В. Н. Бондаренко

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ЗАКОНОМЕРНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТЬЮ СВОЙСТВ

МОСКВА
НЕДРА
1978

В. Н. Бондаренко

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ЗАКОНОМЕРНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТЬЮ СВОЙСТВ

Под редакцией *Д. А. Родионова*

МОСКВА «НЕДРА» 1978

УДК 550.115

Бондаренко В. Н. Сравнительный анализ геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств. М., «Недра», 1978, 133 с.

В книге показана роль сравнительного анализа объектов с закономерной изменчивостью свойств в геологических исследованиях. Сформулированы в геологических терминах два типа задач сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств, подобраны математические модели входящих в формулировки понятий и приведены вероятностные аналоги этих задач. Большую часть объема работы занимают известные и разработанные автором критерии решения рассматриваемых задач с указанием их особенностей и ограничений. Даны примеры применения рассматриваемой методики и методов в конкретных ситуациях петрологии, минералогии, а также общие замечания по применимости предлагаемых методов. Рассматривается возможность использования одного из разработанных критериев в качестве критерия остановки при подборе модели нелинейной зависимости и поверхностей тренда.

Книга предназначена для специалистов по теоретической и региональной петрологии, минералогии породообразующих минералов и применению математических методов в геологических науках.

Табл. 12, ил. 14, список лит.— 97 назв.

$\frac{20802-411}{043(01)-78}$ 20—78

ПРЕДИСЛОВИЕ

Закономерная изменчивость свойств является характерной особенностью геологических объектов и выражается в разнообразии разновидностей пород, слагающих магматические тела и комплексы, вариациях соотношений молекул разного состава в породообразующих минералах, различной степени метаморфизма пород в пределах одной толщи и т. п. При этом возникают дополнительные трудности в подборе математических моделей, выборе критериев для эффективного сравнения объектов и в некоторых других аспектах применения математических методов в геологических исследованиях. Причем если при решении достаточно общих задач, характерных для начальных этапов внедрения математических методов, изменчивостью свойств можно было пренебрегать, то при переходе к решению формальными методами более сложных и крупномасштабных задач ее учет не только необходим: закономерная изменчивость сама должна стать объектом изучения как отображение особенностей процесса формирования объекта.

Предлагаемая работа посвящена применению математических методов при сравнительном анализе геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств для решения широкого круга задач различных отраслей геологии.

В первой части работы рассмотрены общие вопросы проблемы: распространенность геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств, постановка задач их сравнения, подбор математических моделей подобных объектов и формулировка задач сравнения их в терминах моделей.

Специальная глава посвящена математическим методам сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств, как известным, так и впервые разработанным. Причем предлагаемые методы учитывают особенности задач геологии. Разнообразие реальных ситуаций определяет раздельное рассмотрение методов сравнения объектов при исключении влияния закономерной изменчивости, методов сравнения содержаний признаков и закономерной изменчивости одновременно, а также методов сравнения только вида закономерной изменчивости без влияния на результат содержаний признаков.

Разработанные методы позволили продемонстрировать на конкретных примерах решение таких задач, как количественный анализ двумерных диаграмм, классификация интрузивных массивов по близости петрохимических особенностей слагающих их пород, выделение вулкано-плутонических формаций по сходству эволюции пород вулканической и плутонической составляющих, типизация магматических процессов при исключении влияния латеральных и возрастных особенностей и некоторых других.

К более общим результатам исследований можно отнести постановку задачи о критериях остановки в процедурах подбора модели нелинейной зависимости и поверхностей тренда с использованием одной из предложенных статистик.

Автор глубоко благодарен акад. Ю. В. Прохорову и чл.-корр. АН СССР Л. Н. Большеву за периодические консультации и помощь при разработке методов. Особо признателен автор проф. Д. А. Родионову, взявшему на себя нелегкий труд по редактированию рукописи. Автор считает своим долгом искренне поблагодарить С. М. Кравченко, В. Г. Фоминых, Т. Н. Ифантопуло, Г. Б. Флерова, О. Н. Волынца, А. В. Колоскова за любезно предоставленные материалы и участие в обсуждении результатов, а также сотрудников сектора математических методов ИМГРЭ В. А. Соловьева, И. А. Якшину, С. В. Яковлеву, без действенной помощи которых появление книги было бы невозможным.

ВВЕДЕНИЕ

Задача восстановления характера и основных особенностей процесса формирования исследуемого объекта (объектов) в явном или неявном виде присутствует практически во всех геологических исследованиях. Чаще всего эта задача подразумевается как неотъемлемая составная часть решения любых геологических задач. Несмотря на принципиальную невозможность непосредственного наблюдения (изучения) за процессами формирования геологических объектов (за очень редким исключением), важность этой проблемы в исследованиях всех отраслей геологической науки и практики требует поиска и разработки эффективных методов оценки характера геологических процессов по наблюдаемым особенностям сформированных ими объектов.

Невозможность непосредственного изучения геологических процессов вынуждает геологов-исследователей использовать наблюдаемые результаты процессов как практически единственную информацию о их характере и особенностях. В различных отраслях геологии давно известно множество методов, дающих возможность с известной долей условности оценить характер процесса, в результате которого был сформирован исследуемый объект.

К таким методам можно отнести следующие: использование пространственного положения для определения характера последовательности различных временных состояний процесса (теория рудных месторождений, теоретическая петрология, литология); построение некоторых индексов на основе вещественных характеристик для оценки последовательности смены разновидностей пород в период становления геологических объектов эндогенного происхождения (теоретическая петрология, теория гранитизации); сопоставление полученных в процессе экспериментальных исследований результатов с соответствующими реальными объектами с использованием диаграмм в разнообразных координатах (теоретическая петрология, минералогия, теория метаморфизма); последовательности геологических единиц, сформированные по относительному времени образования (палеовулканология).

Приведенные примеры относятся к способам замены реального геологического времени доступной исследователю информацией. Упорядочивание наблюдаемых результатов процесса одним из указанных способов дает возможность оценить характер изменения вещественных характеристик в процессе формирования объекта. При оценке характера геологических процессов исходным является предположение, что в период деятельности геологического процесса происходит последовательное и закономерное изменение вещественных характеристик продуктов каждого временного состояния процессов. В связи с этим в основе любого метода оценки характера геологического процесса лежит объективно существующая закономерная изменчивость свойств исследуемых объектов, обусловленная именно процессом формирования каждого из них.

Действительно, в геологии практически невозможно обнаружить объект со стабильными, неизменными свойствами слагающих его элементов во всем объеме существования объекта, а изменчивость свойств является характернейшей особенностью объекта геологических исследований. Поэтому закономерная изменчивость свойств не только должна учитываться при решении геологических задач, которые обычно сводятся к сравнению и классификации, но и должны быть разработаны методы объективного сравнения характера самой закономерной изменчивости свойств, порождаемой, как правило, геологическими процессами, а также методы объективной классификации объектов на базе формы закономерной изменчивости свойств. Это дает возможность (с необходимыми допущениями) выявить классы близких по характеру процесса формирования геологических объектов. Автор настоящей работы, имеющий определенный опыт применения математических методов, обеспокоен широко распространенной в настоящее время тенденцией к осреднению при формальном представлении свойств геологических объектов в математическом аппарате. Так, в подавляющем большинстве работ по геологическим дисциплинам при вещественной характеристике геологических объектов стало традицией приводить таблицы значений средних арифметических, оценок дисперсии и коэффициента вариации.

При этом подразумевается, что эмпирические данные о свойствах объекта представляют собой случайную выборку из изучаемой генеральной совокупности. Это в свою очередь означает, что объект признается однородным во всем объеме, и колебания значений признака (признаков) его имеют случайный характер относительно некоторого генерального среднего вне зависимости от характера объекта и свойств его признаков.

Точно на таких же принципах основано и применение более сложных методов математики, таких, как дисперсионный и дискриминантный анализы, методы распознавания образов. В то же время в большинстве своем признаки геологических объектов находятся в сложных соотношениях и проявляют те или иные тенденции изменения в пределах рассматриваемого объекта. В связи с этим оценки среднего, дисперсии, коэффициента вариации нередко недостаточно характеризуют вещественные свойства объекта.

Необходимо отметить, что и такие математические методы, как корреляционный и регрессионный анализ, факторный анализ, метод главных компонент, в значительной степени предназначены для выявления взаимоотношений между различными признаками геологических объектов. Однако задание вида этих взаимоотношений априори существенно обедняет получаемую в результате их применения информацию, вследствие частого несовпадения характера зависимости с априорно предполагаемой формой (линейная, полиномиальная разных порядков и т. п.). Не исключена возможность, что отклонения от заданной или подобранной формы несут существенную информацию в геологическом смысле.

Иные принципы положены в основу работ, посвященных исследованию характера процессов формирования геологических объектов с применением аппарата математики. Наиболее интересны среди них работы А. Б. Вистелиуса (1962, 1963, 1963, 1966, 1966, 1967, 1967 и др.). К этой же группе следует отнести исследования Ф. Чейза (1968), У. Крамбейна и Ф. Грейбилла (1969). Практически во всех отмеченных работах изучаются возможности моделирования геологических процессов с помощью математического аппарата на базе наблюдаемых свойств объекта.

Наибольшим распространением и успехом пользуется метод моделирования с помощью марковских цепей. Марковские цепи успешно применяются для описания характерных черт процессов формирования слоистых толщ и процессов формирования гранитоидов. Во всех упомянутых работах характер изменения вещественных характеристик в процессе задается априори. Этот путь исследования геологических объектов автор считает перспективным, однако очевидно, что такой путь не сможет удовлетворительно описать все многообразие реальных ситуаций и поэтому не может быть отнесен к универсальным.

Закономерная изменчивость свойств дает возможность строить с той или иной степенью условности модели процессов изменения вещественных характеристик при становлении объекта. Отсюда становится возможным сопоставление геологических объектов на основе оценок характеристик моделей процессов их формирования в вещественном аспекте и классификация на той же основе.

Наличие математического аппарата для сравнения оценок характеристик моделей процессов дает возможность перевести на уровень объективной меры ряд широко распространенных и важных в геологическом отношении задач. Здесь имеется в виду типизация процессов формирования магматических объектов с позиций характера изменения вещественных характеристик в процессе их становления вне зависимости от региональных и возрастных особенностей наблюдаемых продуктов их реализации. Кроме того, предлагаемый в настоящей работе математический аппарат способствует переходу анализа различного вида диаграмм (двойных, тройных и т. п.) в разряд количественных методов, что позволит существенно повысить определенность и доказанность выводов в результате применения этой широко распространенной методики. Реальной становится возможность определения применимости той или иной теоретической модели к реально наблюдаемым фактам и выбор модели, наиболее близкой к свойствам данного объекта.

Разрабатываемая автором методика базируется на том, что реально существующая закономерная изменчивость свойств в случае ее учета и использования позволяет избежать возможных ошибок при излишне формальном представлении свойств объекта в математическом аппарате исследований и существенно повысить информационную отдачу в результате применения математических средств, соответствующих основным особенностям объекта.

Глава 1

РОЛЬ ЗАКОНОМЕРНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ СВОЙСТВ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Целью настоящего раздела работы является показ закономерного характера наблюдаемой в геологических телах изменчивости свойств и введение читателя в круг задач геологии, решение которых формальными методами требует обязательного учета закономерной изменчивости свойств слагающих их пород.

Изложение дается преимущественно на примерах петрологии, минералогии, геохимии и некоторых смежных областей геологической науки. Однако методическая сущность предлагаемого в работе подхода к сравнительному анализу объектов с закономерной изменчивостью свойств имеет достаточно общий характер и не зависит от материала, на котором она демонстрируется. Так, если начать с петрологических примеров, то нетрудно видеть, что изучаемые объекты обладают изменчивостью свойств, которая выражается в фациальном составе интрузивных тел, вулканических свит и серий, вулкано-плутонических формаций и т. п. Необходимо оговорить, что здесь и далее в тексте работы термин «фациальный состав» магматических объектов употребляется в смысле состава разновидностей магматических пород, участвующих в строении исследуемого объекта.

Принимая существование и широкую распространенность закономерной изменчивости вещественного состава объектов петрологии, следует, однако, остановиться на важной особенности фациальных в указанном выше смысле характеристик петрологических объектов. Достаточно четко она определена У. Т. Хуаном (1965): «Следует напомнить, что каждая порода — промежуточный член той или иной серии. Породы постепенно переходят друг в друга, и установленные между ними границы обычно искусственные» (с. 119).

Это хорошо известное положение с петрографической номенклатурой усложняет проблему использования фациальных характеристик крупных объектов петрологии в целях описания, и особенно сравнения их. В настоящее время отсутствует объективная петрографическая номенклатура на основе как минерального, так и химического состава пород. Хотя эта проблема давно волнует исследователей (Левинсон-Лессинг, 1924, 1925; Бондаренко, 1970; Сидоров, 1972), она еще не может считаться в какой-либо мере удовлетворительно решенной.

Однако необходимость в подобной объективной классификации магматических пород очень велика. Так, например, последнее время Ю. А. Кузнецов (1973) большое внимание при формационном анализе магматических образований уделяет именно фациальной характеристике объектов. В работе Э. П. Изоха (1972) не только фациальная характеристика, но и количественные соотношения разновидностей пород привлекаются как для описания, так и для сравнения магматических формаций. Однако субъективность авторских определений разновидностей магматических пород приводит к невозможности межрегиональных сопоставлений. Можно сослаться на пример работы В. А. Кутолина (1969), в которой сопоставление базальтоидных формаций разных регионов и типов проводилось только по базальтам в соответствии с классификацией авторов фактического материала. Сравнение привело к тому, что в формациях разных регионов базальты существенно различаются содержанием кремнезема. Этот результат можно интерпретировать как особенности формаций, но не исключена возможность, что различные авторы в разных регионах называют базальтами существенно различные по содержанию кремнезема породы.

Все без исключения объекты петрологических исследований являются результатом проявления некоторого набора процессов, протекающих в земной коре. Среди множества процессов, участвующих в формировании геологического тела, всегда можно выделить один (или более) ведущий. Геологические процессы протекают во времени и в реальном пространстве. Для простоты примем, что наблюдаемые нами геологические тела можно приписать действию одного определяющего процесса. Примем в качестве времени начала действия процесса момент, начиная с которого обязательно появление продуктов деятельности данного процесса в наблюдаемом в настоящий момент виде. Очевидно, что к моменту начала деятельности процесса необходимо существование некоторого объема вещества как вещественной основы, необходимой для его деятельности, и пространства для размещения его продуктов.

Для эндогенных процессов можно считать обычным закономерное изменение вещественных характеристик продуктов деятельности процесса при прослеживании от начальных моментов его деятельности — к конечным. Эти предположения в принципе не противоречат основным особенностям геологических процессов, в частности, эндогенных, следовательно, каждый объект геологических исследований можно рассматривать как совокупность бесконечного числа элементов, соответствующих бесконечному числу временных состояний деятельности данного процесса. По предположению, каждый из этих элементов должен отличаться от остальной совокупности результатов данного процесса. Наблюдаемым нами результатом таких процессов можно считать бесконечный набор элементов (разновидностей пород, руд, минералов и т. п.), слагающих исследуемое геологическое тело.

Учитывая масштабность исследований и существующие на настоящий момент возможности анализа, исследователь не может рассматривать всю бесконечную цепочку результатов всех без исключения временных состояний рассматриваемого процесса. Примем, что исследователя, проводящего изучение конкретного геологического тела в определенном масштабе, вполне удовлетворяет объединение результатов действия данного процесса в некотором временном интервале в разновидность, выделение которой доступно в данном масштабе исследований. Таким образом, от бесконечного числа результатов деятельности процесса мы переходим к конечному числу разновидностей, каждая из которых отвечает определенному интервалу времени действия геологического процесса.

Естественно, что в настоящей работе имеется в виду лишь отображение процессов формирования в вещественных свойствах наблюдаемых объектов. Вещественными признаются свойства, представляемые или те, которые могут быть представлены, в числовом выражении. В петрологии подобные признаки являются основой для построения диаграмм различного вида, таких, как диаграммы Харкера, Ларсена, Фрэзера, Кураты, Симпсона, Куно, Полдерваарта и т. п. Вариационные кривые этих диаграмм следует квалифицировать как характеристики процесса становления рассматриваемого объекта, *выраженные через наблюдаемые* вещественные показатели. Естественно, что построение диаграмм вообще и тем более генетическая их интерпретация невозможны без существования закономерной изменчивости этих характеристик в изучаемом объекте.

Таким образом, наблюдаемая в петрологии ситуация может быть охарактеризована в интересующем нас смысле следующим образом. Наличие закономерной изменчивости свойств в объектах петрохимических исследований не вызывает сомнений, так же как и использование ее для оценки характера их формирования с помощью диаграмм или каким-либо другим способом. Здесь можно, в частности, упомянуть работу Ф. Чейза (Chnyes, 1963), в которой процесс дифференциации оценивается с помощью регрессионной модели.

Утверждение о возможности восстановления характера геологического процесса по наблюдаемым особенностям геологических объектов является достаточно распространенным. Так, в частности, А. Б. Вистелиус (1963) указывает, что при некоторых условиях возможно составление суждения об основных характеристиках процесса, если известна случайная функция его. Составление суждения о процессе определяется А. Б. Вистелиусом (1963) как решение обратной задачи, с которой обычно приходится иметь дело в геологии.

Если сопоставить термины из цитированной статьи А. Б. Вистелиуса с принятыми в настоящей работе, то нужно учитывать, что «случайная функция результата процесса» может быть сопоставлена по содержательному смыслу с фиксируемой в результате наблюдений закономерной изменчивостью свойств как отображением процесса с неизбежными наложенными случайными флуктуациями. «Решение обратной задачи» сопоставляется с построением оценки процесса по наблюдаемым вещественным свойствам объектов с закономерной изменчивостью свойств.

В связи с тем что приведенная выше схематическая модель геологического процесса является базовой для дальнейших построений, необходимо проиллюстрировать ее более конкретным примером. С этой целью рассмотрим схематическую модель петрогенезиса. Аналогично принятой модели началом процесса следует считать появление твердой фазы в наблюдаемом при изучении интрузивных тел виде, т. е. в виде первой по времени формирования разновидности пород. Естественно, что к этому моменту должна существовать вещественная основа — расплавленный материал и заполненное им пространство. Предполагается, что с отмеченного выше момента процесс формирования магматического тела проходит непрерывно во времени. Причем в соответствии с определяющим процессом во время реализации петрогенетического процесса происходит закономерное изменение состава его продуктов. Можно предположить, что эти изменения происходят непрерывно вне зависимости от того, к какому типу процессов петрогенезиса относится рассматриваемый процесс: кристаллизационной, гравитационной или какой-либо иной дифференциации.

Очевидно, что в процессе становления интрузивного тела, даже при неизменных температуре и давлении, постоянно меняется соотношение между составом твердой и жидкой фазы. Это ведет к тому, что в каждый момент состав твердой фазы меняется непрерывно. Естественно, что изменения состава твердой фазы до некоторого момента могут быть незначительными и не фиксироваться имеющимися в распоряжении петролога аналитическими возможностями.

Здесь имеются в виду следующие особенности процесса петрогенезиса: даже при постоянных давлении и температуре вследствие постоянно меняющихся соотношений «твердая фаза — расплав» непрерывно изменяются соотношения различных составляющих практически всех породообразующих минералов — альбитовой и анортитовой молекул плагиоклазов, железистость и магнезиальность темноцветных минералов и т. п. До известного предела эти изменения не проявляются в оптических свойствах минерала и, как правило, не фиксируются, исключая случаи специальных исследований породообразующих минералов. Отсюда эти изменения существенно не сказываются на выпадающей в твердую фазу в рассматриваемый период породной разновидности. В определенный ходом процесса становления магматического тела момент отмеченные изменения накапливаются и проявляются появлением в твердой фазе следующей разновидности из формирующегося набора разновидностей пород.

Таким образом, в работе принимается модель петрогенезиса, при которой изменение вещественных характеристик наблюдаемых в настоящее время продуктов процесса протекает непрерывно. К примеру, в ряду диорит — гранодиорит — гранит — аляскит можно выделить ряд непрерывно меняющихся по составу разновидностей с незначительными последовательными изменениями вещественных свойств, выделение которых с петрологических позиций нельзя считать оправданным.

Как правило, в геологических исследованиях обычное время заменяется относительным («геологическим», в понимании И. В. Круть, 1973), которое позволяет упорядочить продукты изучаемого процесса, используя соотношение «раньше — позже». В качестве примеров можно привести много работ, посвященных изучению многофазных интрузий, многостадийных рудных тел, вулканогенных комплексов, стратиграфических разрезов и т. п. При этом в каждом случае исследователь может указать с определенной долей уверенности, какой из двух элементов изучаемого геологического тела сформировался раньше по времени и какой позже, но практически никогда не может определить протяженность временно́го интервала, отделяющего время образования более позднего элемента (фазы, стадии, потока и т. п.) от момента формирования предшествующего ему по времени элемента.

Известно, что почти все породообразующие минералы: плагиоклазы, пироксены, оливины и т. п. представляют собой изоморфные ряды переменного состава. В таких рядах большинство характеристик (признаков) каждого элемента ряда почти функционально и непрерывно связано со значением признака, связывающего минеральные разновидности в единую последовательность. Примерами подобных признаков, в частности, могут служить: содержание анортитовой молекулы в плагиоклазах, отношение Fe/Mg в пироксенах группы диопсид — геденбергит, отношение Fe/Mg в оливинах (группа форстерита — фаялита) и т. п.

Теперь рассмотрим с принятых в настоящей работе позиций процессы метаморфизма. Известно два направления в теории метаморфизма — изохимическая и гетерохимическая концепции. Приведенные ниже положения основываются на работах сторонников гетерохимической природы метаморфических воздействий. С точки зрения гетерметаморфистов, в породах, подвергшихся гранитизации, четко фиксируется изменчивость свойств, носящая закономерный характер. Более того, П. Лападю-Арг (1950) счел возможным построить некоторый показатель на основе химического состава гранитизированных пород, который, по его мнению, оценивает степень гранитизации от неизмененных до ультрагранитизированных пород.

Нетрудно привести примеры закономерной изменчивости свойств из области геохимии, в частности, из теории геохимических поисков месторождений. Метод геохимических поисков и обосновывающая его теория возникли и базируются на объективно существующих особенностях рудогенезиса и деятельности рудообразующих растворов. Было установлено, что практически все эндогенные месторождения представляют собой неразрывную комбинацию собственно рудного тела (рудных тел) и окружающего их геохимического ореола. Эффективность же геохимических поисков месторождений по ореолам является следствием закономерной изменчивости геохимических свойств в пределах пространства ореола, которую специалисты-геохимики представляют в виде вертикальной и горизонтальной или продольной и поперечной зональности. Устойчивость и закономерный характер изменчивости геохимических характеристик в пределах ореола дают возможность построения методического аппарата оценки положения каждого конкретного сечения ореола относительно искомого рудного тела. Практика последних лет показала высокую эффективность поисков рудных месторождений по их ореолам.

Общеизвестным фактом является изменчивость вещественных свойств в рудных телах эндогенного происхождения и ее закономерный характер. Именно эта особенность рудных тел лежит в основе построений теории рудообразования.

Геологи различных специальностей, наблюдая закономерную изменчивость свойств внутри объекта, так или иначе связывают ее с характером процесса формирования исследуемого объекта. Очевидно, закономерная изменчивость свойств является отображением в наблюдаемом объекте процесса изменения этих свойств на различных стадиях его реализации. Именно эта предпосылка служит основой практически всех генетических построений, причем такая закономерная изменчивость свойств в подавляющем большинстве разделов геологии является практически единственным источником информации о характере процессов формирования объектов геологических исследований.

В геологии одним из основных методов выявления характерных особенностей исследуемых объектов является сравнительный анализ. В связи с этим очевидно, что сравнительный анализ геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств занимает в геологических исследованиях не последнее место. В этом положении можно выделить два аспекта. При сравнении исследуемого объекта с другим, эталонным, выбранным по каким-либо соображениям, наиболее интересным представляется сопоставление процессов их формирования. Очевидно, что закономерная изменчивость свойств должна служить источником информации для исследователя при подобных сопоставлениях.

Второй аспект приведенного выше положения представляет собой необходимость учета закономерной изменчивости свойств при применении формальных методов сопоставлений. Так, например, сравнение средних составов минералов группы оливина из двух геологических образований с целью выявления различий в их геохимических особенностях без учета неотъемлемой для данной группы минералов закономерной изменчивости не может быть достаточно объективным, так как их средний состав определяется соотношением крайних магнезиальных и железистых компонентов ряда.

Теперь попытаемся рассмотреть основные задачи сравнительного анализа объектов с закономерной изменчивостью свойств в геологических исследованиях.

1. *Определение применимости и пригодности модели (экспериментальной, теоретической) геологического процесса для описания процесса формирования реального объекта.* В настоящее время эта задача решается на качественном уровне с помощью различ-

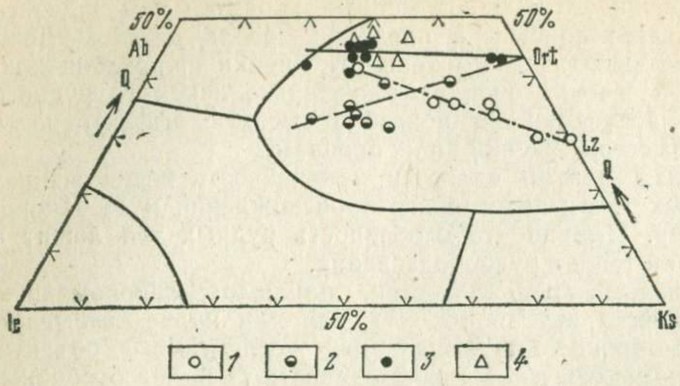


Рис. 1. Положение фигуративных точек калиевых сиенитов в координатах: нефелин — кварц — кальсилит.

1 — породы Сынырского массива, *2* — породы Ишимского массива, *3* — породы Центрального Алдана, *4* — породы Памбакского массива

ного вида диаграмм и нанесения на них точек наблюдения над свойствами исследуемого объекта. Выводы, как правило, основываются на визуальной оценке близости реальных точек соответствующей теоретической или экспериментальной модели. Однако возможность использования различных теоретических моделей требует количественной оценки близости точек наблюдения над свойствами объекта и рассматриваемой модели (моделей).

Приведем один пример. По мнению С. М. Кравченко, центрально-алданская, ишимская и сынырская комагматические серии являются эталонными для трех принципиально различных процессов фракционирования калиево-сиенитовых расплавов, исчерпывающих все теоретически возможные варианты. Поэтому классификацию комагматических серий калиевых сиенитов и их эффузивных аналогов по характеру процесса формирования целесообразно построить на определении степени приближения к процессу образования одной из этих серий. На рис. 1 показаны составы пяти нефелиовых сиенитов массива Памбак. Принадлежность их к центрально-алданскому типу фракционирования отчетливо определяется по положению фигуративных точек на графике. Однако в общем случае положение точек сиенитов, калиевых сиенитов в координатах «нефелин — кварц — кальсилит» не всегда может быть интерпретировано однозначно. Поэтому выбор альтернативы и тем более определение степени близости к эталонному типу фракционирования целесообразно проводить по степени близости фигуративных точек к эталонным линиям типов фракционирования. Распространенность подобного типа задач, связанных с анализом диаграмм и выбора из совокупности моделей одной, наиболее близкой по заданному набору признаков, достаточно широка.

К этому же типу относятся задачи, связанные с выбором наиболее близкой серии по Бурри, которые, согласно мнению А. Н. Заварицкого (1951), в той или иной мере оценивают тип вулканической деятельности в процессе формирования исследуемой вулканогенной серии (толщи, комплекса). Так, выводы, которые в той или иной мере основаны на анализе диаграмм А. Н. Заварицкого с позиций близости роя фигуративных точек эталонным сериям Бурри, приведены в работах Г. С. Горшкова (1963), С. И. Набоко (1963), С. Е. Апрелкова и др. (1963 г.), Т. Ю. Марениной (1963), Р. И. Родионовой и др. (1963), В. Ф. Ерохова и В. Н. Шилова (1963), И. М. Сперанской (1963) и многих других. Кроме того, существует большое количество работ, в которых выводы основаны на анализе другого типа диаграмм (двойных, тройных) с позиций близости фигуративных точек к какой-либо эталонной траектории.

Выводы о характере процесса формирования геологических тел должны базироваться на количественно доказанном соответствии свойств объекта и модели предполагаемого процесса, которое, как известно, определяется совпадением обеих траекторий с точностью до случайных отклонений.

2. *Выявление случаев повторения геологических процессов заданного типа в геологической истории различных по структурному и географическому положению регионов* (*типизация геологических процессов*). Сформулированная проблема тесно связана с предыдущей, так как после подбора теоретической или экспериментальной модели процесса, наиболее точно соответствующей характеру изменения свойств объекта в процессе его формирования, возникает проблема, связанная с определением типовых условий, обусловливающих данный характер процесса становления объектов. Это очень важно, так как металлогенический анализ в основном базируется на установлении повторяемости условий формирования геологических тел (в том числе магматических) определенного характера и связанных с ними рудных формаций. Предлагаемая в настоящей работе методика сравнительного анализа моделей геологических процессов позволит перевести задачи типизации в металлогении на количественную основу.

3. *Классификация на базе попарных сопоставлений магматических объектов по петрохимическим данным.* Необходимость подобного рода классификации магматических образований по близости петрохимического состава всех слагающих их разновидностей пород возникает при формировании магматических комплексов, конкретных формаций, при отнесении вулканогенных образований к одной из серии по Бурри и в других аналогичных ситуациях. Сопоставления и классификацию на базе сопоставлений петрохимического материала необходимо осуществлять с учетом того, что он обладает закономерной изменчивостью.

4. *Определение исходного материала для ультрагранитизированных пород путем сравнения моделей процессов гранитизации.* Идея приведенной задачи принадлежит П. Лападю-Аргу (1950), признающему гетерохимический характер процесса гранитизации. Этот исследователь предложил коэффициент, основанный на соотношении петрогенных окислов, который, по его мнению, является показателем степени метаморфизма. Так, например, используя предложенный им коэффициент гранитизации, можно расположить

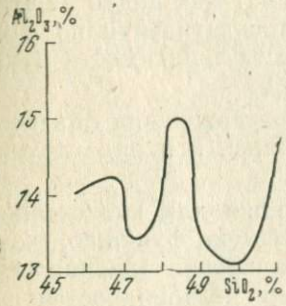
разновидности гранитизированных пород в ряд от неизмененных до ультрагранитизированных. Это дает возможность проследить тенденцию изменения химизма пород в процессе гранитизации. Лападю-Арг предлагает следующую процедуру определения исходных пород для ультрагранитизированных комплексов. Комплекс с неизвестным составом исходного материала ранжируется по показателю гранитизации, и разновидности с одинаковой степенью гранитизации сопоставляются с подобными разновидностями эталонных выборок для известного типа исходных пород (глинистые сланцы, кварциты и т. п.); в результате по близости процессов изменения химизма, особенно в области слабой степени гранитизации, определяется характер исходного материала (Бондаренко, 1971).

5. *Сопоставление вещественного состава, кристаллохимических и других особенностей минералов переменного состава из объектов различного генезиса.* Приведенная проблема не имеет такого важного значения, как предыдущие, вследствие обычно ограниченного количества анализов мономинеральных фракций. Такая задача рассматривается в работе В. Г. Фоминых и автора (1973), основанной на материале, собранном В. Г. Фоминых для статистического анализа. Задача состояла в сопоставлении клинопироксенов и амфиболов из титаномагнетитовых и магнетитовых месторождений Урала разных типов (высокотитанистых, среднетитанистых, малотитанистых и скарновых железорудных). Оно проводилось с целью выявления особенностей состава указанных минералов в месторождениях разного генезиса для выявления геохимических особенностей процессов формирования месторождений разных типов. Сопоставление проводилось с учетом закономерной изменчивости свойств минералов в каждой минеральной группе — клинопироксенов и амфиболов, что и позволило установить искомые особенности минералов в месторождениях различного происхождения.

Все перечисленные выше задачи основываются на сравнительном анализе объектов с закономерной изменчивостью свойств, причем сопоставление производится относительно самой закономерной изменчивости как отображения особенностей процессов формирования объектов. Круг задач и их роль в геологической науке четко определяют большое значение сравнительного анализа объектов с закономерной изменчивостью свойств в геологических исследованиях.

Выше была показана возможность и необходимость сравнения собственно закономерной изменчивости вещественных характеристик объектов. Закономерная изменчивость свойств должна учитываться и при сравнении объектов одного класса. Действительно, при сравнении вещественных характеристик двух объектов с закономерной изменчивостью свойств по средним значениям исследователь в большинстве случаев не может быть уверенным, если это сопоставление проведено на базе обобщенных выборок по обоим объектам, что полученные различия в них действительно отличают эти объекты. Здесь возможна ситуация, когда полученные различия являются следствием того, что закономерная изменчивость свойств в пределах исследуемых объектов не учитывалась. Наиболее наглядны трудности сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств в петрохимии. «Наиболее надежны различия, которые выявляются при изучении пород конкретной формации. Однако и в этом случае частым источником недоразумений оказывается недоучет обычного петрохимического тренда, т. е. *тогда, когда сопоставляемые аналоги не вполне идентичны по кислотности.*

Таким образом, устойчивые петрохимические различия между сопоставимыми членами вулкано-плутонических формаций могут быть выявлены при сравнении строго совпадающих по кислотности пород в рамках конкретной магматической формации» (Аб-



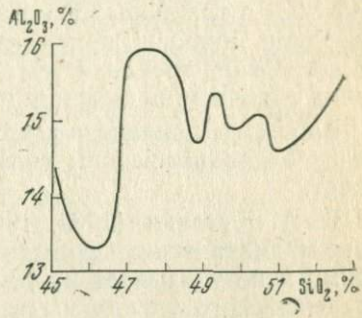


Рис. 2. Тенденция изменения содержаний Al_2O_3 в зависимости от содержаний SiO_2 в породах трапповой формации Таймыра (вверху слева)

Получена сглаживанием «скользящим окном»

Рис. 3. Тенденция изменения содержаний Al_2O_3 в зависимости от содержаний SiO_2 в породах трапповой формации Сибири (вверху спраза)

Получена сглаживанием «скользящим окном»

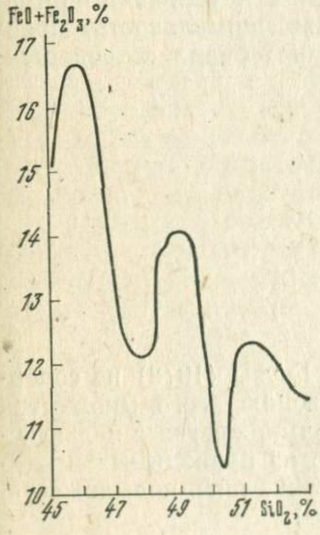


Рис. 4. Тенденция изменения содержаний суммарного железа в зависимости от содержаний SiO_2 в породах трапповой формации Сибири.

Получена сглаживанием «скользящим окном» рамович, 1969, с. 225). Это высказывание очень близко методической концепции, излагаемой в настоящей работе.

Существование «петрохимического тренда» и необходимость его учета нашли свое отражение в монографии И. Н. Абрамовича и В. В. Грузы (1972), однако учет «петрохимического тренда» при сопоставлении петрохимических составов магматических пород, используемый как в работе И. И. Абрамовича и других (1968), так и в упомянутой монографии, нельзя считать отвечающим требованиям, выдвинутым И. И. Абрамовичем в приведенной цитате. В обеих работах для исключения петрохимического тренда и для приведения зависимостей между петрогенными окислами к виду, близкому к линейному, предлагается разбивать выборочные данные на интервалы дискретизации по SiO_2. Этот способ однако не ликвидирует ни «петрохимического тренда», ни нелинейности зависимостей; для подтверждения этого приведем три графика реального изменения содержаний петрогенных окислов от содержаний SiO_2 в трапповых формациях (рис. 2, 3, 4). Как видно из этих графиков, никакой приемлемый интервал дискретизации по SiO_2 не исключает тренда и тем более нелинейности зависимости изменения содержания окислов при изменении SiO_2.

Варианты исключения влияния тренда при сравнении объектов по их петрохимическим свойствам предлагались и в ряде других работ.

В. А. Кутолин (1964, 1969, 1972), применяя для классификации магматических формаций дискриминантную функцию, хотя прямо и не указывает на необходимость исключения влияния петрохимического тренда, из всего многообразия разновидностей пород использует только базальты.

В работе И. И. Абрамовича и других (1968) в целях исключения петрохимического тренда и приближения к условиям применения дисперсионного анализа (многомерная нормальность) предлагается метод дискретизации с помощью интервала по содержанию SiO_2 по следующей схеме:

1. Основные . . . . 45—55% SiO_2
2. Средние . . . . 56—61% SiO_2
3. Умеренно-кислые . 62—67% SiO_2
4. Кислые . . . . 68—75% SiO_2
5. Ультракислые . . 75% SiO_2

Монография И. И. Абрамовича и В. В. Грузы (1972) не содержит обоснованных рекомендаций по разбиению всего множества разновидностей магматических пород на подмножества с целью исключения петрохимического тренда, однако из приводимых в книге примеров следует, что они используют те же пять подмножеств, что и в другой работе (Абрамович и др. 1968).

В. Н. Пилипенко (1969) предлагает более грубую шкалу подразделения магматических пород на интервалы, считая, например, достаточным выделение среди вулканогенных пород трех групп — базальта ($SiO_2 \leqslant 53\%$, $b \geqslant 20$), андезита ($53\% < SiO_2 \leqslant 62\%$ $20 > b > 10$), дацитов и липаритов ($SiO_2 > 62\%$, $b \leqslant 10$).

Подобные действия над эмпирическим материалом проводит и Н. В. Аксаментова (1971). При сопоставлении петрохимических особенностей она указывает, что «сравнение производилось по следующим трем группам пород, являющимся главными членами базальт — андезит — липаритовых серий: андезито-базальтового и андезитового состава с 50—60% SiO_2; андезито-дацитовой, включающей андезито-дациты и дациты с 60—69% SiO_2; липаритовой, в которую объединены липариты и липарито-дациты с 70—76% SiO_2» (с. 37).

В заключение необходимо подчеркнуть, что широкая распространенность и большая значимость в геологических исследованиях сравнительного анализа объектов с закономерной изменчивостью свойств основаны на следующих рассмотренных выше положениях:

— метод сопоставлений наиболее распространен в геологии;

— генетические выводы в геологии, как правило, базируются на анализе диаграмм, в результате которого делается вывод о близости наблюдаемых свойств объекта к представленной на диаграмме модели. Об этом пишут К. О. Кратц и Э. Н. Елисеев (1972): «Направление непрерывного процесса кристаллизационной дифференциации может быть воссоздано путем выявления тенденций в изменении химизма у рядов горных пород, составляющих один естественный ряд пород — одну кристаллизующуюся систему» (с. 354).

— классификация магматических объектов по петрохимическим данным для целей формационного анализа представляет собой не что иное как сравнительный анализ объектов с закономерной изменчивостью свойств;

— определение исходного материала для ультрагранитизированных пород возможно лишь с позиций и методами сравнительного анализа объектов с закономерной изменчивостью свойств (принимая концепцию гетерохимического метаморфизма);

— выявление геохимических особенностей минералов групп переменного состава из геологических тел разного генезиса наиболее эффективно методами сравнительного анализа объектов с закономерной изменчивостью свойств;

— формальные методы сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств, фиксируемой аналитическими методами при получении используемого в конкретной задаче материала, без учета закономерной изменчивости, по крайней мере не обеспечивает обоснованности выводов по полученным результатам.

Глава 2

ЗАДАЧИ СРАВНЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ЗАКОНОМЕРНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТЬЮ СВОЙСТВ

Формулировка задач сравнительного анализа геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств требует предварительной характеристики применяемой для их решения эмпирической информации.

Рассмотрение обобщенной модели геологического процесса лучше провести на примере объектов эндогенного происхождения. В соответствии со сложившимися в геологии представлениями любой объект эндогенного происхождения является результатом деятельности некоторого набора процессов, протекающих в земной коре. Естественно, что из этого набора всегда или в большинстве случаев может быть выбран один процесс, определяющий наиболее характерные черты сформированного объекта. Для простоты в дальнейшем будем считать, что объект сформирован одним процессом. Очевидно, что процесс формирования геологических тел протекает в определенный период времени и при этом каждому временно́му состоянию процесса соответствуют элементы формирующегося объекта с определенными и характерными именно для данного конкретного состояния вещественными характеристиками. Отсюда наблюдаемый нами в настоящее время геологический объект может быть представлен как набор элементов, соответствующих временны́м состояниям деятельности процесса.

Принципиально подобный набор имеет бесконечное число состояний, однако как возможности, так и масштаб исследований приводят к необходимости оперировать с конечным числом таких состояний, которые мы в дальнейшем будем называть элементами объекта. В частности, в петрологии таким элементам для нормально дифференцированных объектов соответствуют разновидности пород. Подобная модель ни в коей мере не противоречит существующим в геологии представлениям о генезисе объектов эндогенного порисхождения. Естественно, что эта модель является значительно упрощенной и даже схематичной, поскольку в ней не учитывается все многообразие одновременно действующих процессов различной природы. Однако целям дальнейшего изложения удовлетворяет и такое представление о процессе становления геологических объектов.

За очень редким исключением исследователь не имеет возможности наблюдать не только процессы становления конкретных объектов, но даже многие типы объектов, с последующим использованием принципа актуализма. Поэтому проблема количественной оценки даже самых ярко выраженных и характерных особенностей процесса формирования геологических объектов не является тривиальной и служит одной из основных задач геологической науки — выявлению характерных свойств и построению оценки геологических процессов по наблюдаемым результатам их деятельности.

Рассмотрим характер информации, находящейся в распоряжении исследователя, которая может служить основой построений, касающихся оценки характера процесса формирования изучаемого объекта. Оговорим, что в дальнейшем рассматривается только информация о вещественных характеристиках объекта и поэтому процессы формирования оцениваются только с позиций характера перераспределения вещества в период их деятельности. Как правило, в распоряжении исследователя полностью отсутствует информация как о протяженности временно́го интервала деятельности процесса, так и о точных значениях времени проявления каждого из его состояний. В лучшем случае, исследователь имеет возможность установить относительную временную последовательность (в смысле «раньше — позже») некоторых достаточно крупных элементов объекта.

В качестве примера можно привести стадии рудоотложения, фазы интрузивных массивов, потоки вулканогенных пород и т. п. Однако и в этом случае величина интервала времени между моментами становления указанных элементов остается неизвестной исследователю. В связи с невозможностью использовать временные координаты, исследователи часто для оценки особенностей процесса становления объекта принимают координаты косвенного характера. Там, где это возможно, используются пространственные координаты (теория рудных месторождений, расслоенные интрузии). В петрологии часто применяются координатные оси, построенные на соотношениях признаков, составляющих вещественную характеристику объекта. В качестве примера можно привести все многообразие петрохимических индексов: индекс дифференциации DI Торнтона и Таттла (Tornton, Tattle, 1960), индекс затвердевания SI Польдерваарта и Паркера (Poldervart, Parker, 1964), индекс кристаллизации CI Куно (Kuno, 1959), индекс Ларсена и т. п. Все эти индексы построены на конкретных моделях процесса перераспределения вещества при формировании объекта. Подобный же индекс можно привести и из теории метаморфизма, точнее гранитизации, — это индекс Лападю-Арга (1950).

В соответствии с приведенной выше геологической моделью все конкретные результаты опробования и анализа вещественных характеристик объекта являются ничем иным как набором эмпирических данных о вещественных свойствах различных состояний процесса формирования исследуемого объекта. В связи с этим в случае ярко выраженной закономерной изменчивости свойств для целей оценки характера процесса имеющаяся эмпирическая информация должна быть упорядочена в последовательность в соответствии с временны́ми соотношениями состояний, представляемых данной информацией. Поскольку чаще всего информация о временны́х соотношениях отсутствует, эмпирические данные могут быть упорядочены в соответствии со значениями любого из индексов, по мнению исследователя, заменяющих время.

Таким образом, эмпирическая информация о вещественных свойствах объектов с закономерной изменчивостью свойств может представляться в виде эмпирических последовательностей, ранжированных по любому параметру из выбранных исследователем для решения конкретной проблемы.

Ранжированная по какому-либо признаку эмпирическая последовательность отражает изменение вещественных характеристик в пределах исследуемого объекта. Конкретные значения вещественных характеристик в точках наблюдений последовательности представляют собой сумму двух составляющих: положения траектории закономерной изменчивости, определяемого конкретным процессом формирования объекта, и случайных колебаний, обусловленных действием случайных факторов. При сопоставлении двух объектов с закономерной изменчивостью свойств по эмпирическим последовательностям интерес, естественно, представляет взаимное соотношение траекторий закономерных составляющих для всех вещественных характеристик при исключении влияния случайных флуктуаций.

Для большего понимания сформулированных ниже задач необходимо остановиться на сути и принципе выбора признака, применяемого в дальнейшем в качестве ранжирующего при формировании эмпирических последовательностей.

Особо важным с общегеологических и особенно генетических позиций является формирование такой эмпирической последовательности, которая наиболее близко соответствовала бы временно́й последовательности становления геологического тела в наблюдаемом виде. Возможность формирования последовательности подобного вида целиком зависит от подбора компоненты (признака), определяющей эту последовательность. Судя по литературе, выбор подобной компоненты в геологии не представляет неразрешимой проблемы. В петрологии и петрохимии, например, известно значительное количество близких по смыслу характеристик, например кристаллизационный индекс А. Польдерваарта и А. Паркера, индекс дифференциации С. Торнтона и О. Татла, индекс затвердевания Х. Куно, щелочно-известковый индекс М. Пикока, сериальные индексы А. Риттмана и А. Сигимуры, щелочно-фемический индекс Ю. М. Шейнманна и др. Подобными характеристиками являются бинарные диаграммы Харкера, Х. Куно, Е. Ларсена, Р. Уэджера и уже упоминавшийся показатель степени гранитизации П. Лападю-Арга.

Выполнение требования соответствия эмпирической последовательности и последовательности формирования геологического объекта во времени возможно не всегда. В подобных ситуациях эмпирические последовательности могут быть составлены без привлечения временны́х соотношений. Так, в качестве ранжирующего во многих ситуациях может быть использован номенклатурный признак, признаваемый автором исследования. К числу их можно отнести номенклатурные признаки групп минералов переменного состава: содержание анортитовой молекулы для плагиоклазов, отношение Fe/Mg для групп оливинов и т. п. Последовательности, сформированные по номенклатурному ранжирующему параметру, и сравнительный анализ объектов на их основе не являются базой для прямых генетических выводов. Однако необходимость подобного ранжирования и применение сравнительного анализа объектов с учетом закономерной изменчивости и собственно закономерной изменчивости очевидна. Сравнение геохимических, кристаллохимических и других особенностей минералов переменного состава не может дать ожидаемого результата без учета изменения исследуемых особенностей в ряду номенклатурных разновидностей в пределах группы.

В случае, когда невозможно построение ранжирующего параметра с выполнением изложенных выше требований, а закономерная изменчивость явно присутствует в объектах, подлежащих сравнению, предлагается следующий способ формирования эмпирических последовательностей. Из геологических соображений или с помощью широко известного метода главных компонент определяется направление максимальной изменчивости признаков (Le Maitre, 1968), выражение которого в виде параметра и служит в качестве ранжирующего (см. гл. 6).

В сравнительном анализе геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств выделяются два типа задач, различающихся по смыслу. Приведенные ниже определения задач сходства или различия вещественных характеристик объектов даны исходя из априорно предполагаемого их сходства. Методически это не имеет существенного значения, поскольку формулировки любой задачи сравнения на базе априорного сходства или на основе априорных различий сравниваемых объектов — инвариантны.

Задачи сравнения геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа могут быть определены следующим образом. Два геологических объекта с закономерной изменчивостью свойств признаются неразличимыми, если значения признаков статистически одинаковы при любом равном значении некоторого параметра, принятого в качестве ранжирующего.

К этому типу задач сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств относятся следующие из упомянутых выше задач геологии.

1. Определение степени реальности конкретной модели процесса (теоретической, экспериментальной) путем сопоставления ее характеристик с соответствующими характеристиками, наблюдаемыми в реальных объектах. Эта задача наиболее типична для отраслей геологии, в которых основой для генетических выводов является анализ диаграмм. К этому же типу задач можно отнести и задачу качества аппроксимации реальных зависимостей, полученных аналитическим путем. Такая задача рассмотрена в монографии А. М. Марголина (1974). На приводимом им рисунке проведены траектории рассчитанной по фор-

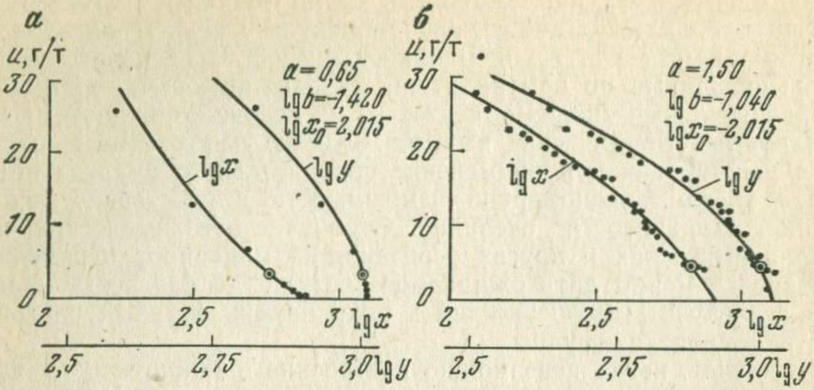


Рис. 5. Аппроксимация зависимости запасов руды ($\lg x$) и металла ($\lg y$) золото-кварцевой жилы месторождения:

а — от бортового содержания, *б* — от минимального промышленного содержания

муле зависимости и реальные данные, полученные многовариантными подсчетами (рис. 5): флуктуации реальных точек относительно кривой аппроксимации А. М. Марголин объясняет случайными причинами.

Обе приведенные задачи относятся к задачам сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа. Вещественные характеристики моделей процессов, как правило, представляются в виде кривых на диаграммах, а аналогичные характеристики реального объекта — в виде точек, с той или иной степенью компактности обрамляющих эту кривую. Задача заключается в установлении совпадения траектории изменчивости свойств реального объекта при исключении случайных флуктуаций с кривой модели процесса на всем интервале их одновременного существования в координатах диаграмм. Во втором случае, по А. М. Марголину (1974), задачей является подтверждение тезиса, что разброс точек около кривой аппроксимаций порожден случайными причинами, а не является следствием неточного подбора аппроксимирующей функции, т. е. задача также сводится к подтверждению факта совпадения траекторий аппроксимирующей функции и закономерной составляющей реальных наблюдений с точностью до случайных отклонений. Таким образом, это задача широкого назначения.

2. Классификация магматических объектов на базе петрохимической информации, определение состава и объема магматических комплексов, конкретных формаций и т. п. — все это примеры конкретного выражения сформулированной задачи в геологии. В общем случае все перечисленные задачи базируются на задаче классификации. Характеристика процедуры классификации с формальных позиций изложена ниже. Объединение объектов в классы осущетвляется в случае их неразличимости в приведенном выше смысле в результате попарного сравнения всех участ-

вующих в процедуре объектов. В данной задаче сравниваются тенденции изменения петрохимических признаков при прослеживании вдоль оси ранжирующего параметра, выбранного исследователем. Если это сравнение проводится с использованием кремнезема в качестве ранжирующего параметра, то рассматриваемая здесь классификация представляет собой классификацию по близости петрохимических особенностей разновидностей пород, обладающих одинаковой кремнекислотностью.

3. Определение типа исходного материала для ультрагранитизированных пород сопоставлением объекта с неизвестными исходными породами и объектов с известными типами исходных пород. Принцип настоящей задачи предложен П. Лападю-Аргом (1950), а метод решения — автором (Бондаренко, 1971). Задача решается сопоставлением тенденций изменения химических свойств пород при убывании степени гранитизации. П. Лападю-Арг и вслед за ним автор настоящей работы предполагают, что химические свойства пород, подвергшихся гранитизации, при уменьшении степени гранитизации приближаются к соответствующим свойствам исходных пород. Нетрудно видеть, что и эта задача принадлежит к сформулированному выше типу задач.

4. Сопоставление геохимических, кристаллохимических и других особенностей минералов переменного состава из объектов различного происхождения дает возможность определить особенности минералов исследуемой минеральной группы, неискаженные влиянием закономерной изменчивости, характерной для данной группы. Это обеспечивает выявление исследуемых свойств, порожденных именно процессами петрогенезиса. И в этом случае очевидна принадлежность рассматриваемой задачи к сформулированному выше типу задач.

Задачи сравнения геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств второго типа точнее называть задачами сравнения собственно закономерной изменчивости свойств геологических объектов. Сравнение собственно закономерной изменчивости заключается в статистическом сопоставлении только вида тенденции изменения признаков без учета их значений.

Поясним смысл сформулированных задач на примерах из геологии. Так, одной из основных задач металлогенических построений является определение повторяемости широкого круга геологических условий, обусловливающих проявление процессов формирования геологических тел определенного характера и связанных с ними рудных месторождений. Сравнение интересующих исследователя с металлогенических позиций процессов формирования объектов (речь идет об эндогенных процессах) может быть осуществлено изложенными ниже методами решения задач сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа. Подобное сравнение обычно производится для объектов разных регионов и разного возраста, в связи с чем возникают определенные трудности. Так, И. И. Абрамович и В. В. Груза (1972) указывают, что вектор среднего химического состава конкретного объекта, можно представить в виде суммы:

$$X = X_{\text{форм.типа}} + X_{\text{фац}},$$

где $X_{\text{фац}} = X_{\text{регион}} + X_{\text{локальн}} + X_{\text{возрастн}}$.

Таким образом, наблюдаемый петрохимический состав пород конкретного объекта представляет собой композицию свойств всех разновидностей пород, порожденных непосредственно данным типом процессов петрогенезиса, и петрохимических особенностей, определяемых региональным и возрастным положением объекта. Сюда, естественно, входит и случайная составляющая, рассмотренная ранее. Представляется, что именно форма изменения вещественных характеристик в период деятельности процесса формирования тел эндогенного происхождения отображает характерные черты процессов конкретного типа. Таким образом, сравнение формы изменения вещественных характеристик при исключении влияния на результат региональных и возрастных особенностей и случайных флуктуаций дает возможность типизировать эндогенные процессы в металлогенических целях. Нетрудно видеть, что подобная задача возникает и при формировании формационных типов на базе конкретных формаций разных регионов и различного возраста.

Еще один пример задач геологии, которые могут быть сведены к задачам рассматриваемого типа. Известно, что в формационном анализе магматических образований существенную роль играют так называемые парагенетические ассоциации. Это заключение прямо следует из определения магматической формации, приведенного в работе Ю. А. Кузнецова (1973). Для удобства примем, что нами рассматриваются два объекта магматического происхождения, относящиеся к нормальному ряду дифференциации. В этом случае содержание кремнезема является номенклатурным признаком, а последовательность, сформированную по содержанию кремнезема, можно принять в качестве петрохимического представления парагенетической ассоциации. В условиях существования твердой петрохимической классификации указанной выше последовательности можно было бы поставить в однозначное соответствие последовательность видовых наименований пород, характерных для каждого объекта. Однако, во-первых, отсутствие подобной классификации и, во-вторых, объективные причины, препятствующие ее созданию, такие, как непрерывность изменения вещественных характеристик, не допускающая однозначную дискретизацию набора изучаемых признаков, приводят к необходимости поиска иных способов представления парагенетических ассоциаций магматических объектов.

Предлагаемый способ петрохимического представления парагенетических ассоциаций является одним из возможных и удовлетворяет в первую очередь условиям сопоставления парагенетических ассоциаций. Выражение их с помощью петрохимической информации позволяет использовать аппарат математики для целей классификации магматических объектов при формационном анализе на основе вида слагающих им парагенезисов магматических пород. Упрощенное представление о парагенезисе пород, слагающих рассматриваемый объект, заключается в следующем: парагенетическая ассоциация рассматривается как характерный для данного объекта набор разновидностей пород, отражающий особенности процесса формирования объекта. По предположению при описании набора разновидностей пород учитываются как особенности исходного материала, так и более важные с позиций формационного анализа свойства процесса петрогенезиса.

Указанные условия в основном определяют парагенетический облик объекта. Можно предположить, что набор парагенетических разновидностей пород в петрохимическом представлении находит отражение в скорости изменения содержаний петрогенных окислов при переходе от одной разновидности к следующей по относительному времени формирования. Основой этого заключения может служить, во-первых, роль кремнезема как показателя, в определенной мере отражающего номенклатурную принадлежность разновидностей пород (здесь имеются в виду только объекты нормального ряда дифференциации), и, во-вторых, объективно существующая зависимость химического и минерального состава магматических пород.

Можно предложить вместо чисто петрохимического представления парагенетических ассоциаций петрографическое. Это потребует, во-первых, выбора ранжирующего признака, если содержание кремнезема не удовлетворяет исследователя, и, во-вторых, количественного выражения доли каждого породообразующего минерала во всех изучаемых образцах.

Однако хотя такое чисто петрографическое представление парагенетических ассоциаций и кажется более предпочтительным, следует указать на одну существенную трудность. Так как практически все породообразующие минералы имеют переменный состав, в условиях сопоставления таких петрографических последовательностей исследователь никогда не будет уверен, сравнивает ли он содержания одинаковых пироксенов (плагиоклазов, амфиболов, оливинов, слюд и т. д.) или в сравнении участвуют минералы одной группы, отличающейся по видовой принадлежности. Эту трудность преодолеть практически невозможно, так как все минеральные группы переменного состава меняют видовые свойства непрерывно.

Существует и компромиссный вариант: представление парагенетической ассоциации магматического объекта в виде нормативного минерального состава, составленного на базе петрохимической информации. В этом случае в качестве ранжирующего компонента могут быть использованы как содержание кремнезема, так и один из индексов, основанных на нормативном составе, например индекс Торнтона и Таттла или Польдерваарта и Паркера. Подобное представление парагенетической ассоциации дает возможность исследователю сопоставлять парагенетические ассоциации в минеральном выражении. Сравнение последовательностей такого вида позволяет определять сравнительную скорость изменения нормативных количеств минералов в процессе становления исследуемых объектов. Выбор представления парагенетических ассоциаций является прерогативой исследователя. Однако переход к последовательностям на базе нормативных количеств ведет к потере информации при сопоставлении.

Глава 3
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ С ЗАКОНОМЕРНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТЬЮ СВОЙСТВ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИХ СРАВНЕНИЯ

При выборе математических моделей вещественных характеристик геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств была учтена необходимость выполнения следующих требований: во-первых, сохранения наиболее характерных особенностей объектов с закономерной изменчивостью свойств, т. е. в первую очередь собственно изменчивости вещественных характеристик, отображающих особенности процессов их формирования; во-вторых, обеспечения учета сущности сформулированных выше геологических задач сравнения и классификации объектов с закономерной изменчивостью свойств и, в-третьих, максимально полного использования эмпирической информации об исследуемых объектах.

Проиллюстрируем подбор математических моделей вещественных характеристик объектов с закономерной изменчивостью свойств на примерах из сравнительного петрохимического анализа магматических объектов.

Рассмотрим в первую очередь существующие в настоящее время математические модели петрохимических характеристик геологических объектов в задачах петрохимических сопоставлений. Широко известной и распространенной моделью петрохимического состава исследуемых объектов магматического происхождения является многомерная случайная величина $\Xi^{(m)}=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_m\}$ (Родионов, 1964; Гольдин и В. А. Кутолин, 1964; Бондаренко, 1966; Кутолин, 1966, 1969, 1972; В. В. Груза, 1965; Груза и Марковский, 1968; и др.). Случайная величина $\Xi^{(m)}$ задана на вероятностном пространстве $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, P\}$, где $\mathfrak{A}$ — множество элементарных событий, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра множеств, построенная на фиксированном множестве элементарных событий $\mathfrak{A}$ и P — вероятностная мера. Компоненты многомерной величины $\Xi^{(m)}$, т. е. ξ_j, являются вероятностными моделями содержаний отдельных окислов в породах рассматриваемого объекта.

Эта модель служит основой для статистического решения геологической задачи сравнения средних петрохимических составов двух (или более) сопоставляемых объектов. Однако эффективное решение задачи о сравнении петрохимических свойств разновидностей пород, слагающих исследуемые объекты, в такой постановке может быть осуществлено лишь при выполнении достаточно обременительных условий: одинаковой дифференцированности, эродированности объектов и пропорциональности опробования весу всех фазовых и фациальных разновидностей, встречающихся в сопоставляемых массивах, комплексах, формациях. Одновременное выполнение всех этих требований практически невозможно, поэтому применение в сравнительных петрохимических исследованиях статистических методов Рао—Уилкса, T^2-Готелинга, вычисления обобщенного расстояния Махаланобиса, которые базируются на указанной выше модели, не всегда может дать ожидаемый эффект.

Многомерная случайная величина $\Xi^{(m)}$ в качестве модели петрохимического состава интрузивного массива (комплекса) достаточно удобна, и применение ее вполне оправдано при статистическом решении ряда задач, в которых массив (комплекс) представляется как единое целое. Это задачи геологии, связанные с мелкомасштабным прогнозированием, однако и в этом случае приведенные выше модель и задача сужают круг характеристик магматических объектов и приводят к потере важной информации о спектре разновидностей пород, участвующих в строении объектов, и, конечно, о закомерностях в изменчивости свойств пород объектов.

Однако при исследованиях среднего и крупного масштаба в теле интрузивного массива и тем более в составе комплекса, как правило, можно выделить не только различные фациальные разновидности, но и участки, сложенные продуктами внедрения различных интрузивных фаз данного комплекса, состав которых может отличаться весьма существенно. В таких случаях естественно подобрать модели для состава пород каждой из фациальных разновидностей отдельно. Эти составы можно представить в виде случайных величин $\Xi_i^{(m)}=\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, ..., \xi_{ij}, ..., \xi_{im}\}$. Представление состава интрузивного массива (комплекса) в виде набора случайных величин $(\Xi_1^{(m)}, \Xi_2^{(m)}, ..., \Xi_i^{(m)}, ...)$ следует считать наиболее точным и максимально полно отражающим его особенности. Если при этом существует возможность упорядочить разновидности или интрузивные фазы, слагающие массив, по относительному времени формирования, то подобная модель состава массива будет отражать и характер изменения петрохимического состава пород в процессе его становления, т. е. являться последовательностью с относительным временем в качестве ранжирующей компоненты.

Естественно, что такую модель можно признать более приемлемой и гибкой, чем первую, состоящую в замене состава массива одной случайной величиной. Однако в большинстве случаев вследствие недостаточной изученности или опробованности массива не удается четко выделить, ограничить и охарактеризовать фациальные разновидности или интрузивные фазы. В подобных случаях приходится прибегать к простейшей модели, что безусловно нежелательно.

Другой выход из этого положения продемонстрирован в работах И. И. Абрамовича и др. (1968), В. Н. Пилипенко (1969), И. И. Абрамовича и В. В. Грузы (1972), Н. В. Аксаментовой (1971). Заключается он в условном разбиении всего множества разновидностей пород на группы, обусловленные колебаниями содержания SiO_2 в некоторых заранее заданных пределах. Указанные авторы подбирают модели не для состава объектов в целом, а для состава каждой из выделенных групп в отдельности, справедливо полагая, что подобный подход содержит бо́льшие возможности. Однако подобное произвольное определение объема и границ разновидностей пород нельзя признать наилучшим выходом из создавшегося положения в силу непрерывности изменения свойств разновидностей пород с изменением классифицирующего признака. Ю. А. Кузнецов (1973) по поводу классификации магматических формаций пишет: «Только при наличии дискретности в системе границы между одноранговыми подразделениями будут естественными и отвечать природным группировкам. Если дискретности нет, границы эти неизбежно условны и искусственны. Поэтому и границы между основными единицами классификации магматических формаций могут быть только условными» (с. 8). Все сказанное Ю. А. Кузнецовым в отношении классификации магматических формаций относится и к петрохимической классификации магматических горных пород.

Нетрудно видеть, что модель, представленная одной многомерной случайной величиной, не адекватна особенностям вещественных характеристик объектов с закономерной изменчивостью свойств, таких, в частности, как массивы магматического происхождения, и не удовлетворяет сформулированным выше задачам сравнения объектов в указанных условиях.

Если принять за основу геологическую модель процесса формирования объектов, описанную выше, и использовать временную ось в качестве аргумента, математическая модель состава объекта, представленного в виде ранжированной последовательности, может быть подобрана достаточно просто — это модель случайного процесса. Однако такая модель не может быть подкреплена эмпирическим материалом вследствие невозможности привязать отбираемые пробы (образцы) исследуемого объекта к определенным временным интервалам или значениям. В связи с этим требование неслучайности аргумента, необходимое для безоговорочного применения модели случайного процесса, не может быть выполнено в большом числе случаев решения задач геологии.

Исключение составляют те отрасли и задачи геологии, в которых в качестве ранжирующего параметра принимаются значения географических (или пространственных) координат. В этой ситуации в качестве модели можно использовать, применяя определение А. М. Яглома из предисловия к книге У. Гренандера (1961), случайные функции, частным случаем которых являются случайные процессы со значениями времени на оси аргумента.

В геологических задачах в большинстве ситуаций ранжирующий признак имеет свойства случайной величины, и применение его в качестве ранжирующего в теории вероятностей и математической статистике определяется как регрессионная модель (Айвазян, 1968, Уилкс, 1967). Здесь же следует отметить, что именно регрессионная модель применяется Ф. Чейзом (Chayes, 1968) для характеристики изменения вещественных свойств магматических объектов в процессе петрогенезиса.

На основании изложенного и учитывая задачи настоящей работы в качестве математической модели вещественных характеристик геологического объекта с закономерной изменчивостью свойств предлагается использовать многомерную случайную величину $\Xi^{(m+1)}=\{\delta, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_j, ..., \xi_m\}$, функция распределения которой определяется значением компоненты $\delta \in U$. Переменная δ в статистике (Уилкс, 1967) обычно называется «закрепленной». В рассматриваемом случае компонента $\delta \in U$ является моделью ранжирующего признака, а U — представляет собой множество всех возможных для данного объекта его значений.

Если допустить, что в конкретном случае ранжирующей компонентой является время, то, например, процесс становления интрузивного массива со всем многообразием причин, воздействующих на его характер, может быть моделирован в терминах теории вероятностей.

В качестве модели геологического отрезка времени, соответствующего периоду формирования интрузивного массива, можно использовать множество действительных чисел T. Пусть каждому элементу этого множества $t_k \in T$ соответствует определенное состояние некоторой случайной величины $\Xi(t_k)$, $t_k \in T$, которое является моделью состава интрузивного тела в некоторый момент времени $t_k \in T$. Тогда процесс изменения состава интрузивного массива при его становлении может быть представлен в виде случайного процесса $\Xi(t)$. Естественно, что $\Xi(t)$ является моделью реально происходящих изменений состава твердой фазы в процессе консолидации исходного для данного массива магматического расплава. Эта модель, как уже было отмечено, не может быть непосредственно использована в практической деятельности, так как в ней участвует время, которое в геологии, как правило, не поддается определению. Однако можно попытаться осуществить переход от абсолютного времени к относительному времени формирования отдельных разновидностей пород.

Известно, что результатом реализации процесса формирования магматического объекта (массива, комплекса) является все многообразие разновидностей пород и разновозрастных фаз, слагающих в настоящее время тело рассматриваемого массива. Пока речь идет о всем «идеальном» объеме массива. Аналогично, результатом реализации случайного процесса $\Xi(t)$ может служить множество $\{\Xi^{(m+1)}\}$, которое представляет собой совокупность случайных величин, соответствующих различным временным состояниям.

Это положение является основным для дальнейшего изложения и требует пояснения (Пугачев, 1962). Известно, что каждому состоянию случайного процесса (положим $\Xi(t_k)$) может быть поставлена в соответствие случайная величина Ξ_k, распределение которой полностью определяется положением момента времени $t_k \in T$ на оси аргумента случайного процесса, т. е. T. Естественно, что здесь рассматриваются нестационарные случайные процессы. После завершения реализации случайного процесса сохранившиеся состояния его для определенного числа моментов времени формируют множество случайных величин, распределение которых определяется положением момента их формирования на оси T.

Схематизированную модель геологического процесса в ее идеальном проявлении можно представить как нестационарный случайный процесс. Действительно, если в качестве моделей вещественных признаков формирующегося геологического объекта использовать компоненты многомерного случайного процесса, то k-тое состояние случайного процесса можно использовать как вероятностную модель k-той разновидности пород от начала действия процесса. Ясно также, что вещественные характеристики этой разновидности, согласно принятой модели геологического процесса, определяются положением этого момента времени на оси времени действия рассматриваемого процесса.

Продолжая эту аналогию, очевидно, что наблюдаемый нами набор сформированных разновидностей может быть представлен их моделями: множеством случайных величин, распределение которых определяется значением неслучайного параметра $t_k \in T$. Многообразие пород, слагающих интрузивный массив и сформировавшихся на разных стадиях консолидации расплава при ранжировании их по относительному времени формирования, совпадает по существу с множеством случайных величин, соответствующих разным состояниям вероятностного процесса. Это является достаточным основанием для использования множества случайных величин в качестве вероятностной модели полного набора фациальных разновидностей и пород разновозрастных фаз исследуемого магматического тела, составляющих сущность его как объекта с закономерной изменчивостью свойств.

Множество случайных величин $\{\Xi^{(m+1)}\}$ можно упорядочить по возрастанию компоненты $\delta \in U$. Образованная таким образом последовательность будет обладать по предположению свойствами m-мерной случайной функции по аргументу $\delta \in U$. В связи с тем что в основных перечисленных выше задачах параметр δ является моделью геологического (относительного) времени, то случайную функцию $\Xi(\delta)$, $\delta \in U$ можно назвать случайным процессом.

Учитывая наличие закономерного изменения всех компонент случайной величины $\Xi^{(m+1)}$ при изменении компоненты $\delta \in U$, можно предположить, что случайный процесс $\Xi^{(m)}(\delta)$ может быть представлен в следующем виде

$$\Xi^{(m)}(\delta) = \mathbf{Y}^{(m)}(\delta) + \boldsymbol{\varphi}^{(m)}(\delta), \tag{1}$$

где $\delta \in U$,

$\mathbf{Y}^{(m)}(\delta)$ — детерминированная компонента, отражающая закономерный характер изменения компонент m-мерного случайного процесса, а $\boldsymbol{\varphi}^{(m)}(\delta)$ — стационарный m-мерный случайный процесс с нулевым вектором средних и конечной ковариационной матрицей при счетном числе состояний. Особенности этих процессов удобнее рассмотреть для случая одной комопненты ξ_j и $\delta \in U$. Так, одномерный случайный процесс можно записать в аналогичной форме

$$\xi_j(\delta) = Y_j(\delta) + \varphi_j(\delta). \tag{2}$$

Здесь $Y_j(\delta)$ — детерминированная компонента, описывающая закономерные изменения величин ξ_j при увеличении величины $\delta \in U$, $\varphi_j(\delta)$ — стационарный процесс с нулевым средним и конечной дисперсией. Второй член правой части равенства (2) представляет собой процесс появления флуктуаций, генерируемых ошибками опробования, обработки и анализа проб и некоторыми другими причинами, которые не поддаются учету.

Подобная модель предлагалась и ранее А. Б. Вистелиусом (1963). Существенное отличие предлагаемой нами модели заключается в использовании в качестве аргумента вместо времени (t в модели А. Б. Вистелиуса) параметра более общего значения (δ).

Используя изложенное выше, можно определить, что является моделью элемента геологического объекта с закономерной изменчивостью свойств на примере конкретной разновидности пород в петрологическом примере. Моделью элемента объекта, или состава рассматриваемой разновидности пород, в этом примере следует считать случайную величину $\Xi^{(m)}/\delta = d_k = \{\xi_1 | \delta = d_k,\ \xi_2 | \delta = d_k, \ldots, \xi_m | \delta = d_k\}$, параметры распределения которой определяются значением величины $\delta = d_k$, $d_k \in U$. То есть эта случайная величина может быть интерпретирована как состояние случайного процесса при заданном значении неслучайного параметра или закрепленной случайной величины. Параметры распределения случайной величины $\Xi^{(m)} | \delta = d_k$ можно представить следующим образом

$$M(\Xi^{(m)} | \delta = d_k) = \begin{pmatrix} M(\xi_1 | \delta = d_k) \\ \vdots \\ M(\xi_j | \delta = d_k) \\ \vdots \\ M(\xi_m | d = \delta_k \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$D(\Xi^{(m)} | \delta = d_k), \quad d_k \in U,$$

а функция распределения этой случайной величины соответственно может быть представлена в виде

$$F(\Xi^{(m)} < X^{(m)}|\delta = d_k) = F(X^{(m)}|\delta = d_k), \quad d_k \in U. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что параметры распределения случайной величины (3) прямо связаны с членами правой части равенства (1), а именно: $\mathbf{M}(\Xi^{(m)}|\delta=d_k)$ для всех $d_k \in U$ представляет собой аналог детерминированной компоненты $\mathbf{Y}^{(m)}(\delta)$ при значениях δ из области U, а $\varphi^{(m)}(\delta)$ является иной записью условной дисперсии $D(\Xi^{(m)}|\delta=d_k)$, где $d_k \in U$, правда, в смысловом, а не в числовом выражении.

Вернемся к рассмотренным в предыдущей главе задачам и определим, как и насколько подобранные выше модели представляют входящие в задачи объекты и их свойства, необходимые для решения формальными методами. Участвующие в формулировках геологические объекты с закономерной изменчивостью свойств представляются в виде двух множеств (положим $\{\Xi^{(m+1)}\}$ и $\{\Xi^{(m+1)'}\}$, где $\Xi^{m+1} = \{\delta, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_m\}$) многомерных случайных величин, причем функция распределения любой случайной величины из этих множеств определяется значением некоторого условия (ранжирующей компоненты) $\delta \in U_1$ или $\delta' \in U_2$. Это дает возможность от множеств $(m+1)$-мерных случайных величин $\{\Xi^{(m+1)}\}$ и $\{\Xi^{(m+1)'}\}$ перейти соответственно к множествам m-мерных случайных величин $\{\Xi^{(m)}|\delta=d\}$ и $\{\Xi^{(m)'}|\delta'=d\}$, где $\delta \in U_1$, а $\delta' \in U_2$. Выше было указано, что это представление объекта относится только к количественно измеримым признакам, которые в настоящей работе называются вещественными.

Ранжирующий параметр, математической моделью которого является величина $\delta(\delta')$ — условие в терминах моделей, в геологических примерах чаще всего имеет характер непрерывной величины, хотя может быть и дискретным. В связи с тем что ранжирующий параметр является неслучайной величиной с позиций приведенной выше модели геологического процесса и приобретает случайный характер только в результате получения информации о нем (случайный выбор), вместо множеств условных случайных величин можно использовать модели случайных функций по аргументу $\delta(\delta')$. Вид подобной модели приведен в выражении (1). Для двух объектов эти модели имеют вид

$$\begin{aligned} \Xi(\delta) &= \mathbf{Y}(\delta) + \varphi(\delta) \\ \Xi'(\delta) &= \mathbf{Y}'(\delta) + \varphi'(\delta). \end{aligned} \tag{5}$$

Покажем, что модели (5) достаточно полно и точно заменяют вещественные характеристики объектов с закономерной изменчивостью свойств в необходимом для решения сформулированных задач объеме и виде. Известно (Гренандер, 1961; Пугачев, 1962; Свешников, 1968; и др.), что состояние случайного процесса при заданном значении аргумента (положим $\delta=d_k$) представляет собой случайную величину с распределением, определяемым этим значением аргумента. Математическое ожидание этой величины будет совпадать со значением $Y(\delta)$, определяемым равенством $\delta=d_k$ и дисперсией, соответствующей дисперсии $\varphi(\delta)$, для значения δ, равного d_k.

Отсюда очевидно, что множество состояний случайного процесса $\Xi(\delta)$ для $\delta \in U$ по смыслу совпадает с множеством условных случайных величин $\{\Xi|\delta=d\}$ при $d \in U$. Представление вещественных характеристик объекта в виде множества многомерных условных случайных величин $\{\Xi|\delta=d\}$, где $d \in U$, дает возможность наглядно показать достаточное соответствие математической модели и моделирующих свойств объектов.

На примере петрохимической информации нетрудно видеть, что случайная величина, параметры которой определяются значением условия, близка по характеру петрохимическим свойствам конкретной разновидности пород из нормально дифференцированной серии, конкретные числовые выражения которых определяются положением этой разновидности на оси содержаний кремнезема. Аналогично свойства конкретного плагиоклаза определяются содержанием в нем анортитовой молекулы. Таким образом, множество условных случайных величин достаточно точно моделирует вещественный состав входящих в рассматриваемый объект отдельных разновидностей пород, минералов и т. п.

Однако если акцентировать внимание собственно на закономерном изменении вещественных характеристик в пределах объекта (объектов), то модель, использующая условную случайную величину, не столь наглядна, хотя по смыслу она отвечает требованиям сформулированных задач. В этом случае более применима модель случайного процесса, множество состояний которого по вероятностному смыслу близко множеству многомерных условных случайных величин.

Следует отметить, что один из параметров условной случайной величины — условное математическое ожидание на заданном интервале значений условия является идеальной траекторией зависимости одной случайной величины при изменении другой (в двумерном случае) и оценивается по выборочным значениям в регрессионном анализе (Айвазян, 1968).

Анализируя приведенную в выражении (1) модель случайного процесса, представляется очевидным, что детерминированная компонента $Y(\delta)$ в заданном интервале значений аргумента очень близка по смыслу условному математическому ожиданию, исключая отмеченные выше различия в характере условия и аргумента случайного процесса. Эта близость двух указанных параметров в двух приведенных моделях тем более понятна, если указать, что Э. Хеннан (1964) в качестве способа оценки детерминированной компоненты случайного процесса приводит метод построения регрессионных кривых.

Модель случайного процесса (1) при применении в качестве математического аналога вещественных характеристик объектов с закономерной изменчивостью свойств отвечает требованиям, предъявляемым к моделям при решении задач геологии. Особенно следует отметить, что она позволяет сопоставлять собственно закономерную изменчивость свойств объектов. Из анализа этой модели очевидно, что детерминированная компонента является математическим аналогом теоретических траекторий изменения признаков вдоль оси выбранного ранжирующего параметра. Второй член правой части выражения (1) представляет собой совокупность случайных (различной природы) флуктуаций относительно траектории закономерной изменчивости.

В заключение следует отметить, что в качестве модели вещественных характеристик объекта с закономерной изменчивостью свойств в условиях сформулированных задач можно воспользоваться множеством условных случайных величин $\{\Xi \mid \delta = d\}$, где $d \in U$. Эта модель является корректной и отражает практически все необходимые для решения задач обоих типов свойства объекта. Предложенный в качестве математического аналога вещественных характеристик объекта с закономерной изменчивостью свойств случайный процесс $\Xi(\delta)$, $\delta \in U$ является менее корректной моделью, вследствие невыполнения требования неслучайности аргумента. Однако она более наглядна при формулировке математических задач, соответствующих задачам второго типа. Обе модели близки по смыслу и отвечают требованиям как сформулированных задач, так и имеющейся для их решения информации, представляющей собой эмпирические последовательности.

Рассмотренные выше типы задач сравнения геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств и подобранные для представления вещественных характеристик таких объектов математические модели дают возможность перейти к формулировке обоих типов задач в терминах моделей.

К задачам сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа относится сопоставление количественных соотношений признаков элементов двух сопоставляемых объектов при одинаковом значении ранжирующей компоненты. Будем считать два объекта с закономерной изменчивостью свойств не отличающимися по своим вещественным характеристикам, если для всех значений ранжирующей компоненты количественные соотношения признаков, характеризующих эти объекты, не отличаются друг от друга. Необходимо учитывать, что сопоставление производится только между теми элементами двух объектов, для которых значение ранжирующей компоненты одинаково и что постановка этой задачи возможна лишь в случае существования для сравниваемых совокупностей общей области значений ранжирующей компоненты.

Согласно изложенному выше наиболее приемлемой моделью вещественных характеристик объектов с закономерной изменчивостью свойств является последовательность многомерных случайных величин $\{\Xi \mid \delta = d\}$, где $d \in U$, а $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_m\}$, в связи с чем математический аналог задач первого типа формулируется в терминах этой модели. Необходимо отметить, что в формулировке задач первого типа (см. главу 2) и в начале настоящего раздела речь идет о количественном выражении вещественных характеристик и не приводится никаких требований относительно характера и степени колебаний этих значений при заданном значении условия.

Это дает возможность сделать следующее ограничение. Учитывая приведенные в выражении (3) параметры распределения условной случайной величины и их смысл, в дальнейшем изложении формулировки задач в терминах моделей содержат только один параметр: условное математическое ожидание. Второй параметр: условная ковариационная матрица, точнее, ее элементы, используются только для определения случайности наблюдаемых расхождений между рассматриваемыми условными математическими ожиданиями. Причиной этого положения является невозможность определения в настоящее время неслучайных особенностей объектов, которые находили бы закономерное отражение в условной ковариационной матрице.

Таким образом, геологическим задачам сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа ставится в соответствие следующая нулевая гипотеза

$$H_0 : M(\Xi|\delta = d) = M(\Xi'|\delta' = d) \tag{6}$$

для всех $d \in U$.

Множество альтернатив к ней имеет вид

$$H_1 : M(\Xi|\delta = d) \neq M(\Xi'|\delta' = d), \tag{7}$$

хотя бы для одного $d \in U$, где в выражениях (6) и (7) $\Xi = \}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_m\}$, $\Xi' = \{\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_j', \ldots, \xi_m'\}$ — m-мерные случайные величины, являющиеся моделями вещественных характеристик первого и второго объекта соответственно; δ и δ' — ранжирующие параметры соответственно для первого и второго объекта; d — конкретное значение ранжирующего параметра; $U = U_1 \cap U_2$, где U_1 и U_2 — множества возможных значений ранжирующего параметра для первого и второго объектов соответственно. Выражения (6) и (7) удобнее записать в несколько ином виде:

$$H_0 : M(\Xi|\delta = d) - M(\Xi'|\delta' = d) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

для всех $d \in U$ при множестве альтернатив

$$H_1 : M(\Xi|\delta = d) - M(\Xi'|\delta' = d) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

хотя бы для одного $d \in U$.

Введем обозначение $Z|d = \Xi|d - \Xi'|d$*, где $Z|d = \{\zeta_1|d, \zeta_2|d, \ldots,$

* Условие $\delta = d$ удобнее обозначить просто d.

$\zeta_j|, ..., \xi_m|d\}$, тогда в соответствии со свойствами математического ожидания выражения (8) и (9) можно заменить следующими:

$$H_0: M(\mathrm{Z}|d) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

для всех $d \in U$ при множестве альтернатив

$$H_1: M(\mathrm{Z}|d) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

хотя бы для одного $d \in U$.

В соответствии с принятым стилем изложения продемонстрируем соответствие приведенных в выражениях (8) и (10) нулевых гипотез смыслу задач сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа. Нулевые гипотезы (8) и (10) требуют совпадения центров распределений каждого признака в двух объектах при любом значении ранжирующего параметра во всей области его значений, общей для сравниваемых объектов. Отсюда очевидно, что нулевые гипотезы (8) и (10) имеют смысл, если множество U не пусто. В качестве примерно можно привести отсутствие геологического смысла в сравнении вещественных особенностей плагиоклазов в случае отсутствия в сопоставляемых совокупностях разновидностей с одинаковыми содержаниями анортитовой молекулы. В этом же примере нулевые гипотезы (8) и (10) требуют равенства всех возможных характеристик плагиоклазов одного номера для всех номеров плагиоклазов одновременно присутствующих в сопоставляемых объектах.

В одномерном варианте нулевые гипотезы (8) и (10) будут иметь следующий вид

$$H_0: M(\xi_j|d) - M(\xi_j'|d) = 0 \tag{12}$$

для всех $d \in U$ при множестве альтернатив

$$H_1: M(\xi_j|d) - M(\xi_j'|d) \neq 0, \tag{13}$$

хотя бы для одного $d \in U$ и

$$H_0: M(\zeta_j|d) = 0 \tag{14}$$

для всех $d \in U$ при множестве альтернатив

$$H_1: M(\zeta_j|d) \neq 0, \tag{15}$$

хотя бы для одного $d \in U$.

Используя модель случайного процесса, можно в указанных терминах записать нулевую гипотезу (10) и нулевую гипотезу, соответствующую задачам второго типа.

Согласно равенству (5) можно записать

$$\Xi(\delta) - \Xi'(\delta) = [\mathbf{Y}(\delta) - \mathbf{Y}'(\delta)] + [\boldsymbol{\varphi}(\delta) - \boldsymbol{\varphi}'(\delta)]. \tag{16}$$

Рассмотрим правую часть этого выражения. Последнее слагаемое правой части, а именно: $[\boldsymbol{\varphi}(\delta) - \boldsymbol{\varphi}'(\delta)]$ представляет собой процесс, имеющий, по предположению, нулевой вектор математических ожиданий и конечную диагональную ковариационную матрицу для ординат конечного числа состояний. В сформулированных условиях рассматриваемое слагаемое суммы (16) принимает на себя все случайные флуктуации и поэтому не включается в запись нулевой гипотезы, соответствующей задачам первого типа. После процедуры исключения рассматриваемого слагаемого суммы (16) нулевую гипотезу, соответствующую нулевой гипотезе (8), можно записать в следующем виде:

$$H_0: \mathbf{Y}(\delta) - \mathbf{Y}'(\delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

для всех $d \in U$
при множестве альтернатив

$$H_1: \mathbf{Y}(\delta) - \mathbf{Y}'(\delta) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

хотя бы для одного $d \in U$.

При исследовании случайных процессов с детерминированной компонентой (Гренандер, 1971; Хеннан, 1964) приведенная в выражениях (17) и (18) компонента $\mathbf{Y}(\delta)$ аппроксимируется одним из методов регрессионного анализа и вычитается для приведения процесса к стационарному. Это позволяет нулевую гипотезу (13) о равенстве детерминированных компонент поставить в соответствие гипотезе о равенстве уравнений регрессии. При этом сравнение производится как относительно угловых коэффициентов, так и относительно свободных членов уравнений регрессии, аппроксимирующих детерминированную компоненту. Если принять аналогию с регрессионным анализом, то становится очевидным, что задачи второго типа можно сопоставить с задачами сравнения регрессионных кривых без учета свободного члена, т. е. только относительно их формы. При записи нулевой гипотезы использован вывод Ю. А. Розанова (1971) о том, что

$$M[M(\Xi|d)] = M\Xi. \tag{19}$$

В выражении (19) $M(\Xi|d)$ соответствует условному математическому ожиданию выражения (3), а $M\Xi$ представляет собой безусловное математическое ожидание случайной величины Ξ, или математическое ожидание ординат случайного процесса $\Xi(\delta)$. В итоге нулевая гипотеза, соответствующая задачам сравнения объектов с *закономерной изменчивостью свойств второго типа*, может быть записана следующим образом

$$H_0 : [\mathbf{Y}(\delta) - M\Xi] - [\mathbf{Y}'(\delta) - M\Xi'] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

для всех $\delta \in U$
при множестве альтернатив

$$H_1 : [\mathbf{Y}(\delta) - M\Xi] - [\mathbf{Y}'(\delta) - M\Xi'] \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

хотя бы для одного $\delta \in U$.

В выражениях (20) и (21) обозначения прежние. Следует повторить, что $\delta \in U_1$, $\delta' \in U_2$ и $U = U_1 \cap U_2$, и в целях упрощения значения аргумента δ и δ', принадлежащие U, обозначены δ.

Нулевая гипотеза (20) соответствует сравнению двух случайных процессов относительно детерминированных компонент, приведенных центрированием к одному масштабу. Операция центрирования позволяет сопоставлять форму детерминированных компонент без учета их положения относительно оси абсцисс. Нулевая гипотеза (20) дает возможность сравнивать характер закономерных изменений вещественных свойств объектов в процессе их становления. Сравнение производится при исключении влияния на результат региональных и возрастных особенностей сопоставляемых объектов. Решение этой задачи определяется как типизация эндогенных процессов по наиболее устойчивым и характерным их особенностям.

Проверка состоятельности нулевой гипотезы (20) основана на статистическом анализе случайных последовательностей — реализаций случайных процессов, которые представляют собой модели процессов формирования сопоставляемых геологических объектов.

Глава 4
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ЗАКОНОМЕРНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТЬЮ СВОЙСТВ

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ И НЕКОТОРЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

В теории вероятностей и математической статистике основное внимание в работах (Дуб, 1956; Розанов, 1963; Пугачев, 1962; Прохоров и Розанов, 1967; Гренандер, 1961; Ито, 1960, 1963; Хеннан, 1964; Свешников, 1961; Гихман и Скороход, 1965 и др.) уделяется стационарным или близким к ним процессам и связанным с ними вопросам математической теории. Только в некоторых работах затрагиваются так называемые стационарные процессы с детерминированной компонентой. Причем в таких случаях авторы (например, Э. Хеннан и У. Гренандер) рекомендуют аппроксимировать эту компоненту методом наименьших квадратов и, вычитая ее, приводить процесс к стационарному. Речь идет естественно об одномерных процессах.

В теории вероятностей многомерными чаще называются процессы с несколькими аргументами, а не с несколькими признаками при одном аргументе, как в настоящей работе. Следствием направленности исследований по теории случайных процессов является и статистика случайных процессов. Основная направленность статистических разработок — проверка стационарности, оценка спектральной плотности, автокорреляционных функций и т. п. Что касается случайных процессов с детерминированной компонентой, то здесь обычно рекомендуется все многообразие методов регрессионного анализа, которые могут служить для оценки вида детерминированной компоненты в одномерном случае.

Значительно сложнее обстоит дело с многомерными процессами. В этом случае существуют методы аппроксимации зависимости в основном линейного характера. Не лучше обеспечена методами и задача сравнения детерминированных компонент, аппроксимированных с помощью метода наименьших квадратов. Можно указать на весьма ограниченное количество работ (Айвазян, 1968; Рао, 1968), в которых рассматривается критерий сравнения уравнений регрессии для весьма ограниченного числа случаев.

Прежде чем перейти к рассмотрению статистических методов, автор считает необходимым привести несколько известных результатов, полученных в теории случайных процессов. Эти результаты положены в основу разработки статистических критериев сравнения геологических последовательностей, или, в терминах теории вероятностей, условных математических ожиданий (детерминированных компонент).

При построении критериев учитывались следующие предположения:

1) из особенностей геологической информации, практически не допускающей многократное повторение опыта в одинаковом комплексе условий, вытекает необходимость предположения об эргодичности случайных процессов — моделей геологических последовательностей. Это предположение принято без доказательства;

2) в работе принято без строгого доказательства, что случайная составляющая $\varphi(\delta)$ [см. формулу (16)], является нормальным (гауссовским) процессом. Это предположение было проверено на ряде выборок с помощью статистических методов и с учетом результатов проверки может быть принято как рабочее;

3) подытоживая два предыдущих предположения, можно при-

нять (и в работе это проведено), что процесс $\varphi(\delta)$ может быть отнесен к классу «регулярных стационарных процессов» (Прохоров, Розанов, 1967).

Указанные предположения учитывают следующие результаты теории вероятностей.

1. «Если $M|\xi|<\infty$, то с вероятностью 1 при любом значении случайной величины η существует условное математическое ожидание $M(\xi|\eta)$». (Розанов, 1971, с. 56). Это положение подтверждает существование условного математического ожидания при любом значении условия (δ, d в наших обозначениях).

2. «Теорема. Абсолютно наилучшее приближение величины ξ величинами вида $\eta=\varphi(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ дается формулой

$$\hat{\xi}=M(\xi|\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n),$$

где $M(\xi|\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ означает условное математическое ожидание величины ξ при фиксированных значениях $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$» (Розанов, 1971, с. 255). В обозначениях Ю. А. Розанова величина ξ зависит от значений некоторого случайного процесса $\eta(t)$.

3. Одним из основных результатов теории случайных процессов, используемых в настоящей главе, является центральная предельная теорема для случайных процессов. «Центральная предельная теорема. При определенных условиях регулярности стационарного процесса $\xi=\xi(t)$ характер сближения «временных средних»

$$\begin{cases} \dfrac{1}{T}\sum\limits_{0}^{T-1}\eta(t) & \text{при дискретном } t \\ \dfrac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\eta(t)\,dt & \text{при непрерывном } t \end{cases}$$

с математическим ожиданием $\hat{\eta}=M\eta$ описывается центральной предельной теоремой, согласно которой распределение вероятностей нормированных разностей

$$\Delta_T=\frac{\eta_T-M\eta}{\sigma_T}, \qquad \sigma_T^2=D\eta_T$$

слабо сходится к гауссовскому распределению с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией:

$$P\{\Delta_T\leqslant X\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du\text{»}.$$

(Прохоров, Розанов, 1967, с. 487).

4. Возможность статистического сравнения случайных функций, положенная в основу всех построений настоящей главы, базируется на результате, полученном И. И. Гихман и А. В. Скороход (1965), которые определяют стохастическую эквивалент-

ность случайных функций $\xi(\theta)$ и $\xi'(\theta)$, заданных на одном и том же множестве $\theta \in \Theta$ и вероятностном пространстве $\{U, \sigma, P\}$, если для любых $\theta_k \in \Theta$, $k=1, 2, ..., n$ совместные распределения случайных величин $\xi(\theta_1), \xi(\theta_2), ..., \xi(\theta_n)$ и $\xi'(\theta_1), \xi'(\theta_2), ..., \xi(\theta_n)$ совпадают, и для любого $\theta \in \Theta$ выполняется равенство $P\{\xi(\theta, U) \neq \neq \xi'(\theta, U)\} = 0$.

5. Этот результат — возможность применения отношения правдоподобия для построения критериев проверки гипотез относительно случайных функций, к сожалению, не может быть выражен одной цитатой. Следует отметить, что в работе У. Гренандера (1961) все критерии проверки гипотез о математических ожиданиях случайных процессов, а также оценки параметров случайных процессов, получены как из отношения правдоподобия (критерии), так и из функции правдоподобия (оценки). Причем для ряда случаев У. Гренандер доказывает равномерно наибольшую мощность критериев отношения правдоподобия (там же, с. 37, 42), и также состоятельность, эффективность и несмещенность оценок максимального правдоподобия (там же, с. 81, 84, 86 и т. д.).

ИЗВЕСТНЫЕ МЕТОДЫ СРАВНЕНИЯ УСЛОВНЫХ СРЕДНИХ

Из предшествующего изложения известно, что вероятностным эквивалентом задач сравнения геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа являются сформулированные ранее нулевые гипотезы (8) и (17). Как упоминалось, существующих в литературе методов проверки этих гипотез немного, причем все они имеют весьма существенные ограничения на применимость.

В соответствии с работами Э. Хеннана (1964), У. Гренандера (1961) и других при исследовании случайных процессов с детерминированной компонентой последняя может быть достаточно хорошо оценена изученными методами регрессионного анализа. Отсюда совершенно естественно перейти от проверки гипотезы о равенстве условных математических ожиданий [нулевая гипотеза (8)] или детерминированных компонент [нулевая гипотеза (17)] к проверке гипотезы о равенстве уравнений регрессии, аппроксимирующих условные математические ожидания (детерминированные компоненты). Согласно принятой методике, рассмотрим известные методы проверки гипотезы о равенстве уравнений регрессии для двумерного случая, т. е. для случая двух случайных величин $\{\xi_j, \delta\}$, одна из которых (δ) является закрепленной (Айвазян, 1968, Уилкс, 1967).

Нулевая гипотеза (8) для двух компонент может быть дана и в следующем виде

$$H_0: M(\xi_j|\delta = d) = M(\xi_j''|\delta = d) \qquad (22)$$

для всех $d \in U$

при множестве альтернатив

$$H_1: M(\xi_j/\delta = d) \neq M(\xi_j'/\delta = d), \tag{23}$$

хотя бы для одного $d \in U$.

Эта гипотеза соответствует нулевой гипотезе о принадлежности двух эмпирических уравнений регрессии одному теоретическому уравнению. Методы проверки сформулированной нулевой гипотезы приведены в работе С. А. Айвазяна (1968), где рассматриваются методы сравнения уравнений линейной и параболической регрессии.

В линейном случае С. А. Айвазян (1968) для проверки гипотезы о том, что два эмпирических уравнения регрессии

$$\widehat{Y}^{(1)}(x) = \widehat{\alpha}^{(1)} + \widehat{\beta}^{(1)}(x - \bar{x}^{(1)}) \tag{24}$$

$$\widehat{Y}^{(2)}(x) = \widehat{\alpha}^{(2)} + \widehat{\beta}^{(2)}(x - \bar{x}^{(2)}) \tag{25}$$

являются выборочными аналогами одного истинного уравнения регрессии

$$Y(x) = \alpha + \beta(x - \mu) \tag{26}$$

предлагает использовать приведенный ниже метод. Здесь и ниже обозначения соответствуют обозначениям, приведенным в указанной работе С. А. Айвазяна. Надо помнить, что в нашем случае $x_i^{(1)}$ — эмпирические значения δ; $x_i^{(2)}$ — эмпирические значения δ'; $y_i^{(1)}$—эмпирические значения ξ_j, а y_i^2 — эмпирические значения ξ_j'. Предположение о принадлежности двух выборочных уравнений регрессии одному истинному может быть записано в виде следующей нулевой гипотезы

$$H_0: \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \alpha, \quad \beta^{(1)} = \beta^{(2)} = \beta \tag{27}$$

при наборе альтернатив:

$$\begin{aligned} &H_1^1: \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \alpha, \quad \beta^{(1)} \neq \beta^{(2)} \neq \beta, \\ &H_1^2: \alpha^{(1)} \neq \alpha^{(2)} \neq \alpha, \quad \beta^{(1)} = \beta^{(2)} = \beta, \\ &H_1^3: \alpha^{(1)} \neq \alpha^{(2)} \neq \alpha, \quad \beta^{(1)} \neq \beta^{(2)} \neq \beta. \end{aligned} \tag{28}$$

В зависимости от выполнения некоторых требований относительно *условной (остаточной)* дисперсии ниже рассматриваются два случая применения критерия для проверки нулевой гипотезы (27).

Первый случай. Условные (остаточные) дисперсии относительно линейной регрессии, описываемой выражениями (24), (25), равны, т. е. $\sigma^{(1)2} = \sigma^{(2)2}$. В этих условиях при справедливости нулевой гипотезы (27) величины:

$$t_1 = \frac{\widehat{\beta}^{(1)} - \widehat{\beta}^{(2)}}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{N_1 \cdot s_x^{(1)^2}} + \frac{1}{N_2 \cdot s_x^{(2)^2}}}}, \tag{29}$$

где

$$s=\sqrt{\frac{(N_1-2)\cdot s^{(1)^2}+(N_2-2)\cdot s^{(2)^2}}{N_1+N_2-4}},$$

и

$$t_2=\frac{\widehat{\beta}-\widehat{\beta'}}{s\cdot\sqrt{\dfrac{1}{N_1\cdot s_x^{(1)^2}+N_2\cdot s_x^{(2)^2}}+\dfrac{\dfrac{1}{N_1}+\dfrac{1}{N_2}}{(\bar{x}^{(1)}-\bar{x}^{(2)})}}},\tag{30}$$

где

$$\widehat{\beta}=\frac{N_1\cdot s_x^{(1)^2}\cdot\widehat{\beta}^{(1)}+N_2\cdot s_x^{(2)^2}\cdot\widehat{\beta}^{(2)}}{N_1\cdot s_x^{(1)^2}+N_2\cdot s_x^{(2)^2}}\tag{31}$$

$$\text{и }\widehat{\beta'}=\frac{\bar{y}^{(1)}-\bar{y}^{(2)}}{\bar{x}^{(1)}-\bar{x}^{(2)}},\tag{32}$$

распределены асимптотически по закону Стьюдента с $f=N_1+N_2-4$ степенями свободы.

Второй случай. Дисперсии генеральных совокупностей, из которых отобраны выборочные наблюдения, не равны, т. е. $\sigma^{(1)2}\neq\sigma^{(2)2}$. Проверка нулевой гипотезы (27) осуществляется с помощью вычисления приведенных ниже статистик.

$$t_1=\frac{\widehat{\beta}^{(1)}-\widehat{\beta}^{(2)}}{\sqrt{\dfrac{s^{(1)^2}}{N_1\cdot s_x^{(1)^2}}+\dfrac{s^{(2)^2}}{N_2\cdot s_x^{(2)^2}}}},\tag{33}$$

которая в случае справедливости нулевой гипотезы (27) распределена приблизительно по закону Стьюдента с l степенями свободы. Число степеней свободы определяется из следующего соотношения:

$$l=\left(\frac{C^2}{N_1-2}+\frac{(1-C)^2}{N_2-2}\right)^{-1},\tag{34}$$

где

$$C=\frac{\dfrac{s^{(1)^2}}{N_1\cdot s_x^{(1)^2}}}{\dfrac{s^{(1)^2}}{N_1\cdot s_x^{(1)^2}}+\dfrac{s^{(2)^2}}{N_2\cdot s_x^{(2)^2}}}.\tag{35}$$

$$t_2=\frac{\widehat{\beta}-\widehat{\beta'}}{\sqrt{\dfrac{N_2\cdot s^{(1)^2}+N_1\cdot s^{(2)^2}}{N_1\cdot N_2\cdot(\bar{x}^{(1)}-\bar{x}^{(2)})^2}+\dfrac{s^{(1)^2}\cdot s^{(2)^2}}{N_1\cdot s_x^{(1)^2}\cdot s^{(2)^2}+N_2\cdot s_x^{(2)^2}\cdot s^{(1)^2}}}},\tag{36}$$

где

$$\widehat{\beta}=\left[\widehat{\beta}^{(1)}\cdot\frac{N_1\cdot s_x^{(1)^2}}{s^{(1)^2}}+\widehat{\beta}^{(2)}\cdot\frac{N_2\cdot s_x^{(2)^2}}{s^{(2)^2}}\right]\left[\frac{N_1\cdot s_x^{(1)^2}}{s^{(1)^2}}+\frac{N_2\cdot s_x^{(2)^2}}{s^{(2)^2}}\right], \tag{37}$$

а $$\widehat{\beta}'=\frac{\overline{y}^{(1)}-\overline{y}^{(2)}}{\overline{x}^{(1)}-\overline{x}^{(2)}}. \tag{38}$$

В условиях нулевой гипотезы величина (36) распределена асимптотически нормально с *математическим ожиданием* 0 и дисперсией 1.

Если зависимость между двумя компонентами ξ_j и δ в двух совокупностях может быть описана с помощью уравнений параболической регрессии, то для этого случая в работе С. А. Айвазяна (1968) приведен статистический метод сравнения двух эмпирических уравнений регрессии параболического вида. По двум совокупностям выборочных наблюдений

$$\left(x_1^{(1)},\ y_1^{(1)}\right),\ \left(x_2^{(1)},\ y_2^{(1)}\right),\ \ldots,\ \left(x_{N_1}^{(1)},\ y_{N_1}^{(1)}\right)$$

и

$$\left(x_1^{(2)},\ y_1^{(2)}\right),\ \left(x_2^{(2)},\ y_2^{(2)}\right),\ \ldots,\ \left(x_{N_2}^{(2)},\ y_{N_2}^{(2)}\right)$$

вычислены эмпирические уравнения параболической регрессии:

$$Y^{(1)}(x)=\widehat{\alpha}^{(1)}+\widehat{\beta}_1^{(1)}\cdot\varphi_1^{(1)}(x)+\widehat{\beta}_2^{(1)}\cdot\varphi_2^{(1)}(x) \tag{39}$$

и

$$Y^{(2)}(x)=\widehat{\alpha}^{(2)}+\widehat{\beta}_1^{(2)}\cdot\varphi_1^{(2)}(x)+\widehat{\beta}_2^{(2)}\cdot\varphi_2^{(2)}(x).$$

Нулевая гипотеза может быть сформулирована следующим образом:

$$H_0:\alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}=\alpha,\quad \beta_1^{(1)}=\beta_1^{(2)}=\beta_1,\quad \beta_2^{(1)}=\beta_2^{(2)}=\beta_2. \tag{40}$$

Набор альтернатив к этой гипотезе

$$\begin{aligned}
&H_1^1:\alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}=\alpha, && \beta_1^{(1)}=\beta_1^{(2)}=\beta_1 && \beta_2^{(1)}\neq\beta_2^{(2)}\neq\beta_2,\\
&H_1^2:\alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}=\alpha, && \beta_1^{(1)}\neq\beta_1^{(2)}\neq\beta_1, && \beta_2^{(1)}=\beta_2^{(2)}=\beta_2,\\
&H_1^3:\alpha^{(1)}\neq\alpha^{(2)}\neq\alpha, && \beta_1^{(1)}=\beta_1^{(2)}=\beta_1, && \beta_2^{(1)}=\beta_2^{(2)}=\beta_2,\\
&H_1^4:\alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}=\alpha, && \beta_1^{(1)}\neq\beta_1^{(2)}\neq\beta_1, && \beta_2^{(1)}\neq\beta_2^{(2)}\neq\beta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{41}$$

В первую очередь следует отметить, что *непременным условием* применения рассмотренных ниже методов является выполнение *требования равенства* условных или остаточных дисперсий для двух исследуемых совокупностей. Если это требование выполняется, что проверяется с помощью известного критерия Фишера, то вычисляется оценка дисперсии

$$s^2=\frac{(N_1-3)\,s^{(1)^2}+(N_2-3)\,s^{(2)^2}}{N_1+N_2-6}. \tag{42}$$

Неравенство дисперсий существенно затрудняет использование приведенных методов. Проверка нулевой гипотезы (40) осуществляется вычислением трех статистик:

$$1.\qquad t_1 = \frac{\widehat{\beta}_2^{(1)} - \widehat{\beta}_2^{(2)}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N_1} |\varphi_2^{(1)}(x_i^{(1)})|^2} + \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N_2} |\varphi_2^{(2)}(x_i^{(2)})|^2}}} \tag{43}$$

$$2.\qquad t_2 = \frac{\widehat{\beta}_2 -}{\sqrt{\left[\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N_1} |\varphi_1^{(1)}(x_i^{(1)})|^2} + \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N_2} |\varphi_1^{(2)}(x_i^{(2)})|^2}\right]:}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-\widehat{\beta}'_2}{:\left[(R^{(1)} - R^{(2)}) + \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N_1} |\varphi_2^{(1)}(x_i^{(1)})|^2 + \sum\limits_{i=1}^{N_2} |\varphi_2^{(2)}(x_i^{(2)})|^2}\right]}, \tag{44}$$

где

$$\widehat{\beta}_2 = \frac{\widehat{\beta}_2^{(1)} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N_1} |\varphi_2^{(1)}(x_i^{(1)})|^2 + \widehat{\beta}_2^{(2)} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N_2} |\varphi_2^{(2)}(x_i^{(2)})|^2}{\sum\limits_{i=1}^{N_1} |\varphi_2^{(1)}(x_i^{(1)})|^2 + \sum\limits_{i=1}^{N_2} |\varphi_2^{(2)}(x_i^{(2)})|^2}, \tag{45}$$

и

$$\widehat{\beta}'_2 = \frac{\widehat{\beta}_1^{(1)} - \widehat{\beta}_1^{(2)}}{R^{(1)} - R^{(2)}}, \tag{46}$$

а

$$R^{(k)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N_k} x_i^{(k)3} - \overline{x}^{(k)} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N_k} x_i^{(k)2}}{\sum\limits_{i=1}^{N_k} x_i^{(k)2} - N_k \cdot \overline{x}^{(k)2}}, \quad k = 1,\ 2. \tag{47}$$

$$3.\qquad t_3 = \frac{\widehat{\beta}_2 -}{s \cdot \sqrt{\dfrac{1}{\theta} \cdot \left(\dfrac{\overline{x}^{(1)2}}{\sum\limits_{i=1}^{N_1} |\varphi_1^{(1)}(x_i^{(1)})|^2} + \dfrac{\overline{x}^{(2)2}}{\sum\limits_{i=1}^{N_2} |\varphi_1^{(2)}(x_i^{(2)})|^2} + \right.}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-\widehat{\beta}''_2}{\left. + \dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_2} + \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N_1} |\varphi_2^{(1)}(x_i^{(1)})|^2 + \sum\limits_{i=1}^{N_2} |\varphi_2^{(2)}(x_i^{(2)})|^2}\right)}, \tag{48}$$

где

$$\widehat{\beta}_2'' = \frac{1}{\theta}\left(\widehat{\beta}_2^{(1)}\bar{x}^{(1)} - \widehat{\beta}_2^{(2)}\bar{x}^{(2)} - \widehat{\alpha}^{(1)} + \widehat{\alpha}^{(2)}\right), \tag{49}$$

а

$$\theta = R^{(1)}\bar{x}^{(1)} - R^{(2)}\bar{x}^{(2)} - \frac{1}{N_1}\cdot\sum_{i=1}^{N_1} x_i^{(1)^2} + \frac{1}{N_2}\cdot\sum_{i=1}^{N_2} x_i^{(2)^2}. \tag{50}$$

В условиях нулевой гипотезы (40) величины (41), (44), (45) распределены асимптотически по закону Стьюдента с $f = N_1 + N_2 - 6$ степенями свободы.

С. А. Айвазян (1968) указывает на существование статистических методов сравнения кубических парабол, а также методов, учитывающих существенные различия условных дисперсий. Однако эти методы им не приводятся вследствие ограниченности подобных случаев, что относится главным образом к кубическим параболам, а также вследствие чрезмерной громоздкости формул. Здесь следует указать, что во всех случаях, как при сравнении линий регрессии, так и при сопоставлении уравнений параболической регрессии, предполагается, что выполняется требование однородности условной дисперсии на всем интервале значений закрепленной случайной величины, т. е. что $\sigma^2 = \text{const}$ для всех значений $\delta \in U$. Невыполнение этого условия влечет за собой существенное усложнение процедуры, так как в этом случае необходимо определить вид функции, описывающей изменение условной дисперсии, и вычисление всех характеристик производить с учетом «взвешивания» наблюдений. В качестве «весов» в простейшем случае рекомендуется использовать величину, обратную квадрату функции, описывающей поведение условной дисперсии.

Основное достоинство методов сравнения уравнений линейной и параболической регрессии — их корректность. Определенные затруднения, возникающие при их широком использовании, обусловлены, во-первых, требованием равенства условных дисперсий и их однородности (невыполнение этих требований влечет за собой в лучшем случае существенное усложнение вычислительных процедур), во-вторых, отсутствием непосредственного обобщения на многомерный случай и, в-третьих, необходимостью использования для описания зависимости ξ_j от δ в сопоставляемых совокупностях задаваемой априори модели регрессионной зависимости.

Статистический метод сравнения уравнений множественной регрессии для линейного случая приведен в работе С. Р. Рао (1968). Для целей проверки предположения о равенстве двух уравнений множественной регрессии, т. е. для проверки нулевой гипотезы

$$H_0: \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)},\ \ \beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)},\ \ldots,\ \beta_m^{(1)} = \beta_m^{(2)} \tag{51}$$

с соответствующим набором альтернатив:

$$H_1^1: \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)},\ \ \beta_j^{(1)} \neq \beta_j^{(2)}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, m$

или

$$H_1^2: \alpha^{(1)} \neq \alpha^{(2)}, \quad \beta_j^{(1)} = \beta_j^{(2)} \tag{52}$$

для всех $j=1, 2, ..., m$ предлагается использовать аппарат дисперсионного анализа. Если, вслед за С. Р. Рао, обозначить «исправленные» суммы произведений для первой и второй выборки соответственно через (обозначения С. Р. Рао)

$$S_{kj}^{(1)} = \sum_{i=1}^{N_1} \left(x_{ki}^{(1)} - \overline{x}_k^{(1)}\right)\left(x_{ji}^{(1)} - \overline{x}_j^{(1)}\right),$$

$$S_{0j}^{(1)} = \sum_{i=1}^{N_1} \left(x_{ji}^{(1)} - \overline{x}_j^{(1)}\right)\left(y_i^{(1)} - \overline{y}^{(1)}\right), \tag{53}$$

$$S_{00}^{(1)} = \sum_{i=1}^{N_1} \left(y_i^{(1)} - \overline{y}^{(1)}\right)^2$$

и

$$S_{kj}^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_2} \left(x_{ki}^{(2)} - \overline{x}_k^{(2)}\right)\left(x_{ji}^{(2)} - \overline{x}_j^{(2)}\right),$$

$$S_{0j}^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_2} \left(x_{ji}^{(2)} - \overline{x}_j^{(2)}\right)\left(y_i^{(2)} - \overline{y}^{(2)}\right), \tag{54}$$

$$S_{00}^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_2} \left(y_j^{(2)} - \overline{y}^{(2)}\right)^2,$$

а остаточную сумму квадратов соответственно через

$$R_0^2 = S_{00}^{(1)} - b_1^{(1)} S_{01}^{(1)} - b_2^{(1)} S_{02}^{(1)} - \ldots - b_m^{(1)} S_{0m}^{(1)} =$$
$$= S_{00}^{(2)} - b_1^{(2)} S_{01}^{(2)} - b_2^{(2)} S_{02}^{(2)} - \ldots - b_m^{(2)} S_{0m}^{(2)}, \tag{55}$$

имеющую $f = N_1 + N_2 - 8$ степеней свободы, то проверку гипотезы (51) можно осуществить следующим образом.

Объединим обе выборки и по объединенной выборке построим общее уравнение регрессии и вычислим остаточную сумму квадратов. Новые оценки будут иметь вид

$$\overline{x}_j = \frac{N_1 \overline{x}_j^{(1)} + N_2 \overline{x}_j^{(2)}}{N_1 + N_2}. \tag{56}$$

«Исправленные» суммы произведений

$$S_{kj} = S_{kj}^{(1)} + S_{kj}^{(2)} + \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}\left(\overline{x}_k^{(1)} - \overline{x}_k^{(2)}\right)\left(\overline{x}_j^{(1)} - \overline{x}_j^{(2)}\right),$$

$$S_{0j} = S_{0j}^{(1)} + S_{0j}^{(2)} + \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}\left(\overline{x}_j^{(1)} - \overline{x}_j^{(2)}\right)\left(\overline{y}^{(1)} - \overline{y}^{(2)}\right), \tag{57}$$

$$S_{00} = S_{00}^{(1)} + S_{00}^{(2)} + \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} \cdot \left(\overline{y}^{(1)} - \overline{y}^{(2)}\right)^2, \quad k, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Если $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2 \ldots$ — оценки коэффициентов регрессии, вычисленные по объединенной выборке, то остаточная сумма квадратов будет иметь (N_1+N_2-4) степеней свободы и следующий вид

$$R_1^2 = S_{00} - \widehat{\beta}_1 \cdot S_{01} - \widehat{\beta}_2 \cdot S_{02} - \ldots - \widehat{\beta}_m \cdot S_{0m}. \qquad (58)$$

С. Р. Рао (1968) подразделяет общую нулевую гипотезу (51) на гипотезы относительно коэффициентов регрессии: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ относительно свободного члена α. Если гипотеза касается коэффициентов регрессии β, то дальнейшие вычисления ведутся следующим образом. Вычисляются величины

$$S'_{0j} = S_{0j}^{(1)} + S_{0j}^{(2)}, \quad S'_{kj} = S_{kj}^{(1)} + S_{kj}^{(2)}, \qquad (59)$$

с помощью которых определяются постоянные $b_1, b_2, \ldots, b_m$ из системы уравнений:

$$S'_{0j} = b_1 \cdot S'_{1j} + b_2 \cdot S'_{2j} + \ldots + b_m \cdot S'_{mj}, \qquad (60)$$

где $j = 1, 2, \ldots, m$.

Эти величины необходимы для вычисления остаточной суммы квадратов R_2^2, имеющей N_1+N_2-5 степеней свободы.

$$R_2^2 = \sum_{i=1}^{N_1} (y_i^{(1)} - \overline{y}^{(1)}) + \sum_{i=1}^{N_2} (y_i^{(2)} - \overline{y}^{(2)}) -$$

$$- b_1 \cdot S'_{01} - b_2 \cdot S'_{02} - \ldots - b_m \cdot S'_{0m}. \qquad (61)$$

В условиях равенства всех коэффициентов регрессии (кроме свободного члена) в двух выборочных уравнениях регрессии величина

$$\frac{R_2^2 - R_0^2}{3} \Bigg/ \frac{R_0^2}{N_1 + N_2 - 8} \qquad (62)$$

распределена по закону Фишера с $f_1=3$ и $f_2=N_1+N_2-8$ степенями свободы. Для проверки предположения о равенстве свободных членов в сопоставляемых уравнениях регрессии при условии равенства всех коэффициентов этих уравнений предлагается использовать следующую статистику

$$\frac{R_1^2 - R_2^2}{1} \Bigg/ \frac{R_2^2}{N_1 + N_2 - 5}, \qquad (63)$$

которая в условиях равенства свободных членов распределена по закону Фишера с $f_1=1$ и $f_2=N_1+N_2-5$ степенями свободы.

В работе С. Р. Рао (1968) никаких ограничений на применение рассмотренных критериев проверки равенства двух уравнений прямолинейной регрессии не приводится. Единственным ограничением следует считать необходимость применения именно линейной модели для описания зависимости всех переменных от закрепленной случайной величины.

Известным можно считать и метод сравнения множественных уравнений регрессии, полученных с помощью ортогональных полиномов, предложенный Л. Н. Большевым. Однако приведенные выше рис. 2, 3 и 4, на которых изображена форма реальной зависимости (не самая сложная), являются достаточным основанием для признания невозможности точной передачи вида закономерной изменчивости любыми процедурами аппроксимации. Особенно заметно это в сравнительном анализе как геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств, так и собственно закономерной изменчивости.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СРАВНЕНИЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАКОНОМЕРНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТЬЮ СВОЙСТВ ПЕРВОГО ТИПА

Метод сравнения условных математических ожиданий при линейной интерполяции

Рассмотрение предлагаемых статистических методов проверки нулевой гипотезы (8) начинается с анализа наиболее простого и наиболее употребительного метода, предназначенного для решения задач сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа. Это метод сравнения условных средних в предположении о возможности линейной интерполяции. Остальные необходимые допущения изложены выше. Следует только привести несколько положений, поясняющих конкретно применение данного метода. Во-первых, несмотря на многомерный характер метода, основой его являются одномерные последовательности эмпирического материала, ранжированные с помощью значений выбранного исследователем параметра. Во-вторых, значения каждого признака в промежутке между соседними наблюдениями интерполируются с помощью прямой, соединяющей соседние значения данной эмпирической последовательности.

Основание выбора именно линейной интерполяции в условиях конкретной задачи сводится к следующему. Неоднократно упоминалось, что проверяемая нулевая гипотеза сравнивает траектории условного математического ожидания двух совокупностей как множество его значений в каждой точке оси условия. Согласно С. А. Айвазяну (1968), условное математическое ожидание оценивается с помощью различных методов в регрессионной задаче. Представим себе, что нам необходимо оценить поведение условного математического ожидания с использованием аппарата регрессионного анализа. Естественно, что предполагается нелинейная форма траектории условного математического ожидания. Подбирая аппроксимирующую кривую с помощью, положим, ортогональных полиномов, нам необходимо определить точность совпадения, во-первых, аппроксимирующей кривой и неизвестного условного математического ожидания и, во-вторых, степень разброса эмпирических значений относительно аппроксимирующей кривой.

Хорошо известной мерой разброса эмпирического материала, включая и точность подбора кривой, является остаточная дисперсия. В конкретном случае из двух аппроксимирующих кривых выбирается та, для которой меньше по величине остаточная дисперсия. Однако и в этом случае остается неизвестным, насколько и в каких областях значений закрепленной случайной величины (ранжирующего параметра в нашем случае) близка аппроксимирующая кривая условному математическому ожиданию генеральной совокупности.

Известно также, что остаточная дисперсия как мера точности подбора аппроксимирующей кривой достигает абсолютного минимума в одном, и только одном случае. Остаточная дисперсия тождественно равна нулю, когда аппроксимирующая кривая имеет вид ломаной линии с изменением направления в каждой точке наблюдения. Естественно, что такой вид функции, аппроксимирующей зависимость, не представляет ценности. Однако в этом случае исследователь может быть гарантирован от искажения формы искомой зависимости. В связи с тем что задача заключается в сравнении двух условных математических ожиданий без искажения их формы, линейную интерполяцию между точками наблюдения можно считать приемлемой.

В условиях нулевой гипотезы (17), т. е. в случае равенства детерминированных составляющих, разность $[\mathbf{Y}(\delta)-\mathbf{Y}'(\delta)]$ тождественно равна нулю, а разность $[\boldsymbol{\varphi}(\delta)-\boldsymbol{\varphi}'(\delta)]$, согласно высказанным ранее предположениям, представляет собой стационарный процесс с нулевым средним и конечной дисперсией (при счетном множестве состояний), равной сумме дисперсий участвующих в этой разности процессов.

Ранее было предположено, что этот процесс обладает следующим интересующим нас свойством: автокорреляционная функция его не имеет гармонических составляющих и на первом же шаге уходит в область нулевых значений, т. е. обладает свойствами процесса «белого шума». Следовательно, каждое из состояний такого процесса не зависит от соседних и как угодно удаленных состояний. А раз так, то для состояний этого процесса может быть применена центральная предельная теорема (Прохоров, Розанов, 1967). Таким образом, можно принять, что набор ординат реализации стационарного случайного процесса $[\varphi(\delta)-\varphi'(\delta)]$ распределен асимптотически нормально с параметрами 0 и σ^2.

В условиях альтернативы, что хотя бы для одного значения условия условные математические ожидания $M(\xi|\delta=d)$ и $M(\xi'|\delta=d)$ не равны, разность $[Y(\delta)-Y'(\delta)]$ не будет тождественно равна нулю и ее значение примем равным $[Y(\delta)-Y'(\delta)]=$ $=\mu$. В этом случае даже если случайный процесс $[\varphi(\delta)-\varphi'(\delta)]$ остается стационарным, он будет иметь отличное от нуля математическое ожидание, сопоставимое с величиной $\frac{\mu}{n}$, где n — число состояний.

Все это позволяет нулевую гипотезу (12) поставить в соответствие гипотезе о равенстве нулю математического ожидания стационарного случайного процесса $[\varphi(\delta)-\varphi'(\delta)]$ при альтернативе, что $M[\varphi(\delta)-\varphi'(\delta)]=\mu$. Такая интерпретация нулевой гипотезы допускает получение выражения для критерия из отношения правдоподобия. На возможность применения отношения правдоподобия указывалось ранее. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ — эмпирические значения ординат реализации процесса $[\varphi(\delta)-\varphi'(\delta)]$, которые по предположению независимы, а $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_i), \ldots, f(x_n)$ — соответствующие значению функции плотности, которые предполагаются нормальными.

Распределение ординат процесса $[\varphi(\delta)-\varphi'(\delta)]$ в случае нулевой гипотезы — $N(0, \sigma^2)$, в случае альтернативы — $N(\mu, \sigma^2)$. Отношение правдоподобия в этом случае имеет вид

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\ 0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\ \mu)} \leqslant C. \tag{64}$$

Известно (Уилкс, 1967), что величина

$$-2\ln\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\ 0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\ \mu)} \in \chi^2_{1\,\text{ст.св}}. \tag{65}$$

Учитывая нормальный характер $f(x_i)$, отношение правдоподобия можно преобразовать следующим образом

$$-2\ln\frac{\frac{1}{(2\pi\sigma)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-0)^2\right\}}{\frac{1}{(2\pi\sigma)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=i}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}} \in \chi^2_{1\,\text{ст.св}}. \tag{66}$$

После сокращения и последовательного преобразования левой части получаем

$$-2\ln\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)_2\right\}} = -2\ln\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]. \tag{67}$$

Заменив μ его оценкой, т. е. $\bar{x}$, получим

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left(2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}[x_i - n\bar{x}^2\right). \qquad (68)$$

Умножив и разделив выражение на n, придем к следующему:

$$\frac{n}{\sigma^2}\left(\frac{1}{n}\,2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\,n\bar{x}^2\right) = \frac{n}{\sigma^2}\,(2\bar{x}^2 - \bar{x}^2) = \frac{\bar{x}^2 \cdot n}{\sigma^2}. \qquad (69)$$

Полученная величина в условиях нулевой гипотезы распределена асимптотически как χ^2 с 1 степенью свободы. Заменим σ^2 его оценкой и обозначим критерий буквой W. Тогда

$$W = \frac{\bar{x}^2 \cdot n}{s^2}. \qquad (70)$$

Величина W в условиях нулевой гипотезы будет иметь распределение, асимптотически приближающееся к распределению χ^2 с одной степенью свободы. Критерий (70) предназначен для проверки гипотезы о равенстве математического ожидания нулю для стационарного случайного процесса $[\varphi(\delta) - \varphi'(\delta)]$, т. е. для случая *одномерного процесса.*

Для m-мерного случая критерий может быть получен также из отношения правдоподобия в предположении о независимости компонент. Основания для этого предположения приведены ниже. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ — векторы наблюдений, причем $X_i = \{x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ji}, \ldots, x_{mi}\}$, тогда

$$-2\ln\frac{\prod_{i=1}^{n} f(X, 0)}{\prod_{i=1}^{n} f(X, \mu)} \in \chi^2_{m\,\text{ст.св}}, \qquad \mu = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \mu_m\end{pmatrix}. \qquad (71)$$

После представления функций плотности в предположении о независимости компонент и сокращения подобных членов, получим

$$-2\ln\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i)'\,\Sigma^{-1}\,(X_i)\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)'\,\Sigma^{-1}\,(X_i - \mu)\right\}}. \qquad (72)$$

Вследствие диагональности матрицы Σ^{-1} имеем

$$-2\ln\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{ij}^2}{\sigma_j^2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_j^2}\,(x_{ji} - \bar{x}_j)^2\right\}} = -\left\{-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_j^2}\,x_{ij}^2 + \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_j^2}(x_{ji}-\bar{x}_j)^2\Bigg\}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sigma_j^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_{ji}^2-\sum_{i=1}^{n}(x_{ji}-\bar{x}_j)^2\right]. \quad (73)$$

После тех же преобразований и замен, что и в предыдущем случае, приходим к выражению

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\bar{x}_j^2\cdot n}{s_j^2}\in\chi^2_{m\ \text{ст.св}}. \quad (74)$$

Таким образом, если нулевые гипотезы (8) и (17) могут быть сведены к гипотезе о равенстве нулю математического ожидания разностного процесса, то для ее проверки может быть предложен простой критерий (70) в одномерном и (74) в многомерном случаях.

Настоящий раздел посвящен рассмотрению применимости критерия (70) для проверки нулевой гипотезы (8) и некоторым его особенностям. Одна из основных особенностей заключается в следующем. Условия практического применения критерия (70) таковы, что значения аргумента (условия, закрепленной случайной величины) для двух сравниваемых функций не совпадают. Отсюда возникает необходимость линейной интерполяции для значений ординат реализации хотя бы для одной случайной функции.

Первое и основное соображение, на котором базируется построенный критерий, что случайные функции типа «белого шума», к которым по высказанным выше соображениям предположительно относится случайная функция $\varphi(\delta)$ и соответственно $[\varphi(\delta)-\varphi'(\delta)]$, имеют асимптотически приближающееся к нормальному совокупное распределение ординат. Другими словами, оговоренные выше особенности случайных функций, на которых построен критерий, а именно их принадлежность к классу гауссовских процессов с независимыми значениями ординат служат основанием для абстрагирования от значений аргумента и перехода в построениях исключительно к совокупности значений ординат.

Остановимся теперь на одной особенности критерия (70), которая могла бы быть квалифицирована как его недостаток. Оценка этой особенности будет дана ниже. Рассмотрим случай двумерной регрессии в двух совокупностях: ξ_j на δ и ξ_j' на δ и примем для простоты, что в обоих случаях регрессия имеет линейный характер. Уравнения регрессии можно представить в следующем виде

$$Y_j(\delta)=\alpha+\beta(\delta), \quad (75)$$

$$Y_j'(\delta)=\alpha'+\beta'(\delta). \quad (76)$$

Рассмотрим критерий (70) при разных соотношениях коэффициентов уравнений регрессии (75) и (76).

Первый случай. $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$. Значение критерия W будет соответствовать принятию нулевой гипотезы о равенстве уравнений регрессии.

Второй случай. $\alpha\neq\alpha'$, $\beta=\beta'$. Гипотеза о равенстве уравнений регрессии отвергается, значение рассматриваемого критерия W также соответствует условиям справедливости альтернативы.

Третий случай. $\alpha=\alpha'$, $\beta\neq\beta'$. Гипотеза о равенстве уравнений регрессии отвергается, однако значение критерия (70) может принадлежать множеству значений его в условиях нулевой гипотезы.

Четвертый случай. $\alpha\neq\alpha'$, $\beta\neq\beta'$. В этих условиях отвергается гипотеза о равенстве уравнений регрессии, значения критерия (70) также принадлежат альтернативному множеству.

Очевидно, что в реальных объектах вид детерминированной компоненты очень часто отличается от линейного. Поэтому приведенные соотношения являются упрощением реально наблюдаемой зависимости компонент ξ_j от δ. При увеличении степени уравнения регрессии, аппроксимирующего реальную зависимость, возрастает число возможных ситуаций, подобных приведенным выше. Однако грубо все возможные ситуации можно свести к аналогичным четырем случаям: равенство всех коэффициентов, неравенство свободных членов при равенстве коэффициентов при независимой переменной, равенство свободных членов при существенном расхождении одного или более коэффициента при независимой переменной и, наконец, неравенство всех коэффициентов.

Рассмотрение приведенных выше соотношений критериев, основанных на сравнении коэффициентов регрессии, и предлагаемого автором, дает возможность сделать следующий вывод: в первом, втором и четвертом случаях критерий (70) приводит к тому же результату, что и критерии сравнения коэффициентов регрессии. Сомнителен третий случай. Здесь возможна такая ситуация, при которой положительные отклонения одной линии регрессии относительно другой будут компенсироваться отрицательными отклонениями, что приведет к равенству нулю среднего для случайной величины ζ_j, представляющей собой значения разностей $[Y_j(\delta)-Y_j'(\delta)]$ и $[\varphi(\delta)-\varphi'(\delta)]$ — в каждой точке $\delta\in U$.

Однако в рассматриваемом случае при продвижении от $\delta_{\min}$ к $\delta_{\max}$ значения ζ_j будут закономерно изменяться: последовательно возрастать и убывать по модулю, также закономерно будет изменяться знак. В случае прямолинейной зависимости ξ_j от δ (случай 3) такое убывание и возрастание будет наблюдаться один раз с одной сменой знака. При более сложных зависимостях таких участков убывания и возрастания можно зафиксировать несколько.

Можно предложить следующий метод выявления подобного поведения функции $\zeta(\delta)$ синдекс j для простоты опущен). Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_i, \ldots$ — последовательность случайных величин с $M(\zeta_i)=$

$=0$ и $M(\zeta_i)^2<\infty$. Обозначим $M(\zeta_i)^2$ — через σ_i^2 для простоты и примем $i=1, 2, ..., k, k+1, ..., n$. Тогда для данной последовательности можно сформулировать следующую нулевую гипотезу

$$H_0 : \sigma_k^2 = \sigma_{n-k}^2 \tag{77}$$

для всех $k=2, 3, ..., n-1$ при альтернативе

$$H_1 : \sigma_k^2 \neq \sigma_{n-k}^2, \tag{78}$$

хотя бы для одного $k=2, 3, ..., n-1$.

Нулевая гипотеза (77) дает возможность проверить предположение об однородности дисперсии для рассматриваемой последовательности относительно $M(\zeta_i)=0$. Принятие альтернативы позволяет предположить наличие хотя бы одного участка закономерного повышения значений $\zeta_i(\delta)$. Протяженность по δ и количество таких участков могут быть определены алгоритмом выделения однородных участков относительно $M(\zeta_i)^2=\sigma_i^2$, о котором речь будет идти несколько дальше.

Критерий для проверки нулевой гипотезы (77) был предложен автором раньше (Бондаренко, 1969) и построен на следующих предположениях.

Положим, что $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_i, ..., \zeta_k, \zeta_{k+1}, ..., \zeta_n$ — линейно упорядоченная последовательность независимых случайных величин. Причем ζ_i распределена как $N(\mu, \sigma_k^2)$ при $i\leqslant k$ и как $N(\mu, \sigma^2_{n-k})$ при $i>k$. Примем $\mu=0$. Будем считать дисперсию случайной последовательности однородной, если $\sigma_k^2=\sigma^2_{n-k}$ для всех $k=2, 3, ..., n-1$. Таким образом, дисперсию линейно упорядоченной случайной последовательности можно признать однородной в указанном выше смысле, когда гипотеза (77) не отклоняется для всех $k=2, ..., n-1$. Причем в условиях альтернативы (78) k неизвестно. Если эмпирическая последовательность $x_1, x_2, ..., x_n$ является последовательностью выборочных значений для $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$, тогда при нулевом среднем оценки дисперсий σ_k^2 и σ_{n-k}^2 соответственно равны:

$$\begin{gathered} s_k^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \\ s_{n-k}^2 \frac{1}{n-k-1}\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2. \end{gathered} \tag{79}$$

Тогда случайная величина

$$\frac{(s_k^2 - s_{n-k}^2)}{\sqrt{D(s_k^2)+D(s_{n-k}^2)}} \tag{80}$$

в условиях нулевой гипотезы (77) имеет приблизительно нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией, равной 1. Квадрат величины (80), следовательно, будет распределен приблизительно как χ^2 с одной степенью свободы.

На этом основании можно получить статистику для проверки нулевой гипотезы (77), принимая $\mu=0$.

Если для всех $n-3$ разбиений случайной последовательности из n членов на две части значения статистики

$$F_k=\frac{(n-1)^2}{2(n-2)(k-1)(n-k-1)}\cdot\left[\frac{(n-k-1)\sum\limits_{i=1}^{k}x_i^2-(k-1)\sum\limits_{i=k+1}^{n}x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}\right]^2 \qquad (81)$$

не превысят допустимого значения χ^2 для уровня значимости q и одной степени свободы, то случайную последовательность можно признать обладающей однородной дисперсией в указанном выше смысле. Можно считать, что в условиях альтернативы максимальному различию в дисперсиях последовательностей из k и $n-k$ членов отвечает максимальное значение критерия F_k.

Процедура выделения участков однородности σ_i^2 совпадает с процедурой, предложенной Д. А. Родионовым (1968) для линейно-упорядоченных последовательностей m-мерных наблюдений. Если $\max F_k>\chi^2_{q,\ 1\ \text{ст. св}}$, то последовательность неоднородна и разбивается на две подпоследовательности по максимуму F_k объемом k и $n-k$ членов. Для этих последовательностей проверяется нулевая гипотеза (77), и так до тех пор, пока не будет выполняться соотношение $\max F_k\leqslant\chi^2_{q,\ 1\ \text{ст. св}}$.

При анализе последовательности с помощью описанной процедуры может быть получено несколько значений $F_k>\chi^2_{q,\ 1\ \text{ст. св}}$. Однако возможна ситуация (Родионов, 1968 г.), когда некоторые из этих границ разделяют неразличающиеся по величине дисперсии подпоследовательности, т. е. так называемые «ложные границы». Д. А. Родионов в подобных случаях предлагает проводить процедуру устранения ложных границ. Процедура состоит в следующем. Положим, $F_k>\chi^2_{q,\ 1\ \text{ст. св}}$ разделяет две соседние подпоследовательности: $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ и $\zeta_{k+1}, \zeta_{k+2}, \ldots, \zeta_s$ с соответствующими дисперсиями σ_k^2 и σ_s^2. Определение ложности границы между приведенными подпоследовательностями осуществляется проверкой нулевой гипотезы $H_0:\sigma_k^2=\sigma_s^2$ при множестве альтернатив $H_1:\sigma_k^2\neq\sigma_s^2$. Нулевая гипотеза проверяется с помощью критерия (81) при фиксированных $k=n_k$, $n=n_k+n_s$ и $n-k=n_s$. В случае соответствия проверяемой нулевой гипотезы эмпирическим данным граница между подпоследовательностями $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ и $\zeta_{k+1}, \zeta_{k+2}, \ldots, \zeta_s$ признается ложной и устраняется. При установлении справедливости одной из множества альтернатив дисперсии подпоследовательностей признаются существенно различными, и граница, соответствующая значению критерия F_k, сохраняется. Процедура устранения ложных границ проводится для каждой пары соседних подпоследовательностей, разделенных значениями $F_k>\chi^2_{q,\ 1\ \text{ст. св}}$. После устранения ложных границ процедура разграничения последовательности на однородные относительно дисперсии участки заканчивается.

Несколько замечаний, касающихся применимости критерия (81) в рассматриваемом случае. Запишем $M(\zeta_i)^2$ следующим образом

$$M(\zeta_i)^2 = \mu^2 + D[\varphi(\delta) - \varphi'(\delta)], \tag{82}$$

где

$$\mu^2 = [Y(\delta) - Y'(\delta)]^2. \tag{83}$$

Если принять, что $D[\varphi(\delta) - \varphi'(\delta)] = \mathrm{const}$ для всей последовательности, то нулевую гипотезу (77) можно рассматривать как гипотезу об *однородности μ на всей области существования* $\delta \in U$. Предположим, что альтернатива (78) состоит в наличии закономерных колебаний в значениях μ для различных значений δ на некоторых участках последовательности $1 \div k$, $k+1 \div s$, $s+1 \div p, \ldots, t+1 \div n$, на каждом из которых $\mu = \mathrm{const}$. В этих условиях применима общая эргодическая теорема, которая в предположениях

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^2} \int\limits_T \int\limits_T K_x(t, t')\, dt dt' = 0, \tag{84}$$

$$m_x = \mathrm{const} \tag{85}$$

формулируется следующим образом: «Если математическое ожидание случайной функции постоянно, а корреляционная функция удовлетворяет условию (84), то среднее значение случайной функции по области T имеет пределом в среднем квадратическом математическое ожидание случайной функции» (Пугачев, 1962, с. 246). Приведенная теорема служит основанием для применения аппарата независимых случайных величин к оценке параметров случайной функции, поскольку по предположению функция $\varphi(\delta)$ удовлетворяет приведенным условиям.

Таким образом, рассмотренный алгоритм с учетом приведенных замечаний можно считать методом выявления участков с различным по величине математическим ожиданием (по модулю) разностного процесса.

Рассмотрим очень кратко возможность использования для проверки нулевой гипотезы (8) или (17) некоторых методов исследования случайных функций. В частности, широко известного (Тихонов, 1966; Прохоров, Розанов, 1967) критерия числа случайных выбросов гауссовского процесса за пределы некоторого уровня. Согласно сделанным ранее предположениям в условиях нулевой гипотезы (17) разностный процесс $[\varphi(\delta) - \varphi'(\delta)]$ представляет собой именно процесс Гауссовского типа с нулевым средним, конечной дисперсией и функцией корреляции $K_x(\delta_1, \delta_2)$. В этом случае среднее число случайных выбросов на интервале τ, принятом за единицу, и величине радиуса осреднения n может быть определено из выражения

$$N_1 = \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{1,96}{n}}. \qquad (86)$$

В выражении (86) число выбросов определяется для уровня $1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, что примерно соответствует вероятности случайного выброса около 0,05. Применение этого метода для целей проверки нулевой гипотезы (17) может быть осуществлено следующим образом. Если реальное число выбросов за пределы установленного уровня в единичном интервале превышает рассчитанную по формуле (86) величину, то можно считать, что эти выбросы порождены неслучайными причинами и нулевую гипотезу следует отвергнуть. Выражение (86) основано на представлении автокорреляционной функции процесса в виде

$$K(\tau) = \sigma^2 R(\tau), \quad R(\tau) = e^{a\tau^2}. \qquad (87)$$

В выражении (87) a — некоторая константа, а $\tau = \delta_2 - \delta_1$. Естественно, что, как и прежде, нами допускаются нормальность и стационарность разностного процесса и равенство нулю его математического ожидания в условиях нулевой гипотезы.

Рассмотренный метод эффективен для различения стационарных процессов (в условиях нулевой гипотезы) от процессов с частыми и большими (больше, чем установленный уровень $1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) отклонениями математического ожидания от нуля в условиях альтернативы. Однако для геологических объектов более типичен иной характер разностного процесса в условиях альтернативы, когда разность $[\varphi(\delta) - \varphi'(\delta)]$ не равна нулю. Отсюда следует, что разностный процесс в первую очередь будет иметь не нулевое математическое ожидание и не обязательно повышенное по сравнению с нулевым разностным процессом количество выбросов.

Для геологических приложений более важна фиксация небольших по величине, значительно меньших, чем установленный для критерия (86) уровень, но протяженных участков ненулевых значений разности $[\varphi(\delta) - \varphi'(\delta)]$. Именно это и учитывают альтернативы к нулевой гипотезе (17). Кроме того, применение выражения (86) предполагает оценку математического ожидания процесса скользящим окном, и величина выброса устанавливается относительно его оценки, а это может привести к потере небольших, но устойчивых участков ненулевых значений математического ожидания разностного процесса очень важных с геологических позиций. Отсюда очевидно, что альтернативные ситуации, существующие при использовании метода определения числа случайных выбросов и вытекающие из природы нулевой гипотезы (17), не совпадают по смыслу. Приведенные соображения не позволяют рекомендовать метод числа случайных выбросов для проверки сформулированной выше нулевой гипотезы (17).

В конце настоящего раздела следует отметить, что рассмотренные известные критерии проверки нулевой гипотезы (8) или (17) не могут быть рекомендованы для широкого применения к решению задач сравнительного анализа геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств. Основанием этого являются отмеченные выше особенности закономерной изменчивости свойств геологических объектов, очень часто не позволяющие задавать априори вид зависимости характеристик от значений ранжирующей компоненты. С другой стороны, выше предложен разработанный автором достаточно простой критерий проверки гипотезы о равенстве нулю математического ожидания случайной функции, представляющей собой значения разностного процесса в условиях нулевой гипотезы (8) или (17). В настоящем изложении показано, что несмотря на структуру критерия, использующего совокупное распределение ординат разностного процесса, этот критерий может быть использован для проверки нулевой гипотезы о равенстве многомерных условных средних (8).

Преимущества критерия (70), во-первых, в его простоте как в одномерном, так и в многомерном случаях, во-вторых, в инвариантности его к форме зависимости условного математического ожидания от условия (аргумента) и, в-третьих, в отсутствии требований к априорной известности этой формы. Все это, несмотря на отмеченные ранее особенности критерия W, позволяет рекомендовать критерий (70) для широкого использования при сравнительном анализе геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств (задачи первого типа).

ОБОСНОВАНИЕ ПРИНЯТОЙ В РАБОТЕ ПРОЦЕДУРЫ КЛАССИФИКАЦИИ

После рассмотрения критерия для проверки гипотезы о равенстве условных средних, соответствующего геологическим задачам сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа, необходимо привести и обосновать принятую в работе процедуру классификации на его основе. Рассматриваемая процедура классификации инвариантна ко всем статистическим методам решения задач сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств первого и второго типа.

В настоящей работе принята классификационная процедура, базирующаяся на отношении эквивалентности классифицируемых элементов в смысле приведенной выше нулевой гипотезы.

В качестве основы процедуры классификации принята мера сходства для формирования классов элементов (совокупностей). Мера сходства как основа классификации объектов с закономерной изменчивостью свойств в свете приведенных выше задач должна отвечать следующим условиям: а) симметричности, б) абсолютности числового выражения, в) тождественного равенства нулю в случае максимального сходства. Положенная в основу классификационной процедуры мера сходства отвечает перечисленным требованиям.

В качестве меры сходства в описываемой процедуре используется значение критерия W, *получаемое в результате проверки* нулевой гипотезы (8) по эмпирическим данным. Из предшествующего изложения известно, что в условиях справедливости нулевой гипотезы (8) распределение статистики W асимптотически приближается к χ^2-распределению. Особенности статистик, приводимых в условиях нулевой гипотезы к χ^2-распределению, достаточно четко сформулированы в работе Л. Н. Большева и Н. В.Смирнова (1965): «Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n$ взаимно независимы и подчиняются нормальному распределению с единичной дисперсией и отличными от нуля математическими ожиданиями, то распределение суммы

$$\chi_n^2(a) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$$

называют нецентральным распределением χ^2 с n степенями свободы и параметром нецентральности

$$a = (M\xi_1)^2 + (M\xi_2)^2 + \cdots + (M\xi_n)^2;$$

при $a=0$ это *распределение совпадает с обычным распределением* χ^2, т. е. $\chi_n{}^2(0) = \chi_n{}^2$». (Большев, Смирнов, 1965, с. 25).

Две совокупности многомерных условных случайных величин признаются сходными по данной мере сходства, если разности условных математических ожиданий по каждому признаку равны нулю. Отсюда следует, что параметр нецентральности распределения суммы значений критерия по каждому признаку будет равен нулю. Следовательно, значение критерия W в терминах выборочных совокупностей в рассмотренном случае может быть признано представляющим значение случайной величины, *распределенной как* центральный χ^2. Из сказанного ясно, что в рассматриваемой ситуации упомянутый в цитате параметр нецентральности представляет собой меру различия между двумя совокупностями многомерных условных случайных величин. Критерий W, как известно из предшествующего текста, построен на сумме эмпирических значений разности условных случайных величин при всех возможных заданных значениях условия, следовательно, *критерий W как мера сходства*, принятая в работе, удовлетворяет требованию симметричности. Получение итогового значения критерия W производится в результате нормирования, т. е. критерий W в качестве меры сходства отвечает и требованию выражения меры в абсолютных значениях. Очевидно, что значение критерия, принятого здесь в качестве меры сходства, будет тождественно равно нулю при сравнении объекта самого на себя. Все *это является основанием выбора критерия W в качестве* меры сходства и определяет место данной меры в общем множестве подобных мер.

Объединение объектов, признанных сходными в процедуре, производится по максимальному значению меры сходства с учетом, что абсолютным максимумом меры сходства является тождественное равенство ее нулю. Основой процедуры классификации служит матрица эмпирических значений критерия W. Граничное значение критерия W, определяющее сходство или несходство объектов, соответствует граничному значению отнесения вычисленной величины W в каждом конкретном случае, или к значениям, представляющим собой значение случайной величины, распределенной как центральный χ^2, или значениям представляющим собой значение случайной величины с нецентральным χ^2-распределением (естественно, что для данного числа степеней свободы и при выбранном уровне значимости).

Процедура классификации по мере сходства, применяемая в настоящей работе, в рецептурном плане может быть сформулирована следующим образом.

1. Попарное сравнение включенных в процедуру классификации объектов с позиций решения задач сопоставления объектов с закономерной изменчивостью свойств с применением одного из приведенных выше статистических методов, например (70), и получение матрицы эмпирических значений критерия W.

2. Выбор среди элементов полученной матрицы эмпирических значений минимального по величине значения W.

3. Сопоставление минимального элемента указанной матрицы с допустимым значением центрального χ^2-распределения с соответствующим числом степеней свободы при заданном уровне значимости q.

4. Если $\min W > \chi^2_{m,\,q}$, то процедура классификации заканчивается, и все совокупности, включенные в процедуру, признаются существенно отличающимися друг от друга в смысле сформулированной выше задачи сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств.

5. Если $\min W < \chi^2_{m,\,q}$, то объединяются две совокупности, сравнение которых привело к минимальному значению критерия W, что соответствует максимальному значению выбранной меры сходства среди всех рассматриваемых в данной процедуре пар объектов.

6. После объединения объектов, признанных максимально сходными по выбранной мере сходства в данном множестве объектов, приведенная в пунктах 1—5 процедура повторяется до выполнения условия: $\min W > \chi^2_{m,\,q}$.

В результате применения описанной классификационной процедуры из полного множества классифицируемых объектов формируются классы, в пределах каждого из которых объединены объекты, признанные сходными в принятом в данной работе смысле.

Близкий по смыслу принцип классификации рассмотрен в работе С. Кульбака (1967). Автор склонен считать, что принцип, лежащий в основе классификации, приведенной в работе этого исследователя, сопоставим с принципом классификации по максимуму меры сходства, принятому в настоящей работе. Это утверждение базируется на следующем. В заключение раздела, *посвященного классификации*, С. Кульбак *пишет:* «Если существуют две или более групп популяций, обозначаемые для удобства H_1, H_2, H_3, ..., то мы относим выборку к группе популяций с наименьшим из значений $\widehat{I}(*:H_1)$, $\widehat{I}(*:H_2)$, $\widehat{I}(*:H_3)$, ... Это означает, что мы относим выборку к той группе популяций, на которую наша выборка похожа больше всего, или против которой она дает меньшую различающую информацию» (с. 97). Нетрудно заметить, что термин «похожа больше всего» С. Кульбака тождествен термину «обладают наибольшим сходством», используемому нами.

Предложенная выше процедура классификации, если она базируется на попарных сопоставлениях с помощью критерия (70), в некоторых случаях может привести к неудовлетворительному результату. Подобные ситуации возникают, если в некоторых парах сопоставляемых объектов среди всего набора пар, участвующих в процедуре, число n на множестве U резко различно (примерно на порядок). В связи с влиянием n на значение критерия (70) числовое выражение критерия не всегда будет соответствовать соотношению истинных различий в сопоставляемых парах. Для ликвидации возможного несоответствия величины критерия (70) и истинных различий сопоставляемых объектов, относительно исследуемых характеристик, из-за резкого несовпадения порядка величины n в некоторых парах предлагается следующий выход.

Так, в рассматриваемой процедуре классификации попарные сопоставления рекомендуется производить с помощью критерия

$$W = \frac{\bar{z}_j^2 n}{s_j^2}. \tag{88}$$

В приведенном выражении $\bar{z}_j$ — среднее арифметическое эмпирических значений ζ_j, т. е. $z_{j1}, z_{j2}, \ldots, z_{jk}, \ldots, z_{jn}$. В рассматриваемом случае для каждой выборки осуществляется линейная интерполяция между соседними выборочными значениями ζ_j, а z_{jk} представляет собой расстояние между двумя интерполяционными линиями сравниваемых выборок в k-той заданной точке условия. Число этих точек на множестве U, т. е. n, определяется априори. Соотношения n и объемы сравниваемых выборочных совокупностей описаны в предыдущей нашей работе (1970). Подобная методика дает возможность задавать на множестве U для всех участвующих в классификации пар одно и то же количество эмпирических значений ζ_{ji}. Следовательно, во всех вычислениях критерия (88) для данной процедуры классификации будет участвовать одинаковое значение n, что исключает возможность влияния различных значений n на числовое выражение элементов матрицы, положенной в основу принятой здесь процедуры классификации.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СРАВНЕНИЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАКОНОМЕРНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТЬЮ СВОЙСТВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ТИПОВ БЕЗ РАЗДЕЛЕНИЯ

Критерий сравнения условных математических ожиданий (88), предложенный в предыдущем разделе, непосредственно не учитывает различия в форме тенденций изменения условного математического ожидания на множестве условия U. Подобные различия могут быть выявлены указанным критерием только опосредованно, через проверку однородности дисперсии разностного процесса и выделения однородных участков относительно этой дисперсии.

Ниже будут рассмотрены критерии, непосредственно учитывающие различия в виде детерминированных компонент случайных процессов — моделей вещественных характеристик геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств. С помощью этих критериев решается комплексная задача, объединяющая задачи первого и второго типов.

Метод сравнения условных средних в предположении двумерной нормальности совокупностей

В настоящем разделе рассмотрен статистический метод сравнения условных средних в предположении о двумерной нормальности случайной величины $\{\xi_j, \delta\}$ с попыткой обобщения этого метода на многомерный случай. Как и ранее в случайной величине $\{\xi_j, \delta\}$, одна из компонент является закрепленной. Нулевая гипотеза, для проверки которой предлагается изложенный ниже метод, может быть записана в следующем виде

$$H_0: M\left(\xi_j^{(1)} | \delta^{(1)} = d\right) = M\left(\xi_j^{(2)} | \delta^{(2)} = d\right) \tag{89}$$

для всех $d \in U$.

Множество альтернатив к этой нулевой гипотезе имеет вид

$$H_1: M\left(\xi_j^{(1)} | \delta^{(1)} = d\right) \neq M\left(\xi_j^{(2)} | \delta^{(2)} = d\right), \tag{90}$$

хотя бы для одного $d \in U$.

Положим, что две выборки (индекс j опущен) $(d_1^{(1)}, x_1^{(1)})$, $(d_2^{(1)}, x_2^{(1)}), \ldots, (d_k^{(1)}, x_k^{(1)}), \ldots, (d_{N_1}^{(1)}, x_{N_1}^{(1)})$ и $(d_1^{(2)}, x_1^{(2)})$, $(d_2^{(2)}, x_2^{(2)}), \ldots, (d_k^{(2)}, x_k^{(2)}), \ldots, (d_{N_2}^{(2)}, x_{N_2}^{(2)})$ отобраны независимо друг от друга из двумерной генеральной совокупности нормально распределенной случайной величины. Выборочные значения ранжированы по d, т. е. $d_1^{(1)} \leqslant d_2^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant d_k^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant d_{N_1}^{(1)}$ и $d_1^{(2)} \leqslant d_2^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant d_k^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant d_{N_2}^{(2)}$ и выборки разделены на g групп фиксированными значениями d_s, $s=1, 2, \ldots, i, \ldots, g+1$. Число наблюдений в группах случайно и равно $n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \ldots, n_i^{(1)}, \ldots, n_g^{(1)}$ и $n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \ldots, n_i^{(2)}, \ldots, n_g^{(2)}$, причем $n_i^{(1)} \neq n_i^{(2)}$, $n_i^{(1)} \neq n_{i+1}^{(1)}$ и возможно, что $n_i = 0$. Согласно Н. М. Митрофановой (Mitrofanova, 1961), в условиях принадлежности выборок одной генеральной совокупности

$$\bar{x}_i^{(1)} \in N\left\{m_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho\left(\bar{d}_i^{(1)} - m_1\right), \quad \frac{\sigma_2^2(1-\rho^2)}{n_i^{(1)}}\right\}, \tag{91}$$

$$\bar{x}_i^{(2)} \in N\left\{m_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho\left(\bar{d}_i^{(2)} - m_1\right), \quad \frac{\sigma_2^2(1-\rho^2)}{n_i^{(2)}}\right\}. \tag{92}$$

В выражениях (91) и (92)

$$\bar{x}_i^{(1)} = \frac{1}{n_i^{(1)}}\sum_{k=1}^{n_i^{(1)}} x_{ik}^{(1)}, \quad \bar{x}_i^{(2)} = \frac{1}{n_i^{(2)}}\sum_{k=1}^{n_i^{(2)}} x_{ik}^{(2)}, \tag{93}$$

$$\bar{d}_i^{(1)} = \frac{1}{n_i^{(1)}}\sum_{k=1}^{n_i^{(1)}} d_{ik}^{(1)}, \quad \bar{d}_i^{(2)} = \frac{1}{n_i^{(2)}}\sum_{k=1}^{n_i^{(2)}} d_{ik}^{(2)}, \tag{94}$$

$$m_1 = M(d), \quad m_2 = M(x), \quad \sigma_1^2 = D(d), \quad \sigma_2^2 = D(x). \tag{95}$$

Вслед за Н. М. Митрофановой обозначим через z_i величину $z_i = \bar{x}_i^{(1)} - \bar{x}_i^{(2)}$. В таком случае

$$M(z_i) = M\left(\bar{x}_i^{(1)}\right) - M\left(\bar{x}_i^{(2)}\right) = m_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho\left(\bar{d}_i^{(1)} - m_1\right) - m_2 -$$

$$- \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho\left(\bar{d}_i^{(2)} - m_1\right) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho\left(\bar{d}_i^{(1)} - \bar{d}_i^{(2)}\right). \tag{96}$$

Из выражения (96) следует, что при $\bar{d}_i^{(1)} = \bar{d}_i^{(2)}$ математическое ожидание z_i, т. е. $M(z_i)$ равно нулю. Дисперсия z_i, т. е. $D(z_i)$, соответственно равна

$$D(z_i) = D\left(\bar{x}_i^{(1)}\right) + D\left(\bar{x}_i^{(2)}\right) = \frac{\sigma_2^2(1-\rho^2)}{n_i^{(1)}} + \frac{\sigma_2^2(1-\rho^2)}{n_i^{(2)}} =$$

$$+ \frac{\sigma_2^2(1-\rho^2)\left(n_i^{(1)} + n_i^{(2)}\right)}{n_i^{(1)} \cdot n_i^{(2)}}. \tag{97}$$

Учитывая нормальное распределение величин $\bar{x}_i^{(1)}$ и $\bar{x}_i^{(2)}$ можно считать, что

$$z_i \in N\left\{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho\left(\bar{d}_i^{(1)} - \bar{d}_i^{(2)}\right), \quad \frac{\sigma_2^2(1-\rho^2)\left(n_i^{(1)} + n_i^{(2)}\right)}{n_i^{(1)} \cdot n_i^{(2)}}\right\}. \tag{98}$$

Отсюда величина

$$\frac{z_i - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho\left(\bar{d}_i^{(1)} - \bar{d}_i^{(2)}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_2^2(1-\rho^2)\left(n_i^{(1)} + n_i^{(2)}\right)}{n_i^{(1)} \cdot n_i^{(2)}}}} \tag{99}$$

принадлежит совокупности нормально распределенных случайных величин с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. В случае принадлежности рассматриваемых выборок одной генеральной совокупности математическое ожидание равно нулю для всех значений условия d. Это совпадает с требованием, описываемым нулевой гипотезой (89). Используя полученные результаты, можно предположить, что в условиях нулевой гипотезы (89) число

$$W = \frac{1}{s_2^2(1-r^2)} \sum_{i=1}^{g^*} \frac{\left[z_i - \frac{s_2}{s_1} r\left(\bar{d}_i^{(1)} - \bar{d}_i^{(2)}\right)\right]^2 \cdot n_i^{(1)} \cdot n_i^{(2)}}{n_i^{(1)} + n_i^{(2)}} \tag{100}$$

представляет собой значение случайной величины, распределенной приблизительно как χ^2 с g^* степенями свободы. В связи с тем что группы со значением $n_i=0$ исключаются из рассмотрения, если они расположены на краях последовательности, или объединяются с соседними, то число групп участвующих в суммировании (g^*) может быть менее первоначального (g).

Несколько замечаний к предложенному методу. Известно, что суммирование условных величин является не вполне корректной операцией. Еще можно допустить суммирование подобных величин при фиксированных значениях условия. Так, например, если заменить в выражении (100) скобку $\left[z_i = \frac{s_2}{s_1} r\left(\bar{d}_i^{(1)} - \bar{d}_i^{(2)}\right)\right]^2$ на z^2, то в каждой группе условие будет зафиксировано и приравнено к середине интервала значений d. В этом случае суммирование значений критерия для всех интервалов приобретает большую корректность, однако теряется поправка на несовпадение средних значений d в интервале для первой и второй выборки. При пологих линиях регрессии этой поправкой можно пренебречь, однако с увеличением значения коэффициента регрессии и разности $(\bar{d}_i^{(1)} - \bar{d}_i^{(2)})$ ошибка при вычислении z_i будет возрастать.

Кроме того, остается неясным вопрос о количестве интервалов, на которые следует разбивать сопоставляемые совокупности. Очевидно, что количество интервалов g зависит от N_1, N_2 и размаха значений d, т. е. от величины области существования множества U. Согласно результатам П. К. Махаланобиса (Mahalanobis, 1959), площадь области различия между оценками условных математических ожиданий будет уменьшаться статистически пропорционально $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $(n_i^{(1)} = n_i^{(2)} = n)$ при постоянном g. Это означает, что при постоянных N_1 и N_2 уменьшение числа интервалов нивелирует различия между сопоставляемыми случайными величинами. Следовательно, проблема числа наблюдений (N_1 и N_2) и числа интервалов может быть поставлена в зависимость от величины минимальных различий между условными математическими ожиданиями, которые исследователь считает необходимым выявить. Эта проблема не тривиальна и требует специальных исследований.

Рассмотренный метод предполагает, что известен вид зависимости ξ_j от δ, и она имеет линейный вид. Это существенно ограничивает область возможных применений предложенного метода.

В выражении критерия (100) разность между оценками условных средних, т. е. между $\bar{x}_i^{(1)}$ и $\bar{x}_i^{(2)}$, входит во второй степени. Это означает, что независимо от знака z_i значения $z_i^{(2)}$ суммируются по всем группам. Такое положение приводит к возможности ошибочного отклонения нулевой гипотезы (88) в случае, когда z_i имеет переменный знак, т. е. значения оценок условных средних случайно колеблются друг около друга. Слово «ошибочно» *относится к задачам сравнений геологических объектов* с закономерной изменчивостью свойств первого типа, и никак нельзя признать ошибочным отклонение нулевой гипотезы (89) в случае, когда колебания в знаке z_i порождены закономерными различиями формы детерминированной компоненты в двух сравниваемых совокупностях. Именно эта особенность критерия и обусловила отнесение рассмотренного метода к группе методов решения задач сравнения геологических последовательностей первого и второго типа без разделения.

Необходимо учитывать, что при построении критерия (100) предполагается равенство безусловных дисперсий сопоставляемых совокупностей и по аналогии с регрессионным анализом — однородность условной (остаточной) дисперсии на всей области определения множества.

В итоге следует отметить, что приведенные выше ограничения не позволяют рекомендовать рассмотренный метод для широкого внедрения в практику геологических исследований. Однако в некоторых конкретных ситуациях предложенный критерий может быть использован для сравнения геологических последовательностей с большим успехом, чем методы сравнения регрессионных прямых, так как он имеет значительно более простой переход к многомерному случаю.

Рассмотрим обобщение указанного критерия на многомерный случай. Положим, что в нашем распоряжении имеются выборочные совокупности $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, ..., $X_k^{(1)}$, ..., $X_{N_1}^{(1)}$ и $X_1^{(2)}$, $X_2^{(2)}$, ..., $X_k^{(2)}$, ..., $X_{N_2}^{(2)}$, где $X_k = \{d_k,\ x_{1k},\ x_{2k}, \dots, x_{jk}, \dots, x_{mk}\}$, отобранные из *генеральных совокупностей* значений случайных величин $\Xi^{(1)}$ и $\Xi^{(2)}$, $\Xi = \{\delta,\ \xi_1,\ \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_m\}$, причем предполагается, что комбинации каждой из m компонент $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_m$ с δ имеют двумерное нормальное распределение. На этих предположениях основано обобщение критерия (100) на многомерный случай, т. е. для проверки нулевой гипотезы

$$H_0 : M\,(\Xi^{(1)} \mid \delta^{(1)} = d) = M\,(\Xi^{(2)} \mid \delta^{(2)} = d) \qquad (101)$$

для всех $d \in U$

при множестве альтернатив

$$H_1 : M(\Xi^{(1)} | \delta^{(1)} = d) \neq M(\Xi^{(2)} | \delta^{(2)} = d), \tag{102}$$

хотя бы для одного $d \in U$.

Учитывая изложенное выше, нулевую гипотезу (101) можно записать в виде (10).

Очевидно, что компоненты ξ_j и ξ_{j+1} зависимы, однако вполне допустимо предположить, что компоненты $\zeta_j = \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}$ и $\zeta_{j+1} = \xi_{j+1}^{(1)} - \xi_{j+1}^{(2)}$ независимы друг от друга. Это с точки зрения автора естественное предположение дает возможность простого обобщения критерия (100) на многомерный случай. Если нулевая гипотеза (101) верна, то число

$$W = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{s_j^2 (1 - r_j^2)} \sum_{i=1}^{g^*} \frac{\left[z_{ji} - \frac{s_j}{s_1} \cdot r_j \left(\bar{d}_i^{(1)} - \bar{d}_i^{(2)} \right) \right]^2 \cdot n_i^{(1)} \cdot n_i^{(2)}}{n_i^{(1)} + n_i^{(2)}} \tag{103}$$

представляет собой значение случайной величины, распределенной приблизительно как χ^2 с mg^* степенями свободы. Критерий (103) можно записать в более простом виде

$$W = \sum_{j=1}^{m} W_j, \tag{104}$$

где W_j — значение критерия (100) для j-той компоненты.

В случае большого числа степеней свободы для критерия (103) проверку нулевой гипотезы удобнее производить с помощью преобразованного критерия, использующего нормальное приближение для χ^2-распределенных величин (Родионов, 1968). В условиях нулевой гипотезы (101) число

$$t = \frac{W - mg^*}{\sqrt{2mg^*}} \tag{105}$$

представляет собой значение случайной величины, распределенной асимптотически нормально с параметрами 0 и 1. Условия применения критерия (103) те же, что и перечисленные в предшествующем изложении.

Как видно из изложенного, важным достоинством предложенного выше критерия является наиболее простой переход к многомерному случаю, что дает возможность рекомендовать его в тех ситуациях, когда выполняются некоторые из приведенных выше ограничений.

Методы сравнения условных средних в различных предположениях относительно условной дисперсии

Предлагаемые ниже статистические критерии проверки нулевой гипотезы (8) относятся к тому же классу критериев, что и рассмотренные в предыдущем разделе, т. е. критерии (100) и

(103), только в них отсутствует предположение о форме зависимости условных математических ожиданий на множестве значений условия (аргумента случайной функции). Кроме того, разработанные критерии учитывают практически весь спектр возможных соотношений условной дисперсии как в сравниваемых совокупностях, так и в каждой из них на множестве значений условия (аргумента).

Исходные посылки близки приведенным в предшествующем параграфе. Рассмотрим первоначально одномерный вариант, одномерный в смысле наличия одной компоненты, ранжированной по значению аргумента, или по значению закрепленной случайной величины. Для того чтобы построить критерий проверки гипотезы (8), обозначим $\{\xi_j, \delta\}$ одну из сравниваемых совокупностей и $\{\xi_j'\delta'\}$ — вторую. Естественно, что в данном случае не вводится никаких предположений относительно распределения указанных случайных величин, т. е. они могут быть представлены скорее в виде случайных функций $\xi(\delta)$ и $\xi'(\delta)$* и в каждой из них присутствует детерминированная компонента неизвестного вида.

Разделим ось значений условия (аргумента) δ *в области* U (свойства области U известны) на g интервалов. Вопрос о числе интервалов обсужден ранее. Следует отметить, что если исследуемые детерминированные компоненты имеют гармоническую составляющую (или близки к таковой) и их гармоники находятся в противофазе, то мы имеем некоторое число пересечений детерминированных компонент. В этом случае можно принять, что превышение числа интервалов над числом пересечений должно быть близко к двум. Далее пусть все выборочные значения первой и второй последовательностей, т. е. $\xi(\delta)$ и $\xi'(\delta)$, попавшие в i-тый интервал, будут отнесены к середине интервала.

Таким образом, в каждом из g интервалов будут существовать выборочные значения случайных величин. Здесь используется понятие о «вертикальном окне» (Крамер, Лидбеттер, 1961), в котором существует случайная величина с условным распределением, определяемым его шириной и положением на оси условия, т. е. на множестве U. Продолжая рассмотрение вопроса о количестве интервалов дискретизации, следует упомянуть рекомендацию С. А. Айвазяна (1968): возможно, она может быть принята и в рассматриваемом случае. Формула для определения качества интервалов приводится С. А. Айвазяном в разделе «генеральная совокупность — выборка» и сопровождается указанием, что «часто удобнее, с точки зрения упрощения дальнейшей статистической обработки результатов наблюдения, перейти к так называемым «сгруппированным» выборочным данным». (Айвазян, 1968, с. 15). Конкретная рекомендация цитируемого автора заключается в следующем: «2. Весь обследованный диа-

---

* Знак апострофа (′) при δ в обозначении $\xi'(\delta)$ опущен, так как он не имеет принципиального значения.

пазон $[x_{\min}(n), x_{\max}(n)]$ разбивается на определенное число k равных интервалов группирования. При этом количество интервалов не должно быть меньше 8—10 и больше 20—25. Выбор количества интервалов существенно зависит от объема выборки n; для примерной ориентации в выборе k можно пользоваться приближенной формулой

$$k = \log_2 n + 1,$$

которая дает, как правило, несколько заниженное значение для k, особенно при больших n» (там же, с. 15—16).

В настоящей работе принято, что эту формулу можно использовать как приближенную и в рассматриваемом случае, так как вопрос числа интервалов, в частности при вычислении корреляционного отношения, автором цитируемой работы больше не обсуждается. Другими словами, С. А. Айвазян считает приведенную формулу определения числа интервалов применимой и в регрессионном анализе.

Представим m случайных величин первой совокупности, выборочные значения которых находятся в g интервалах, в виде *g-мерной случайной величины*. Такое представление вполне допустимо с позиций известного представления случайного процесса в виде многомерной случайной величины, размерность которой равна числу состояний процесса (Крамер, 1975; Тихонов, 1966). Аналогично поступим и со второй совокупностью, т. е. представим набор g случайных величин в виде g-мерной случайной величины. Таким образом, мы имеем две g-мерных случайных величин Ξ и Ξ', где $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_g\}$. Для удобства перейдем от векторов случайных величин $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_g\}$ и $\{\xi_1', \xi_2', ..., \xi_g'\}$ к вектору случайных величин $\{\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_g\}$, где $\zeta_i = \xi_i - \xi_i'$. И согласно свойствам математического ожидания и дисперсии $M\zeta_i = M\xi_i - M\xi_i'$, а $D\zeta_i = D\xi_i + D\xi_i'$. Естественно, что в условиях сформулированной выше нулевой гипотезы все g разностей $M\xi_i - M\xi_i'$ будут равны нулю, т. е. g-мерный вектор

$$MZ = \begin{pmatrix} M\zeta_1 \\ M\zeta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M\zeta_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (106)$$

Учитывая предшествующее изложение и результаты других исследователей (Mitrofanova, 1961), можно утверждать, что ζ_i попарно независимы. С учетом изложенных предположений приведенной выше нулевой гипотезе можно поставить в соответствие нулевую гипотезу об однородности всех $M\zeta_i$ и равенстве их нулю. Для проверки такой нулевой гипотезы известен критерий С. Кульбака (1967), построенный на информационных мерах. Используя этот критерий в качестве основы, можно получить аналогичную статистику, учитывающую особенности рассмотренного случая.

Обозначим через z_i выборочное значение величины ζ_i. Тогда статистика С. Кульбака (1967, с. 108) будет иметь вид

$$\hat{I}(*: H_2(\mu|\sigma^2)) = \sum_{i=1}^{g} (z_i - \bar{z})^2/\sigma^2 + g(\bar{z} - \mu)^2/\sigma^2. \tag{107}$$

Согласно С. Кульбаку, выражение $\hat{I}(*: H_2(\mu/\sigma^2))$ обозначает статистику минимума различающей информации для проверки нулевой гипотезы $H_2(\mu/\sigma^2)$, которая является пересечением двух гипотез: гипотезы о принадлежности выборок однородной совокупности (1) и гипотезы о том, что математическое ожидание однородной совокупности равно μ (2).

Учитывая, что $\mu=0$, переходим к следующему выражению

$$\sum_{i=1}^{g} (z_i - \bar{z})^2/\sigma^2 + g(\bar{z})^2/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{g}\left(z_i^2 - 2z_i\bar{z} + \bar{z}^2\right) + g\bar{z}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{g} z_i^2 - 2\bar{z}\sum_{i=1}^{g} z_i + g\bar{z}^2 + g\bar{z}^2\right] = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{g} z_i^2 - 2\bar{z}\sum_{i=1}^{g} z_i + 2g\bar{z}^2\right]. \tag{108}$$

Умножив и разделив выражение на g, получим

$$\frac{g}{\sigma^2}\left[\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} z_i^2 - 2\bar{z}\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} z_i + 2\bar{z}^2\right] = \frac{g}{\sigma^2}\left[\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} z_i^2 - 2\bar{z}^2 + 2\bar{z}^2\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{g} \frac{z_i^2}{\sigma^2}. \tag{109}$$

В связи с тем что в каждом из интервалов находится разное количество выборочных значений, все приведенное выше возможно, если z_i есть разность между эмпирическими значениями средних в интервалах, т. е. $\bar{z}_i = \bar{x}_i - \bar{x}_i'$. Отсюда очевидно, что $\sigma^2 = \sigma^2_{\bar{x}_i} + \sigma^2_{\bar{x}'_i}$. Следовательно, выражение для статистики (обозначим ее W) с использованием выборочных характеристик примет следующий вид

$$W = \sum_{i=1}^{g} \frac{z_i^2}{\frac{s_i^2}{n_i} + \frac{s_i'^2}{n_i'}} = \sum_{i=1}^{g} \frac{z_i^2 n_i n_i'}{s_i^2 n_i' + s_i'^2 n_i}. \tag{110}$$

В условиях нулевой гипотезы (12) число (110), согласно результатам С. Кульбака (1967), представляет собой значение случайной величины, распределенной асимптотически как χ^2 с g степенями свободы. Собственно говоря, приведенная статистика есть не что иное как вариант возведенного в квадрат критерия расового сходства К. Пирсона (Миллер, Кан, 1965). При выведении выражения критерия (110) использована статистика С. Кульбака, предполагающая равенство дисперсий для всех ζ_i. Однако в «критерии расового сходства» К. Пирсона требование равенства дисперсий во всех сравниваемых совокупностях не вводится. Предполагается, что дисперсии могут быть различными.

При всех обстоятельствах как критерий С. Кульбака (107), так и «критерий расового сходства» предназначены для проверки гипотез об однородности средних набора независимых случайных величин. Учитывая даже указанную выше независимость z_i, критерий (110) все-таки предназначен для проверки гипотезы о равенстве условных средних. Возможно ли это? Вопрос этот имеет несколько аспектов.

Первый аспект — возможность использования статистик, предназначенных для сравнения независимых случайных величин, для проверки гипотез относительно параметров случайных функций. В нашем случае последовательный набор оценок групповых (условных) средних, т. е. $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_g$ и соответственно $\bar{x}_1', \bar{x}_2' ...,$ $\bar{x}_g'$ является не чем иным как дискретизированной оценкой условного математического ожидания первой и второй последовательностей соответственно на всем множестве U. Нет сомнения, что элементы этих наборов, т. е. $\bar{x}_i$ и $\bar{x}_{i+1}$ и соответственно $\bar{x}_i'$ и $\bar{x}'_{i+1}$, зависимы в случае наличия детерминированных компонент в исследуемых последовательностях. Предлагая критерий (110) для проверки нулевой гипотезы (12), автор учитывал следующие положения. В условиях нулевой гипотезы (12) и перехода от оценок групповых средних $\bar{x}_i$, $\bar{x}_i'$ к величине $z_i = \bar{x}_i - \bar{x}_i'$ влияние закономерного изменения условного математического ожидания на величины практически исключается и они признаются попарно независимыми. Оценки $\bar{x}_i$, $\bar{x}_i'$ являются случайными величинами, их разность z_i также является случайной величиной, и в условиях нулевой гипотезы (12) все z_i являются независимыми (Mitrofanova, 1961). В условиях альтернативы (13) естественно не выполняется условие независимости z_i, но в этом нет необходимости.

Второй аспект рассматриваемого вопроса заключается в возможности суммирования условных случайных величин, поскольку величины ζ_i по своему характеру являются условными и также условными являются их выборочные значения, т. е. z_i. Ранее уже отмечалось, что суммирование условных случайных величин при не фиксированном условии не корректно. В рассматриваемом случае условия фиксированы, что дает возможность предполагать асимптотическое приближение критериев, построенных на процедуре суммирования условных случайных величин, к распределению, известному в подобном случае для безусловных случайных величин. Вопрос о возможной потере мощности критериев в данном конкретном случае обсуждается ниже. Все это позволяет автору считать возможным применение статистики (110) для проверки нулевой гипотезы (12).

Критерий (110) достаточно легко обобщается на многомерный случай. Основания для этого перехода близки к изложенным в предыдущем разделе. В первую очередь, учитывая свойства распределения χ^2, которое *воспроизводит само* себя (Большев, Смирнов, 1965). Кроме того, предполагается независимость не только между z_i для одного признака, но и всех z_{ji} ($j=1, 2, ..., m$) для всех m признаков. Отсюда критерий для проверки нулевой гипотезы (10) будет иметь вид

$$W = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{g} \frac{z_{ji}^2 \cdot n_i \cdot n_i'}{s_{ji}^2 \cdot n_i' + s_{ji}'^2 \cdot n_i}. \tag{111}$$

В условиях нулевой гипотезы (10) число W является значением случайной величины распределенной приблизительно как χ^2 с mg степенями свободы.

s_i^2 и $s_i'^2$ являются оценками условной дисперсии при фиксированном значении условия. Очевидно, что критерий (110) не требует наложения каких-либо ограничений на условную дисперсию, поэтому его можно назвать критерием без каких-либо предположений относительно условной дисперсии. Ниже приводятся критерии с различными предположениями относительно условной дисперсии. Что касается исходных положений для получения приведенных ниже статистик, то они идентичны высказанным ранее при выводе критерия (110), поэтому здесь не приводятся.

Допустим, что во всех g группах, на которые подразделено множество значений условия δ, т. е. U, выполняется требование равенства условных дисперсий для обоих сравниваемых последовательностей, т. е. выполняется условие $\sigma_i^2 = \sigma_i'^2$ для всех $i = 1, 2, ..., g$. Тогда критерий для проверки нулевой гипотезы (12) будет иметь вид

$$W_j = \sum_{i=1}^{g} \frac{z_{ji}^2 \cdot n_i \cdot n_i'}{s_{ji}^2 (n_i + n_i')}. \tag{112}$$

В случае справедливости нулевой гипотезы число W является значением случайной величины распределенной приблизительно как $\varkappa^2$ с g степенями свободы. В многомерном случае, т. е. для проверки нулевой гипотезы (10), критерий принимает вид

$$W = \sum_{j=1}^{m} W_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{g} \frac{z_{ji}^2 \cdot n_i \cdot n_i'}{s_{ji}^2 (n_i + n_i')}, \tag{113}$$

который в условиях нулевой гипотезы является значением случайной величины, распределенной приблизительно как $\varkappa^2$ с mg степенями свободы.

В условиях предположения об однородности условной дисперсии в обеих совокупностях, т. е. когда $\sigma^2 = const$ и $\sigma'^2 = const$ на всем множестве U, и, кроме того, выполняется предположение $\sigma_i^2 = \sigma_i'^2$, для проверки нулевой гипотезы (12) может быть использован критерий

$$W_j = \frac{1}{s_j^2} \sum_{i=1}^{g} \frac{z_{ji}^2 \cdot n_i \cdot n_i'}{n_i + n_i'}. \tag{114}$$

В случае справедливости гипотезы (12) число W_j, определенное формулой (114), представляет собой значение случайной величины, распределенной приблизительно как χ^2 с g степенями свободы. Проверка нулевой гипотезы (10), т.е. в многомерном случае, может быть осуществлена с помощью статистики

$$W = \sum_{j=1}^{m} W_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{s_j^2} \sum_{i=1}^{g} \frac{z_{ji}^2 \cdot n_i \cdot n_i'}{n_i + n_i'}, \tag{115}$$

которая в условиях нулевой гипотезы является значением случайной величины, распределенной асимптотически как χ^2 с mg степенями свободы.

Для всех приведенных выше критериев действительны все положения, касающиеся числа интервалов дискретизации множества U, приведенные выше.

Для критерия (110) существует ограничение на его использование, заключающееся в необходимости выполнения требования $n_i \geqslant 2$. Все другие наложенные на применение критериев условия приведены в каждом конкретном случае.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СРАВНЕНИЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАКОНОМЕРНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТЬЮ СВОЙСТВ ВТОРОГО ТИПА

В разделе рассматриваются статистические методы проверки нулевой гипотезы (20). Построение критериев проверки указанной гипотезы наиболее сложно и обосновано слабо. Однако проверка приведенных ниже критериев на фактическом материале приводит к устойчивым результатам и, кроме того, важность геологических задач, решаемых с помощью этих критериев, позволяет надеяться, что строгое обоснование этих или аналогичных по целям критериев дело недалекого будущего. В настоящее же время ничего более обоснованного, чем предложенные критерии, не известно в литературе, посвященной применению математических методов в геологии.

Как уже отмечалось, в настоящей работе детерминированные компоненты случайных функций поставлены в соответствие условным математическим ожиданиям множеств случайных величин, распределение которых определяется значением некоторой случайной величины (условия). Последнюю по аналогии с регрессионным анализом (Айвазян, 1968; Уилкс, 1967) можно считать «закрепленной».

При выводе приведенных ниже критериев автором приняты следующие предположения, не нарушающие смысла ни нулевой гипотезы, ни характерных особенностей сопоставляемых компонент.

1. Параметр вида $M\{M(\xi|\delta=d)\}$ можно рассматривать как определяющий центр тяжести всех значений $M(\xi|\delta=d)$ на множестве U.

2. Центрирование условных математических ожиданий, т. е. $M(\xi|\delta=d)$, параметром $M\{M(\xi|\delta=d)\}$ в сопоставляемых совокупностях приводит в случае двух совокупностей к ситуации, аналогичной той, которая возникает при аппроксимации условных математических ожиданий уравнениями регрессии и их сопоставлении в условиях равенства свободных членов этих уравнений.

3. Возвращаясь к аналогии с регрессионным анализом, нулевую гипотезу (20) можно рассматривать как гипотезу о равенстве всех угловых коэффициентов уравнений регрессии без задания априори их числа и вида. Другими словами, проверяется предположение о равенстве скорости изменения компоненты в двух совокупностях на любом из интервалов значений условия из множества U.

Критерии проверки нулевой гипотезы (20) предлагаются в двух вариантах: первый вариант предусматривает разбиение множества U на g интервалов по значению $\delta \in U$, второй вариант не требует предварительного разбиения $\delta \in U$ на интервалы. Достоинства и недостатки каждого из вариантов приведены ниже.

Методы сравнения закономерной изменчивости свойств с применением интервалов дискретизации

Исходная информация для применения приводимых ниже критериев подготавливается процедурой, аналогичной описанной выше при выводе критериев (100), (110), (112) и (114). Различие заключается в следующем. При решении задач, рассматриваемых в настоящем разделе, т. е. при проверке гипотезы (20), величина z_i, вводимая в критерий, имеет несколько иной вид. Если в указанных выше критериях $z_i = \bar{x}_i - \bar{x}_i'$, то в данном случае $z_i = (\bar{x}_i - \widehat{M}\xi) - (\bar{x}_i' - \widehat{M}\xi')$, т. е. z_i является разностью центрированных оценок групповых средних.

Для проверки нулевой гипотезы (20) предлагаются следующие критерии, построенные в различных предположениях.

Для случая, когда условные математические ожидания могут быть аппроксимированы линейной моделью, а условные дисперсии в двух совокупностях равны и однородны на всем множестве U, проверку нулевой гипотезы можно осуществить с помощью статистики

$$W=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{s_j^2\left(1-r_j^2\right)}\sum_{i=1}^{g^*}\frac{\left[z_{ji}-\frac{s_j}{s_1}\cdot r_j\cdot\left(\bar{d}_i^{(1)}-\bar{d}_i^{(2)}\right)\right]^2\cdot n_i^{(1)}\cdot n_i^{(2)}}{n_i^{(1)}+p_i^{(2)}}. \quad (116)$$

В приведенном выражении все обозначения соответствуют таковым для (103), кроме z_i, которое в формуле (116) равно $z_{ji}=(\bar{x}_j^{(1)}-\widehat{M}\xi_j^{(1)})-(\bar{x}_j^{(2)}-\widehat{M}\xi_j^{(2)})$, в отличие от (103), где $z_{ji}=\bar{x}_{ji}^{(1)}-\bar{x}_{ji}^{(2)}$. Число (116) в условиях нулевой гипотезы (20) представляет собой значение случайной величины, распределенной приблизительно как χ^2 с mg^* степенями свободы.

В условиях отсутствия каких-либо предположений относительно формы зависимости условного математического ожидания от значений условия и каких-либо ограничений на условную дисперсию для проверки гипотезы (20) следует применять приведенный ниже критерий

$$W=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{g}\frac{z_{ji}^2\cdot n_i\cdot n_i'}{s_{ji}^2\cdot n_i'+s_{ji}'^2\cdot n_i}. \quad (117)$$

Все обозначения в формуле (117) отвечают таковым для выражения (111), кроме z_{ji}. Здесь z_{ji}, как и в предыдущей формуле, имеет вид $z_{ji}=(\bar{x}_{ji}-M\xi_j)-(\bar{x}_{ji}'-M\xi_j')$. В случае справедливости нулевой гипотезы (20) число (117) представляет собой значение случайной величины, распределенной приблизительно как χ^2 с mg степенями свободы.

Предположение о равенстве условной дисперсии в одноименных группах сравниваемых совокупностей дает возможность использовать критерий

$$W=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{g}\frac{z_{ji}^2\cdot n_i\cdot n_i}{s_{ji}^2\left(n_i+n_i'\right)}, \quad (118)$$

где $z_{ji}=(\bar{x}_{ji}-\widehat{M}\xi_j)-(\bar{x}_{ji}'-\widehat{M}\xi_j')$, а остальные обозначения идентичны приведенным выше (см. формулу (112)). В условиях нулевой гипотезы (20) W представляет собой значение случайной величины, распределенной приблизительно как χ^2 с mg степенями свободы.

Последний критерий из первого варианта критериев для проверки нулевой гипотезы (20) построен в предположении о равенстве условных дисперсий в сопоставляемых совокупностях и ее однородности на всем множестве U.

$$W=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{s_j^2}\sum_{i=1}^{g}\frac{z_{ji}^2\cdot n_i\cdot n_i'}{n_i+n_i'}, \quad (119)$$

где $z_{ji}=(\bar{x}_{ji}-\widehat{M}\xi_j)-(\bar{x}_{ji}'-\widehat{M}\xi_j')$, а остальные обозначения совпадают с аналогичной формулой (115). Число (119) в условиях нулевой гипотезы представляет собой значение случайной величины, распределенной приблизительно как χ^2 с mg степенями свободы.

Применение критериев сравнения форм детерминированных компонент, основанных на дискретизации множества U, базируется на следующих положениях. Из регрессионного анализа известно (Айвазян, 1968), что оценка вида зависимости случайной величины от «закрепленной» с помощью групповых средних наиболее надежна. Доказательством этого является, в частности, критерий правильности подбора модели регрессии, приведенный в указанной работе С. А. Айвазяна:

$$v^2 = \frac{(n-k)\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \left| y_i - \widehat{Y}\left(x_i^0\right)\right|^2}{(k-g)\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{m_i} \left| y_{ij} - \bar{y}_i\right|^2}. \qquad (120)$$

В приведенном выражении n — общее число наблюдений в выборке, k — число интервалов дискретизации, m_i — число наблюдений в i-том интервале, g — число независимых параметров (оцениваемых по выборке), от которых зависит вид эмпирической линии регрессии, $\widehat{Y}(x_i^0)$ — оценка значения y, полученная из уравнения регрессии данной формы для середины i-того интервала значений «закрепленной» величины x_i^0, $\bar{y}_i$ — оценка среднего для i-того интервала, y_{ij} — реальные наблюдения в i-том интервале.

Из выражения (120) следует, что в качестве меры правильности выбранной модели принято отношение условной дисперсии модели к эталонной условной дисперсии групповых средних. Это служит основанием для приведенного выше положения, что оценка линии регрессии, или детерминированной компоненты случайной функции, или условного математического ожидания с помощью дискретизации множества U на интервалы определенных значений условия является, по крайней мере более надежной.

Однако при этом возникает вопрос о числе интервалов дискретизации. Выше уже отмечалось, что эта проблема не тривиальна; отметим лишь еще некоторые аспекты этой проблемы, не рассмотренные ранее и касающиеся именно оценки формы поведения условного математического ожидания в зависимости от значения условия. Примем, что N_1 и N_2 достаточно велики и не будем касаться вопроса обеспеченности интервалов достаточным числом наблюдений. Выделение на всем множестве двух интервалов равносильно наиболее грубой оценке тенденций изменения условного математического ожидания с помощью прямой линии. Кроме того, слишком дробная дискретизация, например, на чис-

Рис. 6. Оценка автокорреляционной функции для TiO_2 в эмпирической последовательности, ранжированной по содержанию SiO_2 и представляющей породы неогеновых эффузивов Камчатки

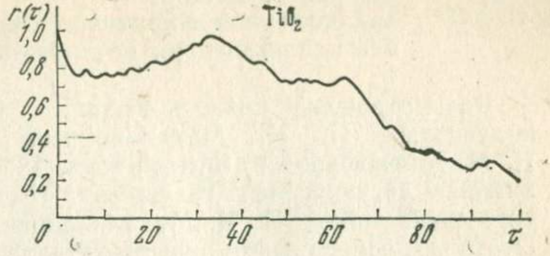


Рис. 7. Оценка автокорреляционной функции для суммарного железа в эмпирической последовательности, ранжированной по содержанию SiO_2 и представляющей породы неогеновых эффузивов Камчатки

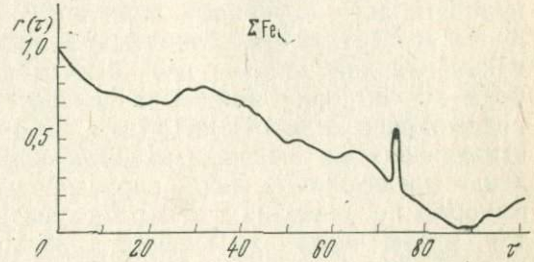
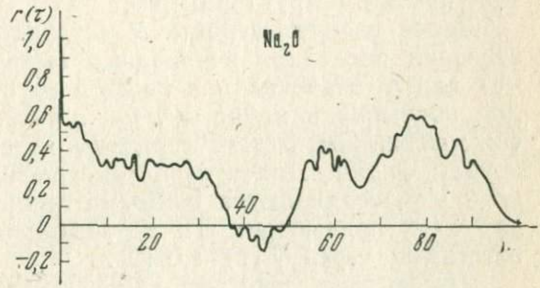


Рис. 8. Оценка автокорреляционной функции для Na_2O в эмпирической последовательности, ранжированной по содержанию SiO_2 и представляющей породы неогеновых эффузивов Камчатки



ло интервалов, приблизительно равное $1/2$ или $1/3\,N_1$ или N_2, влечет за собой сильное влияние «шума» на результат сопоставления двух совокупностей. Из статистики случайных процессов, связанной в основном с проблемами теории связи, известно, что интервалы дискретизации выбираются в зависимости от периода низкочастотной гармоники. Однако анализ автокорреляционных функций петрогенных элементов показал, что ни в одном случае (рис. 6, 7, 8) нельзя утверждать, что существуют гармонические составляющие.

Таким образом, нельзя сделать какие-либо определенные рекомендации по выбору наилучшего числа интервалов дискретизации, подходящие к рассматриваемому случаю неизвестной формы зависимости условного математического ожидания от значений условия и столь своеобразных автокорреляционных функций. В связи с этим единственным фактором, влияющим на определение приближенного числа интервалов дискретизации, в каждом случае является конкретная задача, стоящая перед исследователем.

Методы сравнения закономерной изменчивости свойств без использования интервалов дискретизации

Рассмотренный ниже критерий базируется на результатах, полученных П. К. Махаланобисом (Mahalanobis, 1959) и Н. М. Митрофановой (Mitrofanova, 1961) при разработке метода анализа «структурных графиков». Результаты, приведенные в указанной работе П. К. Махаланобиса, сводятся к следующему. Пусть в распоряжении исследователя имеется выборочная совокупность двух случайных величин x и y (обозначения здесь и далее соответствуют принятым в работе П. К. Махаланобиса) с корреляцией или без нее. Любым из способов случайного выбора эту выборку можно разделить на две взаимопроникающие подвыборки. Если общий объем выборки равен $2n$, то объем составляющих ее выборок равен n наблюдений. Каждое наблюдение представляет собой пару значений x и y. Ранжируем подвыборки по значениям x и разделим каждую из них на g групп так, чтобы число наблюдений в каждой группе было одинаково и равно n', т. е. $gn'=n$. Эти группы П. К. Махаланобис предлагает назвать «структурными».

Далее следует перейти к «структурным графикам». Для построения последних необходимо вычислить среднее (или медиану) для n' значений y в каждой группе, т. е. получить для каждой подвыборки набор y_1', y_2', ..., y_g'. Эти значения относятся к фиксированным точкам середины интервалов, т. е. являются равноудаленными. Далее строится график, в котором пары точек y_i' и y'_{i+1} соединяются прямыми линиями. Построив два графика для двух подвыборок, П. К. Махаланобис обозначает их соответственно через G (1) и G (2).

Дальнейшие действия заключаются в смешивании подвыборок и построении аналогичного графика для всей выборки. Этот график обозначается G (1, 2). Очень важным понятием является, согласно П. К. Махаланобису, «область случайных отклонений». Она определяется как площадь между графиками двух подвыборок, т. е. как площадь между $G(1)$ и $G(2)$, обозначается a (1, 2). Очень важно замечание П. К. Механобиса, который предлагает для числового (не графического) анализа описывать случайные отклонения одной из двух более обычных форм: а) как среднее абсолютное значение различий $|y_1'-y_1''|$, $|y_2'-y_2''|$, ..., $|y_g'-y_g''|$ или б) как корень из среднего квадратов этих различий. Другими словами, П. К. Махаланобис допускает оценку «области случайных отклонений» числовыми методами. Величину (площадь) этой области можно сопоставить с величиной условной дисперсии, хотя используемая П. К. Махаланобисом «область случайных отклонений» меньше значения условной дисперсии, вычисленной стандартным способом. Это утверждение основывается на результате, полученном Н. М. Митрофановой (Mitrofanova, 1961), согласно которому математическое ожидание a (1, 2) имеет величину порядка стандартного отклонения среднего для y, т. е. в обозначениях П. К. Махаланобиса и Н. М. Митрофановой.

$$E(a) = o\left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}\right). \quad (121)$$

Это для случая двумерной нормальности компонент, т. е. случайных величин x и y. Далее П. К. Махаланобис рассматривает случай двух выборок, для которых аналогично приведенному выше строятся структурные графики, т. е. G (1), G (2), G (1, 2), определяются a (1, 2) и соответственно G' (1), G' (2), G' (1, 2), a' (1, 2). Для этого случая подсчитывается площадь, расположения между графиками G (1, 2) и G' (1, 2), которая обозначается S и называется «разобщением выборки». Случайные отклонения, связанные с «разобщением», характеризуются величиной E, которая определяется из выражения

$$E = \sqrt{a^2(1, 2) + a'^2(1, 2)}\ . \quad (122)$$

Для определения значимости «области разобщения» П. К. Махаланобис предлагает использовать следующую статистику

$$\frac{S^2}{E^2}, \quad (123)$$

которая в первом приближении в условиях незначимости «разобщения» стремится к распределению χ^2 с $(g-1)$ степенями свободы. Одно из важнейших замечаний П. К. Махаланобиса состоит в следующем «...Все приведенные выше результаты применимы и в случае, когда два множества подвыборочных значений принадлежат какой-либо комбинации линейных и нелинейных преобразований, не нарушающих возможности ранжирования переменных» (Mahalanobis, 1959, с. 2). Далее можно прочитать: «...Результаты можно распространить и на случаи, когда значения y принадлежат временным сериям с x как координатой времени» (там же, с. 2).

Основные выводы рассмотренной статьи П. К. Махаланобиса и работы Н. М. Митрофановой (Mitrofanova, 1961) были использованы ранее при выводе критерия сравнения условных математических ожиданий при двумерном нормальном распределении компонент. Здесь же рассматриваются результаты указанных работ в несколько ином аспекте, а именно, для подтверждения *следующих положений*.

1. Для оценки площади между двумя структурными графиками могут быть использованы квадраты расстояний между ними.

2. Все результаты, полученные П. К. Махаланобисом (Mahalanobis, 1959), можно распространить на случай не только линейных зависимостей.

3. Критерий, основанный на отношении площади «разобще-

ния» и площадей случайных отклонений, асимптотически стремится к χ^2-распределению.

Допустим, что в нашем распоряжении имеются две двумерные выборки (x_1, d_1), (x_2, d_2), ..., (x_i, d_i), ..., (x_{n_1}, d_{n_1}) и (x_1', d_1'), (x_2', d_2'), ..., (x_i', d_i'), ..., (x_{n_2}', d_{n_2}'), отобранные из генеральных совокупностей значений двух двумерных случайных величин $\{\xi, \delta\}$ и $\{\xi', \delta'\}$. Компоненты δ и δ' по аналогии с регрессионным анализом считаются «закрепленными», а значения компонент ξ и ξ' зависят от их значения, причем форма зависимости неизвестна.

Положим, что тенденция изменения условного математического *ожидания для каждой* совокупности оценена по выборке одним из известных способов, например, методом «скользящего окна». Метод оценки формы условного математического ожидания здесь не обсуждается, а принимается метод скользящего окна, поскольку предлагаемые ниже методы инвариантны к способу его оценки. Оценки условной (остаточной) дисперсии определяются относительно оцененного *условного математического* ожидания. Здесь и далее все рассуждения ведутся относительно случайных величин и их параметров только в пределах множества U. Так как здесь обсуждается построение критерия для проверки нулевой гипотезы

$$H_0 : [M(\Xi|\delta = d) - M(M(\Xi|\delta = d))] - [M(\Xi'|\delta' = d) -$$

$$- M(M(\Xi'|\delta' = d))] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{124}$$

для всех $d \in U$,

при множестве альтернатив

$$H_1 : [M(\Xi|\delta = d) - M(M(\Xi|\delta = d))] - [M(\Xi'|\delta' = d) -$$

$$- M(M(\Xi'|\delta' = d))] \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{125}$$

хотя бы для одного $d \in U$, то следующее предположение касается способа центрирования условных математических ожиданий.

Следует отметить, что операция математического ожидания (по множеству U) для условных математических ожиданий аналогична нахождению «центра тяжести» условных математических ожиданий на множестве U. Обычно операция математического ожидания определена для случайных величин с известной плотностью вероятностей. Однако известно, во-первых (Гихман, Скороход, 1965, с. 182; Ибрагимов, Линник, 1965, с. 12), что условное математическое ожидание можно рассматривать как случайную величину, а, во-вторых, из работы Ю. А. Розанова (1971) следует, что «полное математическое ожидание» (с. 55) определено выражением

$$M\,[M\,\{\xi|\eta\}] = M\xi. \tag{126}$$

Собственно говоря, эта формула приводит нас к тому, что описанная выше операция сводится практически к определению центра тяжести по незакрепленной переменной ξ. Отсюда в нулевой гипотезе (124) можно заменить громоздкие члены и согласно равенству (126) записать ее в несколько ином виде (в одномерном варианте):

$$H_0 : \{[M\,(\xi|\delta = d) - M\xi] - [M\,(\xi'|\delta' = d) - M\xi']\} = 0 \tag{127}$$

для всех $d \in U$ при множестве альтернатив

$$H_1 : \{[M\,(\xi|\delta = d) - M\xi] - [M\,(\xi'|\delta' = d) - M\xi']\} \neq 0, \tag{128}$$

хотя бы для одного $d \in U$.

Смысл нулевой гипотезы (127) очевиден — это сопоставление приведенных к одному масштабу тенденций изменения условных математических ожиданий в двух совокупностях. Естественно, что в условиях справедливости нулевой гипотезы (127), т. е. в случае совпадения положения условных математических ожиданий при любых заданных значениях условия d из множества U, центрированные величины из квадратных скобок выражения (127) будут тождественно равны.

Введем некоторые необходимые обозначения. Обозначим через s_Δ^2 и s'^2_Δ оценки условной дисперсии для первой и второй совокупности соответственно, вычисленные относительно оценок $\overline{M(\xi/\delta=d)}$ и $\overline{M(\xi'/\delta'=d)}$, а через $\widehat{X}(d)$ и $\widehat{X}'(d)$ — траектории оценок условных математических ожиданий. Введем еще одну величину $z_i = \widehat{X}(d_i) - \widehat{X}'(d_i)$, $d_i \in U$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где n — число заданных на множестве U значений условия.

Приводимые ниже рассуждения при выводе критерия базируются на следующих предположениях.

1. Условная случайная величина $\xi/\delta = d$, характеризующая состояние процесса при любом фиксированном d_i значении условия d из множества U и любом виде детерминированной компоненты, распределена нормально с параметрами $M(\xi/\delta = d_i)$ и $D(\xi/\delta = d_i)$.

2. Оценки параметров условной случайной величины $\xi/\delta = d$ распределены асимптотически нормально с соответствующими параметрами.

Допустим, что $\widehat{X}(d)$ и $\widehat{X}'(d)$ для любого фиксированного d, положим d_i, из множества U распределены асимптотически нормально, т. е.

$$\hat{X}\,(d_i) \in N\,[M\,(\xi|\delta = d_i),\quad D\,(\hat{X}\,(d_i))] \tag{129}$$

и

$$\hat{X}'\,(d_i) \in N\,[M\,(\xi'|\delta' = d_i),\quad D\,(\hat{X}'\,(d_i))]. \tag{130}$$

Тогда в условиях нулевой гипотезы (123)

$$[\hat{X}\,(d_i) - \hat{X}'\,(d_i)] \in N\,[0,\ D\,(\hat{X}\,(d_i)) + D\,(\hat{X}'\,(d_i))], \tag{131}$$

откуда в тех же условиях

$$\frac{\widehat{X}(d_i) - \widehat{X}'(d_i)}{\sqrt{D(\widehat{X}(d_i)) + D(\widehat{X}'(d_i))}} \in N(0,\ 1). \tag{132}$$

По приведенному выше предположению величины (132) в условиях нулевой гипотезы (123) *независимы и, следовательно*,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{[\widehat{X}(d_i) - \widehat{X}'(d_i)]^2}{D(\widehat{X}(d_i)) + D(\widehat{X}'(d_i))} \in \chi^2_{n\text{ст.св}}, \tag{133}$$

Если обозначить условные дисперсии сравниваемых совокупностей через σ^2_Δ и σ'^2_Δ, а их оценки через s^2_Δ и s'^2_Δ, то можно считать, что

$$D(\widehat{X}(d)) = \frac{1}{n}\sigma^2_\Delta, \tag{134}$$

$$D(\widehat{X}'(d)) = \frac{1}{n}\sigma'^2. \tag{135}$$

Используя приведенные выше обозначения, выражение (133) можно записать в виде

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2 n}{s^2_\Delta + s'^2_\Delta} \tag{136}$$

или

$$W = \frac{n}{s^2_\Delta + s'^2_\Delta} \sum_{i=1}^{n} z_i^2. \tag{137}$$

Из вышеизложенного очевидно, что число W в случае справедливости нулевой гипотезы представляет собой значение *случайной величины, приблизительно* распределенной как χ^2 с n степенями свободы. В выражениях (136) и (137) величина

$$z_i = [\widehat{X}(d_i) - \bar{x}] - [\widehat{X}'(d_i) - \bar{x}'], \tag{138}$$

что приводит критерии (136) и (137) в вид, необходимый для проверки нулевой гипотезы (123).

Критерий (137) *отличается от критерия*, который можно построить на основе результатов П. К. Махаланобиса (Mahalanobis, 1959), заменой площадей их численной оценкой. Вслед за П. К. Махаланобисом обозначим

$$a(1,\ 2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \widehat{X}(d_i)|, \tag{139}$$

$$a'(1,\,2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x'_i-\widehat{X}'(d_i)\right|, \tag{140}$$

$$S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|z_i|. \tag{141}$$

В последнем выражении z_i имеет тот же смысл, что и в (138). Тогда выражению П. К. Махаланобиса

$$\frac{S^2}{E^2}, \tag{142}$$

где

$$E=\sqrt{a^2(1,\,2)+a'^2(1,\,2)}\,,$$

можно в первом приближении поставить в соответствие выражение

$$\frac{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-\widehat{X}(d)|\right)^2+\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|x'_i-\widehat{X}'(d)\right|\right)^2} \tag{143}$$

или после сокращения

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-\widehat{X}(d)|\right)^2+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left|x'_i-\widehat{X}'(d)\right|\right)^2}. \tag{144}$$

Из выражения (144) следует, что оно не в точности соответствует выражению для критерия (142) П. К. Махаланобиса, поскольку в выражении (144) используется для оценки a (1, 2) и a' (1, 2) не площадь между двумя подвыборочными «структурными графиками», а квадрат суммы расстояний между реальными наблюдениями и оценкой условного математического ожидания. Это несоответствие является следствием невозможности в большинстве случаев приписать набор значений величины y одному фиксированному значению условия. Однако на возможность такой ситуации, не нарушающей общей процедуры, указывает и П. К. Махаланобис.

Выше было отмечено, что указанные критерии предназначены для проверки нулевой гипотезы (123), которая является вероятностным аналогом задач сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств второго типа. Критерии (136) и (137) можно использовать для проверки нулевой гипотезы (123), но некоторые особенности дают возможность рекомендовать их скорее *для других целей. Наиболее эффективным в геологическом смысле*, как известно из опыта применения рассмотренных выше критериев, для проверки нулевой гипотезы (123) является критерий (117), а при выполнении соответствующих необходимых условий — критерий (116), (118), (119).

Рассмотрим особенности критериев (136), (137) и те области их применения, для которых необходимы отмеченные выше их особенности. Уместно разъяснить причину, почему при построении этих критериев такое большое внимание было уделено методу «структурных графиков». Как явствует из приведенного выше краткого изложения статьи П. К. Махаланобиса, мерой расхождения между исследуемыми графиками является площадь, называемая «разобщением». Именно площадь в характерном для площади числовом выражении, замеряемая в масштабе графика.

При построении критериев (136) и (137) отмечалось, что мерой совпадения или несовпадения условных математических ожиданий двух совокупностей, приведенных центрированием к одному масштабу, также служит площадь, заключенная между их оценками. Но в рассматриваемых критериях эта площадь оценивается квадратами расстояний между эмпирическими кривыми, полученных в заданных точках значений условия. На правомочность подобной замены меры расхождения указывал П. К. Махаланобис (Mahalanobis, 1959), допускавший оценку меры расхождений аналитическими методами.

Учитывая сказанное выше, очевидно, что критерии (136) и (137) предназначены скорее для сопоставления формы двух кривых — оценок условных математических ожиданий, чем для сравнения условных математических ожиданий без построения оценочных кривых. В условиях применения критериев (136) и (137) способ получения оценок условных математических ожиданий может быть различным даже для сопоставляемой пары, однако непременной является возможность получения оценки условной дисперсии для каждой совокупности. Выражения для критериев (136) и (137) получены в предположении однородности дисперсий каждой совокупности *на всей области существования множества U.*

Все рассмотренные в настоящей главе критерии инвариантны к способу задания условия. Следовательно, обсуждаемые здесь критерии (136) и (137) можно применить для сравнения формы двух поверхностей, заданных на плоскости координат. Условия применения критериев те же: возможность оценки условных дисперсий и однородность условной дисперсии каждой совокупности *на всем двумерном множестве U.* Подобного рода поверхностями оперирует, например, В. Ф. Мягков (1971) при определении парагенетических соотношений, однако применимость рассматриваемых здесь критериев в данном конкретном случае требует адаптации их к конкретной задаче.

Глава 5

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕДЛАГАЕМЫХ МЕТОДОВ И КРИТЕРИЕВ

Одной из важнейших задач геологии является проблема типизации геологических процессов с целью выявления повторяемости во времени и пространстве условий, приводящих к формированию рудных формаций.

Исходя из свойств процессов петрогенезиса, все многообразие условий формирования магматических объектов находит отражение в вещественных особенностях формирующихся магматических массивов, комплексов и формаций. Естественно, что прямое соответствие условий как магмообразования, так и становления магматических объектов может быть установлено (если это вообще возможно) в ограниченном числе случаев и относительно ограниченной доли вещественных свойств продуктов магматизма. Сам факт влияния условий формирования магматических объектов на процесс их становления не вызывает сомнений и отображается в неизвестных в общем случае особенностях их вещественного состава. Возможности изучения наблюдаемых в настоящее время результатов реализации природных процессов в подавляющем их большинстве приводят лишь к косвенным методам изучения и построения оценки процессов магматизма. Указанные процессы с учетом принятой в работе позиции могут быть оценены по вещественным свойствам наблюдаемых результатов их реализации. В дальнейшем рассматриваются именно оценки процессов петрогенезиса, построенные на вещественной основе наблюдаемых продуктов магматизма. С отмеченных позиций проблема типизации процессов магматизма должна решаться с учетом следующих свойств природных объектов.

Типизация процессов по их оценкам невозможна без определения наиболее характерного и устойчивого проявления процессов в вещественных свойствах сформированных объектов. Постановка и решение проблемы типизации процессов невозможны, если не определено, какие вещественные свойства или их трансформации могут быть приняты в качестве представления характера процессов и использованы как база для решения проблемы типизации. Термин «типизация» в понимании автора подразумевает сопоставление собственно процессов вне зависимости от их возрастного или регионального проявления. Как известно из предшествующего изложения, наблюдаемые вещественные свойства объекта, кроме свойств, порожденных типом процесса формироваия, несут на себе влияние места и времени проявления, т. е. региональные и возрастные особенности вещественного состава рассматриваемого объекта. Следовательно, постановка и решение проблемы типизации процессов магматизма (а сказанное выше относится в основном к этим процессам) должны учитывать эту особенность природных объектов.

При формулировке задач сравнения закономерной изменчивости свойств объектов и построения критериев для их решения необходимые условия были учтены. Принято считать в геологии, что основные черты и все многообразие условий, определяющих характер процесса петрогенезиса, проявляются в особенностях вещественных свойств и последовательности продуктов его реализации. Кроме того, при определении задач сравнения закономерной изменчивости свойств объектов для типизации процессов их образования были исключены мешающие факторы, такие, как региональные и возрастные особенности сравниваемых объектов, а также флуктуации признаков, порожденные случайными причинами.

Следует отметить, что форма кривой в координатах: петрогенный окисел — содержание кремнезема для нормально дифференцированных серий или любой другой параметр, отражающий направленность процесса дифференциации, подобно индексам DI, CI, SI, — является отражением процесса петрогенезиса в вещественном выражении. Отсюда форма указанной кривой несет достаточную информацию для типизации процессов формирования магматических объектов при исключении влияния региональной и возрастной составляющих вещественного состава исследуемых объектов.

Для иллюстрации приведенных выше положений предлагается конкретный пример, любезно представленный автору В. А. Соловьевым. Так, с целью выявления петрохимических особенностей был проведен сравнительный анализ однотипных относительно развития соответствующих геосинклинальных систем лавовых комплексов трех регионов: Камчатки, Карпат и Армении (по два комплекса в каждом регионе). Было установлено существенное различие лавовых комплексов указанных регионов по их петрохимическим особенностям. Затем на этом же материале была осуществлена методика типизации магматических процессов. В качестве примера здесь приводится сопоставление оценок процессов формирования лавовых комплексов для одной пары из указанных выше шести комплексов. Сопоставление петрохимических особенностей двух комплексов было проведено предварительно с помощью критерия

$$W = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{g} \frac{z_{ji}^2 \cdot n_i \cdot n_i'}{s_{ji}^2 n_i' + s_{ij}'^2 \cdot n_i}. \tag{145}$$

Критерий (145) в условиях нулевой гипотезы

$$H_0 : M(\Xi|\delta = d) - M(\Xi'|\delta' = d) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{146}$$

для всех $d \in U$

при множестве альтернатив

$$H_1 : M(\Xi|\delta = d) - M(\Xi'|\delta' = d) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{147}$$

хотя бы для одного $d \in U$ распределен приблизительно как χ^2 с mg степенями свободы.

Для сопоставления были использованы эмпирические данные о петрохимическом составе древнечетвертичного комплекса лав Срединного хребта на Камчатке, с одной стороны, и верхнеплиоцен-плейстоценового комплекса лав Армении — с другой.

В верхнеплиоцен-плейстоценовый комплекс Армении были включены лавы из следующих регионов: района горы Арагац, Гегамского нагорья, Айоцдзор — Варденис и Сеоникского хребта. Эмпирические данные древнечетвертичного комплекса Срединного хребта Камчатки представлены 43 силикатными анализами, а верхнеплиоцен-плейстоценовый комплекс Армении — 100 анализами. Как отмечалось выше, сравнение петрохимических особенностей рассматриваемых комплексов выявило их существенное различие. Значение критерия W в рассматриваемом случае оказалось равно 142,03 при допустимом значении $\chi^2_{0,05,56\text{ст.св}} = 74,47$.

Результаты, полученные после применения критерия (109) к указанному выше эмпирическому материалу, свидетельствуют о существенных различиях в петрохимических особенностях лав рассматриваемых комплексов. Очевидно, что мы имеем дело с различными конкретными формациями.

Естественно поставить вопрос: нельзя ли эти очень близкие по структурно-тектоническому положению и набору слагающих их разновидностей конкретные формации (комплексы) объединить в один формационный тип? По мнению автора, эта задача аналогична задаче типизации процессов, причем последняя интерпретируется в настоящей работе как однотипность проявления процесса формирования объекта в вещественных свойствах всех объединенных в объект разновидностей пород — продуктов реализации рассматриваемого процесса.

С целью установления возможности сопоставления процессов формирования данных лавовых комплексов и, как следствие, отнесения их к одному формационному типу была применена методика решения задач сравнения закономерной изменчивости свойств объектов.

Проверка состоятельности нулевой гипотезы.

$$H_0 : \{[M(\Xi|\delta = d) - M\Xi] - [M(\Xi'|\delta' = d) - M\Xi']\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{148}$$

для всех $d \in U$

при множестве альтернатив

$$H_1 : \{[M(\Xi|\delta = d) - M\Xi] - [M(\Xi'|\delta' = d) - M\Xi']\} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{149}$$

хотя бы для одного $d \in U$, соответствующей задаче сравнения закономерной изменчивости, осуществлена с помощью критерия

$$W = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{g} \frac{z_{ji}^2 \cdot n_i \cdot n_i'}{s_{ji}^2 \cdot n_i' + s_{ji}'^2 \cdot n_i}, \tag{150}$$

где

$$z_{ji} = (\bar{x}_{ji} - \widehat{M}\xi_j) - (\bar{x}_{ji}' - \widehat{M}\xi_j').$$

Вычисления значения критерия (150) для данного случая привели к следующему результату: вычисленное значение критерия W равно 71,02 при допустимом значении $\chi^2_{0,05,56\text{ст.св}} = 74,47$, что свидетельствует о состоятельности нулевой гипотезы (148). Из этого следует, что при абстрагировании от регионального и возрастного влияния на петрохимические свойства сравниваемых лавовых комплексов они должны быть признаны неразличимыми по форме закономерной изменчивости. Это дает основание на базе приведенного выше изложения определить, что общий характер процесса формирования древнечетвертичных лав Срединного хребта Камчатки неотличим от процесса формирования верхнеплиоцен-плейстоценого комплекса лав Армении; как следствие, эти комплексы могут быть объединены в один формационный тип.

Рассмотрим на примере одного окисла сущность предлагаемой методики и ее геологическую основу. На рис. 9 приведены графики изменения содержания K_2O в лавах сопоставляемых окислов. На рис. 9 нанесены графики без центрирования (*а*); из соотношения этих графиков видно, что для всех разновидностей лав комплекса Армении характерно постоянно более высокое, чем для лав комплекса Камчатки, содержание K_2O, что и выразилось в значении критерия (145), который для случая содержания K_2O равен 33,73 при допустимом значении $\chi^2_{0,05,7\text{ст.св.}} = 14,07$, что свидетельствует о закономерном более высоком содержании K_2O во всех разновидностях лав верхнеплиоцен-плейстоценового комплек-

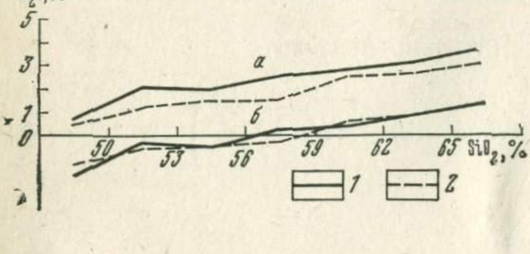


Рис. 9. Графики изменения групповых средних для содержаний K_2O в верхнеплиоцен-плейстоценовых лавах Армении (*1*) и древнечетвертичных лавах Срединного хребта Камчатки (*2*)

а — без центрирования, *б* — после центрирования са Армении по сравнению с лавами древнечетвертичного комплекса *Срединного хребта Камчатки. На рис. 9* можно видеть те же графики их после центрирования (*б*) безусловным средним содержанием K_2O отдельно для каждого комплекса. После приведения графиков изменения содержаний K_2O к одному масштабу они почти полностью совпадают.

На этом конкретном примере можно более четко видеть, что в настоящей работе понимается под процессом формирования магматических объектов в вещественном выражении.

Возьмем ломаные линии *б* на рис. 9 целиком. Вид этих линий, в частности наклон каждого участка, отражает тенденцию перехода K_2O в последовательно формирующиеся разновидности пород комплекса (при гомодромном развитии), определяемую всей совокупностью условий формирования комплекса. Если теперь рассмотреть ось кремнекислотности, то сказанное выше становится очевидным — содержание K_2O с *одинаковой в среднем* скоростью для обеих сопоставляемых комплексов меняется для разновидностей пород со средним содержанием кремнезема: 48,5; 51,5; 54,5; 57,5; 60,5; 63,5; 66,5 процентов SiO_2. Именно это свойство процессов формирования, проявленное в вещественных характеристиках набора разновидностей пород, принимается в качестве базового в проблеме типизации процессов формирования магматических объектов.

Приведенный пример дает представление о содержании задачи сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств второго типа, а также и задачи типизации процессов, относящейся к тому же классу задач. Графики приведенного на рис. 9 вида (адаптированные к конкретным задачам диаграммы Харкера) определены в работе как петрохимическое выражение парагенетических ассоциаций. Сравнительный анализ центрированных парагенетических ассоциаций (см. рис. 9) и классификация их предлагаются для выделения формационных типов магматических пород на количественной основе.

Однако применение рассматриваемой методики не свободно от сложностей. Одну из сложностей, уже упоминавшуюся выше, следует рассмотреть на конкретном примере. Задачи второго типа эффективнее всего решать с помощью критериев с разделением множества U на интервалы дискретизации одним из набора предлагаемых в работе методов. При этом проблема дискретизации, как уже упоминалось, не может считаться тривиальной. В литературе неизвестны универсальные способы подразделения множества на интервалы дискретизации при условии оптимальности разбиения для решения задач различного характера и сравнения условных математических ожиданий. В приведенном выше примере множество U занимает интервал кремнекислотности от 47 до 68% SiO_2 и разделено на семь интервалов. Доказательств оптимальности такого разбиения привести не удается. Это разбиение следует считать удовлетворительным, но не оптимальным и не единственным.

Перечислим условия, которые учитывались при этом разбиении. Применение критерия, основанного на распределении χ^2, предусматривает выполнение условия, чтобы в интервалах в среднем было не менее пяти наблюдений. Учитывая, что в меньшей выборке 43 наблюдения, разбиение на семь интервалов не противоречит этому условию. Одно из основных условий заключается в том, что малое число интервалов (2—3) приводит изменение исследуемых признаков к априори заданной форме: линейной — при двух интервалах, близкой к параболической — при трех интервалах, а большое число интервалов (порядка $1/3\,N$ и $1/2\,N$) — к влиянию шумовой компоненты. Конкретных рекомендаций в этом случае дать нельзя, кроме указания на нежелательность двух или трех интервалов и необходимость выполнения соотношения $\frac{N}{g} \geqslant 5$, где N — число наблюдений в меньшей выборке, g — число интервалов. Кроме приведенных здесь условий, можно лишь посоветовать разумно подбирать количество интервалов на множестве U и начало отсчета при разбиении.

В результате применения предлагаемой здесь методики в большом числе случаев можно будет оценить типичные для определенных ситуаций формы тенденций изменения вещественных свойств объекта и перейти к поиску оптимального количества интервалов дискретизации при сохранении характерных особенностей сопоставляемых тенденций.

В качестве примерной оценки количества интервалов разбиения можно посоветовать использовать формулу, заимствованную из работы С. А. Айвазяна. Так в приведенном выше примере указанная формула (Айвазян, 1968, с. 15) приводит к следующему примерному числу интервалов: $k \approx \frac{\lg N}{\lg 2} + 1$, в нашем случае $k \approx \frac{\lg 43}{\lg 2} + 1 = 6{,}43$, т. е. равному 7.

Еще одно замечание к процедуре разбиения оси условия на *множестве U на интервалы*. От характера разбиения выборочных данных на интервалы зависит степень близости распределения критерия χ-квадрат распределению. Наилучшее в данной ситуации приближение к χ^2-распределению, по мнению Л. Н. Большева, достигается при следующей схематично охарактеризованной *процедуре разбиения на интервалы*. Первоначально следует проверить предположение о близости распределения δ на множестве U к нормальному в обоих выборках. Если оно выполняется, то необходимо проверить однородность этих выборок относительно среднего и дисперсии с помощью критерия Z^2 (Большев, Никулин, 1975). *Если выполняется и это требование, то по объединенной* выборке оцениваются параметры: среднее и дисперсия, которые используются для построения эмпирической функции распределения. Далее с графика функции снимаются значения эмпирических квантилей, которыми ограничиваются интервалы. Число *квантилей и число интервалов определяются в соответствии с объ-*

емом меньшей выборки так, чтобы в каждый интервал из этой выборки попало около 10 наблюдений. Как показала эмпирическая проверка, эта процедура практически гарантирует от необъяснимых результатов применения рассмотренных критериев, но требует *больших*, по крайней мере бо́льших 50, объемов меньшей выборки.

Классификация геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств на базе предлагаемых в работе статистических методов демонстрируется на примере массивов щелочно-гранитоидной формации Центрального Туркестано-Алая. Настоящий раздел основан на материале Т. Н. Ифантопуло (1975). В ее работе приведены и результаты применения процедуры классификации, однако здесь они рассмотрены в несколько ином аспекте.

Массивы щелочных пород Центрального Туркестано-Алая (здесь рассматриваются только шесть массивов: Кштутский, Ходжаачканский, Джилисуйский, Матчинский, Тутекский, Ясманский) имеют пестрый петрографический состав и в их строении принимают участие габбро, монцониты, нефелиновые сиениты, щелочные и кварцевые сиениты, лейкократовые и щелочные граниты. Среди перечисленных массивов можно выделить три группы: 1) массивы, в строении которых принимают участие габбро и монцониты (Кштутский массив); 2) массивы с преобладанием нефелиновых сиенитов (Джилисуйский, Ходжаачканский и Тутекский) и 3) массивы с присутствием нефелиновых и щелочных сиенитов, но с существенной ролью лейкократовых гранитов (Матчинский и Ясманский).

Пространственная приуроченность рассматриваемых массивов к гранитоидным комплексам и отсутствие в районах их развития базальтоидов позволили некоторым исследователям связать образование массивов щелочных пород Туркестано-Алая с гранитоидной магмой и отнести все массивы к щелочно-гранитоидной формации (Арапов, 1953; Омельяненко, 1961). Однако участие габброидов в строении некоторых массивов послужило основанием для отнесения этих массивов к двум различным генетическим группам (формациям): 1) щелочно-габброидной (Шинкарев, 1956) или калиевой щелочно-базальтоидной (Осокин, 1970) — Кштутский массив и 2) щелочно-гранитоидной — остальные массивы.

Различие в мнениях о принадлежности щелочных массивов Центрального Туркестано-Алая к известным формациям обусловлено как большой пестротой слагающих их разновидностей пород, так и разнообразием тектонических структур, в пределах которых расположены рассматриваемые массивы. В связи с тем что в литературе отсутствует единое мнение об их формационной принадлежности и, более того, некоторые авторы считают, что перечисленные выше шесть массивов нельзя отнести к одной формации, встает задача определения возможности отнесения их к единой формации. Сознавая многоаспектность задачи отнесения массивов к той или иной формации, все же можно принять, что близость петрохимических особенностей пород двух массивов дает возможность отнести их к одной формации. Так, при изложении этого примера *учитывался только петрохимический* аспект отнесения массивов к одной или различным формациям (конкретным формациям в терминологии Ю. А. Кузнецова, 1964). Таким образом, задача применения процедуры классификации в данном случае может быть сформулирована следующим образом: можно ли считать, что породы всех рассматриваемых щелочных массивов Центрального Туркестано-Алая по петрохимическим особенностям слагающих *их пород принадлежат одной конкретной* формации или комплексу щелочно-гранитоидных массивов? Легко заметить, что эта задача в случае двух массивов принадлежит классу задач сравнения геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа.

Принимая в качестве ранжирующей компоненты для организации петрохимической информации в эмпирические последовательности *содержание кремнезема*, задачу о сопоставлении петрохимических особенностей пород исследуемых массивов можно сформулировать более конкретно: можно ли считать, что во всех щелочных массивах Центрального Туркестано-Алая разновидности пород, обладающие одинаковым содержанием кремнезема, имеют близкий петрохимический состав?

В данном случае мы имеем дело с более чем двумя объектами, и *должны подобрать процедуру*, которая дает возможность сформировать классы объектов с близкими петрохимическими особенностями слагающих их пород на базе эмпирической информации. Такая процедура описана выше и дает возможность объединить по мере близости на базе изучаемых характеристик наиболее близкие объекты и выделить отличающиеся. Указанная процедура достаточно точно соответствует поставленной в рассматриваемом случае геологической задаче.

Итак, в нашем распоряжении имеется эмпирическая информация по петрохимическому составу пород пяти объектов (массивы Джилису и Ходжаачкан были объединены), т. е. имеются выборочные совокупности, представляющие пять генеральных совокупностей. В соответствии с требованиями метода и согласно приведенной выше задаче выборочные данные были упорядочены по *возрастанию значений ранжирующей* компоненты, в данном случае по возрастанию значений содержания кремнезема. Для простоты выборкам, представляющим массивы щелочных пород, были приписаны номера: 1 — выборка Кштутского массива; 2 — выборка объединенного массива Джилису — Ходжаачкан; 3 — выборка Матчинского массива; 4 — выборка Тутекского массива и 5 — выборка Ясманского массива. Результаты первого этапа процедуры *классификации — попарного* сопоставления массивов с использованием критерия (88) — приведены в табл. 1.

Наименьшее значение критерия на первом шаге процедуры классификации не превышает допустимого для девяти степеней свободы при уровне значимости 0,05 значения χ^2, равного 16,9. Из этого следует, что в данном конкретном случае выполняется со-

Таблица 1

Значения критерия W при попарном сравнении объектов, участвующих в процедуре классификации

Объект	2	3	4	5
1	19,73	15,65	30,34	25,50
2		7,95	5,37	12,58
3			8,05	13,03
4				16,23

отношение $\min W \leqslant \chi^2_{0,05,9\text{ст.св.}}$ и процедура должна быть продолжена. Минимальное значение критерия (5,37) соответствует сравнению составов пород массивов Джилису — Ходжаачкан и Тутек. Согласно принятому ранее правилу объединения по мере близости составы всех разновидностей пород упомянутых массивов признаются наиболее близкими и в дальнейшей процедуре указанные массивы рассматриваются как один массив.

Следующий шаг в рассматриваемой процедуре классификации — сравнение объединенной совокупности с оставшимися. Результаты этого сравнения приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения критерия W после объединения объектов 2 и 4

Объект	2 и 4	3	5
1	29,70	15,65	25,50
2 и 4		10,45	11,07
3			13,03
5			

Учитывая приведенное выше допустимое значение χ^2, и после этого шага справедливо соотношение $\min W \leqslant \chi^2_{0,05,9\text{ст.св.}}$, в связи с чем процедура классификации не заканчивается. Наименьшее значение критерия соответствует сопоставлению объектов 2, 4 и 3, в связи с этим именно они подлежат объединению согласно принятой процедуре. Сравнение объекта, полученного объединением объектов 2, 3 и 4, привело к результату, приведенному в табл. 3.

Таблица 3

Значения критерия W после объединения объектов 2, 3 и 4

Объект	2, 3 и 4	5
1	24,26	25,50
2, 3 и 4		11,19
5		

Выполнение соотношения $\min W \leqslant \chi^2_{0,05,9 \text{ ст.св.}}$ при $\chi^2_{0,05,9 \text{ ст.св.}} = 16,9$ свидетельствует о необходимости продолжения процедуры классификации и после этого этапа. Из приведенной таблицы явствует, что объекты 2, 3 и 4 и объект 5 должны быть объединены в связи с тем, что слагающие их породы существенно не отличаются по петрохимическим особенностям всех одновременно встречающихся в них разновидностей пород. Объединение указанных объектов и сравнение объединенного объекта с оставшимся объектом 1 привело к результату, приведенному в табл. 4.

Таблица 4

Значение критерия W при сравнении объединенного объекта (2, 3, 4 и 5) и объекта 1

Объект	2, 3, 4 и 5
1	24,51
2, 3, 4 и 5	

Вычисленное значение критерия выше допустимого значения χ^2 для 9 степеней свободы и уровня значимости 0,05, т. е. на данном этапе процедура классификации должна быть закончена, так как выполняется соотношение $\min W > \chi^2_{0,05,9 \text{ ст.св.}}$. Таким образом, в результате процедуры классификации все участвующие в процедуре объекты разбиты на два класса, внутри которых объекты обладают близкими петрохимическими особенностями разновидностей пород, а объекты разных классов имеют существенные различия в петрохимических особенностях слагающих их пород. В результате рассмотренной выше процедуры в первый класс объединены четыре массива: Джилису — Ходжаачкан, Тутек, Матча, Ясман. Второй класс состоит лишь из одного массива: Кштутского.

В связи с тем что геологу необходимо знать, какие именно петрохимические особенности отличают породы выделенных классов, значение критерия может быть отнесено к каждому петрогенному окислу отдельно. В табл. 5 приведены результаты сравнения условных средних при сопоставлении Кштутского и остальных четырех массивов отдельно для каждого окисла. Как следует из табл. 5, разновидности пород Кштутского массива отличаются от содержащих одинаковое с ними количество кремнезема разновидностей пород объединенного объекта существенно большим содержанием CaO и меньшим Na_2O. Отличие петрохимического состава и особенностей пород массива Кштут от состава разновидностей пород одинаковой с ними кремнекислотности других массивов нефелиновых сиенитов Центрального Туркестано-Алая дает возможность предположить, что он принадлежит иной, чем остальные четыре массива, формации.

Как известно, массив Кштут Е. Д. Осокин (1970) относил к калиевой щелочно-базальтоидной формации. С помощью того же статистического метода (критерий (88)) была проверена возможность отнесения массива Кштут к калиевой щелочно-базальтоидной формации. Это было произведено следующим образом: породы массива были сопоставлены по своим петрохимическим особенностям с обладающими таким же содержанием SiO_2 разновидно-

Таблица 5

Результаты сравнения петрохимических особенностей пород массива Кштут и пород остальных массивов щелочно-гранитоидной формации Центрального Туркестано-Алая

Окисел	Значение критерия W_j	Знак среднего
TiO_2	0,90	
Al_2O_3	0,03	
Fe_2O_3	3,28	
FeO	3,13	
MnO	0,88	
MgO	3,74	
CaO	4,43	+
Na_2O	7,18	—
K_2O	0,94	

$$\Sigma W_j = 24,51$$

Допустимое значение $\varkappa^2_{1\ \text{ст. св.},\ 0,05} = 3,84$

Примечание. Знак «+» в графе «Знак среднего» означает, что в массиве Кштут содержание данного окисла в разновидностях пород с одинаковым содержанием SiO_2 больше, чем в породах объединенного массива. Знак «—» соответствует обратному соотношению.

стями породами массива Памбак и объединенного массива Кзыл-Омпул — Сандык. Специалисты по петрологии щелочных пород признают массивы Памбак и Кзыл-Омпул-Сандык типичными представителями калиевой щелочно-базальтоидной формации.

Результаты сравнения рассматриваемых массивов приведены в табл. 6. Сравнение петрохимических особенностей с помощью критерия (88) пород массивов Кзыл-Омпул-Сандык и Кштут свидетельствует о резком различии рассматриваемых особенностей во всех разновидностях пород сопоставляемых массивов, обладающих одинаковой кремнекислотностью. Для пород сопоставляемых массивов характерна близкая, практически одинаковая щелочность. Породы объединенного массива Кзыл-Омпул-Сандык обладают повышенным по сравнению с породами массива Кштут содержанием TiO_2, Fe_2O_3, FeO, MgO и CaO. При этом породы массива Кштут имеют более высокое содержание Al_2O_3 и MnO.

С другой стороны, сравнение подобным методом петрохимических особенностей пород массивов Памбак и Кштут не выявило существенного их различия. Значение критерия W по сумме всех окислов менее допустимого значения $\chi^2_{0,05,9\ \text{ст.св.}}$, что свидетельствует о весьма несущественных отличиях петрохимических особенностей соответствующих разновидностей пород массивов Памбак и Кштут. Породы Кштутского массива характеризуются лишь более высоким содержанием MnO и TiO_2.

Таким образом, приведенные результаты свидетельствуют, что по петрохимическим особенностям пород массив Кштут отличается

Таблица 6

Результаты сравнения петрохимических особенностей пород массива Кштут с породами массивов Кзыл-Омпул-Сандык и Памбак

Окисел	Кштут и Кзыл-Омпул-Сандык		Кштут и Памбак	
	Значение критерия W_j	Знак среднего	Значение критерия W_j	Знак среднего
TiO_2	13,85	+	4,58	—
Al_2O_3	12,71	—	0,02	
Fe_2O_3	7,42	+	0,83	
FeO	8,48	+		
MnO	4,66	—	4,58	—
MgO	9,80	+	0,00	
CaO	4,84	+	2,50	
Na_2O	3,34		0,02	
K_2O	0,55		2,87	

$\Sigma W_j = 65,65$ $\qquad\qquad$ $\Sigma W_j = 15,40$

Допустимое значение $\chi^2_{1 \text{ ст. св.}, 0,05} = 3,84$

$\chi^2_{9 \text{ ст. св.}, 0,05} = 16,9$

Примечание. Знак «+» в графе «Знак среднего» означает, что в массивах Кзыл-Омпул-Сандык и Памбак содержание данного окисла в разновидностях пород с одинаковым содержанием SiO_2 больше, чем в породах массива Кштут. Знак «—» соответствует обратному соотношению.

от массивов щелочно-гранитоидной формации, а также от массива Кзыл-Омпул-Сандык, принадлежащего калиевой щелочно-базальтоидной формации, но не отличается от массива Памбак, относящегося к той же калиевой щелочно-базальтоидной формации.

По геологическим соображениям массив Кштут не должен отличаться в одинаковой степени ни от массивов щелочно-гранитоидной, ни от калиевой щелочно-базальтоидной формаций. Это предположение можно проверить.

Вслед за Д. А. Родионовым (1968) поставим в соответствие величину различий объектов, фиксируемую критерием с χ^2-распределением в условиях нулевой гипотезы, с величиной параметра нецентральности нецентрального распределения χ^2. Как следствие, можно поставить и проверить задачу сопоставления степени отличия петрохимических особенностей пород массива Кштут от пород массивов щелочно-гранитоидной формации и от пород объединенного массива Кзыл-Омпул-Сандык. Геологической задаче об одинаковой степени отличия петрохимических особенностей пород массива Кштут от пород массивов щелочно-гранитоидной формации, с одной стороны, и от пород объединенного массива Кзыл-Омпул-Сандык — с другой, можно поставить в соответствие нулевую гипотезу о равенстве параметров нецентральности двух случайных величин, имеющих нецентральное χ^2-распределение. Положим, что W_1 распределена как $\chi^2(m, a_1)$, а W_2 как $\chi^2(m, a_2)$, где m — число степеней свободы, a_1 и a_2 — параметры нецентральности. Нулевая гипотеза может быть записана в следующем виде (Родионов, 1968):

$$H_0 : a_1 = a_2 \tag{151}$$

с интересующей нас альтернативой

$$H_1 : a_1 > a_2 . \tag{152}$$

Обозначим через W_1 значение критерия, полученное при сравнении пород массива Кштут с породами объединенного массива Кзыл-Омпул-Сандык, а через W_2 — значение критерия, полученное в случае сравнения пород этого массива с породами щелочно-гранитоидной формации. Метод построения критерия дает возможность принять, что W_1 и W_2 представляют собой эмпирические значения случайных величин, распределенных как $\chi^2(m, a_1)$ и $\chi^2(m, a_2)$ соответственно. Для проверки нулевой гипотезы (151) Д. А. Родионов предлагает использовать критерий

$$t = \frac{W_1 - W_2}{2\sqrt{W_1 + W_2 - m}}, \tag{153}$$

который в случае справедливости нулевой гипотезы (151) распределен асимптотически нормально с параметрами 0 и 1.

В рассматриваемом здесь примере вычисленное значение критерия t оказалось равным 2,43 при допустимом значении одностороннего критерия для уровня значимости 0,05 равного 1,64. Таким образом, в нашем случае нулевая гипотеза должна быть отвергнута как не соответствующая эмпирическим данным, и следует принять альтернативу. В итоге проверки нулевой гипотезы получен вывод, что отличие петрохимических особенностей пород массива Кштут от соответствующих разновидностей пород объединенного массива Кзыл-Омпул-Сандык существенно больше, чем пород массива Кштут от пород массивов щелочно-гранитной формации.

Изложенные выше результаты применения методов классификации массивов щелочных пород Центрального Туркестано-Алая могут быть интерпретированы следующим образом. Если объединение в одну группу пяти массивов, которые были представлены в процедуре четырьмя выборками, в один класс по близости петрохимических свойств слагающих их пород совпадает с представлениями исследователей, объединяющих отмеченные массивы и относящих их к щелочно-гранитоидной формации, то положение Кштутского массива не столь определенно. Близость петрохимического состава пород Кштутского и Памбакского массивов может служить основанием для отнесения Кштутского массива совместно с Памбакским к калиевой щелочно-базальтоидной формации. Однако резкое отличие петрохимических особенностей одинаковых по кремнекислотности разновидностей пород массива Кштут от петрохимических особенностей объединенного массива Кзыл-Омпул-Сандык, причем последний признается Е. Д. Осокиным (1971) типичным для калиевой щелочно-базальтоидной формации и расположен пространственно ближе к Кштутскому массиву, чем Памбакский — все это приводит к возникновению ряда вопросов, которые следует считать объектом дальнейших исследований, в частности, формационного анализа.

Кроме того, во-первых, правомочно ли отнесение к одной калиевой щелочно-базальтоидной формации резко различных по петрохимическим особенностям пород массива Памбак и объединенного массива Кзыл-Омпул-Сандык? Во-вторых, в каких соотношениях при формационном анализе должны учитываться: с одной стороны — близость петрохимических особенностей пород магматических объектов и, с другой — близость их пространственного положения и (или) структурно-тектоническая позиция?

В связи с тем что по известным структурно-тектоническим схемам среднего масштаба рассматриваемые массивы: Кштут, Памбак, Кзыл-Омпул-Сандык — расположены в различных структурно-тектонических единицах, то естественно возникает вопрос о влиянии пространственного положения. В таком случае следовало бы отнести массив Кштут к щелочно-гранитоидной формации, так как, во-первых, он пространственно ближе к массивам этой формации, чем к объединенному массиву Кзыл-Омпул-Сандык, и, во-вторых, породы массива Кштут хотя и отличаются по своим петрохимическим особенностям от пород щелочно-гранитоидной формации, но это отличие существенно меньше, чем отличия от пород объединенного массива Кзыл-Омпул-Сандык.

Ранее (Бондаренко, 1968) методика сравнительного анализа объектов с закономерной изменчивостью свойств предлагалась для определения комагматичности интрузивных и эффузивных составляющих вулкано-плутонических формаций на основе петрохимической информации. Ниже приводится пример применимости изложенных выше методического подхода и статистических методов для обоснования возможности или невозможности объединения двух комплексов в одну вулкано-плутоническую формацию.

Геологический материал и петрохимическая информация, положенные в основу приведенного ниже примера, заимствованы из монографии Г. Б. Флерова и А. В. Колоскова (1976), авторы которой определяют характерную особенность описываемой формации следующим образом: ...«выделенная нами формация трахибазальтов — габбро-сиенитов Центральной Камчатки представляет собой особый тип и не находит прямых аналогов в ряду базальтовых формационных типов (согласно классификации Ю. А. Кузнецова)» (с. 123). Анализ значительного по объему набора признаков генетического родства вулканогенных и плутонических образований формации от их структурно-тектонических позиций до тонких минералогических особенностей слагающих их пород не оставляет у авторов монографии сомнений относительно генетического родства интрузивных и вулканогенных составляющих формации трахибазальтов — габбро-сиенитов Центральной Камчатки.

Ниже показана применимость статистических методов при определении генетического родства составляющих вулкано-плутонической формации. Следует учитывать, что при этом был использован лишь один признак из приведенного в монографии набора: «3. Близость петрографического и химического составов главных типов пород одинаковой кислотности и сходство эволюции пород вулканической и интрузивной щелочно-известковой серий» (Флеров, Колосков, 1976, с. 125). Из приведенной цитаты следует, что одним из признаков генетического родства интрузивной и эффузивной составляющих рассматриваемой формации является близость петрохимических составов «главных типов пород одинаковой кислотности» для этих составляющих и сходство эволюции пород в плутонической и вулканогенной ветвях процесса формировании формации трахибазальтов — габбро-сиенитов Центральной Камчатки.

Определение близости петрохимических составов пород вулканогенной и интрузивной составляющих рассматриваемой формации по существу совпадает с задачей сравнения геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа. Объектами сравнительного анализа в данном примере послужили: вулканогенный комплекс трахибазальтов и интрузивный комплекс габбро-сиенитов Центральной Камчатки. Информация о петрохимических составах главных типов пород обоих комплексов заимствована из табл. 15 монографии Г. Б. Флерова и А. В. Колоскова (1976). Эмпирическая последовательность, представляющая петрохимические свойства пород вулканогенной составляющей формации, сформирована на базе химических анализов пород № 1—41 табл. 15 и аналогичная последовательность для плутонической составляющей — на основе анализов № 56—94 той же таблицы. Таким образом, объем эмпирической последовательности вулканогенных пород равен 41 наблюдению, а объем последовательности для интрузивных пород — 39 наблюдениям.

Из предшествующего изложения известно, что из набора статистических методов для проверки нулевой гипотезы (10), соответствующей задачам сравнения геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа, для широкого употребления предлагался метод сравнения многомерных условных средних с использованием линейной интерполяции. Этот метод был применен для проверки нулевой гипотезы (10) с использованием указанных выше эмпирических последовательностей. Все вычислительные процедуры, связанные с рассматриваемым примером, проведены на ЭВМ ЕС—1020 в ВЦ ИМГРЭ по программе, составленной В. А. Соловьевым. Результаты этих вычислений даны в табл. 7 в виде распечатки результатов счета ЭВМ ЕС—1020.

Следует привести некоторые пояснения, необходимые для понимания содержания табл. 7. В данном примере вулканогенный комплекс используется в качестве эталонного, как обладающий большим объемом наблюдений в пределах множества U—41. Следовательно, знак «+» в столбце «среднее» является указанием

Таблица 7

Сравнение петрохимических особенностей интрузивных и вулканогенных образований формации трахибазальтов — габбро-сиенитов Центральной Камчатки

ВЦ ИМГРЭ Соловьев В. А. Программа — Сравнение условных средних
с использованием линейной интерполяции

Кам. щел. 1 Кам. щел. 2

Интервал содержаний кремнезема
43,54 59,59 39,26 72,02

Количество проб
41 39

Общий интервал содержаний кремнезема
43,54 59,59

Количество проб в общем интервале
содержаний кремнезема
41 32

Количество DELTA
32

Сравнение условных средних
массив DELTA

T102	AL203	FE203	FEO	MNO	MGO	CAO	NA20	K20	SUMFE
—0,75	2,17	—3,59	—1,70	0,10	0,24	4,97	—0,13	—0,20	—5,29
—0,89	—4,35	—2,61	0,66	0,11	6,81	2,65	—0,84	—0,81	—1,95
—0,60	—2,86	5,30	—1,20	0,13	0,32	0,55	—0,02	0,58	4,10
—0,18	—5,18	—2,59	2,01	—0,01	3,95	3,77	—0,42	—0,63	—0,58
—0,27	2,93	—1,28	0,80	0,08	—1,22	—0,88	0,74	—0,42	—0,49
0,07	—3,37	—1,38	2,05	0,01	1,63	1,93	—0,38	—0,46	0,68
0,34	4,38	—0,90	0,59	—0,09	—3,69	—1,93	1,11	—0,95	—0,31
0,02	1,62	—0,67	0,60	0,18	—2,49	2,47	0,83	—0,69	—0,07
0,44	5,59	—0,52	—0,95	0,02	—1,35	4,50	—0,77	—1,95	—1,47
0,19	3,76	—0,58	2,75	0,01	0,62	—1,92	0,01	—1,28	2,18
—0,32	—10,36	—3,24	—0,56	—0,13	9,63	14,01	—1,83	—3,92	—3,81
0,04	0,38	—4,04	0,78	—0,12	1,97	4,52	—1,15	—0,37	—3,26
0,09	0,31	—0,35	0,37	0,00	—0,60	3,62	—0,47	—2,21	0,02
—0,33	—8,27	—2,71	1,05	0,02	10,51	7,93	—1,67	—3,73	—1,65
0,23	1,86	—3,23	1,21	—0,11	1,04	3,73	—0,95	—1,65	—2,01
—0,46	—4,72	—0,30	0,47	0,02	2,71	3,02	—0,50	—0,12	0,16
—0,10	—15,39	0,31	—1,47	—0,03	12,19	13,42	—1,33	—5,23	—1,16
0,32	0,86	0,17	1,01	0,07	—0,17	0,88	0,34	—1,79	1,18
—0,10	1,80	—2,70	1,47	0,00	—0,10	1,48	0,17	—0,29	—1,23
—0,16	—0,42	—0,78	—0,16	0,04	1,34	—0,11	—0,58	0,77	—0,93
—0,41	—16,93	—3,05	—3,05	—0,04	13,42	16,75	—2,81	—3,41	—5,03
—0,59	1,57	—1,11	0,83	0,05	1,44	4,23	—2,29	—0,89	—0,28
—0,28	0,18	0,03	—1,05	—0,04	1,29	0,98	—1,33	0,67	—1,01
—0,23	3,58	—2,48	—0,02	—0,07	—1,56	1,32	1,23	—1,07	—2,50
—0,52	1,31	1,71	0,25	—0,04	—2,31	—0,66	0,34	—0,39	1,96
0,11	—1,78	—0,04	1,56	0,06	—0,25	1,37	—0,89	0,68	1,52
—0,30	—1,47	2,35	0,02	—0,07	0,79	0,21	—1,39	—0,17	2,37
0,10	0,20	0,87	—0,44	0,05	—0,68	1,43	—0,34	0,08	0,44
0,12	—0,24	—0,23	—0,20	—0,03	0,65	2,19	—1,79	—0,79	—0,43
0,05	—0,13	—0,90	0,19	0,10	0,52	1,85	—0,80	—0,30	—0,72
0,09	3,09	—1,72	—0,65	—0,05	—0,49	1,49	—0,30	—1,06	—2,37
0,07	—0,31	—0,24	0,25	—0,01	0,57	1,22	0,01	—0,66	0,01

	Среднее	Дисперсия	Величина критерия V
TI	−0,13	0,12	4,42
AL	−1,26	29,27	1,72
FE 3	−0,95	4,59	6,32
FE 2	0,27	1,32	1,73
MN	0,01	0,01	0,53
MG	1,77	20,92	4,81
CA	3,16	29,05	10,98
NA	−0,57	1,24	8,33
K	−1,02	3,03	11,01
SFE	−0,68	4,66	3,22

Величина критерия W1 (FE 2O3 и FEO)
49,84

Величина критерия W2 (сумма FE)
45,01

на более высокое содержание данного петрогенного элемента во всех разновидностях пород плутонического комплекса, а знак «—» указывает на повышенное содержание этого элемента во всех разновидностях пород вулканогенного комплекса исследуемой формации. Столбец SUMFE в массиве DELTA составляют значения z_{ji} для содержания суммарного железа в соответствующих разновидностях пород вулканогенного и интрузивного комплексов. Величина критерия $W1$ соответствует сопоставлению объектов с раздельным сравнением содержания окисного и закисного железа в породах, а величина критерия $W2$ с сравнением суммарного содержания железа.

Вычисленные значения критериев равны $W1 = 49{,}84$ и $W2 = 45{,}01$. В условиях нулевой гипотезы (10) примененный в данном примере критерий распределен приблизительно как χ^2 с m степенями свободы. Если учесть, что число степеней свободы в случае критерия $W1$ равно 9, то допустимое значение для него при уровне значимости 0,05 равно 16,9. Вычисленное значение критерия в рассматриваемом случае существенно превышает допустимое, т. е. мы должны признать справедливость одной из множества альтернатив. Аналогичное решение должно быть принято и для критерия $W2$, так как $\chi^2_{0{,}05{,}8\ \text{ст.св.}} = 15{,}5$.

Таким образом, в результате вычислительных процедур по примененному статистическому методу должен быть сделан вывод о невозможности принятия проверяющейся нулевой гипотезы (10). Отсюда с учетом формулировки задач сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа следует, что предположение о близости петрохимических особенностей разновидностей пород одинаковой кремнекислотности вулканогенной и плутонической составляющих формации не может быть признано подтверждающимся петрохимическим материалом табл. 15 отмеченной выше монографии. Числовые значения, приведенные в графах «среднее» и «величина критерия V», позволяют определить характер различий в петрохимических составах пород сравниваемых объектов при одинаковой их кремнекислотности. Допустимое значение для критерия V равно 3,84 при уровне значимости 0,05, следовательно, вычисленные значения критерия в рассматриваемом примере превышают допустимое при сравнении содержаний следующих петрогенных окислов: TiO_2, Fe_2O_3, MgO, CaO, Na_2O, K_2O. Привлекая знак при среднем, можно определить, что при одинаковой кремнекислотности породы эффузивной составляющей обладают повышенным содержанием TiO_2, Fe_2O_3 и щелочей, т. е. Na_2O и K_2O по сравнению с породами интрузивной составляющей формации, а породы интрузивного генезиса при равном содержании SiO_2 содержат бо́льшее количество MgO и CaO, чем их вулканогенные аналоги.

Таким образом, в результате применения статистического метода поставлен под сомнение один из признаков генетического родства вулканического и плутонического комплексов, объединяемых Г. Б. Флеровым и А. В. Колосковым (1976) в формацию трахибазальтов — габбро-сиенитов. При детальном изучении раздела монографии, посвященного петрохимическим особенностям пород формации трахибазальтов — габбро-сиенитов, становится очевидной неслучайность полученного в результате статистической обработки результата. Так, при наложении приведенных в рис. 33 указанной монографии графиков *А* и *Б* друг на друга повышенная щелочность эффузивных пород и более высокое содержание CaO в интрузивных породах при одинаковых содержаниях кремнекислоты не требуют доказательств (рис. 10). Авторы монографии не оценивали количественно очевидные и для них расхождения в содержаниях некоторых петрогенных окислов в эффузивных и интрузивных породах формации и приняли их за несущественные для стоявших перед ними при написании монографии целей.

Существенность различий в петрохимических свойствах показана в рассматриваемом примере с помощью методов математической статистики, откуда следует, что указанными различиями пренебрегать нельзя. Если учесть, что в цитируемой монографии есть рисунки и фразы в тексте, свидетельствующие о различии петрохимических особенностей пород формации разного происхождения, то наличие в тексте указания авторов на основания или источник заключения о близости петрохимических составов

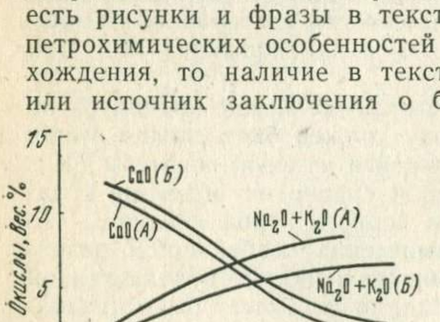


Рис. 10. Вариационные диаграммы CaO, $(Na_2O+K_2O)-SiO_2$ для пород формации трахибазальтов — габбро-сиенитов Центральной Камчатки.

А — вулканогенный комплекс, *Б* — интрузивный комплекс пород формации одинаковой кислотности следует считать необходимым.

Следует отметить, что в геологической литературе неоправданно часто употребляются термины: «близость» или даже «тождество» составов пород сравниваемых объектов без привлечения количественной информации и методов ее обработки. Применение термина «тождество» к сравнительной ее характеристике составов каких-либо геологических объектов вряд ли вообще оправдано. Введение в текст термина «близость» требует предварительного применения методов обработки количественной информации с обязательным указанием, что понимается под «близостью» в данной процедуре. Другими словами, количественная информация, в частности петрохимическая, требует количественных методов обработки и мер при ее анализе, особенно сравнительном.

Признак генетического родства вулканических и плутонических образований формации трахибазальтов — габбро-сиенитов, приведенный в начале данного примера, представляют два свойства составляющих формации. Первому из этих свойств: близости петрохимических составов вулканогенных и интрузивных пород формации при условии их одинаковой кремнекислотности — было посвящено предшествующее изложение. Далее на основе имеющейся петрохимической информации будет апробировано второе свойство из приведенных в рассматриваемом признаке: сходство эволюции пород вулканической и плутонической составляющих в процессе формирования формации. Г. Б. Флеров и А. В. Колосков считают, что «пути эволюции расплавов в рядах пород трахибазальт — ортоклазовый трахиандезит и габбро-кварцевый сиенит... в целом совпадают...» (1976, с. 115). Нетрудно видеть, что это предположение аналогично по смыслу задачам сравнения геологических объектов второго типа. Сходство эволюции вулканической и плутонической составляющих формации должно быть отражено и в сходстве тенденций изменения вещественных свойств разновидностей пород, формировавшихся в процессе становления формации трахибазальтов — габбро-сиенитов. Сходству тенденций в настоящей работе соответствуют условия, выполняющиеся при принятии нулевой гипотезы (20). Следовательно, упомянутое в цитате сходство эволюции рассматриваемых объектов может быть подкреплено статистически проверенной близостью тенденций изменения вещественных признаков в последовательностях разновидностей пород.

Проверка этого предположения проведена с помощью метода сравнения условных средних в предположении о возможности линейной интерполяции с предварительным центрированием значений. Центрирование значений содержаний окислов при данных значениях условия безусловными средними необходимо вследствие существенных различий в петрохимических особенностях пород сравниваемых комплексов.

Применение отмеченного выше статистического метода осуществлено с помощью ЭВМ ЕС—1020 ВЦ ИМГРЭ по программе,

Таблица 8

Сравнение тенденций изменения петрохимических составов пород при изменении их кремнекислотности для вулканической и плутонической составляющих формации трахибазальтов — габбро-сиенитов Центральной Камчатки

ВЦ ИМГРЭ Соловьев В. А. Программа — Сравнение условных средних с использованием линейной интерполяции

Кам. щел. 1 Кам. щел. 2

Интервал содержаний кремнезема

43,54 59,59 39,26 72,02

Количество проб

41 39

Общий интервал содержаний кремнезема

43,54 59,59

Количество проб в общем интервале содержаний кремнезема

41 32

Количество DELTA

32

Сравнение центрированных условных средних (тенденция) массив DELTA

TI02	AL203	FE203	FEO	MNO	MGO	CAO	NA20	K20	SUMFE
—0,72	3,32	—2,59	—2,02	0,10	—1,44	1,98	0,26	1,02	—4,61
—0,85	—3,20	—1,61	0,34	0,11	5,14	—0,34	—0,44	0,41	—1,27
—0,56	—1,70	6,30	—1,52	0,13	—1,35	—2,45	0,38	1,80	4,78
—0,15	—4,03	—1,59	1,69	—0,01	2,28	0,78	—0,03	0,58	0,10
—0,24	4,08	—0,28	0,47	0,08	—2,89	—3,87	1,13	0,80	0,19
0,10	—2,21	—0,38	1,73	0,00	—0,04	—1,07	0,01	0,76	1,36
0,38	5,54	0,10	0,27	—0,09	—5,36	—4,92	1,50	0,27	0,37
0,05	2,78	0,33	0,27	0,18	—4,16	—0,52	1,22	0,53	0,60
0,48	6,74	0,48	—1,27	0,02	—3,03	1,51	—0,38	—0,73	—0,79
0,23	4,92	0,42	2,43	0,01	—1,05	—4,91	0,40	—0,07	2,86
—0,29	—9,21	—2,24	—0,89	—0,13	7,96	11,01	—1,46	—2,70	—3,13
0,07	1,53	—3,03	0,46	—0,12	0,30	1,53	—0,76	0,85	—2,58
0,12	1,47	0,66	0,05	0,00	—2,27	0,62	—0,08	—0,99	0,70
—0,30	—7,11	—1,70	0,73	0,01	8,84	4,93	—1,28	—2,51	—0,97
0,26	3,01	—2,23	0,89	—0,11	—0,63	0,74	—0,56	—0,43	—1,33
—0,42	—3,57	0,70	0,14	0,01	1,04	0,03	—0,10	1,10	0,84
—0,07	—14,24	1,31	—1,79	—0,03	10,52	10,43	—0,94	—4,01	—0,48
0,35	2,01	1,17	0,69	0,07	—1,84	—2,11	0,73	—0,58	1,86
—0,07	2,95	—1,70	1,15	0,00	—1,78	—1,51	0,56	0,93	—0,55
—0,13	0,74	0,23	—0,48	0,04	—0,33	—3,10	—0,18	1,99	—0,25
—0,38	—15,78	—2,05	—2,30	0,04	11,75	13,75	—2,42	—2,20	—4,35
—0,56	2,72	—0,11	0,51	0,05	—0,23	1,24	—1,90	0,33	0,40
—0,25	1,33	1,04	—1,37	—0,04	—0,38	—2,01	—0,94	1,89	—0,33
—0,20	4,74	—1,47	—0,34	—0,07	—3,23	—1,67	1,62	0,15	—1,82
—0,48	2,46	2,71	—0,07	—0,04	—3,98	—3,66	0,73	0,83	2,64
0,15	—0,63	0,96	1,24	0,06	—1,92	—1,62	—0,49	1,90	2,19
—0,27	—0,31	3,35	—0,31	—0,08	—0,88	—2,78	—1,00	1,04	3,05
0,13	1,35	1,88	—0,76	0,05	—2,35	—1,56	0,05	1,29	1,12
0,16	0,91	0,77	—0,52	—0,03	—1,02	—0,80	—1,40	0,42	0,25
0,09	1,02	0,10	—0,14	0,10	—1,15	—1,14	—0,41	0,92	—0,04
0,12	4,25	—0,72	—0,97	—0,05	—2,16	—1,50	0,09	0,16	—1,69
0,10	0,84	0,76	—0,08	—0,01	—1,10	—1,77	0,40	0,55	0,69

	Среднее	Дисперсия	Величина критерия V
TI	—0,10	0,12	2,60
AL	—0,10	27,65	0,01
FE3	0,05	3,66	0,02
FE2	—0,06	1,25	0,08
MN	0,01	0,01	0,34
MG	0,10	17,69	0,02
CA	0,16	18,79	0,05
NA	—0,18	0,94	1,07
K	0,20	1,99	0,61
SFE	—0,01	4,18	0,00

Величина критерия $W1$ (FE 203 и FEO)
4,80

Величина критерия $W2$ (сумма FE)
4,70

составленной В. А. Соловьевым. Результаты приведенных вычислений приведены в виде распечатки на АЦПУ в табл. 8. Обозначения в этой таблице те же, что и в предыдущей. Значения обоих критериев ($W1=4{,}80$ и $W2=4{,}70$) существенно ниже соответствующих допустимых значений, равных 16,9 и 15,5.

Таким образом, имеющиеся в нашем распоряжении эмпирические последовательности, сформированные на базе петрохимической информации работы Г. Б. Флерова и А. В. Колоскова (1976), и их сравнительный анализ с помощью предложенных выше методов позволяют считать сходными тенденции изменения вещественных свойств разновидностей пород в процессе становления интрузивных и вулканогенных образований формации трахибазальтов — габбро-сиенитов Центральной Камчатки.

Вывод Г. Б. Флерова и А. В. Колоскова (1976) о сходстве эволюции пород при формировании вулканической и плутонической составляющих формации соответствует имеющемуся фактическому материалу. Следует учитывать, что при использовании статистических методов эволюция понимается в смысле приведенной выше модели процесса петрогенезиса.

Таким образом, проверка одного из признаков генетического родства плутонических и вулканических образований формации (Флеров, Колосков, 1976) предлагаемыми здесь статистическими методами привела к следующим результатам. Предполагаемая близость петрохимических составов пород одинаковой кремнекислотности не подтверждается имеющимся в распоряжении авторов петрохимическим материалом, в то же время пути эволюции вулканической и плутонической составляющих формации, построенные по тому же петрохимическому материалу, следует признать сходными.

Полученное несоответствие результатов составным частям одного признака генетического родства, может быть объяснено при дальнейшем изучении формации трахибазальтов — габбро-сиенитов Центральной Камчатки. В настоящее время по этому вопросу можно привести следующие соображения. При сравнительном анализе вещественных свойств и тенденций их изменения для объектов с целью возможности их объединения в один формационный тип или вулкано-плутоническую формацию более устойчивым и отсюда предпочтительным признаком следует считать сходство тенденций, а не близость петрохимического состава пород одинаковой кремнекислотности. В связи с этим приведенные выше результаты статистической обработки петрохимической информации не противоречат выводу авторов монографии о комагматичности интрузивных и эффузивных образований формации в принятом ими смысле.

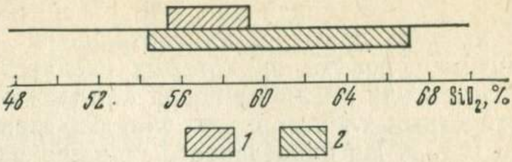
Следующий пример предназначен для демонстрации преимуществ рассмотренной выше методики в приложении к широко распространенным сравнительным петрохимическим исследованиям. В работе Д. П. Радулеску и А. Димитриу (Radulesku, Dimitriu, 1973) приведено сопоставление петрохимических особенностей лав, излившихся в два этапа в трех регионах: Калемани, Гургуй, Харгита. Причем при петрохимических сопоставлениях шести лавовых комплексов (Калемани I и II, Гургуй I и II, Харгита I и II) авторы применяли три статистических метода: два метода сравнения безусловных средних — Рао — Уилкса и Д. А. Родионова и метод сравнения условных средних автора настоящей работы. Не задаваясь целью обсуждать здесь указанную работу и приведенные в ней выводы, из нее заимствован один достаточно показательный пример для сравнения результатов, полученных при применении методов сопоставления безусловных и условных средних.

При сравнении петрохимических особенностей лав комплексов Харгита I с лавами Харгита II авторами цитируемой статьи были получены следующие результаты: при применении метода Рао — Уилкса — значение критерия $V=12{,}37$ при допустимом значении $\chi^2_{0{,}05{,}5\,\text{ст.св.}}=11{,}1$, при применении метода Д. А. Родионова — $V=29{,}5$ при допустимом значении $\chi^2_{0{,}05{,}12\,\text{ст.св.}}=21{,}0$ и при применении метода сравнения условных средних — $W^2=9{,}48$ при допустимом значении $\chi^2_{0{,}05{,}5\,\text{ст.св.}}=11{,}1$. Таким образом, нулевая гипотеза о равенстве математических ожиданий, для проверки которой предназначен как метод Рао — Уилкса, так и метод Д. А. Родионова, в данном случае должна быть отклонена как не соответствующая эмпирическим данным.

Как известно из предшествующего изложения, данной нулевой гипотезе соответствует вполне определенная задача петрохимических исследований, которая формулируется как задача о равенстве средних петрохимических составов сопоставляемых комплексов. С другой стороны, величина критерия W^2, полученная по тем же выборочным данным, свидетельствует о том, что нулевая гипотеза, проверяемая с помощью данного критерия, должна быть

Рис. 11. Соотношение опробованных разновидностей пород различной кремнекислотности в сопоставляемых комплексах Харгита I и Харгита II.

1 — спектр кремнекислотности пород комплекса Харгита I (интервал содержаний SiO_2 55,40 ÷ 59,28); *2* — спектр кремнекислотности пород комплекса Харгита II (интервал содержаний SiO_2 54,39 ÷ 67,11)



признана состоятельной. Вид этой нулевой гипотезы приведен выше, а геологический смысл ее в приложении к петрохимическим исследованиям можно сформулировать следующим образом: можно ли считать, что петрохимические особенности всех одновременно встречающихся в сравниваемых комплексах разновидностей пород, обладающих одинаковой кремнекислотностью, не отличаются друг от друга? В итоге результаты применения методов Рао — Уилкса и Д. А. Родионова выявили существенные различия в петрохимических особенностях сопоставляемых комплексов, а метод сравнения условных средних привел к выводу, что по петрохимическим свойствам разновидности пород одинаковой кремнекислотности в этих комплексах неотличимы друг от друга.

Расмотрим причины существенно различного результата, полученного от применения методов Рао — Уилкса и Д. А. Родионова, с одной стороны, и метода сравнения условных средних — с другой. Необходимо еще раз обратить внимание читателя на различную по сути формулировку нулевых гипотез и их геологической интерпретации в сопоставляемых методиках. Причина различия результатов применения отмеченных методов становится очевидной, если проанализировать рис. 11, заимствованный с некоторыми несущественными изменениями из цитируемой статьи (Radulesku, Dimitriu, 1973): на рисунке четко видно, что один из комплексов, по крайней мере в опробованной части, представлен более широким по кремнекислотности спектром разновидностей пород. Естественно, что объективное существование «естественного петрохимического тренда», проявленного в значительно большей степени в выборке, представляющей комплекс Харгита II, и обусловило искусственное несовпадение средних петрохимических характеристик сопоставляемых комплексов (Харгита I — Харгита II).

Данный пример приведен с целью демонстрации методических преимуществ учета в сравнительных петрохимических исследованиях такой объективной особенности геологических объектов как закономерная изменчивость их свойств, неучитываемой при применении, в частности, методов Рао — Уилкса и Д. А. Родионова в приведенной интерпретации (в случае метода Д. А. Родионова имеется в виду принятый авторами статьи фиксированный объем однородных совокупностей).

Следует отметить, что из 15 сопоставлений, проведенных авторами цитируемой статьи, нами рассмотрено здесь только одно. Естественно, что в статье можно найти практически любые соотношения между результатами трех указанных выше методов, чаще всего — совпадающие. Это и понятно, поскольку, как явствует из данного примера, на соотношение результатов влияет много причин, основные из которых сводятся к следующему: истинное сходство или различие пород комплексов, соотношение кремнекислотностных спектров для области совпадающей кремнекислотности и т. п. Из приведенного примера следует еще, что рассматриваемые в настоящей работе методы незаменимы на этапе применения математических методов при сопоставлении петрохимических особенностей магматических комплексов в условиях различной обнаженности, опробованности и эродированности их, с чем геолог сталкивается в большинстве случаев.

В качестве примера применимости предложенных методов в минералогических исследованиях приводится пример, основные положения и выводы в тезисной форме которого были опубликованы в совместной работе В. Г. Фоминых и автора (1973).

Задача проведенных исследований формулировалась следующим образом: можно ли считать, что минералы группы клинопироксенов (амфиболов), отобранные из пород титаномагнетитовых месторождений высокотитанистого типа, неотличимы при одинаковом значении выбранного ранжирующего параметра от подобных минералов пород малотитанистого типа титаномагнетитовых месторождений по химическому и геохимическому составу? Как видно из приведенной формулировки, поставленная задача по смыслу соответствует задаче сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа, учитывая уже отмечавшееся непрерывное изменение свойств минеральных разновидностей указанных групп минералов.

По предложению В. Г. Фоминых, в качестве ранжирующего параметра (условия) был использован коэффициент железистости (f'). Сравнение проводилось по эмпирическим последовательностям, характеризующим изменения составов клинопироксенов и амфиболов при изменении значений коэффициента железистости. Сопоставление проводилось по выборочным совокупностям, одну из которых составляют клинопироксены из габброидов высокотитанистого типа титаномагнетитовых месторождений Малый Куйбас, Копанского, Маткальского, Волковского, а другую — клинопироксены из ультрабазитов и габброидов малотитанистого типа титаномагнетитовых месторождений Качканарского, Гусевогорского, Синегорского, Висимского, Нижне-Тагильского. Состав и геохимические особенности клинопироксенов каждого месторождения независимо от его типа сопоставлялись с клинопироксенами всех остальных.

В результате были выявлены особенности химического состава и содержаний редких и рассеянных элементов в каждой совокупности по сравнению со всеми остальными с учетом того, что сопоставление производилось только по разновидностям клинопироксенов с одинаковым значением коэффициента железистости (f'). Помимо частных особенностей состава клинопироксенов из пород различных месторождений, были установлены четкие и устойчивые отличия в химическом составе и содержании редких и рассеянных элементов для клинопироксенов из месторождений различного генетического типа. Причем эти отличия характерны для всех одинаковых минеральных разновидностей, входящих в группу клинопироксенов.

Так, было установлено, что клинопироксены из габброидов месторождений титаномагнетитов высокотитанистого типа характеризуются повышенными содержаниями SiO_2, TiO_2, MgO, Co, Ni, по сравнению с клинопироксенами из месторождений титаномагнетитов малотитанистого типа. В то же время клинопироксены из ультрабазитов и габброидов месторождений титаномагнетитов малотитанистого типа по сравнению с клинопироксенами месторождений высокотитанистого типа при одинаковом значении коэффициента железистости всегда обладают повышенными содержаниями CaO, Al_2O_3, MnO, Cr_2O_3.

Аналогичный сравнительный анализ был проведен для амфиболов из габброидов и горнблендитов титаномагнетитовых месторождений высокотитанистого типа: Маткальского, Копанского, Кусинского, Волковского, и амфиболов из ультрабазитов и габброидов титаномагнетитовых месторождений малотитанистого типа: Гусевского, Синегорского, Висимского, Первоуральского. Выборочные последовательности были сформированы с использованием того же ранжирующего параметра — коэффициента железистости f' и по той же процедуре. И в этом же случае амфиболы из пород месторождений высокотитанистого типа при одинаковом значении коэффициента железистости отличаются более высоким содержанием SiO_2, MgO, TiO_2, Co, Ni, а для амфиболов из пород месторождений малотитанистого типа при тех же условиях характерны повышенные содержания CaO, Al_2O_3, MnO, Cr_2O_3.

Отмеченные выше особенности клинопироксенов и амфиболов из пород месторождений разного генезиса не могут быть получены иным способом, поскольку на сравнение их характеристик без отнесения к равному значению ранжирующего параметра накладывается влияние неоднородного развития в сопоставляемых породах различных разновидностей минералов указанных групп. Отсюда очевидно, что многие геохимические особенности групп минералов переменного состава не могут быть выявлены без учета характерной для подобных групп закономерной изменчивости свойств.

Метод анализа диаграмм и обоснования выводов с их помощью на основе имеющейся эмпирической информации можно считать наиболее распространенным в различных отраслях геологической науки. В связи с этим весьма актуальна проблема перехода от качественных методов анализа диаграмм к количественным. Количественные методы анализа диаграмм позволяют повысить доказательность выводов, построенных на анализе диаграмм.

Приведенный ниже пример имеет целью показать способ применения рассмотренных выше критериев в качестве количествен-

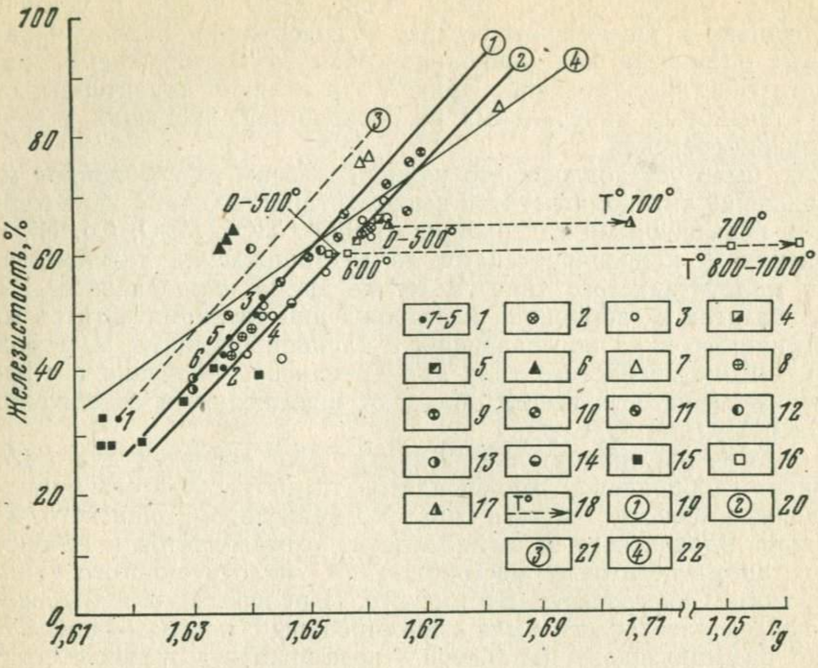


Рис. 12. Диаграмма зависимости светопреломления и железистости биотитов. По Н. Л. Пламеневской (1974).

1 — биотиты аповулканитов ореола коктенкольского интрузива внешней и внутренней зон; *2* — биотиты гранитов коктенкольского интрузива; *3* — биотиты полиметаморфизованных кристаллических сланцев («гнейсо-роговиков») внутренней зоны ореолов гранитоидов Северного Улутау; *4* — тоже, средней зоны; *5* — то же, внешней зоны; *6* — то же, полиметаморфизованных порфиритов внутренней зоны; *7* — то же, внешней зоны; *8* — биотиты гранитоидов и апогранитов Северного Улутау; *9* — биотиты гранитов нормальной щелочности Комбского массива в Бетпак-Дале; *10* — то же, гранитов повышенной щелочности; *11* — то же, гибридных гранитов эндоконтактной фации; *12* — биотиты роговиков ореола массива Ардара; *13* — то же, внешней зоны; *14* — биотит кордиерит-биотитового роговика Японии; *15* — биотиты околоскарновых пород; *16* — биотиты пегматитов Карелии; *17* — то же; *18* — увеличение светопреломления с ростом температуры; *19* — прямая зависимость светопреломления и железистости для биотитов пегматитов; *20* — то же, для биотитов роговиков разных районов мира; *21* — то же, для биотитов внешних зон ореолов гранитных интрузивов (фация альбит-эпидотовых роговиков); *22* — то же, для биотитов пород амфиболитовой фации регионального метаморфизма.

ной меры при одном из вариантов анализа диаграмм. Два других аспекта применения рассматриваемой методики, которыми однако, не ограничиваются все способы применения предлагаемой методики, приведены выше (см. рис. 1 и 5).

В работе Н. Л. Пламеневской (1974) проводится сравнительный анализ биотитов из контактовых роговиков, пегматитов и метаморфических пород амфиболитовой фации. Рассмотрение биотитов различного происхождения после сопоставления особенностей их химизма завершается анализом приведенной автором статьи диаграммы, построенной в координатах: ось абсцисс — показатель преломления (n_g), ось ординат — железистость биотитов. В результате анализа отмеченной диаграммы Н. Л. Пламеневская пишет: «При сравнении зависимости железистости и светопреломления биотитов роговиков и пегматитов (рис. 12 в настоящей работе, линии 1, 2. — *В. Б.*) с биотитами пород амфиболитовой фации (рис. 12, линия 4. — *В. Б.*) оказалось, что для первых эти зависимости носят более прогрессивный характер». По мнению автора статьи, «более прогрессивный характер» выражается в более крутом наклоне линий 1 и 2, аппроксимирующих тенденцию изменения железистости от роста показателя преломления, чем наклон аналогичной линии, аппроксимирующей ту же зависимость для пород амфиболитовой фации (рис. 12, линия 4).

Н. Л. Пламеневская не приводит никаких указаний на способ построения тенденций, отражающих зависимость железистости от показателя преломления. В связи с этим нами была предпринята попытка проверить соответствие приведенных в цитате выводов и фактического материала с помощью рассмотренной выше методики, чтобы показать, что анализ подобного рода диаграмм в различных отраслях геологии можно перевести на количественную основу с помощью рассматриваемой в настоящей работе методики. Как отмечалось выше, анализ диаграмм относится к первому типу сформулированных в главе 2 задач сравнения геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств.

Задачу, относящуюся по типу к задачам первого типа, можно сформулировать следующим образом: можно ли считать, что величина железистости биотитов роговиков совпадает с величиной железистости биотитов роговиков различных регионов мира, представленной на рис. 12 линией 1 при любом заданном значении светопреломления?

Если согласно с изложенным выше принять светопреломление в качестве условия и заменить его значения моделью δ, а величину железистости биотитов заменить моделью ξ, то приведенной выше задаче можно поставить в соответствие нулевую гипотезу

$$H_0 : M(\xi|\delta = d) = M(\xi'|\delta' = d) \tag{154}$$

для всех $d \in U$ при множестве альтернатив

$$H_1 : M(\xi|\delta = d) \neq M(\xi'|\delta' = d), \tag{155}$$

хотя бы для одного $d \in U$.

В выражениях (153) и (155) ξ' и δ' — соответствующие модели значений железистости и светопреломления для биотитов из роговиков различных регионов мира. Причем предполагается, что прямая 1 на рис. 12 совпадает с условным математическим ожиданием значений железистости при заданных значениях условия (светопреломления).

Следует оговориться, что не совпадающий с геологическим смыслом выбор условия связан с видом диаграммы, приведенной в статье Н. Л. Пламеневской (1974), на которой ось абсцисс представлена именно значениями светопреломления. Из регрессионного анализа известно (Айвазян, 1968 и др.), что ось абсцисс является, как правило, осью значений закрепленной случайной вели-

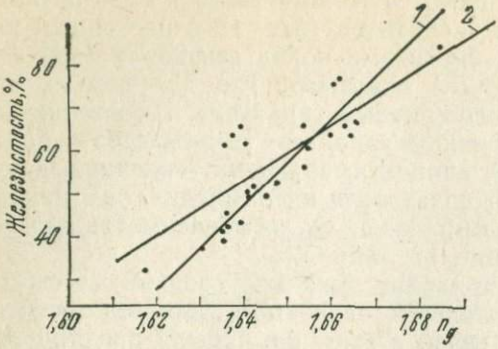


Рис. 13. Положение точек наблюдения на диаграмме в координатах: железистость — показатель преломления для биотитов из роговиков. Линии (*1*) и (*2*) отвечают соответствующим *линиям на рис.* 12

чины. С этими чисто формальными причинами и с удобством работы с указанной выше диаграммой связан выбор фигурирующего в нулевой гипотезе условия. Однако методически это не принципиально.

Проверка нулевой гипотезы (154) с использованием 27 наблюдений над железистостью и светопреломлением биотитов в роговиках (табл. 9, рис. 13) с помощью критерия

$$W = \frac{\bar{z}_i^2 n}{s^2} \tag{156}$$

Таблица 9

Значения железистости биотитов и их показателей преломления в роговиках

№ п/п	Железистость, %	Показатель преломления n_g	№ п/п	Железистость, %	Показатель преломления n_g
1	32	1,617	15	69	1,665
2	39	1,635	16	65	1,665
3	41	1,635	17	63	1,653
4	45	1,636	18	61	1,659
5	49	1,641	19	63	1,635
6	42	1,636	20	65	1,637
7	43	1,636	21	75	1,639
8	49	1,639	22	76	1,660
9	49	1,643	23	83	1,661
10	51	1,643	24	60	1,684
11	56	1,641	25	61	1,652
12	63	1,653	26	37	1,630
13	65	1,662	27	52	1,647
14	66	1,659			

Примечание. Все значения получены с диаграммы из работы Н. Л. Пламеневской (1974).

привела к следующему результату. Значение критерия W оказалось равным 0,04. Учитывая, что критическое для данного критерия значение для I степени свободы при уровне значимости 0,05 равно 3,84, нулевая гипотеза должна быть признана состоятельной. Отсюда может быть сделан вывод, что средняя тенденция изменения железистости при изменении светопреломления биоти-

тов из роговиков, описанная в статье Н. Л. Пламеневской, почти точно совпадает с прямой, построенной для тех же признаков в биотитах из роговиков разных регионов мира. В связи с этим можно считать, что линия *1* на рис. 13 хорошо аппроксимирует с позиций рассматриваемых признаков наблюдения, приведенные в табл. 9.

Точно такая же нулевая гипотеза была сформулирована для 27 эмпирических наблюдений, приведенных в табл. 9, и прямой 4 на рис. 12, отражающей, по мнению Н. Л. Пламеневской, изменение железистости в зависимости от светопреломления биотитов из амфиболитовой фации магматических *пород. Вычисленное* значение критерия W оказалось равным 0,06, что практически не отличается от приведенного выше. Нулевая гипотеза и в этом случае должна быть признана состоятельной. Отсюда может быть сделан вывод, что и прямая 4 почти точно совпадает с тенденцией изменения железистости биотитов при изменении светопреломления, отобранных из роговиков.

Таким образом, с *позиций количественного анализа* рассматриваемой диаграммы частный вывод автора статьи о более прогрессивном виде зависимости железистость — показатель светопреломления для роговиков при сравнении с подобной зависимостью в биотитах амфиболитовой фации не подтверждается эмпирическим материалом, приведенным на рис. 13. Цель приведенного примера заключается в демонстрации способа применения предлагаемой методики при анализе диаграмм подобного рода. В частности, в конкретном и аналогичных случаях для доказательства существенных различий в тенденциях изменения свойств биотитов из роговиков и пород амфиболитовой фации в координатах: железистость — показатель преломления следует рекомендовать применение рассмотренной в настоящем примере методики и критерия (156).

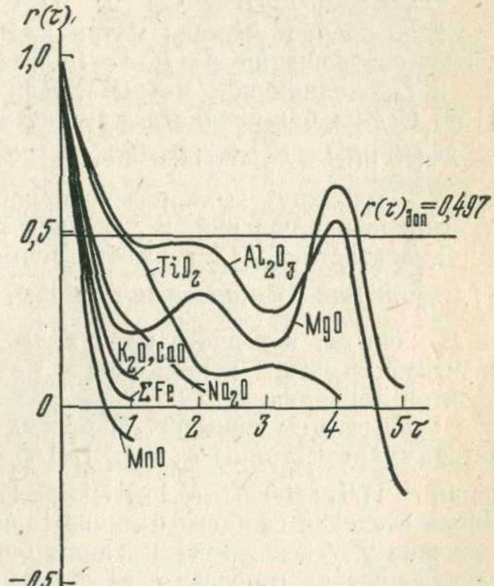


Рис. 14. Оценки автокорреляционных функций разностного процесса $[\varphi(\delta)-\varphi'(\delta)]$ для петрогенных окислов

В предлагаемом разделе *главы приводятся* некоторые реальные примеры, подтверждающие справедливость приведенных в главе 4 предположений.

Первый пример представляет собой анализ

автокорреляционной функции разностного процесса, т. е. $[\varphi(\delta)-\varphi'(\delta)]$ в условиях справедливости нулевой гипотезы (17). Как известно, было предположено, что в условиях нулевой гипотезы (17) разностный процесс принадлежит к классу нормальных Гауссовских процессов, причем, как следует из приведенного в главе 4 построения критерия (70), предполагалась попарная независимость ординат разностного процесса. Для иллюстрации правомочности этого предположения приводятся автокорреляционные функции для всех признаков реального разностного процесса (рис. 14).

Из приведенного рисунка видно, что для всех признаков — содержаний породообразующих окислов — автокорреляционная функция уходит в область незначимых при уровне значимости 0,05 эмпирических значений коэффициента корреляции. Для данного числа степеней свободы $(f=N-2=14)$ эмпирические значения коэффициента корреляции признаются значимыми, если они превышают по модулю величину 0,497. Целью приведенного примера является желание не д о к а з а т ь, а п о к а з а т ь правомочность одного из базовых предположений настоящей работы.

Второй пример касается основного предположения, на котором базируются обобщения критериев на многомерный случай: независимости величин ζ_j, $j=1, 2, ..., m$. Для проверки гипотезы о независимости признаков был использован критерий С. Кульбака (1967, с. 314) для проверки нулевой гипотезы

$$H_2 : \Sigma_2 = (\sigma_{ij}), \quad \sigma_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m, \tag{157}$$

где Σ_2 — ковариационная матрица. Эта нулевая гипотеза соответствует соотношению $\rho=(\rho_{ij})=I_m$, где ρ — корреляционная матрица, а I_m — единичная матрица. Для проверки нулевой гипотезы (157) С. Кульбак предлагает статистику

$$2\hat{I}(H_1 : H_2') = -N \log |R|, \tag{158}$$

где R — матрица эмпирических коэффициентов корреляции, а N — число наблюдений. В условиях нулевой гипотезы о независимости статистика (158) имеет асимптотическое χ^2-распределение с $f=\frac{1}{2}m\ (m-1)$ степенями свободы.

В качестве исходного материала для проверки гипотезы о независимости была использована матрица эмпирических коэффициентов корреляции для тех же восьми признаков (табл. 10), что и в предыдущем примере. В рассматриваемом примере $N=17$, а детерминант матрицы R, т. е. $|R|=-0,371$. Отсюда значение критерия $\widehat{\mathrm{I}}(H_1 : H_2)=-N\ \log|R|=-17\cdot1,569=-17(-0,431)=7,327$. Число степеней свободы в данном случае равно 28. Допустимое значение $\chi^2_{0,05,28\ \text{ст.св.}}=41,3$. Таким образом, в данном конкретном случае нулевая гипотеза о независимости признаков должна быть признана состоятельной.

Нет сомнения в том, что существует эмпирический материал, который в обоих рассмотренных случаях даст иные результаты,

Таблица 10

Матрица (*R*) эмпирических коэффициентов корреляции

Признаки	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0,60	—0,04	0,46	—0,18	0,57	0,02	—0,11
2	0,60	1	0,01	—0,22	—0,34	—0,56	0,17	0,12
3	—0,04	0,01	1	0,10	—0,20	—0,18	0,14	—0,36
4	0,46	—0,22	0,10	1	0,68	0,16	0,05	—0,02
5	—0,18	—0,34	—0,20	0,68	1	—0,06	—0,17	—0,33
6	0,57	—0,56	—0,18	0,16	—0,06	1	—0,11	—0,08
7	0,02	0,17	0,14	0,05	—0,17	—0,11	1	—0,13
8	—0,11	0,12	—0,36	—0,02	—0,33	—0,08	—0,13	1

т. е. поставит под сомнение правомочность принятых в работе предположений. Невыполнение принятых при построении критерия предположений, естественно, нежелательно и, как минимум, приводит к снижению мощности данного критерия относительно определенной части или всего множества альтернатив. Однако реальность предположений, подтверждаемая примерами, служит достаточным основанием для применения предложенных выше методов.

В качестве примера выбора ранжирующего параметра для формирования эмпирических последовательностей на базе направления наибольшей изменчивости в признаковом пространстве ниже приводятся интересные и показательные результаты, полученные Р. В. Леметром (Le Maitre, 1968). Указанная работа посвящена выбору координат для построения петрохимических диаграмм, отражающих наиболее характерные признаки магматических объектов. Р. В. Леметр подразделяет множество вариационных диаграмм на два типа: первый, использующий всю петрохимическую информацию, куда относятся диаграммы Харкера, Ларсена, индекс дифференциации (DI), индекс кристаллизации (CI), и т. п. и второй, использующий только часть характеристик в требуемом аспекте — это общая щелочно-кремнекислотная диаграмма Тилли, график в координатах железо — альбит (Уэджер), близкие диаграммы $MgO—\Sigma Fe$ — щелочи, $CaO—Na_2O—K_2O$ и т. д.

Указывая, что все отмеченные диаграммы приводят к затруднениям в интерпретации и сопоставлении объектов, Р. В. Леметр предлагает использовать для анализа петрохимической информации и выбора координат известный метод главных компонент. Далее автор считает, что две двумерные вариационные диаграммы с осями: 1-я главная компонента — 2-я главная компонента и 1-я главная компонента — 3-я главная компонента — представляют практически всю петрохимическую информацию об объекте. Р. В. Леметр приводит результаты анализа петрохимической информации по вулканическим свитам 44 провинций мира. Интересно и показательно привести полученные им результаты (табл. 11),

Таблица 11

Первые три собственных значения (в % к суммарной дисперсии) и первый собственный вектор (компонента) для исследованных провинций

Провинция	Собственные значения			Первый собственный вектор								
	Первое	Второе	Третье	SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	FeO	MgO	CaO	Na_2O	K_2O
1	89,59	6,83	2,16	0,715	—0,155	0,127	—0,063	—0,259	—0,398	—0,370	0,174	0,299
2	93,73	3,40	1,73	0,709	—0,139	0,232	—0,104	—0,338	—0,297	—0,394	0,154	0,177
3	80,84	13,87	4,47	0,783	—0,143	0,040	—0,063	—0,315	—0,203	—0,410	0,117	0,194
4	82,08	14,47	2,40	0,737	—0,101	0,161	—0,041	—0,313	—0,358	—0,385	0,140	0,160
5	88,85	5,75	3,09	0,735	—0,117	0,105	—0,118	—0,248	—0,342	—0,407	0,196	0,196
6	90,95	5,84	1,85	0,853	—0,105	—0,132	—0,036	—0,266	—0,195	—0,333	0,100	0,115
7	91,49	4,04	1,57	0,751	—0,106	0,115	—0,090	—0,322	—0,297	—0,390	0,139	0,200
8	86,09	5,81	3,90	0,643	—0,065	0,331	—0,105	—0,304	—0,409	—0,394	0,139	0,164
9	86,71	9,81	2,09	0,709	—0,108	0,227	—0,015	—0,352	—0,282	—0,440	0,177	0,083
10	80,23	15,80	1,97	0,809	—0,136	0,038	—0,048	—0,223	—0,253	—0,426	0,108	0,131
11	91,14	3,55	3,01	0,704	—0,136	0,218	—0,094	—0,306	—0,319	—0,415	0,201	0,147
12	87,39	5,90	2,39	0,774	—0,174	0,150	—0,162	—0,236	—0,229	—0,410	0,195	0,091
13	94,24	2,87	1,42	0,710	—0,105	0,174	—0,026	—0,318	—0,381	—0,390	0,169	0,166
14	76,59	11,97	5,65	0,716	—0,099	0,119	—0,014	—0,248	—0,362	—0,458	0,194	0,152
15	83,21	7,35	6,38	0,701	—0,171	0,172	—0,014	—0,335	—0,335	—0,396	0,207	0,168
16	95,29	2,29	1,45	0,855	—0,086	—0,069	—0,074	—0,269	—0,244	—0,314	0,077	0,123
17	91,78	5,12	1,82	0,707	—0,073	0,139	—0,084	—0,297	—0,321	—0,452	0,185	0,196
18	86,48	4,40	3,31	0,455	—0,017	0,428	—0,026	—0,185	—0,550	—0,455	0,134	0,216
19	96,50	1,65	1,43	0,865	—0,026	—0,175	—0,076	—0,174	—0,253	—0,326	0,073	0,091
20	94,23	3,46	1,27	0,860	—0,030	—0,177	—0,064	—0,190	—0,242	—0,331	0,038	0,137
21	92,51	4,22	2,14	0,878	—0,080	—0,060	—0,081	—0,237	—0,217	—0,320	0,038	0,079
22	94,84	3,29	1,03	0,864	—0,056	—0,117	—0,096	—0,218	—0,249	—0,315	0,075	0,113
23	93,22	2,79	1,82	0,874	—0,050	—0,153	—0,172	—0,202	—0,157	—0,309	0,028	0,141

Продолжение табл. 11

Провинция	Собственные значения			Первый собственный вектор								
	Первое	Второе	Третье	SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	FeO	MgO	CaO	Na_2O	K_2O
24	95,84	2,89	0,62	0,884	—0,029	—0,213	—0,137	—0,160	—0,178	—0,294	0,033	0,095
25	87,55	9,32	1,59	0,873	—0,029	—0,172	—0,093	—0,091	—0,208	—0,375	0,073	0,020
26	86,72	5,49	4,11	0,842	—0,025	—0,150	—0,069	—0,161	—0,276	—0,371	0,089	0,122
27	85,37	10,73	1,91	0,887	—0,022	—0,138	—0,044	—0,227	—0,187	—0,323	0,030	0,024
28	95,05	3,00	1,22	0,835	—0,013	—0,209	—0,091	—0,157	—0,193	—0,402	0,104	0,127
29	79,52	10,79	6,49	0,772	—0,015	—0,124	—0,025	—0,341	—0,415	—0,296	0,098	0,049
30	76,17	13,46	6,92	0,810	—0,038	—0,004	—0,074	—0,379	—0,283	—0,319	0,101	0,038
31	57,65	25,55	6,77	0,835	—0,052	—0,043	—0,255	—0,139	—0,251	—0,366	0,101	0,083
32	90,38	5,34	2,35	0,869	—0,033	—0,105	—0,118	—0,200	—0,215	—0,348	0,074	0,077
33	90,98	4,33	1,99	0,858	—0,013	—0,188	—0,163	—0,107	—0,169	—0,384	0,104	0,063
34	94,50	2,97	1,54	0,873	—0,005	—0,174	—0,106	—0,230	—0,209	—0,298	0,072	0,077
35	93,37	3,93	2,02	0,878	—0,050	—0,168	—0,078	—0,252	—0,192	—0,258	0,050	0,096
36	81,04	7,43	6,17	0,855	—0,006	—0,281	—0,034	—0,114	—0,246	—0,323	0,065	0,83
37	88,60	7,21	2,78	0,847	—0,027	—0,236	—0,034	—0,270	—0,204	—0,310	0,070	0,096
38	93,48	2,18	1,97	0,881	—0,027	—0,187	—0,142	—0,129	—0,189	—0,328	0,044	0,76
39	79,34	9,16	6,96	0,866	—0,029	—0,040	—0,072	—0,283	—0,329	—0,220	0,048	0,059
40	90,29	5,25	2,59	0,874	—0,027	—0,182	—0,064	—0,214	—0,194	—0,324	0,087	0,043
41	88,38	7,23	2,17	0,858	0,011	—0,220	—0,023	—0,211	—0,179	—0,362	0,067	0,059
42	96,47	1,90	1,05	0,862	—0,092	—0,020	—0,121	—0,302	—0,191	—0,301	0,067	0,099
X	93,18	2,63	1,78	0,884	—0,045	—0,099	—0,155	—0,144	—0,244	—0,308	0,032	0,079
Y	93,09	4,51	1,38	0,879	—0,133	—0,083	—0,115	—0,244	—0,161	—0,302	0,061	0,099

по поводу которых он пишет следующее: «Так как любая линейная функция окислов может быть представлена вектором, геометрически такой наилучшей функцией будет один из векторов, имеющий наименьший угол с первым собственным вектором... По иронии судьбы наилучшей из этих функций является простейшая, т. е. содержание SiO_2, используемое в диаграммах Харкера» (Le Maitre, 1968, с. 227).

После знакомства с работой Р. Леметра нами тем же методом главных компонент проанализирована петрохимическая информация по вулканам Эбеко и Богдановича на о. Парамушир (Курильские острова). Полученный результат соответствует результатам Р. В. Леметра. Собственные значения 1-й главной компоненты для вулканов очень близки по величине таковым, приведенным в табл. 11. Значение главной компоненты для Эбеко составляет 90,94%, а для Богдановича 88,72%. Соответственно весовой коэффициент SiO_2 в первой главной компоненте для лав вулкана Эбеко составляет 0,865, а для лав вулкана Богдановича 0,825. Если составить таблицу, аналогичную приведенной Р. В. Леметром, то она будет иметь весьма близкий вид (табл. 12). Как видно из

Таблица 12

Первые два собственных значения (в % к суммарной дисперсии) и первый собственный вектор (компонента) для лав вулканов Эбеко (1) и Богдановича (2).

№ п/п	Собственные значения		Первый собственный вектор							
	Первое	Второе	SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	ΣFe	MgO	CaO	Na_2O	K_2O
1	90,94	4,57	0,865	—0,0028	—0,081	—0,252	—0,280	—0,312	0,048	0,040
2	88,72	7,21	0,825	—0,009	—0,188	—0,275	—0,240	—0,379	0,016	0,083

сопоставления таблиц 11 и 12, значения как собственных векторов, так и весов признаков в первой главной компоненте весьма близки.

Рассмотренный пример предназначен для демонстрации возможной методики выбора ранжирующей компоненты для случаев, когда неизвестны ни относительные временные, ни номенклатурные координаты. Кроме того, пример показателен в том отношении, что при анализе петрохимического материала магматических объектов применение в качестве ранжирующего параметра содержания SiO_2 наиболее естественно.

Приведенные выше примеры посвящены методике применения рассмотренных в работе статистических методов в определенных геологических ситуациях. Цель примеров — показать возможности применения методов и их геологические результаты. Однако следует сказать, что предлагаемые методы могут быть использованы не только в чисто геологических задачах. Ниже приводятся некоторые из таких задач, в которых применение методов сравнения условных средних может дать существенный эффект.

1. Критерий (156) может быть использован в качестве критерия остановки при подборе нелинейных зависимостей с помощью ортогональных полиномов. Попробуем показать, что эта задача является одной из возможных, относящихся к классу задач сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа. Как явствует из нулевой гипотезы (154), которая проверяется с помощью критерия (156) и является вероятностным аналогом задач первого типа, в одномерном (двумерном) варианте, она предназначена для сравнения двух условных математических ожиданий и считается состоятельной только в случае совпадения условных математических ожиданий, сопоставляемых совокупностей с точностью до случайной составляющей.

Хорошо известно (Айвазян, 1968), что кривая регрессии является оценкой условного математического ожидания, поэтому исследователь может сопоставить два условных математических ожидания с помощью критерия (156). Одно математическое ожидание — это подобранная с помощью ортогональных полиномов или другим способом оценка, а другое — это неизвестное условное математическое ожидание набора точек наблюдения, для которого подбирается вид условного математического ожидания на данном интервале значений условия (закрепленной случайной величины в данном случае).

Из предшествующего изложения известно, что критерий (156) предназначен для проверки предположения, что значения ординат разностного процесса представляют собой эмпирические значения случайной величины с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Это определяется предположением, что при равенстве условных математических ожиданий разностный процесс принадлежит классу регулярных Гауссовских процессов и согласно центральной предельной теореме распределение его ординат асимптотически приближается к нормальному распределению (Прохоров, Розанов, 1967).

Очевидно, что состоятельность нулевой гипотезы (154), установленная с помощью критерия (156), служит основанием для утверждения, что данная форма условного математического ожидания, оцененная одним из методов регрессионного анализа, совпадает с неизвестной формой условного математического ожидания исследуемой совокупности с точностью до случайных отклонений.

Если нулевая гипотеза (154) по результатам вычисления критерия (156) должна быть отвергнута как не соответствующая эмпирическим данным, то в рассматриваемом конкретном случае следует признать, что данная форма условного математического ожидания не совпадает с неизвестной его формой для рассматриваемой совокупности. Отсюда очевидно, на каком основании в качестве критерия остановки в процедуре подбора нелинейной регрессии рекомендуется рассматриваемый в работе метод сравнения условных математических ожиданий. В первую очередь потому, что применение в этих целях критерия (156) дает возможность определить, насколько точно данная кривая аппроксимирует неизвестное условное математическое ожидание совокупности. Кроме того, подбор кривых для данной выборочной совокупности может быть закончен при выполнении соотношения: $W \leqslant \leqslant \chi^2_{q\ 1\text{ст.св}}$, что соответствует подбору аппроксимирующей кривой с точностью до случайных отклонений. Помимо этого можно рекомендовать выбор кривой регрессии из набора подобранных по минимуму значений критерия (156), что отвечает наибольшей близости данной кривой регрессии неизвестному условному математическому ожиданию исследуемой совокупности.

Отмеченные выше особенности критерия (156) не позволяют рекомендовать его в качестве критерия остановки в подборе кривых регрессии для всех возможных ситуаций. В аспекте настоящей задачи, отмеченные особенности критерия (156) интерпретируются следующим образом. Критерий (156) достаточно точно и четко фиксирует несовпадение подобранной кривой и неизвестного условного математического ожидания совокупности в условиях отклонений преимущественно одного знака. При отклонениях разного знака одной кривой относительно другой из особенностей критерия следует, что он относит к случайным отклонениям закономерные колебания одной кривой по отношению к другой.

Естественно, что подобные отклонения будут квалифицированы критерием как случайные, если доля (сумма протяженности по оси абсцисс) положительных отклонений сопоставима с такой же долей отрицательных отклонений. Такие ситуации редки, но возможны. По аналогии с предыдущим изложением в этом случае можно рекомендовать применение критерия для проверки гипотезы об однородности дисперсий, однако это затрудняет вычислительные операции. Как известно, критерии (100), (111), (112), (113), лишены этого недостатка критерия (156), однако необходимость разбиения множества U на интервалы дискретизации для их применения является существенным неудобством объективного характера. Причиной его является отсутствие однозначных рекомендаций по количеству интервалов дискретизации в различных конкретных случаях. В настоящее время все же возможно рекомендовать критерий (156) в качестве критерия остановки в процедуре подбора кривых регрессий с учетом высказанных ограничений. Применение критерия (156) в подобной задаче рассматривается в одной из более ранних работ автора (Бондаренко, Кравченко, 1968).

2. Свойство критерия (156), а именно его инвариантность относительно способов задания условия, обусловило применимость его еще в одной широко известной области геологических наук. Здесь имеется в виду метод подбора поверхностей тренда для характеристики изменчивости признаков на плоскости. Проблема поиска поверхности тренда наилучшим образом отражающей вид истинной изменчивости признака на исследуемой плоскости, как

и в случае подбора нелинейной регрессии, требует наличия критерия остановки при последовательном подборе поверхностей различного вида. В этом случае с успехом может быть использован уже упоминавшийся критерий (156). Основания для его применения в качестве критерия остановки следующие: а) инвариантность критерия (156) относительно способа задания условия, что дает возможность перейти от задания условия на оси к заданию условия на плоскости. Собственно говоря, в выражении критерия ничего не изменится, если условие ($\delta=d$) будет заменено на условие ($s=x$, $t=y$), где d принадлежит одномерному множеству U, а x и y — двумерному множеству координат $U(x, y)$; б) возможность формулировки задачи сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств первого типа в терминах задачи о правильности подбора поверхности тренда для описания изменчивости признака на плоскости на основе данной выборочной совокупности.

Поверхность тренда можно считать подобранной правильно, если она не искажает существенно реальной формы изменчивости признака на исследуемой площади (плоскости). В этом аспекте критерий (156) может быть квалифицирован как критерий остановки при последовательном подборе поверхности тренда разного порядка. Нет необходимости доказывать, что тренд-поверхность является поверхностью регрессии на координатную плоскость. Отсюда очевидно, что тренд-поверхность является оценкой условного математического ожидания признака при двумерном условии.

Таким образом, задачу первого типа в данном конкретном приложении можно сформулировать как задачу сравнения двух условных математических ожиданий при двумерном условии: одно — это оценка условного математического ожидания, полученная на данном шаге подбора тренд-поверхности и второе — неизвестное математическое ожидание совокупности, отраженное в имеющихся в распоряжении исследователя эмпирических данных. В качестве модели изменения признака на плоскости можно использовать случайную функцию

$$\Xi(t, s) = Y(t, s) + \varphi(t, s), \qquad (159)$$

где $t, s \in U(t, s)$.

В выражении (159) $Y(t, s)$ — детерминированная компонента, отражающая закономерные изменения признака в зависимости от координат (t, s); $\varphi(t, s)$ — функция, характеризующая случайные флуктуации, наложенные на детерминированную компоненту. По аналогии с предшествующим изложением $\varphi(t, s)$ по предположению относится к классу регулярных гауссовских функций с нулевым средним и конечной дисперсией ординат, а детерминированная компонента ставится в соответствие условному математическому ожиданию, т. е.

$$Y(t, s) \sim M(\xi | s = x, t = y) \qquad (160)$$

при $x, y \in U(x, y)$.

Обозначим подобранную на данном этапе тренд-поверхность через $Y'(t, s)$, тогда нулевая гипотеза, для проверки которой может быть использован критерий (70), может быть сформулирована следующим образом

$$H_0: Y(t, s) - Y'(t, s) = 0 \tag{161}$$

для всех $t, s \in U(t, s)$ при множестве альтернатив

$$H_1: Y(t, s) - Y'(t, s) \neq 0, \tag{162}$$

хотя бы для одной пары $t, s \in U(t, s)$.

Приведенные в выражениях (160), (161), (162) множества определения условия, т. е. $U(x, y)$ и $U(t, s)$, представляют собой одно множество, поскольку $U(x, y) \backsim U(t, s)$ и различие обусловлено лишь в обозначении его элементов, определяемом написанием основного выражения.

Таким образом, в условиях нулевой гипотезы (161), когда условное математическое ожидание признака и форма тренд-поверхности в точности совпадают, критерий (156) анализирует ординаты случайной функции $\varphi(t, s)$, которые по предположению распределены нормально с нулевым математическим ожиданием. Отсюда ясно, что справедливость нулевой гипотезы (161) свидетельствует о том, что данная подобранная тренд-поверхность совпадает с неизвестным условным математическим ожиданием рассматриваемой совокупности с точностью до случайной составляющей.

В связи с тем что такую поверхность можно считать правильно подобранной, состоятельность нулевой гипотезы (161) может служить причиной прекращения дальнейшего подбора тренд-поверхности, а критерий (156) можно считать критерием остановки в общей процедуре подбора тренд-поверхности для рассматриваемой эмпирической совокупности.

3. Необходимо привести еще один пример из области знаний, далекой от геологии, в пользу определенной универсальности рассмотренного в работе подхода к постановке задач, методики их решения и предлагаемых критериев. Так, аспиранту одного из институтов Академии медицинских наук СССР А. А. Асмангуляну было предложено использовать предлагаемую здесь методику и критерии в необходимых ему целях. Методика была им применена и дала хорошие результаты. «Определение существенности различий ритма дыхания у подопытных и контрольных крыс осуществлялось с помощью метода сравнения условных средних, за которые принимали средние траектории ритма дыхания на всем протяжении затравки. Критерий достоверности соответствовал общепринятому в биологии 5% ($p=0{,}05$) уровню значимости (Бондаренко, 1970)».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнительный анализ геологических объектов предполагает необходимость учета характерной для них закономерной изменчивости свойств. Это особенно важно при применении математических методов к решению задач сравнения объектов петрологии, формационного анализа магматических пород, минералогии породообразующих минералов, геохимии, теории метаморфизма. В связи с этим основное внимание к работе уделено определению задач сравнения объектов с закономерной изменчивостью признаков, построению математических методов их решения и применению критериев в конкретных геологических ситуациях.

Формульная постановка задач сравнения в условиях закономерно меняющихся признаков позволила разработать математические методы сравнительного анализа, учитывающие отмеченную специфику геологических объектов. Основные результаты работы в этом направлении сводятся к следующему.

1. Для решения сформулированных задач сравнения методами математической статистики подобраны формальные модели геологических объектов. Установлено, что множество $(m+1)$-мерных случайных величин $\{\Xi^{m+1}\}=\{\delta_1\xi_1\xi_2, \dots \xi_m\}$, распределение которых определяется значением величины $\delta\in U$, достаточно полно отражает необходимые для задач сравнения свойства объектов. Кроме того, показано, что характеристики объектов с закономерной изменчивостью свойств хорошо описываются с помощью модели многомерного случайного процесса с $\delta\in U$ в качестве аргумента.

2. Задачи сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств в терминах моделей представлены в виде нулевых гипотез о равенстве многомерных условных математических ожиданий или о равенстве детерминированных компонент многомерных случайных процессов на множестве значений условия (аргумента).

3. Предположение о принадлежности процесса случайных флуктуаций классу гауссовских процессов с нулевым средним и конечной дисперсией позволило построить ряд статистик для проверки нулевых гипотез в различных условиях. В частности, предлагаются методы проверки нулевой гипотезы о равенстве многомерных условных средних при двумерном нормальном распределении компонент, при линейной интерполяции без предположений

о характере двумерного распределения, при разбиении множества значений условия на интервалы в разнообразных предположениях об условной дисперсии. Установлено, что наиболее устойчивые результаты дает применение критерия с использованием линейной интерполяции и критерия с разбиением множества значений условия на интервалы без каких-либо предположений относительно условной дисперсии.

Геологические результаты постановки задач сравнения объектов с закономерной изменчивостью свойств и применения разработанных математических методов заключаются в следующем.

1. Принятое в работе предположение, что наиболее характерные черты процесса формирования магматических тел (комплексов) отображены в наблюдаемых признаках слагающих их пород, включая форму закономерной изменчивости свойств, определяет возможность статистического решения проблемы сравнения процессов петрогенезиса. Установлено, что в этом случае задаче сравнения магматических процессов при исключении влияния на результат возрастных и региональных особенностей пород соответствует нулевая гипотеза о равенстве центрированных детерминированных компонент. Отсюда применение разработанных для проверки этой нулевой гипотезы статистических методов позволяет перейти к решению задачи типизации магматических процессов на количественной основе.

2. Процедура классификации геологических объектов с закономерной изменчивостью свойств, предложенная в работе, основана на определении близости значений признаков и (или) формы их закономерной изменчивости. Применение процедуры классификации для объединения интрузивных тел в магматический комплекс (конкретную формацию) по близости петрохимических характеристик пород при одинаковой их кремнекислотности свидетельствует о соответствии методики существу задач формационного анализа магматических пород на основе петрохимической информации.

3. На конкретных примерах показано, что методы сравнения центрированных детерминированных компонент дают возможность определять сходство или различие эволюции магматических пород в процессе становления объектов с целью объединения их в один формационный тип или вулкано-плутоническую формацию. Определено, что центрирование устраняет петрохимические различия, обусловленные локальными особенностями проявления процессов,

сохраняя основную направленность эволюции пород сопоставляемых объектов.

4. Задача соответствия функции выборочным данным с точностью до случайных отклонений при аппроксимации реальной зависимости или пространственной изменчивости признаков может быть сформулирована как нулевая гипотеза о равенстве детерминированных компонент при одномерном или двумерном аргументе. В работе показано, что в этом случае в качестве критерия остановки при подборе модели нелинейной зависимости или поверхности тренда может быть использован статистический метод сравнения условных средних при линейной интерполяции.

Рассмотренные методы применены главным образом для решения задач формационного анализа (выделение конкретных и абстрактных магматических формаций). Основной задачей дальнейших исследований в этом направлении следует считать изучение применимости и эффективности применения предлагаемых методов к решению задач различных отраслей геологической науки и практики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абрамович И. И. Программа региональных петрохимических обобщений. — В кн.: Вопросы петрохимии. Л., 1969, с. 10—11.

Абрамович И. М., Груза В. В. Фациально-формационный анализ магматических комплексов. Л., изд-во «Недра», 1972, 238 с.

Абрамович И. И., Агукина З. В., Серова Д. Л. О сходстве химизма магматических комплексов одного формационного типа (на примере плагиогранитовой формации). — В кн.: Математические методы в геологии. «Тр. ВСЕГЕИ», 1968, т. 150, вып. 1, с. 4—13.

Айвазян С. А. Статистическое исследование зависимостей. «Металлургия», 1968, 228 с. с ил.

Аксаментова Н. В. Сравнительная характеристика химизма разновозрастных базальт-андезит-липаритовых серий. — «Изв. АН СССР. Сер. геол.», 1971, № 11, с. 36—43.

Арапов Ю. А. Основные черты геологического развития вулканизма и металлогении Алайской горной системы. — «Тр. ВСЕГЕИ», 1953, т. 10, с. 254.

Аржавитин Н. В. Опыт петрохимического пересчета составов гидротермально-измененных пород Рудного Алтая. — В кн.: Вопросы петрохимии. Л., 1969, с. 173—175.

Асмангулян А. А. Сравнительное изучение раздражающего действия сернистого ангидрида и его влияние на функцию желудка (экспериментальные исследования). Автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. мед. наук. М., Ин-т охраны труда и профтех. заболеваний. 1974, 27 с.

Барт Т. Теоретическая петрология. М., Изд-во иностр. лит., 1956, 414 с. с ил.

Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965, 464 с. с ил.

Большев Л. Н., Никулин М. С. Одно решение задачи об однородности. — «Сердика». Българско математическо списание, 1975, т. 1, с. 104—109.

Бондаренко В. Н. Опыт применения многомерного статистического анализа при петрохимических исследованиях вулканогенных комплексов. — «Сов. геология», 1966, № 9, с. 155—160.

Бондаренко В. Н. Петрохимическое разграничение андезитов и базальтов. — «Бюл. МОИП, отд. геол.», 1967, 3, с. 158—159.

Бондаренко В. Н. Проблема генетического родства магматических тел и ее вероятностная постановка. — В кн.: Математические методы в геологии. М., «Наука», 1968, с. 37—41.

Бондаренко В. Н. Проверка гипотезы об однородности дисперсии для линейно-упорядоченных случайных последовательностей. — «Лит. мат. сб.», 1969, IX, № 2, с. 255—257.

Бондаренко В. Н. Статистические решения некоторых задач геологии. М., «Недра», 1970, 248 с. с ил.

Бондаренко В. Н. О возможности вероятностной постановки проблемы генетического родства метаморфических образований. — В кн.: Статистические методы геологических исследований. М., ИМГРЭ, 1971, вып. 3, с. 23—31.

Бондаренко В. Н., Кравченко С. М. Статистический метод оценки характера дифференциации базальтоидных комплексов. — В кн.: Применение математических методов в геологии. Алма-Ата, «Наука», 1968, с. 27—31.

Вистелиус А. Б. Проблемы математической геологии. К истории вопроса. — «Геология и геофизика». 1962, № 12, с. 3—9.

Вистелиус А. Б. Проблемы математической геологии. Модели процессов и парагенетический анализ. — «Геология и геофизика», 1963, № 7, с. 3—16.

Вистелиус А. Б. Проблемы математической геологии. Случайный процесс. — «Геология и геофизика», 1963, № 12, с. 3—10.

Вистелиус А. Б. Об образовании гранодиоритов горы Белой на Камчатке (Опыт стохастического моделирования). — «Докл. АН СССР», 1966, т. 167, № 5, с. 1115—1118.

Вистелиус А. Б. Стохастическая модель кристаллизации аляскитов и отвечающие ей переходные вероятности. — «Докл. АН СССР», 1966, т. 170, № 3, с. 653—656.

Вистелиус А. Б. О кристаллизации аляскитов с р. Каракульджур (Центральный Тянь-Шань). — «Докл. АН СССР», 1967, т. 172, с. 165—167.

Вистелиус А. Б. О путях кристаллизации и вторичных минералах в некоторых гранитах Приханкайского района (Приморье). — «Докл. АН СССР», 1967, т. 177, № 6, с. 1411—1414.

Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965, 656 с.

Гольдин С. В., Кутолин В. А. К петрохимии траппов Катангского и Кузьмовского комплексов западной окраины Сибирской платформы. — «Сов. геология», 1964, № 12, с. 133—139.

Горшков Г. С. Вулканизм Курильской островной дуги. — М., «Наука», 287 с., с ил.

Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 167 с.

Груза В. В. Пример изучения петрохимических особенностей сходных по составу пород методами математической статистики. — «Геохимия», 1965, № 1, с. 123—125.

Груза В. В., Марковский Б. А. Линейные дискриминантные функции как критерий классификации магматических пород при формационном анализе. — В кн.: Математические методы в геологии. «Тр. ВСЕГЕИ», 1968, т. 150, вып. 1, с. 14—37.

Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М., Изд-во иностр. лит., 1965, 605 с.

Заварицкий А. Н. Введение в петрохимию изверженных горных пород. М., Изд-во АН СССР, 1950, 400 с. с ил.

Заварицкий А. Н. Изверженные горные породы. М., Изд-во АН СССР, 1955, 479 с. с ил.

Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М., «Наука», 1965, 524 с.

Изох Э. П. О классификации габбро-гранитных серий в металлогенических целях. — В кн.: Магматизм, формации кристаллических пород и глубин Земли». М., «Наука», 1972, с. 16—21.

Иншин П. В. О механизмах дифференциации магм. Алма-Ата, «Наука», 1972, 247 с.

Ито К. Вероятностные процессы. Вып. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1960, 133 с.

Ито К. Вероятностные процессы. Вып. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1963, 135 с.

Ифантопуло Т. Н. Минералого-геохимические особенности щелочных пород Центрального Туркестано-Алая. М., «Недра», 1975, 128 с. с ил.

Йодер Т. С., Тилли К. Э. Происхождение базальтовых магм. М., «Мир», 1965, 248 с. с ил.

Кепежинскас В. В. Особенности химизма верхнепалеозойской вулканической ассоциации Токрауского синклинория. — В кн.: Вопросы петрохимии. Л., 1969, с. 283—284.

Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. М., «Мир», 1969, 398 с. с ил.

Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969, 398 с. с ил.

Крамер Г. Математические методы статистики. М., «Мир», 1975, 648 с. с ил.

Кратц К. О., Елисеев Э. Н. Геохимия процессов кристаллизационной дифференциации. I Международный геохимический конгресс. Магматические породы. Т. 1. М., «Наука», 1972, с. 354—365.

Круть И. В. Исследование оснований теоретической геологии. М., «Наука», 1973, 207 с. с ил.

Кузнецов Ю. А. Главные типы магматических формаций, М., «Недра», 1964, 387 с. с ил.

Кузнецов Ю. А. О состоянии и задачах учения о магматических формациях. — «Геология и геофизика», 1973, № 8, с. 3—18.

Кульбак С. Теория информации и статистика. М., «Наука», 1967, 408 с. с ил.

Кустарникова А. А. Вулканические и вулкано-плутонические формации палеозоя западного Узбекистана. В кн.: Вулкано-плутонические формации и их рудоносность. Алма-Ата, «Наука», 1969, с. 161—166.

Кутолин Б. А., Волохов И. М., Каратаева Г. Н. К оценке возможности определения формационной принадлежности гипербазитов по петрохимическим данным. — «Геология и геофизика», 1966, № 5, с. 87—92.

Кутолин В. А. Статистическое изучение химизма базальтов. М., «Наука», 1969, 142 с. с ил.

Кутолин В. А. Проблемы петрохимии и петрологии базальтов. Новосибирск, «Наука», 1972, 208 с. с ил.

Лападю-Арг П. О существовании и природе химического привноса в некоторых сериях кристаллических сланцев. В кн.: Проблема образования гранитов. М., Изд-во иностр. лит., 1950, с. 51—108.

Левинсон-Лессинг Ф. Ю. О пределах и подразделениях семейства андезитов. — «Изд. Геол. ком.», 1924, 43, № 6, с. 723—734.

Левинсон-Лессинг Ф. Ю. О разграничении базальтов и андезитов. — «Изв. Геол. ком., 1925, 44, № 4, с. 411—422.

Леман Э. Проверка статистических гипотез. М., «Наука», 1964, 498 с. с ил.

Маркушев А. А. Некоторые минеральные равновесия и их экстермальные состояния в связи с геохимическими условиями метаморфизма. — В кн.: «Химия земной коры». М., Изд-во АН СССР, 1964, т. 2, с. 122—144 с ил.

Марголин А. М. Оценка запасов минерального сырья. Математические методы. М., «Недра», 1974, 264 с. с ил.

Миллер Р. Л., Кан Дж. С. Статистический анализ в геологических науках. М., «Мир», 1965, с. 482 с ил.

Мягков В. Ф. О геологическом способе корреляции физических полей. — В кн.: Вопросы обработки и интерпретации геофизических наблюдений, № 9, 1971, с. 131—133. (Уч. зап. Пермск. ун-та, № 233).

Овчинников Л. Н., Баранов Э.Н. Эндогенные геохимические ореолы колчеданных месторождений. — «Геология рудных месторождений», 1970, т. 12, № 2, с. 10—24.

Овчинников Л. Н., Григорян С. В. Закономерность состава и строения первичных геохимических ореолов сульфидных месторождений. — В кн.: Научные основы геохимических методов поисков глубокозалегающих рудных месторождений. Ч. 1. Иркутск, 1970, с. 3—36.

Овчинников Л. Н., Григорян С. В. Еще раз о вертикальной зональности. — В кн.: Научные основы геохимических методов поисков глубокозалегающих рудных месторождений. Ч. 2. Иркутск, 1971, с. 135—143.

Овчинников Л. Н., Григорян С. В., Баранов Э. Н. Зональность первичных ореолов геохимических месторождений и их поисковое значение. — «Изв. высш. уч. завед. Геология и разведка», 1973, № 10, с. 76—88.

Омельяненко В. И. Инфильтрационная метасоматическая зональность в послемагматических образованиях щелочных интрузий верховьев р. Хаджа-Ачкан. — В кн.: Физико-химические проблемы формирования горных пород и руд». Т. 1. М., 1961, с. 524—545.

Осокин Е. Д. Редкие элементы в щелочных массивах Северо-Байкальского нагорья и некоторые вопросы общей петрологии щелочных пород. Автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. геол.-мин. наук. М., ИМГРЭ, 1970, с. 25.

Петрохимические особенности молодого вулканизма. М., Изд-во АН СССР, 1963, с. 267 с ил.

Петрохимия кайнозойской Курило-Камчатской вулканической провинции. М., «Наука», 1966, с. 279 с ил.

Пилипенко В. Н. Вулканизм среднего и верхнего палеозоя Алтая. Автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. геол.-мин. наук. Новосибирск, ИГГ СО АН СССР, 1969, с. 27.

Пламеневская Н. Л. О биотите и фациях контактового метаморфизма. — «Изв. АН СССР, сер. геол.», 1974, № 2, с. 17—28 с ил.

Прохоров Ю. В., Розанов М. А. Теория вероятностей (основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы). М., «Наука», 1967, с. 495 с ил.

Пугачев В. С. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962, 883 с. с ил.

Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. М., «Наука», 1968, с. 547 с ил.

Родионов Д. А. К вопросу о статистическом сравнении составов пород. — «Геохимия», 1964, № 4, с. 368—372.

Родионов Д. А. Статистические методы разграничения геологических объектов по комплексу признаков. М., «Недра», 1968. 158 с., с ил.

Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М., Физматгиз, 1963, 284 с.

Розанов Ю. А. Случайные процессы. М., «Наука», 1971, 286 с.

Рудник В. А. Петрохимические критерии фациально-формационного анализа горных пород. — В кн.: Вопросы петрохимии, Л., 1969, с. 66—72.

Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968, 463 с. с ил.

Сидоров В. М. Классификация геолого-математических задач. Киев, Ин-т геохимии и физики минералов АН УССР, 1972, 580 с.

Тихонов В. В. Статистическая радиотехника. М., «Сов. радио», 1966, 678 с. с ил.

Уилкс С. Математическая статистика. М., «Наука», 1967, 632 с. с ил.

Уэйджер Л., Браун Г. Расслоенные изверженные породы. М., «Мир», 1970, 552 с. с ил.

Флеров Г. Б., Колосков А. В. Щелочной базальтовый магматизм Центральной Камчатки. М., «Наука», 1976, 148 с. с ил.

Фоминых В. Г., Бондаренко В. Н. Статистический анализ особенностей химического состава минералов различных титаномагнетитовых месторождений Урала.—

В кн.: Математические методы при геохимических исследованиях. Свердловск, 1973, с. 101—103.
Хеннан Э. Анализ временных рядов. М., «Наука», 1964, 216 с.
Хуан У. Т. Петрология. М., «Мир», 1965, 575 с. с ил.
Шейнина Г. А. Статистическое исследование случайной ошибки геологических проб. В кн.: Вопросы петрохимии». Л., 1969, с. 45—46.
Шинкарев Н. Ф. Верхнепалеозойский магматизм Туркестано-Алая. Л., изд-во ЛГУ, 1966, 152 с. с ил.
Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. М., «Наука», 1971, 254 с.
Chayes F. A. A least squares approximation for estimating the amounts of petrographic partition products.— «Mineral. et petrogr. acta», 1968, 14, pp. 111—114.
Kuno H. Origin of cenosoic petrographic provinces of Japan and surrounding areas.— «Bull. volc.», 1959, ser. 11, t. XX, pp. 74—76.
Le Maitre R. W. Chemical variation within and between volcanic rock series — A statistical approach.— «Journ. of Petrology», 1968, v. 9, N 2, pp. 220—252.
Mahalanobis P. C. On fractile graphical analysis.— «Indian Statistical Institute, Draft proof», April, 1959, pp. 1—14.
Mitrofanova N. M. On some problems of fractile graphical analysis.— «The Ind. Journ. of Statistics», 1961, ser A, v. 23, part 2, pp. 145—154.
Poldervart A. A., Parker A. B. The crystallization index as a parameter of igneous differentiation in binary variation diagrams.— «Amer. Journ. Sci.», 1964, 262, pp. 281—289.
Radulescu Dan P., Dimitriu Al. Consideration on the evolution of magmas during the neogene volcanism in the Calimani, Gurghiu and Hargita Mts. Anuarul Institutului Geologic, 1973, v. XLI. Bucuresti, pp. 49—69.
Thornton C. P., Tuttle O. F. Chemistry of igneous rocks. I. Differentiation index.— «Amer. Journ. Sci.», 1960, 258, pp. 664—684.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИБ № 1562

ВАЛЕНТИН НИКОЛАЕВИЧ БОНДАРЕНКО

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ЗАКОНОМЕРНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТЬЮ СВОЙСТВ

Редактор издательства **Л. М. Старикова**
Обложка художника **В. В. Кошмина**
Художественный редактор **В. В. Евдокимов**
Технический редактор **В. В. Соколова**
Корректор **С. В. Зимина**

Сдано в набор 02.01.78.
Подписано в печать 01.09.78.
Т-16423. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага № 2.
Гарнитура литер. Печать высокая. Печ. л. 8,5.
Уч.-изд. л. 9,31. Тираж 2200 экз. Заказ 1138/6586-14.
Цена 45 коп.

Издательство «Недра», 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19.

Московская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.

УВАЖАЕМЫЙ ТОВАРИЩ!

Издательство «Недра» готовит к печати новые книги

КАЖДАН А. Б., ГУСЬКОВ О. И., ШИМАНСКИЙ А. А. Математическое моделирование в геологии и разведке полезных ископаемых: Учеб. пособие для вузов. — 12 л., ил. — 45 к. 10 000 экз.

В книге рассмотрены основы геолого-математического моделирования строения и свойств природных минеральных образований применительно к решению различных геологических задач. Изложены принципы и методы геолого-математического моделирования как одного из методов познания недр Земли. Описаны сущность и условия применения одно, дву- и многомерных статистических моделей, горно-геометрические методы моделирования и модели типа случайных функций. Приведены примеры использования этих моделей при различных геологических и минералого-петрографических исследованиях в процессе изучения геологии и разведки месторождений полезных ископаемых.

Учебное пособие предназначено для студентов геологических специальностей вузов и соответствует программе курса «Основы геолого-математического моделирования», читаемого в Московском геологоразведочном институте им. С. Орджоникидзе. Книга также будет нтересна и полезна всем специалистам, занимающимся вопросами геологии и разведки месторождений полезных ископаемых.

ДОЛИЦКИЙ А. В. Реконструкция тектонических структур. 10 л. с ил. 2000 экз. 1 р. 55 к.

В книге изложены способы реконструкции отпечатков полей напряжений и тектонических структур разного возраста и масштаба (от глобальных до региональных и местных) на основе разработанных автором математических методов анализа пространственного расположения линейных структурных элементов — трещин, разломов, складок. Показано применение предлагаемой автором методики к анализу карт рельефа и геологических карт разного масштаба, в том числе и с целью выявления площадей и структур, перспективных для поисков полезных ископаемых.

Книга рассчитана на научных и инженерно-технических работников научно-исследовательских и производственных геологических организаций, занимающихся тектоническим анализом, палеогеографическими реконструкциями, анализом палеомагнитных данных, а также вопросами использования новых методов в поисково-разведочных целях.

ОХРАНА труда на геологоразведочных работах: Учебник для техникумов/Кабанцев А. И., Бочаров А. И., Ахмет В. Н., Головкин Ю. А. — 20 л., ил. — В пер.: 80 к. 15 000 экз.

В книге изложены основы техники безопасности и производственной санитарии на основных видах геологоразведочных работ — геологосъемочных, буровых, геофизических, горноразведочных и др. Приведены сведения по советскому законодательству об охране труда. Описаны методы учета и анализа производственного травматизма и меры по его предупреждению и улучшению условий труда в геологических организациях. Рассмотрены основы пожарной безопасности применительно к специфике отдельных видов геологоразведочных работ.

Учебник предназначен для учащихся средних специальных учебных заведений, готовящих специалистов геологоразведочного профиля. Книга также будет полезна инженерно-техническим работникам производственных геологоразведочных организаций.

45 к.