



М О Д Е Л И
П Р И Р О Д Н Ы Х
С И С Т Е М

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВОСТОЧНО-СИБИРСКИЙ ФИЛИАЛ

519

МОДЕЛИ ПРИРОДНЫХ СИСТЕМ

Под редакцией

д-ра техн наук В. И. Гурмана,
д-ра геогр. наук И. П. Дружинина

2565



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск 1978



Модели природных систем. Новосибирск, «Наука», 1978. 224 с.

Монография посвящена разработке и исследованию математических моделей природных и природно-экономических систем, предназначенных для решения задач прогнозирования, рационального использования, нормирования антропогенных воздействий на примере экосистем, популяций и гидрометеороэлементов Сибири. Рассматриваются также методы долгосрочных прогнозов сезонных сумм атмосферных осадков, среднесезонных температур воздуха, сейсмических характеристик грунтов и оползней. Приводятся примеры пробных прогнозов.

Книга предназначена для гидрологов, климатологов, метеорологов, биологов, географов, ихтиологов, математиков и других специалистов; может быть полезна аспирантам и студентам старших курсов, интересующихся применением математических методов к изучению природных систем.

Табл. 16. Ил. 58. Библ. 219.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В практику современных научных исследований и разработок в области природных и природно-хозяйственных комплексов все шире внедряется системный подход, рассматривающий объект исследования с учетом разнообразных внешних и внутренних связей. Важнейшая составляющая такого подхода — построение математической модели исследуемого объекта путем использования современных методов прикладной математики и ЭВМ. Результатами такого исследования могут быть прогнозы, плановые решения, рекомендации, нормы и т. п.

В современных условиях, когда влияние хозяйственной деятельности на окружающую среду становится все более ощутимым, на смену традиционным инженерным и экономическим расчетам, исходящим из молчаливого предположения о неограниченности многих природных ресурсов, должны прийти эколого-экономические расчеты, в которых объекты окружающей среды, взаимодействующие с экономикой, представлены «на равных» с техническими и экономическими объектами. Это делает проблему моделирования и эффективного прогнозирования реакций природной среды особенно актуальной.

Книга посвящена разработке математических моделей природных систем с целью прогнозирования природных явлений на примере популяций и гидрометеорологических элементов в Сибири, а также методов долгосрочных прогнозов сезонных сумм атмосферных осадков, среднесезонных температур воздуха, загрязнения атмосферы и водоемов, биологической продуктивности оз. Байкал и Усть-Илимского водохранилища, береговых процессов, сейсмических свойств грунтов и др. Приводятся разнообразные примеры пробных прогнозов и их оценка.

Большое внимание уделяется моделированию экосистемы оз. Байкал и ее частей, проблемам охраны и рационального использования озера. Соответствующие разделы написаны по результатам работ, проводимых с 1973 г. в Иркутском госуниверситете, а также в НИИ механики и прикладной математики при Ростовском университете.

Авторский коллектив — специалисты разных областей науки: математики, биологи, географы, гидрологи, геофизики, метеорологи, которых объединяет продолжительная совместная работа в научных семинарах Комиссии Президиума Восточно-Сибирского филиала СО АН СССР по долгосрочным прогнозам природных явлений.

Названной комиссией подготовлены две коллективные монографии: «Проблемы прогностических исследований природных явлений» и данная книга, представляющие в определенном плане единое целое. В первой освещаются общие вопросы и приводятся материалы исследований, которые могут стать базой для разработки математических моделей и методов прогнозирования. Во второй решаются более конкретные задачи того же направления. Многие предложения, содержащиеся в этой книге, требуют дальнейшей разработки, и авторы были бы благодарны читателям за их доброжелательную критику.

ТИПИЧНЫЕ ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИРОДНЫХ И ПРИРОДНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. ТИПЫ МОДЕЛЕЙ И ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С НИМИ

Математическое моделирование — общепризнанный метод исследования сложных систем, какими, несомненно, являются природные и природно-экономические системы. В настоящее время математические модели становятся одним из действенных методов изучения экологических систем. Этому в немалой степени способствовал целый ряд успешных опытов применения математического моделирования к исследованию конкретных объектов (Меншуткин, 1971).

Общие соображения и многочисленные примеры, появившиеся за последнее время в литературе, показывают, что в зависимости от целей моделирования модели для одного и того же объекта могут весьма сильно различаться. Отсюда следует, что серьезное внимание должно уделяться задаче, для которой строится модель. К традиционным задачам можно отнести проверку гипотез относительно внутренней структуры объекта по его поведению, прогнозирование поведения в будущем, изучение реакции на те или иные внешние воздействия, выработку управляющих воздействий, подробное описание поведения объекта с целью замены его моделью в экспериментах, которые с объектом проводить невозможно или нежелательно. Нетрадиционными являются задачи оптимального планирования экспериментов и наблюдений и нормирования внешних воздействий. Последняя особенно актуальна в связи с проблемой установления предельно допустимых норм антропогенных влияний.

Соответственно этим задачам все многообразные математические модели могут быть разделены условно на несколько типов — поисковые, принятие решения, имитационные.

В следующих разделах этой главы подробно рассматриваются характерные типы задач управления и нормирования и математические аспекты их исследования, поскольку в силу новизны постановки задачи либо метода анализа они мало освещены в монографической литературе. Скромное место занимают также исследования, в которых к экологическим объектам последовательно применяется хорошо разработанный аппарат

теории управления вообще и теории оптимального управления в частности. Исключение составляет работа Ю. М. Свирижева, Е. Я. Елизарова (1972). Между тем методы теории управления успешно зарекомендовали себя в применении к изучению сложных технических и экономических систем. Такой подход может оказаться плодотворным и для изучения биологических систем, особенно тех объектов, на которые человек может оказывать целенаправленное, управляемое воздействие. Проблема взаимодействия человека с окружающей средой, как она ставится в настоящее время в связи с бурным развитием экономики и ответными реакциями среды, делает актуальным переход от традиционных экономико-математических моделей к моделям, учитывающим взаимодействие со средой, ограниченность ряда ресурсов и т. д. Речь идет о некоторых объединенных эколого-экономических или биоэкономических моделях.

Экономические и эколого-экономические модели, описывающие внутреннюю динамику процессов, чаще всего записываются в терминах обыкновенных дифференциальных уравнений. В то же время некоторые параметры, участвующие в модели, нередко оказываются, например, явно распределенными по пространству. Тогда рассматриваемую область разбивают на части так, чтобы в каждой из них можно было бы считать эти параметры не зависящими от пространственных координат. После такого разбиения все параметры будут зависеть лишь от времени, и, следовательно, модель можно писать в терминах обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако такой прием имеет и свои недостатки, связанные с существенным увеличением порядка системы дифференциальных уравнений модели. В данном случае естественно пытаться записать модель в терминах систем с распределенными параметрами, как это сделано в § 5, 6 настоящей главы.

Примеры экономических моделей, использующих этот аппарат, можно найти также в работах А. Г. Бутковского (1975); В. И. Аркина, В. Л. Левина (1974). Сделаем несколько полезных замечаний.

Благодаря объективно существующим аналогиям имеется много общего в формальном описании природных и экономических объектов. Так, развитие и равновесие биоценоза (системы из нескольких взаимодействующих видов, каждый из которых является пищей для другого) во многом напоминает развитие и равновесие многоотраслевой экономической системы. Внешнее потребление и инвестиции в экономике аналогичны понятиям урожая и пополнения в экологии. Для тех и других объектов характерны процессы экспоненциального развития и т. д. Управление той или иной экологической системой в большинстве случаев имеет целью достижение какого-то экономического эффекта: сбор высокого урожая, восстановление численности ценной популяции при наименьших затратах и т. п.;

задача управления в этом случае становится задачей экономики.

Отмеченные аналогии только облегчают построение эколого-экономических моделей и решение связанных с ними задач.

§ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ЭКСПЛУАТАЦИИ ЭКОСИСТЕМ

Рассмотрим некоторые типичные задачи управления для экологических или эколого-экономических моделей.

1. Типичная задача управления для эколого-экономической модели. Пусть имеется экологическая или эколого-экономическая система, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений или ее дискретным аналогом. Состояние такой системы характеризуется, как правило, набором количеств образующих ее компонентов, измеряемых в некоторых единицах (например, численность или биомассы для биологических компонентов, объемы производства для отраслей экономики и т. п.).

Из возможных управляющих воздействий на такую систему особо выделим воздействия типа изъятие-пополнение количеств тех или иных компонентов. Для экономики это может быть потребление или пополнение из запасов, для биологии — сбор урожая, вылов, отстрел или, наоборот, посадки, пополнение стада скота, выпуск в водоем мальков рыбы и т. п. Типичная цель управления такой системой — достижение наибольшего экономического эффекта как некоторой функции потребления или урожая и затрат на пополнение.

В связи с этим представляется типичной для рассматриваемых систем следующая задача оптимального управления. Имеется динамическая система — непрерывная

$$\dot{x} = f(t, x, u) + A(t)w \quad (1)$$

или дискретная

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)) + A(t)w(t) \quad (2)$$

с дополнительными ограничениями

$$(t_n, x(t_n), t_k, x(t_k)) \in \Gamma, x \in X(t);$$

$$u \in V(t, x), w \in W(t, x);$$

$$X(t) \subset E^n(t),$$

где $U(t, x)$ — некоторое произвольное множество; $W(t, x) \in E^r$ — некоторый r -мерный параллелепипед. Промежуток T может быть заданным либо свободным.

Требуется перевести систему из (t_n, x_n) в (t_k, x_k) с наибольшим значением функционала

$$I = \int_{t_n}^{t_k} a^0(t) w(t) dt \quad (3)$$

для непрерывной системы или

$$I = \sum_{t=t_n}^{t_k} a^0(t) w(t) \quad (4)$$

для дискретной системы.

Здесь $u(t)$ олицетворяет управление условиями среды; $w(t)$ — описанное выше управление количествами компонентов; $A(t)$ — матрица, учитывающая в общем случае различие размерностей x и w и характер воздействия по отдельным компонентам (+, -); $a^0(t)$ — матрица-строка, которая может истолковываться как набор цен.

Приведем модели динамики возрастного состава популяции (Динамическая теория биологических популяций, 1974).

А. Дискретная модель:

$$x(t+1) = B(t)x(t) - Aw(t), \quad (5)$$

где x — n -вектор возрастной структуры популяции, составляющие которого суть численности возрастных групп каждая в возрастном слое, равном шагу процесса:

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) & b_2(t) & \dots & b_n(t) \\ d_1(t) & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & d_{n-1}(t) & 0 \end{bmatrix}$$

— матрица коэффициентов рождаемости и выживаемости; $w(t)$ — вектор изымаемых или пополняемых численностей по каждой возрастной группе за шаг t .

Б. Непрерывно-дискретная модель:

$$\dot{x} = Bx - Aw, x \geq 0, \quad (6)$$

где x — n -вектор численностей возрастных групп:

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 - \tilde{\beta} & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ \delta_1 & -\tilde{\beta}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \delta - \beta_3 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_{n-1} - \tilde{\beta}_n & \dots \end{bmatrix}$$

Здесь β_i — коэффициент рождаемости; δ_i — коэффициент притока из группы i в группу $i + 1$; β_i — коэффициент оттока из i -й группы в $(i + 1)$ -ю; w — вектор скоростей изъятия-пополнения по каждой возрастной группе.

2. **Общий подход к решению.** Дополнив (1), (2) соответственно уравнениями

$$\dot{x}^0 = a^0(t)w(t), \quad (7)$$

$$x^0(t + 1) = a^0(t)w(t) + x^0(t), \quad (8)$$

получим расширенные системы, которые относятся к типу, описанному в работе В. Ф. Кротова, В. И. Гурмана (1973). Рассмотрим подробно непрерывный вариант. В дискретном варианте рассуждения аналогичны, и мы приведем лишь результат.

Пусть для определенности значения t_H , t_K , x_H , x_K фиксированы. Задача состоит в минимизации функционала $-x^0(t_K)$. Перейдем к производной задаче, для чего предположим условно, что множество W совпадает с пространством E^r . Вспомогательной системе

$$\frac{dx^0}{d\tau} = a^0 l, \quad \frac{dx}{d\tau} = Al, \quad (9)$$

где $l \in E^r$, соответствует множество $Q(t, y)$, которое есть гиперплоскость $y = \Lambda(t)\hat{x}$; $y = (y^1, y^2, \dots, y^{n-r+1})$; $\hat{x} = (x^0, x)$; $\Lambda(t) = -(n-r+1) \times (n+1)$ — матрица в пространстве (x^0, x) размерности $n-r+1$. В самом деле, пусть $\{l_i\}$ — базис в E^r . Положим $l = l_1$ в (9). Тогда $y^{(n)} = \Lambda^{(n)}(t)\hat{x}x a^0 l_1 = x^0 A l_1$ — вектор первых интегралов (9), а $\kappa(t, y^{(n)}(\hat{x}))$ — общий интеграл, если $\kappa(\cdot)$ — произвольная скалярная функция. Положим далее $l = l_2$ в (9) и потребуем, чтобы $\kappa(t, y^{(n)}(\hat{x}))$ была интегралом (9):

$$\kappa_y(-A l_1 a^0 l_2 + a^0 l_1 A l_2) = 0.$$

Это уравнение с частными производными относительно κ .

Его характеристическая система $\frac{dy^{(n)}}{d\tau} = (a^0 l_1 A l_2 - A l_1 a^0 l_2)$ аналогична (9) при $l = l_1$, но имеет размерность n . Отсюда $y^{(n-1)} = \Lambda^{(n-1)}(t)\hat{x}$. Продолжая этот процесс, получим окончательно $y = \Lambda\hat{x}$, где $y = y^{n-r+1}$.

Уравнения производной задачи:

$$\dot{y} = \dot{\Lambda}(t)\hat{x} + \Lambda(t) \begin{bmatrix} 0 \\ f(t, x, u) \end{bmatrix}.$$

Если множество W фактически совпадает с E^r (скорости изъятия-пополнения не ограничены), то задача полностью

сводится к производной размерности порядка $n - r + 1$. Наиболее наглядным и законченным этот результат получается в том случае, когда $r = n$, A — обратимая матрица.

Рассмотрим функции R и G (Кротов, Гурман, 1973):

$$R = \varphi'_x f + \varphi_{x^0} a^0 w + \varphi'_x A w + \varphi t;$$

$$G = -x_K^0 + \varphi(t, x_K^0, x_K).$$

Положим $\varphi = x^0 + \varphi_1(x)$. Легко видеть, что условие минимума G выполняется: $R = \varphi'_{1x} f + a^0 w + \varphi'_{1x} A w + \varphi_{1t}$. Положим $\varphi'_{1x} A(t) = -a^0(t)$, или иначе $A'(t) \varphi_{1x} = -a^0(t)$.

Этой системе удовлетворяет единственная функция $\varphi_1 = a^0(t) A^{-1}(t) x$, и задача сводится полностью к исследованию на максимум по x и u функции:

$$R = -a^0(t) A^{-1}(t) f(t, x, u) - \frac{d}{dt} (a^0(t) A^{-1}(t)) x.$$

Наконец, если $A(t)$ — единичная матрица, то задача окончательно состоит в минимизации по x и u функции:

$$-R = a^0(t) f(t, x, u) + \dot{a}^0(t) x \text{ при условиях } u \in U(t, x), x \in X(t).$$

Результат ее решения функция $\tilde{x}(t)$ не будет, как правило, удовлетворять краевым условиям, так что реализацией решения в классе D будет минимизирующая последовательность, которая строится согласно общему правилу (Кротов, Гурман, 1973).

Для дискретной модели дискретная цепочка производной задачи имеет в общем случае вид

$$y(t+1) = \Lambda(t+1) f(t, x(t), u(t)); \quad (10)$$

$$y = (y^1, y^2, \dots, y^{r-n+1}),$$

а для случая, когда $r = n$, $W = E^r$, A — единичная матрица, задача полностью сводится к минимизации по x и u функции

$$-R = a^0(t) f(t, x, u) + a^0(t-1) x \text{ при условиях } u \in U(t, x), x \in X(t).$$

Если решение этой задачи $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ существует, то существует и оптимальный режим в D как решение цепочки (10) при

$$x = \bar{x}; u = \bar{u}; \bar{w} = \bar{x}(t+1) - f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)).$$

Если a^0 — константа, функция $f(\cdot)$ не зависит от времени t , то как в непрерывном, так и в дискретном случае значения

\bar{x} , \bar{u} , \bar{w} будут постоянными, т. е. соответствующий оптимальный режим эксплуатации оказывается стационарным.

Рассмотрим теперь непрерывную модель следующего типа:

$$\dot{x} = f(x) + Aw, \dot{x}_0 = \sum_{i=1}^r a_i^0 |w^i| \quad (11)$$

такую, что при $w = 0$ решения системы периодические, и, далее, соответствующую ей задачу минимизации некоторой функции от $x(t_k)$ при условии, что $x(t_n)$, $x^0(t_n)$, $x^0(t_k)$ заданы, момент t_k не задан. Такую задачу можно толковать, например, как приведение некоторой экологической системы в состояние, наиболее близкое к естественному, существовавшему до сильных антропогенных изменений, ликвидация которых является целью управления.

Перейдем к аргументу x^0 вместо t :

$$x' = \frac{dx}{dt} = v f(x) + A \frac{w}{\sum_{i=1}^r a_i^0 |w^i|},$$

где

$$v_{\min} < v < \infty, v_{\max} = 1 / \max_w \sum_{i=1}^r a_i^0 |w^i|.$$

В результате получается система типа (1), где второй член в правой части при $w \rightarrow 0$ пробегает некоторое ограниченное множество. Решением такой задачи служит циклический скользящий режим (Кротов, Гурман, 1973, § 7.4).

Рассмотрим некоторые конкретные задачи.

3. Оптимальное управление возрастной структурой популяции. Для наглядности возьмем простейшую непрерывную модель возрастной структуры популяции, где имеются две возрастные группы. Управление такой моделью состоит в том, что в обеих группах может происходить пополнение-изъятие, а цель управления — максимизация дохода от урожая за вычетом издержек на пополнение. Модель в соответствии с приведенным примером имеет следующее описание:

$$\dot{x}^1 = (\beta_1 - \tilde{\beta}_1)x^1 + \beta_2 x^2 + w^1; \quad (12a)$$

$$\dot{x}^2 = \delta_1 x^1 - \tilde{\beta}_2 x^2 + w^2; \quad (12б)$$

$$x^0 = a_1^0 w^1 - a_2^0 w^2; \quad (12в)$$

$$x_{\min}^i \leq x^i \leq x_{\max}^i, a_{1,2}^0 > 0,$$

где все коэффициенты для простоты константы. Величины x_{\min}^i , x_{\max}^i задаются из соображений невырождения популяции, на-

личия корма и т. п. Заданы $x^{1,2}(0) = x_{\Pi}^{1,2}$, $x^{1,2}(t_K) = x_K^{1,2}$ и $x^0(0) = 0$. Минимизируется $-x^0(t_K)$. Модель можно трактовать, например, как процесс эксплуатации некоторого водоема посредством выпуска мальков и отлова взрослых экземпляров рыбы. В соответствии с результатами разд. 2 решение этой задачи находится минимизацией функции

$$\begin{aligned} -R &= a_1^0(\beta_1 - \tilde{\beta}_1)x^1 + \beta_2 x^2 - a_2^0(\delta_1 x^1 - \tilde{\beta}_2 x^2) = \\ &= (a_1^0(\beta_1 - \tilde{\beta}_1) - a_2^0 \delta_1)x^1 + (\beta_2 + a_2^0 \tilde{\beta}_2)x^2. \end{aligned}$$

При реальном предположении $a_2^0 \gg 0$ минимум достигается на верхней границе x^1 , x_{\max}^1 и нижней границе x^2 , x_{\min}^2 . Если граничные условия отличны от x_{\max}^1 и x_{\min}^2 , то решение в целом разрывно в точках $t = 0$ и $t = t_K$ и его аппроксимацией в D служит последовательность кусочно-дифференцируемых функций с достаточно большим ростом в окрестности точек $t = 0$ и $t = t_K$. Из выражений (12а), (12в) следует, что эту аппроксимацию можно проводить для каждого уравнения в отдельности.

4. **Оптимальное управление в системе хищник — жертва.** В математической биологии хорошо известна модель Вольтера, описывающая эволюцию двух взаимодействующих популяций, из которых одна (хищник) питается другой (жертва):

$$\frac{dx^1}{dt} = \varepsilon_1 x^1 - \gamma_{12} x^1 x^2; \quad (13a)$$

$$\frac{dx^2}{dt} = -\varepsilon_2 x^2 + \gamma_{21} x^1 x^2, \quad (13б)$$

где x^1 , x^2 — численность жертвы и хищника соответственно; ε_i , γ_{ij} — некоторые константы.

Эта модель, несмотря на обширную критику обосновывающих ее гипотез, получила распространение благодаря тому, что хорошо объясняет периодические колебания численности видов без видимых изменений внешних условий и вполне применима к решению определенного круга практических задач таких систем, как описание искусственно создаваемых биологических, скажем, космических станций и межпланетных кораблей (Свирижев, Елизаров, 1972).

Отметим характерные свойства этой системы. Система имеет только периодические решения; ее фазовые траектории замкнуты и описываются конечным уравнением

$$(x^1)^{\varepsilon_2} (x^2)^{\varepsilon_1} e^{-\gamma_{21} x^1 - \gamma_{12} x^2} = \xi, \quad (14)$$

где ξ — первый интеграл (назовем его условно потенциалом),

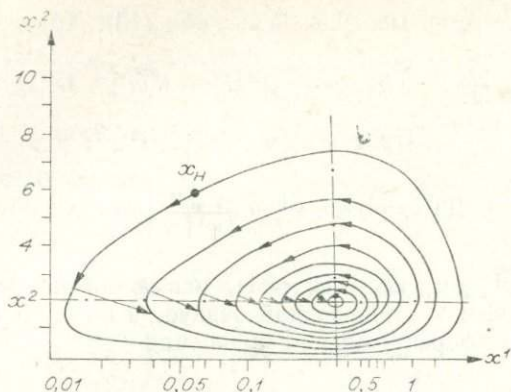


Рис. 1. Фазовые траектории и режим оптимального управления в системе хищник — жертва.

функция двух переменных, имеющая максимум при $\bar{x}^1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_{21}}$, $\bar{x}^2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_{12}}$ (рис. 1). При этом значении ξ траектория вырождается в точку, которая определяет состояние равновесия. Рассмотрим в связи с этой моделью две задачи.

Задача 1. Предположим, что нас интересует долгосрочная политика сбора урожая в такой системе, где и хищник и жертва представляют промысловую ценность. Сбор урожая с некоторой интенсивностью отражается в модели вычитанием из правых частей уравнений неотрицательных ограниченных величин.

Присоединим к системе (13) уравнение, описывающее в данном случае изменение суммарного дохода от урожая:

$$\dot{z} = a_1^0 w^1 + a_2^0 w^2. \quad (15)$$

Задача состоит в том, чтобы перевести систему из заданного начального $(x(0), z(0))$ в заданное конечное состояние $x(t_R) = x_R$ с наибольшим значением z_R . Конечное время t_R не задано.

Задача 2. Пусть требуется привести систему из начального состояния x_H в некоторое желаемое, например в состояние равновесия \bar{x} при неограниченном времени путем пополнения обеих популяций. В этом случае $w^{1,2}$ следует считать неположительными, а коэффициенты $a_{1,2}^0$ — отрицательными. Задача состоит в том, чтобы желаемый перевод осуществить с наименьшим значением z_R , которое в этом случае выражает расходы на пополнение. Далее, для наглядности будем считать, что $|a_i| = 1$.

Обе задачи относятся к типу (11) и решаются по намечен-

ной в разд. 2 схеме. Перейдем в системе (13), (15) к аргументу z :

$$\frac{dx^1}{dz} = v(\varepsilon_1 x^1 - \gamma_{12} x^1 x^2) - l^1 \tilde{w}^1; \quad (16a)$$

$$\frac{dx^2}{dz} = -v(\varepsilon_2 x^2 + \gamma_{21} x^1 x^2) - l^2 \tilde{w}^2; \quad (16b)$$

$$l^i = \text{sign } w^i, \tilde{w}^i = \frac{|w^i|}{|w^1| + |w^2|}$$

(очевидно, $\tilde{w}^i \geq 0$, $\tilde{w}^1 + \tilde{w}^2 = 1$), исключив из рассмотрения время, и, далее, к производной задаче, в которой фигурирует лишь одно дифференциальное уравнение

$$\frac{d\xi}{dz} = -\xi \left(\left(\gamma_{21} - \frac{\varepsilon_2}{x^1} \right) \tilde{w}^1 l^1 + \left(\gamma_{12} - \frac{\varepsilon_1}{x^2} \right) \tilde{w}^2 l^2 \right). \quad (17)$$

Построим верхнюю и нижнюю границы решений уравнения, исходящих из точки $(z = 0, \xi_n)$, максимизируя и минимизируя правую часть (17) по \tilde{w} , x при условиях (16b), (14). Поскольку от \tilde{w} она зависит линейно, экстремальные значения могут достигаться лишь на границах \tilde{w} . При $\tilde{w}^1 = 0$, $\tilde{w}^2 = 1$ имеем

$$\frac{d\xi}{dz} = -\xi \left(\gamma_{12} - \frac{\varepsilon_1}{x^2} \right) l^2, \quad (18a)$$

а при $\tilde{w}^1 = 1$, $\tilde{w}^2 = 0$

$$\frac{d\xi}{dz} = -\xi \left(\gamma_{21} - \frac{\varepsilon_2}{x^1} \right) l^1. \quad (18b)$$

Экстремумы по x^i , b (18a), (18b) могут достигаться на границах x^1 и x^2 соответственно на кривой (14). Исследование выражения (14) показывает, что обе границы x^2 достигаются при $x^1 = \bar{x}^1$, а границы \bar{x}^1 — при $x^2 = \bar{x}^2$ (см. рис. 1). Таким образом, для уравнения (18a) $x^1 = \bar{x}^1$, а для уравнения (18b) $x^2 = \bar{x}^2$.

Отсюда следует, что для первой задачи ($l^1 = -1$) верхняя граница получается при следующих управлениях:

$$1) \tilde{w}^1 = 0, \tilde{w}^2 = 1, x^1 = \bar{x}^1, x^2 = x_{\max}^2(\xi),$$

если
$$\gamma_{12} - \frac{\varepsilon_1}{x_{\max}^2(\xi)} \geq \gamma_{21} - \frac{\varepsilon_2}{x_{\max}^1(\xi)}; \quad (19)$$

$$2) \tilde{w}^1 = 1, \tilde{w}^2 = 0, x^2 = \bar{x}^2, x^1 = x_{\min}^1(\xi)$$

— в противном случае. (В случае равенства в (19) пригодны оба управления.) Нижняя граница получается при управлениях

$$1) \tilde{w}^1 = 0, \quad \tilde{w}^2 = 1, \quad x^1 = \bar{x}^1, \quad x^2 = x_{\min}^2(\xi),$$

$$\text{если } \gamma_{12} - \frac{\varepsilon_1}{x_{\min}^2(\xi)} \leq \gamma_{21} - \frac{\varepsilon_2}{x_{\min}^1(\xi)};$$

$$2) \tilde{w}^1 = 1, \quad \tilde{w}^2 = 0, \quad x^2 = \bar{x}^2, \quad x^1 = x_{\min}^1(\xi)$$

— в противном случае.

Для второй задачи ($l^i = 1$) верхняя граница ξ реализуется при управлении

$$1) \tilde{w}^1 = 0, \quad \tilde{w}^2 = 1, \quad x^1 = \bar{x}^1, \quad x^2 = x_{\min}^2(\xi),$$

$$\text{если } -\left(\gamma_{12} - \frac{\varepsilon_1}{x_{\min}^2(\xi)}\right) \geq -\left(\gamma_{21} - \frac{\varepsilon_2}{x_{\min}^1(\xi)}\right);$$

$$2) \tilde{w}^1 = 1, \quad \tilde{w}^2 = 0, \quad x^2 = \bar{x}^2, \quad x^1 = x_{\min}^1(\xi)$$

— в противном случае, а нижняя граница — при управлениях

$$1) \tilde{w}^1 = 0, \quad \tilde{w}^2 = 1, \quad x^1 = \bar{x}^1, \quad x^2 = x_{\max}^2(\xi),$$

$$\text{если } -\left(\gamma_{12} - \frac{\varepsilon_1}{x_{\max}^2(\xi)}\right) \leq -\left(\gamma_{21} - \frac{\varepsilon_1}{x_{\max}^1(\xi)}\right);$$

$$2) \tilde{w}^1 = 1, \quad \tilde{w}^2 = 0, \quad x^2 = \bar{x}^2, \quad x^1 = x_{\max}^1(\xi).$$

Анализируя характер границ (рис. 2), приходим окончательно к следующим выводам.

Для первой задачи наибольшее значение z_K не достигается (бесконечно). Практически это означает, что число решений задачи бесконечно и на этом множестве можно ставить дополнительные задачи оптимизации с учетом, скажем, времени.

Для второй задачи наименьшее значение z_K получается пересечением прямой $\xi = \xi_K$, где $\xi_K = \xi(x_K)$, с одной из границ ξ ; реализующий эту границу режим управления и будет искомым оптимальным для производной задачи. Реализацией в исходном классе служит последовательность, стремящаяся к циклическому скользящему режиму, которая практически строится следующим образом (например, для случая, когда $\xi_K = \xi_{\max} = \xi(\bar{x})$).

Пусть константы ε_{12} , γ_{12} , γ_{21} таковы, что имеет место управление 1). Выделим некоторую окрестность прямой $x^1 = \bar{x}^1$ двумя лучами, исходящими из точки \bar{x} (см. рис. 1) на фазовой плоскости (x^1, x^2) . Всюду вне этой окрестности положим $w=0$. При входе фазовой точки системы (13) в эту окрестность поло-

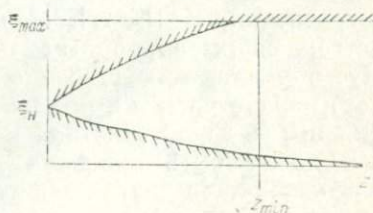


Рис. 2. Верхняя и нижняя границы потенциала в зависимости от дохода (затрат).

жим $w^1 = 0$, $w^2 = w_{\max}^2$. При прохождении окрестности ξ увеличится, т. е. произойдет переход на новую траекторию свободного движения системы внутри предыдущей и т. д. до стягивания в точку. Чем меньше окрестность, тем точнее реализуется управление 1) производной задачи и тем ближе значение к наименьшему. Уменьшая ее, получим искомую минимизирующую последовательность.

§ 3. НОРМИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В настоящее время все большее внимание уделяется проблеме нормирования антропогенных воздействий на природные объекты. Нормирование антропогенных воздействий заключается в следующем: имеется некоторый природный объект или целый природный комплекс, состояние которого должно удовлетворять заранее известным нормам, например санитарным. Известны потенциальные и существующие источники загрязнений или другие антропогенные воздействия на объект. Требуется указать для каждого из источников предельно допустимые интенсивности такие, чтобы нормы на состояние не нарушались (Гурман, Константинов, 1977). Эти нормы индивидуальны и зависят от неуправляемых внешних факторов, таких как метеоусловия, сезонность и т. п., так что речь идет не о раз и навсегда установленных нормах, а лишь о разработке и, может быть, стандартизации методик для расчета этих норм.

Рассмотрим один из подходов к определению таких норм и продемонстрируем его на примере нормирования фенольных загрязнений, хотя он приложим к большому кругу объектов. Условимся, что состояние природного объекта может быть адекватно описано системой дифференциальных или разностных уравнений. Для определенности в дальнейшем будем говорить о системах дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (1)$$

где x — состояние объекта; u — интенсивность источника загрязнений; $t \in [t_0, t_1]$. Множество состояний объекта, удовлетворяющих априорным нормам, обозначим через $Q_x(t)$. Пусть имеется семейство множеств $Q_u(l)$, зависящих от векторного параметра l , и при каждом l определена некоторая функция $\kappa(l)$ — характеристика множества $Q_u(l)$. Характеристикой $\kappa(l)$ может быть площадь, длина границы множества $Q_u(l)$ или какая-либо другая зависимость $\kappa(l)$, отвечающая характеру и требованиям нормирования в каждом конкретном случае. Требуется из этого семейства выбрать такое множество, что при любой интенсивности воздействий из $Q_u(l)$ состояние

объекта $x(t)$ принадлежит множеству $Q_x(t)$ и при этом функция $x(l)$ принимает наибольшее значение.

Приведем метод решения сформулированной выше задачи при следующих упрощающих предположениях.

Система (1) есть система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t); \quad (2)$$

множество $Q_x(t)$ задается системой линейных неравенств

$$Q_x(t) = \{x(t) \in E^n : C(t)x(t) + d(t) \geq 0\}$$

и семейство множеств $Q_u(l)$ имеет вид

$$Q_u(l) = \{u(t) \in E^r : |u_i(t)| \leq l_i, l_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, r\}.$$

Здесь $A(t)$ — матрица $(n \times n)$; $B(t)$ — матрица $(n \times r)$;

$v(t)$ — n -мерный вектор-столбец; $d(t)$ — m -мерный вектор-столбец при каждом $t \in [t_0, t_1]$; $C(t)$ — матрица $(m \times n)$.

Обозначим

$$Q^h(t) = \{x(t) \in E^n : c^h(t)x(t) + d_h(t) \geq 0\},$$

где $c^h(t)$ — k -я строка матрицы $C(t)$; $d_h(t)$ — k -я компонента вектора $d(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Зафиксируем некоторый момент времени T из промежутка $[t_0, t_1]$ и построим при произвольном фиксированном параметре l управляющие воздействия $u^h(t)$ так, чтобы соответствующая траектория $x^h(t)$ в момент времени T была наиболее удалена от множества $Q^h(t)$. Иначе говоря, на траекториях системы (2) требуется минимизировать функционал $I^h = c^h(T)x(T)$ при ограничениях на управляющие воздействия $|u_i(t)| \leq l_i$; $i = 1, 2, \dots, r$ при всех $t \in [t_0, T]$.

Согласно принципу максимума (Понтрягин и др., 1969), оптимальное управление удовлетворяет условию

$$\max_{u(t) \in Q_u(t)} \psi'(t) B(t) u(t) = \psi'(t) B(t) \bar{u}(t), \quad (3)$$

где вектор-функция $\psi(t)$ удовлетворяет системе

$$\dot{\psi}(t) = -A'(t)\psi(t); \quad (4)$$

$$\psi(T) = c^{h'}(T). \quad (5)$$

Известно (Заде, 1970), что если $\Phi(t, \tau)$ — переходная матрица системы $\dot{x} = A(t)x(t)$, то $\Phi'(t, \tau)$ — переходная матрица сопряженной системы. Решение системы (4)–(5) можно записать тогда в виде $\psi(t) = -\Phi'(t, \tau) c^{h'}(T)$, и управление,

удовлетворяющее условию (3), $u^k(t) = S^k(T, t) \cdot l$, где $S^k(T, t)$ — диагональная матрица вида

$$S^k(T, t) = \text{diag} [-\text{sign} (c^k(T) \Phi(T, t) B(t))]. \quad (6)$$

Далее, решение системы (2) запишем в форме Коши

$$x^k(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) v(\tau) d\tau + \\ + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) S^k(T, \tau) l d\tau \quad (7)$$

и рассмотрим значение функционала I^k на оптимальном управлении $u^k(t)$:

$$I^k = c^k(T) \cdot x^k(T) = c^k(T) [y(T) + Y^k(T) \cdot l], \quad (8)$$

где

$$y(T) = \Phi(T, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^T \Phi(T, \tau) v(\tau) d\tau; \\ Y^k(T) = \int_{t_0}^T \Phi(T, \tau) B(\tau) S^k(T, \tau) d\tau.$$

Очевидно, что при каждом заданном параметре l это значение характеризует степень возможного отклонения траектории системы (2) от множества $Q^k(t)$ в момент T . Поэтому система неравенств

$$c^k(T) [y(T) + Y^k(T) \cdot l] + d_h(T) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

совместно с неравенствами $l_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, r$, выделяет то множество параметров l , при которых траектория $x(t)$ принадлежит множеству $Q_x(t)$ в момент T при любых управляющих воздействиях, удовлетворяющих условию $u(t) \in Q_u(l)$. Легко проверить, что если траектория невозмущенного движения (при $u(t) \equiv 0$) системы (2) целиком лежит в Q_x , то совокупность последних неравенств имеет по крайней мере одно решение $l = 0$.

Обозначим через $w(T)$ — m -мерный вектор-столбец, составленный из компонент $c^k(T)y(T) + d_h(T)$, через $W(T)$ — матрицу ($m \times r$), составленную из строк $c^k(T) \cdot Y^k(T)$, неравенство (9) перепишем в виде

$$W(T) \cdot l + w(T) \geq 0. \quad (10)$$

Так как момент времени T был выбран произвольно из $[t_0, t_1]$, то матрицу $W(T)$ и вектор $w(T)$ можно построить для

любого T из $[t_0, t_1]$. Сформулированная задача нормирования сводится, таким образом, к поиску максимума функции $\kappa(l)$ при ограничениях

$$W(T) \cdot l + w(T) \geq 0, T \in [t_0, t_1], \quad (11)$$

$$l \geq 0. \quad (12)$$

Если параметрическое семейство множеств $Q_u(l)$ имеет вид

$$Q_u(l) = \{u(t) \in E^r : l_i^- \leq u_i(t) \leq l_i^+, l_i^- \leq l_i^+, i = 1, 2, \dots, r\},$$

где вектор l составлен из подвекторов l^- и l^+ , то, проведя аналогичные рассуждения, вместо неравенств (11), (12) получим следующие неравенства:

$$W_1(T) \cdot l^- + W_2(T) \cdot l^+ + w(T) \geq 0, l^- \leq l^+.$$

Здесь матрицы $W_i(T)$ составлены из строк $c^h(T)$. $Y_i^h(T)$,

$$Y_i^h(T) = \int_{t_0}^T \Phi(T, \tau) B(\tau) S_i^h(T, \tau) d\tau, i = 1, 2,$$

где матрицы $S_1^h(T, \tau)$ и $S_2^h(T, \tau)$ получаются заменой отрицательных элементов нулевыми соответственно в матрицах $S(T, \tau) = -S^h(T, \tau)$ и $S^h(T, \tau)$.

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи нормирования интенсивности поступления загрязнений (фенол, гидрохинон) в водоем из точечного источника. Задачу будем решать на основе грубой модели распространения загрязнений, которая учитывает процессы распада химических веществ и их переноса. Перенос загрязнений в водоем будем учитывать путем введения двух зон: сильного влияния (А), непосредственно окружающей источник загрязнения, и условно-чистых вод (Б) (рис. 3). Будем также считать, что перенос загрязняющих веществ за границы зоны Б отсутствует. Такое предположение приведет, естественно, к более «жестким» нормам на интенсивность источника.

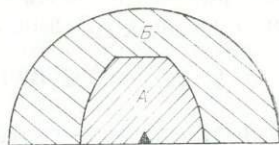


Рис. 3. Схема зон влияния источника загрязнения.

Обозначим $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, i = 1, 2$, — соответственно концентрации фенола, гидрохинона и пирокатехина при $i = 1$ — в зоне сильного влияния, при $i = 2$ — в зоне условно-чистых вод.

Уравнения модели имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{11} &= -k_1 x_{11} - k_4 x_{11} + u_1(t); \\ \dot{x}_{12} &= 0,5k_1 x_{11} - k_2 x_{12} - k_4 x_{12} + u_2(t); \\ \dot{x}_{13} &= 0,5k_1 x_{11} - k_3 x_{13} - k_4 x_{13}; \\ \dot{x}_{21} &= -k_1 x_{21} + k_4 x_{11}; \\ \dot{x}_{22} &= 0,5k_1 x_{21} + k_4 x_{12} - k_2 x_{22}; \\ \dot{x}_{23} &= 0,5k_1 x_{21} + k_4 x_{13} - k_3 x_{23}.\end{aligned}$$

Здесь k_1, k_2, k_3 — константы скорости распада соответственно фенола, гидрохинона и пирокатехина; k_4 — константа скорости переноса вещества из одной зоны в другую. Будем считать, что в начальный момент $t = 0$ загрязняющие вещества в обеих зонах отсутствуют. Параметрическое семейство множеств $Q_u(l)$ возьмем в виде

$$\begin{aligned}Q_u(l) &= \{u(t) \in E^2 : 0 \leq u_1(t) \leq l_1; \\ &0 \leq u_2(t) \leq l_2; l_1 \geq 0, l_2 \geq 0\}.\end{aligned}$$

Характеристикой множеств этого семейства будем считать функцию $\kappa(l) = +(\alpha_1 \cdot l_1 + \alpha_2 \cdot l_2)$, в которой коэффициенты α_1 и α_2 имеют смысл нормативных затрат на увеличение очистки сточков соответственно от фенола и гидрохинона.

Требуется указать такие нормы сбросов загрязняющих веществ, чтобы, во-первых, были минимальны затраты на обеспечение требуемой очистки и, во-вторых, в зоне условно-чистых вод концентрация загрязняющих веществ (фенола, гидрохинона, пирокатехина) не превысила предельно допустимой величины за достаточно большой промежуток времени t_1 . Поскольку рассматриваемая система стационарна, достаточно задать множество $Q_x(t)$ лишь в момент t_1 :

$$Q_x(t_1) = \{x \in E^6 : x_{21}(t_1) \leq z_1; x_{22}(t_1) \leq z_2; x_{23}(t_1) \leq z_3\},$$

где z_1, z_2, z_3 — соответственно ПДК фенола, гидрохинона и пирокатехина.

Проделав все необходимые вычисления, неравенства (11) получим в виде

$$\begin{aligned}[p(k_1 + k_4) - p(k_1)] \cdot l_1 + z_1 &\geq 0; \frac{k_1}{2(k_2 - k_1)} [p(k_1 + k_4) + \\ + p(k_2 + k_4) - p(k_1) - p(k_2)] \cdot l_1 + [p(k_2 + k_4) - p(k_2)] \cdot l_2 + z_2 &\geq 0; \\ \frac{k_1}{2(k_3 - k_1)} [p(k_1 + k_4) + p(k_3 + k_4) - p(k_1) - p(k_3)] \cdot l_1 + z_3 &\geq 0,\end{aligned}$$

где $p(x) = 1/x(1 - e^{-x})$. При достаточно больших t_1 значением экспоненты во всех случаях можно пренебречь. Неравенства тогда примут вид

$$l_1 \leq \frac{k_1(k_1 + k_4)}{k_4} \cdot z_1;$$

$$\frac{k_4 \cdot k_1}{2(k_2 - k_1)} \left[\frac{1}{k_1(k_1 + k_4)} + \frac{1}{k_2(k_2 + k_4)} \right] l_1 + \frac{k_4}{k_2 + k_4} l_2 \leq z_2;$$

$$\frac{k_4 \cdot k_1}{2(k_3 - k_1)} \cdot \left[\frac{1}{k_1(k_1 + k_4)} + \frac{1}{k_3(k_3 + k_4)} \right] l_1 \leq z_3.$$

При конкретных значениях коэффициентов модели, взятых из данных Г. Д. Харламповича, Ю. В. Чуркина (1974), решение задачи будет следующим:

$$l_1 = 0,105 \text{ т/мес}, l_2 = 0,189 \text{ т/мес}.$$

§ 4. ОПТИМАЛЬНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИСТОЩАЕМОГО РЕСУРСА

Истощимым будем называть ресурс, стоимость добычи которого возрастает по мере того, как увеличивается суммарное количество добытого. Стоимость добычи будем считать приведенной к моменту добычи и включающей в себя всевозможные и одновременные затраты, произведенные ради получения ресурса: Сюда могут относиться затраты на разведку нефтяных месторождений, строительство поселков, прокладку дорог, лесовосстановительные работы в лесном хозяйстве и т. п. Один и тот же ресурс может быть отнесен как к истощаемым, так и к неистощаемым, в зависимости от масштабов региона и временной перспективы.

Так, каменный уголь в масштабах страны можно считать ресурсом неистощаемым даже на достаточно отдаленную перспективу. Но в пределах данного угольного бассейна стоимость его добычи может быстро возрастать в связи с выработкой удобных горизонтов и переходу к работе в неблагоприятных геологических условиях. Таким образом, при региональном моделировании в масштабах такого бассейна уголь будет являться истощаемым ресурсом даже при малом временном отрезке моделирования:

Лес при правильном ведении хозяйства в масштабе страны и рассмотрении перспективы на сотни лет, возможно, и не является истощаемым ресурсом. Однако при рассмотрении перспективы на 15—20 лет надо учитывать необходимость вырубki на все более отдаленных участках, отведение сохранившихся

участков для рекреационных целей, создание заповедников и т. п. В результате деловую древесину в такой временной перспективе следует считать истощаемым ресурсом.

Проблема использования истощаемого ресурса исследуется с помощью дифференциальной модели, которая примыкает к моделям, описанным в статье М. З. Борщевского (1976).

Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = c_i(x_i) \cdot f_i(t) \cdot q_i(A_i(t)); \quad \sum_{i=1}^n A_i(t) \leq A(t);$$

$$\bar{A}_i(t) \geq A_i(t) \geq \underline{A}_i(t) \geq 0,$$

где x_i — количество добытого ресурса i -го вида; $c_i(x_i)$ — функция истощения; $f_i(t)$ — отражает экзогенные факторы, например технический прогресс, производительность труда и т. п.; $A_i(t)$ — «управление», т. е. затраты на добычу i -го вида ресурса; $\bar{A}_i(t)$, $\underline{A}_i(t)$ — верхняя и нижняя границы таких затрат; $A(t)$ — суммарные затраты на добычу n видов ресурсов; $q_i(A_i)$ — функция эффективности вложений (обычно это возрастающая выпуклая функция).

Максимизируется один из экономических функционалов:

$$1) I = \int_0^T \left[\sum_i \int_0^{x_i} b_i(s_i, t) ds_i - A_i \right] e^{-pt} dt,$$

где T — конец интервала моделирования или планирования; $b_i(s_i, t)$ — функция эффективности применения ресурса, т. е. «закрывающие затраты» при условии добычи s_i единиц ресурса в год; p — показатель дисконтирования.

$$2) I = \int_0^T \left[\sum b_i(t) \dot{x}_i - A_i \right] \cdot e^{-pt} dt,$$

где $b_i(t)$ — «доход» от использования одной единицы ресурса. Функционал 1) следует применять для моделей крупных регионов, масштаб добычи ресурсов в которых влияет на цены ресурсов. Функционал 2) пригоден для моделей относительно небольших регионов.

Гамильтониан системы

$$H = \sum_i \psi_i \cdot c_i(x_i) \cdot f_i(t) \cdot q_i(A_i) +$$

$$+ e^{-pt} \sum_i \int_0^{x_i} b_i(s_i, t) ds_i - A \cdot e^{-pt}.$$

По принципу максимума надо максимизировать H по управлениям A_i , при этом сопряженные переменные ψ_i можно интерпретировать как «ренту за истощение ресурса».

Дифференциальное уравнение для ψ_i записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = & -\psi_i \frac{dc_i}{dx_i} f_i(t) \cdot q_i(A_i) - e^{-pt} \cdot b_i(x_i, t) \times \\ & \times \frac{dc_i}{dx_i} \cdot f_i(t) \cdot q_i(A_i). \end{aligned}$$

По условиям трансверсальности $\psi_i(T) = 0$. Для «неистощаемого» ресурса $c_i(x_i) = \text{const}$ и $\psi_i(t) \equiv 0$. На заданной траектории все функции, входящие в правую часть уравнения для ψ_i , можно рассматривать как функции времени. Это уравнение интегрируется:

$$\psi_i(t) = \frac{1}{c_i(x_i)} \int_t^T b_{1i}(t) \cdot e^{-pt} dc_i(x_i(t)),$$

где $b_{1i}(t)$ — замыкающие затраты на i -й ресурс как функция времени при заданной траектории развития.

«Приведенное» к моменту t значение ренты за истощение

$$\bar{\psi}_i(t) = - (e^{pt}/c_i(x_i)) \int_t^T b_{1i}(t) e^{-pt} \cdot dc_i(x_i(t));$$

При использовании функционала 2) в формулы для определения ренты следует вместо функции замыкающих затрат $b_{1i}(t)$ подставить прогнозную функцию цены на единицу ресурса $b_i(t)$. Из последней формулы видно, что рента тем больше, чем быстрее возрастают цены на i -й ресурс и чем круче падает функция истощения. Естественно, что рента тем меньше, чем больше показатель дисконтирования.

Получить оптимальное решение в рассматриваемой дифференциальной модели можно, решая двухточечную задачу, например, итерационным способом. Величина ренты за истощение ресурса даже для крупных регионов может достигать десятков процентов от замыкающих затрат на данный ресурс в народном хозяйстве. Учет ренты за истощение ресурса стимулирует его эффективное использование и замену у наименее эффективных пользователей ресурсами неистощаемыми или менее истощаемыми. Например, расчет, проведенный по условному плану добычи нефти в СССР в период 1976—1990 гг., показывает, что при реалистических предположениях о динамике изменения цен на нефть рента за истощение в начале периода составляет 20—30% от замыкающих затрат в 1976 г.

§ 5. О ВЫБОРЕ ТИПА УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАГРЯЗНЕНИЙ

В связи с проблемой охраны окружающей среды значительно возросла роль математических моделей прогноза загрязнений. Практически во всех случаях приходится прогнозировать распространение примеси в неоднородных средах. В работе Л. М. Галкина (1975) высказано предположение, что диффузию примеси в неоднородных средах лучше описывает уравнение Колмогорова, а не уравнение диффузии. Таким образом, качество прогноза оказалось зависящим от типа уравнения, используемого в прогностических моделях. В настоящем параграфе исследуется этот вопрос путем анализа решений уравнений Колмогорова и диффузии в неоднородных средах.

Для описания диффузии в неоднородных средах могут быть использованы уравнения вида

$$\text{и} \quad \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} K(x) \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$
$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x) S(x, t),$$

где S — концентрация примеси; $K(x)$ — коэффициент диффузии; x — пространственная координата; t — время (Монин, Яглом, 1965).

Первое из этих уравнений называют уравнением молекулярной диффузии или полумширическим уравнением турбулентной диффузии в зависимости от того, какой процесс рассматривается — молекулярный или турбулентный. Второе является следствием уравнения для переходных плотностей вероятностей диффузионного процесса $P(x, t)$, строгий вывод которого был дан А. Н. Колмогоровым (1938). Так как P связан с концентрацией S условиями нормировки (Галкин, 1975),

$$P(x, t) = \frac{S(x, t)}{Q}; \quad Q = \int_v S(x, t) dv,$$

где v — область определения S . Поэтому естественно за вторым уравнением в (1) сохранить название уравнения Колмогорова.

Для выяснения влияния неоднородности среды на решения уравнений (1) сформируем задачу, в которой поведение решений будет определяться только неоднородностью среды. Этому требованию удовлетворяют однородные краевые задачи второго рода для ограниченной замкнутой области без источников примеси, заполненной неоднородной средой. Очевидно, что вид начальных условий может влиять только на время релаксации, а не на конечный результат, поэтому достаточно потребовать, чтобы функция $\varphi(x)$, задающая начальные условия, была ограничена в области решения. Коэффициент диффузии $K(x)$,

учитывающий неоднородность среды, по определению всегда больше нуля и ограничен.

Таким образом, для выяснения зависимости решений уравнений (1) от неоднородности среды достаточно найти и проанализировать решения следующих краевых задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} K(x) \frac{\partial S_1}{\partial x}; \quad \frac{\partial K(x) S_2}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x) S_2; \\ S_1(x, 0) &= \varphi(x); \quad S_2(x, 0) = \varphi(x); \\ \frac{\partial S_1}{\partial x} \Big|_{x=0, e} &= 0; \quad \frac{\partial K(x)}{\partial x} \Big|_{x=0, e} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где 0 и e — границы области, где ищутся решения.

Перейдем в уравнении Колмогорова к новой искомой функции $\varphi = K(x) S_2$ и произведем замену переменной

$$z = F(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{K(\xi)}, \quad (3)$$

тогда обе краевые задачи (2) сведутся к одной, решение которой будем искать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \mu(y) \frac{\partial C}{\partial y}; \\ C(y, 0) &= \varphi^*(y); \\ \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{0, L} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} y &= \left\{ \begin{array}{l} x \\ F(x) \end{array} \right\}, \quad \mu(y) = \left\{ \begin{array}{l} K(x) \\ 1 \\ K(\Phi(y)) \end{array} \right\}, \quad \varphi^*(y) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) \\ K(\Phi(y)) \varphi(\Phi(y)) \end{array} \right\}, \\ L &= \left\{ \begin{array}{l} e \\ \int_0^e \frac{d\xi}{K(\xi)} \end{array} \right\}; \end{aligned} \quad (5)$$

$\Phi(z)$ — функция, обратная (3). Верхние значения в этих равенствах соответствуют уравнению диффузии, нижние — уравнению Колмогорова. Нетрудно видеть, что $\mu(y)$ и $\varphi^*(y)$ сохранили свойства функций $K(x)$ и $\varphi(x)$.

Поскольку $0 \leq \mu(y) \leq M$, оператор $A = \frac{\partial}{\partial y} \mu(y) \frac{\partial}{\partial y}$ задачи на собственные значения

$$\frac{d}{dy} \mu(y) \frac{d\Psi_n}{dy} + \lambda_n \Psi_n = 0, \quad (6)$$

соответствующий краевой задаче (4), имеет дискретный спектр с положительными собственными значениями $\lambda_n \geq 0$ (Михлин, 1957). Минимальное собственное значение $\lambda_0 = 0$, так как при этом значении λ_0 задача (6) имеет решение $\text{const} \neq 0$. Таким образом, для решения задачи (4) может быть применен метод разделения переменных, и решение можно записать в виде

$$C(y, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 t} \Psi_n(y), \quad (7)$$

где Ψ_n — собственные функции задачи (6); a_0 и a_n — коэффициенты разложения по собственным функциям Ψ_n , определяемые равенствами

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi^*(y) dy; \quad a_n = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi^*(y) \Psi_n(y) dy. \quad (8)$$

Эти интегралы существуют в силу свойств $\varphi^*(y)$ и $\Psi_n(y)$.

Докажем, что решение (7) краевой задачи (4) единственно. Предположим, что существуют два решения C_1 и C_2 . Поскольку уравнение в (4) линейно, их разность $U = C_1 - C_2$ также удовлетворяет уравнению. Учитывая, что U удовлетворяет нулевым начальному и граничным условиям, получим краевую задачу для U :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \mu(y) \frac{\partial U}{\partial y}; \quad U(y, 0) = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0, L} = 0. \quad (9)$$

Умножим (9) на U и проинтегрируем по времени от 0 до t и по пространству от 0 до L . Учитывая начальное и краевые условия, найдем

$$\frac{1}{2} \int_0^L U^2(y, t) dy = - \int_0^t \int_0^L \mu(y) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 dy dt.$$

Поскольку $\mu(y) > 0$, это равенство удовлетворяется только при $U = 0$. Отсюда следует, что $C_1 \equiv C_2$, т. е. решение краевой задачи (4) единственно. Переходя в решении (7) к переменным задачи (2), согласно равенствам (5), получим решения краевых задач (2):

$$S_1(x, t) = \frac{1}{e} \int_0^e \varphi(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} e^{-\lambda_{n1}^2 t} \Psi_{n1}(x); \quad (10)$$

$$S_2(x, t) = \frac{1}{K(x) \int_0^e \frac{d\xi}{K(\xi)}} \int_0^e \frac{d\xi}{K(\xi)} + \frac{1}{K(x)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_{n2}^2 t} \Psi_{n2}(x).$$

Для анализа решений (10) рассмотрим решение краевой задачи для однородной среды, для которой $K(x) = \text{const}$. В этом случае различия между уравнениями диффузии и Колмогорова исчезают, а собственные функции и собственные значения задачи (6) равны (Тихонов, Самарский, 1953) $\lambda_n = \pi n/e$; $\Psi_n = \cos \frac{\pi n}{e} x$, и решение, согласно (7), принимает вид

$$S(x, t) = \frac{1}{e} \int_0^e \varphi(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{e^2} t} \cos \frac{\pi n}{e} x. \quad (11)$$

Сравнивая (11) с S_1 в (10), можно сказать, что при $t \rightarrow \infty$ S_1 и S становятся тождественно равными, т. е. стационарные решения уравнения диффузии не зависят от неоднородности среды, давая один и тот же результат независимо от вида задания коэффициента диффузии:

$$S_1(x) = S(x) = \frac{1}{e} \int_0^e \varphi(x) dx = \text{const}. \quad (12)$$

Как и для S_1 при $t \rightarrow \infty$, сумма в правой части S_2 в (10) стремится к нулю, т. е. стационарное решение уравнения Колмогорова имеет вид

$$S_2(x) = \frac{1}{K(x) \int_0^e \frac{d\xi}{K(\xi)}} \int_0^e \varphi(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Полученное выражение для стационарного решения уравнения Колмогорова (13) зависит от неоднородности среды. Коэффициент молекулярной диффузии является возрастающей функцией температуры (Чепмен, Каулинг, 1960), поэтому в среде с градиентом температуры он будет функцией координат. Причем в точках с большей температурой $K(x)$ больше, чем в точках с низкими температурами. Следовательно, если в среде поддерживается постоянный градиент температуры, то, согласно (13), должен возникнуть и градиент концентрации примеси, направленный против градиента температуры. Такой ситуации соответствует экспериментальный факт, известный как эффект Соре.

Хорошо известно, что в застойных, защищенных в той или иной мере от воздействий волнения и течений областях водоема турбулентная энергия всегда меньше, чем в открытых его частях. Поскольку коэффициенты турбулентной диффузии являются линейными функциями турбулентной энергии (Озмидов, 1968), в застойных зонах водоемов их величина будет всегда

меньше, чем в открытых зонах. Но тогда на основании решения (13) в застойных зонах должны наблюдаться повышенные по сравнению с открытыми зонами концентрации примеси. Такое поведение концентраций при турбулентной диффузии характерно только для дискретных примесей (макрочастиц) и отражает хорошо известное свойство плавающих дискретных частиц скапливаться в застойных зонах водоемов.

Молекулярная диффузия также представляет собой диффузию дискретных примесей (микрочастиц), (Бай-ши-и, 1962), поэтому хорошее согласие решения уравнения Колмогорова с реальным поведением примесей при их диффузии в неоднородных средах позволяет сделать вывод о том, что диффузия дискретных примесей в неоднородных средах, по-видимому, описывается уравнением Колмогорова, а не уравнением диффузии.

Полученные результаты дают возможность более корректно подойти к описанию диффузии в неоднородных средах и выбору типа уравнения при построении прогностических моделей загрязнений, а также могут быть использованы при описании других природных явлений, где применяется аппарат диффузии дискретных частиц.

§ 6. ЗАДАЧА О РАЦИОНАЛЬНОМ РЕЖИМЕ РАЗРАБОТКИ СЫРЬЯ С УЧЕТОМ ЗАГРЯЗНЕНИЙ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Обозначим через $x = (x_1, x_2)$ точку на плоскости; A — область на плоскости; t — текущее время ($t \geq t_0$); t_0 — начало рассмотрения процесса. Пусть по области A распределено некоторое сырье S и пусть $S(t, x)$ — его плотность в точке x в момент t ; в точке x_0 из области A сосредоточено производство некоторого продукта Π , а $\Pi(t)$ — его количество, выпущенное к моменту времени $t > t_0$ с начала рассмотрения (т. е. $\Pi(t_0) = 0$).

Производство продукта Π основано на использовании сырья S и ряда вспомогательных компонентов $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, которые доставляются в пункт производства извне и должны учитываться в модели через свою стоимость. Будем считать, что потребные количества v_i вспомогательных компонентов однозначно определяются количеством сырья S , участвующим в производстве продукта Π . В процессе добычи сырья и производства возникают загрязнения, плотность которых в момент t в точке x обозначим соответственно через $B_S(t, x)$, $B_\Pi(t, x)$, а совокупное загрязнение — через $B = (B_S, B_\Pi)$; $w(t, x)$ — темп добычи сырья в точке x в момент t .

Наша цель состоит в построении модели, связывающей процессы производства продукта, добычи сырья, накопления загрязнений, которая позволила бы определять подходящие стратегии $w(t, x)$ добычи сырья при заданных условиях на прибыль от

реализации продукта и на загрязнения в окружающей среде. Предположим, что доставка сырья, добытого в точке $x \neq x_0$, в точку x_0 сосредоточения производства, выполняется мгновенно, тогда в точку x_0 в момент t будет доставлено сырье в количестве

$$W(t) = \int_A w(t, x) dx,$$

где $dx = dx_1 dx_2$.

Скорость производства продукта однозначно определяется количеством сырья, участвующим в производстве, т. е.

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = f(W(t)),$$

где $f(W)$ — заданная конечная функция, которая в простейшем случае может быть линейной: $f(W) = aW$ (a — постоянный коэффициент).

Пусть $S_0(x)$ — распределение плотности сырья в момент t_0 начала разработок. Текущие значения $S(t, x)$ распределения сырья при $t > t_0$ определяются двумя аддитивными факторами — темпом добычи сырья и темпом его естественного восстановления, который зависит от текущей плотности $S(t, x)$ и загрязненности:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -w(t, x) + \kappa(x, S, B) \cdot S; S(t, x) \geq 0; S(t_0, x) = S_0(x),$$

где $\kappa(x, S, B)$ — коэффициент естественного восстановления сырья, который уменьшается с понижением его плотности $S = S(t, x)$ и с увеличением плотности загрязнения $B = B(t, x)$. При значительном возрастании B коэффициент κ может принимать отрицательные значения, что соответствует представлению о загрязненности (большой) как факторе, разрушающем сырье при определенных условиях.

Формирование загрязненности определяется двумя аддитивными факторами: темпом добычи сырья и естественным рассасыванием загрязнений. Изложенным представлениям отвечает следующее уравнение для плотности загрязнений ($B_S(t, x)$), учитывающее также возможность распространения загрязнения по плоскости в силу существующих потоков:

$$\frac{\partial B_S}{\partial t} + v_S \frac{\partial B_S}{\partial x} = \beta(x, S, B) w - \chi_S(x, S, B) B_S; B_S(t_0, x) = 0,$$

где $v_S = (v_{S1}, v_{S2})$, $v_S = v_S(t, x)$ — вектор скорости потоков на плоскости; $\beta(x, S, B)$ — коэффициент пропорциональности, численная величина которого равна скорости возникновения загрязнений B_S при единичном темпе добычи сырья; $\chi_S(x, S, B)$ — коэффициент естественного рассасывания загрязнений, который

уменьшается с понижением текущей плотности сырья S и увеличением загрязненности, причем при больших величинах загрязненности возможны его отрицательные значения (т. е. при больших B грязь может начать «размножаться»).

В результате организованного в точке x_0 процесса переработки сырья образуется загрязнение B_{Π} , которое может распространиться как в воздушной, так и в водной среде. Будем считать, что на рассматриваемый вид сырья влияют лишь загрязнения от производства, распространяющиеся в воздушной среде посредством потоков и диффузии. Тогда функция $B_{\Pi}(t, x)$ подчиняется классическому уравнению диффузии (Тихонов, Самарский, 1972), записанному с учетом потоков и возможного рассасывания загрязнений:

$$\frac{\partial B_{\Pi}}{\partial t} + \operatorname{div}(B_{\Pi} \cdot v_{\Pi}) = D \nabla^2 B_{\Pi} - \chi_{\Pi}(x, S, B) \cdot B_{\Pi}.$$

К этому уравнению надо присоединить начальное условие $B_{\Pi}(t_0, x) = 0$ и условие точечного источника бесконечной мощности

$$B_{\Pi}(t, x_0) = j \delta(x - x_0),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция с полюсом в нуле; j — коэффициент интенсивности точечного источника, который зависит лишь от скорости производства продукта. Мы примем линейную зависимость $j = j_0 \cdot f(W)$, где j_0 — постоянный коэффициент пропорциональности.

Было уже отмечено, что для простоты мы считаем время, необходимое для перевозки добытого сырья в точку сосредоточения производства, равным нулю. Однако при этом было бы опрометчивым пренебрегать таким фактором, как стоимость перевозок, поскольку он (вместе со стоимостью вспомогательных компонентов производства) существенно влияет на себестоимость продукта. Обозначим через $\sigma(t, x)$ стоимость перевозки единицы сырья, добытого в пункте x , в пункт сосредоточения производства. Тогда цена перевозки сырья из точек $x \in A$ в точку x_0 представляется интегралом

$$\int_A^{x_0} \sigma(t, x) w(t, x) dx.$$

В качестве показателей процесса можно рассматривать следующие.

1. Прибыль от реализации продукта, изготовленного за время от t_0 до t_1 , с учетом затрат на вспомогательные компоненты v и на перевозки:

$$I_1 = c_{\Pi} \cdot \Pi(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^n c_v^i v_i(t) - \int_A \sigma(t, x) w(t, x) dx \right) dt,$$

где c_{Π} — стоимость единицы продукта Π ; c_v^i — стоимость единицы i -й вспомогательной компоненты. При решении задачи выбора оптимальной стратегии $w(t, x)$ разработки сырья с точки зрения максимума критерия I_1 должны учитываться естественные ограничения

$$B_S(t, x) \leq B_{Sm}(x); B_{\Pi}(t, x) \leq B_{\Pi m}(x), x \in A \setminus O(x_0),$$

где $O(x_0)$ — некоторая конечная окрестность точки x_0 ; $B_{Sm}(x)$, $B_{\Pi m}(x)$ — максимально допустимые загрязнения.

2. Штраф за текущее загрязнение:

$$I_2 = \int_{t_0}^t \iint_A (z_S(t, x) B_S(t, x) + z_{\Pi}(t, x) B_{\Pi}(t, x)) dx dt,$$

где $z_S(t, x)$, $z_{\Pi}(t, x)$ — функции штрафа за единицу загрязнения B_S и B_{Π} соответственно.

3. Штраф за оставшееся после разработок загрязнение:

$$I_2^* = \iint_A (z_S(t_1, x) B_S(t_1, x) + z_{\Pi}(t_1, x) B_{\Pi}(t_1, x)) dx.$$

При решении задачи выбора оптимальной стратегии $w(t, x)$ с точки зрения минимума критерия I_2 (или I_2^*) следует вводить ограничения, учитывающие цель всего процесса, например, $I_1 = \alpha$, т. е. требование достижения заданной прибыли α .

§ 7. ЗАДАЧА О РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗМЕРАХ ЗАПОВЕДНИКА

Пусть в области A развивается и мигрирует, возможно выходя за ее пределы, популяция животных, имеющих промысловое значение, и пусть внутри этой области расположена заповедная область $G \subset A$, через границу которой происходит постоянная миграция животных. Считаем, что в области $A - G$ промысел животных разрешен и выполняется в таких размерах, которые привели бы к гибели популяции, если бы площадь области G была равна нулю (т. е. если бы заповедная зона отсутствовала). Заповедник G , таким образом, постоянно питает область $A - G$ промысловыми животными. В связи с этим возникает естественная задача о разумных размерах заповедника G , которые гарантировали бы сохранность популяции, обитающей во всей области A и давали бы возможность стабильного (желательно максимального) промысла в области $A - G$.

Будем исходить из предположения, что для миграции животных рассматриваемой популяции выполняется аналог зако-

на Нернста для диффузии газа, т. е. количество животных dQ , мигрирующих за время dt через контур Γ , расположенный в области A , представляется криволинейным интегралом

$$dQ = - \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial S}{\partial n} dl dt,$$

где $\partial S / \partial n$ — производная по нормали к контуру Γ от концентрации $S = S(t, x)$ животных в точке x в момент времени t ; dl — элемент контура; $\mu = \mu(x, k)$ — коэффициент миграции, который зависит от положения точки на плоскости и от плотности корма $k = k(t, x)$ в этой точке в момент времени t . С уменьшением плотности корма коэффициент миграции увеличивается и $\mu \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow 0$. При $x \rightarrow \Gamma_A$ (Γ_A — граница области A) величина коэффициента миграции может расти беспредельно. Тогда функция $S = S(t, x)$ подчиняется классическому уравнению диффузии (Тихонов и Самарский, 1974), которое, будучи записанным с учетом естественного прироста и возможности промысла, имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\mu \frac{\partial S}{\partial x} \right) + vS - u, \quad (1)$$

где $u = u(t, x)$ — интенсивность промысла в точке x в момент t ; $v = v(t, x, S)$ — коэффициент естественного прироста. По условию заповедника $u(t, x) = 0$ при $x \in G$.

В области $A - G$ принимаем интенсивность отлова квази-пропорциональной концентрации

$$u(t, x) = \lambda(t, x, S)S,$$

где $\lambda(t, x, S)$ — коэффициент пропорциональности, $0 < \lambda < 1$, который имеет тенденцию уменьшаться с понижением концентрации животных S .

К уравнению (1) следует добавить начальное условие

$$S(t_0, x) = S_0(x), \quad (2)$$

где $S_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \Gamma_A$ и $S_0(x) = 0$ при $x \in A$. Задача Коши (1), (2) имеет единственное решение для всякой заданной области G .

Задачу о рациональных размерах заповедника сформулируем так, чтобы заповедник наилучшим образом выполнял функции поставщика промысловых животных в область $A - G$, где разрешен промысел. Последнее может быть оценено функционалом

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{A-G} \lambda(t, x, S(t, x)) \cdot S(t, x) dx dt, \quad (3)$$

который имеет смысл числа добытых в промысле животных за

время от t_0 до t_1 . После этого задача о рациональных размерах заповедника может быть сформулирована так: найти такую область $G \subset A$, чтобы интеграл (3), вычисленный в силу связей (1), (2), достигал максимального значения.

§ 8. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРОЙ ПОПУЛЯЦИИ

1. Постановка задачи. Динамика изменения численности изолированной (т. е. не контактирующей с другими видами) популяции с учетом искусственного отлова может быть описана в терминах систем с распределенными параметрами; при этом в качестве распределенного параметра выступает возраст особи. Одна из таких моделей, представленная в форме граничной задачи для уравнения с частными производными, приведена в книге «Динамическая теория биологических популяций» (1974) и имеет вид

$$\lambda_t = -\lambda_p - k(t, p, \lambda) \cdot \lambda - u; \lambda(t_0, p) = \lambda_0(p);$$

$$\lambda(t, 0) = \int_0^{p_m} \kappa(t, p, \lambda) \cdot \lambda dp,$$

где $t \in [t_0, t_1]$ — текущее время; $p \in [0, p_m]$ — возраст особи; p_m — максимально возможный возраст; $k(t, p, \lambda)$ — коэффициент смертности особей возраста p в момент времени t , зависящий, вообще говоря, от численности λ ; $\kappa(t, p, \lambda)$ — коэффициент рождаемости; $u = u(t, p)$ — интенсивность искусственного отлова (управление); $\lambda_0(p)$ — начальное распределение численности популяции по возрастам. Предполагается, что $k(t, p, \lambda) \rightarrow +\infty$ при $p \rightarrow p_m$, так что $\lambda(t, p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow p_m$ и $\lambda(t, p) = 0$ при $p > p_m$. Допускаем, что функция $u = u(t, p)$ может принимать положительные значения (отлов) и отрицательные. В последнем случае она приобретает смысл интенсивности искусственного увеличения численности популяции за счет особей возраста p в момент t . На интенсивность искусственного отлова нередко налагается условие

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^{p_m} u dp dt = R$$

обеспечения заданной численности отлова R со всей популяции за время от t_0 до t_1 .

В качестве критерия качества процесса искусственного отлова следует принять такой, который характеризует окончательный (в момент $t = t_1$) возрастной состав популяции с точки зре-

ния возможности ее дальнейшего существования и развития (при $t > t_1$):

$$I = \int_0^{p_m} c(p) \lambda(t_1, p) dp,$$

где $c(p)$ — весовая функция, определяющая значение особей возраста p для развития популяции при $t > t_1$; допускается, что $c(p) \leq 0$. Случай $c(p) < 0$ означает, что особи возраста p вредны с точки зрения дальнейшего развития популяции (скажем, потребляют корм, но уже не дают потомства).

Задача оптимального управления тогда может быть сформулирована так: найти такую стратегию искусственного отлова, обеспечивающую заданный отлов R , чтобы критерий I качества возрастного состава в момент t_1 достигал максимального значения. При этом численность $\lambda(t, p) \geq 0$, т. е. является неотрицательной величиной. Будем предполагать далее, что при свободном развитии популяция лимитирована; коэффициент смертности $k(t, p, \lambda)$ увеличивается, а коэффициент рождаемости уменьшается с ростом λ ; функция $\pi(t, p, \lambda) = (\kappa(t, p, \lambda) - k(t, p, \lambda))\lambda$ при всяких $(t, p) \in [t_0, t_1] \times [0, p_m]$ имеет конечную точку максимума.

2. Методика решения. Для решения сформулированной задачи оптимизации используем теорему о достаточных условиях совместной оптимальности систем с распределенными параметрами, полученную автором данного параграфа и опубликованную в гл. VI книги В. И. Гурмана (1977). Исходную задачу сформулируем в компактном виде, удобном для применения этой теоремы, как задачу о нахождении минимизирующей последовательности для функционала:

$$I_1 = - \int_0^{p_m} c(p) \lambda(t_1, p) dp \quad (1)$$

на множестве D_1 , состоящем из функций $[\lambda(t, p), r(t, p), u(t, p)]$, удовлетворяющих следующим условиям:

$\lambda(t, p), r(t, p)$ непрерывны и дифференцируемы везде в $[t_0, t_1] \times [0, p_m]$, исключая, может быть, конечное число линий конечной длины;

$u(t, p)$ непрерывна и дифференцируема везде в $[t_0, t_1] \times [0, p_m]$, исключая, может быть, конечное число сечений при постоянном t (будем говорить кусочно дифференцируема по t);

выполняются соотношения (дифференциальные, интегральные, конечные)

$$\lambda_t = -\lambda_p - k(t, p, \lambda) \cdot \lambda - u; \quad (2)$$

$$\lambda(t_0, p) = \lambda_0(p); \quad (3)$$

$$\lambda(t, 0) = \int_0^{p_m} \kappa(t, p, \lambda) \cdot \lambda dp; \quad (4)$$

$$r_t = u; \quad (5)$$

$$r(t_0, p) = 0; \quad (6)$$

$$\int_0^{p_m} r(t_1, p) dp = R; \quad (7)$$

$$\lambda \in \Lambda = \{\lambda : \lambda \geq 0\}; \quad (8)$$

$$\lambda = 0 \quad \text{при } p = p_m. \quad (9)$$

Отметим, что задача оптимизации (1) — (9) охватывается общей постановкой задачи в гл. VI (Гурман, 1977), если множество V^1 определить условиями $\lambda(t_0, p) = \lambda_0(p)$; $r(t_0, p) = 0$; $\lambda(t, p) \geq 0$, а размерность вектор-функционала J^1 взять равной двум и находить его компоненты так:

$$J_1^1 = \int_0^{p_m} r(t_1, p) dp - R;$$

$$J_2^1 = \int_0^{p_m} \kappa(t, p, \lambda) \cdot \lambda dp - \lambda(t, 0),$$

положив при этом $T_1 = t_1$, $T_2 = [t_0, t_1]$.

Ищем систему сравнения в виде

$$y_{1t} = \sigma y_1 - w_1; \quad y_{2t} = w_1 + w_2;$$

где $y_i = y_i(t, p)$, ($i = 1, 2$) — фазовые координаты; $w_i = w_i(t, p)$, ($i = 1, 2$) — управляющие функции; $\sigma = \sigma(t, p, y_1)$ — неопределенная пока функция.

Положим $\theta = [\theta_1, \theta_2]$, где $\theta_1[t, p, \dots] = \lambda(t, p)$, $\theta_2[t, p, \dots] = r(t, p)$. Условие 3) теоремы о совместной оптимальности имеет вид

$$-\lambda_p - k(t, p, \lambda) \cdot \lambda - u = \sigma(t, p, \lambda) - \omega_1, \quad u = \omega_1 + \omega_2.$$

Возьмем функционалы ω_1, ω_2 в виде

$$\begin{aligned} \omega_1[t, p, \dots] &= u(t, p) - \omega_2[t, p, \dots], \\ \omega_2[t, p, \dots] &= -\lambda_p(t, p) - [k(t, p, \lambda(t, p)) + \\ &+ \sigma(t, p, \lambda(t, p))] \cdot \lambda(t, p). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда условие 3) теоремы будет удовлетворено.

Определим множество V^2 условиями $y_1(t_0, p) = \lambda_0(p)$; $y_2(t_0, p) = 0$; $y_1(t, p) \in \Lambda$.

Тогда условие 4) теоремы удовлетворяется.

Положим $l_2' = 3$ и найдем функционалы J_i^2 :

$$J_1^2 = \int_0^{P_m} y_2(t, p) dp - R; J_2^2 = \int_0^{P_m} w_2(t, p) dp;$$

$$J_3^2 = \int_0^{P_m} \kappa(t, p, y_1(t, p)) \cdot y_1(t, p) dp - y_1(t, 0).$$

Пусть соответственно $T_1^2 = t_1$, $T_2^2 = T_3^2 = [t_0, t_1]$, $l_2' = l_2$, тогда условие 5) теоремы о совместной оптимальности приобретает вид

$$\int_0^{P_m} \theta_2[t_1, p, \dots] dp = R, \int_0^{P_m} \omega_2[t, p, \dots] dp = 0;$$
(11)

$$\int_0^{P_m} \kappa(t, p, \theta_1[t, p, \dots]) \cdot \theta_1[t, p, \dots] dp = \theta_1[t, 0, \dots].$$

Первое и третье из этих условий выполняется в силу (4), (7) и вида функционала θ . Второе условие может быть удовлетворено посредством выбора функции $\sigma(t, p, y_1)$.

Действительно, в силу (4), (9) имеем

$$\int_0^{P_m} \lambda_p(t, p) dp = - \int_0^{P_m} \kappa(t, p, \lambda(t, p)) \cdot \lambda(t, p) dp.$$

Используя (10), нетрудно проверить, что второе из условий (11) выполняется при любой кусочно-гладкой функции $\lambda(t, p)$, если положить

$$\sigma(t, p, y_1) = \kappa(t, p, y_1) - k(t, p, y_1). \quad (12)$$

Итак, условие 5) удовлетворено.

Функционал сравнения возьмем в виде

$$I_2[y(t, p), w(t, p)] = - \int_0^{P_m} c(p) y_1(t_1, p) dp. \quad (13)$$

Тогда условие 7) теоремы удовлетворяется в форме равенства.

Задача сравнения (назовем ее задачей II) теперь может быть сформулирована так: минимизировать функционал (13) на множестве D_2 пар функций $[y(t, p), w(t, p)]$, удовлетворяющих условиям

$$y_{1t} = \sigma(t, p, y_1) - w_1(t, p), y_1(t_0, p) = \lambda_0(p); \quad (14)$$

$$y_1(t, 0) = \int_0^{p_m} \kappa(t, p, y_1(t, p)) \cdot y_1(t, p) dp; \quad (15)$$

$$y_{2t} = w_1(t, p) + w_2(t, p), \quad y_2(t_0, p) = 0; \quad (16)$$

$$\int_0^{p_m} y_2(t_1, p) dp = R; \quad (17)$$

$$\int_0^{p_m} w_2(t, p) dp = 0; \quad (18)$$

$$y_1(t, p) \in \Lambda. \quad (19)$$

Для полного удовлетворения условий теоремы о совместной оптимальности осталось выполнить условие б). Пусть $[y_s(t, p), w_s(t, p)]$ — элемент минимизирующей последовательности в задаче II. Положим

$$\lambda_s(t, p) = y_{1s}(t, p), \quad r_s(t, p) = y_{2s}(t, p), \quad u_s(t, p) = w_{1s}(t, p) + w_{2s}(t, p). \quad (20)$$

Если построенный таким образом элемент $[\lambda_s(t, p), r_s(t, p), u_s(t, p)] \in D_1$ (т. е. удовлетворяет (2)–(8)), то требование б) теоремы будет удовлетворено. Условия (3)–(8) удовлетворяются, что очевидно. После непосредственной подстановки убеждаемся, что если выполняется равенство $w_{2s}(t, p) = -y_{1sp}(t, p) - [k(t, p, y_{1s}(t, p)) + \sigma(t, p, y_{1s}(t, p))] \cdot y_{1s}(t, p)$ (21)

(оно согласуется с выбором функционала ω_2), то дифференциальная связь (2) также удовлетворяется.

Задача II имеет бесконечно много решений. Действительно, пусть $[y_1(t, p), y_2(t, p); w_1(t, p), w_2(t, p)] \in D_2$, тогда элемент

$$[y_1(t, p), y_2^\delta(t, p), w_1(t, p), w_2^\delta(t, p)],$$

в котором $y_{2t}^\delta = w_1(t, p) + w_2^\delta(t, p); y_2^\delta(t_0, p) = 0;$

$$w_2^\delta(t, p) = w_2(t, p) + \delta(t, p); \int_0^{p_m} \delta(t, p) dp = 0,$$

также принадлежит множеству D_2 , и значения функционала (13) на этих элементах совпадают. Очевидно, что можно полагать $\delta(t, p) = -w_2(t, p)$, тогда $w_2^\delta(t, p) = 0$. Следовательно, минимизирующая последовательность для функционала (13) на множестве D_2^0 , состоящем из элементов D_2 , в которых $w_2(t, p) = 0$, будет являться в то же время минимизирующей последовательностью для функционала (13) на множестве D_2 .

После этого нетрудно видеть, что если найдена последовательность $\{[y_{1s}(t, p), y_{2s}^0(t, p), w_{1s}(t, p), 0]\}$ являющаяся минимизирующей для функционала (13) на D_2^0 , то последовательность $\{[y_{1s}(t, p), y_{2s}(t, p), w_{1s}(t, p), w_{2s}(t, p)]\}$, в которой $w_{2s}(t, p)$ вычисляется по формуле (21), а $y_{2s}(t, p)$ находится интегрированием (16), является минимизирующей в задаче сравнения и компоненты ее удовлетворяют (21). Следовательно, формулы (20) определяют элементы минимизирующей последовательности для исходной задачи минимизации.

Рассмотрим далее задачу Π^0 минимизации функционала (13) на множестве D_2^0 , которое определяется, очевидно, условиями

$$y_{1t} = \sigma(t, p, y_1)y_1 - w_1(t, p); \quad (22)$$

$$y_1(t_0, p) = \lambda_0(p); \quad (23)$$

$$y_1(t, 0) = \int_0^{p_m} \kappa(t, p, y_1(t, p)) y_1(t, p) dp; \quad (24)$$

$$y_{2t} = w_1(t, p); \quad (25)$$

$$y_2(t_0, p) = 0; \quad (26)$$

$$\int_0^{p_m} y_2(t_1, p) dp = R; \quad (27)$$

$$y_1(t, p) \in \Lambda. \quad (28)$$

Для исследования задачи Π^0 опять же воспользуемся теоремой о совместной оптимальности. Положим $k = 1$; $v = v(t, p, y)$ — решение уравнения с частными производными первого порядка $-v_{y_1} + v_{y_2} = 0$, в частности, возьмем $v(t, p, y) = y_1 + y_2$. Тогда полная производная dv/dt в силу дифференциальной системы (22), (25) не зависит от w_1 , и систему сравнения возьмем в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{dv(t, p, y)}{dt} \Big|_{y_1 = \eta - y_2},$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \sigma(t, p, \eta - y_2(t, p)) (\eta - y_2(t, p)).$$

Здесь функция $y_2(t, p)$ выступает как управление; функционал $\omega[t, p, y(\Theta), w_1(\Theta)]$ возьмем в виде $\omega[t, p, \dots] = y_2(t, p)$. Считаем, что управляющая функция $y_2(t, p)$ принадлежит множеству непрерывных и дифференцируемых по t на $[t_0, t_1] \times [0, p_m]$ везде, исключая, может быть, конечное число сечений при постоянном t . После этого условие 3) теоремы удовлетворено. Мно-

жество V в задаче Π^0 минимизации функционала (13) при условиях (22) — (28) определяется так: $y_1(t_0, p) = \lambda_0(p)$; $y_2(t_0, p) = 0$; $y_1(t, p) \geq 0$. Соответственно множество V^2 для задачи сравнения определим условиями $\eta(t_0, p) = \lambda_0(p)$; $y_2(t_0, p) = 0$; $\eta(t, p) - y_2(t, p) \geq 0$. Следовательно, пункт 4) теоремы выполнен.

Ограничения (24), (27) перенесем без изменения в условия задачи сравнения, записав (24) в переменных η , y_2 , тогда условие 5) теоремы будет удовлетворено (вид функционалов J^1 , J^2 при этом очевиден).

Возьмем функционал сравнения в виде

$$I_3[\eta(t, p), y_2(t, p)] = \inf_{\xi(p)} \left(- \int_0^{p_m} c(p) [\eta(t_1, p) - \xi(p)] dp \right) \quad (29)$$

при условиях $\int_0^{p_m} \xi(p) dp = R$; $\eta(t_1, p) - \xi(p) \in \Lambda$. Определение функционала (29) имеет смысл лишь в том случае, когда $\int_0^{p_m} \eta(t_1, p) dp \geq R$. После этого условие 7) теоремы о совместной оптимальности выполнено. Задача сравнения (назовем ее задачей III) для задачи Π^0 выступает как задача о минимуме функционала (29) на множестве D_3 , состоящем из пар функций $[\eta(t, p), y_2(t, p)]$, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \sigma(t, p, \eta - y_2(t, p)) (\eta - y_2(t, p)); \quad (30)$$

$$\eta(t_0, p) = \lambda_0(p); \quad (31)$$

$$\eta(t, 0) - y_2(t, 0) = \int_0^{p_m} \kappa(t, p, \eta(t, p) - y_2(t, p)) (\eta(t, p) - y_2(t, p)) dp; \quad (32)$$

$$\eta(t, p) - y_2(t, p) \in \Lambda; \quad (33)$$

$$y_2(t_0, p) = 0; \quad (34)$$

$$\int_0^{p_m} y_2(t_1, p) dp = R, \quad (35)$$

где функция $\sigma(t, p, y_1)$ определяется согласно (12). Управляющую функцию $y_2(t, p)$ в задаче III мы условились выбирать из множества непрерывных и кусочно-дифференцируемых по t функций.

Рассмотрим условие 6) теоремы с учетом замечания 2 к ней (Гурман, 1977, гл. VI). Если функция $y(t_0, p)$ задана, то при вся-

кой фиксированной кусочно-непрерывной по t функции $w_1(t, p)$ система (22), (25) имеет единственное непрерывное решение. Тогда условие 6) теоремы может быть записано в следующем виде: для всякого $s = 1, \dots$ найдется пара $[y_s(t, p), w_{1s}(t, p)]$, удовлетворяющая (22), (23), (25), (26), такая, что

$$\begin{aligned}\theta(t_0, p, y_s(t_0, \Theta)) &= \eta_s(t_0, p); \\ \omega[t, p, y_s(\Theta), w_{1s}(\Theta)] &= y_{2s}(t, p),\end{aligned}$$

где $\{\eta_s(t, p), y_{2s}(t, p)\}$ — минимизирующая последовательность в задаче сравнения. Последнее условие выполняется для любой последовательности из D_3 (в том числе и для минимизирующей) в силу выбора функционалов θ, ω ограничений (30), (35) в задаче III и того очевидного факта, что для всякой непрерывной и кусочно-дифференцируемой по t функции $y_2(t, p)$ всегда можно указать такую кусочно-непрерывную по t функцию $w_1(t, p)$, что выполняется дифференциальная связь (25).

Итак, все условия теоремы о совместной оптимальности, кроме последнего условия 8), удовлетворены.

Вычислим теперь функционал I_3 согласно его определению (29). Для этого выполним замену $-\eta(t_1, p) + \xi(p) = \zeta(p)$. Функцию $\zeta(p)$ подчиним ограничениям

$$-\zeta(p) \in \Lambda, \quad \int_0^{p_m} \zeta(p) dp = R_1[\eta(t_1, p)], \quad (36)$$

где

$$R_1[\eta(t_1, p)] = R - \int_0^{p_m} \eta(t_1, p) dp \leq 0.$$

Тогда задача о вычислении функционала I_3 суть задача о нахождении нижней грани функционала

$$i[\zeta(p)] = \int_0^{p_m} c(p) \zeta(p) dp$$

при условиях (36). При этом функция $\eta(t, p)$ предполагается удовлетворяющей условиям задачи III, из которых, в частности, вытекает, что $R_1[\eta(t_1, p)] \leq 0$. Имеет место оценка

$$i[\zeta(p)] \geq R_1[\eta(t_1, p)] \cdot \max_{0 \leq p \leq p_m} c(p) = i_m[\eta(t_1, p)].$$

Нетрудно также доказать, что существует последовательность непрерывных функций $\zeta_v(p)$ ($v = 1, \dots$), удовлетворяющих (36), таких, что

$$i[\zeta_v(p)] \rightarrow i_m[\eta(t_1, p)]. \quad (37)$$

В силу сказанного имеем

$$I_3[\eta(t, p), y_2(t, p)] = \alpha R - \alpha \int_0^{p_m} \eta(t_1, p) dp, \quad (29^*)$$

где $\alpha = \max_{0 \leq p \leq p_m} c(p) > 0$.

Рассмотрим задачу III*, которая отличается от задачи III лишь тем, что управляющая функция $y_2(t, p)$ выбирается из множества кусочно-непрерывных функций, т. е. ее следует рассматривать без ограничений (32), (34), (35), которые затем легко удовлетворяются за счет возможности разрывов у функции $y_2(t, p)$. Поскольку α и αR — положительные константы, задача о нахождении минимизирующей последовательности для функционала (29*) при условиях (30), (31), (33) (назовем ее задачей IV) равносильна задаче IV* о нахождении минимизирующей последовательности для функционала $J[\eta(t, p), y_2(t, p)] = -\eta(t_1, p)$ при условиях (30), (31), (33), в которой $p \in [0, p_m]$ выступает как параметр.

Из теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах следует, что решение $y_2^0(t, p, \eta)$ задачи IV* в форме синтеза дается операцией

$$\sigma(t, p, \eta - y_2) \cdot (\eta - y_2) = \max_{y_2} \quad (38)$$

при условии (33), тогда пара $[\eta_0(t, p), y_{20}(t, p)]$, где $\eta_0(t, p)$ — решение задачи Коши

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \sigma(t, p, \eta - y_2^0(t, p, \eta)) \cdot (\eta - y_2^0(t, p, \eta)), \\ \eta(t_0, p) &= \lambda_0(p), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

а функция $y_{20}(t, p) = y_2^0(t, p, \eta_0(t, p))$ является минималью для задачи IV*.

Рассмотрим функцию $\pi(t, p, y_1) = \sigma(t, p, y_1) \cdot y_1$. Операция (38) в переменных (η, y_1) , где $y_1 = \eta - y_2$, будет выглядеть так:

$$\pi(t, p, y_1) = \max_{y_1 \geq 0} \quad (38^*)$$

Функция $\sigma(t, p, y_1)$ определяется формулой (12). В силу предположений относительно функций $\kappa(t, p, y_1)$, $k(t, p, y_1)$ операция (38*) имеет конечное решение, которое обозначим $y_1^0(t, p)$. После этого $y_1^0(t, p, \eta) = \eta - y_2^0(t, p)$, и задача Коши (39) приобретает вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \pi(t, p, y_1^0(t, p)), \quad \eta(t_0, p) = \lambda_0(p). \quad (39^*)$$

Ее решение:

$$\eta_0(t, p) = \lambda_0(p) + \int_{t_0}^t \pi(\tau, p, y_1^0(\tau, p)) d\tau,$$

тогда $y_{20}(t, p) = \eta_0(t, p) - y_1^0(t, p)$

Итак, минималь для задачи IV* находится в квадратурах после выполнения операции (38*). Пара $[\eta_0(t, p), y_{20}(t, p)]$ будет являться также минималью в задаче IV. Задача III* имеет бесконечно много минимальей вида $[\eta_*(t, p), y_{2*}(t, p)]$, где

$$\eta_*(t, p) = \begin{cases} \eta_0(t, p), & t \in [t_0, t_1], p \in (0, p_m]; \\ \eta(t, 0), & t \in [t_0, t_1], p = 0; \end{cases} \quad (40)$$

$$y_{2*}(t, p) = \begin{cases} 0, & t = t_0, p \in (0, p_m]; \\ y_{20}(t, p), & t \in (t_0, t_1), p \in (0, p_m]; \\ y_2(t_1, p), & t = t_1, p \in [0, p_m]; \\ y_2(t, 0), & t \in [t_0, t_1], p = 0, \end{cases} \quad (41)$$

где $y_2(t_1, p)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию (35) (таких функций бесконечно много); функции $\eta(t, 0)$, $y_2(t, 0)$ однозначно определяются системой

$$\frac{\partial \eta(t, 0)}{\partial t} = \sigma(t, 0, \eta(t, 0) - y_2(t, 0)) (\eta(t, 0) - y_2(t, 0));$$

$$\eta(t_0, 0) = \lambda_0(0);$$

$$\eta(t, 0) - y_2(t, 0) = e(t),$$

где

$$e(t) = \int_0^{p_m} \kappa(t, p, y_1^0(t, p)) \cdot y_1^0(t, p) dp. \quad (42)$$

Здесь $y_1^0(t, p)$ — решение операции (38*); тогда

$$\eta(t, 0) = \lambda_0(0) + \int_{t_0}^t \sigma(\tau, 0, e(\tau)) e(\tau) d\tau; y_2(t, 0) = \eta(t, 0) - e(t).$$

В частности, последовательность $\{[\eta_*(t, p), y_{2*}^v(t, p)]\}$ ($v = 1, \dots$), в которой $y_{2*}^v(t, p)$ определяется, согласно (41), при $y_2(t_1, p) = \zeta_v(p) + \eta_*(t_1, p)$ (здесь функции $\zeta_v(p)$ непрерывны и удовлетворяют при каждом v условиям (36) и при $v \rightarrow +\infty$ — условию (37), где $\eta(t_1, p) = \eta_*(t_1, p)$), сплошь состоит из минимальей для задачи III*.

Для каждой пары $[\eta_*(t, p), y_{2*}^v(t, p)]$ построим последовательность $[[\eta_s^v(t, p), y_{2s}^v(t, p)]]$ ($s = 1, \dots$) в которой $\{y_{2s}^v(t, p)\}$ —

последовательность непрерывных, кусочно-гладких по t функций, сходящаяся поточечно к $y_{2s}^v(t, p)$, а $\eta_s^v(t, p)$ — решение задачи Коши (30), (31), где взято $y_2(t, p) = y_{2s}^v(t, p)$ (при этом $\eta_s^v(t, p) \rightarrow \eta_{s*}^v(t, p)$ поточечно при $s \rightarrow +\infty$). Существует функция $v = v(s)$ ($v(s) \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow +\infty$) такая, что последовательность

$$\{[\eta_s(t, p), y_{2s}^0(t, p)]\}, \quad (43)$$

$$\eta_s(t, p) = \eta_s^{v(s)}(t, p); y_{2s}^0(t, p) = y_{2s}^{v(s)}(t, p),$$

является минимизирующей для задачи III, и при этом

$$\tilde{I}_3[\eta_s(t, p), y_{2s}^0(t, p)] \rightarrow \inf_{D_3^*} I_3[\eta(t, p), y_2(t, p)], \quad (44)$$

где

$$\tilde{I}_3[\eta(t, p), y_2(t, p)] = - \int_0^{p_m} c(p) [\eta(t_1, p) - y_2(t_1, p)] dp.$$

Рассмотрим последовательность

$$\{[y_{1s}(t, p), y_{2s}^0(t, p), w_{1s}(t, p), 0]\}, \quad (45)$$

в которой $y_{2s}^0(t, p)$ взято из (43);

$$y_{1s}(t, p) = \eta_s(t, p) - y_{2s}^0(t, p); w_{1s}(t, p) =$$

$$= \frac{\partial y_{2s}^0(t, p)}{\partial t}.$$

Эта последовательность принадлежит D_2^0 и удовлетворяет условию 6) теоремы о совместной оптимальности применительно к задаче Π^0 , в которой минимизирующая последовательность для задачи III берется в виде (43). Последовательность (45) будет минимизирующей для задачи Π^0 , если будет выполняться условие 8) теоремы, которое в нашем случае удобно записать так:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} (I_2[y_s^0(t, p), w_s^0(t, p)] - I_3[\eta_s(t, p), y_{2s}^0(t, p)]) = 0,$$

где

(46)

$$y_s^0(t, p) = [y_{1s}(t, p), y_{2s}^0(t, p)], w_s^0(t, p) = [w_{1s}(t, p), 0].$$

В силу соотношения $y_{1s}(t, p) = \eta_s(t, p) - y_{2s}^0(t, p)$, имеем

$$I_2[y_s^0(t, p), w_s^0(t, p)] = \tilde{I}_3[\eta_s(t, p), y_{2s}^0(t, p)],$$

и (46) выполняется вместе с (44). Тогда последовательность (45) является минимизирующей для задачи II⁰. Последовательность

$$\{[y_{1s}(t, p), y_{2s}(t, p), w_{1s}(t, p), w_{2s}(t, p)]\}, \quad (47)$$

в которой $y_{1s}(t, p)$, $w_{1s}(t, p)$ взяты из (45), $w_{2s}(t, p)$ вычисляется по формуле (21), а $y_{2s}(t, p)$ находится интегрированием (16), будет нужной минимизирующей последовательностью для задачи II. После этого элементы минимизирующей последовательности для исходной задачи I вычисляются по формулам (20).

Проделанные построения легко переносятся на случай произвольного $\Lambda(t, p) \subset [0, +\infty)$. Разница состоит в вычислении функционала I_3 , который теперь будет нелинейной функцией от R_1 . Однако при разумно выбранном весе $c(p)$ функция $I_3(R_1)$ возрастающая, так что последующие построения (операция (38) и т. д.) остаются.

Из (20) и (41) вытекает, что компонента $\lambda_s(t, p)$ минимизирующей последовательности для $t \in (t_0, t_1)$, $p \in (0, p_m]$ приближается к функции $y_1^0(t, p)$, которая определяет режим максимального прироста. В окрестностях прямых $t = t_0$, $t = t_1$, $p = 0$ компоненты минимизирующей последовательности претерпевают резкое изменение, стремясь к предельному режиму, задаваемому разрывными функциями.

Уже оговаривалось, что $u \geq 0$. Задача с ограничением $u \geq 0$ (отлов) иногда может быть заменена постановкой (1)–(9), где $\Lambda(t, p) = \{\lambda : 0 \leq \lambda \leq \lambda_m(t, p)\}$, $\lambda_m(t, p)$ — решение граничной задачи (2), (3), (4) при $u = 0$. Последнее возможно, например, если $y_1^0(t, p) \geq \lambda_m(t, p)$, а также в ряде других случаев.

Недостаток постановки (1)–(9) состоит в отсутствии ограничения на ресурсы питания, однако его можно учесть косвенно, введя соответствующие нелинейности в коэффициенты смертности и рождаемости.

МОДЕЛИ ЭКОСИСТЕМЫ ОЗ. БАЙКАЛ

Математическая модель экосистемы представляет собой совокупность вектора ее состояния и формализованного описания множества процессов изменения вектора состояния. И процессы, и компоненты вектора состояния могут классифицироваться по-разному. В частности, для достаточно сложных моделей используется модульный принцип—система разбивается на подсистемы, модули, в каждый из которых входит лишь часть компонент вектора состояния и процессы, эти компоненты преобразующие. В качестве модулей удобно использовать, например, трофические уровни экосистемы.

При таком подходе облегчается понимание процессов, происходящих в системе, так как трудно осмысливать взаимодействие очень большого числа элементов, создается возможность независимого совершенствования модулей, неизменными сохраняются лишь входы и выходы и распределения работы между рядом участников. При реализации модели на ЭВМ можно описывать каждый модуль отдельной подпрограммой, всю же модель — совокупностью подпрограмм, объединенных управляющей программой.

Большое значение имеет выбор способа разбиения системы на подсистемы. Это пока еще искусство, хотя ряд общих принципов уже имеется, и результат их применения можно усмотреть в следующем далее тексте.

В данной главе рассматривается три модели экосистемы оз. Байкал различного назначения. Одна из них описывает осредненные энергетические характеристики экосистемы при небольшом числе показателей и их межгодовые изменения под воздействием внешних факторов; вторая может служить для качественных оценок сезонных изменений в экосистеме по данным качественного характера, которые наиболее просто получить в диалоге со специалистами; и, наконец, третья, которую можно отнести к классу имитационных, может быть использована для многих целей, в частности для оценки влияния загрязняющих

компонентов в стоках р. Селенги и прмстоках Байкальского целлюлозного комбината. Все три модели, в особенности последняя, не являются вполне законченными с точки зрения информационного обеспечения, однако при замене недостающих данных разумными гипотезами, заимствованными из данных для других озер, они становятся работоспособными при решении определенного круга задач. Прежде чем рассматривать подробно эти модели, приведем краткие сведения об экосистеме оз. Байкал, используемые при моделировании.

§ 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЭКОСИСТЕМЫ

Оз. Байкал расположено на высоте 456 м над уровнем Тихого океана. Его характеристика: 636 км, ширина в среднем 48 км, площадь с островами 34,300 км², длина береговой линии без островов 2000 км, максимальная глубина 1620 м, средняя 700 м, объем водной массы 22 707 км³. Котловина озера окружена со всех сторон горами высотой более 2500 м.

В Байкал впадает более 300 рек и речек, вытекает единственная река — Ангара. Водосборная площадь составляет 540 000 км² и простирается в основном к востоку и югу от Байкала. Из впадающих рек самая многоводная — Селенга длиной около 1500 км, берущая начало на территории МНР и протекающая через пастбищные и сельскохозяйственные ее территории и промышленные районы Бурятской АССР. Другие крупные реки — Верхняя Ангара (640 км), по долине которой проходит значительный участок трассы БАМа, Баргузин (400 км), Турка (175 км), Снежная (164 км). Среднегодовой сток через Ангару порядка 60 км³.

Температура оз. Байкал на глубинах ниже 200—250 м практически постоянна круглый год и составляет 3,6—3,3°. Сезонный температурный режим в верхних слоях определяется в целом резко континентальным климатом котловины озера. В открытых глубоководных районах температура воды верхнего слоя редко превышает 12—14°. Ледовый период продолжается с конца декабря по конец мая, т. е. около 4—5 мес. Прозрачность вод исключительно высокая и достигает в отдельных местах до 40 м по диску Секки.

Основные элементы, определяющие экосистему озера с точки зрения целей моделирования, — водообмен, гидрохимический режим, растительный и животный мир толщи вод Байкала (донная растительность оказывает весьма небольшое влияние на экосистему в целом). Взаимодействие живых компонентов экосистемы определяется главным образом трофическими связями, схема которых приведена на рис. 4 (Кожов, 1962).

1. **Водообмен в оз. Байкал.** Водообмен играет важную роль во всех процессах, происходящих в озере. Основными причина-

ми движения вод Байкала некоторые исследователи называют ветры, градиенты атмосферного давления, проточность озера, неравномерность прогрева, кориолисовы силы. Общепринято, что основным фактор, воздействующий на перемешивание водной массы в безледный период, — ветровые условия (Айнбунд, 1973; Верболов, 1974). Данные наблюдения береговых станций свидетельствуют о наличии устойчивого воздушного потока, направляемого окаймляющими озеро горными хребтами вдоль прибрежной полосы против часовой стрелки. Установлено, что течения наблюдаются во всех районах озера и во всех слоях водной толщи. Измерения течений проводились как в навигационный период, так и в период ледостава (Айнбунд, 1973). Однако существующая аппаратура не позволяет измерять скорости вертикального водопереноса, а горизонтальные составляющие фиксируются при скоростях, превышающих 2 см/с; в байкальских водах, как правило, течения с такими скоростями отсутствуют или крайне редки.

Таким образом, измерения отражают в основном систему течений Байкала, а не водообмен. Можно допустить (и это представляется весьма вероятным, учитывая богатство кислородом глубинных слоев озера), что в Байкале существуют устойчивые потоки с горизонтальной и вертикальной составляющими скорости, не превышающими порог чувствительности измеряющей аппаратуры, имеющие, однако, большие площади сечений и влияющие на водообмен. Для поверхностных слоев озера характерна циклоническая циркуляция, точнее, группа циклонических циркуляций. В безледный период циклонический круговорот прослеживается четче, чем в подледный, когда скорости течения, особенно в верхних слоях, существенно уменьшаются. В летние месяцы течение характеризуется большей изменчивостью, осенью система преобладающих течений становится более устойчивой. Скорость течений у поверхности может достигать 0,8—1 м/с. На рис. 5 приведена схема циклонической циркуляции в Южном Байкале.

2. Фитопланктон и элементы гидрохимического режима. Жизнедеятельность фитопланктона и гидрохимический режим

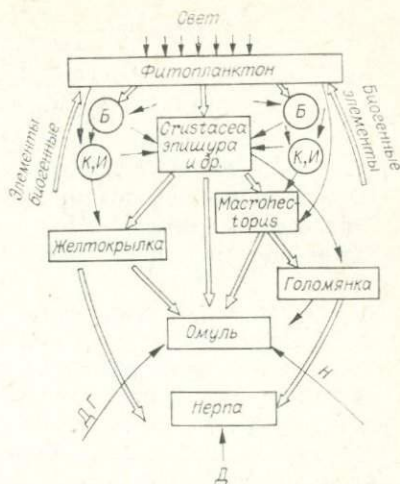


Рис. 4. Схема трофических связей оз. Байкал.

Б — бактерии; Н — насекомые; ДГ — донные гаммариды; К, И — коловратки, инфузории.

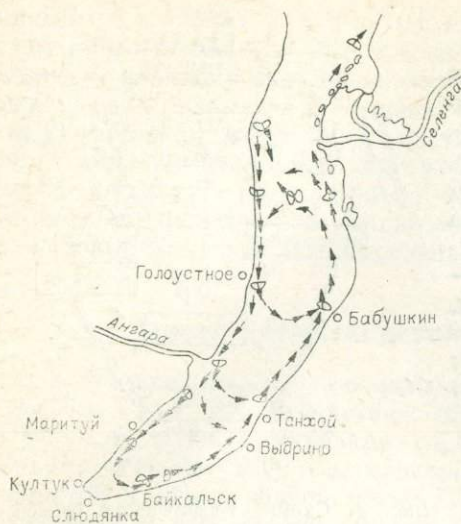


Рис. 5. Схема циклонической циркуляции в Южном Байкале.

месте или в избытке (Гусев, 1975). В качестве загрязнителей могут выступать как чуждые озеру вещества, например продукты разложения фенола или нефти, так и поступающие с речным стоком и атмосферными осадками избыточные количества фосфатов, нитратов и т. п.

В обсуждаемую часть модели включены в качестве первой группы переменных состояния концентрации минеральных форм азота, фосфора, кремния, а также растворенного и взвешенного органического вещества. По мере совершенствования модели и поступления дополнительной информации этот список предполагается пополнять. Другую группу фазовых переменных составляют биомассы важнейших видов фитопланктона.

В пелагиали Южного Байкала обнаружено около ста видов фитопланктона, относящихся к пяти отделам водорослей — синезеленые, пирофитовые, диатомовые, золотистые и зеленые (протококковые). Однако массового развития в разные годы и сезоны достигает не более 10—15 видов. Ими же создается основная часть первичной продукции пелагиали озера. К числу таких видов относятся *Melosira baicalense*, *M. binderana*, *M. islandica*, *Synedra acus subsp. radians*, *Nitzschia acicularis*, *Cyclotella baicalensis*, *C. minuta* из диатомовых; *Dynobryon cylindricum* — из золотистых; *Gymnodinium baicalense* — из пирофитовых; *Ankistrodesmus pseudomirabilis* — из протококковых. В летний период важную роль играют синезеленые водоросли — представитель ультрааннопланктона *Synechocystis limnetica* Popovsk.

озера тесно взаимосвязаны, поэтому целесообразно рассматривать их совместно, как одну из-под систем модели. Наибольший интерес представляют такие элементы гидрохимического режима, как концентрации минеральных и органических форм азота, фосфора, железа, кремния (биогенных элементов), содержание растворенных газов (O_2 и CO_2), активная реакция среды и концентрации некоторых микроэлементов.

Особое положение занимают загрязняющие вещества, которые можно определить как вещества, находящиеся не на своем

и заносимая из прибрежных районов *Anabaena lemmermanii* (Вотинцев, Мещерякова, Поповская, 1975).

3. Зоопланктон. В планктоне Байкала выделяют два основных комплекса организмов: европейско-сибирский и собственно байкальский. Кроме них различают еще «переходный» комплекс — байкало-сибирский. Каждому комплексу свойственны в Байкале свои области или зоны обитания, где они находят наиболее благоприятные условия для питания, размножения и развития. Но при отсутствии резких температурных барьеров они могут вторгаться и в соседние области.

Байкальский комплекс, заселяющий открытые воды озера, особенно его глубоководную пелагиаль, в экологическом отношении можно назвать глубоководным пелагическим, из зоопланктона к нему относятся: рачок *Epischura baicalensis*, бокоплав *Macrohectopus bianickii*, коловратка *Synchaeta pachypoda*, несколько эндемичных видов инфузорий.

Местом обитания европейско-сибирского комплекса являются преимущественно соры, бухты и прибрежные мелководья, хорошо защищенные от вторжения открытых вод. В экологическом отношении его можно назвать прибрежно-соровым, в него входят виды, заселяющие озера Сибири.

К переходным видам относят байкальскую популяцию *Cyclops kolensis*, байкальские формы коловраток из родов *Keratella*, *Filinia*, *Notholca* и *Kellicottia*. Этот байкало-сибирский комплекс распространяется в открытых водах Байкала, в том числе в глубоководных районах, где они нередко могут составлять существенную долю биомассы планктона.

В составе зоопланктона зимой и ранней весной во внутренних частях заливов господствует озерно-соровый комплекс — коловратки, кладоцеры, циклопы; к ним примыкают эпишура и другие байкальские виды. По мере продвижения температурного фронта качественный состав планктона беднеет, из него выпадают озерно-соровые виды и начинают преобладать переходной и байкальский комплексы. Во внутренних частях заливов в июне преобладают конеподы, кладоцеры и коловратки. К середине июля максимум передвигается в центральные части заливов, к августу он наблюдается уже во внешних частях и створах, причем здесь, как правило, господствуют виды байкальского комплекса, особенно эпишура.

Весной и летом воды в глубоководной области прогреваются очень медленно. Здесь господствует типичный байкальский комплекс организмов, а также некоторые виды байкало-сибирского комплекса. В зоопланктоне Байкала исключительную роль играют андемики — эпишура и бокоплав макрогектопус.

Во внешней части глубоководной области, граничащей с мелководьями, к эпишуре нередко примешиваются циклоны, а иногда и кладоцеры, в центральных же частях доминирует эпишура. Урожаи зоопланктона резко колеблются в разные го-

ды. Зависит это от гидрометеорологических и биологических факторов (Кожов, 1967).

4. Омуль. На протяжении всего периода существования байкальского рыбного промысла он занимал в уловах ведущую роль; в отдельные годы вылов его достигал 80—90 тыс. ц (Смирнов, 1969). За время своей жизни на Байкале омуль распался на 4—5 рас, отличающихся друг от друга морфологически и по местам икрометания в реках. Наименование расы во всех случаях производно от названия главной нерестовой реки системы рек, в которых она водится. Сейчас изучаются четыре эколого-морфологические расы: селенгинская, чивыркуйская, северобайкальская и посольская (Смирнов, Шумилов, 1974).

Работы по изучению сезонных распределений и миграций омуля в Байкале позволили К. И. Мишарину (1958) определить ареалы отдельных популяций. Места их зимовки различны. С прогревом прибрежных вод омуль образует так называемые привалы к берегу. Считается, что основная причина выхода омуля из глубин в прибрежные участки — увеличение концентрации корма у берегов (Кожов, 1964, 1962; Мишарин, 1958). Во время нерестовой миграции и нереста омуль расходует накопленные жировые запасы и скатывается в истощенном состоянии. Результаты мечения отнерестившегося омуля свидетельствуют о двухлетней периодичности полового созревания у большей части популяции (Смирнов, Шумилов, 1974).

Рост особей в пределах одного поколения идет неравномерно. В связи с этим средний вес особи взят в качестве переменной модели. Различие во времени полового созревания самок и самцов отражается и на соотношении их в нерестовом стаде.

Один из важных признаков, характеризующих воспроизводительную способность популяции, — плодовитость. Изменение плодовитости омуля подчиняется общей закономерности, а именно: она растет с возрастом рыб. Эффективность естественного размножения омуля во многом определяется условиями среды в период эмбрионального развития и ската личинок.

Известно, что питание — одна из главнейших функций организма и одна из основных форм связи со средой. Пелагиаль Байкала занимает 2,5 млн. га, она отличается небольшим разнообразием корма пелагических рыб. Основным кормом омуля в зимний период являются молодь рыб, донные амфиподы и макрокоптус.

В мае — июне омуль достигает небольших глубин. Состав кормовых организмов здесь тот же, но меняется соотношение компонентов. Анализ пищи омуля свидетельствует о наличии избирательности в питании. Имеются данные о значении кормовых объектов в питании возрастных групп омуля, весе пищевого комка, индексах наполнения желудков, кормовых коэффициентах (Смирнов, Шумилов, 1974; Гурова, Пастухов, 1974). Эти данные используются при построении математических моделей.

§ 2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕЛАГИЧЕСКОГО СООБЩЕСТВА ОЗ. БАЙКАЛ

1. Структура модели. Пелагиаль, т. е. водная толща Байкала, имеет решающее значение в формировании энергетического баланса озера.

В основе модели лежат следующие представления о механизме энергетического взаимодействия элементов системы. Фитопланктон, используя наличные биогены, в процессе фотосинтеза производит первичную продукцию r_{01} , часть которой (q_1) рассеивается на этом же уровне, часть (m_1) теряется с отмершими организмами, а остальное переходит на следующий трофический уровень и подвергается дальнейшей трансформации. Каждый консумент, получая энергию от компонентов экосистемы, составляющих спектр его питания (рис. 6), тратит ее на обмен (q_i), теряет вместе с отмершей частью (m_i) и неусвоенными остатками пищи (u_i), а также передает ее дальше, другим элементам трофической сети. Запасы детрита пополняются за счет неусвоенных остатков пищи и отмершей части организмов. Предполагалось, что детрит потребляется лишь бактериями, которые полностью усваивают свою пищу.

Обозначим через b_1 биомассу фитопланктона, b_2 — эписуры, b_3 — циклопа, b_4 — макрогектопуса, b_5 — омуля, b_6 — пелагических бычков, b_7 — голомянки, b_8 — нерш, b_9 — бактерий, b_{10} — детрита. Все величины имеют размерность ккал/м² и рассчитаны для слоя 0—250 м.

Рассмотрено несколько вариантов модели экосистемы. Они отличались как способом формального описания потоков энергии r_{ij} от i -го компонента к j -му, так и числом элементов, включаемых в систему. Потоки энергии (рационы) в каждом варианте вычислялись как функции биомасс $r_{ij}(b_i, b_j)$, вид которых конкретизировался одним из трех способов — по формуле Вольтера:

$$r_{ij}(b_i, b_j) = k_{ij} b_i b_j, \quad (1)$$

по формуле Ивлева:

$$r_{ij}(b_i, b_j) = c_{\max}^j b_j \lambda_{ij} (1 - e^{-\xi_i b_i}); \quad (2)$$

и по формуле Меншуткина:

$$r_{ij}(b_i, b_j) = c_{\max}^j b_j \lambda_{ij} \frac{1 - e^{-\xi_i \kappa_i}}{\kappa_i} \quad (3)$$

через величины напряженности трофических отношений κ_i :

$$\kappa_i = \sum_j c_{\max}^j b_j \lambda_{ij} / b_i.$$

Здесь λ_{ij} — доля i -го компонента в питании j -го.

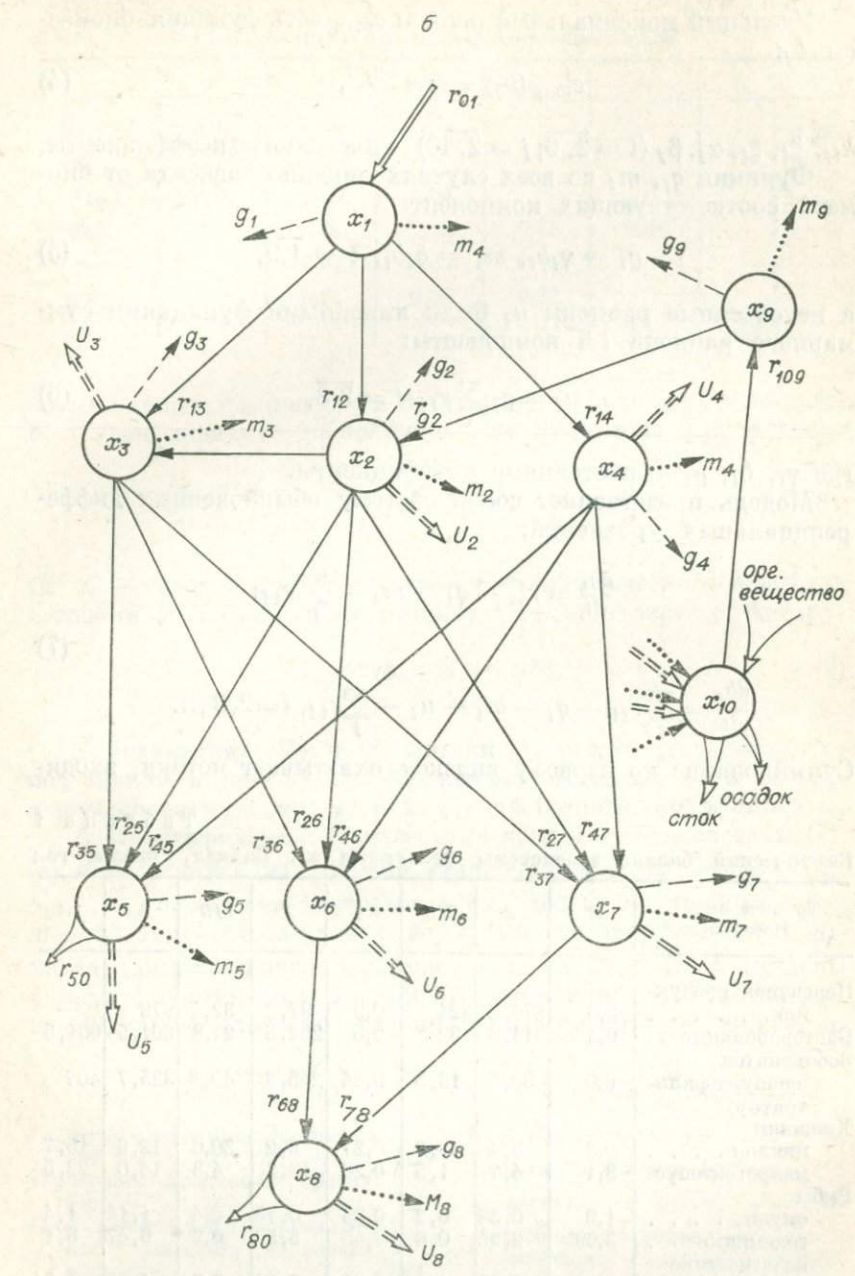
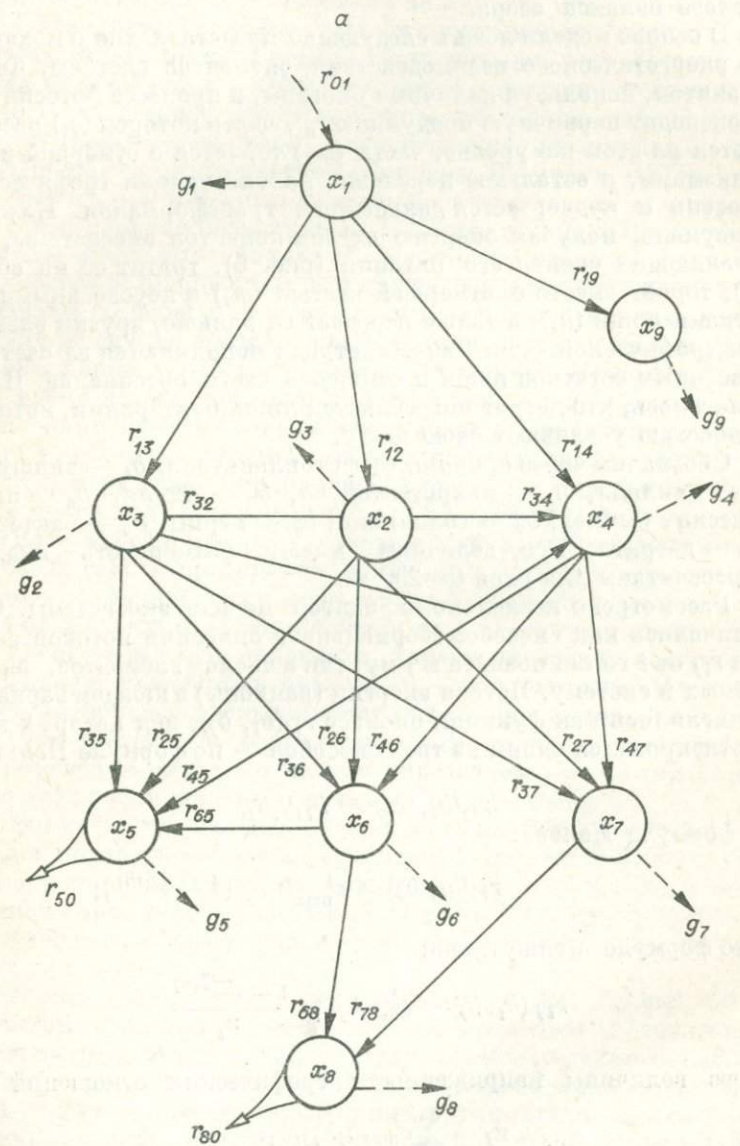


Рис. 6. Энергетические потоки в экосистеме оз. Байкал.
а — схема I, б — схема II.

Удельный максимальный рацион c_{\max}^j есть функция биомассы b_j :

$$c_{\max}^j(b_j) = \alpha_j e^{-\beta_j b_j}, \quad (4)$$

$k_{ij}, \zeta_i, \xi_i, \alpha_j, \beta_j$ ($i = \overline{2, 9}; j = \overline{2, 10}$) — постоянные коэффициенты.

Функции q_i, m_i во всех случаях линейно зависели от биомасс соответствующих компонент

$$q_i = \gamma_i b_i, \quad m_i = \delta_i b_i, \quad i = \overline{1, 9}, \quad (5)$$

а неувоенные рационы u_i были линейными функциями суммарного рациона i -й компоненты:

$$u_j = \rho_j \sum_i r_{ij}, \quad i = \overline{2, 8}, \quad (6)$$

где $\gamma_i, \delta_i, \rho_i$ — постоянные коэффициенты.

Модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{db_i}{dt} = r_{0i} - q_i - m_i - \sum_j r_{ij}; \quad (7)$$

$$\frac{db_i}{dt} = \sum_l r_{li} - q_i - m_i - u_i - \sum_j r_{ij}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Суммирование по первому индексу охватывает потоки, входя-

Т а б л и ц а 1

Биотический баланс экосистемы пелагиали оз. Байкал, ккал/м³. год

Трофический уровень	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P/B</i>	<i>K</i> ₂	<i>T</i>	<i>T/B</i>	<i>A</i>	<i>R</i>
Первичная продукция	3,0	874,8	324	0,9	97,2	32,4	972	—
Бактериопланктон	9,4	314,8	32	0,5	262,5	27,8	601,5	601,5
Зоопланктон								
эхишура(филтратор)	6,0	80,5	13,5	0,24	245,2	40,8	325,7	407
Хищники								
циклон	0,3	3,4	11,3	0,27	9,2	30,6	12,6	15,7
макрогектопус	3,1	4,7	1,5	0,26	13,3	4,3	18,0	22,5
Рыбы								
омуль	1,9	0,38	0,2	0,33	0,76	0,4	1,14	1,4
голомянки	3,69	2,95	0,8	0,45	3,52	0,9	6,47	8,1
пелагические бычки	0,23	0,23	1,0	0,21	0,84	3,7	1,07	1,34
нерпа	1,26	0,22	0,18	0,17	1,08	0,8	1,30	1,6

Примечание. *B* — биомасса; *P* — продукция; *T* — деструкция (траты на обмен); *A* — ассимиляция пищи ($A = T + P$); *R* — рацион; $K_2 = P/A$.

Спектры питания компонентов экосистемы

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_8
x_2	0,74						0,26
x_3	0,1	0,9					
x_4	0,1	0,86	0,04				
x_5		0,73	0,02	0,21	0,04		
x_6		0,67	0,03	0,3			
x_7		0,6	0,03	0,37			
x_8					0,1	0,9	

щие в данный компонент, а по второму — исходящие из него. В другом варианте добавлялось еще уравнение для детрита

$$\frac{db_{10}}{dt} = \sum_{i=1}^8 m_i + \sum_{i=2}^8 u_i - r_{10,9} + A - S_1 - S_2, \quad (8)$$

где A — годовой приток alloхтонного органического вещества с водами рек; S_1 — седиментация; S_2 — сток через р. Ангару:

$$S_1 = \chi b_{10}, \quad S_2 = \mu b_{10}. \quad (9)$$

В уравнениях (5) и (8) потоки $r_{50} = \varphi_5 \times b_5$, $r_{80} = \varphi_8 \times b_8$ под знаком второй суммы обозначают вылов омуля и добычу нерпы соответственно; χ , μ и φ_i — постоянные коэффициенты.

2. Идентификация. Неизвестные коэффициенты системы (7), (8) определялись из условия стационарности ее решения $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_9, \tilde{b}_{10}$: сумма энергетических входов за каждый год в любой компонент системы равна сумме его энергетических выходов. Средние значения биомасс \tilde{b}_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) приведены в табл. 1 (Вотинцев и др., 1975). Коэффициенты функций (5), (6), (9) вычислялись по средним значениям потоков, приведен-

Приход (тыс. т $C_{орг}/год$)	Расход (тыс. т $C_{орг}/год$)
Первичная продукция (фитопланктон) 325	Сток с водами Ангары 74
Первичная продукция (фитобентос) 26	Изъятие человеком (рыба, нерпа) 1
Сток alloхтонного органического вещества с водами притоков 392	Захоронение в донных отложениях 126
Атмосферные осадки 12	Деструкция в водоеме 4054
Итого 4255	Итого 4255

ным там же. Концентрация детрита взята по экспертным оценкам и данным о балансе органического вещества, включающем годовой вынос через р. Ангару.

Доли кормовых объектов в питании каждого компонента приняты постоянными (табл. 2).

Коэффициенты ρ_i , $i = 2, 3, \dots$ взяты равными 0,2, что соответствует предположениям, сделанным в книге К. К. Вотинцева и др. (1975). Коэффициенты α_j , β_j в формуле (4) определялись из условия, что при уменьшении биомассы ($b_j \rightarrow 0$) удельный максимальный рацион увеличивается в 2 раза по сравнению с максимальным рационом для среднего значения биомассы \tilde{b}_j .

Средняя поправка Меншуткина принималась равной 0,8:

$$(1 - e^{-\xi_i \times \tilde{x}_i}) / \tilde{x}_i = 0,8. \quad (10)$$

Для удобства решения системы (10) целесообразно изменить масштаб измерения биомасс, полагая

$$B_i = \eta \times b_i, \quad i = 1, 2, \dots, 10; \quad \eta > 0. \quad (11)$$

Ниже приведены полученные значения параметров.

b	α	β	γ	σ	δ	φ
3,0			32	77	0,94	
6,0	0,37	0,11	41	6,7	0,81	
0,3	0,29	2,3	31	7,2	0,83	
3,1	0,039	0,22	4,3	0,32	0,80	
1,9	0,004	0,37	0,40	0,058	0,80	0,13
0,23	0,032	2,9	3,7	0,40	0,80	
3,7	0,012	0,18	0,95	0,41	0,80	
1,3	0,007	0,54	0,86	0,079	0,81	0,079
9,4	0,35	0,07	27,9	25	1,22	

$$A=72; \quad \chi=6,7; \quad \mu=20; \quad \eta=365.$$

3. Устойчивость. Исследование системы (7), (8) на устойчивость аналитическими методами затруднительно, поэтому была использована ЭВМ М-222.

Все модели по первому варианту схемы (см. рис. 6) указывают на неустойчивое поведение. Уже через несколько лет функционирования экосистема распадалась, биомассы некоторых ее элементов становились равными 0. Подобное поведение системы наблюдалось при выборе функций (1), (2) или (3), описывающих пищевые потоки. Необходимым условием устойчивости оказалось расширение модели за счет введения дополнительной переменной, играющей роль связи с внешней средой. Таким звеном может служить косный компонент экосистемы, детрит (см. рис. 6). Однако функции (1) и (2) не обеспечили желаемой устойчивости решения.

Была выбрана функция рационов Меншуткина (3), которая показала свою работоспособность в моделях экосистем реальных водоемов (Меншуткин, 1972).

Удельный максимальный рацион c_{\max}^j полагался убывающей функцией биомассы всей популяции, что отражает известный закон саморегуляции вида (Одум, 1975).

4. Предварительное исследование модели. Смоделированные отношения обмена энергией между элементами экосистемы дают возможность экспериментировать. Так, увеличение или уменьшение ежегодного притока аллохтонного органического вещества на 20% соответственно повысило на 6 и понизило на 8% первичную продукцию озера. Двукратное увеличение добычи нерпы повлекло за собой в модели небольшую потерю биомассы популяции (около 2%). Следует подчеркнуть, однако, что эти результаты существенно зависят от параметров модели (α_j , β_j , ξ_i), определяющих ее динамические свойства при отклонениях от стационарного состояния, которые, как видно, задавались гипотетически по опыту моделирования других озерных экосистем. Поэтому для проведения широкой программы машинных экспериментов и выдачи надежных рекомендаций по допустимым величинам тех или иных внешних воздействий или выбору рациональных режимов эксплуатации требуется содержательное уточнение этих параметров опытным путем специально для Байкала.

Построенная модель даже в таком обобщенном варианте может дать некоторые представления о системе в целом и составить основу для более полных и содержательных моделей, учитывающих, например, внутригодовую и пространственную динамику тех же элементов. С ее помощью могут решаться следующие задачи:

1) проверка гипотез биологов относительно причин сокращения численности омуля и нерпы путем соответствующих этим гипотезам изменений спектров питания и интенсивности добычи;

2) планирование наблюдений и выработка требований к их точности, исходя из чувствительности к изменениям отдельных параметров;

3) определение оптимальной стратегии выловов в условиях межгодовых изменений с учетом затрат на воспроизводство. При этом в модели целесообразно заменить уравнение для омуля моделью омулевого стада. Она рассматривается ниже.

§ 3. МОДЕЛЬ СЕЗОННОЙ ДИНАМИКИ ПЕЛАГИЧЕСКОГО СООБЩЕСТВА ОЗ. БАЙКАЛ

В последние годы начали развиваться новые разделы математики, предназначенные для описания таких ситуаций, в которых принципиально невозможно оперировать точными данными из-за сложности системы, неточности ограничений и це-

лей (Гусев, 1975). Родилось понятие размытого (нечеткого) множества, которое оказалось полезным в самых различных приложениях (Гинзбург, 1968; Заде, 1974). Один из первых опытов применения такого подхода для моделирования биологических объектов описан в работах Ф. В. Крогиуса и др. (1969), В. В. Меншуткина (1971).

В биологии приняты такие оценки величин или взаимовлияний факторов, как «очень мало», «мало», «средне», «много» и т. д. Представляется естественным сопоставить диапазон изменения каждой величины с непрерывной шкалой оценок от 0 до +1 так, чтобы левой ее границе (0) соответствовало значение переменной, скажем, «исчезающее мало», а правой (+1) — «необыкновенно велико». Середина шкалы (0,5) определит значение «средний», а все остальные точки отрезка — некие оттенки значений «малый» и «большой».

Взаимные влияния факторов системы также можно описывать на этом языке, сопоставив диапазон влияний «сильнейшее отрицательное влияние — сильнейшее положительное влияние» со шкалой оценок от -1 до +1. При этом «отсутствие влияния» будет соответствовать точке 0.

Этот подход использовался нами для построения модели экосистемы оз. Байкал. Модель представляет собой совокупность субмоделей разной степени подробности, которые условно назовем «Планктонное сообщество», «Макрогектопус», «Желтокрылка», «Длиннокрылка», «Омуль», «Нерпа» и «Бентос». Их связывают промежуточные переменные (рис. 7, а). Субмодель «Планктонное сообщество» (рис. 7, б) объединяет переменные, характерные для смены сезонов на Байкале.

Сезонная динамика, присущая всем озерным экосистемам, на Байкале выражена особенно четко.

М. М. Кожов (1962) выделил 6 биологических сезонов, характерных для Байкала: ранняя весна (февраль — апрель), поздняя весна (май — июнь), раннее лето (июль — август), позднее лето (август — сентябрь), осень (октябрь — ноябрь), зима (декабрь — январь).

Ранней весной температура воды подо льдом невелика: у поверхности она близка к 0° и с глубиной повышается немного; глубже 200—250 м она постоянна (около 4°). После вскрытия температура воды повышается под солнечными лучами (*sl2*) тем быстрее, чем раньше произошло освобождение поверхности озера ото льда, но процесс этот все же достаточно медленный. Период накопления тепла длится до сентября. Осенью усиливающийся ветер (*wd5, wd6*) увеличивает турбулентность в пограничном слое вода — воздух (*ke5, ke6*), что приводит к повышению испарения (*ev5, ev 6*) и постепенной потере тепла в результате турбулентного теплообмена (*tu5, tu6*).

Биологический год начинается вегетацией холодолюбивых весенних водорослей, главным образом диатомовых (*ph1*) и пе-

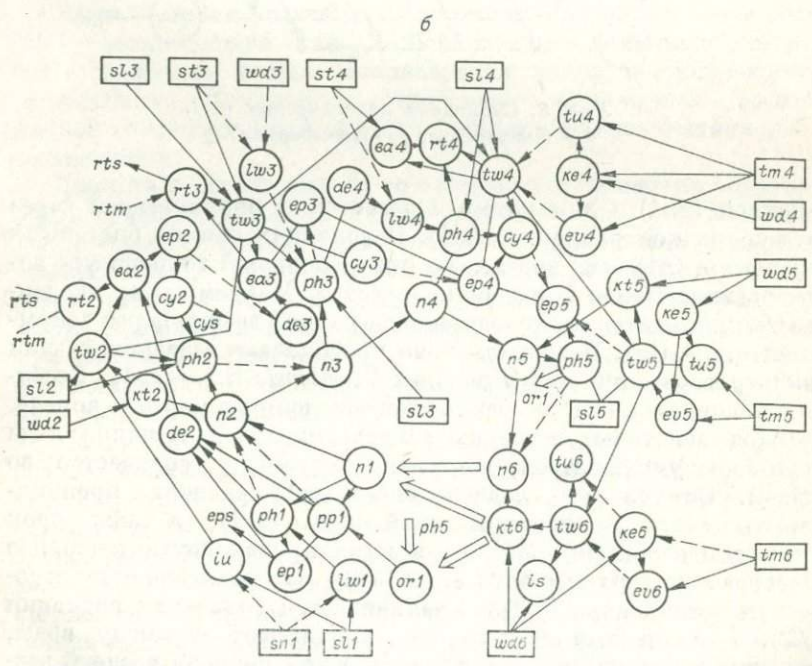
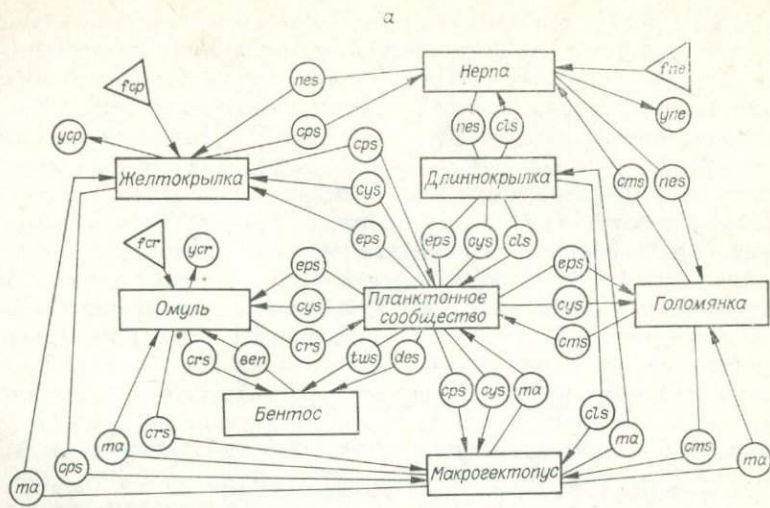


Рис. 7. Блок-схема модели экосистемы оз. Байкал (а), субмодель «Планктонное сообщество» (б).

Сплошные и штриховые стрелки — положительные и отрицательные связи, двойные — межгодовые связи.

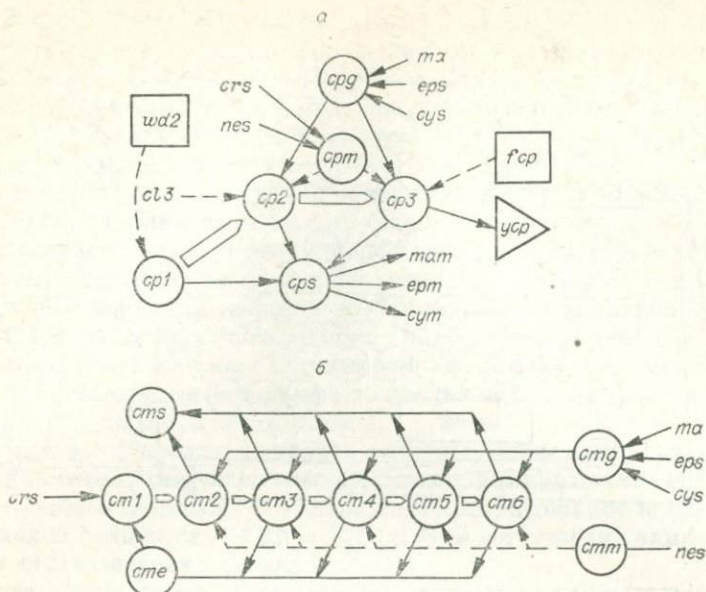


Рис. 8. Субмодели пелагических рыб.
а — желтокрылка, б — длиннокрылка.

ридиней (*pp1*), для которых достаточно проникающей через лед солнечной радиации (*sl1*). В условиях обилия биогенных элементов (*n1*) эти виды даже при небольшой температуре воды развиваются в большом количестве. Максимум их численности приходится на конец периода ранней весны, перед вскрытием озера (*iu*). В зоопланктоне преобладают младшие стадии фильтратора эписуры (*Epischura baicalensis* S.) — *ep1*. Весенние коловратки (*rt1*) особенно многочисленны в марте — апреле.

Под действием весенних солнечных лучей толщина льда начинает уменьшаться, но снег, подтаивая, сплавляется со льдом. От толщины льда и снега (*sn1*) зависит проницаемость света в верхний слой воды (*lw1*), а также срок вскрытия озера (*iu*). После вскрытия происходит интенсивное прогревание верхнего слоя воды (*tw2*), конвективное и ветровое перемешивание (*kt2*). Увеличивается солнечная радиация (*sl2*), и солнечные лучи глубоко проникают в толщу воды, так как прозрачность ее велика. К концу периода поздней весны весенние водоросли отмирают и постепенно опускаются в более глубокие слои. На отмерших остатках (*de2*) живых организмов размножаются бактерии (*ba2*). Обилие бактериальной пищи ведет к росту коловраток (*rt2*). Постепенно заканчивается развитие зимне — весенней генерации эписуры (*ep2*). Появляется другой распространенный в Байкале веслоногий

рачок *Cyclops kolensis* Lill (*cy2*), старшие копеподиты которого питаются не только растительной пищей, но и хищничают на науплиусах эпишуры.

В июле — августе усиливается ветровое перемешивание (*wd3*), возникают горизонтальные течения сгонно-нагонного характера. В этот период раннего лета высокая температура верхних слоев воды (*tw3*) и большая освещенность делают возможным интенсивное размножение летних форм водорослей (*ph3*). В условиях обилия детрита (*de3*) развивается большое количество бактерий (*ba3*) и коловраток (*rt3*). В июле у эпишуры обычно регистрируется пик численности науплиусов летней генерации (*ep3*). Интенсивно развивается циклоп (*cy3*).

Во второй половине августа — сентябре в хорошо прогретых водах в большом количестве находятся старшие копеподитные стадии эпишуры (*ep4*) и циклопа (*cy4*), а также круглогодичные коловратки (*rt4*), поддерживаемые бактериями (*ba4*). К концу периода позднего лета верхние слои воды начинают охлаждаться.

Осень — время интенсивной вертикальной циркуляции воды (*kt5*), поднимающей наверх богатые минеральными слоями (*n5*) глубинные воды. Половозрелая эпишура погружается на глубину. Начинается отрождение науплиусов осенне-зимней генерации (*ep5*). Общая биомасса фитопланктона (*ph5*) уменьшается.

Зима на Байкале длится со времени установления обратной термической стратификации до ледостава (*is*), с декабря до конца января. Интенсивное ветровое и конвективное перемешивание (*kt6*), которое увеличивается в результате влияния ветра (*wd6*) и возрастающего градиента температуры воды (*tw6*), приводит к тому, что в этот период достигается максимум количества биогенов (*n6*) в поверхностных водах. Фито- и зоопланктон в этом сезоне очень обеднены и в модели не принимались во внимание.

На выход (*ma*) субмодели «Макрогектопус» влияет среднегодовое количество эпишуры и циклопа (*eps, cys*), которые входят в рацион макрогектопуса (*Macrohectopus branizkii* D.) Смертность (*mat*) этого рачка зависит от среднегодового количества рыб (*cms, cls, cps, crs*), которые потребляют его, а количество его (*ma*) по линиям обратной связи влияет на темпы среднегодового прироста рыб (*cmg, clg, cpg, crg*) и как отрицательно действующий фактор — на количество эпишуры и циклопа в течение года. Бычок желтокрылка (*Cottocomephorus growingki*) имеет три возрастные группы (*cp1, cp2, cp3*), из которых последняя (*cp3*) нерестится на мелководьях поздней весной, так что выживаемость личинок и мальков (*cp1*) в значительной степени зависит от метеорологических условий в этот период (*wd2, sl2*). У бычка длиннокрылки (*Cottocomephorus inermis*) максимальный возраст тоже три года (*cl1, cl2, cl3*). Половозре-

лые рыбы (*cl3*) нерестятся в глубоководных районах, поэтому их икра меньше подвержена влиянию погоды.

На вход субмоделей «Желтокрылка» и «Длиннокрылка» подаются среднегодовые значения количества ракового планктона (*ma*, *eps*, *cys*), которые определяют темп прироста рыб (*cpg* и *dy*). Смертность бычков (*clm*, *cpm*) зависит от среднегодового количества их потребителей, омуля и нерпы (*crs*, *nes*). Существует обратная связь к величинам смертности зоопланктонов (*mam*, *epm*, *cym*) через среднегодовое количество бычков (*cps*, *cls*). Вылов желтокрылки (*ycp*) регулируется величиной промыслового усилия (*fcp*).

Срок жизни голомянок (*Comephorus baicalensis*, *C. dybowskii*) — 6 лет (*cm1*, *cm2*, *cm3*, *cm4*, *cm5*, *cm6*). Они нерестятся уже на третьем году жизни, так что нерестовое стадо (*cme*) образуют особи четырех возрастных групп. Личинки голомяки (*cm1*) служат пищей омулю и ее же взрослым особям, а они, в свою очередь, входят в рацион нерпы. На вход субмодели «Голомянка» подаются среднегодовые значения биомассы зоопланктонов (*ma*, *cys*, *eps*), от возможности питания которыми зависит темп роста голомянки (*cmg*). Среднегодовое количество голомянки (*cms*) — один из факторов, определяющих среднегодовую смертность зоопланктонов (*mam*, *epm*, *cym*).

Срок жизни омуля (*Coregonus autumnalis migratorius*) в модели — 10 лет (*cr1*, *cr2*, *cr3*, ..., *cr10*). Половозрелыми рыбы становятся на пятом году жизни, пополняя нерестовое стадо (*cre*). Нерестует омуль в реках, так что состояние нерестилиц (*icr*) имеет значение для выживаемости личинок (*cr1*). Темп роста омуля (*crg*) определяется условиями нагула в течение года (*eps*, *cys*, *ma*, *ben*, *tws*). Среднегодовое количество омуля (*crs*) выполняет роль звена обратной связи, так как влияет на смертность ракового планктона. Вылов омуля (*ycr*) зависит от величины промыслового усилия (*fcr*). На входе «Бентоса» стоят кормовые условия (*des*), связанные со среднегодовым количеством детрита и температурой воды (*tws*). Животные — обитатели дна — служат пищей омулю, так что бентос (*ben*) дает вклад в среднегодовой темп прироста омуля (*crg*).

В модели принято, что байкальская нерпа живет до 16 лет (*ne1*, *ne2*, ..., *ne16*). Половозрелые особи (*nee*) обычно имеют возраст не менее 7 лет. Темп роста (*neg*) в субмодели «Нерпа» зависит от кормовых условий года (*cps*, *cms*, *cls*). Обратная связь включает зависимость величин смертности рыб (*cpm*, *cmn*, *clm*) от среднегодового количества нерпы. Промысел (*yne*) определяется величиной промысловых усилий (*fne*).

Таким образом, в модели фигурируют 120 фазовых переменных, из которых три представляют собой полезный выход — вылов желтокрылки и омуля и добычу нерпы. Кроме того, можно варьировать 20 входных переменных, обозначающих состояние погодных условий (солнечная радиация, ветер, темпе-

ратура воздуха) в разное время года, речной сток, толщину льда и снега, интенсивность промысла омуля, желтокрылки и нерпы, а также условия на нерестилищах омуля.

Запишем уравнения модели. Обозначим через $u(t) = (u_1(t), \dots, u_{20}(t))$, $u_i(t) \in [0, 1]$ вектор входных переменных модели для года t , а через $x(t) = (x_1(t), \dots, x_{120}(t))$, $x_i(t) \in [0, 1]$ — вектор фазовых переменных в тот же год. Тогда система линейных уравнений

$$x(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + Cu(t) \quad (1)$$

позволит определить значения фазовых переменных в текущий год t . Здесь A , B , C — матрицы с элементами a_{ij} , b_{ij} , c_{ik} , не превосходящими по модулю 1 для $i, j = 1, 2, \dots, 120$, $k = 1, 2, \dots, 20$, причем

$$\sum_{j=1}^{120} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) + \sum_{k=1}^{20} |c_{ik}| = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 120.$$

Ненулевые элементы матрицы A определяют коэффициенты влияния внутри года. Элементы матрицы B связывают переменные разных лет. Это касается возрастного перехода у рыб и нерпы, а также подсчета значений переменных в первом сезоне текущего года по значениям переменных в последнем сезоне предыдущего года. Матрица C отражает зависимость фазовых переменных модели от внешних условий. Важным условием построения описанной модели является предположение о стационарности системы. У стационарной точки системы (1) все координаты равны 0,5.

Перейдем к описанию результатов машинных экспериментов над моделью. Вычисления производились на ЭВМ М-222. Переходной процесс, вызванный возмущением одного или нескольких внешних входов, заканчивается через 10—15 лет. Вычисления, относящиеся к одному году, занимают не более 5 с машинного времени. Поскольку, как отмечалось ранее, модель оперирует не абсолютными значениями переменных, а лишь их оценками, имеет смысл только качественная трактовка результата (табл. 3, 4).

Исследование модели показало, что среднегодовой запас тепла (tws) в озере сильно зависит от всех метеорологических условий, срок вскрытия (iu) — только от инсоляции, а срок ледостава (is) — только от ветровых условий и температуры воздуха. На биологические компоненты экосистемы температура воздуха практически не влияет, зато на них заметно сказывается количество приходящей в течение года солнечной энергии и ветровые условия над поверхностью озера. Из-за повышения инсоляции возрастает среднегодовое количество фитопланктона и потребление биогенов. Особенно чувствительны к изменению солнечной радиации бактерии и коловратки, а также летний циклоп.

Таблица 3

Влияние изменения внешних условий на экосистему оз. Байкал

Параметр	Повышение				Увеличение речного стока, $st=1$	Параметр	Повышение				Увеличение речного стока, $st=1$
	инсоляции, $sl=1$	ветровой активности, $wd=1$	температуры воздуха, $tm=1$				инсоляции, $sl=1$	ветровой активности, $wd=1$	температуры воздуха, $tm=1$		
<i>tws</i>	0,67	0,45	0,55	0,59		<i>rt3</i>	0,63	0,50	0,50	0,61	
<i>cps</i>	0,53	0,44	0,50	0,50		<i>rt4</i>	0,59	0,55	0,53	0,60	
<i>crs</i>	0,54	0,50	0,51	0,51		<i>ep1</i>	0,52	0,62	0,48	0,50	
<i>ycr</i>	0,53	0,50	0,51	0,41		<i>ep2</i>	0,53	0,55	0,49	0,50	
<i>iu</i>	0,30	0,50	0,50	0,50		<i>ep3</i>	0,49	0,50	0,50	0,46	
<i>is</i>	0,50	0,66	0,61	0,50		<i>ep4</i>	0,45	0,48	0,49	0,45	
<i>ph1</i>	0,54	0,60	0,48	0,50		<i>ep5</i>	0,50	0,53	0,50	0,50	
<i>ph2</i>	0,62	0,61	0,49	0,50		<i>cy2</i>	0,53	0,52	0,50	0,50	
<i>ph3</i>	0,56	0,50	0,50	0,45		<i>cy3</i>	0,56	0,50	0,50	0,54	
<i>ph4</i>	0,51	0,51	0,50	0,40		<i>cy4</i>	0,51	0,51	0,50	0,48	
<i>ph5</i>	0,56	0,57	0,50	0,51		<i>n1</i>	0,49	0,84	0,45	0,50	
<i>pp1</i>	0,50	0,65	0,48	0,50		<i>n2</i>	0,45	0,69	0,49	0,50	
<i>ba2</i>	0,58	0,46	0,52	0,50		<i>n3</i>	0,42	0,57	0,50	0,50	
<i>ba3</i>	0,64	0,51	0,50	0,60		<i>n4</i>	0,43	0,53	0,50	0,53	
<i>ba4</i>	0,55	0,52	0,51	0,71		<i>n5</i>	0,47	0,70	0,51	0,53	
<i>rt2</i>	0,55	0,48	0,51	0,50							

Повышение ветровой активности способствует развитию фитопланктона, особенно в первую половину года. Увеличение или уменьшение количества доступной растительной пищи, как показывает модель, изменяет количество эпишуры в том же направлении. В отличие от того, что происходит при моделировании ситуации с изменяющейся солнечной радиацией, в данном случае ведущую роль в паре фитопланктон — биогены играют биогены.

Таблица 4

Влияние увеличения интенсивности промысла на промысловые виды

Параметр	Увеличение интенсивности промысла			Параметр	Увеличение интенсивности промысла		
	омуля, $fcr=1$	желтокрылки, $fcp=1$	нерпы, $fne=1$		омуля, $fcr=1$	желтокрылки, $fcp=1$	нерпы, $fne=1$
<i>cps</i>	0,51	0,33	0,50	<i>nes</i>	0,51	0,48	0,47
<i>cls</i>	0,52	0,51	0,51	<i>ycr</i>	0,51	0,63	0,51
<i>cms</i>	0,52	0,51	0,51	<i>ycr</i>	0,48	0,50	0,50
<i>crs</i>	0,35	0,50	0,50	<i>yne</i>	0,51	0,49	0,75

Среднегодовая биомасса рыбных популяций почти не зависит от метеоусловий. Исключение составляют популяции желтокрылки и омуля, что связано, по-видимому, с изменением условий на нерестилищах желтокрылки и с некоторым изменением рациона омуля. Увеличение интенсивности промысла желтокрылки и нерпы, как показала модель, имеет более или менее значительные последствия только для самих этих видов, а уменьшение количества омуля (*crs*), вызванное усилением его промысла, может оказаться значительным (рис. 9) и приведет к некоторому изменению численности других животных.

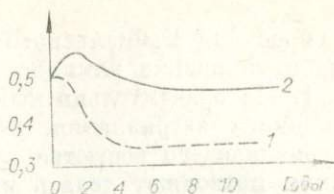


Рис. 9. Влияние промыслового усилия на численность омуля. 1 — численность, 2 — вылов.

Система (1) не имеет автоколебаний, т. е., достигнув стационарного состояния, ее решение там и остается, пока его не сдвинут новые внешние воздействия. Периодические изменения внешних условий задавались функцией $0,5 \sin(2\pi t/T + 1)$, в которой t — номер года, T — период. Модель показала, что колебания численности диатомового планктона ранней весной следуют главным образом за колебаниями силы ветра в предшествующую зиму, влияние же солнечных ритмов на эту величину вообще незначительно. Других причин, вызывающих межгодовую периодичность подледного цветения на данной модели, обнаружить не удалось. Возможно, причины этого явления, характерного для Байкала, надо искать не в воздействии метеорологических факторов.

Таким образом, функционирование модели показало ее непротиворечивость, способность отражать некоторые процессы, происходящие в реальной экосистеме оз. Байкал. Это позволяет использовать ее в дальнейшем как инструмент для исследования поведения экосистемы благодаря простоте описания модели и быстроте достижения результата даже при большом количестве переменных, однако трактовать результаты можно только качественным образом и нельзя использовать модель для оценки абсолютных значений тех или иных последствий воздействия на экосистему. Модель такого типа, по-видимому, будет полезна как промежуточный этап построения комплексной модели экосистем оз. Байкал, в которой будут учтены не только функциональные связи, но и потоки вещества и энергии.

§ 4. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОСИСТЕМЫ ОЗ. БАЙКАЛ И ЕЕ АНТРОПОГЕННЫХ ИЗМЕНЕНИЙ

Рассматриваются два основных источника антропогенного воздействия на качество вод Байкала — сток реки Селенги, несущий недостаточно очищенные сточные воды предприятий,

и сброс вод Байкальского целлюлозного завода (БЦЗ). Есть два пути оценки влияния этих источников.

1. На сравнительно небольшой акватории, прилегающей к источнику загрязнения, исследуется динамика концентраций загрязняющего вещества в воде. Результаты такого исследования позволяют делать выводы о тенденции происходящих процессов — преобладают ли темпы распада загрязняющего вещества над темпами его поступления, или наоборот. В том случае, когда распад уравнивает поступление, можно говорить о благоприятном режиме эксплуатации водоема, в противном же случае необходимо обратиться ко второму пути.

2. Экосистема озера описывается с помощью математической модели, поведение которой исследуется в зависимости от уровня загрязнения воды. Изменение состояния экосистемы в допустимых пределах свидетельствует об отсутствии вредного воздействия на нее загрязнений. Значительное изменение состояния экосистемы — сигнал о нежелательной сукцессии водоема.

1. Структура модели. Состояние экосистемы в момент времени t будем описывать многомерным вектором $x(t)$. Координаты $x_i(t)$ — численные характеристики различных компонент экосистемы, например концентрации биогенных или загрязняющих веществ, биомассы популяций водных животных или растений т. п.

В оз. Байкал обитает несколько сот видов животных и растений, и включение в вектор состояния переменных, описывающих каждый из этих видов в отдельности, сделало бы математическую модель совершенно не поддающейся анализу даже с помощью средств современной вычислительной техники. Поэтому в качестве компонент $x(t)$ выбирались характеристики лишь основных с экологической точки зрения популяций и веществ. Иногда в одну группу объединялся ряд популяций с близкими экологическими показателями. В модель включен ряд экзогенных внешних факторов, таких как температура воды, скорость ветра над акваторией озера, интенсивность солнечной радиации и др. Вектор этих переменных в момент t обозначен через $s(t)$.

Известно, что как биотические, так и абиотические характеристики Байкала имеют выраженное пространственное распределение. В связи с этим возникает необходимость описания состояния экосистемы в отдельных участках озера разными переменными, что приводит к повышению размерности векторов $x(t)$ и $s(t)$. Разрабатываемая модель дискретна по времени. Принятый временной шаг Δt составляет 5 сут. Общий вид модели может быть представлен следующим образом:

$$x(t + 1) = G(s(t)) \cdot F(x(t), s(t)).$$

Здесь F — оператор, преобразующий состояние системы в мо-

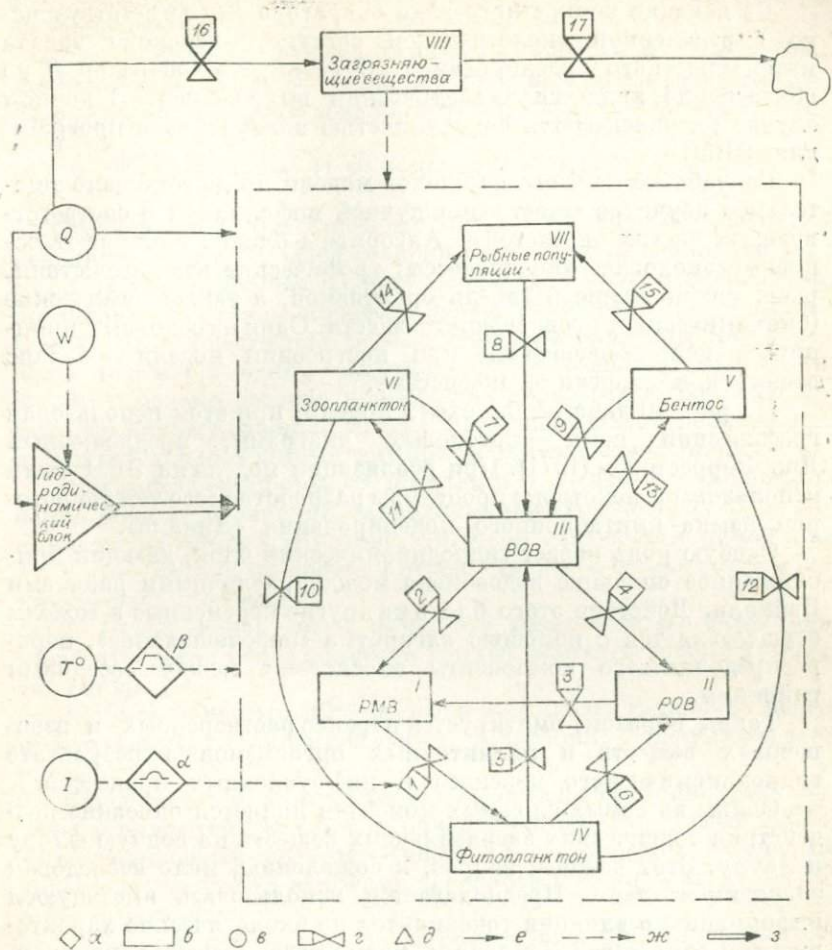


Рис. 10. Поточковая диаграмма модели экосистемы.

1 — интенсивность фотосинтеза; 2, 3, 4, 17 — скорости биохимического окисления; 5 — интенсивности смертности и выделений; 10—15 — скорости потребления пищи; 16 — интенсивность поступления загрязняющих веществ; РМВ — растворенные минеральные вещества; РОВ — растворенные органические вещества; ВОВ — взвешенные органические вещества животного и растительного происхождения; I — солнечная радиация; T° — температура воды; $^\circ\text{C}$; W — скорость ветра; Q — речной сток и другие источники аalloхтонного вещества; α — схематическое изображение влияния экзогенных факторов на интенсивность некоторых процессов; β — блоки фазовых переменных (уровней); γ — экзогенные переменные; δ — скорости процессов (темпы); θ — операторы, преобразующие уровни; e — потоки вещества; ε — информационные, энергетические и другие потоки; z — операторное воздействие.

мент времени t под влиянием внешних факторов в результате взаимодействий и взаимопревращений (кинетический оператор); $G(s(t))$ — линейный оператор перемешивания, имитирующий преобразование компонент экосистемы в результате гидродинамических процессов.

Выяснение конкретного вида оператора F , соответствующего определенной экологической системе, — основная задача математического моделирования. Отметим, что оператор F не обязательно является аналитическим выражением. В данном случае он описывается совокупностью алгоритмов и программ для ЭВМ.

Разработке каждого из блоков модели предшествовало тщательное изучение естественнонаучной информации о соответствующих частях экосистемы. Алгоритмы блоков описывают основные экологические процессы: трофические взаимодействия, рост, размножение и гибель организмов, а также химические (биохимические) превращения веществ. Один из основных принципов, использовавшихся при построении модели, — баланс вещества и энергии в экосистеме.

На рис. 10 дана общая схема модели, при этом использован графический язык потоковых диаграмм, предложенный Дж. Форрестером (1971). При реализации модели на ЭВМ были использованы некоторые процедуры разработанного тем же автором языка имитационного моделирования «Динамо».

Особую роль играет гидродинамический блок, дающий приближенное описание водообмена между различными районами Байкала. Действие этого блока на другие переменные в модели осуществляется с помощью алгоритма «перемешивание», перераспределяющего компоненты экосистемы между соседними районами.

Таким образом, имитируется перенос растворенных и взвешенных веществ и планктонных организмов в результате гидродинамического переноса и диффузионных процессов.

Одним из самых сложных моментов является описание воздействия токсических загрязняющих веществ на водную флору и фауну. Этот важный вопрос, к сожалению, мало исследован экспериментально. Предполагается использовать имеющуюся информацию о влиянии токсикантов на экологические характеристики обитателей Байкала и, кроме того, сведения, полученные для других водоемов, например для Великих озер (Кемп, Little, Holoman, Darby, 1973).

Модель ориентирована на район Южного Байкала, включая Селегинское мелководье. Рассмотрим основные блоки модели.

2. Модель водообмена озера должна быть функциональной подмоделью общей модели экосистемы Байкала. Исходя из этого, задача моделирования ставится следующим образом.

Пусть поверхность озера (или ее часть) разбита на N районов, и объем озера разделен горизонтальными плоскостями на S слоев, т. е. вся водная масса представлена в виде P ячеек ($P \leq NS$); в качестве шага модели выбран период времени t . Будем считать определенными для каждой ячейки интересующие нас параметры (концентрации), изменяющиеся в результате процессов водообмена. Пусть $c(t) [1 : P, 1 : M]$ — вектор

концентраций в ячейках на шаге (M — число параметров в каждой ячейке).

Требуется на основании данных о скорости и силе ветра, балльности волнения и изменении уровня, осредненных по периоду (все это сведем в вектор $D(t)$), определить изменение вектора c :

$$c(t + 1) = F(c(t), D(t + 1)).$$

Очевидно, что при такой постановке задачи выбор методов моделирования в большей степени определяется принятым шагом t . В данном случае он равен 5 сут (для модели водообмена предполагается также провести расчет на перспективу с шагом 1 мес). Это существенно больше, чем средняя продолжительность течения в одном направлении (с пределами колебаний $30-40^\circ$), однако степень подробности имеющихся данных следует, по нашему мнению, модель с меньшим шагом ненадежной и создаст непреодолимые трудности при ее верификации.

При составлении модели пришлось отказаться от использования точных уравнений гидродинамики (Цветова, 1973) и динамического метода (Кротова, 1970) по следующим причинам.

1. Шаг модели по времени несопоставим со скоростью гидрохимических процессов.

2. Недостаточна сетка и частота измерений по акватории озера для того, чтобы точность данных соответствовала точности метода.

3. Из-за большого объема озера возникают трудности решения системы дифференциальных уравнений с разумной точностью.

Поверхность Южного Байкала разбита на 9 районов (рис. 14), рассматриваются два слоя — поверхностный (глубина до 200 м) и глубоководный (200 м — дно). Таким образом, изучается водообмен между 18 ячейками. В основе модели лежат следующие гипотезы.

1. За один шаг модели водообмен совершается только между районами, имеющими ненулевую площадь соприкосновения.

2. Водообмен между поверхностными районами можно рассматривать как два независимых друг от друга процесса — водоперенос устойчивой системой циклонических течений, определяемый общей ветровой обстановкой и водообменом на предыдущем шаге, и перенос вод, не связанный с циклонической системой течений и зависящий лишь от ветра в данном районе.

3. Ветровая обстановка в Южном Байкале может быть охарактеризована одним параметром, аналогичным вращательному моменту в механике.

4. При построении модели водообмена между глубоководными ячейками поверхностные ячейки рассматриваются как однородные объемы, оказывающие давление на находящиеся под ними глубоководные. Водообмен между глубоководными

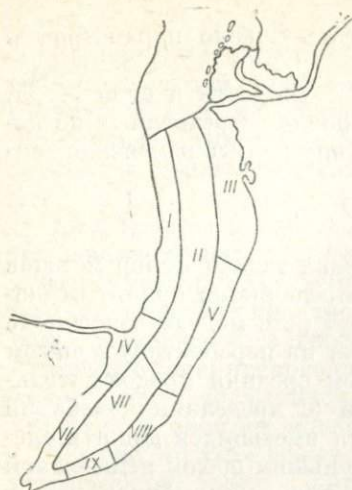


Рис. 11. Районирование Южного Байкала, принятое при моделировании.

районами рассчитывается исходя из закона Паскаля без учета рельефа дна.

5. Все вещества, концентрации которых составляют вектор c , считаются (в смысле переноса течениями) неотличимыми от воды. Изменения концентраций, связанные с подъемом и оседанием веществ, в данной модели не изучаются.

6. Водообмен можно представить как три последовательных процесса: водообмен между поверхностными ячейками, подъем и погружения водных масс, водообмен между поверхностными и глубоко водными ячейками.

Рассмотрим модель водообмена между поверхностными ячейками.

Пусть $VV[1 : N, 1 : N]$ — матрица полного водообмена между поверхностными ячейками. По принятым гипотезам водоперенос из i -й в j -ю ячейку (VV_{ij}) на каждом шаге складывается из циклонического переноса (T_{ij}) и водообмена, не связанного с циклонической циркуляцией (PV_{ij}), т. е.

$$VV_{ij} = T_{ij} + PV_{ij}. \quad (1)$$

Введем следующие обозначения:

VET_{ij} — средняя за время шага проекция скорости на нормаль к границе i -й и j -й ячеек;

B_i — средняя балльность волнения в j -й ячейке;

L_{ij} — длина границы между i -й и j -й ячейками по поверхности озера;

S_{ij} — площадь соприкосновения i -й и j -й ячеек;

KG — коэффициент турбулентной диффузии в горизонтальной плоскости (принимается усредненным по глубине поверхностного слоя).

По гипотезе 2 можно ввести в рассмотрение условный параметр V ветровой обстановки:

$$V = KV_{ij} \cdot VET_{ij}, \quad i < j, \quad (2)$$

где KV ($1:N, 1:N$) — треугольная матрица коэффициентов «вклада» ji -й границы в общую ветровую обстановку. Коэффициенты KV_{ij} рассчитываются из статистических соображений на основании данных натуральных измерений. Если выяснится, что один параметр недостаточно хорошо характери-

зует ветровую обстановку, то в дальнейшем гипотеза 2 может быть пересмотрена.

Перенос вод циклоническими течениями из i -й ячейки в j -ю на t -м шаге определяется по формуле

$$T_{ij}(t) = T_{ij}(t + 1)(A_{ij} \cdot V(t) + B_{ij}). \quad (3)$$

Начальные значения матрицы $T_0[1 : N, 1 : N]$ переноса вод циклоническим течением получают на основании натурных измерений. В формуле (3) B_{ij} — коэффициенты затухания циркуляции в подледный период.

Пусть K — длительность подледного периода (шагов); T_{1ij} , T_{2ij} — скорости в начале и в конце навигационного периода, тогда

$$B_{ij} = \exp((\ln T_2 - \ln T_1) / K). \quad (4)$$

Коэффициенты A_{ij} характеризуют изменения скоростей течения в зависимости от ветровой обстановки, их рассчитывают совместно с KV_{ij} . Устойчивость циклонических течений отражена в линейности преобразования матрицы T и постоянстве знаков элементов T_{ij} .

Водообмен, не связанный с циклонической системой течений, рассматривается как сумма переноса местными течениями, турбулентной диффузии и поверхностного переноса волнением:

$$PV_{ij} = (C_{ij} \cdot VET_{ij} + KG) S_{ij} + D_{ij} \left(\frac{B_i + B_j}{2} \right). \quad (5)$$

Коэффициенты C_{ij} и D_{ij} устанавливаются в результате большой серии численных экспериментов.

Теперь по гипотезе 6 определяется водообмен между поверхностными и глубоководными ячейками. Водообмен между поверхностной и глубоководной ячейками рассматривается как два независимых процесса — подъем (погружение) масс воды и турбулентная диффузия на границе ячеек. На основании гипотезы 3 корректно определять погружение (подъем) воды для каждого из балансовых соображений. Уравнение баланса учитывает водообмен между поверхностными ячейками, речной сток, осадки, испарения и изменение уровня воды. Водообмен в глубинных слоях исследуют посредством итеративного процесса, имитирующего действие закона Паскаля (в соответствии с гипотезой 4).

Так как (по гипотезе 5) все интересующие нас концентрации изменяются только в результате водообмена (в рамках данной подмодели), то, зная водообмен между всеми ячейками, легко произвести пересчет концентраций.

3. Модель фитопланктона и гидрохимического режима. В модели учитывается вертикальная структура экосистемы Байкала. Берутся следующие слои:

а) 0—25 м, который, в свою очередь, делится на 5 равных по величине слоев, для каждого из которых определяется средняя температура, освещенность и концентрация фитопланктона; органические и минеральные вещества предполагаются распределенными в слое 0—25 м равномерно;

- б) 25—50 м;
 в) 50—200 м;
 г) 200 м — до дна.

В слоях б)–г) распределение всех компонентов системы предполагается равномерным. Приведенное разбиение позволяет, с одной стороны, рассматривать характерные лимнологические зоны (альтернирующий слой 0—200 м, трофогенную зону 0—50 м), а с другой — придает модели универсальность, давая возможность естественно переходить из глубоководных в мелководные (вплоть до литорали) районы. Одновременно достигается согласование с гидрологическим блоком модели, где граница раздела на два слоя проходит на отметке 200 м.

При вертикальном расслоении учитывался и тот факт, что пробы планктона, замеры температуры и т. д. производятся в основном на глубинах 0, 5, 10, 15, 20, 25, 50, 200 м. Структура рассматриваемого блока, как и всей модели, в основном отражает общую схему круговорота органического вещества в озерах (Галазий, Вотинцев, 1969). Бактериальные процессы изучены слабо и поэтому непосредственно не рассматриваются, находя лишь косвенное отражение в коэффициентах.

Ограничимся описанием модели наиболее важного в производстве отношения слоя 0—25 м, так как для нижних слоев уравнения аналогичны. Обозначим через Φ_{ik} концентрацию i -вида фитопланктона в k -слое. Нумерация слоев ведется сверху вниз, начиная с $k = 1$ (0—5 м). Тогда

$$\Phi_{ik}(t+1) = \Phi_{ik}(t) + P_{ik}(t) - (\varepsilon_1 i + \varepsilon_2 i) \Phi_{ik}(t) - \sum_j R_{ij} Z_j(t) + \sum_{l=1}^6 a_{lk} \Phi_{il}(t), \quad (6)$$

где P_{ik} — прирост биомассы i -вида в k -слое за счет ассимиляции;

$$P_{ik} = (1 - K_1 i) P B_{ik}; \quad (7)$$

Z_j — концентрация j -вида фитофага (зоопланктона); R_{ij} — доля i -водоросли в рационе j -вида зоопланктона; $\varepsilon_1 i$ — коэффициент интенсивности трат на дыхание i -вида; $\varepsilon_2 i$ — коэффициент естественной смертности; a_{ek} — коэффициенты перераспределения фитопланктона между слоями вследствие вертикальных перемещений; $P B_{ik}$ — валовая продукция в сыром весе;

$$P B_{ik} = A_i \eta \omega_i c_{ik} \Phi_{ik}. \quad (8)$$

$K1_i$ — коэффициент интенсивности выделений i -водоросли; A_i — скорость фотосинтеза i -вида в оптимальных условиях (скорости фотосинтеза, деления, роста биомассы принимаются пропорциональными); η — коэффициент относительной продолжительности светового дня; ω_i — коэффициент относительной нехватки биогенов ($\omega_i \leq 1$); c_{ih} — обобщенный показатель фотосинтетической активности i -водоросли; $c_{ih} = 1$ при оптимальных условиях.

Предполагается, что c_{ih} зависит в первую очередь от освещенности (I_h), температуры (T_h), концентрации минерального азота ($B1$), фосфора ($B2$), кремния ($B3$), т. е.

$$c_{ih} = \alpha 1_i(I_h) \alpha 2_i(T_h) \xi(B1, B2, B3), \quad (9)$$

$\alpha 1_i$ и $\alpha 2_i$ задаются таблично процедурами — функциями (рис. 12, 13):

$$\xi = \min\{1, f1_i(B1), f2_i(B2), f3_i(B3)\}. \quad (10)$$

Необходимые сведения по температурному и световому режимам Байкала брались из работ Л. Л. Россолимо (1957), В. И. Верболова, В. М. Сокольников, М. Н. Шимарева (1965), Т. Н. Довгий (1974). Функции $f1$, $f2$, $f3$ задаются аналогично $\alpha 1$ и $\alpha 2$. Для водорослей, не содержащих кремния, $f3 \equiv 1$. Зависимость (10) (принцип Либиха) позволяет легко учесть ингибирующее действие загрязнителей. Коэффициенты $k1_i$ и a_{hk} будем предполагать зависящими от c_{ih} (рис. 14). Точка $C1_i$ соответствует состоянию парения водорослей. При высокой интенсивности фотосинтеза наблюдается некоторый подъем в верхние слои, а при снижении — опускание. Максимальная скорость опускания (отмерших или потерявших способность к фотосинтезу клеток) составляет 5–6 м/сут (Скабичевский, 1960). Далее, $a_{ih} = -\theta_i |m_h|$, где θ_i — коэффициент подвижности i -вида; m_h — целочисленная переменная, характеризующая глубину погружения (или поднятия) за один шаг модели (5 сут.); $|m_h| \leq 5$. Промежуточные величины a_{ih} определяются алгоритмически из условия равномерного рассеяния фитопланктона между проходными слоями. При этом выполняется балансовое соотношение

$$\forall i \sum_{h=1}^6 \sum_{l=1}^6 a_{ih} \Phi_{il} = 0.$$

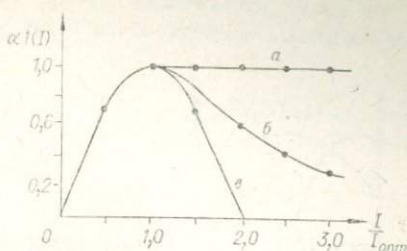


Рис. 12. Основные типы зависимости фотосинтеза фитопланктона от солнечной радиации.

a — световое насыщение; b — асимптотическое подавление; $в$ — полное подавление.

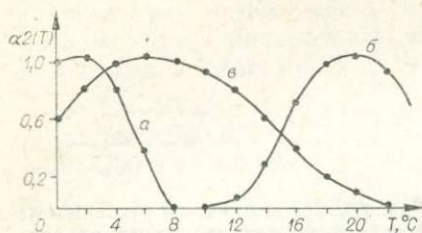


Рис. 13. Влияние температуры на ассимиляционную способность фитопланктона.

a — холоднолюбивые виды; *б* — теплолюбивые; *в* — эвритермные виды.

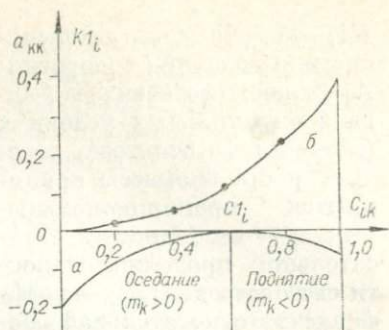


Рис. 14. Влияние фотосинтетической активности (c_{ih}) на скорость вертикального перемещения водорослей (*a*) и (a_{ik}) интенсивность прижизненных выделений ($K1_i$) (*б*).

Реальное потребление биогенов и продукция фитопланктона при массовом его развитии могут ограничиваться относительной нехваткой питательных солей. Чтобы учесть это обстоятельство, введем поправочный коэффициент ω_i .

Пусть γ_{1i} , γ_{2i} , γ_{3i} — содержание в *i*-й водоросли азота, фосфора, кремния соответственно. Будем считать, что эти величины для каждого вида неизменны. Через BP_1 , BP_2 , BP_3 обозначим среднюю потребность всего фитопланктона в азоте, фосфоре, кремнии в слое 0 — 25 м. Например, для азота

$$BP_1 = \frac{1}{5} \sum_k \sum_i A_i \eta_{ik} \gamma_{1i} \Phi_{ih},$$

тогда

$$\omega_i = \min \left\{ 1, \frac{B_1}{BP_1}, \frac{B_2}{BP_2}, \frac{B_3}{BP_3} \right\}.$$

Последний член под знаком минимума берется только для содержащих кремний водорослей — диатомовых и золотистых.

После выполнения расчетов по формулам (6) — (8) на каждом шаге определяются средние величины биомассы (Φ_{1i}) и валовой продукции (PB_{1i}) каждого вида в слое 0 — 25 м:

$$\Phi_{1i} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 \Phi_{ik};$$

$$PB_{1i} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 PB_{ik}.$$

Перейдем к гидрохимической части блока. Важную роль в рационе растительного зоопланктона и бентоса играют свежеемерший фитопланктон и другие виды неживого взве-

шенного органического вещества (ВОВ). Обозначим через $DB1$ концентрацию растительного детрита планктонного происхождения в слое 0—25 м. Тогда

$$DB1(t+1) = (1 - \varepsilon_4 - KD1) DB1(t) + \sum_i \varepsilon_2 i \Phi_1(t) - \\ - \sum_j RD_j Z_j(t).$$

Здесь RD_j — доля рациона j -го вида зоопланктона, приходящаяся на детрит; ε_4 — скорость разложения детрита; $KD1$ — интенсивность убыли детрита из слоя 0 — 25 м вследствие седиментации.

В растворенном органическом веществе (РОВ) природных вод выделяют две составляющие — легкоокисляемое и трудноокисляемое органическое вещество (водный гумус). Поскольку в Байкале не происходит накопления органического вещества, можно считать, что, хотя доля водного гумуса в общем количестве РОВ значительна, внутригодовые колебания содержания РОВ обусловлены легкоокисляемой составляющей, а дополнительное поступление водного гумуса невелико и компенсируется разложением части имеющегося. Основным источником РОВ являются выделения планктонных организмов и продукты их бактериального и химического окисления.

Пусть $DP1$ — концентрация РОВ в слое 0—25 м; $DP2$ — то же, в слое 25—50 м:

$$DP1(t+1) = (1 - \varepsilon_3) \cdot DP1(t) + \sum_i (K1_i \cdot PB1_i(t) + \varepsilon_1 i \times \\ \times \Phi_1(t) + K2 \cdot \varepsilon_4 \cdot DB1(t) - KD2 \cdot (DP1(t) - DP2(t))).$$

Здесь ε_3 — скорость минерализации РОВ, зависящая от соотношения легкоокисляемого органического вещества и водного гумуса (рис. 15); $KD2$ — коэффициент перемешивания; $K2$ — выход РОВ из детрита.

Уравнения динамики минеральных форм биогенных элементов аналогичны, поэтому приведем лишь одно из них (для азота):

$$B1(t+1) = B1(t) + \gamma P1 \cdot \varepsilon_3 \cdot DP1(t) - \sum_i \gamma_1 \cdot PB1_i(t) - \\ - KD2 \cdot (B1(t) - BH1(t)),$$

где $BH1(t)$ — концентрация минерального азота (NO_3^-) в слое 25—50 м; $\gamma P1$ — средний выход азота из РОВ. В уравнении для кремния в слое 0—25 м второй член отсутствует, так как предполагается, что наличие минерального кремния в верхнем слое обеспечивается лишь водообменом с нижними слоями и при-

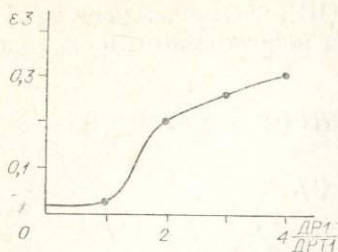


Рис. 15. Зависимость скорости минерализации РОВ (ϵ_3) от его концентрации.

DPT_1 — устойчивая концентрация водного гумуса.

брежними районами, а регенерация его из ВОВ происходит в толще вод.

Для изучения РОВ и ВОВ «в целом» удобно в качестве первого приближения принять допущение о стабильности их химического состава. Однако не вызывает труда описать динамику отдельных компонент органического вещества, например $N_{орг}$ или $P_{орг}$, не требующую этого допущения:

$$N_{1орг}(t+1) = N_{1орг}(t) + \sum \gamma 1_i \cdot (K 1_i \cdot P B 1_i(t) + \epsilon 1_i \times \Phi 1_i(t) + \epsilon 2_i \cdot \Phi 1_i(t)) - \epsilon N \cdot N_{1орг}(t) - K D 2 \cdot (N_{1орг}(t) + N_{2орг}(t)),$$

где ϵN — скорость минерализации органического азота ($N_{орг}$); $N_{1орг}$ — концентрация $N_{орг}$ в слое 0—25 м; $N_{2орг}$ — то же, в слое 25—50 м.

Оценка неизвестных параметров блока проводилась на основе имеющихся литературных данных (Антипова, 1963, 1974; Вотинцев, 1964; Кожов, 1955, 1967; Кожова, 1959; Поповская, 1974; Пырина, 1967; и др.) статистическими методами и с помощью имитационных экспериментов.

4. Моделирование зоопланктона. Целью моделирования является построение алгоритма, описывающего сезонную смену видов зоопланктона в отдельных районах Байкала, а также правдоподобно отражающего изменение биомассы каждого вида в поверхностном слое от 0 до 250 м как при обычных условиях, так и в случае, когда необходимо учесть влияние загрязняющих веществ на планктонные организмы. Алгоритм должен быть универсальным, что связано с необходимостью производить расчеты для нескольких районов, а также для достаточно большого числа видов зоопланктона.

При разработке первого варианта модели, описывающей динамику байкальского зоопланктона, и выбранном временном шаге модели, равном 5 сут, установлено, что основная масса его развивается в верхнем пятидесятиметровом слое и в пространстве он распределен равномерно. Суточные вертикальные миграции во внимание не принимаются. Поскольку основные жизненно важные для зоопланктона процессы происходят во

время пребывания его в еще более высоких слоях воды (до 10—15 м от поверхности), значения средних температур берутся для этих слоев.

Для первоначальных расчетов в модели рассматривалась некоторая обобщенная пища и пренебрегалось наличием хищных форм зоопланктона в Байкале.

Циклы развития у всех видов зоопланктона имеют одни и те же закономерности. Для некоторых наиболее важных и изученных видов рассматриваются три стадии развития: младшая, средняя и старшая — взрослые половозрелые особи. Продолжительность каждой стадии зависит от температуры воды (вернее, от суммы температур за время развития).

Переход некоторого количества биомассы из одной возрастной группы в другую осуществляется на каждом шаге и зависит от биологии вида и средней температуры воды. Отход биомассы из старшей группы — естественная смертность. Кроме того, учитывается смертность от неблагоприятных факторов (как процент от биомассы): низких и высоких температур и повышенных концентраций загрязняющих веществ.

Формулы, по которым рассчитывается прирост биомассы за счет питания, позволяют вычислить и «похудение», т. е. потерю биомассы при длительном недостатке пищи. Размножение понимается как прирост биомассы в младшей возрастной группе — некоторой части от биомассы половозрелых особей. Считается, что размножение происходит круглый год, но «пики» численности приходится на время, когда биомасса взрослых особей велика. Значение коэффициентов интенсивности размножения зависит также от температуры на данном шаге. Влияние обеспеченности пищей на этот процесс в модели не отражено.

Включение блока не зависит от номера шага. Начальные значения биомасс отдельных видов вводятся. Для круглогодичных форм сразу же начинается развитие. Для видов, появляющихся периодически, сигналом начала развития служит либо соответствующая температура воды, либо сумма температур предшествующих шагов (скажем, с 1 января). Развитие вида начинается с некоторой минимальной биомассы, зависящей от того, как вид развивался в предыдущем году. В случае, если по каким-то неблагоприятным условиям значение биомассы вида становится меньше некоторого запланированного минимума, особый признак вновь включает ввод этого минимума при наступлении благоприятной температуры. При объединении с блоком водообмена между районами моделируется перенос зоопланктона водными массами, и подобный искусственный прием сохранения видов не понадобится.

Кроме приведенного анализа на каждом шаге осуществляют следующие действия.

1. Вычисляется прирост биомассы каждого вида зоопланктона за счет питания. Сначала по известным тратам на энерго-

обмен Q_j в зависимости от значений температурных поправок ($L1$), коэффициента усвоения пищи (u), коэффициента использования пищи на рост (K_2) вычисляется максимальный рацион или «рацион-заявка» (кал):

$$RM_j = \frac{u_j}{1 - K_2j} \cdot Q_j \cdot L1, \quad j = \overline{1, N1}.$$

2. После суммирования всех «заявок» $SR = \sum_{j=1}^{N1} RM_j$ определяется реальный рацион (RR_j), как доля всей имеющейся пищи (P_i), пропорционально «заявке»:

$$RR_j = \frac{P_i}{SR} \cdot RM_j; \quad RR_j = \min(RR_j, RM_j).$$

3. Прибавка к биомассе вида вычисляется так:

$$P_j = \frac{1}{u_j} \cdot (RR_j - Q_j \cdot u_j \cdot L1) / KКАЛ_j,$$

где ккал_j — калорийность j -го вида зоопланктона. После этого определяются остаток пищи и неувоенная часть ее.

4. Перераспределяется биомасса между возрастными группами и вычисляется биомасса организмов, отмерших естественным образом:

$$B_{ij}(t+1) = B_{ij}(t) - \frac{B_{ij}(t) \cdot PV_j}{L1} + \frac{B_{ij-1}(t) \cdot PN_{ij-1}}{L1},$$

где B_{ij} — биомасса группы (вида); PV_{ij} , PN_{ij} — продолжительность существования старшей и младшей возрастных групп в сутках при $t = 20^\circ$ (могут иметь нулевые значения); $L1$ — температурная поправка.

Естественно, столь грубая модель может описать реальные процессы лишь схематически. Усовершенствование алгоритма требует более тщательного подбора коэффициентов и поиска новой информации, необходимой для построения модели, достаточно полно и точно описывающей динамику байкальского зоопланктона.

5. **Моделирование популяций омуля.** В основе модели, описывающей динамику популяции омуля, лежит использование конечно-разностных уравнений. Переменными величинами модели являются численности возрастных групп омуля — вектор $N = \{N_0, N_1, N_2, \dots, N_{M1}\}$, где N_0 — численность сеголеток; N_1 — численность рыб возраста 1+ и т. д., и вектор $B = \{B_0, B_1, B_2, \dots, B_{M1}\}$ — средний вес особей в возрастных группах. Модель имеет временной шаг Δt .

Численность омуля i -го возраста в момент времени t рассчитывается по формуле

$$N_i(t) = N_i(t-1)(1 - c_i)(1 - f_i),$$

где c_i — коэффициент смертности омуля i -го возраста за время Δt ; f_i — интенсивность вылова. В общем случае коэффициенты смертности зависят от гидрохимического состояния, т. е. $c_i = c_i(S)$, но в настоящей модели предполагается, что они являются постоянными величинами. На первом этапе моделирования используется допущение, что миграции рыб между соседними районами не происходит.

Количество выловленных рыб i -го возраста определится из соотношения $u_i = f_i \cdot N_i$, а общий вылов составит величину, равную $u = \sum_{i=1}^{M1} u_i$. Для определения реального рациона особи

i -го возраста используется формула Ивлева (Ивлев, 1955) в несколько измененном виде:

$$R1_i = RM_i \left(1 - e^{-\sum_{j=1}^{M2} \frac{x_j P_j}{\sum_{i=1}^{M1} N_i}} \right),$$

где $R1_i$ — искомая величина; RM_i — значение максимального рациона особи (величина его известна); P_j — плотность распределения пищевых организмов вида j ; x_j — коэффициент, характеризующий напряженность пищевых отношений популяции (определяется при статистическом анализе питания рыб j -м видом корма). Величину реального рациона особи i -го возраста для j -го вида пищевых организмов можно считать пропорциональной плотности распределения этого вида по площади рассматриваемого района и определять по формуле

$$R_{ij} = R1_i \frac{x_j P_j}{\sum_{h=1}^{M2} x_h P_h}.$$

После таких предположений можно записать, что средний вес особи возраста i за промежуток времени Δt изменится на величину, равную $\sum_{j=1}^{M2} KK_j R_{ij}$, т. е.

$$B_i(t) = B_i(t-1) + \sum_{j=1}^{M2} KK_j R_{ij},$$

где KK_j — кормовой коэффициент для j -го вида корма (отношение прироста веса к величине съеденного корма). В свою очередь, биомасса пищевых организмов j -го вида (K_j) изменится

по формуле

$$K_j(t) = K_j(t-1) - R_{ij} \cdot N_i(t).$$

В модели предполагается, что половой зрелости рыбы достигают в возрасте z . Долю, которую составляют самки от общего числа особей возраста i ($i \geq z$), обозначим L_i . Плодовитость (PL_i), т. е. число икринок, которое мечет одна самка во время нереста, будем считать не зависящей от внешних условий. При таких допущениях количество выметанных икринок (J_i):

$$J_i = 1/2 \cdot N_i \cdot L_i \cdot PL_i, \quad i = z, z+1, \dots, M1.$$

Коэффициент $1/2$ соответствует тому факту, что производители омуля выходят на нерест в среднем один раз в два года.

Предположим, что численность сеголеток определяется по формуле Риккера:

$$N_0 = aJ e^{-bJ}, \quad \text{где } J = \sum_{i=z}^{M1} J_i.$$

Коэффициенты a и b можно определить из статистических сведений о популяции (Ricker, 1958). Введем условие, что при увеличении количества выметанных икринок до некоторого значения JK численность выжившей молоди сохраняется постоянной и равна NK . Это условие оправдано с биологической точки зрения, так как в формуле Риккера при увеличении количества выметанных икринок до бесконечности численность молоди стремится к нулю (Larkin, Hourston, 1964). Получим систему уравнений

$$N_0 = \begin{cases} aJ e^{-bJ} & \text{при } J < JK; \\ NK & \text{при } J \geq JK. \end{cases}$$

Выписанные формулы представляют собой систему уравнений, которую можно считать моделью, позволяющей проследить за динамикой численности и биомассы популяции байкальского омуля. С помощью этой модели можно предсказать, например, и изменение возрастного состава популяции при различных режимах промысла. Для оценки коэффициентов a и b кривой Риккера проводились следующие рассуждения. Допустим, из икры, выметанной производителями омуля в n -м году, стадии малька достигло N_0 штук икринок, т. е. в n -м году было N_0 сеголеток. За год произойдет отход сеголеток в результате естественной смертности. В $n+1$ -м году от поколения предыдущего года останется $N_0(1-c_0) = N_1$ штук особей (сеголеток не промыслиют, поэтому $f_0 = 0$). В $n+2$ -м году их будет $N_1(1-c_1)(1-f_1) = N_2$ штук, где f_1 — интенсивность вылова годовиков омуля. Улов годовиков составит величину, равную $u_1 = N_1(1-c_1)f_1$, причем значение u_1

известно. Проводя аналогичные рассуждения для последующих лет и зная, что предельный возраст омуля составляет в среднем 12 лет ($M1 = 12$), получим формулу для определения суммарного вылова поколения n - го года за 12 лет:

$$u = \sum_{i=1}^{12} u_i = N_0(1 - c_0) + N_0(1 - c_0)(1 - c_1)f_1 + N_0(1 - c_0) \times \\ \times (1 - c_1)(1 - c_2)(1 - f_1)f_2 + \dots + N_0(1 - c_0)(1 - c_1) \dots \\ \dots (1 - c_{12})(1 - f_1) \dots (1 - f_{11})f_{12} = \\ = N_0 \left[(1 - c_0) + \sum_{k=1}^{12} \prod_{i=1}^k (1 - c_{i-1})(1 - f_{i-1})f_k \right].$$

Для расчетов были использованы данные за 17 лет: с 1938 по 1954 г. (Смирнов, Шумилов, 1974). Коэффициенты естественной смертности c_i известны (Смирнов, Шумилов, 1974). Коэффициенты f_i легко определяются из рекуррентного соотношения

$$f_i = \frac{f_{i+1}(1 - c_{i+1})u_i}{f_{i+1}(1 - c_{i+1})u_i + u_{i+1}}, \quad i = 11, 10, 9, \dots, 1,$$

при $f_{12} = 1$.

Таким образом, можно получить расчетные значения мощности поколений тех лет, для которых имеются данные по вылову, т. е. $N_0 = U/A$, где

$$A = (1 - c_0) + \sum_{k=1}^{12} \prod_{i=1}^k (1 - c_i)(1 - f_{i-1})f_k.$$

Количество икринок, давших поколение мощности N_0 , определяется из формулы

$$J = \sum_{i=2}^{M1} J_i = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{M1} N_i L_i P L_i.$$

В результате расчетов получено n пар значений N_0 и J в формуле Риккера. Для нахождения оценок параметров a и v этой формулы был использован метод наименьших квадратов. Следует учитывать, что коэффициенты a и v в общем случае зависят от внешних факторов, например, есть данные, что интенсивность размножения и величина нового урожая во многом определяются высотой уровня воды нерестовых рек.

В рассматриваемом случае n пар полученных значений (N_0, J) условно разделены на три группы в соответствии с величиной общего вылова поколений омуля. Для них построены кривые Риккера (рис. 16).

6. Моделирование поля концентраций в районе Байкальско-го целлюлозного завода (БЦЗ). Как показывают натурные

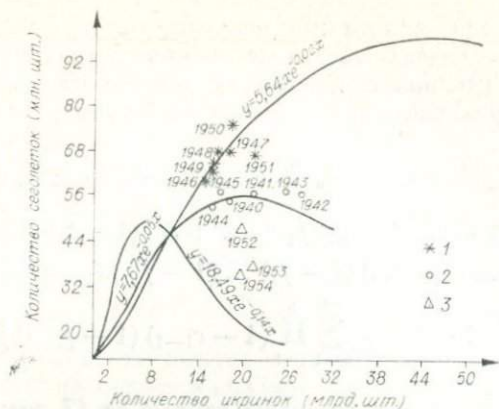


Рис. 16. Кривые Риккера для трех групп поколений омуля.

Годы поколений: 1 — урожайных; 2 — среднеурожайных; 3 — малоурожайных.

съемки, в этом районе имеется устойчивая область влияния промстоков площадью около 40 км². Этот факт подчеркивает необходимость прогнозирования изменения качества воды в результате хозяйственной деятельности человека. В частности, при планировании различных мероприятий на БЦЗ (увеличение выпуска продукции, совершенствование очистки сбросных вод, изменение режима сброса) желательно заранее оценить динамику процессов в этой области. Для этой цели разрабатывается имитационная математическая модель, реализуемая в виде АЛГОЛ-программы на ЭВМ. Математической основой модели является известное уравнение турбулентной диффузии (Маккавеев, 1933, 1940):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V_x \frac{\partial c}{\partial x} + V_y \frac{\partial c}{\partial y} + V_z \frac{\partial c}{\partial z} = A_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - qc + f. \quad (11)$$

Здесь c — концентрация растворенных или взвешенных в воде веществ; t — время; оси координат расположены следующим образом: ось x — вдоль береговой линии, которую на рассматриваемом участке спрямляем; y — по нормали к берегу; z — вертикально вниз; $V_x(x, y, z, t)$, $V_y(x, y, z, t)$, $V_z(x, y, z, t)$ — проекции вектора скорости на оси координат; A_x , A_y , A_z — коэффициенты турбулентной диффузии в соответствующих направлениях; q — коэффициент, учитывающий распад вещества в результате биохимических процессов; $f(x, y, z, t)$ — интенсивность поступления исследуемого вещества извне или в результате распада других веществ.

[Из-за недостатка натурных данных о величинах коэффициентов, входящих в уравнение (11), и малой мощности имеющихся в нашем распоряжении ЭВМ решение полной трехмерной задачи пока затруднительно*. В связи с этим на начальном этапе работы использовалась следующая упрощенная методика расчетов поля концентраций.

Вся толща воды делится на три слоя по высоте, внутри каждого из которых предполагается равномерное по вертикали распределение. Поле концентраций считается установившимся во времени и описывается внутри каждого из слоев: глубокого ($90 < z < 190$), среднего ($20 < z < 90$) и верхнего ($z < 20$) стационарным уравнением

$$V_x(xy) \frac{\partial c}{\partial x} + V_y(xy) \frac{\partial c}{\partial y} = A_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - qc + f(x, y). \quad (12)$$

Для каждого слоя выбираются свои среднесезонные значения величин V_x , V_y , A_x , A_y , постоянные по толщине слоя. Обмен между слоями учитывается при помощи функции поступлений $f(x, y)$. Внутри каждого из слоев коэффициенты турбулентной диффузии A_x , A_y считаются постоянными, вектор скоростей $V(x, y)$ меняется от точки к точке.

Уравнение (12) интегрировалось методом сеток. Рассматриваемый участок поверхности Байкала разливается в выбранной системе координат на счетные ячейки линиями $y_i = h_i$, $x_j = l_j$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$).

В каждой узловой точке (x_j, y_i) ($j = 1, 2, \dots, m - 1$; $i = 1, 2, \dots, n - 1$) уравнение (12) заменяется конечно-разностной аппроксимацией следующим образом: для вторых производных используются трехточечные аппроксимации центральными разностями. Первые производные заменяются односторонними разностями так, чтобы получить разностную схему с диагональным преобладанием (монотонную схему). В результате получается система $(m - 1) \times (n - 1)$ уравнений вида

$$c_{ij} = (A_{ij}c_{i+1j} + B_{ij}c_{i-1j} + c_{ij+1} + D_{ij}c_{ij} + f_{ij})/E_{ij}.$$

На ограничивающем нашу область контуре $x = 0$, $x = ml$, $y = 0$, $y = nh$ полагаем $c = 0$. При таком граничном условии исходная задача (12) разрешима при любой правой части $f(x, y)$.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений можно использовать любой итерационный метод, например метод Зейделя. На ЭВМ ОДРА-1204 без подключения внешней памяти (магнитных барабанов) решается система 30×30 урав-

* Весьма интересный пример решения полной задачи описан в монографии Л. М. Галкина (1975).

нений (30 узлов по оси x , 30 узлов по оси y). При шаге $h=l=500$ м эта сетка позволяет охватить участок 15×15 км, что заведомо больше площади пятна.

На начальном этапе были сделаны следующие допущения.

1. Часть Байкала в районе БЦЗ представляет собой прямоугольный параллелепипед высотой 190 м. Это предположение необходимо для того, чтобы не учитывать на начальном этапе влияния рельефа дна и различного характера береговых линий на разных глубинах.

2. Весь поступающий комплекс примесей рассматривается как однородная примесь — фенол. Под фенолом мы понимаем условное вещество, в качестве скорости распада которого взята средняя скорость для разных типов реальных фенолов.

3. Суточные воды мгновенно равномерно распределяются по площади одной счетной ячейки и в объеме счетной ячейки каждого слоя. Доля примесей, приходящихся на каждый слой, определяется коэффициентом α ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$). Таким образом, концентрация в счетной ячейке каждого слоя, на которую проецируются точки сброса сточных вод: $c_i = \alpha_i P / l h H_i$, где P — вес поступлений загрязнителя; H_i — высота i -го слоя, $i = 1, 2, 3$. Концентрации c_i приписываются четырем узлам сетки — вершинам этой ячейки.

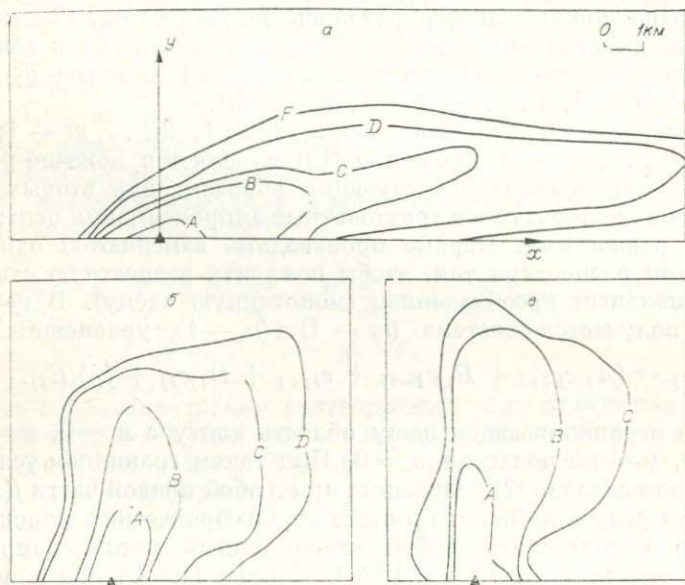


Рис. 17. Концентрация летучих фенолов в районе БЦЗ по расчетам для верхнего (а), среднего (б) и нижнего (в) слоев.

а, б: $A = 5 \cdot 10^{-1}$ мг/м³; $B = 4 \cdot 10^{-1}$; $C = 3 \cdot 10^{-1}$; $D = 1 \cdot 10^{-1}$ мг/м³;
в: $A = 2 \cdot 10^{-1}$ мг/м³; $B = 3 \cdot 10^{-2}$; $C = 3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}$ мг/м³.

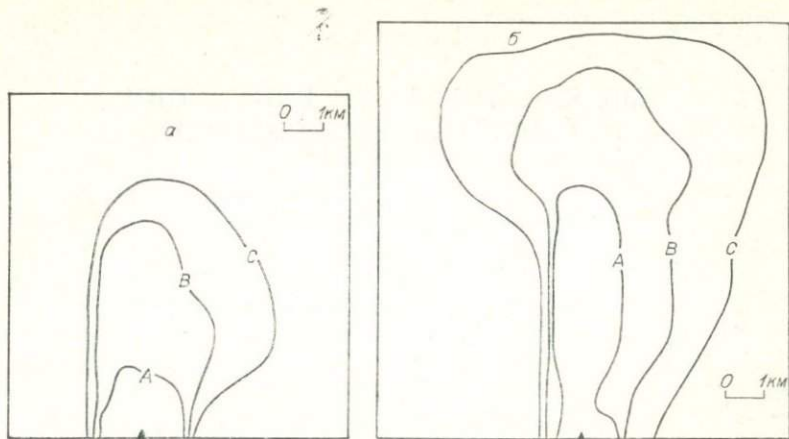


Рис. 18. Концентрация летучих фенолов в нижнем слое при увеличении (а) и уменьшении (б) константы распада в 100 раз.

$$A=2.5 \cdot 10^{-1} \text{ мг/м}^3; B=2.5 \cdot 10^{-2}; C=5 \cdot 10^{-3} \text{ мг/м}^3.$$

4. Во всех ячейках всех слоев, кроме столба, где находится источник, не учитывается поступление примесей из других слоев (со дна) и уход в другие слои (на дно).

5. Скорости течений в каждом слое однородны по вертикали и приведены по верхнему слою к глубине 15 м, по среднему — 50, по нижнему — 150 м.

Скорости в узлах сетки были экстраполированы на основании данных ГГИ. Коэффициент турбулентной диффузии принят равным $0,01 \text{ м}^2/\text{с}$ (Цветова, 1973). Данные о сбросах фенолов получены из материалов ГХИ. Для расчетов была использована гидрологическая информация, относящаяся к осени 1972 г. Основанием для такого выбора послужила устойчивая картина течений в Байкале в октябре — декабре 1972 г. и наличие сравнительно полных данных по сбросам (рис. 17).

На рисунке поля концентраций для всех слоев изображены с помощью линий постоянной концентрации (изолиний).

Картина, особенно в верхнем слое, более или менее похожа на «правую» конфигурацию из двух пятен, которые, как правило, дает натурная съемка. Никакой аналогии «левому» пятну нет. Мы объясняем это, во-первых, тем, что не учтены поступления фенолов, как следствие разложения донного комплекса; во-вторых, отсутствием натуральных съемок в ноябре — декабре, когда устанавливается стационарная осенняя картина; в-третьих, в нашей модели нет функции загрязнения ливневыми сбросами.

Несущественные изменения конфигурации пятна и его площади наталкивают на мысль об определяющем значении поля гидродинамических скоростей для пространственного распределения загрязняющих веществ в районе БЦЗ (рис.18).

МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ И ПРОЦЕССОВ В БИОЦЕНОЗАХ

За последнее десятилетие теория биологических популяций (в основном за счет широкого использования методов математического моделирования и концепций современной экологии) сделала большие успехи (Свирижев, Елизаров, 1972; Меншуткин, 1974; Динамическая теория..., 1974). Однако до сих пор в этой теории существует известное внутреннее разделение: с одной стороны, имеется большое число очень изящных математических моделей, которые зачастую трудно использовать для описания конкретных природных популяций из-за их излишней общности и большой степени формализации, с другой — много чисто описательных работ, в которых содержится большой и интересный материал, но не сделано серьезных попыток каким-либо образом рассмотреть его с некоторой единой точки зрения и попытаться выявить те механизмы, которые определяют динамику именно этой конкретной популяции.

Материалы данной главы в какой-то мере восполняют указанный пробел. Они связаны с конкретными природными объектами, фактическими статистическими данными для этих объектов и их конкретными проблемами.

Полученные выводы (будь то объяснение особенностей поведения, прогнозы или рекомендации по рациональному использованию или дальнейшим направлениям исследований) демонстрируют эффективность рассмотрения конкретных данных и проблем с позиций применяемых математических моделей.

§ 1. МОДЕЛЬ РЫБНОЙ ПОПУЛЯЦИИ И ЕЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ (НА ПРИМЕРЕ ПОСОЛЬСКОГО ОМУЛЯ)

В данном разделе методами оптимального управления исследуется ряд задач рациональной эксплуатации рыбной популяции с искусственным, а также смешанным воспроизводством. Прототипом такой популяции является популяция посольского омуля оз. Байкал.

Исследование проводится на укрупненных моделях, которые учитывают основные закономерности динамики численности популяции. Это вызвано, с одной стороны, недостаточной информационной базой для более сложных моделей, а с другой — тем обстоятельством, что укрупненные модели доказали свою жизнеспособность в применении к таким сложным объектам, как экономические системы.

Отметим, что некоторые аспекты рассматриваемых ниже задач исследовались ранее (Шапиро, Андреев, 1970) на более простой математической модели.

Постановка и исследование задач управления. Чтобы в дальнейшем каждый раз это не оговаривать, укажем, что все приводимые задачи оптимального управления исследуются при помощи принципа оптимальности Кротова. При этом функция Кротова задается по методу кратных максимумов (Кротов, Гурман, 1973).

Задача 1. Начнем с рассмотрения случая, когда популяция полностью воспроизводится искусственным путем. Будем характеризовать состояние популяции численностью x_1 , x_2 , x_3 рыб в трех возрастных группах: молоди, рыб среднего возраста и «стариков». К воспроизводству способны рыбы двух старших возрастных групп. Ежегодно доля λ_1 от x_1 и λ_2 от x_2 концентрируется на нерестилище, где изымается с целью инкубации икры на рыбозаводе. Изъятые рыбы образуют вылов на нерестилище. Кроме того, ведется промысел двух старших возрастных групп с интенсивностью u_2 , u_3 соответственно. Ежегодное пополнение \mathcal{P} молоди зависит от количества инкубированной икры и вычисляется по формуле, являющейся модификацией формулы (Шапиро, Андреев, 1970):

$$\mathcal{P} = (\sigma_2 \lambda_2 x_2)^{\alpha_2} + (\sigma_3 \lambda_3 x_3)^{\alpha_3},$$

где σ_2, σ_3 — индивидуальные плодовитости рыб соответствующих возрастных групп; параметры α_2, α_3 подчинены условиям $0 < \alpha_2 < 1$, $0 < \alpha_3 < 1$.

Смертность молоди и «стариков» будем считать пропорциональной численности, во второй группе отсутствующей. При этих предположениях получаем следующую модификацию матричной модели популяции (Динамическая теория..., 1974).

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_2 x_2^{\alpha_2} + A_3 x_3^{\alpha_3} - k_1 x_1; \\ \dot{x}_2 &= \gamma_2 x_1 - (\lambda_2 + k_2) x_2 - u_2; \\ \dot{x}_3 &= k_2 x_2 - (\lambda_3 + k_3) x_3 - u_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $A_i = (\sigma_i \lambda_i)^{\alpha_i}$, $i=2, 3$, а все коэффициенты — положительные константы, имеющие очевидный смысл.

Требуется определить стратегию промысла на промежутке планирования $[0, T]$, т. е. функции $u_2(t)$, $u_3(t)$, так, чтобы функционал

$$I = c_1 x_1(T) + \int_0^T (c_2 u_2 + c_3 u_3 + p_2 x_2 + p_3 x_3) dt \quad (2)$$

принял максимальное значение. Здесь c_1, c_2, p_2, p_3 — положительные константы, интерпретируемые как цены. Граничные условия $x_i(0), x_i(T)$ могут быть самого произвольного вида.

Составим функцию R , фигурирующую в достаточных условиях оптимальности Кротова:

$$R = \varphi_{x_1} (A_2 x_2^{\alpha_2} + A_3 x_3^{\alpha_3} - k_1 x_1) + \varphi_{x_2} [\gamma_2 x_1 - (\lambda_2 + k_2) x_2 - u_2] + \varphi_{x_3} (k_2 x_2 - (\lambda_3 + k_3) x_3 - u_3) + c_2 u_2 + c_3 u_3 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \varphi_t.$$

Здесь $\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_3}$ — частные производные функции Кротова $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$. Составим систему кратных максимумов $c_2 - \varphi_{x_2} = 0$, $c_3 - \varphi_{x_3} = 0$ и возьмем ее решение в виде линейной функции

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = c_2 x_2 + c_3 x_3 + \psi(t) x_1. \quad (3)$$

Исследуем функцию R на максимум по переменным x_1, x_2, x_3 при таком задании функции Кротова. Предположим, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} c_2(\lambda_2 + k_2) - c_3 x_3 - p_2 &> 0; \\ c_3(\lambda_3 + k_3) - p_3 &> 0, \end{aligned} \quad (4)$$

тогда из условий стационарности получим

$$\psi(t) = \frac{c_2 \gamma_2}{k_1} [1 - \exp(k_1(t - T))] + c_1; \quad (5)$$

$$x_2^*(t) = B_2 \psi(t)^{1/(1-\alpha_2)}, \quad x_3^*(t) = B_3 \psi(t)^{1/(1-\alpha_3)}, \quad (6)$$

где

$$B_2 = \left(\frac{A_2 \alpha_2}{c_2(\lambda_2 + k_2) - c_3 k_2 - p_2} \right)^{1/(1-\alpha_2)}; \quad B_3 = \left(\frac{A_3 \alpha_3}{c_3(\lambda_3 + k_3) - p_3} \right)^{1/(1-\alpha_3)},$$

а звездочкой здесь и далее отмечаются искомые оптимальные значения. Величины $x_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)$ теперь легко определить из уравнений модели. Легко проверить, что если функция $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ имеет вид (3), то R — вогнутая функция переменных x_1, x_2, x_3 , так что полученные величины $x_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)$ будут точками максимума функции R .

Найденное решение не является допустимым в случае произвольных граничных условий. Однако оно определяет «маги-

стральный» участок искомого оптимального решения. Термин «магистраль» заимствован из математической экономики (Никайдо, 1972) и понимается здесь в следующем смысле: если промежутки планирования $[0, T]$ достаточно велики, то за исключением начального и конечного этапов планирования оптимальное решение совпадает с магистралью (независимо от конкретного вида граничных условий). Отсюда ясно, что магистраль достаточно полно характеризует решение в целом. По этой причине ограничимся здесь и далее определением магистральных участков оптимального решения и не будем исследовать характер выхода на него в начале и схода с него в конце времени планирования, представляющих больше математический интерес.

Рассмотрим, как изменяются численность популяции на полученном решении. Поскольку в силу (5) $\psi(t)$ является убывающей функцией времени, из (6) следует, что численность $x_2^*(t)$, $x_3^*(t)$, а вместе с ней $x_1^*(t)$ и интенсивность промысла $u_2^*(t)$, $u_3^*(t)$, уменьшаются с течением времени. Иными словами, при выполнении условий (4) полное воспроизводство популяции искусственным путем может сказаться неэкономичным. В этой ситуации возможной альтернативой может служить сочетание искусственного воспроизводства с естественным.

Условиям (4) нетрудно дать содержательную экологическую интерпретацию. Заметим, что если (4) не выполняется, то не существует оптимальной стратегии промысла в приемлемом практическом смысле, так как в этом случае установившейся стабильной политики эксплуатации нет.

Задача 2. Рассмотрим одномерную модель, в которой введен управляющий параметр, регулирующий интенсивности искусственного и естественного воспроизводства.

Пусть x — численность популяции; λx — численность нерестового стада, распределяемого с долями $v(t)$ и $1 - v(t)$ соответственно для инкубации икры на рыбозаводе и нереста в естественных условиях (такое распределение осуществляется изъятием лишь части рыб на нерестилище для инкубации икры на рыбозаводе).

Ежегодный прирост популяции за счет естественного воспроизводства \mathcal{P}_e зависит от фонда отложенной на нерестилище икры и вычисляется по модифицированной формуле Риккера

$$\mathcal{P}_e = \alpha \lambda x (1 - v) \exp(-\beta x).$$

Прирост популяции за счет искусственного воспроизводства описывается линейной зависимостью $\mathcal{P}_u = \gamma \lambda x v$. Предполагая, что естественная и прочая смертность пропорциональна численности популяции, приходим к следующему уравнению:

$$\dot{x} = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_u - cx - \lambda xv - u, \quad (7)$$

где u — интенсивность промысла.

Требуется среди допустимых управлений $0 \leq v(t) \leq 1$, $u(t) \geq 0$ найти оптимальное в смысле максимума функционала

$$I = \int_0^T (pu + g\lambda xv) dt, \quad (8)$$

имеющего смысл прибыли.

При исследовании этой задачи будем комбинировать метод кратных максимумов с методом Лагранжа — Понтрягина. Выпишем сопряженную систему

$$\dot{\psi} = \alpha\lambda\psi(\beta x - 1) \exp(-\beta x) + \{[1 - \gamma - \alpha(\beta x - 1) \exp(-\beta x)] \times \\ \times \psi - g\}\lambda v$$

и функцию переключения управления v : $M(x, \psi) = [\gamma - 1 - \alpha \exp(-\beta x)]\psi + g$. Ясно, что при $M(x, \psi) > 0$, $v = 1$, а при $M < 0$ $v = 0$. Случай $M(x, \psi) = 0$ приводит к особому (по управлению v) режиму и только в этом случае возможно смешанное воспроизводство.

Заметим, что если $x \in (0, +\infty)$, то на поверхности переключения $M(x, \psi) = 0$, $\psi \neq 0$ и принимает значение в промежутке $[g/(\alpha + \gamma - 1), g/\gamma - 1)$. При этом возможны три случая.

$$A. 0 < \frac{g}{\alpha + \gamma - 1} \leq p < \frac{g}{\gamma - 1};$$

$$B. \frac{g}{\gamma - 1} \leq p;$$

$$B. \frac{g}{\alpha + \gamma - 1} > p.$$

Обратимся к случаю А. Функцию $\varphi(x, t)$ выберем по методу кратных максимумов, приравнявая к нулю коэффициент при управлении u и функции R : $\varphi_x - p = 0$, откуда $\psi = p$. Поскольку $M(x, p) = 0$ и $\psi = 0$, существуют такие x^* и v^* , что

$$M(x^*, p) = (\gamma - 1 - \alpha \exp(-\beta x^*)) p + g = 0;$$

$$v^* = \frac{\alpha\lambda p (\beta x - 1) \exp(-\beta x)}{[\gamma - 1 + \alpha (\beta x - 1) \exp(-\beta x)] p + g}. \quad (9)$$

Из первого уравнения (9) $p(\gamma - 1) + g = p\alpha \exp(-\beta x^*)$, откуда

$$x^* = \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{p\alpha}{p(\gamma - 1) + g} \right]. \quad (10)$$

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то должно выполняться условие

$$p\alpha > p(\gamma - 1) + g. \quad (11)$$

Из второго равенства (9) получаем

$$v^* = \frac{\beta x^* - 1}{\beta x^*}. \quad (12)$$

Поскольку $0 \leq v \leq 1$, должно выполняться неравенство $0 \leq \frac{\beta x^* - 1}{\beta x^*} \leq 1$ или с учетом (10) приходим к следующему неравенству, налагающему ограничения на параметры задачи:

$$\frac{p\alpha}{p(\gamma - 1) + g} \geq e \quad (13)$$

(e — основание натурального логарифма). Наконец, из уравнения динамики численности популяции получим недостающее значение управления u^* :

$$u^* = \alpha \lambda x(1 - v^*) \exp(-\beta x^*) + (\gamma - 1)\lambda x^* v^* - c x^*. \quad (14)$$

Итак, в случае А при выполнении неравенства (13) (более сильного, нежели (11)) магистральный участок оптимального решения определен соотношениями (10), (12), (14). Из условия (13) следует, что оптимальная политика воспроизводства в рассматриваемом случае не зависит от параметра λ , характеризующего численность нерестовой популяции, и определяется лишь такими параметрами, как максимальная интенсивность естественного относительного прироста (α), интенсивность относительного прироста за счет искусственного разведения (γ) и экономическими параметрами — ценами p и g . В частности, если $p = g$, то из (13) следует, что скорость естественного относительного прироста должна в e раз превосходить относительную скорость искусственного прироста, чтобы смешанное воспроизводство было оправданным.

Мы не будем подробно исследовать случаи Б, В, укажем лишь, что при некоторых ограничениях на параметры модели и в этих случаях возможно магистральное решение со смешанным воспроизводством популяции, однако в отличие от случая А интенсивность промысла в этом решении равна нулю (в случае Б) и максимальна (в случае В). Последний случай соответствует либо ограниченным возможностям промысла (т. е. $u \leq \bar{u}$ для некоторого $\bar{u} > 0$), либо накоплению запасов рыбы и интенсивному промыслу на заключительном этапе планирования.

По точно такой же схеме можно исследовать более сложную двумерную задачу оптимизации:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \alpha \lambda x_2 (1 - v) \exp(-\beta x_2) + \gamma \lambda x_2 v - c x_1; \\
 \dot{x}_2 &= a x_1 - \lambda x_2 v - k x_2 - u; \\
 u &\geq 0, \quad 0 \leq v \leq 1; \\
 J &= \int_0^T (p u + g \lambda x_2 v) dt \rightarrow \max,
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

содержательный смысл которой очевиден.

Результаты расчетов*. На рассмотренных моделях были проведены численные расчеты применительно к популяции байкальского омуля посольской расы. Эта популяция полностью воспроизводится искусственным путем и на данном этапе исследований представляет наиболее удобный и важный объект для моделирования, так как в будущем искусственному рыборазведению на Байкале отводится значительная роль.

Так, в модели, соответствующей задаче 1, первая возрастная группа (до 4+ включительно) участвует в промысле, поэтому в первое уравнение модели (1) был введен еще один член — интенсивность промысла u_1 . В представленных расчетах она была принята постоянной на уровне 1950 г. Параметры $A_2, A_3, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_2, \lambda_3$ определялись по данным выхода молоди омуля в оз. Байкал и вылову нерестущих рыб в реках Посольского сора (Топорков, 1974). Приведем численные значения следующих параметров:

$$\begin{aligned}
 A_2 &= 7,75; \quad A_3 = 1,71; \quad \alpha_2 = 0,88; \quad \alpha_3 = 0,7; \\
 \lambda_2 &= 0,0122; \quad \lambda_3 = 0,0018; \quad c_2 = p_2 = 1,12 \text{ (руб)}; \\
 c_3 &= p_3 = 1,86 \text{ (руб)}; \quad c_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Характерно, что в полученной модели в случае неограниченных сверху интенсивностей промысла $u_2(t), u_3(t)$ оптимальная политика реализуется как одноимпульсный режим, при котором $u_2(t) = u_3(t) = 0, t \in [0, T)$, а в момент $t = T$ снимается «урожай», обуславливающий падение численностей x_2, x_3 до их допустимых нижних пределов. Чтобы получить ежегодные устойчивые уловы, были введены ограничения снизу на управление вида $u_i \geq u_i^{\min}, i = 2, 3$.

На рис. 19, I приведены графики численности и динамики уловов на полученном решении. Начальные данные описаны к 1950 г., в качестве u_i^{\min} приняты значения уловов, также соответствующее этому году, характерному для среднелетних уловов омуля в оз. Байкал. Биомасса уловов за тот же пе-

* Авторы выражают глубокую благодарность В. А. Батурину, оказавшему неоценимую помощь при идентификации моделей и проведении численных расчетов.

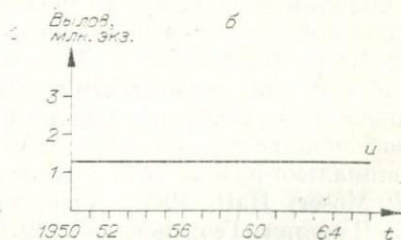
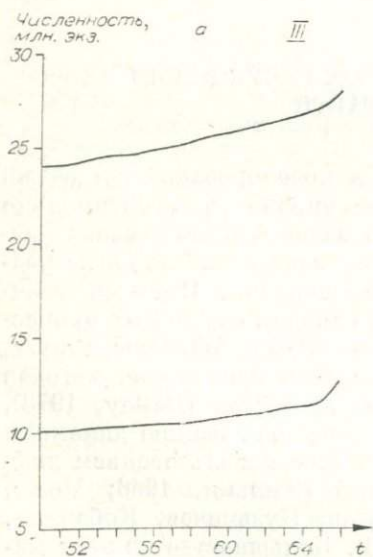
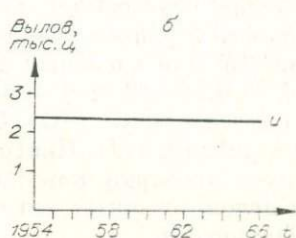
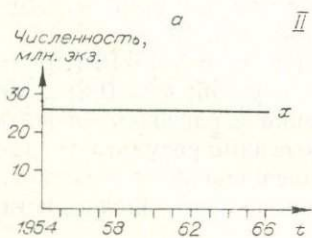
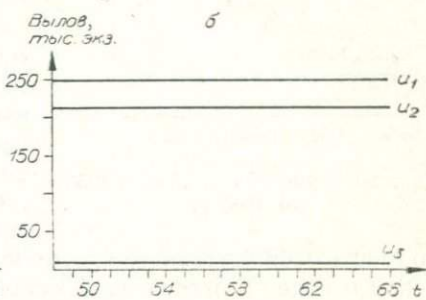
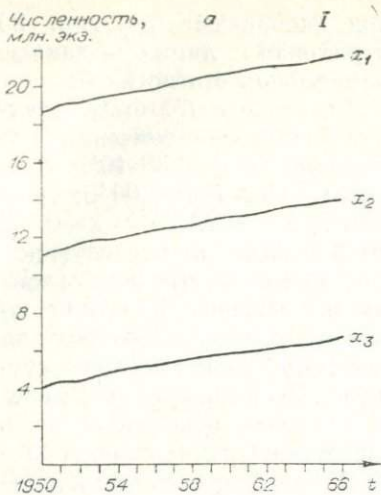


Рис. 19. Характеристика оптимального режима.

I—III — соответственно трехмерная, одномерная и двумерная модели; а, б — динамика численности и выловов.

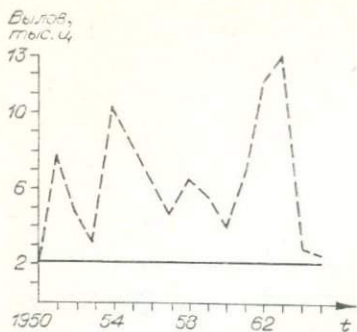


Рис. 20. Биомасса уловов с 1950 по 1965 г.

риод изображена на рис. 20 (штриховая линия — данные официальной статистики).

Для модели (7) были получены следующие значения параметров: $\alpha = 3,68 \cdot 10^4$; $\beta = -0,313 \cdot 10^7$; $\lambda = 0,0043$; $\gamma = -56,7$; $c = 0,22$; $p = g = 0,75$; α и β в этой и последующей модели рассчитаны с учетом данных по северобайкальской популяции омуля, поскольку для посольской расы таковые отсутствуют. Исследование этих моделей показало целесообразность

полностью искусственного воспроизводства. Оптимальное управление в модели, отвечающей задаче 2, определялось при дополнительном условии неубывания численности популяции. Динамика численности и уловов приведена на рис. 19, II.

Для модели (15) при числовых данных $\alpha = 3,68 \cdot 10^4$; $\beta = -0,313 \cdot 10^7$; $\lambda = 0,137 \cdot 10^{-1}$; $\gamma = 63$; $c = 0,355$; $a = 0,2$; $p = g = 1,12$ получены результаты, близкие к расчетам по первой модели (см. рис. 19, III). Приводимые нами результаты требуют дальнейшей проверки как на более сложных моделях, так и на уже использованных, но с уточненными численными значениями параметров.

§ 2. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СУКЦЕССИИ ПИХТОВОЙ ТАЙГИ

Основная задача исследований и моделирования сукцессий лесных биогеоценозов — научиться управлять и оптимально использовать ресурсы леса. С этой задачей тесно связана разработка методов прогноза динамики развития лесов после разнообразных лесохозяйственных мероприятий. Имеются удачные попытки использования методов теории случайных процессов для описания динамики древостоя (Peden, Williams, Frayer, 1973; Leak, 1970; Rudra, 1968), попытки применения методов статистики для анализа структуры древостоя (Bailey, 1973), а также многочисленные подходы к моделированию динамики древостоя и роста отдельных деревьев с использованием дифференциально-разностных уравнений (Хильми, 1966; Moser, 1972; Moser, Hall, 1969; Джансеитов, Кузьмичев, Кибардин, 1976; Вавилин, Георгиевский, 1976). Большинство из этих математических моделей отражает ту или иную сторону функционирования биогеоценозов.

В моделировании уже сложились некоторые общие принципы построения моделей природных систем, особенно динамики популяций. Необходимо только обобщить и применить их при моделировании конкретных объектов. В данном случае объектом исследования является динамика пихтовых лесов на юге Приангарья. Сукцессии этих лесов отличаются сложной временной структурой — разнообразием промежуточных серийных растительных сообществ (Баранов, Смирнов, 1931) и возрастной динамикой древостоя в климаксовых сообществах (Фалалеев, 1964). Конкретно речь идет о моделировании сукцессий пихтарников через осиновый лес на вырубках. На рис. 21 схематически в виде графов представлены структура моделируемой системы, внешние и внутренние потоки. Вектор состояния рассматриваемой системы задается в виде $\vec{R} = (\vec{P}^п, \vec{P}^ос)$, где $\vec{P} = (N_1, \dots, N_n)$; индексы «п» и «ос» обозначают соответственно пихту и осину; N_i — количество деревьев, относящихся к i -му классу диаметра у основания ствола (шаг разбиения 2 см, $n = 20$), значения $i = 1, 2$ соответствуют подросту, значения $i > 2$ (диаметр более 4 см) — древостоя.

Динамика возрастной структуры описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_0 - \alpha_1 N_1 - \alpha_{01} N_1; \\ \frac{dN_i}{dt} = \alpha_{i-1} N_{i-1} - (\alpha_i + \alpha_{0i}) N_i, i = \overline{2, n}, \end{cases} \quad (1)$$

повторенной с индексами «п» и «ос» соответственно для пихты и осины, где N_0 — количество всходов в единицу времени; α_i — относительная скорость перехода деревьев из i -го класса в $(i + 1)$ -й класс; α_{0i} — относительная скорость отмирания деревьев i -го класса. Величины N_0 , α_i , α_{0i} в общем случае являются функциями вектора состояния системы от времени и внешних воздействий (потоков). Предполагается, что эти функции имеют вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(x_n).$$

Это предположение равносильно гипотезе, что относительная чувствительность функции $f(\cdot)$ к изменению фактора x_i , $s_i \frac{\partial f}{\partial x_i} / f$ есть функция только этого фактора.

В данном случае интересующие нас зависимости получаются из следующих: $N_0 = \bar{N}_0 \varphi_1(N_d)$ — количество всходов есть функция плотности древостоя $N_d = \left(\sum_{i \geq 3} N_i \right)^п + \left(\sum_{i \geq 3} N_i \right)^ос$,

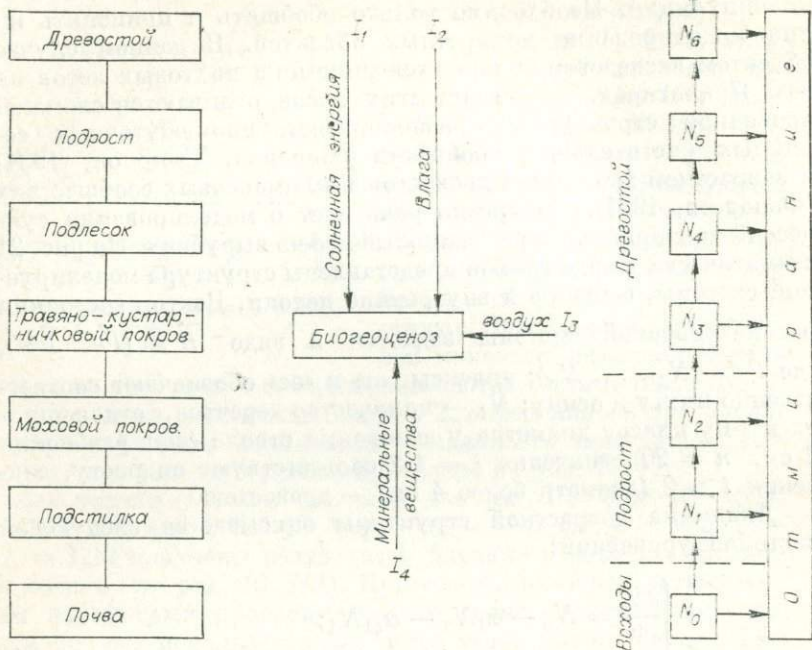


Рис. 21. Схема структуры потока и динамика биogeоценоза.
а-в — соответственно графы структуры потоков и динамики.

$V = \bar{V} \cdot \varphi_2(\tau)$ — скорость роста по диаметру есть функция возраста τ дерева данного класса диаметра, т. е. времени; $\alpha_0^{п} = \bar{\alpha}_0^{п} \varphi_3(\tau) \varphi_4(N_d)$ — коэффициент отмирания пихты есть функция возраста деревьев данного класса и густоты древостоя; $\alpha_0^{ос} = \bar{\alpha}_0^{ос} \varphi_7(\tau)$ — коэффициент отмирания осины есть функция возраста деревьев данного класса.

Функции $\varphi_i(\cdot)$, фигурирующие в указанных выше зависимостях, находятся путем определения соответствующих им чувствительностей $s_k(\cdot)$ по экспериментальным данным. Принимается следующий общий вид зависимости $s_k(\cdot)$:

$$s_k(x_k) = \sum_j a_{kj} x_k^{b_{kj}}, \quad (2)$$

где a_{kj} , b_{kj} — параметры, подлежащие определению. Соответствующие функции $\varphi_k(\cdot)$ находятся затем интегрированием линейного уравнения $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} / \varphi_k = s_k$:

$$\varphi_k = \bar{\varphi}_k \exp\left(\int s_k(x_k) dx_k\right). \quad (3)$$

Заметим, что класс зависимостей (3) достаточно богат. К нему относятся многие распространенные в естествознании экспоненты, нормальное распределение, распределения Пуассона и Вейбула, световые кривые и т. д. К. Элиас и Д. Каустон (1976), используя модели такого типа для описания роста растений, показали, что данные биологических экспериментов хорошо аппроксимируются полиномами малой степени. Для определения параметров уравнение (3) логарифмируется и становится линейным относительно a_{kj} . Применяя метод наименьших квадратов, находим нужные коэффициенты. При выполнении этой работы могут уточняться и значения коэффициентов $e_{k,j}$. Их подбирают так, чтобы получить наибольший коэффициент множественной корреляции и минимальную остаточную дисперсию (квадрат отклонения теоретических значений от экспериментальных).

При определении коэффициентов уравнений для рассматриваемой модели сукцессии пихтовых лесов использовались данные, полученные на Приангарском стационаре института географии Сибири и Дальнего Востока.

Зависимость, описывающая влияние древостоя на обилие всходов, рассматривалась выше и в данном случае имеет следующий конкретный вид: $N_0 = \bar{N}_0 \cdot N_d^b \cdot e^{-c \cdot N_d}$. При конкретных значениях коэффициентов для пихты

$$N_0^п = 0,4032 \cdot 10^{-2} \cdot N_d^{1,97} \cdot e^{-0,4138 \cdot 10^{-2} N_d}, r = 0,51,$$

где r — коэффициент соответствия экспериментальным данным. Связь всходы — древостой является в лесном биогеоценозе основной, и в дальнейшем необходимы специальные исследования, чтобы как можно точнее ее описать. На количество всходов осины древостой не влияет, поэтому соответствующая зависимость имеет вид

$$N^{ос} = 5749 \cdot e^{-0,645 \cdot 10^{-3} N_d}, r = 0,58.$$

Возраст деревьев влияет на их отмирание двояким образом. С увеличением возраста растет конкурентоспособность дерева, что приводит к уменьшению коэффициента отмирания; с возрастом дерево стареет и коэффициент отмирания соответственно растет. Получаются следующие зависимости для коэффициентов отмирания (для деревьев толще 20 см):

$$\alpha_0^п = 0,595 \cdot e^{0,0167\tau/\tau};$$

$$\alpha_0^{ос} = 0,92 \cdot e^{0,0125\tau/\tau}.$$

Для деревьев с диаметром меньше 20 см учитывается влияние густоты древостоя на отмирание. На рис. 22 приведен график зависимости логарифма отмирания подроста (в ближайшее время) от логарифма густоты древостоя. Видим, что эти величины связаны почти линейно ($r = 0,72$). Поэтому для коэффициента отмирания деревьев пихты до 20 см толщины предлагается зависимость $\alpha \cdot 10^0 = 0,129 \cdot 10^{-11} N_d^{2,3} / \tau$. Зависимости для скорости роста деревьев имеют следующий вид:

$$V_{oc} = 0,622 \cdot 10^{-2} \cdot \tau^{1,75} \cdot e^{-0,0583\tau}, \quad r = 0,90;$$

$$V_{п} = 0,778 \cdot 10^{-2} \cdot \tau^{1,36} \cdot e^{-0,0303\tau}, \quad r = 0,96.$$

На рис. 23 представлены результаты моделирования на ЭВМ описанной системы. Динамика модели в целом соответствует тенденциям, свойственным для биогеоэкологических сукцессий пихтовой тайги. На первом этапе сукцессии идет массовое возобновление осины. Но при найденных параметрах она не становится доминирующей породой в древостое по численности. Сразу же после возобновления осины под пологом древостоя постепенно, сначала медленно, а потом все быстрее с максимумом через 20 лет после рубки начинает возобновляться пихта. Максимальная густота древостоя достигается в 50 лет, но это в основном средневозрастные деревья, которые быстро отмирают в результате самоизреживания. Таким образом, сукцессии протекают на припалкорных участках в условиях с достаточной увлажненностью, когда осина не становится доминирующей породой, а для роста и развития пихты складываются благоприятные условия.

Для эндогенной стадии сукцессии, когда пихта окончательно завоевывает позиции в древостое (через 80—90 лет после начала сукцессии) характерно наличие периодических колебаний с периодом около 80—90 лет. Такой период колебания характерен для темнохвойной тайги (Фалалеев, 1964; Комиц, 1970). Со временем амплитуда колебаний уменьшается и структура биогеоценоза стабилизируется, возникает всевозрастной древостой с постоянным возобновлением пихты.

Интересно отметить, что период колебания густоты древостоя слабо зависит от параметров системы, конечно, в рамках допустимых значений. Но ско-

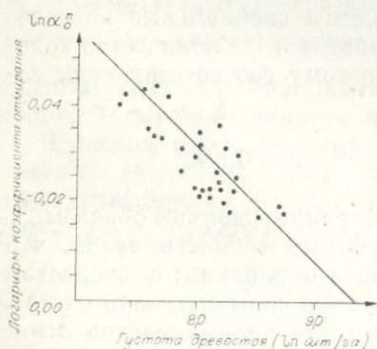


Рис. 22. Зависимость коэффициента отмирания подроста от густоты древостоя (логарифмическая шкала).

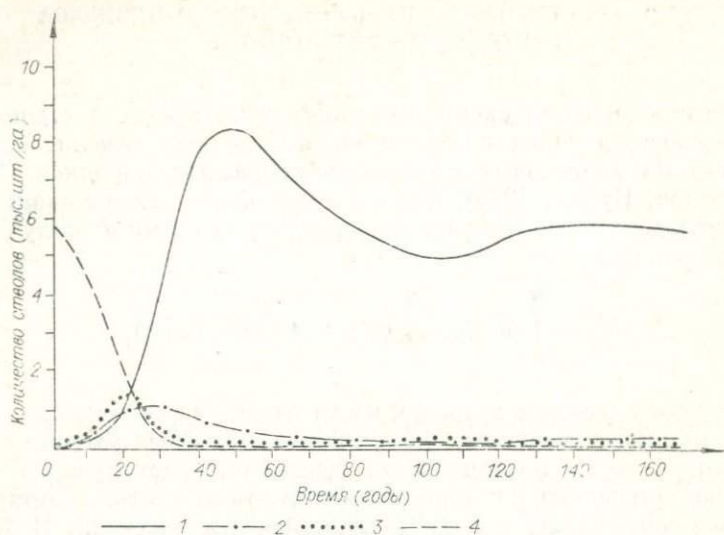


Рис. 23. Динамика восстановления древостоя пихты.
 1, 2 — количество деревьев в древостое пихты и осины соответственно;
 3, 4 — количество всходов пихты и осины.

рость затухания колебаний сильно зависит от коэффициентов отмирания деревьев, а следовательно, и от степени конкуренции между отдельными деревьями (густоты древостоя). Сообщества, где велико влияние древостоя на процессы возобновления, роста и отмирания, стабилизируются быстрее, чем сообщества, где это влияние ослаблено.

Именно поэтому характер сукцессий для лиственных и светлохвойных пород отличается от сукцессий темнохвойных биогеоценозов. В последнем случае возникают так называемые эндогенные ритмы, связанные с динамикой возрастной структуры древостоя. Модель дает результаты, соответствующие реальной действительности по крайней мере в качественном отношении. Однако количество учтенных параметров и внутренних связей системы не позволяют пока делать практических выводов.

Следующим этапом развития данной модели должно быть построение модели роста для отдельного дерева в зависимости от условий окружающей среды и модели динамики древостоя, состоящего из нескольких пород, что позволит отразить влияние экологических факторов на видовую структуру древостоя. Кроме того, немаловажно учесть роль напочвенного покрова и почвы в динамике биогеоценоза после различных катастрофических смен (пожаров, вырубок). Решение такой задачи вполне возможно, а следовательно, возможно решение задачи прогнозирования и управления лесными ресурсами.

§ 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДУКЦИОННОГО ПРОЦЕССА СТЕПНОГО ФИТОЦЕНОЗА

Рассматривается схема продукционного процесса степного фитоценоза, которая является видоизменением модели, основанной на балансовых соотношениях разных порядков (Башалханов, Буфал, 1975). Основные уравнения схемы запишем в следующем виде. Прирост фитомассы y за время dt получаем из выражения

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \int_0^H \bar{\Phi} S dz - \int_0^H R dz + A(\omega(t), kz(t)),$$

где первое слагаемое в правой части означает увеличение всего органического вещества, полученного за счет фотосинтеза; второе — часть органического вещества, расходуемого на функционирование компонентов фитоценоза; третье — приход органического вещества из подземной части растений. В данном случае были взяты основные виды растений, слагающие степной фитоценоз — ковыль Крылова, типчак, тонконог, овсец и мзеевка; временной шаг dt равен 5 сут.

Моделирование продукционного процесса изучаемого биогеоценоза основывалось на режимных наблюдениях, проводимых в степном стационаре Института географии Сибири и Дальнего Востока, расположенном в Минусинской котловине (Природные режимы степей Минусинской котловины, 1976). При установлении временного шага принималось во внимание состояние экспериментальной базы и точность исходных данных. Каждое значение параметра модели следует рассматривать как осредненное по всем реализациям за выбранный интервал времени. В дополнение к упомянутой модели нами был введен блок перераспределения в растительном покрове продуктов фотосинтеза (рис. 24), который учитывает на каждом шаге, сколько органического вещества поступает в структурные части растений (корни, листья и репродуктивные органы) и сколько ими тратится на дыхание. Это перераспределение в течение вегетационного сезона может быть следующим.

В начале сезона часть запасенных веществ расходуется на функционирование корневой системы и поступает в листья. Постепенно приход продуктов фотосинтеза покрывает расходы на функционирование растений, а часть их поступает на пополнение запасов, на увеличение массы корней и листьев. При неблагоприятных условиях, когда интенсивность фотосинтеза резко снижена, а расходы на поддержание функционирования возросшей массы увеличиваются и не хватает органического вещества, получаемого при фотосинтезе, тогда снова расходуются запасы. При критическом истощении последних про-

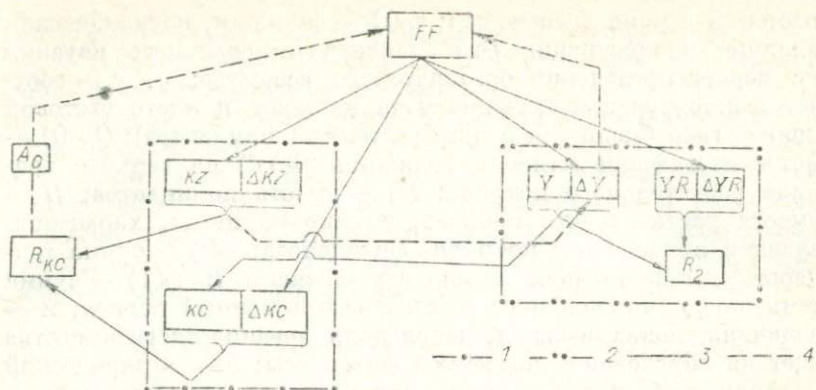


Рис. 24. Схема распределения продуктов фотосинтеза в растительном покрове.

1, 2 — надземная и подземная части растений соответственно; 3, 4 — поступление соединений углерода в моменты времени $(t-1)$ и t ; FF — количество органического вещества, полученного в результате газообмена в растительном покрове; KZ — запасающие органы растений; KC — корневая система; Y, YR — фотосинтезирующие и репродуктивные органы растений; R_2, R_{KC} — количество органического вещества, расходуемого на функционирование надземной и подземной части растений; Δ — приращение соответствующих частей растений с момента $t-1$ до t .

исходит переключение потока продуктов фотосинтеза на пополнение запасов, может быть даже в ущерб функционированию надземной части.

Для проверки схемы мы использовали лишь ту часть органического вещества, которая шла на накопление надземной зеленой фитомассы. Это позволило сравнить результаты расчетов с наиболее точными фактическими данными. Известно, что надземная масса доминантов $y_1(t)$ составляет 60—80% от общей зеленой массы степного фитоценоза.

В рассматриваемой имитационной схеме на каждом временном шаге зависимость интенсивности газообмена, равного разности интенсивности фотосинтеза и дыхания листьев в профиле растительного покрова от влияющих на него факторов, имеет вид

$$\Phi = \frac{\beta Q}{1 + \beta Q / \alpha x}; Q = Q_H(t) \exp\left(-\gamma \int_z^H s dz\right); H = \max_i (H_i(t));$$

$$\alpha = \alpha_0(\Theta) \alpha_1(\bar{\varphi}(t)); \gamma = 0,4 \left(1 + \frac{\omega(t)}{\omega(T)}\right);$$

$$S = \sum_{i=1}^5 s_i(z, t); \bar{\Phi} = \kappa \Phi; \kappa = (1 - \varepsilon);$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega(t), kz(t), \varphi_j(t)),$$

где $kz(t)$ — запасы продуктов фотосинтеза в подземной части

растений в момент времени t ; $\varphi_j(t)$ — функция, показывающая влияние концентрации j -го элемента минерального питания на перераспределение органического вещества; β , ν — соответственно среднее значение угла наклона и плато световой кривой газообмена для целого растения (доминантов); $Q_H(t)$ — фотосинтетически-активная радиация (ФАР) на верхней границе растительного покрова; H_i — высота доминантов; H — высота растительного покрова; γ — коэффициент, характеризующий проективное покрытие фитоценоза; $\omega(t)$ — сумма температур, накопленная к моменту времени t ; $\omega(T)$ — сумма температур, накопленная за весь вегетационный период; κ — величина, показывающая, какая доля органического вещества идет на образование надземной фитомассы; b — эмпирический коэффициент; $s(z, t)$ — суммарная удельная листовая поверхность; x , $\alpha_0(\Theta)$, $\alpha_1(\overline{\varphi}(t))$ — коэффициенты, описывающие соответственно влияние концентрации CO_2 , температуры Θ и увлажненности почвы на газообмен в растительном покрове; Φ — функция интенсивности газообмена; $c(z, t)$ — концентрация углекислоты в межлистном пространстве фитоценоза, которая рассчитывается по уравнению, предложенному О. Д. Сиротенко и А. П. Бойко (1975):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k} \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \Phi s + \varepsilon_1(\Theta) s,$$

где $\varepsilon_1(\Theta)$ — коэффициент дыхания для листьев, зависящий от температуры воздуха в межлистном пространстве. Вид зависимости $\varepsilon_1(\Theta)$ и $\alpha_0(\Theta)$ от температуры заимствован из работы М. И. Будыко (1971). Выражение для коэффициента турбулентного переноса CO_2 , введенного З. Учиджимой (1972), имеет вид

$$\bar{k}(z) = \bar{k}_H \exp(-a_3(1 - z/H)),$$

где \bar{k}_H — коэффициент турбулентного переноса на высоте $z = H$ ($\bar{k}_H = 1500 \text{ см}^2/\text{с}$); a_3 — коэффициент, характеризующий уменьшение $\bar{k}(z)$ внутри растительного покрова ($a_3 \approx 3,0$). Коэффициент \bar{k}_H принимается постоянным в силу следующих причин. На распределение интенсивности воздухообмена в растительном покрове фитоценоза существенно влияет его вертикальная структура. Поскольку изучаемый фитоценоз находится в заповедном режиме, оставшиеся мертвые растительные остатки (ветошь, подстилка) сглаживают влияние перепадов скоростей ветра на воздухообмен внутри травостоя.

Распределение температуры воздуха внутри травостоя представлено следующей эмпирической зависимостью:

$$\Theta(z) = \Theta_H(t) + \Theta_1(1 - z/H),$$

где $\Theta_H(t)$ — задаваемая температура воздуха на высоте $z = H$; Θ_1 — температурный градиент, изменение которого пропорционально изменению потока тепла из почвы.

Удельная листовая поверхность в вертикальном профиле травостоя непостоянна в течение вегетационного периода и в любой момент времени зависит от пространственной ориентации листьев отдельных видов. Следовательно, в фитоценозе фотосинтезирующие органы разного возраста распределены в каждом ярусе растительного покрова. Распределение суммарной удельной листовой поверхности имеет вид

$$s(z, t) = s_1(t) \left(1 - \frac{z}{H}\right); s_1(t) = \max_z(s(z, t)); \frac{ds_1}{dt} = \\ = \frac{a_1}{H} \frac{dy(t-1)}{dt} \frac{0,5}{y(t-1)},$$

где a_1 — эмпирический коэффициент.

Прирост высоты травостоя вычисляется по формуле

$$\frac{dH}{dt} = \frac{a_2}{s_1(t)} \frac{dy(t-1)}{dt} \frac{0,5}{y(t-1)},$$

где a_2 — некоторая константа.

Количество расходуемого на функционирование надземной части растений органического вещества R , полученного при фотосинтезе, определяют из выражения

$$R = 0,5q(\omega(t))\varepsilon(\Theta)s(z, t),$$

где $q(\omega(t))$ — функция, характеризующая влияние возраста на метаболизм растений. Граничные условия рассчитываются следующим образом:

$$\left(\bar{k} \frac{\partial c}{\partial z}\right)_{z=0} = -A_0(t); \left(\bar{k} \frac{\partial c}{\partial z}\right)_{z=H} = D_H(\bar{c}-c); s(0, t) = s_1(t); s(H, t) = 0,$$

где $A_0(t)$ — поток CO_2 из почвы; \bar{c} — концентрация CO_2 в атмосфере над травостоем; D_H — интегральный коэффициент турбулентной диффузии в слое воздуха между верхним уровнем растительного покрова и высотой $H_1 \gg H$, где концентрация CO_2 уже мало зависит от свойств травостоя (здесь $D_H = 0,6 \text{ см/с}$). Начальные условия таковы:

$$y(-1) = y(0) = y_0; c(0, z) = \bar{c}; H(0) = H_0; s_1(0) = s_{00}.$$

Далее, для коэффициентов x и α_1 , входящих в основные уравнения, приведем следующие зависимости:

$$x = abs((c - x_0)/x_0); x_0 = \bar{c} + (2 \times \xi \times A_0(t))/\bar{k}(0);$$

$$\alpha_1 = \exp(-\bar{\varphi}(t)); \bar{\varphi}(t) = \text{abs}((\varphi(t) - 1) - \varphi^{\text{оп}}) / (\varphi^{\text{оп}} - \varphi^{\text{п}})),$$

где ξ — множитель размерности; $\varphi^{\text{оп}}$ — оптимальное увлажнение почвы; $\varphi^{\text{п}}$ — влажность завядания для слоя почвы 0—20 см; $\varphi(t)$ — запасы влаги в слое почвы 0—20 см. Необходимо отметить, что влага в предлагаемой схеме выступает как экологическая характеристика в силу незамкнутости водного баланса степного фитоценоза, т. е. влияние увлажненности почвы на фотосинтез растений выражено в качественной форме.

Для реализации предложенной имитационной схемы на ЭВМ исходным параметрам были заданы следующие количественные значения, определенные из экспериментальных данных: $\beta = 0,000029$ г/кал; $\nu = 10,0$ мг $\text{CO}_2/\text{дм}^2 \cdot \text{ч}$; $b = 0,7$; $H_0 = 3$ см; $s_{00} = 0,001$ л/см; $\bar{c} = 0,031$ об.%; $y_0 = 5,0$ г/м²; $\varphi^{\text{оп}} = 55$ мм в слое почвы (0—20); $\varphi^{\text{п}} = 25$ мм в слое почвы (0—20); $t = 1,42$ (с IV по X). Значения $Q_H(t)$, $\varphi(t)$, $\theta_H(t)$ приведены на рис. 26. Относительно величин $A_0(t)$ предполагалось,

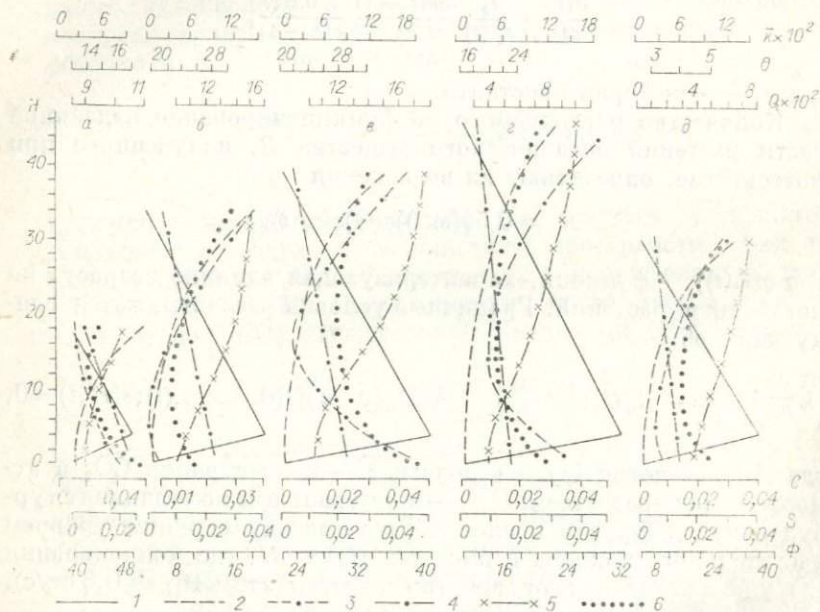


Рис. 25. Распределение в профиле травостоя значений параметров, определяющих накопление надземной зеленой фитомассы.

1 — удельная листовая поверхность (см^{-1}); 2 — коэффициент турбулентности \bar{k} ($\text{см}^2/\text{с}$); 3 — интенсивность газообмена на единицу поверхности Φ ($\text{г}/\text{м}^2$) за пентаду; 4 — температура воздуха в профиле травостоя θ ($^{\circ}\text{C}$); 5 — сумма ФАР за пентаду Q ($\text{кал}/\text{см}^2$); 6 — высота травостоя H (см); номера пентад, выбранные для анализа расчетов: а — 10, б — 18, в — 22, г — 27, д — 36.

что поток CO_2 из почвы коррелирует при некотором запаздывании с режимом запасов влаги и средняя его величина составляет 120 мг $\text{CO}_2/\text{м}^2\text{ч}$.

Интенсивность газообмена в травостое существенно изменяется в течение всего вегетационного периода в зависимости от влияющих на него факторов. В первой половине вегетационного периода, когда сомкнутость травостоя низка и вертикальная ярусность еще не сформирована, особенно велик поток углекислоты из почвы. Наблюдается максимальная интенсивность газообмена в нижних слоях травостоя. В этот период основная часть продуктов фотосинтеза идет на увеличение надземной зеленой массы, т. е. фотосинтезирующей поверхности. При длительном дефиците влаги интенсивность газообмена в целом резко снижается, за исключением верхних слоев растительного покрова, так как CO_2 в основном поступает из свободной атмосферы. В это время прироста надземной фитомассы не происходит, поскольку почти все органическое вещество, образовавшееся в результате фотосинтеза, расходуется на дыхание растений. С наступлением благоприятного периода (после июльских осадков) интенсивность газообмена значительно увеличивается и имеет наибольшие значения в верхних и нижних слоях растительного покрова, что обусловлено в первом случае достаточным количеством фотосинтетически активной радиации, а во втором — повышенной концентрацией углекислоты, поступающей из почвы. Продукты фотосинтеза поступают теперь главным образом в корни растений на построение репродуктивных органов и расходуются ими на дыхание при развитии фитоценоза.

В период максимального развития травостоя газообмен несколько снижается, что связано с возрастными перестройками в листьях растений и недостатком ФАР в нижних слоях из-за увеличения сомкнутости травостоя. Полученное при фотосинтезе органическое вещество идет в запасающие органы растений, на построение органов возобновления и расходуется на обеспечение жизнедеятельности растений. В период интенсивного отмирания большинства видов газообмен невелик из-за низкой температуры воздуха и возрастных изменений в растениях и уже не обеспечивает расходы вещества на поддержание метаболизма накопившейся массы растений.

Кроме значения ФАР, запасов влаги в слое почвы 0—20 см и температуры воздуха над растительным покровом даются расчетные и фактические величины надземной зеленой фитомассы степного фитоценоза (см. рис. 26). Если учесть качество информации, представленной на схеме, то совпадение расчетных и натуральных величин, на наш взгляд, в первом приближении приемлемое, что говорит о правильности наших предположений о течении процессов, определяющих накопление надземной зеленой массы степного фитоценоза.

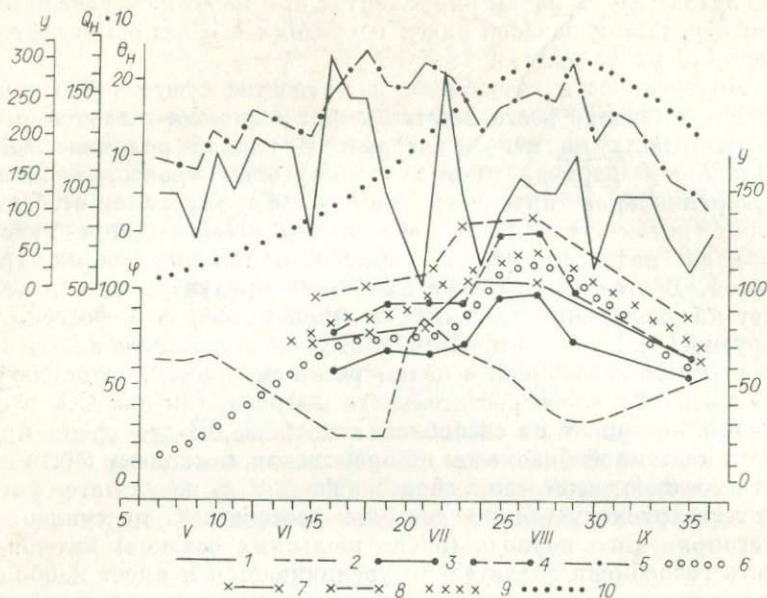


Рис. 26. Сезонный ход рассчитанной и измеренной надземной зеленой фитомассы доминантов и определяющих ее основных гидрометеорологических факторов за вегетационный период 1971—1972 гг.

1 — сумма ФАР за пентаду (кал/см²); 2 — запасы влаги в слое 0—20 см почвы для 1971—1972 гг. (мм); 3, 7 — надземная зеленая фитомасса (НЗФ) доминантов соответственно для 1971—1972 гг. 4, 8 — общая зеленая фитомасса; 6—9 — рассчитанная НЗФ при фактических условиях 1971 и 1972 гг.; 10 — НЗФ при оптимальном увлажнении.

Анализ временного хода используемых показателей подтверждает известные закономерности динамики тесноты связи накопления зеленой фитомассы с показателями тепла и влаги, увеличение их корреляции в начале и в конце вегетационного периода и существенное ослабление в середине.

Изложенные результаты позволяют выявить ряд недостатков математической схемы продукционного процесса. К ним можно отнести схематическое описание важнейших процессов энерго- и массообмена, слабый учет влияния консументов и уровня минерального питания. Имеет место существенное запаздывание отмирания доминантов степного фитоценоза. Вместе с тем модель дает возможность проводить учет и количественную оценку влияния ведущих факторов, определяющих процесс накопления зеленой массы, а также проигрывать различные ситуации, возникающие при функционировании степного фитоценоза. Модель показала, что требуется более детальное изучение процессов энерго-, массообмена и биологического круговорота и наиболее полное рассмотрение направления и характера интеграции природных режимов, протекающих в геосистеме.

§ 4. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ БЕЛКИ

В данном параграфе с помощью методов математического моделирования анализируются и систематизируются результаты многолетних наблюдений над популяцией белки *Sciurus vulgaris*, проводимых в течение 15 лет коллективом Восточно-Сибирского отделения ВНИИОЗ им. Б. М. Житкова под руководством Б. К. Павлова и М. И. Смышляева (автор принимал участие в исследованиях в течение нескольких полевых сезонов). С 1931 по 1940 г. материал по экологии белки регулярно собирался на Большеглубоковском биопункте (в отрогах Восточного Саяна), с 1936 по 1939 г. там проводилось мечение белок. В годы войны сбор материала был прерван. Есть некоторые данные за послевоенное время до 1960 г. Так как все эти исследования велись в угодьях одного и того же типа, отстоящих друг от друга всего на несколько километров, можно предполагать, что их объектом была одна и та же популяция.

Изучаемая популяция белки обитает в горно-таежных темнохвойных лесах северо-восточных отрогов Восточного Саяна. На территории стационара, занимающего площадь около 127 км², преобладают средневозрастные кедровники-зеленомошники. Основным кормом белки здесь являются семена сибирского кедра (*Pinus sibirica*), колебания урожайности которого на территории стационара иллюстрирует рис. 27.

Картина изменений численности саянской популяции за период с 1931 по 1972 г. представлена на рис. 28.

При ежегодном описании популяции учитывались следующие популяционные параметры: общая численность, смертность и рождаемость в разных возрастных группах, соотношение полов. Удалось выявить с высокой степенью достоверности следующие возрастные группы: сеголетки, старше одного года, старше двух лет. Выделение группы 3,5 лет и старше не всегда статистически достоверно из-за ее малочисленности. Данные об изменении средней плодовитости отсутствуют. В нашей популяции достоверных различий в плодовитости по возрастным группам не обнаружено.

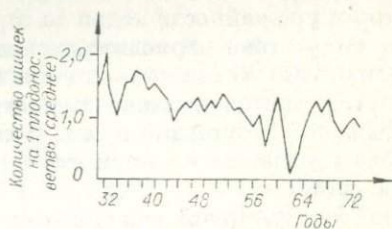


Рис. 27. Колебания основного корма белки данной популяции — урожайности семян кедра сибирского.

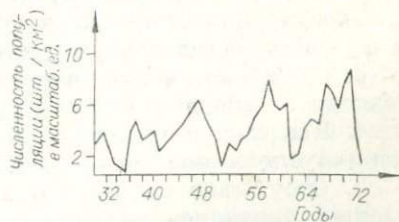


Рис. 28. Динамика численности популяции белки.

Вместе с тем можно констатировать дифференцированную смертность в разных возрастных группах.

Динамика пространственной структуры данной популяции изучена в основном качественно и поэтому не может быть использована при моделировании. Не представляется возможным учитывать также и динамику генотипов ввиду полного отсутствия сведений о генетическом контроле наблюдаемых признаков (окраска хвоста).

Результаты моделирования позволили несколько прояснить вопрос о механизме возникновения циклических колебаний, реальность которых была показана в работе Е. В. Любецкой (1976). Построение работы следует обычной логике системного исследования конкретного природного объекта (Моисеев, Свиричев, 1975).

Колебания численности могут быть следствием двух причин: экзогенных, т. е. влияний внешней среды, и эндогенных, т. е. действия внутривидовых регуляторных механизмов. Обзор литературы показывает, что теоретическое объяснение колебаний численности наталкивается на значительные трудности в случае стационарной среды. Теории эндогенно возникающих колебаний в настоящее время развиты недостаточно. По-видимому, они не могут объяснить исчерпывающим образом представленные на рис. 28 колебания.

На основании результатов Е. В. Любецкой (1976) можно сделать вывод о том, что, по-видимому, нет причинной связи между колебаниями численности популяции белки и изменениями урожайности кедра на территории Саянского стационара.

Отсутствие периодических колебаний в урожайности кедра и наличие таковых в динамике численности популяции является еще одним доказательством в пользу нашего предположения об отсутствии прямого типа регулирования численности белки уровнем ее кормового ресурса в рассматриваемой нами системе.

Сформулируем основные выводы.

1. Динамика популяции непосредственно не регулируется динамикой кормового ресурса, климатическими, а также другими экзогенными факторами.

2. Относительный годовой прирост популяции зависит от плотности, причем при значениях плотности не очень больших и не очень малых, он увеличивается (рис. 29).

3. Смертность в различных возрастных группах по-разному зависит от общей плотности (установлено автором).

4. Как следует из натуральных наблюдений, наличие механизмов, обусловленных миграцией белки, сомнительно.

5. Отсутствие сведений о характере наследования наблюдаемых признаков исключает учет генетических механизмов. Весьма вероятным является моногенное наследование, однако, как известно, оно не приводит к колебаниям численности.

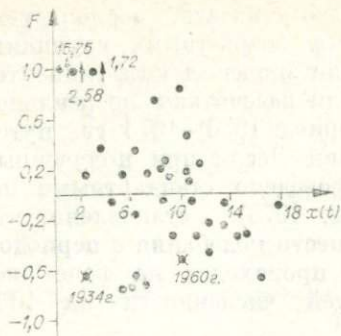


Рис. 29. Зависимость относительного годового прироста популяции от плотности популяции.

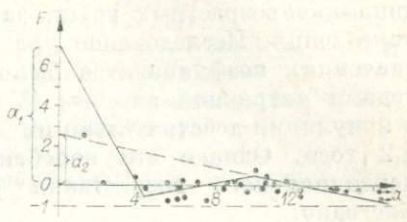


Рис. 30. Аппроксимация функции $F(x)$. (Реальные наблюдения на графике отмечены точками).

Таким образом, в качестве основных эндогенных факторов мы принимаем специфическую зависимость коэффициента относительного прироста от плотности популяции и неравномерность возрастной структуры популяции.

Алгоритм разбиения области изменения численности на участки монотонного изменения коэффициента относительного прироста обнаруживает регуляцию типа Олли. При таком типе регуляции скорость роста сначала падает с увеличением плотности популяции, потом возрастает, после чего опять падает.

В динамике популяций применяются модели как с непрерывным, так и с дискретным временем (Моран, 1973). Однако колебания численности в автономных моделях с непрерывным временем без запаздывания невозможны (Моран, 1973), поэтому мы избрали модель с дискретным временем. Аналитически она задается уравнением $X(T + 1) = X(T)\{1 + F[X(T)]\}$, где $F(X)$ — кусочно-линейная функция, причем $F(\infty) = -1$. Предварительно нами установлено, что наиболее близок к реальности график функции $F(X)$ (рис. 30), где все стационарные точки (т. е. корни уравнения $F(X) = 0$) неустойчивы. Качественный анализ модели позволяет заключить, что в рассматриваемой системе (динамика численности популяции) существует колебательный режим с периодом около семи лет. Экологические условия, обеспечивающие этот режим, состоят в достаточно большой потенциальной плодовитости популяции ($F(0) > 5,5$) и резком возрастании роли отбора при больших плотностях (последнее требование сформулировано в виде некоторого неравенства).

В исследуемой популяции белки реально существует еще один колебательный режим с периодом порядка четырех лет. Эти колебания вызываются неравномерностью возрастной струк-

туры популяции. Для того, чтобы это показать, воспользуемся матричной моделью (с четырьмя возрастными группами) Лесли. Фигурирующие в этой модели значения коэффициентов рождаемости f_i и выживания d_i были рассчитаны по реальной динамике возрастных групп за период 1960—1973 гг. путем усреднения. Исследование уравнений Лесли при полученных значениях коэффициентов было проведено стандартными методами матричной алгебры (Моран, 1973). Установлено, что в популяции действительно имеют место колебания с периодом 4,2 года. Однако эти колебания происходят на фоне экспоненциального возрастания общей численности на 16% ежегодно.

Согласно Лесли (1948), стабилизация общей численности в модели с возрастной структурой происходит при условии, что коэффициенты рождаемости и выживаемости зависят от плотности обратно пропорционально некоторой линейной функции. Однако в нашем случае смертность в разных возрастных группах по-разному зависит от общей численности, в чем мы убеждаемся путем построения соответствующих графиков. Математическое исследование возникающей здесь сложной нелинейной задачи, по-видимому, требует методов, выходящих за пределы возможностей аппарата современной математической биологии. Единственно возможным в этой ситуации является машинный счет вариантов. Вычисления проводились на основе предложенной нами модификации модели Лесли:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0(t+1) = f[X(t)][X_1(t) + X_2(t) + X_3(t)]; \\ X_1(t+1) = d_0[X(t)]X_0(t); \quad X_2(t+1) = d_1[X(t)]X_1(t); \\ X_3(t+1) = d_2[X(t)]X_2(t); \\ L(t) = X_0(t) + X_1(t) + X_2(t) + X_3(t), \end{array} \right.$$

где $f(X)$ и $d_i(X)$ ($i = 0, 1, 2$) — некоторые заданные функции общей численности X .

Функциональные зависимости, полученные путем линейного или квадратичного сглаживания экспериментальных точек, не привели к колебательным режимам ожидаемого периода порядка четырех лет. То же получилось и при выборе S -образной кривой $F(X)$. Поэтому мы разделили популяцию на «весеннюю» и «осеннюю», предположив, что размножается только весенняя, а отбор в основном действует на осеннюю популяцию. Коэффициенты рождаемости мы считали постоянными, а коэффициенты смертности ($C_i = 1 - d_i$) — кусочно-линейными функциями плотности. Кроме того, при моделировании учитывались спонтанные или периодические воздействия, увеличивающие общую смертность (например, налет кедровки или

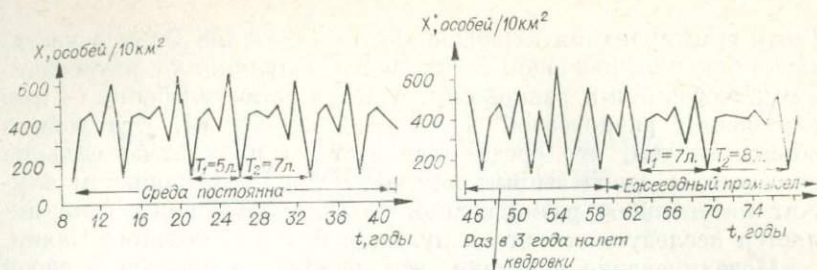


Рис. 31. Картина измеренной численности популяции (машинный эксперимент).

образование плотного наста), а также постоянный промысел. Все эти факторы действуют на осеннюю популяцию. Параметры модели варьировались в разумных пределах. Было проделано около 30 машинных экспериментов. Результат одного из них представлен на рис. 31. Временные интервалы между пиками чередуются через пять—семь лет. При введении малых периодических возмущений (с периодом в три года, с 1942 по 1959 г.) правильная картина колебаний резко нарушается, что указывает на их неустойчивость. Введение постоянного отстрела с 1960 г. упорядочивает картину: амплитуда уменьшается, но появляются периодические всплески и провалы с чередующимися интервалами между ними в семь-восемь лет. Картина получилась достаточно интересной. Она указывает на появление новых типов колебаний в модифицированной модели Лесли. Форма колебаний похожа на реальную.

В построенных моделях установлены периоды колебаний от двух до семи лет. Форма колебаний достаточно сложна и, возможно, формируется как нелинейная суперпозиция нескольких колебаний с различными периодами. Периодические возмущения среды, которыми представлены в модели налеты кедровки, иногда приводили к появлению 6-летнего цикла (период возмущения три года), а иногда полностью разрушали существующую в постоянной среде периодическую структуру. Введение промысла, как правило, упрощало картину колебаний.

В целом моделирование показало достаточную сложность динамики численности популяции даже в стационарной среде. Выделяются циклы (2-, 4-, 7-летние) за счет регуляции по типу Олли и неравновесности возрастной структуры (в последнем случае наиболее часто встречается период порядка четырех лет). Реально существуют циклы с периодом в 4—5 и 10—11 лет. Если первые из них вполне можно объяснить неравновесностью возрастной структуры, то вторые представляют собой, по видимому, результат известного в нелинейной механике эф-

фекта суммирования периодов. Колебания типа Олли с достаточно большим периодом возникают в популяциях с неустойчивыми состояниями равновесия, а возрастные колебания — при нарушении равновесной возрастной структуры. Это можно объяснить тем, что среда оказывает на популяцию сильное давление, а единственным компенсирующим механизмом служит интенсивное размножение. Популяцией такого типа является исследуемая нами популяция белки Восточного Саяна.

Моделирование показало, что достаточно простой в своей основе и вполне возможный биологический механизм регуляции может привести к очень сложному закону изменения общей численности популяции.

В заключение автор приносит свою благодарность доктору физ.-мат. наук Ю. М. Свирежеву и профессору Московского университета Н. П. Наумову, научным руководителям данной работы, а также старшим научным сотрудникам ВСО ВНИИОЗ Б. К. Павлову и М. И. Смышляеву за консультации и предоставление многолетних отчетов.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ СТОКА РЕК И УРОВНЯ ОЗЕР

Кроме рассмотренных математических моделей природных систем большое значение имеют модели и методы математического моделирования отдельных характеристик их поведения. Такого рода моделирование оправдывается тем, что далеко не во всех случаях удается создать более или менее адекватную модель системы, с помощью которой можно было бы получить и характеристики ее поведения. Такие приемы моделирования широко распространены в климатологии, метеорологии, гидрологии. К сожалению, во многих случаях они не могут быть признаны удовлетворительными и необходимость их совершенствования не вызывает сомнения.

В данной главе рассматриваются новые предложения по моделированию колебаний уровня озер и годового стока рек, а также некоторые фрагменты теории и практики применения аппарата информационных функций для исследования связей в природных системах с целью использования их для моделирования и прогнозирования.

§ 1. ПРЕДПОСЫЛКИ ПОСТРОЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ УРОВНЯ ОЗЕР

Многолетние колебания уровня озер могут быть описаны с помощью стохастических, либо детерминированных моделей. Модели первого рода основаны на предположении о случайности и стационарности рядов элементов водного баланса озер. В моделях второго рода некоторую составляющую колебаний уровня представляют в виде функции прогнозируемых космических циклов.

Для иллюстрации первого способа моделирования сошлемся на работу Д. Я. Ратковича, И. С. Ждановой, В. Е. Привальского (1973), посвященную прогнозу до 2000 г. уровня Каспийского моря. При исследовании колебаний уровня Каспия (в естественных условиях и с учетом мероприятий по изменению

водного режима) авторами использован метод Монте-Карло: выработаны длительные ряды годового притока и испарения, затем по этим рядам из уравнения водного баланса вычислены ряды изменения уровня моря, Усреднение нескольких таких рядов явилось прогнозом, а по оценке стандартного отклонения сделано суждение о точности прогноза.

Применение метода Монте-Карло позволяет не выводить сложные аналитические выражения для величин, характеризующих случайный процесс и участвующих в прогнозе уровня (выборочное стандартное отклонение и т. п.), а оценивать их по моделируемым рядам. В этом преимущество метода, так как в настоящее время неизвестны формулы многих величин даже для сравнительно простых случайных процессов.

Пользуясь тем, что коэффициент корреляции между смежными членами рядов притока и испарения мал, авторы берут для прогноза просто математическое ожидание притока и испарения и решают уравнение водного баланса относительно уровня.

Можно указать на следующие слабые, с нашей точки зрения, стороны данного способа прогноза. Существуют предположения, которые строго не проверяются. Колебания уровня Каспия считаются стационарным процессом в интервале 100—200 лет, тогда как нестационарность уровенного ряда очевидна. Не проверяется достоверность гипотезы о том, что, грубо говоря, полученная модель не противоречит имеющимся данным. Точнее, авторы делают некоторые шаги в этом направлении, но их способы нестроги. Например, на одном из графиков процесса колебаний, полученном методом Монте-Карло, обнаружен пик, визуально похожий на резкое изменение уровня в 1930-е годы. Авторы акцентируют внимание на этом факте сходства, а отсюда делают вывод, что такие резкие колебания уровня можно объяснить случайными причинами, что, в свою очередь, подтверждает гипотезу о стационарности колебаний уровня Каспия. К такой проверке исходной гипотезы приходится прибегать потому, что строгих методов не существует. Видимо, поэтому практически не исследован вопрос о достоверности модели.

Для практических целей важно оценить вековые тенденции в ходе уровня Каспийского моря, которые ярко проявляются в силу естественных интегральных свойств крупнейшего замкнутого водоема. Между тем эта наиболее ценная информация в стохастической модели исключается: анализируются дифференцированные ряды элементов водного баланса. Стохастические модели гидрометеорологических процессов, и в частности колебаний уровня озер, нельзя считать прогностическими в полном смысле, так как эти модели не дают однозначного решения, важного для практики. Путь к прогнозированию мы видим в построении детерминированных моделей уровен-

ных рядов на основе познания природы их многоритмичной структуры. Целесообразность такого подхода к решению прогностических задач подчеркнута на IV Всесоюзном гидрологическом съезде.

В основу построения детерминированных моделей уровня озер нами положена гипотеза многоритмичной и в значительной степени космически обусловленной структуры явлений в ландшафтной оболочке, наиболее полно сформулированная А. В. Шнитниковым (1968). Взгляды на сущность задачи формируются также под влиянием трудов ряда отечественных и зарубежных исследователей (Афанасьев, 1967; Калинин, 1968; Дружинин, 1970; Максимов, 1970; Чижевский, 1973; Смирнов, 1974; Pettersson, 1930; Миланкович, 1939; Karlstrom, 1960; Shove, 1960; и др.).

В настоящем параграфе обобщаются некоторые результаты, полученные на пути обоснования данной гипотезы и построения опытных моделей многолетних колебаний элементов климата и уровня озер. При этом уровень озер рассматривается как интегральный показатель изменчивости климата бассейнов. Построена общая схема причин и механизмов многолетней изменчивости уровня озер (Понько, 1977). В этой схеме сделана попытка объединить источники, которые считаются ответственными за отклонения атмосферных осадков, температуры воздуха, стока рек от нормы, обусловленной внутренними свойствами Земли и стационарным притоком внешней космической энергии. Следует подчеркнуть, что нас интересуют здесь и далее не причины гидрометеорологических процессов вообще, а причины их межгодовой изменчивости.

Предполагается, что для каждого бассейна водоема существует некоторая модель годового хода гидрометеорологических характеристик, определяемая планетарными свойствами атмосферной циркуляции и географическими особенностями бассейна. Такую модель можно рассматривать в качестве своеобразной контурной карты, которая ежегодно по-новому окрашивается в зависимости от переменных факторов космического воздействия на сферы Земли. Нас интересует природа этой «окраски».

Взаимно-корреляционный анализ элементов (индексов) исследуемой схемы подтверждает правомерность построения следующей цепи причин и следствий: колебания уровня озера — межгодовые изменения осадков, стока и испарения в бассейне — динамика термобарических полей атмосферы и геомагнитного поля — солнечная активность и долгопериодные приливы в атмосфере и гидросфере — возмущения телами Солнечной системы межпланетного и галактического гравитационного и электромагнитного полей — положение Земли относительно тел Солнечной системы. Таким образом, причина многоритмичной структуры многолетних колебаний климата и уровня озер

Единичные индексы
положения планет

$\Delta \bar{p}_i (l_i, e_i, x_i, y_i, z_i)$
 $i = 1, \dots, 9$

$\Delta \bar{S}_p (\Delta \bar{p}_i, 1)$
 $\Delta \bar{p} (l, e),$
 $\Delta \bar{H} (l, e)$

$\Delta G_i (\Delta \bar{p}_i, m_i,$
 $\Delta V_i, r_i)$

$\Delta S_C (?)$ 3
 $\Delta S_W (\Delta S_i,$
 $\Delta G_{ic})$

$\Delta r_{ц.м.з.с.}$ 4
 $(\Sigma \Delta G_i)$

ΔS_{MMP} 6
 $(\Delta S_2, \Delta S_3,$
 $\Delta S_W)$

$\Delta S_{вн}$ 10
 $(\Delta S_{MMP}, X_3, Y_3, Z_3,$
 $\Delta L, L, H, \Delta r_{вн.зв})$

$\Delta P, \varphi, \lambda, \theta, \alpha$ 11
 $(\Delta S, \Delta L, \Delta L, \Delta H)$
 $\Delta T_{пл} (F_{пл}, F_r, \Delta S_{вн})$

$\Delta X (\theta_r, \theta_{сн},$
 $P_r, P_{сн})$ 12

$\Delta Y (X, \dots)$ 13

$\Delta Z (T, \dots)$ 14

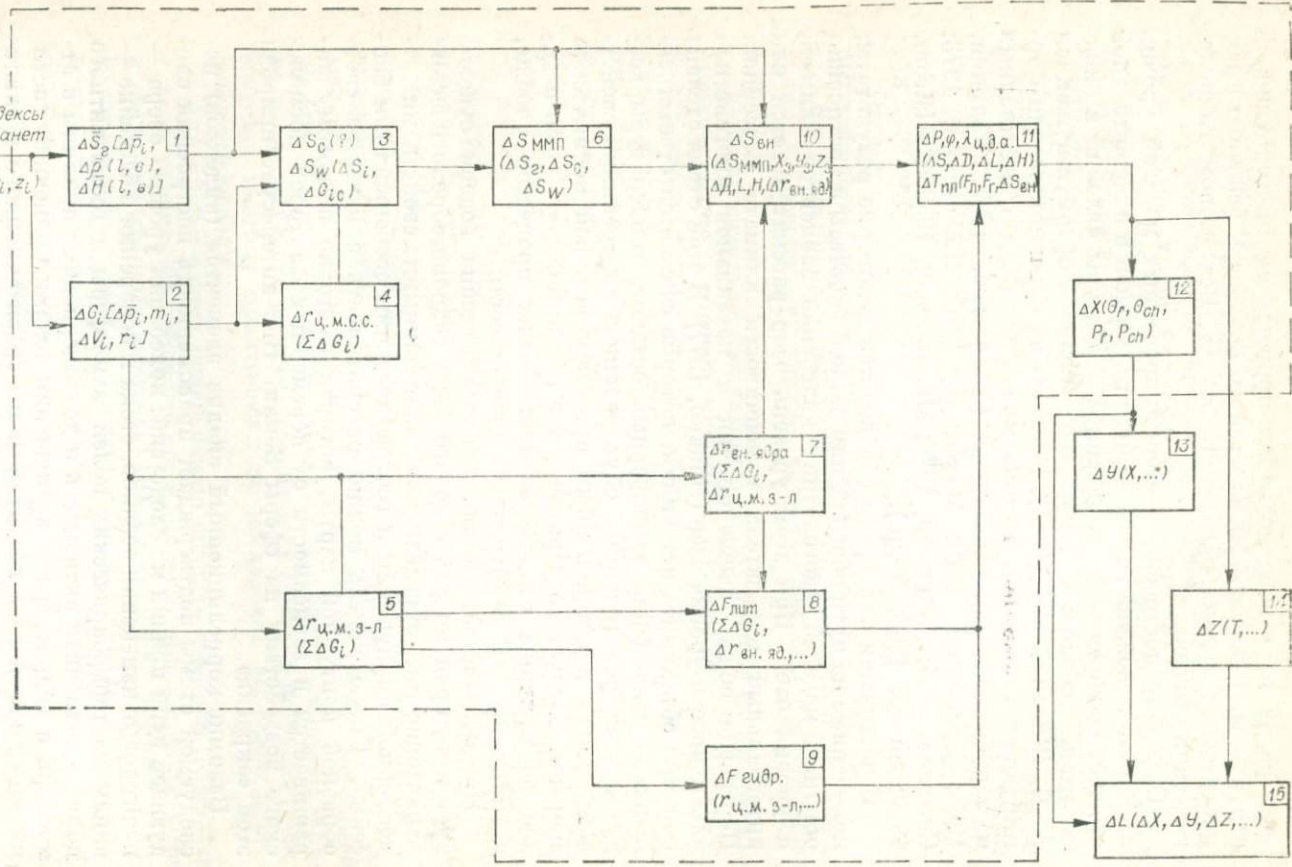
$\Delta L (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \dots)$ 15

$\Delta r_{ц.м.з-л}$ 5
 $(\Sigma \Delta G_i)$

$\Delta r_{вн.зв}$ 7
 $(\Sigma \Delta G_i,$
 $\Delta r_{ц.м.з-л})$

$\Delta F_{лим}$ 8
 $(\Sigma \Delta G_i,$
 $\Delta r_{вн.зв}, \dots)$

$\Delta F_{гидр.}$ 9
 $(r_{ц.м.з-л}, \dots)$



должна сводиться к набору первичных ритмов, обусловленных периодическим вращением тел Солнечной системы.

График уровня озера представляет результирующую совместного влияния первичных ритмов, трансформированных в гидрометеорологические циклы. Важно проследить, с помощью каких механизмов происходит указанная трансформация. С этой целью построена функциональная схема преобразования первичных ритмов в гидрометеорологические циклы (рис. 32). Это типичная каскадная система. Исследование каскадных систем принято разбивать на ряд этапов, отличающихся по степени изученности их внутренней структуры, с помощью которой расшифровывается способ преобразования входных параметров в выходные. Входом в данном случае являются индексы положения планет в пространстве относительно галактической плоскости и эклиптики (плоскости вращения Земли вокруг Солнца); выходом — уровень канонических водоемов (понятие канонического водоема дается ниже).

Все индексы функциональной схемы можно разделить на три группы. Первая — первичный набор ритмов, индексирующий вход в систему. К этой группе можно отнести также показатели солнечной активности и гравитационного воздействия тел Солнечной системы на сферы Земли. Вторая группа — планетарные и локальные характеристики геомагнитного поля, а также индексы атмосферной циркуляции. Третья группа — осредненные показатели осадков, речного стока, температуры воздуха и уровня озер.

Из функциональной схемы видно, что модели многолетней изменчивости геофизических показателей нельзя основывать на сопоставлении их, например, с индексами солнечной активности, какими бы яркими ни были эти связи на отдельных временных отрезках. Подобный подход нередко приводит исследователей в тупик, а подчас и к отрицанию самой идеи влияния солнечной активности на геофизические процессы. Нельзя

Рис. 32. Функциональная схема преобразования космических ритмов в гидрометеорологические циклы.

1, 2 — действие галактического и гравитационного полей соответственно; 3 — солнечная активность; 4, 5 — положения центра масс Солнечной системы и системы Земля — Луна; 6 — действие межпланетного магнитного поля; 7 — положение внутреннего ядра Земли; 8—10 — действие соответственно литосферы, гидросферы и геомагнитного поля; 11 — давление и координаты центров действия атмосферы; 12 — атмосферные осадки; 13 — сток; 14 — испарение; 15 — канонический уровень водоема; l_i, b_i — галактическая долгота и широта планет; x_i, y_i, z_i — гелиоцентрические координаты планет; m_i, v_i, r_i — масса, скорость и расстояние до Солнца i -й планеты соответственно; $\Delta S_c, \Delta S_w$ — проявления солнечной активности, обусловленные внутренними и внешними (планетными) источниками соответственно; $S_{вп}$ — внешняя составляющая геомагнитного поля; X_3, Y_3, Z_3 — гелиоцентрические координаты Земли; D, L, H — склонение, наклонение и напряженность геомагнитного поля соответственно; ϕ, λ — широта и долгота планетарных волн атмосферной циркуляции; $T_{пл}$ — планетарная температура воздуха; $\theta_f, \theta_{ch}, P_f, P_{ch}$ — параметры температуры и давления воздушных потоков на фронтах окклюзии.

сказать, что корреляции между разнородными индексами вообще недопустимы. На первых этапах анализа они полезны, но на них нельзя строить окончательные выводы, ибо структура связей в системе не только многоритмична, но и многоступенчатая.

Некоторые авторы строят модели гидрометеорологических рядов на основе формальной экстраполяции выводов периодограмм-анализа и спектрального анализа этих рядов. Такой путь представляется также неверным. Дело здесь не только в том, что длиннопериодные составляющие выделяются спектральным анализом по относительно коротким рядам наблюдений и особую роль приобретает вопрос о достоверности автокорреляционной функции и выделенных циклов, но главным образом в том, что выделение спектра, каким бы точным с математической точки зрения оно ни было, не дает еще повода утверждать, что этот спектр достаточно элементарный, чтобы судить по нему об истинной природе цикличности гидрометеорологических процессов. Отождествление полученного спектра с первичными ритмами допустимо лишь при непосредственной трансформации первичных ритмов в природные циклы. А эта связь сложна и многоступенчатая. В каждом случае возникает задача пройти путь от первичных ритмов до уровня конкретного водоема.

Подготовка исходных данных для построения модели уровня водоема заключается в представлении различных звеньев причинно-следственной цепи в виде сопоставимых индексов и последующего взаимно-корреляционного и спектрального анализов этих индексов.

Уровень реального водоема необходимо преобразовать в канонический вид, т. е. снять с него влияние формы котловины, хозяйственной деятельности в бассейне и других факторов, явно не зависящих от первичных космических причин. Влияние формы котловины наиболее просто снимается путем перевода годовых (месячных) приращений уровня ΔH_i в соответствующие приращения объема ΔW_i . Из полученных приращений объема вычитаются объемы дополнительного притока в озеро, либо добавляются объемы, изъятые из бассейна в результате хозяйственной деятельности:

$$H^k = \frac{\sum_i^n (\Delta W_i - \Delta W_i^a)}{F^k} = \frac{\sum_i^n \Delta W_i^k}{F^k},$$

где H^k — уровень канонического водоема; ΔW^a — приращение объема, связанные с хозяйственной деятельностью; F^k — площадь, близкая к среднегодовой.

Учитывая трудности точного определения площади канонического водоема, график колебания его водности можно пред-

ставить в единицах объема:

$$H^k \equiv \sum_1^n \Delta W_i^k.$$

Из свойств графика уровня водоема следует, что для количественного сопоставления с ним все показатели причинно-следственной цепи в исследуемой схеме целесообразно привести к виду разностных интегральных кривых. Разностные интегральные кривые сглаживают высокочастотные составляющие и проявляют вековые тенденции изменчивости процессов, не искажая при этом их физического смысла. Необходимо учитывать, что уровень водоема приведен как бы автоматически к генеральным средним значениям элементов водного баланса, которые, строго говоря, неизвестны; при анализе же других рядов приходится иметь дело с выборочными средними. Поэтому при сопоставлении рядов различной длительности в виде разностных интегральных кривых особое значение имеет приведение этих рядов к генеральным средним. Поскольку точно решить эту задачу невозможно, приходится пользоваться приближенными способами.

Длину достаточно представительного ряда для нахождения нормы элементов баланса водоема можно принять равной полному циклу колебания уровня. Такой прием предложен А. В. Агуновым (1960) и широко использован им для определения нормы стока рек смежных бассейнов. В некоторых случаях длину расчетного ряда можно принять кратной вековому солнечному циклу.

Следует подчеркнуть, что уровень озер в разных географических районах неодинаково зависит от внутригодового распределения в них осадков. Например, колебания уровня степного оз. Чаны определяются в основном многолетней изменчивостью твердой и жидкой фаз осадков в его бассейне. Для динамики осадков характерны внутривековые циклы продолжительностью около 40 лет, известные в литературе под именем Э. Брикнера.

Изменчивость атмосферных осадков определяется, как известно, процессами общей циркуляции атмосферы. Для анализа можно использовать три группы индексов атмосферной циркуляции, которые отражают отдельные черты ее многолетней динамики в разных секторах северного полушария и дополняют друг друга (Вительс, 1965; Гирс, 1971; Дзердзеевский, 1975). Совместный анализ указанных индексов в связи с исследованием причин изменчивости стока проведен в книге «Природа многолетних колебаний речного стока» (1976).

Важным звеном в передаче нестационарной энергии Космоса атмосфере является магнитное поле Земли. Изменения геомагнитного поля определяются внутренними и внешними

источниками (Калинин, 1946; Почтарев, 1973). Внутренняя и внешняя составляющие поля характеризуются параметрами, фиксируемыми геомагнитными обсерваториями. Из внешних вариаций поля следует отметить планетарный индекс геомагнитной возмущенности A_p (Оль, 1971). Из индексов солнечной активности широко известны числа Вольфа, годовые значения которых имеются с 1700 г. (Эйгенсон, 1963). В последние годы в практику исследований входят индексы В. Ф. Логинова (1972), определяющие площадь и яркость солнечных пятен.

Все названные индексы рассмотрены нами совместно с некоторыми гидрометеорологическими показателями, в частности, с графиком уровня оз. Чаны и разностной интегральной кривой стока р. Бии. С помощью спектрального анализа в исследуемых рядах выделены циклы, которые интерпретируются как планетообусловленные (Понько, 1977). Подобный анализ при учете некоторых дополнительных условий позволяет «пересбросить мост» между характеристиками многолетней изменчивости элементов водного баланса озер и первичными индексами. Назовем эти дополнительные условия. Один и тот же набор первичных циклов может индексировать разные типы космического воздействия — гравитационное, электромагнитное и корпускулярное. Поэтому в каждом случае необходимо установить избирательность элементов водного баланса бассейнов по отношению к тем или иным первичным факторам. Например, в колебаниях осадков и уровня озер средних широт Евразии наиболее ярко отражается электромагнитный аспект воздействия межпланетного поля на циркуляцию атмосферы.

Важное значение имеет фактор элементарности бассейна, что следует понимать как однозначность реакции всех частей бассейна на внешние возмущения космического характера. Это свойство удовлетворяется в географических секторах, где процессы общей циркуляции атмосферы протекают синхронно. На юге Западной Сибири к таким элементарным объектам можно отнести оз. Чаны и р. Бию в замыкающем створе. Большая площадь и положение бассейнов в пограничных географических секторах затрудняют анализ и интерпретацию гидрометеорологических рядов как производных первичных циклов. Поэтому в общем случае бассейны необходимо разделять на элементарные в указанном выше смысле.

Описанию структуры уровня водоема должны предшествовать построения моделей промежуточных звеньев исследуемой схемы, в частности показателей солнечной активности и элементов водного баланса, которые сами имеют много ритмичную структуру. В свою очередь первичные планетообусловленные индексы можно использовать для описания промежуточных звеньев, если физически обоснованы механизмы такой связи.

Индексы гравитационного, электромагнитного и корпускулярного воздействия Космоса на внутреннее ядро, литосферу,

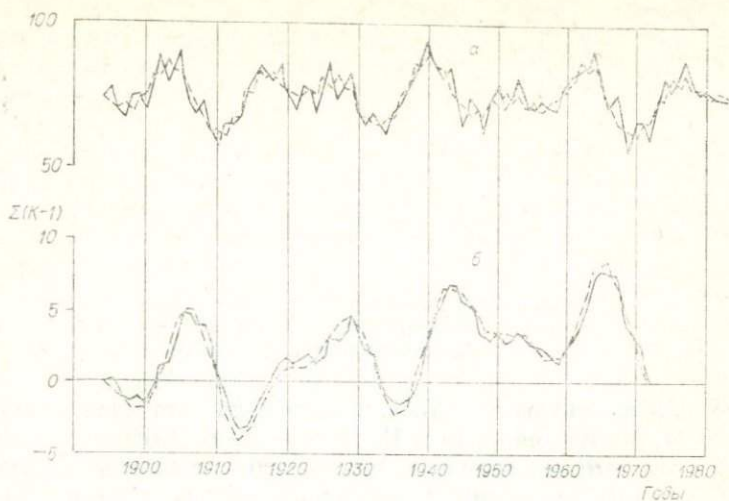


Рис. 33. Потенциалы векторов совместного гравитационного воздействия планет на Землю (сплошная линия) и на Солнце (штриховая):

а — средненные по 6 точкам в году; б — в виде разностных интегральных кривых.

гидросферу, магнитосферу и атмосферу Земли определяются положением Земли относительно Луны, Солнца и планет. Как следует из исследуемой схемы, солнечная активность, воздействующая на магнитосферу и атмосферу Земли, также является планетообусловленной.

Индексы совместного гравитационного воздействия планет на Солнце и Землю вычислены по программе «Поле», составленной совместно с Н. Н. Завалишиным. Приводим годовые значения векторов гравитации на Землю и Солнце по абсолютной величине в виде прямых показателей (рис. 33, а) и разностных интегральных кривых (рис. 33, б). На рис. 34 показаны годовые значения абсолютной величины вектора совместного гравитационного воздействия планет на систему Земля — Луна относительно линии перигелия Земли. Потенциал долгопериодного деклинационного лунного прилива, который изменяется с периодом 18,6 лет, известным под названием Сарос, вычислен Э. И. Саруханияном и Н. П. Смирновым (1971). Сверхвековые вариации гравитационных и приливообразующих сил здесь не рассматриваются.

Переменное гравитационное воздействие планет и Луны распространяется на внутреннее ядро и географические сферы Земли; отсюда вытекают гипотезы влияния его на климат и уровень озер. По идее Г. Барта (Barta, 1960) изменение положения Луны и планет влияет на смещение внутреннего ядра Земли и центра магнитного диполя и определяет долгопериодные

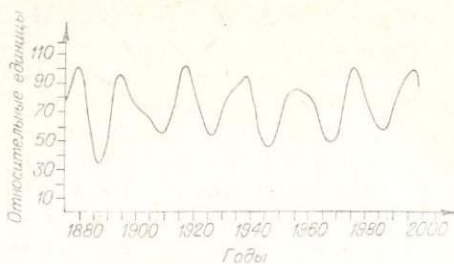


Рис. 34. Ежегодные значения вектора гравитация на систему Земля — Луна относительно линии перигелия Земли.

тенденции в изменении геомагнитного поля. Эта идея развивается И. М. Пудовкиным и Г. Е. Валуевой (1973).

С многолетними колебаниями характеристик геомагнитного поля связаны тенденции в изменении направления основных воздушных потоков, взаимодействующих с полем. В. П. Головков (1975) исследовал морфологию вариаций геомагнитного поля с характерными временами 20 и 60 лет и связал эти вариации с внутривоздушными причинами. Вывод В. П. Головкова не противоречит утверждению, что указанные вариации в конечном счете планетообусловлены. 20 (точнее 19,84) лет есть период схождения Юпитера и Сатурна. 60 (точнее 59,52) лет — утроенный период схождения Юпитера и Сатурна; через этот отрезок времени планеты практически повторяют свое положение в пространстве.

Сочетание 20- и 60-летних вариаций в динамике геомагнитного поля с 20- и 11,4-летними солнечнообусловленными циклами представляется главной причиной ритмичности природных явлений брикнеровского типа. Внутривековые колебания уровня степных озер Евразии, например оз. Чаны, проявляются через изменчивость речного притока и жидких осадков в бассейне. Колебания жидких и твердых осадков находятся в противофазе и связываются с изменением характеристик геомагнитного поля.

Воздействие приливов на атмосферные процессы может проявляться через колебания атмосферного давления и океанической циркуляции (Pettersson, 1930; Шнитников, 1964; Марсимов, 1970; Саруханян, Смирнов, 1971). Переменные гравитационные силы должны стимулировать землетрясения (Тамразян, 1975) и вспышки вулканизма. Гипотеза о влиянии вулканизма на климат широко освещена в литературе (Воейков, 1952; Брукс, 1952; Будыко, 1969; и др.). Сопоставление хода температуры воздуха по отдельным пунктам северного полушария с наиболее мощными извержениями вулканов, однако, показывает, что влияние этого эффекта на изменчивость климата и уровень озер на ограниченных отрезках времени должно

быть незначительным: похолодания, приуроченные к извержениям вулканов, носят взрывоподобный характер и быстро угащаются. Этому выводу не противоречат данные А. Д. Гедеонова (1973) и В. Я. Сергина (1974).

Электромагнитные и корпускулярные воздействия Космоса на Землю имеет смысл рассматривать совместно. Последние годы ознаменованы важными открытиями в области изучения космических лучей, являющихся важными носителями внешней энергии.

Прежде всего следует отметить экспериментальное подтверждение анизотропии лучей, приходящих к Солнечной системе из различных направлений нашей Галактики. Это лучи, которые не удерживаются магнитным галактическим полем. По данным группы Стекера (Stecker, 1975), плотность потоков этих лучей по галактической долготе практически совпадает с расположением относительно Солнечной системы сверхновых звезд. Наряду с полями, переносимыми галактическими лучами, существует собственное магнитное поле галактического рукава, в котором находится Солнечная система (Рузмайкин, 1976). Направление этого поля совпадает с плоскостью галактического диска и перпендикулярно линии от Солнца на центр Галактики. Таким образом, характеристики галактического магнитного поля в околосолнечном пространстве зависят от напряженности поля галактического рукава и поля, переносимого остаточным излучением сверхновых звезд. Межпланетное магнитное поле, формируемое в основном солнечным ветром, имеет, как известно, секторную структуру и должно выглядеть на фоне галактического поля локальным образованием.

Важным открытием явились также факты излучения из магнитосфер планет. На дневной стороне магнитосферы Юпитера имеется излучающий капал, ориентированный на Солнце. Это означает, что в моменты схождения Юпитера и Земли по долготе и пересечения плоскости орбиты Юпитера с эклиптикой Земля должна получать наибольшее облучение от Юпитера (с ночной стороны). С помощью данного механизма можно объяснить, например, избыток космических лучей в магнитосфере Земли летом 1972 г. и необычайно яркие погодные аномалии, сопутствовавшие этому явлению.

Указанные открытия дают основание выдвинуть следующую гипотезу. Лучи из планетных магнитосфер генерируются вследствие пересечения планетами анизотропного галактического поля и служат теми проводниками, с помощью которых осуществляются электромагнитные взаимодействия между планетами и Землей, а также между планетами и Солнцем, более эффективные, чем гравитационные. Заметим, что интенсивность электромагнитных взаимодействий зависит от расстояния между телами, а не квадрата расстояния, как в случае гравитационных и электрических взаимодействий.

Положение планет индексирует явления солнечной активности. Солнечная активность считается следствием процессов в недрах Солнца, возмущаемых внешними источниками. Из внутренних причин активности отмечаются циркуляция и дифференциальное вращение солнечного вещества (Рубашев, 1964; Вавсоок, 1961; Leighton, 1969). В качестве внешних источников активности рассматриваются переменные гравитационные и электродвижущие силы, обусловленные планетами. В. Б. Ржонсницкий (1976) возрождает гипотезу Э. Брауна о приливном воздействии планет на солнечную активность. Ряд авторов, в частности П. Жозе (Jose, 1965), считают ответственным за механизм пятнообразования на Солнце его смещение относительно центра масс Солнечной системы.

Главным воздействием планет на солнечную активность должно быть, вероятно, электромагнитное. Такое представление развивается в гипотезе генерации планетами переменных электродвижущих сил при движении их в галактическом магнитном поле (Васильева и др., 1971). Эта гипотеза экспериментально подтверждается фактами анизотропии галактического поля и планетных излучений. Указанный механизм должен инициировать перекручивание и разрывы магнитных силовых линий в активных областях Солнца и сопровождать образование солнечных пятен.

Приведем пример статистического обоснования плането-обусловленной гипотезы солнечной активности. Средняя продолжительность цикла активности, наблюдаемого с Земли, равна 11,4 лет. Она отличается от периода обращения основного возмущающего источника — Юпитера, равного 11,86 лет. Однако Земля движется как относительно источника активности, так и относительно участков возмущенной поверхности Солнца. По Ю. И. Витинскому (1973), эти участки «привязаны» к активным долготам на Солнце. Тогда частота и интенсивность проявлений солнечной активности, наблюдаемых с Земли, должны определяться обращением по годовому кругу линий схождения Земли как с источником (Юпитером), так и с активными долготами на Солнце. Линия схождения Земли и Юпитера наиболее близко повторяет свое положение на годовом круге Земли через 12,012 лет. Но за этот промежуток времени линии последовательного схождения активных долгот на Солнце с Юпитером «отстают» в общей сложности на 0,89 года. В результате получаем цикл 11,14 лет, наблюдаемый с Земли. Экстраполируя указанный механизм на остальные планеты-гиганты, получаем следующую серию элементарных циклов: 11,14; 27,75; 78; 152 лет.

Перечисленные циклы не исчерпывают всей структуры колебаний солнечной активности. Полных циклов возмущения характеристик солнечного и межпланетного электромагнитного поля следует ожидать, когда линии попарного схождения пла-

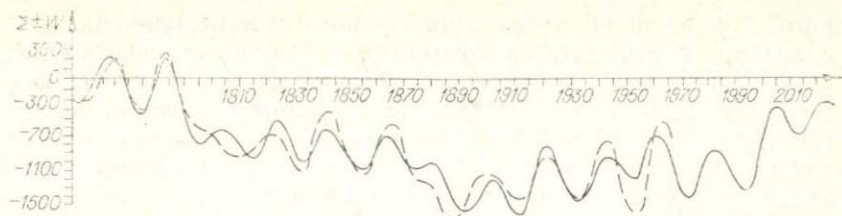


Рис. 35. Интегральная кривая чисел Вольфа, взятых в учет знака магнитной полярности (штриховая линия), и ее модель.

нет повторяют или занимают близкое положение в пространстве относительно избранных направлений галактического магнитного поля. Линия схождения Юпитера и Сатурна практически повторяет свое положение по гелиоцентрической долготе через 59,52 лет; линия схождения Юпитера и Урана — через 82,86 лет; Сатурна и Урана — через 90,9 лет. Суперпозиция 83-, 90-, 78-летних вариаций должна определять «вековой» цикл солнечной активности.

Указанные предпосылки положены в основу опытной модели цюрихского ряда чисел Вольфа. Исходный ряд аппроксимирован в виде суммы элементарных составляющих с названными выше периодами (рис. 35). Алгоритм программы, по которой проводились вычисления, описан ранее (Понько, 1977).

В проявлениях солнечной активности можно отметить электромагнитный и собственно корпускулярный аспекты. Этот дуализм прослеживается и в характеристиках геомагнитного поля. Согласно А. И. Олю (1973), спорадические (вспышечные) геомагнитные возмущения обусловлены хромосферными вспышками на Солнце; рекуррентные возмущения связаны с секторной структурой межпланетного магнитного поля. Геомагнитные возмущения индексируют передачу нестационарной космической энергии атмосфере. Механизмы этой передачи заключаются во взаимодействии воздушных потоков с силовыми линиями геомагнитного поля и во влиянии высокоэнергичных частиц на термобарические характеристики центров действия атмосферы. Подтверждение сказанному можно найти в работах В. Ф. Логинова (1970), Э. Р. Мустеля (1971), Б. Б. Елекоева (1972), Р. В. Смирнова (1974), А. В. Дьякова (1974). С рекуррентными геомагнитными возмущениями связано смещение планетарных волн атмосферной циркуляции по долготе, а спорадические возмущения увеличивают амплитуду планетарных волн, т. е. интенсивность межширотного обмена воздушных масс.

Таким образом, фаза и амплитуда планетарных волн, т. е. тип и интенсивность меридиональной циркуляции атмосферы, изменяются под влиянием трех типов космического воздействия — гравитационного, электромагнитного и корпускуляр-

ного. Усиление корпускулярными потоками меридиональных движений в атмосфере в сочетании с реакцией планетарных волн на знак поля, «переносимого» этими потоками, и долгопериодными приливами в гидросфере и атмосфере, представляет тем элементарным механизмом, который накладывает отпечаток на внутригодовой ход атмосферных макропроцессов, определяя тем самым их межгодовые изменения.

Планеты выступают в качестве проводников при передаче нестационарной энергии Космоса атмосфере. Периоды обращения в пространстве линий схождения планет, активных долгот на Солнце и Земли, периоды схождения на одной линии с Солнцем планет и Земли, Луны и Земли, а также периоды между пересечением плоскостей орбит планет и Земли, Луны и Земли индексируют элементарный спектр колебаний всех явлений в околосолнечном пространстве и на Земле. Разные сочетания из этого набора могут индексировать гравитационный, электромагнитный и корпускулярный типы воздействия Космоса на природные процессы и уровень озер.

Из обобщенных первичных индексов на данном этапе исследования рассматриваются модель разностной интегральной кривой чисел Вольфа, построенная с учетом знака магнитной полярности солнечных пятен, и потенциалы совместного гравитационного и приливообразующего воздействия тел Солнечной системы на Солнце и Землю. В ближайшие задачи входит теоретическое описание потенциала электромагнитного поля от совместного воздействия планет на Солнце и Землю. Элементарный спектр векторов гравитации описывается набором функций, близких к синусоидам, а в первом приближении — синусоидами с периодами, кратными периодам схождения планет между собой и с Землей. Элементарные циклы солнечной активности должны «взвешиваться» функцией, описывающей анизотропию галактического поля.

Уровень озер неодинаково избирателен по отношению к единому набору элементарных циклов. В общем случае нам известен вид функций, с помощью которых предстоит аппроксимировать график уровня, но неизвестны амплитуда и фаза элементарных циклов, которые необходимо определить и истолковать.

Для описания моделей уровня использован метод минимальных квадратов, применение которого основано на следующих дополнительных предпосылках. Связи между элементарными индексами и уровнем водоемов линейны, воздействие первичных источников на элементы водного баланса и уровень проявляется по принципу суперпозиции; отклонения моделей от наблюдаемых значений уровня распределяются по нормальному закону.

Ранее построены фоновые модели уровня Каспийского моря, оз. Чаны и разностной интегральной кривой стока р. Бий

(Понько, 1975, 1977). Вычисления выполнены с помощью БЭСМ-6 по программе «Аппроксимация уровня водоема», составленной Н. Н. Завалишиным и автором. Для обоснования достоверности построенных моделей использован прием исключения заведомо известных параметров, а именно фаз элементарных циклов, и нахождение их по методу минимальных квадратов. Годы экстремумов элементарных циклов, зафиксированные программой, соответствуют исходной планетообусловленной гипотезе, что рассматривается как главное ее подтверждение.

Канонические модели уровня озер должны восстанавливаться на реальные условия. В таком виде в них можно учесть перспективное антропогенное влияние. Уточнение моделей связывается с дальнейшим обоснованием механизмов вековых, брикнеровских, солнечно-обусловленных внутривековых и квазидвухлетних гидрометеорологических циклов.

§ 2. О СОВЕРШЕНСТВОВАНИИ МЕТОДИКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА

Математические модели многолетних колебаний стока рек в виде последовательности независимых случайных величин, простой и сложной цепей Маркова, некоторых стохастических процессов широко известны в гидрологии и теории регулирования речного стока. В последнее время развиваются приемы композиционного моделирования с учетом многих составляющих (Гришевич и др., 1972). Они постепенно совершенствуются и становятся все более эффективными. И во многом эффект достигается за счет учета ранее неизвестных свойств реального процесса. Новые возможности в этом отношении появляются в связи с развитием концепции элементарных составляющих многолетних колебаний стока рек и других [гидрометеоэлементов в виде серий лет повышения и понижения их количественных показателей, чередование которых и формирует многолетний ход названных процессов (Дружинин, Хамьянова, Шевнин, 1976)].

Чередование серий лет (месяцев, недель, суток, секунд и др.) повышения и понижения названных показателей свойственно любому физическому процессу. Оно иногда упоминается математиками (Бокс, Дженкинс, 1974, с. 40), но обычно не учитывается. Лишь в последнее время появились более конкретные предложения по его использованию для целей прогнозирования с заблаговременностью один год (Дружинин, Хамьянова, 1973, 1976; Дружинин, Хамьянова, Лобановская, 1977; и др.) и математического моделирования (Прспект..., 1974).

Специальное изучение свойств названных серий позволяет, по нашему мнению, создать информационную базу, на которой

могут быть основаны дальнейшие конструктивные предложения по улучшению приемов математического моделирования колебаний стока рек и метеорологических элементов, которые могли бы использоваться при моделировании этих колебаний и на ограниченную перспективу, что имеет первостепенное значение в современную эпоху динамичного развития народного хозяйства.

К настоящему времени установлено (Природа многолетних колебаний..., 1976), что в природе существует определенный набор серий лет повышения и понижения, примерно одинаковый для всех гидрометеозлементов и атмосферной циркуляции. Обобщенные по многим пунктам земного шара количественные оценки оказались следующими: 68—74% составляют однолетние серии, 22—25 — двухлетние, 4—6% — трехлетние. Более длинные серии встречаются весьма редко (1,4—0,5%). Однако следует отметить, что на фоне однородности названных распределений имеются в ряде случаев региональные и индивидуальные особенности. Например, многолетний ряд среднегодовых расходов р. Северной Двины у Усть-Пинеги за 1882—1962 гг. содержит 41% одно-, 33% двух-, 20% трех- и по 3% четырех- и пятилетних серий. Возможно, в таких случаях нужно ориентироваться на региональные и индивидуальные характеристики.

Проведенный нами специальный анализ (по критерию «хи-квадрат») показал, что в большинстве случаев распределение серий лет понижения по их длительности такое же, как и распределение серий лет повышения*. Это позволяет пользоваться их обобщенными характеристиками без деления на серии повышения и понижения. Однако и здесь встречаются некоторые индивидуальные особенности. Например, на р. Белой у Уфы за 1878—1968 гг. наблюдалась только одна четырехлетняя серия повышения, тогда как среди серий понижения оказались две четырехлетние, одна пятилетняя и одна шестилетняя.

На следующем этапе изучения элементарных составляющих и моделирования многолетних колебаний стока важно установить, применимы или неприменимы приемы анализа и построений, аналогичные используемым для случайных чисел. С этой целью проведено сравнение общего числа серий лет повышения и понижения и их средней длительности, полученных по многолетним рядам натурных данных, с ожидаемыми в условиях не-

* Здесь и ниже анализировались многолетние ряды среднегодовых расходов р. Оки у Мурома за 1882—1967 гг., р. Камы у Перми за 1881—1953 гг., р. Северной Двины у Усть-Пинеги за 1882—1962 гг., р. Дона у Калача за 1881—1969 гг., р. Волги у Куйбышева за 1877—1959 гг., р. Десны у Чернигова за 1895—1962 гг., р. Днепра у Киева за 1881—1969 гг., р. Чирчик у Ходжикента за 1901—1970 гг., р. Белой у Уфы за 1878—1968 гг., боковой приточности к Братскому водохранилищу за 1899—1969 гг.

зависимости членов рассматриваемых выборок. По четырем критериям (критерий общего числа серий по Хальду, 1956; два критерия средней длины серий и критерий экстремальных промежутков между двумя последовательными максимумами или минимумами по Романовскому, 1963) получен вполне конкретный результат: серии лет повышения и понижения годового стока рек ни по количеству, ни по средней длине обычно не отличаются от вычисленных в условиях независимости смежных членов выборки.

Проверка возможной связности серий между собой (использовался статистический критерий, примененный Дж. Харбухом и Г. Бонэм — Картером, 1974 и основанный на проверке значимости отличия чередования серий в природных процессах от случайного) также не обнаружила отличий от показателей, полученных в условиях независимости серий.

Следующим интересным свойством чередования серий лет повышения и понижения стока рек является частичная неслучайная концентрация начал новых серий в годы солнечных реперов (Дружинин, Хамьянова, 1969; Природа многолетних колебаний..., 1976). Однако это явление весьма затруднительно использовать при моделировании колебаний стока на конкретную ограниченную перспективу, так как необходимы соответствующие прогнозы резких изменений солнечной активности (годы солнечных реперов). На первых этапах разработки новых моделей эта особенность, видимо, может не учитываться.

Весьма интересными представляются также закономерности группирования серий (несколько однолетних или несколько длительных серий подряд и др.), и их, видимо, в дальнейшем необходимо будет учитывать при моделировании многолетних колебаний речного стока. После установления соответствующих количественных характеристик это вполне возможно.

Очень важным является композиция (сочетание) элементарных составляющих многолетних колебаний — серий лет повышения и понижения водности рек — с группировками маловодных и многоводных лет (Гриневиц и др., 1972), внутривековыми и вековыми циклами. Последние могут быть использованы при моделировании, в том числе и на конкретную ограниченную перспективу, путем учета тренда или динамической нормы (они должны прогнозироваться или моделироваться с помощью специальных методов), как только такие методы будут разработаны. Группировки же маловодных и многоводных лет могут учитываться в ближайшем будущем.

Кроме названных при моделировании должны учитываться также внутрисерийные связи, т. е. связи стока смежных лет отдельно по сериям лет повышения и понижения. Как показано в последнее время (Дружинин и др., 1974, 1977; Природа многолетних колебаний..., 1976), эти связи весьма тесны и не учитывать их нельзя. Еще более тесные аналогичные связи обнару-

жены в длительных (двух-, трехлетних и т. д.) сериях (Дружинин, Хамьянова, Лобановская, 1977).

Таким образом, уже в настоящее время могут быть названы свойства и последовательности операций, которые должны учитываться при моделировании многолетних колебаний речного стока на первом этапе, в том числе и на конкретную ограниченную перспективу. К ним относятся:

а) последовательное чередование серий лет повышения и понижения годового стока или среднегодовых расходов;

б) ранее установленное или известное распределение вероятностей появления одно-, двух-, трехлетних и т. д. серий;

в) возможность использования одинаковых распределений вероятностей появления серий лет повышения и понижения;

г) возможность неучета связей серий между собой;

д) необходимость учета внутрисерийных связей, т. е. связей стока в смежные годы отдельно по сериям лет повышения и сериям лет понижения с выделением особо тесных связей в длительных сериях.

На этой основе можно наметить алгоритмы получения некоторых характеристик многолетних колебаний речного стока путем моделирования последних. Наиболее важными из них, видимо, следует считать распределения вероятностей (условных или безусловных) стока в каждом году рассматриваемой перспективы. Именно такие кривые необходимы, в частности, для оценок эффективности и сроков ввода в эксплуатацию будущих водохозяйственных установок и систем, для установления правил регулирования стока водохранилищами в конкретный последующий отрезок времени и др.

В этом плане целесообразно рассмотреть две возможности.

Первая — это построение множества высоковероятных реализаций многолетнего хода стока реки в данном створе, начинающихся от достоверно известного состояния (текущий или прошедший годы). Такое множество может быть построено, если представить многолетние колебания стока рек в виде дискретного случайного процесса, обладающего определенными свойствами чередования серий лет его повышения и понижения и внутрисерийными связями в смежные годы.

Если это множество полученных реализаций (схема их построения описана ниже) рассечь через год, то в каждом таком сечении получится набор значений расходов, которые могут появиться в действительности при известном предыдущем состоянии. Кривая обеспеченности расходов, построенная по этим значениям, и будет кривой условных обеспеченностей в каждом году.

Вторая возможность — непосредственное построение кривых условных обеспеченностей расходов на каждый год предстоящей перспективы на основе тех же свойств чередования серий и внутрисерийных связей стока в смежные годы.

Кратко рассмотрим некоторые особенности реализации этих возможностей. Первая из них может быть реализована последовательно в два этапа. На первом производится розыгрыш множества последовательностей серий лет повышения и понижения в соответствии с обобщенными или индивидуальными распределениями их вероятностей (68—74% одно-, 22—25% двух-, 4—6% трехлетних серий и т. д.). Поскольку связи между сериями отсутствуют, розыгрыш каждой такой реализации аналогичен извлечению карточек или шаров из урны, в которой помещено 68—74% карточек (шаров) с номером один (однолетняя серия), 22—25% — с номером два (двухлетняя), 4—6% — с номером три (трехлетняя) и т. д. Такая процедура может быть осуществлена и с помощью датчика случайных чисел на ЭВМ. Выделение среди них серий лет повышения и понижения осуществляется почти автоматически (имеет место последовательное чередование серий) после ориентации первой серии, т. е. после присвоения первой серии знака плюс (повышение) или минус (понижение).

При ориентации первой серии должны быть использованы условные вероятности продолжения и непродолжения текущей (в году моделирования) серии (Природа многолетних колебаний..., 1976; Дружинин, Хамьянова, Лобановская, 1977). Например, если условная вероятность непродолжения текущей серии в следующем году 90%, а продолжения 10%, то 90% реализаций должны начинаться с новой серии, а 10% — с продолжения текущей.

Полученные таким способом реализации могут составить полное множество всех возможных чередований серий. Число высоковероятных реализаций ограниченной длины будет конечным, поскольку ведется перебор небольшого числа (обычно 3—4) серий с известным распределением вероятностей их появления. Однако оно может быть весьма большим. В этом случае целесообразно привлекать дополнительную информацию из других источников, что позволит довести число реализаций до практически приемлемой величины. В иных случаях, видимо, придется ограничиваться некоторыми выборками из этого множества.

На втором этапе производится «заполнение» каждой из полученных серий величинами годового стока. С этой целью весьма эффективно могут быть использованы внутрисерийные связи, т. е. связи стока смежных лет в сериях лет повышения и понижения. Практически удобным в этом случае может быть построение кривых условных обеспеченностей, соответствующих каждой величине стока (среднегодового расхода) в предыдущий год, отдельно для серий лет повышения и понижения (рис. 36). Порядок построения этих кривых может быть следующим.

По данным натуральных наблюдений строится обычное автокорреляционное поле, т. е. график связи стока в смежные годы.

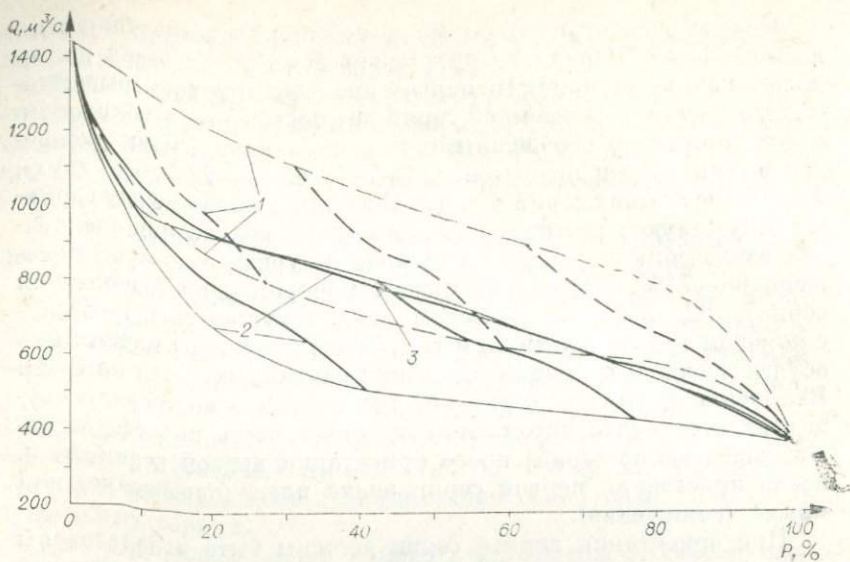


Рис. 36. Кривые условных обеспеченностей появления среднегодовых расходов р. Белой у Уфы в следующем году при известных расходах предыдущего года.

1, 2 — для серий лет повышения и понижения водности; 3 — безусловная кривая обеспеченностей расходов за 1878—1968 гг.

Оно делится на серии лет повышения и понижения (Дружинин, Хамьянова, Лобановская, 1977). Проводятся верхняя и нижняя огибающие, которые на данном этапе принимаются постоянными (в случае их изменения с течением времени необходимо повторить аналогичные построения). После этого строятся эмпирические кривые условных обеспеченностей стока в будущем году в зависимости от стока предыдущего года для серий лет повышения и серий лет понижения: высшая и низшая ординаты таких кривых определяются огибающими и линией раздела серий, а промежуточные — распределением эмпирических значений в каждом интервале. На рис. 36 показаны по три таких кривых для обеих групп серий. Они весьма приближительны, но дают представление об их характере, взаимном расположении, соотношениях с кривой безусловных обеспеченностей и т. д.

Представленные два множества кривых условных обеспеченностей (см. рис. 36) и используются для «заполнения» реализаций серий годовыми величинами. При известной серии (например, повышение) и известном стоке предыдущего года выбирается подходящая кривая условных обеспеченностей. Используя таблицу или датчик случайных чисел, по ней может быть определен сток следующего года. Затем эта величина бе-

рется в качестве известной (предыдущий год) и производится розыгрыш на следующий год аналогичным путем с учетом продолжения начавшейся серии или появления новой. Проходя таким образом все серии выбранной реализации, можно получить ее в окончательном виде.

Понятно, что для каждой реализации серий может быть получено большое число вариантов наполнения, которые все вместе и составят множество возможных последовательностей величин стока в рассматриваемом многолетнем отрезке времени, в том числе и ограниченном некоторыми календарными границами. Сделав для этого множества разрезы по каждому году, можно получить кривые распределения условных вероятностей (обеспеченностей) стока в каждом году. Они и будут расчетными характеристиками.

Вторая возможность получения кривых распределения условных вероятностей появления среднегодовых расходов на каждый год предстоящей перспективы основана на приеме их непосредственного построения (без моделирования множества реализаций). В этом случае на первом шаге используется названная кривая, рекомендованная для прогноза этих величин с заблаговременностью один год (Дружинин, Хамьянова, Лобановская, 1977).

Для построения кривой распределения условных вероятностей появления стока во втором году можно использовать методику приближенного суммирования обеспеченностей, часто употребляемую при расчете многолетнего регулирования речного стока (Крицкий, Менкель, 1952). В этом случае кривая условных обеспеченностей стока первого шага представляется в ступенчатой форме. Замена названной кривой ступенчатым графиком должна быть сделана таким образом, чтобы высота каждой ступени представляла собой среднеарифметическое значение всех ординат соответствующей части кривой.

Рассматривая каждую выделенную ступень отдельно и полагая, что ордината ступени характеризует первый (исходный для второго) год, мы должны на каждой из них построить кривую условных вероятностей возможного стока реки в будущем году (Дружинин и др., 1977). В результате получится столько частных кривых условных обеспеченностей стока за два года, сколько было выделено ступеней. Все они будут различны, и по каждой из них можно найти условную обеспеченность суммы расходов стока за два года при условии, что предыдущее значение находится на соответствующей ступени.

Для построения полной кривой условных обеспеченностей стока за два года необходимо просуммировать абсциссы частных кривых обеспеченностей при каждом значении стока за два года. Разность между ординатами полученной кривой и ординатами кривой для первого года даст кривую условных вероятностей для второго года.

Как последняя кривая, так и кривая условных обеспеченностей суммарного за два года стока аналогичным путем может быть использована для построения кривой условных обеспеченностей за три года или в третьем году и т. д.

Такие кривые были построены в опытном порядке для р. Белой у Уфы и р. Камы у Перми и показали, что по сравнению с безусловной кривой они имеют меньшую амплитуду колебаний, т. е. обеспечивают определенный эффект моделирования.

В дальнейшем необходимо детально отработать методику построения кривых распределения условных вероятностей стока в каждом году рассматриваемой перспективы как на основе указанных, так, возможно, и других приемов.

§ 3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ ВЗАИМНЫХ СВЯЗЕЙ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ ГОДОВОГО СТОКА РЕК БАССЕЙНА ЕНИСЕЯ И АТМОСФЕРНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ

Исследование связей между переменными является одной из первых задач при анализе сложных систем. Объективное измерение тесноты связей особенно важно в тех случаях, когда необходимые сведения о них можно получить только из экспериментальных данных. Такое положение имеет место при исследовании многолетних колебаний речного стока, где внутрирядные и взаимные связи нелинейны, неоднозначны, изменяющиеся (Дружинин, Коноваленко, Кукушкина, Хамьянова, 1966; Природа многолетних колебаний..., 1976). В этих условиях правильный выбор методики оценки тесноты исследуемых связей имеет первостепенное значение, так как различные методы существенно неодинаковы по своим возможностям.

В последнее время все большее внимание привлекают информационные характеристики связей (Багров, 1957, 1963; Валь, 1958; Дружинин, Коноваленко, Кукушкина, Хамьянова, 1966; Кульбак, 1967; Кукушкина, Дружинин, 1973; Ююкин, 1974; Природа многолетних колебаний..., 1976), в том числе информационные функции, количественно оценивающие информацию, которую несут внутрирядные или взаимные связи между переменными или элементами процессов. Они оказываются эффективными в случаях, когда, например, коэффициенты корреляции близки к нулю (Природа многолетних колебаний..., 1976).

Разработка информационных функций значительно продвинулась после создания методики оценки их значимости (Ююкин, 1974; Природа многолетних колебаний..., 1976). В частаящее время они могут быть использованы, например, при решении задачи подбора информативных предсказателей в целях долгосрочного прогнозирования.

При исследовании любой связи прежде всего возникает вопрос о ее реальности или нереальности. Он обычно решается на

основе проверки так называемой нулевой гипотезы, т. е. гипотезы о том, что связи не существует (события независимы). Проверка осуществляется по оценке вероятности независимости. Если она достаточно мала, то это является основанием отвергнуть нулевую гипотезу и считать связь реальной. Нормативы вероятностей, при которых гипотеза принимается или отвергается, обычно называют соответствующими уровнями значимости. Конкретные числовые величины, соответствующие уровням значимости, могут быть приняты по номограммам (Природа многолетних колебаний..., 1976).

К числу отличающихся от случайных могут относиться как высокие, так и низкие информационные отношения. Высокие, если они неслучайны, представляют непосредственный интерес для прогнозирования как наиболее информативные. Низкие неслучайные отношения характеризуют свойства процессов, которые могут нести дополнительную информацию.

В настоящем параграфе ставилась задача выявления закономерностей распределения неслучайных составляющих взаимных связей годового стока рек и атмосферной циркуляции в конкретном районе. В качестве объектов исследования использованы среднегодовые расходы рек бассейна Енисея с наблюдениями не менее 40 лет: Енисей — г. Кызыл (1927—1974 гг.); Енисей — с. Означенное (1903—1972 гг.); Абакан — г. Абаза (1932—1972 гг.); приток в Красноярское водохранилище (1903—1974 гг.); Енисей — г. Енисейск (1903—1957 гг.); Большой Пит — база Брянка (1933—1972 гг.); полезный приток в оз. Байкал (1899—1974 гг.), боковая приточность к Братскому водохранилищу (1899—1974 гг.). Взаимные связи многолетних колебаний стока названных рек и атмосферной циркуляции Сибирского сектора (по Б. Л. Дзержевскому) исследовались на основе их взаимно-информационных функций.

Характер полученных функций разнообразен: одни из них имеют значения в пределах только верхних или только нижних уровней значимости, другие — в пределах тех и других (при различных временных сдвигах). В качестве примера функций первого типа рассмотрим названные функции для годового притока в Красноярское водохранилище и различных форм атмосферной циркуляции (рис. 37).

Вычислены восемь взаимно-информационных функций, и только одна из них (см. рис. 37, 1) при $\tau=9$ лет оказывается в области низких уровней значимости с вероятностью случайности 0,038. Это относится к взаимно-информационной функции годового притока с широтной западной циркуляцией. Функция с долготной северной в сочетании с широтной восточной может быть отнесена к смешанному типу (см. рис. 37, 6): при $\tau=5$ лет информационное отношение превышает верхние уровни значимости и оценивается как случайное с вероятностью 0,047; при $\tau=9$ значение функции не достигает низких

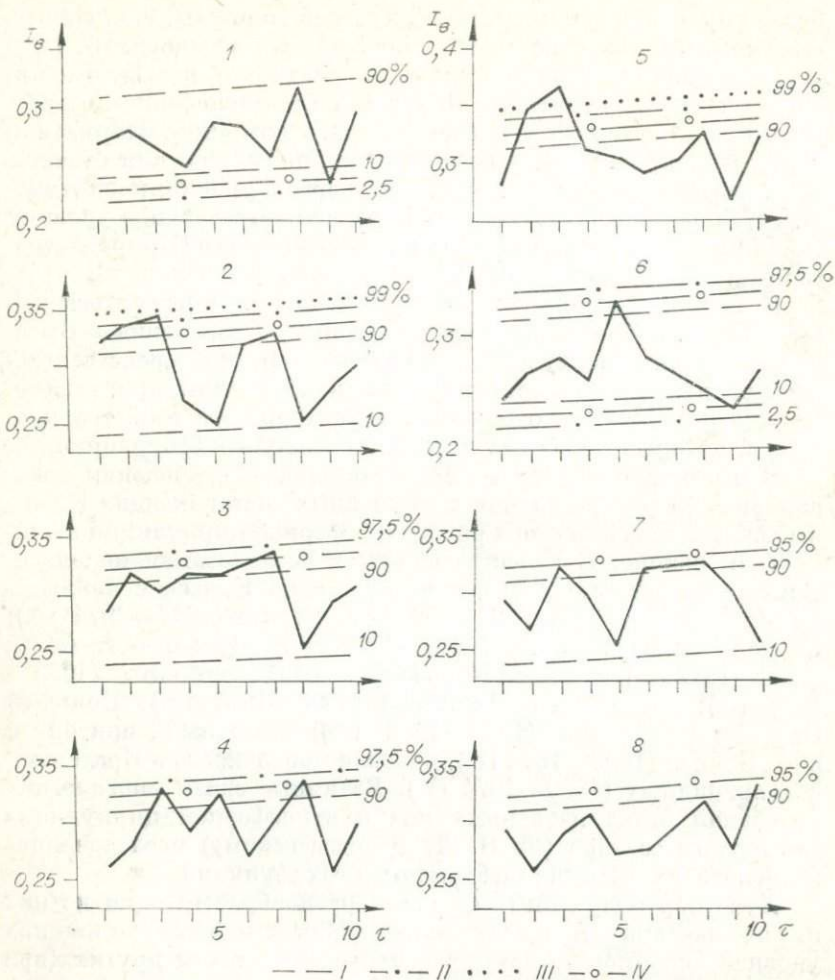


Рис. 37. Взаимно-информационные функции годового притока в водохранилище Красноярской ГЭС и атмосферной циркуляции Сибирского сектора (по типизации Б. Л. Дзердзеевского).

1 — широтная западная; 2 — долготная северная; 3 — широтная западная в сочетании с долготной южной; 4 — широтная западная в сочетании со стационарным положением; 5—8 — долготная северная в сочетании соответственно со стационарным положением, широтной восточной, широтной западной и долготной южной циркуляциями.

уровней значимости с вероятностью случайности 0,038. У остальных шести функций преобладают высокие значения. Взаимно-информационная функция годового притока с долготной северной циркуляцией (см. рис. 37, 2) при $\tau=1, 2, 3, 6, 7$ имеет значения, превышающие высокие уровни значимости с вероятностями случайности 0,06; 0,021; 0,014; 0,085; 0,07.

У функции с широтной западной циркуляцией в сочетании с долготной южной (см. рис. 37, 3) взаимно-информационные отношения при $\tau = 2, 4, 5, 6, 7$, находящиеся в пределах высоких уровней значимости, оцениваются как случайные вероятностями 0,075; 0,085; 0,09; 0,05; 0,038. У функции с широтной западной циркуляцией в сочетании со стационарным положением (см. рис. 37, 4) высокие значения при $\tau = 3, 5, 8$ имеют вероятности случайности 0,035; 0,06; 0,036. У функции с долготной северной циркуляцией в сочетании со стационарным положением (см. рис. 37, 5) информационные отношения при $\tau = 2, 3, 8$ оцениваются вероятностями случайности 0,01, менее 0,01 и 0,075. У функции с долготной северной в сочетании с широтной западной циркуляцией (см. рис. 37, 7) значения при $\tau = 3, 6, 7, 8$, превышающие верхние уровни значимости, имеют оценки случайности 0,06; 0,09; 0,085 и 0,08; функция с долготной северной циркуляцией в сочетании с долготной южной (см. рис. 37, 8) при $\tau = 10$ имеет высокое значение, оценивающееся вероятностью случайности 0,06.

Примером преобладания низких значений являются функции полезного притока в оз. Байкал: пять функций из восьми имеют значения, не достигающие нижних уровней значимости, а остальные три — одиночные величины в пределах высоких уровней (табл. 5). К последним относятся значения функции связи полезного притока с широтной западной при $\tau = 3, 10$ (вероятности их случайности составляют 0,10 и 0,05), с долготной северной при $\tau = 3, 6$ (оцениваются вероятностями их случайного появления как 0,065 и 0,10), с долготной северной в сочетании со стационарным положением при $\tau = 10$ (вероятность случайности 0,037).

Свойственный для полезного притока в оз. Байкал тип взаимно-информационных функций с атмосферной циркуляцией с низкими неслучайными оценками тесноты связей может свидетельствовать о большой сложности связей и особой трудности их практического использования.

Наиболее четко выражены функции смешанного типа для р. Енисей у Кызыла (см. табл. 5). Они характеризуют взаимные связи годового стока с долготной северной (при $\tau = 8$ вероятность случайности низкого значения составляет 0,037, а при $\tau = 5$ вероятность случайности высокого — 0,08), с широтной западной в сочетании с долготной южной (при временных сдвигах $\tau = 7, 8$ лет вероятности случайности появления значений в пределах нижних уровней значимости составляют 0,09 и 0,021, а при $\tau = 1$ год появление высокого случайного значения оценивается вероятностью менее 0,01), с широтной западной в сочетании со стационарным положением (вероятность случайности недостижения нижних уровней значимости значениями при $\tau = 2, 4$ лет составляют 0,08; 0,02, а превышения верхних при $\tau = 5, 6$ лет — 0,08 и 0,044).

Временные сдвиги, соответствующие неслучайным величинам (уровни значимости 1—10 и 90—99%-ные) взаимно-информационных функций атмосферной циркуляции Сибирского сектора (по Б. Л. Дзердзеевскому) и стока рек бассейна Енисея

Тип циркуляции 1	Временные сдвиги (лет) при уровнях значимости, %							
	90 2	95 3	97,5 4	99 5	10 6	5 7	2,5 8	1 9
<i>р. Енисей — г. Кызыл (1927—1969 гг.)</i>								
Широтная западная	7	7	—	—	—	—	—	—
Долготная северная	5	—	—	—	8	8	—	—
Широтная западная с долготной южной	1	1	1	1	7, 8	8	8	—
Широтная западная со стационарным положением	5, 6	6	—	—	2, 4	4	4	—
Долготная северная со стационарным положением	—	—	—	—	1, 2, 3, 4, 6, 8	2, 3, 4, 6, 8	3, 4, 6	3, 4
Долготная северная с широтной восточной	—	—	—	—	1, 3, 5, 8	8	—	—
Долготная северная с широтной западной	1, 6	1	—	—	—	—	—	—
Долготная северная с долготной южной	—	—	—	—	1, 2, 8	1, 8	1, 8	1, 8
<i>р. Енисей — с. Означенное (1903—1969 гг.)</i>								
Широтная западная	—	—	—	—	5	5	—	—
Долготная северная	—	—	—	—	9	9	9	—
Широтная западная с долготной южной	—	—	—	—	9	—	—	—

Широтная западная со стационарным положением	—	—	—	—	—	—	—	—
Долготная северная со стационарным положением	2, 6, 10	2	—	—	—	—	—	—
Долготная северная с широтной восточной	—	—	—	—	3, 4, 7	4, 7	4, 7	—
Долготная северная с широтной западной	2, 8, 9	2, 8	2	—	—	—	—	—
Долготная северная с долготной южной	4, 5	—	—	—	2	—	—	—

Приток в Красноярское водохранилище (1903—1969 гг.)

Широтная западная	—	—	—	—	9	9	—	—
Долготная северная	1, 2, 3, 6, 7	2, 3	2, 3	—	—	—	—	—
Долготная западная с долготной южной	2, 4, 5, 6, 7	6, 7	—	—	—	—	—	—
Широтная западная со стационарным положением	3, 5, 8	3, 8	—	—	—	—	—	—
Долготная северная со стационарным положением	2, 3, 8	2, 3	2, 3	2, 3	—	—	—	—
Долготная северная с широтной восточной	5	5	—	—	9	9	—	—
Долготная северная с широтной западной	3, 6, 7, 8	—	—	—	—	—	—	—
Долготная северная с долготной южной	10	—	—	—	—	—	—	—

1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>р. Енисей — г. Енисейск (1903—1957 гг.)</i>								
Широтная западная	—	—	—	—	10	10	—	—
Долготная северная	—	—	—	—	6	—	—	—
Широтная западная с долготной южной	1, 10	—	—	—	2, 4	2, 4	2, 4	—
Широтная западная со стационарным положением	3	—	—	—	1, 5, 6, 9	1, 5, 6, 9	1, 5, 6, 9	1, 9
Долготная северная со стационарным положением	3, 4, 5	3, 4, 5	5	5	—	—	—	—
Долготная северная с широтной восточной	—	—	—	—	1, 3, 4	1, 3, 4	1, 3, 4	—
Долготная северная с широтной западной	4	4	—	—	—	—	—	—
Долготная северная с долготной южной	2, 10	—	—	—	—	—	—	—

Боковая приточность в Братское водохранилище (1899—1969 гг.)

Широтная западная	3	3	—	—	2	—	—	—
Долготная северная	2	2	—	—	1, 4, 7, 8	1, 7	7	—
Широтная западная с долготной южной	—	—	—	—	8, 10	8, 10	8, 10	10

Широтная западная со стационарным положением	4	4	—	—	—	—	—	—
Долготная северная со стационарным положением	1, 3, 4	—	—	—	—	—	—	—
Долготная северная с широтной восточной	3	—	—	—	4	—	—	—
Долготная северная с широтной западной	—	—	—	—	1, 2, 3, 5,	1, 2, 7, 9	2, 7	2
Долготная северная с долготной южной	3, 4, 9	3, 4	4	4	7, 9	—	—	—

Полезный приток в оз. Байкал (1899—1969 гг.)

Широтная западная	3, 10	10	—	—	1, 4, 8	1, 4	—	—
Долготная северная	2, 6	—	—	—	1, 7, 8, 9	1, 8, 9	1, 9	1
Широтная западная с долготной южной	—	—	—	—	2, 3, 4, 5, 6	2, 3, 4, 5, 6,	2, 4, 5	5
Широтная западная со стационарным положением	—	—	—	—	7, 9, 10	7, 9, 10	2	—
Долготная северная со стационарным положением	10	10	—	—	2	2	—	—
Долготная северная с широтной восточной	—	—	—	—	1, 8, 9	—	—	—
Долготная северная с широтной западной	—	—	—	—	1, 4, 5, 7,	1, 4, 8, 9	4, 8	4
Долготная северная с долготной южной	—	—	—	—	8, 9	1, 7, 8, 10	7, 8	8
Долготная северная с долготной южной	—	—	—	—	1, 2, 7, 8, 10	1, 7, 8, 10	7, 8	8
Долготная северная с долготной южной	—	—	—	—	2, 3, 8, 9	2, 3, 9	9	9

Кроме названных информационных функций для годового стока р. Енисея у Кызыла и атмосферной циркуляции свойственны и другие типы с низкими (связи с долготной северной в сочетании со стационарным положением, с долготной северной в сочетании с широтной восточной, с долготной северной в сочетании с долготной южной) и высокими (связи с долготной северной в сочетании с широтной западной) значениями (см. табл. 5).

Аналогичную классификацию можно провести по функциям годового стока р. Енисея у Означенного (см. табл. 5). Низкие показатели тесноты взаимных связей характерны для годового стока с циркуляциями: широтной западной, долготной северной, широтной западной в сочетании с долготной южной, долготной северной в сочетании с широтной восточной, высокие — для стока с долготной северной в сочетании со стационарным положением, с долготной северной в сочетании с широтной западной, с долготной северной в сочетании с долготной южной. Смешанный тип функций для названного объекта отсутствует. Интересна функция стока с широтной западной в сочетании со стационарным положением, значения которой в пределах десяти временных сдвигов по оценкам значимости не отличаются от случайных, что представляет довольно редкое явление для анализируемых процессов.

Показатели тесноты взаимных связей годового стока р. Енисея у Енисейска дифференцируются следующим образом (см. табл. 5). Высокие — с долготной северной в сочетании со стационарным положением, широтной западной и долготной южной; низкие — с широтной западной, с долготной северной, с долготной северной в сочетании с широтной восточной; смешанные — с широтной западной в сочетании с долготной южной, с широтной западной в сочетании со стационарным положением.

Для бокового притока в Братское водохранилище и его связей с атмосферной циркуляцией Сибирского сектора полученные оценки позволили выявить следующее распределение (см. табл. 5): к высоким показателям тесноты связей относятся три функции — с широтной западной в сочетании со стационарным положением, с долготной северной в сочетании со стационарным положением и долготной южной; две функции с низкими значениями — с широтной западной в сочетании с долготной южной и с долготной северной в сочетании с широтной западной; три — смешанного типа — с широтной западной, с долготной южной и с долготной северной в сочетании с широтной восточной.

Проведенный на основе оценок значимости анализ взаимноинформационных функций годовых показателей стока рек бассейна Енисея и атмосферной циркуляции Сибирского сектора позволил выявить не только их индивидуальные особен-

ности, но и некоторые общие закономерности распределения неслучайных связей по рассматриваемой территории. Можно выделить типы циркуляции, имеющие высокую информативность связей с годовым стоком. К ним относятся в первую очередь долготная северная циркуляция, а также ее сочетания со стационарным положением, широтной западной и долготной южной. Наиболее высокочисленные связи у долготной северной с годовым притоком в Красноярское водохранилище, боковой приточностью в Братское водохранилище и полезным притоком в оз. Байкал наблюдаются при временном сдвиге $\tau = 2$ года (для притока в Красноярское водохранилище и при $\tau = 1$ и 3 года, см. табл. 5).

Для трех объектов — р. Енисей у Кызыла, притока в Красноярское водохранилище и полезного притока в оз. Байкал — информативны значения функций при одинаковых или близких временных сдвигах $\tau = 5, 6, 7$ лет (см. табл. 5).

Долготная северная циркуляция в сочетании со стационарным положением со стоком почти всех рассматриваемых объектов формирует высокочисленные связи (кроме р. Енисей у Кызыла и частично полезного притока в оз. Байкал) чаще всего при временных сдвигах $\tau = 2, 3, 4$ года. На отдельных створах, кроме названных, имеются и другие: $\tau = 1$ (боковая приточность в Братское водохранилище), $\tau = 5$ (Енисей у Енисейска), $\tau = 6$ (Енисей у Означенного), $\tau = 8$ (приток в Красноярское водохранилище) и $\tau = 10$ (Енисей у Означенного и полезный приток в оз. Байкал).

Характерно, что долготная северная в сочетании с широтной западной формирует высокочисленные связи только со стоком Енисей в разных створах ($\tau = 1-4$ и $6-9$). Оценки же связей этого типа циркуляции, боковой приточности в Братское водохранилище и полезного притока в оз. Байкал находятся в пределах только нижних уровней значимости, что может свидетельствовать об их особой сложности и необходимости дополнительного анализа (см. табл. 5). Аналогичное заключение можно сделать по отношению к связям долготной северной циркуляции в сочетании с долготной южной с полезным притоком в оз. Байкал и стоком Енисей у Кызыла (относятся только к нижним уровням значимости). Со стоком остальных объектов этот тип циркуляции имеет высокие показатели информативности связей при $\tau = 2-5$ и $9-10$ лет.

Широтная западная циркуляция и ее сочетания со стационарным положением и с долготной южной образуют более сложную картину высокочисленных связей в рассматриваемом районе. Наиболее информативные и широко проявившиеся по территории относятся к широтной западной в сочетании со стационарным положением ($\tau = 3$ года для притока в Красноярское водохранилище и Енисей у Енисейска, $\tau = 4$ года для боковой приточности в Братское водохранилище, $\tau = 5, 6$ лет для Ени-

сея у Кызыла и притока в Красноярское водохранилище, $\tau = 8$ лет для притока в Красноярское водохранилище). Неслучайные высокие показатели связей в названных случаях сочетаются с неслучайными низкими (Енисей у Озлаченногo в данном случае формирует связи, оценки неслучайности показателей которых превышают 0,40). Широтная западная в сочетании с долготной южной имеет высокoзначимые связи с притоком в Красноярское водохранилище ($\tau = 2; 4-7$ лет), со стоком Енисея у Кызыла и Енисейска дополнительно при $\tau = 1$ (для последнего еще и при $\tau = 10$ лет). Широтная западная высокоинформативные связи имеет только с боковой приточностью в Братское водохранилище ($\tau = 2$ года) и полезным притоком в оз. Байкал ($\tau = 2$ и 10 лет); а также со стоком Енисея у Кызыла ($\tau = 7$ лет). Для последних двух типов циркуляции (широтная западная в сочетании с долготной южной и широтной западной) преобладающими являются неслучайные низкие значения показателей связи со стоком.

Почти все неслучайные значения взаимных связей стока и долготной северной в сочетании с широтной восточной относятся к низким показателям, кроме временного сдвига $\tau = 3$ года для боковой приточности в Братское водохранилище и $\tau = 5$ лет для притока в Красноярское водохранилище.

Следует отметить, что полученные результаты не противоречат данным по оценке колебаний на различных частотах, полученным с помощью когерентного анализа (Природа многолетних колебаний..., 1976, гл. 1) и, кроме этого, несут некоторую дополнительную информацию, расширяя ее полезный диапазон за счет выявления неслучайных связей. Высокие показатели тесноты взаимных связей уже в настоящее время имеют непосредственный практический интерес. Полученные количественные оценки тесноты реальных связей могут быть использованы при прогнозировании стока в бассейне Енисея.

§ 4. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЗНАЧИМОСТИ ИНФОРМАЦИОННОГО ОТНОШЕНИЯ

Ряд авторов (Валь, 1958; Кастлер, 1960; Райбман, 1970) используют в качестве характеристики статистической связи между переменными некоторый, основанный на логарифмической мере информации показатель, принимающий в случае статистической независимости переменных значение 0, а в случае однозначной функциональной связи — значение 1. Этот показатель часто называется информационным отношением (Дружинин и др., 1966). Ниже освещается один из возможных приемов определения его значимости на основе выборочных оценок.

Пусть имеется N пар независимых наблюдений двух переменных x и y . Весь диапазон изменения переменной x разбит

на m классов, а переменной y — на n классов. Следуя Кульбаку (1967), составим таблицу сопряженности признаков. Эта таблица состоит из m строк и n столбцов. В ее клетки занесены величины x_{ij} , показывающие число пар, значения переменных в которых относятся к классам i и j соответственно.

Сумма элементов таблицы равна N , сумму по i -й строке обозначим через x_{i0} , а сумму по j -му столбцу — x_{0j} . Таким образом

$$x_{i0} = \sum_{j=1}^n x_{ij}; \quad x_{0j} = \sum_{i=1}^m x_{ij};$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = N; \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Величина $\hat{p}_{ij} = x_{ij}/N$ может служить оценкой величины p_{ij} — вероятности совместного появления переменных x и y в классах i и j ; величины $\hat{p}_{i0} = x_{i0}/N$ и $\hat{p}_{0j} = x_{0j}/N$ — оценками величин p_{i0} и p_{0j} — вероятностей появления переменной x в состоянии i и переменной y в состоянии j соответственно.

Информационное отношение определяется как

$$I = \sum_{i,j} p_{ij} \ln (p_{ij}/p_{i0}p_{0j}) / \sum_i p_{i0} \ln p_{i0}. \quad (2)$$

Числитель выражения (2) интерпретируется как мера той информации о переменной x , которую можно получить, наблюдая переменную y . Знаменатель равен энтропии переменной x . Обозначим эту энтропию через H .

Величина J не зависит от основания логарифмов в (2), но для наших целей удобнее пользоваться натуральными логарифмами. Оценка информационного отношения с помощью \hat{J} — величины, которая получится, если в правую часть (2) вместо вероятностей подставить их оценки, является состоятельной смещенной оценкой. Поэтому при малых N величина \hat{J} , вычисленная для независимых переменных, может существенно отличаться от нуля. Например, в монографии «Природа многолетних колебаний речного стока» (1976) приводятся результаты экспериментов со случайными числами, распределенными по закону К. Пирсона III типа: во всех случаях выборочные значения \hat{J} отличны от нуля.

С помощью таблицы сопряженности признаков можно описывать качественные и количественные стороны переменных x и y . Однако при рассмотрении временных рядов такой анализ не использует информацию, связанную с последовательностью наступления состояний переменных. Этот недостаток частично искупается рассмотрением отношения J как функции от τ — сдвига наблюдаемых рядов относительно друг друга. Для этих

целей предложены автоинформационная и взаимно-информационная функции (Дружинин, Коноваленко, Кукушкина, Хамьянова, 1966, 1976). Использование информационных функций для определения тесноты связи внутри временных рядов и между ними предполагает знание некоторых характеристик выборочного распределения \hat{J} для статистически независимых рядов. Дальнейшие рассмотрения относятся только к этим рядам.

С. Кульбак (1957), применяя приближение

$$\ln(a/b) \approx (a^2 - b^2)/2ab, \quad (3)$$

показывает, что выражение вида

$$2N \sum_{i,j} \hat{p}_{ij} \ln[\hat{p}_{ij}/\hat{p}_{i0}\hat{p}_{0j}] \quad (4)$$

имеет предельное (при $N \rightarrow \infty$) распределение χ^2 с $(m-1) \times (n-1)$ степенями свободы.

Отсюда, а также из того, что

$$H = - \sum_{i=1}^m p_{i0} \ln p_{i0} > 0$$

при условии

$$0 < p_{ij} < 1; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (5)$$

следует, что величина

$$\chi^2 = 2NH\hat{J} \quad (6)$$

имеет то же предельное распределение.

Ниже приводятся приближения первых центральных моментов выборочного распределения информационного отношения \hat{J} : математического ожидания

$$M\hat{J} = (m-1)(n-1)/(2NH) + O(N^{-2}) \quad (7)$$

и дисперсии

$$D^2\hat{J} = (m-1)(n-1)/(2N^2H^2) + O(N^{-3}). \quad (8)$$

Главные члены приближений (7) и (8) могут быть получены непосредственно по моментам предельного распределения выражения (6), однако соотношения (7) и (8) выведены с помощью разложения изучаемой функции выборочных переменных \hat{p}_{ij} в ряд Тейлора в окрестности точки (p_{11}, \dots, p_{mn}) подобно тому, как это сделал Г. П. Башарин (1959) для энтропии H и Н. А. Ююкин (1974) для информационного отношения зависимых переменных.

Разложим \hat{I} в ряд Тейлора:

$$\hat{I} = I_0 + \sum_{i,j} \frac{\partial I_0}{\partial p_{ij}} (\hat{p}_{ij} - p_{ij}) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 I_0}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}} (\hat{p}_{ij} - p_{ij} - p_{ij}) (\hat{p}_{kl} - p_{kl}) + R_3. \quad (9)$$

Нулевой индекс при символе I означает, что соответствующее значение функции или производной вычислено в точке (p_{11}, \dots, p_{mn}) , координаты которой удовлетворяют условию (5); R_3 — остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_3 = \frac{1}{3!} \sum_{i,j} \sum_{k,l} \sum_{r,s} \frac{\partial^3 I_0}{\partial p_{ij} \partial p_{kl} \partial p_{rs}} (\hat{p}_{ij} - p_{ij}) (\hat{p}_{kl} - p_{kl}) (\hat{p}_{rs} - p_{rs}). \quad (10)$$

Производные в (10) вычисляются в некоторой точке

$$(p_{11} + \Theta(\hat{p}_{11} - p_{11}), \dots, p_{mn} + \Theta(\hat{p}_{mn} - p_{mn})),$$

причем $0 < \Theta < 1$. Первые два члена ряда (5) в случае независимых переменных равны 0; первый — по определению (2); второй — в силу (11):

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{\partial I_0}{\partial p_{ij}} (\hat{p}_{ij} - p_{ij}) &= \sum_{i,j} [\ln(p_{ij}/p_{i_0} p_{0j}) - 1] (\hat{p}_{ij} - p_{ij}) / H = \\ &= - \sum_{i,j} (\hat{p}_{ij} - p_{ij}) / H = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, математическое ожидание \hat{J} определяется как

$$M\hat{I} = M \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 I_0}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}} (\hat{p}_{ij} - p_{ij}) (\hat{p}_{kl} - p_{kl}) + R_3 \right], \quad (12)$$

а дисперсия — по формуле

$$\begin{aligned} D_2 \hat{I} &= M \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 I_0}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}} (\hat{p}_{ij} - p_{ij}) (\hat{p}_{kl} - p_{kl}) + \right. \\ &\quad \left. + R_3 \right]^2 - (M\hat{I})^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Непосредственным дифференцированием получаем выражение для второй производной I в случае независимых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_0}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}} &= \left[-\ln p_{i_0} - \ln p_{k_0} - 2 + H \left(\frac{\delta_{ij}}{p_{ij}} - \frac{\delta_{i_0}}{p_{i_0}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\delta_{0l}}{p_{0j}} \right) \right] / (2H^2 N^2), \end{aligned} \quad (14)$$

где символы Кронекера

$$\delta_{11} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \text{ и } j = l \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}; \delta_{10} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases};$$

$$\delta_{01} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = l \\ 0, & \text{если } j \neq l. \end{cases} \quad (15)$$

Величины p_{ij} рассматриваются как параметры мультиномиального распределения, и необходимые для усреднений (12) и (13) моменты случайных величин \widehat{p}_{ij} вычисляются с помощью характеристической функции этого распределения. Методику определения моментов и характеристическую функцию мультиномиального распределения можно найти у С. Уилкса (1967). Элементарные вычисления дают выражения (16) для центральных моментов первого — четвертого порядков и оценку момента пятого порядка. Для сокращения записи параметры переименованы и моменты выписаны для первых номеров. Естественно, формулы остаются верными и при любой иной перестановке соответствующих индексов:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= M(\widehat{p}_1 - p_1) = 0; \\ \mu_{11} &= M(\widehat{p}_1 - p_1)^2 = (p_1 - p_1^2)/N; \mu_{12} = M(\widehat{p}_1 - p_1 - \\ &\quad - p_1)(\widehat{p}_2 - p_2) = -p_1 p_2 / N; \\ \mu_{111} &= (p_1 - 3p_1^2 + 2p_1^3)/N^2; \mu = [-p_1 p_2 + 2p_1^2 p_2]/N^2; \\ \mu_{123} &= 2p_1 p_2 p_3 / N^2; \\ \mu_{1111} &= (3p_1^2 - 6p_1^3 - 3p_1^4)/N^2 + (p_1 - 7p_1^2 + 12p_1^3 - \\ &\quad - 6p_1^4)/N^3; \\ \mu_{1112} &= (-3p_1^2 p_2 + 3p_1^3 p_2)/N^2 + (-p_1 p_2 + \\ &\quad + 6p_1^2 p_2 - 6p_1^3 p_2)/N^3; \\ \mu_{1122} &= (p_1 p_2 - p_1 p_2^2 - p_1^2 p_2 + 3p_1^2 p_2^2)/N^2 + (-p_1 p_2 + \\ &\quad + 2p_1 p_2^2 + 2p_1^2 p_2 - 6p_1^2 p_2^2)/N^3; \\ \mu_{1123} &= (-p_1 p_2 p_3 + 3p_1^2 p_2 p_3)/N^2 + (2p_1 p_2 p_3 - \\ &\quad - 6p_1^2 p_2 p_3)/N^3; \\ \mu_{1234} &= 3p_1 p_2 p_3 p_4 / N^2 - 6p_1 p_2 p_3 p_4 / N^3; \\ \mu^{(v)} &= 0 (N^{-3}). \end{aligned} \quad (16)$$

Приведенных формул достаточно для того, чтобы, пренебрегая членами, имеющими порядок малости по N выше первого, и оставшим членом R_3 , получить из (12) главный член в выражении

для математического ожидания (7). Из (13), пренебрегая членами порядка малости по N выше второго, можно получить главный член в выражении для дисперсии (8).

Доказательство асимптотики в формулах (7) и (8) можно провести аналогично доказательству теоремы в известной монографии Г. Крамера (1975). Это доказательство не приводится.

Рассмотрим приближенные формулы, полученные из (7) и (8):

$$M = M\hat{I} \approx (m-1)(n-1)/(2NH); \quad (17)$$

$$\sigma^2 = D^2 I \approx (m-1)(n-1)/(2N^2H^2), \quad (18)$$

где M — математическое ожидание выборочного значения \hat{I} ; σ^2 — дисперсия выборочного значения \hat{I} ; m — количество классов, на которые разбиты значения переменной x ; n — количество классов, на которые разбиты значения переменной y ; N — количество рассматриваемых пар значений переменных; H — энтропия x , известная априори и приведенная к основанию логарифмов l , или выборочная ее оценка

$$H = - \sum_{i=1}^m \hat{p}_{i0} \ln \hat{p}_{i0}. \quad (19)$$

Формулу (17) можно также вывести из более общего выражения, полученного Н. А. Ююкиным (1974).

В монографии «Природа многолетних колебаний...» (1976) приведены распределения выборочной величины информационного отношения, полученные экспериментально для случая $m=n=10$. Предельным распределением случайной величины (6) тогда будет распределение χ^2 с 81 степенью свободы, т. е. практически нормальное распределение.

Анализ показывает, что в диапазоне $300 \leq N \leq 2500$ величина \hat{I} распределена приблизительно нормально около выборочного среднего с выборочной дисперсией.

Формулы (17) и (18) качественно объясняют поведение рассмотренных в этой книге кривых уровней значимости. Например, некоторое расширение доверительных интервалов с ростом τ связано с тем, что при уменьшении $N(N = N_{\text{нач}} - \tau)$ растет M и σ , а сужение доверительных интервалов при переходе к большому C_v — с тем, что увеличивается H . Е. Валь (1958) предлагает считать переменные x и y независимыми, если выборочное среднее окажется меньше математического ожидания (17). Эта рекомендация может быть принята лишь для малых значений произведения $(m-1)(n-1)$, когда асимметрия распределения значительна ($m, n \leq 4$). Наличие области высокой значимости около нуля в рассматриваемых экспериментах объясняется большим значением $(m-1)(n-1)$.

Действительно, из (7) и (8) следует

$$M/\sigma[(m-1)(n-1)/2]^{1/2} + O(N^{-1}). \quad (20)$$

Можно считать, что область высокой значимости появляется около нуля, когда главный член в (20) превышает три.

Ниже приведены математические ожидания и среднеквадратические отклонения выборочной величины \hat{I} для независимых x и y , имеющих распределение К. Пирсона III типа с параметрами $C_p = 0,20$, $C_s = 0,40$ при различной длине выборки N .

N	M_T	$M_{\mathcal{E}}$	σ_T	$\sigma_{\mathcal{E}}$
100	0,198	0,198	0,0305	0,0240
150	0,140	0,142	0,0220	0,0192
200	0,0988	0,1029	0,0155	0,0139
300	0,0654	0,0691	0,0103	0,0102
500	0,0393	0,0423	0,00625	0,00630
750	0,0261	0,0279	0,00410	0,00426
1000	0,0198	0,0203	0,00310	0,00310
1500	0,0131	0,0133	0,00206	0,00203
2000	0,00983	0,01013	0,00155	0,00152
2500	0,00783	0,00123	0,00123	0,00122

Интервал значений как переменной x , так и переменной y делится на 10 классов ($m = n = 10$). Величины M_T и σ_T рассчитаны по формулам (17), (18); $M_{\mathcal{E}}$ и $\sigma_{\mathcal{E}}$ определены экспериментально по рядам, полученным с помощью датчика случайных чисел. Статистика для определения $M_{\mathcal{E}}$ и $\sigma_{\mathcal{E}}$ набиралась каждый раз из 600 выборочных значений \hat{I} .

Как уже отмечалось, выборочное распределение \hat{I} в рассмотренных условиях близко к нормальному с параметрами $M_{\mathcal{E}}$, $\sigma_{\mathcal{E}}$. Ошибка в определении M по формуле (17) составляет от 0 до 7%. Что касается σ , то, начиная с $N = 300$ ($N = 3mn$), эта величина определяется по (18) практически точно. Но, поскольку σ мало по сравнению с M (согласно (20) и $\sigma \approx 0,16 M$), даже небольшая ошибка в определении M позволяет нам построить для всего диапазона N лишь грубый критерий различения статистических гипотез. Например, гипотеза о статистической независимости переменных x и y отвергается, если выборочное значение \hat{I} лежит вне интервала

$$M_T \pm 3,5\sigma_T, \quad (20a)$$

где величины M_T и σ_T вычислены в соответствии с (17) и (18).

Ошибка первого рода этого критерия примерно соответствует ошибке критерия Z_0 для нормального распределения. Иными словами, вероятность принять статистически независимые переменные x и y за зависимые по критерию (20a) не превышает

0,003. Уровень значимости критерия (20а) может быть понижен. Критериям

$$M_T \pm 3\sigma_T, \quad (20б)$$

$$M_T \pm 2,5\sigma_T \quad (20в)$$

соответствуют вероятности ошибок первого рода не более 0,01 и 0,05.

Пользуясь терминологией Крамера (1975), можно было бы считать выборочные значения информационного отношения, лежащие вне интервалов (20а), (20б) и (20в) высоко значимыми, значимыми и почти значимыми соответственно. Так как дисперсии малы, эти критерии мало отличаются от точных. Они могут быть полезны при предварительном отборе информативных предсказателей, исходя из значений информационной или взаимноинформационной функций. Более точную оценку значимости информационных функций можно получить, используя критерии нормального распределения с параметрами M_{Θ} , σ_{Θ} (мы рассматриваем случай, когда $(m - 1)(n - 1) \geq 30$). При достаточно больших N целесообразно пользоваться таблицами M_{Θ} , σ_{Θ} , а при $N \geq 3mn$ параметр σ_{Θ} можно заменить вычисленным теоретическим значением σ_T (18).

Примеры отбора предсказателей с помощью номограмм имеются в монографии «Природа многолетних колебаний речного стока» (1976). В ряде случаев удобным может оказаться построение номограмм, соответствующих теоретическим предельным распределениям величины информационного отношения, с параметрами, взятыми из эксперимента.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ГИДРОМЕТЕОЭЛЕМЕНТОВ
С ГОДОВОЙ ЗАБЛАГОВРЕМЕННОСТЬЮ

Необходимость прогнозов метеорологических элементов на следующий год ощущается с течением времени все острее и острее. Эффективность таких прогнозов обуславливается прежде всего тем, что большая заблаговременность позволяет провести необходимую подготовку больших народнохозяйственных систем и предприятий к работе как в условиях неблагоприятных лет или сезонов, так и к работе в благоприятные годы.

Следует подчеркнуть, что прогнозы с годовой и большей заблаговременностью, как правило, должны быть существенно более эффективными, чем прогнозы с малой заблаговременностью. Это объясняется тем, что для приспособления любого предприятия, хозяйственной системы и тем более отрасли народного хозяйства к функционированию в неблагоприятных или, наоборот, благоприятных условиях необходимо довольно продолжительный отрезок времени. Если это время не будет обеспечено заблаговременностью прогноза, то зачастую самый точный прогноз может оказаться практически бесполезным.

В настоящее время нет удовлетворительных методов прогнозирования с годовой заблаговременностью. Поэтому главным в научных исследованиях является сейчас поиск новых путей и возможностей в этом направлении.

Многолетний ход практически любого природного процесса складывается в результате поочередной смены серий лет последовательного повышения и понижения показателей его интенсивности. В природе довольно часто наблюдаются устойчивые и длительные (два, три, четыре и более лет подряд) серии лет повышения и понижения гидрометеоэлементов и других процессов. В подавляющем большинстве случаев это может быть лишь при условии, что в течение всего этого времени в большей или меньшей степени сохраняется действие однажды сформировавшегося комплекса причин (космического и земного происхождения), обуславливающего в течение длительного вре-

мени отклонение показателей в одну сторону. И только после того, как произойдет существенное изменение такого комплекса, происходит смена существующей тенденции развития процесса, и сформировавшаяся серия лет заменяется другой.

В этой связи в качестве элементарных составляющих многолетних колебаний гидрометеозлементов предлагается принимать генетически однородные группы серий лет их понижения и повышения (от одного до трех—четырёх лет и более), а не отдельные годы. Такое предложение, очевидно, должно рассматриваться в настоящее время как гипотеза, так как не удалось пока установить те генетически однородные комплексы факторов, которые вызывают к жизни названные серии. Но эта гипотеза подтверждается всем материалом натуральных наблюдений.

На большом фактическом материале установлено (Природа многолетних колебаний..., 1976), что в природе основную массу (93,6—99,5%) составляют одно-, двух- и трехлетние серии. Очень редко встречаются четырехлетние и исключительно редко — пяти- и шестилетние серии. Относительное количество серий каждой категории практически одинаково для всех рассмотренных гидрометеозлементов и атмосферной циркуляции (однолетние — 68—73%, двухлетние — 22—25%, трехлетние — 4—6%, на все остальные серии приходится 0,5—1,4%), что показывает генетическую однородность условий их формирования.

Приведенные характеристики распределения серий различной длительности получились настолько устойчивыми и определенными, что их оказалось возможным использовать для статистического качественного прогноза с заблаговременностью один год.

В Сибирском энергетическом институте СО АН СССР разработана схема качественного прогноза гидрометеозлементов с годовой заблаговременностью (Природа многолетних колебаний..., 1976). По этой схеме были даны прогнозы среднесезонной температуры воздуха и сезонных сумм атмосферных осадков для территории Восточной Сибири (Якутская АССР, Иркутская область и Красноярский край), атмосферного давления (Иркутская область), продолжительности безморозного периода (Иркутская область) и других гидрометеорологических элементов на 1975 и 1976 гг. В 1975 г. они оправдались на 80, в 1976 г. — на 90%.

В апреле — мае 1976 г. с участием студентов-дипломников Иркутского университета Т. И. Тычкиной, В. В. Пановой и В. А. Лаврешиной разработаны основные зависимости для прогнозов среднесезонных температур воздуха и сезонных сумм атмосферных осадков по территории Западной Сибири с годовой заблаговременностью и сделаны пробные прогнозы на 1976 г. (весну, лето и осень). Эти материалы в обобщенном виде и приводятся в данной главе. Кроме того, в ней показаны поря-

док составления таких прогнозов на примере средневесенней температуры воздуха в г. Томске*, а также возможность привлечения одного из необычных источников информации — сведений о группировках серий лет повышения и понижения — для повышения надежности прогнозов.

§ 1. ПРОГНОЗ СРЕДНЕСЕЗОННЫХ ТЕМПЕРАТУР ВОЗДУХА И СЕЗОННЫХ СУММ АТМОСФЕРНЫХ ОСАДКОВ В ЗАПАДНОЙ СИБИРИ

Основным исходным материалом для нас были среднемесячные данные о температуре воздуха и суммах атмосферных осадков за месяц по 28 станциям, относительно равномерно расположенным по территории Томской, Новосибирской, Кемеровской областей и Алтайского края. Период наблюдений в отдельных пунктах колеблется от 24 (Батурино) до 100 (Томск) лет, а общая длительность рассмотренных рядов наблюдений составляет 2662 года. Сезоны приняты в жестких календарных границах: весна — март, апрель, май; лето — июнь, июль, август; осень — сентябрь, октябрь, ноябрь.

Относительная частота появления серий лет повышения и понижения

Рассматриваемая ниже схема прогнозирования базируется на очевидном свойстве многолетних колебаний природных процессов — чередований серий лет их повышения и понижения. В связи с этим основную часть работы составляет подготовка исходной информации для определения относительных частот появления серий различной длительности, условных вероятностей их продолжения или непродолжения.

На рис. 38 представлен многолетний ход средневесенних температур воздуха в г. Томске. Для удобства последующих расчетов построена условная линейка знаков их приращения (см. рис. 38, 2), где серии повышения обозначены знаком плюс (выше средней линии), а серии понижения — знаком минус (ниже средней линии). Серии лет устойчивого хода температуры совпадают со средней линией (ни плюс, ни минус). Эта линейка построена с обычным допуском возможной ошибки измерений ($\pm 5\%$ от размаха колебаний) в годы солнечных реперов (Дружинин, Хамьянова, Лобановская, 1977).

На рис. 38,2 все серии пронумерованы, их общее число — 74. Крайние серии не учитываются из-за неопределенности их

* Подробное описание методики см. в работе И. П. Дружинина, Н. В. Хамьяновой, Ю. А. Лобановской (1977).

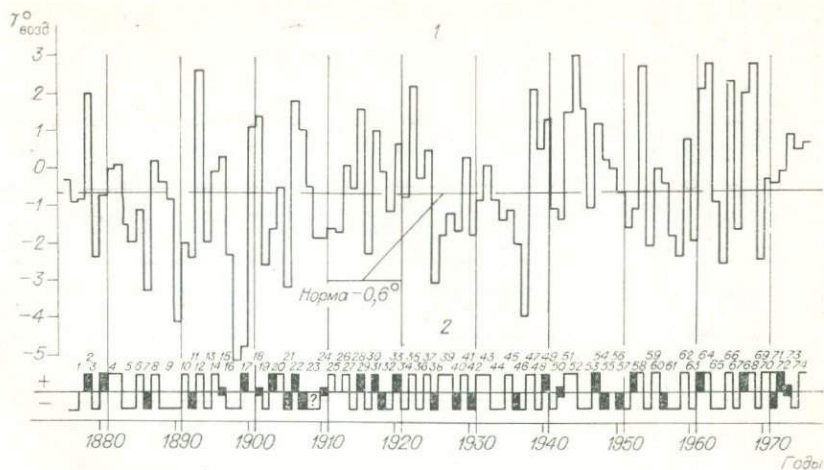


Рис. 38. Изменение средневесенней температуры воздуха в г. Томске (1) и условная линейка знаков ее приращения (2). Здесь и дальше прямоугольнички и знаки (?) — годы солнечных реперов; номерами показаны серии лет повышения (+) и понижения (-).

длительности. Далее подсчитывается количество серий разной длительности: одно-, двухлетние и т. д. Однолетних оказалось 54 серии (1—3, 6—8, 10—15, 18, 19, 21, 22, 24, 26—31, 33—38, 40—42, 45, 47—51, 54—56, 59, 60, 62, 63, 66, 67, 69, 70—74), двухлетних — 16 (5, 16, 17, 20, 32, 39, 43, 44, 46, 52, 53, 57, 58, 64, 65, 68), трехлетних — 4 (4, 9, 23, 61). После этого определяется относительная частота как отношение количества серий заданной продолжительности к сумме всех серий, полученных по ряду. Для однолетних серий она составляет 73% (54/74), двухлетних — 22% (16/74), трехлетних — 5% (4/74).

Аналогичным образом вычислены относительные частоты появления серий лет повышения и понижения среднесезонных температур воздуха и сезонных сумм атмосферных осадков для всех пунктов по трем сезонам, представленные в табл. 6. Как видно из таблицы, действительно наблюдается устойчивое распределение серий лет повышения и понижения сезонных показателей метеоэлементов. Основную массу (99—99,6%) серий лет повышения и понижения составляют одно-, двух- и трехлетние серии. Это благоприятно для использования их в прогнозных целях.

Оценка условных вероятностей появления новых серий

На практике в конце каждого года возникает одна и та же задача — определить направление хода рассматриваемого процесса в будущем году. Для этого достаточно знать вероятность

Общее число серий лет повышения и понижения среднесезонных температур воздуха и сезонных сумм атмосферных осадков в Западной Сибири и относительная частота их появления

Метеостанция	Общее число серий по сезонам			Относительная частота появления серий (%) продолжительностью, лет														
				Весна					Лето					Осень				
	Весна	Лето	Осень	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	

Среднесезонная температура воздуха

Напас	26	29	28	73	11	16		76	21	3			72	21	7	
Васюганское	35	37	34	74	20	6		81	11	8			70	24	6	
Парабель	32	39	35	72	12	16		85	10	5			74	20	6	
Колпашево	32	34	28	82	9	9		79	15	3	3		75	18	7	
Усть-Озерное	34	28	32	83	14	3		82	11	7			78	16	6	
Батурино	17	15	16	82	6	12		74	13	13			75	12,5	12,5	
Пудино	29	35	35	59	34	7		78	14	8			77	14	9	
Бакчар	29	25	30	79	14	7		72	12	8	8		77	20	3	
Кыштовка	25	27	24	60	36	4		70	26	4			58	33	9	
Томск	74	68	68	73	22	5		75	16	6	3		77	19	4	
Маринск	55	50	45	74	22	4		78	20	0	2		62	29	9	
Пихтовка	27	32	32	67	30	3		84	14	0	2		84	16		
Тогучин	30	30	32	70	30			77	13	7	3		81	19		
Ц. Рудник	29	25	27	79	21			72	28				81	15	0	4
Коченево	27	30	26	66	30	4		84	10	3	3		77	19	4	
Барабинск	35	35	37	63	34	3		72	20	8			79	18	3	
Татарск.	43	50	43	72	26	2		84	12	2	2		76	20	4	
Кушино	50	49	47	76	18	6		77	14	9			77	15	6	2
Кочки	24	29	26	62	29	9		83	14	3			77	15	8	
Посевная	30	34	30	64	33	3		79	15	6			74	13	10	3
Славгород	32	39	33	59	31	10		79	18	3			73	15	12	
Баево	35	29	30	74	20	6		76	24				77	13	10	
Алейская ж. д.	34	35	28	74	26			74	26				61	25	14	
Бийск-Зональная	29	28	29	72	28			68	32				76	17	7	

Кондома	27	30	31	56	44			74	23	3			77	20	3	
Кызыл-Озек	31	27	30	68	26	6		63	18	15	4		77	13	7	3
Рубцовск	33	35	34	61	33	6		68	26	6	4		73	18	9	
Змеиногорск	35	25	33	71	26	3		62	24	10	4		73	15	12	
Итого	939	953	923	71	24	5		76	18	5	1		74	19	6,6	0,4

Сезонная сумма атмосферных осадков

Александровское	29	30	28	66	31	3		77	17	3	3		67	22	11	
Напас	26	27	30	62	35	3		63	37				77	20	3	
Парабель	34	33	32	73	18	9		73	21	3	3		69	25	6	
Усть-Озерное	27	24	24	59	33	8		71	21	4	0	4	46	38	16	
Колпашево	38	39	37	76	24			82	15	3			76	21	3	
Пудино	31	33	36	65	29	6		61	39				70	30		
Бочкар	28	29	26	79	14	7		76	24				61	39		
Томск	64	64	75	64	29	7		67	27	6			83	13	4	
Кыштовка	26	22	26	69	27	4		59	32	4,5	0	4,5	65	31	4	
Татарск.	27	26	34	59	30	11		69	15	8	4	4	76	21	3	
Барабинск	29	27	36	52	38	7	3	59	41				72	25	3	
Пихтовка	30	30	31	70	27	0	3	77	13	10			81	13	3	3
Тогучин	28	25	30	74	22	4		60	28	8	4		73	23	4	
Коченево	25	30	33	60	32	8		77	15	0	8		88	6	6	
Кушино	28	27	29	75	21	4		67	29	4			72	28		
Кочки	28	27	32	68	28	4		66	26	4	4		78	19	3	
Посевная	27	27	30	70	22	8		67	30	3			80	17	3	
Маринск	50	36	36	68	24	8		75	19	3	3		81	8	8	3
Ц. Рудник	25	22	24	68	28	4		59	23	18			71	17	12	
Славгород	37	34	37	89	11			76	9	15			79	16	5	
Ключи	32	30	28	85	9	6		83	10	7			78	7	11	4
Рубцовск	37	37	39	78	14	6		78	14	8			82	13	5	
Бийск	28	28	26	79	7	14		64	32	4			65	27	8	
Алейск	35	39	32	77	20	0	3	85	15				69	22	9	
Тогул	32	32	30	78	19	3		81	19				70	27	3	
Змеиногорск	36	33	34	78	19	0	3	67	18	15			73	27		
Кызыл-Озек	30	25	31	86	7	7		64	24	12			84	16		
Онгудай	29	29	31	76	24			83	7	10			81	19		
Итого	896	865	917	71,7	22,7	5,2	0,4	71,5	22,4	5,0	0,8	0,3	74	21,4	4,3	0,3

Оценки условных вероятностей непродолжения текущей серии лет повышения и понижения среднесезонных температур воздуха и сезонных сумм атмосферных осадков в Западной Сибири

Метеостанция	Условная вероятность (%) непродолжения текущей серии в годы												
	второй	третий	четвер- тый	пятый	второй	третий	чет- вертый	пятый	шестой	второй	третий	чет- вертый	пятый
	Весна				Лето				Осень				

Среднесезонная температура воздуха

Напас	73	43	100	76	86	100				72	75	100	
Васюганское	74	78	100	81	57	100				71	80	100	
Парабель	72	44	100	85	67	100				72	78	100	
Колпашево	81	50	100	80	71	50	100			75	71	100	
Усть-Озерное	83	83	100	82	60	100				78	71	100	
Батурино	82	33	100	74	50	100				75	50	100	
Пудино	59	83	100	78	62	100				78	62	100	
Бакчар	79	67	100	72	43	50	100			77	86	100	
Кыштовка	60	90	100	70	87	100				58	80	100	
Томск	73	80	100	75	65	67	100			77	88	100	
Мариинск	74	86	100	78	91	100				62	85	100	
Пихтовка	67	89	100	84	80	0	100			84	100		
Тогучин	70	100		77	57	67	100			81	100		
Центральный Руд- ник	79	100		72	100		1			81	80	0	100
Коченево	66	89	100	84	60	50	100			77	83	100	
Барабинск	63	92	100	72	70	100				79	87	100	
Татарск	72	92	100	84	75	50	100			76	80	100	
Кушино	76	75	100	77	64	100				77	64	75	100
Кочки	62	78	100	83	80	100				77	67	100	
Посевная	64	91	100	79	71	100				74	50	75	100
Славгород	59	77	100	79	88	100				73	55	100	
Баево	74	78	100	76	100					77	57	100	
Алейская ж. д.	74	100		74	100					61	64	100	
Бийск-Зональная	72	100		68	100					76	71	100	

Кондома	56	100		74	88	100				77	86	100	
Кызыл-Озек	68	80	100	63	50	80	100			77	57	67	100
Рубцовск	61	85	100	68	82	100				73	67	100	
Змеиногорск	71	90	100	62	64	75	100			73	56	100	
Среднее	70	80	100	76	74	82	100			74	73	93	100

Сезонная сумма атмосферных осадков

Александровское	66	90	100	76	71	50	100			67	67	100	
Напас	62	90	100	63	100					77	86	100	
Парабель	73	67	100	73	78	50	100			69	80	100	
Усть-Озерное	59	82	100	71	71	50	0	100		46	69	100	
Колпашево	76	100		82	86	100				76	90	100	
Пудино	65	82	100	61	100					70	100		
Бакчар	79	67	100	76	100					61	100		
Томск	64	83	100	67	81	100				83	77	100	
Кыштовка	69	88	100	59	78	50	0	100		65	89	100	
Татарск	59	63	100	69	50	50	50	100		76	88	100	
Барабинск	52	79	67	59	100					72	90	100	
Пихтовка	70	89	0	77	57	100				81	67	50	100
Тогучин	74	75	100	67	70	67	100			73	88	100	
Коченево	60	80	100	77	86	0	100			88	50	100	
Кушино	75	86	100	67	89	100				72	100		
Кочки	68	78	100	66	78	50	100			78	86	100	
Посевная	70	75	100	67	89	100				80	84	100	
Мариинск	68	75	100	75	78	50	100			81	43	67	100
Центральный Руд- ник	68	88	100	59	56	100				71	57	100	
Славгород	89	100		76	38	100				79	75	100	
Ключи	85	60	100	83	60	100				78	33	75	100
Рубцовск	78	62	100	78	62	100				82	71	100	
Бийск	78	33	100	64	90	100				65	78	100	
Алейск	77	88	0	85	100					69	70	100	
Тогул	78	86	100	81	100					70	89	100	
Змеиногорск	78	88	0	67	82	100				73	100		
Кызыл-Озек	86	50	100	64	67	100				84	100		
Онгудай	76	100		83	40	100				81	100		
Среднее	72	79	87	100	71	77	78	69	100	74	80	95	100

Таблица 8

Оценки условных вероятностей появления начал новых серий лет повышения и понижения среднесезонных температур воздуха и сезонных сумм атмосферных осадков в годы солнечных реперов

Метеостанция	Условная вероятность (%) появления начал новых серий в годы солнечных реперов			Метеостанция	Условная вероятность (%) появления начал новых серий в годы солнечных реперов		
	Весна	Лето	Осень		Весна	Лето	Осень
<i>Среднесезонная температура воздуха</i>				<i>Сезонная сумма атмосферных осадков</i>			
Напас	86	100	86	Александровское	73	100	73
Васюганское	94	94	88	Напас	79	100	100
Парабель	88	100	94	Парабель	87	75	75
Колпашево	88	94	88	Усть-Озерное	80	85	53
Усть-Озерное	93	100	100	Колпашево	82	100	94
Батурино	88	88	100	Пудино	75	69	82
Пудино	88	94	100	Бакчар	72	79	86
Бакчар	86	86	93	Томск	85	76	90
Кыштовка	86	92	86	Кыштовка	72	93	86
Томск	95	82	85	Татарск	87	75	87
Мариинск	89	92	79	Барабинск	75	71	76
Пихтовка	80	93	87	Пихтовка	100	87	94
Тогучин	74	73	93	Тогучин	73	87	87
Центральный Руд- ник	86	85	100	Коченево	73	94	87
Коченево	79	87	87	Кушно	86	79	79
Барабинск	83	88	88	Кочки	85	73	94
Татарск	92	92	90	Посевная	86	72	86
Кушно	87	91	95	Мариинск	82	88	94
Кочки	72	93	93	Центральный Руд- ник	93	79	72
Посевная	80	93	93	Славгород	100	88	88
Славгород	71	88	100	Ключи	87	87	80
Баево	88	100	93	Рубцовск	94	88	76
Алейск	87	93	87	Бийск	86	100	86
Бийск-Зональная	79	93	93	Алейск	87	87	81
Кондома	80	100	100	Тогул	80	67	80
Кызыл-Озек	73	87	93	Змеиногорск	87	94	82
Рубцовск	71	83	88	Кызыл-Озек	93	86	86
Змеиногорск	88	81	82	Онгудай	100	86	100
Среднее	84	91	88	Среднее	88	84	84

продолжения начавшейся серии или вероятность ее непродолжения (появления новой) в будущем году. В зависимости от полученных вероятностей и может быть сформулирован прогноз.

Условные вероятности непродолжения начавшейся серии лет повышения и понижения определяются по относительным частотам. Порядок их вычисления подробно описан ранее (Природа многолетних колебаний..., 1976). Условные вероятности непродолжения текущей серии лет повышения и понижения рассматриваемых метеоэлементов во втором, третьем, четвертом годах (они же вероятности начала новой серии во втором, третьем, четвертом годах) приведены в табл. 7.

Как видим, оценки условных вероятностей получаются высокими далеко не всегда. Например, условная вероятность не-продолжения серии повышения или понижения среднесезонной температуры воздуха весной в Пудино равна 59%, Кыштовке — 60, Кочках — 62, Посевной — 64, Славгороде — 59, Кондоме — 56, Рубцовске — 61, Кызыл-Озекке — 68; летом — 63% в Кызыл-Озекке, 68% — Бийске-Зональном и Рубцовске и 62% в Змеиногорске; осенью — 56% в Кыштовке, 62% в Мариинске и 61% в Алейской ж. д. Оценки условных вероятностей не-продолжения серии лет повышения или понижения среднесезонной температуры воздуха в третьем году также невысоки.

Аналогичные результаты получаются и для сезонных сумм атмосферных осадков.

С такими оценками вероятностей прогнозы получаются недостаточно надежными. Отсюда возникает задача привлечения дополнительной информации и определения с ее участием новых оценок условных вероятностей. В качестве такой информации могут быть использованы прогнозы резких изменений солнечной активности, вероятности появления редких событий, особенности хода процесса в данном районе и др.

Следует отметить, что рассматриваемая схема качественного прогнозирования является открытой и «сама требует» каждый раз дополнительную информацию, с помощью которой можно было бы повысить надежность конкретного прогноза. Например, за счет учета влияния резких изменений солнечной активности можно было бы увеличить надежность прогноза средневесенней температуры воздуха в Томске на 1976 г. с 73 до 95%, если бы 1976 г. был реперным годом.

Методика определения оценок условных вероятностей появления начал новых серий лет повышения и понижения в годы солнечных реперов подробно описана ранее (Природа многолетних колебаний..., 1976; Дружинин, Хамьянова, Лобановская, 1977). Для рассматриваемой территории (табл. 8) они оказываются весьма высокими, и было бы неразумно ими не пользоваться. Но для этого нужно иметь надежные прогнозы солнечных реперов.

Схема прогнозирования

Процесс прогнозирования по предлагаемой методике состоит из двух основных частей: качественного прогноза и количественной оценки прогнозируемых величин.

Качественное прогнозирование заключается в том, чтобы в конце каждого года можно было определить вероятность того, что в будущем году:

а) продолжится ранее сформировавшаяся (в данном или нескольких годах) серия повышения или понижения средне-

Параметры уравнения регрессии ($X_{i+1} = aX_i + b$) среднесезонных температур воздуха и сезонных сумм атмосферных осадков в смежные годы по сериям лет повышения и понижения в Западной Сибири

Метеостанция	Весна, серия				Лето, серия				Осень, серия			
	повышения		понижения		повышения		понижения		повышения		понижения	
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
<i>Среднесезонная температура воздуха</i>												
Напас	0,41	-1,21	0,77	-1,92	0,35	10,3	0,48	7,19	0,84	1,20	0,06	-3,16
Васюганское	0,38	0,77	0,44	-2,17	0,44	9,46	0,27	10,7	0,51	0,81	0,13	-1,90
Парабель	0,32	0,31	0,56	-2,10	0,51	8,26	0,63	5,01	0,15	0,69	0,08	-2,12
Колпашево	0,13	0,01	0,65	-1,96	0,68	5,94	0,61	5,31	0,74	1,15	0,41	-1,50
Усть-Озерное	0,10	0,50	0,41	-2,12	0,58	7,17	0,61	5,47	0,34	-0,15	-0,04	-3,08
Батурино	0,16	0,97	0,29	-1,95	0,34	11,3	0,70	3,97	0,44	1,0	0,07	-2,20
Пудино	0,44	1,47	0,42	-1,65	0,60	6,83	0,66	4,45	0,43	0,77	0,18	-1,43
Бакчар	0,19	1,47	0,33	-1,71	0,92	2,25	0,61	5,47	0,42	0,83	0,08	-1,60
Кыштовка	0,34	1,73	0,38	-1,36	0,44	9,60	0,88	1,00	0,29	1,11	0,33	-1,10
Томск	0,45	1,19	0,40	-1,63	0,60	7,47	0,45	8,11	0,58	1,49	0,52	-1,26
Маринск	0,28	1,50	0,59	-1,15	0,50	9,00	0,57	6,12	0,28	1,42	0,37	-0,86
Пихтовка	0,37	1,91	0,27	-1,67	0,97	1,37	0,50	7,38	0,54	1,29	0,31	-1,35
Тогучин	0,41	2,00	0,37	-1,20	0,93	2,10	0,32	10,8	0,34	1,56	0,45	-1,16
Центральный Руд- ник	0,19	1,13	0,37	-1,76	0,73	4,95	0,42	8,11	0,28	0,76	0,17	-1,51
Коченево	0,31	2,43	0,34	-1,24	0,78	4,59	0,56	6,72	0,66	1,42	0,19	-0,38
Барабинск	0,49	1,86	0,28	-1,46	0,46	9,84	0,55	6,78	0,34	1,54	0,53	-0,70
Татарск	0,48	1,75	0,59	-0,12	0,43	10,6	0,63	5,31	0,47	1,55	0,79	-1,07
Купино	0,54	2,00	0,30	-1,40	0,36	12,3	0,62	5,66	0,33	1,99	0,74	-0,98
Кочки	0,44	2,23	0,13	-1,25	0,55	8,42	0,68	4,60	0,43	1,48	0,66	-1,11
Посевная	0,28	2,04	0,27	-1,23	0,90	2,68	0,47	7,80	0,42	1,42	0,44	-0,91
Славгород	0,40	3,03	0,35	-0,57	0,54	9,64	0,63	6,03	0,38	2,61	0,63	-0,31
Баево	0,25	2,81	0,34	-0,60	0,45	10,7	0,91	0,60	0,30	2,47	0,56	-0,22
Алейская ж. д.	0,22	3,16	0,43	-0,18	0,50	9,98	0,46	9,14	0,53	2,21	0,54	-0,27

Бийск-Зональная	0,33	2,86	0,41	-0,64	0,70	6,00	0,45	8,90	0,41	2,04	0,58	-0,66
Кондома	0,29	1,64	0,42	-1,08	0,40	9,96	0,60	5,62	0,46	1,14	0,46	-0,93
Кызыл-Озек	0,26	2,79	0,59	-0,94	0,59	7,30	0,43	8,68	0,72	1,74	0,45	0,02
Рубцовск	0,19	3,43	0,49	-0,19	0,63	8,02	0,49	8,75	0,32	3,07	0,61	-0,25
Змеиногорск	0,32	3,06	0,54	-0,87	0,67	6,64	0,51	7,85	0,43	2,88	0,52	0,08

Сезонная сумма атмосферных осадков

Александровское	0,93	34	0,49	19	0,59	160	0,44	90	0,79	47	0,78	6
Напас	0,86	41	0,28	45	0,83	87,5	0,36	99	0,30	128	0,68	20
Парабель	0,82	36	0,24	41	0,69	120	0,38	88	0,50	76	0,59	22
Усть-Озерное	0,80	45	0,50	32	0,38	166	0,48	74	0,91	45	0,53	45
Колпашево	0,73	44	0,44	29	0,63	113	0,62	34	0,88	48	0,76	5
Пудино	0,99	23	0,43	24	0,48	160	0,33	100	0,72	53	0,57	27
Бакчар	0,94	30	0,63	11	0,86	97	0,60	44	0,40	82	0,89	
Томск	0,86	40	0,64	9,4	0,71	115	0,36	85	0,68	76	0,59	26
Кыштовка	0,67	42	0,27	29	0,36	171	0,20	107	0,35	86	0,27	42
Татарск	0,79	34	0,48	13	0,19	171	0,42	60	0,37	68	0,39	28
Барабинск	0,90	25	0,58	5,7	0,48	140	0,33	69	0,18	91	0,48	19
Пихтовка	0,34	67	0,60	13	0,33	199	0,37	90	0,31	94	0,60	26
Тогучин	0,59	50	0,19	40	0,49	144	0,48	60	0,14	113	0,42	37
Коченево	1,4	8,2	0,09	32	0,42	158	0,68	86	0,13	84	0,65	6
Купино	0,86	25	0,36	15	2,2	-82	0,57	28	0,42	56	0,47	14
Кочки	0,40	56	0,26	22	0,69	70	0,53	30	0,35	75	0,41	22
Посевная	0,39	67	0,33	32	0,64	121	0,39	74	0,15	113	0,40	42
Маринск	0,33	76	0,38	26	0,64	113	0,54	28	1,06	22	0,33	44
Центральный Руд- ник	0,81	76	0,37	72	0,56	205	0,41	118	0,38	237	0,73	4
Славгород	0,27	49	0,40	10	0,74	74	0,17	59	0,49	48	0,75	5,5
Ключи	0,55	40	0,43	5,8	0,69	70	0,44	13	0,78	34	0,16	30
Рубцовск	0,84	36	0,49	16,5	0,41	101	0,50	14	0,78	40	0,48	21
Бийск	0,40	96	0,74	13	0,49	160	0,20	106	0,16	163	0,64	10
Алейск	0,76	46	0,33	30	0,47	109	0,37	43	0,34	98	0,62	
Тогучин	0,65	64	0,70	2,4	0,23	189	0,27	85	0,42	112	0,43	42
Змеиногорск	0,50	118	0,34	47	0,77	98	0,28	70	0,60	136	0,52	32
Кызыл-Озек	0,45	121	0,46	47	0,42	233	0,64	60	0,23	187	0,45	55
Онгудай	0,73	41	0,46	19,5	0,42	159	0,20	109	0,60	50	0,25	34

сезонной температуры воздуха, или сезонной суммы атмосферных осадков;

б) сохранятся их значения на уровне текущего года, т. е. произойдет перерыв серии повышения или понижения;

в) появится новая серия, т. е. после текущей серии понижения начнется серия повышения, и наоборот.

В качестве примера рассмотрим условия прогнозирования средневесенней температуры воздуха в г. Томске на 1976 г. Как видно из рис. 38, к концу весны 1975 г. стало ясно, что он является первым годом серии повышения и нужно определить, продолжится ли в 1976 г. эта серия или начнется новая серия понижения, или уровень будет устойчивым. Условная вероятность непродолжения начавшейся серии во втором году равна 73% (см. табл. 7). Следовательно, с вероятностью 73% можно утверждать, что весна в 1976 г. в Томске будет холоднее весны 1975 г., и с вероятностью 27% можно утверждать, что она будет теплее. Это есть качественный прогноз средневесенней температуры воздуха на 1976 г. В данном случае он оказался недостаточно надежным.

В случае, если текущий год является вторым, третьим и т. д. годом текущей серии, для прогноза используются оценки условных вероятностей непродолжения текущей серии соответственно в третьем, четвертом и т. д. году (см. табл. 7). Для Томска они были существенно больше (80 и почти 100%).

Для повышения надежности прогноза необходимо привлекать дополнительную информацию. Для условий 1976 г., например, можно учесть то обстоятельство, что в течение 6 лет (1970—1975 гг.) наблюдались теплые весны (температура выше нормы, см. рис. 38). За прошедшие 100 лет это единственный случай столь длительной группы теплых весен и с

большой вероятностью (около 100%), видимо, можно прогнозировать на 1976 г. по меньшей мере снижение температуры по сравнению с 1975 г., т. е. начало серии понижения.

Количественная оценка прогнозных величин может быть дана на основе привлечения дополнительной информации за счет внутривидных связей (Дружинин, Хамьянова, Лобановская, 1977).

На рис. 39 приведен график связи средневесенних температур воздуха в смежные годы

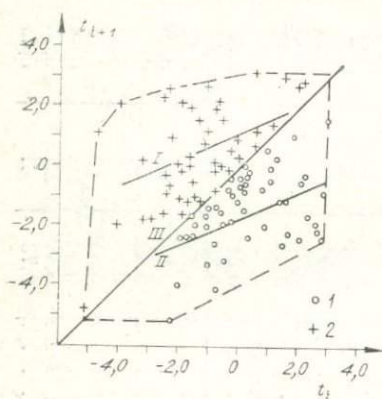


Рис. 39. Связь средневесенних температур воздуха в г. Томске в смежные годы.

1, 2 — соответственно серии лет понижения и повышения; I, II — линии регрессии; III — линия раздела зон повышения и понижения.

в г. Томске за 100 лет (1875—1975 гг.). Рассеивание точек всего поля весьма велико (коэффициент корреляции $0,11 \pm \pm 0,10$) и учитывать при прогнозах автокорреляционную связь мало оснований. Но если рассматривать связь смежных лет отдельно в сериях лет повышения (крестики) и в сериях лет понижения (кружочки), то связь оказывается значимой и достаточно существенной (коэффициенты корреляции соответственно в сериях повышения — $0,43 \pm 0,12$ и понижения — $(0,44 \pm 0,11)$). Ее можно использовать в прогнозных целях после установления ожидаемой в будущем году серии.

Например, в Томске с вероятностью около 100% в 1976 г. следует ожидать начало серии понижения. Следовательно, наибольшая средневесенняя температура в 1976 г. должна быть не выше уровня 1975 г. ($0,7^\circ\text{C}$). Минимальная определяется по нижней огибающей (см. рис. 39) при значении температуры 1975 г. и равна $-3,6^\circ\text{C}$. Условное математическое ожидание прогнозируемой температуры определяется по линии регрессии (II) и равно $-1,35^\circ\text{C}$ (см. рис. 39). Аналогичным путем производится количественная оценка прогнозных величин в других случаях.

В табл. 9 приведены параметры уравнений регрессий названных связей отдельно по зонам повышения и понижения. Они могут быть использованы для приближенного определения наиболее вероятных прогнозных величин среднесезонной температуры воздуха и сезонных сумм атмосферных осадков по каждому из названных пунктов без построения графика связи. Например, для рассматриваемого случая температура $t_{1976} = 0,40$ $t_{1975} - 1,63 = -1,35^\circ$.

ПРОГНОЗ МЕТЕОЭЛЕМЕНТОВ НА 1976 Г.

Прогнозы среднесезонной температуры воздуха и количества атмосферных осадков даны на 1976 г. (весну, лето и осень). Для этого было построено около 170 хронологических графиков и 170 графиков связи. Подсчитано на БЭСМ-4 350 уравнений регрессии и около 500 коэффициентов корреляции. После тщательного анализа хронологических графиков по трем сезонам для 28 метеостанций Западной Сибири были сделаны 168 опытных прогнозов. При этом были определены наиболее вероятные, наибольшие и наименьшие величины.

По результатам качественных прогнозов сделана попытка территориального обобщения. Весьма удобными для этих целей оказываются специальные прогнозные карты, на которых выделяются области повышения и понижения прогнозируемых величин по сравнению с предшествующим годом. На рис. 40 представлена такая карта для осени 1976 г. На всей рассматриваемой территории в данном случае четко обозначилась тенден-

вы. Однако во многих случаях для повышения надежности необходимо привлекать дополнительную информацию. Одна из таких возможностей рассматривается ниже.

§ 2. СВОЙСТВО ГРУППИРОВАНИЯ СЕРИЙ ЛЕТ ПОВЫШЕНИЯ И ПониЖЕНИЯ ГИДРОМЕТЕОЭЛЕМЕНТОВ И ЕГО ПРОГНОЗНОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Методика выявления группировок серий

Свойство чередования серий присуще не только колебаниям речного стока, но и колебаниям атмосферных осадков, температуры воздуха и другим метеоэлементам. Возьмем для примера 130-летний ряд годовых сумм осадков в г. Барнауле (рис. 41). Для выделения серий построим условную линейку знаков приращений годовых сумм осадков в смежные годы, пронумеруем на ней серии; их общее количество — 90, в том числе 55 однолетних, 30 двухлетних и 5 трехлетних.

Поскольку рассматриваемая схема качественного прогноза имеет заблаговременность один год, целесообразно все серии разделить на две категории: однолетние и длительные (двухлетние и трехлетние).

Из рис. 41 видно, что в многолетнем ходе годовых осадков в г. Барнауле выделяются продолжительные периоды, когда преобладают или однолетние (например, 1950—1960 гг.), или длительные (1860—1905 гг.) серии. Это очень важное обстоятельство и в будущем на него нужно обратить серьезное внимание. Пока же мы не имеем возможности предсказывать периоды

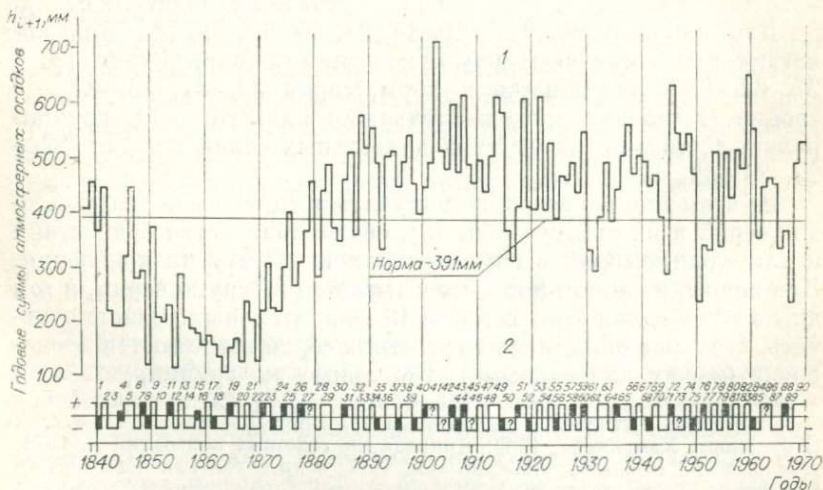


Рис. 41. Межгодовые изменения атмосферных осадков в г. Барнауле (1839—1970 гг.) (1) и условная линейка знаков их приращений (2).

Таблица 10

Характеристика группировок однолетних и длительных серий повышения и понижения годовых сумм осадков в г. Барнауле за 1839—1970 гг.

Число группировок	Количество серий в группировках	Частота появления серий в группировках, %
<i>Однолетние серии</i>		
1	7	12,7
2	4	14,5
3	3	16,3
4	2	14,5
5	1	9,1
6	—	—
7	—	—
8	—	—
9	2	32,9
Сумма . . .	19	55
<i>Длительные серии</i>		
1	10	29,4
2	3	17,7
3	2	17,7
4	3	35,2
Сумма . . .	18	34

Длительные серии 3, 5, 10, 14, 27, 46, 65, 71, 73, 75 располагаются поодиночке между однолетними. Серии 18—19, 36—37, 62—63 объединяются в пары, серии 29—31, 85—87 — в тройки. Наиболее продолжительными являются три группировки, состоящие из четырех длительных серий каждая (22—25, 39—42, 49—52).

По этим данным нетрудно получить распределение группировок серий и их сумму (табл. 10), общее количество однолетних и длительных серий в группировках и частоту их появления. Как видим, в данном ряду насчитывается 37 групп серий, в том числе 19 из однолетних серий и 18 из длительных. Важно отметить, что лишь около 13% однолетних серий встречаются поодиночке (между длительными). Остальные же группируются по

концентрации длительных или однолетних серий и вынуждены ограничиться общими данными. С этой целью используем линейку знаков приращений (см. рис. 41)*. По ней нетрудно заметить, что однолетние серии располагаются между длительными как поодиночке, так и группами по 2, 3, 4... серии подряд. Соответственно распределяются между однолетними и длительные серии. Например, однолетние серии 4, 26, 28, 38, 64, 72, 74 заключены поодиночке между длительными сериями. Однолетние серии 1—2, 20—21, 47—48, 88—89 группируются парами, однолетние серии 11—13, 15—17, 43—45 — тройками, 6—9, 32—35 — четверками. Серии 66—70 образуют пятерку, а 52—61 и 76—84 — девятки однолетних серий.

* По своим качествам эта линейка не отличается от многих других (Дружинин, Хамьянова, 1969; Природа многолетних колебаний..., 1976; Дружинин, Хамьянова, Лобановская, 1977; и др.), так как четко свидетельствует о концентрации начал новых серий в годы солнечных реперов (81% против 62% в другие годы, вероятность случайности различия этих частот около 3%), средняя длина серий 1,4 года и др.

2, 3, 4 и т. д. серии подряд. Длительные серии в 30% случаев встречаются поодиночке (между однолетними), а остальные 70% группируются по 2, 3, 4 серии подряд.

Для выяснения закономерностей группирования серий лет повышения и понижения водности рек аналогичным путем проанализирован большой фактический материал (табл. 11).

По данным табл. 11 можно сделать следующие выводы:

1. Однолетние серии только в 5—10% случаев встречаются между длительными поодиночке. Значительная часть их (около 80%) группируется по 2, 3, 4... 11 серий подряд. Остальные почти 10% однолетних серий приходится на более продолжительные группировки, в том числе около 2% серий объединяются в группировки до 18—20 и 22—23 серий подряд.

2. Распределение длительных серий иное. Около 46% из них встречаются поодиночке; почти 90% всех серий сосредотачивается в группах по 1, 2, 3 серий подряд. Исключительно редки случаи появления группировок продолжительностью 6—8, 10 серий подряд.

3. Частоты появления группировок однолетних и длительных серий всех рассмотренных процессов близки между собой, что может свидетельствовать о их генетической обусловленности.

Приведенные обобщенные характеристики являются наиболее объективными и удобными для всякого рода суждений, сопоставлений и т. д. Они являются, по нашему мнению, существенными как в общем плане изучения закономерностей многолетних колебаний гидрометеозлементов, так и в части их практического использования для прогнозных целей и математического моделирования.

С учетом последнего проводились выборочные проверки согласованности распределений группировок однолетних и длительных серий рядов природных процессов с аналогичным распределением случайных чисел. Критерий согласия χ^2 показал, что различие между ними не случайно. В дальнейшем необходимо провести более детальные исследования в этом направлении.

Эмпирические оценки условных вероятностей появления однолетних или длительных серий

Полученные распределения группировок однолетних и длительных серий несут в себе новую информацию о многолетних колебаниях стока рек и метеорологических элементов, однако для их качественного прогноза с годовой заблаговременностью необходимы оценки условных вероятностей появления или непоявления новых серий в будущем году в зависимости от предшествующей обстановки. Очевидно, из-за недостаточной продолжительности натурных наблюдений и малой теорети-

Характеристика группировок однолетних и длительных серий лет повышения и понижения гидрометеороэлементов и атмосферной циркуляции.

Число серий в группировке	Среднегодовые расходы рек (331/16204)			Атмосферные осадки за год (63/4301)			Среднегодовые температуры воздуха (102/5845)			Среднегодовые величины атмосферного давления (30/1659)			Барико-циркуляционные характеристики А. А. Вительса (24/1528)			Повторяемость атмосферной циркуляции по Б. Л. Дзержевскому (31/2240)			Итого (581/31777)		
	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в
<i>Группа однолетних серий</i>																					
1	646	646	10,0	166	166	7,8	170	170	5,8	67	67	7,9	46	46	5,6	87	87	8,0	1182	1182	8,2
2	439	878	13,4	115	230	10,8	184	368	12,6	64	128	15,0	42	84	10,1	56	112	10,2	900	1800	12,5
3	334	1002	15,3	102	306	13,4	117	351	11,9	31	93	10,9	26	78	9,4	46	138	12,6	656	1968	13,7
4	245	980	15,0	65	260	12,2	97	388	13,1	28	112	13,2	20	80	9,7	32	128	11,7	487	1948	13,5
5	157	785	12,0	36	180	8,5	69	345	11,7	17	85	10,0	13	65	7,9	27	135	12,4	319	1595	11,0
6	113	678	10,3	32	192	9,0	48	288	9,8	14	84	9,9	17	102	12,3	15	80	7,3	239	1424	9,9
7	59	413	6,3	22	154	7,2	25	175	5,6	8	56	6,6	5	35	4,2	9	63	5,8	128	896	6,2
8	43	344	5,3	15	110	5,1	14	112	3,8	8	64	7,5	9	72	8,7	12	9,6	8,8	101	798	5,6
9	19	171	2,6	17	153	7,2	12	108	3,7	3	27	3,2	4	36	4,3	12	108	9,9	67	603	4,3
10	14	140	2,2	9	90	4,2	15	150	5,1	6	60	7,1	5	50	6,0	5	50	4,5	54	540	3,8
11	11	121	1,8	9	99	4,7	14	154	5,2	5	55	6,5	4	44	5,3	2	22	2,1	45	495	3,4
12	9	108	1,6	5	60	2,8	5	60	2,0	—	—	—	3	36	4,3	2	24	2,1	24	288	2,0
13	3	39	0,6	5	65	3,0	7	90	3,0	—	—	—	1	13	1,6	—	—	—	16	207	1,4
14	6	84	1,3	1	14	0,7	2	28	1,0	—	—	—	—	—	—	1	14	1,3	10	140	1,0
15	2	30	0,5	—	—	—	3	45	1,5	—	—	—	—	—	—	1	15	1,4	6	90	0,62
16	1	16	0,2	—	—	—	2	32	1,1	—	—	—	2	32	3,9	—	—	—	5	80	0,56

17	4	68	1,0	1	17	0,8	4	68	2,3	—	—	—	1	17	2,1	—	—	—	10	170	1,2
18	1	18	0,8	1	18	0,8	—	—	—	—	—	—	1	18	2,2	—	—	—	3	54	0,37
19	1	19	0,3	—	—	—	—	—	—	1	19	2,2	—	—	—	—	—	—	2	38	0,26
20	—	—	—	1	20	0,9	—	—	—	—	—	—	1	20	2,4	—	—	—	2	40	0,28
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	22	2,0	1	22	0,15
23	—	—	—	—	—	—	1	23	0,8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	23	0,16
Сумма...	2107	6540	100	602	2134	100	789	29515	100	252	850	100	201	825	100	308	1904	100	4258	14401	100

Группа длительных серий

1	1282	1282	36,2	402	402	45,8	513	513	48	160	160	48,3	134	134	47,0	202	202	48,6	2693	2693	41,2
2	557	1114	31,4	132	264	30,0	167	334	31	47	94	28,3	45	90	31,7	74	148	35,5	1022	2044	31,4
3	213	639	18,0	40	120	13,7	37	111	10,0	13	39	11,7	16	48	17,0	18	54	13,0	337	1011	15,5
4	80	320	9,0	19	76	8,6	18	72	7,0	6	24	7,2	3	12	4,3	—	—	—	126	504	7,6
5	27	135	3,8	1	5	0,5	5	25	2,0	3	15	4,5	—	—	—	—	—	—	36	180	2,75
6	4	24	0,7	2	12	1,4	1	6	0,6	—	—	—	—	—	—	1	6	1,3	8	48	0,73
7	2	14	0,4	—	—	—	1	7	0,7	—	—	—	—	—	—	1	7	1,6	4	28	0,43
8	1	8	0,2	—	—	—	1	8	0,7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	16	0,24
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	1	10	0,3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	10	0,15
Сумма...	2167	3546	100	596	879	100	743	1076	100	229	332	100	197	284	100	294	417	100	4229	6534	100

Примечание. а — число группировок; б — количество серий в группировках; в — частота появления серий в группировках, %. В головке таблицы в числителе — число рассмотренных пунктов, в знаменателе — число лет испытаний.

Таблица 12

Повторяемость однолетних и длительных серий повышения и понижения годовых сумм атмосферных осадков в г. Барнауле после предшествующих группировок и эмпирические оценки условных вероятностей их появления

Число серий в группировках*	Повторяемость последующих серий				Общая сумма	Эмпирические оценки условных вероятностей появления серий	
	однолетних		длительных			одно-летних	длительных
	номер	сумма	номер	сумма			
Однолет-ных:							
1	2, 7, 12, 16, 21, 33, 44, 48, 54, 67, 77, 89	12	5, 27, 29, 39, 65, 75, 75	7	19	63	37
2	8, 13, 17, 34, 45, 55, 68, 78	8	3, 22, 49, 90	4	12	67	33
3	9, 35, 56, 69, 79,	5	14, 18, 46	3	8	63	37
4	57, 70, 80	3	10, 36	2	5	60	40
5	58, 81	2	71	1	3	67	33
6	59, 89	2	—	—	2	~100	~0
7	60, 83	—	—	—	2	~100	~0
8	61, 84	2	—	—	2	~100	~0
9	—	—	62, 85	2	2	0	~100
Длитель-ных:							
1	4, 6, 11, 15, 28, 47, 66, 72, 74, 76	10	19, 23, 30, 37, 40, 50, 63, 86	8	18	66	34
2	20, 38, 64	3	24, 31, 41, 51, 87	5	8	38	62
3	32, 88	2	25, 42, 52	3	5	40	60
4	26, 43, 53	3	—	—	3	~100	~0

* Здесь и в табл. 13 имеется в виду число серий последней предшествующей группировки.

ческой разработки этого комплекса вопросов в настоящее время могут быть получены лишь эмпирические оценки названных условных вероятностей.

Приемы определения этих оценок целесообразно рассмотреть на примере годовых сумм атмосферных осадков в г. Барнауле (табл. 12). Эти данные могут быть использованы для оценки эмпирических условных вероятностей появления однолетних или длительных серий после предшествующих одной, двух однолетних подряд и т. д. серий. В самом деле, по данным первой строки можно утверждать, что условная вероятность появления однолетней серии после одной однолетней предшествующей составляет около 63% (12/19), а условная вероятность появления длительной серии в этом случае — около 37% (7/19). В целом ряде случаев они относительно невелики, но иногда

приближаются к 100%; и те и другие могут использоваться для прогнозных целей.

В табл. 13 приведены эмпирические обобщенные оценки условных вероятностей появления однолетних и длительных серий после различных предшествующих группировок серий для стока рек метеорологических элементов и атмосферной циркуляции. Она составлена по тому же принципу, что и табл. 15, с использованием ранее указанных (см. табл. 14) материалов натуральных наблюдений.

Группировки серий — дополнительная информация в схеме качественного прогноза с годовой заблаговременностью

Схема качественного прогноза (Дружинин, Хамьянова, 1976; Природа многолетних колебаний..., 1976; Дружинин, Хамьянова, Лобановская, 1977) предусматривает в конце каждого года определение условных вероятностей продолжения или непродолжения текущей серии в будущем году. В ряде случаев для повышения надежности таких прогнозов необходимо использовать многие источники информации. В этом одно из преимуществ названной схемы. В ней можно найти место и для информации о группировках серий. Рассмотрим это более подробно на конкретных примерах годовых сумм атмосферных осадков в г. Барнауле (см. рис. 41). Прежде всего привлекают внимание те ситуации, когда условная вероятность появления однолетней или длительной серии после предшествующих группировок близка к 100%. Как видно из табл. 15, такие ситуации возможны после девятилетней группировки однолетних серий и после группировки четырех длительных серий подряд. Кроме того, после 6, 7, 8 однолетних серий подряд оценка условной вероятности появления однолетних серий также близка к 100%. Таких случаев насчитывается 7 (см. рис. 41). С такой надежностью могли бы быть сделаны прогнозы в конце 1877 г. на 1878 г., в конце 1906 г. на 1907 г., в конце 1922 г. на 1923 г., в конце 1927 г. на 1928 г., в конце 1931 г. на 1932, в конце 1957 г. на 1958 г., в конце 1961 г. на 1962. И эта возможность, безусловно, должна быть использована. Рассмотрим ее более подробно на примере прогноза на 1932 г.

В 1931 г. четко обозначился первый год новой серии понижения. Если не учитывать предшествующую группировку однолетних серий, то можно считать, что условная вероятность ее непродолжения во втором году равна вероятности появления однолетних серий, т. е. 61% (55/90). Прогноз явно ненадежен. Но можно заметить, что 1931 г. предшествовала группировка из 9 однолетних серий подряд. Эмпирическая условная вероятность появления еще одной однолетней серии после девяти предшествующих близка к 0% (см. табл. 15). Следовательно,

Количество последующих серий и эмпирические оценки условных вероятностей появления однолетних (О) и длительных (Д) серий после предшествующих группировок

Число серий в группировке	Среднегодовые расходы рек				Атмосферные осадки за год				Среднегодовые температуры воздуха				Среднегодовые величины атмосферного давления				Барико-циркуляционные характеристики Л. А. Вительса				Повторяемость атмосферной циркуляции по Б. Л. Давыдовскому			
	Количество последующих серий		Оценка условных вероятностей		Количество последующих серий		Оценка условных вероятностей		Количество последующих серий		Оценка условных вероятностей		Количество последующих серий		Оценка условных вероятностей		Количество последующих серий		Оценка условных вероятностей		Количество последующих серий		Оценка условных вероятностей	
	О	Д	О	Д	О	Д	О	Д	О	Д	О	Д	О	Д	О	Д	О	Д	О	Д	О	Д	О	Д
1	1461	646	69	31	436	166	72	28	617	170	78	22	185	67	73	27	154	46	77	23	221	87	72	28
2	1023	436	70	30	321	115	74	26	433	184	70	30	121	64	65	35	112	42	73	27	165	56	75	25
3	689	334	68	32	219	102	68	32	316	117	73	27	90	31	74	26	86	26	77	23	119	46	72	28
4	444	245	65	35	154	65	70	30	219	97	69	31	62	28	69	31	66	20	77	23	87	32	73	27
5	287	157	65	35	118	36	77	23	150	69	68	32	45	17	72	28	53	13	84	16	60	27	69	31
6	174	113	61	39	85	32	73	27	102	48	68	32	31	14	69	31	36	17	68	32	15	75	75	25
7	115	59	66	34	64	22	74	26	77	25	76	24	23	8	74	26	31	5	91	9	36	9	80	20
8	72	43	63	37	49	15	77	23	63	14	82	18	15	8	65	35	22	9	71	29	24	12	67	33
9	53	19	74	26	32	17	66	34	54	12	81	19	12	3	80	20	18	4	82	18	12	12	50	50
10	39	14	74	26	23	9	42	28	36	15	71	29	6	6	50	50	13	5	72	28	7	5	58	42
11	28	11	72	28	14	9	61	39	22	14	61	39	1	5	27	83	9	4	69	31	5	2	71	29
12	18	10	64	36	9	5	64	36	17	5	77	23	1	—	~100	~0	6	3	67	33	3	2	60	40

Однолетние серии

13	13	5	72	28	4	5	44	55	10	7	59	41	1	—	~100	~0	5	1	83	17	3	—	100	0
14	7	6	54	46	3	1	75	25	8	2	80	20	1	—	~100	~0	5	—	100	~0	2	1	67	33
15	5	2	72	28	3	—	~100	~0	5	3	62	38	1	—	~100	~0	5	—	100	~0	1	1	50	50
16	4	1	80	20	3	—	~100	~0	4	1	80	20	1	—	~100	~0	3	2	60	40	1	—	~100	~0
17	1	3	28	72	2	1	67	33	1	3	25	75	1	—	~100	~0	2	1	67	33	1	—	~100	~0
18	1	—	~100	~0	1	1	50	50	1	—	~100	~0	1	—	~100	~0	1	1	50	50	1	—	~100	~0
19	—	1	~0	~100	1	—	~100	~0	1	—	~100	~0	1	—	~100	~0	1	—	~100	~0	1	—	~100	~0
20	—	—	—	—	—	1	~0	~100	1	—	~100	~0	—	1	~0	~100	—	1	~0	~100	1	—	~100	~0
21	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	~100	~0	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	~100	~0
22	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	~100	~0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	~0	~100
23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	~0	~100	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Длительные серии

1	1228	886	58	42	402	194	67	23	513	230	69	31	160	69	70	30	134	64	68	32	202	94	68	32
2	557	329	63	37	132	62	67	23	167	63	73	27	47	22	68	32	45	19	70	30	74	20	78	22
3	213	116	65	34	40	22	64	36	37	26	59	41	13	9	59	41	16	3	84	16	18	2	90	10
4	80	36	67	33	19	3	86	14	18	8	69	31	6	3	67	33	3	—	~100	~0	—	2	~0	~100
5	28	8	78	22	1	2	37	63	5	3	62	38	3	—	~100	~0	—	—	—	—	—	2	~0	~100
6	4	4	50	50	2	—	~100	~0	1	2	33	67	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	50	50
7	2	2	50	50	—	—	—	—	1	1	50	50	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	~100	~0
8	1	1	50	50	—	—	—	—	1	—	~100	~0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	1	~0	~100	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	1	—	~100	~0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

1931 г. должен принадлежать длительной серии, и с вероятностью около 100% в 1932 г. следует ожидать уменьшения количества осадков по сравнению с 1931 г. В данном случае получены противоречивые результаты: с вероятностью 61% — появление новой серии повышения в 1932 г. и вероятностью около 100% — продолжение начавшейся серии понижения. Вторая оценка оказывается решающей. Возьмем еще один пример (прогноз на 1923 г.). В 1922 г. обозначилось начало серии подъема. Вероятность того, что она не продолжится в 1923 г. всего лишь около 61% и не дает оснований для надежного прогноза. Но можно заметить, что начавшейся в 1922 г. серии повышения предшествовала группировка из четырех длительных серий подряд. Вероятность того, что за этой группировкой последует еще одна длительная серия, близка к нулю. Следовательно, условная вероятность того, что в 1923 г. будет серия понижения (уменьшение осадков по сравнению с 1922 г.), близка к 100%. Здесь обе оценки (61 и около 100%) дают согласованный результат.

Такие возможности, конечно, нельзя не использовать. Кроме них довольно часто удается сочетать сведения о группировках серий с полученной из других источников информацией, что в одних случаях может повысить доверие к прогнозу при согласовании результатов по всем независимым источникам информации или, наоборот, уменьшить это доверие, способствуя переводу прогноза в разряд ненадежных.

Группировки серий как одна из возможностей количественных оценок прогнозных величин

Свойство группирования серий может быть использовано для получения еще одной порции полезной информации. Уже упоминалось, что рассматриваемая схема прогноза позволяет получить и приближенные количественные оценки прогнозных величин, в частности, за счет дифференциации связей показателей (автокорреляционного поля) в смежные годы по сериям лет повышения и понижения (Дружинин, Хамьянова, Лобановская, 1977; и др.) и специального выделения длительных серий. На рис. 42 зона возможных значений прогнозных величин в длительных сериях оконтурена штриховой линией. Можно дополнительно дифференцировать группировки длительных серий, но для прогноза интереснее анализ группировок однолетних серий. Девятилетние группировки однолетних серий занимают ограниченную область, оказавшуюся для нее внутри зоны длительных серий (см. рис. 42). Это очень благоприятное обстоятельство и в дальнейшем на него следует обратить особое внимание. Группировки 2, 3, 4 и 5 однолетних серий подряд не проявляют какой-нибудь явно выраженной

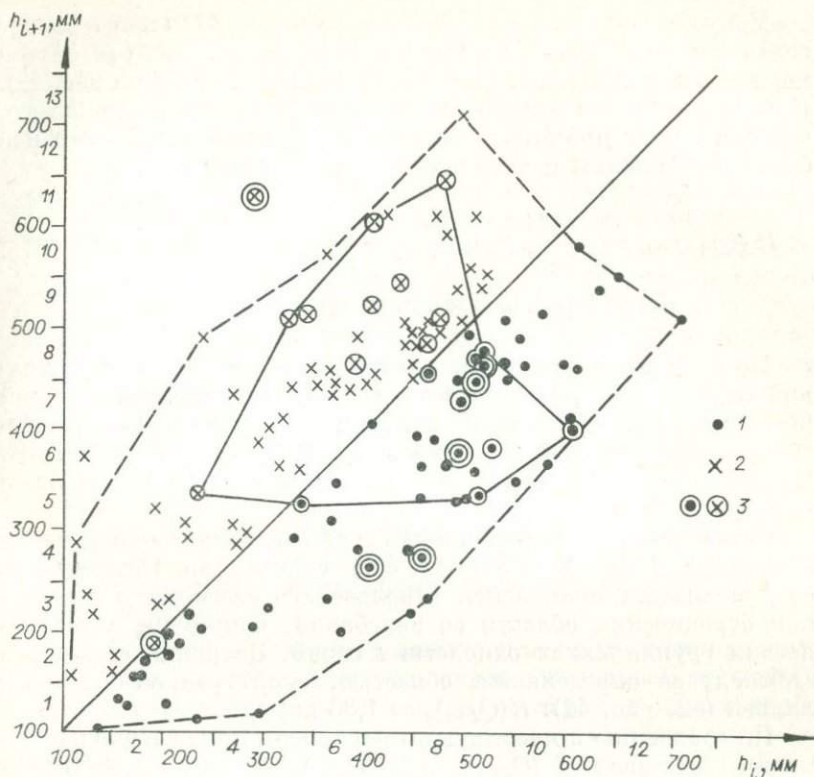


Рис. 42. Связь годовых сумм атмосферных осадков в смежные годы (автокорреляционное поле) в г. Барнауле (1839—1970 гг.)

1, 2 — соответственно серии лет понижения и повышения годовых сумм атмосферных осадков; 3 — однолетки из девятилетних группировок.

тенденции, а однолетки-одиночки нередко занимают периферию автокорреляционного поля (двойной кружок).

Следует отметить, что дифференциация автокорреляционного поля по отдельным областям длительных серий и больших группировок однолетних серий уменьшает степень нашего незнания о пределах колебаний прогнозных величин. Это уменьшение неопределенности количественно можно выразить соответствующим уменьшением энтропии (Дружинин и др., 1966), которая является мерой неопределенности наших знаний о той или иной системе или объекте и определяется как сумма произведений вероятностей различных состояний системы (P_2) на логарифмы этих вероятностей, взятая с обратным знаком:

$$H(y) = - \sum_{q=1}^k p_q \lg p_q$$

Допустим, что автокорреляционное поле характеризует связь системы Q_{i+1} с системой Q_i . Каждая из этих систем может быть в тринадцати состояниях (классы 1—13 на рис. 42). В случае, если мы ничего не знаем о системе Q_{i+1} кроме того, что она может принимать 13 состояний, наше незнание о ней будет наибольшим и энтропия будет максимальной

$$H(Q_{i+1})_{\max} = - \sum_{q=1}^{13} P_q \lg P_q = - \sum_{i=1}^{13} \frac{1}{13} \lg \frac{1}{13} = - \lg \frac{1}{13} = \\ = \lg 13 = 3,70 \text{ двоичных единиц (дв.ед.)}$$

Но если учесть реальное распределение возможных состояний системы Q_{i+1} по классам в пределах длительных серий (см. рис. 42, штриховой контур), то степень нашего незнания уменьшается и энтропия $H(Q_{i+1})_1 = 3,30$ дв. ед. Приращение информации о системе Q_{i+1} $I(Q_{i+1}) = H_{\max} - H(Q_{i+1})_1 = 3,70 - 3,30 = 0,40$ дв. ед.

Остающаяся неопределенность системы, характеризующаяся энтропией $H(Q_{i+1})_1 = 3,30$ дв. ед., еще велика. Поэтому для ее уменьшения попытаемся использовать сведения о возможном ограничении области ее колебаний, например, в девятилетних группировках однолетних серий. Энтропия системы в этом случае определяется областью, оконтуренной сплошной линией (см. рис. 42): $H(Q_{i+1})_2 = 1,36$ дв. ед.

По сравнению с предыдущим вариантом приращение информации составит $I(Q_{i+1})_2 = H(Q_{i+1})_1 - H(Q_{i+1})_2 = 3,30 - 1,36 = 1,94$ дв. ед. Оно весьма велико, хотя и после этого остающаяся неопределенность еще достаточно велика, и для ее уменьшения необходимо использовать другие сведения.

При анализе ряда других автокорреляционных полей выяснилось, что и здесь количественные показатели гидрометеорологических элементов в крупных группировках однолетних серий часто концентрируются в центральной части поля, а однолетки-одиночки, занимают его периферийные области. Это характерно, в частности, для стока рек. Выявившиеся особенности представляют существенный интерес и должны быть изучены подробнее.

Резюмируя изложенное, следует отметить, что 5—10% однолетних серий встречаются поодиночке между длительными сериями; около 80% однолетних серий формируют 2—11-летние группировки и почти 10% однолетних серий приходится на группировки более 11 лет. Максимальными являются 20—23-летние группировки.

Длительные серии группируются существенно иным образом: половина из них встречается одиночками (между однолетними), около 40% длительных серий формируют группировки по 2, 3 серии подряд и почти 10% длительных серий приходится на более продолжительные группировки. Максимальные

группировки могут достигать 7—10 длительных серий подряд.

Свойство группирования серий может быть эффективно использовано в схеме качественного прогноза с годовой заблаговременностью путем учета эмпирических оценок условных вероятностей появления однолетних или длительных серий после соответствующей предшествующей группировки, названные оценки вероятностей могут применяться как самостоятельон, так и в сочетании с другими источниками информации.

Учет группировок серий позволяет в ряде случаев сделать некоторые выводы относительно возможного диапазона колебаний прогнозных величин. В частности, представляет интерес явление концентрации количественных характеристик крупных группировок однолетних серий преимущественно в центральной части автокорреляционного поля и выход однолеток-одиночек в периферийные области, что особенно характерно для годового стока крупных сибирских рек.

§ 3. СИНХРОННОСТЬ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ ГИДРОМЕТЕОЭЛЕМЕНТОВ КАК ИСТОЧНИК ПРОГНОСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Изучение синхронности и асинхронности многолетних колебаний стока рек имеет важное научное и практическое значение в связи с осуществлением и планированием в нашей стране крупных гидроэнергетических и водохозяйственных мероприятий.

Обширные исследования в этой области принадлежат П. С. Кузину (1960), Т. Н. Кочуковой (1954), Н. В. Сомову (1967), И. П. Дружинину (1958, 1960), Н. В. Хамьяновой (1961) и др.

Методы изучения асинхронности весьма различаются. В простейшем случае—непосредственное определение коэффициента корреляции. Используется подсчет совпадений и несовпадений годового стока разных обеспеченностей. Эффект асинхронности определяется путем сравнения ординат, заключенных между кривыми обеспеченности суммарного стока (отдач) нескольких рек (единая воображаемая река) и суммой стоков (отдач) тех же рек той же обеспеченности.

В настоящей работе сделана попытка выявить синхронность и асинхронность колебаний стока рек и метеорологических элементов с учетом представлений элементарных составляющих их многолетних колебаний в виде неоднократно упоминавшихся выше серий лет повышения и понижения. В качестве примера построим график связи (рис. 43, *в*) годового стока рек Оби у Новосибирска (1904—1975 гг.) и Енисея у Базаихи (1904—1975 гг.). На графике крестиками показаны годы, когда на первой и второй реках наблюдалась серия повышения стока

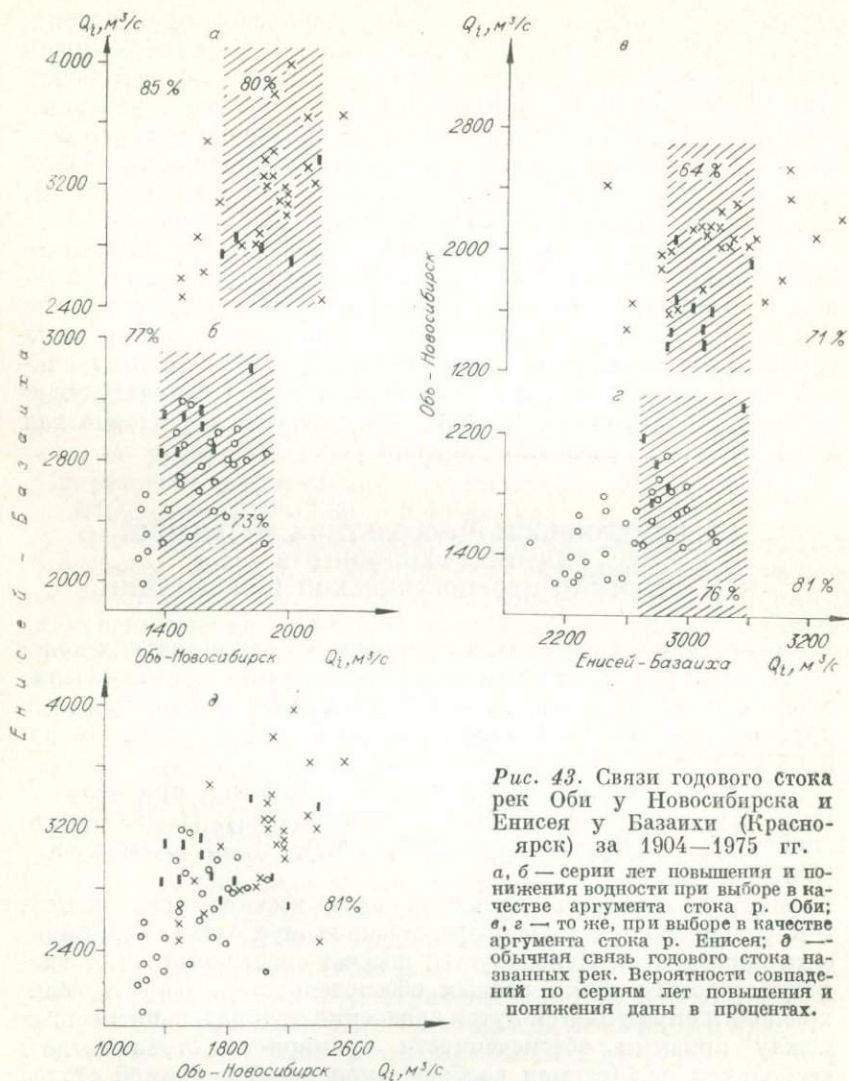


Рис. 43. Связи годового стока рек Оби у Новосибирска и Енисея у Базайхи (Красноярск) за 1904—1975 гг.

а, б — серии лет повышения и понижения водности при выборе в качестве аргумента стока р. Оби; в, г — то же, при выборе в качестве аргумента стока р. Енисея; д — обычная связь годового стока названных рек. Вероятности совпадений по сериям лет повышения и понижения даны в процентах.

по сравнению с предыдущим годом. Годы, когда на одной и другой реках наблюдались серии понижения стока, отмечены кружочками. Несовпадения отмечены прямоугольниками. В те годы, когда были перерывы серий, а число таких лет очень невелико, они включаются в число серий повышения или понижения.

Подсчеты показали, что в 58 годах из 72 имели место совпадения по сериям повышения и понижения. Вероятность совпадений составляет 81% (58/72). Большое число случаев совпадений приходится на наиболее многоводные и маловодные годы,

а несовпадения располагаются в основном в области, близкой к средним условиям.

Если общий график связи (см. рис. 43) разделить на серии лет повышения (см. рис. 43, *a*) и понижения (см. рис. 43, *б*), то можно получить дополнительную информацию. Оказывается, что вероятность совпадения в этих областях различна и отличается от общей (81%). В сериях лет повышения она составляет 85% (28/33), а понижения — 77% (30/39). В каждой из этих областей можно выделить еще по две зоны, в которых вероятности совпадений различны. Наибольшее число несовпадений в заштрихованных зонах. Вероятности совпадения (см. рис. 43, *a*, *б*) в этих зонах соответственно 80 и 73% в сериях повышения и понижения. За пределами этих зон вероятности совпадения близки к 100%.

Следует отметить, что связь колебаний стока рассматриваемых рек с учетом серий лет повышения и понижения неодинакова и зависит от выбора аргумента (р. Енисей или р. Обь), что объясняется несовпадением времени появления длительных серий на реках.

На рис. 43, *в*, *г* приведены связи колебаний стока рек Енисей и Оби по сериям лет повышения и понижения. Оценки вероятностей совпадения отличаются от приведенных выше: в сериях повышения (*в*) — 71%, в сериях понижения (*г*) — 81%. В заштрихованных зонах вероятности совпадения соответственно 64 и 76%.

Ниже приводятся вероятности совпадений по сериям лет повышения и понижения (аналогично общей связи, см. рис. 43, *д*) для некоторых пар рек Сибири, а также для сезонных величин температуры воздуха и сумм атмосферных осадков отдельных пунктов Западной Сибири. Вероятности совпадения по сумме лет повышения составляют: для годового стока рек Бии у Бийска и Томи у Новокузнецка (1896—1975 гг.) 86%, приточности в оз. Байкал и боковой (на участке Иркутск—Братск) приточности в Братское водохранилище (1901—1975 гг.) — 65, приточности в оз. Байкал и годового стока Оби у Новосибирска (1900—1975 гг.) — 52%.

Аналогичные вероятности совпадения колебаний средне-летних температур воздуха (VI—VIII мес) в Купино и Татарске (1925—1975 гг.) — 85%, Купино и Барабинске (1926—1975 гг.) — 89, Татарске и Александровске (1933—1975 гг.) — 72%, а вероятности совпадения хода весенних (III—V мес) сумм атмосферных осадков в Томске и Усть-Озерном (1938—1975 гг.) — 77, Томске и Троицке (1927—1975 гг.) — 71%.

Предлагаемый прием выявления синхронности колебаний гидрометеоэлементов представляется относительно наглядным и простым. Но он более универсален по сравнению с обычно используемым, так как позволяет учесть не только количественное соотношение элементов сравниваемых рядов, но и их

качественные характеристики с весьма детальной дифференциацией. При полной синхронности колебаний сравниваемых процессов вероятности совпадений по сериям лет повышения и понижения должны быть равным 100%, а вероятности несовпадений — нулю. При полной асинхронности вероятности совпадений должны быть равны нулю, а вероятности несовпадений — 100%. Случай наибольшей неопределенности — когда вероятности совпадений равны 50%.

Случаи наибольшей неопределенности отмечаются даже для близких речных бассейнов (приток в оз. Байкал и сток Оби — 52%). Относительно близки к ним и условия колебаний стока в диапазоне средних величин (см. рис. 43). Но в экстремальных условиях (маловодья или многоводья) синхронность колебаний стока рек наблюдается на больших территориях, что вполне согласуется с физическими условиями их образования. Разница формирования стока рек и других гидроэлементов в средних и экстремальных условиях может иметь большое значение, в том числе и в практических задачах, и должна быть подробно изучена.

Получаемые при таком анализе результаты можно использовать в качестве источника дополнительной информации в схеме качественного прогноза с годовой заблаговременностью. Например, необходимо дать прогноз годового стока р. Енисея у Базаихи на 1934 г. В 1933 г. на р. Енисее началась новая серия понижения. Вероятность того, что она не продолжится на втором году, равна 69% (Природа многолетних колебаний..., 1976, с. 54). Если дать прогноз только с этой вероятностью, то он будет явно ненадежным. Привлечь для повышения надежности дополнительную информацию (сведения о солнечных реперах, редких событиях и др.) не представляется возможным. В этом случае полезно посмотреть, какая ситуация складывается на соседних реках.

Так, на р. Оби 1933 г. был третьим годом серии понижения. Оценка условной вероятности того, что эта серия не продолжится в четвертом году, близка к 100%. Попытаемся применить этот очень надежный прогноз для повышения надежности прогноза стока р. Енисея на 1934 г. Поскольку на Оби рассматриваемый год почти наверняка относится к серии повышения, то можно использовать зависимости (см. рис. 43, а), из которых видно, что вероятность совпадения в целом составляет 85%, т. е. во всяком случае она не ниже 80%. Следовательно, имея данные по р. Оби, можно прогнозировать повышение стока р. Енисея в 1934 г. по сравнению с 1933 г. с вероятностью не ниже 80%, что заметно выше исходной (69%).

Еще один пример использования полученных результатов оценок синхронности в прогнозных целях. Допустим, необходимо дать прогноз годового стока р. Оби у Новосибирска на 1953 г. В 1952 г. на р. Оби началась новая серия повышения.

Вероятность того, что она не продолжится в 1953 г. (Природа многолетних колебаний..., 1976, с. 54), равна 61%. Привлечь дополнительную информацию для повышения надежности прогноза, так же как и в предыдущем примере, не представляется возможным. Однако можно привлечь некоторые данные о колебаниях стока р. Енисея. 1952 г. был здесь весьма высоким по водности и вероятность непродолжения серий повышения в 1953 г. близка к 92%. Иными словами, с довольно высокой вероятностью (92%) можно прогнозировать на р. Енисее начало серии понижения в 1953 г. Последнее дает основание пользоваться зависимостями рис. 43, г. Как видим, вероятность совпадения серий лет понижения на сравниваемых реках не ниже 76%. Это позволяет с такой вероятностью прогнозировать понижение на р. Оби, что заметно превышает исходную величину (61%).

На наш взгляд, приведенных примеров достаточно для иллюстрации принципиальной возможности получения дополнительной информации для прогнозирования стока с годовой заблаговременностью за счет анализа синхронности колебаний стока разных рек, что свидетельствует о необходимости более детального изучения этого вопроса.

§ 4. ПРОГНОЗ ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

Большой интерес представляют прогнозы совокупности метеорологических явлений, способствующих или не способствующих локальному загрязнению атмосферы.

Одним из современных методов охраны воздушного бассейна и снижения степени его загрязнения в периоды неблагоприятных для рассеяния примесей метеоусловий является уменьшение количества выбросов в эти периоды (Берлянд, 1967; Сонькин, 1968, 1971). Для того чтобы источник загрязнения — промышленное предприятие — мог своевременно принять меры к такому уменьшению выбросов, необходимо, во-первых, определить комплекс неблагоприятных синоптико-метеорологических условий, во-вторых, заблаговременно, на основе прогноза погодных условий предсказать их наступление и, в-третьих, довести до сведения предприятия, чтобы оно по заранее разработанному плану приняло меры к уменьшению выбросов.

Теоретически и экспериментально давно установлены те метеорологические процессы и явления, которые способствуют накоплению загрязнений в районе выброса (Сонькин, 1971; Детри Дж., 1973; Сонькин и др., 1975). Однако многообразие благоприятных и неблагоприятных сочетаний для рассеивания метеорологических факторов затрудняет однозначное определение суммы их влияния на уровень загрязнения воздуха. Если же промышленный комплекс расположен в сложных рельефных условиях и представляет собой мощный энергетический источ-

ник, стационарно выделяющий огромное количество горячих газов (химическая, нефтехимическая, бумажно-целлюлозная промышленность и др.), то это приводит к некоторым отклонениям от традиционных представлений о механизме переноса и рассеяния примесей. Эти отклонения происходят вследствие возникновения местных микроклиматических условий, связанных с перераспределением температур в вертикальной и горизонтальной плоскостях (Чебаненко, 1974), изменением направлений переноса воздушных масс в приземном слое района (Шмидт, Боер, 1963), с уменьшением притока ультрафиолетовой части спектра солнечной радиации (Мунзар, 1971) и другими факторами (Цитцельбергер, 1973; и др.). Все эти причины существенно затрудняют прогнозирование характера загрязнения на основе выбранных неблагоприятных метеорологических параметров, его осуществление субъективно и успешность прогноза зависит от подготовленности прогнозиста и знания им специфики распространения загрязнения именно в исследуемом районе, что не всегда возможно.

Для избавления от всех этих трудностей предлагается количественный метод прогноза загрязнения атмосферы; метод может быть применен для любого города, если имеется ряд 2—3-летних наблюдений, составляющий 1000—1200 концентраций для каждой из прогнозируемых примесей.

В основу предлагаемого метода прогноза положены понятия теории вероятностей, позволяющие по апостериорным вероятностям получить априорную вероятность какого-либо события (Иоффе и др., 1970; Корн Т., Корн Т., 1968).

В нашем случае задача сводится к получению величины вероятности загрязнения атмосферы выше выбранного критерия q при условии осуществления сложного события Z_v , состоящего из комплекса метеоэлементов S_{ij} и представляющего их логическую сумму

$$Z_v = \bigcap_{i=1}^k S_{ij}, \quad (1)$$

где $i = 1, 2, \dots, k$ — число выбранных метеоэлементов; $j = 1, 2, \dots, l$ — число градаций в каждом метеоэлементе; $v = 1, 2, 3, \dots, N$ — число сочетаний из l градаций и k метеоэлементов.

Так как события q и Z_v совместны между собой, а Z_v и Z_{v+1} попарно несовместны, к ним применима теорема Байеса:

$$P(Z_v/q) = P(q \cap Z_v)/P(Z_v),$$

где $P(Z_v/q)$ — вероятность наступления события Z_v при условии возникновения события q ; $P(q \cap Z_v)$ — вероятность совместного осуществления событий q и Z_v ; $P(q)$ — безусловная вероятность события q . Применяя теорему умножения к совместным

событиям q и Z_v , получаем

$$P(q/Z_v) = P(q) \cdot P(Z_v/q)/P(Z_v). \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), найдем

$$P(q/Z_v) = P(q) \cdot P\left(\bigcap_{i=1}^h S_{ij}/q\right) / P\left(\bigcap_{i=1}^h S_{ij}\right). \quad (3)$$

Осуществление перехода от $\bigcap_{i=1}^h S_{ij}$ к S_{ij} производится при допущении, что q с S_{ij} независимы, так же как и S_{ij} независимы между собой. Тогда, согласно теории множеств:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^h S_{ij}\right) = P(S_{1j}) \cdot P(S_{2j}) \dots P(S_{hj}) = \prod_{i=1}^h P(S_{ij}); \quad (4)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^h S_{ij}/q\right) = P(S_{1j}/q) \cdot P(S_{2j}/q) \dots = \prod_{i=1}^h P(S_{ij}/q).$$

С учетом (4)

$$P(q/Z_v) = P(q) \cdot \prod_{i=1}^h P(S_{ij}/q)/P(S_{ij}). \quad (5)$$

Еще раз применив теорему умножения для совместных событий q и S_{ij} , получаем окончательную формулу прогноза, удобную для его расчета:

$$P(q/Z_v) = P(q) \cdot [P(q \cap S_{1j})/P(q) \cdot P(S_{1j})] \cdot [P(q \cap S_{2j})/P(q) \times \\ \times P(S_{2j})] \dots \quad (6)$$

При нахождении формулы (5) сделано допущение, что S_{1j} , S_{2j} , ..., q и S_{ij} между собой независимы, в то время как метеорологические элементы определяются в некоторой мере друг другом, а загрязнение атмосферы в значительной степени зависит от метеорологических условий. Для уменьшения погрешности, создаваемой эффектом зависимости q от S_{ij} , осуществляем нормирование конечной величины (Корн Т., Корн Т., 1968):

$$P^*(q/Z_v) = P(q/Z_v) / [P(q/Z_v) + P(\bar{q}/Z_v)], \quad (7)$$

где \bar{q} — событие, состоящее в отсутствии загрязнения атмосферы выше выбранного критерия. Примененный способ нормирования $P(q/Z_v)$ как функции q от Z_v исключает только погрешность, связанную с допущением независимости q от Z_v , т. е. уменьшает ошибку результата.

Изложенный метод прогноза апробирован на данных наблюдений за загрязнением атмосферы в Восточной Сибири

за период 1968—1975 гг., для чего были рассчитаны по фактическим материалам, включающим около 85 тыс. проб, исходные данные для прогноза отдельно для каждой из 4 модельных примесей:

$$L_{ij} = P(q \cap S_{ij})/P(q) \cdot P(S_{ij}) \text{ и } \bar{L}_{ij} = P(\bar{q} \cap S_{ij})/P(\bar{q}) \times \\ \times P(S_{ij}).$$

В качестве критерия величины q выбрано 3 ступени загрязнения: повышенное, высокое и опасное.

Если $P^*(q/Z_V) \geq P(q)$ при ожидаемом наборе метеозлементов, то делается вывод о возможности загрязнения воздуха выше выбранного критерия q .

Предикторы S_{1j}, S_{2j}, \dots , как факторы, влияющие на величину q , определены на ЭВМ методом наименьших квадратов с выбором существенных факторов. К существенным отнесены те S_{ij} , для которых $\delta q_{ij}/q_{ij} \leq 1$, где δq_{ij} — коэффициенты регрессии.

Из 22 предикторов существенными для прогноза загрязнения определены шесть:

	Число градаций	Шаг градации
Направление ветра (S_1)	9	1 румб
Скорость ветра (S_2)	10	1 м/с
Температура воздуха (S_3)	15	5°C
Характер барического поля (S_4)	16	По типам
Относительная влажность воздуха (S_5)	8	10%
Облачность (S_6)	5	Неравномерный

Коэффициенты нелинейной корреляции, определяющие степень зависимости q от S_{ij} для всех модельных примесей, находятся в пределах 0,6—1,0. Дисперсия q_{ij} не превышает $\pm 25\%$. Доверительная оценка вероятностей с надежностью 0,99 для всех примесей лежит в пределах $7 \pm 8\%$ от $P(q)$. Оправдываемость таких прогнозов составляет в целом по всем модельным примесям 76—84%, предупреждаемость — 82—83%. Мера успешности, рассчитанная двумя способами (Пановский, Брайер, 1967), равняется для прогнозов повышенного загрязнения 0,72, для опасного — 0,83—0,85. Приведенные характеристики свидетельствуют о достаточно высокой эффективности прогнозов.

Прогноз загрязнения атмосферы, осуществляемый Гидрометслужбой для промышленных предприятий Иркутской области (Чебаненко, 1975) в течение 1971—1976 гг., и меры, принимаемые ими по сокращению выбросов вредных веществ, позволили снизить среднегодовые концентрации примесей и сократить число случаев с повышенным загрязнением воздуха.

О ПРОГНОЗАХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРУНТОВ И ОПОЛЗНЕЙ В ПРИБАЙКАЛЬЕ

К числу важных разделов прогнозирования природных явлений относится как прогноз самой сейсмической опасности, так и изменений сейсмических свойств различных составляющих земной поверхности в случае влияния на них хозяйственной деятельности человека. В данной главе эти вопросы рассматриваются на типичных примерах Прибайкалья. На материалах этого же региона анализируется и методика прогнозирования оползней.

§ 1. О ПРОГНОЗЕ СПЕКТРОВ КОЛЕБАНИЙ НЕКОТОРЫХ ГРУНТОВ ПРИБАЙКАЛЬЯ ПРИ СИЛЬНЫХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯХ

Для обеспечения надежной сейсмобезопасности сооружений необходимо знать не только амплитудный уровень колебаний, но и их спектральный состав, поэтому получение спектров колебаний — одна из актуальных задач. Это тем более важно для развивающихся высокосейсмических районов Сибири, тяготеющих к трассе БАМа.

Поскольку регистрация сильных землетрясений сопряжена с трудностями временного характера (землетрясения максимальной интенсивности происходят не чаще, чем один раз в 50—100 лет и реже, то возникает задача прогнозирования амплитудного уровня и спектрального состава колебаний грунтов по слабым и ощутимым землетрясениям.

Среди исследователей, изучающих связь спектров смещений, скоростей и ускорений с интенсивностью землетрясений, нет единого мнения о наличии и характере такой связи (Поликарпова, 1973; Пучков, 1966; Штейнберг, 1967; и др.). Анализ зависимости спектров от энергии землетрясений приобретает поэтому важное значение.

Спектры колебаний реальных грунтов при воздействии землетрясений определяются спектральным составом колеба-

ний, излучаемых очагом, поглощающими свойствами среды вдоль трассы распространения сейсмических волн, упругими свойствами и мощностью толщи слоя грунта в пункте наблюдения. Задача о колебании слоя на упругом полупространстве для случая тонкого слоя рассмотрена Е. Ф. Саваренским (1959) и А. Э. Кацем (1955).

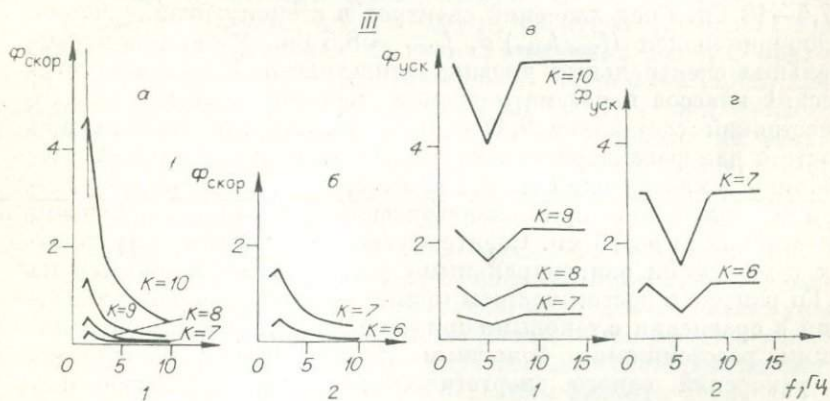
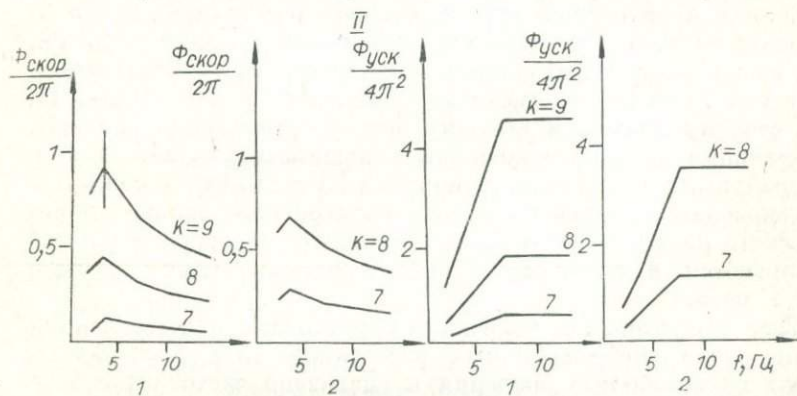
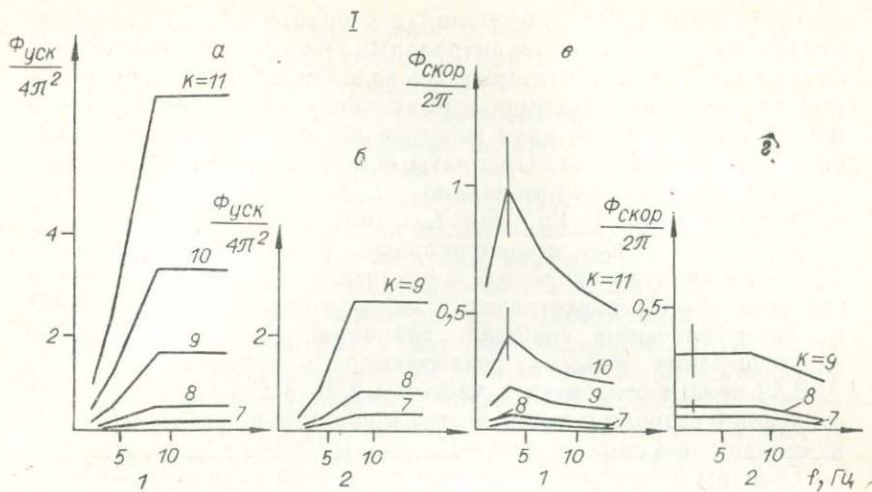
В настоящей работе изучаются спектры колебаний скального, мерзлого и рыхлого грунтов в зависимости от энергии близких землетрясений в двух диапазонах эпицентральных расстояний — до 75 км и от 75 до 180 км (по сейсмограммам сейсмических станций «Бодон», «Тырган», «Неляты»).

Спектры колебаний грунтов определены по записям смещений от близких землетрясений, общее количество которых превышает 200, с эпицентральной дистанцией от 210—215 до 150—180 км и энергетических классов с 6 по 11. Спектры рассчитывались по общепринятой методике (Грудева и др., 1967) в диапазоне частот от 0 до 20 Гц для горизонтальной NS компоненты колебаний в поперечных S-волнах. Для сравнения спектров двух горизонтальных компонент спектры землетрясений восьмого энергетического класса рассчитаны по записям NS и EW компонентам. Эти спектры в общих чертах совпадают. Спектры смещений колебаний грунтов при землетрясениях, рассчитанные по записям узкополосной аппаратурой, в низкочастотной области значительно искажены. В работе В. А. Потапова (1975) нами изучены причины такого искажения и сделан вывод о целесообразности использования спектров скоростей и ускорений, полученных по сейсмограммам.

Нами изучались спектры скоростей и ускорений колебаний грунтов. Спектры землетрясений каждого энергетического класса осреднялись. При разделении спектров землетрясений по меньшим диапазонам эпицентральных расстояний различия в спектрах не обнаружены. Для диапазона эпицентральных расстояний $\Delta < 75$ км спектры скоростей и ускорений скального грунта определены для землетрясений 7—9 энергетических классов (рис. 44, I). Из сравнения спектров скоростей следует, что в инженерном диапазоне частот (от 2,5 до 8—9 Гц) спектральная плотность колебаний скального грунта максимальна и не изменяется. Уровни спектральной плотности землетрясений двух соседних энергетических классов различаются в $2,29 \pm 0,27$ раза.

Рис. 44. Осредненные спектры скоростей и ускорений землетрясений различных энергетических классов (K) в диапазонах эпицентральных расстояний от 0 до 75 и от 75 до 180 км.

I — на скальном грунте (с/ст. «Бодон»); II — на полускальном мерзлом грунте (с/ст. «Тырган»); III — в слое галечника (с/ст. «Неляты»); вертикальные линии определяют область среднеквадратичных отклонений.



Спектры ускорений колебаний при землетрясениях в рассматриваемом диапазоне эпицентральных расстояний возрастают от 0 до 7,5—8 Гц, характеризуясь далее постоянной спектральной плотностью. Максимальные значения спектральных плотностей землетрясений двух энергетических классов различаются в $2,82 \pm 0,56$ раза. Ординаты спектров спадают в сторону низких частот пропорционально $f_{\text{тек}}/f_{\text{max}}^{1,8 \pm 0,2}$ от максимального уровня до 1 Гц, где $f_{\text{max}} = 8$ Гц.

Для диапазона эпицентральных расстояний $75 < \Delta < 180$ км спектры скоростей и ускорений получены для землетрясений 7—11 энергетических классов (см. рис. 44). Максимальные значения спектров скоростей землетрясений двух энергетических классов различаются в среднем в $2,24 \pm 0,42$ раза и относятся к частотам 2,5—3 Гц. Спад значений спектров в сторону низких частот пропорционален $(f_{\text{тек}}/f_{\text{max}})^{0,5}$, в сторону высоких частот — $(f_{\text{тек}}/f_{\text{max}})^{-0,5}$.

Спектры скоростей колебаний скального грунта при землетрясениях в диапазоне эпицентральных расстояний до 75 км характеризуются постоянными значениями до частот 10 Гц, в то время как спектры скоростей колебаний при землетрясениях с Δ от 75 до 180 км имеют максимальное значение 2,5—3 Гц и в сторону низких и высоких частот существенно спадают. Собственные частоты колебаний большинства зданий с эпицентральными расстояниями порядка 50 км имеют максимальные значения. Спектры скоростей землетрясений одного энергетического класса двух диапазонов эпицентральных расстояний различаются в среднем по своему максимальному уровню в 1,5 раза.

Спектры ускорений колебаний грунтов при землетрясениях в интервале эпицентральных расстояний $75 < \Delta < 180$ км имеют максимальные значения в диапазоне частот от 8,5 до 17,5—18 Гц. Спад значений спектров в сторону низких частот пропорционален $(f_{\text{тек}}/f_{\text{max}})^{1,4}$, $f_{\text{max}} = 8,5$ Гц. Разница в максимальных спектральных уровнях землетрясений двух энергетических классов в рассматриваемом диапазоне эпицентральных расстояний составляет $2,47 \pm 0,39$. Показатель степени при частоте для рассматриваемого диапазона эпицентральных расстояний землетрясений на 0,4 меньше, чем для спектров ускорений колебаний при землетрясениях с эпицентральными расстояниями до 75 км. Спектры ускорений при землетрясениях с меньшими эпицентральными расстояниями в среднем на 1 Гц раньше с ростом частоты принимают максимальные значения в сравнении с таковыми при землетрясениях с эпицентральными расстояниями, большими 75 км. Спектры скоростей и ускорений одного энергетического класса землетрясений двух диапазонов эпицентральных расстояний по своим максимальным значениям различаются в среднем в 1,54 раза. Уровни

спектров скоростей и ускорений землетрясений одного энергетического класса различаются на один порядок в обоих диапазонах эпицентральных расстояний.

Нами, таким образом, не обнаружены изменения в спектрах скоростей и ускорений колебаний скального грунта от энергии землетрясений 7 — 11 классов.

В работе К. К. Запольского и др. (1974) при исследовании спектрального состава Р-волн сильных землетрясений делается вывод о том, что спектры смещений открыты в сторону частот до $f = 1/40$ Гц, в области высоких частот изменяются незначительно с увеличением магнитуды. Вид вычисленных С. В. Медведевым (1962) спектров ускорений колебаний грунтов по акселерограммам землетрясений не изменяется. Максимальные значения спектров ускорений принимают в области частот, меньших в 2 раза (в сравнении с нашими данными). В работе П. С. Миронова (1973) максимальные значения спектров ускорений мощных взрывов получены на периодах порядка 0,15—0,1 с.

Найденные В. В. Штейнбергом (1967) спектры скорости колебаний грунтов в г. Петропавловске-Камчатском при повышении энергетического класса землетрясений до 14 спадают с увеличением частоты, а спектр для 14 класса, имея излом в области частот, наиболее опасных для большинства зданий, несколько выполаживается в высокочастотной области. Коэффициенты углов наклона спектров землетрясений $10 \div 11$ и $12 \div 13$ энергетических классов имеют перекрывающиеся значения $0,28 \pm 0,12$ и $0,34 \pm 0,005$, а спектры $13 \div 14$ энергетических классов, по которым делается прогноз спектров землетрясений $K = 16$ и $K = 18$, определены с использованием всего трех сейсмограмм. В этой же работе приводятся данные Л. А. Когана и К. Канаи, согласно которым форма спектров не зависит от энергии землетрясений. С. А. Пирузян (1966) приходит к выводу, что максимумы спектров ускорений при сильных землетрясениях на жестких грунтах должны приходиться на периоды порядка 0,1 с. К. В. Пучковым (1966) приведены спектры скоростей колебаний грунта при сильном и слабом землетрясениях, форма которых и частота их максимумов одинаковы. Л. А. Поликарпова (1973) делает вывод о независимости преобладающих периодов и периодов максимальных амплитуд от энергии землетрясений в поперечных и поверхностных волнах на расстояниях более 500 км. Таким образом, литературные данные свидетельствуют либо о незначительном изменении формы спектров, периодов их максимумов и преобладающих периодов с изменением интенсивности землетрясений, либо о независимости частотного состава колебаний грунтов от энергии в очаге. С последним выводом согласуются полученные нами результаты.

Спектры скоростей и ускорений мерзлого грунта в диапазоне меньших эпицентральных расстояний определены для земле-

трясений седьмого и восьмого энергетических классов (см. рис. 44, II). Максимумы спектров скоростей землетрясений различаются в 2,4 раза. Частота максимума спектров скоростей составляет в среднем 3,5 Гц. Максимумы спектров ускорений землетрясений двух энергетических классов отличаются друг от друга в 2,56 раза и приходятся на частоты от 9,5 до 14—15 Гц. Значения спектров скоростей колебания грунта спадают с ростом частоты до 10—12 Гц пропорционально $(f_{\text{тек}}/f_{\text{max}})^{-0,4}$, $f_{\text{max}} = 3,5$ Гц, в то время как значения спектров скального грунта в этом интервале частот остаются примерно одинаковыми. Спад значений спектров в сторону низких частот пропорционален $(f_{\text{тек}}/f_{\text{max}})^{0,4}$. Значения спектров ускорений колебаний спадают в сторону низких частот пропорционально $(f_{\text{тек}}/f_{\text{max}})^{1,2}$, где f_{max} в случае ускорений — наименьшее значение частоты максимума спектра.

Рассмотрим теперь вид спектров скоростей и ускорений колебаний грунта при землетрясениях в диапазоне эпицентральных расстояний $75 < \Delta < 180$ км. Спектры скоростей колебаний принимают максимальные значения на частоте 3,5 Гц. Различие для двух соседних энергетических классов составляет $2,73 \pm 0,8$. Спадание значений спектров в сторону высоких частот пропорционально $(f_{\text{тек}}/f_{\text{max}})^{-0,5}$. Спектры ускорений колебаний грунта принимают максимальные значения, различающиеся для двух соседних энергетических классов в $2,63 \pm 0,78$, от 8 Гц и с ростом частоты остаются постоянны до 14—15 Гц. Спад значений спектров ускорений в сторону низких частот пропорционален $f_{\text{тек}}/f_{\text{max}}$, $f_{\text{max}} = 8$ Гц.

Спектры скоростей и ускорений колебаний мерзлого и скального грунтов при землетрясениях в диапазоне эпицентральных расстояний $75 < \Delta < 180$ км и одинаковых энергетических классов различаются по своим максимальным уровням (в $3,39 \pm 0,43$ раза). Спектры ускорений колебаний скального грунта в сторону низких частот от максимального значения спадают быстрее с уменьшением частоты, чем мерзлого полускального грунта. На частоте 5 Гц разница между спектральными уровнями мерзлого и скального грунтов составляет в среднем 4,85. Спектры скоростей колебаний скального грунта на частоте 5 Гц меньше аналогичных значений для мерзлого грунта в 3,58 раза.

Рассмотрим спектры колебаний рыхлого грунта при землетрясениях с эпицентральными расстояниями до 75 км (см. рис. 44, III). Спектры скоростей имеют максимальные значения на частоте порядка 2 Гц и в сторону высоких частот их значения спадают пропорционально $(f_{\text{тек}}/f_{\text{max}})^{1 \pm 0,25}$ до 7÷8 Гц, затем спектры несколько выходяживаются. Спектры землетрясений двух энергетических классов по своим максимальным уровням различаются в 2,9 раза. Спектры ускорений колебаний грунта носят сложный характер. Выделяются два максимума

равных спектральных плотностей на частотах 2,5 Гц и от 8,5 до 15 Гц. Минимумы спектров ускорений приходятся на частоту 5,5 Гц. Значение спектральной плотности на этой частоте по двум спектрам составляет в среднем 0,49 от максимальной спектральной плотности. Максимальные спектральные плотности двух энергетических классов различаются в 2,7 раза.

Спектры скоростей землетрясений второго диапазона эпицентральных расстояний принимают максимальные значения на частоте 1,5 Гц. Их значения уменьшаются с ростом частоты пропорционально $(f_{\text{тек}}/f_{\text{max}})^{1,22 \pm 0,26}$. Максимальные значения спектров скоростей двух энергетических классов

различаются в среднем в $2,76 \pm 0,54$. Спектры ускорений колебаний грунта имеют два соизмеримых максимума на частотах 1,5—2,5 и от 8,5 Гц с увеличением частоты остаются постоянными. Максимальные значения спектров землетрясений двух энергетических классов различаются в среднем в 2,5 раза. Спектральная плотность минимальна на частоте 4,5—5 Гц и составляет в среднем 0,67 от максимальной. Спектры скоростей колебаний при землетрясениях седьмого энергетического класса двух диапазонов эпицентральных расстояний различаются в 6,2 раза, спектры ускорений — в 6 раз.

Нами рассчитаны спектры колебаний рыхлого (станция «Ашхабад») и скального (станция «Каджаран») грунтов (рис. 45) при близких сильных землетрясениях до 10 км в Средней Азии. Сейсмограммы для расчета спектров взяты из сборника Д. Н. Рустанович (1974).

Спектры определены для 4—5- и 6—7-балльных землетрясений. Различий в форме спектров скоростей и ускорений колебаний грунтов при землетрясениях с интенсивностью (I) 4—5

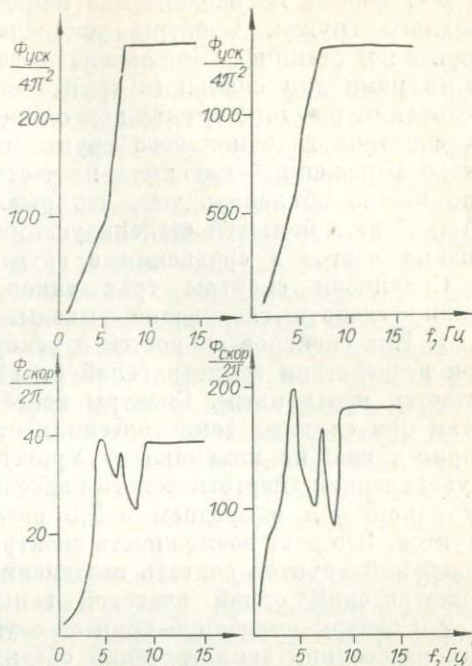


Рис. 45. Осредненные спектры ускорений (вверху) и скоростей (внизу) сильных землетрясений интенсивностью 4—5 и 6—7 баллов, зарегистрированных на скальном основании (с/ст. «Каджаран»).

и 6—7 баллов не наблюдается как для скального, так и для рыхлого грунта. Спектры ускорений колебаний скального грунта под станцией «Каджаран» по форме совпадают с полученными нами для скального грунта станции «Бодон». Спектры ускорений рыхлого грунта под станцией «Ашхабад» в отличие от спектров галечникового грунта Прибайкалья имеют один резко выраженный максимум на частотах 2—3,5 Гц. Это отличие можно объяснить тем, что рыхлый грунт под станцией «Ашхабад» в большей степени усиливает колебания в области низких частот в сравнении с грунтом станции «Неяты».

Сравнивая спектры трех типов грунтов Прибайкалья, можно сделать следующие выводы.

1. Вид спектров скоростей и ускорений колебаний грунтов при воздействии землетрясений 6—11 энергетических классов остается неизменным. Спектры колебаний грунтов в Средней Азии при сильных землетрясениях от 4 до 7 баллов по своей форме также не изменяются. Уровень спектральных кривых с увеличением энергетического класса землетрясений на единицу изменяется в среднем в 2,5 раза для всех исследуемых грунтов. Это дает возможность спектры скоростей и ускорений колебаний грунтов считать независимыми от энергии близких землетрясений одной очаговой зоны.

2. Спектры колебаний грунтов с увеличением эпицентральных расстояний землетрясений обедняются высокочастотными составляющими.

§ 2. ПРОГНОЗ ИЗМЕНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ ПРИ ПОЛНОМ ИХ ОТТАИВАНИИ

Согласно существующим нормам проектирования (Порхаев, 1970), при строительстве в районах, охваченных мерзлотой, применяются два принципа строительства: с сохранением мерзлого грунта в основании зданий и сооружений и с использованием в основании оттаивающих и оттаявших грунтов. Второй принцип рекомендуется использовать в следующих случаях: при неглубоком залегании скальных грунтов; при наличии грунтов, осадка которых при оттаивании не превышает предельных значений; при несплошном распространении вечномерзлых грунтов; при наличии пластичномерзлых или твердомерзлых сильнофильтрующих в оттаявшем состоянии грунтов; в тех случаях, когда сохранение мерзлого состояния грунтов основания экономически нецелесообразно. Учитывая сказанное, можно отметить, что для территории Прибайкалья, где проходит зона островного распространения мерзлых грунтов, не исключается строительство по второму принципу и объем его, по-видимому, будет возрастать в связи с намеченным интенсив-

ным освоением территорий, прилегающих к трассе БАМа.

Известно (Сейсмическое микрорайонирование в условиях вечной мерзлоты, 1975), что при проектируемом строительстве с уничтожением вечной мерзлоты величина изменения сейсмической опасности грунтов, служащих основанием зданий, будет зависеть от инженерно-геологических условий, физико-механических свойств грунтов, температурного режима мерзлых грунтов, водонасыщенности оттаявших грунтов, их плотности и глубины залегания уровня грунтовых вод. Изменения сейсмической опасности оценивают по существующим эмпирическим формулам — для талых грунтов с привлечением таких параметров, как скорости распространения продольных и поперечных волн (Медведев, 1962), а для мерзлых — используются и такие их физические характеристики, как температура и влажность (Джурик и др., 1975). Таким образом, прогноз изменения сейсмической опасности мерзлых грунтов при полном их оттаивании должен основываться на инженерно-геологическом прогнозе изменения физических параметров мерзлоты и на установлении всесторонних взаимосвязей между физическими и сейсмическими характеристиками грунтов.

В настоящей работе возможность прогноза изменения сейсмической опасности мерзлых грунтов при полном их оттаивании реализуется на примере песчаных отложений (это одна из наиболее распространенных в Прибайкалье разновидностей рыхлых грунтов). Изучались талые и мерзлые пески, характеризующиеся следующими физическими параметрами: удельный вес 2,7 г/см³; объемный вес 1,5—1,95 г/см³, пористость 32—48%; полная влагоемкость 16—38%. Исследования проводились в полевых условиях методом малоглубинной сейсморазведки в различных инженерно-геологических и мерзлотных условиях Прибайкалья. Основная задача полевых измерений — выяснить величину изменения скоростей сейсмических волн в зависимости от изменения состояния грунта.

Полученные данные о скоростях распространения продольных (V_p) и поперечных (V_s) волн в мерзлых, талых и обводненных песках приведены на рис. 46 в виде гистограмм. Средняющие частоты вычислены для распределения Пирсона (Митропольский, 1971). Анализируя полученные данные, можно отметить надежную дифференциацию всех трех состояний песков по скоростям распространения продольных волн. Это подтверждается сравнением пределов изменений и соответствующими состоянию максимумами значений кривых распределений скоростей V_p . Для мерзлых песков оно равно 3500 м/с, для обводненных — 1625 и для талых с естественной влажностью — 520 м/с. По скоростям V_s уверенно разделяются талые и мерзлые грунты. В талых наблюдаются незначительные различия в значениях максимумов распределений для обводненных и необводненных песков и величины скоростей V_s перекрываются

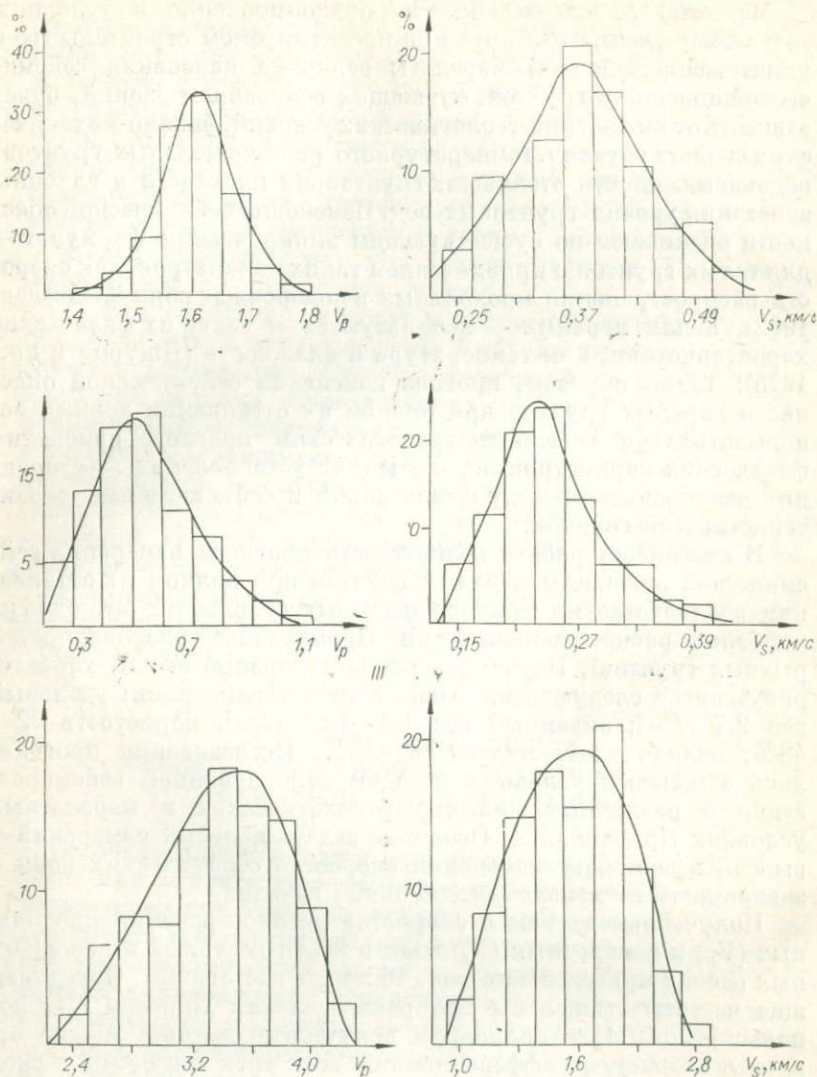


Рис. 46. Гистограммы распределения скоростей распространения продольных (V_p) и поперечных (V_s) волн в обводненных (I), талых естественной влажности (II) и мерзлых (III) песчаных отложениях.

в диапазоне их изменений от 200 до 440 м/с, на который приходится до 85% всех измерений. Отмечается незначительное увеличение скоростей поперечных волн в обводненном песке по сравнению с необводненными. В то же время, если в рассмотрение включить и такой параметр, как отношение скоростей продольных волн к поперечным, то для песков естественной влаж-

ности эта величина распределяется в пределах от 1,7 до 3, а для обводненных — от 3 до 7.

Таким образом, уже по данным полевых измерений скоростей V_p и V_s и их отношениям возможно уверенно разделять песчаные отложения по их состоянию и, следовательно, использовать эти параметры для прогноза изменения сейсмической опасности при оттаивании мерзлого грунта, используя наиболее вероятные значения V_p и V_s (по максимумам их распределений). Однако в связи с большим разбросом значений скоростей сейсмических волн для каждого состояния грунта ошибка в расчете сейсмической опасности может быть значительной и превышать $\pm 0,5$ балла, что приводит к необходимости установления более точных зависимостей скоростей сейсмических волн от таких физических параметров, как температура, влажность пористость и объемный вес.

Для отыскания связей использовались данные, полученные в лабораторных условиях при изменениях скоростей распространения ультразвуковых волн в образцах мерзлых и талых песков. Скорость ультразвука фиксировалась в диапазоне температур от $+10$ до -15° и влажности от воздушно-сухого состояния до полного насыщения водой (обводненное состояние грунта) (рис. 47). Зависимость скоростей сейсмических волн от коэффициента воздушной пористости (см. рис. 47, а) показывает, что скорость упругих волн начинает стабилизироваться со значения коэффициента воздушной пористости, равного 0,15, в мерзлых грунтах и 0,1 в талых. При полностью заполненных порах водой и льдом наблюдаются наибольшие значения скоростей продольных волн. В талых грунтах их значение близко к 1500 м/с, в мерзлых (в зависимости от температуры) — к 3200—4300 м/с.

Связь скорости упругих волн с объемным весом грунта представлена на рис. 47, б. Объемный вес песков менялся в основном с изменением влажности грунта от 1,7 до 1,94 г/см³. При незначительном увеличении ρ скорость упругих волн может увеличиваться в несколько раз и, начиная с некоторого значения объемного веса, возрастание скорости замедляется.

Наиболее важный параметр при прогнозировании изменений сейсмической опасности мерзлых грунтов при переходе их в другое состояние — величина отношения скоростей сейсмических волн, соответствующих этим состояниям. Зависимость отношения скоростей от температуры и влажности для песков иллюстрирует рис. 47, в. Грунты в воздушно-сухом состоянии, как мерзлые так и талые, имеют близкие значения скоростей и их отношение не превышает 2. При средних значениях влажности от 7 до 15%, т. е. для грунтов с естественной влажностью, отношение скоростей имеет максимальные значения, доходящие до 5—8, и при увеличении влажности песков до полной их влагоемкости отношение уменьшается до 2.

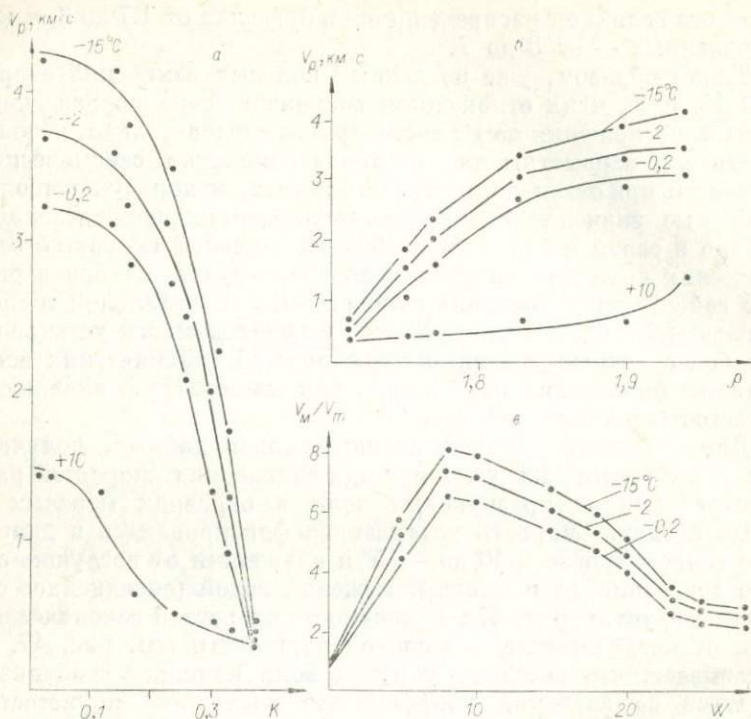


Рис. 47. Зависимости скорости распространения продольных волн в песках от коэффициента воздушной пористости и температуры (а), объемного веса и температуры (б); зависимость скорости продольных волн в мерзлом и талом песках от температуры и влажности (в).

Для сравнения можно привести отношение скоростей для льда и воды, насыщающей пески, равное 2,4.

Изложенные результаты полевых и лабораторных измерений открывают возможность оценки не только наиболее вероятных значений скоростей сейсмических волн для любого состояния песчаных отложений, но и позволяют уточнять их значения, если известны данные о температуре и влажности грунтов. С помощью экспериментальных данных можно рассчитать изменение сейсмической опасности мерзлых песков при переходе их в талое состояние в зависимости от крайних значений температуры и влажности по ранее предложенной формуле

$$I = I(\rho V) + I(T, W),$$

где $I(\rho V) = 1,67 \lg \frac{\rho_a V_a}{\rho_i V_i}$ — приращение сейсмической балльности за счет отношения акустических жесткостей эталонного ($\rho_a V_a$) и исследуемого ($\rho_i V_i$) грунтов (Медведев, 1962). Приращение балльности, обязанное температуре (T) и влаж-

ности (W) мерзлого грунта:

$$I(TW) = e^{-0,5T}(1 - e^{-0,17(W-5)}).$$

Результаты расчета для мерзлого и талого состояния песков представлены на рис. 48. Для мерзлых грунтов сейсмическая опасность возрастает в зависимости от их температуры и влажности. Для талых грунтов расчет проводился по формуле С. В. Медведева (1962). Кривая для температуры $+10^\circ$ характеризует незначительное уменьшение сейсмической опасности песков, обязанное некоторому увеличению скорости продольных волн при их увлажнении по сравнению с воздушно-сухими. Эта кривая рассчитана в пределах естественных изменений влажности до состояния их полного насыщения. При полном насыщении грунта водой его сейсмическая опасность определяется и глубиной залегания уровня грунтовых вод. Эта зависимость оценивается формулой $I_B = e^{-0,04h^2}$. Для учета поправки на обводненность грунта построена шкала (см. рис. 48), на которой нанесены глубины залегания уровня грунтовых вод (h_B), соответствующие значениям приращений балльности на оси ΔI . Представленный в таком виде график облегчает оценку приращений балльности при полном оттаивании грунтов.

Например, нам нужно дать прогноз величины возрастания сейсмической опасности песчаных отложений с температурой -4° и влажностью -14% при переходе их в талое состояние с глубиной залегания уровня грунтовых вод 5 м. Согласно расчетным данным, сейсмическая опасность при повышении температуры до 0° увеличится на $+0,78$ балла. Поправка на обводненность равна $+0,33$ балла, т. е. сейсмическая опасность мерзлых песков увеличится на $+1,11$ балла по сравнению с естественной.

В приведенной схеме прогноза сейсмической опасности оттаявших грунтов не учитываются их резонансные свойства. Для их расчета также необходимы данные о скоростях распространения сейсмических волн, мощности слоя рыхлых грунтов и преобладающих периодах колебаний слоя рыхлых грунтов при близких землетрясениях (Рекомендации по сейсмическому микрорайонированию, 1973). Некоторые представления о резонансных периодах колебаний грунтов могут дать спектральные характеристики, рассчитанные по программе Л. И. Ратниковой и А. Л. Левшиным (1967) на ЭВМ для двух моделей разреза, необходимые параметры которых приведены в табл. 14.

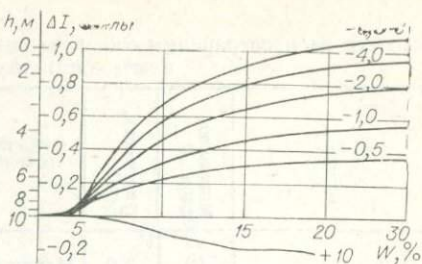


Рис. 48. Зависимость возрастания сейсмической опасности оттаивших песков от крайних значений температуры, влажности и глубины залегания уровня грунтовых вод.

Скорости распространения сейсмических волн в зависимости от физического состояния грунтов

Грунт	Мощность слоя, м	Плотность, г/см ³	Физическое состояние	Температура грунта, °С	Влажность, %	Скорость продольных волн, м/с	Скорость поперечных волн, м/с
Песок	12	2,0	Мерзлый	-2,0	30	3500	1800
Суглинок	18	1,8			30	3500	1800
Гранит		2,6	»			4100	2200
Песок	12	2,0	Обводненный		30	1700	350
Суглинок	18	1,8	Талый		30	900	350
Гранит		2,6	»			3400	1780
Песок среднезернистый	50	1,8	Мерзлый	-1,2	50	3100	1600
Гранит		2,6	»			4000	2180
Песок среднезернистый	50	1,8	Талый		50	1100	480
Гранит		2,6	»			3600	1900
Песок среднезернистый	50	1,9	Обводненный		50	1900	440
Гранит		2,6	Талый			3900	2100

Расчет проведен для углов падения сейсмической волны 40°, что примерно соответствует глубине очага землетрясения 20—40 км.

Спектральные характеристики для горизонтальной компоненты смещения грунтов представлены на рис. 49. Сравнение их для мерзлых (см. рис. 49, 1, 3), талых (4) и обводненных грунтов (2, 5) показывает, что они значительно отличаются от скальных уровнем спектральной характеристики и наличием нескольких резонансных максимумов в диапазоне частот до 10 Гц (это наиболее опасные для зданий частоты колебаний грунта). Для периодов колебаний грунта, соответствующих резонансным частотам, рассчитываются возможные увеличения сейсмической опасности грунта по методике, описанной в рекомендациях по сейсмическому микрорайонированию (РСМ-73).

В заключение представим схему прогноза сейсмической опасности оттаявших грунтов. Для выбранной строительной площадки проводится оценка приращений сейсмической балльности в зависимости от грунтовых условий по отношению к эталонному грунту и составляется схема сейсмического микрорайонирования площадки для естественных условий. Затем, используя данные инженерно-геологического прогноза, по установленным зависимостям (см. рис. 48) оценивается величина возрастания сейсмической опасности оттаявших грунтов, на которую вводится поправка в схему сейсмического микрорайо-

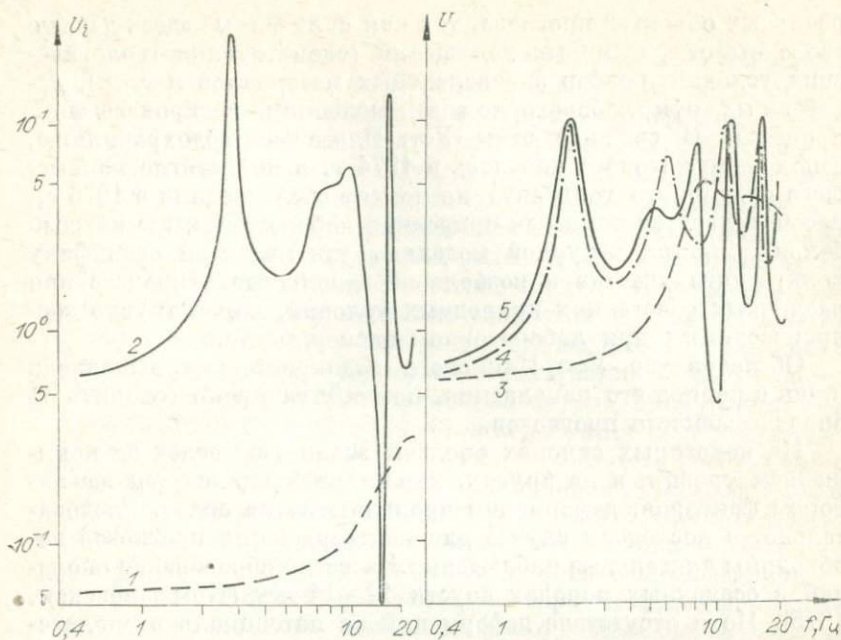


Рис. 49. Спектральные характеристики мерзлых (1, 3), обводненных (2, 5) и грунтов естественной влажности (4).

нирования для естественных условий и составляет прогнозная схема сейсмического микрорайонирования строительной площадки для оттаявших грунтов.

§ 3. К ОЦЕНКЕ МЕТОДИКИ ПРОГНОЗА ОПОЛЗНЕЙ БЕРЕГОВ АНГАРСКИХ ВОДОХРАНИЛИЩ

Оползни на ангарских водохранилищах являются одной из наиболее активных форм береговых разрушений. Обобщенные тенденции их проявления в речных условиях, откорректированные наблюдениями на Братском водохранилище, легли в основу методики прогноза оползней (Демьянович, 1975, 1976), которая использована для оценки состояния оползневых склонов Усть-Илимского водохранилища. Следующим этапом исследований, закономерным для развития любого прогнозного метода, является его оценка, корректировка и совершенствование по мере получения дополнительного материала.

Для проверки возможности нарушения устойчивости склонов в настоящее время широко применяются различные виды моделирования (Розовский, Зелинский, 1975). Предпочтение следует отдавать непосредственным наблюдениям за состоянием

реальных объектов прогноза, так как полученные здесь данные свободны от различных допущений (схематизация геологических условий, подбор эквивалентных материалов и т. д.), неизбежных при лабораторном и мысленном воспроизведении процесса. В связи с этим Усть-Илимское водохранилище, заполнение которого началось в 1974 г. и не достигло наивысшего подпорного горизонта на момент обследования в 1976 г., рассматривается нами как природная лаборатория, где каждый склон является натурной моделью, учитывающей специфику конкретного участка и позволяющей наблюдать процесс при различных сочетаниях природных условий, порой трудно воспроизводимых при лабораторном эксперименте.

Обследование Усть-Илимского водохранилища выполнено лишь в период его наполнения, поэтому еще рано говорить об оправдываемости прогнозов.

На некоторых склонах оползни возникают вслед за повышением уровня, а на других, характеризующихся тем же набором факторов, деформации проявляются не сразу. Следовательно, в последнем случае для подтверждения прогнозов необходимы длительные наблюдения. Известно образование оползней в осадочных породах спустя 12—14 лет (Крыжановская, 1975). Но и отсутствие деформаций на потенциально оползневом склоне в течение 30—50 лет не может считаться признаком недостоверности прогноза, если для него не существует конкретной временной привязки. В связи с этим появилась необходимость анализа используемых ранее факторов прогноза на испытанных активизацию оползней и их корректировки применительно к развитию процесса во времени. Несмотря на кратковременность наблюдений, полученные материалы позволили дифференцировать геологические условия по возможности возникновения ослабленных зон и установить критическое значение крутизны. Кроме того, удалось подразделить потенциально оползневые участки побережья по времени проявления процесса.

Ниже приводится анализ тех природных факторов, которые в той или иной степени изменяют соотношение в береговом массиве сдвигающих сил и прочности пород, определяющих возможность возникновения гравитационных смещений (Ломтадзе, 1976).

Глинистые отложения способны создавать под действием различных природных агентов ослабленные зоны в разрезе склона. Однако последние, как показали наблюдения по Усть-Илимскому водохранилищу, могут возникать не только в глинистых разностях, а и в песчаниках мамырской свиты ордовика и кежемской свиты силура. Следует заметить, что эти породы при лабораторных испытаниях показывают низкую прочность, которая резко снижается при водонасыщении (Усть-Илимское водохранилище..., 1975). Деформации, связанные с разрушением слабоводоустойчивых песчаников, отмечались на Брат-

ском водохранилище (Омский участок) и на Усть-Илимском (левобережье, выше р. Железной; правобережье, ниже Седановской шиверы). Они отличаются катастрофичностью проявления вслед за подъемом уровня. Их распространение в глубь побережья не соответствует зависимости от высоты склона, установленной для оползней в глинистых отложениях.

При рассмотрении условий изменения прочности пород в пределах водохранилищ важная роль отводится обводнению склонов в связи с подпором. Известно, что для возникновения оползня необходимо формирование ослабленной зоны на некотором протяжении в глубь побережья. Возможность создания этой зоны определяется скоростью инфильтрации воды в склоновый массив, т. е. водопроницаемостью пород. Естественно, что на одних участках подпор грунтовых вод идет вслед за подъемом уровня водохранилищ, на других — для этого требуются годы. Последний случай характерен для склонов, где в зоне затопления находятся лишь глинистые отложения. Проявлению здесь оползней при прочих благоприятных условиях будет предшествовать продолжительный подготовительный период.

Из многочисленных факторов, определяющих напряженное состояние склонов, наиболее легко оценивается крутизна. На основе анализа динамичности оползней при значениях более 17° ее можно использовать в прогностических целях. Это положение сохраняет свое значение в случае оценки ранее деформированных склонов, но требует уточнения при решении вопроса о возможности новообразования оползней. Наблюдения показывают, что смещения в первую очередь проявляются на склонах крутизной $36-45^\circ$. Следовательно, при таких уклонах возникает критическое состояние, когда тангенциальные силы способны сдвинуть склоновый массив при благоприятном сочетании остальных факторов. Тогда при оценке берегов крутизной $17-35^\circ$ следует учитывать, имеются ли здесь условия для ее увеличения. Если такая возможность существует за счет абразии, то через определенный промежуток времени, необходимый для достижения критического значения, склон окажется в состоянии предельного равновесия. Так, волнение оказывает влияние на напряженное состояние склона. В этом направлении действует и колебание уровня режима. Разупрочнение пород за счет попеременного высушивания-замачивания в зоне сработки водохранилищ способствует формированию здесь ниш подмыва, обрушению карнизов, увеличивая тем самым размыв берегов.

При оценке склонов водохранилищ важное значение имеет соотношение уровня и положения потенциальных зон ослабления, определяющее возможность активизации оползней или развития здесь других процессов (Пуляевский, 1968). Этот показатель имеет в методике качественное выражение: если слабководоустойчивые породы окажутся вблизи уровня подпора, то склон

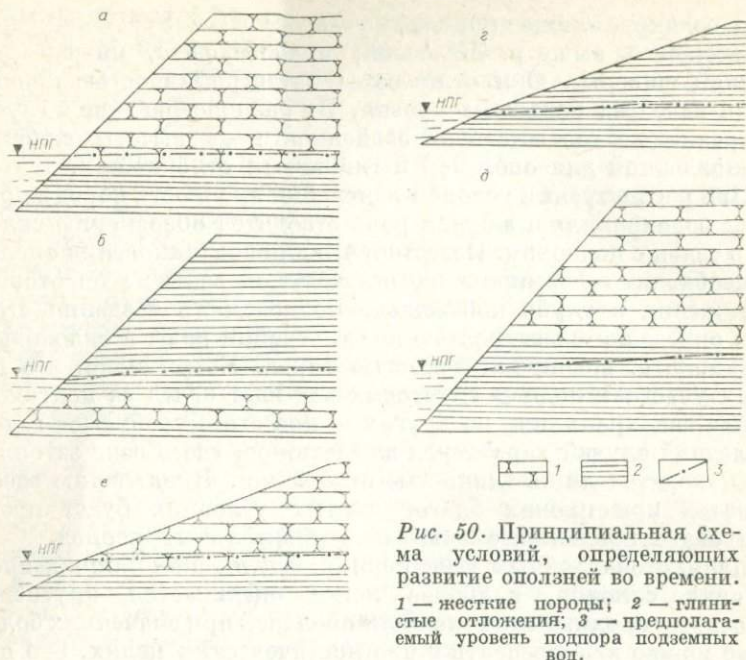


Рис. 50. Принципиальная схема условий, определяющих развитие оползней во времени. 1 — жесткие породы; 2 — глинистые отложения; 3 — предполагаемый уровень подпора подземных вод.

будет развиваться по оползневому типу; при значительном их затоплении ожидаются суффозионные провалы по зонам нарушения сплошности пород. Некоторые количественные данные получены в 1975 г. по ангарской акватории. Выше Ершовских порогов на участках с положением контакта жестких и глинистых пород до двух метров ниже уровня наполнения отмечались признаки активизации. При снижении контакта до пяти метров и более оползни оставались неподвижными. К сожалению, подобных фактов пока недостаточно, чтобы брать их за основу.

С учетом приведенных выше данных оказалось возможным разделить потенциально опасные в оползневом отношении склоны по времени развития процесса на две группы:

1) склоны, где образование или активизация оползней происходит вслед за наполнением водохранилища или в первые годы его существования (рис. 50, а, б);

2) склоны, где образование или активизация оползней возможны после длительной подготовки (см. рис. 50, в — д).

Первая группа склонов характеризуется сочетанием факторов, определяющих резкую потерю устойчивости: крутизна более 36° , положение уровня водохранилища в пределах толщи слабых песчаников или несколько выше кровли глинистых пород, в связи с чем инфильтрация воды в нижнюю часть оползневой тела способствует формированию здесь ослабленной зо-

ны. На таких склонах уже произошли деформации или появились трещины, свидетельствующие о состоянии предельного равновесия. Характерный пример оползней этой группы — смещения на левобережье ангарской акватории, выше р. Железной (см. рис. 50, б). До затопления здесь в средней части крутого склона обнажалась толща слабосцементированных песчаников кежемской свиты, перекрываемая глинистыми отложениями яркой свиты силура. По откосу отмечались лишь поверхностные деформации. После затопления песчаников смещения распространились вглубь на 50—100 м.

Вторая группа склонов отличается крутизной 17—35° (см. рис. 50, в, г) или наличием в зоне затопления слабодопроницаемых отложений (см. рис. 50, д). Продолжительность подготовительного периода в этом случае определится интенсивностью воздействия абразии и распространения подпора, необходимых для приведения склона в критическое состояние.

Оползни второй группы наиболее характерны для отрезка илимской акватории между реками Аталоновкой и Игирмой. Склоны здесь имеют двучленное строение: жесткие породы устькутской свиты нижнего ордовика подстилаются преимущественно глинистыми отложениями верхнего кембрия. Различное положение контакта этих пород относительно уреза и постепенное снижение его вплоть до полного погружения определило двухъярусное расположение оползней. Верхний ярус смещений развит по кровле глинистых пород и находится вне зоны влияния водохранилища, так как отделяется широкой полосой побережья на породах верхнего кембрия. Береговая линия проходит в основном в пределах пологих склонов, реже встречаются крутые откосы (стрелка рек Илима и Коршунихи; правобережье, напротив устья р. Черной). Возможность возникновения смещений в последнем случае определится распространением подпора в глубь побережья. Пока здесь наблюдаются сплывы с глубиной захвата 0,5 — 1,0 м.

На участках сужения поля развития глинистых отложений активизация оползней верхнего яруса зависит от одновременного действия абразии и подпора. Как известно, подпор в глинистых породах затруднен на большие расстояния, а размыв будет незначительным в связи с узостью долины (Усть-Илимское водохранилище..., 1975). Нижний ярус смещений развит локально и приурочен к участкам, где в разрезе отложений верхнего кембрия появляются песчаники и доломиты. Некоторые из них будут затоплены, а развитие остальных определится распространением подпора или размывом основания в соответствии с рис. 50, в, г.

Относительно суффозионно-провальных форм, развитие которых предполагалось на некоторых полузатопленных оползнях, также представилась возможность разделить склоны по времени проявления деформаций. Возникновение последних

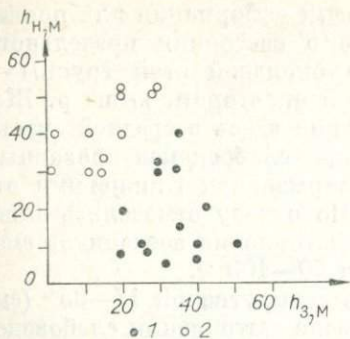


Рис. 51. Зависимость проявления суффозионно-провальных деформаций от соотношения надводной (h_n) и затопленной (h_3) частей склона. 1, 2 — склоны с проявлением суффозионно-провальных деформаций и без них соответственно.

связано с инфильтрацией воды в склоновый массив, поэтому зависит от водопроницаемости пород и степени раздробленности оползневого тела. Все наблюдаемые в настоящее время на берегах Усть-Илимского водохранилища провалы приурочены к склонам, где в сложении оползневых тел участвуют песчаники и карбонатные породы усть-кутской свиты. При анализе этих деформаций установлено, что важное значение для их проявления имеет соотношение надводной и затопленной частей склона. Естественно, чем больше затопленная часть склона, тем вероятнее проявление провальных форм на поверхности. При незначительном подтоплении деформации обводненных пород или не повлияют на устойчивость вышележащих отложений, или вызовут их медленное прогибание без разрыва сплошности. Как следует из рис. 51, суффозионно-провальный процесс в первую очередь развивается на склонах с соотношением надводной и подводной частей 1 : 1 и ниже.

Приведенное разделение оползневых и суффозионно-провальных деформаций по времени проявления показывает, что судить о достоверности методики прогноза невозможно без учета временного вопроса. Решение последнего — одна из наиболее актуальных современных проблем инженерной геологии. Сейчас уже очевидно, что о времени возникновения оползня можно судить лишь на основе учета роли отдельных факторов (Емельянова, 1976). Сложность проблемы заключается и в том, что эти факторы являются предметом изучения не только специалистов разного профиля, но и разных организаций. Выше было показано, что абразия и подпор могут определять возможность проявления деформаций во времени. Абразия как процесс формирования берегов успешно изучается в лаборатории геодинамики водохранилищ ИЗК СО АН СССР, вопросы же формирования подпора — предмет изучения стационарной службы комплексной экспедиции гидрогеологии и стройматериалов ИГУ. Плодотворное решение временного аспекта прогноза оползней возможно лишь при комплексном исследовании проблемы различными специалистами и организациями.

ЛИТЕРАТУРА

- Агунов А. В. Нормы стока и колебания водности рек Западной Сибири.— В кн.: Колебания и изменения речного стока. М., Изд-во АН СССР, 1960, с. 5—47.
- Айибунд М. М. Результаты натурных исследований течений в Южном Байкале.— «Труды ГГИ», Л., Гидрометеониздат, 1973, вып. 203, с. 49—71.
- Антипова Н. Л. Сезонные и годовые изменения фитопланктона в оз. Байкал.— В кн.: Исследования по микрофлоре и зоопланктону Байкала. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963, с. 12—29. (Труды Лимнолог. ин-та, т. II (XXII), ч. 2).
- Антипова Н. Л. Межгодовые изменения в фитопланктоне оз. Байкал в районе Больших Котов за период 1960—1970 гг.— В кн.: Продуктивность Байкала и антропогенные изменения его природы. Иркутск, изд. Иркутск. ун-та, 1974, с. 75—85.
- Аркин В. И., Левин В. Л. Вариационные задачи с функциями многих переменных и модель распределения ресурсов.— В кн.: Математическая экономика и функциональный анализ. М., 1974, с. 7—35.
- Афанасьев А. И. Вековая изменчивость главнейших элементов гидрометеорологического режима в бассейне оз. Байкал и смежных с ним географических областях.— В кн.: Круговорот вещества и энергии в озерных водоемах. М., «Наука», 1967, с. 40—50.
- Багров Н. А. Статистическая энтропия как мера неопределенности и связанности случайных явлений.— «Метеорология и гидрология», 1957, № 9, с. 43—48.
- Багров Н. А. Статистическая энтропия как показатель сходства или различия метеорологических полей.— «Метеорология и гидрология», 1963, № 1, с. 9—15.
- Бай-ши-п. Турбулентное течение жидкостей и газов. М., ИЛ, 1962. 344 с.
- Баранов В. И., Смирнов М. Н. Пихтовая тайга на предгорьях Алтая. Пермь, 1931. 96 с.
- Башалханов И. А., Буфал В. В. Математические подходы к моделированию геосистем.— В кн.: Моделирование элементарных геосистем. Иркутск, ИГС и ДВ СО АН СССР, 1975, с. 83—101.

- Башарин Г. П.** О статистической оценке энтропии последовательности независимых случайных величин.— «Теория вероятности и ее применение», 1959, т. 4, вып. 3, с. 361—364.
- Берлянд М. Е.** Об опасных условиях загрязнения атмосферы промышленными выбросами.— «Труды ГГО», Л., Гидрометеониздат, 1965, вып. 195, с. 15—25.
- Берлянд М. Е.** Метеорологические проблемы обеспечения чистоты атмосферы.— «Метеорология и гидрология», 1967, № 11, с. 50—62.
- Берлянд М. Е.** Закономерность распространения промышленных выбросов в атмосфере.— В кн.: Метеорологические аспекты загрязнения атмосферы. М., Гидрометеониздат, 1969, с. 3—9.
- Бокс Дж., Дженкинс Г.** Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. I. М., «Мир», 1974. 406 с.
- Борщевский М. З.** Одна задача динамического распределения ограниченных ресурсов.— В кн.: Численные методы анализа (прикладная математика). Иркутск, СЭИ СО АН СССР, 1976, с. 26—41.
- Бруке К.** Климаты прошлого. М., ИЛ, 1952. 358 с.
- Будыко М. И.** Изменение климата. Л., Гидрометеониздат, 1969. 280 с.
- Будыко М. И.** Климат и жизнь. Л., Гидрометеониздат, 1971. 472 с.
- Бутковский А. Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1975. 462 с.
- Буфал В. В.** Радиационный режим котловины оз. Байкал и его роль в формировании климата.— В кн.: Климат озера Байкал и Прибайкалья. М., «Наука», 1966, с. 34—71. (Труды Лимнолог. ин-та, т. 10).
- Вавилин В. А., Георгиевский А. Б.** Математические модели развития популяции черного саксаула в сообществе илаковый черносаксаульник.— В кн.: Биофизические и систематические исследования в лесной биогеоценологии. Петрозаводск, 1976, с. 74—75.
- Валь Е.** Статистическое энтропическое соотношение как вспомогательное средство для решения проблемы прогнозов.— В кн.: Вопросы предсказания погоды. Л., Гидрометеониздат, 1958, с. 295—303.
- Ван дер Ванден Б. Л.** Математическая статистика. М., ИЛ, 1960. 434 с.
- Васильева Г. Я. и др.** К вопросу о природе солнечной активности.— «Солнечные данные», 1971, № 8, с. 96—100.
- Верболов В. И., Сокольников В. М., Шимараев М. Н.** Гидрометеорологический режим и тепловой баланс озера Байкал. М.—Л., «Наука», 1965. 373 с.
- Винберг Г. Г.** Первичная продукция водоемов. Минск, Изд-во АН БССР, 1960. 329 с.
- Вительс Л. А.** Характеристики барико-циркуляционного режима. Л., Гидрометеониздат, 1965. 128 с.
- Витинский Ю. И.** Солнечная активность, ее основные особенности и природа.— В кн.: Ритмичность природных явлений (чтения памяти Л. С. Берга. XI—XIX). Л., «Наука», 1973, с. 134—147.

- Влияние фенола на гидробионтов. М., «Наука», 1973. 277 с.
- Восейков А. И. Избранные сочинения. Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1952. 503 с.
- Вотинцев К. К. Гидрохимия оз. Байкал.— «Труды Байкальской лимнолог. станции». М., 1961, т. XX, с. 311.
- Вотинцев К. К., Мецдерякова А. И., Поповская Г. И. Круговорот органического вещества в оз. Байкал. Новосибирск, «Наука», 1975. 189 с.
- IV Всесоюзный гидрологический съезд. Краткие итоги и решения. Л., Гидрометеиздат, 1974. 38 с.
- Галазий Г. И., Вотинцев К. К. О некоторых принципиальных основах составления Международной биологической программы изучения внутренних водоемов Сибири. М., 1969.
- Галкин Л. М. Решение диффузионных задач методом Монте-Карло. М., «Наука», 1975. 96 с.
- Геденев А. Д. Изменения температуры воздуха на северном полушарии за 90 лет. Л., Гидрометеиздат, 1973. 146 с.
- Гинзбург С. А. Математическая непрерывная логика и изображение функций. М., «Энергия», 1968. 136 с.
- Гирс А. А. Многолетние колебания атмосферной циркуляции и долгосрочные гидрометеорологические прогнозы. Л., Гидрометеиздат, 1971. 280 с.
- Головков В. П. Динамика геомагнитного поля и внутреннее строение Земли. Автореф. канд. дис. М., 1975. 29 с.
- Гриневич Г. А., Петелина Н. А., Гриневич А. Г. Композиционное моделирование гидрографов. М., «Наука», 1972. 184 с.
- Грудева Н. П., Малиновская Л. Н., Наймарк Б. И. Приближенное вычисление спектров сейсмических колебаний.— В кн.: Вычислительная сейсмология. Вып. 3. М., «Наука», 1967, с. 52—109.
- Гурман В. И., Константинов Г. Н. Математические проблемы нормирования антропогенных воздействий.— В кн.: Долгосрочные прогнозы природных явлений. Новосибирск, «Наука», 1977, с. 7.
- Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления. М., «Наука», 1977.
- Гурова Л. А. Питание и пищевые взаимоотношения пелагических рыб и нерыб Байкала. Новосибирск, «Наука», 1974. 186 с.
- Гурова Л. А., Пастухов В. Д. Питание и пищевые взаимоотношения пелагических рыб и нерыб Байкала. Новосибирск, «Наука», 1975. 186 с.
- Гусев Л. А., Смирнова И. М. Размытые множества. Теория и приложения. (Обзор).— «Автоматика и телемеханика», 1973, № 5, с. 367.
- Гусев А. Г. Охрана рыбохозяйственных водоемов от загрязнения. М., «Пищевая промышленность», 1975.
- Демьянович Н. И. Принципы прогноза оползневых берегов ангарских водохранилищ.— В кн.: Результаты научных исследований Института земной коры в 1973 г. Иркутск, 1974, с. 160—164.

- Демьянович Н. И. О взаимосвязи оползневых смещений и абразии на берегах Братского водохранилища.— В кн.: Материалы IV Всесоюз. совещ. по изучению берегов сибирских водохранилищ. Якутск, 1975, с. 76—79.
- Демьянович Н. И. Прогноз оползней на ангарских водохранилищах. Новосибирск, «Наука», 1976. 79 с.
- Динамическая теория биологических популяций. М., «Наука», 1974. 456 с.
- Джансентов К. К., Кузьмичев В. В., Кибардин Ю. В. Конкуренция и периодичность процесса прироста леса.— «Докл. АН СССР», 1976, № 3, с. 695—697.
- Джурик В. И., Дреннов А. Ф., Зарубин Н. Е. Полевые экспериментальные исследования сейсмических свойств пластичномерзлых грунтов Байкальской сейсмической зоны.— «Основания, фундаменты и механика грунтов», М., Стройиздат, 1975, № 4, с. 4—6.
- Детри Жан-Поль. Атмосфера должна быть чистой. М., «Прогресс», 1973. 379 с.
- Дзердзеевский Б. Л. Общая циркуляция атмосферы и климат. М., «Наука», 1975. 285 с.
- Довгий Т. Н. Проникновение солнечной энергии в верхние слои воды оз. Байкал.— В кн.: Природа Байкала. Л., Изд-во АН СССР, 1974, с. 147—157.
- Дружинин И. П. Об асинхронности межлетних отдач крупных рек.— В кн.: Материалы юбилейной научной сессии Академии наук Киргизской ССР. Отделение технических наук. Фрунзе, Изд-во АН КиргССР, 1958, с. 297—308.
- Дружинин И. П. О цикличности и асинхронности паводковых отдач крупных рек.— «Изв. АН КиргССР. Серия естеств. и техн. наук», 1960, т. II, вып. 7 (энергетика), с. 103—113.
- Дружинин И. П. Переломы многолетнего хода природных процессов на Земле и резкие изменения солнечной активности.— В кн.: Ритмы и цикличность в природе. М., «Мысль», 1970, с. 15—50. («Вопросы географии», № 79).
- Дружинин И. П., Кововаленко З. П., Кукушкина В. П., Хамьянова Н. В. Речной сток и геофизические процессы. М., «Наука», 1966. 295 с.
- Дружинин И. П., Хамьянова Н. В. Солнечная активность и переломы хода природных процессов на Земле. М., «Наука», 1969. 224 с.
- Дружинин И. П., Хамьянова Н. В. Схема качественного прогноза водности рек с годовой заблаговременностью.— В кн.: Тезисы докладов IV Всесоюзного гидрологического съезда. Секция гидрологических прогнозов. Л., Гидрометеониздат, 1973, с. 8—9.
- Дружинин И. П., Хамьянова Н. В. Схема качественного прогноза стока рек с годовой заблаговременностью.— «Труды IV Всесоюз. гидрологического съезда». Т. 7. Гидрологические прогнозы. Л., Гидрометеониздат, 1976, с. 14—21.

- Дружинин И. П., Сазонов Б. И., Ягодинский В. Н. Космос — Земля. Прогнозы. М., «Мысль», 1974. 288 с.
- Дружинин И. П., Хамьянова Н. В., Лобановская Ю. А. Прогноз гидрометеорологических элементов с годовой заблаговременностью. Новосибирск, «Наука», 1977. 166 с.
- Дружинин И. П., Хамьянова Н. В., Шевнин А. Н. Элементарные составляющие многолетних колебаний водности рек и их прогнозные значения. — В кн.: Материалы XXIII Международного географического конгресса. Т. 2. М., 1976, с. 208—212.
- Дьяков А. В. Использование информации об активности Солнца в гидрометеорологическом прогнозировании на длительные сроки (1940—1972 гг.). — В кн.: Солнечно-атмосферные связи в теории климата и прогнозах погоды. Л., Гидрометеиздат, 1974, с. 307—313.
- Елексов Б. Б. Воздействие солнечной активности на межгодовые изменения атмосферной циркуляции. Автореф. канд. дис. Л., 1972. 17 с.
- Емельянова Е. П. Анализ методов и особенности прогноза оползней в горно-складчатых областях. — В кн.: Геологические закономерности развития оползней, обвалов и селевых потоков. Вып. 1. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976, с. 35—61.
- Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. М., «Наука», 1970. 703 с.
- Заде Л. А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. — В кн.: Математика сегодня. М., «Знание», 1974, с. 64.
- Запольский К. К., Жбрыкунова Н. А., Жбрыкунов В. Я., Логинова Г. М. Спектральный состав Р-волн больших землетрясений по данным станции ЧИСС Обнинск. — В кн.: Региональные исследования сейсмического режима. Кишинев, «Штиинца», 1974, с. 188—200.
- Ивлев В. С. Экспериментальная экология питания рыб. М., Пищепромиздат, 1955. 252 с.
- Иоффе А. Я., Петухов Г. П., Мирон Ю. П. Лекции по математической статистике. Л., 1970.
- Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. Л., «Энергия», 1965.
- Калинин Г. П. Проблемы глобальной гидрологии. Л., Гидрометеиздат, 1968. 377 с.
- Калинин Ю. Д. Геомагнитные вековые вариации в СССР и внутреннее строение Земли. — «Труды НИУ ГУГМС», М., 1946, № 6. 48 с.
- Кастлер Г. Алфавит теории информации. — В кн.: Теория информации в биологии. М., ИЛ., 1960, с. 8—53.
- Кац А. З. К вопросу об учете грунтовых условий при сейсмическом микрозонировании. — «Труды Геофизического ин-та АН СССР», 1955, № 30(57), с. 217—225.
- Кожов М. М. Сезонные и годовые изменения в планктоне озера Байкал. — «Труды Всесоюз. гидробиол. об-ва», 1955, т. VI, с. 133—158.
- Кожов М. М. Биология озера Байкал. М., Изд-во АН СССР, 1962. 315 с.

- Кожов М. М.** О динамике развития планктона в оз. Байкал.— В кн. Круговорот вещества и энергии в озерных водоемах. М., «Наука», 1967, с. 192—202.
- Кожова О. М.** К биологии *Erischura baicalensis* в озере Байкал.— Изв. БГНИИ при Иркутском ун-те. Л., Изд-во ЛГУ, том XVI, вып. 1—4, с. 92—121.
- Кожова О. М.** Систематический список планктонных водорослей озера Байкал и некоторые данные по биологии их массовых форм.— Изв. Сиб. отд. АН СССР», Новосибирск, Изд-во Сиб. отд. АН СССР, 1959, т. 10, с. 112—125.
- Кожова О. М., Казанцева Э. А.** О сезонных изменениях бактериопланктона в водах озера Байкал.— «Микробиология», 1961, т. XXX, вып. 1, с. 113—118.
- Колмогоров А. Н.** Об аналитических методах в теории вероятностей.— «Успехи мат. наук», 1938, вып. 5.
- Комин В. Г.** Онтогенез заболоченных северотаежных ельников Зауралья.— В кн.: Динамика и строение лесов на Урале. Свердловск, 1970, с. 92—116.
- Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968. 720 с.
- Коряков Е. А.** Пелагические бычковые Байкала. М., «Наука», 1972. 156 с.
- Кочукова Т. Н.** Колебания годового стока рек СССР.— «Труды ГГИ», Л., Гидрометеиздат, 1955, вып. 50(104), с. 56—117.
- Крамер Г.** Математические методы статистики. М., «Мир», 1975. 648 с.
- Крицкий С. Н., Менкель М. Ф.** Водохозяйственные расчеты. Л., Гидрометеиздат, 1952. 392 с.
- Крогнус Ф. В., Крохин Е. М., Куренков И. И., Меншуткин В. В.** Модель экологической системы озера Дальнего.— «Гидробиолог. журн.», 1969, вып. 5, с. 14—23.
- Кротов В. Ф., Гурман В. И.** Методы и задачи оптимального управления. М., «Наука», 1973. 446 с.
- Кротова В. А.** Геострофическая циркуляция вод Байкала в период прямой термической стратификации.— «Труды Лимнолог. ин-та», 1970, т. XIV (XXXIV), с. 11—44.
- Крыжановская И. Н.** Совершенствование методов прогноза переработки берегов по опыту длительных наблюдений на Каховском водохранилище. Автореф. канд. дис. Одесса, 1975. 31 с.
- Кузин Н. С.** Циклические колебания стока рек северного полушария. Л., Гидрометеиздат, 1970. 179 с.
- Кукушкина В. П., Дружинин И. П.** Информационные функции как инструмент для оценки предсказателей при сверхдолгосрочном прогнозировании.— В кн.: Теория и методы прогноза изменений географической среды. Вып. 1, ч. 1. Иркутск, 1973, с. 37. (Тезисы V совещания географов Сибири и Дальнего Востока).
- Кульбак С.** Теория информации и статистика. М., «Наука», 1967. 408 с.

- Ландсберг Х. Э., Эйлер М. Ф. Роль метеофакторов в загрязнении воздуха городов.— В кн.: Материалы XV Генеральной ассамблеи МГГС, СССР. М., 1971.
- Логинов В. Ф. Некоторые особенности проявления солнечной активности в стоке рек Европы.— «Солнечные данные», 1967, № 7, с. 87—89.
- Логинов В. Ф. Характер проявления различных типов возмущений на Солнце в циркуляции атмосферы.— «Труды ГГО». Л., Гидрометеопиздат, 1970, вып. 258, с. 18—24.
- Логинов В. Ф. Новый индекс солнечной активности.— В кн.: Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. М., «Наука», 1972, № 21, с. 141—151.
- Ломтадзе В. Д. Закономерности развития гравитационных процессов и их прогноз. В кн.: Геология четвертичного периода, инженерная геология, проблемы гидрогеологии аридной зоны. М., «Наука», 1976, с. 225—234.
- Любецкая Е. В. Материалы к модели популяции белки Восточного Саяна. I. Первичный анализ динамики численности популяции белки и урожайности кедра.— «Вестник Моск. ун-та», 1976, вып. 5, с. 3—10.
- Мазенова Г. Ф. Биология пелагического рачка *Cyclops kolensis* Zill в озере Байкал.— В кн.: Биология беспозвоночных Байкала. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963, с. 49—130.
- Маккавеев В. М. О распространении растворов в турбулентном потоке и о химическом методе измерения расхода.— «Записки ГГИ», 1933, т. X, Л., с. 229—247.
- Маккавеев В. М., Коновалов И. М. Гидравлика. Л., Речиздат, 1940.
- Марчук Г. И., Качергин В. П., Цветова Е. А. Численное моделирование ветровых течений озера Байкал. Новосибирск, ТНО, ВЦСО АН СССР, 1973.
- Максимов И. В. Геофизические силы и воды океана. Л., Гидрометеопиздат, 1970. 447 с.
- Медведев С. В. Инженерная сейсмология. М., Госстройиздат, 1962. 284 с.
- Меншуткин В. В. Функциональная модель озерной экосистемы.— «Журн. общей биологии», 1971, № 2, с. 163—169.
- Меншуткин В. В. Математическое моделирование популяций и сообществ водных животных. Л., «Наука», 1971. 196 с.
- Миланкович М. Математическая климатология и астрономическая теория колебания климата. М.—Л., ГОНТИ, 1939. 208 с.
- Миронов П. С. Взрывы и сейсдобезопасность сооружений. М., «Недра», 1973. 167 с.
- Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М., «Наука», 1971. 563 с.
- Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Изд-во техн.-теор. лит., 1957. 476 с.

- Мишарин К. И. Байкальский омуль. — В кн.: Рыбы и рыбное хозяйство в бассейне оз. Байкал. Иркутск, Иркутское кн. изд-во, 1958, с. 130—288.
- Моисеев Н. Н., Свирежев Ю. М. — Методы системного анализа в проблеме «Человек — биосфера». — В кн.: Имитационное моделирование и экология. М., «Наука», 1975, с. 10—18.
- Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидродинамика. Ч. 1. М., «Наука», 1965. 639 с.
- Моран П. Статистические процессы эволюционной теории. М., «Мир», 1973. 287 с.
- Мунзар Ян. Отрицательные антропогенные влияния на климат промышленного района Северо-Западной Чехии. — Реф. журн. «Геофизика», 1973, № 1, с. 55.
- Мустель Э. Р. Солнечная активность и тропосфера. — В кн.: Влияние солнечной активности на атмосферу и биосферу Земли. М., «Наука», 1971, с. 32—57.
- Некрасова Т. П. Методы оценки и прогноза урожаев семян кедрового сибирского. Новосибирск, Изд-во Сиб. отд. АН СССР, 1960. 36 с.
- Нинайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М., «Мир», 1972.
- Озмидов Р. В. Горизонтальная турбулентность и турбулентный обмен в океане. М., «Наука», 1968. 199 с.
- Оль А. И. Проявления солнечной активности в магнитосфере и ионосфере Земли. — В кн.: Влияние солнечной активности на атмосферу и биосферу Земли. М., «Наука», 1971, с. 104—118.
- Оль А. И. Ритмические процессы в земной атмосфере. — В кн.: Ритмичность природных явлений. (Чтения памяти Л. С. Берга XI—XIX). Л., «Наука», 1973, с. 148—164.
- Пановский Г. А., Брайер Г. В. Статистические методы в метеорологии. Л., Гидрометеониздат, 1967. 242 с.
- Пастухов В. Д. Некоторые итоги и задачи исследования популяций байкальской нерпы. — В кн.: Природа Байкала. Л., Изд-во АН СССР, 1974, с. 238—253.
- Пирузян С. А. Опыт уточнения исходной сейсмической балльности для целей микросейсмрайонирования и детального сейсмрайонирования. — В кн.: Инженерная сейсмология. Вып. 3—4. Душанбе, «Дониш», 1966, с. 45—60.
- Полликарпова Л. А. Статистическое исследование динамических характеристик сейсмических записей. М., «Наука», 1973. 76 с.
- Помазкова Г. И. Зоопланктон озера Байкал. Автореф. канд. дис. Иркутск, 1970. 20 с.
- Понько В. А. О возможности сверхдолгосрочного прогноза уровня озер и внутренних морей Среднего региона. — В кн.: Природные условия Западной Сибири и переброска стока рек в Среднюю Азию. Новосибирск, «Наука», 1975, с. 113—123.

- Понько В. А. Фоновые прогнозы стока и уровня озер Верхней Оби.— В кн.: Географические проблемы при сельскохозяйственном освоении Сибири. Новосибирск, «Наука», 1977.
- Поповская Г. И. Годовые изменения фитопланктона.— В кн.: Лимнология придельтовых пространств Байкала.— «Труды Лимнолог. ин-та», Л., «Наука», т. XII(XXXII), 1971, с. 158—169.
- Порхаев Г. В. Тепловое взаимодействие зданий и сооружений с вечномёрзлыми грунтами. М., «Наука», 1970. 205 с.
- Потапов В. А. Исследование спектров и спектральных характеристик колебаний грунтов и зданий в Прибайкалье при воздействии взрывов и землетрясений.— В кн.: Современные исследования земной коры. Иркутск, 1975, с. 134—136.
- Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969. 384 с.
- Почтарев В. И. Периоды и цикличность в магнитном поле Земли.— В кн.: Ритмичность природных явлений. (Чтения памяти Л. С. Берга, XV—XIX). Л., «Наука», 1973, с. 188—195.
- Предельно допустимые концентрации вредных веществ в воздухе и воде. Л., «Химия», 1975. 456 с.
- Природа многолетних колебаний речного стока. Новосибирск, «Наука», 1976. 336 с.
- Природные режимы степей Минусинской котловины. Новосибирск, «Наука», 1976. 244 с.
- Перспективны научно-исследовательских работ, предложенных для использования в народном хозяйстве. Вып. 1. Иркутск, СЭИ Сиб. отд. АН СССР, 1974, с. 155—156.
- Пудовкин И. М., Валуева Г. Е. К вопросу о причинной обусловленности некоторых физико-географических явлений с позиций дрейфа магнитного центра Земли.— В кн.: Ритмичность природных явлений. (Чтения памяти Л. С. Берга, XV—XIX). Л., «Наука», 1973, с. 195—208.
- Пуляевский Г. М. Оползни на берегах Братского водохранилища.— В кн.: Гидрогеология и инженерная геология аридной зоны СССР. Вып. 12. Душанбе, «Дониш», 1968, с. 142—146.
- Пучков С. В. Спектры ускорений и скоростей сильных землетрясений, отнесенных к различным грунтам.— В кн.: Инженерная сейсмология. Вып. 3—4. Душанбе, «Дониш», 1966, с. 12—21.
- Пырина И. Л. Фотосинтез пресноводного фитопланктона при различных световых условиях в водоеме.— В кн.: Круговорот вещества и энергии в озёрных водоемах. М., «Наука», 1967, с. 202—211.
- Райбман Н. С. Что такое идентификация. М., «Наука», 1970. 190 с.
- Раткович Д. Я., Жданова И. С., Привальский В. Е. К проблеме уровня режима Каспийского моря.— «Водные ресурсы», 1973, № 3, с. 43—69.

- Ратникова Л. И., Левини А. А. Расчет спектральных характеристик тонкослоистых сред.— «Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли», 1967, № 12, с. 49—53.
- Рекомендации по сейсмическому микрорайонированию, РСМ-73.— В кн.: Вопросы инженерной сейсмологии. Вып. 15. М., «Наука», 1973, с. 6—34.
- Рижоненицкий В. Б. Приливы на Солнце и их влияние на геофизические процессы.— В кн.: Ритмика природных явлений. Л., «Наука», 1976, с. 23—27.
- Розовский Л. Б., Зелинский И. П. Инженерно-геологические прогнозы и моделирование. Одесса, Министерство высшего и среднего специального образования УССР, 1975. 115 с.
- Романовский В. И. Математическая статистика. Кн. 2. Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1963. 794 с.
- Россолимо Л. Л. Температурный режим озера Байкал.— «Труды Байкальской лимнолог. станции АН СССР». М., Изд-во АН СССР, 1957, т. 16, с. 550.
- Рубашев Б. М. Проблемы солнечной активности. М., «Наука», 1964. 362 с.
- Рузмайкин А. А. Магнитное поле Галактики.— «Природа», 1976, № 10, с. 136—139.
- Рустанович Д. Н. Колебания поверхности земли в эпицентральных зонах сильных землетрясений. М., «Наука», 1974. 97 с.
- Саваренский Е. Ф. Элементарная оценка влияния слоя на колебания земной поверхности.— «Изв. АН СССР. Серия геофизическая», 1959, № 10, с. 1441—1447.
- Самарина А. В. Биогенные элементы и органическое вещество в водах Южного Байкала. Канд. дис. Иркутск, 1969.
- Сарухания Э. И., Смирнов Н. П. Многолетние колебания стока Волги. Л., Гидрометеоиздат, 1971. 165 с.
- Свирижев Ю. М., Елизаров И. Я. Математические модели биологических систем.— «Проблемы космической биологии», т. XX. М., «Наука», 172 с.
- Сейсмическое микрорайонирование в условиях вечной мерзлоты. Новосибирск, «Наука», 1975. 90 с.
- Сергин С. Я. Воздействие извержений вулканической пыли на климат земного шара.— В кн.: Геофизические исследования планетарной системы «Ледники — океан — атмосфера». Владивосток, 1974, с. 114—146.
- Сиротенко О. Д., Бойкой А. П. О построении замкнутой системы уравнений энерго- и массообмена для расчета биомассы сельскохозяйственных культур.— «Метеорология и гидрология», 1975, № 2, с. 78—88.
- Скабичевский А. П. Планктонные диатомовые водоросли пресных вод СССР. М., Изд-во Моск. ун-та, 1960. 350 с.

- Смирнов В. В.** Состояние запасов селенгинского омуля в оз. Байкал.— В кн.: Вопросы рыбного хозяйства Восточной Сибири. Иркутск, Изд-во Сиб. отд. АН СССР, 1969, с. 20—25.
- Смирнов В. В., Шумилов И. П.** Омули Байкала. Новосибирск, «Наука», 1974. 160 с.
- Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. 4. М., Изд-во техн.-теор. лит., 1957. 812 с.
- Смирнов Н. П.** Солнечная активность и колебания стока рек СССР (в том числе Сибири и Дальнего Востока).— «Известия ВГО», 1974, т. 106, вып. 3, с. 211—216.
- Смирнов Р. В.** Изменения в тропосферной циркуляции, связанные с влиянием неоднородностей структуры межпланетной среды.— В кн.: Солнечно-атмосферные связи в теории климата и прогнозах погоды Л., Гидрометеоздат, 1974, с. 33—42.
- Сомов Н. В.** Многолетние колебания стока крупных рек СССР.— В кн.: Многолетние колебания стока и вероятностные методы его расчета. М., Изд-во Моск. ун-та, 1967, с. 264—278.
- Сонькин Л. Р.** Некоторые возможности прогноза содержания примесей в городском воздухе.— «Труды ГГО». Л., Гидрометеоздат, 1971, вып. 254, с. 121—132.
- Сонькин Л. Р., Липовка А. В., Храпаченко В. А., Христолюбов В. П., Чебаенго Б. Б.** О влиянии метеорологических условий на загрязнение воздуха в различных городах.— «Труды ГГО». Л., Гидрометеоздат, 1975, вып. 235, с. 52—60.
- Сочава В. Б.** Теоретические положения топологии степных геосистем.— В кн.: Топология степных геосистем. Л., «Наука», 1970а, с. 3—12.
- Сочава В. Б.** География и экология.— В кн.: Материалы V съезда Географического общества СССР. Л., «Наука», 1970б. 24 с.
- Сочава В. Б.** Геотопология как раздел учения о геосистемах.— В кн.: Топологические аспекты учения о геосистемах. Новосибирск, «Наука», 1974, с. 3—86.
- Сочава В. Б.** Учение о геосистемах. Новосибирск, «Наука», 1975. 39 с.
- Тамразян Г. П.** Периодичны ли землетрясения?— «Природа», 1975, № 12, с. 96—99.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М., Изд-во техн.-теор. лит., 1953. 680 с.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972. 735 с.
- Топорков И. Г.** Биология молоди байкальского омуля. Канд. дис. Иркутск, Иркутск. ун-т, 1974.
- Уилкс С.** Математическая статистика. М., «Наука», 1967. 630 с.
- Усть-Илимское водохранилище.** Подземные воды и инженерная геология территории. Новосибирск, «Наука», 1975. 220 с.

- Учиджима З. Турбулентный перенос водяных паров и двуокси углерода в посеве кукурузы.— В кн.: Теоретические основы фотосинтетической продуктивности. М., 1972, с. 466—479.
- Фалалеев Э. Н. Пихтовые леса Сибири и их комплексное использование. М., «Лесная промышленность», 1964. 166 с.
- Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. М., «Прогресс», 1971. 340 с.
- Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. М., ИЛ, 1956. 662 с.
- Хамьянова Н. В. Асинхронность стока крупных рек Средней Азии. Фрунзе, Изд-во АН СССР КиргССР, 1961. 84 с.
- Харбух Дж., Бонэм-Картер. Моделирование на ЭВМ в геологии. М., «Мир», 1974. 320 с.
- Харлампович Г. Д., Чуркин Ю. В. Фенолы. М., «Химия», 1974.
- Хильми Г. Ф. Основы физики биосферы. Л., Гидрометеиздат, 1966. 300 с.
- Чижевский А. Л. Земное эхо солнечных бурь. М., «Мысль», 1973. 348 с.
- Чебаченко Б. Б., Степанова Т. А. Микроклиматические особенности вблизи промышленных комплексов и их влияние на поведение выбрасываемых в атмосферу примесей.— В кн.: Природа, ее охрана и рациональное использование. Иркутск, 1974, с. 75—77. (Материалы III областной научно-практической конференции).
- Чебаченко Б. Б. О методах охраны атмосферного воздуха от промышленных выбросов в условиях Восточной Сибири.— В кн.: Проблемы контроля и обеспечения чистоты атмосферы. Л., Гидрометеиздат, 1975, с. 60—65.
- Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., ИЛ., 1960. 510 с.
- Шапиро А. И., Андреев В. Л. Оптимальное соотношение между искусственным и естественным воспроизводством. — В кн.: Вопросы ихтиологии, 1970, т. 9, вып. 1.
- Штейнберг В. В. Исследование спектров близких землетрясений для прогноза сейсмического воздействия.— «Труды Ин-та физики Земли АН СССР», № 38, «Вопросы инженерной сейсмологии». М., вып. 11, с. 123—150.
- Шнитников А. В. Природные явления и их ритмическая изменчивость.— В кн.: Ритмичность природных явлений. (Чтения памяти Л. С. Берга). Л., «Наука», 1968, с. 3—17.
- Шнитников А. В. Приливообразующая сила как фактор изменчивости горного оледенения.— «Географический сборник», 1964, № 17, с. 102—140.
- Эйгенсон М. С. Солнце, погода и климат. Л., Гидрометеиздат, 1963. 274 с.

- Ююкин Н. А. Информационно-статистический метод исследования связей между переменными.— В кн.: Геофизические исследования планетарной модели системы «Ледники — океан — атмосфера». Владивосток, 1974, с. 98—105.
- Babcock H. W. The Topology of the Sun's magnetic field and the 22-year cycle.— *Astrophysical J.*, 1961, v. 133, N 2, p. 572—587.
- Bailey R. L., Dell T. R. Quantifying Diameter Distributions with the Weibull Function.— *Forest Science*, 1973, v. 19, N 2, p. 97—104.
- Barta G. Connections between the secular variations of the Earth's magnetic field and other phenomena.— In: *Annals New York Academy of Sciences*. N. Y., 1960, v. 95, art. 1, p. 351—353.
- Elias C. O., Causton D. R. Studies on data variability and the use of polynomials to describe plant Growth.— *The New Phytologist*, 1976, v. 77, N 2, p. 421—430.
- Idso S. B., Foster I. M. An analytical Study of Three Characteristic Forms of Light-Forced Primary Production in Aquatic Ecosystems.— *Oecologia*, 1975, v. 18, N 2, p. 145—154.
- Jose P. D. Sun's Motion and Sunspots.— *The astronomical J.*, 1965, v. 70, N 3, p. 193—200.
- Karlstrom T. The glacial history of Alaska: its bearing on paleoclimatic theory.— In: *Annals New York Academy of Sciences*, 1960, v. 95, art. 1, p. 290—340.
- Kemp H. T., Little R. L., Holoman V. L., Darby R. L. Effect of chemicals on aquatic life.— In: *Water quality criteria data book*. V. 5, 1973.
- Larkin P. A., Hourston A. S. A model for simulation of the population biology of Pacific salmon.— *J. Fish. Res. Bd. Canada*, 1964, v. 19, N 4.
- Leak W. B. Sapling stand development: a compound exponential process.— *Forest Science*, 1970, v. 16, N 2, p. 177—180.
- Leighton R. B. A Magneto-Kinematic Model of the Solar Cycle.— *Astrophysical J.*, 1969, v. 156, N 1, p. 1—26.
- Leslie P. Of the Use of Matrix in certain population mathematics.— *Biometrika*, v. 33, pt. III, November, p. 133—212.
- Moser J. W. Dynamics of an uneven-aged forest stand.— *Forest Science*, 1972, v. 18, p. 184—191.
- Moser J. W., Häll O. F. Deriving growth and yield functions for uneven-aged forest stands.— *Forest Science*, 1969, v. 15, p. 183—188.
- Peden L. M., Williams J. S., Frayer W. E. A Markov model for stand projection.— *Forest Science*, 1973, v. 19, p. 303—314.
- Pettersson O. The Tidal Force.— *Geografiska Annaler*, Stokholm, 1930, arg, XII, Häft 6, p. 261—322.

- Ricker W. E. Handbook of computation for biological statistics of fish populations.— «Fish Research board of Canada bulletin», 1958, N 119.
- Rudra A. B. A stochastic model for the prediction of diameter distribution of even-aged forest stands.— «Opsearch», 1968, v. 5, N 2, p. 59—73.
- Shove D. Solar cycles and the spectrum of time since 200 BC.— In: Annals New York Academy of Sciences, v. 95, art. 1, 1960, p. 107—123.
- Stecker F. W. Origin of Cosmic Rays.— «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 35, N 3, p. 188—191.
- Schmidt F. H., Boer I. H. Local circulation around an industrial area.— «Berichte des Deutschen Wetterdienstes», 1963, Bd 12.
- Zitzelberger I. Ursachen und Auswirkungen der Luftverschmutzung und das Beispiel München.— «Gesundh.— Ing.», 1973, Bd 94, N 2, S. 38—43.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Типичные задачи, решаемые с помощью динамических моделей природных и природно-экономических систем	5
§ 1. Типы моделей и задачи, связанные с ними (В. И. Гурман)	—
§ 2. Рациональные режимы эксплуатации экосистем (В. И. Гурман)	7
§ 3. Нормирование воздействий (В. И. Гурман, Г. Н. Константинов)	16
§ 4. Оптимальное использование истощаемого ресурса (М. З. Борщевский)	21
§ 5. О выборе типа уравнения для прогностических моделей загрязнений (Л. М. Галкин)	24
§ 6. Задача о рациональном режиме разработки сырья с учетом загрязнений окружающей среды (А. И. Москаленко)	28
§ 7. Задача о рациональных размерах заповедника (А. И. Москаленко)	31
§ 8. Оптимальное управление распределенной возрастной структурой популяции (А. И. Москаленко)	33
Глава II. Модели экосистемы оз. Байкал	45
§ 1. Общая характеристика экосистемы	46
§ 2. Энергетическая модель пелагического сообщества оз. Байкал (Л. Я. Ащепкова, В. П. Гурман, О. М. Кожова)	51
§ 3. Модель сезонной динамики пелагического сообщества оз. Байкал (Л. Я. Ащепкова, О. М. Кожова, В. В. Меншуткин)	57
§ 4. Имитационное моделирование экосистемы оз. Байкал и ее антропогенных изменений (А. В. Горстко, Ю. А. Домбровский, Н. С. Задорожная, Г. С. Маркман, А. А. Матвеев, О. Г. Мордвинкина, В. В. Селятин, Л. В. Эпштейн)	65
Глава III. Модели динамики популяций и процессов в биоценозах	86
§ 1. Модель рыбной популяции и ее эксплуатации (на примере посольского омуля) (В. А. Дыхта, И. Г. Топорков)	—
§ 2. Динамическая модель сукцессии пихтовой тайги (А. К. Черкашин)	94
§ 3. Моделирование продукционного процесса степного фитоценоза (И. А. Башалханов)	100
§ 4. Динамические модели популяции белки (Е. В. Любецкая)	107

Глава IV. Некоторые вопросы математического моделирования многолетних колебаний стока рек и уровня озер	113
§ 1. Предпосылки построения детерминированных моделей уровня озер (В. А. Понько)	—
§ 2. О совершенствовании методики математического моделирования многолетних колебаний речного стока (И. П. Дружинин, А. Н. Шевнин)	127
§ 3. Информационные оценки взаимных связей многолетних колебаний годового стока рек бассейна Енисея и атмосферной циркуляции (В. П. Кукушкина, В. В. Пищенко, А. Н. Шевнин)	134
§ 4. Статистическая оценка значимости информационного отношения (М. З. Борщевский, П. П. Дружинин, В. П. Кукушкина)	144
Глава V. Прогнозирование гидрометеозлементов с годовой за- благовременностью	152
§ 1. Прогноз среднесезонных температур воздуха и сезонных сумм атмосферных осадков в Западной Сибири (Т. В. Бережных, Н. В. Хамьянова)	154
§ 2. Свойство группирования серий лет повышения и понижения гидрометеозлементов и его прогностическое значение (Т. В. Бережных, Н. В. Хамьянова)	167
§ 3. Синхронность многолетних колебаний гидрометеозлементов как источник прогностической информации (Т. В. Бережных, Н. В. Хамьянова)	179
§ 4. Прогноз загрязнения атмосферы (Б. Б. Чебаненко)	183
Глава VI. О прогнозах сейсмических характеристик грунтов и оползней в Прибайкалье	187
§ 1. О прогнозе спектров колебаний некоторых грунтов Прибайкалья при сильных землетрясениях (В. А. Потапов)	—
§ 2. Прогноз изменения сейсмических свойств мерзлых грунтов при полном их оттаивании (В. И. Джурик)	194
§ 3. К оценке методики прогноза оползней берегов ангарских водохранилищ (Н. И. Демьянович)	201
Литература	207

МОДЕЛИ ПРИРОДНЫХ СИСТЕМ

Ответственные редакторы
Владимир Иосифович Гурман,
Игорь Петрович Дружинин

Редактор Л. В. Нонкина
Художественный редактор Т. Ф. Каминина
Художник В. В. Павлов
Технический редактор А. В. Сурганова
Корректоры А. А. Надточий, Л. А. Щербакова

ИБ № 9738

Сдано в набор 5 мая 1977 г. Подписано в печать 23 января 1978 г. МН 02010.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1. 14 печ. л. 14,6 уч.-изд. л.
Тираж 1000 экз. Заказ № 538. Цена 2 р. 20 к.

Издательство «Наука» Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

**В СИБИРСКОМ ОТДЕЛЕНИИ
ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»**

готовятся к выпуску следующие книги:

Климатические особенности зоны БАМ.

Максимов А. А., Понько В. А., Сытин А. Г. Смена фаз увлажненности Барабы (характеристика и прогноз).

Лут Б. Ф. Геоморфология Прибайкалья и впадины озера Байкал.

Сезонная и погодная динамика фитомассы в субарктической тундре.

Книги высылаются наложенным платежом. Заказы направлять по адресу: 630090, Новосибирск, 90, Морской проспект, 22, магазин «Наука».

2565

Цена 2 р. 20 к.



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ