a)\}$.

Если на плоскости заданы две точки $P(x, y)$ и $P'(x', y')$, то длина $\rho(P, P')$ прямолинейного отрезка между ними выражается равенством

$$\rho(P, P') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Для любых трех точек плоскости P, P', $P''(x'', y'')$ длина ρ удовлетворяет следующим *аксиомам метрики*:

(i) $\rho(P, P') \geqslant 0$ и $P = P'$ тогда и только тогда, когда $\rho(P, P') = 0$;

(ii) $\rho(P, P') = \rho(P', P)$;

(iii) $\rho(P, P') \leqslant \rho(P, P'') + \rho(P'', P')$ (неравенство треугольника).

Пусть P — точка плоскости. Для положительного числа ε множество $U_\varepsilon(P)$ всех точек, которые удалены от P меньше, чем на ε, называется *ε-окрестностью* точки P. Таким образом,

$$U_\varepsilon(P) = \{P';\ \rho(P, P') < \varepsilon\}.$$

Эти ε-окрестности определяют на плоскости топологию. Пусть A — некоторое множество точек на плоскости. Если для точки P из A существует такое ε, что

$$U_\varepsilon(P) \subset A,$$

то P называется *внутренней точкой* множества A. Если же для точки P' на плоскости при любом $\varepsilon>0$

$$A\cap U_\varepsilon(P')\neq\varnothing\quad(\varnothing\text{ — пустое множество}),$$

то P' называется *точкой прикосновения* множества A. Когда $U_\varepsilon(P')\cap A$ содержит бесконечно много точек при всех ε, говорят, что P' — *предельная точка* множества A. Например, если $A=\{P(x,\,0);\ x$ пробегает рациональные числа$\}$, то $P(\sqrt{2},\,0)$ является для A, во-первых, точкой прикосновения и, во-вторых, предельной точкой. Между тем ни при каком x точка $P(x,\,0)$ не является для A внутренней.

Совокупность всех внутренних точек множества A обозначается через $\operatorname{Int}A$ и называется его *открытой частью*. Если $A=\operatorname{Int}A$, то A называется *открытым множеством*. Множество всех точек прикосновения для A обозначается через $\bar{A}$ и называется *замыканием* множества A. Если $A=\bar{A}$, то A называется *замкнутым множеством*.

Единичная окружность на плоскости $\{(x,\,y);\ x^2+y^2=1\}$ будет обозначаться через S^1. Подмножество $\{(\cos\theta,\,\sin\theta);\ \theta$ — рациональное число$\}$ в S^1 является таким подмножеством A, что $\bar{A}=S^1$.

ε-окрестность $U_\varepsilon(P)$ точки P является открытым множеством. Действительно, для любой точки P' из $U_\varepsilon(P)$ при $\varepsilon'=\varepsilon-\rho(P,\,P')$ имеет место включение

$$U_{\varepsilon'}(P')\subset U_\varepsilon(P).$$

Если для последовательности $P_1,\,P_2,\,\ldots,\,P_n,\,\ldots$ точек на плоскости существует точка P_0, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\rho(P_n,\,P_0)=0,$$

то пишут

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0$$

и точку P_0 называют *пределом* данной последовательности.

Две точки P и Q на плоскости определяют направленный отрезок $\overrightarrow{PQ}$. Он называется *вектором в точке* P (рис. 1.1). Обычно все векторы, получающиеся из данного вектора параллельным переносом, по определению отождествляются. Поэтому каждый вектор $\overrightarrow{PQ}$ имеет смысл и как представитель некоторого вектора v в точке P, что выражается записью $(P,\,v)$ или, кратко, v_P (как на рис. 1.1). Чтобы различать смысл, в котором употребляются векторы v_P и v, будем называть v_P *закрепленным вектором*.

Пусть вектор v в точке P, т. е. вектор v_P, имеет x-компоненту ξ и y-компоненту η (см. рис. 1.2). Направленные по координатным осям векторы длины ξ, η будут называться соответственно *x-компонентой* и *y-компонентой* вектора v_P. Когда $\xi=\eta=0$, вектор v_P называется *нулевым*.

Пусть A — некоторое множество точек на плоскости. Если в каждой точке P из A определен вектор v_P, то все множество $\{v_P;\ P\in A\}$[1]) называется *векторным полем* на A, которое мы будем обозначать через $X(A)$ или просто через X. Если v_P — вектор

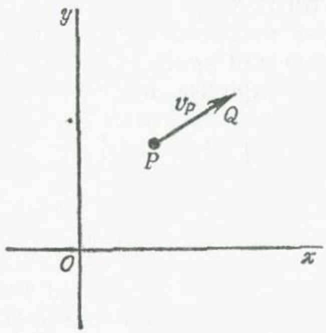


Рис. 1.1.

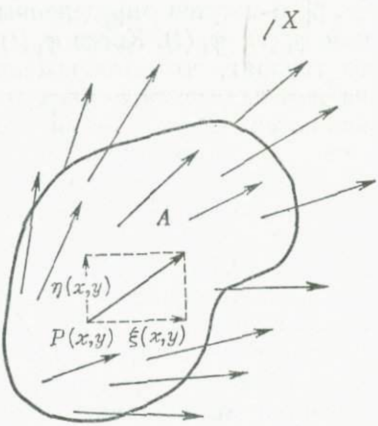


Рис. 1.2.

в точке $P(x, y)$ и $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ — его x-компонента и y-компонента соответственно, то $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, определяясь точкой $P(x, y)\in A$, оказываются функциями от x и y. Таким образом, векторное поле на множестве A определяет пару функций $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ (рис. 1.2).

В случае когда на множестве A задано векторное поле $X=\{v_P;\ P\in A\}$ и ни один вектор v_P не является нулевым, векторное поле X называется *неособым*.

Пусть X — векторное поле на множестве A и P — внутренняя точка из A. Говорят, что функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$, введенные выше, *принадлежат классу C^r в точке P* или являются *C^r-функциями* в этой точке, если они обладают в этой точке производными всех порядков, не превосходящих r, и все эти производные непрерывны в P; в этом случае говорят также, что векторное поле X *принадлежит классу C^r в точке P* или является *C^r-полем* в этой точке. Если считать, что возможными значениями для r являются $0, 1, 2, \ldots, \infty$, то под векторным полем класса C^0 мы будем подразумевать поле с не-

[1]) Разумеется, v здесь не фиксировано и его направление и величина зависят от точки. — *Прим. ред.*

прерывными функциями $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$, а под векторным полем класса C^∞ — поле с бесконечно дифференцируемыми функциями $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$.

Пусть α, β — вещественные числа, $\alpha < \beta$, и задано отображение φ интервала

$$]\alpha, \beta[= \{t \in \mathbf{R};\ \alpha < t < \beta\}$$

в плоскость. Если для каждого t, $\alpha < t < \beta$, обозначить координаты точки $\varphi(t)$ на плоскости через $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, то на $]\alpha, \beta[$ окажутся определенными две вещественнозначные функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$. Когда $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ являются непрерывными, то говорят, что отображение φ интервала $]\alpha, \beta[$ определяет на нем *непрерывную кривую*. Кроме того, когда $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ являются C^r-функциями, говорят, что отображение φ интервала $]\alpha, \beta[$ определяет на нем *C^r-кривую* или *кривую класса C^r*. Аналогично определяются непрерывные кривые и C^r-кривые на отрезке $[\alpha, \beta] = \{t \in \mathbf{R};\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, полуинтервалах $[\alpha, \beta[= \{t \in \mathbf{R};\ \alpha \leqslant t < \beta\}$, $]\alpha, \beta] = \{t \in \mathbf{R};\ \alpha < t \leqslant \beta\}$, $]\alpha, \infty[$, $]-\infty, \beta[$, $]-\infty, \beta]$ и т. д. [1]).

Пусть отображение φ интервала $]\alpha, \beta[$ определяет на нем C^r-кривую и $r \geqslant 1$. Тогда для каждого $\alpha < t < \beta$ в точке $\varphi(t)$ определен вектор, x- и y-компонентами которого являются соответственно $\varphi_1'(t)$ и $\varphi_2'(t)$ (производные в точке t); он называется *касательным вектором* к C^r-кривой φ в точке $\varphi(t)$ (рис. 1.3).

Пусть A — открытое множество на плоскости и $X = \{v_P;\ P \in A\}$ — векторное C^r-поле на A. Рассмотрим для поля X на интервале $]\alpha, \beta[$ кривую φ класса C^{r+1}, удовлетворяющую для каждого t, $\alpha < t < \beta$, следующим двум требованиям:

(i) $\varphi(t) \in A$;

(ii) касательный вектор к φ в точке $\varphi(t)$ принадлежит полю X, т. е. равен вектору $v_{\varphi(t)}$.

Кривая φ с такими двумя свойствами называется *траекторией* или *интегральной кривой* [2]) поля X (рис. 1.4). Совершенно аналогично определяется интегральная кривая в случае отрезка $[\alpha, \beta]$ и полуинтервалов всех типов.

Если $v_P \in X$ — вектор в точке $P(x, y)$ и $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ — его x-компонента и y-компонента соответственно, то φ является

---

[1]) Обратим внимание, что автор понимает под «кривой» именно «параметризованную кривую». Образ отображения φ при этом может не быть гладкой кривой в обычном смысле — например, может иметь угловые точки (если φ' где-то обращается в нуль). — *Прим. ред.*

[2]) Обычно в определение интегральной кривой включают только гладкость φ класса C^1. При этом оказывается, что если X — поле класса C^r, то φ будет класса C^{r+1}. — *Прим. ред.*

интегральной кривой поля X тогда и только тогда, когда функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ удовлетворяют системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(*) \qquad \frac{d\varphi_1}{dt}(t) = \xi(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)), \quad \frac{d\varphi_2}{dt}(t) = \eta(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)).$$

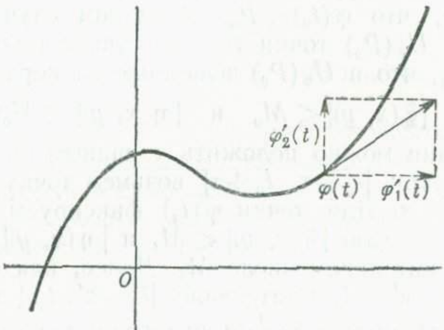


Рис. 1.3.

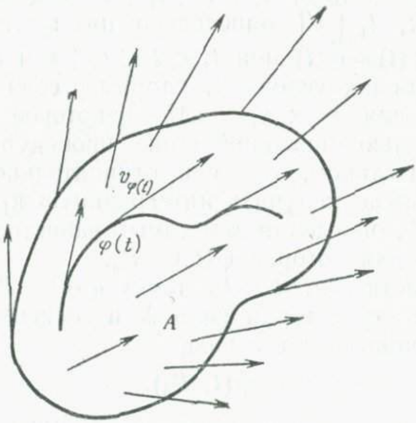


Рис. 1.4.

Пусть теперь векторное C^r-поле X, $r \geqslant 1$, определено на всей плоскости. Тогда теорема о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений гарантирует, что для каждой точки $P_0(x_0, y_0)$ и любого вещественного числа t_0 существуют интервал $]t_0 - \tau,\ t_0 + \tau[$ и определенные на нем C^{r+1}-функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, такие, что выполняются следующие два условия:

(i) для всех t, $t_0-\tau<t<t_0+\tau$, удовлетворяется система обыкновенных дифференциальных уравнений (*);

(ii) $\varphi_1(t_0)=x_0$; $\varphi_2(t_0)=y_0$.

(См. комментарии, примечание 1.1.) Следовательно, для векторного поля X в некотором интервале $]t_0-\tau,\ t_0+\tau[$ определена, и притом единственным образом, интегральная кривая φ, такая, что $\varphi(t_0)=P_0$. В данном случае для любой ε-окрестности $U_\varepsilon(P_0)$ точки P_0 существует такое положительное число M_0, что в $U_\varepsilon(P_0)$ выполняются неравенства

$$|\xi(x,\ y)|<M_0 \quad \text{и} \quad |\eta(x,\ y)|<M_0;$$

в этой ситуации можно положить τ равным $\varepsilon/2M_0$.

Далее, внутри $]t_0-\tau,\ t_0+\tau[$ возьмем точку t_1, достаточно близкую к $t_0+\tau$. Для точки $\varphi(t_1)$ фиксируем ε'-окрестность $U_{\varepsilon'}(\varphi(t_1))$, в которой $|\xi(x,\ y)|<M_1$ и $|\eta(x,\ y)|<M_1$ при некотором положительном числе M_1. Далее, как это отмечалось выше, при $\tau'=\varepsilon'/2M_1$ в интервале $]t_1-\tau',\ t_1+\tau'[$ определена, и притом единственным образом, интегральная кривая $\bar{\varphi}$ поля X, удовлетворяющая условию $\bar{\varphi}(t_1)=\varphi(t_1)$. На участке $]t_1,\ t_0+\tau[$ в силу единственности интегральной кривой траектории φ и $\bar{\varphi}$ совпадают; кроме того, $t_0+\tau<t_1+\tau'$. Следовательно, и на участке $]t_0-\tau,\ t_1+\tau'[$ определена интегральная кривая φ, для которой $\varphi(t)=\bar{\varphi}(t)$ при $t_1<t<t_0+\tau$ и $\varphi(t_0)=P_0$.

При подходящих условиях, например если $|\xi(x,\ y)|<M$ и $|\eta(x,\ y)|<M$ для всех x, y (M — некоторое положительное число), с помощью описанной выше процедуры, применяемой как в положительном, так и в отрицательном направлении изменения t, можно получить интегральную кривую на интервале $]-\infty,\ \infty[$, определяя тем самым единственно возможную траекторию φ, для которой $\varphi(t_0)=P_0$.

Когда, в частности, $t_0=0$, точку $\varphi(0)=P_0$ называют *начальной точкой* траектории поля X и зависимость такой траектории от t записывают в виде

$$\varphi(t,\ P_0).$$

Если $P(x,\ y)$ — начальная точка и $\varphi(t,\ P(x,\ y))$ — интегральная кривая поля X, то фактически оказывается заданной функция от x, y. Как утверждает теорема о дифференцируемости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным условиям, функция $\varphi(t,\ P(x,\ y))$ принадлежит классу C^{r+1} как функция от t и классу C^r как функция от x, y[1]).

---

[1]) Более полная формулировка (фактически используемая в дальнейшем): $\varphi\in C^r$ как функция от $(t,\ x,\ y)$ и ее производная $\partial\varphi/\partial t\in C^r$ как функция от $(t,\ x,\ y)$. — *Прим. ред.*

§ 3. Векторные поля на торе и их интегральные кривые

Определим на плоскости отношение $P \sim P'$ следующим условием: разности координат $x-x'$ и $y-y'$ точек $P(x, y)$ и $P'(x', y')$ являются целыми числами. Тогда

(i) $P \sim P$;
(ii) если $P \sim P'$, то $P' \sim P$;
(iii) если $P \sim P'$, $P' \sim P''$, то $P \sim P''$.

Отношение $\sim$ с такими свойствами называется *отношением эквивалентности*.

Точка P и отношение $\sim$ определяют множество точек плоскости $\{Q;\ Q \sim P\}$, которое называется *классом эквивалентности* точки P и обозначается символом $[P]$. Точку P называют *представителем* класса эквивалентности в этой ситуации. Класс $[P(x, y)]$ является, таким образом, множеством точек плоскости с координатами вида $(x+m,\ y+n)$, где $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Отношение $\sim$ определяет разбиение множества точек плоскости на классы эквивалентности. Множество этих классов, являющееся факторммножеством множества точек плоскости относительно $\sim$, называется *тором* и обозначается через T. Говорят, что тор T получается *отождествлением точек плоскости относительно эквивалентности* $\sim$. Классы эквивалентности $[P]$, $[P']$ обозначают поэтому и через p, p' и называют *точками* тора T.

Рассмотрим на плоскости квадрат $ABCD$ с вершинами $A(0, 1)$, $B(0, 0)$, $C(1, 0)$, $D(1, 1)$. Для произвольной точки $P(x, y)$ существуют такие целые числа m, n, что $0 \leqslant x-m \leqslant 1$, $0 \leqslant y-n \leqslant 1$, т. е. точка $Q(x-m,\ y-n)$ принадлежит квадрату $ABCD$ и

$$P(x, y) \sim Q(x-m,\ y-n).$$

Далее, две точки P', P'' из квадрата $ABCD$ эквивалентны лишь тогда, когда либо $P' = P''$, либо P' и P'' определенным образом расположены на сторонах квадрата $ABCD$, точнее $P'(x, 0) \sim P''(x, 1)$ или $P'(0, y) \sim P''(1, y)$. Следовательно, тор T получается из квадрата отождествлением стороны AB со стороной DC и стороны AD со стороной BC в соответствии с отношением $\sim$ или, образно говоря, склеиванием этих сторон (см. рис. 1.5). Возможно, с помощью рис 1.5 (ii) будет легче представить себе процесс этого отождествления: цилиндр, изображенный на рисунке, нужно склеить еще и по крайним окружностям.

На торе T можно ввести метрику следующим образом. Пусть $p = [P]$, $p' = [P']$ — две любые точки на T и $Q \in [P]$, $Q' \in [P']$.

Расстояние между точками плоскости Q, Q' можно измерить с помощью обычной метрики на плоскости; обозначим его через $\rho(Q, Q')$. После этого определим расстояние между p и p' как минимальное возможное расстояние $\rho(Q, Q')$, которое будем обозначать через $\rho(p, p')$. Тем самым оказывается введенным расстояние и на торе:

$$\rho(p, p') = \min_{Q \in [P]=p,\ Q' \in [P']=p} \rho(Q, Q').$$

Следующая лемма показывает, что тор T, наделенный расстоянием ρ, является метрическим пространством.

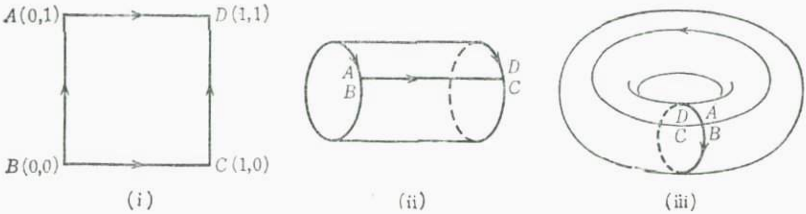


Рис. 1.5.

Лемма 1.1. *Для любых точек p, p', p'' тора T и только что введенного расстояния ρ выполняются аксиомы метрики:*

(i) $\rho(p, p') \geqslant 0$ *и* $p = p'$ *тогда и только тогда, когда* $\rho(p, p') = 0$;

(ii) $\rho(p, p') = \rho(p', p)$;

(iii) $\rho(p, p') \leqslant \rho(p, p'') + \rho(p'', p')$.

Доказательство. Пункты (i) и (ii) проверяются очевидным образом. Поэтому рассмотрим точки $Q \in [P] = p$, $Q'' \in [P''] = p''$, а также $Q''' \in [P''] = p''$, $Q' \in [P'] = p'$, такие, что

$$\rho(p, p'') = \rho(Q, Q''), \qquad \rho(p'', p') = \rho(Q''', Q').$$

Если мы хотим указывать точки вместе с их координатами, то вместо точек Q', Q'', Q''' будем писать $Q'(x', y')$, $Q''(x'', y'')$, $Q'''(x''', y''')$ и заметим, что, поскольку разности $x'' - x'''$ и $y'' - y'''$ являются целыми числами, справедливо соотношение

$$Q'(x', y') \sim \overline{Q}'(x' + x'' - x''', y' + y'' - y''').$$

Следовательно,

$$\rho(p, p') \leqslant \rho(Q, \overline{Q}') \leqslant \rho(Q, Q'') + \rho(Q'', \overline{Q}') = \\ = \rho(Q, Q'') + \rho(Q''', Q') = \rho(p, p'') + \rho(p'', p'),$$

что и доказывает п. (iii). □

Пусть p — точка тора T. Для произвольного положительного числа ε определим *ε-окрестность* $U_\varepsilon(p)$ точки p как множество

$$U_\varepsilon(p) = \{p' \in T;\ \rho(p', p) < \varepsilon\}.$$

Если считать, что $p = [P(x, y)]$, и фиксировать на плоскости четыре точки $A'(x-(1/2),\ y+(1/2))$, $B'(x-(1/2),\ y-(1/2))$, $C'(x+(1/2),\ y-(1/2))$, $D'(x+(1/2),\ y+(1/2))$, а затем отож-

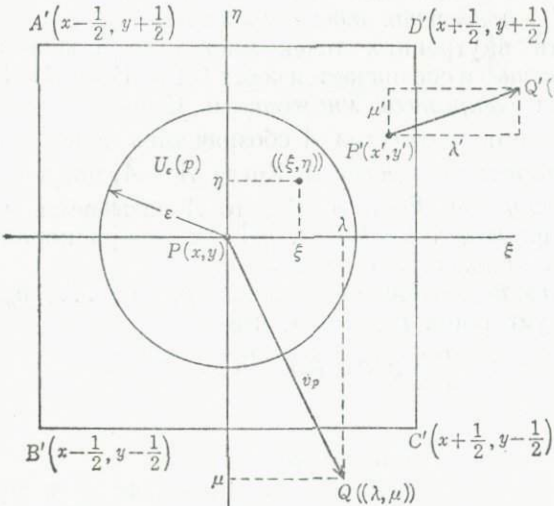


Рис. 1.6.

действить в квадрате $A'B'C'D'$ сторону $A'B'$ со стороной $D'C'$ и сторону $A'D'$ со стороной $B'C'$, то при $0 < \varepsilon < 1/2$ окрестность точки тора $U_\varepsilon(p)$ может быть изображена на плоскости так, как на рис. 1.6.

Примем точку $P(x, y)$ за начало координат и проведем через нее оси ξ и η, параллельные осям x и y соответственно (см. рис. 1.6). Будем обозначать координаты точки в этой новой системе координат через $((\ ,\ ))$. Тогда окрестность $U_\varepsilon(p)$ при $\varepsilon < 1/2$ будет описываться как множество точек $((\xi, \eta))$, для которых $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} < \varepsilon$ (рис. 1.6). Новую систему координат будем обозначать через $(P; \xi, \eta)$ и называть *локальной системой координат* или *системой координат в окрестности* $U_\varepsilon(p)$, $\varepsilon < 1/2$.

Аналогично тому, как это делалось в случае плоскости, на торе T определяется с помощью ε-окрестностей $U_\varepsilon(p)$ топология. Пусть A — множество точек тора. Если для точки p из A существует такое ε, что

$$U_\varepsilon(p) \subset A,$$

то p называется *внутренней точкой* множества A. Если же для точки p' из T при всяком $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(p') \cap A \neq \varnothing,$$

то p' называется *точкой прикосновения* множества A. Наконец, когда в $U_\varepsilon(p') \cap A$ бесконечно много точек при любом $\varepsilon > 0$, говорят, что p' — *предельная точка* множества A.

Совокупность внутренних точек множества A называется его *открытой частью* и обозначается через $\operatorname{Int} A$. Если $A = \operatorname{Int} A$, то A называется *открытым множеством*. Совокупность всех точек прикосновения множества A обозначается через $\bar{A}$ и называется *замыканием* множества A. Когда $A = \bar{A}$, множество A называется *замкнутым*. Если $\bar{A} = T$, то A называется *плотным* в T. Например, $A = \{[P(x, y)];\ x, y$ — рациональные числа$\}$ — плотное множество в торе T.

Если для последовательности точек $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ тора T существует точка p_0, такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \rho(p_n, p_0) = 0,$$

то пишут

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p_0$$

и называют точку p_0 *пределом* последовательности $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$.

Пусть p — точка тора T. При $0 < \varepsilon < 1/2$ в локальной системе координат $(P; \xi, \eta)$ окрестности $U_\varepsilon(p)$ координаты $((\xi, \eta))$ определяют точку из $U_\varepsilon(p)$, если $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} < \varepsilon$. При произвольных же вещественных числах ξ, η точку $((\xi, \eta))$ можно геометрически изображать как точку на плоскости с прямоугольной системой координат, где $P(x, y)$ служит началом, а ξ и η откладываются по координатным осям. Окрестность $U_\varepsilon(p)$ представляется как часть этой плоскости, а саму плоскость называют *касательной* к тору T в точке p.

Направленный отрезок вида $\overrightarrow{P(x, y)\, Q((\lambda, \mu))}$ в этой плоскости, обозначаемый, как правило, через v_p, называется *вектором, касательным* к тору T в точке p (рис. 1.6.). В этой ситуации $P(x, y)$ имеет на касательной плоскости координаты начала, т. е. $((0, 0))$, а $Q((\lambda, \mu))$ — координаты $((\lambda, \mu))$. Числа λ, μ называются соответственно *ξ-компонентой* и *η-компонентой* вектора v_p. Таким образом, касательный вектор v_p в точке p

определяется двумя вещественными числами λ, μ. Если $\lambda=0$ и $\mu=0$, то вектор v_p называется *нулевым*.

На рис. 1.6 в квадрате $A'B'C'D'$, изображающем тор T, фиксированы точка $p'=[P'(x', y')]$ (так что P' является точкой в квадрате $A'B'C'D'$) и касательный вектор $v_{p'}$, у которого ξ-компонента и η-компонента равны соответственно λ' и

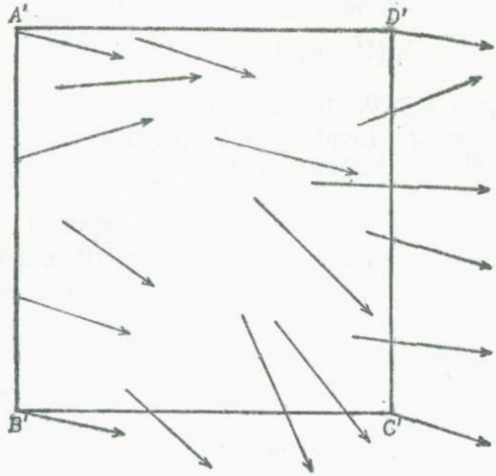


Рис. 1.7.

μ'; при этом вектор $v_{p'}$ изображается направленным отрезком $\overrightarrow{P'(x', y')\,Q'(x'+\lambda', y'+\mu')}$ (рис. 1.6).

Если каждой точке p тора T приписан некоторый касательный вектор v_p, то совокупность этих векторов $\{v_p;\ p\in T\}$ называется *векторным полем* на торе и обозначается через X. Если каждый вектор v_p из X $(p\in T)$ отличен от нулевого, то поле X называется *неособым*. На рис. 1.7 в соответствии со сказанным выше произвольный вектор из X изображается в виде направленного отрезка, начинающегося в некоторой точке квадрата $A'B'C'D'$. Таким образом, на рис. 1.7 фактически оказывается изображенчым в квадрате $A'B'C'D'$ векторное поле $\hat{X}$, как в § 2. (Следует заметить, что в четырех точках A', B', C', D' векторы поля $\hat{X}$ получаются друг из друга параллельным переносом.)

Если в точке $P(x, y)$ векторное поле $\hat{X}$ (в смысле § 2) принадлежит классу C^r, то говорят также, что векторное поле X в точке p тора T *принадлежит классу* C^r или является *C^r-полем*. Если же векторное поле X на торе T в каждой точке принадлежит классу C^r, то говорят, что оно является *C^r-полем* или *принадлежит классу* C^r. Очевидно, что если X — векторное C^r-поле на T, то определяемое им поле $\hat{X}$ принадлежит классу C^r в окрестности $U_\varepsilon(P)$.

Пусть задано отображение интервала $]\alpha, \beta[$ в тор T,

$$\varphi\colon]\alpha, \beta[\to T.$$

Если при фиксированном $\bar{t}$, $\alpha < \bar{t} < \beta$, для всякого ε

$$\varphi(]\bar{t}-\delta, \bar{t}+\delta[) \subset U_\varepsilon(\varphi(\bar{t}))$$

при некотором $\delta > 0$, то отображение φ называется *непрерывным в точке* $\bar{t}$. Если φ непрерывно в каждой точке интервала $]\alpha, \beta[$, то говорят, что φ определяет на T *непрерывную кривую.*

Пусть $\varphi\colon]\alpha, \beta[\to T$ — непрерывная кривая на торе. При $\bar{t}-\delta < t < \bar{t}+\delta$ точка $\varphi(t)$ лежит в $U_\varepsilon(\varphi(\bar{t}))$ для $\varepsilon < 1/2$; $\varphi(t)$ в локальной системе координат в $U_\varepsilon(\varphi(\bar{t}))$ записывается в виде $((\varphi_1(t), \varphi_2(t)))$, причем, поскольку отображение φ непрерывно, функции φ_1, φ_2 оказываются непрерывными в интервале $]\bar{t}-\delta, \bar{t}+\delta[$. Если в этой ситуации функции φ_1, φ_2 принадлежат классу C^r в точке $\bar{t}$, то говорят, что непрерывная кривая φ *принадлежит классу* C^r *в точке* $\bar{t}$ или является *C^r-кривой* в этой точке. Если непрерывная кривая принадлежит классу C^r в каждой точке интервала $]\alpha, \beta[$, то говорят, что отображение φ на интервале $]\alpha, \beta[$ определяет *C^r-кривую* или *кривую класса* C^r на торе T.

Если φ — кривая класса C^r, то, очевидно, определенные выше функции φ_1, φ_2 в любой локальной системе координат будут C^r-функциями на интервале $]\bar{t}-\delta, \bar{t}+\delta[$.

Аналогично дается определение непрерывных кривых и C^r-кривых на торе T в случае промежутков $[\alpha, \beta]$, $]\alpha, \infty[$, $]-\infty, \infty[$ и пр.

Если для C^r-кривой на торе T, определенной отображением

$$\varphi\colon]-\infty, \infty[\to T,$$

существует положительное число u, такое, что

$$\varphi(t+u) = \varphi(t) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

то φ называется *замкнутой C^r-кривой*. Если $\bar{u}$ — минимальное из таких чисел u, то образ $\varphi(]-\infty, \infty[)$ отображения φ в данном случае таков, что

$$\varphi(]-\infty, \infty[) = \varphi([0, \bar{u}]),$$

т. е. φ определяется своим ограничением на $[0, \bar{u}]$. Тем самым на отрезке $[0, \bar{u}]$ отображение φ определяет C^r-кривую $\varphi: [0, \bar{u}] \to T$ на торе T, для которой $\varphi(0) = \varphi(\bar{u})$ [1]). В локальной системе координат окрестности $U_\varepsilon(\varphi(0)) = U_\varepsilon(\varphi(\bar{u}))$ кривая φ при $0 \leqslant t < \delta$ и $\bar{u} - \delta < t \leqslant \bar{u}$ описывается парой

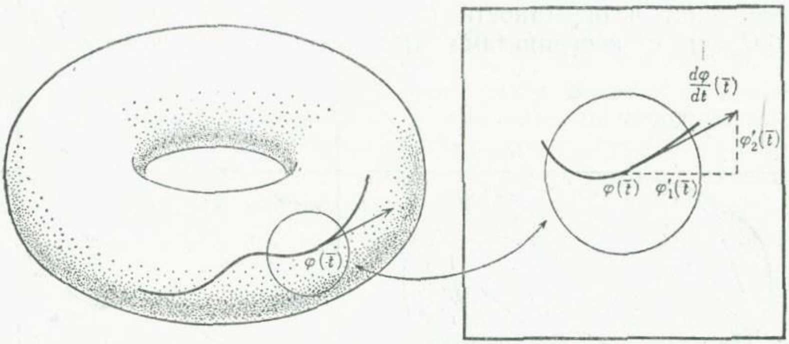


Рис. 1.8.

функций $((\varphi_1(t), \varphi_2(t)))$, являющихся r раз дифференцируемыми справа при $t = 0$ и слева при $t = \bar{u}$. Образ $\varphi([0, \bar{u}])$ замкнутой кривой φ на торе T является замкнутым множеством.

Пусть по-прежнему φ на $[0, \bar{u}]$ определяет замкнутую C^r-кривую на торе T. Если при $0 \leqslant t_1 < t_2 < \bar{u}$ всегда

$$\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2),$$

то φ называется *простой C^r-кривой*. Образ $L = \varphi([0, \bar{u}])$ отображения φ в этом случае также называется *простой C^r-кривой*.

Рассмотрим теперь на торе T произвольную C^r-кривую φ, $r \geqslant 1$, определенную на интервале $]\alpha, \beta[$. Согласно сказанному выше, для каждого $\bar{t}$, $\alpha < \bar{t} < \beta$, существует такая окрестность $]\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta[$, что в локальной системе координат окрестности $U_\varepsilon(\varphi(\bar{t}))$ кривая φ выражается через пару функций $((\varphi_1(t), \varphi_2(t)))$; числа $\varphi_1'(\bar{t})$ и $\varphi_2'(\bar{t})$ оказываются ξ- и η-компонентами соответственно одного из касательных векторов к T в точке $\varphi(\bar{t})$; он называется *касательным вектором к кривой* φ в точке $\varphi(\bar{t})$ и обозначается через $\frac{d\varphi}{dt}(\bar{t})$ (рис. 1.8).

[1]) Но не всякая C^r-кривая $\varphi: [0, \bar{u}] \to T$ определяет замкнутую C^r-кривую, а лишь такая, у которой все первые r производных координат φ_i в нуле и в $\bar{u}$ совпадают.— *Прим. ред.*

Пусть $X=\{v_p;\ p\in T\}$ — векторное C^r-поле на торе T. Если на интервале $]\alpha,\ \beta[$ определена C^{r+1}-кривая φ, касательный вектор $\frac{d\varphi}{dt}(t)$ к которой при всяком t, $\alpha<t<\beta$, является вектором $v_{\varphi(t)}\in X$, то эта кривая называется *траекторией* или *интегральной кривой* поля X (рис. 1.9).

Фиксируем теперь в той же ситуации локальную систему координат в окрестности $U_\varepsilon(p)$ и произвольную точку $p'\in\in U_\varepsilon(p)$ с координатами $((\xi,\ \eta))$. Тогда ξ-компонента и

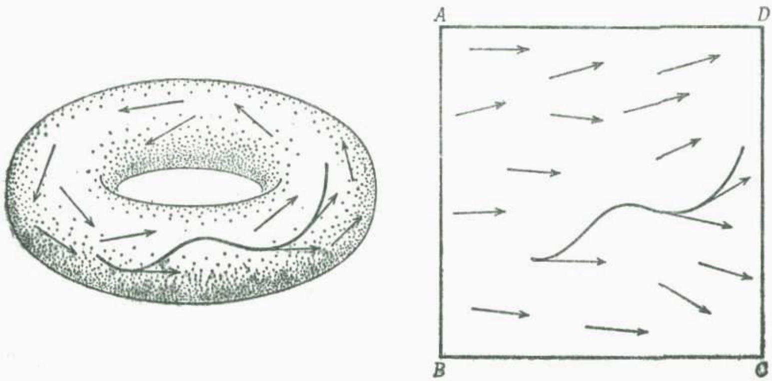


Рис. 1.9.

η-компонента вектора $v_{p'}\in X$ могут быть записаны как $\lambda(\xi,\ \eta)$ и $\mu(\xi,\ \eta)$ соответственно. Для того чтобы кривая φ была в окрестности $U_\varepsilon(p)$ траекторией поля X, необходимо и достаточно, чтобы функции $((\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)))$, которыми $\varphi(t)$ описывается в локальной системе координат, удовлетворяли системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi_1}{dt}(t)=\lambda(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)),\qquad \frac{d\varphi_2}{dt}(t)=\mu(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)).$$

Следовательно, дословно повторяя сказанное в § 2 для $r\geqslant 1$, отметим, что, согласно теореме о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в некотором интервале $]-\tau,\ \tau[$ определена, и притом единственным образом, интегральная кривая φ поля X, удовлетворяющая условию $\varphi(0)=p$.

Известно (см. комментарии, примечание 1.2), что для векторного C^r-поля X на торе T существует положительное число M, такое, что $|\lambda(\xi,\ \eta)|<M$ и $|\mu(\xi,\ \eta)|<M$. Это позволяет, дословно повторяя сказанное в § 2, продолжить определенную на $]-\tau,\ \tau[$ кривую φ на участок $]-\infty,\ \infty[$, полу-

чив тем самым траекторию поля X, для которой $\varphi(0)=p$. Точка p в этом случае называется *начальной* для траектории, а саму траекторию обозначают символом

$$\varphi(t, p).$$

Отображение $\varphi(t, p)$ как функция от t принадлежит классу C^{r+1}; в силу же теоремы о дифференцируемости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным условиям отображение $\varphi(t, p)$ как функция от p принадлежит классу C^r в следующем смысле. Возьмем в окрестности $U_\varepsilon(p)$ произвольную точку p' с локальными координатами $((\xi, \eta))$; при достаточно малых $|\xi|, |\eta|$ окрестность $U_{\varepsilon'}(\varphi(t, p))$ содержит точку $\varphi(t, p'((\xi, \eta)))$; в системе координат окрестности $U_{\varepsilon'}(\varphi(t, p))$ координаты точки $\varphi(t, p'((\xi, \eta)))$ записываются в виде $\bar{\xi}(\xi, \eta)$, $\bar{\eta}(\xi, \eta)$; они-то и являются функциями класса C^r.

Суммируем сказанное в виде теоремы.

Теорема 1.2. *Пусть X — векторное C^r-поле на торе T, $r \geqslant 1$. Для произвольной точки p из T существует, и притом единственная, интегральная кривая $\varphi(t, p)$ поля X, для которой p является начальной точкой. Функция $\varphi(t, p)$ принадлежит классу C^{r+1} относительно переменной t и классу C^r относительно переменной p.*

В случае неособого векторного поля X и замкнутой интегральной кривой $\varphi(t, p)$ с помощью изменения t в некоторых ограниченных пределах можно пройти всю кривую[1]).

Векторное поле на торе называется *динамической системой* на нем. Динамическая система на торе задает систему дифференциальных уравнений, чем и объясняется заменяемость термина «траектория» термином «интегральная кривая».

Пусть на торе T заданы векторное C^r-поле X и начальная точка p интегральной кривой $\varphi(t, p)$. Фиксируем точку $\bar{p}=\varphi(\bar{t}, p)$ на этой кривой и рассмотрим кривую $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t+\bar{t}, p)$ относительно переменной t. Поскольку $\bar{\varphi}(0) = \varphi(\bar{t}, p)=\bar{p}$, из единственности интегральной кривой следует равенство $\bar{\varphi}(t)=\varphi(t, \bar{p})$. Отсюда

$$(*) \qquad \varphi(t, \varphi(\bar{t}, p))=\varphi(t+\bar{t}, p).$$

Подмножество $\{\varphi(t, p);\ -\infty < t < \infty\}$ тора T называется *траекторией* поля X, проходящей через точку p, и обозна-

[1]) Что, конечно, никак не зависит от того, имеются ли у поля X особенности (нули) или нет, — просто здесь все время речь идет о неособом поле. — *Прим. ред.*

чается через $C(p)$. В силу только что установленной формулы (*) для любой точки $\bar{p} \in C(p)$ справедливо равенство

$$C(p) = C(\bar{p}).$$

Поскольку каждая точка тора T принадлежит некоторой траектории, сам тор в этих условиях разбивается на траектории.

Пусть p — начальная точка интегральной кривой $\varphi(t, p)$ векторного C^r-поля X. Если для двух разных значений t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ имеет место равенство

$$\varphi(t_1, p) = \varphi(t_2, p),$$

причем для некоторого t, $t_1 < t < t_2$,

$$\varphi(t, p) \neq \varphi(t_1, p),$$

то интегральная кривая $\varphi(t, p)$ называется *периодической*. Траектория $C(p)$ в этом случае также называется *периодической*.

В силу единственности интегральной кривой неособого векторного C^r-поля, периодическая кривая $\varphi(t, p)$ является простой замкнутой C^{r+1}-кривой. Таким образом, периодическая траектория и замкнутая траектория — это синонимы.

Если проходящая через точку p траектория $C(p)$ поля X является плотным множеством в торе T, т. е. если

$$\overline{C(p)} = T,$$

то она называется *эргодической*[1]). Очевидно, в этом случае кривая $C(p)$ не является замкнутым множеством в T.

§ 4. Топологические свойства траекторий на торе

Пусть X — векторное C^r-поле на торе T, $r \geqslant 1$. Фиксируем произвольную точку $p \in T$ и соответствующую ей как начальной точке интегральную кривую $\varphi(t, p)$ поля X. Далее в той части кривой $\varphi(t, p)$, которая соответствует значениям $t \geqslant 0$, для каждого s, $0 \leqslant s < \infty$, рассмотрим подмножество $\{\varphi(t, p);\ s \leqslant t < \infty\}$. Общая часть замыканий всех таких подмножеств называется *ω-предельным множеством* траектории $C(p)$ и обозначается через $L^+(p)$,

$$L^+(p) = \bigcap_{0 \leqslant s < \infty} \overline{\{\varphi(t, p);\ s \leqslant t < \infty\}}.$$

---

[1]) Такова традиционная терминология в работах о траекториях на торе. Она не вполне соответствует более общему понятию эргодичности динамической системы, но в данном случае и не противоречит ему. — *Прим. ред.*

Аналогично определяется *α-предельное множество* траектории $C(p)$, проходящее через точку p; оно обозначается через $L^-(p)$,

$$L^-(p) = \bigcap_{-\infty < s \leqslant 0} \overline{\{\varphi(t, p);\ -\infty < t \leqslant s\}}.$$

Множества $L^+(p)$ и $L^-(p)$ являются замкнутыми и непустыми (см. комментарии, примечание 1.3).

Пусть A — подмножество тора T. Предположим, что для произвольной точки $p \in A$ интегральная кривая $\varphi(t, p)$, определяемая ею как начальной точкой, целиком принадлежит множеству A. Тогда

$$\bigcup_{p \in A} \{\varphi(t, p);\ -\infty < t < \infty\} = A;$$

такое множество A называется *инвариантным*.

Теорема 1.3. *α-предельное и ω-предельное множества являются инвариантными.*

Доказательство. Для произвольной точки $x \in L^+(p)$ существует числовая последовательность $\{t_i\}$, такая, что

$$\lim_{i \to \infty} \varphi(t_i, p) = x$$

и $\lim\limits_{i \to \infty} t_i = \infty$. Пусть x — начальная точка интегральной кривой $\varphi(t, x)$ поля X и $\varphi(\hat{t}, x)$ — точка на этой кривой. Тогда

$$\lim_{i \to \infty} \varphi(t_i + \hat{t}, p) = \lim_{i \to \infty} \varphi(\hat{t}, \varphi(t_i, p)) = \varphi(\hat{t}, x)$$

и поэтому $\varphi(\hat{t}, x) \in L^+(p)$. Следовательно, $L^+(p)$ — инвариантное множество. Аналогично доказывается, что инвариантно и $L^-(p)$. □

Рассмотрим пример векторного поля на торе T.

Пусть a, b — два вещественных числа, не равные оба нулю. Каждой точке тора T поставим в соответствие касательный вектор, ξ-компонента и η-компонента которого равны соответственно a и b; тем самым на T задается векторное поле, которое мы будем обозначать через $X_{a,b}$. Поле $X_{a,b}$, очевидно, является неособым и принадлежит классу C^∞.

Если p — начальная точка траектории $\varphi(t, p)$ векторного поля $X_{a,b}$, то в каждой системе координат окрестности $U_\varepsilon(q)$, $q \in T$, эта траектория задается как решение системы уравнений

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = a, \qquad \frac{d\varphi_2}{dt} = b,$$

т. е. если $p=[P(x, y)]$, то

$$\varphi(t, p)=[Q(x+at, y+bt)]$$

(см. рис. 1.10).

Ситуация зависит от того, является отношение чисел a и b рациональным или иррациональным числом.

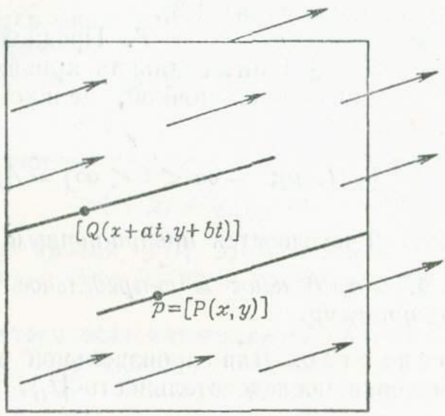


Рис. 1.10.

(I) Пусть либо b/a — рациональное число, либо $a=0$. В этом случае существуют такие целые m и n и вещественное λ, что

$$a=m\lambda, \qquad b=n\lambda,$$

так что

$$\varphi\left(\frac{1}{\lambda}, p\right)=[Q(x+m, y+n)]=p,$$

т. е. траектория, для которой p служит начальной точкой, при $t=1/\lambda$ вновь оказывается в этой точке. Следовательно, для любой точки p траектория $C(p)$ является простой замкнутой C^∞-кривой на торе T. Ее α- и ω-предельные множества также являются простыми замкнутыми C^∞-кривыми.

(II) Пусть b/a — иррациональное число[1]). В этом случае траектория не является периодической. Действительно, если

[1]) В литературе на русском языке в этом случае векторное поле $X_{a,b}$ (точнее, определяемую им динамическую систему, см. гл. 3) называют *иррациональной обмоткой* тора. Это название применяют и к отдельным траекториям. — *Прим. ред.*

бы это было не так, то существовали бы $t_1 \neq t_2$, такие, что $\varphi(t_1, p) = \varphi(t_2, p)$, где $p = [P(x, y)]$. Но тогда

$$[P_1(x + at_1, y + bt_1)] = [P_2(x + at_2, y + bt_2)]$$

и числа $a(t_1 - t_2)$ и $b(t_1 - t_2)$ должны быть целыми. Это в противоречие с предположением означает, что либо $a = 0$, либо b/a является рациональным числом.

Пусть теперь $p' = [P'(x', y')]$ — произвольная точка на T. Интегральная кривая поля $X_{a, b}$, соответствующая начальной точке $p = [P(x, y)]$, проходит и через точки $p_n = \left[P_n\left(x', y' + (y - y') + \frac{b}{a}(x' - x) + \frac{b}{a}n\right)\right]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Будем обозначать для краткости наименьшее по абсолютной величине число из множества $\{\lambda + m;\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ при произвольном λ через $\langle\lambda\rangle$. Тогда ввиду иррациональности числа b/a последовательность диофантовых приближений

$$\left\langle y - y' + \frac{b}{a}(x' - x) + \frac{b}{a}n \right\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

содержит подпоследовательность, сходящуюся к нулю (комментарии, примечание 1.4). Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка p_n, что

$$\rho(p', p_n) < \varepsilon.$$

Поэтому если $C(p)$ — траектория, проходящая через точку p, то

$$p' \in \overline{C(p)}.$$

Так как p' — произвольная точка тора T, то, значит,

$$\overline{C(p)} = T,$$

т. е. кривая $C(p)$ является эргодической. В этом случае α-предельное и ω-предельное множества любой траектории $C(p)$ удовлетворяют равенствам[1] $L^+(p) = L^-(p) = T$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.4. *Траекториями поля $X_{a, b}$ являются либо периодические кривые (случай рационального b/a или $a = 0$), либо эргодические кривые (случай иррационального b/a).*

Периодичность сразу всех траекторий поля $X_{a, b}$ или полное отсутствие периодических траекторий доставляют примеры крайних случаев, которые могут иметь место для неособого век-

---

[1]) Априори из того, что $\overline{C(p)} = T$, еще не обязательно следует, что и $L^+(p)$, и $L^-(p)$ совпадают с T, но в данном случае это так, ибо выше фактически доказано, что $L^+(p) = T$, а аналогичное рассуждение с $n \to -\infty$ даст $L^-(p) = T$. — *Прим. ред.*

торного C^r-поля X $(r \geqslant 1)$; как правило, однако, встречаются как периодические, так и непериодические траектории. В этой связи мы рассмотрим сейчас пример, доказав одну лемму, часто встречающуюся в дальнейших рассуждениях.

Лемма 1.5. *В интервале* $]-\infty, \infty[$ *существует* C^∞*-функция* $\Phi(x)$, *обладающая следующими тремя свойствами* (см. рис. 1.11):

(i) $\Phi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant 2, \\ 1, & |x| \leqslant 1; \end{cases}$

(ii) *при* $1 < |x| < 2$ *имеют место неравенства* $0 < \Phi(x) < 1$

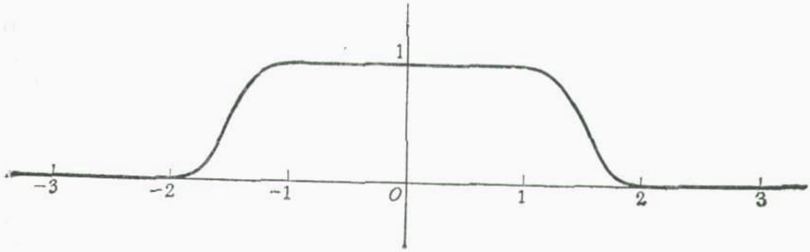


Рис. 1.11.

(iii) *функция* $|\Phi'(x)|$ *ограничена, причем при* $x \leqslant 0$ *производная* $\Phi'(x)$ *не меньше* 0, *а при* $x \geqslant 0$ *она не превосходит* 0.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0 \text{ и } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Она определена на прямой $]-\infty, \infty[$ и принадлежит классу C^∞. Далее, функция

$$\beta(x) = \frac{\int\limits_0^x \alpha(x)\,dx}{\int\limits_0^1 \alpha(x)\,dx}$$

также определена на прямой $]-\infty, \infty[$ и принадлежит классу C^∞, причем $\beta(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $\beta(x) = 1$ при $x \geqslant 1$, а при $0 < x < 1$ имеют место неравенства $0 < \beta(x) < 1$ и $\beta'(x) > 0$. Наконец, функция $\Phi(x) = \beta(x+2)\beta(2-x)$ обладает всеми тремя свойствами, указанными в формулировке леммы. □

Рассмотрим в квадрате $ABCD$, определенном точками $A(0, 1)$, $B(0, 0)$, $C(1, 0)$, $D(1, 1)$, кривые C_s, заданные функциями от t, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$x = t, \qquad y = s + \frac{1}{c}\Phi(2-4s)(\Phi(t+1)-1),$$

где $0 \leqslant s \leqslant 1$, а константа c определена условием

$$c > 4|\Phi'(x)| \qquad (-\infty < x < \infty),$$

что имеет смысл в силу леммы 1.5 (iii) (см. рис. 1.12).

Семейство кривых $\{C_s; 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ покрывает квадрат $ABCD$, причем, поскольку при фиксированном t координата y яв-

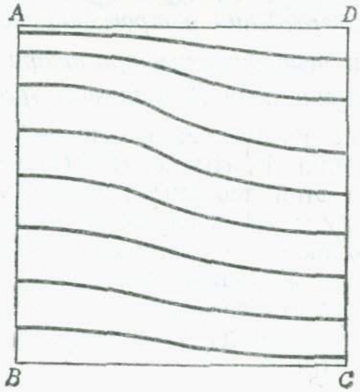


Рис. 1.12.

ляется монотонно возрастающей функцией от s, при $s \neq s'$ обязательно $C_s \cap C_{s'} = \varnothing$. Далее, в точках сторон квадрата $ABCD$ касательные к кривым C_s параллельны оси x. Следовательно, поскольку при построении тора T из квадрата $ABCD$ сторона $\overrightarrow{AB}$ отождествляется со стороной $\overrightarrow{DC}$ и сторона $\overrightarrow{BC}$ отождествляется со стороной $\overrightarrow{AD}$, множество $\{C_s; 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ задает на торе T покрывающее его семейство C^∞-кривых.

Касательные векторы к кривым $\{C_s; 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ определяют на T неособое векторное C^∞-поле X. Его интегральные кривые естественным образом отождествляются с кривыми из $\{C_s; 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ и поэтому тоже составляют семейство C^∞-кривых. Единственными замкнутыми траекториями поля X являются C_0 и C_1; остальные траектории не периодичны, но и не эргодичны, так как их замыкания не совпадают с T.

В случае произвольного векторного C^r-поля на торе T, $r \geqslant 1$, для описания всех траекторий необходимо рассмотреть вопрос о существовании периодических траекторий и условие эргодичности траектории, т. е. с топологической точки зрения исследовать свойства траекторий, о которых, как указывалось в § 1, говорил еще Пуанкаре. Позднее, лишь в 1932 г., размышления на эту тему привели Данжуа к одной красивой теореме, описывающей топологические свойства траекторий векторного C^r-поля с помощью аналитических условий. Этому результату посвящены приводимые ниже теоремы 1.10 и 1.12. В 1945 г. Зигель доказал теорему, обобщающую результат Данжуа (см. комментарии, разд. 1).

Теорема 1.6 (Данжуа—Зигель). *Пусть X—неособое векторное C^r-поле на торе T. При $r \geqslant 2$ справедливо одно из следующих двух утверждений о траекториях поля X:*

(i) *существуют периодические траектории поля X;*

(ii) *все траектории поля X являются эргодическими.*

Как показывает рассмотренный ниже пример, в случае $r=1$ оба утверждения (i), (ii) могут быть неверными.

Доказательству этой теоремы посвящены § 5—7. Векторные поля из теоремы 1.4 в случае $a=0$ или рационального b/a, а также векторное C^∞-поле, определенное выше семейством $\{C_s;\ 0 \leqslant s \leqslant 1\}$, являются примерами, в которых справедливо утверждение (i); векторные поля из теоремы 1.4 в случае иррационального b/a дают примеры, в которых справедливо утверждение (ii).

§ 5. Теорема Данжуа

Данжуа рассматривал случай неособого векторного C^r-поля $X=\{v_p;\ p \in T\}$ на торе T при $r \geqslant 2$ в предположении, что ξ-компонента каждого вектора v_p отлична от нуля. Так как ξ-компонента вектора v_p зависит от точки p непрерывно, такое предположение означает, что либо ξ-компоненты всех векторов положительны, либо все они отрицательны. Поскольку в обоих случаях доказательства одинаковы, ниже предполагается, что ξ-компоненты векторов v_p положительны.

Как показано на рис. 1.5 (ii), тор T можно представлять себе в виде цилиндра, внешние крайние окружности которого отождествляются. Окружность S_0^1 (см. рис. 1.13) получается из стороны AB, окружность S_1^1—из стороны CD. В торе T окружности S_0^1 и S_1^1 отождествляются, и мы будем говорить ниже о торе T как о цилиндре, в котором $S_0^1=S_1^1$.

Если $p \in S_0^1$—начальная точка интегральной кривой $\varphi(t, p)$ поля X, то в системе координат окрестности этой точки кривая $\varphi(t, p)$ задается как решение $((\varphi_1, \varphi_2))$ системы уравнений

$$\frac{d\varphi_1}{dt}(t)=\lambda(\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \quad \frac{d\varphi_2}{dt}(t)=\mu(\varphi_1(t), \varphi_2(t)),$$

причем в данном случае $\lambda(\varphi_1(t), \varphi_2(t))>0$[1]) и при возрастании t от нуля точка $\varphi(t, p)$ обязательно попадает на S_1^1. Следовательно, существует такое минимальное $\bar{t}>0$, что

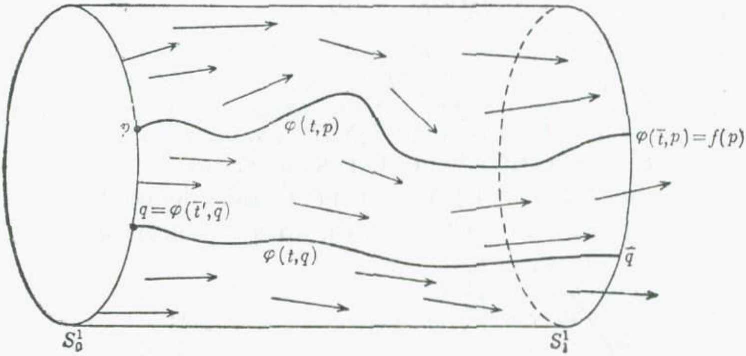


Рис. 1.13.

$\varphi(\bar{t}, p)\in S_1^1$. Назовем его *временем возвращения;* оно, вообще говоря, зависит от p.

Обозначая точку $\varphi(\bar{t}, p)$ через $f(p)$, введем, тем самым, отображение

$$f\colon S_0^1 \to S_1^1.$$

(Его называют *отображением последования*, *функцией последования* или *отображением Пуанкаре*.)

Пусть

$$g\colon S^1 \to S^1$$

— произвольное отображение окружности S^1 в себя. Точку на S^1 можно выразить с помощью комплексных чисел в виде $e^{2\pi\theta i}\in S^1$ $(\theta\in\mathbf{R})$, и тогда $g(e^{2\pi\theta i})=e^{2\pi\bar{\theta}i}$ при некотором $\bar{\theta}$, единственном с точностью до целочисленного слагаемого. Число $\bar{\theta}$

---

[1]) Более того, λ все время не меньше некоторого $\varepsilon>0$. Поэтому за время $1/\varepsilon$ координата φ_1 изменится, возрастая, не менее чем на 1.— *Прим. ред.*

будем считать минимальным возможным из неотрицательных [1]) и обозначать через $\bar{g}(\theta)$, так что

$$g(e^{2\pi\theta i}) = e^{2\pi\bar{g}(\theta)i}.$$

Если отображение g является непрерывным в точке $e^{2\pi\theta i}$, то и функцию $\bar{g}$ можно построить непрерывной в точке θ, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $|\theta - \theta'| < \delta$, то

$$|\bar{g}(\theta) - \bar{g}(\theta')| < \varepsilon.$$

Если функция $\bar{g}$ принадлежит классу C^r в точке θ, то говорят, что отображение g *принадлежит классу* C^r в точке $e^{2\pi\theta i}$. Когда отображение g принадлежит классу C^r в каждой точке, говорят, что $g\colon S^1 \to S^1$ является *C^r-отображением* или *отображением класса C^r*. Если для каждой точки $e^{2\pi\theta i}$ окружности S^1 при $\theta < \theta' < \theta + \delta$ введенная выше функция $\bar{g}$ удовлетворяет неравенству $\bar{g}(\theta) < \bar{g}(\theta')$, то g называется *отображением, сохраняющим ориентацию*.

Если отображение $g\colon S^1 \to S^1$ является взаимно однозначным, то существует обратное отображение $g^{-1}\colon S^1 \to S^1$; если оно принадлежит тому же классу C^r, что и g, то говорят, что g является *C^r-гомеоморфизмом*. (Обычно при $r \geqslant 1$ говорят не «C^r-гомеоморфизм», а «C^r-диффеоморфизм».)

Согласно теореме 1.2, приведенной выше, $\varphi(t, p)$ как функция переменной p принадлежит классу C^r; поэтому [2]) если $p = e^{2\pi\theta i}$, то [3]) $f(p) = e^{2\pi\bar{f}(\theta)i}$, где $\bar{f}$ можно выбрать так, что при $|\theta - \theta'| < \delta$ имеет место неравенство $|\bar{f}(\theta) - \bar{f}(\theta')| < \varepsilon$ (для любого достаточно малого ε). При этом $\bar{f}(\theta)$ будет C^r-функцией от θ. Итак, f является C^r-отображением.

Пусть $\bar{q} \in S_1^1$ — начальная точка интегральной кривой $\varphi(t, \bar{q})$; когда t уменьшается от нулевого значения, точка на кривой приближается к S_0^1 и существует такое максимальное $\bar{t}' < 0$,

---

[1]) Фактически для *непрерывного* g целесообразно выбирать $\bar{\theta}$ иначе, а именно так, чтобы и функция $\bar{\theta} = \bar{g}(\theta)$ (ее иногда называют *угловой функцией* отображения g) была непрерывной. (Ниже автор так и поступает.) Возможность такого выбора $\bar{\theta}$ — факт достаточно наглядный, но его формальное доказательство, опущенное автором, довольно канительно. Имеется бесконечное число угловых функций; они отличаются друг от друга на целое кратное 2π. — *Прим. ред.*

[2]) Эту аргументацию надо применить к уравнению $\dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{\mu}{\lambda}$. — *Прим. ред.*

[3]) Пользуясь введенной выше «комплексной» записью для точек окружности. — *Прим. ред.*

что $\varphi(\overline{t'}, \overline{q}) \in S_0^1$. Полагая $\varphi(\overline{t'}, \overline{q}) = q$, получаем равенство

$$f(q) = \overline{q},$$

вытекающее из единственности интегральной кривой (см. рис. 1.13). Таким образом, по каждой точке $\overline{q}$ можно восстановить точку q, т. е. для отображения f существует обратное f^{-1}: $S_1^1 \to S_0^1$. Функция $\varphi(t, \overline{q})$ относительно переменной $\overline{q}$ принадлежит классу C^r в силу теоремы 1.2. Поэтому f^{-1} является C^r-отображением, а это в совокупности со сказанным

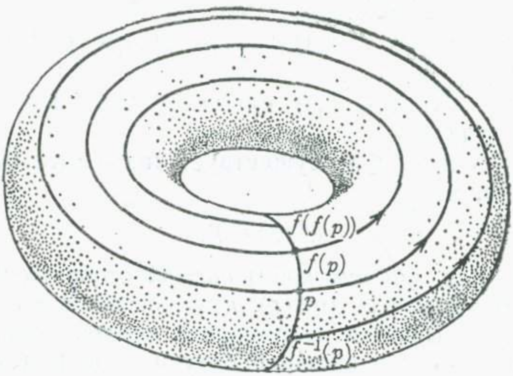


Рис. 1.14.

выше означает, что f: $S_0^1 \to S_1^1$ является C^r-гомеоморфизмом. Как видно из рис. 1.13, отображение f сохраняет ориентацию.

Определенная произвольной начальной точкой на T интегральная кривая поля X при возрастании t обязательно подходит к окружности S_1^1; однако, поскольку на торе $S_1^1 = S_0^1$, из сказанного выше следует, что все траектории поля X являются интегральными кривыми, определенными начальными точками на окружности S_0^1.

Если $p \in S_0^1 = S_1^1$ — начальная точка интегральной кривой $\varphi(t, p)$, то следующей по мере возрастания t от нуля точкой этой кривой на $S_0^1 = S_1^1$ является $f(p) = \varphi(\overline{t}, p)$. При изменении t в промежутке $0 \leqslant t \leqslant \overline{t}$ кривая $\varphi(t, p)$ представляет собой дугу, начинающуюся в p и заканчивающуюся в $f(p)$ (рис. 1.14). Часть кривой $\varphi(t, p)$, соответствующая $\overline{t} < t$, может рассматриваться как интегральная кривая $\varphi(t, f(p))$ с начальной точкой $f(p)$ и $t > 0$. Точно так же, при возрастании t от нуля кривая $\varphi(t, f(p))$ пересечет окружность $S_0^1 = S_1^1$ в точке $f(f(p))$. Таким образом, по мере возрастания t

от нуля кривая $\varphi(t, p)$ последовательно пересекает окружность $S_0^1 = S_1^1$ в точках

$$f(p), \quad f(f(p)), \quad f(f(f(p))), \ \ldots$$

и, аналогично, при уменьшении t от нуля — в точках

$$f^{-1}(p), \quad f^{-1}(f^{-1}(p)), \quad f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(p))), \ \ldots \ .$$

Топологические свойства траектории $C(p)$, определенной интегральной кривой $\varphi(t, p)$, устанавливаются с помощью этих точек пересечения $C(p)$ и $S_0^1 = S_1^1$.

Обычно, если задан C^r-гомеоморфизм $g\colon S^1 \to S^1$, то для $p \in S^1$ вместо $\overbrace{g(g(g\ldots(g}^{m\ \text{раз}}(p))\ldots))$ пишут $g^m(p)$, а вместо $\overbrace{g^{-1}(g^{-1}(g^{-1}\ldots(g^{-1}}^{m\ \text{раз}}(p))\ldots))$ пишут $g^{-m}(p)$. Принято также обозначение $g^0(p) = p$.

Если для точки $p \in S^1$ существует такое отличное от нуля целое число n, что

$$g^n(p) = p,$$

то p называется *циклической*[1]) *точкой* отображения g. Если же для $p \in S^1$ множество $\{g^m(p);\ m$ пробегает все целые числа$\}$ плотно, то p называется *эргодической точкой* отображения g.

Пусть $f\colon S_0^1 \to S_1^1$ в прежней ситуации является C^r-гомеоморфизмом. Если $p \in S_0^1 = S_1^1$ — циклическая точка отображения f, то при некотором $t' \neq 0$ имеет место равенство $\varphi(t', p) = p$ и, следовательно, траектория $C(p)$ является периодической. Если же p — эргодическая точка отображения f и p' — произвольная точка окружности $S_0^1 = S_1^1$, то интегральная кривая $\varphi(t, p)$ проходит сколь угодно близко к p' в соответствующей точке $f^n(p)$, а потому сколь угодно близкими являются и кривые $\varphi(t, p')$ и $\varphi(t, f^n(p))$. Следовательно, $\overline{C(p)} = T$ и траектория $C(p)$ эргодическая.

В случае векторного C^∞-поля $X_{a,b}$ $(a \neq 0)$ получаемое из теоремы 1.4 с помощью интегральных кривых отображение $f\colon S_0^1 \to S_1^1$ имеет следующий вид: $f(e^{2\pi\theta i}) = e^{2\pi(\theta + (b/a)\,i)}$. Поэтому, когда b/a является рациональным числом, все точки окружности оказываются циклическими для f, а когда b/a иррационально, все точки эргодические.

Данжуа доказал следующую теорему для C^r-гомеоморфизма $g\colon S^1 \to S^1$.

[1]) Для единства терминологии следовало бы писать «периодической», но в литературе по соответствующим вопросам чаще пишут «циклическая». — *Прим. ред.*

Теорема 1.7 (Данжуа). *Пусть* $g\colon S^1 \to S^1$ *есть* C^r*-гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию, и* $r \geqslant 2$. *Тогда имеет место один из следующих двух случаев*:

(i) g *обладает циклическими точками*;
(ii) *все точки окружности* S^1 *являются эргодическими для* g.

Приводимое ниже наиболее простое доказательство принадлежит Зигелю. Оно опирается на две леммы.

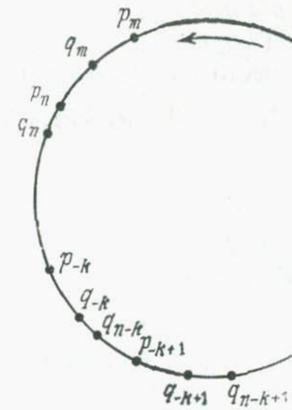


Рис. 1.15.

Поле $X_{a,b}$ при рациональном b/a подтверждает реальность случая (i) теоремы 1.7. Доказательство следующей леммы относится к случаю, когда (i) не имеет места.

Если p — точка окружности S^1, то для простоты будем писать

$$p_n = g^n(p) \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Зададим на S^1 направление обхода. Если две точки p и q на S^1 таковы, что при заданном направлении q следует за p и на дуге $\widehat{pq}$ фиксирована точка p', отличная от p и q, то мы будем писать

$$p < p' < q$$

(см. рис. 1.15)[1]. В случае последовательности различных

[1] Обратим внимание, что запись $p < q$ не информативна, но запись $p < q < r$ и аналогичная запись с бо́льшим числом точек содержательна! Дуга $\widehat{pq}$ понимается как дуга, пробегаемая при движении в заданном направлении (направлении обхода) от p к q. — *Прим. ред.*

точек p', p'', p''', ..., расположенной на дуге $\widehat{pq}$ в заданном на дуге направлении, мы будем писать

$$p \prec p' \prec p'' \prec p''' \prec \ldots \prec q.$$

Лемма 1.8. *Пусть отображение g не имеет циклических точек. Тогда для любой точки p на окружности S^1 и любого целого числа m, отличного от нуля, существует целое число h, такое, что*

$$p \prec p_h \prec p_m.$$

Доказательство. Предположим, что при некотором целом числе $l \geqslant 2$ имеют место расположения

$$p_1 \prec p_2 \prec \ldots \prec p_l \prec p \quad \text{и} \quad p_1 \prec p_{l+1} \prec p.$$

Тогда обязательно

$$(*) \qquad p_l \prec p_{l+1} \prec p.$$

Действительно, в противном случае должно существовать целое k, для которого $1 \leqslant k \leqslant l-1$ и

$$(**) \qquad p_k \prec p_{l+1} \prec p_{k+1}.$$

Применяя к (**) отображение g^{-k}, получаем

$$p \prec p_{l-k+1} \prec p_1 \qquad (2 \leqslant l-k+1 \leqslant l),$$

а это противоречит заданному расположению точек. Поэтому

$$p_1 \prec p_2 \prec \ldots \prec p_l \prec p_{l+1} \prec p.$$

Следовательно, если бы для всех $n = 2, 3, \ldots$ выполнялось

$$p_1 \prec p_n \prec p,$$

то, согласно сказанному выше, это давало бы

$$p_1 \prec p_2 \prec p_3 \prec \ldots \prec p.$$

Поскольку монотонная ограниченная последовательность чисел имеет предел, в описанной ситуации существует такая точка $\bar{p}$, что

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \bar{p}.$$

Но тогда для образа $g(\bar{p})$ точки $\bar{p}$ имеют место соотношения

$$g(\bar{p}) = g\left(\lim_{n \to \infty} p_n\right) = \lim_{n \to \infty} g(p_n) = \lim_{n \to \infty} p_{n+1} = \bar{p},$$

т. е. $\bar{p}$ — циклическая точка для g, а между тем по условию отображение g циклических точек не имеет. Противоречие.

Тем самым доказано, что при некотором целом $h > 1$

$$p < p_h < p_1.$$

Это доказывает лемму 1.8 для случая $m=1$. Заменяя в нем g на g^m, получим доказательство и в общем случае. □

Пусть $g\colon S^1 \to S^1$ — некоторый C^r-гомеоморфизм, не имеющий циклических точек. Предположим, что точка $u \in S^1$ не является эргодической для g. Тогда замыканием множества $\{u, g^{\pm 1}(u), g^{\pm 2}(u), \ldots\}$ служит такое множество K, что $K \neq S^1$ и $S^1 - K$ является непустым открытым множеством. Следовательно, существует дуга $\widehat{pq}$ на S^1, такая, что $p, q \in K$, а остальные ее точки лежат вне K. Так как точка u не является циклической для g, обязательно $p \neq q$. Будем называть часть дуги $\widehat{pq}$, получающуюся удалением точек p и q из $\widehat{pq}$, *открытой дугой* $\widehat{pq}$.

В силу определения множества K все точки вида

$$p_n = g^n(p), \quad q_n = g^n(q) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

принадлежат K. Если бы открытая дуга $\widehat{p_n q_n}$ содержала точку p' из множества K, то открытая дуга $\widehat{pq}$ содержала бы точку $g^{-n}(p')$, также принадлежащую множеству K; следовательно, не существует точки из открытой дуги $\widehat{p_n q_n}$, принадлежащей множеству K. Это означает, что для любых целых чисел m, n $(m \neq n)$ открытые дуги $\widehat{p_m q_m}$ и $\widehat{p_n q_n}$ не имеют общих точек (рис. 1.15).

Следующая лемма посвящена введенным выше точкам p_n, q_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Лемма 1.9. *Для любого целого положительного числа N существует такое целое $n > N$, что выполнено одно из следующих двух требований* (см. рис. 1.15):

(i) *n дуг $\widehat{p_{-k} q_{n-k}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ попарно не имеют общих точек;*

(ii) *n дуг $\widehat{p_{n-k} q_{-k}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ попарно не имеют общих точек.*

Доказательство. Рассмотрим $2N$ дуг $\widehat{pp_{j'}}$ $(j' = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N)$. Среди них фиксируем минимальную дугу $\widehat{pp_m}$ в том смысле, что

$$p < p_m < p_{j'} \text{ для } j' \neq m.$$

В силу леммы 1.8 существует такое целое число h, что

$$p < p_h < p_m.$$

Очевидно, $|h| > N$. Выберем h минимальным по абсолютной величине; тогда

$$p < p_m < p_j \quad (0 < |j| < |h|,\ j \neq m)$$

и поэтому

$$p < p_h < p_j \quad (0 < |j| < |h|).$$

Число $n = |h|$ является искомым.

Действительно, если бы для $n = |h|$ ни одно из требований (i), (ii) не выполнялось, то были бы справедливы следующие утверждения (i′) и (ii′):

(i′) *среди* n *дуг* $\overset{\frown}{p_{-k}q_{|h|-k}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *есть дуги с общей точкой;*

(ii′) *среди* n *дуг* $\overset{\frown}{p_{|h|-k}q_{-k}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *есть дуги с общей точкой.*

В случае $h > 0$ утверждение (i′) приобретает вид (i″):

(i″) *среди* n *дуг* $\overset{\frown}{p_{-k}q_{h-k}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *есть дуги с общей точкой.*

При $h < 0$ утверждение (ii′) выглядит так:

среди n *дуг* $\overset{\frown}{p_{-h-k}q_{-k}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *есть дуги с общей точкой.*

Применяя g^h к дугам $\overset{\frown}{p_{-h-k}q_{-k}}$, получаем дуги $g^h(\overset{\frown}{p_{-h-k}q_{-k}}) = \overset{\frown}{p_{-k}q_{h-k}}$, о которых говорится в п. (i″). Следовательно, можно считать, что h такое, как в (i″).

Сказанное означает, что среди чисел $1, 2, \ldots, n$ существуют такие k, l $(k \neq l)$, что

$$p_{-k} < p_{-l} < q_{h-k}.$$

Положим $k - l = j$, так что $0 < |j| < |h|$. С помощью g^k получаем из последнего расположения точек следующее:

$$p < p_j < q_h.$$

Так как p_j не может принадлежать $\overset{\frown}{p_hq_h}$, получаем

$$p < p_j < p_h,$$

что противоречит выбору h. Следовательно, число $n=|h|$ удовлетворяет требованиям (i), (ii). □

Обратимся теперь к доказательству теоремы 1.7.

Доказательство теоремы 1.7. Сохраняющий ориентацию C^r-гомеоморфизм $g\colon S^1 \to S^1$ $(r \geqslant 2)$ может быть записан в любой точке $e^{2\pi\eta i}$ окружности S^1 формулой

$$g(e^{2\pi\eta i}) = e^{2\pi\bar{g}(\eta) i},$$

где $\bar{g}$ — функция на S^1, значения которой определяются с точностью до целочисленных слагаемых [1]). Будем вместо $g^n(e^{2\pi\eta i})$ писать просто $e^{2\pi\eta_n i}$. Таким образом,

$$\bar{g}^n(\eta) = \eta_n.$$

Чтобы указать способ выбора единственного значения для $\bar{g}(\eta)$, фиксируем достаточно малое $\delta > 0$; тогда при $|\eta - \eta'| < \delta$ и произвольном фиксированном $\bar{g}(\eta)$ можно указать лишь одно $\bar{g}(\eta')$, такое, что $|\bar{g}(\eta) - \bar{g}(\eta')| < 1/2$; тем самым на интервале $]\eta-\delta, \eta+\delta[$ будет определена C^r-функция $\bar{g}$. В силу сказанного однозначный смысл имеет и равенство

$$\frac{d\bar{g}}{d\eta}(\eta) = \frac{d\eta_1}{d\eta}(\eta).$$

В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции

$$(***)\quad \frac{d\eta_n}{d\eta} = \prod_{k=1}^{n} \bar{g}'(\eta_{n-k}), \quad \frac{d\eta}{d\eta_{-n}} = \prod_{k=1}^{n} \bar{g}'(\eta_{-k}) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Предположим, что теорема 1.7 неверна и для обсуждаемого отображения $g\colon S^1 \to S^1$ оба случая (i), (ii) теоремы 1.7 места не имеют. Тогда существует точка $u \in S^1$, не являющаяся для g ни циклической, ни эргодической. Как было показано выше перед леммой 1.9, точка u определяет открытые дуги $\widehat{p_n q_n}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Для каждой открытой дуги $\widehat{p_n q_n}$ определены вещественные числа α_n, β_n, такие, что

открытая дуга $p_n q_n$ *совпадает с* $\{e^{2\pi\eta_n i}, \alpha_n < \eta_n < \beta_n\}$.

Числа α_n, β_n определены однозначно с точностью до цело-

[1]) На самом деле $\bar{g}$ — функция на $\mathbf{R}$ (угловая функция, см. примечание на стр. 36). — *Прим. ред.*

численного слагаемого [1]). Положим

$$\delta_n = \beta_n - \alpha_n;$$

разность δ_n больше 0 и определена однозначно. Согласно сказанному перед леммой 1.9, любые две открытые дуги $\widehat{p_n q_n}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ не имеют общих точек; это означает, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n \leqslant 1,$$

а потому

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n \delta_{-n} = 0.$$

По теореме о среднем существует такое η', что $\alpha_0 < \eta' < \beta_0$ и

$$\frac{\delta_n}{\delta_0} = \frac{\beta_n - \alpha_n}{\beta_0 - \alpha_0} = \frac{\bar{g}^n(\beta_0) - \bar{g}^n(\alpha_0)}{\beta_0 - \alpha_0} = \frac{d\bar{g}^n}{d\eta}(\eta').$$

Следовательно, обозначая $\bar{g}^k(\eta')$ через η'_k и учитывая (***), получаем, что

$$\frac{\delta_n}{\delta_0} = \prod_{k=1}^{n} \bar{g}'(\eta'_{n-k}).$$

Аналогично существует такое η'', что $\alpha_0 < \eta'' < \beta_0$, и, обозначая $\bar{g}^k(\eta'')$ через η''_k, с учетом (***) получаем

$$\frac{\delta_0}{\delta_{-n}} = \prod_{k=1}^{n} \bar{g}'(\eta''_{-k}).$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$\log \frac{\delta_0^2}{\delta_n \delta_{-n}} = \log \frac{\delta_0}{\delta_{-n}} - \log \frac{\delta_n}{\delta_0} = \sum_{k=1}^{n} (\log \bar{g}'(\eta''_{-k}) - \log \bar{g}'(\eta'_{n-k})) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\log \bar{g}'(\eta''_{-k}) - \log \bar{g}'(\eta'_{n-k})|.$$

Так как $\delta_n \delta_{-n} \to 0$ при $n \to \infty$, полученное выше выражение стремится к ∞, т. е.

(**) $$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} |\log \bar{g}'(\eta''_{-k}) - \log \bar{g}'(\eta'_{n-k})| = \infty.$$

Полагая $a'_k = e^{2\pi\eta'_k i}$, $a''_k = e^{2\pi\eta''_k i}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, получаем расположения

$$p_{-k} < a'_{-k} < q_{-k}, \qquad p_{n-k} < a''_{n-k} < q_{n-k};$$

---

[1]) α_0 и β_0 выберем так, чтобы точка $e^{2\pi\eta i}$ пробегала дугу $\widehat{p_0 q_0}$, когда η возрастает от α_0 до β_0. При фиксированной угловой функции $\bar{g}$ полагаем $\alpha_n = \bar{g}^n(\alpha_0)$, $\beta_n = \bar{g}^n(\beta_0)$. — *Прим. ред.*

так как открытые дуги $\overparen{p_{-k}q_{-k}}$ и $\overparen{p_{n-k}q_{n-k}}$ не пересекаются, это означает, что

$$({}_*{}^*{}_*{}^*{}_*)\quad p_{-k} < a'_{-k} < q_{-k} < a''_{n-k} < q_{n-k} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и

$$(\ast\ast\ast)\quad p_{n-k} < a''_{n-k} < q_{n-k} < a'_{-k} < q_{-k} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(см. рис. 1.16).

Так как $\bar{g}$ является C^r-гомеоморфизмом ($r \geqslant 2$), функция $\bar{g}'(\eta)$: $S^1 \to \mathbf{R}$ принадлежит классу C^{r-1} ($r \geqslant 2$) и $\bar{g}'(\eta) > 0$.

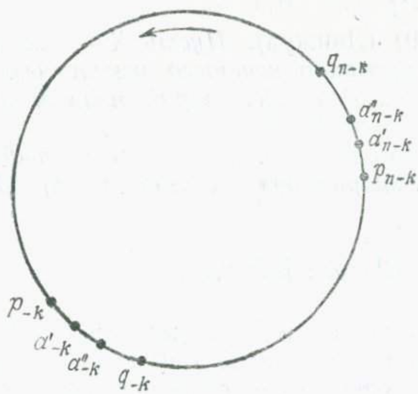


Рис. 1.16.

Следовательно, функция $\log \bar{g}'(\eta)$ принадлежит классу C^1 во всей области определения.

В силу леммы 1.9 для любого целого числа N существует целое $n > N$, для которого выполнено одно из требований (i), (ii) леммы 1.9. Будем считать, что этому условию удовлетворяет n, фигурирующее в $({}_*{}^*{}_*{}^*{}_*)$ и $(\ast\ast\ast)$, и либо дуги $\overparen{a'_{-k}a''_{n-k}}$ ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) попарно не имеют общих точек, либо таким свойством обладают дуги $\overparen{a''_{n-k}a'_{-k}}$. Но тогда, поскольку функция $\log \bar{g}'(\eta)$ имеет ограниченное изменение, величина $\sum\limits_{k=0}^{n} |\log \bar{g}'(\eta''_{-k}) - \log \bar{g}'(\eta'_{n-k})|$ является ограниченной для сколь угодно больших n. Это противоречит $(\ast\ast)$. Следовательно, имеет место либо случай (i), либо случай (ii) из теоремы 1.7. $\square$

В свете приведенного доказательства ясно, что предположение теоремы 1.7 о том, что g является функцией класса C^r,

$r \geqslant 2$, можно ослабить и предполагать всего лишь, что $\overline{g}'$ является функцией с ограниченным изменением.

В начале этого параграфа говорилось о неособом векторном C^r-поле X на торе T, элементы которого имеют ненулевую ξ-компоненту. В этой ситуации определен C^r-гомеоморфизм f: $S_0^1 \to S_1^1$. Если у него есть циклические точки, то среди траекторий поля X есть периодические; если у f есть эргодические точки, то среди траекторий поля X есть эргодические. Следовательно, из теоремы 1.7 получается следующая теорема, являющаяся частным случаем теоремы 1.6 и доказательство которой принадлежит Данжуа.

Теорема 1.10 (Данжуа). *Пусть X — векторное C^r-поле на торе T, каждый вектор которого имеет ненулевую ξ-компоненту. При $r \geqslant 2$ для траекторий поля X справедливо одно из следующих утверждений*:

(i) *среди траекторий поля X есть периодические*;

(ii) *все траектории поля X являются эргодическими.*

§ 6. Векторное C^1-поле Данжуа

Данжуа построил пример, показывающий, что условие $r \geqslant 2$ в теореме 1.7 и теореме 1.10 нельзя ослабить до условия $r \geqslant 1$. Настоящий параграф посвящен описанию этого интересного примера векторного C^1-поля.

Рассмотрим множество последовательно занумерованных отрезков $\{I_m = [0, l_m];\ m \in \mathbf{Z},\ l_m > 0\}$, подчиненное следующим условиям:

(i) $\sum_{m \in \mathbf{Z}} l_m = l$ (l — конечное число),

(ii) $\lim_{m \to \pm\infty} (l_m / l_{m+1}) = 1$.

Эти условия удовлетворяются, например, в случае $l_m = 1/(1+m^2)$.

Пусть далее α — произвольное иррациональное число и числа α_m, $m \in \mathbf{Z}$, определены в соответствии с условиями

$$0 \leqslant \alpha_m < 1, \quad m\alpha - \alpha_m = \text{целое число}$$

(т. е. α_m — дробная часть $m\alpha$).

Для каждого $m \in \mathbf{Z}$ поместим в отрезок $[0, 1]$ вместо точки α_m отрезок I_m (рис. 1.17), получив в результате отрезок длины $1+l$. После этого отождествим его концы (расстояние между которыми равно $1+l$) и получим окружность S^1.

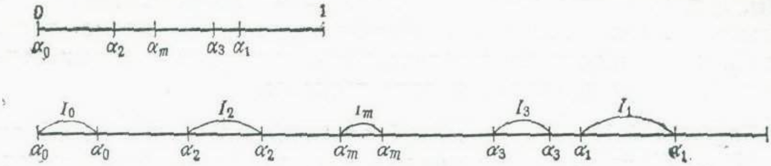


Рис. 1.17.

Таким образом,

$$I_m \subset S^1 \quad (m \in \mathbf{Z}), \qquad S^1 = [0,\ 1] \cup \left(\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} I_m \right).$$

Введем C^1-отображения f_m: $I_m \to I_{m+1}$ $(m \in \mathbf{Z})$, обладающие следующими свойствами:

(i) $\frac{df_m}{dt} > 0$;

(ii) существует такое $\delta_m > 0$, что на промежутках $[0,\ \delta_m[$ и $]l_m - \delta_m,\ l_m]$ производная $\frac{df_m}{dt}$ равна 1;

(iii) $$\min\left(1,\ \frac{l_{m+1}}{l_m}\right) - \left(1 - \frac{l_{m+1}}{l_m}\right)^2 \leqslant \frac{df_m}{dt} \leqslant \max\left(1,\ \frac{l_{m+1}}{l_m}\right) + \left(1 - \frac{l_{m+1}}{l_m}\right)^2.$$

Например, если δ_m достаточно мало, отображение f_m можно задать графиком, как на рис. 1.18, где вблизи точек B и C

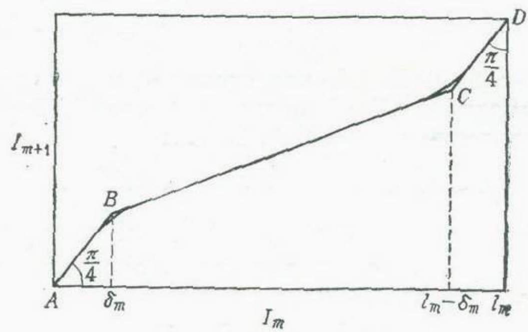


Рис. 1.18.

ломаная $ABCD$ заменена на дуги, касательные к которым существуют и имеют должное направление.

Определим далее отображение f_D: $S^1 \to S^1$, такое, что:

(i) если $x \in I_m$, то $f_D(x) = f_m(x) \in I_{m+1} \subset S^1$;

(ii) если $x \in [0,\ 1]$, то $f_D(x) = x + \alpha -$(целое число) $\in$

$\in (0, 1] \subset S^1$. Легко установить, что f_D является C^1-гомеоморфизмом, сохраняющим ориентацию. Очевидно, кроме того, что f_D не обладает ни циклическими, ни эргодическими точками. Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 1.11. *Сохраняющий ориентацию C^1-гомеоморфизм f_D: $S^1 \to S^1$ не имеет ни циклических, ни эргодических точек.*

С помощью этой теоремы мы построим пример векторного C^1-поля на торе T, для которого не выполняется теорема 1.10.

Если, как обычно, считать, что $e^{2\pi\eta i} \in S^1$ — переменная точка, то отображение f_D из теоремы 1.11 определяет на отрезке $[0, 1]$ C^1-функцию $\bar{f}_D$, для которой

$$f_D(e^{2\pi\eta i}) = e^{2\pi \bar{f}_D(\eta) i}, \quad \eta \in [0, 1].$$

Функция $\bar{f}_D$ является монотонно возрастающей. С помощью C^∞-функции $\Phi(x)$ из леммы 1.5 и переменной t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, определим на $S^1 \times I$ кривую класса C^∞

$$\bar{c}_s\colon [0, 1] \to S^1 \times I \qquad (s \in [0, 1[),$$

положив

$$\bar{c}_s(t) = (\exp\{2\pi(s + \Phi(t-2)(\bar{f}_D(s) - s))i\},\ t).$$

Множество $\{\bar{c}_s;\ 0 \leqslant s < 1\}$ состоит, очевидно, из C^∞-кривых на цилиндре $S^1 \times I$, причем

$$\bar{c}_s(0) = (e^{2\pi si}, 0), \quad \bar{c}_s(1) = (\exp(2\pi \bar{f}_D(s)\, i,\ 1),$$
$$\{\bar{c}_s(t);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\} \cap \{\bar{c}_{s'}(t);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\} = \varnothing \quad (s \neq s')\,^{1)}.$$

Как видно из рис. 1.5, при отождествлении краев $S^1 \times \{0\}$ и $S^1 \times \{1\}$ цилиндра $S^1 \times I$ получается тор T. Введем такую последовательность s_q, $q = 0, 1, 2, \ldots$:

$$0 \leqslant s_q < 1, \qquad (f_D)^q(e^{2\pi si}) = e^{2\pi s_q i},$$

и присоединим на торе T к кривой $\bar{c}_s = \bar{c}_{s_0}$ кривую $\bar{c}_{s_1}$, затем к кривой $\bar{c}_{s_1}$ кривую $\bar{c}_{s_2}$ и так далее, определив в итоге на прямой $]-\infty, \infty[$ отображение

$$c_s\colon\ ]-\infty,\ \infty[\ \to T,$$

фиксирующее на торе T кривую. Поскольку $\bar{c}_s$ принадлежит классу C^∞, кривая c_s на торе T также принадлежит классу C^∞.

В каждой точке $c_s(t)$ кривой c_s определен касательный

---

1) Легко проверить, что $\partial c_s(t)/\partial s > 0$ для всех t.— *Прим. ред.*

вектор $v_{s,t}$, причем, если $c_s(t)=c_{s'}(t')$, то, очевидно, $v_{s,t}=v_{s',t'}$. По этой причине множество

$$\{v_{s,t};\ 0\leqslant s<1,\ -\infty<t<\infty\}$$

является векторным полем на торе T. Обозначая его через X_D, отметим, что поскольку отображение f_D принадлежит классу C^1, поле X_D также принадлежит классу C^1. Так как интегральными кривыми поля X_D служат кривые c_s $(0\leqslant s<1)$, то в силу теоремы 1.11 траектории поля X_D не являются ни периодическими, ни эргодическими. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1.12. *На торе существует неособое векторное C^1-поле X_D, не имеющее ни периодических, ни эргодических траекторий.*

К этому примеру мы вернемся вновь при построении слоения, в котором имеются как собственные, так и исключительные слои (§ 16).

§ 7. Теорема Зигеля

Этот параграф посвящен доказательству теоремы 1.6. В случае векторного поля из теоремы 1.10 все интегральные кривые обязательно пересекают замкнутую кривую — окружность $S_0^1=S_1^1$ тора T, выделенную в § 5. По этой причине изучение топологических свойств траекторий естественно связывается с C^r-гомоморфизмом $f\colon S^1\to S^1$. В общем же случае существование таких замкнутых кривых не является очевидным. Зигель доказал, что и в общем случае для векторного поля существуют замкнутые кривые с таким свойством.

Пусть $X=\{v_p;\ p\in T\}$ — неособое векторное C^r-поле на торе T, $r\geqslant 1$. Простая замкнутая $C^{r'}$-кривая φ, $r'\geqslant 1$, определенная на отрезке $[0, \alpha]$, называется *трансверсальной* (к этому полю), если для всякого t, $0\leqslant t\leqslant\alpha$, векторы $\frac{d\varphi}{dt}(t)$ и $v_{\varphi(t)}\in X$ неколлинеарны, т. е. не существует такого λ, что

$$\frac{d\varphi}{dt}(t)=\lambda v_{\varphi(t)}.$$

Лемма 1.13. *Пусть X — векторное C^r-поле на торе T, $r\geqslant 1$. Тогда существует простая замкнутая трансверсальная к X C^{r+1}-кривая $L(X)$.*

Доказательство. Обозначим ξ-компоненту и η-компоненту вектора $v_p\in X$ через λ_p и μ_p соответственно. Если в каждой точке p тора T фиксировать касательный вектор $\bar{v}_p$ с ξ-компонентой $-\mu_p$ и η-компонентой λ_p, то получится неособое векторное C^r-поле $\bar{X}=\{\bar{v}_p;\ p\in T\}$ на торе T (см. рис. 1.19).

Фиксируем на T точку p_0, а затем интегральную кривую $\bar{\varphi}(t,\ p_0)$ поля $\bar{X}$, для которой p_0 — начальная точка. Если $\bar{\varphi}(t,\ p_0)$ — периодическая кривая, то, будучи определенной полем $\bar{X}$, она является простой, замкнутой и, очевидно, трансверсальной к полю X. Следовательно, в этом случае требуемое установлено. Если же $\bar{\varphi}(t,\ p_0)$ не является периодической,

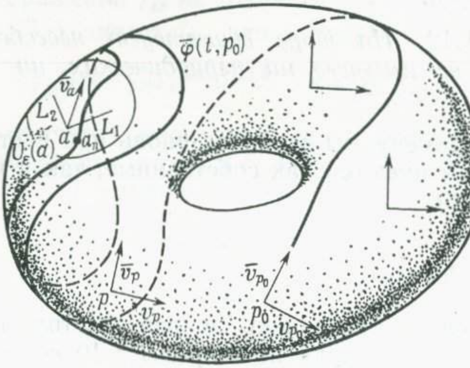


Рис. 1.19.

то искомая простая замкнутая кривая может быть следующим образом составлена из частей кривой $\bar{\varphi}(t,\ p_0)$.

Так как $\bar{\varphi}(t,\ p_0)$ не является замкнутой, множество точек $\{\bar{\varphi}(n,\ p_0);\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ бесконечно. Следовательно, существует предельная точка этого множества (см. комментарии, примечание 1.5). Обозначим ее через a, и пусть $\bar{s}_1,\ \bar{s}_2,\ \bar{s}_3,\ \ldots$ — подпоследовательность натурального ряда 1, 2, 3, ..., для которой $a_n=\bar{\varphi}(\bar{s}_n,\ p_0)$ и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

При достаточно малом $\varepsilon>0$ существует окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки a, обладающая следующими свойствами:

(i) компоненты $(\bar{\lambda}_p,\ \bar{\mu}_p)$ вектора $\bar{v}_p\in\bar{X}$ при $p\in U_\varepsilon(a)$ изменяются в зависимости от точки $p\in U_\varepsilon(a)$ достаточно мало. Точнее[1]), $\operatorname{arctg}(\bar{\mu}_p/\bar{\lambda}_p)$ изменяется менее чем на $\pi/8$;

[1]) Значения arctg в данном случае надо брать не от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а от 0 до π; тогда будет обеспечена непрерывность $\operatorname{arctg}\dfrac{\bar{\mu}_p(x,\ y)}{\bar{\lambda}_p(x,\ y)}$. — *Прим. ред.*

(ii) дуга $\widehat{a_n a_{n+1}}$, являющаяся участком кривой $\bar{\varphi}(t, p_0)$ между a_n и a_{n+1}, не полностью принадлежит $U_\varepsilon(a)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Пусть $(\bar{\lambda}_a, \bar{\mu}_a)$ — компоненты вектора $\bar{v}_a$ поля $\bar{X}$ в точке a. Определим в локальной системе координат окрестности $U_\varepsilon(a)$ прямолинейные отрезки L_1, $L_2 \subset U_\varepsilon(a)$ следующим образом:

$$L_1 = \{(((\bar{\lambda}_a + \bar{\mu}_a)\, t,\ (-\bar{\lambda}_a + \bar{\mu}_a)\, t));\ 0 \leqslant t < \varepsilon'\},$$
$$L_2 = \{(((\bar{\lambda}_a - \bar{\mu}_a)\, t,\ (\bar{\lambda}_a + \bar{\mu}_a)\, t));\ 0 \leqslant t < \varepsilon'\}.$$

Отрезки L_1 и L_2 образуют с вектором $\bar{v}_a$ углы, равные $\pm\pi/4$ (рис. 1.19, рис. 1.20)

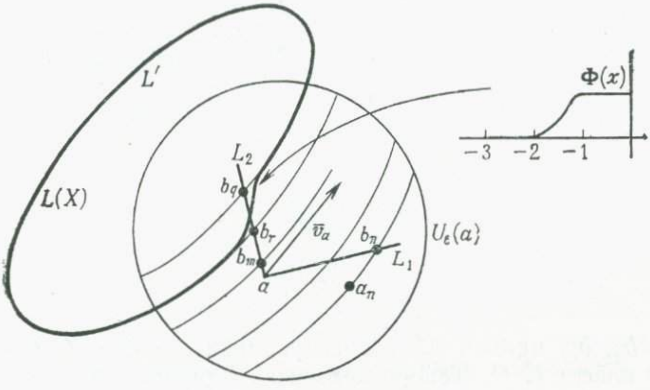


Рис. 1.20

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, при достаточно большом n интегральная кривая $\bar{\varphi}(t, p_0)$ пересекает L_1 или L_2 вблизи некоторой точки a_n. Пусть $b_n = \bar{\varphi}(s_n, p_0)$ — эта точка пересечения (рис. 1.20) и дуга $\widehat{a_n b_n}$ интегральной кривой $\bar{\varphi}(t, p_0)$ принадлежит окрестности $U_\varepsilon(a)$. Выбрав при необходимости подпоследовательность из $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3, \ldots$, будем считать, что каждая точка a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ соответствует точке b_n в указанном выше смысле. Так как $U_\varepsilon(a)$ обладает свойствами (i), (ii), точка b_n определяется в описанной ситуации точкой a_n однозначно, а поскольку последовательность $s_1, s_2, s_3, \ldots$ монотонно возрастает, все точки $b_1, b_2, \ldots$ различны. Очевидно, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = a$.

Поскольку точки $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ расположены на $L_1 \cup L_2$, по крайней мере на одной из этих прямых их бесконечно много. Следовательно, существуют такие m и q, что $q < m$ и

$$b_m \in \overline{ab_q}$$

(рис. 1.20). Часть интегральной кривой $\bar{\varphi}(t, p_0)$, соответствующая $s_q < t \leqslant s_m$, пересекает отрезок $\overline{b_q b_m}$ в некоторой точке[1]) b_r (рис. 1.20); поэтому объединение L' дуги $\widehat{b_q b_r}$ интегральной кривой $\bar{\varphi}(t, p_0)$ и отрезка $\overline{b_r b_q}$ из $L_1 \cup L_2$ является простой замкнутой кривой. Очевидно, что во всех точках,

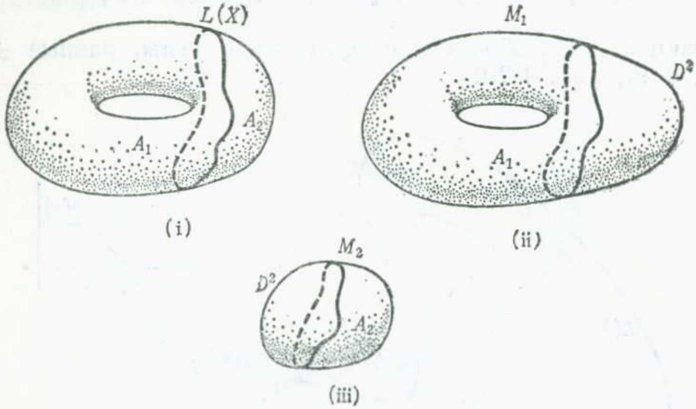


Рис. 1.21.

кроме b_q, b_r, кривая L' трансверсальна к полю X и принадлежит классу C^{r+1}. Теперь немного «подправим» ее с помощью графика C^∞-функции $\Phi(x)$ из леммы 1.5 на участке $-3 \leqslant x \leqslant 0$: $\{(x, \Phi(x));\ -3 \leqslant x \leqslant 0\}$. Отобразим часть $\{(x, \Phi(x));$ $-3 \leqslant x \leqslant -2,\ -1 \leqslant x \leqslant 0\}$ этого графика в дугу $\widehat{b_q b_r}$, а частью $\{(x, \Phi(x));\ -2 \leqslant x \leqslant -1\}$ заменим отрезок $\overline{b_q b_r}$ так, как это показано на рис. 1.20. В результате такого отображения из L' получится новая кривая $L(X)$, являющаяся простой, замкнутой и трансверсальной к полю X. □

Лемма 1.14. *Кривая $L(X)$ из леммы 1.13 не разрезает тор T на две части.*

Доказательство. Предположим, что $L(X)$ разрезает тор T на две части A_1 и A_2 (рис. 1.21(i)). Поскольку $L(X)$ является границей как A_1, так и A_2 и, кроме того, может быть отождествлена с границей двумерного шара D^2, можно построить $M_1 = A_1 \cup D^2$ (рис. 1.21 (ii)). В результате получится

[1]) Не исключается, что $r = m$ (это так, если при $s_q < t < s_m$ пересечений нет).— *Прим. ред.*

так называемая замкнутая поверхность M_1 (комментарии, примечание 1.6). Аналогично с помощью A_2 строится замкнутая поверхность $M_2 = A_2 \cup D^2$ (рис. 1.21(iii))[1]).

Так как тор T — ориентируемая замкнутая поверхность, M_1 и M_2 также являются ориентируемыми. Так как $L(X)$ может быть аппроксимирована ломаной линией, поверхности M_1 и M_2 триангулируемы. Для всякой ориентируемой замкнутой поверхности M определена ее эйлерова характеристика $\chi(M)$ (комментарии, примечание 1.6). Для двумерной сферы S^2 эйлерова характеристика равна 2, для тора T она равна нулю, а для прочих ориентируемых поверхностей является отрицательным четным числом. Поэтому если M_1 и M_2 отличны от сферы S^2, то эйлеровы характеристики $\chi(M_1)$ и $\chi(M_2)$ поверхностей M_1 и M_2 удовлетворяют неравенствам

$$\chi(M_1) \leqslant 0, \qquad \chi(M_2) \leqslant 0.$$

Поскольку для D^2 и S^1 эйлерова характеристика равна соответственно $\chi(D^2) = 1$, $\chi(S^1) = 0$, мы получаем

$$\chi(A_i) = \chi(M_i) - \chi(D^2) + \chi(S^1) \leqslant -1 \qquad (i = 1, 2),$$

а потому

$$\chi(T) = \chi(A_1 \cup A_2) = \chi(A_1) + \chi(A_2) - \chi(S^1) \leqslant -2,$$

что и дает противоречие. Следовательно, не более чем одна из поверхностей M_1, M_2 отлична от сферы. Если сферой S^2 является M_1, то A_1 можно отождествить с D^2, так как A_1 и $\operatorname{Int} D^2$ делят между собой S^2 [2]). (В случае когда сферой S^2 оказывается поверхность M_2, рассуждения проводятся аналогично.)

Так как на A_1 имеется поле $\{v_p;\ v_p \in X,\ p \in A_1\}$, на D^2 оказывается определенным векторное C^r-поле. Будем обозначать его через X_1 [3]). Так как кривая $L(X)$ трансверсальна

---

[1]) M_1 и M_2 снабжаются топологией отождествления. В данном случае ввиду гладкости L их легко снабдить и структурой гладкого многообразия. Это делает более наглядным следующее утверждение автора об ориентируемости M_i. (Если бы в M_i существовал замкнутый путь, обращающий ориентацию, в том смысле, что при обходе вдоль него ориентация касательного пространства (непрерывно продолжаемая вдоль пути) изменилась на противоположную, то его можно было бы «выдуть» из D^2, и получился бы путь, обращающий ориентацию в A_i.) Кроме того, читатель, быть может, знаком с эйлеровой характеристикой именно в гладком случае. Но более существенно, что фактически автор использует ниже гладкость — см. следующие два примечания.— *Прим. ред.*

[2]) Здесь используется, что замыкание дополнения к диффеоморфному образу круга на сфере само диффеоморфно кругу.— *Прим. ред.*

[3]) Точнее: если ψ: $D^2 \longrightarrow A_1$ — диффеоморфизм, то X_1 есть прообраз поля X при этом диффеоморфизме.— *Прим. ред.*

по отношению к полю X, все векторы из X_1, касающиеся границы D^2, имеют либо наружное, либо внутреннее направление (рис. 1.22). Пусть $\hat{v}_p$ — вектор поля X_1, соответствующий точке p из D^2; обозначим через $f(p)$ точку пересечения радиуса в D^2, параллельного $\hat{v}_p$, с границей S^1 шара D^2.

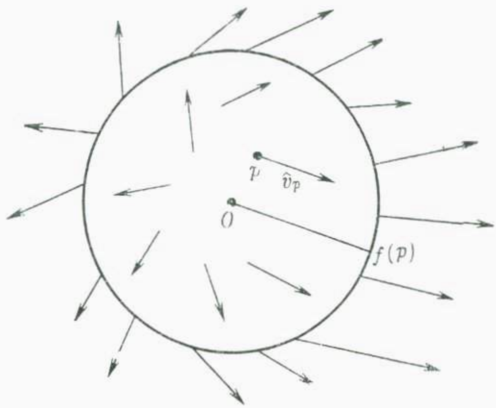


Рис. 1.22.

Тогда будет определено непрерывное отображение f из D^2 на S^1,

$$f\colon D^2 \to S^1.$$

Ограниченное на S^1, это отображение дает

$$f \mid S^1\colon S^1 \to S^1.$$

Так как все векторы из X_1 направлены либо от S^1, либо к S^1, отображение $f \mid S^1$ гомотопно тождественному и его степень $\gamma(f \mid S^1)$ равна 1 (комментарии, примечание 1.6). С другой стороны, отображение $f \mid S^1$ определяется отображением $f\colon D^2 \to S^1$ и поэтому $\gamma(f \mid S^1) = 0$. Противоречие. Следовательно, и M_1, и M_2 должны отличаться от S^2. Таким образом, кривая $L(X)$ не разрезает тор T. □

Лемма 1.15. *Пусть L — простая замкнутая C^0-кривая на торе T, не пересекающаяся с кривой $L(X)$ из леммы 1.13. Тогда L разрезает $T - L(X)$ на две части.*

Доказательство. Разрежем тор T по кривой $L(X)$ и к каждому из двух образовавшихся краев [1]) приклеим круг D^2,

[1]) При разрезании T по $L(X)$ получается поверхность, край которой состоит из двух замкнутых кривых, ибо на торе (и вообще на любой ориен-

отождествляя его край с $L(X)$ (рис. 1.23). Получится замкнутая поверхность, которую мы обозначим через M'. Так как T — ориентируемая поверхность, ориентируемой является и M'; следовательно, учитывая, что $\chi(T)=0$, $\chi(D^2)=1$, получаем

$$\chi(M')=\chi(T)+2\chi(D^2)=2.$$

В силу классификационной теоремы о поверхностях, это означает, что M' является сферой S^2. Так как L — простая замк-

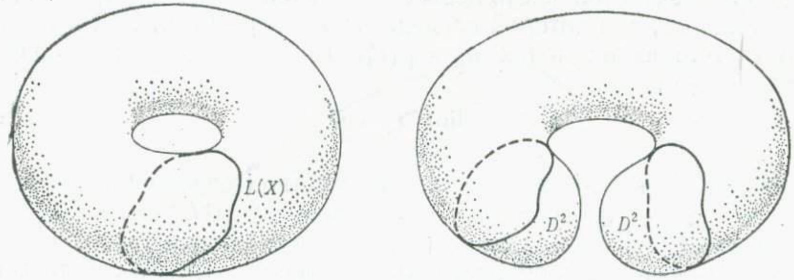


Рис. 1.23.

нутая C^0-кривая на M', в силу знаменитой теоремы Жордана она разрезает M' на две части. Следовательно, $T-L(X)$ разрезается вдоль L на две части. □

Будем в дальнейшем считать, что $X=\{v_p;\ p\in T\}$ — неособое векторное C^r-поле ($r\geqslant 1$) на торе T и что поле X не имеет периодических траекторий.

Пусть $\varphi(t, q)$ — интегральная кривая поля X с начальной точкой $q\in T$. Предположим, что при $t>0$ кривая $\varphi(t, q)$ не пересекает кривую $L(X)$. (Это предположение приведет к противоречию.)

Как указывалось в § 4, ω-предельное множество $L^+(q)$ траектории $C(q)$ поля X, проходящей через точку q, является непустым замкнутым множеством. Так как кривая $L(X)$ трансверсальна к полю X и по предположению $\{\varphi(t, q);\ 0\leqslant t<\infty\}\cap$ $\cap L(X)=\varnothing$, имеет место равенство [1])

$$L^+(q)\cap L(X)=\varnothing.$$

тируемой поверхности) всякая простая замкнутая кривая расположена двусторонне (что особенно очевидно для гладкой кривой, каковой и является $L(X)$). — *Прим. ред.*

[1]) Если бы имелась точка $p\in L^+(q)\cap L(X)$, то сколь угодно близко к ней существовали бы точки $\varphi(t, q)$, а тогда, ввиду трансверсальности $L(X)$ по отношению к X, траектория $\varphi(t, q)$ пересекала бы $L(X)$. — *Прим. ред.*

Справедлива следующая лемма о множестве $L^+(q)$:

Лемма 1.16. *Интегральная кривая $\varphi(t, q')$ поля X, определяемая любой точкой q' множества $L^+(q)$ как начальной точкой, является периодической.*

Доказательство. Предположим, что $\varphi(t, q')$ не является периодической. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 1.13, построим монотонно возрастающую последовательность целых положительных чисел $t'_1, t'_2, \ldots$ $\ldots, t'_n, \ldots$, для которой последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ соответствующих точек $a_n = \varphi(t'_n, q')$ сходится к некоторой точке $c \in T$:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = c.$$

Так как $L^+(q)$ — инвариантное множество (теорема 1.3), обязательно $a_n \in L^+(q)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и поэтому $c \in L^+(q)$. Следовательно, $c \notin L(X)$, и для достаточно малого ε существует ε-окрестность $U_\varepsilon(c)$ точки c, обладающая следующими тремя свойствами (i), (ii), (iii):

(i) $U_\varepsilon(c) \cap L(X) = \varnothing$.

(ii) Если $(\lambda_{p'}, \mu_{p'})$ — компоненты вектора $v_{p'}$ поля X в точке $p' \in U_\varepsilon(c)$, то их изменение достаточно мало.

(iii) В сравнении с $|\lambda_{p'}| + |\mu_{p'}|$ число ε достаточно мало.

Обозначив через v_c вектор поля X в точке c, а через (λ_c, μ_c) его координаты, зададим в системе координат окрестности $U_\varepsilon(c)$ точки c прямолинейный отрезок l,

$$l = \{((-\mu_c t,\ \lambda_c t));\ -\delta < t < \delta\}.$$

Если δ достаточно мало, то $l \subset U_\varepsilon(c)$. Отрезок l проходит через точку c перпендикулярно вектору v_c (рис. 1.24).

При достаточно большом n интегральная кривая $\varphi(t, q')$ пересекает отрезок l вблизи точки a_n. Обозначим точку пересечения через $b_n = \varphi(t_n, q')$ $(|t_n - t'_n| < \varepsilon')$. Пусть та часть кривой $\varphi(t, q')$, которая соответствует $t > t_n$, впервые пересекает l в точке $b' = \varphi(t', q')$. Обозначим кривую $\{\varphi(t, q');$ $t_n \leqslant t \leqslant t'\}$ через L'; очевидно, $L' \cap L(X) = \varnothing$. Следовательно, $L = L' \cup \overline{b_n b'}$ — кривая, являющаяся объединением L' и участка $\overline{b_n b'}$ отрезка l — представляет собой простую замкнутую C^0-кривую, причем

$$L \cap L(X) = \varnothing$$

(рис. 1.24). В силу леммы 1.15, кривая L разрезает $T - L(X)$ на две части. Одну из них, содержащую точку $\varphi(t_n - \varepsilon', q')$, обозначим через A_-; другую, содержащую точку $\varphi(t'+\varepsilon', q')$, обозначим через A_+.

Так как множество $L^+(q)$ инвариантно, обязательно $\varphi(t'+\varepsilon', q')\in L^+(q)$. Следовательно, при некотором $\bar t$ точка $\varphi(\bar t, q)$, являющаяся очень близкой к $\varphi(t'+\varepsilon', q')$, принадлежит A_+.

Пусть $L_1=\{\varphi(t, q);\ \bar t\leqslant t<\infty\}$ — часть кривой $\varphi(t, q)$. Согласно исходному предположению, $L_1\cap L(X)=\varnothing$; кроме того, отрезок $\overline{b_nb'}$ трансверсален к полю X, векторы которого,

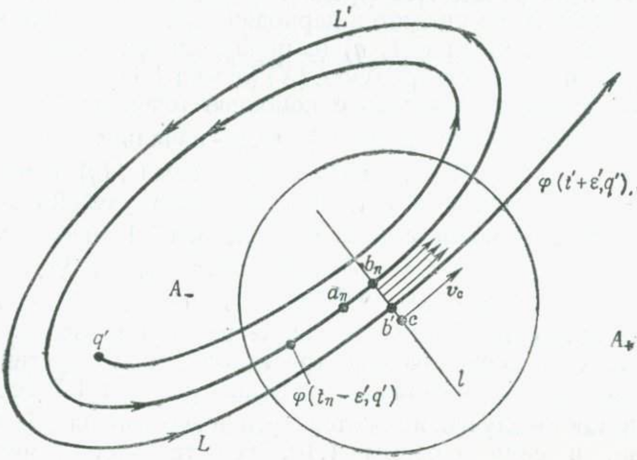


Рис. 1.24.

начинающиеся на $\overline{b_nb'}$, направлены от A_- к A_+ (рис. 1.24), а попав в A_+, кривая L_1 не может выйти оттуда, пересекая L'. Отсюда следует, что $L_1\subset A_+$. Следовательно, если бы $L^+(q)\subset\subset A_+$, то это противоречило бы тому, что точка $\varphi(t_n-\varepsilon', q')\in\in A_-$ принадлежит $L^+(q)$. Поэтому интегральная кривая $\varphi(t, q')$ является периодической. $\square$

В силу леммы 1.16 имеет место противоречие между предположением об отсутствии у поля X периодических траекторий и предположением, что кривая $L(X)$ и часть интегральной кривой $\varphi(t, q)$ поля X, соответствующая $t>0$, не пересекаются. Случай $t<0$ рассматривается аналогично. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1.17. *Пусть X — неособое векторное C^r-поле на торе T, $r\geqslant 1$, и у поля X нет периодических траекторий. Тогда при любой начальной точке $q\in T$ часть соответствующей ин-*

тегральной кривой $\varphi(t, q)$ *поля* X, *отвечающая* $t > 0$, *обязательно пересекает кривую* $L(X)$ *из леммы* 1.13. *Для случаев* $t > 0$ *и* $t < 0$ *рассуждения одинаковы.*

Эта лемма, т. е. утверждение о существовании кривой L с надлежащими свойствами, дает необходимое условие того, чтобы у поля X не было замкнутых траекторий. Как показывает пример из § 4, это условие не является достаточным.

Доказательство теоремы 1.6. Воспользуемся леммой 1.17 и теоремой 1.7. Предположим, что все интегральные кривые поля X не являются периодическими. Так как каждая интегральная кривая $\varphi(t, q)$ (с произвольной начальной точкой $q \in T$) пересекает кривую $L(X)$ (лемма 1.17), то траектории поля X можно исследовать с помощью точек на $L(X)$, через которые они проходят. Если $q \in L(X)$ — начальная точка интегральной кривой $\varphi(t, q)$, то обозначим через $\bar{f}(q)$ точку пересечения с $L(X)$ части этой кривой, соответствующей $t > 0$, при минимальном возможном t. В силу леммы 1.17 точка $\bar{f}(q)$ обязательно существует. Если отождествить $L(X)$ с S^1, то $\bar{f}$ окажется C^r-гомеоморфизмом [1]) $\bar{f}: S^1 \to S^1$ $(r \geqslant 2)$. Если бы у $\bar{f}$ были циклические точки, то из теоремы 1.10 вытекало бы, что у X есть периодические траектории, а это противоречит исходному предположению. В силу же теоремы 1.7 все точки из S^1 в таком случае являются эргодическими для $\bar{f}$. Следовательно, в силу теоремы 1.10, все траектории являются эргодическими [1]. □

Рассмотренные в гл. 1 неособые динамические системы на торе существенно используются в гл. 3, § 14, при построении динамической системы Швейцера на трехмерной сфере и далее, в гл. 4, при построении объекта, называемого слоением; здесь материал первой главы доставляет наглядные примеры и, давая пищу интуиции, облегчает понимание.

---

[1]) Здесь уже нельзя воспользоваться столь же кратким рассуждением, как в § 5 (ведь $\bar{f}(q) = \varphi(\bar{t}(q), q)$, где $\bar{t}(q)$ — время возвращения, так что нам нужно было бы знать, что $\bar{t}(q)$ — класса C^r). Впрочем, гладкость функции последования доказывается во многих книгах по дифференциальным уравнениям.— *Прим. ред.*

Глава 2

C^r-МНОГООБРАЗИЯ И КАСАТЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 8. Топологические пространства

Готовясь дать определение многообразия, мы введем основные понятия, связанные с топологическим пространством.

Говорят, что на множестве X определена *топология*, если в нем выделено семейство подмножеств $\mathfrak{S}=\{U_\lambda;\ U_\lambda \subset X,\ \lambda \in \Gamma\}$, удовлетворяющее следующим трем условиям:

(O_I) $X \in \mathfrak{S}$, $\varnothing \in \mathfrak{S}$ (символ $\varnothing$ обозначает пустое множество);

(O_{II}) *если* $\{U_\lambda;\ \lambda \in \Gamma'\}$ — *произвольное подсемейство в* $\mathfrak{S}$, *то*

$$\bigcup_{\lambda \in \Gamma'} U_\lambda \in \mathfrak{S};$$

(O_{III}) *если* $U_\lambda,\ U_\mu \in \mathfrak{S}$, *то*

$$U_\lambda \cap U_\mu \in \mathfrak{S}.$$

В этом случае говорят также, что $(X, \mathfrak{S})$, или просто X, является *топологическим пространством*. Семейство $\mathfrak{S}$, определяющее топологию, называется *системой открытых множеств*, а элементы из $\mathfrak{S}$ называются *открытыми множествами* пространства X.

Элементы топологического пространства X называются его *точками*. Открытое множество, содержащее точку x топологического пространства X, называется ее *окрестностью*. Подмножество F в X называется *замкнутым*, если в $\mathfrak{S}$ существует элемент U, такой, что $F=X-U$.

Пусть $\mathfrak{S}'$ — система открытых множеств, являющаяся некоторым подмножеством семейства $\mathfrak{S}$. Если любое открытое множество $U \in \mathfrak{S}$ является объединением открытых множеств из $\mathfrak{S}'$, т. е.

$$U=\bigcup_{\mu} U_\mu \qquad (U_\mu \in \mathfrak{S}'),$$

то $\mathfrak{S}'$ называется *базой* топологии $\mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{S}'$ является счетным множеством, то оно называется *счетной базой*, а $(X, \mathfrak{S})$ — *топологическим пространством со счетной базой*.

Пусть $(X, \mathfrak{S})$ — топологическое пространство и Y — подмножество в X. Положим

$$\mathfrak{S}_Y=\{Y \cap U_\lambda;\ U_\lambda \in \mathfrak{S}\};$$

тогда $\mathfrak{G}_Y$ будет для Y системой открытых множеств, удовлетворяющей всем трем перечисленным условиям. В этом случае $(Y, \mathfrak{G}_Y)$—топологическое пространство. Его топологию называют *относительной*. Само $(Y, \mathfrak{G}_Y)$ называется *подпространством* пространства $(X, \mathfrak{G})$.

Топологическое пространство X называется *связным*, если в нем не существует двух непустых открытых подмножеств U_1, U_2, таких, что $U_1 \cup U_2 = X$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Подпространство Y топологического пространства X называется *связным*, если оно связно в своей относительной топологии. Легко доказать, что если Y_1, Y_2—связные топологические подпространства в X и $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$, то $Y_1 \cup Y_2$ связно. Точно так же при произвольной фиксированной точке p топологического пространства X оказывается связным объединение $C_p = \bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma} Y_\sigma$ всех связных подпространств Y_σ $(\sigma \in \Sigma)$, содержащих точку p. Это объединение C_p называется *связной компонентой* точки p в пространстве X. Для любых точек $p, q \in X$ либо $C_p = C_q$, либо $C_p \cap C_q = \varnothing$. Поэтому X представляется в виде объединения непересекающихся связных компонент своих точек.

Пусть $(X, \mathfrak{G})$ и $(X', \mathfrak{G}')$—топологические пространства. Существует единственное семейство $\tilde{\mathfrak{G}}$ подмножеств произведения $X \times X'$, удовлетворяющее следующим трем условиям:

(i) *$\tilde{\mathfrak{G}}$ является системой открытых множеств в* $X \times X'$;

(ii) *если* $U_\lambda \in \mathfrak{G}$ *и* $U'_{\lambda'} \in \mathfrak{G}'$, *то* $U_\lambda \times U'_{\lambda'} \in \tilde{\mathfrak{G}}$;

(iii) *семейство $\tilde{\mathfrak{G}}$ является минимальным среди удовлетворяющих условиям* (i) *и* (ii).

Пространство $(X \times X', \tilde{\mathfrak{G}})$ называется *произведением* пространств $(X, \mathfrak{G})$ и $(X', \mathfrak{G}')$ и обозначается просто через $X \times X'$.

Если в топологическом пространстве $(X, \mathfrak{G})$ семейство $\mathfrak{G}$ содержит все подмножества из X, то это пространство называется *дискретным*.

Если для любых двух различных точек p и q пространства X существуют такие $U, U' \in \mathfrak{G}$, что

$$p \in U, \quad q \in U', \quad U \cap U' = \varnothing,$$

то это пространство X называется *хаусдорфовым*. В хаусдорфовом пространстве каждая точка является замкнутым множеством.

Пусть для любых двух элементов x и y некоторого множества A определено вещественное число $\rho(x, y)$ так, что выполнены *аксиомы метрики*:

(i) $\rho(x, y) \geqslant 0$ *и* $x = y$ *тогда и только тогда, когда* $\rho(x, y) = 0$;

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(iii) *для любых* $x, y, z \in A$

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Тогда A называется *метрическим пространством*, а функция ρ — его *метрикой*. Если B — подмножество метрического пространства A, то метрику ρ можно рассматривать и для $x, y \in B$, благодаря чему B само оказывается метрическим пространством.

Если на евклидовом n-мерном пространстве $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ ($\mathbf{R}$ обозначает множество всех вещественных чисел) определить функцию ρ равенством

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, то она окажется метрикой и, тем самым, мы получим метрическое пространство. Следовательно, все подмножества в $\mathbf{R}^n$ являются метрическими пространствами.

Если A — метрическое пространство, то для произвольных $x \in A$ и $\varepsilon > 0$ определим *ε-окрестность* $U_\varepsilon(x)$ точки x как множество

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in A;\ \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Если для каждой точки x некоторого подмножества метрического пространства A существует окрестность $U_\varepsilon(x) \subset U$, то U называется *открытым подмножеством* в метрике ρ. Легко проверить, что совокупность (семейство) $\mathfrak{G}_\rho$ всех открытых в метрике ρ подмножеств удовлетворяет условиям $(\mathrm{O_I})$, $(\mathrm{O_{II}})$, $(\mathrm{O_{III}})$. Поэтому $\mathfrak{G}_\rho$ является топологией на A. Говорят, что топологическое пространство $(A, \mathfrak{G}_\rho)$ *определено метрикой* ρ. Оно является хаусдорфовым пространством.

Таким образом, в свете сказанного выше $\mathbf{R}^n$ и его подмножества являются хаусдорфовыми пространствами со счетной базой.

Пусть $(X, \mathfrak{G})$ — топологическое пространство. Для каждого подмножества A из X наименьшее замкнутое множество, содержащее A, называется его *замыканием* и обозначается через $\overline{A}$. В этой же ситуации наибольшее открытое подмножество множества A называется его *открытой частью* и обозначается через $\operatorname{Int} A$. Множество $\overline{A} - \operatorname{Int} A$ называется *границей* множества A, а точки из $\overline{A} - \operatorname{Int} A$ называются *граничными* для A.

Если $\bar{B}=X$ для некоторого подмножества $B\subseteq X$, то B называется *плотным* в X.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность точек из X. Пусть в X существует точка a, обладающая следующим свойством: для любой ее окрестности U существует натуральное число $n(U)$, такое, что при $m>n(U)$ обязательно $p_m\in U$. В этом случае говорят, что последовательность $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ ..., *сходится* к a и пишут

$$\lim_{n\to\infty} p_n=a.$$

Точку a тогда называют *пределом* этой последовательности.

Когда X — метрическое пространство, условие $\lim\limits_{n\to\infty} p_n=a$ эквивалентно условию $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(p_n, a)=0$.

Семейство

$$\mathfrak{U}=\{U_\sigma;\ U_\sigma\in\mathfrak{G},\ \sigma\in\Sigma\}$$

открытых множеств топологического пространства $(X, \mathfrak{G})$ называется *открытым покрытием* пространства X, если $\bigcup\limits_\sigma U_\sigma=X$.

Топологическое пространство X называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия $\mathfrak{U}$ можно выбрать подсемейство, состоящее из конечного числа элементов $U_{\sigma_1}, U_{\sigma_2}, \ldots, U_{\sigma_n}$ и являющееся открытым покрытием пространства X. В пространстве $\mathbf{R}^n$ каждое ограниченное замкнутое множество компактно. Если топологическое пространство $(X, \mathfrak{G})$ компактно, то для любого его замкнутого подмножества Y пространство $(Y, \mathfrak{G}_Y)$ также компактно.

Пусть $\mathcal{F}=\{F_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ — семейство замкнутых множеств F_λ компактного топологического пространства X. Если для любого конечного набора $F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2}, \ldots, F_{\lambda_n}$ элементов из $\mathcal{F}$ пересечение $F_{\lambda_1}\cap F_{\lambda_2}\cap\ldots\cap F_{\lambda_n}$ непусто (такое свойство семейства $\mathcal{F}$ называется *свойством конечного пересечения*), то обязательно

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\neq\varnothing.$$

Действительно, ведь $U_\lambda=X-F_\lambda$ — открытое множество, и если $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda=\varnothing$, то $\{U_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ — открытое покрытие данного компактного пространства X. Из этого покрытия можно выбрать конечный набор элементов U_{λ_i} $(i=1, 2, \ldots, n)$, для которого $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}=X$, а это означает, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}=\varnothing$.

Теорема 2.1. *Пусть A — метрическое пространство и топологическое пространство $(A, \mathfrak{G}_\rho)$ компактно.* (В этом случае говорят короче, что *метрическое пространство A компактно.*) *Тогда в любой последовательности $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ точек из A существует сходящаяся подпоследовательность.*

Доказательство. Если бы сходящейся подпоследовательности не существовало, то для любой точки x из $A - \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ можно было бы указать ε-окрестность $U_\varepsilon(x)$, такую, что $U_\varepsilon(x) \cap \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\} = \varnothing$. Следовательно, множество $A - \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ оказалось бы открытым. Далее, в этом случае для каждой точки p_i существовала бы окрестность $U_{\varepsilon_i}(p_i)$, такая, что $U_{\varepsilon_i}(p_i) \cap \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\} = \{p_i\}$. Но тогда множество $A - \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ вместе с множествами $U_{\varepsilon_i}(p_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ составляло бы открытое покрытие для A, в котором не содержится конечного открытого покрытия для A. Это противоречит предположению о компактности A. □

Пусть $(X, \mathfrak{G})$, $(X', \mathfrak{G}')$ — топологические пространства. Отображение

$$f: X \to X',$$

при котором для любого $U' \in \mathfrak{G}'$ прообраз $f^{-1}(U')$ лежит в $\mathfrak{G}$, называется *непрерывным*. Если $f: X \to X'$ является взаимно однозначным отображением и как f, так и f^{-1} непрерывны, то f называется *гомеоморфизмом*. Если же существует гомеоморфизм $f: X \to X'$, то X и X' называются *гомеоморфными*.

Если X, X', X'' — топологические пространства и $f: X \to X'$, $f': X' \to X''$ — непрерывные отображения, то композиция $f' \circ f: X \to X''$ также является непрерывным отображением.

Если f — непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в топологическое пространство X, то образ $f([0, 1])$ этого отображения называется *дугой*; в этом случае говорят, что точки $f(0) = p$ и $f(1) = q$ *связываются дугой*. Если для любых двух точек p и q пространства X существует связывающая их дуга, то это пространство называется *линейно связным*. Легко показать, что линейно связное пространство является связным. Обратное, однако, вообще говоря, неверно.

Подпространство C'_p топологического пространства X, состоящее из всех точек, линейно связанных с фиксированной точкой p из X, является, очевидно, линейно связным. Оно называется *компонентой линейной связности* пространства X, содержащей точку p. Очевидно, компоненты линейной связности попарно не пересекаются, и пространство X представляет собой объединение таких компонент.

§ 9. C^r-многообразия

Подмножество $(n+1)$-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^{n+1}$

$$\{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1});\ x_i \in \mathbf{R} \quad (i=1,\ 2,\ n+1),\\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2=1\}$$

будем обозначать через S^n и называть *n-мерной сферой*. Далее, в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ подмножество

$$\{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n);\ x_i \in \mathbf{R} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant 1\}$$

будем обозначать через D^n и называть *n-мерным шаром*. Согласно этим определениям, в частности, S^{n-1} является подмножеством в D^n. Множество $D^n - S^{n-1}$ называется *открытой частью* шара D^n и обозначается через $\operatorname{Int} D^n$.

При использовании стандартных координат в $\mathbf{R}^{n+1}$ точки из S^n описываются системами $n+1$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, причем эти числа подчинены соотношению $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2=1$. Выделим в S^n подмножества

$$U_i^+ = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1});\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2=1,\ x_i>0\},$$
$$U_i^- = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1});\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2=1,\ x_i<0\},$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1.$$

Если точка $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1})$ пробегает множество U_i^+, вещественные числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_{n+1}$ изменяются уже независимо друг от друга и их количество равно n. Если точке $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1})$ из U_i^+ поставить в соответствие точку $(x_1, x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_{n+1})$ из $\operatorname{Int} D^n$, то окажется определенным отображение

$$\varphi_i^+ : U_i^+ \to \operatorname{Int} D^n,$$

являющееся гомеоморфизмом. (См. рис. 2.1, где изображен случай $i=n+1$.)

Точка из $\operatorname{Int} D^n$ задается n независимыми числами $x_1,\ x_2, \ldots$ $\ldots,\ x_n$, которые можно рассматривать как координаты в множестве $\operatorname{Int} D^n$. На сфере же S^n не удается ввести координаты, которые годились бы сразу для всей сферы. Однако с помощью отображения φ_i^+ (или $(\varphi_i^+)^{-1}$) подмножество U_i^+ сферы S^n описывается с помощью n независимых вещественных чисел — «координат». Аналогично, отображение $\varphi_i^- : U_i^- \to \operatorname{Int} D^n$ определяет «координаты» на U_i^-.

Одна и та же точка из S^n в описанной ситуации выражается различными «координатами», соотношение между которыми мы сейчас и рассмотрим. Пусть $U_1^+ \cap U_2^+ \ni (x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n+1})$, так что $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. Тогда

$$\varphi_1^+(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}),$$
$$\varphi_2^+(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}).$$

Но в этом случае композиция

$$\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1}\colon \varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^+) \to \varphi_2^+(U_1^+ \cap U_2^+),$$

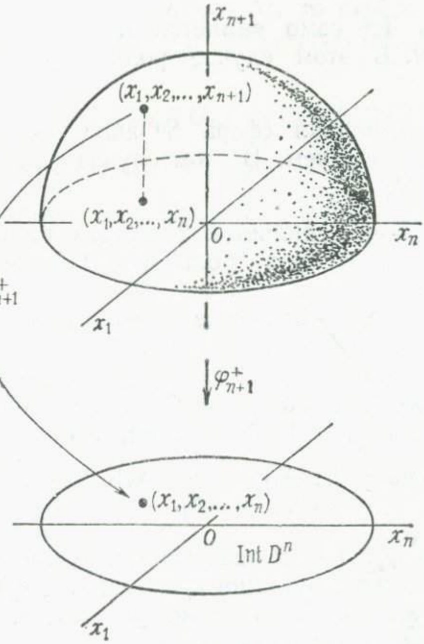


Рис. 2.1.

которая на $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \operatorname{Int} D^n$ выражается равенством

$$\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \left(\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2},\ y_2, \ldots, y_n\right),$$

является гомеоморфизмом.

Так как S^n является объединением $2n+2$ множеств U_i^+, U_i^- $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, локально на S^n всюду можно ввести координаты φ_i^+, φ_i^-, при этом $\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1}$ будет «сколь угодно много раз дифференцируемой функцией».

Когда на топологическом пространстве всюду локально вводятся «координаты», получается многообразие.

C^r-многообразие для $r=0, 1, 2, \ldots, \infty$, или многообразие класса C^r, определяется следующим образом.

Пусть M — хаусдорфово пространство со счетной базой. (Наличие в пространстве M счетной базы гарантирует существование метрики, которой в общем случае может и не быть.) Пусть, далее, p — произвольная точка из M. Если у точки p существует окрестность U, гомеоморфная открытому подмножеству n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, то M называется n-мерным *топологическим многообразием*.

Пример 1. $\mathbf{R}^n$ само является n-мерным топологическим многообразием. В этом случае роль окрестности U играет все $\mathbf{R}^n$.

Пример 2. n-мерная сфера S^n является n-мерным топологическим многообразием. В этом случае роль окрестностей U играют U_i^+ и U_i^-.

Пример 3. Тор T является 2-мерным топологическим многообразием. В этом случае роль окрестностей U играют $U_\varepsilon(p)$ из § 3.

Пусть теперь A — открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$, B — произвольное подмножество в $\mathbf{R}^m$ и $\varphi\colon A \to B$ — отображение. Тогда образом точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ будет некоторая точка $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$, координаты которой записываются в виде $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, т. е.

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots \\ \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Таким образом, $\varphi_i\colon A \to \mathbf{R}$ оказывается функцией вещественных переменных. Если все функции $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ принадлежат классу C^r в точке p из A, т. е. имеют непрерывные частные производные по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ всех порядков до r-го включительно в точке p, то говорят, что φ *принадлежит классу C^r* или является *C^r-отображением в точке p*. Если φ является C^r-отображением в каждой точке из A, то говорят, что φ есть *C^r-отображение*. Отображение φ считается принадлежащим классу C^0, если оно определено на A и является непрерывным.

Очевидно, что если $\varphi\colon A \to B$ и $\psi\colon B \to C$ — отображения класса C^r (B — открытое множество, C — произвольное множество в $\mathbf{R}^q$), то композиция $\psi \circ \varphi\colon A \to C$ определена и является C^r-отображением.

Пусть M — некоторое n-мерное топологическое многообразие. Предположим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ (где Λ — некоторое фиксированное множество индексов) имеется открытое множество U_λ в M и гомеоморфизм $\varphi_\lambda\colon U_\lambda \to V_\lambda$, где V_λ — открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Обозначим множество пар $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ через $\mathscr{S}$. Пусть r принимает одно из значений $0, 1, 2, \ldots, \infty$. Множество $\mathscr{S}$ называется *системой локальных C^r-координат* на многообразии M, если оно удовлетворяет следующим условиям:

($\mathrm{M_I}$) $\{U_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ является открытым покрытием пространства M, т. е. $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M$.

($\mathrm{M_{II}}$) Если $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ $(\lambda, \mu \in \Lambda)$, то отображения

$$\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}\colon \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

и

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}\colon \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$$

являются C^r-отображениями (см. рис. 2.2).

Если на n-мерном топологическом многообразии M задана система локальных C^r-координат $\mathscr{S}$, то оно называется

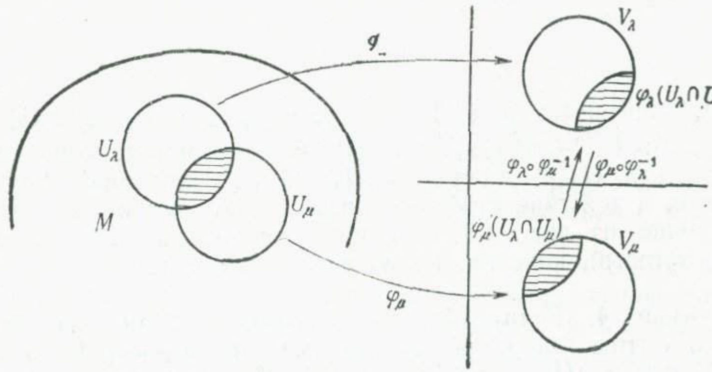


Рис. 2.2.

n-мерным C^r-многообразием или *n-мерным дифференцируемым C^r-многообразием*. В этом случае его обозначают символом $(M, \mathscr{S})$. То обстоятельство, что M является именно n-мерным многообразием, выражают индексом ^{n}, т. е. пишут $(M^n, \mathscr{S})$ или просто M^n. Элементы $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ множества $\mathscr{S}$ называют *локальными координатами*.

Из определения видно, что если M является C^r-многообразием и $0 \leqslant r' \leqslant r$, то M является и $C^{r'}$-многообразием. Лишь C^0-многообразие является просто топологическим многообразием и не относится ни к какому другому классу.

Если в приведенном выше примере 1 топологического многообразия фиксировать тождественное отображение $\mathrm{id}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$

и взять в качестве $\mathscr{S}$ просто $(\mathbf{R}^n, \mathrm{id})$, то условие (M_{I}) будет выполнено автоматически, а условие (M_{II}) тоже будет выполняться, ибо отображение $\mathrm{id}\circ(\mathrm{id}^{-1}) = \mathrm{id}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ принадлежит классу C^∞. Поэтому $\mathbf{R}^n$ является C^∞-многообразием.

Сфера S^n из приведенного в начале этого параграфа примера 2 является C^∞-многообразием и $\mathscr{S} = \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm);\ i = 1, 2, \ldots, n+1\}$.

Тор T из примера 3 также является C^∞-многообразием. В этом случае множество $\mathscr{S}$ составляется из окрестностей

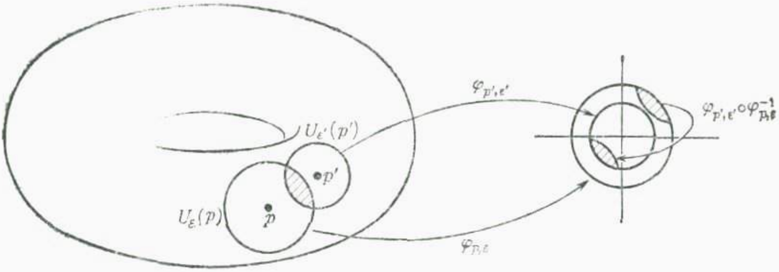


Рис. 2.3.

$U_\varepsilon(p)$, описанных в § 3, и гомеоморфизмов $\varphi_{p,\varepsilon}\colon U_\varepsilon(p) \to \{(\xi, \eta);\ \sqrt{\xi^2+\eta^2} < \varepsilon\}$, где $(P;\ \xi,\ \eta)$ — система координат окрестности $U_\varepsilon(p)$. Для $\mathscr{S} = (U_\varepsilon(p),\ \varphi_{p,\varepsilon})$ условие (M_{I}) выполнено, а действие отображения $\varphi_{p',\varepsilon'}\circ\varphi^{-1}_{p,\varepsilon}$ в данном случае, как видно из рис. 2.3, сводится к параллельному переносу в $\mathbf{R}^2$, который, конечно, принадлежит классу C^∞.

Пример 4. Если $(M^n, \mathscr{S})$ — некоторое C^r-многообразие, W — открытое подмножество в M^n и $\mathscr{S}_W = \{((U_\lambda \cap W),\ \varphi_\lambda|(U_\lambda \cap W));\ (U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}\}$, то $(W, \mathscr{S}_W)$ является n-мерным C^r-многообразием. (Здесь через $\varphi_\lambda|(U_\lambda \cap W)$ обозначено отображение φ_λ, ограниченное на $U_\lambda \cap W$.)

Пусть $(M, \mathscr{S})$ — некоторое n-мерное C^r-многообразие. Пусть, далее, пара (U, φ) состоит из открытого множества U пространства M и гомеоморфизма $\varphi\colon U \to V$, где V — открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Если при $U \cap U_\lambda \neq \varnothing$, где $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$, отображения

$$\varphi_\lambda\circ\varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap U_\lambda) \to \varphi_\lambda(U \cap U_\lambda);$$
$$\varphi\circ\varphi_\lambda^{-1}\colon \varphi_\lambda(U \cap U_\lambda) \to \varphi(U \cap U_\lambda)$$

принадлежат классу C^r, то пара (U, φ) называется *согласованной с* $\mathscr{S}$.

Если в этом случае добавить (U, φ) к $\mathscr{S}$, то полученное множество $\mathscr{S}'$ будет системой локальных C^r-координат на M и $(M, \mathscr{S}')$ будет n-мерным C^r-многообразием.

Лемма 2.2. *Пусть (U, φ) и (U', φ') согласованы с системой $\mathscr{S}$. Если в этом случае $U \cap U' \neq \varnothing$, то отображение*

$$\varphi' \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$$

принадлежит классу C^r.

Доказательство. Если $x \in U \cap U'$ — произвольная точка и $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$, $x \in U_\lambda$, то по условию отображения

$$\varphi_\lambda \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap U' \cap U_\lambda) \to \varphi_\lambda(U \cap U' \cap U_\lambda)$$

и

$$\varphi' \circ \varphi_\lambda^{-1}\colon \varphi_\lambda(U \cap U' \cap U_\lambda) \to \varphi'(U \cap U' \cap U_\lambda)$$

принадлежат классу C^r. Следовательно,

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} = (\varphi' \circ \varphi_\lambda^{-1}) \circ (\varphi_\lambda \circ \varphi^{-1})\colon \varphi(U \cap U' \cap U_\lambda) \to \varphi'(U \cap U' \cap U_\lambda)$$

является C^r-отображением в точке $\varphi(x)$. Но тогда $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ является C^r-отображением и на $\varphi(U \cap U')$. $\square$

Выбор системы локальных координат на C^r-многообразии осуществляется достаточно свободно в соответствии с конкретными целями. Отметим, что если $(M, \mathscr{S})$ — многообразие, то множество $\mathscr{S}_1$ всех пар (U, φ), согласованных с $\mathscr{S}$, является в силу леммы 2.2 системой локальных C^r-координат. Очевидно, что так как каждый элемент из $\mathscr{S}$ согласован с $\mathscr{S}$, имеет место включение $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}_1$.

Система локальных C^r-координат $\mathscr{S}_1$ многообразия M, которая получается добавлением к $\mathscr{S}$ всевозможных подмножеств многообразия M, снабженных C^r-координатами, является однозначно определенной и максимальной. Заменяя при необходимости систему локальных C^r-координат C^r-многообразия M соответствующей системой $\mathscr{S}_1$, мы всегда можем считать, что на M задана максимальная система локальных C^r-координат, удовлетворяющая условиям $(\mathrm{M_I})$, $(\mathrm{M_{II}})$, а также следующему условию $(\mathrm{M_{III}})$:

$(\mathrm{M_{III}})$ *$\mathscr{S}$ является максимальной системой в смысле отношения включения.*

Когда на M задана система локальных C^r-координат $\mathscr{S}$, говорят, что на нем задана *C^r-дифференцируемая структура*. В большинстве случаев подразумевается, что среди многих систем локальных координат фиксирована максимальная в смысле условия $(\mathrm{M_{III}})$, которое не имеет геометрической интерпретации.

Пусть $(M_1^n, \mathscr{S}_1)$ и $(M_2^m, \mathscr{S}_2)$ — некоторые C^r-многообразия. Пусть, далее, произвольно фиксированы $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}_1$, $\varphi_\lambda\colon U_\lambda \to V_\lambda$, $(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'}) \in \mathscr{S}_2$, $\varphi'_{\lambda'}\colon U'_{\lambda'} \to V'_{\lambda'}$ $(V_\lambda \subset \mathbf{R}^n,\ V'_{\lambda'} \subset \mathbf{R}^m)$ и определен гомеоморфизм

$$\varphi_{\lambda,\lambda'}\colon U_\lambda \times U'_{\lambda'} \to V_\lambda \times V'_{\lambda'},$$

при котором $\varphi_{\lambda,\lambda'}(x, y) = (\varphi_\lambda(x), \varphi'_{\lambda'}(y))$ $(x \in U_\lambda,\ y \in U'_{\lambda'})$. В этой ситуации $V_\lambda \times V'_{\lambda'}$ является открытым множеством в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{n+m}$ и $\mathscr{S}_3 = \{(U_\lambda \times U'_{\lambda'}, \varphi_{\lambda,\lambda'});\ (U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}_1,$

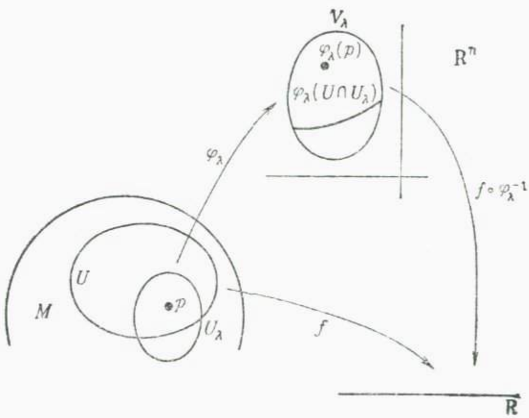


Рис. 2.4.

$(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'}) \in \mathscr{S}_2\}$ является системой локальных C^r-координат на произведении пространств $M_1^n \times M_2^m$, удовлетворяющей условиям $(\mathrm{M_I})$, $(\mathrm{M_{II}})$. Если теперь $\mathscr{S}_4$ — максимальная система локальных C^r-координат, содержащая $\mathscr{S}_3$, то $(M_1^n \times M_2^m, \mathscr{S}_4)$ является $(n+m)$-мерным C^r-многообразием. Оно называется *произведением* многообразий $(M_1^n, \mathscr{S}_1)$ и $(M_2^m, \mathscr{S}_2)$. Таким образом, тор T — это произведение двух окружностей как многообразий.

Пусть $(M, \mathscr{S})$ — некоторое C^r-многообразие и $f\colon U \to \mathbf{R}$ — вещественнозначная функция на открытом множестве U из M. Пусть, далее, p — точка из U, $p \in U_\lambda$ при $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$ и отображение

$$f \circ \varphi_\lambda^{-1}\colon \varphi_\lambda(U \cap U_\lambda) \to \mathbf{R}$$

(см. рис. 2.4) принадлежит классу C^r в точке $\varphi_\lambda(p)$. Тогда f называется *C^r-функцией в точке p*. Это определение не зависит от выбора $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ из $\mathscr{S}$. Действительно, пусть $p \in U_\mu$, причем $(U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathscr{S}$. Рассмотрим следующее ограничение отображения $f\circ\varphi_\mu^{-1}\colon \varphi_\mu(U\cap U_\mu)\to\mathbf{R}$ на некоторую окрестность точки $\varphi_\mu(p)$:

$$(f\circ\varphi_\mu^{-1})\,|\,\varphi_\mu(U\cap U_\lambda\cap U_\mu)=(f\circ\varphi_\lambda^{-1})\circ((\varphi_\lambda\circ\varphi_\mu^{-1})\,|\,\varphi_\mu(U\cap U_\lambda\cap U_\mu)).$$

Так как $\varphi_\lambda\circ\varphi_\mu^{-1}$ принадлежит классу C^r в точке $\varphi_\mu(p)$, последнее равенство и означает, что $f\circ\varphi_\mu^{-1}$ принадлежит классу C^r в точке $\varphi_\mu(p)$.

Если f является C^r-функцией в каждой точке множества U, то она называется *C^r-функцией на множестве U*.

Рассмотрим далее отображение $f\colon U\to\mathbf{R}^m$. Если $p\in U$, то $f(p)$ выражается с помощью m вещественнозначных функций $f_i\colon U\to\mathbf{R}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, а именно

$$f(p)=(f_1(p),\ f_2(p),\ \ldots,\ f_m(p)).$$

Если все f_i являются C^r-функциями в точке $p\in U$, то f называется *C^r-отображением в точке p*. Если f является C^r-отображением в каждой точке множества U, то оно называется *C^r-отображением на множестве U*. Это определение широко используется при изучении отображений C^r-многообразий.

Пусть $(M_1^n, \mathscr{S}_1)$, $(M_2^m, \mathscr{S}_2)$ — два C^r-многообразия и

$$f\colon M_1^n\to M_2^m$$

— непрерывное отображение. Пусть далее p — произвольная точка из M_1^n, $f(p)\in U'_{\lambda'}$, где $(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'})\in\mathscr{S}_2$, и отображение

$$\varphi'_{\lambda'}\circ f\colon f^{-1}(U'_{\lambda'})\to\mathbf{R}^m$$

является C^r-отображением в точке p в описанном выше смысле. Тогда f называется *C^r-отображением в точке p*. Это определение не зависит от выбора $(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'})$. Действительно, если $f(p)\in U'_{\mu'}$, где $(U'_{\mu'}, \varphi'_{\mu'})\in\mathscr{S}_2$, то рассмотрим ограничение отображения $\varphi'_{\mu'}\circ f\colon f^{-1}(U'_{\mu'})\to\mathbf{R}^m$, а именно

$$(\varphi'_{\mu'}\circ f)\,|\,f^{-1}(U'_{\lambda'}\cap U'_{\mu'})=(\varphi'_{\mu'}\circ\varphi'^{-1}_{\lambda'})\circ((\varphi'_{\lambda'}\circ f)\,|\,f^{-1}(U'_{\lambda'}\cap U'_{\mu'})).$$

Так как $\varphi'_{\mu'}\circ\varphi'^{-1}_{\lambda'}$ принадлежит классу C^r в точке $\varphi'_{\lambda'}\circ f(p)$, отображение $\varphi'_{\mu'}\circ f$ является C^r-отображением в точке p.

Если непрерывное отображение $f\colon M_1^n\to M_2^m$ в каждой точке является C^r-отображением, то его называют просто *C^r-отображением* или *отображением класса C^r*. Обычное непрерывное отображение f в описанной ситуации называют *C^0-отображением*.

Если M_1, M_2, M_3 — три C^r-многообразия и $f\colon M_1\to M_2$, $g\colon M_2\to M_3$ — отображения класса C^r, то и композиция $g\circ f\colon M_1\to M_3$ является, очевидно, C^r-отображением.

Пусть M — некоторое C^r-многообразие, а M' — некоторое $C^{r'}$-многообразие. Отображение $f\colon M\to M'$ называется *отображением класса C^k* или *C^k-отображением*, где $k\leqslant r$ и $k\leqslant r'$, если оно является C^k-отображением многообразий M и M', рассматриваемых как C^k-многообразия.

Пусть M_1, M_2 — два C^r-многообразия и $f: M_1 \to M_2$ — взаимно однозначное отображение «на». Если f и обратное к нему отображение $f^{-1}: M_2 \to M_1$ принадлежат классу C^r, то f называется *C^r-гомеоморфизмом* или *C^r-диффеоморфизмом*. Два C^r-многообразия M_1, M_2 называются *C^r-гомеоморфными* или *C^r-диффеоморфными*, если между ними существует

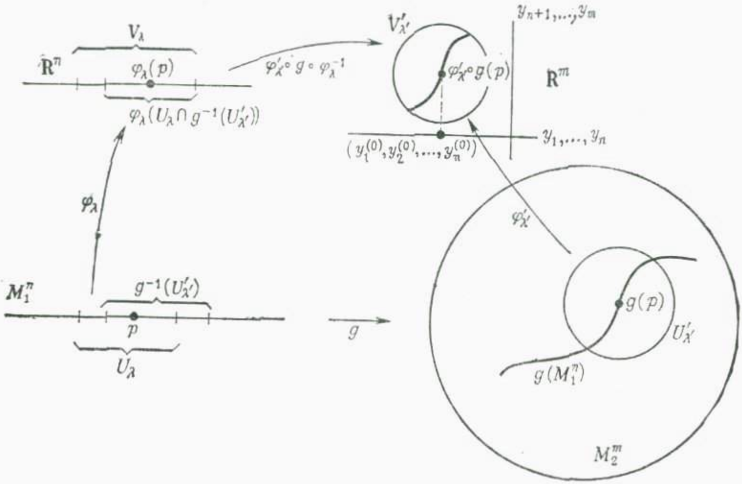


Рис. 2.5.

C^r-диффеоморфизм. В этом случае пишут $M_1 = M_2$ и многообразия M_1 и M_2 считают одинаковыми.

Пусть $(M_1^n, \mathscr{S}_1)$, $(M_2^m, \mathscr{S}_2)$ — два C^r-многообразия, $r \geqslant 1$, и

$$g: M_1^n \to M_2^m$$

— некоторое C^r-отображение. Пусть далее $p \in M_1^n$ и $p \in U_\lambda$ при $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}_1$, $g(p) \in U'_{\lambda'}$ и $(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'}) \in \mathscr{S}_2$. Так как g является C^r-отображением, отображение

$$\varphi'_{\lambda'} \circ g \circ \varphi_\lambda^{-1}: \varphi_\lambda(U_\lambda \cap g^{-1}(U'_{\lambda'})) \to \varphi'_{\lambda'}(U'_{\lambda'}) = V'_{\lambda'} \subset \mathbf{R}^m$$

принадлежит классу C^r в точке $\varphi_\lambda(p)$ (см. рис. 2.5).

Обычно отображение $\varphi: A \to B$ класса C^r $(r \geqslant 1)$ открытого множества A из $\mathbf{R}^n$ в подмножество B из $\mathbf{R}^m$ описывают с помощью координат, выражая φ как набор функций от $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots \\ \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Его свойства характеризуются *матрицей Якоби*

$$J\varphi(x)=\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}(x)\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}(x) & \ldots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}(x)\end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы Якоби $J(\varphi'_{\lambda'}\circ g\circ\varphi_\lambda^{-1})(\varphi_\lambda(p))$ отображения $\varphi'_{\lambda'}\circ g\circ\varphi_\lambda^{-1}$ в точке $\varphi_\lambda(p)$ называется *рангом* отображения g в точке p. Это определение не зависит от выбора $(U_\lambda,\ \varphi_\lambda)$ и $(U'_{\lambda'},\ \varphi'_{\lambda'})$. Действительно, пусть $p\in U_\mu$, $(U_\mu,\ \varphi_\mu)\in\mathscr{S}_1$, $g(p)\in\in U'_{\mu'}$, $(U'_{\mu'},\ \varphi'_{\mu'})\in\mathscr{S}_2$. Для C^r-отображения

$$\varphi'_{\mu'}\circ g\circ\varphi_\mu^{-1}\colon\ \varphi_\mu(U_\mu\cap g^{-1}(U'_{\mu'}))\longrightarrow\varphi'_{\mu'}(U'_{\mu'})$$

имеет место равенство матриц

$$J(\varphi'_{\mu'}\circ g\circ\varphi_\mu^{-1})=(J(\varphi'_{\mu'}\circ\varphi'^{-1}_{\lambda'}))(J(\varphi'_{\lambda'}\circ g\circ\varphi_\lambda^{-1}))(J(\varphi_\lambda\circ\varphi_\mu^{-1})).$$

Так как

$$\varphi'_{\mu'}\circ\varphi'^{-1}_{\lambda'}\colon\ \varphi'_{\lambda'}(U'_{\lambda'}\cap U'_{\mu'})\longrightarrow\varphi'_{\mu'}(U'_{\lambda'}\cap U'_{\mu'})$$

и

$$\varphi_\lambda\circ\varphi_\mu^{-1}\colon\ \varphi_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)\longrightarrow\varphi_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)$$

являются C^r-диффеоморфизмами, ранг матрицы $J(\varphi'_{\mu'}\circ\varphi'^{-1}_{\lambda'})$ в точке $\varphi'_{\lambda'}(g(p))$ равен m, ранг матрицы $J(\varphi_\lambda\circ\varphi_\mu^{-1})$ в точке $\varphi_\mu(p)$ равен n, а потому ранги матрицы $J(\varphi'_{\mu'}\circ g\circ\varphi_\mu^{-1})$ в точке $\varphi_\mu(p)$ и матрицы $J(\varphi'_{\lambda'}\circ g\circ\varphi_\lambda^{-1})$ в точке $\varphi_\lambda(p)$ совпадают.

Если $n\leqslant m$ и ранг отображения $g\colon M_1^n\longrightarrow M_2^m$ равен n в каждой точке из M_1^n, то g называется *C^r-иммерсией* [1]). Если g является C^r-иммерсией, то ранг отображения

$$\varphi'_{\lambda'}\circ g\circ\varphi_\lambda^{-1}\colon\ \varphi_\lambda(U_\lambda\cap g^{-1}(U'_{\lambda'}))\longrightarrow\varphi'_{\lambda'}(U'_{\lambda'})=V'_{\lambda'}\subset\mathbf{R}^m$$

в точках $\varphi_\lambda(p)$ из $\varphi_\lambda(U_\lambda\cap g^{-1}(U'_{\lambda'}))$ равен n. Далее, если $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\in\varphi_\lambda(U_\lambda\cap g^{-1}(U'_{\lambda'}))$ и

$$(\varphi'_{\lambda'}\circ g\circ\varphi_\lambda^{-1})(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m),$$

то $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$ являются C^r-функциями от $x_1,\ x_2\ \ldots,\ x_n$. Если ранг матрицы Якоби $J(\varphi'_{\lambda'}\circ g\circ\varphi_\lambda^{-1})$ в точке $\varphi_\lambda(p)=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)})$ равен n, то, изменяя при необходимости нумерацию в последовательности функций $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$ (это

[1]) Используется также термин *погружение*, но поскольку наряду с иммерсиями существуют еще и субмерсии (стр. 77), для которых не имеется русского названия, то лучше сохранить известный параллелизм между ними и в терминологии. — *Прим. ред.*

допустимо, так как $\mathscr{S}_2$ — максимальная система координат и включает в себя все варианты направлений координатных осей!), можно считать, что

$$\left|\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\varphi_\lambda(p))\right| \neq 0.$$

Следовательно, в силу теоремы об обратных функциях (см. комментарии, примечание 2.1), для достаточно малой окрестности V' композиция отображения

$$(\varphi'_{\lambda'} \circ g \circ \varphi_\lambda^{-1}) \mid V' : V' \longrightarrow \varphi'_{\lambda'} \circ g \circ \varphi_\lambda^{-1}(V')$$

с проекцией $(y_1, \ldots, y_m) \mapsto (y_1, \ldots, y_n)$ является взаимно однозначным отображением и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ могут быть выражены как C^r-функции от $y_1, y_2, \ldots, y_n$, а потому и y_{n+1}, $y_{n+2}, \ldots, y_m$ могут быть выражены как C^r-функции от y_1, $y_2, \ldots, y_n$.

В силу сказанного, если $\varphi_\lambda^{-1}(V')$ — окрестность точки $p \in M_1^n$, которую отображение g переводит в $g(\varphi_\lambda^{-1}(V'))$, то в локальных координатах $(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'})$ имеет место равенство $(\varphi'_{\lambda'} \circ g)(p) = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})$, причем в некоторой окрестности V'' точки $(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \in \mathbf{R}^n$ оказываются определенными C^r-функции $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_m$ от $y_1, y_2, \ldots, y_n$, такие, что

$$g(\varphi_\lambda^{-1}(V')) = \varphi'^{-1}_{\lambda'}\{(y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots$$
$$\ldots, \alpha_m(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \in \mathbf{R}^m;\ (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V''\}$$

(см. рис. 2.5). Локально образ $g(M_1^n)$ при отображении g (а точнее, $g(\varphi_\lambda^{-1}(V'))$ в локальных координатах $(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'})$) является некоторой n-мерной поверхностью в $\mathbf{R}^m$ — поверхностью $y_{n+i} = \alpha_{n+i}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m-n)$, где α_{n+i} — функции класса C^r. Иными словами, ограничение $g \mid (\varphi_\lambda^{-1}(V'))$ взаимно однозначно, а потому и g локально взаимно однозначно.

Иммерсию можно определить и в случае $r = 0$, а именно C^0-отображение

$$g\colon M_1^n \longrightarrow M_2^m,$$

являющееся локально взаимно однозначным, называется *C^0-иммерсией*.

Пример 5. Отображение $g\colon S^1 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ определим равенством

$$g((\cos\theta, \sin\theta)) = (\cos 4\theta \cos 2\theta, \cos 4\theta \sin 2\theta) \quad (0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

(см. рис. 2.6). Тогда g является C^∞-отображением и в каждой точке имеет ранг 1. Следовательно, g будет C^∞-иммерсией. Всюду локально отображение g является взаимно однозначным, однако в целом оно таковым не является.

Пусть g: $M_1^n \to M_2^m$ — некоторая C^r-иммерсия. Если в относительной топологии на $g(M_1^n)$ отображение g: $M_1^n \to g(M_1^n)$ является гомеоморфизмом, то g называется *C^r-вложением*. Например, если g: $S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ — естественное отображение, а именно $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, то оно является C^∞-вложением. В общем случае C^r-вложение является C^r-гомеоморфизмом.

Однако не всякая C^r-иммерсия g: $M_1^n \to M_2^m$, являющаяся взаимно однозначной, представляет собой C^r-вложение. На-

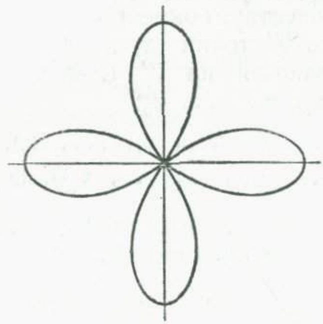


Рис. 2.6.

пример, в теореме 1.14 при иррациональном b/a интегральная кривая $\varphi(t, p)$, определенная отображением из $\mathbf{R}^1$ в T, доставляет пример взаимно однозначной C^r-иммерсии, не являющейся C^r-вложением. Однако легко доказать, что в случае компактного M_1^n взаимно однозначная C^r-иммерсия является C^r-вложением.

C^r-вложение $S^1 \to M^n$ (или его образ) называется *простой C^r-кривой* многообразия M^n.

Если $q < n$ и i: $\mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^n$ определено равенством $i(x_1, x_2, \ldots, x_q) = (x_1, x_2, \ldots, x_q, 0, \ldots, 0)$, то i является C^∞-вложением. В дальнейшем $\mathbf{R}^q$ будет отождествляться со своим образом $i(\mathbf{R}^q)$ в $\mathbf{R}^n$, и мы будем считать, что $\mathbf{R}^q$ содержится в $\mathbf{R}^n$.

Пусть $(M^n, \mathscr{S})$ — некоторое C^r-многообразие и W — подмножество в M^n. Если для каждой точки p из W существует пара $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$, такая, что $p \in U_\lambda$ и

$$\varphi_\lambda(W \cap U_\lambda) = \varphi_\lambda(U_\lambda) \cap \mathbf{R}^q,$$

то W называется *q-мерным подмногообразием* [1]) в M^n.

[1]) В ряде случаев оказывается целесообразным понимать «подмногообразия» в более широком смысле — см., напр., Стернберг [1*]. В этом более широком смысле траектории иррациональной обмотки тора являются его подмногообразиями, тогда как в более узком смысле приведенного выше определения — не являются. — *Прим. ред.*

Пример 6. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_{n-q}$ — функции класса C^r $(r \geqslant 1)$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n;\ F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ i = 1, 2, \ldots \\ \ldots, n-q\}.$$

Предположим, что в каждой точке множества W ранг матрицы $\dfrac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_{n-q})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ равен $n-q$. Пусть $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in$ $\in W$ и минор $\left|\dfrac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_{n-q})}{\partial(x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_n)}\right| \neq 0$. Тогда по теореме о неявных функциях существует окрестность V точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ в $\mathbf{R}^n$ и окрестность V' точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_q^{(0)})$ в $\mathbf{R}^q$, такие, что $W \cap V$ определяется на V' C^r-функциями h_i $(i = q+1, q+2, \ldots, n)$ от $x_1, x_2, \ldots, x_q$:

$$W \cap V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_q, h_{q+1}(x_1, \ldots, x_q), \ldots \\ \ldots, h_n(x_1, x_2, \ldots, x_q)); (x_1, x_2, \ldots, x_q) \in V'\}.$$

Далее для $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ в $\mathbf{R}^n$ можно определить следующие локальные координаты (V, φ):

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_q, x_{q+1} - h_{q+1}, \ldots, x_n - h_n);$$

в этом случае

$$\varphi(W \cap V) = \varphi(V) \cap \mathbf{R}^q.$$

Следовательно, W является q-мерным подмногообразием в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 2.3. (i) *Если W есть q-мерное подмногообразие C^r-многообразия $(M^n, \mathscr{S})$, то оно является q-мерным C^r-многообразием с системой локальных C^r-координат, естественно полученной из $(M^n, \mathscr{S})$.*

(ii) *Если W из* (i) *рассматривать как q-мерное C^r-многообразие, то естественное включение $\iota\colon W \to M$ окажется C^r-вложением.*

Доказательство. Пусть $p \in W$ и $p \in U_\lambda$, где $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in$ $\in \mathscr{S}$, причем $\varphi_\lambda(W \cap U_\lambda) = \varphi_\lambda(U_\lambda) \cap \mathbf{R}^q$. Фиксируя аналогично $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$ для каждой точки из W, мы получим некоторое множество $\mathscr{S}_W = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda); \lambda \in \Lambda'\}$. Очевидно, $\{W \cap U_\lambda;$ $\lambda \in \Lambda'\}$ является открытым покрытием для W и отображение

$$\varphi_\lambda | (W \cap U_\lambda)\colon\ W \cap U_\lambda \to \varphi_\lambda(W \cap U_\lambda)$$

является гомеоморфизмом из $W \cap U_\lambda$ на открытое множество $\varphi_\lambda(W \cap U_\lambda)$ из $\mathbf{R}^q$. Если $p \in U_\mu$, $(U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathscr{S}_W$, то $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$: $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ принадлежит классу C^r и потому

$$(\varphi_\mu | (W \cap U_\lambda \cap U_\mu)) \circ (\varphi_\lambda | (W \cap U_\lambda \cap U_\mu))^{-1}\colon \varphi_\lambda(W \cap U_\lambda \cap U_\mu) \to \\ \to \varphi_\mu(W \cap U_\lambda \cap U_\mu)$$

также принадлежит классу C^r. Таким образом, мы соотнесли с W множество пар $\{(W \cap U_\lambda, \varphi_\lambda | (W \cap U_\lambda))\}$, удовлетворяющее условиям $(M_{\rm I})$, $(M_{\rm II})$ и содержащееся в максимальном множестве с таким свойством; следовательно, оно определяет систему локальных C^r-координат на W, что и доказывает (i).

В силу определения подмногообразия включение $\iota: W \to \iota(W)$ является гомеоморфизмом, и его ранг всюду равен q. Следовательно, справедливо и утверждение (ii). □

Теорема 2.4. *Если $g: M_1^n \to M_2^m$ является C^r-вложением ($r \geqslant 1$), то $g(M_1^n)$ является n-мерным подмногообразием в M_2^m.*

Доказательство. В соответствии со сказанным выше фиксируем произвольную точку $p \in M_1^n$, окрестность $U_\lambda \ni p$, где $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}_1$, и окрестность $U'_{\lambda'} \ni g(p)$, где $(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'}) \in \mathscr{S}_2$. При достаточно малой окрестности U' точки p (см. стр. 73—74, где рассматривалось $\varphi_\lambda^{-1}(V')$) образ $\varphi_{\lambda'}^{-1} \circ g(U')$ описывается в $\mathbf{R}^m$ как n-мерная поверхность $\{(y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \alpha_m(y_1, y_2, \ldots, y_n))\}$. Пусть далее $\hat{U}'_{\lambda'} \subset U'_{\lambda'}$ такова, что $p \in g^{-1}(\hat{U}'_{\lambda'}) \subset V'$. Определим на $\hat{U}'_{\lambda'}$ координатное отображение $\hat{\varphi}'_{\lambda'}$, взяв в качестве образа точки $(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_m)$ точку $(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1} - \alpha_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, y_m - \alpha_m(y_1, y_2, \ldots, y_n))$. Тем самым будут определены локальные координаты $(\hat{U}'_{\lambda'}, \hat{\varphi}'_{\lambda'})$ и $\hat{\varphi}'_{\lambda'}(g(M_1^n) \cap \hat{U}'_{\lambda'}) = \hat{\varphi}'_{\lambda'}(\hat{U}'_{\lambda'}) \cap \mathbf{R}^n$. □

C^r-отображение $g: M_1^n \to M_2^m$ ($r \geqslant 1$), $n \geqslant m$, имеющее в каждой точке из M_1^n ранг m, называется *C^r-субмерсией*. Пусть g есть C^r-субмерсия, $p \in M_1^n$, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}_1$, $(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'}) \in \mathscr{S}_2$ и, как и выше, $p \in U_\lambda$, $g(p) \in U'_{\lambda'}$; тогда матрица Якоби отображения

$$\varphi'_{\lambda'} \circ g \circ \varphi_\lambda^{-1}: \varphi_\lambda(U_\lambda \cap g^{-1}(U'_{\lambda'})) \to \varphi'_{\lambda'}(U'_{\lambda'})$$

в $\varphi_\lambda(p)$ имеет ранг m. Пусть далее $\varphi'_{\lambda'}(g(p)) = (0, \ldots, 0)$, чего, очевидно, всегда можно достичь, и

$$(\varphi'_{\lambda'} \circ g \circ \varphi_\lambda^{-1})(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m),$$
$$\varphi_\lambda(p) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Изменяя при необходимости нумерацию переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будем считать, что в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$

$$\left| \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial(x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_n)} \right| \neq 0.$$

В таком случае для достаточно малого $\varepsilon > 0$ в каждой точке множества $V_\varepsilon = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n;\ |x_i - x_i^{(0)}| < \varepsilon,$

$i=1, 2, \ldots, n\}$, на котором определено C^r-отображение $\bar{g}$ в $\mathbf{R}^{n-m}\times\mathbf{R}^m=\mathbf{R}^n$,

$$\bar{g}\colon V_\varepsilon \to \mathbf{R}^{n-m}\times\mathbf{R}^m,$$

$$\bar{g}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

обязательно

$$\left|\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}, y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|\neq 0.$$

В соответствующих координатах $(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'})$

$$\bar{g}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-m}^{(0)}, 0, 0, \ldots, 0),$$

и при достаточно малом ε' на произведении $V'_{\varepsilon'}\times V''_{\varepsilon'}$ множеств

$$V'_{\varepsilon'}=\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m})\in\mathbf{R}^{n-m};\ |x_i-x_i^{(0)}|<\varepsilon',\ i=1, 2, \ldots \\ \ldots, n-m\},$$

$$V''_{\varepsilon'}=\{(y_1, y_2, \ldots, y_m)\in\mathbf{R}^m;\ |y_i|<\varepsilon',\ i=1, 2, \ldots, m\}$$

в соответствии с теоремой об обратных функциях определена обратная к $\bar{g}$ C^r-функция

$$\bar{h}\colon V'_{\varepsilon'}\times V''_{\varepsilon'}\to V_\varepsilon,$$

для которой

$$(\bar{g}\circ\bar{h})(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}, y_1, y_2, \ldots, y_m)= \\ =(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}, y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Так как $\bar{h}(V'_{\varepsilon'}\times V''_{\varepsilon'})$ — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, отображение $\bar{h}\colon V'_{\varepsilon'}\times V''_{\varepsilon'}\to\bar{h}(V'_{\varepsilon'}\times V''_{\varepsilon'})$ является C^r-гомеоморфизмом. Далее если

$$U=(\varphi_\lambda^{-1}\circ\bar{h})(V'_{\varepsilon'}\times V''_{\varepsilon'}),\qquad \varphi=\bar{g}\circ(\varphi_\lambda\,|\,U),$$

то $(U, \varphi)\in\mathscr{S}_1$, и, очевидно, поскольку $\varphi'_{\lambda'}g\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-m}, y_1, \ldots, y_m)=(y_1, \ldots, y_m)$, то

$$g^{-1}(g(p))\cap U=\varphi^{-1}(V'_{\varepsilon'}\times(0, 0, \ldots, 0))=\varphi^{-1}(\varphi(U)\cap\mathbf{R}^{n-m}).$$

Тем самым получена следующая теорема.

Теорема 2.5. *Пусть $g\colon M_1^n\to M_2^m$ — некоторая C^r-субмерсия. Тогда для любой точки p' из $g(M_1^n)$ множество $g^{-1}(p')$ является $(n-m)$-мерным подмногообразием в M_1^n.*

Пусть M^n — некоторое n-мерное C^r-многообразие и $f\colon M\to\mathbf{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на M^n. Замыкание подмножества $\{p\in M;\ f(p)\neq 0\}$ в M^n называется *носителем* функции f и обозначается через $\operatorname{supp} f$.

Пусть $\mathfrak{U}=\{U_\sigma;\ \sigma\in\Sigma\}$ — открытое покрытие многообразия M^n. Если у каждой точки p из M^n есть такая окрестность U, что $U\cap U_\sigma\neq\varnothing$ лишь для конечного числа множеств U_σ $(\sigma\in\Sigma)$, то это открытое покрытие называется *локально конечным.*

Пусть $\mathfrak{U}=\{U_\sigma;\ \sigma\in\Sigma\}$ — локально конечное открытое покрытие многообразия M^n и определены C^r-функции

$$\mu_\sigma\colon M^n\longrightarrow[0,1]\qquad(\sigma\in\Sigma).$$

Если эти функции удовлетворяют следующим двум условиям (i), (ii), то говорят, что задано *разбиение единицы, подчиненное покрытию* $\mathfrak{U}$:

(i) *для каждого* $\sigma\in\Sigma$ *имеет место включение* $\operatorname{supp}\mu_\sigma\subset U_\sigma$;

(ii) *для каждой точки* p *из* M^n *имеет место равенство* $\sum_{\sigma\in\Sigma}\mu_\sigma(p)=1.$

Теорема 2.6. *Пусть* $(M^n,\mathcal{S})$ — *компактное n-мерное C^r-многообразие и* $\mathfrak{U}=\{U_\sigma;\ \sigma\in\Sigma\}$ — *его локально конечное открытое покрытие. Тогда существует разбиение единицы, подчиненное* $\mathfrak{U}$. (Предположение о компактности в этой теореме несущественно[1]) — см. комментарии, примечание 2.2.)

Доказательство. Фиксируем для каждой точки $p\in M^n$ множество $U_{\lambda(p)}\ni p$, такое, что $(U_{\lambda(p)}),\ \varphi_{\lambda(p)})\in\mathcal{S}$, и множество U_σ $(\sigma\in\Sigma)$, содержащее $U_{\lambda(p)}$. Пусть $\varphi_{\lambda(p)}(U_{\lambda(p)})=\operatorname{Int}D^n$. Пары $(U_{\lambda(p)},\ \varphi_{\lambda(p)})$ существуют в силу того, что $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию (M_{III}).

Пусть $\operatorname{Int}D^n(1/2)=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D^n;\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<1/4\}$ и $U'_{\lambda(p)}=\varphi^{-1}_{\lambda(p)}(\operatorname{Int}D^n(1/2))$. Очевидно, $\{U'_{\lambda(p)};\ p\in M^n\}$ — открытое покрытие для M^n; пусть $U'_{\lambda(p_1)},\ U'_{\lambda(p_2)},\ \ldots,\ U'_{\lambda(p_s)}$ — конечный набор элементов этого покрытия, для которого $\bigcup_{i=1}^{s}U'_{\lambda(p_i)}=M^n$. Определим

$$\bar{\mu}_{p_i}\colon M^n\longrightarrow\mathbf{R}^n$$

с помощью C^∞-функции Φ из леммы 1.5 следующим образом. Учитывая, что $U_{\lambda(p_i)}\subset U_{\sigma_i}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$, и полагая

[1]) Предположение о локальной конечности тоже несущественно — в излагаемом ниже доказательстве оно вообще не используется. Зато в нем используется компактность. Имеется другое доказательство, не использующее компактности, но использующее локальную конечность, а отсюда можно перейти к общему случаю, когда ни компактности, ни локальной конечности не предполагается.— *Прим. ред.*

$\varphi_{\lambda(p_i)}(q)=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для $q\in U_{\lambda(p_i)}$, определим $\bar{\mu}_{p_i}(q)=$ $=\Phi(5(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)/2)$; когда $q\notin U_{\lambda(p_i)}$, положим $\bar{\mu}_{p_i}(q)=$ $=0$. Очевидно, $\operatorname{supp}\bar{\mu}_{p_i}\subset U_{\sigma_i}$ $(i=1, 2, \ldots, s)$, и для любой точки $p\in M^n$

$$\sum_{i=1}^{s}\bar{\mu}_{p_i}(p)\neq 0.$$

Положим теперь $\mu_{p_i}=\bar{\mu}_{p_i}\Big/\sum_{i=1}^{s}\bar{\mu}_{p_i}$, и если $\sigma\in\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s\}$, то пусть $\mu_\sigma=\sum_{\sigma_i=\sigma}\mu_{p_i}$, а если $\sigma\in\Sigma$ отличается от $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$, то пусть $\mu_\sigma=0$. Тогда $\{\mu_\sigma;\ \sigma\in\Sigma\}$ является разбиением единицы, подчиненным покрытию $\mathfrak{U}$. □

§ 10. Касательные пространства

Пусть t_1, t_2 — пара вещественных чисел или $\pm\infty$ и $t_1<t_2$. Интервал $]t_1, t_2[$ на $\mathbf{R}^1$ является C^∞-многообразием (§ 9, пример 4), а потому и C^r-многообразием для любого $r=0, 1, 2, \ldots$.

Пусть $(M^n, \mathscr{S})$ — некоторое C^r-многообразие. Отображение

$$l\colon\ ]t_1, t_2[\ \to M^n$$

класса C^k $(k\leqslant r)$ называется *C^k-кривой* или *кривой класса C^k* на M^n.

В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ вектор определяется просто как направленный отрезок. Поскольку понятие отрезка не является таким общим понятием, которое имеет смысл для произвольного многообразия, невозможно дать определение вектора на многообразии, совершенно аналогичное определению вектора в $\mathbf{R}^n$. Эта трудность преодолима, поскольку существуют понятия C^r-кривой на многообразии и касательного вектора к кривой в $\mathbf{R}^n$ и благодаря этому можно определить касательный вектор к многообразию в данной точке как некоторый класс эквивалентных кривых на многообразии. Эквивалентность, которой мы будем тут пользоваться, такова, что в $\mathbf{R}^n$ эквивалентными оказываются кривые, проходящие через данную точку и имеющие в ней общий касательный вектор.

Пусть $r\geqslant 1$. Обозначим через $L(p)$ множество всех проходящих через точку p на M^n C^1-кривых

$$l\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\ \to M^n, \qquad l(0)=p, \qquad \varepsilon>0.$$

Если l и $\bar{l}$: $]-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}[\to M^n$ ($\bar{l}(0) = p$) — две кривые из $L(p)$ и $p \in U_\lambda$, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$, то имеют место C^1-отображения

$$\varphi_\lambda \circ l\colon\ l^{-1}(U_\lambda) \to \varphi_\lambda(U_\lambda) = V_\lambda \subset \mathbf{R}^n,$$
$$\varphi_\lambda \circ \bar{l}\colon\ \bar{l}^{-1}(U_\lambda) \to \varphi_\lambda(U_\lambda) = V_\lambda \subset \mathbf{R}^n.$$

Для $t \in l^{-1}(U_\lambda) \cap \bar{l}^{-1}(U_\lambda)$ эти отображения записываются так:

$$(\varphi_\lambda \circ l)(t) = (u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_n(t)),$$
$$(\varphi_\lambda \circ \bar{l})(t) = (\bar{u}_1(t),\ \bar{u}_2(t),\ \ldots,\ \bar{u}_n(t))$$

(см. рис. 2.7). Если в этой ситуации

$$\frac{du_i}{dt}(0) = \frac{d\bar{u}_i}{dt}(0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то будем считать l и $\bar{l}$ эквивалентными и писать $l \sim \bar{l}$. Это определение не зависит от выбора системы координат. Дейст-

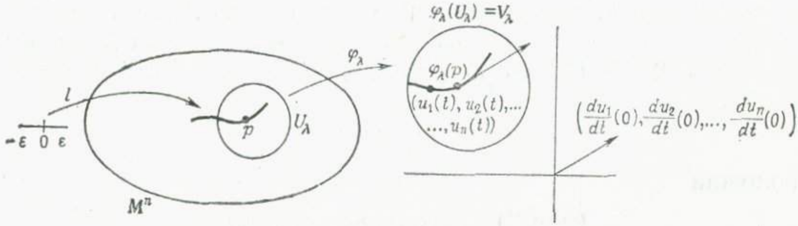


Рис. 2.7.

вительно, если кроме $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ имеется еще $(U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathscr{S}$ и $p \in U_\mu$, то

$$\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$
$$((x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu))$$

и z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются C^r-функциями от $x_1, x_2, \ldots, x_n$; поэтому, полагая для $t \in l^{-1}(U_\mu) \cap \bar{l}^{-1}(U_\mu)$

$$(\varphi_\mu \circ l)(t) = (w_1(t),\ w_2(t),\ \ldots,\ w_n(t)),$$
$$(\varphi_\mu \circ \bar{l})(t) = (\bar{w}_1(t),\ \bar{w}_2(t),\ \ldots,\ \bar{w}_n(t)),$$

получаем

$$(*) \qquad \frac{dw_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \cdot \frac{du_j}{dt}, \qquad \frac{d\bar{w}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \cdot \frac{d\bar{u}_j}{dt},$$

откуда

$$\frac{dw_i}{dt}(0) = \frac{d\bar{w}_i}{dt}(0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Очевидно, отношение $l \sim \tilde{l}$ является отношением эквивалентности на множестве $L(p)$. Класс $[l]$ этой эквивалентности на $L(p)$ (через $[l]$ обозначается класс эквивалентности, содержащий l) называется *касательным вектором* к многообразию M^n в точке p и обозначается через $X(p)$ или просто через v. Множество всех касательных векторов к M^n в точке p обозначается через $T_p(M^n)$ и называется *касательным пространством* к M^n в точке p или *пространством касательных векторов*. Класс $[l]$ называется также и *касательным вектором к кривой* l в точке p.

Пусть $p \in M^n$, $p \in U_\lambda$, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$ и $v = [l]$ — элемент из $T_p(M^n)$. Тогда с помощью n указанных выше функций, связанных с l, фиксируются числа

$$v_i = \frac{du_i}{dt}(0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

совокупность $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ которых и соответствует вектору v. Таким образом, произвольному элементу v из $T_p(M^n)$ соответствует вполне определенный элемент $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ из $\mathbf{R}^n$. Обратно, пусть $(v_1', v_2', \ldots, v_n') \in \mathbf{R}^n$ — произвольный элемент. Определим

$$l' \colon \,]-\varepsilon', \varepsilon'[\, \to M^n,$$

положив

$$(\varphi_\lambda \circ l')(t) = (v_1' t, v_2' t, \ldots, v_n' t).$$

Тогда вектору $[l'] \in T_p(M^n)$ будет соответствовать $(v_1', v_2', \ldots, v_n') \in \in \mathbf{R}^n$. Следовательно, для $p \in U_\lambda$, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$, определено взаимно однозначное соответствие

$$\Phi_\lambda \colon T_p(M^n) \to \mathbf{R}^n,$$

при котором

$$\Phi_\lambda(v) = (v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Если единичный вектор оси x_i пространства $\mathbf{R}^n$ обозначить через $\partial/\partial x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то $\mathbf{R}^n$ можно рассматривать как n-мерное векторное пространство с базисом $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_n$. В этих обозначениях

$$\Phi_\lambda(v) = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

С помощью Φ_λ легко перенести на $T_p(M^n)$ структуру векторного пространства из $\mathbf{R}^n$. Действительно, для $v, v' \in T_p(M^n)$ и $a, b \in \mathbf{R}$ обязательно $av + bv' \in T_p(M^n)$ и

$$\Phi_\lambda(av + bv') = a\Phi_\lambda(v) + b\Phi_\lambda(v').$$

Поэтому $T_p(M^n)$ является n-мерным векторным пространством.

Если взять другую систему координат $(U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathscr{S}$, $p \in U_\mu$, и рассмотреть наряду с Φ_λ отображение Φ_μ: $T_p(M^n) \to \mathbf{R}^n$, положив

$$\Phi_\mu(v) = v_1' \frac{\partial}{\partial z_1} + v_2' \frac{\partial}{\partial z_2} + \ldots + v_n' \frac{\partial}{\partial z_n},$$

то в силу (*) получатся соотношения

$$(**) \qquad v_i' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial x_j}(\varphi_\lambda(p))\, v_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, строение n-мерного векторного пространства в $T_p(M^n)$ не зависит от выбора системы координат. Отметим,

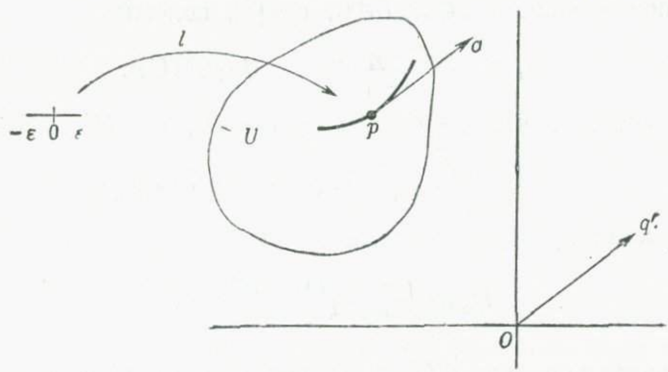


Рис. 2.8.

что в этой ситуации $\partial z_i/\partial x_j$ являются C^{r-1}-функциями на $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ и

$$\left| \frac{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| \neq 0.$$

Рассмотрим пример. Пусть U — открытое множество в пространстве $\mathbf{R}^n$. Известно (§ 9, пример 4), что U является n-мерным C^∞-многообразием. С помощью тождественного отображения id: $U \to U$ вводим на U систему координат (U, id) и описанное выше соответствие Φ_0: $T_p(U) \to \mathbf{R}^n$ $(p \in U)$. В согласии с интуитивным представлением на рис. 2.8 произвольный элемент из $T_p(U)$ изображен как направленный отрезок. При отображении Φ_0 в данном случае образ $\overrightarrow{Oq'}$ отрезка $\overrightarrow{pq}$ получается параллельным переносом этого отрезка в начало координат O (рис. 2.7, рис. 2.8).

При $n=1$ в качестве U можно выбрать интервал $]t_1, t_2[$. Обозначим через $\boldsymbol{e}_t$ направленный отрезок $\overrightarrow{t\,(t+1)}$, являющийся элементом касательного пространства к $]t_1, t_2[$ в точке t, и назовем его *единичным касательным вектором* в точке t. Иначе вектор $\boldsymbol{e}_t$ можно было бы определить равенством $\Phi_0(\boldsymbol{e}_t) = \partial/\partial x_1$ (x_1 — стандартная координата в $\mathbf{R}^1$).

Пусть $(M^n, \mathscr{S})$ — некоторое n-мерное C^r-многообразие $(r \geqslant 1)$ и p — его точка. Если U — окрестность точки p, то через $C^r(U)$ обозначим множество всех C^r-функций на ней. Так как для любых $f, g \in C^r(U)$, $a, b \in \mathbf{R}$ обязательно $af+bg \in C^r(U)$, на $C^r(U)$ определена структура векторного пространства над $\mathbf{R}$.

Определим отображение

$$D_v\colon C^r(U) \to \mathbf{R}$$

для произвольного $v \in T_p(M^n)$, $v=[l]$, положив

$$D_v(f) = \frac{d(f \circ l)}{dt}(0) \qquad (f \in C^r(U)).$$

Если считать, что $p \in U_\lambda \subset U$, $\varphi_\lambda(p)=0$, где $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$, и

$$\Phi_\lambda(v) = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

то простая проверка показывает, что

$$D_v(f) = \sum_i v_i \frac{\partial(f \circ \varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_i}(0).$$

Следовательно, число $D_v(f)$ не зависит от выбора представителя l класса $v=[l]$. В силу определения D_v является линейным отображением. Кроме того, очевидно,

$$D_{av+bv'} = aD_v + bD_{v'}.$$

Теорема 2.7. *Пусть $v \in T_p(M^n)$ и $D_v\colon C^r(U) \to \mathbf{R}$ — введенное выше линейное отображение. Тогда*

$$(***) \qquad D_v(fg) = f(p)\,D_v(g) + g(p)\,D_v(f) \qquad (f, g \in C^r(U)).$$

Если для $v, v' \in T_p(M^n)$ имеет место равенство $D_v = D_{v'}$, то $v=v'$.

Если M^n является C^∞-многообразием и задано линейное отображение $\hat{D}\colon C^\infty(U) \to \mathbf{R}$, удовлетворяющее равенству

$$\hat{D}(fg) = f(p)\,\hat{D}(g) + g(p)\,\hat{D}(f) \qquad (f, g \in C^\infty(U)),$$

то существует единственный элемент $v \in T_p(M^n)$, такой, что $\hat{D} = D_v$.

Доказательство. Соотношение (***) очевидно в силу определения отображения D_v. Далее, пусть $p \in U_\lambda \subset U$, $\varphi_\lambda(p) = 0$, где $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$, и $q \in U_\lambda$, $\varphi_\lambda(q) = (x_1(q), x_2(q), \ldots, x_n(q))$, так что на U_λ определены C^r-функции $x_i\colon U_\lambda \to \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пусть при C^r-иммерсии[1]) $h\colon \operatorname{Int} D^n \to M^n$ имеют место равенство $h(0) = p$ (0 является центром в $\operatorname{Int} D^n$) и включение $h(\operatorname{Int} D^n) \subset U_\lambda$. С помощью C^∞-функции Φ из леммы 1.5 определим C^r-функции

$$\hat{x}_i\colon U \to \mathbf{R} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

положив

$$\hat{x}_i(q) = \begin{cases} \Phi(3(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2))\, x_i(h(y_1, y_2, \ldots, y_n)), \\ \quad \text{если } q \in h(\operatorname{Int} D^n),\ q = h(y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ 0, \text{если } q \in U - h(\operatorname{Int} D^n). \end{cases}$$

Так как $\hat{x}_i$ совпадает с x_i в некоторой окрестности точки p, с помощью

$$\Phi_\lambda(v) = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

легко получить равенство

$$D_v(\hat{x}_i) = v_i.$$

Поэтому если $D_v = D_{v'}$, то обязательно $v = v'$.

Пусть теперь M^n — некоторое C^∞-многообразие. Для $c \in \mathbf{R}$ будем обозначать тем же символом c и C^∞-функцию, принимающую в каждой точке из U значение c. В силу свойств отображения $\hat{D}$ обязательно $\hat{D}(0) = 0$, а для $c \neq 0$

$$\hat{D}(c) = c\hat{D}(1) = c\hat{D}(1 \cdot 1) = c(\hat{D}(1) + \hat{D}(1)) = 2c\,\hat{D}(1),$$

откуда $\hat{D}(c) = 0$.

Далее покажем, что если $f, \bar{f} \in C^\infty(U)$ и в некоторой окрестности $U' \subset U$ имеет место равенство $f \mid U' = \bar{f} \mid U'$, то

$$\hat{D}(f) = \hat{D}(\bar{f}).$$

Действительно, пусть $p \in U_{\hat{\lambda}} \subset U'$, где $(U_{\hat{\lambda}}, \varphi_{\hat{\lambda}}) \in \mathscr{S}$ и $\varphi_{\hat{\lambda}}(p) = 0$, $\varphi_{\hat{\lambda}}(U_{\hat{\lambda}}) = \operatorname{Int} D^n(3)$ (здесь $D^n(r)$ — шар радиуса r). С помощью «колоколообразной» функции Ψ, принимающей в точке x значение $\Phi(|x|)$, определим для $f \in C^\infty(U)$ функцию $\Psi(f) \in C^\infty(U)$

[1]) Точнее, C^r-вложении; иными словами, $h\colon \operatorname{Int} D^n \to h(\operatorname{Int} D^n)$ есть C^r-диффеоморфизм. — *Прим. ред.*

следующим образом:

$$\Psi(f)(q)=\begin{cases}\Psi(\varphi_{\hat\lambda}(q))\,f(q) & (q\in U_{\hat\lambda}),\\ 0 & (q\in U-U_{\hat\lambda}).\end{cases}$$

Тогда $\Psi(f)=\Psi(1)\cdot f$ и по условию $\Psi(f)=\Psi(\bar f)$. Отсюда

$$f-\bar f=(1-\Psi(1))(f-\bar f).$$

Следовательно,

$$\hat D(f)-\hat D(\bar f)=\hat D((1-\Psi(1))(f-\bar f)=$$
$$=(1-\Psi(1))(p)\,\hat D(f-\bar f)+(f-\bar f)(p)\,\hat D(1-\Psi(1))=0.$$

Это и означает, что $\hat D(f)=\hat D(\bar f)$.

Если теперь $f\in C^\infty(U)$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\varphi_\lambda(U_\lambda)$, то

$$f\circ\varphi_\lambda^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=$$
$$=f(p)+\sum_i\frac{\partial(f\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_i}(0)\,x_i+\sum_{i,j}f_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,x_ix_j$$

(см. комментарии, примечание 2.3). Определенные на $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ функции f_{ij} принадлежат классу C^∞. Каждая координата x_i определяет C^∞-функцию $\hat x_i$: $U\to\mathbf{R}$, и, аналогично, функция $f_{ij}\circ\varphi_\lambda$: $U_\lambda\to\mathbf{R}$ определяет C^∞-функцию $\widehat{f_{ij}\circ\varphi_\lambda}$: $U\to\mathbf{R}$, для которой в некоторой окрестности точки p имеет место равенство $\widehat{f_{ij}\circ\varphi_\lambda}=f_{ij}\circ\varphi_\lambda$. С помощью этих функций $\hat x_i$ и $\widehat{f_{ij}\circ\varphi_\lambda}$ можно определить функцию $\hat f\in C^\infty(U)$ равенством

$$\hat f(q)=f(p)+\sum_i\frac{\partial(f\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_i}(0)\,\hat x_i(q)+\sum_{i,j}\widehat{f_{ij}\circ\varphi_\lambda}(q)\,\hat x_i(q)\,\hat x_j(q),$$

и так как в некоторой окрестности точки p функции $\hat f$ и f совпадают, то

$$\hat D(f)=\hat D(\hat f).$$

Поэтому в силу линейности отображения $\hat D$

$$\hat D(f)=\hat D(f(p))+\sum_i\frac{\partial(f\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_i}(0)\,\hat D(\hat x_i)+\sum_{i,j}\hat D((\widehat{f_{ij}\circ\varphi_\lambda})\,\hat x_i\hat x_j).$$

Примем во внимание теперь, что, согласно сказанному выше, $\hat D(f(p))=0$ и

$$\hat D((\widehat{f_{ij}\circ\varphi_\lambda})\,\hat x_i\hat x_j)=\hat x_i(p)\,\hat x_j(p)\,\hat D(\widehat{f_{ij}\circ\varphi_\lambda})+$$
$$+\widehat{f_{ij}\circ\varphi_\lambda}(p)\,\hat x_j(p)\,\hat D(\hat x_i)+\widehat{f_{ij}\circ\varphi_\lambda}(p)\,\hat x_i(p)\,\hat D(\hat x_j)=0+0+0=0.$$

Поэтому

$$\hat{D}(f) = \sum_i \frac{\partial (f \circ \varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_i}(0)\, \hat{D}(\hat{x}_i).$$

Полагая

$$\Phi_\lambda(v) = \hat{D}(\hat{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{D}(\hat{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \hat{D}(\hat{x}_n)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

получаем

$$D_v(f) = \hat{D}(f) \qquad (f \in C^\infty(U)),$$

что и требовалось. □

Благодаря этой теореме можно отождествить v и D_v и считать $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_n$ базисом в $\Phi_\lambda(T_p(M^n))$ [1]).

Множество $T(M^n)$ всех касательных векторов к M^n называется *касательным пространством* или *пространством касательных векторов* многообразия M^n:

$$T(M^n) = \bigcup_{p \in M} T_p(M^n).$$

Если $v, v' \in T(M^n)$ и $v \in T_p(M^n)$, $v' \in T_{p'}(M^n)$, то лишь при $p = p'$ имеет смысл сумма $v + v'$, при этом она является вектором из $T_p(M^n)$.

Отображение

$$\pi\colon \ T(M^n) \to M^n,$$

при котором $v \in T_p(M^n)$ переходит в $\pi(v) = p$ (и, следовательно, $\pi(T_p(M^n)) = p$), называется *проекцией*.

Касательное пространство $T(M^n)$, таким образом, является объединением бесконечного множества n-мерных векторных пространств; это позволяет естественным образом ввести на $T(M^n)$ структуру C^{r-1}-многообразия.

---

[1]) В $\mathbf{R}^n$ символ $\partial/\partial x_i$ имеет два смысла: его можно понимать как единичный вектор оси x_i и как операцию дифференцирования, скажем, при $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Как легко видеть,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = D_{\partial/\partial x_i},$$

где слева $\partial/\partial x_i$ понимается как операция, а справа — как вектор.

Если теперь в области $U_\lambda \subset M^n$ введены локальные координаты φ_λ и $\varphi_\lambda(p) = 0$, то, рассматривая $f \in C^\infty(U_\lambda)$ как функцию от $(x_1, \ldots, x_n)$ (т. е. переходя от f к $f \circ \varphi_\lambda^{-1}$), можно говорить об отображении $\partial/\partial x_i$: $C^\infty(U_\lambda) \to \mathbf{R}$. Оно обладает всеми свойствами отображения $\hat{D}$ из теоремы 2.7 и, следовательно, совпадает с D_v при некотором $v \in T_p(M^n)$. Этот вектор v и обозначается снова через $\partial/\partial x_i$. — *Прим. ред.*

Пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$ — локальная система координат на M^n. Рассмотрим множество $\pi^{-1}(U_\lambda) = \bigcup_{p \in U_\lambda} T_p(M^n)$. Для произвольной точки p из U_λ определено рассмотренное выше отображение Φ_λ: $T_p(M^n) \to \mathbf{R}^n$. Это позволяет определить соответствие

$$\tilde{\Phi}_\lambda: \ \pi^{-1}(U_\lambda) \to \varphi_\lambda(U_\lambda) \times \mathbf{R}^n = V_\lambda \times \mathbf{R}^n \qquad (\lambda \in \Lambda),$$

при котором для $v \in T_p(M^n)$

$$\tilde{\Phi}_\lambda(v) = (\varphi_\lambda(p), \Phi_\lambda(v)).$$

Это соответствие взаимно однозначно и[1])

$$\tilde{\Phi}_\lambda \,|\, T_p(M) = \Phi_\lambda.$$

Множество $V_\lambda \times \mathbf{R}^n$ является открытым в $\mathbf{R}^{2n}$. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ перенесем на $\pi^{-1}(U_\lambda)$ топологию с помощью $\tilde{\Phi}_\lambda$ так, чтобы $\tilde{\Phi}_\lambda$ оказалось гомеоморфизмом.

Для этого заметим, что если $(U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathscr{S}$, $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$, то определено отображение

$$\tilde{\Phi}_\mu \circ \tilde{\Phi}_\lambda^{-1}: \ \tilde{\Phi}_\lambda(\pi^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu)) \to \tilde{\Phi}_\mu(\pi^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu)),$$

которое в силу (**) выглядит так:

$$(\tilde{\Phi}_\mu \circ \tilde{\Phi}_\lambda^{-1})(x, (v_1, v_2, \ldots, v_n)) = ((\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})(x), (v_1', v_2', \ldots, v_n')),$$

где

$$v_i' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} v_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, таким способом оказывается определенной топология на $\pi^{-1}(U_\lambda)$, $\pi^{-1}(U_\mu)$, причем на общей части $\pi^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu)$ введенная топология одна и та же. В силу сказанного множества $\pi^{-1}(U_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ определяют топологию на $T(M^n)$ и это определение корректно[2]). Топологическое пространство $T(M^n)$ обладает счетной базой и является хаусдорфовым.

Если $\tilde{\mathscr{S}} = \{(\pi^{-1}(U_\lambda), \tilde{\Phi}_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}$, то, принимая во внимание, что $V_\lambda \times \mathbf{R}^n$ — открытое подмножество в $\mathbf{R}^{2n}$ и $\tilde{\Phi}_\mu \circ \tilde{\Phi}_\lambda^{-1}$ является

---

[1]) $\tilde{\Phi}_\lambda$ есть пара $(\varphi_\lambda, \Phi_\lambda)$; но для всех $v \in T_p(M)$ первый элемент этой пары один и тот же; поэтому, рассматривая $\tilde{\Phi}_\lambda \,|\, T_p(M)$, его можно не учитывать. — *Прим. ред.*

[2]) Открытыми множествами в $T(M^n)$ являются те и только те множества, которые имеют открытые пересечения со всеми $\pi^{-1}(U_\lambda)$. — *Прим. ред.*

C^{r-1}-отображением, легко заметить, что $\tilde{\mathscr{S}}$ удовлетворяет условиям ($\mathrm{M_I}$), ($\mathrm{M_{II}}$) и тем самым задает на $T(M^n)$ систему локальных C^{r-1}-координат. Следовательно, так как $\tilde{\mathscr{S}}$ содержится в максимальной системе локальных C^{r-1}-координат, пространство касательных векторов $T(M^n)$ многообразия M^n является $2n$-мерным C^{r-1}-многообразием. Очевидно, что проекция π: $T(M^n) \to M^n$ является C^{r-1}-отображением.

Пусть $(M^n, \mathscr{S})$ есть n-мерное C^r-многообразие ($r \geqslant 1$). Если $\mathscr{S}$ обладает подмножеством $\mathscr{S}'$ с указанными ниже свойствами (i), (ii), то M^n называется *ориентируемым*.

(i) $\{U_\lambda; (U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}'\}$ является открытым покрытием для M^n;

(ii) если $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ для каких-либо $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, (U_μ, φ_μ) из $\mathscr{S}'$ и, в прежних обозначениях, $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, то якобиан $\left|\dfrac{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|$ для всех $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| > 0.$$

Например, сфера S^n с системой координат $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm);\ i=1, 2, \ldots, n+1\}$ из § 9, рассматриваемой в качестве $\mathscr{S}'$, является ориентируемым многообразием [1]). Аналогично, является ориентируемым многообразием и тор (§ 9, пример 3).

Пусть M^n — ориентируемое многообразие. В касательном пространстве $T_p(M^n)$ для каждой точки $p \in M^n$ фиксируем определенную ориентацию [2]) таким образом, что если $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}'$, $p_1, p_2 \in U_\lambda$, то при отображении Φ_λ ориентации в $T_{p_1}(M^n)$ и $T_{p_2}(M^n)$ переходят в одну и ту же ориентацию в $\mathbf{R}^n$. Когда таким образом фиксируется ориентация в каждом $T_p(M^n)$ ($p \in M^n$), говорят, что многообразие M^n *ориентировано*. Так как в $T_p(M^n)$ можно выбрать лишь две ориентации, су-

---

[1]) Точнее, для того чтобы получить систему $\mathscr{S}'$, удовлетворяющую (i), (ii), надо немножко изменить определение $\varphi_i^\pm$: если раньше в $U_i^\pm$ использовались координаты $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, то теперь в U_i^+ какую-нибудь одну из этих координат надо умножить на $(-1)^{i-1}$, а в U_i^- — на $(-1)^i$. — *Прим. ред.*

[2]) В любом n-мерном векторном пространстве V совокупность всех базисов можно разбить на два класса, относя два базиса к одному классу тогда и только тогда, когда у соответствующей матрицы перехода определитель положителен. Выбрать ориентацию в V — это значит фиксировать один из этих двух классов и объявить, что базисы из этого класса считаются ориентированными положительно, а из другого класса — отрицательно. При изоморфизме двух n-мерных векторных пространств базисы одного класса переходят снова в базисы одного класса, так что можно говорить, что при этом ориентация одного пространства переходит в некоторую ориентацию другого пространства. — *Прим. ред.*

ществует ровно два способа такого выбора для всего M^n с таким расчетом, чтобы эта ориентация изменялась непрерывно[1]). Многообразие M^n, снабженное определенной ориентацией, будем обозначать снова через M^n; если же при этом понадобится обозначить противоположную ориентацию того же многообразия (она получается, когда в каждом $T_p(M^n)$ берется противоположная ориентация), будем писать $-M^n$.

Пусть $(M_1^n, \mathscr{S}_1)$, $(M_2^m, \mathscr{S}_2)$ — два C^r-многообразия, $r \geqslant 1$, и

$$g\colon\ M_1^n \to M_2^m$$

— некоторое C^r-отображение. Если $p \in M_1^n$ и в пространстве касательных векторов $T_p(M_1^n)$ выбран элемент $v = [l]$ ($l\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to M_1^n$, $l(0) = p$), то определено C^1-отображение

$$g \circ l\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to M_2^m,$$

при котором $g \circ l(0) = g(p)$; тем самым в точке $g(p)$ на M_2^m оказывается определенным касательный вектор $[g \circ l]$.

Пусть $p \in U_\lambda$, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}_1$, и $g(p) \in U'_{\lambda'}$, $(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'}) \in \mathscr{S}_2$; пусть, далее, для $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \varphi_\lambda(U_\lambda \cap g^{-1}(U'_{\lambda'}))$

$$\varphi'_{\lambda'} \circ g \circ \varphi_\lambda^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Наконец, пусть

$$(\varphi_\lambda \circ l)(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)), \quad t \in l^{-1}(U_\lambda),$$

$$(\varphi'_{\lambda'} \circ g \circ l)(t) = (\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t), \ldots, \hat{u}_m(t)), \quad t \in (g \circ l)^{-1}(U'_{\lambda'}).$$

Тогда

$$\frac{d\hat{u}_i}{dt}(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\varphi_\lambda(p)) \frac{du_j}{dt}(0) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

и поэтому из $l \sim \bar{l}$ вытекает $g \circ l \sim g \circ \bar{l}$. Следовательно, класс $[g \circ l]$ определен вектором $v = [l]$ однозначно. Вместо $[g \circ l]$ пишут $g_*(v)$, и тем самым определяется отображение

$$g_*\colon T_p(M_1^n) \to T_{g(p)}(M_2^m) \qquad (p \in M_1^n).$$

В силу сказанного выше, если

$$\Phi_\lambda(v) = (v_1, v_2, \ldots, v_n),$$
$$\Phi'_{\lambda'}(g_*(v)) = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_m),$$

то

$$(****) \qquad v'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\varphi_\lambda(p))\, v_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

[1]) Здесь предполагается, что M^n связно. Непрерывность, строго говоря, означает именно то, что в пределах одной координатной системы соответствующее Φ_λ переводит ориентации, избранные в $T_p(M)$, в одну и ту же ориентацию $\mathbb{R}^n$. — *Прим. ред.*

и поэтому отображение g_* n-мерного векторного пространства $T_p(M_1^n)$ в m-мерное векторное пространство $T_{g(p)}(M_2^m)$ является линейным.

Если теперь v — элемент из $T(M_1^n)$, то естественным образом определен $g_*(v)$, а потому и отображение

$$g_*\colon T(M_1^n) \to T(M_2^m).$$

Отображение g_* называется *дифференциалом* отображения g и обозначается также через dg.

Многообразия $T(M_1^n)$ и $T(M_2^m)$ принадлежат классу C^{r-1} и потому в силу (****) g_* является C^{r-1}-отображением.

Теорема 2.8. *C^r-отображение $g\colon M_1^n \to M_2^m$ $(r \geqslant 1)$ является C^r-иммерсией тогда и только тогда, когда для каждой точки p из M_1^n при отображении $g_*\colon T_p(M_1^n) \to T_{g(p)}(M_2^m)$ имеет место равенство $g_*^{-1}(0) = 0$. Далее, g является C^r-субмерсией тогда и только тогда, когда для каждой точки p из M_1^n имеет место равенство $g_*(T_p(M_1^n)) = T_{g(p)}(M_2^m)$.*

Доказательство. В силу соотношений (****), указанных выше, равенство $g_*^{-1}(0) = 0$ эквивалентно тому, что ранг матрицы Якоби $\dfrac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ в точке $\varphi_\lambda(p)$ равен n. Далее равенство $g_*(T_p(M_1^n)) = T_{g(p)}(M_2^m)$ эквивалентно тому, что ранг этой матрицы Якоби в точке $\varphi_\lambda(p)$ равен m. Следовательно, утверждение теоремы 2.8 вытекает из определений иммерсии и субмерсии. □

Пусть $g\colon M_1^n \to M_2^m$ — некоторый C^r-диффеоморфизм[1] $(r \geqslant 1)$ ориентированных C^r-многообразий M_1^n, M_2^m. Если в каждой точке p из M_1^n базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из $T_p(M_1^n)$, ориентированный в силу ориентации на M_1^n, переходит в базис $g_*(e_1)$, $g_*(e_2), \ldots, g_*(e_n)$ из $T_{g(p)}(M_2^m)$, ориентация которого совпадает с ориентацией на M_2^m, то g называется C^r-диффеоморфизмом, *сохраняющим ориентацию.*

Пусть $(M^n, \mathscr{S})$ — некоторое C^r-многообразие, $r \geqslant 1$, и W^q — его q-мерное подмногообразие. Для точки p из W^q пусть

$$l^W\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\ \to M^n$$

— некоторое C^1-отображение, причем

$$l^W(0) = p, \qquad l^W(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset W^q.$$

Обозначим через $T_p(W^q)$ множество всех касательных векторов $[l^W]$ в точке p, определяемых такими кривыми l^W. Заметим, что $T_p(W^q) \subset T_p(M^n)$ и существует $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$, $p \in U_\lambda$, такая, что

[1]) Так что $n = m$. — *Прим. ред.*

$\varphi_\lambda(W^q \cap U_\lambda) = \varphi_\lambda(U_\lambda) \cap \mathbf{R}^q$, а отсюда следует, что $T_p(W^q)$ является q-мерным подпространством в n-мерном пространстве $T_p(M^n)$. В соответствии с теоремой 2.3(i) $T_p(W^q)$ можно рассматривать как касательное пространство к q-мерному C^r-многообразию W^q в точке $p \in W^q$.

Пусть W_1^q, W_2^{n-q} — два подмногообразия в M^n. Если для $p \in W_1^q \cap W_2^{n-q}$ имеет место равенство

$$T_p(M^n) = T_p(W_1^q) \oplus T_p(W_2^{n-q}),$$

то W_1^q и W_2^{n-q} называются *трансверсально пересекающимися* в точке p.

Пусть далее W, W', M^n — некоторые C^r-многообразия ($r \geqslant 1$) и g: $W \to M^n$, g': $W' \to M^n$ — некоторые C^r-иммерсии. Если для каждой точки $p = g(x) = g'(x')$ ($p \in M^n$, $x \in W$, $x' \in W'$) из $g(W) \cap g'(W')$ имеет место равенство

$$g_*(T_x(W)) + g'_*(T_{x'}(W')) = T_p(M^n),$$

то иммерсии g, g' называются *трансверсальными*.

Пусть теперь $(M^n, \mathscr{S})$ — некоторое C^s-многообразие, $s \geqslant 1$. Если отображение

$$X\colon\ M^n \to T(M^n)$$

таково, что композиция

$$\pi \circ X\colon\ M^n \to M^n,$$

где π: $T(M^n) \to M^n$ — проекции, является тождественным отображением, то говорят, что X является *векторным полем* на M^n. Если в описанной ситуации M^n и $T(M^n)$ рассматривать как C^r-многообразия, $r \leqslant s-1$, и X является C^r-отображением, то X называется *векторным C^r-полем* или *векторным полем класса C^r*. Отображение X ставит в соответствие каждой точке p на M^n некоторый касательный вектор $X(p) \in T_p(M^n)$. В этом смысле векторное поле X можно записывать и так:

$$\{X(p);\ p \in M^n\}.$$

Например, в § 3 многообразие M^n было тором T, на котором рассматривалось векторное поле X.

Если для некоторого векторного поля X в некоторой точке p вектор $X(p)$ будет равен нулю, то поле X называется *особым*, а точка p — *нулевой* или *особой точкой*, *особенностью* этого поля. Если же в каждой точке p обязательно $X(p) \neq 0$, то векторное поле X называется *неособым*.

Если W^q — подмногообразие размерности q в M^n, то на W^q можно определить векторное C^r-поле $Y = \{Y(p);\ p \in W^q\}$ со значениями в $T(M^n)$ как C^r-отображение

$$Y\colon\ W^q \to T(M^n),$$

при котором
$$(\pi \circ Y)(p) = p \qquad (p \in W^q).$$
Если на $(n-1)$-мерном подмногообразии W^{n-1} векторное C^r-поле Y со значениями в $T(M^n)$ таково, что в каждой точке p из W^{n-1} вектор $Y(p)$ не принадлежит $T_p(W^{n-1})$, то Y называется *трансверсальным к W^{n-1} векторным C^r-полем*. Ограничение на W^{n-1} векторного C^r-поля X на многообразии M^n, т. е. $X \mid W^{n-1} = \{X(p);\ p \in W^{n-1}\}$, также является векторным C^r-полем. Если оно трансверсально к W^{n-1}, то X называется *трансверсальным к W^{n-1} векторным C^r-полем*.

Если вместо подмногообразия W^{n-1} рассмотреть образ $f(W'^{n-1})$ $(n-1)$-мерного C^s-многообразия W'^{n-1} при взаимно однозначной C^s-иммерсии $f\colon W'^{n-1} \longrightarrow M^n$, то совершенно аналогично можно будет определить векторное C^r-поле на $f(W'^{n-1})$ со значениями в $T(M^n)$ и трансверсальность векторного C^r-поля со значениями в $T(M^n)$ по отношению к $f(W'^{n-1})$.

Пусть M^n — многообразие класса C^r, $r \geqslant 1$, и $T(M^n)$ — касательное пространство к M^n. Пусть для каждой точки p из M^n в касательном пространстве $T_p(M^n)$ задано скалярное произведение
$$\langle v,\ v' \rangle_p \qquad (v,\ v' \in T_p(M^n)),$$
с помощью которого на C^{r-1}-многообразии $T(M^n)$ можно определить вещественнозначную функцию
$$g\colon T(M^n) \longrightarrow \mathbf{R},$$
положив
$$g(v) = \langle v,\ v \rangle_p \qquad (v \in T_p(M^n)).$$
Если g является C^{r-1}-функцией, то эта система скалярных произведений
$$\{\langle\ ,\ \rangle_p;\ p \in M^n\}$$
называется *римановой метрикой* на M^n.

Для $v \in T_p(M^n)$ число $\sqrt{\langle v,\ v \rangle_p}$ назовем *длиной* вектора v и будем обозначать его через $\| v \|$. Если два вектора $v, v' \in T_p(M^n)$ таковы, что $\langle v,\ v' \rangle_p = 0$, то будем называть их *ортогональными*.

Пусть W есть q-мерное подмногообразие в M^n. В силу теоремы 2.3(i) W является q-мерным C^r-многообразием; поэтому, если на M^n задана риманова метрика и $p \in W$, $v,\ v' \in T_p(W)$, то $\langle v,\ v' \rangle_p$ задает риманову метрику и на W.

В случае n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ и $p \in \mathbf{R}^n$, $v, v' \in T_p(\mathbf{R}^n)$ можно положить $v = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $v' = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i' \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ и определить на $T_p(\mathbf{R}^n)$ скалярное произведение равенством

$$\langle v, v' \rangle_p = \sum_{i=1}^{n} v_i v_i';$$

этим и будет определена *риманова метрика* на $\mathbf{R}^n$.

Теорема 2.9. *Любое C^r-многообразие M^n ($r \geqslant 1$) обладает римановой метрикой.*

Доказательство. Рассмотрим случай компактного многообразия M^n. Пусть $\mathcal{S} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}$ — система локальных координат. Так как M^n компактно, существует конечное множество значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \Lambda$, таких, что $\{U_{\lambda_i};\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ является открытым покрытием для M^n. Пусть μ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) — разбиение единицы, подчиненное этому открытому покрытию; для $p \in M^n$, $v, v' \in T_p(M^n)$ определим $\langle v, v' \rangle_p$ следующим образом:

$$\langle v, v' \rangle_p = \sum_i \mu_i(p) \langle (\varphi_{\lambda_i})_*(v),\ (\varphi_{\lambda_i})_*(v') \rangle_{\varphi_{\lambda_i}(p)},$$

где $\langle\ ,\ \rangle_{\varphi_{\lambda_i}(p)}$ — указанное выше скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$ и суммирование $\sum\limits_i$ распространяется на те U_{λ_i}, которые содержат p. Легко проверить, что таким образом оказывается определенной риманова метрика.

Случай некомпактного M^n рассматривается аналогично. Мы опускаем соответствующее ему доказательство существования римановой метрики (см. комментарии, примечание 2. 4). □

Пусть M^n есть n-мерное C^r-многообразие с римановой метрикой. Пусть далее α, β — вещественные числа и

$$\varphi\colon [\alpha, \beta] \to M^n$$

— некоторая C^r-кривая, $r \geqslant 1$. Для каждого t, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, обозначим через $\boldsymbol{e}_t$ единичный касательный вектор к $[\alpha, \beta]$ в точке, соответствующей выбранному значению t. Интеграл

$$\int_\alpha^\beta \| \varphi_*(\boldsymbol{e}_t) \| \, dt$$

называется *длиной C^r-кривой* φ.

Пусть многообразие M^n линейно связно. Тогда для любых двух его точек p, p' можно указать такой набор вещественных чисел $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m$ и C^r-кривых

$$\varphi_i\colon [\alpha_{i-1}, \alpha_i] \to M^n \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

что $\varphi_1(\alpha_0)=p$, $\varphi_m(\alpha_m)=p'$, $\varphi_i(\alpha_i)=\varphi_{i+1}(\alpha_i)$ $(i=1, 2, \ldots, m-1)$. Набор кривых $\{\varphi_i\}$ называется в этом случае C^r-*ломаной* между точками p и p'. Число

$$L(\{\varphi_i\})=\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i}\|(\varphi_i)_*(e_t)\|\,dt$$

называется *длиной* ломаной $\{\varphi_i\}$. Определим число $\rho(p, p')$ следующим равенством:

$$\rho(p, p')=\inf L(\{\varphi_i\}),$$

где нижняя грань берется по множеству всех C^r-ломаных, связывающих точки p и p'. Функция ρ является *метрикой* на M^n,

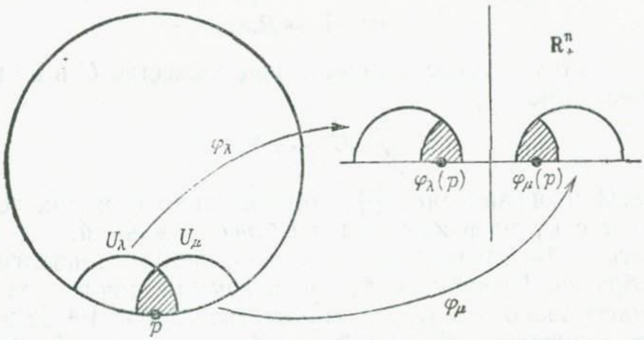


Рис. 2.9.

и тем самым многообразие M^n оказывается также метрическим пространством. Топология, определенная на M^n этой метрикой, совпадает с топологией многообразия M^n. Соответствующие доказательства провести нетрудно (см. комментарии, примечание 2.5).

§ 11. C^r-многообразия с краем

Пусть D^n есть n-мерный шар и p — его точка. Если $p\in \operatorname{Int} D^n$, то это означает, что существует окрестность точки p, принадлежащая D^n и гомеоморфная некоторому открытому множеству из $\mathbf{R}^n$. Само же множество $\operatorname{Int} D^n$ является n-мерным C^∞-многообразием. Если p принадлежит границе S^{n-1} шара D^n, то в $\mathbf{R}^n$ не существует открытого множества, гомеоморфного какой-либо окрестности точки p, целиком принадлежащей D^n (рис. 2.9). К рассмотрению этого свойства шара D^n мы сейчас и приступим, для чего несколько расширим определение C^r-многообразия, сформулированное в § 9.

Множество $\mathbf{R}_+^n=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\mathbf{R}^n, x_n\geqslant 0\}$ принято называть *верхней полуплоскостью* пространства $\mathbf{R}^n$. Пространство $\mathbf{R}^{n-1}$, определяемое равенством

$$\mathbf{R}^{n-1}=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\mathbf{R}_+^n;\ x_n=0\},$$

является подмножеством в $\mathbf{R}_+^n$.

Пусть M — хаусдорфово пространство со счетной базой. Если у каждой точки p пространства M существует окрестность U, гомеоморфная открытому множеству в $\mathbf{R}_+^n$, то M называется *n-мерным топологическим многообразием*. Шар D^n является, таким образом, n-мерным топологическим многообразием (рис. 2.9).

Пусть A — подмножество в $\mathbf{R}^n$, B — подмножество в $\mathbf{R}^m$ и задано отображение

$$\varphi\colon\ A\to B.$$

Если существует такое открытое подмножество U в $\mathbf{R}^n$ и такое C^r-отображение

$$\hat{\varphi}\colon\ U\to\mathbf{R}^m,$$

что $A\subset U$ и ограничение $\hat{\varphi}\,|\,A$ отображения $\hat{\varphi}$ на множество A совпадает с φ, то φ называется *C^r-отображением*.

Пусть M^n — определенное выше n-мерное топологическое многообразие. Предположим, что в качестве множества индексов фиксировано некоторое множество Λ и в M^n заданы открытые множества U_λ, $\lambda\in\Lambda$, снабженные гомеоморфизмами $\varphi_\lambda\colon U_\lambda\to V_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$, где V_λ — открытые множества в $\mathbf{R}_+^n$. Составим из U_λ и φ_λ пару $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ и обозначим через $\mathscr{S}$ множество всех таких пар, $\mathscr{S}=\{(U_\lambda, \varphi_\lambda);\ \lambda\in\Lambda\}$. Если множество $\mathscr{S}$ обладает перечисляемыми ниже свойствами $(\mathrm{M}'_{\mathrm{I}})$, $(\mathrm{M}'_{\mathrm{II}})$, $(\mathrm{M}'_{\mathrm{III}})$, то оно называется *системой локальных C^r-координат на M^n*.

$(\mathrm{M}'_{\mathrm{I}})$ $\{U_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ является открытым покрытием многообразия M^n.

$(\mathrm{M}'_{\mathrm{II}})$ Если $U_\lambda\cap U_\mu\neq\varnothing$ $(\lambda, \mu\in\Lambda)$, то введенные выше отображения

$$\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1}\colon\ \varphi_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)\to\varphi_\mu(U_\lambda\cap U_\mu),$$
$$\varphi_\lambda\circ\varphi_\mu^{-1}\colon\ \varphi_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)\to\varphi_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)$$

принадлежат классу C^r (рис. 2.9).

$(\mathrm{M}'_{\mathrm{III}})$ Множество $\mathscr{S}$ является максимальным по включению среди всех множеств таких пар.

Многообразие M^n с определенной на нем системой C^r-координат $\mathscr{S}$ составляют пару $(M^n, \mathscr{S})$, называемую *n-мерным C^r-многообразием*. Вместо $(M^n, \mathscr{S})$ часто пишут просто M^n.

Элемент $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ множества $\mathscr{S}$ называется *координатной окрестностью.*

Точка p из M^n, принадлежащая такому множеству U_λ, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$, что $\varphi_\lambda(p) \in \mathbf{R}^{n-1}$, называется *краевой точкой* многообразия M^n. Множество всех краевых точек многообразия M^n обозначается через ∂M^n и называется *краем* этого многообразия. Например, $\partial D^n = S^{n-1}$.

Если многообразие M^n таково, что $\partial M^n = \varnothing$, то M^n называется *C^r-многообразием без края.* В этом случае множества $V_\lambda = \varphi_\lambda(U_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ являются открытыми подмножествами в $\mathbf{R}^n_+ - \mathbf{R}^{n-1}$ и, следовательно, открытыми множествами в $\mathbf{R}^n$; поэтому $(M^n, \mathscr{S})$ оказывается n-мерным C^r-многообразием и в смысле определения § 9. Очевидно, что и, наоборот, всякое n-мерное C^r-многообразие в смысле § 9 является C^r-многообразием без края. Компактное C^r-многообразие без края называется *замкнутым.*

Если же многообразие M^n таково, что $\partial M^n \neq \varnothing$, то оно называется *$C^r$-многообразием с краем.* Легко заметить, что в этом случае край ∂M^n является $(n-1)$-мерным топологическим многообразием в смысле § 9. Имеющиеся в M^n локальные координаты, рассматриваемые на ∂M^n, дают нам систему локальных координат в ∂M^n — множество $\{(U_\lambda \cap \partial M^n), \varphi_\lambda | (U_\lambda \cap \partial M^n); \lambda \in \Lambda\}$, которое удовлетворяет условиям $(\mathrm{M_I})$, $(\mathrm{M_{II}})$ из § 9. Следовательно, содержащее его соответствующее максимальное по включению множество является в смысле § 9 системой локальных C^r-координат на ∂M^n. Будем обозначать эту систему координат, естественно связанную с $(M^n, \mathscr{S})$, через $\partial\mathscr{S}$; очевидно, что $(\partial M^n, \partial\mathscr{S})$ является $(n-1)$-мерным C^r-многообразием.

Для C^r-многообразий с краем аналогично тому, как это было сделано в § 9, вводятся понятия *C^r-отображения, C^r-диффеоморфизма, C^r-диффеоморфности, C^r-иммерсии, C^r-вложения, подмногообразия* [1]).

Пусть $(M^n, \mathscr{S})$ — некоторое C^r-многообразие и t_1, t_2 — вещественные числа или $\pm\infty$, причем $t_1 < t_2$. Если l — одно из

[1]) Для многообразий с краем, как и без края, подмногообразия могут пониматься в различных смыслах. Помимо того, о чем говорится в примечании на стр. 75, здесь возникает еще такой вопрос: следует ли считать окружность $(x-1)^2 + y^2 = 1$ подмногообразием правой полуплоскости $\{(x, y); x \geqslant 0\}$? При более широком определении подмногообразия (Стернберг [1*]; оно дословно переносится на многообразия с краем) ответ положительный. Если же для многообразий без края понимать подмногообразия в более узком смысле (как у автора), то для многообразий с краем естественно (хотя и не обязательно) принять определение, довольно жестко ограничивающее, как подмногообразия могут быть расположены у края,— см. Рохлин — Фукс [1*]. Тогда указанная окружность не будет считаться подмногообразием правой полуплоскости.— *Прим. ред.*

одномерных C^r-многообразий $[t_1, t_2[$, $[t_1, t_2]$, $]t_1, t_2]$, $]t_1, t_2[$, то всякое C^r-отображение $l \longrightarrow M^n$ называют *C^r-кривой* на многообразии M^n.

Пусть $(M^n, \mathscr{S})$ есть C^r-многообразие с краем. Если $p \in M^n - \partial M^n$, то точно так же, как в § 10, можно определить касательное пространство $T_p(M^n)$ к многообразию M^n в точке p. В случае $p \in \partial M^n$ на множестве всех одномерных C^r-многообразий в ∂M^n, получающихся с помощью C^r-отображений

$$l\colon [0, \varepsilon[\longrightarrow M^n, \qquad l(0) = p,$$

можно определить отношение эквивалентности $\sim$ точно так же, как это делалось в § 10. Класс этой эквивалентности $v = [l]$ и будет касательным вектором к M^n в точке p. Если $p \in U_\lambda$, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$, то точно так же, как в § 10, определяются $\Phi_\lambda(v)$, причем в данном случае, если $\Phi_\lambda(v) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, то $v_n \geqslant 0$. Если $v_n > 0$, то можно ввести формальный вектор $-v$ и положить $\Phi_\lambda(-v) = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n)$. Множество всех векторов $v = [l]$, касательных к M^n в точке p, в совокупности с векторами $-v$, о которых только что шла речь, будем обозначать через $T_p(M^n)$ и заметим, что $\Phi_\lambda\colon T_p(M^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ является взаимно однозначным отображением. Таким образом, на $T_p(M^n)$ вводится структура n-мерного векторного пространства аналогично тому, как это было сделано в § 10.

Следуя § 10, на $T(M^n) = \bigcup\limits_{p \in M^n} T_p(M^n)$ можно ввести структуру $(2n)$-мерного C^{r-1}-многообразия, причем $\partial(T(M^n)) = \bigcup\limits_{p \in \partial M^n} T_p(M^n)$. Продолжая аналогично § 10, можно ввести проекцию $\pi\colon T(M^n) \longrightarrow M^n$, которая окажется C^{r-1}-отображением, и понятия векторного C^r-поля и неособого векторного поля.

Аналогичными будут и определения ориентируемости многообразия M^n, дифференциала g_*, римановой метрики.

Рассмотрим ориентируемое C^r-многообразие M^n, для которого $\partial M^n \neq \varnothing$. Если $p \in M^n$, $p \in U_\lambda$, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}'$, то ориентацию на $T_p(M^n)$ зададим векторами

$$\Phi_\lambda^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \Phi_\lambda^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \ldots, \Phi_\lambda^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Если $p \in \partial M^n$, то

$$\Phi_\lambda^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \Phi_\lambda^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \ldots, \Phi_\lambda^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)$$

задают ориентацию и на $T_p(\partial M^n)$, благодаря чему ∂M^n оказывается ориентируемым многообразием. Согласно сказанному, всякая ориентация на M^n определяет ориентацию и на ∂M^n. Последнюю можно умножить на $(-1)^n$ (в смысле теории гомологий), т. е. в зависимости от четности числа n оставить прежней или изменить на противоположную. Полученная таким образом ориентация на ∂M^n называется ориентацией края, *индуцированной* [1]) исходной ориентацией на M^n. Изменение ориентации на множитель $(-1)^n$ будет фигурировать в § 27 в связи с теоремой Стокса.

[1]) Определение индуцированной ориентации будет выглядеть естественнее и проще для запоминания, если перефразировать его следующим образом. Пусть $p \in \partial M^n$ и $a_1, \ldots, a_n$ — положительно ориентированный базис $T_p(M^n)$, причем вектор a_1 трансверсален к краю ∂M^n и направлен «наружу» (т. е. в используемых автором локальных координатах, в которых точки M^n характеризуются условием $x_n \geqslant 0$, этот вектор имеет отрицательную компоненту по оси x_n), а векторы $a_2, \ldots, a_n$ лежат в $T_p(\partial M^n)$. Тогда базис $a_2, \ldots, a_n$ пространства $T_p(\partial M^n)$ определяет положительную ориентацию последнего.— *Прим. ред.*

Глава 3

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 12. Динамические системы

Пусть $(M^n, \mathscr{S})$ есть n-мерное C^s-многообразие и $X=\{X(p); p\in M^n\}$ — векторное C^r-поле на нем. Предположим, что $1\leqslant r\leqslant \leqslant s-1$. Векторное C^r-поле X называется *динамической C^r-системой*[1]) на M^n.

Пусть t_1, t_2 — вещественные числа или $\pm\infty$, причем $t_1<t_2$, и

$$\varphi\colon\ ]t_1,\ t_2[\ \to M^n$$

— C^{r+1}-кривая на M^n.

Выберем число ε так, чтобы при $t_1<t<t_2$ выполнялось $t_1<t-\varepsilon<t+\varepsilon<t_2$, и рассмотрим ограничение

$$\varphi\,|\,]t-\varepsilon,\ t+\varepsilon[\colon\ ]t-\varepsilon,\ t+\varepsilon[\ \to M^n.$$

С его помощью в точке $\varphi(t)$ многообразия M^n определяется не зависящий от ε касательный вектор $[\varphi\,|\,]t-\varepsilon,\ t+\varepsilon[]$. Обозначим его через[2]) $v(\varphi,\ t)$ и назовем вектором, *касательным* к кривой φ в точке $\varphi(t)$ (рис. 3.1).

Если $\varphi_*\colon T\,(]t_1,\ t_2[)\to T(M)$ — дифференциал отображения φ и e_t — единичный касательный вектор к $]t_1,\ t_2[$ в точке t (см. § 10), то

$$\varphi_*(e_t)=v(\varphi,\ t).$$

Если в каждой точке t из $]t_1,\ t_2[$ имеет место равенство

$$v(\varphi,\ t)=X(\varphi(t)),$$

---

[1]) Может возникнуть вопрос: если векторное поле уже названо векторным полем, зачем называть его еще динамической системой?

Динамической системой (с непрерывным временем) или потоком на множестве M называют такое семейство преобразований Ψ_t $(t\in\mathbf{R})$ на M, что Ψ_0 — тождественное преобразование и $\Psi_{t+s}=\Psi_t\circ\Psi_s$. При этом, конечно, накладывают различные дополнительные требования — непрерывности, гладкости и т. д.

Векторное поле X на замкнутом многообразии определяет некоторую динамическую систему Ψ_t (см. теорему 3.1). По определению гладкие динамические системы класса C^r — это те, которые определяются векторными полями класса C^r. Поэтому и можно, допуская известную вольность речи, говорить о векторном поле как о динамической системе. — *Прим. ред.*

[2]) Обычно его обозначают просто через $d\varphi(t)/dt$ или $\dot\varphi(t)$. — *Прим. ред.*

то φ называется *траекторией* или *интегральной кривой* [1]) поля X.

Если $t_1 < 0 < t_2$ и $\varphi(0) = p$, то говорят, что p является *начальной точкой* интегральной кривой поля X.

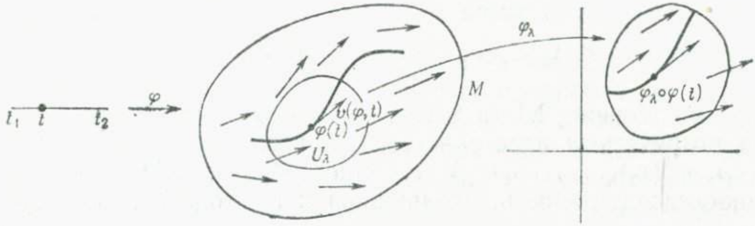


Рис. 3.1

Пусть $\bar{t}$ — точка из $]t_1, t_2[$, $\varphi(\bar{t}) \in U_\lambda$, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$; пусть для вектора $X(q)$ поля X в любой точке q из U_λ имеет место равенство

$$\Phi_\lambda(X(q)) = (v_1(q), v_2(q), \ldots, v_n(q)),$$

где Φ_λ — отображение из § 10.

Если φ — интегральная кривая поля X, то можно записать

$$(\varphi_\lambda \circ \varphi)(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)) \qquad (t \in \varphi^{-1}(U_\lambda)).$$

Тогда в силу определения Φ_λ (§ 10)

$$(*) \qquad \frac{du_i}{dt}(t) = v_i(\varphi(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Обратно, если C^{r+1}-кривая φ на многообразии M такова, что для любого $\bar{t} \in]t_1, t_2[$ имеет место $(*)$ при $\varphi(\bar{t}) \in U_\lambda$, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$, то φ является интегральной кривой поля X.

Пусть в дальнейшем M^n обозначает некоторое замкнутое C^r-многообразие, а p — его точку, причем $p \in U_\lambda$, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$. Аналогично тому, как это было в случае векторного поля на торе в § 3, в соответствии с теоремой о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, на некотором интервале $]-\tau, \tau[$ уравнения $(*)$ имеют решение, и притом единственное,

$$\psi\colon]-\tau, \tau[\to \varphi_\lambda(U_\lambda), \qquad \psi(0) = \varphi_\lambda(p)$$

с начальной точкой $\varphi_\lambda(p)$. Отображение ψ принадлежит классу C^{r+1}. Отображение $\varphi_1\colon]-\tau, \tau[\to M^n$, определенное равен-

[1]) Говорят также, что φ есть *решение* дифференциального уравнения $\dot{\varphi} = X(\varphi)$. — *Прим. ред.*

ством $\varphi_\lambda \circ \varphi_1(t) = \psi(t)$, является интегральной кривой поля X с начальной точкой p. Тем же символом φ_1 будем обозначать и интегральную кривую, которую сейчас получим продолжением построенной кривой на участок $]-\infty, \infty[$.

Пусть φ_1: $]-\tau, \tau[\to M^n$ — интегральная кривая поля X и последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ такова, что

$$-\tau < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < \ldots < \tau, \qquad \lim_{m\to\infty} x_m = \tau.$$

Согласно теореме 2.1 (в § 10 говорилось о том, что M^n является метрическим пространством), в последовательности точек $\varphi_1(x_1), \varphi_1(x_2), \ldots, \varphi_1(x_m), \ldots$ многообразия M^n содержится подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке. Пусть это

$$\varphi_1(x_{i_1}),\ \varphi_1(x_{i_2}),\ \ldots,\ \varphi_1(x_{i_m}),\ \ldots,\qquad \lim_{m\to\infty}\varphi_1(x_{i_m}) = \bar{p}.$$

Пусть $\bar{p} \in U_\mu$, $(U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathscr{S}$, и для точки q' из U_μ вектор $X(q')$ поля X в соответствующих локальных координатах есть

$$\Phi_\mu(X(q')) = (\bar{v}_1(q'), \bar{v}_2(q'), \ldots, \bar{v}_n(q')).$$

Для упомянутой выше интегральной кривой φ поля X при $t \in \varphi^{-1}(U_\mu)$ имеем $(\varphi_\mu \circ \varphi)(t) = (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t), \ldots, \bar{u}_n(t))$, где $\bar{u}_i$ должны удовлетворять уравнениям

$$(**)\qquad \frac{d\bar{u}_i}{dt}(t) = \bar{v}_i(\varphi(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Совершенно аналогично тому, как это было в § 2, 3, используя теорему о существовании и единственности решения для обыкновенных дифференциальных уравнений, для точки $\varphi_\mu(\bar{p})$ можно указать окрестность $V \subset \varphi_\mu(U_\mu)$ и положительное число δ, такие, что для любой точки $\bar{q} \in V$ существует решение системы (**)

$$\bar{\psi}:\ ]-\delta, \delta[\to \varphi_\mu(U_\mu), \qquad \bar{\psi}(0) = \bar{q},$$

с начальной точкой $\bar{q}$.

Пусть $x_{i_m} \in]-\tau, \tau[$ таково, что $|x_{i_m} - \tau| < \frac{\delta}{2}$, $\varphi_1(x_{i_m}) \in U_\mu$, $\varphi_\mu(\varphi_1(x_{i_m})) \in V$; тогда в соответствии со сказанным выше существует

$$\bar{\psi}_0:\ ]-\delta, \delta[\to \varphi_\mu(U_\mu),$$

задающее решение системы (**) с начальной точкой $\varphi_\mu(\varphi_1(x_{i_m}))$.

С помощью $\bar{\psi}_0$ определим

$$\varphi_2:\ ]-\tau, x_{i_m} + \delta[\to M,$$

положив

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}\varphi_1(t), & -\tau<t\leqslant x_{i_m},\\ \varphi_{\bar\mu}^{-1}(\bar\psi_0(t-x_{i_m})), & x_{i_m}\leqslant t<x_{i_m}+\delta.\end{cases}$$

Согласно теореме о существовании и единственности решения для обыкновенных дифференциальных уравнений, φ_2 является интегральной кривой поля X с начальной точкой p. Так как $x_{i_m}+\delta>\tau+\delta/2$, последовательно применяя описанный способ построения как в положительном, так и в отрицательном направлении изменения t, мы определим интегральную кривую поля X на участке $]-\infty, \infty[$ с начальной точкой p. Будем обозначать эту кривую так:

$$\varphi_{\{p\}}\colon\ ]-\infty,\ \infty[\ \to M^n \qquad (p\in M^n).$$

В силу единственности решения интегральная кривая $\varphi_{\{p\}}$ является единственно возможной.

В главе 1 вместо $\varphi_{\{p\}}(t)$ мы писали $\varphi(t, p)$. В § 3 интегральные кривые $\varphi(t, p)$ $(-\infty<t<\infty)$ были рассмотрены в случае, когда многообразие M^n является тором.

Теорема 3.1. *Пусть X—динамическая C^r-система на замкнутом n-мерном C^s-многообразии M^n $(1\leqslant r\leqslant s-1)$. Тогда*

(i) *Через любую точку p на M^n как через начальную проходит, и притом только одна, интегральная кривая $\varphi_{\{p\}}\colon\ ]-\infty,\ \infty[\ \to M^n$. Эта кривая принадлежит классу C^{r+1}.*

(ii) *Для каждого $t\in\mathbf{R}$ равенство $\Psi_t(p)=\varphi_{\{p\}}(t)$ определяет отображение $\Psi_t\colon M^n\to M^n$. При этом Ψ_0 является тождественным отображением и $\Psi_{t_1}\circ\Psi_{t_2}=\Psi_{t_1+t_2}$ (т. е. $\varphi_{\{\varphi_{\{p\}}(t_2)\}}(t_1)=$ $=\varphi_{\{p\}}(t_1+t_2)$).*

(iii) *Равенство $\Psi(t,\ p)=\varphi_{\{p\}}(t)$ определяет отображение $\Psi\colon \mathbf{R}\times M^n\to M^n$. Это отображение принадлежит классу C^r.*

Доказательство. Утверждение (i) следует из сказанного выше. Утверждения (ii) и (iii) вытекают из единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения и возможности дифференцирования решения по начальным условиям. □

Образ отображения $\varphi_{\{p\}}$—множество точек $\{\varphi_{\{p\}}(t);$ $-\infty<t<\infty\}$—будем обозначать через $C(p)$ и называть *траек-*

торией поля X, проходящей через точку p [1]). В силу теоремы 3.1 (ii), если $p' \in C(p)$, то $C(p') = C(p)$.

Пусть $\varphi_{\{p\}}$: $]-\infty, \infty[\to M$ — интегральная кривая поля X с начальной точкой p. Если $X(p) \neq 0$ и существует $t > 0$, при котором $\varphi_{\{p\}}(t) = p$, то обозначим через $t_0 > 0$ минимальное значение τ, такое, что $\varphi_{\{p\}}(\tau) = p$ и при $0 < t < \tau$ обязательно $\varphi_{\{p\}}(t) \neq p$ [2]). В силу теоремы 3.1 (ii)

$$C(p) = \{\varphi_{\{p\}}(t);\ 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$$

и множество $C(p)$ компактно. В этом случае интегральная кривая $\varphi_{\{p\}}$ называется *замкнутой*, а траектория $C(p)$ — *периодической* или *замкнутой*. Когда p является особой точкой поля X, т. е. $X(p) = 0$, при любом $-\infty < t < \infty$ имеет место равенство $\varphi_{\{p\}}(t) = p$ и, следовательно, $C(p) = \{p\}$.

Для интегральной кривой $\varphi_{\{p\}}$ можно определить ω-*предельное множество*

$$L^+(p) = \bigcap_{0 \leqslant s < \infty} \overline{\{\varphi_p(t);\ s \leqslant t < \infty\}}$$

и α-*предельное множество*

$$L^-(p) = \bigcap_{-\infty < s \leqslant 0} \overline{\{\varphi_p(t);\ -\infty < t \leqslant s\}};$$

α-предельное множество и ω-предельное множество называются также просто *предельными множествами*. Если M^n компактно, то $L^-(p)$ и $L^+(p)$ являются непустыми замкнутыми множествами в M^n, так как общая часть любого конечного числа замкнутых множеств, из которых составляются рассматриваемые пересечения, представляет собой непустое множество.

Пусть A — подмножество в M^n. Если для всякой точки p из A кривая $\varphi_{\{p\}}(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ принадлежит A, то A называется *инвариантным множеством* динамической системы X. Например, замкнутая траектория является инвариантным множеством. Кроме того, α-предельное множество $L^-(p)$

---

[1]) В русской литературе эта терминология выдерживается не очень строго: траекторией часто называют само отображение $\varphi_{\{p\}}$, а интегральной кривой — его образ $C(p)$. — *Прим. ред.*

[2]) Такое минимальное значение существует ввиду непрерывности $\varphi(t)$. Легко доказать, что $\varphi(t) = p$, лишь когда $t = kt_0$, k — целое число. Все такие t называют *периодами* соответствующей траектории, а t_0 — *минимальным периодом*; впрочем, часто под периодом понимают именно минимальный период. — *Прим. ред.*

и ω-предельное множество $L^+(p)$ также инвариантны. Доказывается это точно так же, как и в случае тора теорема 1.3. Если инвариантное непустое множество A не содержит инвариантных множеств, отличных от него самого и пустого множества, то A называется *минимальным* множеством.

Теорема 3.2. *В прежних условиях и обозначениях предельные множества $L^\pm(p)$ являются связными.*

Доказательство. Проведем доказательство для $L^+(p)$. Множество $L^+(p)$ компактно как замкнутое подмножество в компактном пространстве M^n. Предположим, что $L^+(p)$ не связно, т. е. в нем существуют два непустых замкнутых подмножества L_1, L_2, такие, что $L^+(p)=L_1\cup L_2$ и $L_1\cap L_2=\varnothing$. Так как M^n — хаусдорфово пространство и L_1, L_2 компактны, в M^n существуют открытые множества U_1, U_2, такие, что

$$U_1\supset L_1, \qquad U_2\supset L_2, \qquad U_1\cap U_2=\varnothing.$$

Так как L_1, L_2 являются подмножествами ω-предельного множества, существуют последовательности вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$, для которых

$$\lim_{m\to\infty} x_m=\infty, \qquad \lim_{m\to\infty} \varphi_{\{p\}}(x_m)=x\in L_1,$$
$$\lim_{m\to\infty} y_m=\infty, \qquad \lim_{m\to\infty} \varphi_{\{p\}}(y_m)=y\in L_2.$$

Заменяя при необходимости эти последовательности на их подпоследовательности, построим последовательность

$$x_1<y_1<x_2<y_2<\ldots<x_m<y_m<\ldots,$$

для которой

$$\varphi_{\{p\}}(x_m)\in U_1, \quad \varphi_{\{p\}}(y_m)\in U_2 \quad (m=1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как $U_1\cap U_2=\varnothing$ и $x_m<y_m$, обязательно существует такое z_m, $x_m<z_m<y_m$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$, что

$$\varphi_{\{p\}}(z_m)\in M^n-U_1-U_2.$$

Так как множество $M^n-U_1-U_2$ компактно, в соответствии с теоремой 2.1 существует подпоследовательность последовательности $\varphi_{\{p\}}(z_1)$, $\varphi_{\{p\}}(z_2)$, $\ldots$, $\varphi_{\{p\}}(z_m)$, $\ldots$, сходящаяся к некоторой точке a из $M^n-U_1-U_2$. Следовательно, $a\in L^+(p)$. Противоречие. Таким образом, $L^+(p)$ — связное множество. Точно так же доказывается связность множества $L^-(p)$. □

§ 13. Динамические системы на двумерной сфере и теорема Пуанкаре — Бендиксона

Пусть X — динамическая C^r-система на двумерной сфере S^2 $(r \geqslant 1)$. Обозначим, как обычно, через $L^{\pm}(p)$ предельные множества траектории, проходящей через точку p. Если p — особая точка, то $L^{\pm}(p)=\{p\}$; если интегральная кривая $\varphi_{\{p\}}$ замкнута, то $L^{\pm}(p)=C(p)$. Следующая теорема Пуанкаре — Бендиксона описывает все предельные множества $L^{\pm}(p)$ динамической системы X.

Теорема 3.3. *Для произвольной точки p из S^2 каждое из множеств $L^{\pm}(p)$ либо содержит особую точку, либо является замкнутой траекторией.*

Доказательство. В случае когда $\varphi_{\{p\}}$ — замкнутая траектория, теорема уже доказана. Предположим, что $\varphi_{\{p\}}$ не является замкнутой и что в множестве $L^+(p)$ нет особых точек. Так как $L^+(p)$ инвариантно, для произвольной точки $p' \in L^+(p)$ имеет место включение $C(p') \subset L^+(p)$. Точно так же, как в лемме 1.16, можно доказать, что $C(p')$ — замкнутая траектория. Поэтому в силу предположения $L^+(p)-C(p') \neq \varnothing$. Если бы $L^+(p)-C(p')$ было замкнутым множеством, то соотношения $L^+(p)=(L^+(p)-C(p')) \cup C(p')$, $(L^+(p)-C(p')) \cap C(p')=\varnothing$ при, очевидно, замкнутом множестве $C(p')$ противоречили бы теореме 3.2. Но если $L^+(p)-C(p')$ не является замкнутым в $L^+(p)$, то его замыкание $\overline{L^+(p)-C(p')}$, также принадлежащее $L^+(p)$, содержит точку кривой $C(p')$. Пусть

$$a \in \overline{L^+(p)-C(p')} \cap C(p'),$$

и пусть U — достаточно малая окрестность точки a. Можно считать, что U — подмножество плоскости $\mathbf{R}^2$. Согласно предположению, точка a не является особой; поэтому через a можно провести отрезок прямой l, перпендикулярный вектору $X(a)$ (см. рис. 3.2). Так как окрестность U достаточно мала, можно считать, что векторы $X(q)$ при $q \in U$ изменяются незначительно и при возрастании t интегральные кривые поля X пересекают отрезок l в одном и том же направлении. В силу того что $a \in \overline{L^+(p)-C(p')}$, существует точка $b \in L^+(p)-C(p')$, расположенная сколь угодно близко к a. Пусть $b \in U$. Обозначим через c точку пересечения с l интегральной кривой $\varphi_{\{b\}}$, определяемой начальной точкой b. Так как $L^+(p)$ — инвариантное множество, имеет место включение $c \in L^+(p)$. Если бы $c \in C(p')$, то и $b \in C(p')$, что невозможно; поэтому $c \notin C(p')$. Следовательно, на l существуют две различные точки из $L^+(p)$ — точки a и c.

Так как $a \in L^+(p)$, существует числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$, такая, что

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < \ldots, \qquad \lim_{m\to\infty} x_m = \infty,$$

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{\{p\}}(x_m) = a, \qquad \varphi_{\{p\}}(x_m) \in U.$$

Следовательно, кривая $\{\varphi_{\{p\}}(t);\ t > 0\}$ пересекает отрезок l в бесконечном множестве точек.

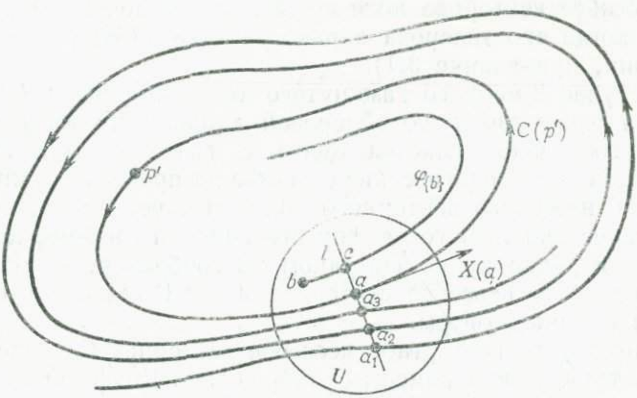


Рис. 3.2

Пусть t_1 — минимальное значение t, при котором $\{\varphi_{\{p\}}(t);\ t > 0\}$ пересекает l, и $a_1 = \varphi_{\{p\}}(t_1)$; пусть $a_2 = \varphi_{\{p\}}(t_2)$ — следующая точка пересечения с l кривой $\varphi_{\{p\}}(t)$ при дальнейшем увеличении t (рис. 3.2). Продолжая таким образом, фиксируем на l точки пересечения $a_i = \varphi_{\{p\}}(t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (рис. 3.2).

Объединение кривой $\{\varphi_{\{p\}}(t);\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$ и участка $\overline{a_1 a_2}$ из отрезка l является простой замкнутой кривой на S^2, которая в силу теоремы Жордана разделяет S^2 на две части. Кривая $\{\varphi_{\{p\}}(t);\ t_2 < t < \infty\}$ находится в одной из них; поэтому $a_3 = \varphi_{\{p\}}(t_3)$ и a_1 лежат по разные стороны от a_2 (рис. 3.2). Совершенно аналогично и в общем случае можно показать, что a_{i+1} и a_{i-1} лежат по разные стороны от a_i $(i = 2, 3, \ldots)$. Следовательно, точки $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$, расположенные на l в этом порядке, таковы, что

$$\lim_{m\to\infty} a_m = a.$$

Но равенство

$$l \cap L^+(p) = a$$

невозможно, так как оно противоречит тому, что $l \cap L^+(p) \ni a, c$. Следовательно, $L^+(p) = C(p')$. Аналогично рассматривается случай $L^-(p)$. $\square$

§ 14. Динамическая система Швейцера на трехмерной сфере

Пусть M — замкнутое n-мерное C^s-многообразие. Известно, что неособое векторное поле существует на нем тогда и только тогда, когда его эйлерова характеристика $\chi(M)$ равна 0 (комментарии, примечание **3**.1).

В случае 2-мерного замкнутого ориентируемого C^s-многообразия равенство нулю эйлеровой характеристики означает, что многообразие является тором. В главе 1 были описаны траектории и топологические свойства их предельных множеств в случае неособого векторного поля на торе. Далее, эйлерова характеристика любого замкнутого 1-мерного и 3-мерного многообразия равна нулю. На таком многообразии, следовательно, существует неособое векторное поле. Рассмотрим сначала случай 3-мерной сферы.

Существует стандартное неособое векторное C^∞-поле X_H на S^3, конструируемое с помощью отображения Хопфа. Опишем его.

Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) — точка на S^3; тогда, вводя комплексные числа $z_1 = x_1 + ix_2$ и $z_2 = x_3 + ix_4$, можно описать S^3 равенством

$$S^3 = \{(z_1, z_2);\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Если (z_1, z_2), $(z_1', z_2') \in S^3$ и

$$z_1' = z_1 e^{i\theta}, \quad z_2' = z_2 e^{i\theta} \quad (0 \leqslant \theta < 2\pi),$$

то положим

$$(z_1, z_2) \sim (z_1', z_2'),$$

чем определим отношение $\sim$ на S^3; ясно, что оно является отношением эквивалентности. Мы будем рассматривать множество всех классов этой эквивалентности и для (z_1, z_2) будем обозначать соответствующий класс эквивалентности через $[z_1, z_2]$. Для каждого класса эквивалентности $[z_1, z_2]$ имеет место включение $(2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),\ 2\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2),\ |z_1^2| - |z_2^2|) \in S^2$, т. е. каждому такому классу этим способом можно поставить в соответствие точку на S^2. Описанное соответствие является взаимно однозначным и потому S^2 можно рассматривать как множество всех классов эквивалентности, введенных выше[1]).

Отображение

$$\pi\colon S^3 \to S^2,$$

определенное равенством

$$\pi((z_1, z_2)) = [z_1, z_2],$$

является C^∞-отображением и называется *отображением Хопфа*.

В силу определения прообраз любой точки $[z_1, z_2]$ из S^2 задается равенством

$$\pi^{-1}([z_1, z_2]) = \{(z_1 e^{i\theta}, z_2 e^{i\theta});\ 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$$

и потому C^∞-гомеоморфен окружности S^1.

Для точки (z_1, z_2) на S^3 определим кривую

$$l^{(z_1, z_2)}\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to S^3$$

равенством

$$l^{(z_1, z_2)}(t) = (z_1 e^{it}, z_2 e^{it}) \quad (-\varepsilon < t < \varepsilon);$$

тогда $[l^{(z_1, z_2)}]$ можно рассматривать как касательный вектор к S^3 в точке (z_1, z_2). Этим на S^3 определяется векторное поле

$$X_H = \{X_H((z_1, z_2));\ (z_1, z_2) \in S^3\},$$

где

$$X_H((z_1, z_2)) = [l^{(z_1, z_2)}].$$

Ясно, что X_H — неособое C^∞-поле.

Для всякой точки (z_1, z_2) из S^3 интегральная кривая $\varphi_{(z_1, z_2)}$ поля X_H, для которой точка (z_1, z_2) является начальной[2]), содержится в прообразе $\pi^{-1}([z_1, z_2])$; поэтому траек-

---

[1]) Отображение $(z_1, z_2) \mapsto z_1/z_2$ переводит S^3 в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ — обычную плоскость комплексного переменного, пополненную бесконечно удаленной точкой. Далее применяется стереографическая проекция: $\mathbf{C}$ отождествляем с плоскостью $\mathbf{R}^2$, которую вкладываем в $\mathbf{R}^3$ (как $\{(x_1, x_2, 0)\}$), и проектируем ее на сферу $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ посредством лучей, проходящих через «северный полюс» $(x_3 = 1)$ последней. Соответствующие формулы таковы:

$$\infty \mapsto (0, 0, 1); \quad u + iv \mapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right).$$

Композиция $S^3 \mapsto \mathbf{C} \cup \infty \to S^2$ и является тем отображением, которое использует автор. — *Прим. ред.*

[2]) Заметим, кстати, что $\varphi_{(z_1, z_2)}(t) = (z_1 e^{it}, z_2 e^{it})$, — поле X_H строилось с таким расчетом, чтобы его интегральные кривые были именно таковы. — *Прим. ред.*

тория $C((z_1, z_2))$ совпадает с $\pi^{-1}([z_1, z_2])$:

$$C((z_1, z_2)) = \pi^{-1}([z_1, z_2]),$$

а это означает, что все траектории поля X_H замкнуты.

В 1950 г. Зейферт доказал, что у всякого неособого C^r-поля, $r \geqslant 1$, на S^3, получающегося при незначительном изменении поля X_H, существует по крайней мере одна замкнутая траектория. Из-за этого результата возникла гипотеза, называемая *гипотезой Зейферта*: *верно ли, что у всякого неособого векторного C^r-поля, $r \geqslant 1$, на S^3 имеются периодические траектории*? В 1972 г. Швейцер построил векторное C^1-поле, доставляющее отрицательное решение гипотезы Зейферта.

Теорема 3.4. *На S^3 существует векторное C^1-поле, не имеющее периодических траекторий.*

Доказательство этой теоремы мы начнем с построения некоторого векторного поля класса C^∞ на S^3, имеющего лишь одну периодическую траекторию.

$[z_1, 0]$ есть некоторая точка на S^2. На множестве $S^3 - \pi^{-1}([z_1, 0])$ определим отображение

$$\eta\colon S^3 - \pi^{-1}([z_1, 0]) \to \mathbf{R}^2 \times S^1$$

с помощью равенства

$$\eta((z_1, z_2)) = \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{|z_2|}\right).$$

(Здесь $z_1/z_2 \in \mathbf{C}$, а $\mathbf{C}$ отождествляем с $\mathbf{R}^2$; далее $|z_2/|z_2|| = 1$, а множество комплексных чисел w с $|w| = 1$ отождествляем с S^1.) Тогда η является C^∞-гомеоморфизмом. В случае $(z_1, z_2) \in S^3 - \pi^{-1}([z_1, 0])$ положим $\eta((z_1, z_2)) = ((x, y), e^{i\theta}) \in \mathbf{R}^2 \times S^1$ и определим C^∞-кривую

$$\tilde{l}^{(z_1, z_2)}\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to S^3 - \pi^{-1}([z_1, 0])$$

с помощью равенства

$$\tilde{l}^{(z_1, z_2)}(t) = \eta^{-1}((x + t, y), e^{i\theta}) \quad (-\varepsilon < t < \varepsilon).$$

После этого введем на S^3 векторное поле X_1' следующим образом:

если $(z_1, z_2) \in S^3 - \pi^{-1}([z_1, 0])$, то $X_1'((z_1, z_2)) = [\tilde{l}^{(z_1, z_2)}]$;
если $(z_1, z_2) \in \pi^{-1}([z_1, 0])$, то $X_1'((z_1, z_2)) = 0$. Ясно, что X_1' является векторным полем класса C^∞.

Определим теперь на S^3 неособое векторное C^∞-поле X_1, положив

$$X_1((z_1, z_2)) = X_H((z_1, z_2)) + X_1'((z_1, z_2)).$$

Очевидно, что дифференциал π_*: $T(S^3) \to T(S^2)$ отображения π дает равенство

$$\pi_*(X_H((z_1, z_2))) = 0.$$

В силу определения кривой $\tilde{l}^{(z_1, z_2)}$ из эквивалентности $(z_1, z_2) \sim \sim (z_1', z_2')$ следует равенство

$$\pi_*(X_1'((z_1, z_2))) = \pi_*(X_1'((z_1', z_2'))).$$

Поэтому

$$\pi_*(X_1((z_1, z_2))) = \pi_*(X_1((z_1', z_2'))).$$

Если элементу $[z_1, z_2] \in S^2$ поставить в соответствие вектор $Y_1([z_1, z_2]) = \pi_*(X_1((z_1, z_2)))$, воспользовавшись любым пред-

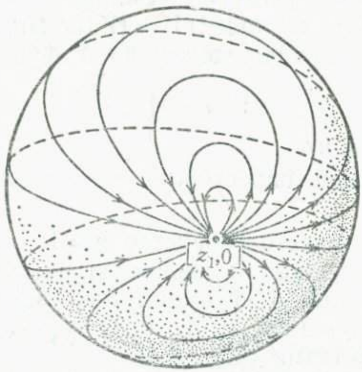


Рис. 3.3.

ставителем (z_1, z_2), то на S^2 окажется определенным векторное C^∞-поле Y_1 [1]). В точке $[z_1, 0]$ поле Y_1 имеет особенность; его интегральные кривые таковы, что (см. рис. 3.3) все предельные множества равны $[z_1, 0]$. Замкнутых интегральных кривых у поля Y_1 нет.

Если $(z_1, z_2) \in S^3$ — начальная точка интегральной кривой $\varphi_{\{(z_1, z_2)\}}$ поля X_1, то в силу определения поля Y_1, точка $\pi((z_1, z_2))$ является начальной для интегральной кривой $\pi \circ \varphi_{\{(z_1, z_2)\}}$ поля Y_1. Учитывая, что $(z_1 e^{i\theta}, 0) \in \pi^{-1}([z_1, 0])$, легко заметить, что траектория $C((z_1 e^{i\theta}, 0))$ поля X_1, проходящая через точку $(z_1 e^{i\theta}, 0)$, совпадает с $\pi^{-1}([z_1, 0])$ и поэтому является замкнутой. Если же $(z_1', z_2') \notin \pi^{-1}([z_1, 0])$, то пре-

[1]) В гладкости Y_1, по-видимому, проще всего убедиться с помощью непосредственных вычислений. Именно, вычислив при $t=0$ скорость движения точки $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, являющейся стереографической проекцией некоторой точки $(x+t, y)$ на сферу S^2, найдем, что эта скорость есть $(1-x_3-x_1^2, -x_1x_2, (1-x_3)x_1)$, где $x_i = x_i(0)$ $(i=1, 2, 3)$. — *Прим. ред.*

дельные множества кривой $\varphi_{\{(z_1', z_2')\}}$ совпадают с $\pi^{-1}([z_1, 0])$, и поэтому траектория $C((z_1', z_2'))$ не является замкнутой. Следовательно, единственной замкнутой траекторией поля X_1 является $\pi^{-1}([z_1, 0])$.

Чтобы построить векторное C^1-поле, о котором говорится в теореме 3.4, нужны некоторые изменения векторного поля X_1. При этом будет использоваться векторное C^1-поле Данжуа на торе из § 6.

Пусть X_D — построенное в теореме 1.12 векторное C^1-поле Данжуа на торе T и C — его траектория. Так как $\overline{C} \neq T$, существует C^∞-вложение $j\colon \operatorname{Int} D^2 \to T$, при котором $\overline{j(\operatorname{Int} D^2)} \subset T - \overline{C}$.

Положив $N = T - j(\operatorname{Int} D^2)$ (см. рис. 3.6), построим на $N \times [-2, 2]$ векторное C^1-поле [1] $Y = \{Y((x, t)); x \in N, t \in [-2, 2]\}$.

Для этого сначала определим на N функцию

$$\gamma\colon N \to [0, 1]$$

класса C^∞, такую, что

(i) в некоторой окрестности множества ∂N имеет место равенство $\gamma = 0$;

(ii) на $\overline{C}$ имеет место равенство $\gamma = 1$.

(Такую функцию γ, как и вводимую ниже функцию ρ, легко определить с помощью C^∞-функции Φ из леммы 1.5.) Кроме того, введем C^∞-функцию $\rho\colon [-2, 2] \to [-1, 1]$, обладающую следующими свойствами (рис. 3.4):

(i) $\rho(-t) = -\rho(t)$;

(ii) в окрестности точек $0, \pm 2$ имеет место равенство $\rho(t) = 0$;

(iii) $\rho(-1) = 1$, $\rho(1) = -1$;

(iv) при $t \neq \pm 1$ обязательно $|\rho(t)| < 1$.

Для каждой пары $(x, t) \in N \times [-2, 2]$ определим вектор $\boldsymbol{e}_t$ как единичный касательный вектор к кривой, которую точка (x, t) пробегает при изменении t по отрезку $[-2, 2]$, а затем положим

$$Y((x, t)) = \rho(t)\gamma(x) X_D(x) + (1 - |\rho(t)|\gamma(x))\, \boldsymbol{e}_t$$

---

[1] Строго говоря, $N \times [-2, 2]$ не является многообразием с краем (его «край» имеет «углы»), поэтому формально не определено, что такое векторное поле на $N \times [-2, 2]$, тем более поле класса C^1. Подобные вопросы отпадают, если заметить, что $T \times [-2, 2]$ реализуется как «утолщенный тор» в $\mathbf{R}^3$, а тем самым $N \times [-2, 2]$ можно представлять себе как соответствующую область в $\mathbf{R}^3$. Надо предупредить, что на самом деле будет использоваться другое вложение $N \times [-2, 2]$ в $\mathbf{R}^3$ — вложение $g \circ \kappa^{-1}$ ниже, но это никак не повлияет на гладкость, ибо $g \circ \kappa^{-1}$ продолжается до C^∞-*вложения* $U \to \mathbf{R}^3$ *некоторой окрестности* U (в $\mathbf{R}^3$) множества $N \times [-2, 2]$ (расположенного пока что так, как сказано выше). — *Прим. ред.*

(см. комментарии, примечание 3.2). Поле

$$Y = \{Y((x, t));\ x \in N,\ t \in [-2, 2]\}$$

является неособым векторным C^1-полем на $N \times [-2, 2]$, причем в некоторой окрестности множества $(\partial N \times [-2, 2]) \cup (N \times \times (\{-2\} \cup \{2\}))$, т. е. границы $N \times [-2, 2]$ как области в $\mathbf{R}^3$, имеет место равенство $Y((x, t)) = \boldsymbol{e}_t$.

Если $(x, -2) \in N \times \{-2\}$, то вектор $Y((x, -2))$ направлен внутрь $N \times [-2. 2]$; поэтому при $\tau \geqslant 0$ определена интеграль-

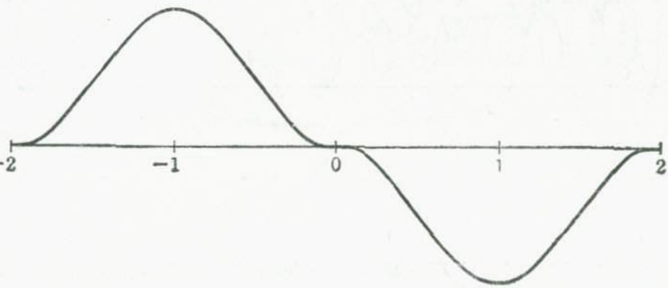


Рис. 3.4.

ная кривая [1]) $\varphi_{\{(x, -2)\}}(\tau)$ поля Y. Компонента $(1 - |\rho(t)|\gamma(x))\,\boldsymbol{e}_t$ поля $Y((x, t))$ является неотрицательной при изменении t по отрезку $[-2, 2]$, причем при $(x, \pm 1) \in \overline{C} \times \{\pm 1\}$ эта компонента равна нулю, а при $(x, t) \in N \times ([-2, 2] - \{\pm 1\})$ является положительной. Далее

$$Y((x, -t)) = -\rho(t)\,\gamma(x)\,X_D(x) + (1 - |\rho(t)|\,\gamma(x))\,\boldsymbol{e}_{-t};$$

поэтому траектории поля Y симметричны относительно $N \times \{0\}$ (см. рис. 3.5) [2]). Следовательно, для интегральной кривой $\varphi_{\{(x, -2)\}}$ при τ, увеличивающемся от нуля, справедливо одно из следующих утверждений (см. рис. 3.5):

(i) Кривая $\varphi_{\{(x, -2)\}}$ достигает точки $(x, 2) \in N \times \{2\}$. *Исходная точка* $(x, -2)$ *и конечная точка* $(x, 2)$ *в силу упомянутой выше симметрии имеют одно и то же* $x \in N$.

---

[1]) Не утверждается, что она определена при всех $\tau \geqslant 0$ — как мы увидим, это не всегда так. (В качестве аргумента у φ («времени») здесь использовано τ, ибо t занято — оно играет роль координаты в $N \times [-2, 2]$.) — *Прим. ред.*

[2]) Пусть $J(x, t) = (x, -t)$; J^2 — тождественное преобразование. J переводит поле Y в поле $(J_* Y)(p) = J(Y(J(p)))$. Из написанной формулы для $Y((x, -t))$ следует, что $(J_* Y)(p) = -Y(p)$. Но если $\varphi(\tau)$ — интегральная кривая поля Y, то $J\varphi(\tau)$ — интегральная кривая поля $J_* Y$. Значит, J переводит траекторию поля Y снова в траекторию поля Y, но с изменением направления движения. — *Прим. ред.*

(ii) Кривая $\varphi_{\{(x,\,-2)\}}$ приближается к $\gamma^{-1}(1)\times\{-1\}$ и никогда не попадает в $N\times\,]-1,\,2]$. В частности, это так при $x\in\overline{C}$.

В случае (ii) ω-предельное множество интегральной кривой $\varphi_{\{(x,\,-2)\}}$ содержится в $\gamma^{-1}(1)\times\{-1\}$. Точно так же можно

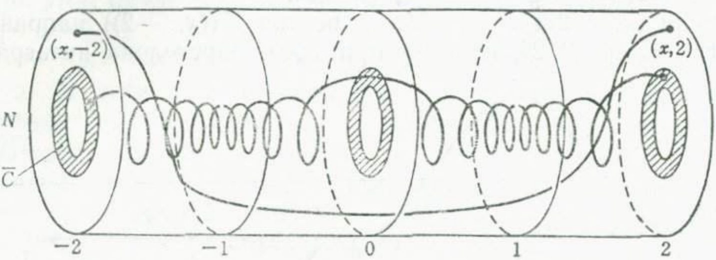


Рис. 3.5.

определить при $t\leqslant 0$ интегральную кривую $\varphi_{\{(x,\,2)\}}$ с начальной точкой $(x,\,2)\in N\times\{2\}$ и аналогично будет иметь место одно из утверждений (i), (ii). В случае справедливости утверждения (ii) α-предельное множество интегральной кривой $\varphi_{\{(x,\,2)\}}$ содержится в $\gamma^{-1}(1)\times\{1\}$. Наконец, в некоторой части $N\times\,]-1,\,1[$ α-предельные множества интегральных кривых поля Y содержатся в $\gamma^{-1}(1)\times\{-1\}$, а их ω-предельные мно-

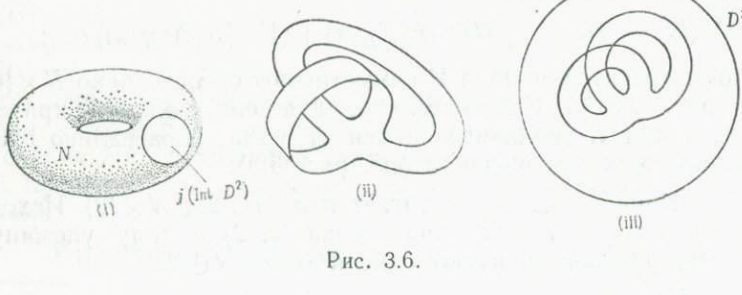


Рис. 3.6.

жества — в $\gamma^{-1}(1)\times\{1\}$ (см. рис. 3.5); другие же интегральные кривые идут от $t=-2$ до $t=2$, проходя при этом через $N\times\,]-1,\,1[$.

На рис. 3.6 (i) указано множество N, которое можно представлять себе таким, как на рис. 3.6 (ii). На рис. 3.6 (iii) изображена иммерсия множества N в круг D^2. Если круг D^2 «утолстить», заменив его на $D^2\times[0,\,\delta]$, то, сдвигая в направлении $[0,\,\delta]$ часть N на рис. 3.6 (iii), легко получить вложение N в $D^2\times[0, \delta]$. Перемещая образ этого вложения вдоль $[0, \delta]$, легко определить C^∞-вложение

$$g\colon N\times[-\varepsilon, \varepsilon]\to D^2\times[0, \delta].$$

Будем обозначать через $\boldsymbol{e}_t$ единичный касательный вектор как в случае $t\in[-\varepsilon, \varepsilon]$, так и в случае $t\in[0, \delta]$; таким образом, если $\boldsymbol{e}_t$ — касательный вектор в точке (x, t) на $N\times[-\varepsilon, \varepsilon]$, то его образ $g_*(\boldsymbol{e}_t)$, являющийся касательным вектором к $D^2\times[0, \delta]$, тоже обозначается через $\boldsymbol{e}_t$. При этом можно обеспечить, чтобы $g(\overline{C}\times\{-\varepsilon\})\cap(\{O\}\times[0, \delta])\neq\varnothing$ (через O обозначен центр круга D^2).

Определим на $D^2\times[0, \delta]$ следующее векторное C^1-поле X_0:

(i) для каждой точки (x, t) на $(D^2\times[0, \delta])-g(N\times]-\varepsilon, \varepsilon[)$ положим $X_0((x, t))=\boldsymbol{e}_t$;

(ii) в точках множества $g(N\times[-\varepsilon, \varepsilon])$ положим $X_0(g(x, t)) = \frac{2}{\varepsilon}g_*(\kappa_*^{-1}(Y(\kappa(x, t))))$, где $\kappa\colon N\times]-\varepsilon, \varepsilon[\to N\times]-2, 2[$ обозначает C^∞-гомеоморфизм, при котором $\kappa(x, t)=\left(x, \frac{2}{\varepsilon}t\right)$.

Для интегральных кривых этого векторного C^1-поля X_0 имеют место аналоги предыдущих пп. (i) и (ii) для интегральных кривых поля Y (если они вообще попадают в $g(N\times]-\varepsilon, \varepsilon[)$). Возьмем какую-нибудь точку на замкнутой траектории $\pi^{-1}([z_1, 0])$ описанного выше векторного C^∞-поля X_1 на S^3, скажем точку $(z_1, 0)$, и возьмем такое вложение $h\colon D^2\to S^3$, что $h(O)=(z_1, 0)$ и вектор $X_1(z_1, 0)$ трансверсален к $h(D^2)$. Далее определим естественным образом вложение[1])

$$\overline{h}\colon D^2\times[0, \delta]\to S^3,$$

при котором для $x\in D^2$ множество $\overline{h}(\{x\}\times[0, \delta])$ является дугой траектории, проходящей через $h(x)$ (см. рис. 3.7). Кроме того,

$$\overline{h}(0, 0)=(z_1, 0);\quad X_1(\overline{h}(x, t))=\overline{h}_*(\boldsymbol{e}_t).$$

---

[1]) Из трансверсальности $X_1(z_1, 0)$ к «площадке» $h(D^2)$ следует, что уменьшив при необходимости эту площадку (т. е. перейдя к вложению $x\longmapsto h(ax)$, $a<1$), мы добьемся, чтобы во всех ее точках векторное поле было трансверсально к ней. Тогда $\overline{h}(x, t)$ получаем сдвигом на время t вдоль исходящей из x траектории поля X_1.

Объекты, аналогичные вложению $\overline{h}$ и его образу, встречаются достаточно часто и заслуживают специального названия. Говорят о *трубке траекторий* или *трубке тока* (стандартный английский термин — flow box). — *Прим. ред.*

Частично корректируя поле X_1 на $\overline{h}(D^2\times[0, \delta])$, определим на S^3 неособое векторное C^1-поле X_S со следующими свойствами:

(i) на $S^3-\overline{h}(D^2\times[0, \delta])$ поле X_S совпадает с X_1;

(ii) для $\overline{h}(x, t)$ $(x\in D^2, t\in[0, \delta])$ имеет место равенство $X_S(\overline{h}(x, t))=\overline{h}_*(X_0((x, t)))$.

Векторное C^1-поле X_S, построенное с помощью замкнутой траектории поля X_1, является на $\overline{h}(D^2\times[0, \delta])$ новым и не

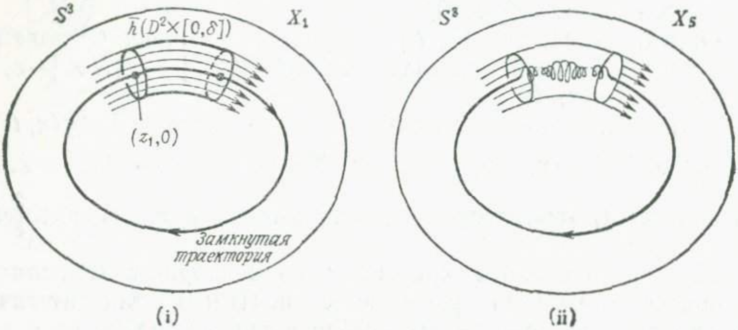


Рис. 3.7.

имеет замкнутых траекторий (рис. 3.7 (ii)). Следовательно, доказана теорема 3.4 [3].

Использованный пример Данжуа имеет гладкость C^1. Теорема Данжуа показывает, что для векторных C^2-полей такого примера быть не может. Поэтому таким способом, как выше, нельзя построить аналогичного примера векторного поля на S^3 класса C^2. Для векторных C^r-полей $(r\geqslant 2)$ проблема Зейферта по сей день остается нерешенной.

§ 15. Динамическая система Вильсона

В предыдущем параграфе было описано доказательство теоремы Швейцера, в котором некоторое стандартное векторное поле на $D^2\times[0, \delta]$ заменялось новым векторным полем, в результате чего разрушались замкнутые траектории. Применяя по существу тот же метод, Вильсон доказал в 1966 г. следующую теорему [1]):

---

[1]) Собственно, у Вильсона теорема является более общей: многообразие не предполагается компактным; оно может иметь край — тогда поле X предполагается трансверсальным к краю; наконец, в M может быть задано

Теорема 3.5. *Пусть на замкнутом n-мерном C^s-многообразии M^n задано неособое векторное C^r-поле X $(1 \leqslant r \leqslant s-1)$. Тогда можно так изменить поле X, построив на M^n неособое векторное C^r-поле X_W, что предельными множествами интегральных кривых поля X_W будут k-мерные торы $T^k = S^1 \times \ldots \times S^1$ (k-кратное произведение многообразия S^1 на себя), где k — любое целое число, такое, что $0 < k \leqslant n-2$.*

Сначала Вильсон построил на $D^m \times [-3, 3]$, $m \geqslant 1$, следующее векторное C^∞-поле $Y_1 = \{Y_1((x, t));\ x \in D^m, -3 \leqslant t \leqslant 3\}$ (см. рис. 3.8):

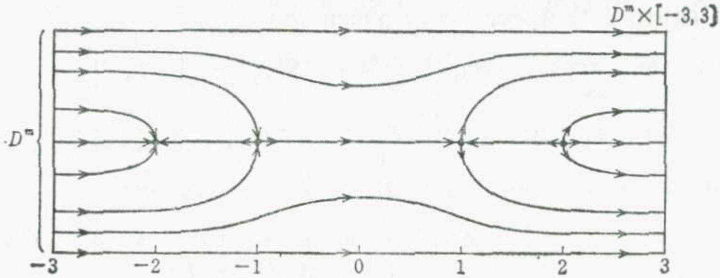


Рис. 3.8.

(i) В некоторой окрестности множества $(\partial D^m \times [-3, 3]) \cup \cup (D^m \times (\{-3\} \cup \{3\}))$ полагается $Y_1((x, t)) = e_t$ (единичный касательный вектор).

(ii) Если π_1: $D^m \times [-3, 3] \to D^m$ и π_2: $D^m \times [-3, 3] \to \to [-3, 3]$ — проекции, то

$$\pi_{1*}(Y_1((x, -t))) = -\pi_{1*}(Y_1((x, t))),$$
$$\pi_{2*}(Y_1((x_1, -t))) = \pi_{2*}(Y_1((x, t))).$$

(iii) Особыми точками поля Y_1 являются четыре точки: $\{O\} \times \{\pm 2\}$, $\{O\} \times \{\pm 1\}$ (здесь O — центр шара D^m). Поле Y_1 не имеет замкнутых траекторий [1]).

подмногообразие N, к которому X тоже трансверсально. Построение ведется так, чтобы возле N и возле ∂M было $X_W = X$.

Но, конечно, основным является случай замкнутого многообразия; в доказательстве для более общего случая нет ничего принципиально нового. Аналогичное замечание можно сделать и о теореме 3.7 ниже. — *Прим. ред.*

[1]) Сказанным не исчерпываются свойства Y_1, которые явствуют из рисунка. Существенно, что все его интегральные кривые, начинающиеся в некоторой окрестности точки $O \times \{-3\}$, стремятся к $O \times \{-2\}$. (Если же интегральная кривая, исходящая из $(x, -3)$, выходит из $D^m \times [-3, 3]$, то из (ii) следует, что она выходит в точке $(x, 3)$.) — *Прим. ред.*

Далее, с помощью Y_1 определяется векторное C^∞-поле Y_1' на $S^1\times D^m\times[-3, 3]$. Будем рассматривать окружность S^1 как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами $\{0\}$ и $\{2\pi\}$. Пусть e_θ' — единичный касательный вектор к S^1 в точке θ. Введем на $D^m\times[0, 3]$ функцию класса C^∞

$$\nu\colon D^m\times[0, 3]\to[0, 1],$$

удовлетворяющую следующим условиям:

(i) в некоторой окрестности множества $(\partial D^m\times[0, 3])\cup\cup(D^m\times(\{0\}\cup\{3\}))$ имеет место равенство $\nu=0$;

(ii) в некоторой окрестности точек $(O, 1)$, $(O, 2)\in D^m\times[0, 3]$ (O — центр D^m) имеет место равенство $\nu=1$.

В этой ситуации определим на $S^1\times D^m\times[-3, 3]$ векторное C^∞-поле

$$Y_1'=\{Y_1'((\theta, x, t));\ \theta\in S^1,\ x\in D^m,\ -3\leqslant t\leqslant 3\}$$

с помощью отличного от нуля вещественного числа c_1:

$$Y_1'((\theta, x, t))=\begin{cases} -c_1\nu(x, t)\,e_\theta'+Y(x, t)), & \text{если } t\geqslant 0,\\ c_1\nu(x, |t|)\,e_\theta'+Y_1((x, t)), & \text{если } t\leqslant 0.\end{cases}$$

Векторное C^∞-поле Y_1' обладает следующими свойствами:

(i) В некоторой окрестности множества $(\partial(S^1\times D^m)\times\times[-3,3])\cup(S_1\times D^m\times(\{-3\}\cup\{3\}))$ имеет место равенство $Y_1'((\theta, x, t))=e_t$.

(ii) Y_1' обладает четырьмя замкнутыми траекториями $S^1\times\{O\}\times\{\pm 2\}$, $S^1\times\{O\}\times\{\pm 1\}$.

(iii) Интегральная кривая $\varphi_{\{(\theta, x, -3)\}}$ поля Y_1' с начальной точкой $(\theta, x, -3)$ определена при $t\geqslant 0$, причем для нее справедливо одно из следующих условий:

(a) эта кривая достигает точки $(\theta, x, 3)$;

(b) эта кривая наматывается на периодическую траекторию (т. е. периодическая траектория является ω-предельным множеством для этой кривой).

При этом (b) имеет место для всех интегральных кривых, начинающихся в $S^1\times\{x\}\times\{-3\}$, где x достаточно близко к O.

Осуществив какое-нибудь вложение $S^1\times D^m\to D^{m+1}$, будем считать, что $S^1\times D^m\subset D^{m+1}$. Потребуем лишь, чтобы при этом вложении центр шара D^{m+1} оказался на $S^1\times O$, где O — центр шара D^m.

Определим на $D^{m+1}\times[-3, 3]$ неособое векторное C^∞-поле Y_2:
если $y\in D^{m+1}-(S^1\times D^m)$, то $Y_2((y, t))=e_t$;
если $y=(\theta, x)\in S^1\times D^m$, то $Y_2((y, t))=Y_1'((\theta, x, t))$.

Точно так же, как с помощью Y_1 строилось поле Y_1, с помощью поля Y_2 можно построить неособое векторное C^∞-поле Y_2' на $S^1\times D^{m+1}\times[-3, 3]$, а затем с помощью Y_2' — неособое векторное C^∞-поле Y_3 на $D^{m+2}\times[-3, 3]$. При построении Y_2' вместо c_1 возьмем ненулевое вещественное число c_2, такое, чтобы c_1/c_2 было иррациональным. В сложившейся ситуации поле Y_3 имеет в качестве предельных множеств четыре двумерных тора T^2.

Повторяя описанную конструкцию, можно построить неособое векторное C^∞-поле Y_{k+1} на $D^{m+k}\times[-3, 3]$ и для него четыре k-мерных тора T^k, являющихся предельными множествами [1]).

Существует такая окрестность U' центра O шара D^m, что при $x\in U'$ интегральная кривая $\varphi_{\{(x, -3)\}}$ векторного C^∞-поля Y_1 с начальной точкой x не достигает множества $D^m\times\{3\}$. По этой причине существует такое открытое подмножество U шара D^{m+k}, что при $x\in U$ определяемая начальной точкой x траектория $\varphi_{\{(x, -3)\}}$ поля Y_{k+1} не достигает $D^{m+k}\times\{3\}$.

Рассмотрим теперь векторное C^r-поле X на M^n. Положим $m=n-k-1$ и воспользуемся введенным в § 14 C^r-отображением

$$\bar{h}\colon D^{n-1}\times[-3, 3]\to M^n,$$

таким, что на его образе

$$X(\bar{h}(x, t))=c\bar{h}_*(e_t)$$

с некоторой константой c. Скорректируем поле X на участке $\bar{h}(D^{n-1}\times[-3, 3])$ и определим на M^n следующее векторное C^r-поле X'_W (см. рис. 3.7):

(i) на $M^n-\bar{h}(D^{n-1}\times[-3, 3])$ поле X'_W совпадает с X;

(ii) для $x\in D^{n-1}$, $t\in[-3, 3]$ имеет место равенство $X'_W(\bar{h}(x, t))=c\bar{h}_*(Y_{k+1}((x, t)))$.

---

[1]) Проще сказать так. Обозначая точки тора T^k через θ, обозначим через e_θ какой-нибудь вектор, для которого траектории поля, всюду равного e_θ (на T^k это утверждение имеет ясный смысл!), всюду плотны. На $T^k\times D^m\times[-3, 3]$ строим

$$Y'_{k+1}((\theta, x, t))=\begin{cases} -\nu(x, t)\,e'_\theta+Y_1((x, t)), & t\geqslant 0,\\ \nu(x, |t|)\,e'_\theta+Y_1((x, t)), & t\leqslant 0.\end{cases}$$

Вложим каким-нибудь образом $T^k\times D^m$ в D^{m+k}, обеспечив при этом, чтобы центр шара D^{m+k} оказался на $T^k\times$(центр D^m). Нужно, конечно, убедиться, что такое вложение существует; для этого, в сущности, и служит приведенное в тексте индуктивное рассуждение. Определим поле $Y_{k+1}((y, t))$ на $D^{m+k}\times\times[-3, 3]$ как e_t вне образа $T^k\times D^m\times[-3, 3]$ и как $Y'_{k+1}((\theta, x, t))$ для $y=(\theta, x)$.— *Прим. ред.*

Векторное C^r-поле X'_W таково, что проходящие через $\bar{h}(U\times\{-3\})$ в направлении возрастания t интегральные кривые не достигают $\bar{h}(D^{n-1}\times\{3\})$. Поэтому их ω-предельные множества содержатся в $\bar{h}(D^{n-1}\times[-3, 3])$.

Так как многообразие M^n компактно, повторяя эту коррекцию конечное число раз, мы получим векторное C^r-поле X_W со свойствами, указанными в теореме 3.5 [1]).

Из теоремы 3.5 легко получается следующая теорема.

Теорема 3.6. *Если эйлерова характеристика замкнутого n-мерного C^∞-многообразия M^n, $n\geqslant 4$, равна 0, то на нем существует неособое векторное C^∞-поле, не имеющее замкнутых траекторий.*

Доказательство. Так как эйлерова характеристика равна 0, на M^n существует неособое векторное C^∞-поле (комментарии, примечание 3.1). К этому полю при $k\geqslant 2$ остается применить теорему 3.5. □

Применительно к замкнутому 3-мерному C^∞-многообразию M^3 теорема 3.5 утверждает существование векторного C^∞-поля X_W с конечным числом периодических траекторий. Соответственно можно осуществить коррекцию векторного поля, изменяя его возле некоторой дуги каждой из этих замкнутых траекторий, и получить обобщение описанного в § 14 результата Швейцера, т. е. следующую теорему.

Теорема 3.7. *На замкнутом 3-мерном C^∞-многообразии M^3 существует неособое векторное C^1-поле, не имеющее замкнутых траекторий.*

---

[1]) Легко доказать, что существует такая конечная система вложений $h_i\colon D^{n-1}\longrightarrow M^n$, что: a) «площадки» $h_i(D^{n-1})$ не пересекаются друг с другом; b) поле X всюду на площадке трансверсально к ней; c) каждая траектория поля X пересекает хотя бы одно из множеств $h_i(U)$, где U то же, что и на стр. 119. Отсюда следует, что существует такая конечная система «трубок траекторий» $\bar{h}_i\colon D^{n-1}\times[-3, 3]\longrightarrow M^n$, что их образы не пересекаются и каждая траектория поля X пересекает хотя бы одно из множеств $\bar{h}_i(U\times[-3, 3])$. Для доказательства теоремы 3.5 осуществляем описанную коррекцию внутри каждой из этих трубок.— *Прим. ред*,

Глава 4

СЛОЕНИЯ

§ 16. Определение слоения и примеры

В главе 1 была изложена теория интегральных кривых неособого векторного поля на торе. Траектории на торе представлялись локально (в соответствующих системах локальных координат) как прямые (см. рис. 1.10, 1.12, 4.2). В главе 1 траектории образовали семейство линий, сплошь заполняющее тор; топологическое изучение этих линий и было главной темой этой главы. Как показывает теорема 1.4, будучи локально одинаковыми, эти линии в целом могут быть и разными. Понятие слоения позволяет перенести описанную ситуацию на торе на любое многообразие.

Начнем с самого простого примера. Пусть $\mathbf{R}^n$ есть n-мерное евклидово пространство и $0 \leqslant k \leqslant n$, так что $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$ и

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-k}} \mathbf{R}^k \times (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n).$$

Иначе говоря, пространство $\mathbf{R}^n$ берется в виде объединения составляющих $\mathbf{R}^k \times (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$, которому оно C^∞-гомеоморфно. Составляющие $\mathbf{R}^k \times (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ назовем *слоями k-мерного слоения* на $\mathbf{R}^n$ (или *слоения коразмерности $n-k$*). На рис. 4.1 изображен случай $n=3$, $k=2$.

Дадим теперь определение слоения в общем случае. Пусть $(M^n, \mathcal{S})$ есть n-мерное C^s-многообразие. Рассмотрим сразу как случай многообразия с краем, так и случай многообразия без края. Таким образом, фиксируем локальные координаты $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{S}$, где $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \to V_\lambda \subset \mathbf{R}^n_+$, $\mathbf{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_n \geqslant 0\}$. Для всякого целого r, $0 \leqslant r \leqslant s$, многообразие M^n является C^r-многообразием. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, будем писать $(M^n, \mathcal{S}^{(r)})$. Иными словами, $\mathcal{S}^{(r)}$ — это система локальных координат на C^r-многообразии M^n. Пусть теперь целое k удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant k \leqslant n$.

Семейство $\mathcal{F} = \{L_\alpha;\ \alpha \in A\}$ линейно связных подмножеств в M^n называется *k-мерным C^r-слоением*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям (см. рис. 4.2):

($\mathcal{F}_{\mathrm{I}}$) *Для $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$, обязательно $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$.*

($\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$) $\bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha = M^n$.

($\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$) *Для всякой точки* $p \in M^n$ *можно выбрать локальные координаты* $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{S}^{(r)}$, $p \in U_\lambda$, *так, что если* $U_\lambda \cap L_\alpha \neq \varnothing$, $\alpha \in A$, *то компоненты линейной связности множества* $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$ *имеют вид*

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \varphi_\lambda(U_\lambda);\ x_{k+1} = c_{k+1},\ x_{k+2} = c_{k+2},\ \ldots,\ x_n = c_n\}.$$

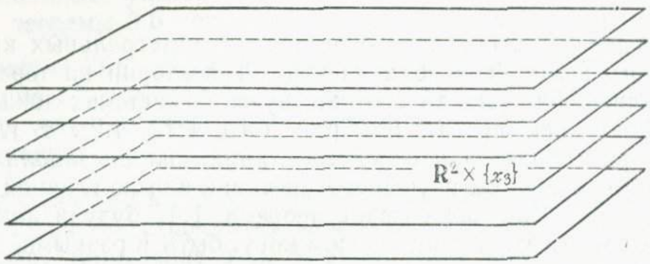


Рис. 4.1.

Числа c_{k+1}, c_{k+2}, ..., c_n постоянны на компонентах линейной связности.

Множество L_α называется *слоем* слоения $\mathcal{F}$. В описанной ситуации k-мерное C^r-слоение называется также *C^r-слоением коразмерности* $q = n - k$. Наличие слоения $\mathcal{F}$ на многообразии

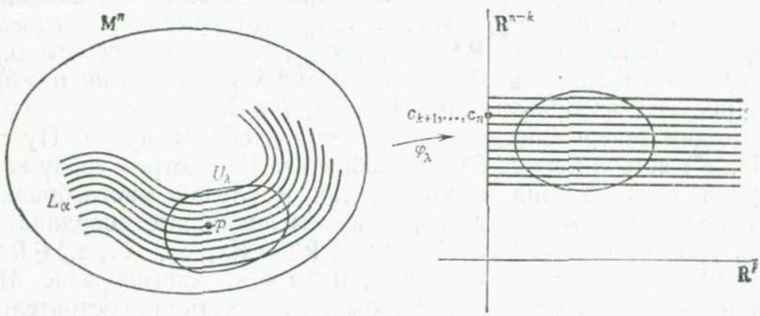


Рис. 4.2.

M^n выражается символом $(M^n, \mathcal{F})$. Условия ($\mathcal{F}_{\mathrm{I}}$), ($\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$) означают, что M^n состоит из взаимно непересекающихся слоев. Условие ($\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$) означает, что локально слои имеют тот же вид, что и у описанного выше k-мерного слоения на $\mathbf{R}^n$. Если выполняется условие ($\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$), координатные окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{S}^{(r)}$ называются *расслоенными*, а совокупность всех расслоенных координатных окрестностей обозначается через $\mathcal{S}^{(r)}_{\mathcal{F}}$ и называется *системой расслоенных координатных окрестностей*.

Если M^n — многообразие с краем ∂M^n и p — любая точка из ∂M^n, то слой L_α, содержащий точку p, должен в силу условия $(\mathcal{F}_{\mathrm{III}})$ принадлежать ∂M^n. Положим

$$\partial\mathcal{F} = \{L_\alpha;\ \alpha \in A,\ L_\alpha \subset \partial M^n\}.$$

Семейство $\partial\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{F}_{\mathrm{I}})$, $(\mathcal{F}_{\mathrm{II}})$, $(\mathcal{F}_{\mathrm{III}})$ и, следовательно, является k-мерным C^r-слоением на $(n-1)$-мерном C^s-многообразии ∂M^n (или C^r-слоением коразмерности

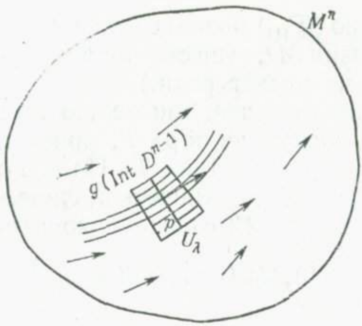


Рис. 4.3.

$n-k-1$). Следовательно, при $k=n-1$, т. е. при коразмерности, равной 1, связные компоненты края ∂M^n являются слоями C^r-слоения (см. пример B).

Пример A. Пусть $X_{a,b}$ — векторное поле на торе T из теоремы 1.4 (рис. 1.10) и $\mathcal{F}_{a,b}$ — множество всех траекторий $C(p)$ этого поля. Тогда $\mathcal{F}_{a,b}$ является C^∞-слоением коразмерности 1 на 2-мерном C^∞-многообразии T.

Более того, и в общем случае, если X — неособое векторное C^r-поле на замкнутом n-мерном C^s-многообразии M^n, $1 \leqslant r \leqslant s-1$, то множество $\mathcal{F}$ всех траекторий поля X является C^r-слоением коразмерности $n-1$. Действительно, условия $(\mathcal{F}_{\mathrm{I}})$, $(\mathcal{F}_{\mathrm{II}})$ выполнены в силу теоремы 3.1. Для того чтобы установить справедливость и $(\mathcal{F}_{\mathrm{III}})$, построим $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{S}^{(r)}$ следующим образом[1]). Пусть $p \in M^n$ и при C^r-вложении $g\colon D^{n-1} \to M^n$ $(n-1)$-мерного шара D^{n-1} с центром O точка O переходит в $g(O)=p$, причем для всякой точки q из $g(D^{n-1})$ интегральная кривая $\varphi_{(q)}$, определяемая точкой q как начальной, пересекает $g(D^{n-1})$ трансверсально (рис. 4.3). Такое g легко построить,

[1]) Повторяется построение «трубки траекторий». — *Прим. ред.*

пользуясь локальными координатами в некоторой окрестности точки p. Далее определим отображение

$$\tilde{g}\colon]-\varepsilon,\ \varepsilon[\times \operatorname{Int} D^{n-1} \to M^n,$$

положив $\tilde{g}(t,\ x)=\varphi(t,\ g(x))$ $(-\varepsilon<t<\varepsilon,\ x\in \operatorname{Int} D^{n-1})$, где ε — достаточно малое число. Отображение $\tilde{g}$ является C^r-вложением. Возьмем в качестве $(U_\lambda,\ \varphi_\lambda)$

$$U_\lambda=\tilde{g}(]-\varepsilon,\ \varepsilon[\times \operatorname{Int} D^{n-1}),\quad \varphi_\lambda(\tilde{g}(t,\ x))=(t,\ x).$$

Тем самым свойство $(\mathcal{F}_{\mathrm{III}})$ можно считать установленным. (Замкнутость многообразия M^n, существенная для результатов гл. 3 [1]), в данном случае не играет роли.)

В силу сказанного выше, множество всех траекторий векторного C^1-поля Данжуа на торе T, описанное в § 6, является C^1-слоением коразмерности 1 на T. По тем же причинам множество всех траекторий динамической системы Швейцера, описанной в § 14, является C^1-слоением коразмерности 2 в S^3.

Пример В. Фиксируем C^∞-функцию $f\colon]-1,\ 1[\to \mathbf{R}$, такую, что (см. рис. 4.4)

$$f(0)=0,\ f(t)\geqslant 0,\ f(t)=f(-t)\qquad (-1<t<1),$$

$$\lim_{t\to\pm 1}\frac{d^k}{dt^k}f(t)=\infty,\qquad \lim_{t\to\pm 1}\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{1}{\frac{d}{dt}f(t)}\right)=0\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Например, $f(t)=e^{t^2/(1-t^2)}-1$.

Рассмотрим в 2-мерном C^∞-многообразии с краем $D^1\times\mathbf{R}^1$ следующие подмножества L''_α $(-\infty<\alpha<\infty)$ и $L''_\pm$:

$$L''_\alpha=\{(t,\ \alpha+f(t));\ -1<t<1\};$$
$$L''_\pm=\{(\pm 1,\ y);\ -\infty<y<\infty\}$$

(см. рис. 4.4 (i)). Множество $\mathcal{F}'''_R$, элементами которого являются L''_α $(-\infty<\alpha<\infty)$, $L''_\pm$, представляет собой C^∞-слоение коразмерности 1 на $D^1\times\mathbf{R}^1$ (рис. 4.4 (i)). (В § 30, пример 2, мы еще раз убедимся в том, что $\mathcal{F}'''_R$ является C^∞-слоением, рассматривая некоторые дифференциальные формы.)

Определим на компактном 2-мерном C^∞-многообразии с краем $D^1\times S^1$ подмножества L'_α $(0\leqslant\alpha<1)$ и $L'_\pm$ следующими равенствами (см. рис. 4.4 (ii)):

$$L'_\alpha=\{(t,\ e^{2\pi(\alpha+f(t))i});\ -1<t<1\},$$
$$L'_\pm=\{(\pm 1,\ e^{2\pi\theta i});\ 0\leqslant\theta<1\}.$$

[1]) А именно для того, чтобы интегральные кривые были определены при всех t. Ввиду локального характера построения «трубки траекторий» здесь этого, конечно, не нужно. — *Прим. ред.*

Тогда множество $\mathcal{F}''_R$ подмножеств L'_α $(0 \leqslant \alpha < 1)$, $L'_\pm$ является C^∞-слоением коразмерности 1 на $D^1 \times S^1$ (см. рис. 4.4 (ii)). Слоение $\mathcal{F}''_R$ обладает двумя компактными слоями $L'_\pm$.

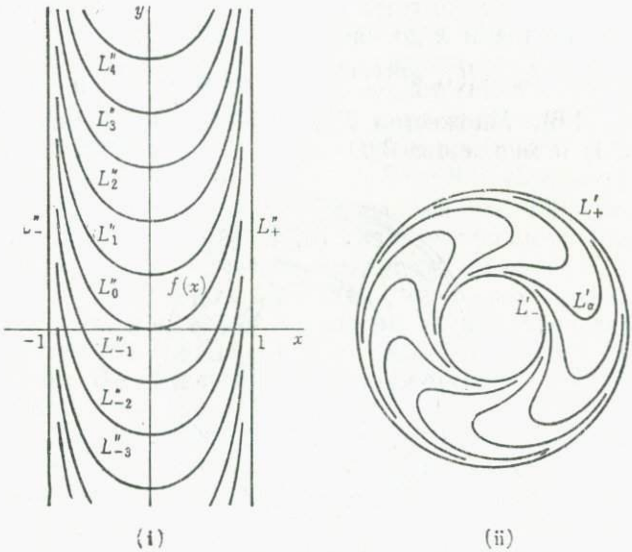


Рис. 4.4.

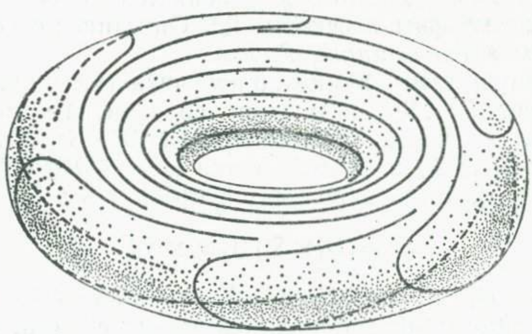


Рис. 4.5.

Склеим края двух экземпляров многообразия $D^1 \times S^1$ так, чтобы получился тор $T = S^1 \times S^1 = (D^1 \times S^1) \cup (D^1 \times S^1)$. Возьмем на одном из экземпляров $D^1 \times S^1$ слоение $\mathcal{F}''_R$, а на другом экземпляре $D^1 \times S^1$ C^∞-слоение коразмерности 1 $\{\{x\} \times S^1;\ x \in D^1\}$. Тогда на торе T окажется определенным некоторое

C^∞-слоение (см. рис. 4.5). В отличие от примера А это слоение не возникает из векторного C^∞-поля на торе T[1]).

Рассмотрим $D^2 \times S^1$ как компактное трехмерное C^∞-многообразие с краем. С помощью функции f, введенной выше, определим следующие множества L_α, $0 \leqslant \alpha < 1$ (символ $|x|$ означает расстояние от точки x до начала координат):

$$L_\alpha = \{(x,\ e^{2\pi(\alpha + f(|x|))i});\ x \in \operatorname{Int} D^2\}$$

(см. рис. 4.6). Множество $\mathcal{F}'_R$, состоящее из подмножеств L_α $(0 \leqslant \alpha < 1)$ и множества $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$, является C^∞-слое-

Рис. 4.6.

нием коразмерности 1 на $D^2 \times S^1$ (рис. 4.6). Единственным компактным слоем слоения $\mathcal{F}'_R$ является $S^1 \times S^1$; остальные слои C^∞-гомеоморфны плоскости $\mathbf{R}^2$. Описанное слоение $\mathcal{F}'_R$ на $D^2 \times S^1$ называется *слоением Риба*.

Трехмерную сферу S^3 можно получить из двух экземпляров многообразия $D^2 \times S^1$ следующим образом. Пусть $D_1^2 \times S_1^1$ и $D_2^2 \times S_2^1$ — два экземпляра многообразия $D^2 \times S^1$. Отождествим в границах $\partial D_1^2 \times S_1^1$ и $\partial D_2^2 \times S_2^1$ точки $(x, y) \in \partial D_1^2 \times S_1^1$ с точками $(y, x) \in \partial D_2^2 \times S_2^1$; тогда и получится сфера[2]) S^3:

$$S^3 = (D_1^2 \times S_1^1) \cup (D_2^2 \times S_2^1).$$

Возьмем на $D_1^2 \times S_1^1$ и $D_2^2 \times S_2^1$ слоения Риба $\mathcal{F}'_R$. Поскольку $\partial D_1^2 \times S_1^1$ и $\partial D_2^2 \times S_2^1$ являются компактными слоями, на объединении $D_1^2 \times S_1^1$ и $D_2^2 \times S_2^1$, т. е. на сфере S^3, оказывается опреде-

[1]) Оно неориентируемо (см. примечание на стр. 129), тогда как векторное поле определяло бы «согласованную» ориентацию на слоях.— *Прим. ред.*

[2]) Обычным образом отождествляя $\mathbf{R}^4$ с $\mathbf{C}^2$, запишем уравнение S^3 в виде $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Тогда ту часть S^3, где $|z_1| \leqslant |z_2|$, можно принять за $D_1^2 \times S_1^1$, а ту часть, где $|z_1| \geqslant |z_2|$,— за $D_2^2 \times S_2^1$.— *Прим. ред.*

ленным C^∞-слоение. Его обозначают через $\mathcal{F}_R$ и называют *слоением Риба на* S^3. Единственным компактным слоем слоения $\mathcal{F}_R$ является $\partial D_1^2 \times S_1^1 = \partial D_2^2 \times S_2^1$; остальные слои C^∞-гомеоморфны плоскости $\mathbf{R}^2$.

Пусть $\mathcal{F}$ есть C^r-слоение коразмерности q на n-мерном C^s-многообразии M^n и $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}^{(r)}$ — расслоенная система локальных координат. Фиксируем на $(n-q)$-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{n-q}$ обычную топологию, а на q-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^q$ — дискретную топологию, после чего введем топологию произведения на $\mathbf{R}^{n-q} \times \mathbf{R}^q = \mathbf{R}^n$. Для каждой пары $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^{(r)}$ переопределим топологию на U_λ так, чтобы φ_λ: $U_\lambda \to \varphi_\lambda(U_\lambda) (\subset \mathbf{R}^n)$ было гомеоморфизмом; поскольку для каждой пары $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ справедливо условие $(\mathcal{F}_{\text{III}})$, эти переопределения для разных U_λ будут согласованы друг с другом. Далее, с помощью новых топологий на U_λ определим новую топологию на M^n. Она называется *топологией слоения* и обозначается через $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Связными компонентами в топологии слоения $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ являются слои.

Пусть L_α — один из слоев; рассмотрим на нем топологию, определенную топологией $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Мы будем называть ее *топологией слоя* L_α. Если именно в этой топологии слой L_α оказывается компактным, то его называют *компактным слоем*. Для некоторых $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^{(r)}$ справедливо соотношение $L_\alpha \cap U_\lambda \neq \varnothing$; будем обозначать через $L_{\alpha, \lambda, k}$ связные компоненты множества $L_\alpha \cap U_\lambda$; в силу условия $(\mathcal{F}_{\text{III}})$ множества $\varphi_\lambda(L_{\alpha, \lambda, k})$ являются открытыми в $\mathbf{R}^{n-q} \times (c_{n-q+1}, c_{n-q+2}, \ldots, c_n)$ и, следовательно, могут рассматриваться как открытые подмножества в $\mathbf{R}^{n-q}$.

Если теперь $(U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^{(r)}$, $L_\alpha \cap U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ и

$$L_{\alpha, \lambda, k} \cap L_{\alpha, \mu, k'} \neq \varnothing,$$

то отображение

$$\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}\colon\ \varphi_\lambda(L_{\alpha, \lambda, k} \cap L_{\alpha, \mu, k'}) \to \varphi_\mu(L_{\alpha, \lambda, k} \cap L_{\alpha, \mu, k'})$$

является C^r-диффеоморфизмом из открытого множества в $\mathbf{R}^{n-q}$ в открытое множество в $\mathbf{R}^{n-q}$. Пусть $\mathcal{S}_\alpha$ — множество пар, состоящих из связных компонент множеств $L_\alpha \cap U_\lambda$ и ограничений отображений φ_λ на эти связные компоненты. Тогда $(L_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ является $(n-q)$-мерным C^r-многообразием.

Пусть ι_α: $L_\alpha \to M^n$ — отображение включения из $(L_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ в M^n (на M^n рассматривается топология $\mathcal{O}$); в силу условия $(\mathcal{F}_{\text{III}})$ взаимно однозначное отображение ι_α является C^r-иммерсией. Отметим, что в примере A, где рассматривалось слоение $\mathcal{F}_{a,b}$ коразмерности 1 на торе, в случае иррационального b/a иммерсия ι_α не является вложением. Если ι_α является C^r-вложением, говорят, что L_α — *собственный* слой[1]). Легко проверить, что всякий компактный слой является собственным. Если $\operatorname{Int} \bar{L}_\beta \neq \varnothing$, то слой L_β называется *локально плотным*. Слой, не являющийся ни собственным, ни локально плотным, называется *исключительным*.

В случае описанного в примере A слоения $\mathcal{F}_{a,b}$ коразмерности 1 на торе при $a=0$ или при рациональном b/a все слои слоения $\mathcal{F}_{a,b}$ являются компактными, а потому собственными. Напротив, при иррациональном b/a все слои слоения $\mathcal{F}_{a,b}$ являются локально плотными, но не собственными.

В конце примера A было введено C^1-слоение коразмерности 1 на торе, определенное всеми траекториями векторного C^1-поля Данжуа. Воспользуемся описанным в § 6 представлением $S^1=[0, 1] \cup \left(\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} I_m\right)$ и рассмотрим траекторию $C((x, 1))$, проходящую через точку $(x, 1) \in S^1 \times S^1 = T$. Если $x \in \operatorname{Int} I_m$, то слой $C((x, 1))$ собственный; если же $x \in [0, 1]$, то слой $C((x, 1))$ исключительный.

В слоении Риба из примера B все слои являются собственными.

Пусть на n-мерном C^s-многообразии M^n определено C^r-слоение коразмерности q. Пусть $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ и $(U_\lambda, \varphi_\lambda), (U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^{(r)}$; запишем отображение

$$\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}\colon \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$$

в виде

$$(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

В силу условия $(\mathcal{F}_{\mathrm{III}})$ координаты $y_1, y_2, \ldots, y_{n-q}$ являются C^r-функциями от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $y_{n-q+1}, y_{n-q+2}, \ldots, y_n$ являются функциями от $x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \ldots, x_n$:

$$(*) \quad \begin{cases} y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n-q), \\ y_{n-q+j} = y_{n-q+j}(x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \ldots, x_n) \quad (j=1, 2, \ldots, q). \end{cases}$$

---

[1]) Таким образом, собственный слой является подмногообразием в смысле гл. 2, а несобственный — не является (хотя все равно на нем вводится структура дифференцируемого многообразия). При более широком определении подмногообразия (Стернберг [1*]) несобственные слои тоже оказываются подмногообразиями. Так или иначе, но ниже автор говорит о касательном пространстве T_pL_α, рассматривая его как подпространство пространства $T_p(M^n)$. При используемых им определениях это надо формально понимать так: во-первых, $T_p(L_\alpha)$ есть обычное касательное пространство к гладкому многообразию L_α; во-вторых, образ $(\iota_\alpha)_* T_p(L_\alpha)$ при иммерсии ι_α является подпространством $T_p(M^n)$, и ради краткости этот образ тоже обозначается через $T_p(L_\alpha)$. — *Прим. ред.*

Верно и обратное. Пусть на n-мерном C^s-многообразии $(M^n, \mathscr{S})$ в множестве $\mathscr{S}^{(r)}$ выделено подмножество $\hat{\mathscr{S}}^{(r)}$ со следующими свойствами:

$(\mathscr{F}'_{\mathrm{I}})$ $M^n = \bigcup\limits_{(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \hat{\mathscr{S}}^{(r)}} U_\lambda.$

$(\mathscr{F}'_{\mathrm{II}})$ Если $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$, где $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, $(U_\mu, \varphi_\mu) \in \hat{\mathscr{S}}^{(r)}$, то отображение $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$ удовлетворяет системе равенств (*).

В этом случае для каждого $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \hat{\mathscr{S}}^{(r)}$ компоненты линейной связности множества

$$\varphi_\lambda^{-1}(\varphi_\lambda(U_\lambda) \cap (\mathbf{R}^{n-q} \times (x_{n-q+1}, x_{n-q+2} \ldots, x_n))),$$
$$((x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^q),$$

можно рассматривать как слои некоторого слоения. В силу условия $(\mathscr{F}'_{\mathrm{II}})$ при $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ введенные таким образом слоения на U_λ и U_μ на участке $U_\lambda \cap U_\mu$ описываются одинаково. Поэтому и на M^n можно определить C^r-слоение, слои которого получаются объединением своих частей, расположенных на множествах U_μ. Несколько иначе это можно сформулировать так: если на $(n-q)$-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{n-q}$ фиксировать обычную топологию, на q-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^q$ — дискретную топологию, а на $\mathbf{R}^n$ — топологию произведения $\mathbf{R}^{n-q} \times \mathbf{R}^q$, то на M^n можно ввести новую топологию с помощью $((U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \hat{\mathscr{S}}^{(r)})$, при которой φ_λ будут гомеоморфизмами и связные компоненты в которой будут слоями некоторого C^r-слоения на M^n, определяемого через $\hat{\mathscr{S}}^{(r)}$ с помощью условий $(\mathscr{F}'_{\mathrm{I}})$, $(\mathscr{F}'_{\mathrm{II}})$.

Если при $r \geqslant 1$ система $\hat{\mathscr{S}}^{(r)}$ удовлетворяет не только условиям $(\mathscr{F}'_{\mathrm{I}})$, $(\mathscr{F}'_{\mathrm{II}})$, но и следующему условию $(\mathscr{F}'_{\mathrm{III}})$, то соответствующее слоение называется *трансверсально ориентируемым* (или *коориентируемым*)[1]).

$(\mathscr{F}'_{\mathrm{III}})$ Пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, $(U_\mu, \varphi_\mu) \in \hat{\mathscr{S}}^{(r)}$, и пусть $y_{n-q+j} = y_{n-q+j}(x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \ldots, x_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$ — функции

---

[1]) Если же имеется $\hat{\mathscr{S}}^{(r)}$ со свойствами $(\mathscr{F}'_{\mathrm{I}})$, $(\mathscr{F}'_{\mathrm{II}})$ и аналогом $(\mathscr{F}'_{\mathrm{III}})$, в котором при тех же обозначениях

$$\left| \frac{\partial(y_1, \ldots, y_{n-q})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-q})} \right| > 0,$$

то слоение называется *ориентируемым*. Наглядно ориентируемость слоения означает, что на слоях можно «согласованным образом» ввести ориентацию, так что «при переходе от слоя к слою она изменяется непрерывно». Она эквивалентна ориентируемости его касательного поля (см. гл. 7). — *Прим. ред.*

из системы равенств (*), связанных с $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$. Тогда

$$\left| \frac{\partial (y_{n-q+1}, y_{n-q+2}, \ldots, y_n)}{\partial (x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \ldots, x_n)} \right| > 0.$$

Так, в примере В описано слоение коразмерности 1 на торе (рис. 4.5), которое не является трансверсально ориентируемым.

Рассмотрим случай $q=1$. Пусть $\mathcal{F}$ есть C^r-слоение коразмерности 1 на многообразии M^n $(r \geqslant 1)$. Если векторное C^{r-1}-поле $X=\{X(p);\ p \in M^n\}$ на M^n трансверсально ко всем слоям[1] L_α, то X называется *трансверсальным к слоению* $\mathcal{F}$.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{F}$ есть C^r-слоение коразмерности 1 на многообразии M^n, $r \geqslant 1$. Для того чтобы $\mathcal{F}$ было трансверсально ориентируемым, необходимо и достаточно, чтобы существовало трансверсальное к $\mathcal{F}$ векторное C^{r-1}-поле*[2].

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ трансверсально ориентируемо. В силу условия $(\mathcal{F}'_{\mathrm{III}})$, сформулированного с помощью равенств (*) применительно к $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$, в данном случае

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_n} > 0.$$

Введем на M^n риманову метрику $\langle\ ,\ \rangle_p$, $p \in M^n$. Для каждой точки $p \in M^n$ в касательном пространстве $T_p(M^n)$ существует единственный элемент $Y(p)$, обладающий следующими свойствами:

(i) $\|Y(p)\|=1$.

(ii) Если p — точка слоя L_α, то для любого элемента v из $T_p(L_\alpha)$ имеет место равенство

$$\langle Y(p), v\rangle_p = 0.$$

(iii) Для $p \in U_\lambda$, где $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \hat{\mathcal{S}}^{(r)}$, при отображении

$$\Phi_\lambda(Y(p)) = \hat{v}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{v}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \hat{v}_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

(отображение Φ_λ определялось в § 10) обязательно $\hat{v}_n > 0$.

---

[1] Что имеет ясный смысл, если касательные пространства к слоям рассматривать как подпространства касательного пространства к M^n (см. примечание на стр. 128).— *Прим. ред.*

[2] Если M имеет класс гладкости C^s $(s > 1)$, то любое непрерывное векторное поле на M можно «сгладить» и получить «сколь угодно близкое к нему» C^{s-1}-поле, а если непрерывное векторное поле трансверсально к $\mathcal{F}$, то и любое достаточно близкое к нему поле тоже будет трансверсально к $\mathcal{F}$. Таким образом, в теореме в утверждении о необходимости можно повысить (при $s > r$) класс гладкости до C^{s-1}, а в утверждении о достаточности — понизить (при $r > 1$) до C^0.— *Прим. ред.*

Так как $\frac{\partial y_n}{\partial x_n} > 0$, условие (iii) о неравенстве $\hat{v}_n > 0$ легко удовлетворить в соответствующей окрестности[1] $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$. Векторное поле $Y = \{Y(p);\ p \in M^n\}$ принадлежит классу C^{r-1} и трансверсально к $\mathcal{F}$.

Обратно, пусть существует векторное C^{r-1}-поле X, трансверсальное к слоению $\mathcal{F}$. Возьмем систему окрестностей $\hat{\mathcal{S}}^{(r)}$, удовлетворяющую условиям $(\mathcal{F}'_{\mathrm{I}})$, $(\mathcal{F}'_{\mathrm{II}})$. Отберем из них те окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, для которых в равенстве

$$\Phi_\lambda(X(p)) = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

будет $v_n > 0$. Тем самым удовлетворяются все условия $(\mathcal{F}'_{\mathrm{I}})$, $(\mathcal{F}'_{\mathrm{II}})$, $(\mathcal{F}'_{\mathrm{III}})$. $\square$

Пусть M^n есть C^s-многообразие без края, а $\mathcal{F}$ является C^r-слоением на M^n коразмерности 1 $(r \geqslant 2)$. Введем на M^n риманову метрику и для каждой точки $p \in M^n$ выберем в $T_p(M^n)$ вектор $Z(p)$, обладающий свойствами (i), (ii), о которых говорилось в процессе доказательства теоремы 4.1. Вектор $Z(p)$ определен однозначно с точностью до знака $\pm$. Фиксируем для точки $p \in M^n$ окрестность U_p и возьмем такое векторное C^{r-1}-поле Z_p на U_p, чтобы для каждой точки $p' \in U(p)$ вектор $Z_p(p')$ либо совпадал с вектором $Z(p')$, либо отличался от него знаком:

$$Z_p = \{\varepsilon_{p'} Z(p');\ p' \in U(p)\},$$

где $\varepsilon_{p'}$ обозначает ± 1. Траектории поля Z_p составляют C^{r-1}-слоение в U_p коразмерности $n-1$. Построенное слоение $\mathcal{F}$ зависит от римановой метрики на M^n, но не от знака элемента $Z(p)$. Построив объединения слоев таких слоений для всех U_p, $p \in M^n$, легко получить C^{r-1}-слоение коразмерности $n-1$ на M^n.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ — соответственно C^r-слоение коразмерности q и $C^{r'}$-слоение коразмерности $n-q$ на C^s-многообразии M^n, r, $r' \geqslant 1$. Предположим, что всякий раз, когда слой L_α из $\mathcal{F}$ и слой $L'_{\alpha'}$ из $\mathcal{F}'$ таковы, что $L_\alpha \cap L'_{\alpha'} \neq \varnothing$, слои L_α и $L'_{\alpha'}$ пересекаются трансверсально. В этом случае говорят, что слоения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ *взаимно трансверсальны*. Сформулируем полученные выше результаты в виде теоремы.

---

[1]) Условия (i) и (ii) оставляют для $Y(p)$ в каждой точке p только 2 возможности, а (iii) позволяет определенным образом отобрать только одну из них. Этот отбор определяется в терминах $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, но если $p \in (U_\lambda, \varphi_\lambda) \cap \cap (U_\mu, \varphi_\mu)$, то с помощью (U_μ, φ_μ) отбирается тот же вектор.— *Прим. ред.*

Теорема 4.2[1]). *Пусть M^n есть C^s-многообразие без края, а $\mathcal{F}$ является C^r-слоением ($r \geqslant 2$) на M^n коразмерности 1. Тогда на M^n существует C^{r-1}-слоение $\mathcal{F}'$ коразмерности $n-1$, являющееся трансверсальным к $\mathcal{F}$.*

Предположение об отсутствии края у C^s-многообразия M^n, сделанное в теореме 4.2, несущественно: случай C^s-многообразия M^n с краем рассматривается совершенно аналогично. Точно так же на множестве U_p берется векторное поле Z_p, траектории которого покрывают U_p. Объединение этих траекторий определяет слоение, но только в несколько модифицированном смысле — слоение, трансверсальное к краю в смысле § 29. Таким образом, отказываясь от условия об отсутствии края у многообразия M^n в теореме 4.2, мы приходим к слоению, трансверсальному к краю [2].

§ 17. C^r-расслоения

Пусть E есть n-мерное C^r-многообразие, $r \geqslant 1$, и B есть q-мерное C^r-многообразие, $n \geqslant q$. Предположим, что существует C^r-субмерсия [2])

$$\pi\colon\ E \longrightarrow B.$$

В этой ситуации, если $\partial E \neq \varnothing$, то и $\partial B \neq \varnothing$ и $\pi(\partial E) \subset \partial B$. Для каждого $b \in B$ определим в E подмножество

$$L_b = \pi^{-1}(b), \quad b \in B.$$

Тогда $\mathcal{F} = \{L_b;\ b \in B\}$ является C^r-слоением коразмерности q на E. Действительно, условия ($\mathcal{F}_{\mathrm{I}}$), ($\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$), очевидно, выпол-

---

[1]) Как видно из примечания к теореме 4.1, в теореме 4.2 можно обеспечить, чтобы $\mathcal{F}'$ имело класс гладкости C^{s-1}. В действительности здесь можно обеспечить даже класс C^s и заодно заменить условие $r \geqslant 2$ естественным условием $r \geqslant 1$. А именно, хорошо известно (см. например, Рохлин — Фукс [1*]), что класс гладкости многообразия M^n можно (при $s \geqslant 1$) повысить до C^∞. Иными словами, из максимальной системы координатных окрестностей $\mathcal{S}^{(s)} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ можно выбрать такую подсистему $\mathcal{S}^{(\infty)}$, что M^n, снабженное последней, станет C^∞-многообразием. Ясно, что $\mathcal{F}$, рассматриваемое на многообразии (M^n, $\mathcal{S}^{(\infty)}$), останется C^r-слоением. На (M^n, $\mathcal{S}^{(\infty)}$) существует трансверсальное к $\mathcal{F}$ слоение $\mathcal{F}'$ класса C^∞. Рассматриваемое на (M^n, $\mathcal{S}^{(s)}$), оно останется трансверсальным к $\mathcal{F}$ и будет иметь максимальный возможный на (M^n, $\mathcal{S}^{(s)}$) класс гладкости, т. е. класс C^s. — *Прим. ред.*

[2]) В определение субмерсии для многообразий с краем, помимо обычного условия о дифференциале отображения, включают еще некоторые условия об ограничении отображения на край отображаемого многообразия. У автора эти условия жестче, чем обычно (Рохлин — Фукс [1*]): он подразумевает, что при субмерсии край должен отображаться в край. — *Прим. ред.*

нены, а справедливость условия $(\mathscr{F}_{\text{III}})$ с подходящими $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ легко усмотреть из доказательства теоремы 2.5.

Накладывая дополнительные условия на C^r-субмерсию $\pi: E \to B$, получаем определение C^r-расслоения.

Пусть E, B и C^r-отображение $\pi: E \to B$ те же, что и выше. Это отображение π называется *C^r-расслоением*, если существуют такое $(n-q)$-мерное C^r-многообразие F и такое открытое покрытие $\{U_\xi;\ \xi \in \Xi\}$ многообразия B, что выполнены следующие два условия:

(i) для всякой точки $b \in B$ подмножество $\pi^{-1}(b)$ в E является $(n-q)$-мерным подмногообразием, C^r-гомеоморфным многообразию F;

(ii) для каждого множества U_ξ существует C^r-гомеоморфизм

$$\psi_\xi: \pi^{-1}(U_\xi) \to U_\xi \times F,$$

такой, что

$$\psi_\xi(\pi^{-1}(b)) = \{b\} \times F, \quad b \in U_\xi.$$

В описанной ситуации E называют *тотальным пространством* (или *пространством расслоения*), B — *базой*, F — *слоем* [точнее, стандартным слоем (в отличие от $\pi^{-1}(b)$, называемого слоем над точкой b); если нет опасности смешения, говорят просто о слое], π — *проекцией*, а $\{(U_\xi, \psi_\xi);\ \xi \in \Xi\}$ — *системой координат* C^r-расслоения.

Пусть $\mathrm{Diff}(F) = \{h: F \to F;\ h$ есть C^r-гомеоморфизм$\}$ — множество всех C^r-гомеоморфизмов многообразия F на себя. Если $U_\xi \cap U_\eta \neq \varnothing$ $(\xi, \eta \in \Xi)$, то для отображения

$$\psi_\xi \circ \psi_\eta^{-1}: (U_\xi \cap U_\eta) \times F \to (U_\xi \cap U_\eta) \times F$$

будем писать

$$\psi_\xi \circ \psi_\eta^{-1}(b, y) = (b, g_{\xi\eta}(b)(y)).$$

Тем самым мы ввели отображение $g_{\xi\eta}: U_\xi \cap U_\eta \to \mathrm{Diff}(F)$. При соответствующим образом введенной на $\mathrm{Diff}(F)$ топологии (например, C^r-топологии) отображение $g_{\xi\eta}$ становится непрерывным (см. комментарии, примечание 4.1). Обычно определяют так называемое C^r-расслоение со структурной группой $G \subset \mathrm{Diff}(F)$. Оно определяется условиями (i), (ii) вместе с условием, что $g_{\xi\eta}(b) \in G$ $(\xi, \eta \in \Xi,\ b \in U_\xi \cap U_\eta)$. Однако в нашем контексте не будет в этом необходимости, и мы ограничимся лишь условиями (i), (ii). Чтобы не вносить путаницы, в случае выполнения условий (i), (ii) мы будем говорить о *локально тривиальном расслоении* или о *локально тривиальном расслоенном пространстве*. Приведем несколько примеров C^r-расслоений.

Пример 1. Пусть $E = B \times F$ и π: $B \times F \to B$ определено равенством $\pi(b, y) = b$ $(b \in B,\ y \in F)$. Очевидно, что π: $B \times F \to B$ является C^r-расслоением. В этом случае роль U_ξ играет само многообразие B. Такое C^r-расслоение называется *расслоением произведения* [1]).

Пример 2. Пусть M^n есть n-мерное C^r-многообразие, $T(M^n)$ — касательное пространство к M^n и π: $T(M^n) \to M^n$ — проекция, описанная в § 10. Тогда, если M^n рассматривать как C^{r-1}-многообразие, мы имеем в данном случае C^{r-1}-расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$. Это C^{r-1}-расслоение называется *касательным расслоением* многообразия M^n.

Введем на M^n риманову метрику и положим

$$T_S(M^n) = \{v \in T(M^n);\ \|v\| = 1\}.$$

Тогда ограничение на $T_S(M^n)$ проекции π, т. е. отображение

$$\pi_S\colon\ T_S(M^n) \to M^n,$$

является C^{r-1}-расслоением, слой которого равен S^{n-1}. Описанное C^{r-1}-расслоение называется [2]) *расслоением на касательные сферы* над многообразием M^n.

Пример 3. Пусть π: $S^3 \to S^2$ — отображение Хопфа, описанное в § 14. Тогда оно является C^∞-расслоением со слоем S^1.

Пусть π: $E \to B$ есть C^r-расслоение, B — многообразие размерности q, а $\mathcal{F} = \{\pi^{-1}(b);\ b \in B\}$ — это C^r-слоение коразмерности q на E. Тогда все слои из $\mathcal{F}$ C^r-гомеоморфны слою F. Таким образом, C^r-расслоение определяет некоторое C^r-слоение, которое называется *слоением расслоения* или *простым слоением* [3]). В примере A из § 16 слоение $\mathcal{F}_{a,b}$ при $a = 0$ или $b = 0$ является слоением расслоения.

Рассмотрим отображения $g_{\xi\eta}$: $U_\xi \cap U_\eta \to \mathrm{Diff}(F)$ в случае C^r-расслоения π: $E \to B$, где E имеет размерность n, а B — размерность q. Если каждое $g_{\xi\eta}(b)$ при $b \in U_\xi \cap U_\eta$ постоянно

---

[1]) У нас этот термин не принят и вообще у нас нет общепринятого названия для произведения, рассматриваемого как расслоение. В учебнике Рохлина — Фукса [1*] оно называется *стандартным тривиальным расслоением*.— *Прим. ред.*

[2]) Название для этого объекта не вполне установилось. Говорят о *расслоении единичных касательных векторов* или *единичном касательном расслоении*, а соответствующее тотальное пространство часто называют *пространством линейных элементов* многообразия M^n (хотя «линейным элементом в точке $x \in M^n$» столь же часто называют заданное в этой точке направление, т. е. прямую в $T_x(M^n)$).— *Прим ред.*

[3]) Обычно никаких специальных терминов для этого случая не вводят, а говорят, что расслоение рассматривается как слоение, или что слоение является расслоением.— *Прим. ред.*

(не зависит от b), то π: $E \to B$ называется *локально постоянным*. В этом случае на каждом прообразе $\pi^{-1}(U_\xi)$ ($\xi \in \Xi$) семейство $\{\psi_\xi^{-1}(U_\xi \times \{y\});\ y \in F\}$ является C^r-слоением коразмерности $n-q$, причем на общем участке $\pi^{-1}(U_\xi \cap U_\eta)$ прообразы $\pi^{-1}(U_\xi)$ и $\pi^{-1}(U_\eta)$ имеют одни и те же слои. Этим и объясняется термин «локально постоянное расслоение». Следовательно, исходя из описанных C^r-слоений на прообразах $\pi^{-1}(U_\xi)$, можно

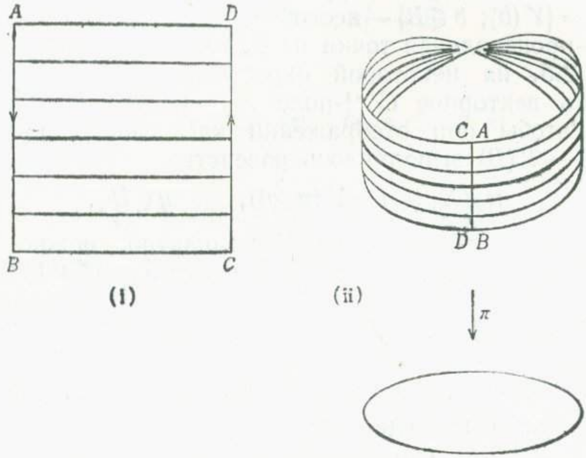


Рис. 4.7.

определить некоторое C^r-слоение коразмерности $n-q$ и на всем многообразии E.

Пример 4. Пусть $I=[0, 1]$ и в квадрате $I \times I$ стороны $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, изображенные на рис. 4.7 (i), отождествлены. В результате получится так называемый *лист Мёбиуса*. Обозначим его через E и определим отображение π: $E \to S^1$ так, как подсказывает рис. 4.7 (ii). Тогда π будет локально постоянным C^∞-расслоением. Изображенные на рис. 4.7 (i) отрезки $I \times \{t\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, при переходе на лист Мёбиуса, изображенный на рис. 4.7 (ii), дают C^∞-слоение коразмерности 1.

Когда при локально постоянном расслоении π: $E \to B$ слои являются множествами точек с дискретной топологией, говорят, что E является *накрывающим пространством* для B (а само расслоение тогда называют *накрытием*).

В заключение докажем достаточность некоторых условий для того, чтобы C^r-субмерсия была C^r-расслоением.

Теорема 4.3. *Пусть E есть n-мерное C^r-многообразие, B — некоторое q-мерное C^r-многообразие и $\pi: E \to B$ — C^r-субмерсия. Тогда если $r \geqslant 2$, E компактно, а B связно, то отображение $\pi: E \to B$ является C^r-расслоением.*

Доказательство[1]). Из условий теоремы непосредственно следует, что π является отображением на все B. Проведем доказательство сначала для случая $q=1$. Тогда многообразие B является либо окружностью S^1, либо отрезком $[0, 1]$. Пусть $Y=\{Y(b);\ b \in B\}$ — неособое векторное C^{r-1}-поле на B. Если x — произвольная точка из E, то, следуя доказательству теоремы 2.5, на некоторой окрестности U_x точки x можно определить векторное C^{r-1}-поле $X_x=\{X_x(y);\ y \in U_x\}$ таким образом, чтобы при отображении касательных пространств $\pi_*: T(E) \to T(B)$ выполнялось равенство

$$\pi_*(X_x(y))=Y(\pi(y)), \qquad y \in U_x.$$

Учитывая, что многообразие E компактно, можно выбрать конечное число окрестностей U_{x_i} и полей X_{x_i} $(i=1, 2, \ldots, m)$ с описанными выше свойствами так, чтобы $\bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{x_i}=E$. Фиксируем для открытого покрытия $\{U_{x_i};\ i=1, 2, \ldots, m\}$ многообразия E разбиение единицы

$$\mu_i \quad (i=1, 2, \ldots, m), \qquad \operatorname{supp} \mu_i \subset U_{x_i},$$

и определим на E векторные поля X_i $(i=1, 2, \ldots, m)$, положив

$$X_i(y)=\begin{cases} \mu_i(y)\, X_{x_i}(y), & y \in U_{x_i}, \\ 0, & y \notin U_{x_i}. \end{cases}$$

Очевидно, что X_i является векторным C^{r-1}-полем. Положим

$$X(y)=\sum_{i=1}^{m} X_i(y) \qquad (y \in E)$$

и заметим, что $X=\{X(y);\ y \in E\}$ является векторным C^{r-1}-полем на E и

$$\pi_*(X(y))=Y(\pi(y)), \qquad y \in E.$$

---

[1]) В этом доказательстве происходит падение гладкости на единицу из-за использования векторного C^{r-1}-поля X. Поэтому автор требует, чтобы $r \geqslant 2$, и получает фактически C^{r-1}-расслоение (такой класс гладкости имеет его система координат (U_b, ψ_b)). По поводу доказательства без потери гладкости см. примечание к стр. 132. Соответственно можно понизить требования гладкости до естественного условия $r \geqslant 1$ и в главах 5 и 6.— *Прим. ред.*

Если b — произвольная точка из B, то, согласно теореме 2.5, прообраз $\pi^{-1}(b)=F_b$ является $(n-1)$-мерным подмногообразием в E и притом компактным. Каждая точка x из F_b может рассматриваться как начальная точка некоторой интегральной кривой $\varphi_{\{x\}}(t)$ поля X. В силу свойств поля X множество точек $\pi\circ\varphi_{\{x\}}(t)$ составляет интегральную кривую $\overline{\varphi}_{\{b\}}(t)$ поля Y, определяемую точкой b как начальной. Для достаточно малого $\varepsilon>0$ определим отображение[1])

$$\overline{\psi}_b\colon\ F_b\times\,]-\varepsilon,\ \varepsilon[\,\longrightarrow E$$

равенством

$$\overline{\psi}_b(x,\ t)=\varphi_{\{x\}}(t)\quad(-\varepsilon<t<\varepsilon).$$

Тогда

$$\pi\circ\overline{\psi}_b(F_b\times\{t\})=\overline{\varphi}_{\{b\}}(t)\quad(-\varepsilon<t<\varepsilon)$$

и ограничение $\overline{\psi}_b\,|\,F_b\times\{t\}$ является C^r-гомеоморфизмом между $F_b\times\{t\}$ и участком $\pi^{-1}(\overline{\varphi}_{\{b\}}(t))$. По этой причине все множества $F_b=\pi^{-1}(b)$ $(b\in B)$ C^r-гомеоморфны. Будем обозначать F_b просто через F. Для $U_b=\pi(\overline{\psi}_b(F\times\,]-\varepsilon,\ \varepsilon[))$ определим

$$\psi_b\colon\ \pi^{-1}(U_b)\longrightarrow U_b\times F$$

с помощью равенства $\psi_b=\overline{\psi}_b^{-1}$ и заметим, что $\{(U_b,\ \psi_b);\ b\in B\}$ служит для $\pi\colon\ E\longrightarrow B$ системой координат C^r-расслоения.

В общем случае при $q>1$ для произвольной точки b из B прообраз $F_b=\pi^{-1}(b)$ является $(n-q)$-мерным подмногообразием в E (теорема 2.5). Пусть $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_q$ — базис в касательном пространстве $T_b(B)$; рассмотрим на F_b такие векторные C^{r-1}-поля $X_i=\{X_i(x)\in T_x(E);\ x\in F_b\}$, что $\pi_*(X_i(x))=e_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ q$. Эти поля можно построить сначала локально, а затем согласовать их на всем многообразии F_b с помощью разбиения единицы (§ 9). Возьмем на E какую-нибудь риманову метрику и для достаточно малой окрестности U произвольной фиксированной точки b_0 из B определим в $\pi^{-1}(U)$ трансверсальное к $\mathcal{F}$ слоение $\mathcal{F}'$ с помощью экспоненциального отображения Exp (о нем см. комментарии, примечание 4.2) приняв, что слоем L'_x слоения $\mathcal{F}'$, проходящим через $x\in F_b$, является

$$\pi^{-1}(U)\cap\left\{\operatorname{Exp}\sum_i\alpha_iX_i(x)\right\},$$

[1]) При $b\in\partial B$ вторым сомножителем, естественно, будет $[0,\ \varepsilon[$ или $]-\varepsilon,\ 0]$. — *Прим. ред.*

где $|\alpha_i|$ достаточно малы[1]). После этого определим гомеоморфизм

$$\psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F_{b_0},$$

положив

$$\psi^{-1}(b, x) = \pi^{-1}(b) \cap L'_x. \quad \square$$

§ 18. Топологические свойства слоев

Пусть $]a, b[^m$ — произведение m экземпляров интервала $]a, b[$; очевидно, $]a, b[^m$ является открытым множеством в пространстве $\mathbf{R}^m$.

Пусть, далее, M^n есть n-мерное C^s-многообразие, $\mathcal{F} = \{L_\alpha;\ \alpha \in A\}$ — некоторое C^r-слоение коразмерности q на M^n $(s \geqslant r \geqslant 1)$ и $\mathcal{S}^{(r)}_{\mathcal{F}}$ — соответствующая расслоенная система координат. Расслоенная координатная окрестность $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{S}^{(r)}_{\mathcal{F}}$ называется *отмеченной*, если

(i) $\varphi_\lambda(U_\lambda) =]-1, 1[^n$;

(ii) существует окрестность $(U_{\hat{\lambda}}, \varphi_{\hat{\lambda}}) \in \mathcal{S}^{(r)}_{\mathcal{F}}$, такая, что $\overline{U}_\lambda \subset U_{\hat{\lambda}}$ и $\varphi_{\hat{\lambda}} | U_\lambda = \varphi_\lambda$.

Очевидно, для любой точки $p \in \operatorname{Int} M^n$ существует отмеченная расслоенная координатная окрестность $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, такая, что $p \in U_\lambda$ и при этом $\varphi_\lambda(p) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Фиксируем проекцию

$$\hat{\pi}\colon]-1, 1[^n \to]-1, 1[^q,$$

положив

$$\hat{\pi}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = (x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \ldots, x_n).$$

Для произвольной точки $x \in]-1, 1[^q$ и отмеченной расслоенной координатной окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ прообраз $\varphi_\lambda^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(x))$ содержится в некотором слое слоения $\mathcal{F}$. Прообраз $\varphi_\lambda^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(x))$ называется *локальным слоем*[2]) окрестности U_λ и будет обоз-

---

[1]) Фактически речь идет о трубчатой окрестности F_{b_0} в E; см. [2]. В терминах этого примечания, если трубчатая окрестность есть W (причем $W \supset \pi^{-1}(U)$) и $\pi_1\colon W \to F_{b_0}$ — ее проекция на F_{b_0}, то для $y \in \pi^{-1}(U)$

$$\psi(y) = (\pi(y), \pi_1(y)).$$

— *Прим. ред.*

[2]) Французский термин plaque, английский — slice, что означает буквально «площадка», «срез». Однако от буквального перевода пришлось отказаться, так как в русской литературе «площадки» и «срезы» обычно трансверсальны к слоям. — *Прим. ред.*

начаться через Q_λ (см. рис. 4.8). Все локальные слои окрестности U_λ C^r-гомеоморфны пространству $]-1,\ 1[^{n-q}$ и

$$U_\lambda = \bigcup_{x \in]-1,\ 1[^q} \varphi_\lambda^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(x)).$$

Лемма 4.4. *Пусть* $(U_\lambda,\ \varphi_\lambda)$, $(U_\xi,\ \varphi_\xi)$ — *отмеченные расслоенные координатные окрестности и* $U_\lambda \subset U_\xi$. *Пусть, далее,* Q_λ —

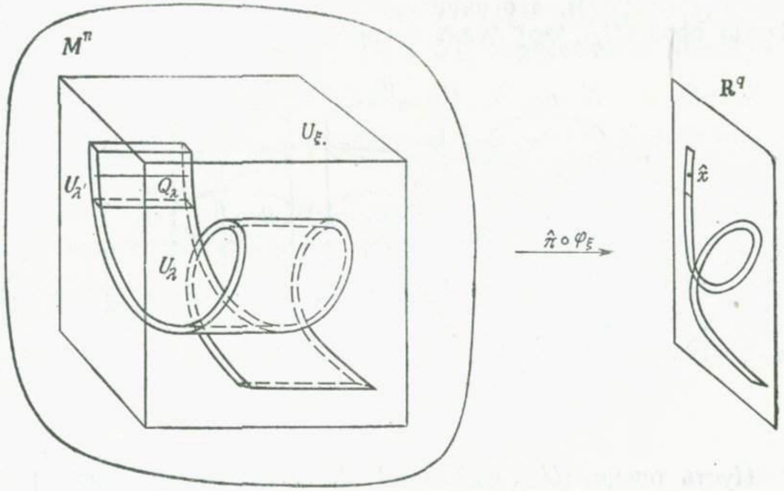


Рис. 4.8.

локальный слой окрестности U_λ. *Тогда существует отмеченная расслоенная координатная окрестность* $(U_{\lambda'},\ \varphi_{\lambda'})$, *обладающая следующими свойствами* (i), (ii) (см. рис. 4.8):

(i) $Q_\lambda \subset U_{\lambda'} \subset U_\lambda$ *и* Q_λ *является локальным слоем и окрестности* $U_{\lambda'}$;

(ii) *если для какого-либо локального слоя* Q_ξ *окрестности* U_ξ *имеет место соотношение* $Q_\xi \cap U_{\lambda'} \neq \varnothing$, *то* $Q_\xi \cap U_{\lambda'}$ *является локальным слоем окрестности* $U_{\lambda'}$.

Доказательство. Согласно условию, каждый локальный слой окрестности U_λ принадлежит некоторому локальному слою окрестности U_ξ. Для $x \in]-1,\ 1[^q$ при однозначно определенном x' имеет место включение $\varphi_\lambda^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(x)) \subset \varphi_\xi^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(x'))$. Этим соответствием между x и x' определяется отображение

$$\zeta\colon\ ]-1,\ 1[^q \to]-1,\ 1[^q$$

которое, как легко видеть, является C^r-иммерсией. Далее пусть

$$Q_\lambda = \varphi_\lambda^{-1}(\hat\pi^{-1}(\hat x)) \quad (\hat x = (\hat x_1, \hat x_2, \ldots, \hat x_q) \in]-1, 1[^q);$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\hat U =]\hat x_1 - \varepsilon, \hat x_1 + \varepsilon[\times]\hat x_2 - \varepsilon, \hat x_2 + \varepsilon[\times \ldots \times]\hat x_q - \varepsilon, \hat x_q + \varepsilon[\subset \subset]-1, 1[^q$$

и $\zeta | \hat U$ является C^r-вложением. Определим $U_{\lambda'}$ равенством $U_{\lambda'} = \varphi_\lambda^{-1}(\hat\pi^{-1}(\hat U))$, а ограничение $\varphi_\lambda | U_{\lambda'}$ обозначим через $\varphi_{\lambda'}$. Тогда пара $(U_{\lambda'}, \varphi_{\lambda'})$ будет искомой. □

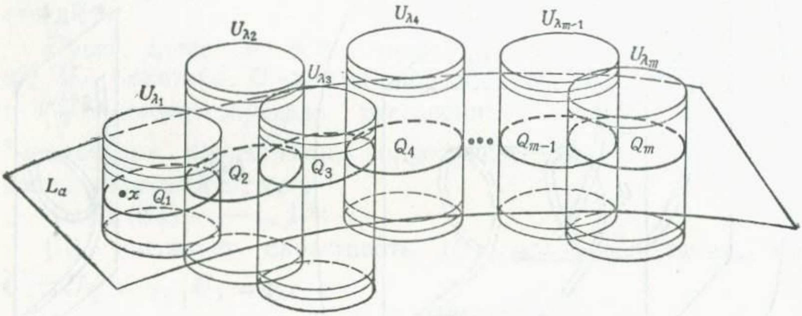


Рис. 4.9.

Пусть теперь $(U_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i})$, $i = 1, 2, \ldots, m$,— отмеченные расслоенные координатные окрестности и

$$\mathscr{C} = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_m}\}$$

— конечная последовательность окрестностей U_{λ_i}. Пусть x — точка из U_{λ_1}, лежащая на локальном слое Q_1 окрестности U_{λ_1}, и пусть L_α — слой, содержащий x. Если можно в каждой окрестности U_{λ_i} $(i = 2, \ldots, m)$ так выбрать локальный слой Q_i $(i = 2, 3, \ldots, m)$, чтобы

$$Q_i \cap Q_{i+1} \neq \varnothing, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1,$$

то последовательность $\mathscr{C}$ называется *цепью для точки* x или *цепью, допустимой для точки* x; будем говорить также, что x *допускает* b (рис. 4.9)[1]. Локальные слои Q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$

[1]) Стандартного русского термина пока нет. «Цепь для точки» — дословный перевод термина Риба [1], используемого Тамурой. Но по-русски лемма 4.5 с использованием этого термина звучала бы довольно коряво, поэтому я и ввел варианты «цепь, допустимая для точки» и «точка допускает цепь». Они, во всяком случае, не противоречат Рибу и Тамуре, поскольку у них самих имеется формулировка типа «точка допускает такую-то систему цепей»,— *Прим. ред.*

в этом случае называются *характеристическими локальными слоями* цепи[1] $\mathscr{C}$. В силу определения, очевидно,

$$Q_i \subset L_\alpha \quad (i=1, 2, \ldots, m);$$

число m называется *длиной* цепи.

Лемма 4.5. *Пусть $\mathscr{C}=\{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_m}\}$ — цепь, допустимая для точки x. Тогда множество O_1 всех тех точек $z \in U_{\lambda_1}$, которые также допускают цепь $\mathscr{C}$, открыто в U_{λ_1}.*

Доказательство. Пусть $O_m = U_{\lambda_m}$, а при $i=m-1, m-2, \ldots, 1$ подмножество O_i в U_{λ_i} определяется равенством

$$O_i = \varphi_{\lambda_i}^{-1}(\hat{\pi}^{-1} \circ \hat{\pi}(\varphi_{\lambda_i}(U_{\lambda_i} \cap O_{i+1}))) \quad (i=1, 2, \ldots, m-1).$$

Тогда O_1 является указанным в формулировке открытым множеством. □

Лемма 4.6. *Пусть X — метрическое пространство, K — его компактное подмножество, U_i' $(i=1, 2, \ldots, v')$ — открытые подмножества в X и $\bigcup\limits_{i=1}^{v'} U_i' \supset K$. Тогда в X существуют открытые множества U_i $(i=1, 2, \ldots, v)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) $\bigcup\limits_{i=1}^{v} U_i \supset K$;

(ii) *если $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, то существует U_k' $(1 \leqslant k \leqslant v')$ такое, что $U_i \cup U_j \subset U_k'$.*

Идея доказательства. Для множеств U_i' $(i=1, 2, \ldots, v')$ определено число Лебега $\delta > 0$ (см. комментарии, примечание 4.3). А именно, если подмножество G пространства Xтаково, что $G \cap K \neq \varnothing$ и диаметр $d(G) < \delta$, то $G \subset U_k'$ при некотором k. Следовательно, множества U_i $(i=1, 2, \ldots, v)$ следует выбрать так, чтобы $d(U_i) < \delta/2$ и выполнялось условие (i). □

Лемма 4.7. *Пусть L_α — слой, на котором заданы две точки x и y. Тогда существует цепь $\mathscr{C}=\{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_m}\}$, допустимая для точки x и обладающая следующими свойствами:*

[1]) Следует иметь в виду, что характеристические локальные слои Q_i, вообще говоря, не определяются точкой x однозначно (кроме, конечно, Q_1). Неоднозначности не будет, если окрестности U_{λ_i} будут достаточно мелкими, как оно фактически и будет позднее (лемма 4.7 и далее). Пока же не исключено, что, скажем, $Q_1 \cap U_{\lambda_2}$ состоит из нескольких частей, лежащих на разных локальных слоях окрестности U_{λ_2}. — *Прим. ред.*

(i) $x \in U_{\lambda_1}$; $y \in U_{\lambda_m}$;

(ii) *если точка* $z \in U_{\lambda_1}$ *также допускает цепь* $\mathscr{C}$, *то соответствующие ей характеристические локальные слои цепи* $\mathscr{C}$

$$Q'_i \quad (i=1, 2, \ldots, m), \quad Q'_i \subset U_{\lambda_i} \cap L_\beta$$

(L_β — *слой, которому принадлежит* z), $z \in Q'_1$, *таковы, что локальный слой* Q'_i *пересекает* $U_{\lambda_{i+1}}$ *по локальному слою* Q'_{i+1}, *а локальный слой* Q'_{i+1} *пересекает* U_{λ_i} *по локальному слою* Q'_i $(i=1, 2, \ldots, m-1)$[1]).

Доказательство. Пусть l: $[0, 1] \to L_\alpha$ есть C^0-кривая, причем $l(0)=x$, $l(1)=y$. С помощью конечного числа отмеченных расслоенных координатных окрестностей, покрывающих кривую $l([0, 1])$, построим допустимую для точки x цепь $\mathscr{C}'' = \{U_{\xi_1}, U_{\xi_2}, \ldots, U_{\xi_{m'}}\}$, в которой $x \in U_{\xi_1}$, $y \in U_{\xi_{m'}}$. Множество $\bigcup\limits_{i=1}^{m'} U_{\xi_i}$ является метрическим пространством (см. § 10); к нему можно применить лемму 4.6 при $U'_i = U_{\xi_i}$, $v' = m'$, $K = l([0, 1])$ и построить для точки x цепь $\mathscr{C}' = \left\{U_{\lambda'_1}, U_{\lambda^1_2}, \ldots, U_{\lambda'_m}\right\}$, в которой $y \in U_{\lambda'_m}$ и, если $U_{\lambda'_i} \cap U_{\lambda'_j} \neq \varnothing$, то

$$U_{\lambda'_i} \cap U_{\lambda'_j} \subset U_{\xi_k}$$

при некотором U_{ξ_k}. Пусть Q_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ — характеристический локальный слой цепи $\mathscr{C}'$, допустимой для точки x, и $x \in Q_1$, $y \in Q_m$.

Так как $U_{\lambda'_1} \cap U_{\lambda'_2} \supset Q_1 \cap Q_2 \neq \varnothing$, существует U_{ξ_k}, для которого $U_{\lambda'_1} \cap U_{\lambda'_2} \subset U_{\xi_k}$. Применяя лемму 4.4 к $U_{\lambda'_1} \subset U_{\xi_k}$ и к $U_{\lambda'_2} \subset U_{\xi_k}$, выберем такие отмеченные расслоенные координатные окрестности $(U_{\lambda''_1}, \varphi_{\lambda''_1})$, $(U_{\lambda''_2}, \varphi_{\lambda''_2})$, что

$$Q_1 \subset U_{\lambda''_1} \subset U_{\lambda'_1}, \quad Q_2 \subset U_{\lambda''_2} \subset U_{\lambda'_2}$$

и в каждом из этих двух случаев выполнено условие (ii) из леммы 4.4.

Так как $U_{\lambda''_2} \cap U_{\lambda'_3} \supset Q_2 \cap Q_3 \neq \varnothing$ и $U_{\lambda''_2} \cup U_{\lambda'_3} \subset U_{\xi_{k'}}$, оказываются выполненными включения $U_{\lambda''_2} \subset U_{\xi_{k'}}$ и $U_{\lambda'_3} \subset U_{\xi_{k'}}$.

---

[1]) В том смысле, что $Q'_i \cap U_{\lambda_{i+1}} \subset Q'_{i+1}$ и $Q'_{i+1} \cap U_{\lambda_i} \subset Q'_i$. Очевидно, в условиях леммы 4.7 в цепи $\mathscr{C}$ характеристические локальные слои точки x определены однозначно.— *Прим. ред.*

Точно так же, применяя лемму 4.4, выберем отмеченные расслоенные координатные окрестности $(U_{\lambda_2'''}, \varphi_{\lambda_2'''})$ и $(U_{\lambda_3''}, \varphi_{\lambda_3''})$. Продолжая этот процесс, определим окрестности $(U_{\lambda_1''}, \varphi_{\lambda_1''})$, $(U_{\lambda_i'''}, \varphi_{\lambda_i'''})$ $(i=2, 3, \ldots, m-1)$, $(U_{\lambda_m''}, \varphi_{\lambda_m''})$, а затем окрестности $(U_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i})$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, положив

$$(U_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_1})=(U_{\lambda_1''}, \varphi_{\lambda_1''}), \quad (U_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i})=(U_{\lambda_i'''}, \varphi_{\lambda_i'''}),$$
$$i=2, 3, \ldots, m-1,$$
$$(U_{\lambda_m}, \varphi_{\lambda_m})=(U_{\lambda_m''}, \varphi_{\lambda_m''}).$$

Справедливость условия (i) очевидна. Проверим, что выполнено и условие (ii). Согласно сказанному выше, $U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2} \subset U_{\xi_k}$; поэтому существует единственный локальный слой Q_k'' окрестности U_{ξ_k}, такой, что $Q_k'' \supset Q_1'$. Пересечение локального слоя окрестности U_{λ_2} и Q_1' содержится в $U_{\lambda_2} \cap Q_k''$; согласно лемме 4.4 (ii), учитывая, что пересечение $U_{\lambda_2} \cap Q_k''$ содержит ровно один локальный слой окрестности U_{λ_2} [1]), получаем теперь, что Q_1' пересекает U_{λ_2} по локальному слою Q_2'. Аналогично рассматриваются случаи U_{λ_i}, $U_{\lambda_{i+1}}$. □

Теорема 4.8. *Пусть x, y — две точки на слое L_α. Для каждой отмеченной расслоенной координатной окрестности (U_ν, φ_ν) точки y существует отмеченная расслоенная координатная окрестность (U_μ, φ_μ) точки x, такая, что если $L_\beta \cap U_\mu \neq \varnothing$, то и $L_\beta \cap U_\nu \neq \varnothing$, и что, более того, если локальный слой Q_1' окрестности U_μ принадлежит слою L_β и $x \notin Q_1'$, то L_β содержит и локальный слой окрестности U_ν, не содержащий точку y.*

---

[1]) Имеем $U_{\lambda_2}=U_{\lambda_2'''} \subset U_{\lambda_2''}$ и поэтому $U_{\lambda_2} \cap Q_k'' \subset U_{\lambda_2''} \cap Q_k''$. О последнем пересечении мы знаем, что это ровно один локальный слой окрестности $U_{\lambda_2''}$, — обозначим его через $Q'_{\lambda_2''}$. Но каждый локальный слой окрестности $U_{\lambda_2''}$ пересекает (если пересекает) окрестность $U_{\lambda_2'''}$ ровно по одному локальному слою последней — вспомним, что $U_{\lambda_2''} \subset U_{\xi_k}$, и что $U_{\lambda_2'''}$ получалась применением леммы 4.4 к этой паре вложенных отмеченных окрестностей. Итак, $U_{\lambda_2} \cap Q_k'' \subset Q'_{\lambda_2''}$ и $U_{\lambda_2} \cap Q'_{\lambda_2''}$ состоит ровно из одного локального слоя Q_2'.

Фактически в доказательстве леммы 4.7 доказывается (и используется), что из леммы 4.4 следует аналогичное последней утверждение, в котором вместо (U_ξ, φ_ξ) фигурирует несколько отмеченных расслоенных координатных окрестностей $(U_{\xi_i}, \varphi_{\xi_i})$, причем $U_\lambda \subset U_{\xi_i}$ при всех i. — *Прим. ред.*

Доказательство. Рассмотрим описанную в лемме 4.7 цепь $\mathscr{C}=\{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_m}\}$, допустимую для точки x, предполагая, что $U_{\lambda_m} \subset U_{\nu}$. В качестве U_{μ} возьмем описанное в лемме 4.5 подмножество $O_1 \subset U_{\lambda_1}$, а в качестве φ_{μ} — ограничение $\varphi_{\lambda_1} | U_{\mu}$. Тогда пара (U_{μ}, φ_{μ}) будет искомой. Согласно условию (ii) из леммы 4.7, в характеристических локальных слоях Q'_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ локальные слои Q'_i и Q'_{i+1} однозначно определяют друг друга. Следовательно, если $x \notin Q'_1$, то и $y \notin Q'_m$. □

Ниже приводятся результаты о топологии слоев, опирающиеся на теорему 4.8. Они соответствуют результатам о топологии траекторий динамических систем, о которых шла речь в § 12.

Теорема 4.9. *Пусть $\{L_{\alpha};\ \alpha \in A'\}$ — некоторое множество слоев. Если точка x принадлежит $\overline{\bigcup_{\alpha \in A'} L_{\alpha}}$ и расположена на слое L_{β}, то $L_{\beta} \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in A'} L_{\alpha}}$. Следовательно, для всякого слоя L_{α} замыкание $\overline{L_{\alpha}}$ является объединением слоев,*

$$\overline{L_{\alpha}} = \bigcup_{L_{\beta} \subset \overline{L_{\alpha}}} L_{\beta}.$$

Доказательство. Пусть y — произвольная точка из L_{β} и $y \in U_{\nu}$, где (U_{ν}, φ_{ν}) — отмеченная расслоенная координатная окрестность. В силу первой половины теоремы 4.8 существует отмеченная расслоенная координатная окрестность (U_{μ}, φ_{μ}) точки x, такая, что если U_{μ} имеет непустое пересечение с некоторым слоем, то и U_{ν} имеет с тем же слоем непустое пересечение. Следовательно,

$$U_{\nu} \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A'} L_{\alpha} \right) \neq \varnothing,$$

и, так как U_{ν} сколь угодна мала,

$$y \in \overline{\bigcup_{\alpha \in A'} L_{\alpha}}. \ \square$$

Теорема 4.10. *Пусть O — любое открытое подмножество многообразия M^n и*

$$Y = \bigcup_{L_{\alpha} \cap O \neq \varnothing} L_{\alpha}.$$

Тогда Y — открытое множество в M^n.

Доказательство. Пусть $x \in Y$ и, следовательно, x лежит на некотором слое L_α, где $L_\alpha \cap O \neq \varnothing$. Для произвольной точки $y \in L_\alpha \cap O$ существует ее отмеченная расслоенная координатная окрестность (U_ν, φ_ν), такая, что $U_\nu \subset O$. Согласно первой половине теоремы 4.8, существует отмеченная расслоенная координатная окрестность (U_μ, φ_μ) точки x, такая, что все слои, пересекающие U_μ, пересекают и U_ν, а потому и множество O. Поэтому $U_\mu \subset Y$, что и требовалось. □

Теорема 4.11. *Слой L_α является собственным тогда и только тогда, когда существует отмеченная расслоенная координатная окрестность $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, такая, что $L_\alpha \cap U_\lambda$ является локальным слоем окрестности U_λ.*

Доказательство. Пусть L_α — собственный слой. Пусть $(U_{\lambda'}, \varphi_{\lambda'})$ — отмеченная расслоенная координатная окрестность, некоторый локальный слой Q' которой принадлежит L_α. Так как L_α — собственный слой, у локального слоя Q' существует такая окрестность V, что $L_\alpha \cap V = Q'$. Отсюда следует существование искомой окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$.

Обратно, пусть существует окрестность $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, удовлетворяющая условию теоремы. Для произвольной точки x слоя L_α фиксируем, следуя теореме 4.8, отмеченную расслоенную координатную окрестность (U_μ, φ_μ), $x \in U_\mu$, такую, что если $L_\beta \cap U_\mu \neq \varnothing$ для некоторого слоя L_β, то L_β пересекает и U_λ, и если Q_1' — локальный слой окрестности U_μ, причем $L_\beta \supset Q_1'$, $Q_1' \not\ni x$, то $L_\beta \cap U_\lambda$ содержит точки вне исходного локального слоя $L_\alpha \cap U_\lambda$. Слой же L_α пересекает окрестность U_λ только по этому последнему локальному слою; значит, из того, что в $L_\beta \cap U_\mu$ имеется локальный слой, не содержащий x, вытекает $L_\beta \neq L_\alpha$. Следовательно, $U_\mu \cap L_\alpha$ содержит лишь точки, лежащие на том же локальном слое, что и x. Поэтому L_α — собственный слой. □

Теорема 4.12. *Если L_α — компактный слой, то для любой отмеченной расслоенной координатной окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ пересечение $L_\alpha \cap U_\lambda$ состоит из конечного числа локальных слоев. Если L_α обладает этим последним свойством и если при этом существует такое компактное множество E, что $L_\alpha \subset E \subset M^n$, то L_α — компактный слой.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда слой L_α компактен. Предположим, что для некоторой отмеченной расслоенной координатной окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ пересечение $L_\alpha \cap U_\lambda$ содержит бесконечное множество локальных слоев. Тогда существует такая отмеченная расслоенная координатная окрестность $(U_{\hat{\lambda}}, \varphi_{\hat{\lambda}}) \in \mathcal{S}^{(r)}_{\mathcal{F}}$, что $\overline{U}_\lambda \subset U_{\hat{\lambda}}$ и $\varphi_\lambda =$

$=\varphi_{\hat{\lambda}} \mid U_{\lambda}$; тогда в пересечении $L_{\alpha} \cap U_{\hat{\lambda}}$ существует такая точка z, что проходящий через нее локальный слой является, в очевидном смысле, пределом бесконечной последовательности локальных слоев из $L_{\alpha} \cap U_{\lambda}$. Это, однако, противоречит компактности слоя L_{α}.

Обратно, пусть $L_{\alpha} \subset E \subset M^n$ при некотором компактном подмножестве E и для любой $(U_{\lambda}, \varphi_{\lambda})$ выполнено указанное выше условие. Так как E — компактное множество, оно покрывается конечным числом отмеченных расслоенных координатных окрестностей. Следовательно, слой L_{α} является объединением замыканий конечного числа локальных слоев. Это означает, что L_{α} — компактное множество. □

Лемма 4.13. *Пусть L_{α} — собственный слой, не являющийся компактным. Если компактно его замыкание $\overline{L}_{\alpha}$, то объединение всех слоев L_{β}, принадлежащих $\overline{L}_{\alpha}$ и отличных от L_{α}, т. е. множество*

$$G = \bigcup_{\substack{\overline{L}_{\alpha} \supset L_{\beta} \\ L_{\beta} \neq L_{\alpha}}} L_{\beta},$$

равно $\overline{L}_{\alpha} - L_{\alpha}$ и является непустым замкнутым множеством.

Доказательство. В силу теоремы 4.9 множество G непусто. Если x — произвольная точка из $\overline{G}$, то $x \in \overline{L}_{\alpha}$, так как $G \subset \overline{L}_{\alpha}$. Если к тому же и $x \in L_{\gamma}$, то, согласно теореме 4.9, имеет место включение $L_{\gamma} \subset \overline{L}_{\alpha}$. При этом обязательно $L_{\gamma} \neq L_{\alpha}$ и, следовательно, $x \in G$. Действительно, предположим, что $x \in L_{\alpha}$. Тогда произвольная отмеченная окрестность V точки x в M^n содержит некоторую точку y из G. В любой же окрестности точки y существует точка из L_{α}. Если последнюю окрестность взять достаточно малой, то получим, что в окрестность N попадает бесконечно много локальных слоев из L_{α}. Но L_{α} — собственный слой. Следовательно, $x \in G$. □

Теорема 4.14. *Пусть M^n компактно, L_{α} — собственный слой, и пусть $\overline{L}_{\alpha}$ является объединением собственных слоев. Тогда замыкание $\overline{L}_{\alpha}$ содержит хотя бы один компактный слой.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{K}$ совокупность всех непустых компактных подмножеств множества $\overline{L}_{\alpha}$, являющихся объединением слоев. Само множество $\overline{L}_{\alpha}$, очевидно, обладает этим свойством и, следовательно, $\mathcal{K} \ni \overline{L}_{\alpha}$. Поэтому $\mathcal{K} \neq \varnothing$. Введем на $\mathcal{K}$ отношение порядка $>$ по включению.

Фиксируем в $\mathcal{K}^\circ$ какое-либо линейно упорядоченное подмножество $\{K_\sigma \in \mathcal{K}^\circ;\ \sigma \in \Sigma\}$; таким образом,

$$\text{если } \sigma, \sigma' \in \Sigma, \text{ то либо } K_\sigma > K_{\sigma'}, \text{ либо } K_\sigma < K_{\sigma'}.$$

Благодаря свойству конечного пересечения, которым обладает семейство компактных подмножеств, общая часть элементов этого линейно упорядоченного множества непуста, т. е. $\bigcap_{\sigma \in \Sigma} K_\sigma \in \mathcal{K}^\circ$. Следовательно, в соответствии с леммой Цорна в $\mathcal{K}^\circ$ существует минимальный элемент. Обозначим его через K. Если K содержит некомпактный слой L_β, то в силу леммы 4.13 объединение слоев $L_\gamma \subset \overline{L}_\beta$, отличных от L_β, является непустым замкнутым компактным множеством в противоречие с минимальностью K. Следовательно, K является объединением компактных слоев. Более того, в силу своей минимальности множество K само является компактным слоем. □

Смысл теоремы 4.14 становится более понятным, если обратиться к слоению Риба на S^3, некомпактный слой которого играет роль слоя L_α, упомянутого в формулировке теоремы 4.14 [1]).

---

[1]) В связи с доказательством теоремы 4.14 уместно ввести понятие *минимального множества* для слоения, аналогичное одноименному понятию в теории динамических систем (§ 12). Это есть замкнутое подмножество $F \subset M^n$, которое целиком состоит из слоев и не имеет собственных замкнутых подмножеств, целиком состоящих из слоев. (Последнее эквивалентно тому, что каждый из входящих в F слоев плотен в F.) Из доказательства теоремы 4.14 и леммы 4.13 легко извлечь следующие два утверждения. 1) Если замыкание $\overline{L}_\alpha$ слоя L_α компактно, то в $\overline{L}_\alpha$ содержится хотя бы одно минимальное множество. 2) Минимальное множество F либо сводится к одному слою, являющемуся замкнутым подмножеством в M^n (если F компактно, этот слой замкнут как многообразие), либо целиком состоит из несобственных слоев.

Теорему Данжуа—Зигеля из гл. 1 можно переформулировать как теорему о минимальных множествах динамической системы на торе, порожденной неособым векторным полем X класса C^2. В таком виде она допускает обобщения, полученные сначала А. Шварцем для динамических систем на любых замкнутых двумерных многообразиях и при наличии особенностей (нулей) у X (на русском языке см. Хартман [1*]), а затем Секстедером [3] для слоений коразмерности один (в этом случае, однако, приходится накладывать некоторые дополнительные ограничения на свойства слоев). — *Прим. ред.*

Глава 5

ТЕОРЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СЛОЕНИЙ

§ 19. Система когерентных окрестностей

Пусть M^n есть n-мерное C^s-многообразие и $\mathcal{F}=\{L_\alpha;\, \alpha\in A\}$ — некоторое C^r-слоение ($r\geqslant 1$) коразмерности q на M^n. Мы опишем здесь структуру слоения в окрестности произвольного фиксированного слоя, используя для этого отмеченные расслоенные координатные окрестности. В этой связи и появляются системы когерентных окрестностей.

Теорема 5.1. *Пусть K — компактное подмножество произвольного фиксированного слоя $L_{\hat{\alpha}}$ (который снабжен соответствующей топологией). Тогда существует множество $\mathfrak{N}(K)$ отмеченных расслоенных координатных окрестностей (U_i, φ_i) $(i=1, 2, \ldots, v)$, обладающее следующими свойствами:*

(i) $\bigcup\limits_{i=1}^{v} U_i \supset K$.

(ii) *Для каждого U_i пересечение $U_i\cap K$ содержится в некотором локальном слое Q_i окрестности U_i,*

$$U_i\cap K\subset Q_i \quad (i=1, 2, \ldots, v),$$

где $Q_i=\varphi_i^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(0))$.

(iii) *Если $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, то и $U_i\cap U_j\cap K\neq\varnothing$.*

(iv) *Если $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, то существует отмеченная расслоенная координатная окрестность (U_{ij}, φ_{ij}), такая, что*

(a) $U_i\cup U_j\subset U_{ij}$;

(b) *для любого локального слоя Q_{ij} окрестности U_{ij} из того, что $Q_{ij}\cap U_i\neq\varnothing$, следует, что $Q_{ij}\cap U_i$ — локальный слой окрестности U_i, и из того, что $Q_{ij}\cap U_j\neq\varnothing$, следует, что $Q_{ij}\cap U_j$ — локальный слой окрестности U_j.*

(v) *Если (U_{ij}, φ_{ij}) и (U_{kl}, φ_{kl}) — введенные в* (iv) *отмеченные расслоенные координатные окрестности и $U_{ij}\cap U_{kl}\neq\varnothing$, то существует отмеченная расслоенная координатная окрестность $(U_{ijkl}, \varphi_{ijkl})$, такая, что*

(a) $U_{ij}\cup U_{kl}\subset U_{ijkl}$;

(b) *для любого локального слоя Q_{ijkl} окрестности U_{ijkl} из того, что $Q_{ijkl}\cap U_{ij}\neq\varnothing$, следует, что $Q_{ijkl}\cap U_{ij}$ — локальный слой U_{ij}, и из того, что $Q_{ijkl}\cap U_{kl}\neq\varnothing$, следует, что Q_{ijkl} — локальный слой U_{kl}.*

Такую систему $\mathfrak{N}(K)$ называют *системой когерентных окрестностей*.

Доказательство. Благодаря компактности множества K можно выбрать отмеченные расслоенные координатные окрестности (U_i, φ_i) $(i=1, 2, \ldots, v)$, а в каждой окрестности U_i — срез Q_i так, чтобы $\bigcup\limits_{i=1}^{v} Q_i \supset K$. Следовательно, свойство (i) проверено.

В силу компактности множества K, рассуждая точно так же, как в теореме 4.12, легко установить, что $U_i \cap K$ содержится в объединении конечного числа локальных слоев окрестности U_i. Если $U_i \cap K$ содержит точки, не принадлежащие локальному слою Q_i, то это означает, что

$$Q_i \subset U_i' \subset U_i$$

при некоторой отмеченной расслоенной координатной окрестности (U_i', φ_i'), для которой Q_i также является локальным слоем, но которая уже не содержит точек из K, не входящих в Q_i; при этом $Q_i = \varphi_i'^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(0))$. Если теперь заменить (U_i, φ_i) на (U_i', φ_i'), то наряду с (i) окажется установленным и свойство (ii).

Без ограничения общности мы можем считать, что Q_i $(i=1, 2, \ldots, v)$ удовлетворяют такому условию:

$$\text{если } Q_i \cap Q_j = \varnothing, \text{ то } \overline{Q}_i \cap \overline{Q}_j = \varnothing.$$

Если $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, $Q_i \cap Q_j = \varnothing$, то ясно, что существуют такие отмеченные расслоенные координатные окрестности (U_i', φ_i'), (U_j', φ_j'), что

$$Q_i \subset U_i' \subset U_i, \qquad Q_j \subset U_j' \subset U_j,$$
$$U_i' \cap U_j' = \varnothing$$

и Q_i, Q_j суть локальные слои U_i', U_j'. Если $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, $Q_i \cap Q_j \cap K = \varnothing$, $Q_i \cap Q_j \neq \varnothing$, то увеличим U_j до такой окрестности U_j', что

$$Q_i \cap Q_j' \cap K \neq \varnothing.$$

(Например, можно взять за U_j' объединение U_j с трубчатой окрестностью некоторой простой кривой, соединяющей некоторую точку множества $K \cap Q_i$ с некоторой точкой $\partial \overline{Q}_j$.) Тогда, заменив U_i, U_j на U_i', U_j' или U_i, U_j', мы обеспечим выполнение свойства (iii) [4].

Пусть (U_i'', φ_i'') $(i=1, 2, \ldots, v')$ — новые отмеченные расслоенные координатные окрестности и $\bigcup\limits_{i=1}^{v'} U_i'' \supset K$. Рассмотрим

$\bigcup\limits_{i=1}^{v'} U_i''$ как метрическое пространство (см. стр. 95). Применяя лемму 4.6 к множествам U_i'' $(i=1, 2, \ldots, v')$, получим, что достаточно «мелкие» U_i удовлетворяют п. (ii) этой леммы, т. е. если $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, то существует такое U_k'', что

$$U_i \cup U_j \subset U_k''.$$

Обозначим U_k'' через U_{ij}, так что $U_i \subset U_{ij}$ и $U_j \subset U_{ij}$. Применив лемму 4.4, получим, что существуют такие отмеченные расслоенные координатные окрестности $(U_{i'}, \varphi_{i'})$ и $(U_{j'}, \varphi_{j'})$, для которых

$$Q_i \subset U_{i'} \subset U_i \quad \text{и} \quad Q_j \subset U_{j'} \subset U_j,$$

(т. е. выполнен п. (ii) из леммы 4.4.) Заменяя (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) соответственно на $(U_{i'}, \varphi_{i'})$ и $(U_{j'}, \varphi_{j'})$, получим, что выполнено и условие (iv). Совершенно аналогично устанавливается справедливость условия (v). □

Пусть в дальнейшем K — компактное подмножество слоя $L_{\hat{\alpha}}$ и на K определена система когерентных окрестностей $\mathfrak{N}(K)$.

Если $x \in K$ и $\mathscr{C} = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_{m'}}\}$ $(x \in U_{\lambda_1})$ — цепь для точки x, причем $(U_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i}) \in \mathfrak{N}(K)$ $(i=1, 2, \ldots, m')$, то говорят о *цепи когерентных окрестностей, (допустимых) для точки* x.

Лемма 5.2. *Пусть $\mathscr{C} = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_{m'}}\}$ — цепь когерентных окрестностей для точки x. Пусть, далее, z — любая точка из U_{λ_1}, также допускающая цепь $\mathscr{C}$. Тогда набор характеристических локальных слоев цепи $\mathscr{C}$, определяемый точкой z,*

$$Q_i' \quad (i=1, 2, \ldots, m'), \quad Q_i' \subset U_{\lambda_i}, \quad z \in Q_1',$$

единствен.

Доказательство. Очевидно, локальный слой Q_1', содержащий точку z, единствен. В силу теоремы 5.1 (iv) $U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2} \subset U_{\lambda_1\lambda_2}$ при некоторой отмеченной расслоенной координатной окрестности $(U_{\lambda_1\lambda_2}, \varphi_{\lambda_1\lambda_2})$, удовлетворяющей теореме 5.1 (iv) (b). Поэтому, рассуждая так же, как в доказательстве леммы 4.7 (ii), легко установить, что локальный слой Q_2' окрестности U_{λ_2}, для которого $Q_1' \cap Q_2' \neq \varnothing$, единствен. Аналогично устанавливается единственность и всех остальных локальных слоев Q_i' $(i=1, 2, \ldots, m')$. □

Пусть $x \in K$ и m — положительное целое число. Рассмотрим все допустимые для точки x цепи когерентных окрестностей $\mathscr{C} = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_{m'}}\}$ длины $m' \leqslant m$.

Лемма 5.3. *Множество всех точек, которые допускают все цепи когерентных окрестностей, допустимые для точки x и имеющие длину, не превосходящую m, содержит пересечение* $\bigcap_{x \in U_i \in \mathfrak{N}(K)} Q_i$ *и является открытым множеством в M^n, содержащимся в* $\bigcap_{x \in U_i \in \mathfrak{N}(K)} U_i$.

Доказательство. Множество цепей когерентных окрестностей, допустимых для точки x, длина которых не превосходит m, обязательно конечно. Для каждой такой цепи по лемме 4.5 соответствующее подмножество O_1 является открытым подмножеством некоторого $U_i \in \mathfrak{N}(K)$, содержащего x. Пересечение всех таких O_1 является открытым подмножеством в $\bigcap_{x \in U_i \in \mathfrak{N}(K)} U_i$[1]).□

Пусть $l\colon [0, 1] \to K$ — некоторая C^0-кривая на K и $\mathscr{C} = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_{m'}}\}$ — допустимая для точки $l(0)$ цепь когерентных окрестностей; будем называть ее *цепью когерентных окрестностей на кривой l*, если существуют такие числа

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m'} = 1,$$

что

$$l([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m').$$

Очевидно, что для любой C^0-кривой l на K цепь $\mathscr{C}$ когерентных окрестностей на l такова, что $l(0) \in U_{\lambda_1}$ и $l(1) \in U_{\lambda_{m'}}$.

Лемма 5.4. *Пусть $\mathscr{C} = \{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_{m'}}\}$, $\mathscr{C}' = \{U_{j_1}, U_{j_2}, \ldots, U_{j_{m''}}\}$ — две цепи когерентных окрестностей на кривой l, причем $U_{i_1} = U_{j_1}$, $U_{i_{m'}} = U_{j_{m''}}$. Пусть далее $m', m'' \leqslant m$ и точка $z \in U_{i_1}$ допускает все цепи когерентных окрестностей, допустимые для точки $l(0)$ и длины, не превосходящей m. Тогда если*

$$Q'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m'), \qquad Q''_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m'') \qquad (Q'_1 = Q''_1)$$

— характеристические локальные слои цепей $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$ соответственно, определенные точкой z, то $Q'_{m'} = Q''_{m''}$.

Доказательство. Для $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m'} = 1$ и $0 = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_{m''} = 1$ имеем

$$l([t_{k-1}, t_k]) \subset U_{i_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m'),$$
$$l([t'_{k-1}, t'_k]) \subset U_{j_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m'').$$

[1]) В последнее пересечение действительно входят все указанные там U_i — ведь каждое из них само есть O_1 для цепи длины 1. — *Прим. ред.*

С помощью двух числовых последовательностей, указанных в начале доказательства, построим третью $0=t''_0<t''_1<\ldots$ $\ldots<t''_{m''}=1$, такую, что для любого k''

$$[t''_{k''-1}, t''_{k''}]\subset[t_{k-1}, t_k] \text{ и } [t''_{k''-1}, t''_{k''}]\subset[t'_{k'-1}, t'_{k'}]$$

при некоторых k, k' [1]). Тогда, так как

$$l([t''_{k''-1}, t''_{k''}])\subset l([t_{k-1}, t_k])\subset U_{i_k},$$
$$l([t''_{k''-1}, t''_{k''}])\subset l([t'_{k'-1}, t'_{k'}])\subset U_{j_{k'}},$$

пересечение $U_{i_k}\cap U_{j_{k'}}$ непусто и в силу теоремы 5.1 (iv) (a)

$$U_{i_k}\cap U_{j_{k'}}\subset U_{i_k j_{k'}}$$

для некоторой отмеченной расслоенной координатной окрестности $(U_{i_k j_{k'}}, \varphi_{i_k j_{k'}})$.

Когда $k''=1$ и $k=k'=1$, из равенства $Q'_1=Q''_1$, очевидно, следует, что $Q'_k\cup Q''_{k'}\subset\hat{Q}_{kk'}$ при некотором локальном слое $\hat{Q}_{kk'}$ окрестности $U_{i_k j_{k'}}$. Предположим, что включение

$$(*)\qquad Q'_k\cup Q''_{k'}\subset\hat{Q}_{kk'}$$

имеет место при некотором локальном слое $\hat{Q}_{kk'}$ окрестности $U_{i_k j_{k'}}$ для значений k и k', отвечающих всевозможным значениям k'' от 1 до некоторого числа, которое мы снова обозначим через k''. Пусть δ и δ' принимают значения 0 или 1, так что

$$[t''_{k''}, t''_{k''+1}]\subset[t_{k-1+\delta}, t_{k+\delta}]\cap[t'_{k'-1+\delta'}, t'_{k'+\delta'}].$$

По этой причине $U_{i_{k+\delta}}\cap U_{j_{k'+\delta'}}\neq\varnothing$ и в силу теоремы 5.1 (iv) (a)

$$U_{i_{k+\delta}}\cup U_{j_{k'+\delta'}}\subset U_{i_{k+\delta},\, j_{k'+\delta'}}$$

при некоторой отмеченной расслоенной координатной окрестности $(U_{i_{k+\delta},\, j_{k'+\delta'}}, \varphi_{i_{k+\delta},\, j_{k'+\delta'}})$.

Так как $Q'_{k+\delta}$, $Q''_{k'+\delta'}\subset U_{i_{k+\delta},\, j_{k'+\delta'}}$, пересечение

$$\hat{Q}_{kk'}\cap U_{i_{k+\delta},\, j_{k'+\delta'}}$$

---

[1]) Причем при возрастании k'' на 1 каждое из чисел k и k' либо не меняется, либо возрастает на 1, и когда k'' пробегает все значения от 0 до m'', то k пробегает все значения от 0 до m, а k' — от 0 до m'. — *Прим. ред.*

непусто; в силу теоремы 5.1 (v) (b) это означает, что существует единственный локальный слой $\hat{Q}_{k+\delta,\, k'+\delta'}$ окрестности $U_{i_{k+\delta},\, i_{k'+\delta'}}$, такой, что

$$\hat{Q}_{kk'} \cap \hat{Q}_{k+\delta,\, k'+\delta'} \neq \varnothing,$$

— соответствующее доказательство проводится так же, как и в лемме 4.7(ii). Однако в силу теоремы 5.1(iv)(b) пересечение $\hat{Q}_{k+\delta,\, k'+\delta'} \cap U_{i_{k+\delta}}$ является единственным локальным слоем окрестности $U_{i_{k+\delta}}$, а потому совпадает с $Q'_{k+\delta}$. Аналогично $\hat{Q}_{k+\delta,\, k'+\delta'} \cap U_{j_{k'+\delta'}}$ является единственным локальным слоем окрестности $U_{j_{k'+\delta'}}$, а потому совпадает с $Q''_{k'+\delta'}$. Следовательно,

$$Q'_{k+\delta} \cup Q''_{k'+\delta'} \subset \hat{Q}_{k+\delta,\, k'+\delta'}$$

и (*) справедливо для всех k'' и соответствующих k, k'. В частности, при $k'' = m'''$, $k = m'$, $k' = m''$ соотношение (*) дает

$$Q'_{m'} \cup Q''_{m''} \subset \hat{Q}_{m'm''}$$

и, так как $U_{i_{m'}} = U_{j_{m''}}$, в силу теоремы 5.1(iv)(b) это означает, что $Q'_{m'} = Q''_{m''}$. □

Пусть теперь на K заданы две C^0-кривые

$$l_0\colon [0, 1] \to K, \qquad l_1\colon [0, 1] \to K,$$

причем $x = l_0(0) = l_1(0)$, $y = l_0(1) = l_1(1)$ и при фиксированных x и y эти кривые гомотопны: $l_0 \simeq l_1$. Иными словами, существует семейство C^0-кривых

$$l_s\colon [0, 1] \to K,$$

где вещественное число s пробегает все значения от 0 до 1, непрерывно зависящих от s[1]) и таких, что $l_s(0) = x$, $l_s(1) = y$.

Пусть теперь $\mathscr{C} = \{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_{m'}}\}$ — цепь когерентных окрестностей на l_0 и $\mathscr{C}' = \{U_{j_1}, U_{j_2}, \ldots, U_{j_{m''}}\}$ — цепь когерентных окрестностей на l_1, причем

$$U_{i_1} = U_{j_1} \text{ и } U_{i_{m'}} = U_{j_{m''}}.$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то для всех s, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant s \leqslant \varepsilon$, цепь $\mathscr{C}$ является цепью когерентных окрестностей и на l_s. Поэтому существуют числа $0 = s_0 <$

---

[1]) Имеется в виду непрерывность $l_s(t)$ как функции двух переменных (s, t).— *Прим. ред.*

$< s_1 < \ldots < s_u = 1$ и допустимые для точки x цепи когерентных окрестностей

$$\mathscr{C}^{(k)} = \{U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \ldots, U_{m_k}^{(k)}\} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, u-1),$$

такие, что

$$\mathscr{C}^{(0)} = \mathscr{C}, \qquad \mathscr{C}^{(u-1)} = \mathscr{C}', \qquad U_1^{(k)} = U_{i_1}, \qquad U_{m_k}^{(k)} = U_{i_{m'}}$$

и цепь $\mathscr{C}^{(k)}$ является цепью когерентных окрестностей на всех кривых l_s с $s_k \leqslant s \leqslant s_{k+1}$. В такой ситуации говорят, что цепи $\mathscr{C}^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, u-1)$ *задают гомотопию цепей* $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$; число $\max\limits_k m_k$ называется *длиной гомотопии*.

Теорема 5.5. *Пусть цепи $\mathscr{C}^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, u-1)$ задают гомотопию цепи $\mathscr{C}$ когерентных окрестностей на l_0 и цепи $\mathscr{C}'$ когерентных окрестностей на l_1, имеющих длину, не превосходящую m. Тогда для любой точки z, допускающей все цепи когерентных окрестностей длины, не превосходящей m, допустимые для точки $l(0)$, характеристические локальные слои цепей $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$, определенные точкой z, т. е.*

$$Q_i' \ (i = 1, 2, \ldots, m'), \quad Q_j'' \ (j = 1, 2, \ldots, m''), \quad Q_1' = Q_1'',$$

соответственно, таковы, что $Q_{m'}' = Q_{m''}''$.

Доказательство. Рассмотрим на кривой l_{s_1} две цепи когерентных окрестностей $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{(0)}$ и $\mathscr{C}^{(1)}$. Фиксируем на $\mathscr{C}^{(1)}$ характеристический локальный слой, определенный точкой z:

$$Q_k''' \ (k = 1, 2, \ldots, m_1), \qquad Q_1''' = Q_1'.$$

В силу леммы 5.4 имеет место равенство $Q_{m_1}''' = Q_{m'}'$. Применяя это рассуждение последовательно к цепям $\mathscr{C}^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, u-1)$, получаем требуемое. □

§ 20. Теорема о локальной устойчивости

Как уже говорилось, частным случаем слоения является расслоение. Если слои слоения компактны, то при определенных условиях слоение является расслоением либо локально, либо глобально. Теоремы такого типа называются *теоремами об устойчивости*. Настоящий параграф и следующий § 21 посвящены доказательствам Риба теорем о локальной и глобальной устойчивости, которые датируются 1944 г.

Пусть M^n есть n-мерное C^s-многообразие и $\mathscr{F} = \{L_\alpha; \alpha \in A\}$ — некоторое C^r-слоение, $r \geqslant 1$, коразмерности q на M^n. Пусть $L_{\hat\alpha}$ — компактный слой, фундаментальная группа $\pi_1(L_{\hat\alpha})$ которого конечна; обозначим, через ν ее порядок (см. комментарии, примечание 5.1). Полагая в теореме 5.1 $K = L_{\hat{\alpha}}$, введем на $L_{\hat{\alpha}}$ систему когерентных окрестностей

$$\mathfrak{N}(L_{\hat{\alpha}}) = \{(U_i, \varphi_i);\ i = 1, 2, \ldots, v\}.$$

В этом случае в соответствии с теоремой 5.2(ii) фиксируются локальные слои $U_i \cap L_{\hat{\alpha}} = Q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, v)$.

В каждом локальном слое Q_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ фиксируем точку $x_i \in Q_i$. После этого определим на слое $L_{\hat{\alpha}}$ C^0-кривые

$$l_i\colon [0, 1] \to L_{\hat{\alpha}}, \quad l_i(0) = x_1, \quad l_i(1) = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, v),$$

соединяющие x_1 и x_i.

Если для $U_i, U_j \in \mathfrak{N}(L_{\hat{\alpha}})$ пересечение $U_i \cap U_j$ непусто, то, согласно теореме 5.1(iii),

$$U_i \cap U_j \cap L_{\hat{\alpha}} = Q_i \cap Q_j \neq \varnothing.$$

Поэтому в такой ситуации точки x_i и x_j можно соединить C^0-кривой

$$l_{ij}\colon [0, 1] \to Q_i \cup Q_j, \quad l_{ij}(0) = x_i, \quad l_{ij}(1) = x_j,$$

расположенной на $Q_i \cup Q_j$; можно считать, что

$$l_{ji}(t) = l_{ij}(1-t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Пусть C^0-кривые на $L_{\hat{\alpha}}$

$$w_k\colon [0, 1] \to L_{\hat{\alpha}}, \quad w_k(0) = w_k(1) = x_1 \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

представляют гомотопические классы $\{w_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$, составляющие фундаментальную группу $\pi_1(L_{\hat{\alpha}}, x_1)$.

Для кривых l_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$, l_{ij} $(i, j = 1, \ldots, v)$, w_k $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$, определим следующие цепи когерентных окрестностей:

(i) $\{U_1, U_2^{(i)}, \ldots, U_{m_i-1}^{(i)}, U_i\}$ — цепь когерентных окрестностей на кривой l_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$.

(ii) $\{U_i, U_j\}$ — цепь когерентных окрестностей на кривой l_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, v)$.

(iii) $\{U_1, \hat{U}_2^{(k)}, \ldots, \hat{U}_{m_k'-1}^{(k)}, U_1\}$ — цепь когерентных окрестностей на кривой w_k $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Каждой паре C^0-кривых w_k и l_i поставим в соответствие новую C^0-кривую $w_k \cdot l_i$, такую, что

$$w_k \cdot l_i\colon [0, 1] \to L_{\hat{\alpha}} \text{ и } w_k \cdot l_i(t) = \begin{cases} w_k(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ l_i(2t-1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда $\mathscr{C}^{(k)(i)}=\{U_1, \hat{U}_2^{(k)}, \ldots, \hat{U}^{(k)}_{m'_k-1}, U_1, U_2^{(i)}, \ldots, U^{(i)}_{m_i-1}, U_i\}$ является цепью когерентных окрестностей на кривой $w_k\cdot l_i$. Как было установлено выше, точка $z\in U_1$, допускающая $\mathscr{C}^{(k)(i)}$ как цепь когерентных окрестностей, задает однозначно определенный характеристический локальный слой этой цепи (лемма 5.2). Этот характеристический локальный слой начинается с Q'_1 $(z\in Q'_1)$ и заканчивается некоторым локальным слоем Q'_i окрестности U_i. Если $\gamma=\{w_k\}$ — элемент группы $\pi_1(L_{\hat\alpha}, x_1)$, то локальный слой Q'_i будет обозначаться через $Q^{(\gamma)}_{i,z}$. Если считать, что l_j^{-1}: $[0, 1]\to L_{\hat\alpha}$ есть C^0-кривая, для которой $l_j^{-1}(t)=l_j(1-t)$, то можно сказать, что при $U_i\cap U_j\neq\varnothing$ кривые w_k, l_i, l_{ij}, l_j^{-1} задают единую C^0-кривую $w_k\cdot l_i\cdot l_{ij}\cdot l_j^{-1}$, начинающуюся и заканчивающуюся в x_1. Но в таком случае для некоторой кривой $w_{k'}$ сложная кривая, составленная из w_k, l_i, l_{ij}, l_j^{-1} и $w_{k'}^{-1}$ (где $w_{k'}^{-1}(t)=w_{k'}(1-t)$), задает единичный элемент e группы гомотопических классов $\pi_1(L_{\hat\alpha}, x_1)$:

$$\{w_k\cdot l_i\cdot l_{ij}\cdot l_j^{-1}w_{k'}^{-1}\}=e.$$

Следовательно, две C^0-кривые $w_k\cdot l_i\cdot l_{ij}$ и $w_{k'}\cdot l_j$, соединяющие точки x_1 и x_j, гомотопны как кривые с фиксированными концами x_1 и x_j. Согласно § 19, на кривой $w_k\cdot l_i\cdot l_{ij}$ существует цепь когерентных окрестностей

$$\mathscr{C}^{(k)(i)(ij)}=\left\{U_1, \hat{U}_2^{(k)}, \ldots, \hat{U}^{(k)}_{m'_k-1}, U_1, U_2^{(i)}, \ldots, U^{(i)}_{m_i-1}, U_i, U_j\right\},$$

а на кривой $w_{k'}\cdot l_j$ — гомотопная ей цепь когерентных окрестностей

$$\mathscr{C}^{(k')(j)}=\left\{U_1, \hat{U}_2^{(k')}, \ldots, \hat{U}^{(k')}_{m'_{k'}-1}, U_1, U_2^{(j)}, \ldots, U^{(j)}_{m_j-1}, U_j\right\}.$$

Пусть m_{ij} — длина гомотопии первой цепи во вторую. Если $z\in U_1$ — точка, допускающая все цепи когерентных окрестностей для точки x_1 длины, не превосходящей m_{ij}, то характеристические локальные слои

$$Q'_1, \ \ldots, \ Q^{(\gamma)}_{i,z}, \ Q''_j \qquad (Q''_j\subset U_j)$$

цепи $\mathscr{C}^{(k)(i)(ij)}$, определенные точкой z, и характеристические локальные слои

$$Q'_1, \ \ldots, \ Q^{(\gamma')}_{j,z} \qquad (\text{здесь } \gamma'=\{w_{k'}\})$$

цепи $\mathscr{C}^{(k')(j)}$, определенные точкой z, согласно теореме 5.5, таковы, что

$$Q''_j=Q^{(\gamma')}_{j,z}.$$

Следовательно,

$$(*)\qquad Q^{(\gamma)}_{i,z}\cap Q^{(\gamma')}_{j,z}\neq\varnothing.$$

Пусть $\hat{m} = \max\limits_{i, j} m_{ij}$ для $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 5.6. *Пусть $\hat{V}$ — множество всех точек, допускающих все цепи когерентных окрестностей для точки x_1 длины, не превосходящей $\hat{m}$. Тогда в $\hat{V}$ существует открытое множество $\hat{V}'$, содержащее точку x_1, для любой точки z которого имеет место включение*

$$\overline{Q_{i,z}^{(\gamma)}} \subset \bigcup_{i=1}^{v} U_i \quad (\gamma \in \pi_1(L_{\hat{\alpha}}, x_1), \quad i = 1, 2, \ldots, v).$$

Доказательство. Пусть $m' \leqslant \hat{m}$ и $\mathscr{C} = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_{m'}}\}$ — цепь когерентных окрестностей длины m', допустимая для точки x_1, $(U_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i}) \in \mathfrak{N}(L_{\hat{\alpha}})$. В окрестности $U_{\lambda_{m'}}$ возьмем такое открытое множество $O_{m'}$, являющееся объединением локальных слоев этой окрестности, что

$$Q_{\lambda_{m'}} \subset O_{m'} \text{ и } \overline{O}_{m'} \subset \bigcup_{i=1}^{v} U_i;$$

затем последовательно определим множества O_i ($i = m' - 1, m' - 2, \ldots, 1$) с помощью равенства

$$O_i = \varphi_{\lambda_i}^{-1} (\hat{\pi}^{-1} \circ \hat{\pi} (\varphi_{\lambda_i} (O_{i+1} \cap U_{\lambda_i}))) \quad (i = 1, 2, \ldots, m' - 1)$$

(см. доказательство леммы 4.5)[1]). Обозначим множество O_1 через $O_{\mathscr{C}}$. Искомым множеством $\hat{V}'$ будет общая часть множеств $O_{\mathscr{C}}$, построенных для всевозможных цепей $\mathscr{C}$. □

Пусть теперь z — произвольная точка множества $\hat{V}'$, построенного в лемме 5.6. Эта точка принадлежит некоторому слою L_β. Для $i = 1, 2, \ldots, v$ и всевозможных элементов γ группы $\pi_1(L_{\hat{\alpha}}, x_1)$ конечное объединение локальных слоев $Q_{i,z}^{(\gamma)}$, т. е. множество

$$L(z) = \bigcup_{i, \gamma} Q_{i,z}^{(\gamma)},$$

---

[1]) Если окажется, что $\overline{O}_i \not\subset \bigcup U_j$, то возьмем такую окрестность нуля $W \subset R^q$, что $W \subset \hat{\pi} \circ \varphi_{\lambda_i}(O_i)$ и $\overline{\varphi_{\lambda_i}^{-1} \hat{\pi}^{-1}(W)} \subset \bigcup U_j$, и положим $O_i = \varphi_{\lambda_i}^{-1} \hat{\pi}^{-1}(W)$. — *Прим. ред.*

удовлетворяет, очевидно, включению $L(z) \subset L_\beta$. Кроме того, если $y \in \overline{L(z)}$, то при некотором i справедливо включение $y \in \overline{Q_{i,z}^{(\gamma)}}$. Следовательно, в силу леммы 5.6 для некоторого j справедливо включение $y \in U_j$. Будем считать, что $j \neq i$ [1]). Локальный слой окрестности U_j, содержащий точку y, пересекается с $Q_{i,z}^{(\gamma)}$, т. е. он является тем самым локальным слоем $Q_{j,z}^{(\gamma')}$, о котором говорилось выше (в связи с (*)). Поэтому $y \in Q_{j,z}^{(\gamma')} \subset L(z)$. Тем самым доказано, что $L(z) = \overline{L(z)}$. Значит [2]),

$$L_\beta = L(z) = \bigcup_{i,\gamma} \overline{Q_{i,z}^{(\gamma)}} \quad \text{(конечное объединение)},$$

и слой L_β является компактным.

Множество $\bigcup\limits_{L_\beta \cap \hat{V}' \neq \varnothing} L_\beta$ является открытым подмножеством многообразия M^n, содержащим слой L_α (теорема 4.10) и равным объединению компактных слоев. Если U — любое открытое множество, содержащее слой L_α и объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{v} U_i$, то обязательно $\bigcup\limits_{L_\beta \cap \hat{V}' \neq \varnothing} L_\beta \subset U$.

Таким образом, оказался доказанным п. (i) следующей теоремы.

Теорема 5.7 (теорема о локальной устойчивости). *Пусть на n-мерном C^s-многообразии M^n задано C^r-слоение коразмерности q $(r \geqslant 1)$ и $L_{\hat{\alpha}}$ — компактный слой с конечной фундаментальной группой $\pi_1(L_{\hat{\alpha}})$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *Для всякого открытого множества U из M^n, содержащего слой $L_{\hat{\alpha}}$, существует открытое множество U' из M^n, удовлетворяющее включениям $L_{\hat{\alpha}} \subset U' \subset U$ и являющееся объединением компактных слоев.*

(ii) *При $r \geqslant 2$ множество U' из* (i) *можно выбрать так, что любой слой L_β, принадлежащий U', является накрывающим пространством для слоя $L_{\hat{\alpha}}$. Кроме того, фундаментальная группа $\pi_1(L_\beta)$ слоя L_β в этом случае конечна.*

Доказательство п. (ii) теоремы 5.7. Проведем доказательство сначала в случае $q=1$. Согласно теореме 4.2, на

---

[1]) При $j = i$ ясно, что $y \in Q_{i,z}^{(\gamma)} \subset L(z)$. — *Прим. ред.*

[2]) $L(z)$ как подмножество L_β является одновременно открытым и замкнутым. — *Прим. ред.*

множестве U', описанном в п. (i), существует C^{r-1}-слоение $\mathcal{F}'$ коразмерности $n-1$, трансверсальное к ограничению слоения $\mathcal{F}$ на U', являющемуся C^r-слоением коразмерности 1. (Относительно того случая, когда $L_{\hat{\alpha}} \subset \partial M^n$, см. разъяснения после формулировки теоремы 4.2.) Пусть p — точка на слое $L_{\hat{\alpha}}$ и L'_p — слой слоения $\mathcal{F}'$, проходящий через точку p. Локально слой L'_p является траекторией векторного поля; поэтому при достаточно малом множестве U' слои L'_p и L_β пересекаются. Следовательно, для любой точки $x \in L_\beta$ существует такая точка $p \in L_{\hat{\alpha}}$, что $x \in L'_p$. При достаточно малом множестве U' благодаря компактности слоя L_β множество точек пересечения L'_p и L_β конечно. Пусть $x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_{u(p)}^{(p)}$ — эти точки пересечения. В силу способа построения слоя L'_p отображение

$$\hat{\pi}\colon L_\beta \to L_{\hat{\alpha}},$$

при котором $\hat{\pi}(x_i^{(p)}) = p$ $(i = 1, 2, \ldots, u(p))$, определяет слой L_β как накрывающее пространство для $L_{\hat{\alpha}}$. (Число $u(p)$ является одним и тем же при всех p.) В общем случае фундаментальная группа накрывающего пространства является подгруппой фундаментальной группы базы. Следовательно, группа $\pi_1(L_\beta)$ конечна.

При $q > 1$ нужно применить экспоненциальное отображение, описанное в теореме 4.3 для случая $q > 1$. Поскольку при $q = 1$ конструкция экспоненциального отображения осуществляется так, как это делалось выше с помощью слоев L'_p, доказательство при $q > 1$ проводится совершенно аналогично, и мы опускаем соответствующие детали. □

Пример. Определим C^∞-диффеоморфизм

$$h\colon S^{n-q} \times S^q \to S^{n-q} \times S^q$$

равенством

$$h((x_1, x_2, \ldots, x_{n-q+1}), (y_1, y_2, \ldots, y_{q+1})) =$$
$$= ((-x_1, -x_2, \ldots, -x_{n-q+1}), (-y_1, -y_2, \ldots, -y_q, y_{q+1})).$$

После этого отождествим в $S^{n-q} \times S^q$ точки p и $h(p)$ для всех $p \in S^{n-q} \times S^q$, в результате чего получится n-мерное C^∞-многообразие[1]) $M^n = S^{n-q} \times S^q/\sim$, где символ $\sim$ означает отождествление $p \sim h(p)$. Каждое множество $S^{n-q} \times \{y\}$ $(y \in S^q)$ определяет некоторое подмножество L_y в M^n; поэтому $\{L_y; y \in S^q\}$ является C^∞-слоением коразмерности q на M^n. Для

[1]) Тот факт, что M^n действительно является многообразием, легко доказать, используя, что h есть инволюция ($h \circ h$ — тождественное отображение) без неподвижных точек. — *Прим. ред.*

$y=(0, 0, \ldots, 0, \pm 1)$ слой L_y является $(n-q)$-мерным проективным пространством[1]), которое получается из S^{n-q}.

Пусть многообразие M^n компактно и $q \geqslant 2$. В условиях теоремы 5.7(i) каждый компактный слой L_α содержится в некотором специальном открытом множестве, состоящем из компактных слоев. В общем случае неверно, что все слои на M^n компактны (см. комментарии, примечание 5.2). Однако, как будет видно из § 21, такой глобальный результат верен при $q=1$.

§ 21. Теорема о глобальной устойчивости

Рассмотрим подробно глобальный вариант теоремы о локальной устойчивости (теорема 5.7) для слоения коразмерности 1. Пусть M^n — некоторое n-мерное C^s-многообразие, $\mathcal{F}=\{L_\alpha;\ \alpha \in A\}$ является C^r-слоением на нем коразмерности 1 $(r \geqslant 1)$, $L_{\hat{\alpha}}$ — компактный слой и $\mathfrak{N}(L_{\hat{\alpha}})=\{(U_i, \varphi_i);\ i=1, 2, \ldots, v\}$ — система когерентных окрестностей на $L_{\hat{\alpha}}$.

Так как коразмерность равна 1, с помощью отображения $\hat{\pi} \circ \varphi_i \colon U_i \to]-1, 1[$ (отображение $\hat{\pi}$ было введено в § 18) для каждого a, $-1<a<1$, задается локальный слой окрестности U_i, который будем обозначать через $(\hat{\pi} \circ \varphi_i)^{-1}(a)$.

Если для любых $U_i, U_j \in \mathfrak{N}(L_{\hat{\alpha}})$, для которых $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, при произвольной точке $z \in U_i \cap U_j$ числа $\hat{\pi} \circ \varphi_i(z)$ и $\hat{\pi} \circ \varphi_j(z)$ имеют одинаковые знаки, то говорят, что система $\mathfrak{N}(L_{\hat{\alpha}})$ *двусторонняя*. Слой $L_{\hat{\alpha}}$ называется *двусторонним*, если существует такая двусторонняя система $\mathfrak{N}(L_{\hat{\alpha}})$. В противном случае он называется *односторонним*[2]).

С помощью того же метода, которым проводилось доказательство теоремы 4.1, легко установить, что слой $L_{\hat{\alpha}}$ является двусторонним тогда и только тогда, когда на M^n существует векторное C^{r-1}-поле, трансверсальное к слою $L_{\hat{\alpha}}$ и являющееся на нем векторным полем.

В случае слоения коразмерности 1 на листе Мёбиуса, описанного в примере 4 § 17, слой, полученный из отрезка $I \times \{1/2\}$ (на рис. 4.7 он изображен более жирной линией), является односторонним. В примере из § 20 при $q=1$ слой L_y для $y=(0, \pm 1)$ является односторонним, а для $y \neq (0, \pm 1)$ — двусторонним.

---

[1]) А для остальных y — сферой.— *Прим. ред.*

[2]) В топологии имеется общее определение одностороннего и двустороннего подмногообразия коразмерности 1. Приведенное определение является его адаптацией для слоений.— *Прим. ред.*

Лемма 5.8. *Пусть $L_{\hat{\alpha}}$, $\mathfrak{N}(L_{\hat{\alpha}})$ те же, что и выше. Тогда в M^n существует такое открытое множество V, содержащее $L_{\hat{\alpha}}$, что для каждого слоя L_β, для которого $V \cap L_\beta \neq \varnothing$, выполняется одно из указанных ниже условий* (i), (ii).

(i) *Слой L_β компактен и $L_\beta \subset \bigcup_{i=1}^{v} U_i$. В этом случае, если слой $L_{\hat{\alpha}}$ двусторонний, то $L_\beta \cap U_i$ состоит из единственного локального слоя. Если же слой $L_{\hat{\alpha}}$ односторонний, то $L_\beta \cap U_i$ при $L_\beta \neq L_{\hat{\alpha}}$ состоит из двух локальных слоев. В случае $r \geqslant 2$ при двустороннем $L_{\hat{\alpha}}$ слои L_β и $L_{\hat{\alpha}}$ C^r-диффеоморфны, а при одностороннем $L_{\hat{\alpha}}$ слой L_β при $L_\beta \neq L_{\hat{\alpha}}$ является двойным накрывающим пространством для $L_{\hat{\alpha}}$ (т. е. является тотальным пространством линейно связного C^r-расслоения, слои которого состоят из двойных точек).*

(ii) *Слой L_β некомпактен. Тогда $\overline{L}_\beta \cap \left(\bigcup_{i=1}^{v} U_i\right)$ содержит компактный слой.*

Доказательство. Возьмем такое открытое подмножество $W \subset M^n$, что

(a) $L_\alpha \subset W \subset \overline{W} \subset \bigcup_{i=1}^{v} U_i$;

(b) если $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ и локальный слой Q'_j окрестности U_j содержится в W, то $Q'_j \cap U_i \neq \varnothing$ $(i, j = 1, 2, \ldots, v)$;

(c) если локальный слой Q'_j лежит в W и $\hat{\pi} \circ \varphi_j(Q'_j) > 0$ (соответственно $\hat{\pi} \circ \varphi_j(Q'_j) < 0$), то

$$(\hat{\pi} \circ \varphi_j)^{-1}[0, \hat{\pi} \circ \varphi_j(Q'_j)] \subset W \quad (i, j = 1, 2, \ldots, v)$$

(соответственно

$$(\hat{\pi} \circ \varphi_j)^{-1}[\hat{\pi} \circ \varphi_j(Q'_j), 0] \subset W \quad (i, j = 1, 2, \ldots v));$$

(d) если $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, то $\pi \circ \varphi_i \circ (\pi \circ \varphi_j)^{-1}$ — монотонная функция в $\hat{\pi} \circ \varphi_j(U_i \cap U_j \cap W)$. (Здесь $i, j = 1, 2, \ldots, v$.) В существовании такого W легко убедиться, используя, в частности, (iii) из теоремы 5.1.) Пусть $\hat{x} \in L_{\hat{\alpha}}$ и $\hat{O}$ — множество точек, допускающих все цепи когерентных окрестностей, допустимые для точки x и длины, не превосходящей v (см. лемму 5.3). Совершенно аналогично тому, как в доказательстве теоремы 5.6 из множества $\hat{V}$ было построено множество $\hat{V}'$, построим из множества $\hat{O}$ такое открытое множество $\hat{O}'$, что $\hat{O}' \cap L_{\hat{\alpha}} \neq \varnothing$, и если слой L_β пересекает $\hat{O}'$, то в каждой окрестности U_i существует локальный слой Q'_i, для которого $Q'_i \subset L_\beta \cap W$. Пусть $\{Q_i^{(\lambda)};\ \lambda \in \Lambda_i\}$ — множество всех локальных слоев окрестности U_i, удовлетворяющих включениям

$$Q_i^{(\lambda)} \subset L_\beta, \qquad Q_i^{(\lambda)} \subset W.$$

В силу сказанного $\Lambda_i \neq \varnothing$.

Рассмотрим сначала случай двустороннего слоя $L_{\hat{\alpha}}$. Учитывая, что тогда и система $\mathfrak{N}(L_{\hat{\alpha}})$ является двусторонней, определим в Λ_i подмножество $\Lambda'_i = \{\lambda \in \Lambda_i;\ \hat{\pi} \circ \varphi_i(Q_i^{(\lambda)}) \geqslant 0\}$. Изменив при необходимости знак образа отображения φ_i, можно считать, что $\Lambda'_i \neq \varnothing$ $(i = 1, 2, \ldots, v)$. Определим локальный слой Q''_i окрестности U_i равенством

$$\hat{\pi} \circ \varphi_i(Q''_i) = \inf_{\lambda \in \Lambda'_i} \hat{\pi} \circ \varphi_i(Q_i^{(\lambda)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, v).$$

Очевидно, из (c) следует, что $Q''_i \subset W$; кроме того, $\overline{Q}''_i \subset \overline{W} \subset \bigcup_{i=1}^{v} U_i$.

Далее, если при некотором $i = 1, 2, \ldots, v$ будет $z \in L_\beta \cap U_i$, то $\hat{\pi} \circ \varphi_i(z) \geqslant \hat{\pi} \circ \varphi_i(Q''_i)$ или $\hat{\pi} \circ \varphi_i(z) \leqslant 0$. Действительно, если бы было

$$0 < \hat{\pi} \circ \varphi_i(z) < \hat{\pi} \circ \varphi_i(Q''_i),$$

то для локального слоя

$$Q'_i = (\hat{\pi} \circ \varphi_i)^{-1} \circ \hat{\pi} \circ \varphi_i(z)$$

было бы $Q'_i \subset L_\beta$ и по (c) $Q'_i \subset W$, так что это был бы один из слоев системы $\{Q_i^{(\lambda)};\ \lambda \in \Lambda'_i\}$.

Если $y \in \overline{Q''_i}$, то при некотором j имеет место включение $y \in U_j$, в силу чего в U_j фиксируется однозначно определенный локальный слой, содержащий точку y. Докажем, что он совпадает с Q''_j.

Действительно, случай $i = j$ тривиален; если $i \neq j$, то из определения Q''_i следует, что в U_j сколь угодно близко к y имеется точка $z \in L_\beta$, для которой, согласно сказанному выше, $\hat{\pi} \circ \varphi_j(z) \geqslant \hat{\pi} \circ \varphi_j(Q''_j)$; отсюда $\hat{\pi} \circ \varphi_j(y) \geqslant \hat{\pi} \circ \varphi_j(Q''_j)$. Но если бы здесь имело место неравенство, то для некоторого локального слоя $Q_j^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda'_j$, выполнялось бы неравенство

$$\hat{\pi} \circ \varphi_j(Q''_i) > \hat{\pi} \circ \varphi_j(Q_j^{(\lambda)}).$$

Тогда из (b) и (c) следовало бы, что этот слой должен пересекать U_i, и если $z \in Q_j^{(\lambda)} \cap U_i$, то, согласно (d),

$$\hat{\pi} \circ \varphi_i(Q''_i) > \hat{\pi} \circ \varphi_i(z).$$

Но $z \in L_\beta$, так что, согласно сказанному выше, последнее неравенство невозможно.

Итак, если $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, то $\overline{Q_i''} \cap U_j \subset Q_j''$. Следовательно, множество

$$L' = \bigcup_{i=1}^{v} Q_i'' = \bigcup_{i=1}^{v} \overline{Q_i''}$$

является компактным слоем. (Собственно, пока не исключено, что L' является не одним слоем, а конечным объединением таковых. На самом деле почти очевидно, что множество L' связно, так что это все-таки один слой. Для компактного L_β это будет видно также и из следующего абзаца, а для некомпактного L_β формально это не потребуется.)

В случае, когда слой L_β компактен, множества Λ_i конечны (теорема 4.12); поэтому $L' \subset L_\beta$, т. е. $L' = L_\beta$. Кроме того, $L_\beta \cap U_i = Q_i''$. Действительно, если бы слой $L_\beta = L'$ имел в U_i точку $y \notin Q_i''$, то ввиду $L_\beta = L'$ она должна была бы принадлежать некоторому Q_j''; но $Q_j'' \cap U_i \subset Q_i''$.

Когда слой L_β не является компактным, имеет место включение $\overline{L}_\beta \supset L'$. Положим

$$V = \bigcup_{\partial' \cap L_\beta \neq \varnothing} L_\beta .$$

Тогда множество V будет искомым.

Пусть далее слой $L_{\hat{\alpha}}$ односторонний. В этом случае

$$\Lambda_i = \Lambda_i' \cup \Lambda_i'',$$

$$\hat{\pi} \circ \varphi_i (Q_i^{(\lambda)}) \geqslant 0 \quad (\lambda \in \Lambda_i'), \qquad \hat{\pi} \circ \varphi_i (Q_i^{(\lambda)}) \leqslant 0 \quad (\lambda \in \Lambda_i'')$$

при некотором разбиении множества Λ_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$. Определим локальные слои $Q_i'', Q_i''' \subset L_\beta$ окрестности U_i так, что

$$\hat{\pi} \circ \varphi_i (Q_i'') = \inf_{\lambda \in \Lambda_i'} \hat{\pi} \circ \varphi_i (Q_i^{(\lambda)}), \qquad \hat{\pi} \circ \varphi_i (Q_i''') = \sup_{\lambda \in \Lambda_i''} \hat{\pi} \circ \varphi_i (Q_i^{(\lambda)})$$

$(i = 1, 2, \ldots, v)$. Аналогично рассмотренному выше случаю множество

$$L' = \bigcup_{i=1}^{v} (Q_i'' \cup Q_i''')$$

является компактным слоем. Если L_β — компактный слой, то $L_\beta = L'$, а если нет, то $\overline{L}_\beta \supset L'$; поэтому множество $V = \bigcup\limits_{\partial' \cap L_\beta \neq \varnothing} L_\beta$

является искомым. В случае (i) для $r \geqslant 2$ доказательство утверждения о диффеоморфизме или накрытии проводится аналогично доказательству теоремы 5.7 (ii). □

Пример слоев $L_{\hat\alpha}$ и L_β из леммы 5.8 (ii) доставляет слоение Риба на $S^1 \times S^1$ (§ 16, пример B). С помощью леммы 5.8 доказывается следующая теорема.

Теорема 5.9. *Пусть M^n — замкнутое n-мерное C^s-многообразие и $\mathcal{F} = \{L_\alpha;\ \alpha \in A\}$ — некоторое C^r-слоение ($r \geqslant 1$) на M^n коразмерности 1. Если все слои слоения $\mathcal{F}$ компактны, то имеет место одно из следующих утверждений* (ср. пример из § 20):

(i) *Существует C^r-отображение π: $M^n \to S^1$, такое, что $\mathcal{F} = \{\pi^{-1}(p);\ p \in S^1\}$. В этом случае все слои слоения $\mathcal{F}$ являются двусторонними. При $r \geqslant 2$ отображение π будет C^r-расслоением, а $\mathcal{F}$ — слоением расслоения.*

(ii) *Существует C^r-отображение*[1] $\pi: M^n \to [0, 1]$, *такое, что $\mathcal{F} = \{\pi^{-1}(p);\ p \in [0, 1]\}$. В этом случае все слои слоения $\mathcal{F}$, кроме $\pi^{-1}(0)$ и $\pi^{-1}(1)$, являются двусторонними. При $r \geqslant 2$ все двусторонние слои C^r-гомеоморфны и являются двукратными накрывающими пространствами слоев $\pi^{-1}(0)$, $\pi^{-1}(1)$.*

Доказательство. Определим отображение π: $M^n \to A$ равенством $\pi(L_\alpha) = \alpha$. Фиксируем слой $L_{\hat\alpha}$ и соответствующее множество V, описанное в лемме 5.8. В силу компактности всех слоев слоения $\mathcal{F}$ имеет место случай (i) из леммы 5.8; поэтому V является объединением слоев. Пусть

$$V = \bigcup_{\beta \in A_{\hat\alpha}} L_\beta, \qquad A_{\hat\alpha} \subset A.$$

Для произвольного $\beta \in A_{\hat\alpha}$ определим $\eta_{\hat\alpha}(\beta) \in \mathbf{R}$ следующим образом: если слой $L_{\hat\alpha}$ двусторонний, то

$$\eta_{\hat\alpha}(\beta) = \hat\pi \circ \varphi_1 (L_\beta \cap U_1);$$

если же слой $L_{\hat\alpha}$ односторонний, то

$$\eta_{\hat\alpha}(\beta) = \hat\pi (\varphi_1 (L_\beta \cap U_1) \cap \hat\pi^{-1}([0, 1[)).$$

Полученное отображение

$$\eta_{\hat\alpha}\colon A_{\hat\alpha} \to \hat\pi \circ \varphi_1 (V \cap U_1)$$

[1] Очевидно, отображение замкнутого многообразия в многообразие с краем не может быть гладким в тех точках, которые отображаются в край. В данном случае π имеет в $\pi^{-1}(0)$ и $\pi^{-1}(1)$ особенность такого типа, какую имеет функция $|x|$ на числовой оси в нуле. Если взять проходящую через $\pi^{-1}(0)$ небольшую трансверсальную дугу Δ, то при подходящей ее параметризации $\pi \mid \Delta$ как раз и имеет вид $x \to |x|$. — *Прим. ред.*

является взаимно однозначным. Введем на A топологию так, чтобы пары $(A_{\hat{\alpha}}, \eta_{\hat{\alpha}})$, $\hat{\alpha} \in A$, составили систему локальных C^r-координат и A можно было рассматривать как одномерное C^r-многообразие. Так как M^n компактно и связно, построенное одномерное C^r-многообразие также компактно и связно. Это означает, что A является либо окружностью S^1, либо отрезком $[0, 1]$. Вторая половина теоремы доказывается точно так же, как теорема 5.7 (ii). □

В заключение рассмотрим доказанную Рибом теорему о глобальной устойчивости.

Теорема 5.10 (теорема о глобальной устойчивости). *Пусть M^n — компактное связное n-мерное C^s-многообразие и $\mathcal{F} = \{L_\alpha;\ \alpha \in A\}$ — некоторое C^r-слоение на нем коразмерности* 1 $(r \geqslant 2)$. *Если существует хоть один компактный слой слоения $\mathcal{F}$ с конечной фундаментальной группой, то все слои слоения $\mathcal{F}$ являются компактными и их фундаментальные группы конечны.*

Доказательство. Пусть $\{L_\alpha;\ \alpha \in A'\}$ — множество всех компактных слоев слоения $\mathcal{F}$ с конечной фундаментальной группой, и положим

$$\bigcup_{\alpha \in A'} L_\alpha = W.$$

Согласно теореме о локальной устойчивости (теорема 5.7), для любого $L_{\hat{\alpha}} \in W$ существует открытое множество $U' \subset M^n$, содержащее $L_{\hat{\alpha}}$ и являющееся объединением компактных слоев с конечной фундаментальной группой. По этой причине множество W открыто в M^n. Предположим, что $M^n - W \neq \varnothing$. Так как M^n связно, $\overline{W} - W \neq \varnothing$. Пусть W' — связная компонента множества W и $y \in \overline{W'} - W'$. Точка y принадлежит некоторому слою L_γ и $L_\gamma \subset \overline{W'}$ (теорема 4.9) Пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ — отмеченная расслоенная координатная окрестность и связные компоненты множества $W' \cap U_\lambda$ имеют вид

$$\varphi_\lambda^{-1} \circ \hat{\pi}^{-1}(]a_\sigma, b_\sigma[) \qquad (a_\sigma < b_\sigma,\ \sigma \in \Sigma).$$

Обозначим через W_σ объединение всех слоев, которые пересекаются с $\varphi_\lambda^{-1} \circ \hat{\pi}^{-1}(]a_\sigma, b_\sigma[)$; в силу теоремы 4.10 множество W_σ открыто в W'. Далее подмножество

$$F = \{\varphi_\lambda^{-1}(0, 0, \ldots, 0, x_n);\ a_\sigma < x_n < b_\sigma\}$$

окрестности U_λ является замкнутым в $W' \cap U_\lambda$ и, так как W_σ является объединением всех слоев, пересекающихся с F, множество W_σ замкнуто[1]) в W'. Следовательно, $W_\sigma = W'$. По этой причине для любого слоя $L_\beta \subset W'$ мощность множества связных компонент пересечения $L_\beta \cap U_\lambda$ не меньше, чем мощность Σ. В силу компактности слоя L_β число связных компонент пересечения $L_\beta \cap U_\lambda$ конечно (теорема 4.12). Поэтому и мощность Σ — конечное число. В свою очередь отсюда следует, что $L_\gamma \cap U_\lambda$ раскладывается на конечное число связных компонент[2]). Так как M^n компактно, существует конечное число отмеченных расслоенных окрестностей $(U_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i})$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, таких, что $\bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i} = M^n$. Как было только что доказано, $L_\gamma \cap U_{\lambda_i}$ состоит из конечного числа связных компонент; следовательно, слой L_γ компактен. Применяя к L_γ лемму 5.8 (i), устанавливаем, что фундаментальная группа слоя L_γ конечна[3]). Следовательно,

$$y \in L_\gamma \subset W' \subset W.$$

Противоречие. Равенство $W = M^n$ является единственно возможным соотношением между W и M^n. $\square$ [4])

Из теорем 5.9 и 5.10 вытекает следующая теорема.

Теорема 5.11. *В предположениях теоремы* 5.10 *имеет место одно из утверждений* (i), (ii) *теоремы* 5.9.

---

[1]) Ибо коль скоро некоторый компактный слой с конечной фундаментальной группой не пересекает F, то любая достаточно малая его окрестность не пересекает F, а по теореме 5.7 имеются сколь угодно малые окрестности этого слоя, целиком состоящие из слоев.— *Прим. ред.*

[2]) Поскольку $\hat{\pi} \circ \varphi_\lambda (W' \cap U_\lambda)$ есть конечная система интервалов $]a_\sigma, b_\sigma[$, так что $\hat{\pi} \circ \varphi_\lambda (L_\gamma)$ содержится в конечном множестве их концов a_σ, b_σ.— *Прим. ред.*

[3]) Примем L_γ за $L_{\hat{\alpha}}$ в лемме 5.8; среди слоев, пересекающих соответствующее V, найдется слой из W'; этот слой L_β либо диффеоморфен слою L_γ, либо является двулистным накрытием последнего. В обоих случаях из конечности $\pi_1(L_\beta)$ следует конечность $\pi_1(L_\gamma)$.— *Прим. ред.*

[4]) Анализируя доказательство теоремы 5.10, можно выделить из него доказательство следующего утверждения. *Пусть M^n — компактное n-мерное гладкое многообразие и $\mathscr{F} = \{L_\alpha\}$ — гладкое слоение на нем коразмерности один. Пусть точка $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, непрерывно зависит от t и $x(t) \in L_{\alpha(t)}$. Если при всех $t > 0$ слой $L_{\alpha(t)}$ компактен, то и слой $L_{\alpha(0)}$ тоже компактен.* Теорема 5.10 является непосредственным следствием этого утверждения и теоремы 5.7.

В гл. 6 будет указано простое доказательство несколько более сильного утверждения (см. примечание [[7]]).— *Прим. ред.*

§ 22. Голономия

Пусть $\mathbf{R}^q$ есть q-мерное евклидово пространство с началом координат O. Пусть, далее, U — открытое множество из $\mathbf{R}^q$, содержащее O, и

$$f\colon U \to \mathbf{R}^q$$

— отображение, такое, что $f(O)=O$ и $f\colon U \to f(U)$ является C^r-гомеоморфизмом. В этой ситуации f называется *локальным C^r-гомеоморфизмом пространства $\mathbf{R}^q$ в начале координат;* для r возможно любое из значений $0, 1, 2, \ldots, \infty$.

Если для двух локальных C^r-гомеоморфизмов в начале координат

$$f_1\colon U_1 \to \mathbf{R}^q, \qquad f_2\colon U_2 \to \mathbf{R}^q$$

на некотором открытом подмножестве $U' \subset U_1 \cap U_2$, содержащем O, имеет место равенство

$$f_1 \mid U' = f_2 \mid U',$$

то будем говорить, что f_1 и f_2 *эквивалентны*, и будем писать $f_1 \sim f_2$. Очевидно, отношение «$\sim$» является отношением эквивалентности. Классы локальных C^r-гомеоморфизмов пространства $\mathbf{R}^q$ в начале координат относительно этой эквивалентности называются *ростками локальных C^r-гомеоморфизмов*. Множество всех этих ростков для пространства $\mathbf{R}^q$ обозначается через G_q^r. Если f — представитель класса эквивалентности, то сам этот класс мы будем обозначать через $[f]$.

Если $[f]$ и $[g]$ — элементы из G_q^r, то с помощью отображений $f\colon U \to \mathbf{R}^q$ и $g\colon U' \to \mathbf{R}^q$ можно определить C^r-отображение

$$g \circ f\colon f^{-1}(f(U) \cap U') \to \mathbf{R}^q,$$

при котором $g \circ f(x) = g(f(x))$. Отображение $g \circ f$ является локальным C^r-гомеоморфизмом пространства $\mathbf{R}^q$ в начале координат. Если определить произведение $[f]\cdot[g]$ ростков $[f]$ и $[g]$ равенством

$$[f]\cdot[g] = [g \circ f],$$

то это определение не будет зависеть от выбора представителей классов $[f]$ и $[g]$. Относительно так введенного умножения множество G_q^r является группой. Действительно, тождественное отображение $\mathrm{id}\colon \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^q$ определяет единичный элемент $[\mathrm{id}]$ из G_q^r. Для всякого локального C^r-гомеоморфизма f отображение $f^{-1}\colon f(U) \to U$ дает росток $[f^{-1}]$, обратный к ростку $[f]$.

Пусть теперь M^n есть n-мерное C^s-многообразие и $\mathcal{F} = \{L_\alpha;\ \alpha \in A\}$ — некоторое C^r-слоение на M^n коразмерности q. Фиксируем слой L_α, возьмем точку $\hat{x}$ на нем и фундаментальную группу $\pi_1(L_\alpha, \hat{x})$ слоя L_α в точке $\hat{x}$.

Пусть γ — элемент группы $\pi_1(L_\alpha, \hat{x})$ и C^0-кривая

$$w\colon [0,\ 1] \to L_\alpha, \qquad w(0) = w(1) = \hat{x},$$

является представителем класса $\gamma = \{w\}$. Возьмем в L_α компактное подмножество K, содержащее $w([0, 1])$, и обозначим через $\mathfrak{N}(K)$ какую-нибудь систему когерентных окрестностей на K.

Пусть

$$\mathscr{C} = \{U_{\lambda_1},\ U_{\lambda_2},\ \ldots,\ U_{\lambda_{m-1}},\ U_{\lambda_1}\} \qquad (\hat{x} \in U_{\lambda_1})$$

— цепь когерентных окрестностей на w. Множество $\hat{O}$ точек $z \in U_{\lambda_1}$, для которых цепь $\mathscr{C}$ допустима, содержит некоторый локальный слой Q_1 $(U_{\lambda_1} \cap K \subset Q_1)$, открыто в U_{λ_1} и является объединением локальных слоев (лемма 4.5). Характеристические локальные слои цепи $\mathscr{C}$, допустимой для точки z,

$$Q_i^{(z)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad z \in Q_1^{(z)}, \quad Q_1^{(z)},\ Q_m^{(z)} \subset U_{\lambda_1},$$

задаются точкой z однозначно (лемма 5.2). С помощью проекции $\hat{\pi}\colon\ ]-1, 1[^n \to\ ]-1, 1[^q$ определим отображение

$$f\colon\ \hat{\pi} \circ \varphi_{\lambda_1}(\hat{O}) \to \mathbf{R}^q$$

так, чтобы

$$f(\hat{\pi} \circ \varphi_{\lambda_1}(Q_1^{(z)})) = \hat{\pi} \circ \varphi_{\lambda_1}(Q_m^{(z)}) \qquad (z \in \hat{O}).$$

Тогда f будет локальным C^r-гомеоморфизмом пространства $\mathbf{R}^q$ в начале координат.

Пусть теперь $\mathscr{C}' = \{U_{\mu_1}, U_{\mu_2}, \ldots, U_{\mu_{m'-1}}, U_{\mu_1}\}$ $(x \in U_{\mu_1})$ — другая, отличная от $\mathscr{C}$, цепь когерентных окрестностей на кривой w и f' — локальный C^r-гомеоморфизм пространства $\mathbf{R}^q$ в начале координат, построенный с помощью $\mathscr{C}'$ так же, как был построен f с помощью $\mathscr{C}$. Определим теперь отображение

$$h\colon\ \hat{\pi} \circ \varphi_{\lambda_1}(U_{\lambda_1} \cap U_{\mu_1}) \to \mathbf{R}^q$$

так, чтобы для произвольного локального слоя Q_1' выполнялось равенство

$$h(\hat{\pi} \circ \varphi_{\lambda_1}(Q_1' \cap U_{\lambda_1})) = \hat{\pi} \circ \varphi_{\mu_1}(Q_1' \cap U_{\mu_1}).$$

Очевидно, отображение h является локальным C^r-гомеоморфизмом пространства $\mathbf{R}^q$ в начале координат и

$$[f]=[h][f'][h]^{-1}.$$

Таким образом, C^0-кривая w определяет росток из G_q^r однозначно с точностью до внутреннего автоморфизма [5].

Далее, пусть C^0-кривая

$$\overline{w}\colon [0,1]\to L_\alpha, \qquad \overline{w}(0)=\overline{w}(1)=\hat{x},$$

такова, что $\gamma=[w]=[\overline{w}]$. Пусть множество K содержит кривые $w, \overline{w}$ и кривые, промежуточные при их гомотопии. Возьмем на $\overline{w}$ цепь когерентных окрестностей

$$\overline{\mathscr{C}}=\{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2'}, \ldots, U_{\lambda'_{m''-1}}, U_{\lambda_1}\}$$

и определим с помощью $\overline{\mathscr{C}}$, как это было сделано выше, локальный C^r-гомеоморфизм $\bar{f}$ пространства $\mathbf{R}^q$ в начале координат. Тогда в силу теоремы 5.5

$$[f]=[\bar{f}].$$

Следовательно, каждому элементу γ группы $\pi_1(L_\alpha, \hat{x})$ соответствует однозначно с точностью до автоморфизма элемент группы G_q^r. Обозначим это соответствие через $\Psi(\{w\})=[f]$; таким образом, построено отображение [6]

$$\Psi\colon\ \pi_1(L_\alpha, \hat{x})\to G_q^r.$$

При фиксированной точке $\hat{x}\in U_{\lambda_1}$ цепи когерентных окрестностей на w, начинающиеся и заканчивающиеся окрестностью U_{λ_1}, приводят к такому определению отображения f, что соответствие Ψ сразу же оказывается гомоморфизмом [1]). При замене точки $\hat{x}$ гомоморфизм Ψ изменяется с помощью автоморфизма группы G_q^r. Таким образом, определен однозначно с точностью до автоморфизма гомоморфизм $\Psi\colon \pi_1(L_\alpha)\to G_q^r$. Этот гомоморфизм и называется *голономией* слоя L_α. Подгруппа $\Psi(\pi_1(L_\alpha, \hat{x}))$ группы G_q^r называется *группой голономии* слоя L_α.

В том случае, когда группа $\pi_1(L_\alpha)$ конечна, группа голономии слоя L_α также является конечной. Кроме того, если

---

[1]) Напомним, что автор, как видно из § 20, определяет произведение $\gamma\gamma'$ элементов $\gamma\ni w$, $\gamma'\ni w'$ фундаментальной группы так: представляющая его кривая $w\cdot w'$ получится, если пройти сначала w, а потом w'. Если с помощью w строится локальный гомеоморфизм f, а с помощью w' — локальный гомеоморфизм f', то с помощью $w\cdot w'$ получится отображение $x\mapsto f'(f(x))$. Поэтому автор и определяет произведение ростков $[f]\cdot[f']$ как $[f'\circ f]$. — *Прим. ред.*

слоение $\mathcal{F}$ является расслоением, то у всех его слоев L_α группа голономии состоит только из единичного элемента. В случае слоения Риба (§ 16, пример В) группа голономии слоя $S^1 \times S^1$ является бесконечной циклической группой.

В теореме о локальной устойчивости (теорема 5.7) фундаментальная группа $\pi_1(L_{\hat\alpha})$ слоя $L_{\hat\alpha}$ предполагалась конечной, а при доказательстве этой теоремы для каждой точки z строились локальные слои $Q_{i,z}^{(\gamma)}$ $(\gamma \in \pi_1(L_{\hat\alpha}))$, которых было лишь конечное число. Теперь мы можем сказать, что при конечной группе $\pi_1(L_{\hat\alpha})$ группа голономии слоя $L_{\hat\alpha}$ также конечна, а потому конечно число локальных слоев $Q_{i,z}^{(\gamma)}(\gamma \in \pi_1(L_{\hat\alpha}))$, что и используется в доказательстве теоремы 5.7(i). Соответственно теорему 5.7 обычно формулируют в более общем виде.

Теорема 5.12 (теорема о локальной устойчивости). *Заключение теоремы* 5.7 (i) *остается в силе, если в условиях теоремы* 5.7 *вместо конечности группы* $\pi_1(L_{\hat\alpha})$ *предполагать конечность группы голономии слоя* $L_{\hat\alpha}$.

Глава 6

СУЩЕСТВОВАНИЕ КОМПАКТНЫХ СЛОЕВ

§ 23. Слоения, не имеющие компактных слоев

При построении отображения Хопфа на 3-мерной сфере S^3 возникает векторное C^∞-поле X_H (см. § 14), траектории которого являются слоями некоторого C^∞-слоения коразмерности 2 на S^3 (см. § 16, пример А); все эти слои гомеоморфны окружности S^1 и поэтому компактны (описанное слоение является расслоением (см. § 17, пример 3)). Деформируя поле X_H, можно получить динамическую систему Швейцера, траектории которой являются слоями некоторого C^1-слоения коразмерности 2 на S^3 (см. § 16, пример А), не имеющего компактных слоев. При построении динамической системы Швейцера в § 14 слои соответствующего слоения получаются при разрушении компактных слоев C^∞-слоения, соответствующего полю X_H; при этом используется динамическая система Данжуа на торе и получается C^1-слоение, обладающее только некомпактными слоями. Однако и по сей день остается неразрешенным вопрос о существовании на S^3 C^r-слоений коразмерности 2 при $r \geqslant 2$, не имеющих компактных слоев.

В § 15 при описании динамической системы Вильсона осуществлялось разрушение периодических траекторий некоторого векторного C^∞-поля на $D^q \times [-3, 3]$. Тот же метод можно следующим образом использовать для разрушения компактных слоев слоения большей размерности.

Пусть M^n есть n-мерное C^s-многообразие и $\mathcal{F} = \{L_\alpha;\ \alpha \in A\}$ — некоторое C^r-слоение ($r \geqslant 1$) коразмерности q на M^n. Если $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ — отмеченная расслоенная координатная окрестность, то пусть $\varphi_\lambda(U_\lambda) =]-1, 1[^n$ и $D^{n-q} \times D^q$ расположено в $]-1, 1[^n$ так, что

$$]-1, 1[^{n-q} \supset D^{n-q}, \qquad]-1, 1[^q \supset D^q$$

и, если $L_\alpha \cap U_\lambda \neq \varnothing$, то общая часть каждой связной компоненты множества $\varphi_\lambda(L_\alpha \cap U_\lambda)$ и $D^{n-q} \times D^q$ имеет вид $D^{n-q} \times \{y\}$ ($y \in D^q$). Таким образом, слоение $\mathcal{F}$ на участках $\varphi_\lambda^{-1}(D^{n-q} \times D^q)$ имеет вид $\{D^{n-q} \times \{y\};\ y \in D^q\}$.

Как при построении в § 15 динамической системы Вильсона, строим на $D^{m+k} \times [-3, 3]$ векторное C^∞-поле Y_{k+1}, так что при $m = 1$, $k = q - 1$ (предполагается, что $n - 1 \geqslant q \geqslant 2$) на $D^q \times [-3, 3]$ фиксируется векторное C^∞-поле Y_q. Траектории поля Y_q составляют семейство $\{l_\beta;\ \beta \in B\}$ одномерных многообразий на $D^q \times [-3, 3]$. Если $x \in U'$, где U' — достаточно малая окрестность центра шара D^q, то траектория l_β, содержащая $(x, \pm 3)$, не является компактной. Если $k=1$ (т. е. $q=2$), в множестве $\operatorname{Int} D^q \times]-3, 3[$ содержится четыре траектории из $\{l_\beta; \beta \in B\}$, гомеоморфные S^1 и, следовательно, компактные; но при $k \geqslant 2$ (т. е. $q \geqslant 3$) среди содержащихся в $\operatorname{Int} D^q \times]-3, 3[$ траекторий l_β не существует компактной.

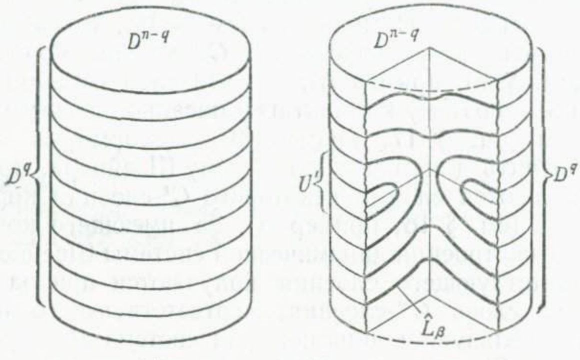


Рис. 6.1.

Точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-q})$ шара D^{n-q} можно представить в виде

$$x_i = t x_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-q),$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_{n-q}') \in S^{n-q-1}$; следовательно, x можно представить в виде $x = (x', t)$, где $x' \in S^{n-q-1}$ и $t \in [0, 1]$. Определим в $D^{n-q} \times D^q$ подмножества $\hat{L}_\beta$ равенствами

$$\hat{L}_\beta = \{((x', t), y) \in D^{n-q} \times D^q;\ (y, 3t) \in l_\beta,\ x' \in S^{n-q-1}\}.$$

Тогда $D^{n-q} \times D^q$ раскладывается на множества $\hat{L}_\beta$ $(\beta \in B)$ (см. рис. 6.1 (ii)). Каждое множество $\hat{L}_\beta$ является $(n-q)$-мерным C^∞-многообразием. Как видно из рис. 6.1 (i), (ii), множество $\hat{L}_\beta$ и граница множества $D^{n-q} \times D^q$, равная $(\partial D^{n-q} \times D^q) \cup \cup (D^{n-q} \times \partial D^q)$, пересекаются либо по $\partial D^{n-q} \times \{y\}$ $(y \in D^q)$, либо по $D^{n-q} \times \{y\}$ $(y \in \partial D^q)$.

На $\varphi_\lambda^{-1}(D^{n-q} \times D^q)$ слоение $\mathcal{F}$ локально выглядит как $\{D^{n-q} \times \{y\};\ y \in D^q\}$ — точнее, так выглядят связные компоненты пересечений слоев слоения $\mathcal{F}$ с $\varphi_\lambda^{-1}(D^{n-q} \times D^q)$. Поэтому эти части слоев можно заменить на $\{\hat{L}_\beta; \beta \in B\}$; тем самым мы получим на M^n новое C^r-слоение.

Осуществляя на C^s-многообразии M^n эту замену конечное число раз, мы получим C^r-слоение $\mathcal{F}'=\{L'_{\alpha'};\ \alpha'\in A'\}$ на M^n, каждый слой $L'_{\alpha'}$ которого содержит по крайней мере одно из упомянутых выше множеств $\hat{L}_\beta$. В силу свойств множеств $\hat{L}_\beta$ справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть M^n есть n-мерное C^s-многообразие и $\mathcal{F}$ — некоторое C^r-слоение коразмерности q на M^n, причем $r\geqslant 1$ и $n-1\geqslant q\geqslant 2$. Тогда, должным образом корректируя $\mathcal{F}$, можно получить такое C^r-слоение $\mathcal{F}'$, которое в случае $q\geqslant 3$ не содержит компактных слоев, а в случае $q=2$ содержит лишь конечное число компактных слоев (C^r-гомеоморфных произведению $S^1\times S^{n-3}$).*

При $q=2$, применяя метод Швейцера к векторному C^∞-полю Y_2 на $D^q\times[-3, 3]$ и разрушая четыре траектории из $\{l_\beta;\ \beta\in B\}$ на $D^q\times[-3, 3]$, гомеоморфные S^1, мы получим векторное C^1-поле, не имеющее замкнутых траекторий (см. теорему 3.7). Отправляясь от этого векторного C^1-поля и применяя к нему точно так же, как это делалось выше, конечное число замен с помощью множеств $\{\hat{L}_\beta;\ \beta\in B\}$, мы придем к следующей теореме.

Теорема 6.2. *Пусть M^n есть n-мерное C^s-многообразие и $\mathcal{F}$ — любое C^r-слоение на M^n коразмерности 2 ($r\geqslant 1$). Тогда с помощью корректировки слоения $\mathcal{F}$ можно построить C^1-слоение, не имеющее компактных слоев.*

В § 25 будет показано, что эта теорема, вообще говоря, неверна для слоений коразмерности 1.

§ 24. Лемма о голономии

Эта лемма о голономии используется в следующем параграфе.

Теорема 6.3 (лемма о голономии). *Пусть M^n есть n-мерное C^1-многообразие и $\mathcal{F}=\{L_\alpha;\ \alpha\in A\}$ — некоторое C^r-слоение на M^n коразмерности 1 ($r\geqslant 2$). Пусть далее E — компактное связное $C^{s'}$-многообразие ($s'\geqslant 0$) и*

$$f\colon\ E\to L_{\hat\alpha}$$

— $C^{r'}$-отображение из E в некоторый слой $L_{\hat\alpha}$ слоения $\mathcal{F}$ ($0\leqslant r'\leqslant\min(r, s')$), гомотопное нулю (т. е. существует отображение $h\colon\ E\to L_{\hat\alpha}$, при котором образ $h(E)$ является точкой

и которое гомотопно f, $f \simeq h$). Тогда существует семейство $C^{r'}$-отображений

$$f_t\colon\ E \longrightarrow M^n \qquad (-\varepsilon < t < \varepsilon),$$

непрерывно зависящее от t (т. е. $f_t(x)$ непрерывно по (x, t)) и обладающее следующими свойствами:

(i) $f_0 = f$.

(ii) *Для каждого t образ $f_t(E)$ принадлежит некоторому слою $L_{\alpha(t)}$ слоения $\mathcal{F}$,*

$$f_t(E) \subset L_{\alpha(t)}.$$

(iii) *Для каждой точки p из E C^r-кривая*

$$l_p\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M^n,$$

для которой $l_p(t) = f_t(p)$, трансверсальна к слоям слоения $\mathcal{F}$ (т. е. касательный вектор к l_p в точке $l_p(t)$ не содержится в касательном пространстве $T_{l_p(t)}(L_{\alpha(t)})$[1]*).*

(iv) *Если f является $C^{r'}$-иммерсией, то и отображения f_t являются $C^{r'}$-иммерсиями, а отображение*

$$\hat{f}\colon\ E \times]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M^n,$$

определенное равенством $\hat{f}(y, t) = f_t(y)$, является C^0-иммерсией.

Доказательство. Рассмотрим непрерывное отображение

$$F\colon\ E \times I \longrightarrow L_{\hat{\alpha}},$$

задающее гомотопию отображений f и h, так что $F \mid E \times \{0\} = h$, $F \mid E \times \{1\} = f$. Образ $F(E \times I)$ является компактным подмножеством в $L_{\hat{\alpha}}$.

Пусть $\mathfrak{N}(F(E \times I)) = \{(U_i, \varphi_i);\ i = 1, 2, \ldots, v\}$ — система когерентных окрестностей на $F(E \times I)$. Будем считать, что точка $\hat{x} = h(E)$ принадлежит окрестности U_v. Многообразие E обладает открытым покрытием

$$\{V_k;\ k = 1, 2, \ldots, u\}, \qquad E = \bigcup_{k=1}^{u} V_k,$$

в котором каждое множество V_k линейно связно, таким, что $f(\overline{V}_k) \subset U_{i_k}$, где $U_{i_k} \in \mathfrak{N}(F(E \times I))$.

---

[1]) Полезно иметь в виду, что, как видно из приводимого ниже доказательства, можно обеспечить, чтобы кривые l_p были дугами слоев фиксированного одномерного слоения $\mathcal{F}'$, трансверсального к $\mathcal{F}$. — *Прим. ред.*

Фиксируем в каждом множестве V_k точку $y_k \in V_k$ и определим на $F(E\times I)$ непрерывную кривую

$$l_k\colon\ [0, 1] \to F(E\times I) \qquad (k=1, 2, \ldots, u),$$

положив $l_k(\tau)=F(y_k, \tau)$ $(0\leqslant\tau\leqslant 1)$. Таким образом, кривая l_k связывает с точкой $\hat{x}$ точку $f(y_k)$. Фиксируем на l_k цепь когерентных окрестностей $\mathscr{C}^{(k)}=\{U_v, U_2^{(k)}, U_3^{(k)}, \ldots, U_{m_k-1}^{(k)}, U_{i_k}\}$.

Если $V_k \cap V_{k'} \neq \varnothing$, то точки y_k и $y_{k'}$ можно соединить проходящей внутри $V_k \cup V_{k'}$ непрерывной кривой

$$\hat{l}_{kk'}\colon\ [0, 1] \to V_k \cup V_{k'}, \quad \hat{l}_{kk'}(0)=y_k, \quad \hat{l}_{kk'}(1)=y_{k'}.$$

С помощью кривых l_k и $f\circ\hat{l}_{kk'}$ можно построить C^0-кривую $l_k\cdot(f\circ\hat{l}_{kk'})$, соединяющую точки $\hat{x}$ и $f(y_{k'})$; при этом будет иметь место гомотопия

$$l_k\cdot(f\circ\hat{l}_{kk'})\simeq l_{k'}.$$

Воспользуемся тем, что цепь $\mathscr{C}_{k'}^{(k)}=\{U_v, U_2^{(k)}, U_3^{(k)}, \ldots, U_{m_k-1}^{(k)}, U_{i_k}, U_{i_{k'}}\}$ гомотопна цепи $\mathscr{C}^{(k')}$ посредством гомотопии длины $m_{kk'}$ (см. § 19), и фиксируем целое число m, такое, что $m>m_{kk'}$ при любых возможных k и k'.

Обозначим через $Q_{v,t}$ локальный слой $\varphi_v^{-1}\circ(\hat{\pi}^{-1}(t))$ окрестности U_v $(-1<t<1)$. Пусть $\varepsilon>0$ настолько мало, что $Q_{v,t}$ при $-\varepsilon<t<\varepsilon$ содержит все точки, допускающие допустимые для точки $\hat{x}$ цепи когерентных окрестностей длины, не превосходящей m. Если $z\in Q_{v,t}$ — одна из этих точек, то пусть [1])

$$Q_{v,t}\, Q_{2,t}^{(k)}, \ldots, Q_{m_k-1,t}^{(k)}, Q_{i_k,t}$$

— характеристическая система локальных слоев цепи $\mathscr{C}^{(k)}$, определенная точкой z $(k=1, 2, \ldots, u)$, и при $V_k\cap V_{k'}\neq\varnothing$ пусть

$$Q_{v,t}, Q_{2,t}^{(k)}, \ldots, Q_{m_k-1,t}^{(k)}, Q_{i_k,t}, Q_t^{(k,k')}$$

— характеристическая система локальных слоев цепи $\mathscr{C}_{k'}^{(k)}$, определенная той же точкой z. В силу теоремы 5.5 $Q_t^{(k,k')}=$

[1]) Здесь во втором и следующих локальных слоях t стоит просто как напоминание, что мы начали с $Q_{v,t}$. В соответствующих локальных координатах последняя координата локального слоя $Q_{j,t}^{(k)}$ или $Q_{i_k,t}$, вообще говоря, уже не есть t.—*Прим. ред.*

$= Q_{i_{k'}, t}$. Следовательно, локальные слои $Q_{i_k, t}$ $(k=1, 2, \ldots, u)$ расположены на одном и том же слое $L_{\alpha(t)}$:

$$\bigcup_{k=1}^{u} Q_{i_k, t} \subset L_{\alpha(t)}.$$

Рассмотрим теперь на M^n C^{r-1}-слоение $\mathcal{F}'$ коразмерности $n-1$, трансверсальное к $\mathcal{F}$ (теорема 4.2). (В теореме 4.2 обсуждался случай многообразия без края; в случае $\partial M^n \neq \varnothing$ слоение $\mathcal{F}'$ определяется как трансверсальное к границе, см. § 29.) Взяв $\varepsilon > 0$ достаточно малым, определим для t, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, и $p \in E$, $p \in V_k$, точку $f_t(p)$ как

$$(\text{слой из } \mathcal{F}', \text{ проходящий через } f(p)) \cap Q_{i_k, t};$$

при достаточно малом ε точка $f_t(p)$ единственна[1]). Таким образом, получились отображения f_t: $E \to M^n$, обладающие, очевидно, свойствами (i), (ii), (iv). Условие (iii) также выполнено в силу определения слоения $\mathcal{F}'$. □

В теореме 6.3 $C^{s'}$-многообразие E $(s' \geqslant 0)$ предполагалось компактным; однако приведенное доказательство проходит и в том случае, когда E является объединением конечного числа таких многообразий.

Теорема 6.4. *Пусть M^n есть n-мерное C^s-многообразие и $\mathcal{F} = \{L_\alpha;\ \alpha \in A\}$ — C^r-слоение на M^n коразмерности* 1 $(r \geqslant 2)$[2]).

---

[1]) Кривая, являющаяся слоем $\mathcal{F}'$, вообще говоря, может много раз пересекать $Q_{i_k, t}$. Имеется в виду, что надо взять проходящую через p малую дугу $\Delta(p)$ этой кривой — скажем, имеющую в какой-нибудь фиксированной римановой метрике длину 2δ, причем точка p расположена в середине этой дуги. Если δ достаточно мало и окрестности из используемой когерентной системы $\mathfrak{N}(F(E \times I))$ достаточно мелкие, то ни при каком p дуга $\Delta(p)$ не сможет пересечь дважды ни один из локальных слоев этих расслоенных координатных окрестностей. Условие $f(\overline{V}_k) \subset U_{i_k}$ гарантирует, что при $p \in V_k$ дуга $\Delta(p)$ действительно пересекает все локальные слои Q окрестности U_{i_k} с достаточно малой последней координатой, а при достаточной малости t все $\hat{\pi}\varphi_{i_k}(Q_{i_k, t})$ тоже будут малы. Итак, пересечение $\Delta(p) \cap Q_{i_k, t}$ состоит ровно из одной точки. Если $p \in V_k \cap V_{k'}$, то $\Delta(p) \cap Q_{i_{k'}, t} = \Delta(p) \cap Q_{i_k, t}$. Действительно, $Q_{i_k, t}$ и $Q_{i_{k'}, t}$ содержатся в одном и том же локальном слое Q расслоенной координатной окрестности $U_{i_k, i_{k'}}$, содержащей $U_{i_k} \cup U_{i_{k'}}$, а $\Delta(p) \cap Q$ состоит из одной точки. — *Прим. ред.*

[2]) Как будет видно из доказательства, предполагается еще, что либо слоение трансверсально ориентируемо, либо $n \geqslant 3$. (Если ни одно из этих условий не выполняется, то и заключение теоремы может не выполняться. Для дальнейшего это не существенно, ибо теорема будет применяться в ситуации, где выполняются даже оба эти условия.) — *Прим. ред.*

Пусть, далее, L — слой слоения $\mathcal{F}$, не являющийся замкнутым множеством в M^n (например, в случае компактного M^n слой L некомпактен). Тогда на M^n существует простая замкнутая C^1-кривая l: $[0, 1] \to M^n$, $l(0) = l(1)$, трансверсальная к слоям слоения[1]) *и такая, что $l([0, 1]) \cap L \neq \varnothing$.*

Доказательство. Проведем сначала доказательство в случае трансверсально ориентируемого слоения $\mathcal{F}$. В этом случае, согласно теореме 4.1, существует трансверсальное к $\mathcal{F}$

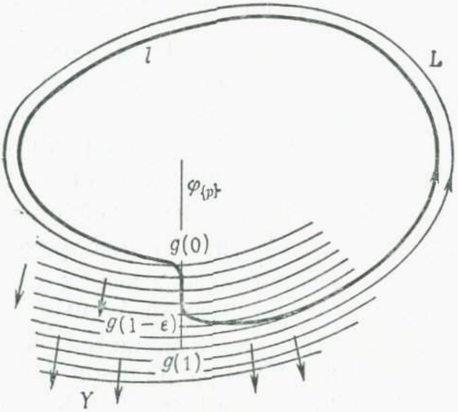


Рис. 6.2.

векторное C^{r-1}-поле $Y = \{Y(p);\ p \in M^n\}$. Траектории поля Y трансверсально пересекаются со слоями слоения $\mathcal{F}$. Так как $\overline{L} - L \neq \varnothing$, в множестве $\overline{L} - L$ можно выбрать какую-либо точку p. Проходящая через точку p интегральная кривая $\varphi_{\{p\}}$ поля Y трансверсальна слоям слоения и пересекает слой L в бесконечном множестве точек. Это позволяет выделить в кривой $\varphi_{\{p\}}$ некоторую ее дугу, являющуюся C^1-кривой

$$g\colon [0, 1] \to M^n,$$

такой, что $g(0)$, $g(1) \in L$, $g(0) \neq g(1)$ (см. рис. 6.2).

Рассмотрим на L C^1-кривую

$$f\colon [0, 1] \to L,$$

такую, что $f(0) = g(1)$, $f(1) = g(0)$ и при $t \neq t'$ обязательно $f(t) \neq f(t')$. Так как кривая f гомотопна 0 в силу леммы о

---

[1]) В отечественной литературе простую замкнутую C^1-кривую, трансверсальную к слоям, обычно называют *замкнутой трансверсалью*. — *Прим. ред.*

голономии, при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ можно ввести семейство C^1-кривых, описанных в теореме 6.3:

$$f_{(t)}\colon [0, 1] \to L_{\alpha(t)}, \qquad f_0 = f.$$

Используя слоение $\mathcal{F}'$, упомянутое в процессе доказательства теоремы 6.3 (или векторное поле, упомянутое в процессе доказательства теоремы 4.2), будем исходить из того, что $f_t(0) = g(1-t)$. Объединим кривую $g\left(\left[0, 1-\frac{\varepsilon}{2}\right]\right)$ и множество точек $\bigcup_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} f_{\varepsilon(1-\tau)/2}(\tau)$; тогда получится искомая C^1-кривая[1]) l, проходящая через точки $g(0)$ и $g(1-\varepsilon)$ (см. рис. 6.2) [7].

Если же слоение $\mathcal{F}$ не является трансверсально ориентируемым, то можно поступить следующим образом. Возьмем двулистное накрытие $\hat{M}^n$ многообразия M^n и проекцию $\pi\colon \hat{M}^n \to M^n$. С помощью $\mathcal{F}$ определим естественным образом на $\hat{M}^n$ C^r-слоение $\hat{\mathcal{F}} = \{$компоненты линейной связности множества $\pi^{-1}(L_\alpha)$; $L_\alpha \in \mathcal{F}\}$. Слоение $\hat{\mathcal{F}}$ уже трансверсально ориентируемо. С помощью описанного выше метода на $\hat{M}^n$ можно ввести C^1-кривую l, обладающую требуемыми свойствами по отношению к $\hat{\mathcal{F}}$. Но тогда $\pi \circ l$ является искомой простой замкнутой C^1-кривой на M^n (при наличии точки самопересечения на $\pi \circ l$ можно произвести необходимый сдвиг[2])). $\square$

§ 25. Существование компактных слоев у слоений коразмерности один на S^3 (теорема Новикова)

На трехмерной сфере S^3, как было показано, существуют слоения коразмерности 1, обладающие компактными слоями. Таким, например, является слоение Риба с компактным слоем $S^1 \times S^1$. Возникает, однако, вопрос: если на S^3 имеется слоение коразмерности 1, отличное от слоения Риба, то обладает

---

[1]) Имеем

$$\frac{d}{d\tau} f_{\varepsilon(1-\tau)/2}(\tau) = \left[-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial f_t(\tau)}{\partial t} + \frac{\partial f_t(\tau)}{\partial \tau}\right]_{t=\varepsilon(1-\tau)/2}.$$

Из наших построений следует, что первый вектор справа равен $(\varepsilon/2)\, Y(f_{\varepsilon(1-\tau)/2}(\tau))$, а второй касается слоев слоения $\mathcal{F}$; поэтому участок кривой, построенный с помощью f, трансверсален к $\mathcal{F}$. Чтобы обеспечить гладкость l в тех точках, где этот участок «стыкуется» с дугой $g([0, 1-(\varepsilon/2)]$, проще всего изменить параметризацию последней таким образом, чтобы скорость движения по ней возле ее концов совпадала с $(\varepsilon/2)\, Y$, а $f(t)$ считать параметризованной таким образом, чтобы при подходе к ее концам скорость движения стремилась к нулю. — *Прим. ред.*

[2]) Здесь подразумевается, что $n \geqslant 3$. — *Прим. ред.*

ли оно компактным слоем? Эресманом была выдвинута гипотеза, согласно которой всякое такое слоение имеет компактный слой[1]). В 1964 г. гипотезу Эресмана доказал С. П. Новиков.

Теорема 6.5. *Всякое C^r-слоение $\mathcal{F}$ $(r \geqslant 2)$ коразмерности 1 на трехмерной сфере S^3 обязательно обладает компактным слоем.*

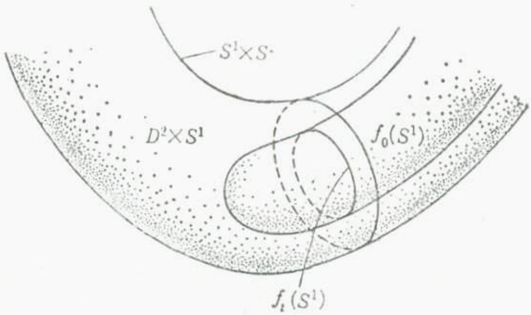


Рис. 6.3

Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько лемм. В дальнейшем $\mathcal{F}$ обозначает C^r-слоение коразмерности 1 $(r \geqslant 2)$ на 3-мерной сфере S^3.

Пусть L_0 — слой из $\mathcal{F}$ и

$$f_0\colon S^1 \to L_0$$

— замкнутая $C^{r'}$-кривая, не гомотопная нулю $(0 \leqslant r' \leqslant r)$. Если для f_0 существует непрерывно зависящее от t семейство замкнутых $C^{r'}$-кривых

$$f_t\colon S^1 \to S^3 \qquad (0 \leqslant t \leqslant \varepsilon),$$

обладающее перечисленными ниже свойствами (i), (ii), (iii), то f_0 называется *исчезающим циклом* слоения $\mathcal{F}$.

(i) Кривая $f_t(S^1)$ принадлежит некоторому слою $L_{\alpha(t)}$.

(ii) При каждом фиксированном x множество точек $f_t(x)$ $(0 \leqslant t \leqslant \varepsilon)$, получаемое при изменении t, составляет C^r-кривую, трансверсальную к слоям слоения $\mathcal{F}$.

(iii) Кривая f_0 не гомотопна 0 в слое L_0, но при $0 < t \leqslant \varepsilon$ кривая f_t гомотопна 0 в слое $L_{\alpha(t)}$.

В случае слоения Риба в компактном слое $S^1 \times S^1$ имеется замкнутая $C^{r'}$-кривая f_0, для которой $f_0(S^1) = S^1 \times \{p\}$ $(p \in S^1)$, и эта кривая является исчезающим циклом (рис. 6.3).

[1]) Хефлигер [2] приписывает эту гипотезу Кнезеру. — *Прим. ред.*

Лемма 6.6. *У всякого C^r-слоения $\mathcal{F}$ коразмерности 1 на S^3 $(r \geqslant 2)$ существует по крайней мере один исчезающий цикл.*

Доказательство. Так как трехмерная сфера S^3 односвязна, слоение $\mathcal{F}$ трансверсально ориентируемо. Следовательно, согласно теореме 4.1, на S^3 существует векторное C^{r-1}-поле Y, все интегральные кривые которого трансверсально пересекают слои слоения $\mathcal{F}$. Фиксируем точку p на

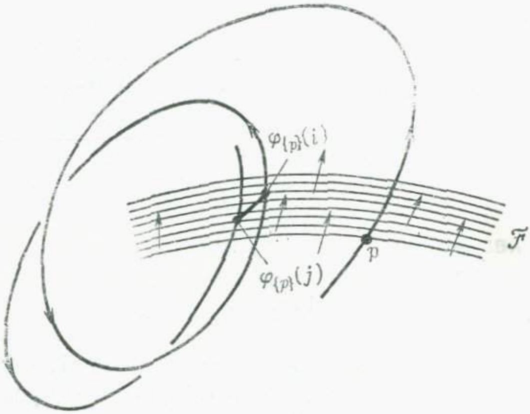


Рис. 6.4.

S^3 в качестве начальной для интегральной кривой $\varphi_{\{p\}}$ поля Y. Если эта кривая оказалась периодической, то она будет простой замкнутой C^r-кривой, трансверсально пересекающей слои слоения $\mathcal{F}$. Если же $\varphi_{\{p\}}$ — не периодическая кривая, то множество точек $\{\varphi_p(i);\ i \in \mathbf{Z}\}$ на S^3 бесконечно и, следовательно, обладает предельной точкой. Поэтому, согласно сказанному при доказательстве леммы 1.13, при соответствующим образом выбранных $i,\ j \in \mathbf{Z},\ i < j$, начало и конец дуги $\bigcup\limits_{i \leqslant t \leqslant j} \varphi_{\{p\}}(t)$ — точки $\varphi_{\{p\}}(i)$ и $\varphi_{\{p\}}(j)$ — можно соединить, как это изображено на рис. 6.4. Тем самым и в этом случае построена простая замкнутая C^r-кривая, трансверсально пересекающая слои слоения $\mathcal{F}$ [1]).

[1]) Очевидно, для доказательства существования замкнутой трансверсали достаточно сослаться на теорему 6.4. Правда, эта ссылка предполагает, что у $\mathcal{F}$ есть незамкнутые слои, тогда как приведенное в тексте рассуждение от этого не зависит. Но если все слои $\mathcal{F}$ замкнуты, то теорема 6.5 для $\mathcal{F}$ доказана, так что для наших целей этот случай можно не рассматривать. (Однако данное в тексте построение замкнутой трансверсали полезно в другом отношении: с его помощью можно доказать, что на S^3

Пусть l: $S^1 \to S^3$ — любая простая замкнутая C^r-кривая, трансверсально пересекающая слои слоения $\mathcal{F}$. Согласно сказанному выше, такая кривая обязательно существует. В силу односвязности трехмерной сферы S^3, существует непрерывное отображение g: $D^2 \to S^3$, такое, что $g|\partial D^2 = l$ и g является C^r-иммерсией. Это можно пояснить следующим образом. Если удалить из S^3 одну точку, то получится пространство $\mathbf{R}^3$ и кривая l окажется просто замкнутой C^r-кривой в $\mathbf{R}^3$. Ее можно представить как (C^1-гомеоморфный) образ при некотором отображении окружности, ограничивающей заштрихованный круг

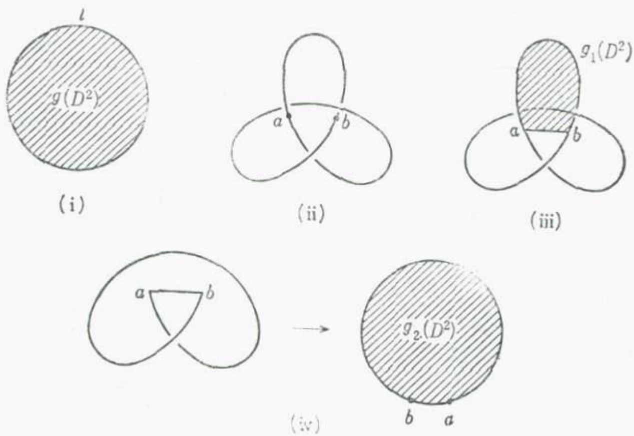


Рис. 6.5.

на рис. 6.5(i). Это отображение можно продолжить до иммерсии g всего круга. Действительно, если l окажется трилистником (см. рис. 6.5(ii)), то на ней можно взять две точки a и b так, как на рисунке, и задать отображения

$$g_1: D^2 \to \mathbf{R}^3, \qquad g_2: D^2 \to \mathbf{R}^3,$$

образы которых изображены на рис. 6.5(iii), (iv). После этого можно определить отображение g так, чтобы

$$g(D^2) = g_1(D^2) \cup g_2(D^2).$$

Случай более сложного заузления кривой l рассматривается аналогично.

Пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ — отмеченная расслоенная координатная окрестность; рассмотрим в $]-1, 1[^3$ поверхность $\varphi_\lambda(g(D^2) \cap$

вообще не существует слоения коразмерности 1, у которого все слои замкнуты. Доказательство — фактически часть рассуждений, следующих далее в тексте. Иначе это можно вывести из теоремы 5.10.) — *Прим. ред.*

$\cap U_\lambda$) (см. рис. 6.6(i)). Изменяя отображение g на D^2 (при этом $g|\partial D^2$ остается неизменным), можно добиться, чтобы $g(D^2)$ находилось в общем положении относительно $\mathcal{F}$, т. е. чтобы пересечения $\varphi_\lambda(g(D^2)\cap U_\lambda)\cap\hat{\pi}^{-1}(t)$ $(-1<t<1)$ локально были устроены следующим образом. Для каждого $x\in U_\lambda$ можно указать такое открытое множество $U_{\lambda,x}$, $x\in$

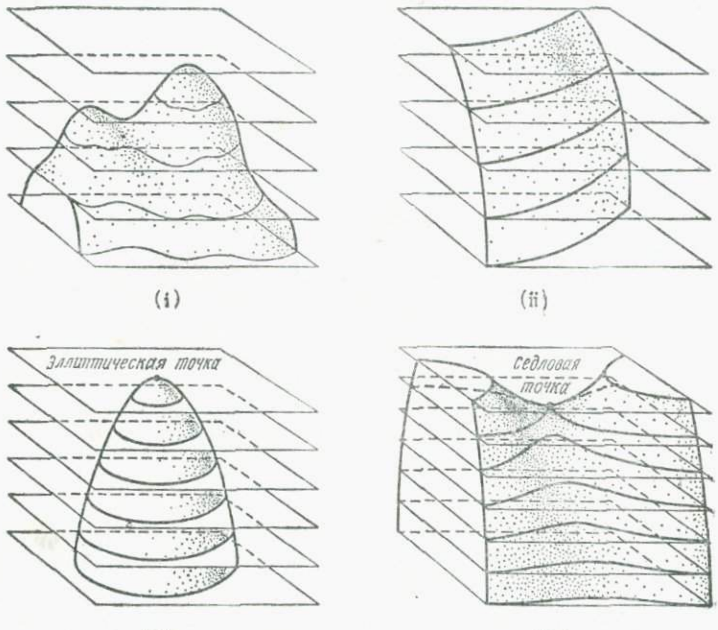


Рис. 6.6.

$\in U_{\lambda,x}\subset U_\lambda$, и для каждой точки $p\in D^2$ — такую ее окрестность U, что пересечения $\varphi_\lambda(g(U)\cap U_{\lambda,x})\cap\hat{\pi}^{-1}(t)$ имеют следующие типы:

(i) Пустое множество.

(ii) C^r-кривая (рис. 6.6(ii)).

(iii) Пересечение сводится к точке, а ее окрестность $\varphi_\lambda(g(U)\cap U_{\lambda,x})$ выглядит как окрестность вершинной точки эллипсоида — см. рис. 6.6(iii) (эллиптическая точка).

(iv) Две пересекающиеся C^r-кривые; окрестность их точки пересечения выглядит как окрестность седловой точки на гиперболоиде; множество $\varphi_\lambda(g(D^2)\cap U_{\lambda,x})$ изображено в этом случае на рис. 6.6(iv).

Если теперь (U_μ, φ_μ) — другая отмеченная расслоенная координатная окрестность и $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$, то для некоторой части $g(D^2) \cap U_\lambda \cap U_\mu$ имеет место одно из только что перечисленных условий, в силу чего $g(D^2)$ можно покрыть конечным числом отмеченных расслоенных окрестностей $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ так, чтобы для каждой из них выполнялось определенное условие из числа (i)—(iv) [8].

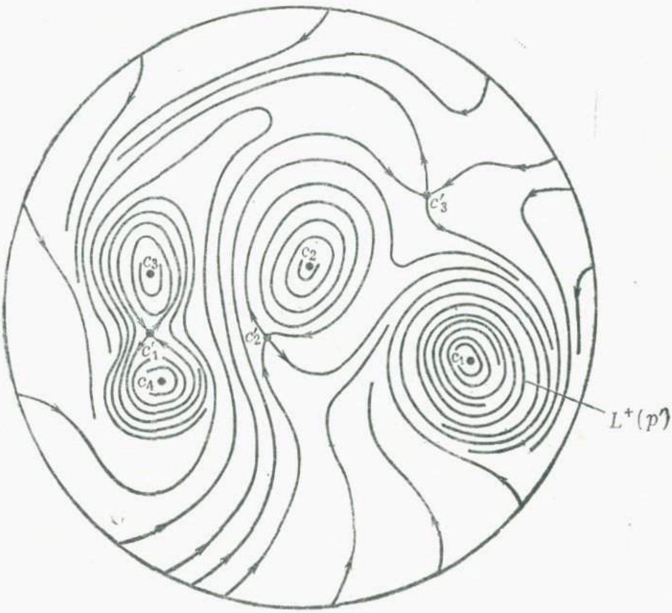


Рис. 6.7.

Семейство подмножеств $\{g^{-1}(L_\alpha);\ L_\alpha \in \mathcal{F}\}$ на D^2 может быть изображено в виде некоторого «семейства линий», как это сделано на рис. 6.7. Это «семейство линий» состоит из C^r-кривых, эллиптических точек на $g(D^2)$ (на рис. 6.7 это точки c_1, c_2, c_3, c_4) и седловых точек на $g(D^2)$ (на рис. 6.7 это точки c_1', c_2', c_3'). Изменяя, если потребуется, $g(D^2)$, можно достичь, чтобы в каждом слое слоения $\mathcal{F}$ было не более одной седловой точки; тогда никакая пара седловых точек на D^2 не соединяется C^r-кривой из нашего «семейства линий».

Пусть теперь X — векторное C^{r-1}-поле на D^2, удовлетворяющее перечисленным ниже условиям (i)—(iii). (Такое векторное поле для нашего «семейства линий» существует ввиду односвязности круга D^2.)

(i) Особые точки поля X соответствуют эллиптическим и седловым точкам на $g(D^2)$.

(ii) Кроме особых точек, траекториями поля X являются кривые $g^{-1}(L_\alpha)$ $(L_\alpha \in \mathcal{F})$. (Кривые $g^{-1}(L_\alpha)$ могут иметь особенности лишь в точках, указанных в (i).)

(iii) На границе поле X направлено внутрь круга (рис. 6.7) [9].

Рассмотрим ω-предельное множество $L^+(p)$ интегральной кривой $\varphi_{\{p\}}$ поля X с начальной точкой p из D^2. Так как $\varphi_{\{p\}}(t)$ $(t>0)$ не выходит за пределы D^2, обязательно

$$L^+(p) \subset D^2.$$

Если p' — точка из ∂D^2, множество $L^+(p')$ является либо

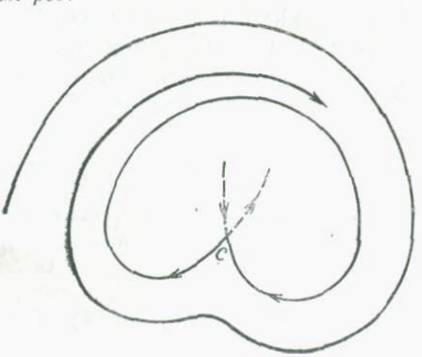
(a) единственной точкой, т. е. седловой точкой; либо

(b) подмножеством в D^2, в некоторых точках которого $X \neq 0$.

В случае (a) множество $L^+(p')$ изображено на рис. 6.7 точкой c_2', из которой исходят две C^r-траектории; одна из них возвращается в c_2', а другая стремится к ω-предельному множеству, в некоторых точках которого $X \neq 0$. Следовательно, на D^2 существует такая точка $\hat{p}$, что в $L^+(\hat{p})$ имеются точки с $X \neq 0$.

В случае если поле X на множестве $L^+(\hat{p})$ неособое, то $L^+(\hat{p})$, согласно теореме Пуанкаре — Бендиксона (теорема 3.3), является замкнутой траекторией (на рис. 6.7 изображена накручивающаяся на нее спираль). При наличии же в $L^+(\hat{p})$ особых точек это множество, как показано на рис. 6.7 (особая точка в $L^+(\hat{p})$ — седло c_1'), состоит (кроме c_1') из двух C^r-траекторий, каждая из которых выходит из c_1' и входит в c_1' [1]).

[1]) Либо оно может состоять из одного седла с одной сепаратрисой — траекторией, исходящей из c и возвращающейся снова в c. Эта сепаратриса образует петлю, внутри которой находятся две другие (возможно, совпадающие друг с другом) траектории, тоже исходящие или входящие в c. См. рис. Ниже автор учитывает эту возможность, но здесь забыл о ней упомянуть. — *Прим. ред.*



В этом легко убедиться с помощью таких же рассуждений, как те, что использовались при доказательстве теоремы 3.3. В обоих случаях существует слой L_α, для которого

$$L^+(\hat{p}) \subset g^{-1}(L_\alpha),$$

и кривая $\varphi_{\{\hat{p}\}}$ навивается на множество $L^+(\hat{p})$ снаружи.

Возьмем C^0-кривую

$$h: S^1 \to D^2,$$

для которой $h(S^1) = L^+(\hat{p})$ и которая, при заданном на S^1 направлении обхода, будет ориентирована так же, как интегральные кривые, образующие $L^+(\hat{p})$. Определенное в такой ситуации отображение

$$g \circ h: S^1 \to L_\alpha$$

не будет гомотопно нулю на L_α. Действительно, допустим, что отображение $g \circ h$ гомотопно нулю на L_α. Если во всех точках $L^+(\hat{p})$ круг D^2 отображается в S^3 трансверсально к $\mathcal{F}$, т. е. $L^+(\hat{p})$ не содержит точек, где $X=0$, то с помощью леммы о голономии доказывается существование семейства непрерывных отображений

$$h_t: S^1 \to S^3 \quad (-\varepsilon < t < \varepsilon),$$

непрерывно зависящего от t, в котором $h_0 = g \circ h$ и для которого множество точек $h_t(x)$ при фиксированном $x \in S^1$ составляет трансверсальную к слоям кривую и каждый образ $h_t(S^1)$ целиком расположен на соответствующем слое $L_{\alpha(t)}$. Аналогичное заключение справедливо и в том случае, когда $L^+(\hat{p})$ содержит седла, только h_t будут определены лишь при $0 \leqslant t < \varepsilon$ и те из кривых $h_t(x)$, которые проходят через эти седла, при $t=0$ не будут трансверсальны к слоям. Дать полное доказательство в этом случае не просто, хотя оно и не слишком трудно. Поэтому оно предоставляется читателю в качестве упражнения. В обоих случаях получается, что при некоторых t множество $g^{-1}(h_t(S^1))$ расположено снаружи от множества $L^+(\hat{p})$ (множество $L^+(\hat{p})$ может здесь содержать особую точку, которая должна быть седловой). Это означает, что снаружи от $L^+(\hat{p})$ и сколь угодно близко к нему на D^2 имеется «семейство линий», состоящее из концентрических (вложенных друг в друга и охватывающих $L^+(\hat{p})$) замкнутых интегральных кривых. Это противоречит тому, что кривая $\varphi_{\{\hat{p}\}}$

наматывается снаружи на $L^+(\hat{p})$. Следовательно, $g \circ h$ не гомотопно нулю на L_α.

Отсюда следует, что когда $L^+(\hat{p})$ является замкнутой траекторией, кривая $L^+(\hat{p})$ (точнее, «параметризующее» ее отображение $g \circ h$) не гомотопна нулю на L_α[1]); когда же $L^+(\hat{p})$ содержит седло[2]), в нем пересекаются входящая и выходящая C^r-кривые, из которых можно составить простую замкнутую C^0-кривую[3]), негомотопную нулю на L_α.

Обозначим через H множество всех простых замкнутых C^0-кривых $f\colon S^1 \to D^2$, таких, что

$$g \circ f\colon S^1 \to g(D^2) \cap L_\alpha$$

представляет собой негомотопную нулю кривую на L_α. В силу сказанного выше, $H \neq \varnothing$. (В дальнейшем H отождествляется с совокупностью образов этих простых замкнутых C^0-кривых.) В силу теоремы Жордана кривая $f(S^1)$ $(f \in H)$ ограничивает в D^2 некоторый круг (двумерный шар). Будем обозначать его через $D(f)$. Множество $D(f)$ является объединением траекторий, как и $D^2 - D(f)$. Если $f_1, f_2 \in H$ и $D(f_1) \supset D(f_2)$, то будем писать $f_1 > f_2$. Отношение $>$ вводит на H частичный порядок.

Покажем, что частично упорядоченное множество $(H, <)$ является индуктивным. Действительно, возьмем любое подмножество $\{f_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ множества H, в котором для любых $\sigma, \sigma' \in \Sigma$

$$\text{либо } f_\sigma < f_{\sigma'}, \text{ либо } f_\sigma > f_{\sigma'}.$$

Тогда

$$D_\Sigma = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} D(f_\sigma)$$

является непустым замкнутым множеством как общая часть компактных подмножеств в условиях, когда имеет место свойство конечного пересечения.

Множество D_Σ состоит более чем из одной точки. Если бы это было не так, то эта единственная точка должна была бы соответствовать эллиптической точке (центру). Однако в некоторой окрестности эллиптической точки, как это показано на рис. 6.6(iii), множество $g(D^2)$ устроено так, что при всех

---

[1]) И то же самое имеет место, если $L^+(\hat{p})$ состоит из седла и одной петли сепаратрисы. — *Прим. ред.*

[2]) И две петли сепаратрисы. — *Прим. ред.*

[3]) То есть взять одну из этих петель (вместе с самим седлом). — *Прим. ред.*

слоях L_α пересечение[1]) $g(D^2)\cap L_\alpha$ гомотопно нулю, что противоречит определению множества[2]) D_Σ.

Очевидно, D_Σ является объединением траекторий. Легко доказать, что и $\operatorname{Int} D_\Sigma$ представляет собой объединение траекторий (см. теорему 3.1). Следовательно, $D_\Sigma - \operatorname{Int} D_\Sigma$ является объединением траекторий, причем одного из следующих типов:

(a) простая замкнутая кривая;

(b) объединение седла и траектории, начинающейся и заканчивающейся в нем[3]);

(c) объединение седла и двух траекторий, начинающихся и заканчивающихся в нем.

Доказать это можно следующим образом.

Предположим, что $D_\Sigma - \operatorname{Int} D_\Sigma$ содержит траекторию $C(p)$ $(p\in D_\Sigma - \operatorname{Int} D_\Sigma)$, отличную от указанных в (a), (b) и (c)[4]). Из проведенных выше рассуждений следует, что $L^+(p)$ или $L^-(p)$ относится к одному из типов (a)—(c)[5]). Будем считать таковым ω-предельное множество $L^+(p)$. Так как $C(p)\subset D_\Sigma - \operatorname{Int} D_\Sigma$, выполняется включение

$$L^+(p)\subset D_\Sigma - \operatorname{Int} D_\Sigma.$$

В силу предположения

$$D_\Sigma - \operatorname{Int} D_\Sigma - L^+(p) \neq \varnothing.$$

С помощью рассуждений, проведенных при доказательстве леммы 1.16, легко заключить, что последнее соотношение противоречит определениям D_Σ и $L^+(p)$ [10]. Таким образом, множество $D_\Sigma - \operatorname{Int} D_\Sigma$ описывается одним из случаев (a)—(c).

В силу сказанного, применяя тот же метод, которым определялась кривая $h\colon S^1 \to D^2$ с помощью множества $L^+(\hat{p})$, определим C^0-кривую

$$\hat{f}\colon S^1 \to D^2$$

---

[1]) Точнее, его связные компоненты, лежащие возле центра. — *Прим. ред.*

[2]) Легко доказать, что некоторые из $D(f_\sigma)$ должны целиком лежать в малой окрестности D_Σ. — *Прим. ред.*

[3]) См. рисунок в примечании на стр. 184. — *Прим. ред.*

[4]) Легко видеть, что если граница D_Σ состоит только из замкнутых траекторий, седел и петель сепаратрисы, то она должна быть типа (a), (b) или (c). А если бы на границе D_Σ имелся центр (эллиптическая точка) p, то было бы $D_\Sigma = p$ и f_σ при некоторых σ (тех, при которых $D(f_\sigma)$ содержится в малой окрестности p) была бы гомотопна нулю. — *Прим. ред.*

[5]) В нашем случае α- и ω-предельные множества траекторий могут быть еще только седлами, но если $L^+(p)$ и $L^-(p)$ — седла, то это одно и то же седло и мы имеем дело с петлей сепаратрисы. — *Прим. ред.*

с помощью множества $D_\Sigma - \operatorname{Int} D_\Sigma$, положив $\hat{f}(S^1) = D_\Sigma - \operatorname{Int} D_\Sigma$. Если по кривой $\hat{f}$ построить кривую $g \circ \hat{f}: S^1 \to S^3$, то множество $g \circ \hat{f}(S^1)$ будет расположено на некотором слое L_β и кривая $g \circ \hat{f}$ не будет гомотопна 0 на L_β. Действительно, если бы кривая $g \circ \hat{f}$ была гомотопна нулю на L_β, то можно доказать (это предоставляется читателю), что для фигурировавших выше множеств $D(f_\sigma) \supset D_\Sigma$ $(\sigma \in \Sigma)$ множество $D(f_\sigma) - D_\Sigma$ содержит при каждом σ некоторое (не зависящее от σ) непустое множество точек, что противоречит определению D_Σ.

Возьмем теперь простую замкнутую C^0-кривую

$$\hat{f}': S^1 \to D^2,$$

считая, что кривой $\hat{f}'$ в случаях (a), (b) является сама кривая $\hat{f}$, а в случае (c) — одна из двух траекторий, образ которой при отображении g не гомотопен нулю; при этом $\hat{f}'(S^1) \subset D_\Sigma - \operatorname{Int} D_\Sigma$ и $g \circ \hat{f}'$ является кривой, негомотопной нулю на слое, содержащем $g \circ \hat{f}'(S^1)$. Очевидно, $\hat{f}' \in H$ и для всех f_σ $(\sigma \in \Sigma)$ имеет место отношение $\hat{f}' < f_\sigma$. Тем самым доказано, что $(H, <)$ является индуктивным частично упорядоченным множеством.

В силу леммы Цорна множество $(H, <)$ обладает минимальным элементом. Покажем, что если f_0 — этот минимальный элемент, то $g \circ f_0$ является исчезающим циклом. Содержащимися в $\operatorname{Int} D(f_0)$ траекториями являются лишь простые замкнутые кривые, траектории, начинающиеся и заканчивающиеся в седле, эллиптические точки (центры) и седла. Действительно, пусть существует еще какая-либо траектория в этом множестве[1]); тогда при некотором $f_0' \in H$ имеет место соотношение $f_0' < f_0$. Так как седел конечное число, существует такая достаточно малая окрестность U_0 множества $\partial D(f_0)$ в $D(f_0)$, что все траектории, пересекающиеся с $U_0 \cap \operatorname{Int} D(f_0)$, являются периодическими. Можно доказать (это предоставля-

---

[1]) Скажем, траектория $\varphi_{\{p\}}(t)$; тогда хоть одно из множеств $L^+(p)$, $L^-(p)$ не сводится к особой точке. Если при этом, например, $L^+(p) = f_0(S^1)$, а $L^-(p)$ — седло, то для одной из сепаратрис последнего α-предельное множество отлично от $f_0(S^1)$ и не сводится к седлу. В любом случае получается, что у некоторой траектории некоторое предельное множество лежит в $\operatorname{Int} D(f_0)$ и не сводится к особой точке, т. е. является либо замкнутой траекторией, либо седлом с одной или двумя петлями сепаратрис. Как и выше для границы D_Σ, строим такое $f_0': S^1 \to D^2$, что когда x пробегает S^1 против часовой стрелки, то $f_0'(x)$ пробегает эту замкнутую траекторию или петлю сепаратрисы (одну из двух петель, если их две), двигаясь в направлении, определяемом полем X, и доказываем, что f_0' не гомотопно нулю на своем слое. — *Прим. ред.*

ется читателю), что существует непрерывное семейство кривых f_t $(0 \leqslant t \leqslant \varepsilon)$, для которых $f_t(S^1)$ при $t > 0$ содержится строго внутри кривой $f_0(S^1)$. Учитывая, что f_0 — минимальный элемент множества, получаем, что каждая кривая $g \circ f_t$ гомотопна нулю в слое, содержащем образ отображения $g \circ f_t$. Таким образом, $g \circ f_0$ является исчезающим циклом. □

Лемма 6.7. *Пусть $\mathcal{F}$ есть C^r-слоение $(r \geqslant 2)$ коразмерности 1 на S^3 и L_0 — один из его слоев. Если на L_0 существует исчезающий цикл f_0: $S^1 \to L_0$, то существует слой L_0', достаточно близкий к L_0, и семейство замкнутых C^0-кривых*

$$g_t\colon S^1 \to S^3 \qquad (0 \leqslant t \leqslant \varepsilon),$$

непрерывно зависящее от t, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) *Кривая $g_t(S^1)$ содержится в некотором слое $L'_{\alpha(t)}$. При этом $L'_{\alpha(0)} = L_0'$.*

(ii) *При каждом фиксированном x множество точек $g_t(x)$ $(0 \leqslant t \leqslant \varepsilon)$, получающееся при изменении t, является C^r-кривой, трансверсально пересекающей слои слоения $\mathcal{F}$; если $g_0(x) \neq g_0(y)$ $(x, y \in S^1)$, то и $g_t(x) \neq g_t(y)$ $(0 \leqslant t \leqslant \varepsilon)$.*

(iii) *Кривая g_0 является исчезающим циклом, а именно кривая g_0 не гомотопна нулю в слое L_0', а кривые g_t при $0 < t \leqslant \varepsilon$ гомотопны нулю в соответствующих слоях $L'_{\alpha(t)}$.*

(iv) *Если $\tilde{L}'_{\alpha(t)}$ — универсальное накрывающее пространство для $L'_{\alpha(t)}$ и $\tilde{g}_t$: $S^1 \to \tilde{L}'_{\alpha(t)}$ $(0 < t \leqslant \varepsilon)$ — отображения, получающиеся поднятием соответствующих отображений g_t, то $\tilde{g}_t$ являются простыми замкнутыми кривыми* (см. комментарии, примечание **6**.1).

Доказательство. При необходимости можно немного изменить отображение f_0 и считать, что f_0: $S^1 \to L_0$ является C^r-иммерсией, при которой, если $f_0(x') = f_0(x'')$ при $x', x'' \in S^1$, то кривые $f_0(x)$ $(x' - \delta < x < x' + \delta)$ и $f_0(x)$ $(x'' - \delta < x < x'' + \delta)$ пересекаются трансверсально [11]. Так как f_0: $S^1 \to L_0$ является исчезающим циклом, по определению существует непрерывно зависящее от t семейство замкнутых C^0-кривых f_t: $S^1 \to S^3$ $(0 \leqslant t \leqslant \varepsilon')$, обладающее свойствами (i), (ii), (iii), перечисленными на стр. 179. Выбрав при необходимости ε' достаточно малым, можно обеспечить выполнение свойства (ii)[1]), т. е. добиться того, чтобы при $f_0(x) \neq f_0(y)$ $(x, y \in S^1)$ было и $f_t(x) \neq f_t(y)$ $(0 \leqslant t \leqslant \varepsilon')$.

[1]) Очевидно, что можно обеспечить выполнение (ii), если считать, что $f_t(x)$ при каждом x находится на проходящей через $f_0(x)$ траектории фиксированного векторного поля Y, трансверсального к слоению. (Для произвольного семейства f_t, фигурирующего в первоначальном определении исчезающего цикла, это может быть и не так.) — *Прим. ред.*

Если теперь $\tilde{L}_{\alpha(t)}$ — универсальное накрытие для $L_{\alpha(t)}$, то поскольку $f_t\colon S^1 \to L_{\alpha(t)}$ $(0 < t \leqslant \varepsilon')$ гомотопно нулю на $L_{\alpha(t)}$, существует накрывающее отображение

$$\tilde{f}_t\colon S^1 \to \tilde{L}_{\alpha(t)}.$$

Пусть при заданных (x, y) $(x, y \in S^1,\ x \neq y)$ и некотором t $(0 < t \leqslant \varepsilon')$ имеет место равенство

$$\tilde{f}_t(x) = \tilde{f}_t(y);$$

количество таких пар (x, y) — некоторое конечное число w. Для фиксированных x, y введем два множества U, K:

$$U = \{t \in]0, \varepsilon'];\ \tilde{f}_t(x) = \tilde{f}_t(y)\}, \qquad K = \{t \in [0, \varepsilon'];\ f_t(x) = f_t(y)\}.$$

Очевидно, $U \subset K$. В силу непрерывности f_t относительно t множество K является замкнутым в $[0, \varepsilon']$, и, если $K \neq \varnothing$, при достаточно малом ε' имеет место равенство $K = [0, \varepsilon']$.

Покажем, что U — открытое множество в $[0, \varepsilon']$. Пусть это не так. Тогда существует $\hat{t} \in U$, в любой окрестности которого найдется такое $t \in]0, \varepsilon']$, что $\tilde{f}_t(x) \neq \tilde{f}_t(y)$. Фиксируем на S^1 точку x_0 и рассмотрим на S^1 дугу $\widehat{xy}$, содержащую x_0. Кривая $f_{\hat{t}} \mid \widehat{xy}$ является замкнутой на слое $L_{\alpha(\hat{t})}$, и, так как $\tilde{f}_{\hat{t}}(x) = \tilde{f}_{\hat{t}}(y)$, эта замкнутая кривая на $L_{\alpha(\hat{t})}$ гомотопна нулю. Пусть

$$F\colon \widehat{xy} \times I \to L_{\alpha(\hat{t})}, \quad F \mid \widehat{xy} \times \{0\} = f_{\hat{t}} \mid \widehat{xy},$$

— эта гомотопия на $L_{\alpha(\hat{t})}$. В силу леммы о голономии (теорема 6.3), существует семейство отображений

$$F_\tau\colon \widehat{xy} \times I \to S^3 \quad (\hat{t} - \varepsilon'' < \tau < \hat{t} + \varepsilon''),$$

непрерывно зависящее от τ и такое, что множество $F_\tau(\widehat{xy} \times I)$ расположено в одном слое $L_{\beta(\tau)}$ и $F_{\hat{t}} = F$[1]). Но тогда при t, достаточно близких к $\hat{t}$, кривая $f_t\colon \widehat{xy} \to L_{\alpha(t)}$ гомотопна нулю в $L_{\alpha(t)}$ и $\tilde{f}_t(x) = \tilde{f}_t(y)$. Противоречие. Следовательно, U — открытое подмножество в K.

Пусть теперь $]t', t''[\subset U$ и $t' \notin U$. Так как K — замкнутое множество, $t' \in K$. Одна из двух замкнутых кривых

$$f_{t'} \mid \widehat{xy}, \quad f_{t'} \mid \widehat{yx}$$

---

[1]) Причем, конечно, $F_\tau(x, s) = F_\tau(y, s)$ при всех $\tau \in]\hat{t} - \varepsilon'', \hat{t} + \varepsilon''[$ и $s \in I$, а $F_\tau(a, b)$ с изменением τ и при фиксированных прочих аргументах пробегает дугу, трансверсальную к слоению. — *Прим. ред.*

не является гомотопной нулю на $L_{\alpha(t')}$. Действительно, если $t'=0$, то кривая f_0, очевидно, не гомотопна нулю на L_0[1]). Если же $t'>0$, то, так как $\tilde{f}_{t'}(x)\neq\tilde{f}_{t'}(y)$, кривая $f_{t'}\,|\,\widehat{xy}$ не гомотопна нулю на $L_{\alpha(t')}$.

Определим теперь кривую

$$f'_t\colon S^1\longrightarrow L_{\alpha(t+t')}\qquad (0\leqslant t\leqslant t''-t')$$

следующим образом. Если $f_{t'}\,|\,\widehat{xy}$ не гомотопна нулю на $L_{\alpha(t')}$, то $f'_t=f_{t+t'}\,|\,\widehat{xy}$; если же $f_{t'}\,|\,\widehat{yx}$ не гомотопна нулю на $L_{\alpha(t')}$,

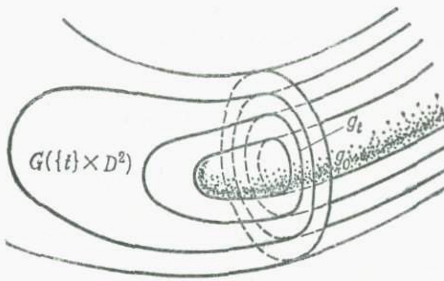


Рис. 6.8.

то $f'_t=f_{t'+t}\,|\,\widehat{yx}$. Кривая f'_0 будет тогда исчезающим циклом и число пар (x, y) $(x, y\in S^1,\ x\neq y)$, таких, что $\tilde{f}'_t(x)=\tilde{f}'_t(y)$ при некотором t, $0<t\leqslant t''-t'$, будет меньше, чем w. Таким путем можно уменьшить до 0 число w (при необходимости уменьшая ε') и, тем самым, определить семейство отображений $g_t\colon S^1\longrightarrow S^3$ $(0\leqslant t\leqslant\varepsilon)$, обладающих и свойством (iv). □

Лемма 6.8. *Для семейства отображений $g_t\colon S^1\longrightarrow S^3$, описанных в лемме 6.7 $(0\leqslant t\leqslant\varepsilon)$, существует C^0-иммерсия*

$$G\colon\ ]0,\hat{\varepsilon}]\times D^2\longrightarrow S^3\qquad (0<\hat{\varepsilon}<\varepsilon),$$

обладающая следующими свойствами (i)—(iv) (см. рис. 6.8):

(i) *Если $x\in S^1$, то $G(t, x)=g_t(x)$.*

(ii) $G(\{t\}\times D^2)\subset L'_{\alpha(t)}$.

(iii) *При фиксированном $x\in D^2$ множество $G(t, x)$ $(0<t\leqslant\hat{\varepsilon})$ составляет трансверсальную к слоям C^r-кривую.*

(iv) *Множество V всех тех x, для которых существует $\lim\limits_{t\to 0} G(t, x)$, является открытым подмножеством в D^2, содержащим S и отличным от D^2.*

---

[1]) И потому замкнутые кривые $f_0\,|\,\widehat{xy}$, $f_0\,|\,\widehat{yx}$ не могут быть обе гомотопны нулю.— *Прим. ред.*

Доказательство. Универсальное накрытие $\tilde{L}_\alpha$ слоя L_α является односвязным двумерным C^r-многообразием; поэтому $\tilde{L}_\alpha$ — это либо сфера S^2, либо пространство $\mathbb{R}^2$. Допустим, что $\tilde{L}_\alpha$ является сферой S^2. Слой L_α вложен в S^3 и потому ориентируем; значит, $L_\alpha = S^2$. Но если $L_\alpha = S^2$, то в силу теоремы 5.11 $\mathcal{F}$ является C^r-расслоением [1]), у которого базой является S^1, а слоями — S^2. В этом случае S^3 не может быть тотальным пространством [2]). Поэтому $\tilde{L}_\alpha = \mathbb{R}^2$.

Выберем $\hat{\varepsilon}$ так, чтобы $0 < \hat{\varepsilon} < \varepsilon$. Тогда образ отображения $\tilde{g}_{\hat{\varepsilon}}\colon S^1 \to \tilde{L}'_{\alpha(\hat{\varepsilon})} = \mathbb{R}^2$ — множество $\tilde{g}_{\hat{\varepsilon}}(S^1)$ — является в силу теоремы Жордана двумерным шаром D^2; поэтому существует C^0-вложение

$$\tilde{G}_{\hat{\varepsilon}}\colon D^2 \to \tilde{L}'_{\alpha(\hat{\varepsilon})},$$

при котором $\tilde{G}_{\hat{\varepsilon}} \mid S^1 = \tilde{g}_{\hat{\varepsilon}}$. С помощью проекции $\pi\colon \tilde{L}'_{\alpha(\hat{\varepsilon})} \to L'_{\alpha(\hat{\varepsilon})}$ определим отображение

$$G_{\hat{\varepsilon}}\colon D^2 \to L'_{\alpha(\hat{\varepsilon})},$$

положив $G_{\hat{\varepsilon}}(x) = \pi \circ \tilde{G}_{\hat{\varepsilon}}(x)$. Отображение $G_{\hat{\varepsilon}}$ является C^0-иммерсией. Исходя из отображения $G_{\hat{\varepsilon}}\colon D^2 \to L'_{\alpha(\hat{\varepsilon})}$, с помощью леммы о голономии (теорема 6.3) определим семейство C^0-иммерсий

$$G_t\colon D^2 \to S^3 \qquad (\varepsilon_1 < t \leqslant \hat{\varepsilon}),$$

при котором множество $G_t(D^2)$ принадлежит лишь одному слою. Здесь $0 \leqslant \varepsilon_1 < \hat{\varepsilon}$.

Определим отображение

$$G\colon]\varepsilon_1, \hat{\varepsilon}] \times D^2 \to S^3,$$

положив $G(t, x) = G_t(x)$. Тогда G будет C^0-иммерсией (теорема 6.3 (iv)) и $G(t, x) = g_t(x)$ при $x \in S^1$. Если $\varepsilon_1 \neq 0$, то применяя только что проведенные рассуждения к $\tilde{g}_{\varepsilon_1}\colon S^1 \to L'_{\alpha(\varepsilon_1)}$ и $G\colon]\varepsilon_1, \hat{\varepsilon}] \times D^2 \to S^3$, построим отображение $G\colon]\varepsilon_2, \hat{\varepsilon}] \times D^2 \to S^3$, где $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Продолжая этот процесс [12], мы построим ото-

[1]) Вариант 5.9 (ii) не может в данном случае иметь места — замкнутый слой коориентируемого слоения должен быть двусторонним, что противоречит свойствам $\pi^{-1}(0)$ в 5.9 (ii). — *Прим. ред.*

[2]) Это сразу следует из известной связи между фундаментальными группами слоя, тотального пространства и базы (кусок известной в алгебраической топологии «точной гомотопической последовательности расслоения») с учетом линейной связности слоя. Другая мотивировка того же вывода содержится в примечании к стр. 180. — *Прим. ред.*

бражение G: $]0, \hat{\varepsilon}]\times D^2 \to S^3$. Отображение G является C^0-иммерсией и, очевидно, обладает свойствами (i)—(iii).

В силу непрерывности отображения G множество V является открытым в D^2 и, очевидно, содержит S^1. Кроме того, если бы $V=D^2$, то предел $\lim\limits_{t\to 0} G(t, x)=G_0(x)$ определял бы некоторое непрерывное отображение [13] G_0: $D^2 \to L'_{\alpha(0)}$, и кривая g_0 была бы гомотопна нулю на $L'_{\alpha(0)}$, что противоречит условию. Таким образом, справедливо и (iv). □

Лемма 6.9. *Пусть* G: $]0, \hat{\varepsilon}]\times D^2 \to S^3$ *есть* C^0-*иммерсия, описанная в лемме* 6.8. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существуют такие* ε' *и* ε'', *что* $0<\varepsilon'<\varepsilon''<\delta$ *и выполнены следующие условия:*

(i) $L'_{\alpha(\varepsilon')}=L'_{\alpha(\varepsilon'')}$.

(ii) *При некотором сохраняющем ориентацию* C^0-*вложении*

$$\hat{h}: D^2 \to \operatorname{Int} D^2$$

имеет место равенство

$$G(\varepsilon'', x)=G(\varepsilon', \hat{h}x).$$

Доказательство. Фиксируем точку $x \in D^2 - V$, где V— множество из леммы 6.8(iv). Тогда C^r-кривая $G(t, x)$ $(0<t\leqslant\hat{\varepsilon})$ трансверсально пересекает слои и имеет бесконечную длину. Далее, существует такая последовательность чисел

$$t'_1 > t'_2 > \ldots > t'_i > \ldots, \qquad \lim_{i\to\infty} t'_i = 0,$$

что последовательность точек $G(t'_1, x)$, $G(t'_2, x), \ldots$ сходится. Пусть

$$\lim_{i\to\infty} G(t'_i, x) = z \qquad (z \in S^3),$$

и пусть точка z лежит на слое L'. Так как кривая $G(t, x)$ $(0<t\leqslant\hat{\varepsilon})$ трансверсальна слоям, при достаточно больших i можно указать для чисел t'_i близкие к ним числа t_i, такие, что $G(t_i, x) \in L'$ и $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = 0$ [1]).

Введем на L' метрику, получающуюся из римановой метрики на S^3. Так как для $y \in V$ имеет место включение [2]) $\lim\limits_{i\to\infty} G(t_i,$

---

[1]) А также $z=\lim\limits_{i\to\infty} G(t_i, x)$ в топологии слоя.— *Прим. ред.*

[2]) Во всяком случае, это так для $y \in V_0$, где V_0—компонента связности множества V, содержащая S^1. Собственно, сейчас это нужно для $y \in S^1 = \partial D^2$, для которых это известно с самого начала.— *Прим. ред.*

$y) \in L'_{\alpha(0)}$, то C^0-кривые на L'

$$\{G(t_i, y);\ y \in S^1\} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

относительно указанной выше метрики друг от друга отделимы [14]. Следовательно, при достаточно малых t_i имеет место включение[1]) $z \in G(\{t_i\} \times D^2)$. Пусть $\tilde{L}'$ — универсальное накрывающее пространство для L' и $\hat{z} \in \tilde{L}'$ — одна из точек, получающихся при подъеме из z. Обозначим через

$$\tilde{G}_{t_i}\colon D^2 \to \tilde{L}'$$

отображение, получившееся при том же подъеме [15] из $G \mid \{t_i\} \times D^2$. Из доказательства леммы 6.8 следует, что $\tilde{G}_{t_i}$ является C^0-вложением. С другой стороны, в соответствии со сказанным выше, при любом i лишь конечное число множеств $\tilde{G}_{t_j}(D^2)$ не содержит $\tilde{G}_{t_i}(D^2)$. Следовательно, при некотором $t_k < t_i$ справедливо включение $\tilde{G}_{t_k}(D^2) \supset \tilde{G}_{t_i}(D^2)$, а потому можно определить отображение $\hat{h}$ равенством $\tilde{G}_{t_k}(\hat{h}(x)) = \tilde{G}_{t_i}(x)$. □

Лемма 6.10. *Не существует замкнутой C^1-кривой на S^3, трансверсальной к слоям слоения $\mathcal{F}$ и пересекающей слой L'_0 из леммы* 6.7.

Доказательство. Допустим, что существует замкнутая C^1-кривая $l\colon S^1 \to S^3$, трансверсальная к слоям слоения $\mathcal{F}$ и такая, что $l(S^1) \cap L'_0 \neq \varnothing$. Поскольку слоение $\mathcal{F}$ трансверсально ориентируемо и слой L'_0 ориентируем, мы можем считать, что при всех пересечениях l с L'_0 кривая l переходит с нижней стороны слоя на верхнюю[2]). Пусть $\hat{x}$ — заданная точка слоя L'_0 и $p_1 = l(s_1) \in l(S^1) \cap L'_0$. Возьмем простую C^1-кривую

$$\hat{l}\colon [0, 1] \to L'_0,$$

для которой $\hat{l}(0) = \hat{x}$, $\hat{l}(1) = p_1$ и $\hat{l}([0, 1]) \cap l(S^1) = \{p_1\}$. При-

[1]) Граница $G_{t_i}(D^2)$ содержится в $g_{t_i}(S^1)$. Соответствующее рассуждение уже приводилось в одном из предыдущих примечаний (используем, что иммерсия локально является гомеоморфным вложением и что внутренние точки области в $\mathbf{R}^2$ при гомеоморфном вложении в $\mathbf{R}^2$ остаются внутренними точками). Если теперь имеется бесконечная подпоследовательность t_{i_j}, для которой $z \notin G_{t_{i_j}}(D^2)$, то, поскольку $z = \lim G_{t_{i_j}}(x)$, найдется сходящаяся к z последовательность z_j граничных точек множеств $G_{t_{i_j}}(x)$. Так как $z_j \in g_{t_{i_j}}(S^1)$, это противоречит сказанному выше.— *Прим. ред.*

[2]) Имеется в виду, что если выбрано некоторое векторное поле, трансверсальное к слоению, то имеет смысл говорить, что l пересекает слой в направлении, совпадающем с направлением этого поля (или противоположном ему). Условно об этом можно говорить как о «переходе с нижней стороны слоя на верхнюю» (или наоборот).— *Прим. ред.*

меняя лемму о голономии (теорема 6.3), построим непрерывное по t семейство C^1-кривых

$$\hat{l}_t\colon [0, 1] \to S^3 \quad (-\varepsilon < t < \varepsilon),$$

для которого $\hat{l}_0 = l$, множество $\hat{l}_t([0, 1])$ принадлежит лишь одному слою (зависящему от t) и $\hat{l}_t(1) = l(s_1 + t)$. Рассмотрим кривую

$$l(S^1 -]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[) \cup \{\hat{l}_s(2t/\varepsilon);\ -\varepsilon/2 \leqslant t \leqslant \varepsilon/2\};$$

сглаживая углы этой C^0-кривой, определим C^1-кривую l'. Для нее

$$\hat{x} \in l' \cap L_0.$$

Далее l' обозначается снова через l. Пусть $l(s_0) = \hat{x}$.

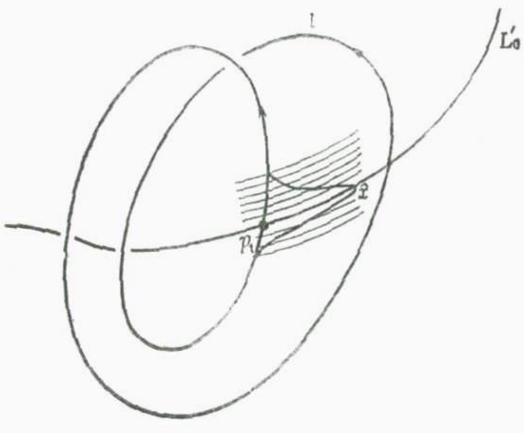


Рис. 6.9.

Теперь мы можем считать, что отображения $g_t\colon S^1 \to S^3$ из леммы 6.7 таковы, что[1])

$$g_t(x_0) = l(s_0 + t).$$

Далее, мы можем считать, что l и $G(]0, \hat{\varepsilon}] \times S^1)$ (где G—ото-

[1]) В доказательстве леммы 6.7 кривые $g_t(x)$ (со всевозможными фиксированными x) строились как интегральные кривые фиксированного векторного поля, трансверсального к $\mathcal{F}$. Но очевидно, что при необходимости можно так изменить кривую $l(s)$ возле $s = s_0$, чтобы некоторая дуга этой кривой, содержащая $\hat{x}$, как раз и была интегральной кривой данного векторного поля.— *Прим. ред.*

бражение из леммы 6.8) пересекаются только по множеству [1]) $G(]0, \hat{\varepsilon}]\times\{x_0\})$.

Пусть ε', ε'' такие же, как в лемме 6.9. Отождествим на $[\varepsilon', \varepsilon'']\times D^2$ точки (ε'', x) и $(\varepsilon', \hat{h}(x))$ (здесь $x\in D^2$) и получим некоторое C^0-многообразие N (рис. 6.8, рис. 6.10). Определим отображение j: $N\to S^3$, положив $j(t, x)=G(t, x)$ ($\varepsilon'\leqslant t\leqslant\varepsilon''$,

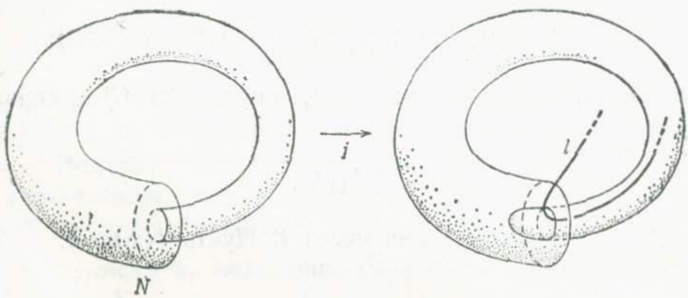


Рис. 6.10.

$x\in D^2$); тогда j будет C^0-иммерсией. Кривая l проходит от $G(]0, \hat{\varepsilon}]\times\{x_0\}$ во внутреннюю часть множества $j(N)$. Однако

$$\partial N=([\varepsilon', \varepsilon'']\times S^1)\cup(\{\varepsilon'\}\times(D^2-\hat{h}(D^2)))$$

и $j(\{\varepsilon'\}\times(D^2-\hat{h}(D^2)))\subset L'_{\alpha(\varepsilon')}$, а кривая l пересекает слой, проходя с нижней стороны на верхнюю; поэтому она не может пересечь этот слой, подойдя к нему изнутри $j(N)$. В то же время пересечение $j([\varepsilon', \varepsilon'']\times S^1)$ и l находится в $j([\varepsilon', \varepsilon'']\times\{x_0\})$. Следовательно, l входит в $j(N)$, но не выходит оттуда. Это противоречит предположению о замкнутости l [16]. □

Доказательство теоремы 6.5. Согласно теореме 6.4, слой L'_0 из леммы 6.10 является компактным. □

Теорему 6.5 можно обобщить следующим образом [17].

Теорема 6.11. *Если M^3 — замкнутое трехмерное C^∞-многообразие, фундаментальная группа $\pi_1(M^3)$ которого конечна, и $\mathcal{F}$ — некоторое C^r-слоение ($r\geqslant 2$) на M^3 коразмерности 1, то $\mathcal{F}$ обязательно обладает компактным слоем.*

---

[1]) Слегка изменив, если потребуется, кривую l, можно считать, что $l(s)$ пересекает $g_0(S^1)$ только при $s=s_0$. Взяв $\hat{\varepsilon}$ достаточно малым, получим, что l и $\bigcup\limits_{t\in[0,\hat{\varepsilon}]} g_t(S^1)$ пересекаются только по указанной дуге. — *Прим. ред.*

Для доказательства нужно рассмотреть универсальное накрывающее пространство для M^3 и провести рассуждения, совершенно аналогичные тем, которые использовались при доказательстве теоремы 6.5 [1]). В примере А из § 16 было рассмотрено C^∞-слоение $\mathcal{F}_{a,b}=\{L_\alpha;\alpha\in A\}$ на $S^1\times S^1$ (при иррациональном b/a). Пусть $\mathcal{F}'=\{L_\alpha\times S^1;\ \alpha\in A\}$ есть C^∞-слоение на $S^1\times S^1\times S^1$ коразмерности 1. Это слоение не имеет компактных слоев. Следовательно, предположение о фундаментальной группе многообразия M^3 необходимо для существования компактного слоя.

Пусть L — компактный слой слоения $\mathcal{F}$, о котором говорится в теореме 6.5. Так как на S^3 существует векторное C^{r-1}-поле, трансверсальное к $\mathcal{F}$ (теорема 4.1), эйлерова характеристика слоя L равна нулю. Следовательно, L топологически эквивалентен многообразию $S^1\times S^1$. То же самое можно сказать и о компактном слое из теоремы 6.11 [[18]].

---

[1]) Единственное усложнение возникает при доказательстве того факта, что на простую замкнутую C^1-кривую в этом универсальном накрывающем пространстве можно «натянуть» иммерсированный круг (ведь здесь уже нельзя сразу же свести дело к кривой в обычном трехмерном евклидовом пространстве). Элементарного доказательства этого факта мне не известно. Можно воспользоваться общими результатами и рассуждениями Смейла и Хирша, которым удалось полностью свести вопросы об иммерсиях к задачам гомотопической топологии. (Информацию об этом см. в обзоре Смейла [1*].) — *Прим. ред.*

Глава 7

СЛОЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

§ 26. Дифференциальные формы

Пусть V есть n-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$. Всякое линейное отображение $\varphi: V \to \mathbf{R}$, т. е. отображение, при котором

$$\varphi(\lambda v + \mu w) = \lambda\varphi(v) + \mu\varphi(w) \quad (v,\ w \in V,\ \lambda,\ \mu \in \mathbf{R}),$$

называется *формой первой степени* или *однородной функцией первой степени* на пространстве V. Пусть V^* — множество всех форм первой степени на V. Для любых φ, $\varphi' \in V^*$ и $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ можно определить элемент $\lambda\varphi + \mu\varphi' \in V^*$, положив

$$(\lambda\varphi + \mu\varphi')(v) = \lambda\varphi(v) + \mu\varphi'(v) \quad (v \in V);$$

тем самым V^* становится векторным пространством над $\mathbf{R}$. Его называют *двойственным* к V.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V. Возьмем формы $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in V^*$, определенные на этом базисе равенствами

$$\beta_j(e_i) = \delta_{ij} \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда, очевидно, элементы $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ будут составлять базис в пространстве V^*. Следовательно, пространство V^* n-мерно. Базис $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ называется *двойственным* (или *взаимным*) к базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Рассмотрим теперь произведение q экземпляров пространства V на себя, т. е. $V \times V \times \ldots \times V = \{(v_1, v_2, \ldots, v_q);\ v_i \in V\}$, и произвольное отображение

$$f\colon V \times V \times \ldots \times V \to \mathbf{R},$$

являющееся линейным на каждом сомножителе V. Это означает, что

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i + \mu w_i, v_{i+1}, \ldots, v_q) = \\ = \lambda f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_q) + \\ + \mu f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_q). \end{aligned}$$

Такое отображение f будет называться (*полилинейной*) *формой степени* q на пространстве V. Символом $T^{(q)}(V^*)$ будет обозначаться множество всех форм степени q на V. Для любых f, $f' \in T^{(q)}(V^*)$ и $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ определим элемент $\lambda f + \mu f' \in T^{(q)}(V^*)$ с помощью равенства

$$(\lambda f + \mu f')(v_1, v_2, \ldots, v_q) = \lambda f(v_1, v_2, \ldots, v_q) + \mu f'(v_1, v_2, \ldots, v_q).$$

Тем самым множество $T^{(q)}(V^*)$ становится векторным пространством над $\mathbf{R}$. В частности, $T^{(1)}(V^*)=V^*$. Условимся, что $T^{(0)}(V^*)=\mathbf{R}$.

С помощью форм β_j степени 1 $(j=1, 2, \ldots, n)$, введенных выше, определим формы

$$\beta_{j_1j_2\ldots j_q}\in T^{(q)}(V^*) \quad (1\leqslant j_k\leqslant n,\ k=1, 2, \ldots, q),$$

полагая

$$\beta_{j_1j_2\ldots j_q}(v_1, v_2, \ldots, v_q)=\beta_{j_1}(v_1)\cdot\beta_{j_2}(v_2)\cdot\ldots\cdot\beta_{j_q}(v_q).$$

Тогда формы $\beta_{j_1j_2\ldots j_q}$ $(1\leqslant j_k\leqslant n,\ k=1, 2, \ldots, q)$ составят базис пространства $T^{(q)}(V^*)$. Следовательно, размерность пространства $T^{(q)}(V^*)$ равна n^q.

Пусть $f\in T^{(q)}(V^*)$ и $g\in T^{(s)}(V^*)$; определим элемент $f\otimes g\in T^{(q+s)}(V^*)$ с помощью равенства

$$(f\otimes g)(v_1, v_2, \ldots, v_{q+s})=f(v_1, v_2, \ldots, v_q)\cdot g(v_{q+1}, v_{q+2}, \ldots, v_{q+s}).$$

Форма $f\otimes g$ называется *тензорным произведением* форм f и g. Для тензорного произведения справедливы следующие равенства:

$$(\lambda f+\mu f')\otimes g=\lambda(f\otimes g)+\mu(f'\otimes g),$$
$$f\otimes(\lambda g+\mu g')=\lambda(f\otimes g)+\mu(f\otimes g').$$

Далее, если $h\in T^{(r)}(V^*)$, то

$$(f\otimes g)\otimes h=f\otimes(g\otimes h).$$

Положим $T^*=\sum\limits_{q=0}^{\infty}T^{(q)}(V^*)$. Любой элемент из T^* — это последовательность форм $(f_0, f_1, \ldots, f_q, \ldots)$, $f_q\in T^{(q)}(V^*)$, в которой все элементы, кроме конечного числа, равны нулю. Поэтому имеет смысл символ $\sum\limits_q f_q$, которым и будут обозначаться элементы из T^*. Если $\sum\limits_q f_q$, $\sum\limits_q g_q\in T^*$ и $\lambda, \mu\in\mathbf{R}$, то положим по определению

$$\lambda\sum_q f_q+\mu\sum_q g_q=\sum_q(\lambda f_q+\mu g_q);$$

таким образом, множество T^* становится векторным пространством над $\mathbf{R}$. Если в нем определить произведение с помощью равенства

$$\Big(\sum_q f_q\Big)\otimes\Big(\sum_q g_q\Big)=\sum_r\Big(\sum_{q+s=r}f_q\otimes g_s\Big),$$

то оно станет алгеброй над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$.

Если $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — двойственный базис из V^*, то произведения $\beta_{j_1} \otimes \beta_{j_2} \otimes \ldots \otimes \beta_{j_q}$ $(1 \leqslant j_k \leqslant n)$ составляют базис в $T^{(q)}(V^*)$. Элемент $\beta_{j_1} \otimes \beta_{j_2} \otimes \ldots \otimes \beta_{j_q}$ — это не что иное, как упомянутая выше форма $\beta_{j_1 j_2 \ldots j_q}$.

Пусть S_q — группа всех подстановок на q символах $(1, 2, \ldots, q)$. Если $\sigma \in S_q$, то образ символа k при σ будет обозначаться через $\sigma(k)$ $(1 \leqslant k \leqslant q)$. Через $\varepsilon_\sigma = \pm 1$ будет обозначаться знак подстановки σ (т. е. $\varepsilon_\sigma = +1$, если подстановка σ четная, и $\varepsilon_\sigma = -1$, если она нечетная).

Для $f \in T^{(q)}(V^*)$ и $\sigma \in S_q$ определим $\sigma(f) \in T^{(q)}(V^*)$ с помощью формулы

$$\sigma(f)(v_1, v_2, \ldots, v_q) = f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(q)}).$$

Если форма $f \in T^{(q)}(V^*)$ такова, что для любой подстановки $\sigma \in S_q$ имеет место равенство

$$\sigma(f) = \varepsilon_\sigma f,$$

то f называется *знакопеременной формой* степени q. Совокупность всех знакопеременных форм степени q является подпространством в $T^{(q)}(V^*)$. Его обозначают через $\overset{q}{\wedge} V^*$. Условимся, что $\overset{0}{\wedge} V^* = \mathbf{R}$. Так как $\overset{1}{\wedge} V^* = T^{(1)}(V^*) = V^*$, принято отождествлять $\overset{1}{\wedge} V^*$ и V^*. Заметим, что в силу определения при $q > n$ имеет место равенство $\overset{q}{\wedge} V^* = \{0\}$.

Определим линейное отображение A_q (так называемое *альтернирование*) пространства $T^{(q)}(V^*)$ в себя, положив

$$A_q(f) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \varepsilon_\sigma \sigma(f).$$

Для каждой формы $f \in T^{(q)}(V^*)$ ее образ $A_q(f)$ является знакопеременной формой степени q.

Для любых $f \in \overset{q}{\wedge} V^*$, $g \in \overset{s}{\wedge} V^*$ определим форму $f \wedge g \in \overset{q+s}{\wedge} V^*$ равенством[1])

$$f \wedge g = \frac{(q+s)!}{q!\, s!} A_{q+s}(f \otimes g).$$

---

[1]) Некоторые авторы определяют $f \wedge g$ без множителя $\frac{(q+s)!}{q!\, s!}$ (и определение внешнего дифференциала, см. далее, у них тоже отличается множителем). Удобство того определения, которое принято в данной книге, видно хотя бы из леммы 7.1. — *Прим. ред.*

Форма $f \wedge g$ называется *внешним произведением* форм f и g. Для внешнего произведения справедливы следующие равенства:

$$(\lambda f + \mu f') \wedge g = \lambda (f \wedge g) + \mu (f' \wedge g),$$
$$f \wedge (\lambda g + \mu g') = \lambda (f \wedge g) + \mu (f \wedge g').$$

Кроме того, если $h \in \overset{r}{\wedge} V^*$, то

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h).$$

Соответствующее доказательство проводится непосредственно и поэтому опускается.

Пусть $\wedge V^* = \sum_{q=0}^{n} \overset{q}{\wedge} V^*$ и для $\sum_q f_q,\ \sum_q g_q \in \wedge V^*$ (здесь f_q, $g_q \in \overset{q}{\wedge} V^*$) с помощью равенства

$$\left(\sum_q f_q\right) \wedge \left(\sum_q g_q\right) = \sum_r \left(\sum_{q+s=r} f_q \wedge g_s\right)$$

определено внешнее произведение. Тогда $\wedge V^*$ становится алгеброй над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$; она называется *внешней алгеброй пространства* V^*.

Следующая лемма легко доказывается с помощью индукции по q (доказательство опускается).

Лемма 7.1. *Если* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q \in V^*$, *то*

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_q)(v_1, v_2, \ldots, v_q) = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) & \ldots & \varphi_1(v_q) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) & \ldots & \varphi_2(v_q) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_q(v_1) & \varphi_q(v_2) & \ldots & \varphi_q(v_q) \end{vmatrix},$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_q \in V$.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q \in V^*$ и $\sigma \in S_q$. В соответствии с определением тензорного произведения имеет место равенство

$$(\varphi_{\sigma(1)} \otimes \varphi_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\sigma(q)})(v_1, v_2, \ldots, v_q) = \\ = \varphi_{\sigma(1)}(v_1) \cdot \varphi_{\sigma(2)}(v_2) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\sigma(q)}(v_q);$$

следовательно,

$$\left(\sum_{\sigma \in S_q} \varepsilon_\sigma \varphi_{\sigma(1)} \otimes \varphi_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\sigma(q)}\right)(v_1, v_2, \ldots, v_q) = \\ = \sum_{\sigma \in S_q} \varepsilon_\sigma \varphi_{\sigma(1)}(v_1) \cdot \varphi_{\sigma(2)}(v_2) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\sigma(q)}(v_q).$$

Но правая часть этого равенства и правая часть равенства из леммы 7.1 равны; поэтому

$$(*) \qquad \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_q = \sum_{\sigma \in S_q} \varepsilon_\sigma \varphi_{\sigma(1)} \otimes \varphi_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\sigma(q)}.$$

Пусть теперь $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — двойственный к нему базис. Так как всякая форма $f \in \overset{q}{\wedge} V^*$ является и элементом пространства $T^{(q)}(V^*)$, имеет место равенство

$$f = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_q} f_{j_1 j_2 \ldots j_q} \beta_{j_1} \otimes \beta_{j_2} \otimes \ldots \otimes \beta_{j_q},$$

где $f_{j_1 j_2 \ldots j_q} = f(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_q})$. Это же можно записать и так:

$$(**)\ f = \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_q} \left(\sum_{\sigma \in S_q} f_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} \ldots j_{\sigma(q)}} \beta_{j_{\sigma(1)}} \otimes \beta_{j_{\sigma(2)}} \otimes \ldots \otimes \beta_{j_{\sigma(q)}} \right).$$

Но, поскольку f — знакопеременная форма степени q,

$$f_{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} \ldots j_{\sigma(q)}} = \varepsilon_\sigma f_{j_1 j_2 \ldots j_q}.$$

Следовательно, используя равенство (*), можно заменить выражение для суммы в скобках правой части равенства (**) на равное ему $f_{j_1 j_2 \ldots j_q} \beta_{j_1} \wedge \beta_{j_2} \wedge \ldots \wedge \beta_{j_q}$. В результате получится, что

$$f = \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_q} f_{j_1 j_2 \ldots j_q} \beta_{j_1} \wedge \beta_{j_2} \wedge \ldots \wedge \beta_{j_q}.$$

С другой стороны, $\binom{n}{q}$ элементов $\beta_{j_1} \wedge \beta_{j_2} \wedge \ldots \wedge \beta_{j_q}$ $(j_1 < j_2 < \ldots < j_q)$ пространства $\overset{q}{\wedge} V^*$ линейно независимы. Действительно, если

$$\sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_q} \lambda_{j_1 j_2 \ldots j_q} \beta_{j_1} \wedge \beta_{j_2} \wedge \ldots \wedge \beta_{j_q} = 0,$$

то в силу (*)

$$\sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_q} \lambda_{j_1 j_2 \ldots j_q} \sum_{\sigma \in S_q} \varepsilon_\sigma \beta_{j_{\sigma(1)}} \otimes \beta_{j_{\sigma(2)}} \otimes \ldots \otimes \beta_{j_{\sigma(q)}} = 0,$$

а это возможно лишь при $\lambda_{j_1 j_2 \ldots j_q} = 0$.

Поэтому $\binom{n}{q}$ элементов

$$\beta_{j_1} \wedge \beta_{j_2} \wedge \ldots \wedge \beta_{j_q} \qquad (j_1 < j_2 < \ldots < j_q)$$

составляют базис пространства $\overset{q}{\wedge} V^*$, которое, следовательно, имеет размерность $\binom{n}{q}$. Значит, пространство $\wedge V^*$ является 2^n-мерным.

Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s \in V^*$, то в силу леммы 7.1

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_q \wedge \psi_l = (-1)^q \psi_l \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_q.$$

Поэтому

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_q) \wedge (\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_s) = \\ = (-1)^{qs} (\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_s) \wedge (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_q).$$

Следовательно, если $f \in \overset{q}{\wedge} V^*$, $g \in \overset{s}{\wedge} V^*$, то

$$f \wedge g = (-1)^{qs} g \wedge f.$$

В частности,

$$\varphi \wedge \psi = -\psi \wedge \varphi; \qquad \varphi \wedge \varphi = 0 \quad (\varphi, \ \psi \in V^*).$$

Следующая лемма легко выводится из леммы 7.1 (доказательство опускается).

Лемма 7.2. *Если* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ \psi_1, \ \psi_2, \ldots, \ \psi_n \in V^*$ *и*

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n = \det(a_{ij}) \, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n.$$

Пусть V, V' — векторные пространства над полем $\mathbf{R}$ и F: $V \to V'$ — линейное отображение, т. е.

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$$

для любых $v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Определим с помощью F отображение

$$F^*: \ T^{(q)}(V'^*) \to T^{(q)}(V^*) \quad (q = 0, 1, 2, \ldots),$$

положив для произвольной формы $f' \in T^{(q)}(V'^*)$

$$(F^*(f'))(v_1, v_2, \ldots, v_q) = f'(F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_q)) \quad (v_i \in V).$$

Очевидно, F^* является линейным отображением векторного пространства $T^{(q)}(V'^*)$ в векторное пространство $T^{(q)}(V^*)$. Это отображение может быть ограничено на подпространство $\overset{q}{\wedge} V'^*$, в результате чего будет получено линейное отображение

$$F^*: \ \overset{q}{\wedge} V'^* \to \overset{q}{\wedge} V^* \quad (q = 0, 1, \ldots, \dim V').$$

Объединяя по всем возможным значениям q, получаем отображение

$$F^*: \ \wedge V'^* \to \wedge V^*.$$

Пусть M^n есть n-мерное C^s-многообразие ($s \geqslant 1$). Рассмотрим векторное пространство $\overset{q}{\wedge} (T_p(M))^*$ знакопеременных форм степени q на касательном пространстве $T_p(M^n)$ к многообразию M^n в произвольной фиксированной точке p. Поставим в соответствие каждой точке p из M^n некоторую знакопеременную форму $\omega(p)$ степени q из $\overset{q}{\wedge}(T_p(M))^*$; в результате получится отображение

$$\omega\colon M^n \to \bigcup_{p\in M^n}\left(\overset{q}{\wedge}(T_p(M))^*\right),$$

которое называется *дифференциальной формой степени* q на многообразии M^n.

Пусть $\partial/\partial x_i$ — положительный единичный вектор оси x_i пространства $\mathbf{R}^n$. Тогда векторы $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_n$ составляют базис n-мерного векторного пространства $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ базис двойственного к $\mathbf{R}^n$ пространства $(\mathbf{R}^n)^*$, являющийся двойственным к $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_n$:

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\delta_{ij}.$$

В таком случае элементы $dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\ldots\wedge dx_{j_q}$ $(j_1<j_2<\ldots<j_q)$ составляют базис векторного пространства $\overset{q}{\wedge}(\mathbf{R}^n)^*$ над полем $\mathbf{R}$.

Пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ — координатная окрестность на M^n. В § 10 был определен изоморфизм $\Phi_\lambda\colon T_p(M^n)\to\mathbf{R}^n$ для произвольной точки из M^n. Определим теперь отображение Φ_λ^*: $(\mathbf{R}^n)^*\to(T_p(M^n))^*$ с помощью равенства

$$\Phi_\lambda^*(dx_i)(v)=dx_i(\Phi_\lambda(v)) \quad (v\in T_p(M^n));$$

очевидно, Φ_λ^* — изоморфизм. Введем с помощью изоморфизма $(\Phi_\lambda^*)^{-1}$: $(T_p(M^n))^*\to(\mathbf{R}^n)^*$ еще и изоморфизм (он будет обозначаться тем же символом)

$$(\Phi_\lambda^*)^{-1}\colon \overset{q}{\wedge}(T_p(M^n))^*\to\overset{q}{\wedge}(\mathbf{R}^n)^*.$$

Применительно к элементу $\omega(p)$, соответствующему точке $p\in U_\lambda$, это позволяет записать

$$(\Phi_\lambda^*)^{-1}\omega(p)=\sum_{j_1<j_2<\ldots<j_q} a_{j_1j_2\ldots j_q}(\varphi_\lambda(p))\,dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\ldots\wedge dx_{j_q}.$$

В частности, коэффициенты $a_{j_1j_2\ldots j_q}$ являются вещественнозначными функциями на $\Phi_\lambda(U_\lambda)$. Если коэффициенты $a_{j_1j_2\ldots j_q}$ являются C^r-функциями в точке $\varphi_\lambda(p)$ $(r\leqslant s-1)$, то говорят, что ω — *дифференциальная форма класса* C^r или C^r*-форма в точке* p. Очевидно, это определение не зависит от выбора окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$. Если форма ω является формой класса C^r во всех точках многообразия M^n, то говорят, что она является *дифференциальной* C^r*-формой степени* q *на многообразии* M^n. Дифференциальными формами степени 0 и класса C^r на M^n являются C^r-функции на M^n. Множество всех дифференциальных форм степени q и класса C^r на многообразии M^n будет обозначаться через $A^q_{(r)}(M^n)$ или просто через $A^q(M^n)$ $(q=0, 1, 2, \ldots, n)$.

Для $\omega_1, \omega_2 \in A^q(M^n)$ определим форму $\omega_1+\omega_2 \in A^q(M^n)$ с помощью равенства

$$(\omega_1+\omega_2)(p)=\omega_1(p)+\omega_2(p).$$

Кроме того, для произвольной C^r-функции $g\colon M^n \to \mathbf{R}$ определим форму $g\omega_1 \in A^q(M^n)$:

$$(g\omega_1)(p)=g(p)\,\omega_1(p).$$

Далее для дифференциальных форм $\omega \in A^q(M^n)$ и $\theta \in A^s(M^n)$ определим внешнее произведение $\omega\wedge\theta \in A^{q+s}(M^n)$:

$$(\omega\wedge\theta)(p)=\omega(p)\wedge\theta(p).$$

Заметим, что при $q>n$ обязательно $A^q(M^n)=0$. Для внешнего произведения $\omega\wedge\theta$ будет иметь место равенство

$$\omega\wedge\theta=(-1)^{qs}\,\theta\wedge\omega.$$

Определим в прямой сумме

$$A(M^n)=\sum_{q=0}^{n} A^q(M^n)$$

для элементов $\sum\limits_q \omega^q$, $\sum\limits_q \theta^q$ из $A^q(M^n)$ внешнее произведение с помощью формулы

$$\Big(\sum_q \omega^q\Big)\wedge\Big(\sum_q \theta^q\Big)=\sum_l\Big(\sum_{q+k=l}\omega^q\wedge\theta^k\Big).$$

Тогда $A(M^n)$ становится алгеброй над полем $\mathbf{R}$.

Теорема 7.3. *Существует и притом единственное линейное отображение*

$$d\colon A^q_{(r)}(M^n) \to A^{q+1}_{(r-1)}(M^n) \quad (q=0, 1, 2, \ldots, n)$$

$(r\geqslant 1)$, *обладающее следующими свойствами:*

(i) $d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$ $(\omega_1, \omega_2 \in A^q_{(r)}(M^n))$.

(ii) $d(\omega\wedge\theta)=d\omega\wedge\theta+(-1)^q\,\omega\wedge d\theta$ $(\omega \in A^q_{(r)}(M^n),\ \theta \in A^k_{(r)}(M^n))$.

(iii) *Если* $f \in A^0_{(r)}(M^n)$ *и* $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ — *координатная окрестность на* M^n, *то*

$$(\Phi^*_\lambda)^{-1}\,df(p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_i}(\varphi_\lambda(p))\,dx_i \qquad (p \in U_\lambda).$$

(iv) *Если* $f \in A^0_{(r)}(M^n)$ *и* $r\geqslant 2$, *то* $d(df)=0$. *Отображение* d *называется оператором внешнего дифференцирования, а форма* $d\omega$ — *внешним дифференциалом формы* ω.

Доказательство. Для координатной окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ и формы $\omega \in A^q_{(r)}(M^n)$ имеет место равенство

$$(\Phi_\lambda^*)^{-1}\omega(p) = \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_q} a_{j_1 j_2 \ldots j_q}(\varphi_\lambda(p))\, dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\ldots\wedge dx_{j_q}.$$

Поэтому если отображение d, обладающее свойствами (i)—(iv), существует, то для $d\omega$ выполняется равенство [19]

(*) $(\Phi_\lambda^*)^{-1}\, d\omega(p) =$

$$= \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_q}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i} a_{j_1 j_2\ldots j_q}(\varphi_\lambda(p))\, dx_i\right)\wedge dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\ldots\wedge dx_{j_q}.$$

Следовательно, если d существует, то оно единственно.

Далее, определим для формы ω форму $d\omega$ равенством (*). Тогда линейность отображения $d\colon A^q_{(r)}(U_\lambda)\to A^{q+1}_{(r-1)}(U_\lambda)$, а также наличие у него свойств (i), (iii) очевидны. Кроме того,

$$(\Phi_\lambda^*)^{-1}\, d(df) = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2(f\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_j\partial x_i} - \frac{\partial^2(f\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_i\,\partial x_j}\right) dx_i\wedge dx_j = 0;$$

поэтому имеет место и свойство (iv). Чтобы доказать соотношение (ii), заметим, что в силу линейности обсуждаемого отображения d достаточно рассмотреть случай (к которому легко сводится общая ситуация), когда $(\Phi_\lambda^*)^{-1}\omega = f\,dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q}$, $(\Phi_\lambda^*)^{-1}\theta = g\,dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\ldots\wedge dx_{j_k}$. Вычислим выражение для $d(\omega\wedge\theta)$:

$$(\Phi_\lambda^*)^{-1}\, d(\omega\wedge\theta) = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(fg)\, dx_i\right)\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q}\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}g + f\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q}\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_k} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q}\right)\wedge(g\,dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_k}) +$$

$$+(-1)^q (f\,dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\ldots\wedge dx_{i_q})\wedge$$

$$\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\ldots\wedge dx_{j_k}\right) =$$

$$= (\Phi_\lambda^*)^{-1}(d\omega\wedge\theta + (-1)^q\omega\wedge d\theta).$$

Таким образом, установлено и свойство (ii).

С помощью формулы (*) можно определить отображение

$$d\colon A^q_{(r)}(U_\lambda)\to A^{q+1}_{(r-1)}(U_\lambda)$$

для каждой координатной окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$; в силу своей единственности, отображения d на общей части $U_\lambda \cap U_\mu$ окрестностей $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ и (U_μ, φ_μ) (при условии, что $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$) совпадают [1]). Следовательно, существование отображения d доказано. □

Теорема 7.4. *Для отображения* d *из теоремы* 7.3 *имеет место равенство*

$$d(d\omega) = 0.$$

Предполагается, что $r \geqslant 2$.

Доказательство. Проведем доказательство лишь в случае $(\Phi_\lambda^*)^{-1}\omega = f\,dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$. Подсчитаем $d(d\omega)$:

$$(\Phi_\lambda^*)^{-1} d(d\omega) = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 (f\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_j\,\partial x_i} - \frac{\partial^2 (f\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_i\,\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j \wedge \\ \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} = 0.$$

Следовательно, $d(d\omega) = 0$. □

Если форма $\omega \in A^q_{(r)}(M^n)$ такова, что $d\omega = 0$, то ω называется *замкнутой дифференциальной формой степени* q и *класса* C^r. Если же форма $\theta \in A^q_{(r)}(M^n)$ такова, что $\theta = d\hat{\theta}$ при некоторой форме $\hat{\theta} \in A^{q-1}_{(r+1)}(M^n)$, то она называется *точной дифференциальной формой степени* q и *класса* C^r. В силу теоремы 7.4 всякая точная дифференциальная форма является замкнутой.

Если ω — дифференциальная форма степени q и класса C^r на многообразии M^n, то замыкание множества $\{p \in M^n;\ \omega(p) \neq 0\}$ называется *носителем* формы ω.

Пусть M и M' суть C^s-многообразия и $h: M \to M'$ — некоторое C^r-отображение $(1 \leqslant r \leqslant s)$. С его помощью можно определить отображение

$$h^*: A^q_{(r-1)}(M') \to A^q_{(r-1)}(M) \quad (q = 0, 1, 2, \ldots),$$

---

[1]) Формально единственность была доказана в предположении, что существует такое d, как требуется в теореме 7.3. Если же мы не знаем, что такое d существует, то a priori не исключено, что внешний дифференциал $d = d_\lambda$, определяемый с помощью (*) и формально зависящий от λ, не совпадает с d_μ. Проверить, что при $x \in U_\lambda \cap U_\mu$ имеем $(d_\lambda\omega)(x) = (d_\mu\omega)(x)$, можно путем непосредственного вычисления. При этом, поскольку мы уже знаем, что d_λ и d_μ обладают свойствами (i), (ii) и (iv), проверку достаточно произвести только для функций, а для них это очень просто. — *Прим. ред.*

положив для $\omega' \in A^q_{(r)}(M')$, $p \in M$, $v_1, v_2, \ldots, v_q \in T_p(M)$

$$((h^*(\omega'))(p))(v_1, v_2, \ldots, v_q) = (\omega'(h(p)))(h_*(v_1), h_*(v_2), \ldots, h_*(v_q)).$$

Очевидно, отображение h^* является гомоморфизмом внешних алгебр[1]).

§ 27. Интегрирование дифференциальных форм

Пусть M^n — компактное ориентированное n-мерное C^s-многообразие ($s \geqslant 1$). Мы будем одновременно рассматривать как случай многообразия с краем, так и случай многообразия без края. Так как M^n — ориентируемое многообразие, в системе $\mathscr{S}$ локальных C^r-координат на M^n существует подмножество $\mathscr{S}'$, обладающее свойствами (i), (ii) из § 10. Будем считать, что $\mathscr{S}'$ является максимальным по включению.

Следовательно, если для произвольной точки $p \in M^n$ фиксировать касательное пространство $T_p(M^n)$, задать в нем ориентацию и после этого определить проекцию $\pi\colon T(M) \to M$ пространства касательных векторов, то при $p \in U_\lambda$, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}'$ и отображении $\tilde{\Phi}_\lambda\colon \pi^{-1}(U_\lambda) \to \varphi_\lambda(U_\lambda) \times \mathbf{R}^n$ из § 10 ориентацию в $T_p(M)$ можно перенести на $\mathbf{R}^n$. Пусть при этом в $\mathbf{R}^n$ получается ориентация, которая отвечает базису $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_n$.

Если $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ при $(U_\lambda, \varphi_\lambda), (U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathscr{S}'$, $p \in U_\lambda \cap U_\mu$ и $v \in T_p(M^n)$, то

$$\tilde{\Phi}_\lambda(v) = (\varphi_\lambda(p), (v_1, v_2, \ldots, v_n)),$$
$$\tilde{\Phi}_\mu(v) = (\varphi_\mu(p), (v'_1, v'_2, \ldots, v'_n));$$

будем считать, что $\varphi_\lambda(p) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_\mu(p) = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$; в силу (**) из § 10

$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial x_j}(\varphi_\lambda(p))\, v_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $\hat{\omega}$ — дифференциальная форма на M^n степени n и класса C^r $(0 \leqslant r < s)$; пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}'$[2]) и носитель формы $\hat{\omega}$ содержится в U_λ. Для формы $\hat{\omega}$ имеет место равенство

$$(\Phi_\lambda^*)^{-1}\hat{\omega}(p) = \hat{f}(\varphi_\lambda(p))\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

---

[1]) Кроме того, легко проверяется, что $h^*d = dh^*$. — *Прим. ред.*

[2]) И для $\mathscr{S}'$ выполняется соглашение об ориентациях из второго абзаца этого параграфа. — *Прим. ред.*

В этой ситуации мы и определим интеграл $\int\limits_{U_\lambda} \hat{\omega}$ формы $\hat{\omega}$ по окрестности U_λ с помощью равенства

$$\int\limits_{U_\lambda} \hat{\omega} = \int\limits_{\varphi_\lambda(U_\lambda)} \hat{f}(\varphi_\lambda(p))\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Лемма 7.5. *Если* $(U_\lambda, \varphi_\lambda), (U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathscr{S}'$ *и* $U_\lambda = U_\mu$, *то*

$$\int\limits_{U_\lambda} \hat{\omega} = \int\limits_{U_\mu} \hat{\omega}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}\colon \varphi_\lambda(U_\lambda) \to \varphi_\mu(U_\mu)$ записывается следующим образом: $(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Тогда для $\hat{\omega}$ имеет место равенство

$$(\Phi_\mu^*)^{-1}\, \hat{\omega}(p) = \hat{g}(\varphi_\mu(p))\, dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_n.$$

В силу определения

$$\int\limits_{U_\mu} \hat{\omega} = \int\limits_{\varphi_\mu(U_\mu)} \hat{g}(\varphi_\mu(p))\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_n.$$

Согласно правилу замены переменных в обычном n-кратном интеграле, правая часть последнего равенства равна

$$\int\limits_{\varphi_\lambda(U_\lambda)} \hat{g}(\varphi_\mu(p)) \left| \frac{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Но, согласно сказанному выше,

$$(\Phi_\lambda^*)^{-1}\, \Phi_\mu^*(dz_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial x_j}\, dx_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и в силу леммы 7.2

$$\hat{g}(\varphi_\mu(p)) \left| \frac{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| = \hat{f}(\varphi_\lambda(p)).$$

Поэтому $\int\limits_{U_\mu} \hat{\omega} = \int\limits_{U_\lambda} \hat{\omega}$. □

Пусть ω — дифференциальная форма на M^n степени n и класса C^r $(0 \leqslant r < s)$. Пусть, далее, $(U_i, \varphi_i) \in \mathscr{S}'$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ таковы, что $\{U_i\}$ — открытое покрытие данного компактного многообразия M^n $\left(\text{т. е. } M^n = \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i\right)$ и μ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$. Иными словами, $\mu_i\colon M^n \to \mathbf{R}$ есть C^r-функция,

$\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(p)=1$ и носитель функции μ_i содержится в U_i. Интеграл $\int\limits_{M^n} \omega$ формы ω по многообразию M^n определяется равенством

$$\int\limits_{M^n} \omega=\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{U_i} \mu_i\omega.$$

Определение интегралов из правой части этого равенства было дано выше.

Докажем, что такое определение интеграла формы ω по многообразию M^n не зависит от выбора открытого покрытия и разбиения единицы. Начнем с другого разбиения единицы, подчиненного тому же открытому покрытию $\{U_i\}$; пусть ν_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ — другое разбиение единицы. Согласно теореме 7.5, интеграл $\int\limits_{U_i \cap U_j} \mu_i\nu_j\omega$ определяется лишь самими координатными окрестностями, в силу чего

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{U_i} \mu_i\omega=\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{U_i} \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_i\nu_j\omega\right)=\sum_{i,\, j=1}^{m} \int\limits_{U_i \cap U_j} \mu_i\nu_j\omega=$$
$$=\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{U_j} \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i\nu_j\omega\right)=\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{U_j} \nu_j\omega,$$

т. е. интеграл формы ω по многообразию M^n не зависит от разбиения единицы.

Пусть, далее, $\{U'_j\}$ — другое открытое покрытие многообразия M^n, причем $(U'_j, \varphi'_j)\in\mathscr{S}'$ $(j=1, 2, \ldots, m')$ и μ'_j $(j=1, 2, \ldots, m')$ — разбиение единицы, подчиненное открытому покрытию $\{U'_j\}$. Обозначим через $\{U''_k\}$ открытое покрытие многообразия M^n, состоящее из покрытий $\{U_i\}$ и $\{U'_j\}$. Тогда $\{\mu_i\}$ и $\{\mu'_j\}$ можно, конечно, рассматривать и как разбиения единицы, подчиненные покрытию $\{U''_k\}$. Поэтому в соответствии со сказанным выше

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{U_i} \mu_i\omega=\sum_{k} \int\limits_{U''_k} \mu_k\omega=\sum_{k} \int\limits_{U''_k} \mu'_k\omega=\sum_{j=1}^{m'} \int\limits_{U'_j} \mu'_j\omega,$$

откуда и следует независимость определения интеграла от открытого покрытия.

Пусть M^n — компактное n-мерное ориентированное C^s-многообразие $(s\geqslant 1)$ и $\partial M^n\neq\varnothing$. Многообразие ∂M^n является компактным $(n-1)$-мерным C^s-многообразием без края, на котором можно ввести ориентацию, индуцированную ориентацией на M^n (§ 11). Пусть, далее, η — дифференциальная форма на M^n степени $n-1$ и класса C^r $(1 \leqslant r < s)$ и $\iota\colon \partial M^n \to M^n$ — отображение включения; тогда $\iota^*\eta$ будет дифференциальной формой на ∂M^n степени $n-1$ и класса C^r. Имеет место следующая теорема о форме η.

Теорема 7.6 (теорема Стокса).

$$\int_{\partial M^n} \iota^*\eta = \int_{M^n} d\eta.$$

Доказательство. Пусть координатные окрестности $(U_i, \varphi_i) \in \mathscr{S}'$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ таковы, что $\{U_i\}$ является открытым покрытием многообразия M^n, и пусть μ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ — разбиение единицы, подчиненное открытому покрытию $\{U_i\}$.

Докажем сначала, что если $U_i \cap \partial M^n = \varnothing$, то

$$\int_{U_i} d(\mu_i\eta) = 0.$$

Имеем

$$(*) \quad (\Phi_i^*)^{-1}\mu_i\eta = \sum_{j=1}^{n} g_j\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

и

$$(**) \quad (\Phi_i^*)^{-1} d(\mu_i\eta) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Но функции g_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ равны нулю в некоторой окрестности границы множества $\varphi_i(U_i)$; поэтому [1])

$$(***) \quad \int_{U_i} d(\mu_i\eta) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_{\varphi_i(U_i)} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 0,$$

что и требовалось.

Пусть далее $U_i \cap \partial M^n \neq \varnothing$. Докажем, что

$$\int_{U_i \cap \partial M^n} \mu_i(\iota^*\eta) = \int_{U_i} d(\mu_i\eta).$$

---

[1]) Интегрируем сначала по x_j и используем, что g_j при значениях x_j, отвечающих пределам интегрирования, равны 0. При этом удобно предварительно заключить $\varphi_i(U_i)$ в прямоугольный параллелепипед вида $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$, продолжить g_j нулем вне $\varphi_i(U_i)$ и брать интеграл по всему параллелепипеду. — *Прим. ред.*

В рассматриваемом случае $\varphi_i(U_i) \cap \mathbf{R}^{n-1} \neq \varnothing$, и, если воспользоваться выражением (*) для $(\Phi_i^*)^{-1} \mu_i \eta$, то для $\mu_i(\iota^* \eta)$ получится выражение вида

$$(\Phi_i^*)^{-1} \mu_i(\iota^* \eta) = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}.$$

Поэтому, если принять во внимание выражение (**) для $(\Phi_i^*)^{-1} d(\mu_i \eta)$, то в соотношении (***) получается, что при $j \neq n$ для функции g_j, поскольку она равна нулю в окрестности множества $\overline{\varphi_i(U_i)} - \varphi_i(U_i)$, имеет место равенство

$$\int\limits_{\varphi_i(U_i)} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 0.$$

Кроме того, поскольку

$$\int\limits_{\varphi_i(U_i)} \frac{\partial g_n}{\partial x_n} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \\ = - \int\limits_{\varphi_i(U_i) \cap \mathbf{R}^{n-1}} g_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1},$$

имеет место равенство

$$\int\limits_{U_i} d(\mu_i \eta) = (-1)^n \int\limits_{\varphi_i(U_i) \cap \mathbf{R}^{n-1}} g_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}.$$

Учитывая ориентацию на ∂M^n и соотношение

$$\int\limits_{U_i \cap \partial M^n} \mu_i(\iota^* \eta) = (-1)^n \int\limits_{\varphi_i(U_i) \cap \mathbf{R}^{n-1}} g_n(x_1, x_2, \ldots \\ \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1},$$

получим требуемое равенство.

Теперь в соответствии с доказанным имеем

$$\int\limits_{\partial M^n} \iota^* \eta = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{U_i \cap \partial M^n} \mu_i \iota^* \eta = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{U_i} d(\mu_i \eta) = \int\limits_{M^n} d\eta,$$

а это и требовалось. □

§ 28. Слоения и поля касательных плоскостей

Пусть M^n есть n-мерное C^s-многообразие ($s \geqslant 1$). Обозначим через G_p^m множество всех подпространств размерности m в касательном (векторном) пространстве $T_p(M)$ к M^n в точке $p \in M^n$. *Полем касательных m-мерных плоскостей на M^n* или

m-мерной дифференциальной системой называется всякое отображение

$$\mathscr{D}^m\colon M^n \to \bigcup_{p \in M^n} G_p^m,$$

при котором $\mathscr{D}^m(p) \in G_p^m \quad (m \leqslant n)$.

Когда $\partial M^n \neq \varnothing$, будем считать, что для $p \in \partial M^n$ плоскость $\mathscr{D}^m(p)$ является m-мерным подпространством в $T_p(\partial M^n)$.

Пусть p — произвольная точка на M^n и U — некоторая ее окрестность, в которой определены m векторных C^r-полей

$$X_1, X_2, \ldots, X_m;$$

предположим, что для каждой точки p' из U векторы $X_1(p')$, $X_2(p'), \ldots, X_m(p')$ составляют базис в пространстве $\mathscr{D}^m(p')$. Тогда говорят, что $\mathscr{D}^m$ является *C^r-полем касательных m-мерных плоскостей* $(0 \leqslant r < s)$, а поля $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *порождают* поле $\mathscr{D}^m$ на окрестности U.

Пусть $\mathscr{D}^m$ есть C^r-поле касательных m-мерных плоскостей на M^n и на многообразии M^n введена риманова метрика. В касательном пространстве $T_p(M^n)$ для каждой точки p из M^n фиксируем $(n-m)$-мерное подпространство $\overline{\mathscr{D}}^{n-m}(p)$ всех векторов, ортогональных каждому вектору из $\mathscr{D}^m(p)$. Тогда $\overline{\mathscr{D}}^{n-m} = \{\overline{\mathscr{D}}^{n-m}(p);\ p \in M^n\}$ будет C^r-полем касательных $(n-m)$-мерных плоскостей [1]). Говорят, что $\overline{\mathscr{D}}^{n-m}$ является *двойственным* к $\mathscr{D}^m$ полем касательных плоскостей.

Пусть на многообразии M^n заданы дифференциальные формы [2]) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ степени 1 и класса C^r; если взять для каждой точки $p \in M^n$ пространство $\mathscr{D}^{n-q}(p)$, такое, что

$$\mathscr{D}^{n-q}(p) = \{v \in T_p(M^n);\quad (\omega_i(p))(v) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, q)\},$$

то тем самым определится C^r-поле касательных $(n-q)$-мерных плоскостей $\mathscr{D}^{n-q} = \{\mathscr{D}^{n-q}(p);\ p \in M^n\}$ на M^n. Поле $\mathscr{D}^{n-q}$ называется *полем касательных плоскостей, определенным дифференциальными формами* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ степени 1.

В общем случае C^r-поле касательных $(n-q)$-мерных плоскостей $\mathscr{D}^{n-q}$ на многообразии M^n не является полем, определенным некоторыми дифференциальными формами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ степени 1. Однако при $q = 1$ поле $\mathscr{D}^{n-1}$ определяется дифференциальной формой степени 1 и класса C^r специального типа,

---

[1]) Здесь, разумеется, надо проверить, что в некоторой окрестности U_p любой точки p найдутся поля $Y_1, \ldots, Y_{n-m}$ класса C^r, образующие базис в $\overline{\mathscr{D}}^{n-m}(q)$ при $q \in U_p$. — *Прим. ред.*

[2]) Они предполагаются линейно независимыми (при каждом p как элементы $(T_p(M))^*$). — *Прим. ред.*

которая вводится ниже для конкретного открытого покрытия многообразия M^n.

Пусть $\{V_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ — открытое покрытие многообразия M^n и ω_σ $(\sigma \in \Sigma)$ — дифференциальная форма на V_σ степени q и класса C^r. Предположим, что при $V_\sigma \cap V_\nu \neq \varnothing$ $(\sigma,\ \nu \in \Sigma)$ на множестве $V_\sigma \cap V_\nu$ формы ω_σ и ω_ν удовлетворяют одному из равенств

$$\omega_\sigma = \omega_\nu \text{ или } \omega_\sigma = -\omega_\nu.$$

Тогда говорят, что множество $\{\omega_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ является *дифференциальной формой степени q и класса C^r на открытом покрытии* $\{V_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ многообразия M^n. Если для любых $\sigma,\ \nu \in \Sigma$ на $V_\sigma \cap V_\nu$ имеет место равенство $\omega_\sigma = \omega_\nu$, то $\{\omega_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ является дифференциальной формой[1]) степени q и класса C^r на многообразии M^n.

Пусть $\{\omega_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ — дифференциальная форма степени 1 и класса C^r на покрытии $\{V_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ и при каждом σ для любой точки $p \in V_\sigma$ обязательно $\omega_\sigma(p) \neq 0$. Для каждой точки p из M^n определим, предполагая, что $p \in V_\sigma$, множество касательных векторов

$$\mathscr{D}^{n-1}(p) = \{v \in T_p(M^n);\quad \omega_\sigma(v) = 0\};$$

множество $\mathscr{D}^{n-1}(p)$ не зависит от выбора множества V_σ, содержащего точку p, и является однозначно определенным. Поэтому $\mathscr{D}^{n-1} = \{\mathscr{D}^{n-1}(p);\ p \in M^n\}$ представляет собой C^r-поле касательных $(n-1)$-мерных плоскостей[2]). Говорят, что поле $\mathscr{D}^{n-1}$ *определено* дифференциальной формой $\{\omega_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$. Следующая лемма показывает, что возможен и обратный переход от поля к формам.

Лемма 7.7. *Пусть $\mathscr{D}^{n-1}$ есть C^r-поле касательных $(n-1)$-мерных плоскостей на многообразии M^n. Тогда на некотором открытом покрытии многообразия M^n существует дифференциальная форма степени* 1 *и класса C^r, определяющая поле $\mathscr{D}^{n-1}$.*

Доказательство. Пусть $\overline{\mathscr{D}^1}$ — двойственное к $\mathscr{D}^{n-1}$ C^r-поле касательных одномерных плоскостей. Для произвольной точки $p \in M^n$ на достаточно малой ее окрестности V_p существует такое векторное C^r-поле $X^{(p)}$, что для всякой точки $p' \in V_p$ $\|X^{(p)}(p')\| = 1$ и, кроме того, $\overline{\mathscr{D}^1}(p') = \{aX^{(p)}(p');\ a \in \mathbf{R}\}$. Далее, если $\langle\ ,\ \rangle_{p'}$ — риманова метрика, то на V_p

[1]) Точнее очевидным образом определяет такую форму. — *Прим. ред.*

[2]) Проверка того факта, что $\mathscr{D}^{n-1}$ — действительно поле класса C^r, предоставляется читателю. — *Прим. ред.*

можно определить дифференциальную форму ω_p степени 1 и класса C^r

$$(\omega_p(p'))(v) = \langle v, X^p(p')\rangle_{p'}.$$

Очевидно, построенная дифференциальная форма $\{\omega_p;\ p \in M^n\}$ класса C^r на открытом покрытии $\{V_p;\ p \in M^n\}$ многообразия M^n является искомой. $\square$

Пусть $\mathcal{F} = \{L_\alpha;\ \alpha \in A\}$ есть C^r-слоение ($r \geqslant 1$) коразмерности q на M^n. Для произвольной точки $p \in M^n$ при $p \in L_\alpha$ множество всех векторов из $T_p(M^n)$, касающихся слоя L_α в p, составляет $(n-q)$-мерное подпространство $T_p(L_\alpha)$; если каждой точке p поставить в соответствие пространство $T_p(L_\alpha)$, то на M^n будет задано C^{r-1}-поле касательных плоскостей размерности $n-q$. Обозначим его[1]) через $\mathcal{D}(\mathcal{F})$. Когда многообразие M^n имеет край, поле $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ в точке $p \in \partial M^n$ таково, что $\mathcal{D}(\mathcal{F})(p) \subset T_p(\partial M^n)$.

Обычно поле $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ принадлежит классу C^{r-1}. Однако в примере А из § 16, где C^r-слоение определяется траекториями неособого векторного C^r-поля, поле $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ принадлежит классу C^r.

Пусть $\mathcal{D}^m$ есть C^r-поле касательных m-мерных плоскостей на многообразии M^n. Если $\partial M^n \neq \varnothing$, то будем считать, что $\mathcal{D}^m(p) \subset T_p(\partial M^n)$ для каждой точки $p \in \partial M^n$. Если на M^n существует $C^{r'}$-слоение $\mathcal{F}$ коразмерности $n-m$, такое, что $\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}^m$, то поле $\mathcal{D}^m$ называется *вполне интегрируемым*. Число r' равно $r+1$ или r [20].

Докажем, что если поле $\mathcal{D}^m$ вполне интегрируемо и $\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}^m$ при некотором слоении $\mathcal{F}$, то слоение $\mathcal{F}$ единственно. Действительно, предположим, что для двух $C^{r'}$-слоений $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ коразмерности $n-m$ имеют место равенства

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_1) = \mathcal{D}(\mathcal{F}_2) = \mathcal{D}^m.$$

Пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ — расслоенная координатная окрестность для слоения $\mathcal{F}_1$; для каждой точки x из $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ определим

$$\mathcal{D}'(x) = \{(\varphi_\lambda)_*(v);\quad v \in \mathcal{D}^m(\varphi_\lambda^{-1}(x))\}.$$

Тогда $\mathcal{D}' = \{\mathcal{D}'(x);\ x \in \varphi_\lambda(U_\lambda)\}$ является C^r-полем[2]) касательных m-мерных плоскостей на $\varphi_\lambda(U_\lambda)$. Пусть $\mathcal{F}_1' = \{$*компоненты линейной связности множеств* $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$; $L_\alpha \in \mathcal{F}_1\}$; тогда

[1]) Оно называется *касательным полем* слоения $\mathcal{F}$. — *Прим. ред.*

[2]) Поскольку в выражение для $(\varphi_\lambda)_*(v)$ в терминах локальных координат входят производные $\partial\varphi_i/\partial x_j$, то непосредственно очевидно только, что $\mathcal{D}'$ — поле класса C^{r-1}. С другой стороны, из приведенного ниже в тексте описания $\mathcal{D}'$ как поля параллельных m-мерных подпространств явствует, что оно класса C^∞. — *Прим. ред.*

$\mathcal{F}'_1$ является C^r-полем касательных m-мерных плоскостей на $\varphi_\lambda(U_\lambda)$. Очевидно, $\mathcal{D}(\mathcal{F}'_1)=\mathcal{D}'$. Аналогично, если $\mathcal{F}'_2=\{$*компоненты линейной связности множеств* $\varphi_\lambda(U_\lambda\cap L'_{\alpha'})$; $L'_{\alpha'}\in\mathcal{F}_2\}$, то $\mathcal{D}(\mathcal{F}'_2)=\mathcal{D}'$. Так как $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ — расслоенная координатная окрестность, для $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет место равенство

$$\mathcal{D}'(x)=T_x(\varphi_\lambda(U_\lambda)\cap(\mathbf{R}^m\times\{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n\})).$$

Поэтому [1])

$$\mathcal{F}'_1=\mathcal{F}'_2,$$

а это в свою очередь означает, что $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ совпадают.

Следующий пример показывает, что поле касательных плоскостей не всегда бывает вполне интегрируемым.

Пример. Пусть $M^3=\mathbf{R}^3-\{0\}$, где 0 — начало координат в $\mathbf{R}^3$. На M^3 определена дифференциальная форма θ степени 1 и класса C^∞, которая в координатах пространства $\mathbf{R}^3$ записывается в виде $\theta=x\,dy+y\,dz+z\,dx$. Так как форма θ на многообразии M^3 не обращается в нуль, в соответствии со сказанным выше на M^3 оказывается определенным C^∞-поле $\mathcal{D}^2$ касательных двумерных плоскостей.

Докажем, что поле $\mathcal{D}^2$ не является вполне интегрируемым. Предположим, что $\mathcal{D}^2$ вполне интегрируемо. Тогда на M^3 существует C^∞-слоение $\mathcal{F}$ коразмерности 1, такое, что $\mathcal{D}(\mathcal{F})=\mathcal{D}^2$. Пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ — отмеченная расслоенная координатная окрестность относительно $\mathcal{F}$, где $\varphi_\lambda\colon U_\lambda\to\,]-1, 1[^3$, и пусть $\hat\pi\colon\,]-1, 1[^3\to\,]-1, 1[$ — проекция из § 18. Пусть $g=\hat\pi\circ\varphi_\lambda$; тогда при $-1<t<1$ прообраз $g^{-1}(t)$ принадлежит одному слою слоения $\mathcal{F}$. Следовательно, в силу теоремы 7.3 (iii) для $v\in\mathcal{D}^2(p)$ $(p\in U_\lambda)$ имеет место равенство $dg(v)=0$. Но тогда на U_λ имеет место равенство

$$\theta=h\,dg,$$

где $h\colon U_\lambda\to\mathbf{R}$ — некоторая C^∞-функция, всюду отличная от нуля. Поэтому на U_λ

$$d\theta=dh\wedge dg=\frac{dh}{h}\wedge h\,dg=\frac{dh}{h}\wedge\theta$$

и

$$\theta\wedge d\theta=\theta\wedge\frac{dh}{h}\wedge\theta=0.$$

[1]) Легко видеть, что если связное m-мерное многообразие $V\subset\mathbf{R}^n$ таково, что в каждой его точке x касательное пространство T_xV параллельно $\mathbf{R}^m$, то V целиком лежит в некотором $\mathbf{R}^m\times\{x_{m+1}, \ldots, x_n\}$. Действительно, вдоль любой гладкой кривой $x(t)$ на V будет $dx_{m+1}/dt=0, \ldots, dx_n/dt=0$. — *Прим. ред.*

Однако непосредственное вычисление для $\theta \wedge d\theta$ дает

$$\theta \wedge d\theta = (x+y+z)\, dx \wedge dy \wedge dz,$$

т. е. $\theta \wedge d\theta \neq 0$, в чем и состоит противоречие. Тем самым поле $\mathscr{D}^2$ не является вполне интегрируемым.

Приводимая ниже теорема Фробениуса описывает условия, при которых C^r-поле касательных m-мерных плоскостей является вполне интегрируемым.

Пусть X, Y — векторные C^r-поля на многообразии M^n ($r \geqslant 1$). На координатной окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ многообразия M^n поля X, Y описываются равенствами

$$\Phi_\lambda(X(p)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi_\lambda(p)) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\Phi_\lambda(Y(p)) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\varphi_\lambda(p)) \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (p \in U_\lambda).$$

Участвующие в этих равенствах a_i, b_i являются C^r-функциями на $\varphi_\lambda(U_\lambda)$. Определим с помощью X, Y векторное C^{r-1}-поле $[X, Y]$ на U_λ, положив для $p \in U_\lambda$

$$[X, Y](p) = \Phi_\lambda^{-1}\left(\sum_i \left(\sum_j \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)(\varphi_\lambda(p))\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Из определения легко усмотреть, что поле $[X, Y]$, определенное для других координатных окрестностей $(U_{\lambda'}, \varphi_{\lambda'})$, будет таким же[1]). По этой причине поле $[X, Y]$, определенное на каждой координатной окрестности, приводит к векторному C^{r-1}-полю $[X, Y]$ на многообразии M^n. Поле $[X, Y]$ называется *скобкой* (*скобкой Ли*, а также *коммутатором*) полей X и Y. Непосредственно из определения выводятся следующие свойства скобки:

(i) $[X, X] = 0, \quad [X, Y] = -[Y, X]$;

(ii) для всякого векторного C^r-поля Z на M^n, $r \geqslant 2$, имеет место равенство

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \text{ (тождество Якоби).}$$

Пусть $\mathscr{D}^m$ есть C^r-поле касательных m-мерных плоскостей на M^n. Если у каждой точки p из M^n существует окрестность U,

---

[1]) Пользуясь локальными координатами, легко найти, что для любой функции f класса C^2

$$D_X D_Y f - D_Y D_X f = D_{[X, Y]} f.$$

Но левая часть не зависит от локальных координат. Приводимые ниже свойства (i), (ii) также легко следуют из этой формулы. — *Прим. ред.*

на которой заданы m векторных C^r-полей $X_1, X_2, \ldots, X_m$, порождающих $\mathscr{D}^m$ и таких, что

$$[X_i, X_j](p) \in \mathscr{D}^m(p) \qquad (p \in U,\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

то поле $\mathscr{D}^m$ называется *инволютивным* [1]).

Теорема 7.8 (теорема Фробениуса; первая формулировка). *Для того чтобы C^r-поле $\mathscr{D}^m$ касательных m-мерных плоскостей на n-мерном C^s-многообразии M^n было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было инволютивным. Предполагается, что $r \geqslant 2$.*

Доказательство. Начнем со случая вполне интегрируемого поля $\mathscr{D}^m$. Для некоторого $C^{r'}$-слоения $\mathscr{F}$ (r' равно $r+1$ или r) коразмерности $n-m$ на M^n имеет место равенство $\mathscr{D}^m = \mathscr{D}(\mathscr{F})$. Пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ — отмеченная расслоенная координатная окрестность относительно слоения $\mathscr{F}$ и $\varphi_\lambda(U_\lambda) \ni \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Определим на U_λ векторные C^r-поля $X_1, X_2, \ldots, X_m$ с помощью равенств [21]

$$\Phi_\lambda(X_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Тогда $X_1, X_2, \ldots, X_m$ порождают поле $\mathscr{D}^m$ и $[X_i, X_j](p) = 0$. Таким образом, поле $\mathscr{D}^m$ инволютивно.

Обратно, пусть $\mathscr{D}^m$ — инволютивное поле. Это означает, что в некоторой окрестности U произвольной точки p поле $\mathscr{D}^m$ порождается m векторными C^r-полями $X_1, X_2, \ldots, X_m$ и $[X_i, X_j](p) \in \mathscr{D}^m(p)$ $(p \in U)$. Нам достаточно установить, что $\mathscr{D}^m$ является вполне интегрируемым локально, т. е. показать, что поле $\mathscr{D}^m$ вполне интегрируемо на некоторой координатной окрестности U_λ, $p \in U_\lambda \subset U$. Действительно, если на окрестностях U_λ и U_μ найдены такие C^r-слоения $\mathscr{F}_\lambda$ и $\mathscr{F}_\mu$ коразмерности $n-m$, что

$$\mathscr{D}(\mathscr{F}_\lambda) = \mathscr{D}^m \mid U_\lambda, \quad \mathscr{D}(\mathscr{F}_\mu) = \mathscr{D}^m \mid U_\mu,$$

то при $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ слоения $\mathscr{F}_\lambda$ и $\mathscr{F}_\mu$ будут совпадать на $U_\lambda \cap U_\mu$, а потому на M^n окажется заданным нужное C^r-слоение коразмерности $n-m$.

В случае $m=1$, как показано в примере A из § 16, можно построить векторное поле X_1 и с помощью его траекторий определить на U_λ $C^{r'}$-слоение $\mathscr{F}_\lambda$, и, поскольку будет иметь

---

[1]) Отметим сразу же, что поля $X_1, \ldots, X_r$ здесь могут быть и класса C^1 и что если условия $[X_i, X_j] \in \mathscr{D}^m$ выполняются при каком-то выборе гладких полей $X_1, \ldots, X_m$, порождающих $\mathscr{D}^m$, то они выполняются и при любом выборе таких полей. Вот более инвариантная формулировка: если поля X, Y гладкие и $X, Y \in \mathscr{D}^m$, то и $[X, Y] \in \mathscr{D}^m$. — *Прим. ред.*

место равенство $\mathscr{D}^1=\mathscr{D}(\mathscr{F}_\lambda)$, поле $\mathscr{D}^1$ будет вполне интегрируемым.

Проведем теперь индукцию по m и докажем теорему в предположении, что инволютивные поля $\mathscr{D}^{m-1}$ вполне интегрируемы.

Вместо $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ возьмем такую новую координатную окрестность $(U_{\bar\lambda}, \varphi_{\bar\lambda})$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, что

$$\varphi_{\bar\lambda}(p)=(0, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\in\varphi_{\bar\lambda}(U_{\bar\lambda})\subset \mathbf{R}_+^n$$

и

$$\Phi_{\bar\lambda}(X_1(\bar p))=\frac{\partial}{\partial x_1} \qquad (\bar p\in U_{\bar\lambda})$$

(т. е. $\varphi_{\bar\lambda}$ переводит траектории поля X_1 в прямые, параллельные оси x_1). Тогда поля $X_2, X_3, \ldots, X_m$ можно заменить на такие поля $X_2', X_3', \ldots, X_m'$, что $X_1, X_2', X_3', \ldots, X_m'$ будут C^r-полями, порождающими поле $\mathscr{D}^m$, и

$$\Phi_{\bar\lambda}(X_i'(p))=\sum_{j=2}^{n} a_{ij}(\varphi_{\bar\lambda}(\bar p))\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (i=2, 3, \ldots, m).$$

Фиксируем в $U_{\bar\lambda}$ $(n-1)$-мерное подмногообразие

$$W=\varphi_{\bar\lambda}^{-1}(\{(0, x_2, x_3, \ldots, x_n)\in\varphi_{\bar\lambda}(U_{\bar\lambda})\});$$

тогда $p\in W$ и поля $X_2', X_3', \ldots, X_m'$ оказываются принадлежащими полю $T(W)$ касательными C^r-полями на W, причем

$$X_2'(p'), X_3'(p'), \ldots, X_m'(p') \qquad (p'\in W)$$

являются различными векторами. Следовательно, поля X_2', $X_3', \ldots, X_m'$ определяют на W C^r-поле $\mathscr{D}^{m-1}$ касательных $(m-1)$-мерных плоскостей. Для $p'\in W$ имеет место включение $[X_i', X_j'](p')\in\mathscr{D}^m(p')$; поэтому [1]) и

$$[X_i', X_j'](p')\in\mathscr{D}^{m-1}(p').$$

Следовательно, поле $\mathscr{D}^{m-1}$ инволютивно. В силу предположения индукции на W поле $\mathscr{D}^{m-1}$ вполне интегрируемо и, следовательно, существует $C^{r'}$-слоение $\mathscr{F}'$ коразмерности $n-m$ на W, такое, что $\mathscr{D}(\mathscr{F}')=\mathscr{D}^{m-1}$.

Пусть $(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'})$ — отмеченная расслоенная координатная окрестность на W относительно слоения $\mathscr{F}'$ и $p\in U'_{\lambda'}$; рассмотрим образ при $\varphi'_{\lambda'}$ связной компоненты множества $U'_{\lambda'}\cap L'_{\alpha'}$, где $L'_{\alpha'}$ — слой слоения $\mathscr{F}'$:

$$\{(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\in\varphi'_{\lambda'}(U'_{\lambda'});\ y_m=c_m, y_{m+1}=c_{m+1}, \ldots, y_{n-1}=c_{n-1}\}.$$

---

[1]) Поскольку в то же время $[X_i', X_j'](p')\in T_{p'}W$. — *Прим. ред.*

$U'_{\lambda'} \subset W \subset U_{\bar{\lambda}}$, так что для точек $U'_{\lambda'}$ определены их образы при отображениях $\varphi_{\bar{\lambda}}$ и $\varphi'_{\lambda'}$ (две разные системы координат). При переходе от одних к другим устанавливается некоторое соответствие между $\varphi_{\bar{\lambda}}(U'_{\lambda'})$ и $\varphi'_{\lambda'}(U'_{\lambda'})$; при этом y_i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ являются C^r-функциями от $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Если положить[1])

$$z_1 = x_1, \; z_{i+1} = y_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1),$$

то

$$\left| \frac{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} (\varphi_{\bar{\lambda}}(p)) \right| \neq 0.$$

Поэтому в окрестности точки p можно заменить координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Иными словами, можно выбрать координатную окрестность $(U_\mu, \varphi_\mu) \in \mathcal{S}$ так, чтобы $p \in U_\mu \subset U_\lambda$ и для каждой точки $p' \in U_\mu$

$$\varphi_\mu(p') = (z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Возьмем ограничения на U_μ векторных полей $X_1, X'_2, X'_3, \ldots, X'_m$, которые обозначим через $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, и разложим их по базису $\partial/\partial z_j$ так, что для $p' \in U_\mu$

$$\Phi_\mu(Y_i(p')) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\varphi_\mu(p')) \frac{\partial}{\partial z_j} \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

В силу выбора $z_1, z_2, \ldots, z_n$ для $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$

$$b_{11} = 1, \qquad b_{1j} = 0 \quad (j = 2, 3, \ldots, n).$$

Согласно предположению, существуют C^{r-1}-функции c_i^j $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ на U_μ, такие, что

$$[Y_1, Y_i](p') = \sum_{j=1}^{m} c_i^j(p') Y_j(p').$$

В соответствии с определением скобки

$$\Phi_\mu([Y_1, Y_i](p')) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_j \left(b_{1j} \frac{\partial b_{il}}{\partial z_j} - b_{ij} \frac{\partial b_{1l}}{\partial z_j} \right) (\varphi_\mu(p')) \right) \frac{\partial}{\partial z_l} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial b_{il}}{\partial z_1} (\varphi_\mu(p')) \frac{\partial}{\partial z_l}.$$

---

[1]) Здесь y_i — те самые функции от $x_2, \ldots, x_n$, о которых только что шла речь. Поэтому, в частности, $\partial/\partial z_1 = \partial/\partial x_1$. — *Прим. ред.*

Однако

$$\Phi_\mu([Y_1, Y_i](p')) = \sum_{j=1}^{m} c_i^j(p')\,\Phi_\mu(Y_j(p')) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_i^j(p')\, b_{jl}(\varphi_\mu(p'))\right)\frac{\partial}{\partial z_l}.$$

Поэтому для $b_{1l}, b_{2l}, \ldots, b_{ml}$ получаем дифференциальные уравнения первого порядка

$$\frac{\partial b_{il}}{\partial z_1}(\varphi_\mu(p')) = \sum_{j=1}^{m} c_i^j(p')\, b_{jl}(\varphi_\mu(p')) \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Для $l=m+1, m+2, \ldots, n$ в силу определения $(y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_{n-1})$ справедливы равенства

$$b_{il}(0, z_2, z_3, \ldots, z_n) = 0.$$

Следовательно, при фиксированных $z_2, z_3, \ldots, z_n$ в силу единственности решения дифференциального уравнения должны иметь место равенства

$$b_{il} = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, m;\ l=m+1, m+2, \ldots, n).$$

Это означает, что $\Phi_\mu(Y_1), \Phi_\mu(Y_2), \ldots, \Phi_\mu(Y_m)$ на $\varphi_\mu(U_\mu)$ выражаются через $\partial/\partial z_1, \partial/\partial z_2, \ldots. \partial/\partial z_m$. Следовательно, если на множестве U_μ взять C^r-слоение $\mathcal{F}_\mu$ коразмерности $n-m$, такое, что

$$\mathcal{F}_\mu = \{\varphi_\mu^{-1}(z_1, z_2, \ldots, z_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots, c_n);$$
$$c_{m+i} \text{— константы},\ i=1, 2, \ldots, n-m\};$$

то $\mathcal{D}(\mathcal{F}_\mu) = \mathcal{D}^m \mid U_\mu$. Тем самым доказано, что поле $\mathcal{D}^m$ вполне интегрируемо. □

Для того чтобы сформулировать теорему 7.8 в терминах дифференциальных форм — это сделано в теореме 7.10,— необходима следующая лемма.

Лемма 7.9. *Если ω — дифференциальная C^r-форма степени 1 на многообразии M^n и X, Y — векторные C^r-поля на M^n, то*

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

Доказательство. Установим справедливость этого равенства в произвольной точке p. Пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ — координатная окрестность и $p \in U_\lambda$; тогда

$$(\Phi_\lambda^*)^{-1}\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_i, \qquad \Phi_\lambda(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\Phi_\lambda(Y) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где f_i, a_i, b_i суть C^r-функции на $\varphi_\lambda(U_\lambda)$. В силу теоремы 7.3 (iii)

$$d\omega(p)(X(p),\ Y(p)) = \left(\sum_{i,\ j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\varphi_\lambda(p))\, dx_j \wedge \right.$$

$$\left. \wedge\, dx_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi_\lambda(p)) \frac{\partial}{\partial x_i},\ \sum_{i=1}^{n} b_i(\varphi_\lambda(p)) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \sum_{j,\ i} a_j b_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)(\varphi_\lambda(p))$$

(см. лемму 7.1). Однако

$$X(\omega(Y))(p) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i f_i\right)\right)(\varphi_\lambda(p)) =$$

$$= \sum_{i,\ j}\left(a_j f_i \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + a_j b_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(\varphi_\lambda(p)),$$

и аналогично

$$Y(\omega(X))(p) = \sum_{i,\ j}\left(b_j f_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + b_j a_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(\varphi_\lambda(p)).$$

Наконец,

$$\omega(p)([X,\ Y](p)) = \sum_{i=1}^{n} f_i \left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\right)(\varphi_\lambda(p)) =$$

$$= \sum_{i,\ j}\left(a_j f_i \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j f_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)(\varphi_\lambda(p)).$$

Сравнивая полученные выражения, мы и получаем требуемый результат. □

Теорема 7.10 (теорема Фробениуса; вторая формулировка). *Пусть $\mathcal{D}^{n-q}$ есть C^r-поле касательных $(n-q)$-мерных плоскостей на n-мерном C^s-многообразии M^n, $r \geqslant 2$. Для того чтобы* *поле $\mathscr{D}^{n-q}$ было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки p многообразия M^n в некоторой ее окрестности U существовали дифференциальные C^r-формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ степени 1, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) *Формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ определяют поле касательных плоскостей $\mathscr{D}^{n-q} \mid U$.*

(ii) *Для форм $d\omega_i$ $(i=1, 2, \ldots, q)$ имеются такие дифференциальные C^{r-1}-формы θ_{ij} $(i, j=1, 2, \ldots, q)$ на U степени 1, что*

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{q} \omega_j \wedge \theta_{ij} \qquad (i=1, 2, \ldots, q).$$

Доказательство. Установим сначала достаточность этих условий. Пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$—координатная окрестность на M^n и $p \in U_\lambda \subset U$. Фиксируем на U_λ дифференциальные C^r-формы $\omega_{q+1}, \omega_{q+2}, \ldots, \omega_n$ степени 1, такие, что $\omega_1(p'), \omega_2(p'), \ldots \ldots, \omega_n(p')$ составляют базис в пространстве $(T_{p'}(M^n))^*$; пусть для векторных C^r-полей $X_1, X_2, \ldots, X_n$ на U_λ базис $(\Phi_\lambda^*)^{-1}(\omega_1(p')), (\Phi_\lambda^*)^{-1}(\omega_2(p')), \ldots, (\Phi_\lambda^*)^{-1}(\omega_n(p'))$ является двойственным к $\Phi_\lambda(X_1(p')), \Phi_\lambda(X_2(p')), \ldots, \Phi_\lambda(X_n(p'))$ (здесь $p' \in U_\lambda$). На окрестности U_λ поля $X_{q+1}, X_{q+2}, \ldots, X_n$ порождают поле $\mathscr{D}^{n-q}$. Так как на U_λ справедливы равенства $\omega_i(X_j)=\delta_{ij}$, то в силу леммы 7.9 на окрестности U_λ имеют место соотношения

$$d\omega_i(X_j, X_l) = -\omega_i([X_j, X_l]) \quad (i=1, 2, \ldots, q;\ j, l=q+1, q+2, \ldots, n).$$

Из (ii) следует, что левые части этих соотношений равны нулю. Следовательно,

$$-\omega_i([X_j, X_l])=0 \quad (i=1, 2, \ldots, q;\ j, l=q+1, q+2, \ldots, n);$$

это означает, что поле $\mathscr{D}^{n-q}$ инволютивно на U_λ, а потому и на всем многообразии M^n. В силу же теоремы 7.8 это означает, что поле $\mathscr{D}^{n-q}$ вполне интегрируемо.

Покажем теперь, что условия теоремы и необходимы [1]). Так как поле $\mathscr{D}^{n-q}$ предполагается вполне интегрируемым, на многообразии M^n существует $C^{r'}$-слоение $\mathscr{F}$ коразмерности q, такое, что $\mathscr{D}(\mathscr{F})=\mathscr{D}^{n-q}$ (число r' равно $r+1$ или r). Пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$—расслоенная координатная окрестность относитель-

[1]) Будет доказано, что любые формы ω_i, (локально) определяющие $D^{n-q} \mid U$, удовлетворяют (ii). — *Прим. ред.*

но $\mathcal{F}$, $p \in U_\lambda$, и для слоя L_α слоения $\mathcal{F}$ через

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \varphi_\lambda(U_\lambda);\ x_{n-q+i} = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, q)\}$$

обозначена связная компонента множества $\varphi_\lambda(L_\alpha \cap U_\lambda)$. Следовательно, формы ω_i определяют на $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ C^r-функции c_{ij}, такие, что

$$(\Phi_\lambda^*)^{-1}\omega_i = \sum_{j=n-q+1}^{n} c_{ij}\,dx_j \quad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Так как формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ линейно независимы, на $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ можно обратить полученную систему равенств и с помощью соответствующих C^r-функций e_{ij} записать

$$dx_j = \sum_{i=1}^{q} e_{ji}(\Phi_\lambda^*)^{-1}\omega_i \quad (j = n-q+1, n-q+2, \ldots, n).$$

В силу сказанного выше

$$(\Phi_\lambda^*)^{-1}d\omega_i = \sum_{j=n-q+1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial c_{ij}}{\partial x_l}\,dx_l\right)\wedge dx_j =$$

$$= \sum_{j=n-q+1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{q} e_{jk}(\Phi_\lambda^*)^{-1}\omega_k\right)\wedge\left(-\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial c_{ij}}{\partial x_l}\,dx_l\right),$$

что и требовалось доказать. □

Согласно теореме Фробениуса, для инволютивного C^r-поля $\mathcal{D}^m$ касательных плоскостей существует слоение $\mathcal{F}$ коразмерности $n-m$, такое, что $\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}^m$; обычно это C^r-слоение. Однако слои L_α слоения $\mathcal{F}$ являются C^{r+1}-многообразиями (ср. § 16, пример A).

В случае $q = 1$ теорема 7.10 приводит к следующей теореме.

Теорема 7.11. *Пусть M^n — компактное C^s-многообразие, а $\mathcal{D}^{n-1}$ есть C^r-поле касательных $(n-1)$-мерных плоскостей $(r \geqslant 2)$. Пусть, далее, $\{V_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ — открытое покрытие многообразия M^n и ω_σ $(\sigma \in \Sigma)$ — дифференциальные C^r-формы степени* 1, *определяющие поле $\mathcal{D}^{n-1}$* (лемма 7.7). *Тогда, для того чтобы поле $\mathcal{D}^{n-1}$ было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы на M^n существовала такая дифференциальная C^{r-1}-форма θ степени* 1, *что на каждом множестве V_σ*

$$d\omega_\sigma = \omega_\sigma \wedge \theta.$$

Это условие эквивалентно следующему:

$$d\omega_\sigma \wedge \omega_\sigma = 0 \qquad (\sigma \in \Sigma).$$

Доказательство. Достаточность условия заключена в теореме 7.10. Поэтому пусть $\mathscr{D}^{n-1}$ — вполне интегрируемое поле; построим дифференциальную форму θ. Согласно теореме 7.10, существует открытое покрытие $\{U_i;\ i=1, 2, \ldots, u\}$ многообразия M^n, такое, что на U_i можно задать дифференциальную C^{r-1}-форму θ_i степени 1 $(i=1, 2, \ldots, u)$, удовлетворяющую на $V_\sigma \cap U_i$ равенству[1])

$$d\omega_\sigma = \omega_\sigma \wedge \theta_i \qquad (\sigma \in \Sigma).$$

Пусть μ_i $(i=1, 2, \ldots, u)$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$, и

$$\theta = \sum_{i=1}^{u} \mu_i \theta_i.$$

Тогда

$$\omega_\sigma \wedge \theta = \sum_{i=1}^{u} \omega_\sigma \wedge \mu_i \theta_i = \sum_{i=1}^{u} \mu_i (\omega_\sigma \wedge \theta_i) = \sum_{i=1}^{u} \mu_i \, d\omega_\sigma = d\omega_\sigma.$$

Далее, если уж существует форма θ, для которой $d\omega_\sigma = \omega_\sigma \wedge \theta$, то $d\omega_\sigma \wedge \omega_\sigma = 0$. Обратно, пусть $d\omega_\sigma \wedge \omega_\sigma = 0$ $(\sigma \in \Sigma)$; тогда на множестве V_σ существует форма θ_σ, такая, что

$$d\omega_\sigma = \omega_\sigma \wedge \theta_\sigma.$$

Но тогда описанным выше способом из форм θ_σ $(\sigma \in \Sigma)$ можно построить дифференциальную C^{r-1}-форму θ степени 1, удовлетворяющую равенству $d\omega_\sigma = \omega_\sigma \wedge \theta$. □

[1]) Подробнее: для каждого σ существуют такое открытое покрытие $\{U_{\sigma,\alpha}\}$ множества V_σ и такие заданные на $U_{\sigma,\alpha}$ 1-формы $\theta_{\sigma,\alpha}$, что $d\omega_\sigma = \omega_\sigma \wedge \theta_{\sigma,\alpha}$ на $U_{\sigma,\alpha}$. Если при этом $V_\nu \cap U_{\sigma,\alpha} \neq \varnothing$, то на этом пересечении $d\omega_\nu = \omega_\nu \wedge \theta_{\sigma,\alpha}$, поскольку $\omega_\nu = \pm\omega_\sigma$ на $V_\nu \cap V_\sigma$. Выбрав из открытого покрытия $\{U_{\sigma,\alpha}\}$ (со всевозможными σ, α) многообразия M^n конечное подпокрытие и обозначив его элементы короче через U_i и соответствующие $\theta_{\sigma,\alpha}$ — через θ_i, получим такие U_i и θ_i, как в тексте.— *Прим. ред.*

Глава 8

КОБОРДИЗМ СЛОЕНИЙ

§ 29. Кобордизм слоений

Понятие кобордизма было введено в теорию C^r-многообразий Л. С. Понтрягиным, В. А. Рохлиным и Р. Томом в 1950 г. при рассмотрении вопросов тополого-геометрической классификации и с тех пор играет важную роль. Кроме того, понятие кобордизма полезно в многочисленных конструкциях. Мы введем его для C^r-многообразий M, на которых задано слоение $\mathcal{F}$ (в этом случае будем писать $(M, \mathcal{F})$[1]).

Пусть M_1^n, M_2^n суть n-мерные C^s-многообразия, на которых заданы C^r-слоения $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ коразмерности q соответственно (здесь $0 \leqslant q \leqslant n$, $0 \leqslant r \leqslant s$). Если при некотором C^r-диффеоморфизме

$$f\colon M_1^n \longrightarrow M_2^n$$

образ $f(L_\alpha)$ любого слоя L_α слоения $\mathcal{F}_1$ является слоем слоения $\mathcal{F}_2$, то говорят, что пары $(M_1^n, \mathcal{F}_1)$ и $(M_2^n, \mathcal{F}_2)$ *C^r-диффеоморфны* и пишут

$$(M_1^n, \mathcal{F}_1) = (M_2^n, \mathcal{F}_2).$$

Отображение f из $(M_1^n, \mathcal{F}_1)$ в $(M_2^n, \mathcal{F}_2)$ в этом случае называется *C^r-диффеоморфизмом, сохраняющим слоение;* в такой ситуации пишут

$$f\colon (M_1^n, \mathcal{F}_1) \longrightarrow (M_2^n, \mathcal{F}_2).$$

Если f есть C^r-диффеоморфизм, сохраняющий слоение, и $L'_{\alpha'}$ — произвольный слой слоения $\mathcal{F}_2$, то $f^{-1}(L'_{\alpha'})$ — слой слоения $\mathcal{F}_1$.

Если M_1^n, M_2^n — ориентированные многообразия и существует C^r-диффеоморфизм $f\colon M_1^n \longrightarrow M_2^n$, сохраняющий ориентацию и переводящий каждый слой слоения $\mathcal{F}_1$ в слой слоения $\mathcal{F}_2$ так, что $(M_1^n, \mathcal{F}_1) = (M_2^n, \mathcal{F}_2)$, то говорят, что $(M_1^n, \mathcal{F}_1)$ и $(M_2^n, \mathcal{F}_2)$ *C^r-диффеоморфны*[2]).

---

[1]) Раньше мы писали просто $\mathcal{F}$, но тогда M на протяжении довольно длинных рассуждений (даже целых глав) могло считаться фиксированным. Теперь же постоянно придется рассматривать (и различать между собой) несколько различных M.— *Прим. ред.*

[2]) Таким образом, из формулировки не видно, подразумевается ли сохранение ориентации (как в этом абзаце) или нет (как в предыдущем). Поэтому надо быть внимательным к контексту.— *Прим. ред.*

Для того чтобы определить кобордизм слоений, нам нужно будет немного изменить (по сравнению с § 16) определение слоения на многообразии с краем. А именно, пусть M^n есть C^s-многообразие с краем; если в M^n задано семейство $\mathscr{F} = \{L_\alpha;\ \alpha \in A\}$ линейно связных подмножеств L_α, обладающих следующими тремя свойствами $(\hat{\mathscr{F}}_{\rm I})$, $(\hat{\mathscr{F}}_{\rm II})$, $(\hat{\mathscr{F}}_{\rm III})$, то $\mathscr{F}$

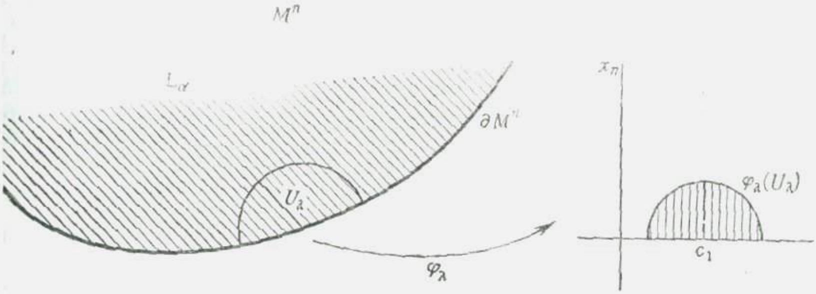


Рис. 8.1.

называется *C^r-слоением на M^n коразмерности q, трансверсальным к его краю.*

$(\hat{\mathscr{F}}_{\rm I})$ Если $\alpha,\ \beta \in A$ и $\alpha \neq \beta$, то $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$.

$(\hat{\mathscr{F}}_{\rm II})$ $\bigcup\limits_{\alpha \in A} L_\alpha = M^n$.

$(\hat{\mathscr{F}}_{\rm III})$ Пусть p — произвольная точка из M^n, $p \in U_\lambda$, $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}^{(r)}$ и $\varphi_\lambda\colon U_\lambda \to \mathbf{R}^n_+$ (по поводу системы окрестностей $\mathscr{S}^{(r)}$ см. § 16). Тогда если $U_\lambda \cap L_\alpha \neq \varnothing$, где $\alpha \in A$, то каждая компонента (линейной) связности множества $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$ может быть записана в виде

$$\{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in \varphi_\lambda(U_\lambda);\ x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \ldots,\ x_q = c_q\}$$

(см. рис. 8.1). Здесь для каждой компоненты связности c_1, c_2, $\ldots$, c_q — константы.

Так же как в § 16, мы будем употреблять в случае слоения на многообразии символ $(M^n, \mathscr{F})$, называть его *слоями* множества L_α, а *расслоенными координатными окрестностями* — пары $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$.

Пусть $(M^n, \mathscr{F})$ есть C^r-слоение $\mathscr{F}$ коразмерности q на многообразии M^n, трансверсальное к его краю. Если для некоторого слоя L_α слоения $\mathscr{F}$ пересечение $L_\alpha \cap \partial M^n$ непусто, то L_α и ∂M^n пересекаются трансверсально, и если $p \in L_\alpha \cap \partial M^n$ и $p \in U_\lambda$ при расслоенной координатной окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, то связными компонентами множества $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha \cap \partial M^n)$ являются $(n-q-1)$-мерные C^r-подмногообразия множества $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap \partial M^n)$ (рис. 8.1). Далее, пусть

$$\partial\mathcal{F} = \{\text{все компоненты линейной связности множества } L_\alpha \cap \partial M^n;\ \alpha \in A\};$$

тогда элементами множества $\partial\mathcal{F}$ являются подмножества компонент линейной связности края ∂M^n; очевидно, для $\partial\mathcal{F}$ выполняются условия $(\mathcal{F}_{\rm I})$, $(\mathcal{F}_{\rm II})$ из § 16, сформулированные там для ∂M^n. Положим $\partial\mathcal{S}^{(r)} = \{(U_\lambda \cap \partial M^n, \varphi_\lambda | (U_\lambda \cap \partial M^n)); (U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{S}^{(r)}\}$ и рассмотрим пару $(\partial M^n, \partial\mathcal{S}^{(r)})$. Если $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{S}^{(r)}$ — расслоенная координатная окрестность относительно $\mathcal{F}$ и $(U_\lambda \cap \partial M^n) \cap (L_\alpha \cap \partial M^n) \neq \varnothing$, то связные компоненты множества $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha \cap \partial M^n)$ имеют вид

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \varphi_\lambda(U_\lambda \cap \partial M^n);\ x_1 = c_1,\ x_2 = c_2, \ldots, x_q = c_q\}.$$

Следовательно, $\partial\mathcal{F}$ является C^r-слоением коразмерности q на $(n-1)$-мерном многообразии без края ∂M^n.

Таким образом, по $(M^n, \mathcal{F})$ можно построить $(\partial M^n, \partial\mathcal{F})$; если многообразие M^n ориентируемо, то, следуя § 11, можно задать соответствующую ориентацию и на ∂M^n.

Пусть M_1^n, M_2^n — ориентированные замкнутые n-мерные C^s-многообразия и $(M_1^n, \mathcal{F}_1)$, $(M_2^n, \mathcal{F}_2)$ суть C^r-слоения коразмерности q на M_1^n, M_2^n. Предположим, что существует $(n+1)$-мерное ориентированное компактное C^s-многообразие W^{n+1} и C^r-слоение $(W^{n+1}, \hat{\mathcal{F}})$ на нем коразмерности q, трансверсальное к его краю, такие, что

$$\partial W^{n+1} = M_1^n \cup (-M_2^n)$$

(через $-M_2^n$ обозначается многообразие M_2^n с ориентацией, противоположной к исходной) и

$$(\partial W^{n+1}, \partial\hat{\mathcal{F}}) = (M_1^n, \mathcal{F}_1) \cup (-M_2^n, \mathcal{F}_2).$$

Тогда слоения $(M_1^n, \mathcal{F}_1)$ и $(M_2^n, \mathcal{F}_2)$ называются *кобордантными*, а слоение $(W^{n+1}, \hat{\mathcal{F}})$ — *кобордизмом* слоений $(M_1^n, \mathcal{F}_1)$ и $(M_2^n, \mathcal{F}_2)$ [1]).

Легко заметить, что отношение кобордантности на множестве n-мерных C^s-многообразий с заданными на них C^r-слоениями коразмерности q является отношением эквивалент-

---

[1]) В устной речи $(W^{n+1}, \hat{\mathcal{F}})$ чаще всего называют *пленкой*, соединяющей $(M_i^n, \mathcal{F}_i)$.

Если необходимо подчеркнуть, что учитывалась ориентация, то говорят об ориентированной кобордантности, ориентированном кобордизме и (ниже) о классах ориентированных кобордизмов.— *Прим. ред.*

ности[1]). Классы этой эквивалентности называются *классами кобордизма* (или *кобордизмов*); множество всех классов кобордизма слоений будет обозначаться через $\mathcal{F}\Omega^r_{n,q}$ и, если $(M^n_1, \mathcal{F})$ — представитель такого класса, то этот класс будет обозначаться через $[(M^n_1, \mathcal{F})]$.

Если на $S^q \times S^{n-q}$ определить слоение $\mathcal{F}_0 = \{\{x\} \times S^{n-q}; x \in S^q\}$, то $(S^q \times S^{n-q}, \mathcal{F}_0)$ будет C^r-слоением расслоения коразмерности q на $S^q \times S^{n-q}$. Далее, если для $S^q \times D^{n-q+1}$ положить $\hat{\mathcal{F}}_0 = \{\{x\} \times D^{n-q+1}; x \in S^q\}$, то пара $(S^q \times D^{n-q+1}, \hat{\mathcal{F}}_0)$ будет C^r-слоением коразмерности q, трансверсальным к краю; если считать, что $S^q \times S^{n-q}$ и $S^q \times D^{n-q+1}$ ориентированы согласованным образом, то[2])

$$(\partial (S^q \times D^{n-q+1}), \partial \hat{\mathcal{F}}_0) = (S^q \times S^{n-q}, \mathcal{F}_0).$$

Далее, определим для любых двух классов кобордизма

$$[(M^n_1, \mathcal{F}_1)], [(M^n_2, \mathcal{F}_2)] \in \mathcal{F}\Omega^r_{n,q}$$

их сумму равенством[3])

$$[(M^n_1, \mathcal{F}_1)] + [(M^n_2, \mathcal{F}_2)] = [(M^n_1 \cup M^n_2, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)];$$

тогда множество классов $\mathcal{F}\Omega^r_{n,q}$ становится абелевой группой. Нулевым элементом этой группы является $[(S^q \times S^{n-q}), \mathcal{F}_0]$[4]).

---

[1]) Оно слабее, чем диффеоморфность (с учетом ориентации): если $f: (M^n_1, \mathcal{F}_1) \longrightarrow (M^n_2, \mathcal{F}_2)$ есть C^r-диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию, то в качестве W^{n+1} можно взять «цилиндр» — прямое произведение $M^n_1 \times I$ (здесь I есть отрезок $[0, 1]$), — в котором точка $(x, 1)$ отождествлена с $f(x)$, а в качестве $\hat{\mathcal{F}}$ — разбиение этого цилиндра на множества $L_\alpha \times I$ с аналогичной заменой на «верхней крышке цилиндра» $M^n_1 \times \{1\}$. — *Прим. ред.*

[2]) Вообще, если $(M^n, \mathcal{F}) = (\partial W^{n+1}, \partial\hat{\mathcal{F}})$ (с учетом ориентации), то говорят, что $(M^n, \mathcal{F})$ *кобордантно нулю* (и что $(W^{n+1}, \hat{\mathcal{F}})$ есть та пленка, которую «ограничивает» $(M^n, \mathcal{F})$ или которая «заклеивает» $(M^n, \mathcal{F})$). Рассмотрение $(S^q \times S^{n-q}, \mathcal{F}_0)$ по существу имеет целью показать, что существуют $(M^n, \mathcal{F})$, кобордантные нулю. Все они (при данных n, r, q) кобордантны друг другу: если пленки $(W^{n+1}_i, \hat{\mathcal{F}}_i)$ заклеивают $(M^n_i, \mathcal{F}_i)$ $(i = 1, 2)$, то $(W^{n+1}_1 \cup (-W^{n+1}_2), \hat{\mathcal{F}}_1 \cup \hat{\mathcal{F}}_2)$ (где подразумевается так называемое несвязное объединение, т. е. $W^{n+1}_1 \cap W^{n+1}_2 = \varnothing$) есть пленка, заклеивающая $(M^n_1, \mathcal{F}_1) \cup (-M^n_2, \mathcal{F}_2)$. — *Прим. ред.*

[3]) Подразумевается, что $M^n_1 \cap M^n_2 = \varnothing$. Легко проверяется, что определение корректно, т. е. не зависит от того, какие именно $(M^n_i, \mathcal{F}_i)$ использовать в качестве представителей складываемых классов кобордизмов. — *Прим. ред.*

[4]) Действительно, если в $[(M^n_1, \mathcal{F}_1)] + [(M^n_2, \mathcal{F}_2)]$ второе слагаемое есть класс пар $(M, \mathcal{F})$, кобордантных нулю, то соответствующая пленка строится как несвязное объединение $(M^n_1 \times I, \mathcal{F}_1 \times I)$ и пленки, заклеивающей $(M^n_2, \mathcal{F}_2)$. — *Прим. ред.*

Противоположным элементом для $[(M^n, \mathcal{F})]$ является $[(-M^n, \mathcal{F})]$. Действительно, если определить $\mathcal{F}\times I=\{L_\alpha\times I;\ L_\alpha\in\mathcal{F}\}$, то $(M^n\times I, \mathcal{F}\times I)$ будет C^r-слоением на $M^n\times I$ коразмерности q, трансверсальным к краю, причем произведение $M^n\times I$ ориентируется соответствующим образом так, чтобы

$$(\partial(M^n\times I),\ \partial(\mathcal{F}\times I))=(M^n, \mathcal{F})\cup(-M^n, \mathcal{F}).$$

Группа $\mathcal{F}\Omega^r_{n,q}$ называется группой расслоенных n-мерных C^r-кобордизмов коразмерности q (с добавлением при необходимости прилагательного «ориентированных»).

Пусть M^n_1, M^n_2 — два n-мерных ориентируемых кобордантных C^r-многообразия и W^{n+1} — компактное ориентируемое $(n+1)$-мерное C^r-многообразие, для которого $\partial W^{n+1}=M^n_1\cup\cup(-M^n_2)$. (Это и означает кобордантность многообразий M^n_1 и M^n_2.) Отношение кобордантности является отношением эквивалентности на множестве ориентированных C^r-многообразий, и классы этой эквивалентности называются классами кобордизма[1]), а множество всех этих классов обозначается через Ω_n. Так же как множество $\mathcal{F}\Omega^r_{n,q}$, множество Ω_n является абелевой группой; ее называют *n-мерной группой C^r-кобордизмов;* класс кобордизма многообразия M^n обозначается через $[M^n]$.

Отображение

$$f\colon\ \mathcal{F}\Omega^r_{n,q}\to\Omega_n,$$

при котором $f([(M^n, \mathcal{F})])=[M^n]$, является, очевидно, гомоморфизмом. В § 31 показано, что, вообще говоря, оно не взаимно однозначно: при $n=3$, $q=1$, $r=\infty$ множество $f^{-1}(0)$ имеет мощность континуума.

По сравнению с многообразиями как таковыми многообразия со слоениями составляют более сложное для классификации множество. Как показывает описанный ниже пример, группа $\mathcal{F}\Omega^r_{n,q}$ классов кобордизма слоений не дает полной классификации слоений; тем не менее некоторую частичную «классификацию» она все же дает.

Пусть M^n — ориентированное n-мерное C^s-многообразие $(s\geqslant 2)$ и $\mathcal{F}$ — некоторое C^r-слоение на нем коразмерности 1. Как показано в теореме 4.2, существует некоторое слоение $\mathcal{F}'$, слои которого всюду трансверсальны к слоям $\mathcal{F}$. Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 6.6, можно так провести построение слоения $\mathcal{F}'$, чтобы некоторый его слой L_α был простой замкнутой C^r-кривой на M^n, т. е. существовало бы C^r-вложение

$$l\colon\ S^1\to M^n$$

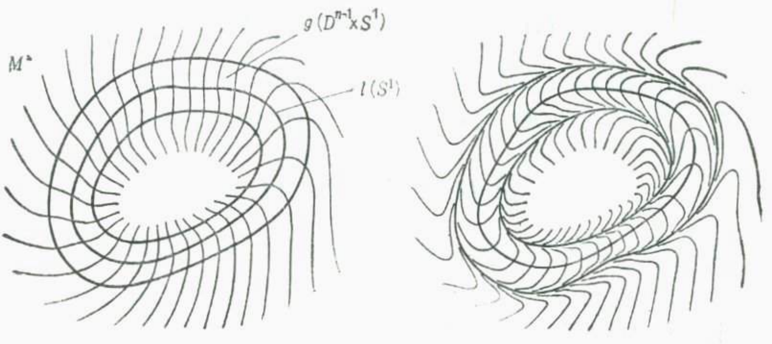
---

[1]) Ориентированного.— *Прим. ред.*

с $l(S^1)=L_\alpha$. Исходя из этой кривой, трансверсально пересекающей слои слоения $\mathcal{F}$, можно построить C^r-вложение

$$g\colon D^{n-1}\times S^1 \longrightarrow M^n,$$

такое, что $g\,|\,\{0\}\times S^1=l$ и множество $g(D^{n-1}\times\{y\})$ $(y\in S^1)$ содержится в некотором слое слоения $\mathcal{F}$ (рис. 8.2 (i)). Ограничения слоения $\mathcal{F}$ на $g(D^{n-1}\times S^1)$ и на $M^n-g(\operatorname{Int} D^{n-1}\times S^1)$ являются C^r-слоениями $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ коразмерности 1 соответственно. Определим на $D^{n-1}\times S^1$ C^∞-слоение $\overline{\mathcal{F}'}$ коразмерности 1 точно



(i) (ii)

Рис. 8.2.

так же, как оно определялось в примере B из § 16 в случае $D^2\times S^1$: так же, как в этом примере, введем функцию f и примем, что слоем слоения $\overline{\mathcal{F}'}$ является либо $S^{n-2}\times S^1$, либо множество

$$L_\alpha=\{((x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}),\ \exp 2\pi\,(\alpha+f\,((x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2)^{1/2}))\,i);\\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})\in D^{n-1}\}.$$

Образы слоев слоения $\overline{\mathcal{F}'}$ при отображении g определяют на $g(D^{n-1}\times S^1)$ C^r-слоение коразмерности 1. Будем обозначать его через $g(\overline{\mathcal{F}'})$. Каждый слой слоения $g(\overline{\mathcal{F}'})$ наматывается изнутри на границу области $g(D^{n-1}\times S^1)$, т. е. на $g(S^{n-2}\times S^1)$ (рис. 8.2 (ii)). Аналогично можно изменить и слои слоения $\mathcal{F}_2$ возле $g(S^{n-2}\times S^1)$ так, чтобы они стали наматываться снаружи на $g(S^{n-2}\times S^1)$. Тем самым на $M^n-g(\operatorname{Int} D^{n-1}\times S^1)$ получится новое C^r-слоение $\overline{\mathcal{F}}_2$ коразмерности 1. Пусть $\overline{\mathcal{F}}=g(\overline{\mathcal{F}'})\cup\cup\overline{\mathcal{F}}_2$; тогда $\overline{\mathcal{F}}$ есть C^r-слоение коразмерности 1 на M^n. Так как в $\overline{\mathcal{F}}$ существует компактный слой $g(S^{n-2}\times S^1)$, отсутствующий в $\mathcal{F}$, слоение $\overline{\mathcal{F}}$ отличается от слоения $\mathcal{F}$. Таким образом, по любому слоению на M^n можно построить отличное от него слоение типа $\overline{\mathcal{F}}$ [1]).

Однако слоение $\mathcal{F}$ и построенное по нему слоение $\overline{\mathcal{F}}$ кобордантны. Рассмотрим сначала на $M^n \times I$ следующее слоение $\hat{\mathcal{F}}$ коразмерности 1, трансверсальное к краю: $\hat{\mathcal{F}} = \{L_\alpha \times I;\ L_\alpha \in \mathcal{F}\}$. Далее определим отображение

$$\hat{l}: S^1 \to M^n \times I,$$

положив

$$\hat{l}(y) = (l(y),\ 1) \qquad (y \in S^1).$$

Тогда $\hat{l}$ является C^r-вложением. Пусть $D^n_- = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \in D^n;\ x_n \leqslant 0\}$; тогда существует определенное с помощью $\hat{l}$ C^r-отображение

$$\hat{g}\colon D^n_- \times S^1 \to M^n \times I,$$

обладающее следующими свойствами (см. рис. 8.3 (i)):

(i) $\hat{g} \mid (D^n_- - D^{n-1}) \times S^1$ является C^r-вложением;

(ii) $\hat{g} \mid (D^n_- \cap \operatorname{Int} D^n) \times S^1$ является C^r-вложением;

(iii) $\hat{g}(D^n_- \times \{y\})$ содержится в одном слое слоения $\hat{\mathcal{F}}$ $(y \in S^1)$;

(iv) для $x \in D^{n-1}$ имеет место равенство $\hat{g}((x, y)) = (g(x, y), 1)$.

Слои ограничений слоения $\hat{\mathcal{F}}$ на $\hat{g}(D^n_- \times S^1)$ и $M^n \times I - \hat{g}((D^n_- \cap \operatorname{Int} D^n) \times S^1)$ соответственно можно изменить возле $\hat{g}((D^n_- \cap S^{n-1}) \times S^1)$ и тем самым построить на $M^n \times I$ новое C^r-слоение коразмерности 1, трансверсальное к краю, как показано на рис. 8.3 (ii) [2]). Обозначая его через $\hat{\mathcal{F}}_1$, заметим, что

$$\hat{\mathcal{F}}_1 \mid M^n \times \{0\} = \mathcal{F}, \qquad \hat{\mathcal{F}}_1 \mid M^n \times \{1\} = \overline{\mathcal{F}},$$

в силу чего

$$(\partial(M^n \times I),\ \partial\hat{\mathcal{F}}_1) = (M^n,\ \mathcal{F}) \cup (-M^n,\ \overline{\mathcal{F}}),$$

т. е. слоения $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ кобордантны.

---

[1]) Риб, впервые описавший данную конструкцию, назвал ее *турбулизацией* (подробнее говорят, что $\overline{\mathcal{F}}$ получается из $\mathcal{F}$ путем турбулизации).— *Прим. ред.*

[2]) Оно получается из $\hat{\mathcal{F}}$ турбулизацией, только теперь приходится иметь дело с «*половиной* трубки» $\hat{g}(D^n_- \times S^1)$.— *Прим. ред.*

Пусть M^n есть C^s-многообразие с краем. Если для каждой точки p из M^n указано m-мерное подпространство в касательном пространстве $T_p(M^n)$, причем это соответствие

$$\mathcal{D}^m\colon M^n \to \bigcup_{p \in M^n} G_p^m$$

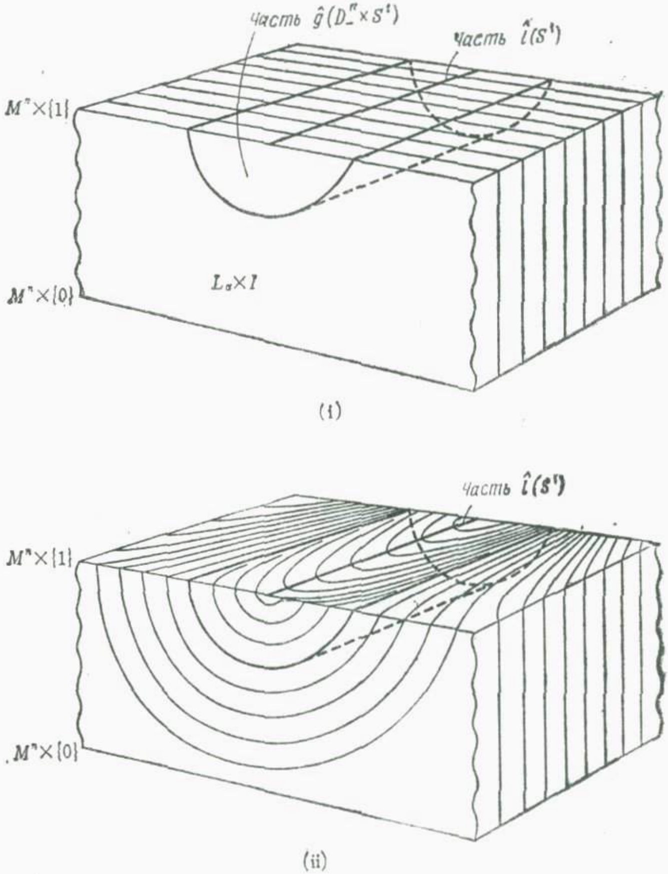


Рис. 8.3.

обладает перечисленными ниже свойствами (i), (ii), то говорят, что на M^n задано *трансверсальное к краю C^r-поле касательных m-мерных плоскостей*.

(i) Если $p \in \partial M^n$, то $\mathcal{D}^m(p) \cap T_p(\partial M^n)$ является $(m-1)$-мерным подпространством в $T_p(\partial M^n)$.

(ii) Для любой точки $p \in M^n$ существует ее окрестность U и векторные C^r-поля $X_1, X_2, \ldots, X_m$ на U, такие, что если $p' \in U$, то векторы $X_1(p'), X_2(p'), \ldots, X_m(p')$ составляют базис в $\mathscr{D}^m(p')$.

Пусть $\mathscr{F} = \{L_\alpha;\ \alpha \in A\}$ есть C^r-слоение на M^n коразмерности q, трансверсальное к краю ($r \geqslant 1$). Если для каждой точки $p \in M^n$ фиксировать в $T_p(M^n)$ все векторы, касательные к слою L_α, содержащему точку p, то это будет $(n-q)$-мерная касательная плоскость $T_p(L_\alpha)$ и тем самым на M^n окажется заданным трансверсальное к краю C^{r-1}-поле касательных $(n-q)$-мерных плоскостей. Будем обозначать его через $\mathscr{D}(\mathscr{F})$.

Если для C^r-поля $\mathscr{D}^{n-q}$ касательных $(n-q)$-мерных плоскостей на M^n, трансверсального к краю, существует $C^{r'}$-слоение $\mathscr{F}$, трансверсальное к краю (r' равно r или $r+1$), такое, что

$$\mathscr{D}(\mathscr{F}) = \mathscr{D}^{n-q},$$

то поле $\mathscr{D}^{n-q}$ называется *вполне интегрируемым*.

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы C^r-поле $\mathscr{D}^{n-q}$ касательных $(n-q)$-мерных плоскостей, трансверсальное к краю, было вполне интегрируемым, описано в теореме Фробениуса (теоремы 7.8 и 7.10). Когда M^n компактно и $q=1$, вступает в силу теорема 7.11.

§ 30. Число кобордизма слоений (число Годбийона — Вея)

Пусть M^n — линейно связное компактное n-мерное C^s-многообразие ($s \geqslant 4$) с краем или без такового. Пусть далее $\mathscr{F}$ есть C^r-слоение на M^n коразмерности 1, трансверсальное к краю ($r \geqslant 4$). Согласно лемме 7.7, на некотором открытом покрытии $\{V_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ многообразия M^n существует дифференциальная C^{r-1}-форма $\{\omega_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ степени 1, определяющая C^{r-1}-поле $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ касательных $(n-1)$-мерных плоскостей. В силу теоремы 7.11 на M^n определена дифференциальная C^{r-2}-форма θ степени 1, такая, что для каждой формы ω_σ на V_σ имеет место равенство

$$d\omega_\sigma = \omega_\sigma \wedge \theta.$$

С помощью θ определим дифференциальную C^{r-3}-форму Γ степени 3 на многообразии M^n, а именно

$$\Gamma = \theta \wedge d\theta;$$

тогда форма Γ называется *дифференциальной формой Годбийона — Вея* слоения $\mathscr{F}$. (Форму Γ можно определять, лишь когда поле $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ принадлежит классу C^3; поэтому $r \geqslant 4$.)

Лемма 8.1. *Форма Γ является замкнутой дифференциальной C^{r-3}-формой степени 3.*

Доказательство. Так как $d\omega_\sigma = \omega_\sigma \wedge \theta$,

$$0 = d(d\omega_\sigma) = d\omega_\sigma \wedge \theta - \omega_\sigma \wedge d\theta = \omega_\sigma \wedge \theta \wedge \theta - \omega_\sigma \wedge d\theta = -\omega_\sigma \wedge d\theta.$$

Поэтому на V_σ существует дифференциальная C^{r-3}-форма η_σ степени 1, такая, что на V_σ

$$d\theta = \omega_\sigma \wedge \eta_\sigma.$$

Значит, на V_σ

$$d\Gamma = d(\theta \wedge d\theta) = d\theta \wedge d\theta = \omega_\sigma \wedge \eta_\sigma \wedge \omega_\sigma \wedge \eta_\sigma = 0. \ \square$$

Лемма 8.2. *Если заменить θ на дифференциальную C^{r-2}-форму θ' степени 1, такую, что на каждом V_σ имеет место равенство $d\omega_\sigma = \omega_\sigma \wedge \theta'$, и положить $\Gamma' = \theta' \wedge d\theta'$, то $\Gamma - \Gamma'$ будет точной дифференциальной C^{r-3}-формой степени 3.*

Доказательство. Так как $d\omega_\sigma = \omega_\sigma \wedge \theta = \omega_\sigma \wedge \theta'$,

$$\omega_\sigma \wedge (\theta' - \theta) = 0.$$

Поэтому на V_σ существует C^{r-2}-функция f_σ, такая, что

$$\theta' - \theta = f_\sigma \omega_\sigma.$$

Если $V_\sigma \cap V_\nu \neq \varnothing$ $(\sigma, \nu \in \Sigma)$, то на $V_\sigma \cap V_\nu$ справедливо одно из соотношений $\omega_\sigma = \pm \omega_\nu$ и, следовательно, $f_\sigma = \pm f_\nu$. Поэтому

$$\begin{aligned}\theta' \wedge d\theta' &= (\theta + f_\sigma\omega_\sigma) \wedge d(\theta + f_\sigma\omega_\sigma) = \\ &= (\theta + f_\sigma\omega_\sigma) \wedge (d\theta + df_\sigma \wedge \omega_\sigma + f_\sigma\, d\omega_\sigma) = \\ &= \theta \wedge d\theta - d(f_\sigma\theta \wedge \omega_\sigma) + f_\sigma^2\omega_\sigma \wedge d\omega_\sigma = \\ &= \theta \wedge d\theta - d(f_\sigma\theta \wedge \omega_\sigma).\end{aligned}$$

В соответствии со сказанным выше[1]) на $V_\sigma \cap V_\nu$

$$f_\sigma\theta \wedge \omega_\sigma = f_\nu\theta \wedge \omega_\nu;$$

поэтому $f_\sigma\theta \wedge \omega_\sigma$ $(\sigma \in \Sigma)$ является дифференциальной C^{r-2}-формой степени 1 на M^n. Таким образом, существует форма η, такая, что

$$\theta \wedge d\theta - \theta' \wedge d\theta' = d\eta. \ \square$$

Лемма 8.3. *Если заменить форму $\{\omega_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ на дифференциальную C^{r-1}-форму $\{\omega'_{\sigma'};\ \sigma' \in \Sigma'\}$ степени 1, соответствующую открытому покрытию $\{V'_{\sigma'},\ \sigma' \in \Sigma'\}$ при том же C^{r-1}-поле касательных плоскостей $\mathscr{D}(\mathscr{F})$, и взять форму θ'', такую, что*

$$d\omega'_{\sigma'} = \omega'_{\sigma'} \wedge \theta'' \qquad (\sigma' \in \Sigma'),$$

---

[1]) Поскольку $f_\sigma\theta \wedge \omega_\sigma = \theta \wedge (\theta' - \theta)$.— *Прим. ред.*

то

$$\Gamma'' = \theta'' \wedge d\theta''$$

будет дифференциальной C^{r-3}-формой на M^n степени 3 *и* $\Gamma - \Gamma''$ *окажется точной дифференциальной C^{r-3}-формой степени* 3.

Доказательство. Обозначим через Σ'' мощность открытого покрытия $\{V_\sigma \cap V'_{\sigma'};\ \sigma \in \Sigma,\ \sigma' \in \Sigma'\}$ многообразия M^n. Пусть $V''_{\sigma''} = V_\sigma \cap V'_{\sigma'}$ и $\omega_{\sigma''}$, $\omega'_{\sigma''}$ обозначают соответственно ограничения на $V''_{\sigma''}$ форм ω_σ и $\omega'_{\sigma'}$. Заменив при необходимости формы $\{\omega_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ или $\{\omega'_{\sigma'};\ \sigma' \in \Sigma'\}$ на $\{\omega_{\sigma''};\ \sigma'' \in \Sigma''\}$ или $\{\omega'_{\sigma''};\ \sigma'' \in \Sigma''\}$, можно считать, что с самого начала $\Sigma = \Sigma'$.

По условию на каждом множестве V_σ существует такая C^{r-1}-функция g_σ, что

$$\omega'_\sigma = g_\sigma \omega_\sigma.$$

Функция g_σ не обращается в нуль на V_σ. Если $\omega'_{\sigma'}$ заменить на $-\omega'_{\sigma'}$, то по-прежнему будет выполняться равенство

$$d(-\omega'_{\sigma'}) = (-\omega'_{\sigma'}) \wedge \theta'';$$

поэтому, выбирая должным образом знак у $\pm\omega'_{\sigma'}$ на компонентах линейной связности множества $V_{\sigma'}$, можно получить такую форму $\{\pm\omega'_{\sigma'};\ \sigma' \in \Sigma\}$ вместо $\{\omega'_{\sigma'};\ \sigma' \in \Sigma\}$, что функция g_σ будет положительной на V_σ. Если $V_\sigma \cap V_\nu \neq \varnothing$, то на $V_\sigma \cap V_\nu$ справедливо одно из соотношений $g_\sigma = \pm g_\nu$; поэтому если все функции g_σ $(\sigma \in \Sigma)$ положительны, то в совокупности они естественным образом определяют на M^n некоторую C^{r-1}-функцию g.

Согласно определению, на V_σ имеет место равенство

$$\omega'_\sigma = g\omega_\sigma;$$

следовательно,

$$d\omega'_\sigma = dg \wedge \omega_\sigma + g\, d\omega_\sigma = \omega_\sigma \wedge (-dg + g\theta) = \omega'_\sigma \wedge \left(\frac{-dg}{g} + \theta\right).$$

Таким образом, форма θ'' имеет вид $-d(\log g) + \theta$. Так как

$$d\theta'' = d(-d(\log g) + \theta) = d\theta,$$

то

$$\begin{aligned} \theta'' \wedge d\theta'' &= (-d(\log g) + \theta) \wedge d\theta = \\ &= d((-\log g)\, d\theta) + \theta \wedge d\theta. \quad \square \end{aligned}$$

Согласно этим леммам, дифференциальная C^{r-3}-форма Γ степени 3 определяется C^r-слоением $\mathcal{F}$ с точностью до точной дифференциальной C^{r-3}-формы степени 3.

Множество всех замкнутых дифференциальных C^r-форм степени q на n-мерном C^r-многообразии $(r \geqslant 1)$ является векторным пространством, в котором точные дифференциальные C^r-формы степени q составляют подпространство. Соответствующее факторпространство обозначается через $H^q_D(M^n, \mathbf{R})$ и называется *группой когомологий де Рама степени* q, а элементы этой группы — *классами когомологий де Рама степени* q. Класс $[\Gamma]$ когомологий де Рама степени 3, содержащий введенную выше форму Γ, определяется, таким образом, слоением $\mathcal{F}$ коразмерности 1. Класс $[\Gamma]$ называется *характеристическим классом Годбийона — Вея* слоения $\mathcal{F}$.

Пример 1. Пусть E есть n-мерное C^r-многообразие, π: $E \to S^1$ — некоторое C^r-расслоение $(r \geqslant 4)$ и $\mathcal{F} = \{\pi^{-1}(y);\ y \in S^1\}$ — отвечающее ему C^r-слоение коразмерности 1. Если y — координата на отрезке $[0, 1]$, в котором точки $\{0\}$ и $\{1\}$ отождествлены, в результате чего и получается S^1, то dy является дифференциальной C^∞-формой степени 1 на S^1. Определенное с помощью $\pi^* dy$ C^{r-1}-поле касательных $(n-1)$-мерных плоскостей как раз и есть $\mathcal{D}(\mathcal{F})$. Так как $d(dy) = 0$, то и

$$d(\pi^* dy) = 0;$$

поэтому соответствующая форма θ равна 0. Следовательно, дифференциальная форма Γ Годбийона — Вея слоения расслоения равна нулю.

Пример 2. Вычислим дифференциальную форму Годбийона — Вея для слоения Риба $\mathcal{F}_R$ на сфере S^3 (§ 16, пример В). Введем на круге D^2 полярные координаты (r, ψ) $(0 \leqslant r \leqslant 1,$ $0 \leqslant \psi < 2\pi)$ и точки из $D^2 \times S^1$ будем записывать в виде (r, ψ, y) $(y \in S^1)$. Пусть f: $]-1, 1[\to \mathbf{R}$ есть C^∞-функция из примера В § 16. Далее пусть

$$h: [0, 1] \to [0, 1]$$

— монотонно убывающая C^∞-функция, равная 1 в окрестности 0 и равная 0 в окрестности 1 (см. лемму 1.5). Определим на S^3 дифференциальную C^∞-форму ω степени 1 следующим образом:

на $\operatorname{Int} D^2_1 \times S^1_1$ положим

$$\omega = h(r)\left(dy - \frac{df(r)}{dr}\,dr\right) + (1 - h(r))\left(\left(1\Big/\frac{df(r)}{dr}\right)dy - dr\right);$$

на $\partial D^2_1 \times S^1_1$ положим

$$\omega = dr;$$

на $D_2^2 \times S_2^1$ форма определяется так же, но с противоположным знаком. Форма ω определяет на S^3 C^∞-поле касательных 2-мерных плоскостей $\mathscr{D}(\mathscr{F}_R)$. С помощью простого подсчета легко установить, что на $\operatorname{Int} D_1^2 \times S_1^1$

$$d\omega = -\omega \wedge \frac{d}{dr}\left(\log\left(h(r) + (1-h(r))\Big/\frac{df(r)}{dr}\right)\right) dr.$$

Следовательно, дифференциальная форма Γ Годбийона — Вея для слоения Риба равна 0.

Пусть M^3 — ориентированное 3-мерное C^s-многообразие $(s \geqslant 4)$ и $\mathscr{F}$ — некоторое C^r-слоение коразмерности 1 на нем $(r \geqslant 4)$. Построим с помощью слоения $\mathscr{F}$ описанным выше способом дифференциальную C^{r-3}-форму Γ степени 3. Интеграл по многообразию M^3 от Γ

$$\int_{M^3} \Gamma$$

называется *числом Годбийона — Вея* и обозначается через $\mathrm{G.V.}(M^3, \mathscr{F})$. Как было показано выше, форма Γ определяется слоением $\mathscr{F}$ однозначно с точностью до точной дифференциальной C^{r-3}-формы степени 3. Если

$$\Gamma' = \Gamma + d\Theta$$

(Θ — дифференциальная C^{r-2}-форма на M^3 степени 2), то в силу теоремы Стокса (теорема 7.6)

$$\int_M \Gamma' = \int_M \Gamma + \int_M d\Theta = \int_M \Gamma;$$

поэтому число Годбийона — Вея определяется слоением $\mathscr{F}$ однозначно.

Следующая теорема показывает, что число Годбийона — Вея является инвариантом кобордизма слоений.

Теорема 8.4. *Пусть M_1^3, M_2^3 — ориентированные 3-мерные C^s-многообразия, а $(M_1^3, \mathscr{F}_1)$, $(M_2^3, \mathscr{F}_2)$ суть C^r-слоения коразмерности* 1 $(r \geqslant 4)$. *Если слоения $(M_1^3, \mathscr{F}_1)$ и $(M_2^3, \mathscr{F}_2)$ кобордантны, то*

$$\mathrm{G.V.}(M_1^3, \mathscr{F}_1) = \mathrm{G.V.}(M_2^3, \mathscr{F}_2).$$

Доказательство. Пусть $(W^4, \mathscr{F})$ — кобордизм слоений $(M_1^3, \mathscr{F}_1)$ и $(M_2^3, \mathscr{F}_2)$:

$$(\partial W^4, \partial\mathscr{F}) = (M_1^3, \mathscr{F}_1) \cup (-M_2^3, \mathscr{F}_2).$$

Пусть далее $\{U_\sigma;\ \sigma = 1, 2, \ldots, u\}$ — открытое покрытие многообразия W^4 и $\{\omega_\sigma;\ \sigma = 1, 2, \ldots, u\}$ — дифференциальная C^{r-1}-

форма степени 1, определяющая поле $\mathscr{D}(\mathscr{F})$. Обозначим через $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_{u'}}$ те из множеств U_σ $(\sigma=1, 2, \ldots, u)$, для которых $U_\sigma \cap M_1^3 \neq \varnothing$, а через $U_{j_1}, U_{j_2}, \ldots, U_{j_{u''}}$ — те из множеств U_σ, для которых $U_\sigma \cap M_2^3 \neq \varnothing$. Тогда $\{M_1^3 \cap U_{i_k};\ k=1, 2, \ldots, u'\}$ будет открытым покрытием для M_1^3, а $\{M_2^3 \cap U_{j_k};\ k=1, 2, \ldots, u''\}$ будет открытым покрытием для M_2^3. Далее обозначим через ω'_{i_k} ограничение формы ω_{i_k} на $M_1^3 \cap U_{i_k}$, а через ω''_{j_k} — ограничение формы ω_{j_k} на $M_2^3 \cap U_{j_k}$. Тогда формы $\{\omega'_{i_k};\ k=1, 2, \ldots, u'\}$ и $\{\omega''_{j_k};\ k=1, 2, \ldots, u''\}$ определяют поля $\mathscr{D}(\mathscr{F}_1)$ и $\mathscr{D}(\mathscr{F}_2)$ соответственно.

Определим на W^4 по форме $\{\omega_\sigma;\ \sigma=1, 2, \ldots, u\}$, следуя теореме 7.11, дифференциальную C^{r-2}-форму θ степени 1, и пусть $\Gamma=\theta \wedge d\theta$ — дифференциальная форма Годбийона — Вея. В силу сказанного выше, если

$$\iota_1\colon M_1^3 \to W^4, \qquad \iota_2\colon M_2^3 \to W^4$$

— тождественные включения и

$$\theta_1=\iota_1^*\theta, \qquad \theta_2=\iota_2^*\theta,$$

то θ_1 и θ_2 соответствуют формам $\{\omega'_{i_k};\ k=1, 2, \ldots, u'\}$ и $\{\omega''_{j_k};\ k=1, 2, \ldots, u''\}$; поэтому, согласно теореме 7.11, на M_1^3 и M_2^3 соответственно определены дифференциальные C^{r-2}-формы степени 1

$$\Gamma_1=\theta_1 \wedge d\theta_1, \qquad \Gamma_2=\theta_2 \wedge d\theta_2,$$

являющиеся дифференциальными формами Годбийона — Вея. Так как $\iota_1^*\Gamma=\Gamma_1$ и $\iota_2^*\Gamma=\Gamma_2$, обозначая через $\iota\colon \partial W^4 \to W^4$ включение, получаем

$$G.\,V.(M_3^1, \mathscr{F}_1)-G.V.(M_3^2, \mathscr{F}_2)= \\ =\int_{M_1^3}\Gamma_1-\int_{M_2^3}\Gamma_2=\int_{\partial W^4}\iota^*\Gamma=\int_{W^4}d\Gamma=0,$$

что и требовалось доказать. □

В следующем § 31 используется инвариантность числа Годбийона — Вея.

§ 31. Кобордизм слоений на S^3 (теорема Тёрстона)

Рассмотрим верхнюю полуплоскость $H=\{z=x+yi;\ y>0\}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Если числу $z=x+yi$ поставить в соответствие пару (x, y), то полуплоскость H отождествится с множеством $\mathbf{R}_+^2-\mathbf{R}^1=\{(x, y);\ y>0\}$.

Обозначим через $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ множество всех матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, таких, что a, b, c, d — вещественные числа и $ad-bc=1$. Относительно умножения матриц множество $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ является группой. Каждому элементу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ соответствует преобразование $\tau\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, при котором z переходит в $\frac{az+b}{cz+d}$. Очевидно, $\tau(H)=H$; поэтому ограничение τ на H дает отображение

$$\tau\colon H \to H.$$

Произвольную окружность на плоскости $\mathbf{C}$ можно записать в виде

$$(*) \qquad Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0.$$

Здесь A, C — вещественные числа и $B\bar{B}-AC>0$. Если $w=\frac{az+b}{cz+d}$, то $z=\frac{-dw+b}{cw-a}$ и окружность $(*)$ переходит в

$$(**) \qquad A'w\bar{w}+B'w+\bar{B}'\bar{w}+C'=0,$$

где

$$A' = Ad^2+Cc^2-(B+\bar{B})cd;$$
$$B' = Bad+\bar{B}bc-Abd-Cac;$$
$$C' = Ab^2+Ca^2-(B+\bar{B})ab.$$

Так как A', C' — вещественные числа и $B'\bar{B}'-A'C'>0$, полученное уравнение описывает снова окружность на $\mathbf{C}$. Таким образом, дробно-линейное преобразование τ переводит окружность снова в окружность. Если в равенстве $(*)$ число B вещественно, то центр окружности $(*)$ лежит на вещественной оси; в этом случае и центр окружности $(**)$ находится на вещественной оси.

Часть окружности с центром на вещественной оси, расположенную в верхней полуплоскости H, назовем *специальной полуокружностью*[1]) и обычно будем обозначать через L. Центр

[1]) Эти полуокружности, как указано дальше в тексте, оказываются прямыми при интерпретации геометрии Лобачевского в верхней полуплоскости. Обычно они так и называются — прямые Лобачевского или Л-прямые.

Автор, однако, пользуется термином, который в дословном переводе звучит как «окружность, проходящая по полуплоскости M», по-видимому, желая подчеркнуть, что это есть часть окружности в обычном смысле слова. Термина, точно отражающего эту точку зрения, в отечественной литературе нет. При переводе этого параграфа мы для краткости использовали термин «специальная окружность». — *Прим. ред.*

такой окружности может находиться и в ∞; тогда речь идет об общей части верхней полуплоскости H и некоторой прямой, параллельной мнимой оси. На специальной полуокружности может быть задана ориентация, как это показано на рис. 8.4; там направление обхода по окружности задано от точки P к точке P'. В этом случае говорят, что она *выходит из точки* P. Очевидно, что для любых двух ориентированных специальных полуокружностей L, L' существует такое линейное преобразо-

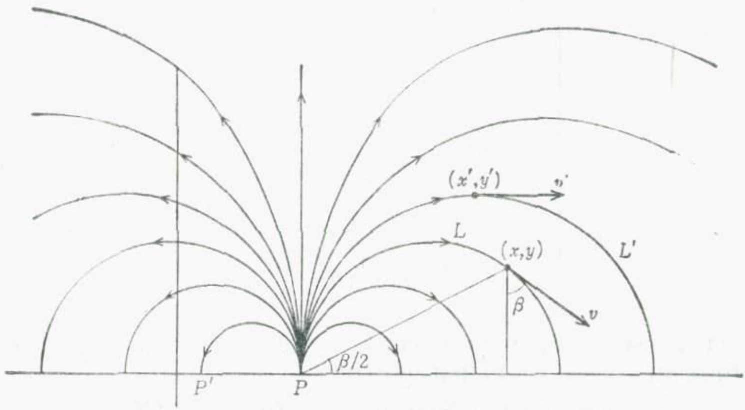


Рис. 8.4.

вание из $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$, которое переводит L в L' с сохранением ориентации. Пусть

$$r'\colon H \to H$$

— отображение, при котором z переходит в $1/\bar{z}$. Если $S^1=\{z; |z|=1\}$, то каждая точка из $H \cap S^1$ остается при действии r' неподвижной. Такое отображение r' называется *инверсией относительно* $H \cap S^1$. Если τ — линейное преобразование, переводящее $H \cap S^1$ в специальную полуокружность L, то отображение $\tau \circ r' \circ \tau^{-1}\colon H \to H$ называется *инверсией относительно* L. При таком отображении каждая точка из L остается неподвижной.

Введем на 2-мерном C^∞-многообразии H риманову метрику с помощью равенства

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

(см. комментарии, примечание 8.1). При такой метрике специальные полуокружности являются геодезическими. Обычно специальные полуокружности L рассматривают как «прямые» в геометрии Лобачевского, отчасти аналогичные прямым в геометрии Евклида. Две такие «прямые» L и L' могут проходить через одну точку P на вещественной оси и, вопреки евклидовой аксиоме параллельности, быть параллельными (т. е. через одну точку могут проходить две параллельные «прямые» — см. рис. 8.5).

Любое линейное преобразование $\tau: H \to H$, задающееся элементом из $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$, переводит специальную полуокружность в специальную полуокружность. Для скалярного про-

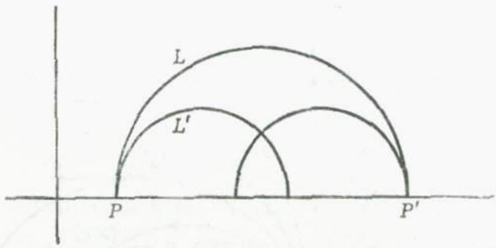


Рис. 8.5.

изведения $\langle\ ,\ \rangle_z$, определяемого введенной выше римановой метрикой, имеет место равенство

$$\langle \tau_* u, \tau_* v \rangle_{\tau(z)} = \langle u, v \rangle_z \qquad (u, v \in T_z(H)).$$

Иными словами, введенная выше риманова метрика инвариантна относительно рассматриваемых линейных преобразований.

Произвольный элемент касательного пространства $T(H)$ к многообразию H задается в виде (z, v) (где $v \in T_z(H)$); если считать, что $z = x + yi$, то этот элемент записывается в виде (x, y, v). Если элементу (x, y, v) поставить в соответствие пару $((x, y), v)$, то получится C^∞-диффеоморфизм между $T(H)$ и $H \times \mathbf{R}^2$.

Пусть E — единичное касательное расслоение к H, т. е. множество

$$\{(x, y, v) \in T(H);\ \|v\| = 1\},$$

и

$$\hat{\pi}: E \to H \quad (\hat{\pi}(x, y, v) = (x, y))$$

— проекция C^∞-расслоения. Множество E является 3-мерным C^∞-многообразием, и если поставить в соответствие точке (x, y, v) точку $((x, y), v)$, то получится C^∞-диффеоморфизм между E и $H \times S^1$. Введенная выше риманова метрика на H и обычная риманова метрика на S^1 позволяют благодаря этому C^∞-диффеоморфизму ввести риманову метрику и на E [22].

Пусть L, L' — ориентированные специальные полуокружности, выходящие из одной точки P; пусть, далее, $(x, y) \in L$ и $(x', y') \in L'$ (см. рис. 8.4). Возьмем векторы

$$v \in T_{(x,\, y)}(H), \quad v' \in T_{(x',\, y')}(H),$$

касающиеся соответственно кривых L и L' и имеющие согласованные с ними направления. Векторы v и v' в описанной ситуации называются параллельными (рис. 8.4). Отношение параллельности между векторами v и v' из множества E определяет на E отношение

$$(x, y, v) \sim (x', y', v'),$$

являющееся отношением эквивалентности. Если L_α $(\alpha \in A)$ — классы этой эквивалентности, то $\mathcal{F} = \{L_\alpha;\ \alpha \in A\}$ является C^∞-слоением на E коразмерности 1. (Ниже будет показано, что это слоение приводит к дифференциальной C^∞-форме ω на E, такой, что $d\omega \wedge \omega = 0$.)

Рассмотрим семейство множеств специальных полуокружностей, каждое из которых состоит из всех полуокружностей, выходящих из своей точки P вещественной оси (подразумевается, что вещественная ось включает и ∞) (см. рис. 8.4). Возьмем на каждой специальной полуокружности L в каждой точке единичный касательный вектор, имеющий направление, согласованное с направлением L. Тогда множество всех таких векторов, соответствующее конкретной точке вещественной оси, является некоторым слоем L_α. Следовательно, если $\alpha \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ — координата точки P, то $A = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Слой L_α может быть формально описан следующим образом.

Пусть $(x, y, v) \in L_\alpha$. Как видно из рис. 8.4, если на H фиксировать касательный вектор v и обозначить через β угол между v и отрицательным направлением мнимой оси, то (см. рис. 8.4)

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{y}{x - \alpha}.$$

Таким образом, все векторы v выражаются через углы β, а потому и слои L_α выражаются через них[1]).

---

[1]) Надо иметь в виду, что β на E может рассматриваться только как локальная координата (совершенно аналогично угловой координате на окружности), но ее тригонометрические функции являются уже корректно определенными функциями на E, а $d\beta$ — корректно определенной дифференциальной 1-формой. — *Прим. ред.*

Продифференцировав внешним образом последнее соотношение (в данном случае внешнее дифференцирование совпадает с обычным), получаем[1])

$$d\beta + \frac{2\sin^2(\beta/2)}{y}\,dx - \frac{\sin\beta}{y}\,dy = 0.$$

Следовательно, определенная на E дифференциальная C^∞-форма

$$\omega = d\beta + \frac{2\sin^2(\beta/2)}{y}\,dx - \frac{\sin\beta}{y}\,dy$$

задает на E поле касательных плоскостей $\mathscr{D}(\mathscr{F})$. Как было сказано выше, если τ — произвольный элемент группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$, то определяемое им линейное преобразование полуплоскости H переводит специальную полуокружность в специальную полуокружность. Кроме того, риманова метрика инвариантна относительно τ, так что ограничение отображения $\tau_*\colon T(H) \to T(H)$ на E переводит E снова в E. Это отображение

$$\tau_*\colon E \to E$$

является C^∞-диффеоморфизмом. При отображении τ_* слой $L_\alpha \in \mathscr{F}$ переходит в слой $\tau_*(L_\alpha) \in \mathscr{F}$, т. е. слоение $\mathscr{F}$ инвариантно относительно действия группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$; кроме того

$$(\tau_*)^*\,\omega = \omega,$$

т. е. форма ω инвариантна относительно группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ (см. комментарии, примечание 8.2).

Вычислим форму Γ Годбийона — Вея формы ω. Так как внешний дифференциал $d\omega$ формы ω равен

$$d\omega = -\frac{2\sin^2(\beta/2)}{y^2}\,dy \wedge dx + \frac{\sin\beta}{y}\,d\beta \wedge dx - \frac{\cos\beta}{y}\,d\beta \wedge dy,$$

то при форме

$$\theta = \frac{\sin\beta}{y}\,dx - \frac{\cos\beta}{y}\,dy$$

---

[1]) Последнее соотношение есть некое соотношение вида $f(x, y, \beta; \alpha) = 0$ где α — параметр (свой для каждого L_α). Этот параметр надо исключить, из $f_x\,dx + f_y\,dy + f_\beta\,d\beta = 0$ с помощью $f = 0$. При $\alpha = \infty$ «окружности, исходящие из P» — это прямые $x = \text{const}$; положительным на них считается направление вниз. Для них $\beta = 0$ и $d\beta = 0$; следовательно, хотя вычисления формально проводятся при $\alpha \neq \infty$, но окончательный результат верен и в этом случае. Что же касается случая $x = \alpha$, то лучше записать наше соотношение $f = 0$ в таком виде, чтобы никакой особенности у f при $x = \alpha$ не было: $(x - \alpha)\sin\dfrac{\beta}{2} - y\cos\dfrac{\beta}{2} = 0$. Теперь можно дифференцировать и исключать α. Ясно, что получится тот же самый результат, что приведен в тексте, но теперь очевидно, что он годится и при $x = \alpha$. — *Прим. ред.*

имеет место равенство

$$d\omega = \omega \wedge \theta.$$

(Следовательно, $d\omega \wedge \omega = 0$.) Отсюда

$$\Gamma = \theta \wedge d\theta = \frac{-1}{y^2} dx \wedge dy \wedge d\beta.$$

Форма $-\Gamma$ выражает в описанной выше метрике на E элемент объема. Легко показать, что и форма θ инвариантна относительно действия группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$.

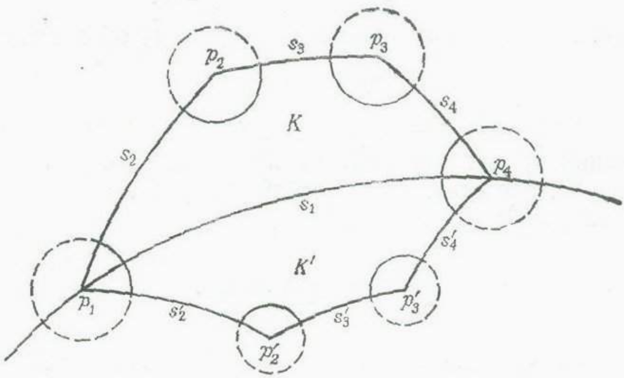


Рис. 8.6.

Пусть на верхней полуплоскости H задано несколько специальных полуокружностей, расположенных «выпуклым многоугольником» K (рис. 8.6). Если считать, что эти окружности — «прямые», то «выпуклый многоугольник» на H можно рассматривать действительно как выпуклый многоугольник. Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_q$ — «стороны» многоугольника K, а $p_1, p_2, \ldots, p_q$ — его «вершины». Осуществим инверсию относительно специальной полуокружности, содержащей s_1; обозначим через K' образ многоугольника K, через s_i' — образ стороны s_i, через p_i' — образ вершины p_i (рис. 8.6). Здесь $i = 1, 2, \ldots, q$, $s_1 = s_1'$, $p_1 = p_1'$ и $p_q = p_q'$. Легко установить, что для каждого i соответствие $s_i \to s_i'$ при описанной инверсии может быть задано дробно-линейным преобразованием (с помощью элемента из $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$)

$$\tau_i \colon s_i \to s_i',$$

которое определяется однозначно[1]).

[1]) Иными словами, существует ровно одна изометрия плоскости Лобачевского, сохраняющая ее ориентацию и переводящая заданный прямолинейный отрезок p_ip_{i+1} в заданный прямолинейный отрезок той же длины $p_i'p_{i+1}'$, причем так, что $p_i \to p_i'$, $p_{i+1} \to p_{i+1}'$. — *Прим. ред.*

В дальнейшем полуплоскость H будет рассматриваться как метрическое пространство относительно римановой метрики. Фиксируем при достаточно малом $\varepsilon > 0$ ε-окрестности $U_\varepsilon(p_i)$, $U_\varepsilon(p'_i)$ для всех p_i, p'_i. Далее, пусть

$$\hat{K} = K \cup K' - \bigcup_{i=1}^{q} U_\varepsilon(p_i) - \bigcup_{i=1}^{q} U_\varepsilon(p'_i)$$

и $\hat{\pi}^{-1}(\hat{K}) = \hat{E}$. Наконец, пусть

$$\hat{K} \cap s_i = \hat{s}_i, \qquad \hat{K} \cap s'_i = \hat{s}'_i,$$

и ограничение отображения τ_i: $s_i \to s'_i$ на $\hat{s}_i$ обозначено через

$$\hat{\tau}_i\colon\ \hat{s}_i \to \hat{s}'_i.$$

Если в $\hat{K}$ для всех $i = 2, 3, \ldots, q$ отождествить с помощью отображения $\hat{\tau}_i$ дуги $\hat{s}_i$ и $\hat{s}'_i$, то получится 2-мерное C^∞-многообразие V^2, представляющее собой сферу S^2, в которой вырезано q отверстий:

$$V^2 = S^2 - \bigcup_{i=1}^{q} \operatorname{Int} D_i^2.$$

Если в множестве $\hat{E}$ для всех $i = 2, 3, \ldots, q$ отождествить $\hat{\pi}^{-1}(\hat{s}_i)$ и $\hat{\pi}^{-1}(\hat{s}'_i)$ с помощью отображения

$$(\hat{\tau}_i)_*\colon\ \hat{\pi}^{-1}(\hat{s}_i) \to \hat{\pi}^{-1}(\hat{s}'_i),$$

то получится 3-мерное C^∞-многообразие[1] M^3; пусть

$$\kappa\colon\ \hat{E} \to M^3$$

— отображение, при котором происходит это отождествление. Если

$$\pi'\colon\ M^3 \to V^2$$

— отображение, получающееся из проекции $\hat{\pi}$: $E \to H$, то π' является C^∞-расслоением со слоем S^1. Так как V^2 является компактным 2-мерным многообразием с краем, расслоение π' является произведением $M^3 = V^2 \times S^1$ (см. комментарии, примечание 8.3).

Так как слоение $\mathcal{F}$ инвариантно относительно действия группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$, при отображении $(\hat{\tau}_i)_*$: $\hat{\pi}^{-1}(\hat{s}_i) \to \hat{\pi}^{-1}(\hat{s}'_i)$ пе-

---

[1] На самом деле M^3 зависит от ε и следовало бы писать M^3_ε. Однако это будет делаться, лишь когда речь идет одновременно о нескольких M^3_ε с различными ε.— *Прим. ред.*

ресечение $L_\alpha \cap \hat{\pi}^{-1}(\hat{s}_i)$ $(L_\alpha \in \mathcal{F})$ переходит в пересечение $L_{\alpha'} \cap \hat{\pi}^{-1}(\hat{s}_i')$ $(L_{\alpha'} \in \mathcal{F})$.

Следовательно, для каждого i пересечения $L_\alpha \cap \hat{\pi}^{-1}(\hat{s}_i)$ и $L_{\alpha'} \cap \hat{\pi}^{-1}(\hat{s}_i')$ отождествляются и ограничение слоения $\mathcal{F}$ на $\hat{E}$ задает C^∞-слоение на M^3, трансверсальное к краю[1]). Будем обозначать его через $\overline{\mathcal{F}}$.

Совершенно аналогично можно показать, что дифференциальная форма ω, инвариантная относительно $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$, при ограничении на $\hat{E}$ определяет на M^3 дифференциальную C^∞-форму $\bar{\omega}$ степени 1. Форма $\bar{\omega}$ определяет C^∞-поле касательных плоскостей $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{F}})$. Так как упомянутая выше дифференциальная форма θ также инвариантна относительно $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$, ее ограничение на $\hat{E}$ определяет на M^3 дифференциальную C^∞-форму $\bar{\theta}$ степени 1 и в силу определения

$$d\bar{\omega} = \bar{\omega} \wedge \bar{\theta}.$$

Пусть $U_\rho(p_i)$, $U_\rho(p_i')$ суть ρ-окрестности точек p_i, p_i' в H (в используемой неевклидовой метрике). Введем в них «полярные координаты» с полюсами соответственно в p_i и p_i', так что каждая точка в $U_\rho(p_i)$, $U_\rho(p_i')$ будет определяться парой (r, ψ), где $0 \leqslant r < \rho$, а ψ — угловая координата; ею можно пользоваться либо как локальной координатой в пределах некоторого угла с вершиной в p_i или p_i', либо считать, что она принимает значения не в $\mathbf{R}$, а в S^1. (Мы часто будем позволять себе некоторую вольность речи, не проводя различий между точкой в $U_\rho(p_i)$ или $U_\rho(p_i')$ и ее координатами (r, ψ).) В этих терминах $s_i \cap U_\rho(p_i)$ имеет уравнение $\psi = \psi_i$, а $s_{i+1} \cap U_\rho(p_i)$ — уравнение $\psi = \psi_i + \alpha_i$, где α_i — внутренний угол многоугольника K при вершине p_i. Если, как мы будем считать ради определенности, обход по границе K в направлении $p_1 p_2 \ldots p_q p_1$ совершается по часовой стрелке (рис. 8.6), то $0 < \alpha_i < \pi$ (в противном случае для сохранения формул надо было бы считать, что $0 > \alpha_i > -\pi$). Точки $U_\rho(p_i) \cap K$ суть

$$\{(r, \psi);\ 0 \leqslant r < \rho,\ \psi_i \leqslant \psi \leqslant \psi_i + \alpha_i\}$$

(при $\alpha_i < 0$ надо было бы писать $\psi_i + \alpha_i \leqslant \psi \leqslant \psi_i$). При отображении $\tau_{i*}\colon T_{p_i}H \to T_{p_i'}H$ каждый вектор $v \in T_{p_i}H$ повора-

---

[1]) Пусть $p \in \partial M^3$ и $\bar{L}$ — слой построенного слоения на M^3, проходящий через p. Легко убедиться, что для любого слоя L_α слоения $\mathcal{F}$ и любой его точки v имеем $\hat{\pi}_* T_v(L_\alpha) = T_{\hat{\pi}(v)}(H)$; поэтому $\pi'_* T_p(\bar{L}) = T_z(V^2)$, где $z = \pi'(p)$. С другой стороны, $\partial M^3 \supset \pi'^{-1}(z)$ и потому $T_p(\partial M^3) \supset (\pi'_*)^{-1}(0)$. Следовательно, $T_p(\bar{L}) + T_p(\partial M^3) = T_p(M^3)$. — *Прим. ред.*

чивается в евклидовом смысле на некоторый угол δ_i (один и тот же для всех v); поэтому $s'_i \cap U_\rho(p'_i)$ имеет уравнение $\psi = \psi_i + \delta_i$, а $s'_{i+1} \cap U_\rho(p'_i)$ — уравнение $\psi = \psi_i + \delta_i - \alpha_i$. При отображении $(\tau_{i+1})_*$: $T_{p_i}H \to T_{p'_i}H$ тоже происходит поворот на некоторый угол, и из сказанного легко заключить, что этот угол равен $\delta_i - 2\alpha_i$. Точки $U_\rho(p'_i) \cap K'$ суть

$$\{(r, \psi)\colon\ 0 \leqslant r < \rho,\ \psi_i + \delta_i - \alpha_i \leqslant \psi \leqslant \psi_i + \delta_i\}.$$

При $0 < \varepsilon < \rho$ положим

$$P_{i,\rho,\varepsilon} = \{(r, \psi, v);\ (r, \psi) \in U_\rho(p_i) - U_\varepsilon(p_i),\ v \in T_{(r,\psi)}(H),\ \|v\| = 1\},$$
$$P'_{i,\rho,\varepsilon} = \{(r, \psi, v);\ (r, \psi) \in U_\rho(p'_i) - U_\varepsilon(p'_i),\ v \in T_{(r,\psi)}(H),\ \|v\| = 1\},$$

так что $P_{i,\rho,\varepsilon}$, $P'_{i,\rho,\varepsilon} \subset E$, и

$$N_{i,\rho,\varepsilon} = \kappa\,((P_{i,\rho,\varepsilon} \cup P'_{i,\rho,\varepsilon}) \cap \hat{E}),$$

так что $N_{i,\rho,\varepsilon} \subset M^3$. Каждой точке (r, ψ, v) из $P_{i,\rho,\varepsilon}$ (соответственно из $P'_{i,\rho,\varepsilon}$) соответствует вектор $\bar{v}$ из $T_{p_i}(H)$ (соответственно из $T_{p'_i}(H)$), параллельный вектору v и равный ему по длине; этот вектор $\bar{v}$ образует с отрицательным направлением мнимой оси некоторый угол $\gamma_i(r, \psi, v)$ (соответственно $\gamma'_i(r, \psi, v)$). Аналогично β или ψ, γ_i и γ'_i являются угловыми переменными (класса C^∞). С этой оговоркой можно считать, что (r, ψ, γ_i) суть некоторые C^∞-координаты в $P_{i,\rho,\varepsilon}$, а (r, ψ, γ'_i) — в $P'_{i,\rho,\varepsilon}$. Действительно, ясно, что за координаты можно принять (r, ψ, β). Но $\partial\gamma_i/\partial\beta$, $\partial\gamma'_i/\partial\beta > 0$. В самом деле, функции γ_i, γ'_i можно рассматривать в $\hat{\pi}^{-1}(U_\rho(p_i))$ и $\hat{\pi}^{-1}(U_\rho(p'_i))$ соответственно. Пользуясь координатами (r, ψ, β), заметим, что при $r = 0$ будет $v = \bar{v}$, т. е. $\gamma_i = \beta$ и $\gamma'_i = \beta$ соответственно, а тогда $\partial\gamma_i/\partial\beta$, $\partial\gamma'_i/\partial\beta > 0$ по крайней мере в достаточной близости от p_i и p'_i. (На самом деле это так и вдали от p_i, p'_i, но нам этого не требуется и мы не будем на этом останавливаться.) Поскольку разность между углом, образованным вектором $\bar{v} \in T_{p_i}(H)$ с отрицательным направлением мнимой оси, и углом, образованным вектором $\tau_{i*}\bar{v} \in T_{p'_i}(H)$ с отрицательным направлением той же оси, равна δ_i, то в силу определения функций γ_i, γ'_i для $(r, \psi, v) \in P_{i,\rho,\varepsilon}$ выполняется равенство

$$(*)\qquad \gamma'_i(\tau_{i*}(r, \psi, v)) = \gamma_i(r, \psi, v) + \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Аналогично

$$(**)\qquad \gamma'_i((\tau_{i+1})_*(r, \psi, v)) = \gamma_i(r, \psi, v) + \delta_i - 2\alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Опишем теперь координаты в $N_{i,\rho,\varepsilon}$ (с обычной оговоркой — одна из них будет угловой). В $P_{i,\rho,\varepsilon}\cap\hat{E}$ имеем координаты (r, ψ, γ), где $\varepsilon\leqslant r<\rho$, $\psi_i\leqslant\psi\leqslant\psi_i+\alpha_i$ и γ (бывшее γ_i) — угловая координата. В $P'_{i,\rho,\varepsilon}\cap\hat{E}$ имеем координаты (r, ψ, γ), где $\varepsilon\leqslant r<\rho$, $\psi_i+\delta_i-\alpha_i\leqslant\psi\leqslant\psi_i+\delta_i$ и γ (бывшее γ'_i) — угловая координата. При отображении κ часть границы $P_{i,\rho,\varepsilon}\cap\hat{E}$ «склеивается» с частью границы $P'_{i,\rho,\varepsilon}\cap\hat{E}$ так, что при этом отождествляются (т. е. переходят в одну точку M^3) следующие точки:

$$(r, \psi_i, \gamma)\sim(r, \psi_i+\delta_i, \gamma+\delta_i);$$
$$(r, \psi_i+\alpha_i, \gamma)\sim(r, \psi_i+\delta_i-\alpha_i, \gamma+\delta_i-2\alpha_i).$$

Чтобы получить координатные окрестности (которые, согласно гл. 2, должны быть открытыми множествами и не склеиваться по границе, а пересекаться), заметим, что в M^3 к $\kappa(P_{i,\rho,\varepsilon}\cap\cap\hat{E})$ примыкают два «куска» из $\kappa(P'_{i,\rho,\varepsilon}\cap\hat{E})$, получающиеся из тех (r, ψ, v), где $\psi_i+\delta_i-\delta\leqslant\psi\leqslant\psi_i+\delta_i$ и $\psi_i+\delta_i-\alpha_i\leqslant\leqslant\psi\leqslant\psi_i+\delta_i-\alpha_i+\delta$ ($\delta>0$ — достаточно малое число). Присоединив эти два «куска» к $\kappa(P_{i,\rho,\varepsilon}\cap\hat{E})$, получим некоторую область W в $N_{i,\rho,\varepsilon}$ (она зависит от i, ρ, ε и δ, но мы не будем указывать этого в обозначениях). Несколько увеличив $\kappa(P'_{i,\rho,\varepsilon}\cap\hat{E})$ аналогичным образом, получим W'. В W и W' имеем очевидные координаты χ и χ'. При этом $\chi(W)$ состоит из тех (r, ψ, γ), для которых

$$\varepsilon\leqslant r<\rho,\ \psi_i-\delta<\psi<\psi_i+\alpha_i+\delta,$$

а $\chi'(W')$ — из тех (r, ψ, γ), для которых

$$\varepsilon\leqslant r<\rho,\ \psi_i+\delta_i-\alpha_i-\delta<\psi<\psi_i+\delta_i+\delta.$$

$\chi(W\cap W')$ состоит из двух связных компонент, в которых соответственно

$$\psi_i-\delta<\psi<\psi_i+\delta$$

и

$$\psi_i+\alpha_i-\delta<\psi<\psi_i+\alpha_i+\delta,$$

а $\chi'(W \cap W')$ тоже состоит из двух связных компонент, в которых

$$\psi_i + \delta_i - \alpha_i - \delta < \psi < \psi_i + \delta_i - \alpha_i + \delta$$

и

$$\psi_i + \delta_i - \delta < \psi < \psi_i + \delta_i + \delta.$$

$\chi' \circ \chi^{-1}$ отображает первую компоненту $\chi(W \cap W')$ на вторую компоненту $\chi'(W \cap W')$ и вторую компоненту $\chi(W \cap W')$ на первую компоненту $\chi'(W \cap W')$ по формулам

$$(r,\ \psi,\ \gamma) \mapsto (r,\ \psi + \delta_i,\ \gamma + \delta_i)$$

и

$$(r,\ \psi,\ \gamma) \mapsto (r,\ \psi + \delta_i - 2\alpha_i,\ \gamma + \delta_i - 2\alpha_i)$$

соответственно. Первое отображение есть ограничение τ_{i*} на первую компоненту $\chi(W \cap W')$ (выраженное в терминах (r, ψ, γ)), а второе — ограничение $(\tau_{i+1})_*$ на вторую компоненту.

Из определения γ_i, γ_i' непосредственно следует, что равенство $\gamma_i = \mathrm{const}$ (соответственно $\gamma_i' = \mathrm{const}$) определяет подмножество в $P_{i,\rho,\varepsilon}$ (соответственно в $P'_{i,\rho,\varepsilon}$), являющееся слоем слоения $\mathcal{F}$. Поскольку из (*) и (**) следует, что τ_i^* и $(\tau_{i+1})^*$ переводят $d\gamma_i$ в $d\gamma_i'$, то с помощью $d\gamma_i$, $d\gamma_i'$, на $N_{i,\rho,\varepsilon}$ определяется дифференциальная C^∞-форма степени 1. Будем обозначать ее через $d\hat{\gamma}_i$ $(i = 1, \ldots, q)$, хотя никакого $\hat{\gamma}_i$ мы не вводим. Так как на множестве $N_{i,\rho,\varepsilon}$ форма $d\hat{\gamma}_i$ определяет то же поле касательных плоскостей $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{F}})$, что и $\overline{\omega}$, то существует C^∞-функция

$$g\colon\ N_{i,\rho,\varepsilon} \to R - \{0\},$$

для которой на $N_{i,\rho,\varepsilon}$ имеет место $d\hat{\gamma}_i = g\overline{\omega}$. Для дальнейшего существенно, что $g > 0$ (см. знаменатель в выражении для θ' ниже). Это следует из того, что $\omega(\partial/\partial\beta) = 1$, $d\gamma_i(\partial/\partial\beta) = \partial\gamma_i/\partial\beta$, $d\gamma_i'(\partial/\partial\beta) = \partial\gamma_i'/\partial\beta$ и, как уже отмечалось, $\partial\gamma_i/\partial\beta > 0$, $\partial\gamma_i'/\partial\beta > 0$.

Фиксируем монотонно убывающую C^∞-функцию

$$h\colon\ [\varepsilon,\ 2\varepsilon] \to [0, 1],$$

такую, что при $\varepsilon \leqslant t \leqslant 4\varepsilon/3$ имеет место равенство $h(t) = 1$, а при $5\varepsilon/3 \leqslant t \leqslant 2\varepsilon$ имеет место равенство $h(t) = 0$ (см. лемму 1.5).

Определим на M^3 дифференциальную C^∞-форму ω', такую, что

(i) $\omega' = \overline{\omega}$ на $M^3 - \bigcup\limits_{i=1}^{q} N_{i,\,2\varepsilon,\,\varepsilon}$;

(ii) на $N_{i,\,2\varepsilon,\,\varepsilon}$ имеет место равенство

$$\omega'(\kappa(r,\ \psi,\ v)) = (1-h(r))\,\overline{\omega}(\kappa(r,\ \psi,\ v)) + h(r)\,d\hat{\gamma}_i(\kappa(r,\ \psi,\ v)).$$

Очевидно, что так заданная форма ω' определяет на M^3 то же C^∞-поле касательных плоскостей, что и форма $\overline{\omega}$, т. е. поле $\mathscr{D}(\overline{\mathscr{F}})$.

Подсчитаем $d\omega'$ на множестве $N_{i,\,2\varepsilon,\,\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} d\omega' &= -\frac{dh}{dr}\,dr\wedge\overline{\omega} + (1-h)\,d\overline{\omega} + \frac{dh}{dr}\,dr\wedge d\hat{\gamma}_i = \\ &= \overline{\omega}\wedge\left(\frac{dh}{dr}\,dr\right) + (1-h)\,\overline{\omega}\wedge\overline{\theta} + \overline{\omega}\wedge\left(-g\,\frac{dh}{dr}\,dr\right) = \\ &= \overline{\omega}\wedge\left((1-g)\,\frac{dh}{dr}\,dr + (1-h)\,\overline{\theta}\right) = \\ &= \frac{1}{(1-h)+gh}\,\omega'\wedge\left((1-g)\,\frac{dh}{dr}\,dr + (1-h)\overline{\theta}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, если положить

$$\theta' = \frac{1}{(1-h)+gh}\left((1-g)\,\frac{dh}{dr}\,dr + (1-h)\,\overline{\theta}\right),$$

то

$$d\omega' = \omega'\wedge\theta'.$$

На $M^3 - \bigcup\limits_{i=1}^{q} N_{i,\,2\varepsilon,\,\varepsilon}$ выполняется равенство $d\overline{\omega} = \overline{\omega}\wedge\overline{\theta}$ и можно положить $\theta' = \overline{\theta}$; тогда

$$d\omega' = \omega'\wedge\theta'.$$

Посмотрим, как изменилась дифференциальная форма Годбийона—Вея $\overline{\Gamma} = \overline{\theta}\wedge d\overline{\theta}$ формы $\overline{\omega}$ при переходе к θ', т. е. к дифференциальной форме Годбийона—Вея $\Gamma' = \theta'\wedge d\theta'$ формы ω'. На $M^3 - \bigcup\limits_{i=1}^{q} N_{i,\,2\varepsilon,\,\varepsilon}$ справедливо равенство $\overline{\Gamma} = \Gamma'$. Далее, на $N_{i,\,2\varepsilon,\,\varepsilon}$ можно записать

$$\overline{\Gamma} - \Gamma' = g_i\,dr\wedge d\psi\wedge d\beta \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q)$$

и простой подсчет показывает, что при $\varepsilon \to 0$ функция εg_i стремится к нулю[1]). Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M^3} \overline{\Gamma} - \Gamma' = 0.$$

Теперь мы изменим слоение в окрестности границы M^3. При этом из C^∞-слоения $\overline{\mathscr{F}}$ на M^3, трансверсального к краю, получится такое C^∞-слоение, что каждая связная компонента края ∂M^3 содержится в одном слое нового слоения. Фиксируем монотонно убывающую C^∞-функцию

$$\overline{h}\colon [\varepsilon,\ 2\varepsilon] \to \mathbf{R},$$

такую, что $\overline{h}(t) = 1$ при $\varepsilon \leqslant t \leqslant 10\varepsilon/9$, $0 < \overline{h}(t) < 1$ при $10\varepsilon/9 < t < 11\varepsilon/9$ и $\overline{h}(t) = 0$ при $11\varepsilon/9 \leqslant t \leqslant 2\varepsilon$. В порядке «стандартизации» зависимости рассматриваемых объектов от ε можно считать, что $\overline{h}(t) = h_1(t/\varepsilon)$, где h_1 — подходящая функция на $[1,\ 2]$. Определим на M^3 дифференциальную C^∞-форму ω'' степени 1 следующим образом:

(i) $\omega'' = \omega'$ на $M^3 - \bigcup\limits_{i=1}^{q} N_{i,\,2\varepsilon,\,\varepsilon}$;

(ii) $\omega''(\kappa(r,\ \psi,\ v)) = (1 - \overline{h}(r))\,\omega'(\kappa(r,\ \psi,\ v)) + \frac{1}{\varepsilon}\overline{h}(r)\,dr$ на $\bigcup\limits_{i=1}^{q} N_{i,\,2\varepsilon,\,\varepsilon}$.

Если $\mathscr{D}$ есть C^∞-поле касательных плоскостей, определенное формой ω'', то на $M^3 - \bigcup\limits_{i=1}^{q} N_{i,\,4\varepsilon/3,\,\varepsilon}$ поле $\mathscr{D}$ определяется и

[1]) Коэффициенты $\overline{\Gamma}$ суть ограниченные функции локальных координат x, y, β, а $dx \wedge dy \wedge d\beta = r\,dr \wedge d\psi \wedge d\beta$, так что $\overline{\Gamma} = \overline{g_i}\,r\,dr \wedge d\psi \wedge d\beta$ с ограниченной функцией $\overline{g_i}$ и $\varepsilon \overline{g_i} r \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ (ведь $r \leqslant 2\varepsilon$). Сложнее обстоит дело с $\Gamma' = g'_i r\,dr \wedge d\psi \wedge d\beta$. В выражении для θ' только h и $\frac{dh}{dr}$ зависят от ε, при этом $h = O(1)$, $dh/dr = O(1/\varepsilon)$. Это выражение линейно зависит от производной dh/dr, причем последняя входит в него как один из множителей при dr. При внешнем дифференцировании $d((dh(r)/dr)\,dr = 0$, поэтому d^2h/dr^2 в выражение для $d\theta'$ не войдет. Не войдет туда и $(dh/dr)^2$, ибо $(dh/dr)\,dr \wedge (dh/dr)\,dr = 0$. Поэтому в выражении для $d\theta'$ неограниченной (при $\varepsilon \to 0$) величиной является только dh/dr, входящая как один из множителей при dr. Поскольку и в θ', и в $d\theta'$ производная dh/dr входит как один из множителей при dr, в $\theta' \wedge d\theta'$ не войдет $(dh/dr)^2$, так что и в выражении для Γ' единственной неограниченной величиной является dh/dr, от которой это выражение зависит линейно. Поэтому $g'_i = O(1/\varepsilon)$ и $\varepsilon g'_i r \to 0$ при $r \to 0$. — *Прим. ред.*

формой ω', а потому является вполне интегрируемым. Далее, на множестве $N_{i,\,4\varepsilon/3,\,\varepsilon}$ имеет место равенство

$$\omega'' = (1-\overline{h})\, d\hat{\gamma}_i + \frac{1}{\varepsilon}\overline{h}\, dr;$$

поэтому

$$d\omega'' = \frac{-d\overline{h}}{dr}\, dr \wedge d\hat{\gamma}_i$$

и

$$\omega'' \wedge d\omega'' = 0.$$

В силу теоремы Фробениуса (теорема 7.11) отсюда следует, что форма ω'' вполне интегрируема. Это означает, что форма ω'' определяет на M^3 C^∞-слоение коразмерности 1. Обозначим его через $\mathcal{F}'$. В силу п. (ii) в определении формы ω'', каждая связная компонента границы ∂M^3 содержится в одном слое слоения $\mathcal{F}'$.

Как было показано выше, $M^3 = V^2 \times S^1$, где $V^2 = S^2 - \bigcup\limits_{i=1}^{q} D_i^2$. Так как $D^2 = V^2 \cup D_1^2 \cup D_2^2 \cup \ldots \cup D_{q-1}^2$, имеют место равенства

$$\begin{aligned} D^2 \times S^1 &= (V^2 \cup D_1^2 \cup \ldots \cup D_{q-1}^2) \times S^1 = \\ &= M^3 \cup (D_1^2 \times S^1) \cup \ldots \cup (D_{q-1}^2 \times S^1). \end{aligned}$$

Если взять на каждом произведении $D_i^2 \times S^1$ слоение Риба ($i = 1, 2, \ldots, q-1$), то вместе со слоением $\mathcal{F}'$ на M^3 они образуют некоторое C^∞-слоение коразмерности 1 на $D^2 \times S^1$. Обозначим его через $\mathcal{F}''$. Однако, как было показано в примере В из § 16, справедливо равенство $S^3 = (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)$; поэтому если взять на $D^2 \times S^1$ слоение $\mathcal{F}''$, а на $S^1 \times D^2$ — слоение Риба, то на S^3 будет определено некоторое C^∞-слоение коразмерности 1. Обозначим его через $\mathcal{F}(K, \varepsilon)$.

Подсчитаем число Годбийона — Вея слоения $(S^3, \mathcal{F}(K, \varepsilon))$. В соответствии с определением формы ω'' каждая связная компонента границы ∂M^3 находится в одном слое. На каждом произведении $D_i^2 \times S^1$ ($i = 1, 2, \ldots, q-1$) и на $S^1 \times D^2$ с помощью слоения Риба определяется дифференциальная C^∞-форма степени 1 (§ 30, пример 2). Все эти формы вместе определяют на S^3 некоторую дифференциальную C^∞-форму ω_ε степени 1, которая в свою очередь определяет слоение $\mathcal{F}(K, \varepsilon)$. Если Γ_ε — дифференциальная форма Годбийона — Вея на S^3, соответствующая форме ω_ε, то, как было показано в примере 2 из § 30, на $D_i^2 \times S^1$ и $S^1 \times D^2$ имеет место равенство $\Gamma_\varepsilon = 0$. На $M^3 = V^2 \times S^1$ справедливо равенство $\omega_\varepsilon = \omega''$; поэтому форму Γ_ε можно описать следующим образом.

Рассмотрим открытое покрытие многообразия M^3

$$M^3 - \bigcup_{i=1}^{q} N_{i,\, 11\varepsilon/9,\, \varepsilon},$$

$$N_{i,\, 4\varepsilon/3,\, \varepsilon} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ q).$$

Пусть μ, μ_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ q)$ — соответствующее разбиение единицы. В областях $N_{i,\, 4\varepsilon/3,\, \varepsilon}$ мы имеем локальные координаты r, ψ, γ. Можно считать, что μ_i зависят только от r. Действительно, поскольку различные области $N_{i,\, 4\varepsilon/3,\, \varepsilon}$ не пересекаются, то можно сначала определить $\mu_i(r)$ (причем при $r \leqslant 11\varepsilon/9$ в соответствующей области должно быть $\mu_i(r)=1$) и затем положить $\mu = 1 - \sum_q \mu_i$.

Как мы знаем, на $M^3 - \bigcup_{i=1}^{q} \overline{N_{i,\, 11\varepsilon/9,\, \varepsilon}}$ выполняется $\omega_\varepsilon = \omega'' = \omega'$ и $d\omega' = \omega' \wedge \theta'$. Далее, в областях $N_{i,\, 4\varepsilon/3,\, \varepsilon}$

$$\omega_\varepsilon = \omega'' = (1 - \bar{h}(r))\, d\hat{\gamma}_i + \frac{1}{\varepsilon} \bar{h}(r)\, dr;$$

поэтому в них

$$d\omega_\varepsilon = -\frac{d\bar{h}(r)}{dr}\, dr \wedge d\bar{\gamma}_i,$$

и если положить

$$\theta_i'' = -\varepsilon \frac{d\bar{h}}{dr}\, d\hat{\gamma}_i + \frac{d\bar{h}}{dr}\, dr,$$

то $d\omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon \wedge \theta_i''$. Следовательно, если взять

$$\theta'' = \mu\theta' + \sum_{i=1}^{q} \mu_i \theta_i'',$$

то $d\omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon \wedge \theta''$. Поэтому на многообразии M^3

$$\Gamma_\varepsilon = \theta'' \wedge d\theta''.$$

Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M^3} \Gamma' - \Gamma_\varepsilon = 0.$$

$\Gamma' - \Gamma_\varepsilon \neq 0$ только в областях $N_{i,\, 4\varepsilon/3,\, \varepsilon}$, причем мы видели, что интеграл по такой области от Γ' стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Осталось рассмотреть интеграл от Γ_ε. Если $r \leqslant 4\varepsilon/3$, то $h(r)=1$ и $dh/dr=0$, а тогда из приведенного выше выражения для θ' видно, что в этих областях $\theta'=0$. Поэтому в

$N_{l,\,4\varepsilon/3,\,\varepsilon}$ имеем $\theta''=\mu_i\theta''_i$; значит,

$$d\theta''=-\frac{d}{dr}\left(\mu_i(r)\frac{d\bar{h}(r)}{dr}\right)dr\wedge d\hat{\gamma}_l$$

и $\theta''\wedge d\theta''=0$.
В соответствии со сказанным

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M^3}\Gamma_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M^3}\bar{\Gamma}.$$

Но

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M^3}\bar{\Gamma}=\int_{K\cup K'}\frac{-1}{y^2}\,dx\,dy\,d\beta.$$

Обозначим правую часть этого равенства через $a(K\cup K')$ и заметим, что величина

$$\mathrm{G.V.}(S^3,\ \mathcal{F}(K,\ \varepsilon))=\int_{S^3}\Gamma_\varepsilon=\int_{M^3}\Gamma_\varepsilon$$

стремится к $a(K\cup K')$ при $\varepsilon\to 0$. Это число $a(K\cup K')$ равно площади поверхности $K\cup K'$ со знаком минус; оно не равно нулю.

Докажем, что C^∞-слоения $\mathcal{F}(K,\ \varepsilon)$ и $\mathcal{F}(K,\ \varepsilon')$ C^∞-гомеоморфны. Пусть для определенности $\varepsilon'<\varepsilon$. Будем указывать на зависимость M^3 и ω'' от ε посредством нижнего индекса ε: M^3_ε, ω''_ε. Ясно, что естественным образом $M^3_\varepsilon\subset M^3_{\varepsilon'}$. Возьмем такую C^∞-функцию $r'(r)$ на $[\varepsilon,\ 2\varepsilon]$, что $r'=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}r$ при $\varepsilon\leqslant r\leqslant$ $\leqslant 11\,\varepsilon/9$, $r'=r$ для r, близких к 2ε, и всюду $dr'/dr>0$. Пользуясь введенными выше координатами в $P_{l,\,\rho,\,\varepsilon}$ и $P'_{l,\,\rho,\,\varepsilon}$, определим отображения

$$P_{l,\,2\varepsilon,\,\varepsilon}\longrightarrow P_{l,\,2\varepsilon,\,\varepsilon'},\qquad P'_{l,\,2\varepsilon,\,\varepsilon}\longrightarrow P'_{l,\,2\varepsilon,\,\varepsilon'}$$

как

$$(r,\ \psi,\ \gamma_l)\mapsto(r'(r),\ \psi,\ \gamma_l),\qquad (r,\ \psi,\ \gamma'_l)\mapsto(r'(r),\ \psi,\ \gamma'_l).$$

Из приведенного выше описания $N_{l,\,\rho,\,\varepsilon}$ видно, что эти отображения определяют C^∞-гомеоморфизм $\varphi\colon N_{l,\,2\varepsilon,\,\varepsilon}\longrightarrow N_{l,\,2\varepsilon,\,\varepsilon'}$. Непосредственное вычисление в локальных координатах показывает, что при $\varepsilon\leqslant r\leqslant 11\,\varepsilon/9$

$$\varphi^*\omega''_{\varepsilon'}=\omega''_\varepsilon.$$

Таким образом, φ переводит связные компоненты пересечений слоев $\mathcal{F}(K,\ \varepsilon)$ с $\bigcup\limits_{l=1}^{q}N_{l,\,11\varepsilon/9,\,\varepsilon}$ в связные компоненты пересечений слоев $\mathcal{F}(K, \varepsilon')$ с $\bigcup_{i=1}^{q} N_{i,\ 11\varepsilon'/9,\ \varepsilon'}$. Ясно также, что при $11\varepsilon/9 \leqslant r < 2\varepsilon$ отображение φ сохраняет соотношения типа $\gamma = \mathrm{const}$; поэтому связные компоненты пересечений слоев слоения $\mathcal{F}(K, \varepsilon)$ с $\bigcup_{i=1}^{q} N_{i,\ 2\varepsilon,\ 11\varepsilon/9}$ переходят в связные компоненты пересечений слоев слоения $\mathcal{F}(K, \varepsilon')$ с $\bigcup_{i=1}^{q} N_{i,\ 2\varepsilon,\ 11\varepsilon'/9}$. На

$$M^3_\varepsilon - \bigcup_{i=1}^{q} N_{i,\ 2\varepsilon,\ \varepsilon} = M^3_{\varepsilon'} - \bigcup_{i=1}^{q} N_{i,\ 2\varepsilon,\ \varepsilon'}$$

примем за φ тождественное преобразование. Наконец, не составляет труда продолжить φ на «подклеенные» к M^3 сплошные торы со слоениями Риба, если с самого начала считать, что они являются диффеоморфными образами некоего «стандартного» сплошного тора со слоением Риба при некоторых подходящих диффеоморфизмах.

Отсюда следует, что

$$\mathrm{G.V.}(S^3, \mathcal{F}(K, \varepsilon)) = \mathrm{G.V.}(S^3, \mathcal{F}(K, \varepsilon')).$$

Поэтому, каким бы ни было число ε, число $\mathrm{G.V.}(S^3, \mathcal{F}(K, \varepsilon))$ равно $a(K \cup K')$.

Так как величина $a(K \cup K')$ непрерывно зависит от многоугольника K, из теормы 8.4 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 8.5 (Тёрстон). *Существует континуум C^∞-слоений коразмерности 1 на S^3 с различными числами Годбийона — Вея. Следовательно, существует по крайней мере континуум классов кобордизма в $\mathcal{F}\Omega^\infty_{3,1}$.*

(Отметим, что группа Ω_3 3-мерных C^∞-кобордизмов тривиальна: $\Omega_3 = 0$.)

КОММЕНТАРИИ

В скобках [ ] указываются номера работ последних лет о слоениях, приведенных в списке литературы.

1

В главе 1 говорится о четырех работах Пуанкаре под общим названием «Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle». Они были опубликованы в Journ. Math. pures et appl., 3-e série, **7** (1881), 375—424; 3-e série, **8** (1882), 251—296; 4-e série, **1** (1885), 167—244; 4-e série, **2**(1886), 151—217. (Имеется русский перевод: Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.— М.—Л.: Гостехтеориздат, 1947.) Почти через десять лет Пуанкаре опубликовал «Analysis situs» в Journ. Ecole Polytechn., 2-e série, **1**(1895), 1—121 (русский перевод: в кн. Пуанкаре А. Избранные труды, т. II.—М: Наука, 1972), где утвердил основные принципы топологического мышления.

Сочинение «Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle» оказалось источником развития того, что сегодня называют «теорией динамических систем». Об этой теории см., например [1]),

Имито Р. Топологическая механика.—Кёрицу Сюппан, 1971 (яп.).

Хакуива К. Теория динамических систем (серия «Избранные вопросы математики»).—Иванами Сётэн, 1974 (яп.).

В первой из этих книг содержатся результаты гл. 1.

Глава 1 знакомит читателя с работами Данжуа [1] и Зигеля [1]. В последней из них вторая половина доказательства, связанная с теоремой Пуанкаре—Бендиксона, проводится несколько иначе.

Примечание 1. О существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения см. в учебниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям, например,

[1]) Литература по теории динамических систем, в том числе и имеющаяся на русском языке, довольно обширна и разнообразна по своему характеру. См. «Математическую энциклопедию», статьи «Динамическая система», «Дифференциальные уравнения на торе», «Кнезера теорема». — *Прим. ред.*

Мокумура С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Кёрицу Сюппан, 1974, (яп.) или

Тюко Д. Учебник по топологии.—Тёсо Сётэн, 1971 (яп.).

Примечание 2. Это связано с компактностью тора. Вывод о ней можно сделать из определения тора как результата отождествления сторон квадрата (рис. 1.5).

Примечание 3. Множество $\overline{\{\varphi(t, p); \ -\infty < t \leqslant s\}}$ (при $s \in]-\infty, 0]$) на торе T является замкнутым и компактным; благодаря свойству конечного пересечения, общая часть этих множеств является непустым замкнутым множеством (см. § 8).

Примечание 4. О диофантовых приближениях написано во многих учебниках по теории чисел. См, например, Дзёдзи Кодай. Начальный курс теории чисел. 2-е изд.—Кёрицу Сюппан, 1970 (яп.).

Примечание 5. Рассматривая тор так же, как в примечании 2—в виде квадрата с отождествленными сторонами,— можно свести вопрос к последовательности точек квадрата.

Примечание 6. О замкнутых поверхностях и их классификации с помощью эйлеровой характеристики написано в учебниках по топологии. См., например, Тамура И. Топология.— Иванами Сётэн, 1975 (яп.). Там же можно прочитать и о способах вычисления эйлеровой характеристики [1]).

2

В гл. 2 определяются C^r-многообразия (дифференцируемые многообразия) и вводятся лишь основные понятия. При желании с этим кругом вопросов можно познакомиться подробнее с помощью многих учебников. См. например, Фукубу С. Многообразия.—Иванами Сётэн, 1976 (яп.) [2]).

---

[1]) На русском языке наиболее доступными являются книги Спрингера [1*] (где имеется классификация ориентируемых замкнутых поверхностей) и Масси—Столлингса [1*]. Столь же доступно классификация поверхностей изложена также у Милнора—Уоллеса [1*] и Рохлина—Фукса [1*], но здесь использована не эйлерова характеристика, а другие соображения (впрочем, для читателя, знакомого с эйлеровой характеристикой, переход к ней не составит труда).

Что касается неоднократно используемой в книге теоремы Жордана, то простое доказательство имеется в книге Дьёдонне (*).— *Прим. ред,*

[2]) На русском языке наиболее популярное введение в теорию многообразий имеется у Милнора — Уоллеса (1*). — *Прим. ред.*

Примечание 1. Теорема о неявной функции и теорема об обратной функции описаны в учебниках по анализу. См., например, Дзёдзи Кодай. Введение в анализ (исправленное 3-е изд.)—Иванами Сётэн, 1961.

Примечание 2. Доказательство теоремы 2.6 проводится для компактного M^n. Однако в действительности утверждение теоремы верно и в более общем случае, а именно, когда многообразие M^n является локально компактным хаусдорфовым пространством со счетной базой. В этом случае M^n является паракомпактным (т. е. в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие) и поэтому доказательство теоремы 2.6 проводится аналогично для $\{\mu_\sigma;\ \sigma\in\Sigma\}$ [1]).

---

[1]) Условие локальной конечности в конечном счете несущественно, только в случае произвольного открытого покрытия $\mathfrak{U}=\{U_\sigma;\ \sigma\in\Sigma\}$ в определение разбиения единицы $\{\mu_\sigma;\ \sigma\in\Sigma\}$, подчиненного $\mathfrak{U}$, добавляют еще условие, чтобы система множеств $\{\operatorname{supp}\mu_\sigma;\ \sigma\in\Sigma\}$ была локально конечной, т. е. чтобы у каждой точки имелась окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом этих множеств.

Почему-то тот факт, что для любого открытого покрытия $\mathfrak{U}$ существует подчиненное ему разбиение единицы, обычно доказывают только для локально конечных $\mathfrak{U}$ (см., например, Де Рам [1*]), хотя (как упомянуто там же без дальнейших пояснений) общий случай можно свести к данному. Действительно, пусть $\mathfrak{V}=\{V_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$—локально конечное открытое покрытие, вписанное в $\mathfrak{U}$; это значит, что для каждого λ имеется такое σ, что $V_\lambda\subset U_\sigma$. Пусть $\{\varphi_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$—разбиение единицы, подчиненное $\mathfrak{V}$. Оно локально конечно и для каждого λ имеется такое σ, что $\operatorname{supp}\varphi_\lambda\subset U_\sigma$. Для каждого λ выберем какое-нибудь одно такое $\sigma=\sigma(\lambda)$, что $\operatorname{supp}\varphi_\lambda\subset U_{\sigma(\lambda)}$, и положим

$$\mu_\sigma=\sum_{\sigma(\lambda)=\sigma}\varphi_\lambda.$$

Из локальной конечности $\{\operatorname{supp}\varphi_\lambda\}$ следует, что

$$\operatorname{supp}\mu_\sigma=\bigcup_{\sigma(\lambda)=\sigma}\operatorname{supp}\varphi_\lambda,$$

так что $\operatorname{supp}\mu_\sigma\subset U_\sigma$; наличие у $\{\mu_\sigma\}$ прочих требуемых свойств очевидно.

Отметим также, что в литературе встречается более широкий вариант понятия разбиения единицы, подчиненного открытому покрытию $\mathfrak{U}=\{U_\sigma;\ \sigma\in\Sigma\}$. Отличие состоит в том, что функции, образующие разбиение единицы, «нумеруются» не индексами σ из Σ, а индексами λ из какой-то другой системы индексов Λ, и вместо условия $\operatorname{supp}\mu_\sigma\subset U_\sigma$ должно выполняться такое условие: для каждого $\lambda\in\Lambda$ имеется такое $\sigma\in\Sigma$, что $\operatorname{supp}\mu_\lambda\subset U_\sigma$. (Остальные условия—гладкость μ_λ, локальная конечность $\{\operatorname{supp}\mu_\lambda\}$, $\Sigma\mu_\lambda=1$—остаются без изменений.) При таком понимании у Стернберга [1*] доказано, что для любого открытого покрытия $\mathfrak{U}$ суще-

Примечание 3. Докажем сначала следующую лемму [1]).

Лемма. *Пусть f — функция класса C^∞, определенная в некоторой выпуклой окрестности V начала координат O в пространстве $\mathbf{R}^n$, причем $f(0)=0$. Тогда на окрестности U существуют C^∞-функции g_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, такие, что*

(i) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$((x_1, \ldots, x_n) \in U)$;

(ii) $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражается в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)}{dt}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\, x_i\, dt.$$

Поэтому функции

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\, dt \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

являются искомыми. □

Для некоторого $U_\lambda \subset U$ имеет место равенство $\varphi_\lambda(p)=0$ и множество $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ является выпуклой окрестностью начала координат. В силу леммы, примененной к $f \circ \varphi_\lambda^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(p)$, имеем

$$f \circ \varphi_\lambda^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Далее,

$$g_i(0) = \frac{\partial(f \circ \varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_i}(0)$$

ствует подчиненное ему разбиение единицы $\{\mu_\lambda;\ \lambda \in \Sigma\}$ (причем с компактными $\operatorname{supp} \mu_\lambda$, — именно поэтому пришлось ослабить условие подчинения покрытию). Как мы видели, отсюда следует существование разбиения единицы, подчиненного $\mathfrak{U}$ в нашем смысле слова. — *Прим. ред.*

[1]) Она называется леммой Адамара. — *Прим. ред.*

и, применяя лемму к разности $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{\partial(f\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_i}(0)$, получаем

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial(f\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x_i}(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j f_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

При этом f_{ij} являются C^∞-функциями, определенными на $\varphi_\lambda(U_\lambda)$. В двух полученных формулах и заключено требуемое равенство.

Примечание 4. Воспользоваться примечанием 2.

Примечание 5. Справедливость аксиом метрики (ii) и (iii) очевидна. Чтобы установить справедливость и аксиомы (i), нужно соответствующим образом рассмотреть геодезические [1]).

3

В гл. 3. излагаются три результата о динамических системах. В § 13 помещена теорема Пуанкаре—Бендиксона, которая описана в работе Пуанкаре, упомянутой в разд **1**, и в статье, последовавшей за этой работой,

Bendixson I., Sur les courbes définies par les équations différentielles. Acta Math., **24** (1901), 1—88. [На русский язык переведена I глава этой работы: Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. УМН, 1941, вып. IX, 191—211. Автор ссылается на работу Бендиксона именно по поводу результатов из ее I гл. — *Ред.*] В частности, доказательство этой теоремы о динамических системах существенным образом используется при доказательстве теоремы С. П. Новикова в § 25.

---

[1]) Докажем, что $\rho(p, p')=0$ лишь при $p'=p$. Пусть $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$—координатная окрестность, содержащая p. Уменьшив, если потребуется, U_λ, можно считать, что существует такое $c>0$, что в рассматриваемой римановой метрике норма любого вектора $v\in T(U_\lambda)$

$$\|v\| \geqslant c\,\|\varphi_{\lambda*} v\|_{\mathbf{R}^n},$$

где справа стоит обычная евклидова норма вектора в $\mathbf{R}^n$. Отсюда ясно, что если кривая, соединяющая p с p', целиком лежит в U_λ, то ее длина не меньше, чем $c\,\|\varphi_\lambda(p)-\varphi_\lambda(p')\|_{\mathbf{R}^n}$, а если она выходит из U_λ, то ее длина не меньше, чем расстояние в $\mathbf{R}^n$ от $\varphi_\lambda(p)$ до границы области $\varphi_\lambda(U_\lambda)$.

При помощи аналогичных рассуждений доказывается, что в любой окрестности точки p содержится некоторый шар $\{p';\ \rho(p, p')<\varepsilon\}$ и что в каждом таком шаре содержится некоторая окрестность точки p. — *Прим. ред.*

§ 14 знакомит с работой Швейцера [1]. Ее результаты близки к описанным в § 6 в связи с векторным C^1-полем Данжуа; в гл. 6 эти вопросы рассматриваются заново. По поводу гипотезы Зейферта см. Зейферт [1].

В § 15 излагается работа Вильсона [1], содержащая описание векторного C^∞-поля Вильсона.

Примечание 1. По поводу векторных C^r-полей и эйлеровой характеристики см., например, Кавата К. Топология (серия: лекции по современной математике). — Иванами Сётэн, 1965, гл. 6 (яп.).

Примечание 2. Если M_1, M_2 суть C^r-многообразия ($r \geqslant 1$), то определены проекции $\pi_i: M_1 \times M_2 \to M_i$ ($i = 1, 2$), где $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ ($x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$). При этом для каждого вектора $v_1 \in T_{x_1}(M_1)$ однозначно определен вектор $v \in T_{(x_1, x_2)}(M_1 \times \times M_2)$, такой, что $(\pi_1)_*(v) = v_1$, а $(\pi_2)_*(v) = 0$. Этот вектор v будем обозначать снова через v_1. Аналогично вводится вектор $v_2 \in T_{(x_1, x_2)}(M_1 \times M_2)$, связанный с вектором из $T_{x_2}(M_2)$.

4.

В гл. 4 расматривается определение слоения. Оно вводится геометрически, по аналогии с характерным случаем, когда слоение является C^r-расслоением.

Примечание 1. Пусть $(M, \mathscr{S})$ и $(M', \mathscr{S}')$ суть C^r-многообразия и $C^r(M, M')$ — множество всех C^r-отображений из M в M'. На этом множестве можно ввести топологию, называемую *C^r-топологией*, следующим образом. Пусть $f \in C^r(M, M')$. Окрестностью элемента f назовем множество всех таких $g \in C^r(M, M')$, для которых производные функций $\varphi'_{\lambda'} \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ и $\varphi'_{\lambda'} \circ g \circ \varphi_\lambda^{-1}$ до r-го порядка включительно достаточно близки на множестве $\varphi_\lambda(K)$, где K — компактное подмножество в U_λ и $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathscr{S}$, $(U'_{\lambda'}, \varphi'_{\lambda'}) \in \mathscr{S}'$, $f(U_\lambda) \subset U'_{\lambda'}$.

Примечание 2. Пусть M^n есть C^r-многообразие ($r \geqslant 2$) с определенной на нем римановой метрикой. Для $p \in M^n$ и $v \in T_p(M^n)$ с достаточно малой нормой $\|v\|$ существует геодезическая $g: [0, 1] \to M^n$, такая, что $g(0) = p$ и $\frac{dg}{dt}(0) = v$. Тогда по определению

$$\operatorname{Exp}(v) = g(1).$$

Примечание 3. О числе Лебега см., например, Тамура И. Топология. — Иванами Сётэн, лемма 4.6 (яп.).

5

Глава 5 знакомит с важнейшими результатами работы Риба [1]. Принадлежащее Рибу определение системы когерентных окрестностей здесь дается в несколько иной форме. По поводу теорем об устойчивости имеются новые результаты Тёрстона [5], полученные в последнее время.

Примечание 1. По поводу фундаментальной группы написано в любом введении в топологию[1]).

Примечание 2. См. Риб [1].

6

В связи с материалом главы 6, § 23, см.

Нисимори Б. Векторное поле на S^3 без замкнутых орбит. Избранные лекции по математическому анализу, 173. Университет Киото (синтетическое изучение динамических систем) (яп.).

О результате С. П. Новикова [1], описанном в § 25, рассказывается также в статье Хефлигера [3].

Примечание 1. Универсальное накрывающее пространство $\tilde{L}'_{\alpha(t)}$ для $L'_{\alpha(t)}$ — это такое тотальное пространство накрытия $\pi: \tilde{L}'_{\alpha(t)} \to L'_{\alpha(t)}$ с базой $L'_{\alpha(t)}$, которое связно и имеет фундаментальную группу, состоящую лишь из единичного элемента. Далее, пусть $g: A \to L'_{\alpha(t)}$ — отображение (здесь A — любое топологическое пространство); если можно определить такое отображение $\tilde{g}: A \to \tilde{L}'_{\alpha(t)}$, что $\pi \circ \tilde{g} = g$, то в этом случае говорят, что $\tilde{g}$ получилось *подъемом* из g, или что $\tilde{g}$ *накрывает* g.

7

Как уже указывалось в примерах гл. 1, число r для C^r-слоения имеет важное значение. В главе 7 вводятся дифференциальные формы класса C^r и на примере теоремы Фробениуса описывается их связь с C^r-слоениями.

---

1) Элементарное и в то же время полное изложение имеется у Спрингера [1*] и особенно у Масси (см. Масси — Столлингс [1*]). — *Прим. ред.*

8

Глава 8 посвящена детальному разбору работы Тёрстона [2]. При этом использовались замечания Милнора о работе Тёрстона и материалы семинара Мидзутани и Нисимори[1]).

Примечание 1. Обычно риманова метрика $\{\langle\ ,\ \rangle_p,\ p \in M^n\}$ определяется следующим образом. Фиксируются координатные окрестности $(U_\lambda,\ \varphi_\lambda)$ и для $\varphi_\lambda(U_\lambda) \ni (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ вводятся отображения $g_{ij}\colon U_\lambda \to \mathbf{R}$, такие, что

$$g_{ij}(p') = \left\langle (\Phi_\lambda^*)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right),\quad (\Phi_\lambda^*)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right\rangle_{p'} \quad (p' \in U_\lambda);$$

после этого риманова метрика на U_λ выражается равенством

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i\, dx_j.$$

Примечание 2. Пусть τ — дробно-линейное преобразование, переводящее точку z в точку $\frac{az+b}{cz+d}$, и пусть при этом преобразовании ориентированная специальная полуокружность L переходит в ориентированную специальную полуокружность L'. Пусть, далее, $(x,\ y,\ v) \in L_\alpha$, где v — вектор, касательный к L в точке $(x,\ y)$, и $\|v\| = 1$; тогда определено

$$\tau_*(x,\ y,\ v) = (x',\ y',\ v'),$$

где v' — вектор, касательный к L' в точке $(x',\ y')$, и, так как преобразование τ не меняет риманову метрику, то $\|v'\| = 1$. Следовательно, $(x',\ y',\ v') \in L_{\tau(\alpha)}$ и отображение τ_* переводит слой L_α в слой $L_{\tau(\alpha)}$. Это в свою очередь означает, что слоение $\mathcal{F}$ инвариантно относительно τ_*.

Докажем, что $(\tau_*)^*\omega = \omega$. Пусть для простоты

$$\tau(x) = x', \quad \tau(y) = y', \quad \tau(\alpha) = \alpha', \quad \tau_*(\beta) = \beta'.$$

Кроме того, пусть α — координата точки P, изображенной на рис. 8.4.

Тогда $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{y}{x-\alpha}$ и, аналогично,

$$\operatorname{tg}\frac{\beta'}{2} = \frac{y'}{x'-\alpha'}.$$

[1]) При чтении этой главы полезно, хотя и не обязательно, иметь хотя бы самое начальное представление о кобордизме многообразий. См. Милнор — Уоллес [1*], Рохлин — Фукс [1*].

Относительно терминологии следует заметить, что в топологии было предложено переименовать «кобордизмы» в «бордизмы», а название «кобордизм» использовать для некоторых других объектов. Однако теорию слоений эта реформа, по-видимому, не затронула — быть может потому, что упомянутых «других объектов» в этой теории нет. — *Прим. ред.*

Здесь

$$x' = \frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2}{(cx+d)^2+c^2y^2}, \quad y' = \frac{y}{(cx+d)^2+c^2y^2}$$

и

$$\alpha' = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}.$$

Соответствие $(x, y, \beta) \mapsto (x', y', \beta')$ можно представить как композицию трех соответствий

$$(x, y, \beta) \mapsto (x, y, \alpha) \mapsto (x', y', \alpha') \mapsto (x', y', \beta').$$

При первом из них, поскольку $\alpha = x - y \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$, имеют место равенства

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = \frac{\partial y}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = \frac{(x-\alpha)^2+y^2}{2y}:$$

при втором соответствии

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha} = \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} = \frac{1}{(c\alpha+d)^2},$$

наконец, при третьем соответствии

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha'} = \frac{\partial y'}{\partial \alpha'} = 0, \qquad \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha'} = \frac{2y'}{(x'-\alpha')^2+y'^2}.$$

Прямой подсчет показывает, что [1])

$$(x'-\alpha')^2+y'^2 = \frac{(x-\alpha)^2+y^2}{((cx+d)^2+c^2y^2)(c\alpha+d)^2}$$

и потому

$$\frac{\partial \beta'}{\partial \alpha'} = \frac{2y(c\alpha+d)^2}{(x-\alpha)^2+y^2}.$$

---

[1]) При этом подсчете удобнее исходить не из написанных выше формул для x' и y', а непосредственно из определения τ:

$$(x'-\alpha')^2+y'^2 = |z'-\alpha'|^2 = \left|\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{z-\alpha}{(cz+d)(c\alpha+d)}\right|^2 = \frac{(x-\alpha)^2+y^2}{((cx+d)^2+y^2)(c\alpha+d)^2}. \text{— *Прим. ред.*}$$

Используя полученные соотношения, докажем равенство $(\tau_*)_*\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial\beta'}$. Действительно [1]),

$$(\tau_*)_*\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)=\frac{\partial x'}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial\beta'}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta'}=$$
$$=\frac{\partial\beta'}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta'}=\left(\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}+\frac{\partial\beta'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial\beta'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)\frac{\partial}{\partial\beta'}=$$
$$=\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta'}=\left(\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha'}\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}+\frac{\partial\beta'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial\alpha}+\frac{\partial\beta'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta'}=$$
$$=\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha'}\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta'}=\frac{\partial}{\partial\beta'}.$$

Как отмечалось выше, слоение $\mathcal{F}$ инвариантно относительно τ_*. Поэтому существует такая C^∞-функция $f\colon E\to\mathbf{R}$, что

$$(\tau_*)^*\,\omega=f\omega.$$

Следовательно,

$$((\tau_*)^*\omega)\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)=(f\omega)\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)=f.$$

Однако для левой части этого равенства имеем

$$((\tau_*)^*\omega)\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)=\omega\left((\tau_*)_*\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right)=\omega\left(\frac{\partial}{\partial\beta'}\right)=1;$$

поэтому $f=1$. Следовательно, $(\tau_*)^*\omega=\omega$.

Примечание 3. Классифицирующим пространством ориентируемых C^r-расслоений со слоем S^1 является комплексное проективное пространство $\mathbf{CP}^N$ (при достаточно большом N), а отображение $V^2\to\mathbf{CP}^N$ гомотопно нулю [2]). Поэтому C^r-расслоение с базой V^2 и слоем S^1 является расслоением произведения.

Тем, у кого появился интерес к слоениям, порекомендуем в заключение лекции Ботта [3] и работу Тамуры—Мидзутани [1]. Полезным будет также и обзор Лоусона [2] [3]).

---

[1]) Очевидно, что τ_* переводит единичную окружность касательной плоскости T_zH в единичную окружность касательной плоскости $T_{z'}H$. Векторы же $\partial/\partial\beta$, $\partial/\partial\beta'$ суть единичные векторы, которые касаются этих окружностей (и направления которых отвечают положительным направлениям на окружности). — *Прим. ред.*

[2]) Ибо сфера с дырками V^2 имеет гомотопический тип букета окружностей, а $\pi_1(\mathbf{CP}^N)=0$. Впрочем, тот факт, что ориентируемое расслоение со слоем S^1 над букетом окружностей (а значит, и над V^2) является прямым произведением, легко доказать и непосредственно, не обращаясь к понятию классифицирующего пространства. — *Прим. ред.*

[3]) См. также Лоусон [3*]. — *Прим. ред.*

Примечания редактора перевода

[1] Основная идея доказательства теоремы Зигеля очень проста. Строится замкнутая трансверсаль $L(X)$, и надо доказать, что если интегральная кривая, начинающаяся на $L(X)$, не пересекает снова $L(X)$, то эта интегральная кривая навивается на замкнутую траекторию. (Если это доказано и если никаких замкнутых траекторий на самом деле нет, то дальше все сводится к свойствам отображения последования, возникающего на $L(X)$, т. е. к теореме Данжуа.) Оказывается, что

$$(1)\qquad \begin{cases}\text{если разрезать тор по } L(X), \text{ то получится кольцо,}\\ \text{диффеоморфное } S^1\times[0,\ 1].\end{cases}$$

Из X при этом получится векторное поле в кольце, а из нашей интегральной кривой — интегральная кривая этого векторного поля, остающаяся в кольце при всех $t\geqslant 0$, и, значит, имеющая там ω-предельное множество. Но кольцо можно вложить в плоскость, а ω-предельные множества в областях на плоскости составляют предмет теории Пуанкаре — Бендиксона. Эта теория (она излагается в гл. 3, а в данном случае достаточно некоего ее фрагмента — см. рис. 1.24 и относящийся к нему текст) позволяет заключить, что в данном случае ω-предельным множеством может быть только замкнутая траектория.

Сложность доказательства связана с утверждением (1). Несложно представить себе, что получится при разрезании тора по какой-нибудь конкретной кривой (скажем, кривой $x=\text{const}$ или $7x+10y=\text{const}$), но относительно $L(X)$ имеется лишь некоторая информация общего характера ($L(X)$ не имеет самопересечений и не ограничивает области на торе, что, кстати, тоже приходится доказывать). Чтобы извлечь отсюда надлежащие выводы, приходится использовать некую «общую теорию» (классификацию поверхностей).

Оказывается, однако, что эту трудность можно если не преодолеть, то обойти с помощью существенно более простых средств — теоремы Жордана, свойств стандартного накрытия [1])

---

[1]) То есть отображения, сопоставляющего точке $P\in\mathbb{R}^2$ точку $[P]\in T$; говорят, что первая точка накрывает вторую. (Это отображение является накрытием в смысле § 17.) Очевидный смысл имеют утверждения, что кривая или векторное поле на плоскости накрывает кривую или векторное поле на торе.

$\mathbf{R}^2 \to T$ и степени отображения окружности (точнее, вращения векторного поля).

Отметим сначала, что если ввести на плоскости новые координаты (x_1, y_1) посредством линейного преобразования

$$x_1 = ax + by, \qquad y_1 = cx + dy$$

с целочисленной унимодулярной матрицей коэффициентов (т. е. a, b, c, d — целые числа и $ad - bc = 1$), то числа (x_1, y_1) будут (оба) целыми тогда и только тогда, когда (x, y) — целые числа. Поэтому новые координаты по-прежнему обладают тем свойством, что точки P и P' плоскости накрывают одну и ту же точку тора тогда и только тогда, когда их координаты различаются на целые числа. Отметим также, что если координаты некоторой точки P суть взаимно простые целые числа, скажем (m, n), то найдется такое линейное преобразование координат с целочисленной унимодулярной матрицей коэффициентов, что новыми координатами точки P будут $(1, 0)$. Действительно, раз m и n взаимно просты, то существуют такие целые a и b, что $am + bn = 1$; возьмем $c = -n$, $d = m$. Наконец, если целые числа m и n не взаимно просты и r — их наибольший общий делитель, то, применяя предыдущие соображения к $(m/r, n/r)$, получим, что новыми координатами точки P будут $(r, 0)$.

Пусть $\tilde{L} = \{(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s));\ 0 \leqslant s \leqslant a\}$ — кривая на плоскости, накрывающая кривую $L(X) = \{p(s),\ 0 \leqslant s \leqslant a\}$ на торе, а $\tilde{X}$ — векторное поле на плоскости, накрывающее поле X. Интегральную кривую поля $\tilde{X}$ с начальным значением P будем обозначать через $\tilde{\varphi}_{\{P\}}(t)$. Будет доказано, что если

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} P \in \tilde{L} \text{ и } \tilde{\varphi}_{\{P\}}(t) \text{ не пересекает ни одной из кривых} \\ \tilde{L} + (k, l) = \{(\tilde{x}(s) + k,\ \tilde{y}(s) + l);\ 0 \leqslant s \leqslant a\} \text{ со все-} \\ \text{возможными целыми } k, l, \end{cases}$$

то

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \text{существует такая точка } Q, \text{ что при некотором} \\ \tau > 0\ \tilde{\varphi}_{\{Q\}}(t + \tau) = \tilde{\varphi}_{\{Q\}}(t) + (a, b) \text{ с целыми } a, b. \end{cases}$$

Ясно, что тогда $\tilde{\varphi}_{\{Q\}}(t)$ накрывает некоторую периодическую интегральную кривую на торе.

$\tilde{L}$ не может быть замкнутой кривой — в противном случае $\tilde{L}$ была бы простой замкнутой кривой (ибо уже $L(X)$ не имеет самопересечений) и ограничивала бы некоторую область G на плоскости, а в G имелась бы особая точка поля $\tilde{X}$ (ибо на границе G поле $\tilde{X}$ направлено либо всюду внутрь G, либо всюду наружу); но тогда и X имело бы особую точку на торе. Поэтому

$$(4)\qquad (\tilde{x}(a),\ \tilde{y}(a))=(\tilde{x}(0),\ \tilde{y}(0))+(m,\ n),$$

где $(m,\ n)$ — целые числа и хоть одно из них отлично от нуля. Ввиду отсутствия самопересечений у $L(X)$

(5) $\left\{\begin{array}{l}\text{равенство}\\ (\tilde{x}(s_1),\ y(\tilde{s}_1))=(\tilde{x}(s_2),\ \tilde{y}(s_2))+(\text{пара целых чисел})\\ \text{возможно лишь когда } s_1=s_2 \text{ или когда } s_1 \text{ и } s_2\\ \text{равны } 0 \text{ или } a.\end{array}\right.$

Пусть r — наименьший общий делитель чисел $m,\ n$ (из (5) можно вывести, что $r=1$, но нам это не понадобится). Введя на плоскости новые координаты с помощью подходящего линейного преобразования с целочисленной унимодулярной матрицей коэффициентов и обозначая новые координаты снова через $(x,\ y)$, получим, что в новых координатах $\tilde{L}$ имеет параметрическое представление $\{(\tilde{x}(s),\ \tilde{y}(s));\ 0\leqslant s\leqslant a\}$, причем выполняются свойства (4) с $(m,\ n)=(r,\ 0)$ и (5). По-прежнему надо доказать, что из (2) следует (3).

Используя полярные координаты $(\rho,\ \varphi)$ на плоскости с выколотым началом координат $\mathbf{R}^2-\{(0,\ 0)\}$, рассмотрим отображение

$$F\colon\ \mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}^2-\{(0,\ 0)\},$$

определяемое так: полярные координаты точки $F(x,\ y)$ суть

$$\rho=e^y,\qquad \varphi=\frac{2\pi x}{r}.$$

F является локальным диффеоморфизмом и переводит $\tilde{X}$ в некоторое поле $\hat{X}$ на $\mathbf{R}^2-\{(0,\ 0)\}$ (заметим, что если $F(P)=F(P')$, то $\tilde{X}(P)=\tilde{X}(P')$). Пусть $\hat{L}=F(\tilde{L})$. Тогда $\hat{L}$ — замкнутая кривая без самопересечений. Она ограничивает на плоскости некоторую область G. При этом $(0,0)\in G$, ибо при обходе по $\hat{L}$ аргумент радиус-вектора изменяется на 2π. Следовательно, при достаточно большом n кривая $e^{-n}\hat{L}$ (φ то же, что и для $\hat{L}$, а ρ уменьшено в e^n раз) тоже лежит в G (на самом деле это так при $n=1$, но без этого опять-таки можно обойтись). Увеличив $e^{-n}\hat{L}$ и $\hat{L}$ в e^n раз посредством гомотетии с центром в $(0,\ 0)$, заключаем, что $\hat{L}$ лежит внутри $e^n\hat{L}$. Возьмем такое c, что $|\tilde{y}(s)| \leqslant c$ при всех $s \in [0, a]$. Тогда окружность $\rho = e^{-n-c}$ лежит внутри $e^{-n}\hat{L}$, а окружность $\rho = e^{n+c}$ содержит внутри себя $e^{n}\hat{L}$.

F переводит $\tilde{\varphi}_{\{P\}}(t)$ в некоторую интегральную кривую $\hat{\varphi}_{\{F(P)\}}(t)$ поля $\hat{X}$. Из (1) следует, что эта кривая не пересекает $e^{-n}\hat{L}$ и $e^{n}\hat{L}$, так что при всех $t \geqslant 0$ она находится снаружи $e^{-n}\hat{L}$ и внутри $e^{n}\hat{L}$. Тем более она не выходит из кольца $e^{-n-c} \leqslant \rho \leqslant e^{n+c}$. Поскольку в последнем нет особых точек поля $\hat{X}$, из теории Пуанкаре—Бендиксона следует, что $\hat{\varphi}_{\{F(P)\}}(t)$ наматывается на некоторую замкнутую траекторию поля $\hat{X}$. Последняя является образом (при F) некоторой интегральной кривой $\tilde{\varphi}_{\{Q\}}(t)$ поля $\tilde{X}$, и ясно, что $\tilde{\varphi}_{\{Q\}}(t)$ должна обладать свойством (2).

[2] Если коразмерность слоения $\mathcal{F}$ больше 1, то неизвестно, всегда ли существует слоение $\mathcal{F}'$, трансверсальное к $\mathcal{F}$. Конечно, $\mathcal{F}'$ можно построить локально, в любой расслоенной координатной окрестности. Ниже понадобится другой локальный результат—построение $\mathcal{F}'$ в окрестности компактного слоя L_α слоения $\mathcal{F}$. По существу это построение связано не со слоением $\mathcal{F}$, а только с замкнутым многообразием L_α. Именно так мы его и изложим—для замкнутого q-мерного подмногообразия $N^q \subset M^n$. Для наших целей достаточно считать N^q целиком лежащим либо в $M^n - \partial M^n$, либо в ∂M^n. Будем считать, что M^n имеет класс гладкости C^s, а N^q—класс C^r $(s \geqslant r \geqslant 1)$.

а) Пусть $A \subset M^n$. Если каждому $a \in A$ сопоставлено некоторое m-мерное векторное подпространство E_a касательного пространства $T_a M^n$, то будем говорить, что на A задано *поле касательных m-мерных плоскостей*. (Ср. с § 28, где вводится это понятие для $A = M^n$. «Касательный» в нашем случае отнюдь не подразумевает, что E_a в каком-то смысле касается A.) Если для каждой точки $a \in A$ существуют векторные поля $X_1, \ldots, X_m$ класса C^k $(0 \leqslant k \leqslant s-1)$, заданные в некоторой окрестности U_a этой точки на M^n и образующие базис в E_b при любом $b \in U_a \cap A$, то говорят, что поле касательных плоскостей $\{E_a;\ a \in A\}$ имеет класс гладкости C^k.

Полезно иметь в виду, что это определение можно сформулировать иначе. Пусть G_x^m—множество всех m-мерных векторных подпространств пространства $T_x M^n$. Тогда поле касательных m-мерных плоскостей, заданное на A—это просто отображение $A \longrightarrow \bigcup\limits_{x \in M^n} G_x^m$, обладающее тем свойством, что (образ a) $\in G_a^m$ при всех $a \in A$. В объединении $\bigcup\limits_x G_x^m$ можно естественным образом ввести топологию и структуру гладкого многообразия класса C^{s-1} (это делается с помощью локальных координат и лишь немногим сложнее, чем введение топологии и гладкости в $\bigcup\limits_x T_x M^n$). Оказывается, что определенный выше класс гладкости поля $\{E_a\}$—это просто класс гладкости отображения $A \to \bigcup\limits_x G_x^m$. После этого понятно, что, скажем, непрерывное поле касательных плоскостей можно аппроксимировать полем класса C^{s-1} (поскольку аналогичное аппроксимационное утверждение справедливо вообще для отображений гладких многообразий, см., например, Рохлин — Фукс [1*]).

б) *Трансверсализация* подмногообразия N^q — это такое заданное на нем поле касательных $(n-q)$-мерных плоскостей $\{E_x^{n-q}\}$, что при всех $x \in N^q$

$$T_x M^n = E_x^{n-q} \oplus T_x N^q.$$

Если M^n снабжено римановой метрикой класса C^{s-1}, то в каждой точке $x \in N^q$ можно в качестве E_x^{n-q} взять ортогональное дополнение к $T_x N^q$ в $T_x M^n$. Полученная трансверсализация называется *нормализацией*; она имеет класс гладкости C^{r-1}. Путем сглаживания можно из нормализации получить трансверсализацию максимального возможного класса гладкости, т. е. класса C^{s-1}.

в) Пусть на N^q задана трансверсализация $\{E_x;\ x \in N^q\}$ класса $C^{r'}$, и пусть сначала $N^q \subset M^n - \partial M^n$. Рассмотрим в TM^n подмножество

$$E = \{X;\ \pi(X) \in N^q,\ X \in E_{\pi(X)}\} = \bigcup_{x \in N^q} E_x$$

(π: $TM^n \to M^n$ — стандартная проекция: $\pi(T_x M^n) = x$). Как легко видеть, E является подмногообразием TM^n класса $C^{r''}$, $r'' = \min(r, r')$, а $\pi | E$: $E \to N^q$ является расслоением (см. § 17) того же класса гладкости со стандартным слоем $\mathbf{R}^{n-q}$ (причем слоем над x является как раз E_x). Имеется естественное вложение i: $N \to E$, переводящее точку $x \in N^q$ в нуль векторного пространства E_x. Это вложение, как и его образ, называется *нулевым сечением* расслоения $E \to N^q$. (Вообще, сечением расслоения называется отображение базы в тотальное пространство, при котором образ каждой точки базы лежит в слое над этой точкой.)

Если $N^q \subset \partial M^n$, то определим E несколько иначе, относя к слою над x только те векторы из E_x, которые либо касаются ∂M^n, либо направлены внутрь M^n. (В терминах § 11 это те векторы из E_x, у которых в используемых там координатах последняя компонента неотрицательна.) Теперь E является подмногообразием с краем класса $C^{r''}$ многообразия TM^n, а $\pi | E$: $E \to N^q$ по-прежнему является $C^{r''}$-расслоением, только стандартный слой теперь есть $\mathbf{R}_+^{n-q}$. Нулевое сечение определяется, как и выше.

Пользуясь какой-нибудь римановой метрикой на M^n и считая, что $\varepsilon > 0$, положим $E^\varepsilon = \{X; X \in E, \|X\| < \varepsilon\}$. Это есть некоторая окрестность нулевого сечения $i(N^q)$ в E и $i \circ (\pi | E^\varepsilon)$: $E^\varepsilon \to i(N^q)$ является расслоением класса $C^{r''}$, стандартным слоем которого служит открытый $(n-q)$-мерный шар (когда $N^q \subset M^n - \partial M^n$) или его пересечение с $\mathbf{R}_+^{n-q}$ (когда $N^q \subset \partial M^n$). Слой над x обозначим через E_x^ε. Наша цель — показать, что у N^q в M^n имеется окрестность, устроенная совершенно так же, как окрестность E^ε нулевого сечения $i(N^q)$ в E.

г) Возьмем какое-нибудь отображение φ: $E^\varepsilon \to M^n$ класса $C^{r''}$ со следующими свойствами:

1) $\varphi(i(x)) = x$ при всех $x \in N^q$;

2) при всех $x \in N^q$ дифференциал отображения $\varphi | E_x^\varepsilon$: $E_x^\varepsilon \to M^n$ в нуле пространства E_x переводит вектор $Y \in T_0 E_x$ снова в Y (пользуясь естественными отождествлениями пространств $T_0 E_x$ и E_x, мы рассматриваем Y то в одном из них, то в другом);

3) при $N^q \subset \partial M^n$ дополнительно потребуем, чтобы $\varphi(\partial E^\varepsilon) \subset \partial M^n$. Тогда $\varphi | E^\delta$ при достаточно малом δ является $C^{r''}$-вложением E^δ в M^n и $\varphi(E^\delta)$ является некоторой окрестностью многообразия N^q в M^n.

Действительно, из 1) и 2) следует, что φ имеет ранг n в точках нулевого сечения, так что при $N^q \cap \partial M^n = \varnothing$ теорема об обратной функции и компактность N^q гарантирует существование такого конечного открытого покрытия $\{U_i\}$ многообразия N^q и такого $\delta_0 > 0$, что φ устанавливает $C^{r''}$-гомеоморфизм между $(\pi | E^{\delta_0})^{-1} U_i$ и некоторой областью в M^n. Небольшое рассуждение позволяет сделать такое же заключение и при $N^q \subset \partial M^n$. Надо доказать, что для любой точки $x \in N^q$ найдутся такие ее окрестность U и число $\delta > 0$, что $\varphi((\pi | E^\delta)^{-1} U)$ есть область в M^n. При этом в специальном рассмотрении нуждаются только точки края: надо доказать, что (при надлежащих U, δ) если

$$x \in \partial M^n \cap \varphi((\pi | E^\delta)^{-1} U),$$

то некоторая окрестность точки x в M^n содержится в образе $\varphi((\pi | E^\delta)^{-1} U)$. В терминах локальных координат φ описывается как некоторое $C^{r''}$-отображение

$$\psi\colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_n),$$

которое определено в некоторой окрестности W_+ начала координат в $\mathbf{R}^n_+$, причем $\psi(W_+) \subset \mathbf{R}^n_+$, а также 1′) начало координат переходит в себя; 2′) матрица частных производных в нем единичная; 3′) $y_n = 0$ при $x_n = 0$. Надо доказать, что, уменьшив, если потребуется, W_+, можно добиться, чтобы у каждой точки

$$(*) \qquad y \in \psi(W_+) \cap \{x_n = 0\}$$

имелась окрестность U_y, для которой $U_y \cap \mathbf{R}^n_+ \subset \psi(W_+)$. Согласно *общему понятию гладкого отображения*, ψ *является* ограничением на W_+ некоторого $C^{r''}$-отображения $W \to \mathbf{R}^n$ (обозначим его снова через ψ), где W — некоторое открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$, содержащее W_+. Уменьшив, если понадобится, W и W_+, можем считать, что W — открытый шар в $\mathbf{R}^n$ с центром в начале координат, а ψ является $C^{r''}$-вложением W в $\mathbf{R}^n$, которое отображает $W_+ = W \cap \mathbf{R}^n_+$ в $\mathbf{R}^n_+$, обладает свойствами 1′), 2′), 3′) и для которого $\partial y_n / \partial x_n > 0$ всюду в W. Доказываемое утверждение теперь очевидно (теперь y из (*) является образом точки $x \in W \cap \mathbf{R}^{n-1}$, некоторая окрестность U_x которой отображается так, что

$$\psi(U_x \cap \{x_n < 0\}) \subset \{x_n < 0\}$$

и $\psi(U_x)$ является окрестностью точки y).

С помощью римановой метрики превратим M^n в метрическое пространство с расстоянием ρ. Пусть d — число Лебега упомянутого выше покрытия $\{U_i\}$. Тогда если точки $x, y \in N^q$ таковы, что никакое из множеств U_i не содержит их обеих, то $\rho(x, y) > d$. Далее, из гладкости φ и компактности N^q следует существование такого $C > 0$, что если $x \in E^{\delta_0}_x$, то $\rho(x, y(X)) < C \| X \|$. Возьмем $\delta < \min(\delta_0, d/2C)$ и докажем, что φ не может перевести две различные точки X, Y из E^δ в одну. Если точки $x = \pi(X)$ и $y = \pi(Y)$ находятся в пределах какого-нибудь одного U_i, то это явствует из сказанного выше о свойствах $\varphi | (\pi | E^{\delta_0})^{-1} U_i$. В противном же случае

$$\rho(\varphi(X), \varphi(Y)) \geqslant \rho(x, y) - \rho(x, \varphi(X)) - \rho(y, \varphi(Y)) \geqslant$$
$$\geqslant d - C\|X\| - C\|Y\| > d - 2C\delta > 0.$$

$\varphi(E^\delta)$ называют *трубчатой окрестностью* многообразия N^q в M^n (происхождение названия будет ясно, если рассмотреть пример, когда N^q — кривая в $M^n = \mathbf{R}^3$). $C^{r''}$-гомеоморфизм φ переносит на трубчатую окрестность имеющуюся в E^δ структуру $C^{r''}$-расслоения над N^q.

Построенное расслоение трубчатой окрестности является некоторым слоением $\mathcal{F}'$ (со слоями $\varphi(E_x^\delta)$, $x \in N^q$), определенным не на всем M^n, а только возле N^q. Если в M^n задано слоение $\mathcal{F}$ и $N^q = L_\alpha$ — один из его слоев, то при достаточно малом δ слоения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ трансверсальны всюду в $\varphi(E^\delta)$. (Если δ достаточно мало, то $T_y\varphi(E_x^\delta)$ при любом $y \in \varphi(E_x^\delta)$ близко к E_x, а касательное пространство в y к проходящему через y слою слоения $\mathcal{F}$ близко к $T_x L_\alpha$.)

д) Необходимо убедиться в том, что действительно существует отображение φ со свойствами 1), 2), 3). В качестве φ обычно берут отображение Exp, строящееся с помощью какой-нибудь римановой метрики на M^n (см. комментарии, примечание 4.2) и рассматриваемое только на E^ε. (Если $N^q \subset \partial M^n$, то для того, чтобы удовлетворить условию 3), проще всего доказать, что некоторая окрестность края ∂M^n C^s-гомеоморфна $\partial M^n \times [0, 1]$ (см. ниже) и взять риманову метрику, которая в этой окрестности является (в естественном смысле) «прямым произведением» метрик на ∂M^n и $[0, 1]$.) Но это не обязательно. Сейчас мы убедимся в существовании φ, не обращаясь к свойствам геодезических линий в римановой геометрии. При этом нам придется рассмотреть несколько случаев.

д1) Если $M^n = \mathbf{R}^n$, то можно взять $\varphi(X) = \pi(X) + X$, где справа вектор $X \in T_x\mathbf{R}^n$ обычным образом рассматривается как вектор из $\mathbf{R}^n$. (Это как раз и есть Exp для обычной евклидовой метрики в $\mathbf{R}^n$.)

д2) Пусть теперь M^n — замкнутое многообразие. Тогда его можно вложить в евклидово пространство $\mathbf{R}^k$ с достаточно большим k. Действительно, существует такая конечная система координатных окрестностей (U_i, φ_i) многообразия M^n, $i = 1, \ldots, l$, что $\varphi_i(U_i)$ есть открытый шар $\operatorname{Int} D^n(3)$ (т. е. шар $\|x\| < 3$ в $\mathbf{R}^n$; напомним, что $D^n(r)$ обозначает замкнутый шар радиуса r с центром в начале координат, а Int — совокупность внутренних точек) и

$$\bigcup_{i=1}^{l} \varphi_i^{-1}(\operatorname{Int} D^n(1)) = M^n.$$

Используя функцию Φ из § 4 (см. рис. 1.11), введем отображение $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n+1}$, которое при представлении $\mathbf{R}^{n+1}$ в виде $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ записывается в виде

$$f(x) = (\Phi(\|x\|)\, x,\ \Phi(\|x\|)).$$

Ясно, что f переводит множество $\|x\| \geqslant 2$ в 0 и является C^∞-вложением на шаре $\|x\| < 1$. Определим $f_i\colon M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ $(i = 1, \ldots$

$\ldots, l)$ как

$$f_i(x) = \begin{cases} f(\varphi_i(x)) & \text{при } x \in U_i, \\ 0 & \text{при } x \notin U_i. \end{cases}$$

Ясно, что каждое f_i является C^s-отображением, а $f_i \mid \varphi_i^{-1}(\operatorname{Int} D(1))$ является C^s-вложением. Наконец, в качестве искомого C^s-вложения M^n в $\mathbf{R}^k$ годится $g\colon M^n \to \mathbf{R}^{(n+1)l}$, где $g(x) = (g_1(x), \ldots \ldots, g_l(x))$.

Итак, если M^n — замкнутое многообразие, то можно считать, что $N^q \subset M^n \subset \mathbf{R}^k$. По д1) у M^n в $\mathbf{R}^k$ имеется трубчатая окрестность W. Пусть $\hat{\pi}\colon W \to M^n$ — ее проекция на M^n как на базу соответствующего расслоения; она имеет класс гладкости $s-1 \geqslant r'$. При достаточно малом ε из $X \in E^\varepsilon$ следует, что $\pi(X) + X \in W$. В качестве $\varphi\colon E^\varepsilon \to M^n$ можно взять $\varphi(X) = \hat{\pi}(\pi(X) + X)$.

д3) Пусть M^n некомпактно или имеет край (или и то, и другое) и $N^q \cap \partial M^n = \varnothing$. Некомпактное M^n тоже можно вложить в некоторое $\mathbf{R}^k$, но это доказывается сложнее (де Рам [1*], Стернберг [1*]). Однако нет необходимости вкладывать в $\mathbf{R}^k$ все M^n: в а)—г) можно заменить M^n какой-нибудь окрестностью N^q в M^n. А у N^q в M^n имеется окрестность, которую легко вложить в $\mathbf{R}^k$. Именно, ввиду компактности N^q оно содержится в такой конечной системе координатных окрестностей (U_i, φ_i) многообразия M^n $(i = 1, \ldots, l)$, что $U_i \cap \partial M^n = \varnothing$, $\varphi_i(U_i) = \operatorname{Int} D^n(3)$ и

$$N^q \subset \bigcup_{i=1}^{l} \varphi_i^{-1}(\operatorname{Int} D^n(1)).$$

Это последнее множество является открытой окрестностью N^q. Она вкладывается в $\mathbf{R}^k = \mathbf{R}^{(n+1)l}$ путем того же построения, что и в д2). Обозначим ее снова через M^n. Итак, можно считать, что $N^q \subset M^n \subset \mathbf{R}^k$, причем M^n — открытое многообразие без края.

Фиксируем какую-нибудь открытую окрестность U подмногообразия N^q в M^n с компактным замыканием $\bar{U}$. Пусть $\tilde{E}_x$ — трансверсализация M^n в $\mathbf{R}^k$ класса C^{s-1} и $\tilde{\pi}\colon \tilde{E} \to U$, где $\tilde{E} = \bigcup\limits_{x \in U} \tilde{E}_x$ и $\tilde{\pi}(\tilde{E}_x) = x$, — соответствующее C^{s-1}-расслоение (рассматриваемое, как видно, только над U). Определим $\tilde{\varphi}\colon \tilde{E} \to \mathbf{R}^k$ как $\tilde{\varphi}(X) = \tilde{\pi}(X) + X$. Рассуждая, как в г), докажем, что $\tilde{\varphi}$ устанавливает C^{s-1}-гомеоморфизм между $\tilde{E}^\varepsilon = \{X;\ X \in \tilde{E},\ \|X\| < \varepsilon\}$ с некоторым ε и некоторым открытым множеством $W \subset \mathbf{R}^k$, содержащим U. Тем самым $\tilde{\varphi}$ переносит на W имеющуюся в $\bar{E}^\delta$ структуру C^{s-1}-расслоения над U. Пусть $\hat{\pi}$: $W \to U$ — соответствующая проекция (т. е. $\hat{\pi} = \tilde{\pi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$). Пусть $\{E_x;\ x \in N^q\}$ — трансверсализация N^q в M^n; как в в), строим E, π: $E \to N^q$ и E^δ. Ясно, что при достаточно малом $\delta > 0$ из $X \in E^\delta$ следует, что $\pi(X) + X \in W$. Легко видеть, что теперь в качестве отображения φ: $E^\delta \to M^n$ («обслуживающего» N^q в M^n) можно взять $\varphi(X) = \hat{\pi}(\pi(X) + X)$.

д4) Пусть, наконец, $N^q \subset \partial M^n$ и $\{E_x\}$ есть $C^{r'}$-трансверсализация N^q в M^n. Положим $E'_x = E_x \cap T_x(\partial M^n)$; $\{E'_x\}$ есть $C^{r'}$-трансверсализация N^q в ∂M^n; пусть ψ: $E'^\varepsilon \to \partial M^n$ — отображение, играющее роль φ для N^q в ∂M^n. Обозначим через Z_x ортогональный к E'_x единичный вектор в E_x, направленный внутрь M^n. Тогда $\{Z_x;\ x \in N^q\}$ есть векторное поле класса $C^{r'}$, заданное на N^q; продолжим его до векторного поля на всем M^n класса $C^{r'}$, которое снова обозначим через Z. Пусть $\chi_x(t)$ — интегральная кривая поля Z, проходящая при $t = 0$ через x. Требуемое отображение φ: $E^\varepsilon \to M^n$ можно определить так. Каждый вектор $X \in E^\varepsilon_x$ можно представить в виде $X = Y + tZ_x$, где $Y \in E'_x$, $t \geqslant 0$; положим $\varphi(X) = \chi_{\psi(Y)}(t)$.

е) Обсудим, какую степень гладкости можно обеспечить для отображения φ, проекции трубчатой окрестности на N^q и слоения $\mathcal{F}$. Из предыдущего видно, что они имеют гладкость класса $C^{r''}$, где $r'' = \min(r, r')$ и r' можно считать, самое большее, равным $s - 1$. Получается, что можно обеспечить гладкость класса C^r, за исключением того случая, когда $r = s < \infty$. (Кроме того, при $s = 1$ предыдущие рассуждения вообще не проходят, ибо в них использовалась гладкость φ.) Тем не менее и в этом случае можно достичь гладкости класса C^r, пользуясь тем, что можно повысить класс гладкости многообразия M^n до C^∞, и рассуждая так же, как в примечании на стр. 132.

Между прочим, гладкость $\mathcal{F}'$ можно повысить до C^s, но это нам не понадобится, и мы не будем на этом останавливаться.

[3] Подробнее: замкнутая траектория C поля X_S не может целиком лежать вне $\bar{h}(D^2 \times [0, \delta])$, ибо тогда она совпадала бы с некоторой траекторией поля X_1, а единственная замкнутая траектория C_1 последнего проходит через точку $(z_1, 0) = \bar{h}(O, 0)$. Поскольку нет замкнутых траекторий, целиком содержащихся в $\bar{h}(D^2 \times [0, \delta])$, то C должна быть расположена частично в и частично вне $\bar{h}(D^2 \times [0, \delta])$. Если Δ_i (возможно, их несколько) суть максимальные связные дуги C, лежащие

в $\overline{h}(D^2\times[0, \delta])$, то эти дуги начинаются на $\overline{h}(D^2\times 0)$, кончаются на $\overline{h}(D^2\times\delta)$ и имеют те же концы, что и некоторые лежащие в $\overline{h}(D^2\times[0, \delta])$ дуги $\tilde{\Delta}_i$ некоторых траекторий поля X_1. Дуги же C, лежащие вне $\overline{h}(D^2\times[0, \delta])$, целиком совпадают с некоторыми дугами некоторых траекторий поля X_1. Стало быть, заменив дуги Δ_i дугами $\tilde{\Delta}_i$, получим из C некоторую замкнутую траекторию поля X_1, т. е. C_1, а потому C проходит через $(z_1, 0)$. Но траектория поля X_S, проходящая через $(z_1, 0)$, не может быть замкнутой,— соответствующая интегральная кривая, войдя в точке $(z_1, 0)$ в $\overline{h}(D^2\times[0, \delta])$, уже никогда не выходит оттуда (ср. $(z_1, 0)=h(O, 0)$, (ii) на стр. 116, $(O, 0)\in g(\overline{C}\times\{-\varepsilon, \varepsilon\})$ и (ii) на стр. 114, вернее его аналог для X_0).

[4] Это место изложено довольно лаконично; проведение всех деталей рассуждения фактически предоставлено читателю. Перечислим, по крайней мере, что именно надо здесь выяснить.

а) Трубчатые окрестности выше (в [2]) были определены для подмногообразий без края, здесь же говорится о трубчатой окрестности некоторого подмногообразия с краем — простой кривой. Обобщение достаточно очевидное, тем более для данного простейшего случая. Заметим, однако, что в нашем случае надо обеспечить, чтобы между этой трубчатой окрестностью и границей U_j не было «зазора».

б) Надо обеспечить, чтобы U'_j являлась отмеченной расслоенной окрестностью, по сути дела все сводится к тому, чтобы

$$Q'_j=Q_j \cup (\text{трубчатая окрестность } l \text{ на } L_\alpha)$$

было диффеоморфно кубу, причем диффеоморфизм продолжался бы до диффеоморфизма некоторой окрестности множества $\overline{Q'_j}$ с бо́льшим кубом. На самом деле у $\overline{Q'_j}$ имеются углы в тех точках, где граница $\overline{Q}_j$ пересекается с трубчатой окрестностью. Поэтому конструкцию надо чуть изменить, «сгладив» эти углы.

в) Надо убедиться, что исходя из Q'_j можно построить надлежащие (U'_j, φ'_j). Заметим, что нет необходимости добиваться, чтобы было $U'_j\supset U_j$: если наглядно представлять себе слои идущими «горизонтально», а трансверсальное к ним направление считать «вертикальным», то U'_j вполне может быть «ниже» U_j.

г) Надо убедиться, что когда мы заменяем на некотором шаге построения Q_j на Q'_j с целью обеспечить, чтобы было $Q_i\cap Q_j\cap K\neq\varnothing$, это не повлияет на то, чего мы уже достигли раньше (ведь если $Q_h \cap Q_j = \varnothing$, то не исключено, что $Q_h \cap Q'_j \neq \varnothing$, а $Q_h \cap Q'_j \cap K = \varnothing$). Кроме того, как видно из следующего абзаца основного текста (где идет речь об условиях (iv) и (v)) необходимо обеспечить, чтобы те Q_j, которые получатся после всех этих построений, были достаточно малы.

Обеспечить последнее всего труднее, и мы остановимся на этом подробнее. Как мы увидим, предыдущие построения можно осуществить так, чтобы новые Q'_j обладали, в частности, следующим свойством:

$$Q'_j \subset \bigcup_{\substack{i<j \\ Q_i \cap Q_j \neq \varnothing}} Q_i.$$

Очевидно, отсюда следует, что, начав с достаточно малых Q_i, можно обеспечить малость Q'_j.

В каждом Q_i возьмем точку $x_i \in K \cap Q_i$ $(i=1, \ldots, v)$. Можно считать, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Действительно, если $x_1, \ldots, x_i$ уже выбраны, а в Q_{i+1} нет точки из K, отличной от $x_1, \ldots, x_i$, то можно просто выбросить Q_{i+1} из нашей исходной системы окрестностей $\{Q_h\}$. Для каждого $j=1, \ldots, v$ совокупность тех $i \neq j$, для которых $Q_i \cap Q_j \neq \varnothing$ и $x_i \notin Q_j$, обозначим через $I(j)$. Для каждого $i \in I(j)$ возьмем простую кривую l_{ij}, которая целиком лежит внутри Q_i и соединяет границу Q_j с x_i. Посредством малого шевеления кривых l_{ij} можно достичь, чтобы было $l_{hj} \cap l_{ik} = \varnothing$ при $h \neq i$ и любых j, k. У кривых l_{ij} можно взять столь близкие к ним трубчатые окрестности W_{ij}, что $W_{ij} \subset Q_i$ и $W_{hj} \cap W_{ik} = \varnothing$ при $h \neq i$ и любых j, k. Положим

$$Q'_j = Q_j \cup \bigcup_{i \in I(j)} W_{ij}.$$

Если $Q'_j \cap Q'_k \neq \varnothing$, то возможны три случая (не исключающих друг друга).

а) $Q_j \cap Q_k \neq \varnothing$. Тогда x_j, $x_k \in Q'_j \cap Q'_k$.

б) $(Q'_j - Q_j) \cap Q_k \neq \varnothing$. Тогда существует такое $i \in I(j)$, что $W_{ij} \cap Q_k \neq \varnothing$. Если $i=k$, то $k \in I(j)$, и имеет место случай а). Если $i \neq k$, то $W_{ij} \subset Q_i$, $Q_i \cap Q_k \neq \varnothing$ и $x_i \in Q'_k$, $x_i \in Q'_j$.

в) $(Q'_j - Q_j) \cap (Q'_k - Q_k) \neq \varnothing$. Тогда существуют такие $h \in I(j)$, $i \in I(k)$, для которых $W_{hj} \cap W_{ik} \neq \varnothing$, что возможно лишь при $h=i$. Итак, $h \in I(j) \cap I(k)$, а тогда $x_h \in Q'_j$ и $x_h \in Q'_k$.

В этом рассуждении подразумевается, что размерность слоя L_α не меньше трех. В двумерном случае, по-видимому, нужны другие соображения (к сожалению, более громоздкие).

Отметим, наконец, что при проверке (iv) также последовательно рассматриваются различные пары U_i, U_j и каждый раз эти U_i, U_j заменяются на некоторые другие U'_i, U'_j. Оставим читателю выяснить, не повлияют ли изменения, производимые на некотором шаге этого процесса, на то, что уже достигнуто на предыдущих шагах.

[5] Полезно иметь в виду, что росток $[f]$, соответствующий пути

$$w\colon [0, 1] \to L_\alpha, \qquad w(0) = w(1) = \hat{x},$$

можно определить еще следующим образом. Возьмем в точке $\hat{x}$ какую-нибудь гладкую (класса C^r) q-мерную «площадку» Π^q (C^r-гомеоморфный образ q-мерного шара, причем $\hat{x}$ является образом некоторой внутренней точки последнего), всюду трансверсальную к слоям слоения $\mathcal{F}$. С помощью какой-нибудь фиксированной римановой метрики превратим M и Π в метрические пространства с расстояниями d и ρ соответственно. Как легко доказать, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

а) если $x \in \Pi \cap L_\beta$ и $\rho(x, \hat{x}) < \delta$, то существует (непрерывный) путь $\bar{w}\colon [0, 1] \to L_\beta$, обладающий теми свойствами, что $\bar{w}(0) = x$, $\bar{w}(1) \in \Pi$ и $d(w(t), \bar{w}(t)) < \varepsilon$ при всех $t \in [0, 1]$;

б) если при этом $\bar{\bar{w}}\colon [0, 1] \to L_\beta$ — другой путь с теми же свойствами, то $\bar{w}(1) = \bar{\bar{w}}(1)$. Тем самым в δ-окрестности точки $\hat{x}$ на Π определено отображение $h\colon x \mapsto \bar{w}(1)$, которое оказывается локальным C^r-гомеоморфизмом и называется *отображением последования* для пути w и площадки Π. Его росток $[h]$ в точке $\hat{x}$ не зависит от случайностей построения (метрик d и ρ, достаточно малого ε, конкретного выбора $\delta = \delta(\varepsilon)$).

Пусть теперь $(U_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_1})$ те же, что и выше. Отображение

$$\hat{\pi} \circ \varphi_{\lambda_1} | \Pi^q \cap U_{\lambda_1}\colon \Pi^q \cap U_{\lambda_1} \to \mathbb{R}^q$$

вводит некоторые локальные координаты класса C^r в некоторой окрестности точки $\hat{x}$ на Π^q. Тогда f есть просто выражение для h в этих локальных координатах.

[6] Может случиться, что некоторые пути $\gamma \in \pi_1(L_\alpha, \hat{x})$ таковы, что среди представляющих их замкнутых кривых $w \in \gamma$ нет кривых, целиком лежащих в K. Для таких γ их образ при отображении Ψ пока что не определен. Может случиться также, что кривые w, $\bar{w}$ лежат в γ, но не существует такой их гомотопии, при которой все промежуточные кривые лежали бы в K. Пока не доказано, что они приводят к одному и тому же $[f]$.

В сущности, пока лишь определено отображение $\Psi\colon \pi_1(K, \hat{x}) \to G_q^r$, причем его определение еще зависит от $\mathfrak{N}(K)$ и от той координатной окрестности $(U_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_1})$, которой начинаются и заканчиваются все рассматриваемые нами цепи когерентных окрестностей. Возьмем в слое L_α компакт $K' \supset K$ и для него систему столь мелких когерентных окрестностей $\mathfrak{N}'(K')$, что те из них, которые пересекаются с K, целиком содержатся в некоторых окрестностях из $\mathfrak{N}(K)$. Пусть $\hat{x} \in U'_{\mu_1}$, где $(U'_{\mu_1}, \varphi'_{\mu_1}) \in \mathfrak{N}'(K')$; будем рассматривать цепи когерентных окрестностей из $\mathfrak{N}'(K')$, начинающиеся и заканчивающиеся этой окрестностью $(U'_{\mu_1}, \varphi'_{\mu_1})$. С их помощью построим $\Psi'\colon \pi_1(K, \hat{x}) \to G_q^r$. Определим $[h] \in G_q^r$ из условия

$$[h] \circ [\hat{\pi} \circ \varphi_{\lambda_1}] = [\hat{\pi} \circ \varphi'_{\mu_1}],$$

где $[\hat{\pi} \circ \varphi_{\lambda_1}]$, $[\hat{\pi} \circ \varphi'_{\mu_1}]$ — ростки соответствующих отображений в точке x. (Хотя определение ростка дается в тексте только для локальных гомеоморфизмов, оно очевидным образом годится и в других случаях.) Тогда легко видеть, что $\Psi = H \circ \Psi' \circ i$, где $i\colon \pi_1(K, \hat{x}) \to \pi_1(K', \hat{x})$ — гомоморфизм, индуцированный тождественным вложением K в K', а H — внутренний автоморфизм G_q^r, определенный $[h]$, т. е. $H[f] = [h]\cdot[f]\cdot[h]^{-1}$.

Теперь ясно, что построенное отображение $\pi_1(K, \hat{x}) \to G_q^r$ зависит (при данном K) только от ростка $[\hat{\pi} \circ \varphi_{\lambda_1}]$ в точке $\hat{x}$. (Если $\mathfrak{N}_1(K)$ — другая система когерентных окрестностей, то возьмем $K' = K$ и за $\mathfrak{N}'(K')$ примем систему столь мелких когерентных окрестностей, что каждая из них целиком содержится в некоторой окрестности из $\mathfrak{N}(K)$ и в некоторой окрестности из $\mathfrak{N}_1(K)$.) Далее, если кривые w, $\overline{w}$ из $\gamma, \overline{\gamma} \in \pi_1(K, \hat{x})$ гомотопны в L_α, то найдется такой компакт $K' \supset K$, который содержит все кривые, промежуточные при их гомотопии; тогда $i(\gamma) = i(\overline{\gamma})$ и $\Psi(\gamma) = \Psi(\overline{\gamma})$. Наконец, любая замкнутая кривая содержится в некотором K' (и определяет там элемент $\gamma \in \pi_1(K', \hat{x})$), так что ей можно однозначно сопоставить некоторый росток из G_q^r (а именно, $H^{-1} \circ \Psi'(\gamma)$, где H то же, что и выше). Построенное отображение $\Psi\colon \pi_1(L_\alpha, \hat{x}) \to G_q^r$ зависит только от $[\hat{\pi} \circ \varphi_{\lambda_1}]$; при изменении последнего Ψ изменяется согласно сказанному.

[7] Как заметил Новиков, сочетая приведенное рассуждение с простыми топологическими соображениями, легко доказать следующее утверждение (ср. с примечанием на стр. 166). *Пусть M^n — компактное n-мерное гладкое многообразие и*

$\mathcal{F}=\{L_\alpha\}$ — гладкое слоение на нем коразмерности один. Пусть L_{α_n} — компактные слои и $x_n\in L_{\alpha_n}$, $x_n\to x\in L_\alpha$. Тогда и L_α — компактный слой. (Само это утверждение имеется у Хефлигера [2].) Перейдя, если потребуется, к конечнолистному накрытию, можно считать, что M^n и $\mathcal{F}$ ориентируемы; выберем определенные ориентации многообразия M^n и слоев слоения $\mathcal{F}$. Допустим, что слой L_α не компактен. Тогда в его замыкании содержится слой $L_\beta\neq L_\alpha$. Пусть $y\in L_\beta$ и (U,φ) — отмеченная расслоенная координатная окрестность точки y, причем $\varphi(y)=(0,\ldots,0)$. Тогда $L_\alpha\cap U$ содержит такую последовательность локальных слоев Q_n, что $\hat{\pi}(Q_n)\to 0$. Пусть $\Delta=\{\varphi^{-1}(0,\ldots,0,t);\ -1<t<1\}$ и $z_n=Q_n\cap\Delta$. Каждый из компактных слоев L_{α_n} пересекает Δ лишь в конечном числе точек, но при достаточно большом n в $L_{\alpha_n}\cap\Delta$ найдется точка, сколь угодно близкая к y. Построим индуктивно такие последовательности m_j и n_j, $j=1,2,\ldots$, что $L_{\alpha_{m_j}}$ пересекает часть $\overset{\frown}{z_{n_j}z_{n_{j+1}}}$ дуги Δ, заключенную между z_{n_j} и $z_{n_{j+1}}$, но не пересекает $\overset{\frown}{z_{n_k}z_{n_{k+1}}}$ при $k>j$. Положим для краткости $L_j=L_{\alpha_{m_j}}$, и пусть l_j — замкнутая трансверсаль, получающаяся при достаточно близкой аппроксимации «криволинейной ломаной», состоящей из какой-нибудь гладкой кривой на L_α, соединяющей z_{n_j} с z_{n_j+1}, и дуги $\overset{\frown}{z_{n_j}z_{n_j+1}}$. Аппроксимация должна быть настолько близкой, чтобы слой L_j пересекал l_j, но чтобы L_i с $i<j$ не пересекали l_j. Замкнутая кривая l_j, ориентированная каким-нибудь образом, определяет некоторый элемент $[l_j]$ одномерной группы гомологий $H_1(M^n)$, а $(n-1)$-мерное замкнутое ориентированное многообразие L_j определяет некоторый элемент $[L_j]$ $(n-1)$-мерной группы гомологий $[L_j]\in\in H_{n-1}(M^n)$. При этом их индексы пересечения удовлетворяют соотношениям

$$[l_j]\cdot[L_{\alpha_j}]\neq 0,\quad [l_j]\cdot[L_{\alpha_i}]=0 \text{ при } i<j.$$

Отсюда следует, что между $[L_{\alpha_j}]$ не может быть никакого нетривиального линейного соотношения, а это противоречит тому, что $H_{n-1}(M^n)$ имеет конечное число образующих.

[8] Опишем подробнее, как производится приведение $g(D^2)$ в общее положение относительно $\mathcal{F}$. При этом, как мы увидим, $\mathcal{F}$ достаточно считать слоением класса C^1.

Пусть $\{E_y,\ y\in S^3\}$ — касательное поле слоения $\mathcal{F}$, т. е. согласно общему определению (§ 28, стр. 215), $E_y\subset T_yS^3$ —

плоскость, касающаяся проходящего через y слоя. Для любой C^1-иммерсии g: $D^2 \to S^3$ положим

$$A(g) = \{x;\ x \in D^2,\ g_* T_x D^2 = E_{g(x)}\}.$$

1) Докажем, что существует C^1-иммерсия g: $D^2 \to S^3$ с $g \mid \partial D^2 = l$ и конечным $A(g)$.

Возьмем какую-нибудь C^1-иммерсию g_0 с $g_0 \mid \partial D^2 = l$. Для нее существует такая конечная система $V_1, \ldots, V_k \subset D^2$ открытых кругов и такая конечная система отмеченных расслоенных координатных окрестностей $(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_k, \varphi_k)$ в S^3, что $g_0(\overline{V}_j) \subset U_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ и $A(g_0) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} V_j'''$, где V_j''' — открытый круг, концентрический с V_j и меньшего радиуса. Введем еще открытые круги V_j', V_j'' с теми же центрами, для которых $\overline{V}_j''' \subset V_j'' \subset \overline{V}_j'' \subset V_j' \subset \overline{V}_j' \subset V_j$.

Обозначим через G_i совокупность всевозможных C^1-иммерсий g: $D^2 \to S^3$, для которых $g \mid \partial D^2 = l$, $g(V_j) \subset U_j$ $(j = 1, \ldots, k)$, $C(g) = A(g) \cap \bigcup\limits_{j=i}^{k} V_j'''$ — замкнутое множество, а $B(g) = A(g) - C(g)$ — конечное множество. Очевидно, что $g_0 \in G_1$, так что $G_1 \neq \varnothing$. Нам достаточно доказать, что $G_{k+1} \neq \varnothing$. Докажем, что если $G_i \neq \varnothing$, то и $G_{i+1} \neq \varnothing$.

Возьмем $g \in G_i$. Будем обозначать r-окрестность множества F через $U_r(F)$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что $U_{2\varepsilon}(B(g)) \cap U_{2\varepsilon}(C(g)) = \varnothing$ и $U_\varepsilon(C(g)) \subset \bigcup\limits_{j=i}^{k} V_j'''$. Рассматривая S^3 как подмножество $\mathbf{R}^4$, мы вправе любое гладкое отображение $D^2 \to S^3$ рассматривать как отображение (вектор-функцию) $D^2 \to \mathbf{R}^4$ и говорить об обычной C^1-норме разности двух таких вектор-функций. Существует такое $\delta_1 > 0$, что если $\|g - g'\|_{C^1} < \delta_1$, то $A(g') \subset U_\varepsilon(A(g))$ и $g'(\overline{V}_j) \subset U_j$ $(j = 1, \ldots, k)$.

Обозначим $\hat{\pi} \circ \varphi_i \circ g \mid V_i$ через h: $\overline{V}_i \to \mathbf{R}$. Это функция из $C^1(\overline{V}_i)$. Ясно, что

$$A(g) \cap \overline{V}_i = \{x;\ \operatorname{grad} h(x) = 0\},$$

где, как обычно, $\operatorname{grad} h = (\partial h / \partial x_1,\ \partial h / \partial x_2)$. Найдется столь малое $\delta > 0$, что если $h' \in C^1(\overline{V}_i)$, $h' \mid (\overline{V}_i - V_i') = h \mid (\overline{V}_i - V_i')$ и $\|h' - h\|_{C^1} < \delta$, то можно определить такую C^1-иммерсию g': $D^2 \to S^3$, для которой h' играет ту же роль, что h для g, и которая совпадает с g на $D^2 - V_i'$, причем $\|g - g'\|_{C^1} < \delta_1$. Мы хотим подобрать такое h' (удовлетворяющее предыдущим условиям), чтобы $g' \in G_{i+1}$.

Положим

$$W_1 = \overline{V}_i - \overline{U_\varepsilon(C(g)) \cap V''_i}, \quad W_2 = V'_i - \overline{U_\varepsilon(B(g))}.$$

Это есть открытое покрытие $\overline{V}_i$, т. е. W_i открыты в $\overline{V}_i$ (что очевидно) и $W_1 \cup W_2 = \overline{V}_i$. Проверим последнее: $W_1 \supset \overline{V}_i - V'_i$, ибо $\overline{U_\varepsilon(C(g)) \cap V''_i} \subset \overline{V''_i} \subset V'_i$, а если $x \in V'_i$ и $x \notin W_2$, то $x \in \overline{U_\varepsilon(B(g))}$ и, значит, $x \notin \overline{U_\varepsilon(C(g))}$, а тогда $x \in W_1$.

Пусть μ_1, μ_2 — разбиение единицы класса C^2 на $\overline{V}_i$, подчиненное покрытию $\{W_1, W_2\}$. Положим

$$h' = \mu_1 h + \mu_2 (h_1 + a_1 x_1 + a_2 x_2),$$

где выбор функции $h_1 \in C^2(\overline{V}_i)$ и чисел a_1, a_2 будет уточнен позднее. На $\overline{V}'_i \cap U_\varepsilon(B(g))$ и на $\overline{V}_i - V'_i$ имеем $\mu_2 = 0$ и $h' = h$. На $U_\varepsilon(C(g)) \cap V''_i$ имеем $\mu_1 = 0$ и $h' = h_1 + a_1 x_1 + a_2 x_2$. Далее

$$\|h' - h\|_{C^1} = \|\mu_2 (h_1 + a_1 x_1 + a_2 x_2 - h)\|_{C^1},$$

что будет меньше δ, если $\|h - h_1\|_{C^1}$ и a_i достаточно малы. Тогда с помощью h' можно построить соответствующую C^1-иммерсию g'. Для нее $A(g') \subset U_\varepsilon(B(g)) \cup U_\varepsilon(C(g))$, причем $C_1 = A(g') \cap U_\varepsilon(C(g))$ — замкнутое множество и $g' \mid U_\varepsilon(B(g)) = g$, так что $A(g') \cap U_\varepsilon(B(g)) = B(g)$. Итак,

$$A(g') = B(g) \cup C_1, \quad C_1 = \overline{C_1} \subset U_\varepsilon(C(g)) \subset \bigcup_{j=i}^{k} V'''_j.$$

Зафиксируем $h_1 \in C^2(\overline{V}_i)$ с достаточно малой $\|h - h_1\|_{C^1}$. Существуют сколь угодно малые числа a_1, a_2, такие, что уравнения

$$(*) \qquad \frac{\partial h_1}{\partial x_1} = -a_1, \qquad \frac{\partial h_1}{\partial x_2} = -a_2$$

имеют (во всем круге $\overline{V}_i$) лишь конечное число решений. Это следует из теоремы Сарда (Милнор—Уоллес [1*], Рохлин—Фукс [1*], Стернберг [1*]), причем в данном случае нужен лишь самый простой ее случай (случай равных размерностей). Тогда

$$C_1 \cap V''_i = A(g') \cap U_\varepsilon(C(g)) \cap V''_i = \{x;\ x \in U_\varepsilon(C(g)) \cap V''_i,\ \operatorname{grad} h'(x) = 0\}.$$

Но на $U_\varepsilon(C(g)) \cap V''_i$ имеем $h' = h_1 + a_1 x_1 + a_2 x_2$, и уравнения $(*)$ имеют лишь конечное число решений. Поэтому множество $B_1 = C_1 \cap V''_i$ конечно. Теперь

$$(g') = B(g) \cup B_1 \cup \overline{C_1 - V''_i},$$

причем $\overline{C_1 - V_i''} \subset \bigcup\limits_{j=i+1}^{k} V_j'''$, а $B(g) \cup B_1$ конечно. Значит, $C(g') = A(g') \cap \bigcup\limits_{j=i+1}^{k} V_j'''$ сводится к замкнутому множеству $\overline{C_1 - V_i''}$, к которому, быть может, добавлено еще несколько точек; множество же

$$B(g') = A(g') - C(g') \subset B(g) \cup B_1$$

конечно. Тем самым доказано, что $g' \in G_{i+1}$.

Теперь мы можем шаг за шагом изменять исходное отображение g_0 и построить последовательно $g_1 \in G_2$, $g_2 \in G_3$ и т. д. (переход от g_i к g_{i+1} соответствует описанному выше переходу от g к g'), пока мы придем к $g_k \in G_{k+1}$, которое и примем за g.

2) Описанное построение g гарантирует не только конечность множества $A(g)$, но и несколько больше. Надо учесть следующие два обстоятельства. Во-первых, согласно теореме Сарда, при надлежащих a_i каждое решение (x_1, x_2) системы уравнений (*) таково, что якобиан левых частей (*) в точке (x_1, x_2) отличен от нуля (именно потому и получается конечное число решений). Во-вторых, когда мы шаг за шагом изменяли g_0, мы на каждом шаге не меняли g_i возле конечного числа получившихся раньше критических функций $\hat{\pi}\varphi_j g | V_j'''$ с $j \leqslant i$. Эти функции, стало быть, остались возле этих точек гладкими класса C^2, а точки остались невырожденными критическими точками. (Невырожденность критической точки функции h означает, что в этой точке гессиан $\det(\partial^2 h / \partial x_i \partial x_j)$ отличен от 0.) В итоге, изменяя обозначения, можно сказать следующее.

$g_* T_x D^2$ касается слоев только при $x = p_1, \ldots, p_k$. Для каждого $i = 1, \ldots, k$ имеются такая окрестность V_i точки p_i в D^2 (причем различные V_i не пересекаются) и такая отмеченная расслоенная координатная окрестность (U_i, φ_i) в S^3, содержащая $g(p_i)$, что $\varphi_i g | V_i$ в терминах локальных координат описывается как отображение

$$(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2, y_3),$$

причем якобиан функций $y_1(x_1, x_2)$, $y_2(x_1, x_2)$ отличен от нуля,

$$(**) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а $y_3=h_i(x_1, x_2)$ — гладкая функция класса C^2 с единственной критической точкой p_i, которая является невырожденной. Ввиду (**) мы можем в некоторой окрестности точки $g(p_i)$ на S^3 ввести новые координаты

$$(z_1, z_2, z_3)=(x_1, x_2, y_3);$$

локальные слои в этих координатах по-прежнему задаются уравнением $z_3=\mathrm{const}$. В новых координатах $g(V_i)$ выглядит как график функции $z_3=h_i(z_1, z_2)$, а пересечения $g(V_i)$ с локальными слоями — как линии уровня этой функции.

Ниже автор требует еще, чтобы на каждом слое имелось не более одной седловой точки. Пусть, скажем, $g(p_1)\in L_{\alpha_1}$. Каждое из множеств $\hat{\pi}\varphi_i(L_{\alpha_1}\cap U_i)$ $(i>1)$ не более чем счетно, поэтому можно так изменить функции h_i $(i>1)$, чтобы возле границы V_i они не менялись (это позволяет построить по новым h_i новое g), новых критических точек у них не возникало, прежние критические точки не вырождались и значения h_i в критических точках не принадлежали бы $\hat{\pi}\varphi_i(L_{\alpha_1}\cap U_i)$. Если p_2' — критическая точка измененной h_2 и $g(p_2')\in L_{\alpha_2}$, то дальше изменяем h_i $(i>2)$ так, чтобы значение h_i в критической точке не принадлежало ни $\hat{\pi}\varphi_i(L_{\alpha_1}\cap U_i)$, ни $\hat{\pi}\varphi_i(L_{\alpha_2}\cap U_i)$, и т. д.

[9] Рассматриваемое семейство линий (связных компонент всевозможных $g^{-1}(L_\alpha)$) образует слоение $\mathcal{F}_1$ на круге D^2, из которого «выколоты» особые точки — те точки, где D^2 касается слоев $\mathcal{F}$. Прямая

$$g_*^{-1}(g_*T_xD^2\cap E_{g(x)})\subset T_xD^2$$

($\{E_y\}$ — по-прежнему касательное поле слоения $\mathcal{F}$) касается проходящей через x линии из $\mathcal{F}_1$, т. е.

$$(*)\qquad \{g_*^{-1}(g_*T_xD^2\cap E_{g(x)}),\quad x\in D^2-\{\text{особые точки}\}\}$$

есть «поле направлений» на круге с выколотыми особыми точками, являющееся касательным полем слоения $\mathcal{F}_1$. Особым точкам никакого определенного направления не сопоставляется.

Ориентируемость слоения $\mathcal{F}_1$, т. е. тот факт, что поле направлений (*) задается некоторым векторным полем X, не следует из односвязности круга, так как $\mathcal{F}_1$ и поле (*) заданы не на круге, а на круге с выколотыми точками, который неодносвязен. Построение X можно осуществить следующим образом.

Возьмем на S^3 какую-нибудь риманову метрику и ориентацию. Ввиду коориентируемости $\mathcal{F}$, на сфере существует такое непрерывное векторное поле Y, что Y_y ортогонально E_y и $\|Y_y\|=1$ при всех $y \in S^3$. Далее, пусть e_1, e_2 — векторы в $\mathbf{R}^2$ с компонентами (1, 0) и (0, 1); рассматривая их как векторы в T_xD^2, возьмем их образы при отображении $g_*: T_xD^2 \to T_{g(x)}S^3$. Последние линейно независимы, поэтому однозначно определен такой вектор Z_x, что $\|Z_x\|=1$ и g_*e_1, g_*e_2, Z_x образуют положительно ориентированный базис в $T_{g(x)}S^3$. Если точка $x \in D^2$ неособая, то плоскости $E_{g(x)}$ и T_xD^2 не совпадают, так что ортогональные к ним векторы $Y_{g(x)}$, Z_x линейно независимы. Тогда однозначно определен такой вектор $X_x^0 \in T_xD^2$, что $\|g_*X_x^0\|=1$, $g_*X_x^0$ ортогонален $Y_{g(x)}$ и Z_x, и эти три вектора (взятые в таком порядке) образуют положительно ориентированный базис в $T_{g(x)}S^3$. Ясно, что векторное поле X^0 определяет поле направлений (*). Может случиться, что на ∂D^2 поле X^0 направлено не внутрь круга, а наружу. (На самом деле так и будет при наших построениях, если отображение l переводит обычную ориентацию ∂D^2 в такую ориентацию замкнутой трансверсали, при которой положительным считается направление, куда «указывает» Y.) Тогда перейдем к полю $-X^0$ и обозначим его снова через X^0.

Поле X^0 еще не обладает всеми требуемыми свойствами, ибо оно не определено в особых точках (и не доопределяется там по непрерывности). Пользуясь теми же обозначениями, что и в конце предыдущего примечания, рассмотрим в V_i векторное поле X^i с компонентами $(\partial h_i/\partial x_2, -\partial h_i/\partial x_1)$. В каждой точке x вектор X_x^i касается проходящей через нее линии $h_i = \mathrm{const}$, т. е. слоя слоения $\mathcal{F}_1$. Значит, всюду в $V_i - p_i$ поле X^i параллельно полю X^0, и поскольку оба они нигде в $V_i - p_i$ не обращаются в нуль, они всюду имеют либо одинаковое направление, либо противоположное. В последнем случае переопределим X^i, изменив у него знак. Множества

$$D^2 - \left(\bigcup p_i\right),\ V_1, \ldots, V_k$$

образуют открытое покрытие D^2. Пусть $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$ — соответствующее разбиение единицы. Положим $X = \mu_0 X^0 + \mu_1 X^1 + \ldots + \mu_k X^k$. Это поле в неособых точках имеет то же направление, что и X^0, но в отличие от X^0 оно определено и непрерывно уже всюду на D^2. Его нули суть в точности точки p_i; в некоторых окрестностях последних оно является гладким класса C^1. Эти точки являются особыми точками (по другой терминологии — положениями равновесия) динамической системы $\dot{x} = X_x$. В связи с этим отметим, что те точки, которые выше были названы эллиптическими, в теории динамических систем называются центрами, а седловые точки — седлами.

Поведение интегральных кривых возле этих точек достаточно ясно из сказанного в тексте и из рисунков (к тому же эти вопросы обычно включаются в университетскую программу). Заметим только, что интегральная кривая $\varphi_{\{p\}}(t)$, проходящая через неособую точку p и «входящая» в седло p_i или «выходящая» из p_i, на самом деле ни при каком t не попадает в p_i — это противоречило бы теореме единственности,— а только стремится к p_i при $t \to \infty$ или соответственно при $t \to -\infty$. Две кривые, пересекающиеся в седловой точке p_i, о которых говорилось в (iv) выше (и которые образуют «множество уровня» соответствующей функции h_i), состоят как раз из тех точек p (включая и p_i), для которых $\varphi_{\{p\}}(t) \to p_i$ при $t \to \infty$ или $t \to -\infty$. Их называют по-разному: одномерными инвариантными многообразиями седла, а также его усами или сепаратрисами. Последние два термина часто применяют не ко всему одномерному инвариантному многообразию, а к тем двум его частям, на которые оно разбивается седлом. Может случиться, что интегральная кривая $\varphi_{\{p\}}(t)$ стремится к p_i и при $t \to \infty$, и при $t \to -\infty$; в этом случае говорят *о петле сепаратрисы*. (На рис. 6.7 сепаратрисы седла c_1' образуют две петли, а седла c_2' — одну.)

Если исходное слоение $\mathcal{F}$ имеет класс C^1, то поле X, вообще говоря, будет всего лишь класса C^0 (хотя, как мы видели, можно добиться, чтобы возле особых точек оно было класса C^1). Известно, что для непрерывного векторного поля интегральная кривая $\varphi_{\{p\}}(t)$, вообще говоря, неединственна. Однако для нашего поля X единственность все же имеет место. Это связано с тем, что оно возникло у нас как касательное поле C^1-слоения $\mathcal{F}_1$. В окрестности любой неособой точки существует такая система координат (U, φ) класса C^1, что φ отображает связные компоненты пересечений слоев $\mathcal{F}_1$ с U в отрезки прямых $x_2 = \text{const}$. Поле $X|U$ под действием φ переходит в некоторое поле на $\varphi(U)$, вторая компонента которого равна нулю; первую компоненту обозначим через $X(x_1, x_2)$. В терминах локальных координат интегральная кривая есть $(x_1(t), x_2(t))$, причем

$$\frac{dx_1}{dt} = X(x_1, x_2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

Поэтому $x_2(t) = x_2(0)$, а для $x_1(t)$ получается одно обыкновенное автономное (т. е. с не зависящей явно от t правой частью) дифференциальное уравнение первого порядка $dx_1/dt = X(x_1, x_2(0))$. Если в рассматриваемой области всюду $X \neq 0$, как это имеет место в нашем случае, то такое уравнение однозначным образом устанавливает (при заданном $x_1(0)$) связь между t и x_1:

$$(**) \qquad t = \int_{x_1(0)}^{x_1} \frac{d\xi}{X(\xi, x_2(0))}.$$

Поэтому в окрестности любой неособой точки имеет место единственность. А возле особых точек поле X является гладким, так что и там единственность не может нарушаться.

Далее в тексте для поля X и соответствующей динамической системы будут использоваться результаты гл. 3. В гл. 3 векторное поле предполагалось гладким. Однако в рассуждениях гл. 3 использовалась в сущности не гладкость X, а существование интегральных кривых, их единственность и непрерывность $\varphi_{\{p\}}(t)$ по (p, t). Для нашего поля X существование очевидно (движение по слоям $\mathcal{F}_1$, описываемое соотношениями типа (**)); впрочем, здесь можно сослаться и на тот общий факт, что теорему существования можно доказать, используя только непрерывность поля X и не предполагая его гладкости. Единственность установлена выше. Непрерывность, как и существование, можно вывести из свойств $\mathcal{F}_1$; впрочем, здесь тоже можно сослаться на известный общий факт, что непрерывность следует из единственности.

[10] Через неособую точку $q \in L^+(p)$ проведем малую дугу Δ, трансверсальную к X. Последовательные пересечения a_1, a_2, ... кривой $\varphi_{\{p\}}(t)$ с Δ должны располагаться на Δ в таком порядке, что они монотонно приближаются к q, — иначе сразу строилась бы содержащая $L^+(p)$ область G, из которой траектории могут только выходить, причем у $\varphi_{\{p\}}(t)$ есть точки вне G. Поскольку $\{\varphi_{\{p\}}(t)\} \subset D_\Sigma - \operatorname{Int} D_\Sigma$, хоть у одной из дуг $\overset{\frown}{a_i a_{i+1}}$ и $\overset{\frown}{a_{i+1} a_{i+2}}$ трансверсали Δ сколь угодно близко к a_{i+1} имеются точки, лежащие вне D_Σ. Но некоторые из $D(f_\sigma)$ попадают в малую окрестность D_Σ и потому на упомянутой дуге должны быть точки, лежащие вне $D(f_\sigma)$; а поскольку $a_{i+1} \in D_\Sigma \subset \subset D(f_\sigma)$, на этой дуге должны быть граничные точки $D(f_\sigma)$, т. е. точки кривой $f_\sigma(S^1)$. Но из этой дуги и части кривой $\varphi_{\{p\}}(t)$ строится замкнутая кривая, ограничивающая такую область G', из которой ни одна траектория не выходит. Тогда и $f_\sigma(S^1)$ не может выходить из G' — тот факт, что на $f_\sigma(S^1)$ может быть особая точка (седло), ничего не меняет.

[11] Здесь использовано, что замкнутая кривая на слое L_0, гомотопная (в классе замкнутых кривых на слое) исчезающему циклу, сама является исчезающим циклом.

Сначала отметим следующее. В определении исчезающего цикла можно добавить условие, что при каждом x точки $f_t(x)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, находятся на проходящей через $f_0(x)$ траектории фиксированного векторного поля Y, трансверсального к слоению.

Проверим, что при добавлении нового условия определение исчезающего цикла не стало более ограничительным. Пусть f_t: $S^1 \to S^3$ — семейство отображений, фигурирующее в первоначальном определении. Отображение окружности можно рассматривать как отображение отрезка $0 \leqslant s \leqslant 1$ с совпадающими образами концов. Применим лемму о голономии (теорема 6.3 с учетом сделанных там примечаний) к отображению f_0: $[0, 1] \to L_0$. Рассматриваемое как отображение отрезка (уже без условия об образах концов), оно гомотопно отображению в точку, поэтому существует соответствующее семейство отображений f'_t: $[0, 1] \to S^3$, $-\varepsilon_1 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1$. Пусть (U, φ) — расслоенная координатная окрестность точки $f_0(0) = f'_0(0)$. Поскольку $f'_t(0)$ и $f_t(0)$ суть трансверсали к слоению, то $\hat{\pi}\varphi f_t(0) = \tau(t)$ и $\hat{\pi}\varphi f'_t(0) = \tau'(t)$ суть монотонные функции; положим $f''_t = f'_{(\tau')^{-1}(\tau(t))}$. Тогда $f_t(0)$ и $f''_t(0)$ лежат на одном и том же слое $L_{\alpha(t)}$ близко друг от друга (в пределах одного локального слоя окрестности (U, φ)). Рассмотрим в $L_{\alpha(t)}$ следующие два пути $\bar{w}$ и $\bar{\bar{w}}$. Путь $\bar{w}$ получается, если сначала быстро перейти по локальному слою из $f''_t(0)$ в $f_t(0)$, затем пройти путь $s \mapsto f_t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, и, наконец, быстро вернуться из $f_t(1) = f_t(0)$ в $f''_t(0)$. Путь $\bar{\bar{w}}$ — это путь $s \mapsto f''_t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. Оба пути близки к пути $s \mapsto f_0(s)$ в слое L_0. Поэтому $\bar{w}(1) = \bar{\bar{w}}(1)$ (см. [5]; роль Π играет дуга траектории поля Y, проходящей через $f_0(0) = f_0(1)$), так что $f''_t(0) = f''_t(1)$, т. е. f''_t — замкнутый путь. Теперь, вернувшись от отрезка к окружности, мы имеем два отображения f_t, f''_t окружности в один и тот же слой $L_{\alpha(t)}$, близкие друг к другу в этом слое. Легко доказать, что такие два отображения гомотопны. Но f_t гомотопно отображению в точку, значит, и f''_t тоже. Семейство f''_t обладает теми же свойствами (i), (ii), (iii), что и f_t, и сверх того удовлетворяет добавленному условию.

Пусть теперь g: $[0, 1]^2 \to L_0$ — такое непрерывное отображение, что $g(r, 0) = g(r, 1)$ при всех t, так что при каждом r получается некоторое отображение окружности g^r: $S^1 \to L_0$, и пусть g^0 — исчезающий цикл. Докажем, что g^1 — тоже исчезающий цикл.

Применим лемму о голономии к отображению g. Как отображение квадрата оно гомотопно отображению в точку, поэтому существует соответствующее семейство отображений g_t: $[0, 1]^2 \to S^3$, $-\varepsilon \leqslant t \leqslant \varepsilon$, $g_t([0, 1]^2) \subset L_{\alpha(t)}$. При этом $g_t(0,$

$0)=g_t(0,1)$ при достаточно малых $t\geqslant 0$ или $t\leqslant 0$; действительно, семейство отображений $g_t^0\colon S^1\to S^3$, фигурирующее в определении исчезающего цикла, строится так же, как $g_t\mid 0\times[0,1]$ либо $g_{-t}\mid 0\times[0,1]$. Можно считать, что $g_t(0,0)=$ $=g_t(0,1)$ при $t\in[0,\varepsilon]$. Докажем, что тогда и $g_t(r,0)=g_t(r,1)$ *при всех* $r\in[0,1]$ *и* $t\in[0,\varepsilon]$.

Ясно, что множества

$$A=\{(t,r);\ 0\leqslant t\leqslant\varepsilon,\ 0\leqslant r\leqslant 1,\ g_t(r,0)=g_t(r,1)\}$$

и

$$B=\{r;\ [0,\varepsilon]\times r\subset A\}$$

замкнуты. *Мы покажем, что если* $r_0\in B$, *то при любом* $t_0\in[0,\varepsilon]$ у точки (t_0,r_0) имеется такая окрестность U в $[0,\varepsilon]\times[0,1]$, что $U\subset A$. Иными словами, при $r_0\in B$ некоторая окрестность отрезка $[0,\varepsilon]\times r_0$ содержится в A, а отсюда следует, что B — открытое подмножество в $[0,1]$. Поскольку B открыто и замкнуто в $[0,1]$, то $B=[0,1]$.

Обозначим через Π_r проходящую через $g(r,0)=g(r,1)$ малую дугу траектории фиксированного векторного поля Y, используемую при построении g_t. Пусть $r_0\in B$, $t_0\in[0,\varepsilon]$, (U,φ) — расслоенная координатная окрестность точки $g_{t_0}(r_0,0)=$ $=g_{t_0}(r_0,1)$, каждый локальный слой которой пересекает каждую из трансверсалей Π_r с r, достаточно близкими к r_0, ровно один раз. Локальный слой, содержащий точку x, обозначим через $Q(x)$. Если (t,r) достаточно близко к (t_0,r_0), то можно в слое $L_{\alpha(t)}$ рассмотреть следующие пути $\bar{w}$ и $\bar{\bar{w}}$. Путь $\bar{w}$ получается, если сначала быстро перейти по локальному слою $Q(g_t(r,0))=Q(g_t(r_0,0))$ из точки $g_t(r_0,0)$ в $g_t(r,0)$, затем пройти путь $s\mapsto g_t(r,s)$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$ и, наконец, вернуться из $g_t(r,1)$ на трансверсаль Π_{r_0} по локальному слою $Q(g_t(r,1))$. Путь $\bar{\bar{w}}$ — это путь $s\mapsto g_t(r_0,s)$, $0\leqslant s\leqslant 1$. Оба пути близки к замкнутому пути $s\mapsto g_{t_0}(r_0,s)$ в слое $L_{\alpha(t_0)}$, исходят из одной и той же точки $g_t(r_0,0)\in\Pi_{r_0}$ и возвращаются на Π_{r_0}. Поэтому $\bar{w}(1)=\bar{\bar{w}}(1)=g_t(r_0,1)=g_t(r_0,0)=\bar{\bar{w}}(0)$. Но это возможно, лишь если $g_t(r,0)=g_t(r,1)$, т. е. $(t,r)\in A$.

Итак, каждый из путей $s\mapsto g_t(r,s)$ замкнутый, так что получается непрерывное семейство отображений $g_t^r\colon S^1\to L_{\alpha(t)}$. При $r=0$ это те самые отображения g_t^0, которые фигурируют *в определении* исчезающего цикла, т. е. все g_t^0 с $t>0$ гомотопны нулю на слое $L_{\alpha(t)}$. Значит, то же самое верно и для g_t^1. Тем самым доказано, что g^1 — исчезающий цикл.

[12] Очевидно, здесь надо убедиться в возможности осуществления этого процесса, т. е. в том, что, скажем, отображе-

ние $]\varepsilon_2, \varepsilon_1]\times D^2 \to S^3$ можно так «согласовать» с отображением $]\varepsilon_1, \hat{\varepsilon}]\times D^2 \to S^3$, чтобы получающееся отображение $]\varepsilon_2, \hat{\varepsilon}]\times \times D^2 \to S^3$ было непрерывным. Кроме того, строя отображения G_t с $t \in]\varepsilon_1, \hat{\varepsilon}]$, $]\varepsilon_2, \varepsilon_1]$ и т. д., надо обеспечить, чтобы $\varepsilon_n \to 0$,— только тогда мы определим G_t для всех $t \in]0, \hat{\varepsilon}]$.

Как известно, универсальное накрытие строится с помощью путей, исходящих из некоторой фиксированной («базисной» или «отмеченной») точки. Условимся в качестве таковой при построении $\tilde{L}'_{\alpha(r)}$ брать $s^0_r = g_r(s^0)$, где s^0 — некоторая фиксированная точка окружности S^1. Путь $[0, 1] \to s^0_r$ есть некоторая точка $\tilde{s}^0_r \in \tilde{L}'_{\alpha(r)}$ и $\pi(\tilde{s}^0_r) = s^0_r$. Накрытия $\tilde{g}_r: S^1 \to \tilde{L}'_{\alpha(r)}$ будут определены однозначно, если потребовать, чтобы $\tilde{g}_r(s^0) = \tilde{s}^r_0$. Однозначно определена и область, которую кривая $\tilde{g}_r(S^1)$ ограничивает на $\tilde{L}'_{\alpha(r)}$. Эта область гомеоморфна D^2, но гомеоморфизм уже не определен однозначно. Выберем для каждого r какое-нибудь вложение $\tilde{F}_r: D^2 \to \tilde{L}'_{\alpha(r)}$, при котором $\tilde{F}_r | S^1 = \tilde{g}_r$, и положим $F_r = \pi \circ \tilde{F}_r$. Теорема 6.3 доставляет нам семейство отображений $F^r_t: D^2 \to L_{\alpha(t)}$, определенных при всех t из некоторого интервала $I_r \ni r$ и совпадающих с F_r при $t = r$. Пусть $t \in I_r$; сравним F^r_t и F_t. Существует такой гомеоморфизм $h^r_t: D^2 \to D^2$, что $F^r_t = F_t \circ h^r_t$. Отложив пока доказательство этого факта, выберем такую монотонно убывающую последовательность $r_n \to 0$, что $r_0 = \hat{\varepsilon}$ и $I_{r_{n+1}} \cap I_{r_n} \neq \varnothing$; пусть $\varepsilon_{n+1} \in \in I_{r_{n+1}} \cap I_{r_n}$ и $r_{n+1} < \varepsilon_{n+1} < r_n$. Определим при $t \in I_{r_i}$ новые отображения $G^{r_i}_t = F^{r_i}_t \circ \varphi_i$, где $\varphi_i: D^2 \to D^2$ — такие гомеоморфизмы, что $G^{r_0}_t = F^{r_0}_t$ при $t \in I_{r_0}$ (так что можно считать φ_0 тождественным отображением) и $G^{r_i}_{\varepsilon_{i+1}} = G^{r_{i+1}}_{\varepsilon_{i+1}}$ при всех $i \geqslant 0$. Последнее означает, что

$$(*) \qquad F^{r_i}_{\varepsilon_{i+1}} \circ \varphi_i = F^{r_{i+1}}_{\varepsilon_{i+1}} \circ \varphi_{i+1},$$

т. е.

$$F_{\varepsilon_{i+1}} \circ h^{r_i}_{\varepsilon_{i+1}} \circ \varphi_i = F_{\varepsilon_{i+1}} \circ h^{r_{i+1}}_{\varepsilon_{i+1}} \circ \varphi_{i+1}$$

Очевидно, этого можно добиться, индуктивно определяя φ_i посредством соотношений

$$\varphi_{i+1} = h^{r_i}_{\varepsilon_{i+1}} \circ \varphi_i \circ \left(h^{r_{i+1}}_{\varepsilon_{i+1}}\right)^{-1}.$$

Если, как это и было в теореме 6.3, строить F^r_t так, чтобы точки $F^r_t(x)$ при фиксированном t лежали на проходящей через

$F_r(x)$ траектории поля Y, то наряду с (*) имеет место и более общее равенство

$$F_t'^i \circ \varphi_i = F_t'^{i+1} \circ \varphi_{i+1} \text{ при всех } t \in I_{r_{i+1}} \cap I_{r_i}.$$

Теперь можно положить

$$G_t \,|\,]\varepsilon_{i+1},\ \varepsilon_i] = G_t'^i \,|\,]\varepsilon_{i+1},\ \varepsilon_i] \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Докажем существование h_t'. Стягивая D^2 к s^0 (каждая точка движется с постоянной скоростью по хорде, соединяющей ее с s^0), построим гомотопию, соединяющую отображение F_t' с отображением $D^2 \to s_t^0$. Последнее накрывается отображением $D^2 \to \tilde{s}_t^0$. Накрывая гомотопию, получим отображение $\tilde{F}_t'$: $D^2 \to \tilde{L}_{\alpha(t)}$, накрывающее отображение F_t' и, следовательно, являющееся C^0-иммерсией. При этом $\tilde{F}_t' \,|\, S^1 = \tilde{g}_t$, ибо $(\tilde{F}_t' \,|\, S^1)(s^0) = \tilde{s}_t^0$ и $\pi \circ (\tilde{F}_t' \,|\, S^1) = g_t$. Но если ограничение C^0-иммерсии $D^2 \to R^2$ на ∂D^2 является вложением, то и сама эта иммерсия является C^0-вложением $D^2 \to R^2$, образ которого совпадает с областью, ограниченной простой замкнутой кривой — образом ∂D^2 (см. ниже). Ясно, что тогда можно взять $h_t' = \tilde{F}_t^{-1} \circ \tilde{F}_t'$.

Итак, пусть f: $D^2 \to \mathbf{R}^2$ есть C^0-иммерсия, а $f \,|\, \partial D^2$ есть C^0-вложение; докажем, что тогда и все f есть C^0-вложение.

Пусть ψ: $S^1 \to \mathbf{R}^2$ — непрерывная замкнутая кривая и $y \notin \psi(S^1)$. Порядок $\omega(y,\ \varphi)$ точки y относительно кривой ψ определяется как степень отображения

$$S^1 \to S^1, \qquad x \mapsto \frac{\psi(x) - y}{|\psi(x) - y|}.$$

Если кривая ψ является простой, то она делит $\mathbf{R}^2$ на две области — внутреннюю Γ и внешнюю Γ'. Известно, что если $y \in \Gamma'$, то $\omega(y,\ \psi) = 0$, а если $y \in \Gamma$, то $\omega(y,\ \psi) = \pm 1$ в зависимости от того, как ориентирована кривая ψ — положительно или нет. (*Если угодно, для непрерывной кривой* ψ положительная ориентация определяется именно с помощью условия, что $\omega(y,\ \psi) = 1$ при $y \in \Gamma$. Для гладкой кривой ψ имеется другое определение — положительной считается ориентация, индуцированная на крае $\psi(S^1)$ C^1-многообразия Γ ориентацией последнего, получающейся из обычной ориентации на $\mathbf{R}^2$. Оба определения приводят к одному результату.)

Пусть отображение φ: $D^2 \to R^2$ является вложением в некоторой окрестности точки $x \in \operatorname{Int} D^2$. Пусть U — такая окрестность точки x, что $\varphi \,|\, U$ — вложение, а γ — такая положительно ориентированная простая замкнутая кривая в U, что x лежит внутри γ. Если $\omega(\varphi(x),\ \varphi \circ \gamma) = +1$, то говорят, что φ сохраняет ориентацию возле точки x, а если $\omega(\varphi(x),\ \varphi \circ \gamma) = -1$, —

что φ изменяет ориентацию возле точки x. (Сохранение или изменение ориентации не зависит от конкретного выбора U и γ с указанными свойствами. Для гладкого отображения, имеющего в x ранг 2, сохранение или изменение ориентации эквивалентно положительности или отрицательности соответствующего якобиана.) Если φ — иммерсия, то она либо сохраняет ориентацию возле всех точек $x \in D^2$, либо изменяет ее возле всех точек. Действительно, в этом случае множество точек, где ориентация сохраняется, и множество точек, где она изменяется, являются открытыми подмножествами в D^2.

Пусть при непрерывном отображении $f\colon D^2 \to \mathbf{R}^2$ полный прообраз $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ лежит в $\operatorname{Int} D^2$. Пусть γ_i — такие положительно ориентированные замкнутые кривые, что x_i лежит во внутренней, а остальные x_j — во внешней по отношению к γ_i области. Тогда

$$\omega(y, f \mid \partial D^2) = \sum \omega(y, f \circ \gamma_i).$$

Поэтому в случае, когда f — иммерсия, $\omega(y, f \mid \partial D^2) = \pm k$, где k — число прообразов точки y, а знак берется в зависимости от того, сохраняет f ориентацию или нет. Если при этом $f \mid \partial D^2$ есть вложение и Γ — внутренняя, а Γ' — внешняя область для простой замкнутой кривой $f(\partial D^2)$, то из сказанного ясно, что каждая точка из Γ имеет ровно один прообраз, а точка из Γ' — ни одного. Поэтому $f(D^2) = \bar{\Gamma}$.

Чтобы доказать, что f взаимно однозначно (ввиду компактности D^2 отсюда уже следует, что f — гомеоморфизм $D^2 \to (f D^2)$), осталось проверить, что внутренние точки круга не могут отображаться в $f(\partial D)^2$. Но если $x \in \operatorname{Int} D^2$, то $f(x) \in \operatorname{Int} f(D^2)$, ибо если U — такая окрестность точки x, что $f \mid U$ — гомеоморфизм, то $f(U)$ содержит все точки плоскости $\mathbf{R}^2$, достаточно близкие к $f(x)$. (Это последнее утверждение — так называемая инвариантность внутренних точек при гомеоморфизмах областей — отнюдь не очевидно (если f класса C^0; оно было бы очевидно для C^1-гомеоморфизма). Оно доказывается так. Пусть $D_r(x)$ — круг радиуса r с центром в x и $S_r(x)$ — соответствующая окружность, а $\sigma_r\colon S^1 \to S_r(x)$ — очевидное отображение (гомотетия и сдвиг). Из сказанного выше явствует, что $\omega(f(x), f \circ \sigma_r) = \pm 1$; если y достаточно близко к $f(x)$, то и $\omega(y, f \circ \sigma_r) = \pm 1$; отсюда следует, что $y \in f(D_r(x))$, — иначе при всех $t \in [0, r]$ было бы $y \notin f \circ \sigma_t$ и потому имелось бы непрерывное семейство отображений

$$S^1 \to S^1, \qquad x \mapsto \frac{f(\sigma_t(x)) - y}{|f(\sigma_t(x)) - y|},$$

степень которых, т. е. $\omega(y, f \circ \sigma_t)$, была бы одной и той же при всех t; между тем ясно, что $\omega(y, f \circ \sigma_0) = 0$.)

[13] Во всяком случае, это было бы так при нашем построении $G(t, x)$, когда при фиксированном x множество $G(]0, \hat{\varepsilon}]\times x)$ есть некоторая дуга траектории $\psi_{\{G_{\hat{\varepsilon}}(x)\}}(s)$ поля Y. Пусть $s(x)$ — временна́я длина этой дуги, т. е.

$$G(]0, \hat{\varepsilon}]\times x) = \left\{\psi_{\{G_{\hat{\varepsilon}}(x)\}}(s);\ 0 \leqslant s < s(x)\right\}.$$

Существование или несуществование предела $\lim\limits_{t\to 0} G(t, x)$ означает, что $s(x) < \infty$, соответственно $s(x) = \infty$ (в последнем случае данная «дуга» есть целая полутраектория). Если y достаточно близко к x, то конечная дуга траектории $\psi_{\{G_{\hat{\varepsilon}}(y)\}}(s)$ будет близка к дуге траектории $\psi_{\{G_{\hat{\varepsilon}}(x)\}}(s)$; обе они будут пересекать одни и те же слои в близких точках и в близкие моменты «времени» s. Поэтому V открыто, $s(x)$ непрерывно на V и если $x \in V$ и y достаточно близко к x, то $G_0(x) = \psi_{\{G_{\hat{\varepsilon}}(x)\}}(s(x))$ и $G_0(y) = \psi_{\{G_{\hat{\varepsilon}}(y)\}}(s(y))$ лежат на одном и том же слое. Значит, определенное на V отображение G_0 непрерывно на V и отображает каждую его связную компоненту в один слой, в частности, компоненту V_0, содержащую $g_0(\partial D^2)$, — в слой $L'_{\alpha(0)}$. Если бы $V = D^2$, то $D^2 = V_0$ и G_0 было бы непрерывным отображением $D^2 \to L'_{\alpha(0)}$, совпадающим с g_0 на ∂D^2.

[14] То есть имеется такое $c > 0$, что при всех $i \neq j$ расстояние в слое $\rho_{L'}(g_{t_i}(S^1), g_{t_j}(S^1))$ не меньше c. (Здесь расстояние между двумя множествами понимается как минимальное расстояние между их точками.) Действительно, пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — такая конечная совокупность отмеченных расслоенных координатных окрестностей, что уже $\bigcup \varphi_\alpha^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[^n\right) \supset g_0(S^1)$. Пусть c_α — расстояние между границами множеств U_α и $\varphi_\alpha^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[^n\right)$ и $c = \min c_\alpha$. Тогда при достаточно больших i, скажем $i \geqslant i_1$, все $g_{t_i}(S^1) \subset \bigcup \varphi_\alpha^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[^n\right)$, причем при $t_i \neq t_j$ обязательно $\hat{\pi}\varphi_\alpha(g_{t_i}(S^1) \cap U_\alpha) \neq \hat{\pi}\varphi_\alpha(g_{t_j}(S^1) \cap U_\alpha)$. Любая кривая на L', соединяющая точку $x \in g_{t_i}(S^1) \cap \varphi_\alpha^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[^n\right)$ с точкой кривой $g_{t_j}(S^1)$, должна сначала выйти из U_α, поэтому ее длина не меньше c. Что касается $g_{t_i}(S^1)$ с $i < i_1$, то проще всего не заботиться о них, а просто отбросить t_i с $i < i_1$ и начать считать новые t_i с прежнего t_{i_1}.

[15] Отображения G_{t_i} еще не определены этим условием однозначно, ибо если z имеет несколько прообразов при ото-

бражении G_{t_i}, то при построении $\tilde{G}_{t_i}$ можно потребовать, чтобы один из них (причем любой) переходил в $\hat{z}$, и тем самым получатся разные $\tilde{G}_{t_i}$. (Тот способ, которым мы пользовались раньше (с базисной точкой $g_t(s^0)$ и т. д.), тоже здесь не годится, ибо хотя $L'_{\alpha(t_i)} = L'_{\alpha(t_j)} = L'$, но $g_{t_i}(s^0) \neq g_{t_j}(s^0)$ и поэтому накрытия $\tilde{L}'_{\alpha(t_i)}$ и $\tilde{L}'_{\alpha(t_j)}$ вообще различны). Лучше рассуждать следующим образом.

Конкретный выбор накрытия $\pi\colon \tilde{L}' \to L'$ для нас сейчас безразличен, важно только зафиксировать его до конца доказательства. Поднимем на $\tilde{L}'$ риманову метрику со слоя L' и расстояние в $\tilde{L}$ будем обозначать через $\rho_{\tilde{L}'}$. Ясно, что при $x, y \in L'$

$$\rho_{L'}(x, y) = \rho_{\tilde{L}'}(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y)).$$

$\pi^{-1}(g_{t_i}(S^1))$ состоит из конечного или счетного числа простых замкнутых кривых $\gamma_{i,a}$, ограничивающих области $\Gamma_{i,a}$, которые гомеоморфны D^2 посредством гомеоморфизмов $\tilde{G}_{t_i,a}\colon D^2 \to \Gamma_{i,a}$, определяющихся уже однозначно из условия $\pi \circ \tilde{G}_{t_i,a} = G_{t_i}$. Если $t_i \neq t_j$, то $\gamma_{j,b} \cap \gamma_{i,a} = \varnothing$ — более того,

$$(*) \qquad \rho_{\tilde{L}'}(\gamma_{j,b}, \gamma_{i,a}) \geqslant c,$$

— и потому либо $\Gamma_{i,a} \cap \Gamma_{j,b} = \varnothing$, либо $\Gamma_{i,a} \subset \Gamma_{j,b}$, либо $\Gamma_{j,b} \subset \Gamma_{i,a}$. Но при любом достаточно большом i (скажем, $i \geqslant i_1$) $z \in G_{t_i}(D^2)$, а значит, $\hat{z}$ лежит в некоторых из областей $\Gamma_{i,a}$ (не обязательно только в одной из них). Значит, при $i, j \geqslant i_1$ среди областей $\Gamma_{i,a}$ и $\Gamma_{j,b}$ имеются такие, которые пересекаются и потому обязательно вложены друг в друга. Если бы при этом имелась бесконечная последовательность $\Gamma_{j_k, b_k} \subset \Gamma_{i,a}$, то из любой последовательности точек $x_k \in \gamma_{j_k, b_k}$ можно было бы выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит (*).

Итак, для любого $i \geqslant i_1$ имеется такое $k(i)$, что при любом $k \geqslant k(i)$ область $\Gamma_{i,a}$ содержится в некоторой из областей $\Gamma_{k,b}$. Фигурирующее далее в тексте включение $\tilde{G}_{t_k}(D^2) \subset \tilde{G}_{t_i}(D^2)$ как раз и получается при $\tilde{G}_{t_i} = \tilde{G}_{t_i,a}$, $\tilde{G}_{t_k} = \tilde{G}_{t_k,b}$ (с соответствующим b).

[16] Завершающая часть этого рассуждения, начиная от слов «кривая l проходит от $G(]0, \hat{\varepsilon}] \times \{x_0\})$ во внутреннюю часть множества $j(N)$», непосредственно относится к простейшему случаю, когда j — не только иммерсия, но и вложение. Если же иммерсия j не является вложением, то не исключено, что при отображении j часть границы ∂N отображается во

внутреннюю часть множества $j(N)$. Если это произойдет с дугой $[\varepsilon', \varepsilon'']\times\{x_0\}$, то l может быть замкнутой, не выходя из $j(N)$. Поэтому в завершающей части доказательства лучше рассматривать не только кривую $l(t)$, но и накрывающую ее (при иммерсии j) кривую $\tilde{l}(t)$ в N, определяемую для $t\geqslant s_0+\varepsilon'$ из условий, что $\tilde{l}(s_0+\varepsilon')=(\varepsilon', x_0)$ и $j\tilde{l}(t)=l(t)$. Участок $s_0+\varepsilon'\leqslant t\leqslant s_0+\varepsilon''$ кривой $\tilde{l}(t)$ совпадает с дугой $[\varepsilon', \varepsilon'']\times\{x_0\}\subset\partial N$, а далее $\tilde{l}$ входит внутрь N. Кривая $\tilde{l}$ может быть определена для всех $t\geqslant s_0+\varepsilon'$, ибо легко видеть, что если бы $\tilde{l}$ нельзя было определить за пределами некоторого отрезка $[s_0+\varepsilon', t_0[$, то было бы $\tilde{l}(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\tilde{l}(t)\in\partial N$, причем $\tilde{l}(t)$ подходила бы к ∂N изнутри. По сказанному выше $\tilde{l}$ не может подходить изнутри к части $\{\varepsilon'\}\times D^2-\hat{h}(D^2)$ границы ∂N. Подойти к части $[\varepsilon', \varepsilon'']\times S^1$ этой границы она тоже не может: раз $l\cap j([\varepsilon', \varepsilon'']\times S^1)=j([\varepsilon', \varepsilon'']\times\{x_0\})$, то должно быть $\tilde{l}(t_0)\in[\varepsilon', \varepsilon'']\times\{x_0\}$ (так что, в частности, к моменту времени $t=t_0$ кривая $l(t)$ уже «замкнулась»). Но если бы было $\tilde{l}(t_0)=(\varepsilon', x_0)$, то все равно $\tilde{l}$ подходила бы к $\{\varepsilon'\}\times D^2-\hat{h}(D^2)$ в недозволенном направлении, а если бы было $\tilde{l}(t_0)=(\varepsilon, x_0)$, где $\varepsilon'<\varepsilon\leqslant\varepsilon''$, то для некоторых $l(t)$, близких к $l(t_0)$, среди различных прообразов точки $l(t)$ (при отображении j) имелись бы два прообраза, близкие к (ε, x_0), — один, лежащий на ∂N, и другой, лежащий внутри N.

Итак, кривая $\tilde{l}(t)$ определена при всех $t\geqslant s_0+\varepsilon'$. Ввиду компактности N у каждой точки из $j(N)$ может быть лишь конечное число прообразов при иммерсии j, так что кривая $\tilde{l}$ должна «замкнуться». Если $\tilde{l}(t')=\tilde{l}(t'')$, $t'<t''$, то из приведенных выше рассуждений ясно, что $\tilde{l}(t)=\tilde{l}(t+t''-t')$ при всех t, достаточно близких к t'. Отсюда мы выводим, что множество $\{t;\ \tilde{l}(t)=\tilde{l}(t+t''-t')\}$ одновременно открытое и замкнутое, т. е. совпадает с $[s_0+\varepsilon', \infty[$. Но уже говорилось, что при $t=s_0+\varepsilon'$ «замыкания» быть не может.

[17] Доказательство теорем Новикова 6.5 и 6.11 проводится в два этапа: сначала доказывается, что существует исчезающий цикл, а затем отсюда выводится существование компактного слоя. Оба этапа допускают различные модификации, указанные самим Новиковым. Поскольку его работа [1] опубликована в достаточно распространенном издании[1]), я упомяну

[1]) Следует предупредить читателя, который пожелает ознакомиться с [1], что там используется несколько иная терминология, нежели в настоящей книге: трансверсальная ориентируемость там называется ориентируемостью, а исчезающие циклы — циклами, предельно гомотопными нулю.

здесь только об одном из относящихся сюда результатов, в котором речь идет об аналитических слоениях.

Если в определении гладкого многообразия (§ 9) потребовать, чтобы для рассматриваемой системы $\mathcal{S} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ гомеоморфизмы $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$ и $\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$ в (M_{II}) были вещественно-аналитическими (т. е. задавались в окрестности каждой точки сходящимися степенными рядами), то получится определение (вещественно)-аналитической структуры на многообразии; многообразие, снабженное такой структурой, называют короче (вещественно)-аналитическим многообразием. На таком многообразии можно говорить о (вещественно)-аналитических локальных координатах (U, φ). Если в определении слоения (§ 16) в условии $(\mathcal{F}_{III})$ рассматриваемые локальные координаты (U, φ) являются (вещественно)-аналитическими, то слоение $\mathcal{F}$ называется (вещественно)-аналитическим.

В топологии различие между гладкостью (хотя бы класса C^1) и аналитичностью в конечном счете несущественно: на всяком C^r-многообразии из соответствующей максимальной системы $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ можно выбрать подсистему, вводящую на нем структуру (вещественно)-аналитического многообразия (в простейшем случае замкнутого многообразия это доказано в книге Рохлина — Фукса [1*]; в общем случае см. цитированную там статью Уитни, в которой вообще впервые были четко введены понятия гладкого и аналитического многообразий); непрерывные отображения можно аппроксимировать аналитическими (это удалось доказать значительно позднее, см. цитированную там же работу Грауерта). (К тому же большинство многообразий, встречающихся в различных разделах математики — такие «классические» объекты, как сфера, тор, проективное пространство, группы Ли и т. д.— фактически с самого начала определяются так, что соответствующие преобразования координат ($\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$ и т. д.) оказываются аналитическими.)

Оказывается, что в теории слоений ситуация иная. Это впервые обнаружил Хефлигер [2], доказавший, что *на сфере S^3 и вообще на любом замкнутом трехмерном многообразии с конечной фундаментальной группой не существует аналитических слоений коразмерности один*. (Доказательство Хефлигера в известной степени предвосхищало первый этап рассуждений Новикова.) Затем Новиков доказал, что *если на замкнутом трехмерном многообразии M^3 существует аналитическое слоение коразмерности один, то универсальное накрывающее пространство $\tilde{M}^3$ либо стягиваемо, либо гомеоморфно $S^2 \times R$.*

Основное свойство аналитических слоений, которое использовали Хефлигер и Новиков, состоит в том, что у них не может быть «односторонних предельных циклов». По аналогии с теорией дифференциальных уравнений, *предельным циклом* называется такая замкнутая кривая w, целиком лежащая на некотором слое, что соответствующий ей, согласно § 22, росток локального гомеоморфизма $[f]$ отличен от ростка тождественного отображения. Это понятие имеет смысл при любой коразмерности слоения. Когда же слоение имеет коразмерность один, а рассматриваемый слой — двусторонний (в частности, если слоение коориентируемо), то речь идет о ростке гомеоморфизма числовой оси, переводящего отрицательную полуось в отрицательную и положительную — в положительную; если он на одной из этих полуосей совпадает с ростком тождественного отображения, а на другой — нет, то w называется *односторонним предельным циклом*.

Анализируя доказательство теорем 6.5 и 6.11, нетрудно «извлечь» из него, что в условиях этих теорем слоение $\mathcal{F}$ имеет односторонний предельный цикл, т. е. получить доказательство теоремы Хефлигера.

[18] Подробнее: пусть $\pi\colon \tilde{M}^3 \to M^3$ — универсальное накрытие для M^3. «Поднимем» исходное слоение $\mathcal{F}$ на $\tilde{M}^3$; полученное слоение на $\tilde{M}^3$ имеет компактный слой $\tilde{L}$, который, как и всякое ориентируемое замкнутое двумерное подмногообразие многообразия $\tilde{M}^3$, делит $\tilde{M}^3$ на две области V^3 и W^3 (это следует из того, что группа гомологий $H_2(\tilde{M}^3)$ равна 0). Многообразия $\bar{V}^3$ и $\bar{W}^3$ суть компактные многообразия с краем $\tilde{L}$. Эйлерова характеристика $\chi(\tilde{M}^3) = \chi(\bar{V}^3) + \chi(\bar{W}^3) - \chi(\tilde{L})$. Но малый сдвиг (в ту или иную сторону по времени) по траекториям неособого векторного поля, трансверсального к $\mathcal{F}$, не имеет неподвижных точек. Один из таких сдвигов (скажем, в сторону возрастания времени) отображает $\bar{V}^3$ в $\bar{V}^3$, другой (в сторону убывания времени) — $\bar{W}^3$ в $\bar{W}^3$, и любой — $\tilde{M}^3$ в $\tilde{M}^3$. Эти отображения $\bar{V}^3 \to \bar{V}^3$, $\bar{W}^3 \to \bar{W}^3$, $\tilde{M}^3 \to \tilde{M}^3$ гомотопны тождественным. По известной теореме Хопфа $\chi(\tilde{M}^3) = \chi(\bar{V}^3) = \chi(\bar{W}^3) = 0$.

Итак, $\chi(\tilde{L}) = 0$, а потому и для компактного слоя $L = \pi(\tilde{L})$ слоения $\mathcal{F}$ должно быть $\chi(L) = 0$ (ибо $\pi \mid \tilde{L}\colon \tilde{L} \to L$ — накрытие). Если известно, что слой L ориентируем (в частности, если слоение $\mathcal{F}$ ориентируемо), то отсюда следует, что L есть тор.

[19] В формулировке теоремы 7.3 свойства (i) — (iv) относятся к действию d на внешние дифференциальные формы, заданные на M^n, тогда как в вычислении, позволяющем перейти от написанного выражения для ω к (*), непосредственно требовалось бы применять d с аналогичными свойствами

к дифференциальным формам в $\varphi_\lambda(U_\lambda)$ или U_λ. Эту трудность, однако, можно обойти. (Поскольку на русском языке имеется много хороших изложений теории внешних дифференциальных форм, читатель может и не вникать во все эти детали.)

Определим далее носитель $\operatorname{supp}\omega$ как замыкание множества всех тех точек, в которых $\omega \neq 0$. Покажем, что $\operatorname{supp} d\omega \subset \operatorname{supp}\omega$. Для $\omega \in A^0_{(r)}(M^n)$, т. е. для функций, это следует из (iii). В общем случае пусть $p \notin \operatorname{supp}\omega$; тогда имеется такая C^s-функция f, что $f(p) \neq 0$ и $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp}\omega = \varnothing$. Ясно что $f\omega = 0$, поэтому (используем (i) и (ii)) $0 = d0 = d(f\omega) = df \wedge \omega + f \wedge d\omega$. Но по сказанному выше $\operatorname{supp} df \subset \operatorname{supp} f$, так что $df \wedge \omega = 0$. Значит, $f\, d\omega = 0$. Поскольку $f(p) \neq 0$ и f непрерывна, то $d\omega = 0$ в некоторой окрестности точки p, т. е. $p \notin \operatorname{supp}\omega$.

Пусть, далее, $g \in A^0_{(r)}(\varphi_\lambda(U_\lambda))$ и $g = 0$ возле границы $\varphi_\lambda(U_\lambda)$; тогда можно считать, что $g \circ \varphi_\lambda = \Phi^*_\lambda g \in A^0_{(r)}(M^n)$ (вне U_λ продолжаем $g \circ \varphi_\lambda$ нулем), и по (iii) при $p \in U_\lambda$

$$d(g \circ \varphi_\lambda)(p) = (\Phi^*_\lambda)(\Phi^*_\lambda)^{-1} d(g \circ \varphi_\lambda)(p) = \\ = \Phi^*_\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(\varphi_\lambda(p))\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(\varphi_\lambda(p)) \cdot \Phi^*_\lambda dx_i.$$

Применим это к $\bar{x}_j = (f \circ \varphi_\lambda^{-1})\, x_j$, где $f \in A^0_{(s)}(M^n)$, $f = 1$ возле p и $f = 0$ возле границы U_λ. Возле p будет

$$d(\bar{x}_j \circ \varphi_\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \cdot \Phi^*_\lambda dx_i = \Phi^*_\lambda dx_j.$$

Теперь напишем

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_q} (a_{i_1 \ldots i_q} \circ \varphi_\lambda)(\Phi^*_\lambda dx_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (\Phi^*_\lambda dx_{i_q}).$$

Заменим в правой части $a_{i_1 \ldots i_q} \circ \varphi_\lambda$ и $\Phi^*_\lambda dx_j$ на $f \cdot (a_{i_1 \ldots i_q} \circ \varphi_\lambda)$ и $d(\bar{x}_j \circ \varphi_\lambda)$. Получится новая форма $\bar{\omega}$, совпадающая с ω возле p, так что и $d\bar{\omega} = d\omega$ возле p. Но в выражение для $\bar{\omega}$ входят функции, заданные на всем M^n, и их дифференциалы, поэтому $d\bar{\omega}$ можно вычислить, применяя (i)—(iv). По (iv) $dd(\bar{x}_j \circ \varphi_\lambda) = 0$, так что

$$d\bar{\omega} = \sum d(f \cdot (a_{i_1 \ldots i_q} \circ \varphi_\lambda)) \wedge d(\bar{x}_{i_1} \circ \varphi_\lambda) \wedge \ldots \wedge d(\bar{x}_{i_q} \circ \varphi_\lambda).$$

Здесь

$$d(f \cdot (a_{i_1 \ldots i_q} \circ \varphi_\lambda)) = (\Phi^*_\lambda)(\Phi^*_\lambda)^{-1} d(f \cdot (a_{i_1 \ldots i_q} \circ \varphi_\lambda)),$$

где $(\Phi_\lambda^*)^{-1} d(f \cdot (a_{j_1 \dots j_q} \circ \varphi_\lambda))$ можно вычислить по (iii). Окончательно получается, что возле p

$$d(f \cdot (a_{j_1 \dots j_q} \circ \varphi_\lambda)) = \sum_i \left(\frac{\partial a_{j_1 \dots j_q}}{\partial x_i} \circ \varphi_\lambda \right) (\Phi_\lambda^* dx_i)$$

и

$$d\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_q} \left(\sum_i \left(\frac{\partial a_{j_1 \dots j_q}}{\partial x_i} \circ \varphi_\lambda \right) (\Phi_\lambda^* dx_i) \right) \wedge \\ \wedge (\Phi_\lambda^* dx_{j_1}) \wedge \dots \wedge (\Phi_\lambda^* dx_{j_q}),$$

откуда и следует (*).

[20] Эта неопределенность насчет r' отражает тот факт, что если $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ — поле класса C^r, то отсюда следует, что и $\mathscr{F}$ — слоение класса C^r, а если $\mathscr{F}$ имеет класс C^r, то отсюда следует только, что $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ — поле класса C^{r-1}; полностью же связь между гладкостью $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ и $\mathscr{F}$ не выражается в одних только терминах классов C^r. Напомним, что связь между гладкостью векторного поля X и гладкостью его интегральных кривых $\psi_{\{p\}}(t)$ такова: если X — поле класса C^r, то $\psi_{\{p\}}(t)$ как функция от (p, t) тоже класса C^r, но, кроме того, у этой функции имеются и некоторые частные производные $(r+1)$-го порядка. (См. примечание на стр. 18.) Для слоений ситуация аналогична. Пусть M^n — многообразие класса C^s; тогда у каждой точки $p \in M^n$ имеется координатная окрестность $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ с локальными координатами $y_1, \dots, y_n$, входящая в максимальную систему $\mathscr{S} = \{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$, задающую на M^n гладкость класса C^s. По определению C^r-гладкость слоения $\mathscr{F}$ означает, что у p имеется также такая расслоенная координатная окрестность (V, ψ) с локальными координатами $x_1, \dots, x_n$, что y_i как функции $x_1, \dots, x_n$ (эти функции определены в $\psi(V \cap U_\alpha)$) суть функции класса C^r. Если же $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ — поле класса C^r и $r < s$, то $\mathscr{F}$ не только класса C^r, но соответствующую окрестность (V, ψ) можно выбрать так, что частные производные

$$\frac{\partial y_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_m}$$

сами суть функции класса C^r, так что у функций $y_i(x_1, \dots, x_n)$ имеются некоторые частные производные $(r+1)$-го порядка. (Здесь, как обычно, слои локально задаются уравнениями $y_{m+1} = \text{const}, \dots, y_n = \text{const}$.)

[21] Если $r' = r$, то на первый взгляд кажется, что X_i — поля класса C^{r-1}. Этого тоже вполне достаточно для доказа-

тельства теоремы 7.8, ибо в формулировке автора предполагается, что $r \geqslant 2$, так что X_i имеют класс C^1 и можно говорить об их скобках $[X_i, X_j]$. На самом деле X_i — действительно поле класса C^r: в обозначениях из примечания [20] компоненты X_j в локальных координатах $y_1, \ldots, y_n$ суть $\partial y_1/\partial x_j, \ldots, \partial y_n/\partial x_j$.

Кстати, отсюда видно, что в необходимой части теоремы 7.8 условие гладкости можно ослабить до $r \geqslant 1$. (При этом в доказательстве класс гладкости многообразия M^n можно при необходимости повысить, а тот факт, что $[X_i, X_j]=0$, следует в конечном счете из того, что $\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i}$.)

В достаточной части теоремы тоже возможно такое же ослабление условий гладкости, но не путем простого пересмотра с этой точки зрения приведенного в тексте доказательства — уже вводимые ниже координаты $(x_1, \ldots, x_n)$ в $(U_{\bar{\lambda}}, \varphi_{\bar{\lambda}})$ имеют всего лишь гладкость класса C^1 и компоненты векторов $X_2, \ldots, X_m$ в них всего лишь непрерывны. Доказательство можно провести путем редукции к тому случаю, когда все $[X_i, X_j]=0$. (Тогда, как известно, сдвиги по траекториям динамических систем, порожденных векторными полями $X_1, \ldots, X_m$, коммутируют, что позволяет легко построить слоение.) Возле любой точки p существует такая система координат $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ класса C^s, $s > 1$, что $(\varphi_\alpha)_* \mathscr{D}^m(p) = \mathbb{R}^m$. Поэтому в некоторой окрестности точки p имеются такие гладкие векторные поля $X_1, \ldots, X_m \in \mathscr{D}^m$, что

$$(\varphi_\alpha)_* X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\text{слагаемые с } \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Для них $[X_i, X_j]$ является некоторой линейной комбинацией $\partial/\partial x_{m+1}, \ldots, \partial/\partial x_n$, так что условие $[X_i, X_j] \in \mathscr{D}^m$ эквивалентно тому, что $[X_i, X_j]=0$.

[22] Такая метрика не была бы инвариантной относительно преобразований $\tau_*: E \to E$. Фактически всегда используется другая метрика. Она получается применением известного в римановой геометрии стандартного общего метода построения римановой метрики на многообразии TM, связанной с исходной римановой метрикой на M. Инвариантность относительно τ_* при этом автоматически следует из инвариантности (или ковариантности) всех используемых в этом построении объектов.

Правда, для дальнейшего нужна не инвариантность метрики, а инвариантность вводимых ниже форм ω и θ. Но эти вопросы тесно связаны, и имеет смысл остановиться на геометрической стороне дела, хотя инвариантность можно проверить и чисто вычислительным путем. Здесь приходится *предполагать* знакомство с такими стандартными понятиями римановой геометрии, как связность Леви-Чивита и связанные с нею ковариантное дифференцирование и параллельное перенесение. Несколько менее известно по существу эквивалентное им понятие *отображения связности* (оно может определяться для любых связностей, но нам нужна только связность Леви-Чивита). Это есть отображение $K: TTM \to TM$, которое определяется так. Пусть $v \in TM$, $V \in T_v TM$. Рассмотрим в TM C^1-кривую $v(t)$, для которой $v(0) = v$ и $\dot{v}(0) = V$. Тогда KV равно ковариантной производной $\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_{t=0} v(t)$. Независимость KV от конкретного выбора кривой $v(t)$ с указанными свойствами проверяется путем очевидного вычисления с использованием локальных координат. Определение KV можно перефразировать еще так. Если $\pi: TM \to M$ — стандартная проекция, то надо параллельно перенести $v(t)$ из точки $z(t) = \pi v(t)$ в точку $z = z(0)$; пусть при этом получится $v_1(t) \in T_z M$; тогда $KV = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v_1(t)$. (Здесь берется уже обычная производная функции скалярного аргумента со значениями в фиксированном векторном пространстве $T_z M$.)

Метрику на многообразии TM вводят следующим образом: если $v \in T_z M$ и $V \in T_v TM$, то по определению

$$\|V\|^2 = \|KV\|^2 + \|\pi_* V\|^2,$$

где $\pi_*: TTM \to TM$ — дифференциал π. Рассматривая $\|V\|^2$ только для векторов, касательных к единичному касательному расслоению E, получим риманову метрику на многообразии E.

Приведем выражение для KV в интересующем нас случае, когда M есть H с метрикой $\frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$, $V \in T_v E$, $v \in T_z H$, $z = x + iy$. Обозначим через $J: TH \to TH$ преобразование, при котором каждое касательное пространство $T_z H$ переходит в себя и в нем происходит поворот на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Тогда

$$(*) \qquad KV = \left(d\beta + \frac{dx}{y}\right)(V) \cdot Jv,$$

где β, как и ниже в тексте, — угол (в обычном евклидовом смысле) между отрицательным направлением оси y и вектором v. (При отсчете углов здесь и далее положительным считается направление против часовой стрелки.)

Действительно, возьмем $v(t)$, как выше; при этом случай $\pi_* V = 0$ тривиален $(v_1(t) = v(t))$, а если $\pi^* V \neq 0$, то можно считать, что $z(t) = \pi v(t)$ есть прямая C плоскости Лобачевского, проходящая через z в направлении вектора $\pi_* V = (dx(V), dy(V))$. При этом случай $dx(V)=0$ опять-таки тривиален. Если же $dx(V) \neq 0$, то C есть некая окружность $z(t) = \alpha + re^{i\varphi(t)}$. Вектор $v(t)$ в точке $z(t)$ имеет направление, определяемое $\beta(t)$. Он образует некоторый угол $\gamma(t)$ с касательной к C в $z(t)$. При параллельном перенесении $v(t)$ вдоль C из $z(t)$ в $z=z(0)$ этот угол должен оставаться неизменным. Но касательная поворачивается на тот же угол (и в ту же сторону), что и $re^{i\varphi}$; значит, и $v(t)$ поворачивается на угол $-\Delta\varphi = \varphi(0) - \varphi(t)$. Поэтому $L(v, v_1(t))$ — угол поворота от вектора v к вектору $v_1(t)$, результату параллельного перенесения $v(t)$, — равен сумме понимаемых в обычном евклидовом смысле углов

$$L(v, v(t)) + L(v(t), v_1(t)) = \Delta\beta - \Delta\varphi.$$

А из $z = \alpha + re^{i\varphi}$ видно, что $dx/dt = -r\sin\varphi\,(d\varphi/dt) = -y(d\varphi/dt)$, так что $d\varphi/dt = -(1/y)(dx/dt)$. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} L(v, v_1(t)) = \left(\frac{d\beta}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}\right)\bigg|_{t=0} = \left(\frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{y}\frac{dx}{dt}\right)\bigg|_{t=0} = \left(d\beta + \frac{1}{y}dx\right)(V).$$

Но $KV = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} v_1(t)$. А так как $\|v_1(t)\| = 1$, то

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt} L(v, v_1(t)) \cdot Jv_1(t),$$

и (*) доказано.

Заметим, что фигурирующие ниже формы ω и θ в этих терминах суть

$$\omega(V) = \langle KV - \pi_* V, Jv\rangle,$$
$$\theta(V) = \langle \pi_* V, v\rangle,$$

что делает очевидной их инвариантность относительно $(\tau_*)^*$. Заметим также, что форма объема для построенной инвариантной метрики в E равна $(1/y^2)\,dx \wedge dy \wedge d\beta$ (т. е. совпадает с формой объема для *упоминаемой* в тексте неинвариантной метрики).

Список литературы

Александер (Alexander J.)

[1] A lemma on systems of knotted curves. Proc. Nat. Acad. Sci., **9** (1923), 93—95.

Аносов Д. В.

[1] Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. — Труды МИАН СССР, 1967, т. 90.

Арраут (Arraut J.)

[1] A 2-dimensional foliations of S^7. Topology, **12** (1973), 243—246.

Бернштейн И. Н., Розенфельд Б. И.

[1] О характеристических классах слоений. Функциональный анализ. — 1972, т. 6, № 1, с. 68—69.

[2] Однородные пространства конечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений. — УМН, 1973, т. 28, № 4, с. 103—138.

Ботт (Bott R.)

[1] On a topological obstruction to integrability. A.M.S. Proc. Symp. in pure Math., **16** (1970), 127—131.

[2] On topological obstructions to integrability. Actes Congrès int. math., Tome 1, 27—36. Gauthier-Villars, Paris, 1970.

[3] Lectures on characteristic classes and foliations. Lectures on Algebraic and Differential Topology. Lecture notes in Math., 279, Springer-Verlag, 1972, pp. 1—94.

[4] The Lefschetz formula and exotic characteristic classes. Proc. of the Diff. Geom. Conf., Symposia Math. 10, Rome (1972), 95—105.

[5] Some remarks on continuous cohomology. Manifolds Tokyo, 1973, 161—170. Univ. of Tokyo Press, 1975.

Ботт, Хефлигер (Bott R., Haefliger A.)

[1] On characteristic classes of Γ-foliations. Bull. Amer. Math. Soc., **78** (1972), 1039—1044.

Ботт, Хейтш (Bott R., Heitsch J.)

[1] A remark on the integral cohomology of $B\Gamma_q$. Topology, **11** (1972), 141—146.

Вильсон (Wilson F.)

[1] On the minimal sets of non-singular vector fields. Ann. of Math., **84** (1966), 529—536.

Винкельнкемпер (Winkelnkemper H. E.)

[1] Manifolds as open books. Bull. Amer. Math. Soc., **79** (1973), 45—51.

Вишик С. М.

[1] Особенности аналитических слоений и характеристические классы. — Функциональный анализ, 1973, т. 7, № 1, с. 1—15.

Вуд (Wood J.)

[1] Foliations on 3-manifolds. Ann. of Math., **89** (1969), 336—358.

[2] Foliations of codimension-one. Bull. Amer. Math. Soc., **76** (1970), 1107—1111.

[3] Bundles with totally disconnected structure group. Comm. Math. Helv., **46** (1971), 257—273.

Гелорже, Жубер (Guelorget S., Joubert G.)

[1] Algèbre de Weil et classes caractéristiques d'un feuilletage. C. R. Acad. Sci. Paris, **273** (1973), 92—95.

Гельфанд И. М.
[1] The cohomology of infinite-dimensional Lie algebras; some questions of integral geometry. Proc. Int. Congress Math. (Nice 1970), vol. 1., Gauthier-Villars, pp. 95—111.
Гельфанд И. М., Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б.
[1] Когомологии алгебры Ли формальных векторных полей с коэффициентами в сопряженном с ней пространстве и вариации характеристических классов слоений.— Функциональный анализ, 1974, т. 8, № 2, с. 13—29.
Гельфанд И. М., Фукс Д. Б.
[1] Когомологии алгебры Ли касательных векторных полей гладкого многообразия. I.— Функциональный анализ, 1969, т. 3, № 3, 32—52; II, 1970, т. 4, № 2, с. 23—31.
[2] Когомологии алгебры Ли формальных векторных полей.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1970, т. 34, № 2, с. 327—342.
[3] PL-слоения. I.— Функциональный анализ, 1974, т. 7, № 4, с. 29—37; II, 1974, т. 8, № 3, с. 7—11.
Годбийон (Godbillon C.)
[1] Fibrés en droite et feuilletages du plan. Enseign. Math., 18 (1972), 213—224.
[2] Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels. Séminaire Bourbaki, 1972/73, № 421.
Годбийон, Вей (Godbillon C., Vey J.)
[1] Un invariant des feuilletages de codimension 1. C. R. Acad. Sci. Paris, 273 (1971), 92—95.
Гольд (Gauld D.)
[1] Submersions and foliations of topological manifolds. Math. Chronicle, 1 (1971), 139—146.
Громов М. Л.
[1] Стабильные отображения слоений в многообразия.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1969, т. 33, № 4, с. 707—734.
Данжуа (Denjoy A.)
[1] Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. J. Math. pure et appl., 11 (1932), 333—375.
Дьедонне Ж.
[1*] Основы современного анализа.— М.: Мир, 1964.
Дюрфи (Durfee A.)
[1] Foliations of odd dimensional spheres. Ann. of Math., 96 (1972), 407—411.
Дюрфи, Лоусон (Durfee A., Lawson H.)
[1] Fibred knots and foliations of highly connected manifolds. Inventiones Math., 17 (1972), 203—215.
Жерар, Жуанолу (Gérard R., Jouanolou J.)
[1] Étude de l'existence de feuilles compactes pour certaines feuilletages analytiques complexes. C. R. Acad. Paris, 277 (1973), 311—314.
Жерар, Сек (Gérard R., Sec A.)
[1] Feuilletages des Painlevé. Bull. Soc. Math. France, 100 (1972), 47—72.
Жубер, Муссю (Joubert G., Moussu R.)
[1] Feuilletage sans holonomie d'une variété fermée. C. R. Acad. Sci. Paris, 270 (1970), 507—509.
Жубер, Муссю, Тышлер (Joubert G., Moussu R., Tischler D.)
[1] Sur les classes caractéristiques des feuilletages produits. C. R. Acad. Sci. Paris, 275 (1972), 171—174.
Зейферт (Seifert H.)
[1] Closed integral curves in 3-space and isotopic two-dimansional deformations. Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950), 287—302.

Зигель (Siegel C. L.)
[1] Note on differential equations on the torus. Ann. of Math., **46** (1945), 423—428.
Иманиси (Imanishi H.)
[1] Sur l'existence des feuilletages S^2-invariantes. J. Math. Kyoto Univ., **12** (1972), 297—307.
[2] On the theorem of Denjoy—Sacksteder for codimension one foliations without holonomy. J. Math. Kyoto Univ., **14** (1974), 607—634.
[3] Structure of codimension one foliations which are almost without holonomy. J. Math. Kyoto Univ., **16** (1976), № 1, 93—99.
Иманиси, Яги (Imanishi H., Yagi K.)
[1] On Reeb components. J. Math. Kyoto Univ., **16** (1975), № 2 313—324.
Камбер, Тондёр (Kamber E., Tondeur P.)
[1] Cohomologie des algèbre de Weil relative tranquées. C. R. Acad. Sci. Paris, **276** (1973), 459—462. И три другие статьи в том же журнале, стр. 1177—1179, 1407—1410, 1449—1452.
[2] Characteristic invariants of foliated bundles. Manuscripta Math., **11** (1974), 51—89.
[3] Foliated bundles and characteristic classes. Lecture Notes in Math., 493, Springer-Verlag, 1975.
А'Кампо (A'Campo N.)
[1] Feuilletages de codimension 1 sur les variétés de dimension 5. C. R. Acad. Sci. Paris, **273** (1971), 603—644.
Кодаира, Спенсер (Kodaira K., Spencer D. C.)
[1] Multifoliated structures. Ann. of Math., **74** (1961), 52—100.
Крайовяну (Craioveanu M.)
[1] Sur les sous-feuilletages d'une structure feuilletage. C. R. Acad. Sci. Paris, **272** (1971), 731—733.
Ламурё (Lamoureux C.)
[1] The structure of foliations without holonomy on noncompact manifolds with findamental group $\boldsymbol{Z}$. Topology, **13** (1974), 219—224.
[2] Quelques conditions d'existence de feuilles compactes. Ann. Inst. Fourier, **24** (1974), 229—240.
Лесли (Leslie J.)
[1] A remark on the group of automorphisms of foliation having a dense leaf. J. Diff. Geometry, **7** (1972), 597—601.
Ликориш (Lickorish W.)
[1] A foliation for 3-manifolds. Ann. of Math., **82** (1965), 414—420.
Лима (Lima E.)
[1] Commuting vector fields on S^3. Ann. of Math., **81** (1965), 70—81.
Лоденбах, Руссари (Laudenbach F., Roussarie R.)
[1] Un exemple de feuilletage sur S^3. Topology, **9** (1970), 63—70.
Лоусон (Lawson H.)
[1] Codimension one foliations of spheres. Ann. of Math. **94** (1971), 494—503.
[2] Foliations. Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 369—418.
[3*] The quantitative theory of foliations. Expositary lectures from the CBMS Regional Conference held at Washington University, St. Louis, Mo., January 6—10, 1975. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, № 27. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1977.
Лэндвебер (Landweber P.)
[1] Complex structures on open manifolds. Topology, **13** (1974), 69—75.
Масси У., Столлингс Дж.
[1*] Алгебраическая топология. Введение. — М.: Мир, 1977.

Мазер (Mather J.)
[1] On Haefliger's classifying space I. Bull. Amer. Math. Soc., 77 (1971), 1111—1115.
[2] Integrability in codimension one. Comm. Math. Helv., **49** (1974), 195—233.
[3] Simplicity of certain groups of diffeomorphisms. Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 271—273.
[4] Loops and foliations. Manifolds Tokyo, 1973, 175—180. Univ. of Tokyo Press, 1975.
Милнор (Milnor J.)
[1] Foliations and foliated vector bundls, Mimeographed, 1970.
Милнор Дж., Уоллес А.
[1*] Дифференциальная топология. Начальный курс.—М: Мир, 1972.
Мидзутани (Mizutani T.)
[1] Remarks on codimension one foliations of spheres. J. Math. Soc. Japan, **24** (1972), 732—735.
[2] Foliated cobordisms of S^3 and examples of foliated 4-manifolds. Topology, **13** (1974), 353—362.
[3] Foliations and foliated cobordisms of spheres in codimension one. J. Math. Soc. Japan, **27** (1975), 264—280.
Мидзутани, Тамура (Mizutani T., Tamura I.)
[1] Foliations of even dimensional manifolds. Manifolds Tokyo, 1973, 189—194. Univ. of Tokyo Press, 1975.
Мишачёв Н. М., Элиашберг Я. М.
[1*] Хирургия особенностей слоений. Функц. анализ, **11** (1977), № 3, 43—53.
Молино (Molino P.)
[1] Propriétés cohomologiques et propriétés topologiqies des feuilletages à connexion transverse projetable. Topology, **12** (1973), 317—325.
Муссю (Moussu R.)
[1] Sur les feuilletages de codimension un. Thesis. Orsay, 1971.
Нисикава, Сато (Nishikawa S., Sato H.)
[1] On characteristic classes of Riemannian, conformal and projective foliations. J. Math. Soc. Japan, **28** (1976), № 2, 223—241.
Нисимори (Nishimori T.)
[1] Isolated ends of open leaves of codimension 1 foliations. Quarterly J. Math. Oxford, **26** (1975), 159—167.
[2] Compact leaves with abelian holonomy. Tôhoku Math. J., 27 (1975), 259—272.
[3] Behavior of leaves of codimension-one foliations. Tôhoku Math. J., **29** (1977), № 2, 255—273.
Новиков С. П.
[1] Топология слоений.—Труды ММО, 1965, т. 14, с. 248—278.
Пастернак (Pasternak J.)
[1] Foliations and compact Lie group actions. Comm. Math. Helv., **46** (1971), 467—477.
[2] Classifying spaces for Riemannian foliations. Proc. Symp. Pure Math., **27** (1975), 303—310.
Плант (Plante J.)
[1] Asymptotic properties of foliations. Comm. Math. Helv., **47** (1972), 449—456.
[2] A generalization of the Poincaré—Bendixson theorem for foliations of codimension one. Topology, **12** (1973), 177—181.
[3] On the existence of exceptional minimal sets in foliations of codimension one. J. Diff. Equations, **15** (1974), 178—194.

Пью (Pugh C.)
[1] The closing lemma. Amer. J. Math., 89 (1967), 956—1009. [Русский перевод: Пью Ч. Лемма о замыкании.—Математика, 1968, 12:6, с. 80—135.]
де Рам Ж.
[1*] Дифференцируемые многообразия.—М.: ИЛ, 1956.
Рейнхарт (Reinhart B.)
[1] Foliated manifolds with bundle-like metrics. Ann. of Math., **69** (1959), 119—132.
[2] Harmonic integrals on foliated manifolds. Amer. J. Math., **18** (1959), 529—536.
[3] Closed metric foliations. Michigan Math. J., **8** (1961), 7—9.
[4] Cobordism and foliations. Ann. Inst. Fourier, **14** (1964), 49—52.
[5] Characteristic numbers of foliated manifolds. Topology, **6** (1967) 467—471.
[6] Automorphisms and integrability of plane fields. J. Diff. Geometry, **6** (1971), 263—266.
[7] Indices for foliations of the 2-dimensional torus. Dynamical systems, Proc. Int. Sympos., Salvador 1971, Acad. Press, N. Y. 1973, p. 421—424.
Рейнхарт, Вуд (Reinhart B., Wood J.)
[1] A metric formula for the Godbillon—Vey invariant for foliations. Proc. Amer. Math. Soc., **38** (1973), 427—430.
Риб (Reeb G.)
[1] Sur certains propriétés topologiques des variétés feuilletées. Actualité Sci. Indust. 1183, Hermann, Paris, 1952.
[2] Sur les structures feuilletées de codimension 1 et sur un théorème de M. A. Denjoy. Ann. Inst. Fourier, **11** (1961), 185—200.
Розенберг (Rosenberg H.)
[1] Actions of R^n on manifolds. Comm. Math. Helv., **41** (1966), 170—178.
[2] Foliations by planes. Topology, **7** (1968), 131—138.
[3] The qualitative theory of foliations. Univ. of Montreal, 1972.
Розенберг, Руссари (Rosenberg H., Roussarie R.)
[1] Les feuilles exceptionnelles ne sont pas exceptionnelles. Comm. Math. Helv., **46** (1971), 43—49.
[2] Reeb foliations. Ann. of Math., **91** (1970), 1—24.
[3] Topological equivalence of Reeb foliations. Topology, **9** (1970), 231—242.
[4] Some remarks on stability of foliations. J. Diff. Geometry, **10** (1975), 207—219.
Розенберг, Руссари, Вейль (Rosenberg H., Roussarie R., Weil D.)
[1] A classification of closed orientable 3-manifolds of rank two. Ann. of Math., **91** (1970), 449—464.
Розенберг, Тёрстон (Rosenberg H., Thurston W.)
[1] Some remarks on foliations. Dynamical Systems. Proc. Int. Sympos., Univ. of Bahia, Salvador, 1971. Academic Press, N. Y., 1973, pp. 463—478.
Розенберг, Шатле (Rosenberg H., Chatelet G.)
[1] Un théorème de conjugaison des feuilletages. Ann. Inst. Fourier, **21** (1971), 95—106.
Рохлин В. А., Фукс Д. Б.
[1*] Начальный курс топологии. Геометрические главы.—М.: Наука, 1977.
Руссари (Roussarie R.)
[1] Sur les feuilletages des variétés de dimension 3. Ann. Inst. Fourier, **21** (1971), 13—81.

[2] Plongements dans les variétés feuilletées et classification de feuilletages sans holonomie. Publ. Math. I.H.E.S., № 43, 1974.

Секстедер (Sacksteder R.)

[1] Some properties of foliations. Ann. Inst. Fourier, **14** (1964), 21—30.

[2] On the existence of exceptional leaves in foliations of codimension-one. Ann. Inst. Fourier, **14** (1964), 221—226.

[3] Foliations and pseudogroups. Amer. J. Math., **87** (1965), 79—102.

Секстедер, Шварц (Sacksteder R., Schwarz A.)

[1] Limit sets for foliations. Ann. Inst. Fourier, **15** (1965), 201—214.

Сиката (Shikata Y.)

[1] On a homology theory associated to foliations. Nagoya Math. J., **38** (1970), 53—61.

Смейл С.

[1*] Обзор некоторых недавних достижений в дифференциальной топологии.— УМН, 1964, т. 19, № 1, с. 125—138.

Спрингер Дж.

[1*] Введение в теорию римановых поверхностей.—М.: ИЛ, 1960.

Стернберг С.

[1*] Лекции по дифференциальной геометрии.— М.: Мир, 1970.

Судзуки (Suzuki H.)

[1] Characteristic classes of foliated principal GL_r-bundles. Hokkaido Math. J., **4** (1975), 159—168.

Сулливан (Sullivan D.)

[1*] A counterexample to the periodic orbit conjecture. Publ. IHES, 1976, № 46.

Тамура (Tamura I.)

[1] Every odd dimensional homotopy sphere has a foliation of codimension one. Comm. Math. Helv., **47** (1972), 73—79.

[2] Foliations of total spaces of sphere bundles over spheres. J. Math. Soc. Japan, **24** (1972), 698—700.

[3] Spinnable structures on differentiable manifolds. Proc. Japan Acad., **48** (1972), № 6, 293—296.

[4] Foliations and spinnable structures on manifolds. Ann. Inst. Fourier, **23** (1973), 197—214.

[5] Specially spinnable manifolds. Manifold Tokyo 1973, 181—188, Univ. of Tokyo Press, 1975.

Тамура И., Мидзутани Т.

[1] О существовании слоений. Сугаку, 25 (1973), 134—147 (на японском языке).

Тёрстон (Thurston W.)

[1] Foliations of 3-manifolds which are circle bundles. Thesis, Univ. of California, Berkeley, 1972.

[2] Non-cobordant foliations of S^3. Bull. Amer. Math. Soc., **78** (1972), 511—514.

[3] Foliations and groups of diffeomorphisms. Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 304—307.

[4] The theory of foliations of codimension greater than one. Comm. Math. Helv., **49** (1974), 214—231.

[5] A generalization of the Reeb stability theorem. Topology, **13** (1974), 347—352.

[6] On the structure of the group of volume-preserving diffeomorphisms (to appear).

[7] A local construction of foliations for three-manifolds. Differential Geometry, Proc. Symp. Pure Math., v. 27, part 1, 315—319. A. M. S., Providence, R. J., 1975.

[8] Existence of codimension one foliations. Ann. of Math., **104** (1976), № 2, 249—268.

Том (Thom R.)
[1] On singularities of foliations. Manifold Tokyo 1973, 171—174, Univ. of Tokyo Press, 1975.
Томас (Thomas E.)
[1] Vector fields on manifolds. Bull. Amer. Math. Soc., **75** (1969), 643—683.
[2] Secondary obstructions to integrability. Dynamical systems. Proc. Int. Sympos. Univ. of Bahia, Salvador, 1971, Acad. Press., N. Y., 1973, pp. 655—661.
Тышлер (Tischler D.)
[1] Totally parallelizable 3-manifolds. Topological Dynamics, edited by Auslander and Gottschalk, 471—492. Benjamin, 1968.
[2] On fibering certain foliated manifolds over S^1. Topology, **9** (1970), 153—154.
Федия (Fedia E.)
[1] Structures différentielles sur le branchement simple et équations différentielles dans le plan. C. R. Acad. Sci. Paris, **276** (1973), 1657—1659.
Филлипс (Phillips A.)
[1] Submersion of open manifolds. Topology, **6** (1967), 171—206.
[2] Foliations of open manifolds I. Comm. Math. Helv., 43 (1968), 204—211; II, Ibid. 44 (1969), 367—370.
[3] Smooth maps transverse to a foliation. Bull. Amer. Math. Soc., **76** (1970), 792—797.
Фукс Д. Б.
[1] Характеристические классы слоений.— УМН, 1973, т. 28, № 2, с. 3—17.
Фукуи (Fukui K.)
[1] Codimension 1 foliations on simply connected 5-manifolds. Proc. Japan Acad., **49** (1973), 432—434.
[2] An application of the Morse theory to foliated manifolds. Nagoya Math. J., **59** (1974), 165—178.
Фукуи, Усики (Fukui K., Ushiki S.)
[1] On the homotopy type of FDiff (S^3, $\mathcal{F}_R$). J. Math. Kyoto Univ., **15** (1975), 201—210.
Хартман Ф.
[1*] Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.
Хейтш (Heitsch J.)
[1] The cohomologies of classifying spaces for foliations. Thesis. Univ. of Chicago, 1971.
[2] A cohomology for foliated manifolds. Bull. Amer. Math. Soc., **79** (1973), 1283—1285.
[3] Deformations of secondary characteristic classes. Topology, **12** (1973), 381—388.
Хефлигер (Haefliger A.)
[1] Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoids. Comm. Math. Helv., **32** (1958), 249—329.
[2] Variétés feuilletées. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **16** (1962), 367—397.
[3] Travaux de Novikov sur les feuilletages. Séminaire Bourbaki, 1967/68, № 339.
[4] Feuilletages sur les variétés ouvertes. Topology, **9** (1970), 183—194.
[5] Homotory and integrability. Lecture notes in Math., **197**, Springer-Verlag, 1971, pp. 133—163.
[6] Lectures on Gromov's theorem. Lecture notes in Math., 209, Springer-Verlag, 1971, pp. 128—141.

[7] Sur les classes caractéristiques des feuilletages. Séminaire Bourbaki, 1971/72, № 412.

Хефлигер, Риб (Haefliger A., Reeb G.)

[1] Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. Enseign. Math., **3** (1957), 107—125.

Хирш (Hirsch M. W.)

[1] Stability of compact leaves of foliations. Dynamical Systems, Proc. Int. Sympos., Univ. of Bahia, Salvador, 1971, Academic Press, N. Y., 1973, pp. 135—153.

Хирш, Пью (Hirsch M. W., Pugh C.)

[1] Smoothness of horocyclic foliations. J. Diff. Geometry, **10** (1975), 225—228.

Чжень, Симонс (Chern S. S., Simons J.)

[1] Characteristic forms and geometric invariants. Ann. of Math., **99** (1974), 48—69.

Чигер, Симонс (Cheeger J., Simons J.)

[1] Differential characters and geometric invariants (to appear).

Швейцер (Schweitzer P.)

[1] Counterexamples to Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations. Ann. of Math., **100** (1974), 386—400.

Шульман (Shulman H.)

[1] Secondary obstructions to foliations. Topology, **13** (1974), 177—183.

Эктор (Hector G.)

[1] Sur un théorème de structure des feuilletages de condimension un. Thesis. Univ. de Strasbourg, 1972.

Эпштейн (Epstein D.)

[1] On the simplicity of certain groups of homeomorphisms. Comp. Math., **22** (1970), 165—173.

[2] Periodic flows on 3-manifolds. Ann. of Math., **95** (1972), 68—82.

[3] Foliations with all leaves compact. Ann. Inst. Fourier, **26** (1976), № 1, 265—282.

Эпштейн, Вогт (Epstein D., Vogt E.)

[1*] A counterexample to the periodic orbit conjecture in codimension 3. Ann. of Math., **108** (1978), № 3, 539—552.

Эресман (Ehresmann C.)

[1] Sur la théorie des variétés feuilletées. Univ. Roma Rend. Mat. e Appl., **10** (1951), 64—82.

Эресман, Риб (Ehresmann C., Reeb G.)

[1] Sur les champs d'élément de contact de dimension p complètement intégrable dans une variété continuement différentiable. C. R. Acad. Sci. Paris, **218** (1944), 955—957.

Эрман (Herman M.)

[1] Simplicité du groupe des difféomorphismes de class C^∞, isotope à l'identité, du tore de dimension n. C. R. Acad. Sci. Paris, **273** (1971), 232—234.

Ямато Каз. (Yamato Kazuo)

[1] Qualitative theory of codimension one foliations. Nagoya Math. J., **49** (1973), 155—229.

Ямато Кен. (Yamato Kenzi)

[1] Examples of foliations with non-trivial exotic characteristic classes. Proc. Japan Acad., **50** (1974), 127—129; Osaka J. of Math., **12** (1975), № 2, 401—417.

Предметный указатель

Оглавление

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее *оформлении*, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

И. Тамура

ТОПОЛОГИЯ СЛОЕНИЙ

Научный редактор Г. М. Цукерман
Младший научный редактор И. В. Герасимова
Художник И. И. Каледин
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор В. П. Сизова
Корректор С. А. Денисова

ИБ № 1607

Сдано в набор 30.05.79. Подписано к печати 28.09.79. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская № 1. Гарнитура латинская. Печать высокая. Объем 10,00 бум. л. Усл. печ. л. 20,00. Уч.-изд. л. 17,65. Изд. № 1/9883. Тираж 6800 экз. Зак 105. Цена 1 руб. 70 коп.

Издательство «Мир»
129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29 с матриц ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

1 р. 70 к.