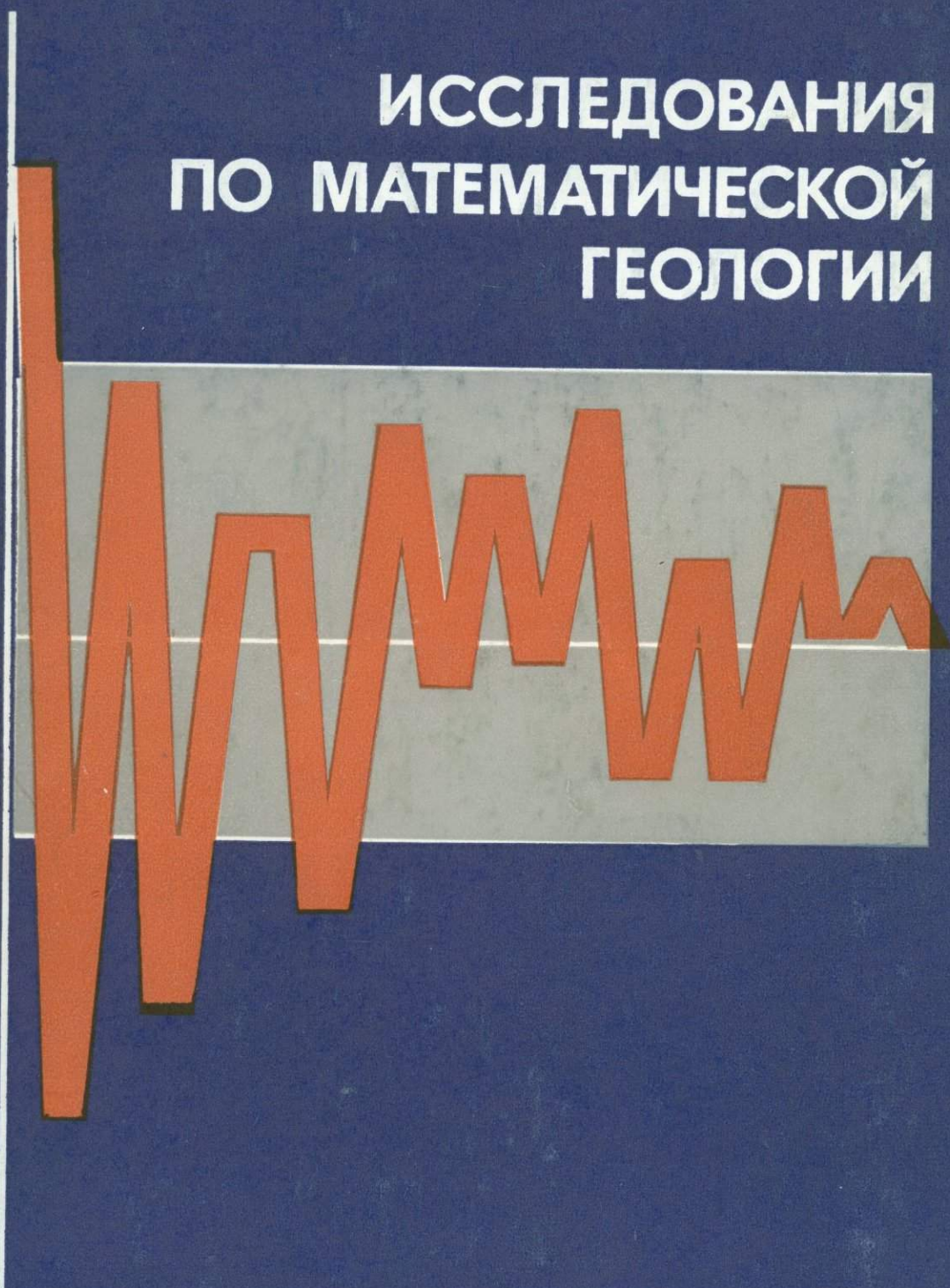


АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ГЕОЛОГИИ

ρ



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
ЛАБОРАТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОЛОГИИ

ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ГЕОЛОГИИ

2485



ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1978



Ответственные редакторы
докт. геол.-минер. наук *М. А. РОМАНОВА*
докт. физ.-мат. наук *Н. А. САПОГОВ*

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	5
30 лет математической геологии	6

I. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАГМАТИЧЕСКИХ И МЕТАСОМАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Д. Н. Иванов. О природных аналогах идеальных гранитов (на примере массива Кызылтас в Центральном Казахстане)	9
М. А. Романова. Белые граниты Арга-Ынних-Хая (Якутия) и механизм их образования	25
Ю. А. Высоцкий. Материалы к стохастическому моделированию процессов формирования гранодиоритов (Чалбинский массив, Приамурье)	40
И. К. Козаков, В. Н. Подковыров. Материалы к стохастическому моделированию процессов формирования гранитоидов в докембрии Сангиленского срединного массива (юго-восточная Тува)	46

II. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЕДИМЕНТАЦИИ

М. Ф. Мохнач. О механизме формирования силвинитовых пластов Верхнекамского месторождения калийных солей	55
М. Е. Демина. О механизме фиксации зерен при формировании песчаных отложений	62
С. Мизутани, С. Миура. Зависимые и независимые явления в чередовании слоев миоценовой формации Куними (Фукуй, Центральная Япония) — приложение анализа марковских цепей	70
Б. П. Харламов. Об одной математической модели накопления акцессорных минералов в осадочных отложениях	80

III. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГЕОЛОГИИ

Ф. П. Агтерберг. Оценки среднего размера объектов по измерениям в сечениях	90
Д. Марсал. Выделение ошибок из технических данных о резервуаре	99
Дж. У. Харбо. Вероятностные решающие системы при разведке на нефть	114
Д. Г. Криге. Обзор некоторых геостатистических моделей для оценки золотоносных руд в Южной Африке	124

IV. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

А. К. Кук. Частный тренд-анализ при изучении геологии угольных полей в Сиднейском бассейне (Новый Южный Уэльс)	134
Е. Х. Т. Уиттен, М. Е. В. Кёллинг. О бикубических сплайн-поверхностях для неравномерно разнесенных данных наблюдений	150
Р. А. Реймент. Интерпретация наименьшей главной компоненты	163
А. Г. Краева, Н. Л. Добрецов, Т. М. Блиничик, Ю. И. Кузнецов. Общие методы и алгоритмы построения парагенетических диаграмм многокомпонентных систем, основанные на комбинаторной геометрии	167

V. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ИЗ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМАТИКИ

А. Т. Баруча-Рид. Вычисление стационарных векторов марковских матриц с использованием групповой обобщенной обратной	179
Н. Р. Бартлетт, Дж. Н. Дарроч. Регрессия и корреляция для величин с ограниченной суммой	183
Р. С. Андерсен. Новейшие результаты в анализе объемного состава	187
Дж. К. Гоуер. Разложение по сингулярным значениям как объединяющая черта многих методов упорядочивания	199
А. В. Фас. О двух классах матричных функций — выпуклых и выпуклых с квадратом — и о приложениях таких функций в теории вероятностей	200
Указатель имен	223
Предметный указатель	225
Указатель географических названий	228
Рефераты	229

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник посвящен тридцатилетию математической геологии. Цель его дать представление о развитии исследований в этой области знаний.

Весь материал размещен в пяти разделах. В первом разделе объединены статьи по стохастическому моделированию процессов кристаллизации и метасоматическому преобразованию гранитоидов. В нем нашли отражение новейшие исследования по разработанным моделям.

Направление второго раздела определяется вопросами стохастического моделирования в области седиментологии, в частности в области седиментологии вулканогенно-осадочных и соленосных образований. Дается определение задачи палеогеографии по терригенным компонентам в терминах точечного процесса и блуждания с остановкой.

В третьем разделе рассматриваются некоторые задачи петрологии, литологии, разведки на нефть и подсчета запасов (золота), решаемые математическими методами.

Четвертый раздел содержит статьи, иллюстрирующие использование математических методов в плане индуктивных исследований в геологии, где математика помогает решать задачи эвристического характера.

Использование математических методов и уровень корректности, на котором это осуществляется, неодинаковы в различных работах, однако редакторы сочли целесообразным сохранить индивидуальный стиль и возможно более точную передачу авторских текстов.

Статьи специалистов-математиков, в которых предложено решение общих задач, возникающих при геологических исследованиях, служат содержанием пятого раздела.

Сравнение материала данного сборника с работами, включенными в книгу «Вопросы математической геологии» (Л., «Наука», 1968), позволит читателю самому получить представление о развитии математической геологии за истекшее десятилетие.

30 ЛЕТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОЛОГИИ

Как показывает опыт геологических исследований, проведенных за последние полтора века, среда, в которой развиваются геологические явления, построена так, что эти явления весьма плодотворно описываются на языке теории вероятностей. Математическая геология — наука о построении, изучении и использовании математических моделей геологических явлений — занимается в основном стохастическими (вероятностными) моделями геологических явлений.

Идея использования в геологии концептуальной стохастической модели впервые была высказана академиком А. Н. Колмогоровым в 1941 г. Однако его статья своевременно не привлекла внимания геологов, так как была написана на высоком математическом уровне и не давала понятных геологам рекомендаций для конкретных действий. Кроме того, геологическая модель, положенная в основу этой разработки, была уязвима, что отмечалось впоследствии всеми геологами, обращавшимися к этой модели.

В 1944 г. А. Б. Вистелиус предложил выделить особую научную дисциплину, названную им аналитической геологией, которая должна была строиться на основе специфического использования математики в геологических науках. Статья, посвященная этому вопросу, была представлена в печать академиком В. И. Вернадским, поддержавшим выдвинутую идею.

В 1945 г. А. Б. Вистелиус независимо от А. Н. Колмогорова пришел к мысли об использовании того, что сейчас называется «концептуальной стохастической моделью», при разработке геологических задач и, таким образом, конкретизировал представление о математических методах, специфических для геологии.

В 1947 г. А. Б. Вистелиус в совместной публикации с О. В. Сармановым предложил первую в геологической литературе концептуальную стохастическую модель, использующую вероятностный аппарат и статистические тесты, проверяющие согласие модели с наблюдениями. Эти исследования явились началом систематической работы, продолжающейся уже более 30 лет. При этом название формировавшейся науки «аналитическая геология» было заменено в 1961 г. названием «математическая геология», получившим огромное распространение.

Работы по созданию и развитию математической геологии, проводившиеся в СССР, получили широкую известность и признание во всем мире, что нашло отражение в публикации обзоров ряда ученых (Tomkeieff S. I. *Analytical geology*. — *Nature*, 1947, v. 160, № 4076, p. 846, 847; Whitten E. H. T. *Stochastic models in geology*. — *J. Geol.*, 1977, v. 85, p. 321—330). Непосредственным резонансом на эти работы явилось создание в 1968 г. Международной ассоциации математической геологии (МАМГ), первым президентом которой был избран А. Б. Вистелиус. Эта ассоциация ведет активную работу по внедрению математики в геологию, в частности, ею созданы и издаются два

журнала — «Journal of the International Association for Mathematical Geology» и «Computer and Earth Sciences». Кроме того, публикуется специальная газета, освещающая текущую жизнь МАМГ.

Работы по математической геологии успешно развивались в Советском Союзе до 1950 г., когда ошибочное представление о кибернетике резко затормозило развитие плодотворной и многообещающей деятельности ученых. Практически с 1952 по 1961 г. работы по математической геологии велись только в Лаборатории аэрометодов АН СССР, соответствующие исследования развивались во внеплановом порядке под личной ответственностью Н. Г. Келля. За это время был накоплен большой опыт работы.

В 1961 г. полезность работ по математической геологии уже не вызвала сомнений, и благодаря интересу, проявленному к ним со стороны академиков И. М. Виноградова, Л. А. Арцимовича и Н. Н. Боголюбова, исследования по математической геологии были перенесены в Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР, в Ленинградском отделении которого была организована соответствующая лаборатория. Одновременно Министерством геологии СССР была проведена всесоюзная экспертиза по внедрению математических методов в геологию (ее возглавил А. Б. Вистеллюс). Несколько позднее работы по математической геологии были организованы в Сибирском отделении АН СССР, в некоторых вузах и научно-исследовательских институтах. Позже начались работы по созданию АСУ.

За время, прошедшее с 1944 г., были осуществлены работы, приведшие к крупным научным результатам. Некоторые из них следует отметить. В первую очередь это монографическая разработка проблемы связи осадконакопления и тектоники в платформенных областях (Поволжье, Приуралье), которая привела к открытию явления фазовой дифференциации. Следует также подчеркнуть создание комплекса методов параллелизации разрезов немых толщ, развитых на материале продуктивной толщи Азербайджана и красноцветных отложений Челекена. Эти работы сопровождалась палеогеографическими построениями и позволили закартировать выходы красноцветных отложений на Челекене, что не удавалось сделать геологам более 60 лет. Многолетние исследования по аэропетрографии завершились изданием монографии по современным песчаным отложениям Каракумов, которая могла бы служить стандартом применения математической статистики к региональным исследованиям. Были обобщены данные по химизму мезозойских и палеогеновых оловосных гранитов Северо-Восточной Азии, что позволило дать новую металлогеническую схему огромной территории. В рассматриваемый период были созданы также вероятностные модели кристаллизации и метасоматического преобразования гранитов. Модели привели к разработке принципиально новых методов картирования гранитных массивов, что способствовало решению задачи идентификации потенциально рудоносных интрузий, выявлению новых фактов о соотношениях между гидротермами, пегматитами и карбонатитами, а также о специфике докембрийских магматических гранитов. Нельзя не упомянуть и о крупных сводках по моделям седиментологии, о количественном подходе в стратиграфии с широким использованием теории случайных процессов, а также по методам моделирования геологических процессов на ЭВМ (Шварцахер; Хербо).

Наряду с результатами, исключительно важными для геологии, были достигнуты успехи и в области чистой математики. Это решение А. Н. Колмогоровым задачи о межслоевом размыве, выдвинутой А. Б. Вистеллюсом еще в 1948 г.; разработка проблем ложной корреляции с определением F -независимости; развитие элементов теории укрупнения в марковских цепях; разработки по матричным неравенствам.

Одновременно с научными достижениями наметились также и некоторые организационные сдвиги. Они выражаются в создании мощной

вычислительной базы в виде вычислительных центров при геологических учреждениях. Вычислительные работы на ЭВМ не определяют лица или уровня математической геологии как науки, но хорошая вычислительная база и наличие широко доступных программ существенно при условии, если основные работы поставлены правильно. В связи с этим нужно отметить, что развитие математической геологии сопровождалось не только успехами, но и крупными недочетами. Основные из них приведены ниже.

1. Резкий недостаток специалистов, способных ставить значимые и перспективные работы. По существу все важнейшие результаты по математической геологии получены в нескольких лабораториях; из них следует отметить Лабораторию математической геологии ЛОМИ (руководитель профессор А. Б. Вистелиус) и кафедру математической геологии университета в Белфасте (Великобритания, руководитель профессор В. Шварцахер).

2. Широкая вульгаризация предмета, сводящая математическую геологию к использованию вычислительной техники в плане «математической обработки результатов наблюдений». К сожалению, эту вульгаризацию иногда стремятся представить как некое философское направление.

3. Работы, выполняющиеся на основе предположения, что с помощью математики, без углубленного изучения геологии и построения предметных концептуальных моделей, возможно получение существенных результатов.

4. Отрыв лиц, занимающихся внедрением математики в геологию, от полевых и экспериментальных работ, т. е. лишение их тех первичных данных, которые служат источником основных идей.

Очевидно, что отмеченные недостатки требуют изменения существующих организационных форм, на основе которых ведется работа по математической геологии. Вероятно, необходимо создание специфической организационной структуры. Во главе такой структуры, по-видимому, должен находиться Институт математической геологии системы АН СССР. Его исследования в плане фундаментальных разработок должны осваиваться ведомственными институтами и далее спускаться в центры, создание которых необходимо при различных производственных организациях. Учитывая, что такая структура не может быть создана за короткое время, кажется полезным преобразовать Лабораторию математической геологии МИАН в самостоятельную проблемную лабораторию при Отделении математики АН СССР. Это расширит базу для проводимых ею работ и явится хорошим подготовительным шагом к дальнейшей организации института. Одновременно необходимо организовать, хотя бы в небольшом числе вузов, подготовку специалистов по математической геологии.

Прошло 30 с небольшим лет с момента возникновения математической геологии и непрерывной систематической работы в этом направлении. В настоящее время совершенно ясно, что создание математической геологии является вехой в развитии всего цикла геологических наук. Это направление весьма существенно и знаменует собой распространение математики в новую важную область человеческой деятельности, сопровождающееся появлением нетривиальных математических задач.

Актуальность поднятого вопроса очевидна, особенно если учесть, что весь мир стоит на пороге кризиса минерального сырья. С этих позиций необходимость обеспечения успешного развития математической геологии не может вызывать сомнений. Законом же успешной работы является стимуляция исследований, основанных на органическом слиянии интуиции геолога с совершенством научного аппарата математики.

І. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАГМАТИЧЕСКИХ И МЕТАСОМАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

О ПРИРОДНЫХ АНАЛОГАХ ИДЕАЛЬНЫХ ГРАНИТОВ (НА ПРИМЕРЕ МАССИВА КЫЗЫЛТАС В ЦЕНТРАЛЬНОМ КАЗАХСТАНЕ)

Д. Н. И в а н о в

*Лаборатория математической геологии Ленинградского отделения ордена Ленина
Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, Ленинград*

Цель настоящей работы — показать существование гранитных массивов, в значительной части сложенных аналогами идеальных гранитов (Vistelius, 1972). После длительных поисков удалось выявить массив, как будто бы отвечающий поставленной задаче. Таким массивом оказался гранитный массив Кызылтас в Центральном Казахстане. Результаты исследования этого массива изложены ниже.

КРАТКАЯ ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МАССИВА КЫЗЫЛТАС

Гранитный массив Кызылтас расположен в Актогайском районе Казахской ССР, к северу от пос. Бирлестык. Массив приурочен к сводовой части горст-антиклинального поднятия северо-западного простирания на западном крыле Токрауского синклиория. Это типичная интрузия вулканоплутонической ассоциации, относящаяся к так называемым пермским гранитным плутонам Центрального Казахстана (акчатауский комплекс), которые сформировались в период завершения вулканической деятельности в позднегерцинское время (рис. 1, см. вкл.).

Выбор массива Кызылтас в качестве объекта исследования определялся следующими соображениями.

1. Магматическое происхождение гранитов акчатауского комплекса, к которым относятся породы массива, не вызывает сомнений.

2. По химизму и минеральному составу граниты этого комплекса приближаются к аляскитам, т. е. отвечают представлениям о составе идеальных гранитов.

3. Процессы ассимиляции и метасоматоза в породах массива развиты незначительно, что дает основания предполагать широкое развитие в них идеальных гранитов.

4. Недалеко от исследованного массива локализованы граниты Акчатау, приуроченные к тому же комплексу. Представлялась возможность провести исследование, направленное на сравнение структуры метасоматического поля заведомо рудоносной интрузии и интрузии, не несущей оруденения. Изучение нерудоносного массива Кызылтас — один из этапов этого исследования.

Гранитный массив Кызылтас изучался в различных аспектах (Набоков и др., 1967; Зейлик и др., 1968; Иванов, 1968а, 1968б). Массив хорошо обнажен и в плане представляется почти изометрическим. Площадь выхода гранитов порядка 70 км². Граниты прорывают верхнедевонские и

нижекаменноугольные вулканогенные породы, представленные туфами, лавами андезитового и андезито-дацитового состава и игнимбритами. Вмещающие породы вблизи массива, как правило, ороговикованы незначительно, за исключением восточного контакта, где зона ороговикования достигает 300 и более метров. Здесь контактовая поверхность полого погружается на восток. На севере и юге контакты близки к вертикальным, на северо-западе и юго-западе погружаются под углом 40—50° в сторону вмещающих пород. На юго-западе к массиву примыкает небольшое тело сиенито-диоритов-гранодиоритов, приуроченное к зоне древнего разлома северо-восточного простирания. Возраст этого образования датируется как среднекаменноугольный. В восточной части массива в гранитах локализован ксенолит кварцевых диоритов размером 0.5×0.6 км². Возраст породы ксенолита считается верхнедевонским.

В пределах массива и в экзоконтакте наблюдаются многочисленные дайки микрогранитов, сиенито-диоритовых, диоритовых и диабазовых порфиритов длиной до 1.5 км. Постмагматические процессы проявлены в виде мелких зон грейзенизации, иногда с жилами кварца и незначительной рудной минерализацией. При опробовании гранитов вблизи зон грейзенизации и кварцевых жил особое внимание уделялось качеству образцов: брались образцы гранитных пород, в которых отсутствовали признаки вторичной переработки.

Выделяются три основные разновидности гранитов: крупнозернистые, среднезернистые и мелкозернистые (равномернозернистые и порфиоровидные). Все эти разновидности, свойственные большинству пермских гранитных массивов Центрального Казахстана, близки по химическому и минералогическому составу, пересыщены кремнекислотой и щелочами и по классификации Куплетского могут быть отнесены к группе щелочных лейкократовых гранитов.

Взаимоотношения между отдельными разновидностями дают основание считать их интрузивными фазами (Гокоев, 1949; Павлов, 1964). Временные интервалы, разделяющие эти фазы, вероятно, были незначительными (хотя некоторые исследователи относят крупнозернистые граниты к более древнему комплексу, чем акчатауский), и химический состав последовательных порций гранитного расплава практически не менялся. Контакты между отдельными разновидностями обычно резкие, иногда в более молодых гранитах наблюдается зона закалки.

Последовательность образования гранитов отдельных фаз следующая: крупнозернистые граниты → среднезернистые граниты → мелкозернистые граниты (от более древних к более молодым). По данным геофизических исследований, предполагается, что крупнозернистые граниты, относящиеся к породам так называемой главной интрузивной фазы (Коптев-Дворников, 1952; Павлов, 1964), располагаются в основном на глубине > 1 км; на поверхности они составляют не более 20% общей площади массива. Таким образом, современный эрозионный срез скорее всего характеризует апикальную часть массива.

Среднезернистые граниты развиты наиболее широко (занимают до 60% площади массива). Они прорывают крупнозернистые граниты; вероятно, наблюдаемые в плане блоки крупнозернистых гранитов являются останцами пород более древней фазы, залегающих на глубине и процизаных по первичным пластовым и крутопадающим трещинам материалом, давшим начало среднезернистым гранитам.

Наиболее молодые мелкозернистые граниты встречаются в виде пластовых и штокообразных тел, наибольшее из них расположено на северо-западе массива. Мелкие тела различной формы (чаще пластообразные), вероятно интродуцированные в полости отслаивания трещин отдельности более ранних гранитов, развиты повсеместно. Видимых изменений на контакте с вмещающими породами и гранитами более древних фаз мелкозернистые граниты не имеют.

АНАЛИЗ НАБЛЮДЕНИЙ

Для исследования по сравнительно равномерной сети было отобрано 226 образцов, из которых 216 были признаны пригодными для дальнейшей обработки (рис. 1). В каждом образце в шлифах выделялась непрерывная последовательность зерен калиевого полевого шпата (Or), кварца (Q) и плагиоклаза (Ab) общей длиной около 1000 зерен (Арабаджева-Цветкова и др., 1972). Каждая из полученных последовательностей сравнивалась с последовательностью Бернулли (гипотеза H_0), простой цепью Маркова (H_1), марковской цепью 2-го (H_2) и более чем 2-го (H_3) порядков. Проверялись также однородность и обратимость последовательности. Если в серии альтернатив $H_0 : H_1, H_1 : H_2$ и $H_2 : H_3$ принималась гипотеза о соответствии наблюдаемой последовательности простой марковской цепи, то по методу минимума χ^2 (статистика χ_x^2) проводилось сравнение наблюдаемой матрицы переходных вероятностей $\tilde{P}_{i,j}$ с CA_p , где A_p — диагональная матрица с диагональными элементами, отвечающими наблюдаемым априорным вероятностям, а элементы матрицы C рассчитывались для обеспечения минимума χ^2 . Кроме того, вычислялись доверительные интервалы для p_{ii} и p_i , и по наблюдениям проверялось выполнение неравенств $p_{ii} < p_i$ (Вистелиус и др., 1972).

Анализ альтернатив $H_i : H_{i+1}$ позволил разделить все наблюдения на две группы. Одна группа содержала последовательности, не отличимые от простых цепей Маркова. Результаты вычислений для этой группы наблюдений сведены в табл. 1. Вторая группа наблюдений охватывала образцы гранитов, в которых последовательности зерен калиевого полевого шпата, кварца и плагиоклаза не отличались от цепей Маркова 2-го и более высокого порядков. Результаты вычислений для этой группы сведены в табл. 2. Последовательностей минеральных зерен, не отличимых от последовательностей Бернулли, не встречено ни в одном случае. Проанализируем результаты каждой из выделенных групп последовательностей отдельно.

Как видно из табл. 1, породы с последовательностями зерен, аналогичными простым цепям Маркова, встречены примерно в половине всех исследуемых образцов. Это само по себе в высшей степени симптоматично, так как в большинстве массивов, исследованных по описанной методике, такие породы составляли небольшую часть. Единственным массивом, близким в этом смысле массиву Кызылтас, был нерудоносный массив Мальсбург (ФРГ), исследованный А. Б. Вистелиусом и Б. А. Шубергом в 1971 г. В Иультинском гранитном массиве наблюдалось 10 аналогов простых цепей Маркова из 120 образцов (Иванов, Подольский, 1974), в омсукчанских гранитах — 11 из 222 образцов (Вистелиус, Романова, 1972), в Арга-Ынних-Хая, где сами граниты являются рудой, было встречено всего 5 аналогов простых цепей Маркова (Романова, 1978) и, наконец, в оловяносном массиве Карнменеллис (Корнуолл, Англия) среди 80 изученных образцов не было найдено вообще ни одного образца с последовательностью зерен минералов 1-го порядка (результаты анализа приведены на соответствующей схеме метасоматической зональности массива; Vistelius, Lea, 1972).

Итак, гранитный массив Кызылтас оказался богатым гранитами, в которых последовательности минеральных зерен не отличимы от простых цепей Маркова. Таким образом, породы этого массива в каком-то смысле ближе к идеальным гранитам, чем породы заведомо рудоносных массивов.

Обратимся теперь к оценкам однородности, так как только для однородных последовательностей имеют смысл наши утверждения о простоте цепи. Из данных табл. 1 видно, что в основном мы имеем дело с однородными последовательностями, однако в 14 случаях однородность нарушена, и эти образцы не отвечают определению идеального гранита. Далее, идеальный гранит должен иметь матрицу переходных вероятностей, отвечающую

Результаты проверки последовательности зерен
главных пороодообразующих минералов в гранитах массива Кызылгас
на марковские свойства

Номер образца	Длина последовательности (в числе зерен)	Число подпоследовательностей	Наблюдаемые значения Δ , полученные при проверке марковских гипотез		Проверка однородности для принятой гипотезы		Класс последовательности, определенный по результатам проверки однородности и анализа матрицы P_{ij} (см. рис. 2)
			$H_0: H_1, \chi^2_{0,05} = 9,49$	$H_1: H_2, \chi^2_{0,05} = 21,03$	$\chi^2_{0,05}$	χ^2_m	

Крупнозернистые граниты

5	1030	41	37.71	49.86	277.13	247.17	III
15	1130	16	97.56	17.16	113.14	92.73	III
86	1082	31	96.54	20.49	212.30	210.41	III
87	986	34	123.60	19.57	231.80	182.24	III
88	1024	43	30.08	11.39	290.0	296.77	III
136	1044	34	40.75	20.26	231.80	237.20	III
150	1014	39	56.96	8.00	264.22	246.78	III
154	1017	36	26.18	20.01	244.80	231.76	III
155	1112	29	38.82	9.76	199.30	176.62	III
162	1012	37	42.42	17.64	251.30	242.71	III
163	1094	33	78.57	14.05	225.34	205.86	III
164	1064	31	78.51	15.87	212.30	164.05	III
182	1010	38	43.86	15.69	257.75	208.48	III
197	1052	37	72.27	9.62	251.30	246.99	III
224	972	37	17.21	9.03	251.30	236.14	III

Среднезернистые граниты

14	1123	24	56.71	12.60	166.42	133.70	III
23	1118	16	36.68	12.29	113.14	88.08	III
25	1085	17	154.09	14.85	119.87	109.96	III
27	1143	26	125.52	7.19	179.58	73.57	III
29	1052	31	40.60	18.56	212.30	219.22	III
42	953	10	56.82	15.10	72.15	50.16	III
44	1083	30	55.64	19.28	205.78	204.66	III
45	1137	23	127.97	20.15	159.82	144.96	III
52	1099	17	79.83	10.25	119.87	91.15	III
57	1099	22	148.07	11.01	153.20	129.94	III
58	1123	18	160.76	11.08	126.57	107.27	III
59	1131	24	209.38	19.43	166.42	163.20	I
69	1192	22	137.05	11.73	153.20	145.24	III
70	1111	22	170.08	6.42	153.20	44.26	III
72	1006	12	140.04	18.48	85.97	96.15	III
75	1134	16	97.49	18.28	113.14	85.17	III
77	1125	17	73.76	19.87	119.87	111.11	III
80	1086	10	100.19	11.92	72.15	58.32	III
89	1089	11	168.44	16.89	79.08	63.64	III
90	787	11	50.85	14.14	79.08	88.93	III
95	1098	23	98.26	18.28	159.82	166.36	III
99	1172	18	111.35	17.38	126.57	122.46	III
101	1018	9	174.70	14.96	65.17	54.11	III
102	931	18	121.91	5.61	126.57	99.00	III
104	988	15	86.74	17.46	106.40	92.18	III
105	1041	16	193.99	17.85	113.14	108.25	III
110	1068	23	141.62	17.55	159.82	143.19	III
111	1110	26	100.71	14.90	179.58	154.57	III
112	1061	30	112.37	18.04	205.78	207.70	III
115	1047	32	103.90	20.43	218.80	198.91	III
116	1064	32	83.92	18.99	218.80	214.12	III
121	1172	32	172.41	16.53	218.90	232.63	III
124	1154	29	114.71	15.29	199.30	226.60	III

Таблица 1 (продолжение)

Номер образца	Длина последовательности (в числе зерен)	Число подпоследовательностей	Наблюдаемые значения Δ , полученные при проверке марковских гипотез		Проверка однородности для принятой гипотезы		Класс последовательности, определенный по результатам проверки однородности и анализа матрицы P_{ij} (см. рис. 2)
			$H_0: H_1, \chi^2_{0,05} = 9,49$	$H_2: H_3, \chi^2_{0,05} = 21,03$	$\chi^2_{0,05}$	χ^2_m	
143	1098	23	111.22	18.21	159.82	150.48	III
144	1024	16	81.70	18.80	113.14	75.28	III
145	1106	26	165.32	10.61	179.58	189.38	III
167	1133	25	103.82	18.76	173.00	177.74	III
189	1111	18	191.51	18.76	126.57	105.11	III
191	1148	20	107.54	10.70	139.92	131.21	III
195	1054	22	81.43	11.97	153.20	128.68	III
198	1002	20	156.48	17.68	139.92	117.18	III
202	1068	34	71.27	14.73	231.80	227.07	III
206	1114	21	84.09	11.38	146.57	120.19	III
207	1110	35	27.26	17.69	238.32	222.53	III
212	1006	39	85.45	16.38	264.22	186.88	III
213	1092	21	36.48	17.52	146.57	108.44	III
222	1139	17	109.34	16.87	119.87	148.27	III

Мелкозернистые граниты

3	1080	23	99.61	16.85	159.82	161.57	III
6	1092	28	160.02	16.21	192.17	150.46	III
7	1105	16	126.91	17.49	113.14	65.71	I
20	1064	20	14.77	15.87	139.92	107.43	III
22	1125	9	160.02	15.05	65.17	45.40	I
30	1141	7	330.85	13.92	51.00	37.49	I
32	1052	23	101.59	9.87	159.82	127.17	III
33	1130	11	212.98	16.24	79.08	59.24	III
35	1156	9	199.89	13.51	65.17	42.55	I
37	1120	18	155.73	9.42	126.57	100.41	III
38	1060	13	236.97	17.16	92.81	90.42	I
39	1067	22	78.36	12.15	153.20	135.10	III
61	1098	7	214.63	12.19	51.00	51.39	III
62	1099	7	200.57	8.31	51.00	28.11	I
106	1107	19	343.24	14.24	133.26	115.54	I
109	1138	10	209.54	14.94	72.15	48.47	I
118	1135	11	269.79	18.04	79.08	57.19	I
119	1117	12	144.51	6.31	85.97	70.74	I
127	1127	15	227.05	12.49	106.40	104.45	III
129	1128	18	167.43	10.81	126.57	107.40	III
133	1045	21	88.14	9.57	146.57	130.83	III
134	1127	20	221.59	17.23	139.92	122.00	I
135	1111	8	270.45	13.58	58.12	31.03	I
141	1106	11	305.76	13.52	79.08	73.20	I
142	1102	21	267.20	12.97	146.57	129.16	I
153	1128	10	270.29	12.15	72.15	55.42	I
159	1118	16	186.59	18.27	113.14	110.06	III
171	1160	13	116.66	10.51	92.81	69.94	I
172	1108	17	189.32	20.59	119.87	109.30	I
173	1146	18	271.20	18.62	126.57	120.08	I
176	1120	15	279.25	19.95	106.40	81.15	I
177	1155	13	241.43	15.12	92.81	83.63	I
179	1117	18	222.28	16.58	126.57	105.85	I
180	1114	8	178.01	19.33	58.12	38.25	I
181	1126	14	341.71	11.03	99.62	69.37	I
203	1008	18	53.06	16.07	126.57	118.29	III
214	1106	15	138.78	11.54	106.40	75.69	I
216	1169	12	292.75	14.01	85.97	73.47	III
217	1125	9	303.55	12.51	65.17	34.08	I
218	1011	19	96.00	13.20	133.26	136.45	I

Примечание. Класс I — идеальные граниты; класс II (см. табл. 2) — граниты, претерпевшие метасоматоз; класс III — граниты, не попавшие в класс I и II (Вистелиус и др., 1972).

Результаты проверки последовательностей зерен главных породообразующих минералов в гранитах массива Кызылтас на марковские свойства (все образцы попадают в класс II)

Номер образца	Длина последовательности (в числе зерен)	Число последовательностей	Наблюдаемые значения Λ , полученные при проверке альтернатив			Проверка однородности для принятой гипотезы		Выбор пути метасоматоза		
			$H_0 : H_1,$ $\chi_{0,05}^2 = 9.49$	$H_1 : H_2,$ $\chi_{0,05}^2 = 21.03$	$H_2 : H_3,$ $\chi_{0,05}^2 = 51.0$	$\chi_{0,05}^2$	χ_m^2	Or $\chi_{0,05}^2 = 9.49$	Q $\chi_{0,05}^2 = 9.49$	Ab $\chi_{0,05}^2 = 9.49$

I. Последовательности, отвечающие цепям Маркова 2-го порядка
Крупнозернистые граниты

1	1127	21	181.17	34.86	49.93	495.2	354.71	7.16	6.40	21.30
2	1013	28	24.55	51.71	41.32	538.4	467.26	36.34	13.01	2.36
10	1039	31	72.06	26.66	33.53	595.1	522.38	8.00	11.36	7.31
12	1087	39	55.94	37.87	44.24	746.0	642.05	25.67	7.28	4.92
17	1033	39	29.83	52.98	34.57	746.0	582.26	45.62	4.30	3.07
21	1019	32	25.02	42.72	33.81	614.0	499.76	10.98	14.42	17.32
46	1137	24	181.69	48.59	30.39	462.4	366.79	2.25	33.49	12.85
47	1194	17	109.14	29.37	35.53	328.6	245.72	9.12	11.02	9.23
49	944	32	45.55	35.29	26.30	614.0	545.48	21.01	3.02	11.26
50	1111	31	25.58	30.56	29.16	595.1	522.65	6.56	14.39	9.61
53	1140	31	105.77	47.75	33.51	595.1	490.49	6.74	8.68	32.32
54	1138	28	134.03	51.41	49.85	538.4	490.31	23.42	11.39	16.61
55	980	33	54.96	33.80	42.75	632.9	511.87	9.74	14.71	9.35
56	996	32	30.04	54.19	38.98	614.0	532.74	16.02	6.88	31.30
60	1045	37	56.24	39.73	39.55	708.3	575.10	5.33	17.59	16.81
81	1007	37	40.99	36.04	50.09	708.3	555.89	14.59	17.33	4.12
84	1067	36	16.20	36.47	38.28	689.5	625.06	12.38	7.95	16.14
85	1129	30	128.57	45.70	31.57	576.3	480.25	5.49	14.52	25.69
100	1052	34	46.83	71.38	42.46	651.8	516.44	4.27	35.88	31.23
137	1009	39	39.34	82.10	25.76	746.0	591.38	6.74	57.44	17.92
138	1028	41	64.53	28.20	31.69	783.5	663.64	18.00	0.99	9.21
149	1053	27	156.49	27.36	33.86	519.4	422.93	2.54	15.01	9.81
161	1010	43	17.68	72.09	30.51	821.1	652.42	36.60	12.29	23.20
165	1041	30	58.91	32.13	34.81	576.3	556.65	13.52	7.20	11.41
183	1090	26	18.90	33.73	39.41	500.5	444.34	12.82	9.76	11.14
184	936	33	25.09	43.15	32.08	632.9	515.83	22.11	16.67	4.37

Таблица 2 (продолжение)

Номер образца	Длина последовательности (в числе зерен)	Число подпоследовательностей	Наблюденные значения λ , полученные при проверке альтернатив			Проверка однородности для принятой гипотезы		Выбор пути метасоматоза		
			$H_0 : H_1$, $\chi^2_{0,05} = 9.49$	$H_1 : H_2$, $\chi^2_{0,05} = 21.03$	$H_2 : H_3$, $\chi^2_{0,05} = 51.0$	$\chi^2_{0,05}$	χ^2_m	Or $\chi^2_{0,05} = 9.49$	Q $\chi^2_{0,05} = 9.49$	Ab $\chi^2_{0,05} = 9.49$
185	1145	36	102.39	22.03	31.40	689.5	580.38	10.08	7.49	4.46
186	1031	38	37.37	27.77	28.46	727.2	589.60	9.51	5.28	12.98
187	1043	37	39.25	43.08	33.91	708.3	589.79	10.85	17.09	15.13
196	959	29	46.88	38.78	36.34	557.3	465.52	11.82	12.17	14.78
223	999	29	113.07	32.54	40.40	557.3	472.84	5.59	23.47	3.49
225	1081	30	53.90	57.92	26.14	576.3	532.13	11.59	24.28	22.05
226	990	33	66.54	23.38	43.19	632.9	474.77	13.10	6.45	3.83

Среднезернистые граниты

18	1073	29	129.79	48.76	37.94	557.3	453.25	7.69	33.41	7.66
19	929	6	50.12	34.82	17.75	113.14	81.33	9.36	19.83	5.63
26	1137	29	121.05	35.11	38.40	557.3	481.61	5.99	16.56	12.56
34	1085	20	155.04	29.54	23.37	386.1	325.54	9.22	10.15	10.17
36	1157	18	145.74	40.25	32.77	347.8	325.17	5.57	3.89	30.80
40	958	9	81.23	30.74	29.15	173.00	151.43	2.05	8.04	20.66
43	1054	30	66.90	29.82	28.59	576.3	457.01	8.05	12.53	9.24
64	1086	18	162.68	22.64	40.00	347.8	258.23	8.45	7.81	6.38
65	1122	25	89.34	39.51	47.01	481.5	427.80	3.24	19.14	17.13
66	1014	30	147.48	38.96	37.32	576.3	499.88	17.94	18.07	2.95
67	1081	27	98.68	28.22	34.42	519.4	482.79	6.96	14.95	6.30
71	1093	27	200.18	24.00	30.49	519.4	418.65	10.64	0.47	12.90
73	1106	25	148.39	25.30	30.49	481.5	400.53	5.20	1.11	19.00
74	1150	21	136.30	21.99	47.52	405.2	358.53	3.80	3.45	4.74
76	1128	40	104.30	26.14	36.30	764.7	636.32	3.13	7.77	15.24
78	1040	19	155.88	31.47	40.48	367.0	331.73	1.46	2.70	27.31
92	1093	34	33.94	41.91	38.10	651.8	526.84	9.01	12.50	20.40
93	1120	25	116.81	26.28	40.45	481.5	379.71	3.25	9.36	13.67
94	1143	25	64.90	32.70	38.40	481.5	371.46	2.41	8.97	21.32
96	1092	20	134.14	29.20	49.39	386.1	317.85	5.00	5.19	19.02
97	1105	23	289.50	22.47	46.25	443.4	348.96	4.29	8.49	8.69
103	915	20	83.48	23.80	29.57	386.1	308.62	11.88	4.59	7.32

Таблица 2 (продолжение)

Номер образца	Длина последовательности (в числе зерен)	Число последовательностей	Наблюдённые значения λ , полученные при проверке альтернатив			Проверка однородности для принятой гипотезы		Выбор пути метасоматоза		
			$H_0 : H_1,$ $\chi_{0,05}^2 = 9.49$	$H_1 : H_2,$ $\chi_{0,05}^2 = 21.03$	$H_2 : H_3,$ $\chi_{0,05}^2 = 51.0$	$\chi_{0,05}^2$	χ_m^2	Or $\chi_{0,05}^2 = 9.49$	Q $\chi_{0,05}^2 = 9.49$	Ab $\chi_{0,05}^2 = 9.49$
108	1150	18	125.91	25.80	38.14	347.8	285.08	4.17	7.30	14.33
122	1079	28	172.17	28.65	25.40	538.4	433.61	4.54	10.00	14.11
123	1029	26	167.22	22.61	35.47	500.5	441.92	5.48	9.21	7.91
125	1126	24	179.18	37.86	29.30	462.4	400.87	13.06	10.40	14.40
126	1159	30	67.95	41.80	38.34	576.3	497.09	7.99	12.97	20.84
128	1112	26	163.58	26.32	29.45	500.5	386.04	12.31	1.76	12.25
139	1184	25	119.85	63.83	38.29	481.5	374.03	8.85	30.76	24.21
140	1068	29	107.92	25.12	46.40	557.3	486.68	6.23	7.24	11.65
146	1065	24	105.96	36.95	36.70	462.4	380.84	15.78	8.05	13.11
147	1120	29	85.09	22.78	44.06	557.3	466.99	4.32	11.33	7.12
148	913	15	64.43	43.72	33.84	290.0	227.60	20.60	9.35	13.77
152	1066	9	181.51	28.45	34.97	173.0	437.89	4.68	10.56	13.20
156	1119	35	123.60	29.38	28.13	670.7	531.84	4.98	6.56	17.84
160	1026	22	99.40	45.69	34.58	424.3	374.40	4.46	3.76	37.47
166	984	27	168.26	30.06	32.01	519.4	449.23	10.68	10.72	8.66
168	1004	25	91.91	35.27	38.28	481.5	345.69	10.36	14.38	10.53
169	981	32	123.70	33.58	39.21	614.0	472.74	8.24	17.69	8.25
190	1196	14	124.21	47.95	32.36	270.7	266.91	2.40	15.11	30.44
192	1022	14	117.26	47.53	39.82	270.7	93.87	8.37	14.59	24.57
193	1160	9	210.84	37.65	47.42	173.0	161.61	11.28	7.42	18.95
194	1123	10	159.01	21.57	50.87	192.17	166.15	2.99	2.70	15.89
199	1108	22	98.45	23.55	49.05	424.3	361.36	12.00	2.49	9.06
200	1107	26	148.10	22.55	41.24	500.5	434.16	5.26	10.39	6.89
201	1164	18	66.18	30.13	38.96	347.8	306.64	1.32	9.57	19.23
204	1062	20	163.99	23.99	34.35	386.1	296.26	5.11	6.38	12.45
205	1122	42	76.67	46.41	33.95	802.3	658.02	27.40	16.17	2.85
208	1134	28	208.99	32.42	22.43	538.4	446.65	10.40	6.04	15.98
209	1114	24	118.39	28.39	39.93	462.4	406.76	8.77	2.07	17.55
210	1023	22	95.43	27.97	48.35	424.3	362.00	16.77	5.37	5.83
211	918	25	66.47	40.55	31.40	481.5	371.82	3.57	22.00	14.98
220	953	24	61.10	21.69	34.05	462.4	399.96	5.04	1.26	15.40
221	1086	17	118.29	21.47	26.82	328.6	300.88	3.22	0.58	17.67

2485

Таблица 2 (продолжение)

Номер образца	Длина последовательности (в числе зерен)	Число последовательностей	Наблюденные значения Δ , полученные при проверке альтернатив			Проверка однородности для принятой гипотезы		Выбор пути метасоматоза		
			$H_0 : H_1$, $\chi^2_{0,05} = 9.49$	$H_1 : H_2$, $\chi^2_{0,05} = 21.03$	$H_2 : H_3$, $\chi^2_{0,05} = 51.0$	$\chi^2_{0,05}$	χ^2_m	Or $\chi^2_{0,05} = 9.49$	Q $\chi^2_{0,05} = 9.49$	Ab $\chi^2_{0,05} = 9.49$
Мелкозернистые граниты										
4	1119	7	185.01	29.89	31.03	133.26	104.75	10.19	13.35	6.35
8	1148	18	196.05	21.60	40.10	347.8	283.77	7.52	10.12	3.96
31	1120	10	298.77	22.23	36.44	192.17	127.33	2.77	10.60	8.85
48	1043	15	293.89	35.47	46.58	290.0	216.44	6.78	14.86	13.83
51	1118	10	260.41	23.00	36.71	192.17	141.37	6.33	1.87	14.81
63	1131	11	173.07	21.36	32.58	212.3	191.92	0.28	8.61	12.48
79	1149	20	189.33	27.88	37.37	386.1	329.49	10.28	0.59	17.01
82	1104	29	269.42	27.88	33.44	557.3	418.09	13.49	2.15	12.25
117	1129	14	223.16	22.83	47.72	270.7	236.13	13.00	3.58	6.25
132	1100	25	99.13	22.04	48.65	481.5	371.38	2.54	1.79	17.71
157	1127	13	316.91	30.22	48.00	251.3	197.04	15.94	7.43	6.85
158	1120	15	181.71	32.34	33.57	290.0	282.62	8.72	7.60	16.02
174	1129	16	285.52	27.99	50.69	309.3	231.71	2.55	7.83	17.61
178	1107	16	267.61	28.84	43.23	309.3	228.23	3.96	2.83	22.05
215	1188	17	280.24	25.09	44.61	328.6	249.14	15.32	5.13	4.64
II. Последовательности, отвечающие цепям Маркова порядка >2										
Крупнозернистые граниты										
151	1049	30	70.72	32.55	61.58	1659.2	437.89	4.68	10.56	13.20
Среднезернистые граниты										
24	1059	18	170.18	21.26	58.27	989.6	643.23	13.82	4.43	3.01
41	996	28	104.05	35.30	54.31	1547.3	843.39	7.67	6.07	21.57
91	1137	23	48.87	34.04	54.06	1269.3	896.69	10.18	2.74	21.12
98	1098	25	117.17	30.36	63.59	1380.8	904.79	4.60	17.57	8.19
113	979	18	96.21	23.12	69.24	989.6	550.45	5.46	13.83	3.83
120	1079	20	76.41	23.24	52.14	1101.6	784.80	5.61	3.49	14.14
170	1053	23	247.82	29.08	55.87	1269.3	663.58	2.84	12.21	14.03
188	1078	20	118.86	21.77	52.18	1101.6	712.96	4.27	7.33	10.17
219	972	35	47.44	30.98	55.58	1936.8	987.94	5.70	9.60	15.69
Мелкозернистые граниты										
107	1116	11	287.19	32.52	55.93	595.1	388.96	6.57	3.59	22.36
175	1132	14	317.06	28.95	59.96	764.7	449.63	1.23	9.82	17.91



Мелкозернистые граниты

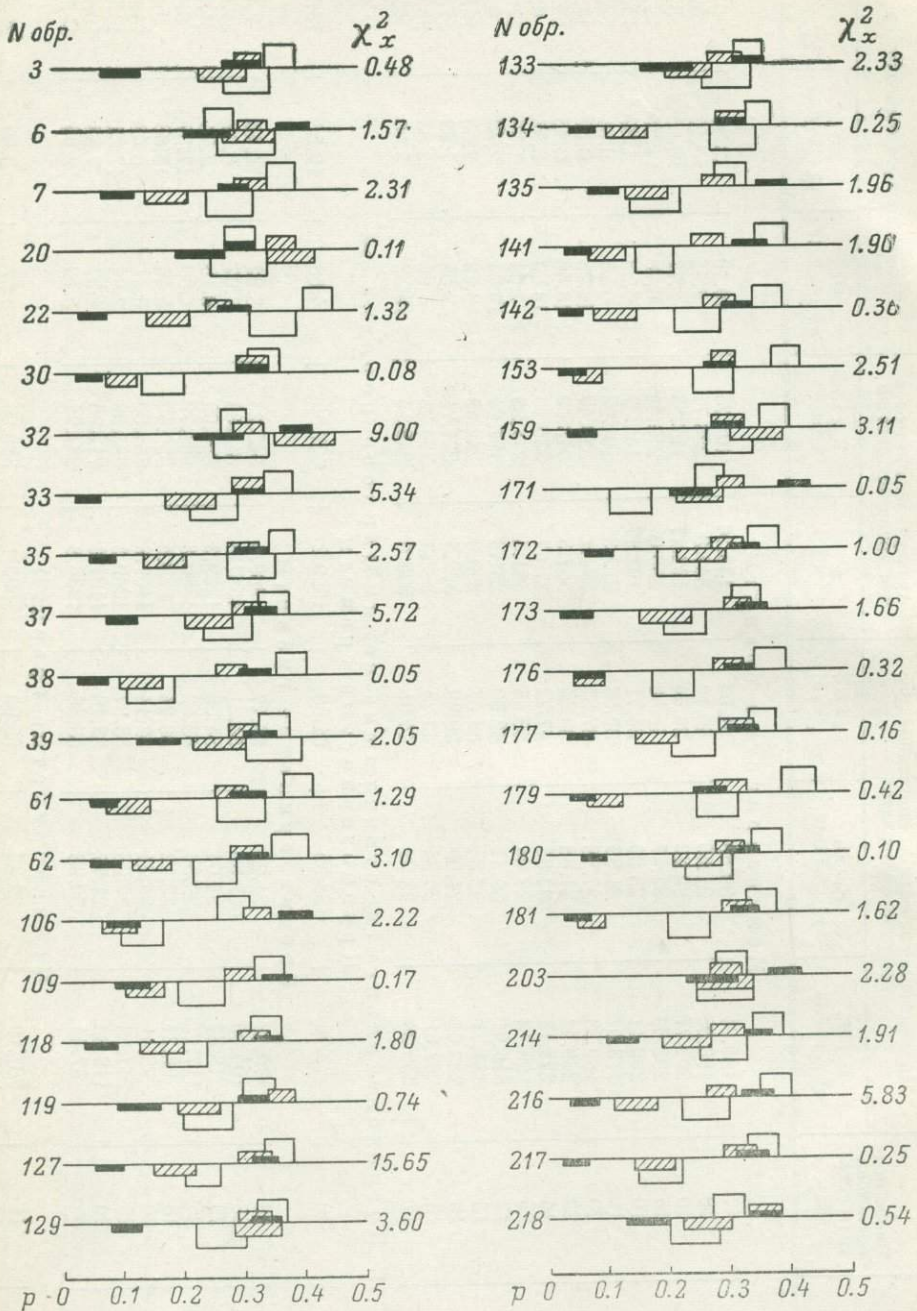


Рис. 2. Результаты анализа матрицы переходных вероятностей в последовательностях минеральных зерен гранитов массива Кызылташ, отвечающих цепям Маркова 1-го порядка.

1 — калиевый полевой шпат; 2 — кварц; 3 — плагиоклаз. Сверху — доверительные интервалы элементов вектора безусловных вероятностей (p_i), снизу — доверительные интервалы элементов главной диагонали матрицы переходных вероятностей, p_{ii} ; χ^2_x — значения статистики, оценивающей симметрию матрицы C ($\chi^2 = 3.84$ для 1-й степени свободы и уровня значимости 0.05).

уравнению $P_{ij} = C\Lambda_p$, а элементы этой матрицы должны удовлетворять неравенству $p_{ii} < p_i$. Обращаясь к табл. 1 и рис. 2, мы видим, что большая часть исследованных образцов, фигурирующих в табл. 1, не удовлетво-

Среднезернистые граниты

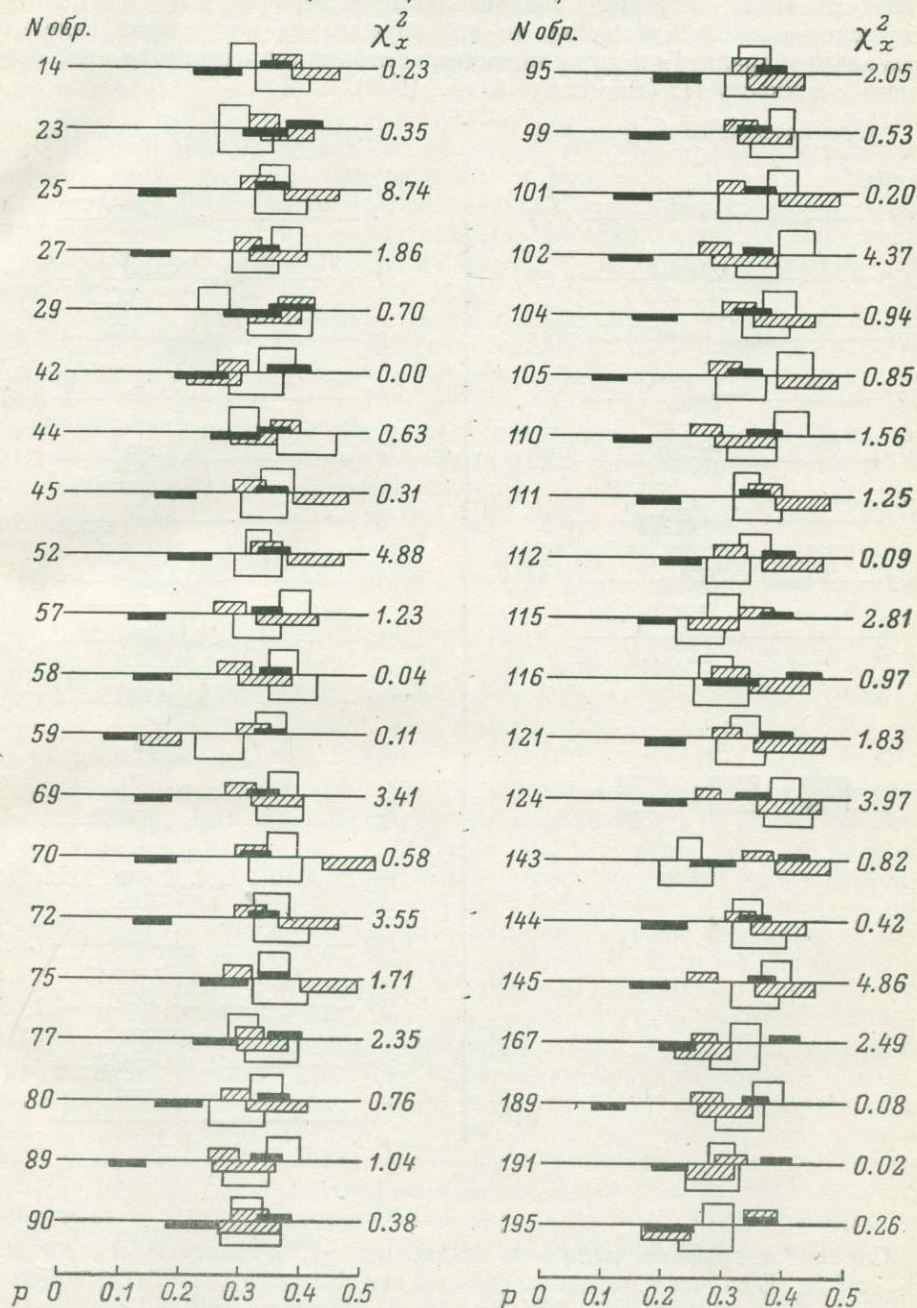


Рис. 2 (продолжение).

ряет требованиям, налагаемым на матрицу переходных вероятностей идеального гранита. Если последовательность минеральных зерен в изучаемом образце была сформирована в соответствии с моделью идеального гранита, то доверительные интервалы верхней части графика должны располагаться правее соответствующих доверительных интервалов его ниж-

ней части. Типичным примером такой последовательности является последовательность в обр. 118, взятом в мелкозернистых гранитах. Если же соответствующие доверительные интервалы верхней части совпадают с доверительными интервалами нижней части или располагаются левее последних (как, например, доверительные интервалы для плагиоклаза в крупнозернистых гранитах), то эти образцы не могут быть отнесены к идеальному гранитам и по принятой классификации считаются принадлежащими к классу III (Вистелиус и др., 1972).

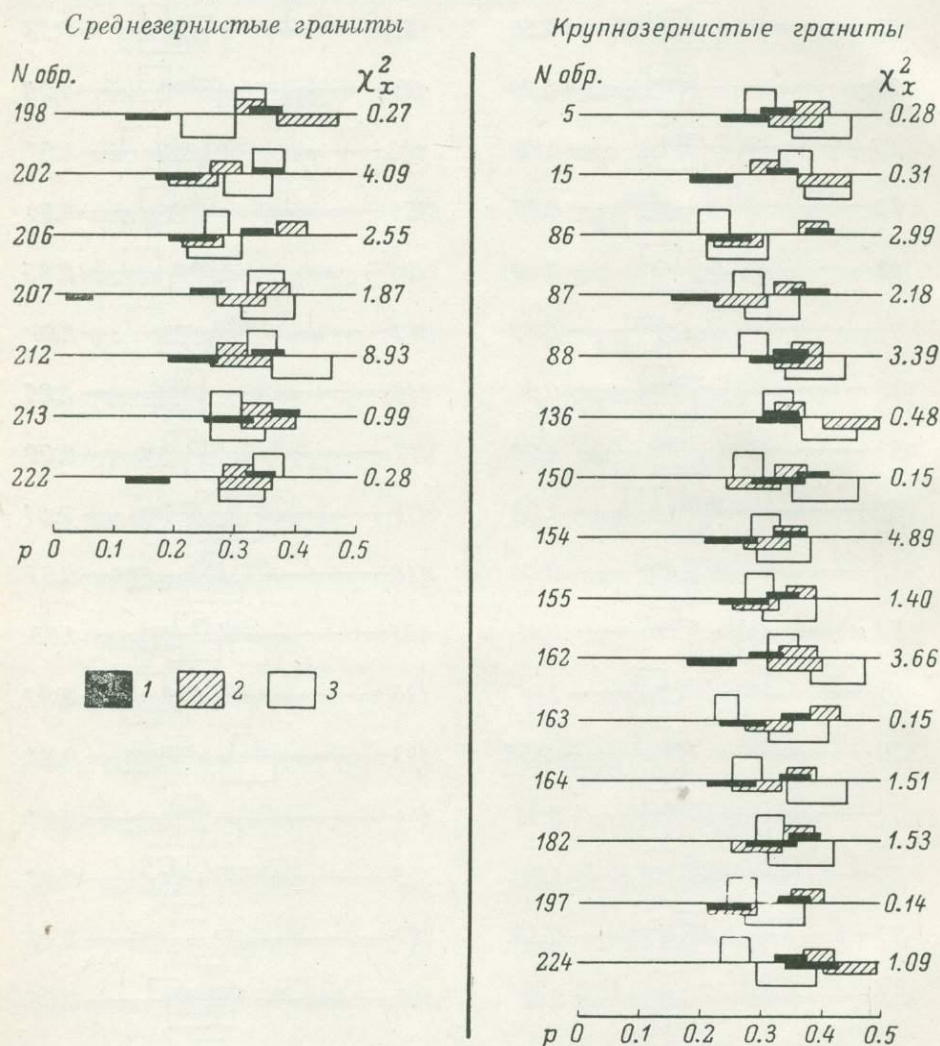


Рис. 2 (продолжение).

Справа от графика выписаны значения χ_x^2 , оценивающие согласие $\bar{P}_{i,j}$ с $СЛ_p$. В случае идеального гранита эти значения должны быть меньше критической величины $\chi^2=3.84$ для уровня надежности 0.05.

Графики сгруппированы по принадлежности образцов к определенным разновидностям гранитов. В последовательностях из мелкозернистых гранитов в 5 случаях значения χ_x^2 превосходят критическое, и эти породы отнесены к классу III. К тому же классу отнесен ряд образцов, последовательности которых не прошли проверки на однородность (см. табл. 1), и образцы, у которых доверительные интервалы для p_{ii} перекрываются с доверительными интервалами для p_i . Остальные образцы мелкозерни-

стых гранитов отнесены к классу I, т. е. могут рассматриваться как аналоги идеальных гранитов.

В среднезернистых гранитах только 1 образец (№ 59) соответствует идеальному граниту. В крупнозернистых гранитах нет ни одного образца, попадающего в эту категорию. Всего же из 102 образцов, имеющих последовательности зерен, соответствующие простым цеям Маркова, только около четверти отвечает всем требованиям, налагаемым на соответствующие матрицы.

Таким образом, анализ табл. 1 показывает, что в массиве Кызылтас породы, аналогичные идеальным гранитам, достаточно распространены и слагают около 1/8 массива (отнесены к классу I). Породы, развитые на остальных 3/8 массива, хотя и близки к идеальным гранитам по степени упорядоченности в последовательностях минеральных зерен, однако по другим критериям им не отвечают. Постараемся выяснить причину этого расхождения.

Основная масса отклонений наблюдаемых матриц от матриц идеальных гранитов происходит за счет резкого нарушения неравенства $p_{ii} < p_i$, а в более редких случаях — за счет коэффициентов, образующих матрицу C .

Внешне наблюдаемые матрицы, отвечающие идеальным гранитам, также сильно отличаются от остальных, как это видно на примере сопоставления двух характерных матриц.

Матрица $P_{i,j}$, отвечающая идеальному граниту (обр. 118, мелкозернистый гранит)				Матрица $P_{i,j}$, характеризующая последовательность в обр. 88 (крупнозернистый гранит)					
	Or	Q	Ab		Or	Q	Ab		
Or	0.06	0.45	0.49	(0.34)	Or	0.33	0.46	0.21	(0.35)
Q	0.52	0.17	0.31	(0.32)	Q	0.38	0.36	0.26	(0.37)
Ab	0.47	0.32	0.21	(0.34)	Ab	0.30	0.31	0.39	(0.28)

Справа от матриц приведен вектор безусловных вероятностей; $i, j \in \{Or, Q, Ab\}$.

Следует отметить, что в матрицах, отклоняющихся от матриц идеальных гранитов, наблюдается некоторое выравнивание частот по столбцам при известной близости их к безусловным вероятностям. Это наталкивает на мысль, что часть пород была богаче летучими компонентами и кристаллизовалась в иных условиях. Вследствие этого у части пород проявляются черты, свойственные вырожденному случаю идеальных гранитов, матрицы же переходных вероятностей теряют специфические особенности и перестают соответствовать заданным свойствам.

Для проверки сказанного мы обратились к геологическим наблюдениям, группируя результаты вычислений в табл. 1 по классам, зависящим от типа гранита. Просмотр классифицированных данных показал, что наблюдаемые значения Δ в альтернативе $H_0 : H_1$ для последовательностей, аналогичных простым цеям Маркова, оказываются меньше для крупнозернистых и больше для мелкозернистых гранитов. Как следует из работы (Вистелиус, Романова, 1976), такая картина может наблюдаться в том случае, если магма, из которой кристаллизовались крупнозернистые граниты, была менее вязкой, чем магма, давшая мелкозернистые граниты.

Подсчет средних значений Δ $H_0 : H_1$ по типам гранитов табл. 1 дал следующие результаты:

мелкозернистый гранит	среднезернистый гранит	крупнозернистый гранит
199.71	111.05	58.74

Обращаясь к прямым геологическим наблюдениям, заметим, что крупнозернистые граниты представляют наиболее глубинную фацию; кристаллизация этих гранитов протекала в условиях повышенного со-

держания летучих компонентов в расплаве (на это, в частности, указывает широкое развитие в породах пегматитовых обособлений).

Среднезернистые граниты занимают промежуточное положение между глубинными крупнозернистыми гранитами и близповерхностными мелкозернистыми. Это отражается в особенностях текстуры среднезернистых гранитов и наблюдаемых постепенных переходах к мелкозернистым гранитам. Роль летучих в кристаллизации среднезернистых гранитов, вероятно, также была значительной, особенно в начальную стадию кристаллизации.

Самые молодые мелкозернистые граниты — типичные близповерхностные образования, формирующие пластообразные, дайкообразные и штокообразные тела в пределах крупнозернистых и среднезернистых гранитов. Характерен незначительный размер зерен, в краевых частях отдельных тел породы напоминают гранит-порфиры. Кристаллизация мелкозернистых гранитов протекала в относительно «сухих» условиях при повышенной вязкости расплава. Такие условия благоприятны для образования идеальных гранитов.

Рассмотрение доверительных интервалов на графиках рис. 2 приводит к следующим выводам.

1. Значения элементов вектора безусловных вероятностей для калиевого полевого шпата практически во всех образцах превышают значения соответствующего элемента главной диагонали матрицы переходных вероятностей (доверительные интервалы перекрываются только в двух образцах крупнозернистых гранитов).

2. Значения элементов вектора безусловных вероятностей для плагиоклаза во всех образцах из крупнозернистых гранитов меньше, чем значения элемента главной диагонали, т. е. в крупнозернистых гранитах в процессе их формирования существовала тенденция к образованию скопленных зерен плагиоклаза, обусловившая отклонение от модели.

3. Значения элементов вектора безусловных вероятностей для кварца в большинстве образцов из среднезернистых гранитов меньше соответствующих значений элемента главной диагонали.

Итак, анализ данных табл. 1 и сравнение их с геологическими материалами показывают, что в 1/8 всех образцов мы имеем дело с общим случаем идеальных гранитов, 3/8 образцов, взятых в пределах массива, очевидно, следует рассматривать как промежуточное звено между обычными идеальными гранитами и их вырожденным случаем. Диффузия в кристаллизующейся системе была слишком велика для того, чтобы реализовался обычный тип идеального гранита, и слишком мала для возникновения типичного вырожденного случая. Конечно, такая трактовка требует всестороннего изучения, но на данном этапе работы она, как нам кажется, лучше всего объясняет наблюдаемую картину.

Обратимся теперь к определению специфики метасоматического поля массива Кызылтас. Необходимым условием для построения такого поля является различие последовательностей минеральных зерен по степени их упорядоченности, которая выражается в тестовых оценках при проверке различных гипотез. В общем случае мы считаем, что имеет смысл разделять последовательности, отвечающие простым цепям Маркова, и последовательности, отвечающие цепям Маркова 2-го и более высоких порядков. Если размах значений Λ во второй группе последовательностей оказывается достаточно большим, строятся зоны, включающие последовательности с различными значениями Λ , которые интерпретируются как зоны метасоматической переработки идеальных гранитов. При этом интенсивность метасоматической переработки в пределах той или иной зоны определяется величиной Λ , установленной для образцов, попавших в эту зону. Как показала практика, такие зоны достаточно уверенно выделяются в рудоносных гранитных массивах (Иультин, Омсукчан, Корнуолл) и образуют специфические метасоматические поля (Иванов, Подольский, 1974).

Поскольку примерно половина всех образцов гранитов массива Кызылтас показала соответствие цепям Маркова 2-го и более высоких порядков, имело смысл провести здесь выделение отмеченных зон с тем, чтобы сравнить структуры метасоматических полей неизмененного гранитного массива и массива, подвергнувшегося в процессе рудогенеза интенсивной метасоматической переработке. Данные для этого сведены в табл. 2, из которой следует, что последовательности 2-го порядка встречаются в большинстве образцов крупнозернистых гранитов, примерно в половине образцов среднезернистых гранитов и всего в 15 образцах мелкозернистых гранитов. Последовательности более высоких порядков распространены главным образом в среднезернистых гранитах (9 образцов), в крупнозернистых гранитах встречен всего 1 такой образец и в мелкозернистых гранитах — 2 образца (что в общем отражает распространенность этих разновидностей в пределах массива). Однородность последовательностей для принятой гипотезы ни в одном случае не нарушена. Распределение средних значений Λ при проверке альтернативы $H_1 : H_2$ в последовательностях, отвечающих цепям Маркова 2-го порядка, как это видно из приведенных данных, зависит от типа породы:

мелкозернистый гранит	среднезернистый гранит	крупнозернистый гранит
26.58	32.13	41.56

В крупнозернистых гранитах встречено и наибольшее значение $\Lambda_{n_1 : n_2}$ (для обр. 137 оно равно 82.10).

Во всех разновидностях гранитов значения $\Lambda_{n_1 : n_2}$ невелики и значительно меньше значений, характерных для рудоносных гранитных массивов.

Рассмотренные данные говорят за то, что процессы локального метасоматоза, приводящие к повышению порядка марковости в последовательностях минеральных зерен гранитов массива Кызылтас, в большей степени развиты в крупнозернистых гранитах и слабее всего проявлены в мелкозернистых гранитах. Возможно, это связано с повышенным содержанием летучих в крупнозернистых разновидностях гранитов, которое обсуждалось при анализе табл. 1 (значения $\Lambda_{n_0 : n_1}$ отрицательно коррелированы со значениями $\Lambda_{n_1 : n_2}$). В этом случае избыток летучих мог в конце кристаллизации скапливаться в отдельных участках гранитного массива и воздействовать на уже сформированные последовательности минеральных зерен, вызывая их преобразование согласно модели метасоматоза (Вистеллиус, Фаас, 1972). В соответствии с геологической терминологией такой процесс должен быть определен как аутометасоматоз. Аутометасоматические преобразования вряд ли могли привести к появлению линейно вытянутых зон, характерных для рудоносных массивов, и в зависимости от состава остаточного флюида давали тот или иной тип метасоматического замещения. Действительно, по данным табл. 2 нельзя сделать какого-либо заключения о связи путей метасоматоза с разновидностью породы, а распределение образцов с последовательностями, отвечающими цепям Маркова 2-го и более высоких порядков, изображенное на геологической карте массива (рис. 1), не дает оснований для выделения линейно вытянутых зон, которые можно было бы связать с особенностями тектонического строения массива. Как уже указывалось, значения $\Lambda_{n_1 : n_2}$ невелики и обычно лишь незначительно превышают критическое значение для принятия H_1 при проверке альтернативы $H_1 : H_2$, поэтому выделение нескольких категорий пород, различающихся по степени упорядоченности минеральных зерен, здесь лишено смысла.

Проведенная методом линейной интерполяции между точками изолиния $\Lambda = 21.0$, отвечающая критическому значению при проверке альтернативы $H_1 : H_2$, очерчивает участки, весьма далекие по конфигурации от характерных зон, выделяемых в гранитах типа иультинских или омсукчан-

ских. Расположение в пределах массива образцов, последовательности которых удовлетворяют гипотезе H_3 (вторая часть табл. 2), не подчиняется какой-либо закономерности. Из 12 таких образцов лишь обр. 107, 113, 188 и 219 можно связать с близостью участков грейзернизированных пород или кварцевых жил, причем только в обр. 113 проверка путей метасоматоза показала наличие вторичного кварца, в остальных изменение первичной последовательности минеральных зерен вызвано появлением новообразований плагиоклаза (альбитизация); никаких внешних признаков, по которым можно было бы отличить эти образцы от образцов с иными марковскими свойствами, не установлено.

Таким образом, на основе анализа последовательностей минеральных зерен, отвечающих цепям Маркова 2-го и более высоких порядков, мы не можем в пределах массива Кызылтас выделять зоны, подобные зонам в рудоносных гранитах. Метасоматическое поле здесь определяется в основном автометасоматическими процессами, меняющими характер от точки к точке, и не имеет четко выраженной структуры.

ВЫВОДЫ

1. Исследование массива нерудоносных гранитных пород показало распространенность аналогов идеальных гранитов в природе, что дает основание выделять идеальные граниты в особый класс природных объектов.

2. Наличие в нерудоносном гранитном массиве пород с последовательностями минеральных зерен, отвечающими простым цепям Маркова, но не являющимися идеальными гранитами, объясняется спецификой кристаллизации этих пород, проходившей в условиях повышенного содержания летучих компонентов.

3. Структура метасоматического поля нерудоносного гранитного массива, содержащего аналоги идеального гранита, отличается от структуры метасоматических полей гранитных массивов, несущих оруденение, что может быть использовано при оценке потенциальной рудоносности отдельных интрузивных тел.

ЛИТЕРАТУРА

- Арабаджеева-Цветкова И. Е., Иванов Д. Н., Подольский Ю. В. Отбор проб и их петрографическое исследование при использовании концепции идеального гранита. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 1. Л., «Наука», 1972, с. 48—51.
- Вистелиус А. Б., Лельчук Т. С., Талмуд Г. А., Фаас А. В. Статистическая идентификация идеальных гранитов и продуктов их преобразования. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 2. Л., «Наука», 1972, с. 3—46.
- Вистелиус А. Б., Романова М. А. Концепция идеальных гранитов и ее использование при съемочных, петрографических и поисковых работах. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 1. Л., «Наука», 1972, с. 4—77.
- Вистелиус А. Б., Романова М. А. О вырожденном случае модели кристаллизации идеальных гранитов. — ДАН СССР, 1976, т. 228, № 1, с. 170—173.
- Вистелиус А. Б., Фаас А. В. О преобразованиях последовательностей зерен кварца, калиевого полевого шпата и плагиоклаза в идеальных гранитах под действием слабого метасоматоза. — ДАН СССР, 1972, т. 203, № 6, с. 1386—1389.
- Гокоев А. Г. К сравнительной характеристике некоторых пермских интрузий Сары-Арка (Центральный Казахстан). — Изв. АН КазССР. Сер. геол. 1949, вып. 11, с. 108—117.
- Зейлик Б. С., Духовский А. А., Розенблат М. М., Толмачев В. Н. К петрологии пермского гранитного массива Кызылтас в Центральном Казахстане. — Тр. ВСЕГЕИ. Нов. сер. 1968, т. 157, с. 156—176.
- Иванов Д. Н. Анализ последовательностей минеральных зерен в гранитах массива Кызылтас (Центральный Казахстан). — В кн.: Вопросы математической геологии. Л., «Наука», 1968а, с. 172—182.

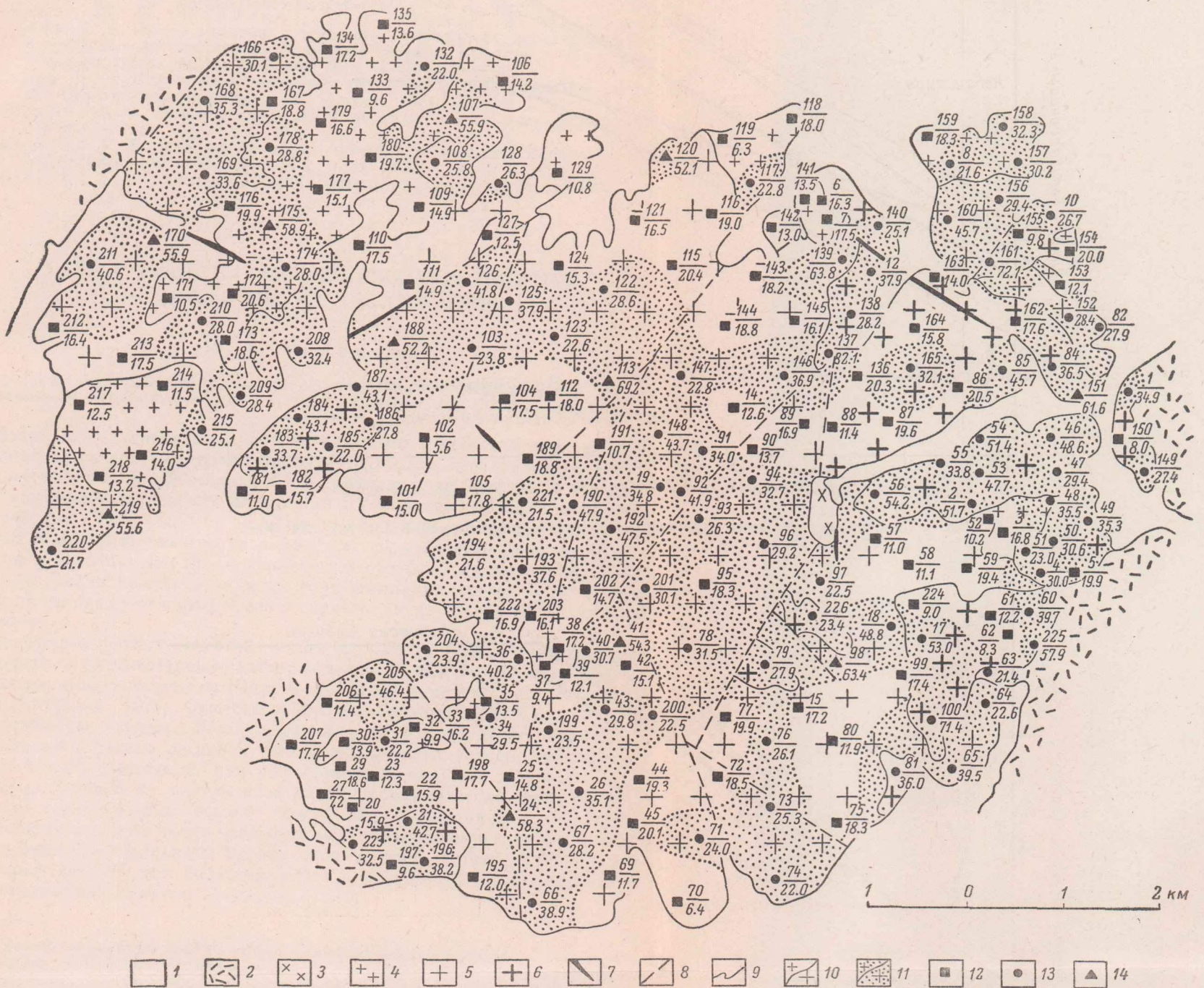


Рис. 1. Распределение марковских свойств последовательностей минеральных зерен в гранитах массива Кызылтас (Центральный Казахстан).

1 — современные отложения; 2 — липаритовые пгнимбриты, андезитовые порфириды и туфолавы нижнего карбона (C_{1-2}); 3 — ксенолит кварцевого диорита; 4 — мелкозернистые граниты; 5 — среднезернистые граниты; 6 — крупнозернистые граниты; 7 — дайки гранит-порфиоров, сиенитдиоритов и диоритовых порфиридов; 8 — разрывные нарушения; 9 — геологические границы; 10 — неизменные граниты ($r=1, \Delta < 21.0$); 11 — незначительно измененные граниты ($r=2, \Delta > 21.0$); 12 — цепи Маркова 1-го порядка; 13 — цепи Маркова 2-го порядка; 14 — цепи Маркова 3-го и более высоких порядков; дробь: числитель — номер образца, знаменатель — значение Δ для принятой гипотезы.

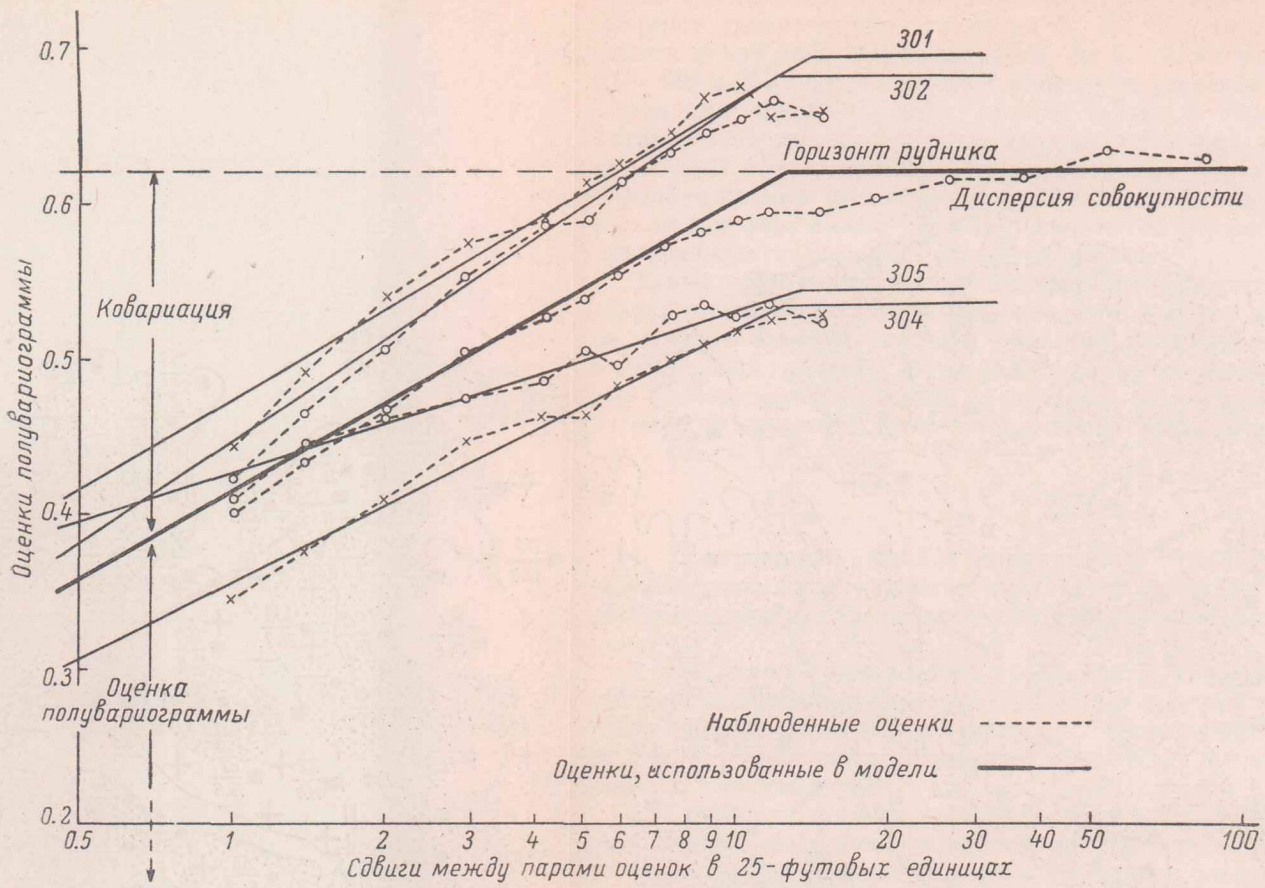


Рис. 6. Вариограммы для всего рудничного горизонта и для участков № 301, 302, 304, 305.

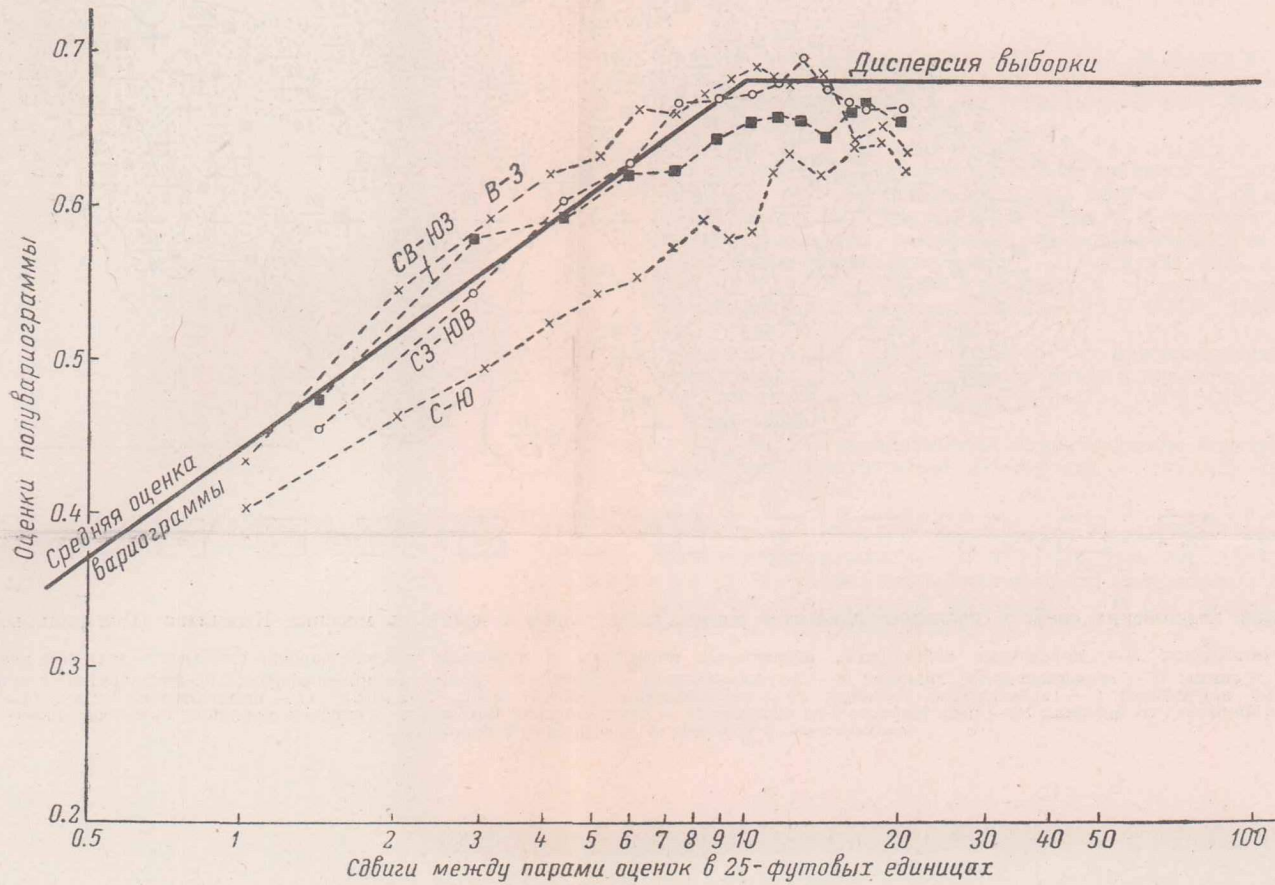


Рис. 7. Ориентированные вариограммы для участка № 302, имеющего значимую анизотропию.

- Иванов Д. Н. К изучению последовательностей минеральных зерен в двуполово-шпатовых гранитах как реализаций процессов кристаллизации гранитной магмы. — В кн.: Докл. советск. геол. на XXIV сессии МГК. 1968б, с. 53—60.
- Иванов Д. Н., Подольский Ю. В. О структуре метасоматического поля восточной части Иультинского гранитного массива. — ДАН СССР, 1974, т. 249, № 1, с. 193—196.
- Кобтев-Дворников В. С. К вопросу о некоторых закономерностях формирования интрузивных комплексов гранитов (на примере Центрального Казахстана). — Изв. АН СССР. Сер. геол. 1952, № 4, с. 63—80.
- Набоков М. М., Наркевич В. И., Рожко Е. Е., Черкасов И. А. Новая методика и технология составления крупномасштабных структурногеологических карт на примере интрузии Кызылтас. — В кн.: Докл. Всесоюз. геогр. общ-ва, 1967, вып. 3, с. 48—52.
- Павлов В. А. Структурные особенности некоторых пермских гранитных массивов Центрального Казахстана. М., «Наука», 1964, 127 с.
- Романова М. А. Белые граниты Арга-Ынних-Хая (Якутия) и механизм их образования. — Наст. сб., с. 25—39.
- Vistelius A. B. Ideal granite and its properties. I. Stochastic Model. — J. Int. Assoc. Math. Geol., 1972, v. 4, № 2, p. 89—102.
- Vistelius A. B., Lea G. Pluton Carnmenellis (Cornwall, England). 1972.

БЕЛЫЕ ГРАНИТЫ АРГА-ЫННИХ-ХАЯ (ЯКУТИЯ) И МЕХАНИЗМ ИХ ОБРАЗОВАНИЯ

М. А. Романова¹

*Лаборатория математической геологии Ленинградского отделения ордена Ленина
Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, Ленинград*

Исследование гранита выполнено методами стохастического моделирования. В качестве исходной была взята модель идеального гранита*, предложенная и разработанная А. Б. Вистелиусом (Vistelius, 1972).

Материалом для работы послужили полевые наблюдения, выполненные автором в 1970—1971 гг. на площади западного купола массива Арга-Ынних-Хая, преимущественно в пределах серповидного тела, разбуренного по сетке (рис. 1 и 2). Образцы пород отобраны из керна так, чтобы получить характеристики на двух горизонтальных срезах — на уровне 780 м от условного репера (верхний горизонт) и на уровне 730 м (нижний горизонт).

Изучаемые граниты относятся к специфическому типу, с которым часто связываются редкометальные месторождения. В литературе они известны под названиями апограниты (Беус и др., 1962) или аляскиты (Некрасов, 1966; Материков, 1974). Существование своеобразных по составу и структуре гранитов, имеющих белый сахаровидный облик, подтверждено наблюдениями в разных регионах. Это позволяет ниже условно называть их просто белыми гранитами, как уже принято в мировой литературе.

Белые граниты из центральной части купола массива Арга-Ынних-Хая по минеральному составу могут быть сопоставлены с альбит-лепидолитовыми или топаз-монтебразитовыми гранитами куполов Монтебрас и Бювар Центрального Французского массива (Aubert, 1966). По химическому составу они сопоставляются с литий-фтористыми гранитами (Редкометальные граниты Монголии, 1971).

* Термин «идеальный гранит» вводился в петрологию неоднократно. Так, Г. Фишер (Fischer, 1951) называл идеальным гранит, отвечающий по составу самому низкотемпературному расплаву кварц-полевошпатовой системы. П. Эскола (Eskola, 1956) называл идеальным гранитом конечный продукт гранитизации, богатый калиевым полевым шпатом. А. Б. Вистелиус определил идеальный гранит, как гранит, который образовался непосредственно путем кристаллизации расплава трехкомпонентной системы (кварц—ортоклаз—альбит), без взаимного смещения зерен.

Тело белых гранитов имеет в плане форму полукольца, открытого к востоку, ширина его достигает 0.6 км, расстояние между северным и южным концами равно 1.6 км. Тело погружается на запад под углами 30—35°, на северо-запад — под углами 70—75°. Восточный контакт подсечен скважинами в центральной части тела, на глубинах 110—170 м. Контакты белых гранитов с вмещающими гранодиорит-порфирами, даже в пределах керна, имеют четкие линейные границы. В западном эндоконтакте, преимущественно в центральной части, местами встречаются небольшие пегматитовые образования, сложенные крупноблочным полевым шпатом, серым кварцем, иногда с гранофировыми прорастаниями. Западнее тела белых гранитов прослеживаются зоны дробления северо-восточного и северо-западного направлений. Вблизи пересечений этих разломов расчистками и скважинами вскрыта эруптивная брекчия, состоящая из крупных обломков гранодиорит-порфиров, сцементированных белыми гранитами. Эта брекчия в свою очередь раздроблена и сцементирована кварцем со скоплениями темного турмалина. Севернее охарактеризованной брекчии расположена конусовидная сопка, сложенная сильно раздробленным гранодиорит-порфиром, участками адамеллитов, которые секутся множеством даек белых гранитов с порфировидной микроструктурой. Скважина 50, заложённая вблизи вершины конусовидной сопки, вскрыла участки адамеллитов, чередующиеся с белыми гранитами. Контакты между ними четкие, резкие, и цементи-

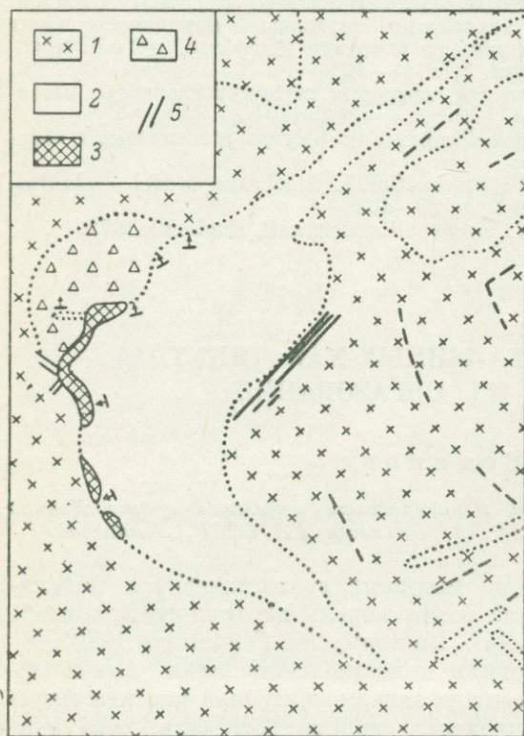


Рис. 1. Схема геологического строения массива Арга-Блыных-Хая (по А. В. Дорофееву и А. А. Мартыненко, 1962 г.).

1 — гранодиорит-порфиры; 2 — литий-фтористые граниты (белые граниты); 3 — зоны грейзенизации белых гранитов; 4 — эруптивная брекчия; 5 — дайки и жилы.

рующая роль белых гранитов не вызывает сомнения. Микроструктура белых гранитов отличается высоким идиоморфизмом узкопризматических кристаллов альбита, скопления которых придают породе мондонитовый облик. Зерна калиевого полевого шпата ксеноморфны по отношению к альбиту. Кварц изометричный, и зерна его несколько крупнее остальных. Распространена светлая слюда; всегда содержится топаз и монтебразит-амблигонит; типичен темный касситерит.

Подсчет 140 больших шлифов дал следующий средний состав гранита, % (нижние цифры — стандарты):

альбит	калишпат	кварц	слюда	топаз	монтебразит	касситерит
40.08	19.21	29.31	7.51	2.40	1.60	0.43
7.90	6.30	9.09	2.90	1.60	1.90	0.48

Белые граниты на отдельных участках претерпели грейзенизацию, но здесь анализируются только свежие граниты, без видимой грейзенизации, т. е. изучается та стадия, на которой преобразовывались соотношения между индивидами альбита, калиевого полевого шпата и кварца.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования — выяснить механизм формирования белого гранита — является ли он первично магматическим, и если это преобразованная порода, то проследить пути переработки гранита. Вопрос решается методом стохастического моделирования на основе данных наблюдений. Для этого было построено несколько моделей, каждая из которых отвечала индивидуализированной схеме формирования породы. Гипотеза сравнивалась с наблюдениями с помощью специальных статистических тестов. Если значения теста забраковывали гипотезу, то модель отбрасывалась. Если значения теста не противоречили наблюдениям, то гипотеза принималась, при этом модель разрабатывалась далее или сохранялась до тех пор, пока накопление материала не требовало ее совершенствования. Если несколько моделей не противоречило наблюдениям, то предпочтение отдавалось гипотезе, имеющей меньшее число параметров и обладающей геологическими преимуществами.

На первом этапе все образцы проверялись на соответствие модели идеального гранита. Если модель идеального гранита браковалась, то вводилась серия моделей метасоматического преобразования гранита. За последние годы несколько таких моделей было разработано А. Б. Вистелиусом и А. В. Фаасом; часть этих моделей, с любезного согласия авторов, использована в данном исследовании. Проверять предложенные модели шаг за шагом, можно выяснить детали процесса формирования породы, т. е. такие процессы, которые иными методами проверить невозможно.

Ниже использованы: модель идеального гранита, модели преобразования идеального гранита по схеме чужеродных вростков и модель преобразования вырожденного идеального гранита. Сведения о первых двух моделях имеются в литературе (Романова, 1976; Вистелиус, Романова, 1976; Vistelius, 1972).

Модель преобразования вырожденного идеального гранита сводится к следующему. Имеется бернуллиевская последовательность из зерен Og , Q и Ab . Каждое зерно любого минерала в последовательности может разделиться на два с постоянной вероятностью π . Каждое разделение происходит независимо от остальных. В промежутке, возникшем при делении зерен кварца или калиевого полевого шпата, с вероятностью единица образуется вросток (индивид) альбита. Разделение зерен, требуемое схемой, может возникнуть при тектоническом напряжении. В этом случае ограниченный катаклиз является причиной для проявления метасоматоза.

Предполагается, что мигрирующие флюиды, при наличии пространства, всегда могут генерировать новые индивиды альбита.

Если обозначить p_{Og} , p_Q и p_{Ab} как бернуллиевские вероятности соответственно зерен калиевого полевого шпата, кварца и альбита для вырожденного идеального гранита, до того как на него наложен метасоматоз, то после метасоматоза переходные вероятности рассчитываются по приводимым ниже матрицам.

$$P_{i; j} = \begin{matrix} & \begin{matrix} Og & Q & Ab \end{matrix} \\ \begin{matrix} Og \\ Q \\ Ab \end{matrix} & \begin{pmatrix} p_{Og} & p_Q & p_{Ab} + \pi \\ \frac{p_{Og}}{1 + \pi} & \frac{p_Q}{1 + \pi} & \frac{p_{Ab} + \pi}{1 + \pi} \\ \frac{p_{Og}}{1 + \pi} & \frac{p_Q}{1 + \pi} & \frac{p_{Ab} + \pi}{1 + \pi} \\ p_{Og} & p_Q & p_{Ab} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ \frac{p_{Og}(1 + \pi)}{1 + \pi(2 - p_{Ab})} \\ \frac{p_Q(1 + \pi)}{1 + \pi(2 - p_{Ab})} \\ \frac{\pi + p_{Ab}}{1 + \pi(2 - p_{Ab})} \end{pmatrix}$$

	Or	Q	Ab
OrOr	$p_{Or}(1-\pi)$	$p_Q(1-\pi)$	$p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})$
OrQ	$p_{Or}(1-\pi)$	$p_Q(1-\pi)$	$p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})$
OrAb	$\frac{\pi + p_{Or}p_{Ab}(1-\pi)}{\pi + p_{Ab}}$	$\frac{p_{Ab}p_Q(1-\pi)}{\pi + p_{Ab}}$	$\frac{p_{Ab}[1-(1-\pi)(1-p_{Ab})]}{\pi + p_{Ab}}$
QOr	$p_{Or}(1-\pi)$	$p_Q(1-\pi)$	$p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})$
QQ	$p_{Or}(1-\pi)$	$p_Q(1-\pi)$	$p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})$
$p_{ij}; jk = QAb$	$\frac{p_{Ab}p_{Or}(1-\pi)}{\pi + p_{Ab}}$	$\frac{\pi + p_Qp_{Ab}(1-\pi)}{\pi + p_{Ab}}$	$\frac{p_{Ab}[1-(1-\pi)(1-p_{Ab})]}{\pi + p_{Ab}}$
AbOr	$\frac{p_{Or}[p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})]}{\pi + p_{Ab}}$	$\frac{p_Q[p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})]}{\pi + p_{Ab}}$	$1 - \frac{(1-p_{Ab})[p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})]}{\pi + p_{Ab}}$
AbQ	$\frac{p_{Or}[p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})]}{\pi + p_{Ab}}$	$\frac{p_Q[p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})]}{\pi + p_{Ab}}$	$1 - \frac{(1-p_{Ab})[p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})]}{\pi + p_{Ab}}$
AbAb	$\frac{p_{Or}[p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})]}{\pi + p_{Ab}}$	$\frac{p_Q[p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})]}{\pi + p_{Ab}}$	$1 - \frac{(1-p_{Ab})[p_{Ab} + \pi(1-p_{Ab})]}{\pi + p_{Ab}}$

Если $\pi=0$, то сохраняется исходная последовательность, обладающая бернуллиевским свойством. Последовательность, возникающая при метасоматозе по вырожденному идеальному граниту, может не быть марковской. При значениях π , видимо, типичных для гранитов Арга-Ынных-Хая, последовательность имитирует бернуллиевский переход и одновременно марковский переход 2-го и более высокого порядка. Это обнаруживается при вычислениях с обычным числом наблюдений. Если безгранично увеличить число наблюдений, то, вероятно, можно обнаружить, что в действительности изучаемые последовательности не являются марковскими.

ПРОВЕРКА СООТВЕТСТВИЯ МОДЕЛЕЙ НАБЛЮДЕННЫМ ДАННЫМ

Исходный материал для проверки моделей был получен с помощью процедуры, подробно изложенной ранее (Арабаджева-Цветкова и др., 1972). Получив описание последовательностей зерен в шлифах, начинаем систематическую проверку гипотез.

Проверка начинается с выяснения, нет ли наблюдений, которые не противоречат модели идеального гранита (Вистелиус и др., 1972). Данные, полученные при вычислениях, сведены в табл. 1, из которой видно, что в обр. 87, 104, 110, 116 и 227 наблюдались последовательности зерен, аналогичные простым цепям Маркова. Расчетные матрицы* CA_p хорошо согласуются с наблюдаемыми матрицами $\tilde{P}_{i,j}$ для всех образцов, кроме 227. Соотношения между p_{ii} и p_i показывают, что только в обр. 104 действительно наблюдаются последовательности, удовлетворяющие соотношениям, предусмотренным моделью. В остальных образцах неравенство $p_{ii} < p_i$ не соблюдается.

Опыт показывает, что это неравенство нарушается достаточно легко на самых начальных стадиях преобразования породы. Таким образом, видимо, можно считать, что в табл. 1 первые пять образцов белых гранитов являются реликтами идеального гранита. Подобные структуры, специфические для идеального гранита, сохранились только на отдельных участках анализируемого тела.

В табл. 1 приведены также характеристики пород из эндоконтактной

* Обозначения даны по (Vistelius, 1972), т. е. Λ_p есть диагональная матрица с финальными вероятностями по главной диагонали, а элементы c_{ij} показывают различие между переходными вероятностями идеального гранита и его вырожденным случаем.

Оценки однородности и обратимости в белых гранитах с последовательностями зерен, не отличимыми от простых цепей Маркова или от последовательностей Бернулли

Номер образца	Длина последовательности		Значения Λ , полученные при проверке марковских гипотез		Оценки проверяемой гипотезы об однородности простой цепи Маркова		Наблюденные оценки при сравнении $\Sigma \Delta_p$ с $\bar{P}_{i,j}$
	число зерен	число кусков	$H_0 : H_1$, $\chi^2_{0,05} = 9.49$	$H_1 : H_2$, $\chi^2_{0,05} = 21.03$	$\chi^2_{0,05}$ (табл.)	$\chi^2_{набл}$	
87	1031	46	12.26	16.67	302.90	275.79	1.29
104	1112	52	150.43	20.88	347.80	281.80	0.17
110	1201	39	37.24	20.78	264.22	212.99	0.78
116	967	45	48.79	18.80	302.90	240.58	0.29
227	1031	25	262.37	10.91	173.00	171.70	27.40
34	1032	54	6.00	20.00	131.00	102.20	—
72	1067	64	4.97	9.44	153.20	136.70	—
97	1116	39	3.58	15.40	97.40	91.60	—

части тела и из участков белых гранитов, насыщенных крупными ксенолитами гранодиоритов; это обр. 34, 72, 97, несколько обогащенные светлой слюдой, идиоморфным топазом, монтебразитом. Кварц в этих образцах наполнен многочисленными включениями пузырьков. Все это свидетельствует о том, что расплав, из которого образовались белые граниты, был насыщен летучими компонентами. В подобных условиях при кристаллизации гранита естественно ожидать возникновения бернуллиевских последовательностей из зерен главных породобразующих минералов. Действительно, последовательности зерен калиевого полевого шпата, кварца и альбита в названных образцах не отличимы от последовательностей Бернулли.

На основании изложенного можно предположить, что изучаемые белые граниты являются типичными магматическими образованиями, но участки с первичной микроструктурой, формировавшиеся по обычной схеме кристаллизации идеального гранита, сохранились лишь в пределах небольших блоков; в приконтактных зонах, там, где тело белых гранитов обогащено минералами, свидетельствующими о насыщении их летучими компонентами, кристаллизация расплава проходила по схеме вырожденной модели идеального гранита (Вистелиус, Романова, 1976).

Итак, прямые наблюдения и анализ последовательностей зерен показали, что белые граниты образовались из расплава, интродуцировавшего в тектонически ослабленную зону. Прямые геологические наблюдения и наличие реликтов идеальных гранитов позволяют предполагать, что образцы с последовательностями зерен, отличающимися от простых цепей Маркова, возникли в результате преобразования идеального гранита.

АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГРАНИТА

Последовательный расчет по соответствующим алгоритмам (Романова, 1976) показывает (табл. 2), что больше половины образцов удовлетворяет схеме, по которой между двумя первичными неальбитовыми зернами может возникать одно зерно альбита, и только два образца отвечают случаю, когда между двумя первичными зернами некалийевого полевого шпата появляется одно зерно этого минерала.

Как гласит приведенная ранее теорема (Романова, 1976), в случае вращаения вторичного зерна альбита переход через калиевый полевой шпат и переход через кварц должны быть по отдельности простыми марковскими. В случае же перехода через альбит этот переход должен быть марковским

Результаты проверки марковских гипотез и соотношений вероятностей в последовательностях зерен, не отличимых от цепей Маркова 2-го порядка

Номер образца	Длина последовательности		Значения λ при проверке марковских гипотез			Значения λ при проверке частной марковости, переход через зерна, $\chi^2 = 9.49$			$p(A^b/Ab)$	$p(Ab)$
	число зерен	число кусков	$H_0^0 : H_1, \chi_{0,05}^2 = 9.49$	$H_2^0 : H_2, \chi_{0,05}^2 = 21.03$	$H_3^0 : H_3, \chi_{0,05}^2 = 51.00$	Or	Q	A ⁺		
57	1214	42	41.04	49.95	26.82	2.46	3.60	43.88	0.501	0.540
28	1210	43	36.54	69.33	44.95	4.96	2.64	61.72	0.543	0.608
29	972	40	34.64	59.28	34.38	7.21	2.80	49.27	0.496	0.556
32	1152	46	22.39	53.47	36.76	0.68	2.02	50.77	0.502	0.563
36	1044	58	24.60	53.80	40.93	7.61	1.48	44.71	0.507	0.559
44	1168	32	14.56	45.58	28.94	1.89	1.65	42.04	0.601	0.625
44a	1142	34	42.06	68.84	23.29	4.16	8.08	56.60	0.568	0.625
45	1090	49	43.37	44.06	41.33	3.07	2.06	38.92	0.514	0.574
46	1013	37	11.09	52.23	45.29	5.23	8.49	38.50	0.518	0.530
49	1164	41	28.44	54.90	40.73	6.67	4.15	44.08	0.524	0.579
50	1134	39	21.54	42.58	46.73	3.81	2.61	36.16	0.508	0.556
51	1083	58	14.66	24.72	50.54	1.84	0.79	22.09	0.509	0.547
55	1134	48	32.41	64.10	47.81	4.46	2.68	56.96	0.496	0.560
58	950	36	51.82	54.76	32.90	5.55	2.70	46.51	0.433	0.531
59	1086	51	72.36	31.88	27.56	6.61	9.32	15.95	0.359	0.366
60	995	49	46.13	35.69	28.62	1.42	2.35	31.92	0.455	0.526
63	984	41	32.97	34.08	29.69	2.66	7.10	24.32	0.535	0.576
64	1144	47	50.57	64.63	33.05	2.30	1.75	60.57	0.499	0.551
65	1015	51	23.86	36.95	41.65	3.46	6.54	26.95	0.415	0.472
66	1157	40	43.29	65.98	36.77	6.19	7.20	52.58	0.553	0.606
70	979	54	31.24	33.05	36.94	5.97	4.33	22.76	0.469	0.531
70a	1089	48	29.03	98.54	35.52	7.12	4.87	86.55	0.471	0.479
70b	1130	41	16.05	86.44	40.00	6.65	3.90	75.88	0.475	0.521
71	1139	24	42.27	28.02	41.46	1.78	6.12	20.12	0.432	0.499
74	1092	53	36.94	28.18	50.37	3.53	2.00	22.65	0.527	0.572
75	1169	40	16.27	34.72	37.81	1.39	1.09	32.23	0.614	0.623
76	1061	48	13.36	52.50	47.32	7.96	7.63	36.91	0.563	0.585
77	1031	45	16.52	53.55	43.49	8.85	9.42	35.08	0.528	0.550
78	1079	60	32.28	52.22	50.04	1.00	0.36	50.86	0.475	0.545
79	1021	51	37.42	36.26	47.99	8.86	8.14	19.26	0.509	0.560
81	1126	46	11.37	92.73	38.27	8.38	9.39	74.96	0.583	0.604
82	1078	56	26.69	38.21	39.49	4.66	2.58	30.97	0.540	0.582
15	1006	48	14.37	43.37	49.24	4.63	2.25	36.49	0.458	0.481
84	1154	47	34.95	57.96	28.92	4.23	8.12	45.61	0.558	0.597
85	1094	59	22.28	37.39	42.64	2.46	8.29	26.63	0.578	0.620
86	1132	24	39.81	60.40	39.65	9.69	6.63	44.09	0.508	0.578
88	1100	54	28.01	21.44	38.96	4.54	4.23	12.68	0.401	0.433
89	979	45	39.77	62.56	43.07	7.28	3.14	52.14	0.449	0.537
90	1084	56	19.33	38.24	37.36	4.74	2.62	30.88	0.545	0.563
93	1068	38	58.86	61.24	32.23	5.89	3.32	52.03	0.517	0.585
94	1066	63	20.05	36.68	26.33	4.07	2.82	29.79	0.553	0.588
95	1082	60	23.42	45.32	42.76	8.68	8.68	27.96	0.439	0.497
96	969	47	82.42	39.25	35.78	1.83	1.58	35.84	0.455	0.510
99	1110	52	39.03	42.59	32.97	6.00	4.05	32.53	0.424	0.503
101	1094	50	30.09	46.59	41.84	8.06	6.00	32.53	0.556	0.603
102	983	49	44.81	22.14	43.81	4.19	1.63	16.32	0.455	0.538
211	990	50	61.68	32.62	38.68	1.22	5.66	25.74	0.412	0.524
209	755	46	69.58	36.90	35.87	2.87	5.85	28.18	0.346	0.465
208	1050	56	122.57	69.77	41.34	9.00	7.06	53.70	0.403	0.519
106	1127	51	17.35	35.97	30.17	7.40	5.44	23.13	0.514	0.551
107	1170	54	52.16	42.49	37.53	1.61	1.28	39.60	0.494	0.571
108	1100	53	24.51	49.33	45.72	7.70	2.61	39.01	0.536	0.574
111	1184	45	53.09	60.78	46.59	7.88	6.52	46.38	0.487	0.570

Таблица 2 (продолжение)

Номер образца	Длина последовательности		Значения λ при проверке марковских гипотез			Значения λ при проверке частной марковости, переход через зерно, $\chi^2 = 9.49$			p (Ab/Ab)	p (Ab)
	число зерен	число кусков	$H_0^0: H_1, \chi_{0,05}^2 = 9.49$	$H_1^1: H_2, \chi_{0,05}^2 = 21.03$	$H_2^2: H_3, \chi_{0,05}^2 = 51.00$	Or	Q	Ab		
112	1200	37	78.54	58.37	41.85	3.73	2.58	52.06	0.534	0.604
113	1184	49	57.64	81.68	34.54	1.76	1.37	78.55	0.467	0.533
114	1182	33	75.10	57.45	50.42	8.62	1.78	47.05	0.462	0.530
115	1189	34	49.18	44.79	49.04	2.05	5.16	37.58	0.485	0.544
120	1146	62	33.94	53.44	41.62	4.38	2.51	46.55	0.532	0.601
212	986	47	57.82	80.43	45.61	1.89	4.90	73.64	0.406	0.490
214	911	35	87.44	51.06	50.24	4.13	3.47	43.46	0.366	0.505
215	955	43	28.54	42.24	30.48	2.66	6.88	32.70	0.522	0.555
216	1024	50	42.25	75.85	43.89	7.01	9.20	59.64	0.475	0.545
217	902	45	74.12	27.43	32.41	1.45	0.71	25.27	0.372	0.499
222	1008	37	17.02	24.60	25.83	4.53	3.44	16.63	0.762	0.776
224	977	39	125.74	33.88	25.10	4.81	5.80	23.28	0.475	0.512
226	1008	48	12.88	45.50	44.36	6.84	4.60	34.00	0.559	0.585
233	1034	57	23.18	85.71	36.42	1.47	7.22	77.02	0.620	0.667
241	1038	40	44.53	23.90	32.02	2.35	4.38	17.18	0.451	0.522
242	1062	51	65.09	46.59	34.80	1.83	6.61	38.14	0.444	0.508
243	1047	47	77.54	55.76	44.96	4.92	5.93	44.91	0.424	0.507
246	1091	38	59.66	54.75	50.77	4.73	7.14	42.89	0.438	0.540
247	2120	88	93.18	100.06	31.39	2.76	6.32	90.98	0.467	0.534
249	1037	49	40.27	70.14	38.93	7.26	7.70	55.18	0.465	0.516
61	1086	50	28.96	30.10	36.82	12.28	8.30	9.51	0.160	0.214
80	1080	51	19.02	24.27	33.26	14.76	5.14	4.36	0.291	0.360

Примечание. В обр. 61 и 80 [в последнем столбце] даны вероятности p (Or/Or) и p (Or).

2-го порядка. Таким образом, вся последовательность не должна отличаться от цепи Маркова 2-го порядка. Кроме того, должно быть удовлетворено неравенство

$$p(\text{Ab/Ab}) < p(\text{Ab}),$$

так как вторичные зерна альбита, увеличивая общее число зерен этого минерала, не увеличивают числа контактов Ab/Ab. Это наблюдается в 73 образцах белых гранитов и аналогично для зерен калиевого полевого шпата в обр. 61 и 80.

Для того чтобы принять эту гипотезу, важно быть уверенным в том, что это действительно цепь Маркова 2-го порядка, а не немарковская последовательность, соответствующие матрицы переходных вероятностей которой близки к их аналогам в цепи Маркова. Как будет показано ниже, такие случаи возможны. Для того чтобы не сделать подобной ошибки, необходимо провести вычисления, увеличив число наблюдений. Благодаря этому окажется возможным увеличить число i в проверяемой альтернативе $H_i : H_{i+1}$.

Если же и в этом случае все альтернативы, начиная с $H_2 : H_3$, будут забракованы в пользу H_1 , то нет серьезных оснований для сомнения в правильности определения порядка марковости. В рассматриваемом случае в обр. 247 были подсчитаны последовательности из 2120 зерен. Анализ этой последовательности по принятой методике (Вистелиус и др., 1972) показал, что зафиксированная последовательность однородна и обратима. Результаты проверки марковских альтернатив даны в табл. 3.

Так как все образцы, фигурирующие в табл. 2, петрографически тож-

Таблица 3

Результаты проверки гипотез об $i+1$ -м порядке
марковости против i -го порядка марковости

Альтернативы $H_i : H_{i+1}$	Число степеней свободы	Уровни значимости		Наблюдённая оценка Δ
		$\chi^2_{0,05}$	$\chi^2_{0,01}$	
$H_0 : H_1$	4	9.49	13.28	93.18
$H_1 : H_2$	12	21.03	23.34	100.06
$H_2 : H_3$	36	51.00	58.62	31.39
$H_3 : H_4$	108	133.30	145.10	107.54
$H_4 : H_5$	324	366.90	986.00	294.47

дественны, то из приведенных материалов видно, что нет оснований для сомнений в правильности приемки гипотезы о 2-м порядке марковости.

Дальнейшие расчеты позволили убедиться, что среди образцов белых гранитов, не вошедших в табл. 2, только в одном свойства последовательностей зерен удовлетворяют лемме, приведенной в предыдущей работе (Романова, 1976). Это относится к граниту, несколько обогащенному светлой слюдой. Марковские свойства этого образца даны в табл. 4. Расчет частот на основе предположения об их пропорциональности, требуемой отмеченной леммой, и сравнение частот с наблюдаемыми данными показаны в табл. 5. Материалы анализа обр. 13 согласуются с предположением, что процесс

Таблица 4

Марковские свойства последовательностей зерен в обр. 13
(белый гранит, претерпевший грейзенизацию), марковость > 2 -го порядка

Длина последовательности		Значения Δ , полученные при проверке марковских гипотез			Значения Δ , полученные при проверке частных марковских переходов		
число зерен	число кус- ков	$H_0 : H_1$	$H_1 : H_2$	$H_2 : H_3$	Og	Q	Ab
		$\chi^2_{0,05} = 9.49$	$\chi^2_{0,05} = 21.03$	$\chi^2_{0,05} = 51.00$			
882	49	19.17	24.97	66.76	2.92	6.82	15.22

Примечание. Наблюдённое χ^2 при проверке однородности равно 990.4.

Таблица 5

Расчет частот в предположении об их пропорциональности, требуемой леммой

Зерна в $(h-1)$ и h -тых точках последователь- ности	Параметры	Og	Q	Ab	Значения χ^2 при сравнении наблю- денной и вычислен- ной матриц, $\chi^2_{0,05} = 7.82$
Og, Ab	n	41	20	41	} 6.50
	\bar{p}	0.402	0.196	0.402	
	\hat{p}	0.333	0.265	0.402	
Q, Ab	n	27	34	40	
	\bar{p}	0.267	0.337	0.396	
	\hat{p}	0.337	0.267	0.396	

Примечание. n — число переходов; \bar{p} — наблюдаемые частоты, \hat{p} — вычисленные частоты.

проходил по схеме возникновения одного нового зерна альбита рядом с первичным зерном альбита.

При преобразовании бернуллиевской последовательности, отвечающей вырожденной модели идеального гранита, появляются немарковские последовательности, имеющие матрицы переходных вероятностей $P_{i,j}$, очень близкие к бернуллиевской последовательности, и матрицу $P_{i,j,k}$, достаточно близкую к матрице марковской цепи 2-го порядка.

Таблица 6

Марковские свойства последовательностей зерен, возникающих при переработке вырожденных идеальных гранитов

Номер образца	Длина последовательности		Наблюдаемые оценки λ при проверке марковской гипотезы			Наблюдаемые значения χ^2 при испытании частных марковских переходов $\chi^2_{0,05} = 9.49$		
	число зерен	число кусков	$H_0 : H_1$, $\chi^2_{0,05} = 9.49$	$H_1 : H_2$, $\chi^2_{0,05} = 21.03$	$H_2 : H_3$, $\chi^2_{0,05} = 51.0$	Or	Q	Ab
48	998	55	9.07	49.49	45.31	5.72	4.25	39.52
53	1040	48	8.74	47.92	43.34	1.83	6.93	39.16
56	1088	58	4.04	44.32	35.81	7.25	5.81	31.25
83	1098	37	7.56	27.40	45.51	4.86	2.05	20.49
225	983	45	4.62	26.33	31.40	7.35	5.30	13.38
67	1170	53	8.09	33.05	58.30	2.16	1.21	29.68

Вычисления показали, что среди всех исследованных образцов 5 отвечают схеме преобразования вырожденных идеальных гранитов (табл. 6). Обр. 67, включенный в эту таблицу, имеет матрицу $P_{i,j}$, отвечающую бернуллиевской последовательности, и матрицу $P_{i,j,k;l}$, соответствующую случаю, когда марковость выше 2-го порядка. Схема, объясняющая процесс, генерирующий подобные последовательности, пока не разработана. Наличие бернуллиевского свойства заставляет полагать, что такая последовательность скорее всего могла возникнуть за счет преобразования вырожденного идеального гранита. Опыт показывает, что наложенные процессы, как нам кажется, не преобразуют простые цепи Маркова в последовательности Бернулли, а, как правило, повышают порядок марковости. Результаты сравнения наблюдаемых матриц $P_{i,j}$ и $P_{i,j,k}$ с такими же матрицами, вычисленными по формулам (см. с. 27), содержатся в табл. 7.

Таблица 7

Параметры модели и результаты сравнения матриц

Номер образца	Значения принятых параметров				Результаты сравнения матриц	
	π	P_{Or}	P_Q	P_{Ab}	$P_{i,j} \text{ с } \tilde{P}_{i,j}$, $\chi^2_{0,05} = 7.81, \nu = 3$	$P_{i,j,k} \text{ с } \tilde{P}_{i,j,k}$, $\chi^2_{0,05} = 25.0, \nu = 15$
48	0.18	0.23	0.24	0.53	6.28	18.48
53	0.15	0.23	0.23	0.54	5.31	20.30
69	0.15	0.14	0.03	0.83	2.92	15.71
83	0.15	0.24	0.26	0.50	2.23	14.09
225	0.052	0.185	0.215	0.600	7.28	25.60
67	0.17	0.22	0.20	0.58	2.27	12.75

Примечание. Образец 69 отличается очень малым содержанием кварца, из-за чего в матрице $P_{i,j,k}$ строки, начинающиеся с OrQ, QOr и QQ, имели число наблюдений < 7 . При сравнении матрицы модели с наблюдаемой матрицей эти строки были опущены. Таким образом, число степеней свободы снизилось с 15 до 9.

Итак, анализ свойств последовательностей показал одну и ту же картину соотношений зерен Og , Q , Ab в 90 образцах. В силу того или иного механизма в случаях преобразования обычного идеального гранита процесс шел так, что между двумя первичными зернами возникало только одно зерно вторичного минерала. В случае вырожденного идеального гранита вторичное зерно внедрялось в первичные зерна Og или Q . В подавляющем числе образцов белых гранитов вторичные зерна представлены альбитом и только в двух образцах — калиевым полевым шпатом.

В 29 образцах наблюдались последовательности, не отличимые от цепи Маркова 2-го порядка, с нарушением простой марковости более чем по одному минералу; 18 образцов аналогичны цепям Маркова выше 2-го порядка (табл. 8). Для этих образцов пока нет стохастических моделей, однако можно отметить, что метасоматический процесс протекал преимущественно по схеме для обычных идеальных гранитов, а не по схеме для вырожденного случая. Это видно из высоких значений Δ при проверке гипотез $H_0 : H_1$, за исключением обр. 33, 40 и 41, где можно предполагать трансформацию их из вырожденного идеального гранита, так как значения статистики Δ , найденные в альтернативе $H_0 : H_1$, малы. В остальных случаях Δ настолько велико, что допустить происхождение этих последовательностей из вырожденной модели нет оснований. Из сказанного очевидно, что если в предыдущих случаях общая схема, т. е. сохранение нумерации первичных зерен в исходном граните после его преобразования, имела место, то можно принять эту общую схему и для образцов с марковостью выше 2-го порядка (табл. 8). Если это так, то образцы с марковостью выше 2-го порядка относятся к случаям, когда в интервале между первичными зернами могло образовываться более одного вторичного зерна. Во всех изученных образцах чаще всего это был альбит. В последовательностях зерен с марковскими свойствами 2-го порядка во всех случаях вторичные зерна возникали более чем у одного минерала.

Анализ механизма преобразования идеальных гранитов позволил выделить шесть типов пород, характеризующихся специфическими свойствами последовательностей зерен, каждому из которых отвечает определенная стохастическая модель.

1. Идеальные граниты с простыми марковскими цепями.
2. Вырожденные идеальные граниты с бернуллиевскими последовательностями.
3. Метасоматически преобразованные граниты с возникновением на контакте двух неальбитовых зерен одного зерна альбита.
4. Метасоматически преобразованные граниты с возникновением одного зерна альбита рядом с первичным зерном альбита.
5. Метасоматически преобразованные граниты с возникновением на контакте нескольких зерен альбита или с заполнением ими различных контактов.
6. Метасоматически преобразованные граниты с расщеплением первичных зерен и возникновением единичных зерен альбита в расщеплениях неальбитовых зерен; образование исходной породы по схеме вырожденных идеальных гранитов.

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для реконструкции процессов формирования породы, слагающей серповидную дайку, данные анализов (табл. 6—8) были нанесены на горизонты опробования, отстоящие друг от друга примерно на 50 м (рис. 2). На горизонтах выделены только наиболее распространенные типы процессов. Соотношение между верхним и нижним горизонтами оценивается сравнением процессов преобразования по стволу скважины. Если в пределах всего ствола скважины во всех образцах процесс однотипен, то штриховка

Таблица 8

Результаты проверки марковских гипотез и гипотез об однородности последовательностей зерен, не отличимых от марковских цепей 2-го и более высокого порядка, чем 2-й, не охваченных моделями

Номер образца	Длина последовательности		Принятый порядок марковости	Значения Λ , полученные при проверке марковских гипотез			Значения Λ , полученные при проверке частных марковских переходов через зерна минералов, $\chi^2_{0,05} = 9.49$			Значения χ^2 , полученные при проверке однородности	
	число зерен	число кусков		$H_0 : H_1$, $\chi^2_{0,05} = 9.49$	$H_1 : H_2$, $\chi^2_{0,05} = 21.03$	$H_2 : H_3$, $\chi^2_{0,05} = 51.00$	Og	Q	Ab	$\chi^2_{0,05}$	$\chi^2_{\text{табл}}$
23	1164	39	>2	56.07	100.65	51.26	5.08	5.84	89.73	2158.5	879.0
24	1059	42	2	33.88	47.98	50.31	9.07	21.41	17.49	802.3	624.7
25	1003	53	2	13.07	72.02	42.62	14.63	14.36	43.03	1008.3	890.5
26	1208	52	2	38.04	85.87	42.36	17.46	12.89	55.51	989.6	715.8
27	1032	40	>2	43.79	49.13	55.42	1.15	10.99	36.99	2213.9	923.5
30	1075	45	2	22.20	43.83	31.88	10.69	7.82	25.32	858.6	574.2
31	1008	55	2	21.51	51.59	50.41	11.11	5.25	35.23	1045.6	649.0
33	1135	50	>2	14.16	38.47	56.23	5.98	7.86	24.62	2764.8	1072.2
35	1068	61	>2	19.61	33.21	64.11	1.72	1.23	30.25	3350.0	1046.8
37	1126	52	2	20.57	25.72	41.81	10.55	3.13	12.04	989.6	759.5
38	1039	57	>2	64.24	26.77	58.19	0.67	13.78	12.32	3137.2	908.9
39	1073	41	2	34.33	52.20	31.82	10.73	6.99	34.48	783.5	571.2
40	1082	56	>2	11.44	22.66	58.84	4.87	3.29	14.51	3084.0	1015.2
41	1015	47	2	13.55	57.40	48.22	8.93	6.35	42.11	896.0	673.1
42	1142	42	2	20.01	59.79	44.40	9.53	4.77	45.49	802.3	683.8
43	1008	44	2	19.24	40.57	23.03	3.18	14.42	22.96	839.8	406.7
52	1001	49	>2	63.52	37.90	73.97	2.57	8.24	27.09	2711.6	961.8
53 ^a	1164	45	2	32.60	129.81	46.74	12.73	8.28	108.80	858.6	630.0
54	1157	40	>2	65.03	66.22	55.94	11.18	28.78	26.26	2213.9	910.5
68	1020	32	>2	92.64	57.66	57.13	36.33	5.00	16.33	1770.3	743.1
73	992	32	>2	70.46	60.00	65.26	28.46	3.23	28.31	1770.3	754.8
82 ^a	1156	22	2	49.03	53.35	48.06	10.18	19.06	24.10	424.3	424.0

Таблица 8 (продолжение)

Номер образца	Длина последовательности		Принятый порядок маркировки	Значения Λ , полученные при проверке марковских гипотез			Значения Λ , полученные при проверке частных марковских переходов через зерна минералов, $\chi^2_{0,05} = 9.49$			Значения χ^2 , полученные при проверке однородности	
	число зерен	число кусков		$H_0 : H_1,$ $\chi^2_{0,05} = 9.49$	$H_1 : H_2,$ $\chi^2_{0,05} = 21.03$	$H_2 : H_3,$ $\chi^2_{0,05} = 51.00$	Oг	Q	Ab	$\chi^2_{0,05}$	$\chi^2_{\text{табл}}$
89 ^a	1074	60	>2	31.33	62.24	66.36	6.95	5.21	50.08	3296.8	1083.5
91	1156	37	2	176.65	109.20	41.16	4.25	23.43	81.52	708.3	600.4
92	1143	63	>2	37.78	40.30	54.52	6.58	7.43	26.29	3456.4	1218.2
97 ^b	1121	35	2	27.81	45.77	36.09	10.71	9.59	25.47	670.7	824.6
98	1006	46	>2	58.14	37.96	52.40	11.94	10.46	15.56	2545.8	883.6
98 ^a	1082	19	2	25.93	54.92	30.80	45.09	5.59	4.23	367.0	202.8
100	1103	27	2	77.35	89.00	47.13	16.39	4.66	67.95	519.4	429.3
103	1124	26	2	42.99	85.73	28.73	14.70	18.55	52.48	500.5	409.5
210	1023	46	2	158.50	32.15	16.60	5.61	10.10	16.44	877.3	496.2
105	1144	48	>2	32.52	65.87	60.81	19.28	10.18	36.41	2656.3	874.2
109	1185	39	2	43.69	94.80	30.61	14.36	2.91	77.53	746.0	440.2
118	1164	39	2	33.95	62.30	42.11	1.29	13.53	47.48	746.0	595.2
119	1050	46	2	68.73	41.66	34.98	10.17	3.06	28.43	877.3	646.0
176 ^a	1112	47	2	78.43	68.04	43.78	1.02	10.82	56.21	896.0	615.7
243	970	45	2	59.03	60.42	33.21	4.80	13.37	42.25	858.6	657.1
248	1016	49	2	46.74	72.92	49.46	6.29	12.93	53.70	933.5	639.7
219	1008	48	2	66.76	69.02	48.00	21.00	4.58	43.44	914.8	685.2
220	1048	40	>2	49.40	104.83	52.61	4.98	4.52	95.32	2213.9	807.2
223	2776	65	>2	298.47	116.90	56.48	10.39	10.57	65.94	3562.8	—
228	1026	38	2	90.69	40.13	41.91	14.83	6.72	18.58	727.2	488.1
229	1523	73	2	62.02	75.13	32.27	4.34	11.53	59.27	592.5	529.0
238	1063	38	2	111.02	163.91	40.14	14.15	3.36	146.40	727.2	529.0
244	975	42	>2	163.15	54.07	64.04	9.14	16.16	28.77	2324.6	863.6
245	1050	46	>2	79.14	60.55	55.66	10.37	4.18	46.01	2545.8	1039.7
250	959	40	2	172.60	45.46	25.53	10.25	5.49	29.72	764.7	512.8

дана сплошной линией, если процессы различались по типу, то была использована прерывистая штриховка. Например, обр. 100 (нижний горизонт) и 101 (верхний горизонт), принадлежащие одной скважине, преобразованы различными типами процессов. Это обозначено штриховкой, горизонтальной для обр. 100 и вертикальной — для обр. 101.

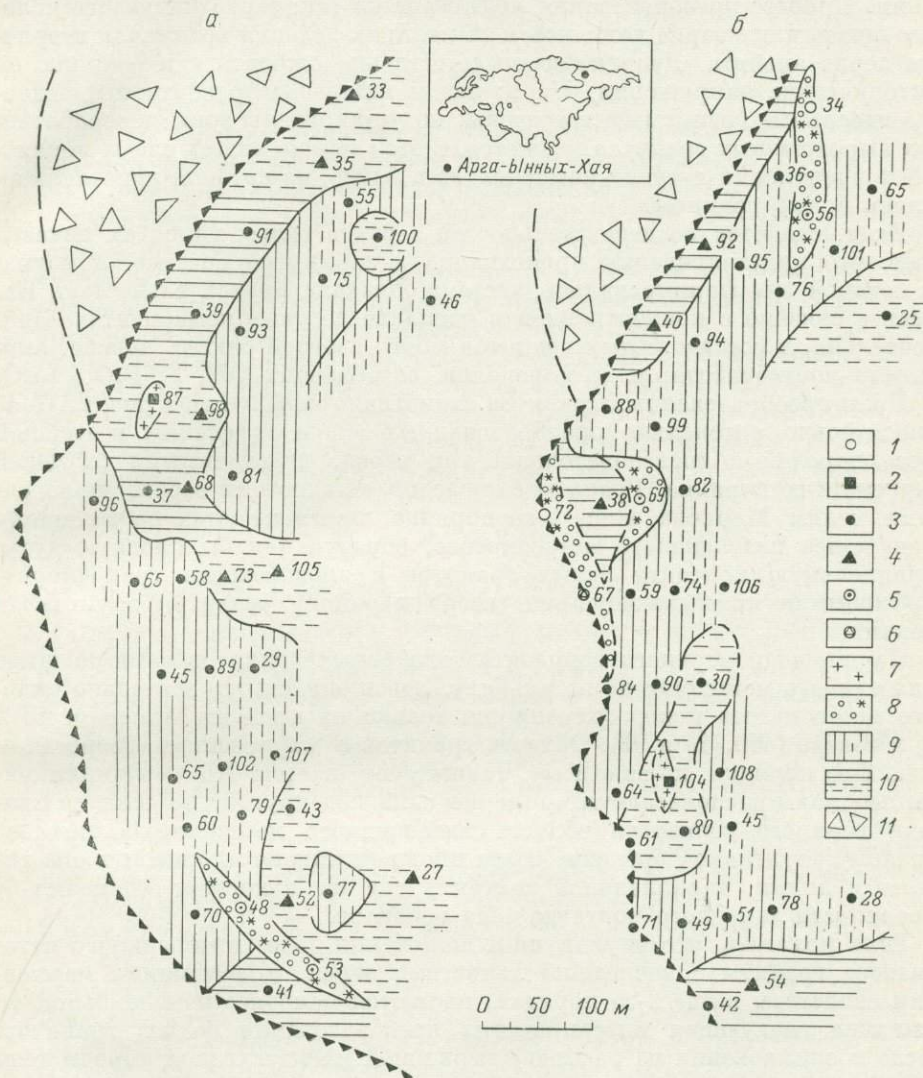


Рис. 2. Расположение полей метасоматоза белых гранитов, установленное путем анализа последовательностей зерен породообразующих минералов белых гранитов, на площади нижнего (а) и верхнего (б) горизонтов.

Свойства последовательностей: 1 — бернуллиевские, 2 — марковские 1-го порядка, 3 — марковские 2-го порядка, 4 — марковские выше 2-го порядка, 5 — марковские 0-го и 2-го порядков, 6 — марковские 0-го и выше 2-го порядков; 7 — идеальные граниты; 8 — вырожденные идеальные граниты; 9 — поля гранитов со слабо выраженным метасоматическим преобразованием; 10 — поля гранитов, где метасоматоз проявлен более интенсивно (прерывистость штриховки 9 и 10 означает, что метасоматические изменения гранита по разрезу (стволу скважины) имеют различную интенсивность); 11 — эруптивная брекчия. Цифры — номер анализируемого образца.

Рассматривая полученные схемы (рис. 2), можно составить заключение о процессах, протекавших при формировании белых гранитов, слагающих серповидную дайку. Прямые наблюдения показывают, что эти граниты образовались из расплава, внедрившегося в ослабленную зону, но анализы последовательностей зерен говорят о том, что первичные идеальные граниты сохранились лишь на отдельных участках. Кроме реликтов

идеальных гранитов, встречены реликты пород, образованные по схеме вырожденных идеальных гранитов. Такие участки расположены в пределах верхнего горизонта, вблизи контакта белых гранитов с вмещающими гранодиорит-порфирами; там же встречены и пегматитовые тела. К участкам реликтовых вырожденных гранитов примыкают зоны их преобразования. Процесс преобразования моделируется так: зерна калиевого полевого шпата или кварца делились, и на месте их деления возникали вторичные зерна альбита. Деление зерен естественно ожидать как реакцию на тектонические напряжения. На площади нижнего горизонта вырожденные идеальные граниты не встречены, но установлены зоны переработанных вырожденных гранитов. Кажется, в этом можно видеть следы локальной концентрации летучих компонентов в магме, из которой кристаллизовались белые граниты.

Итак, свойства последовательностей зерен в белых гранитах показывают, что кристаллизация происходила в замкнутой системе, а магма, из которой они формировались, местами обладала низкой вязкостью. Последнее связано с концентрацией в расплаве летучих компонентов. Действительно, в составе белых гранитов много светлой слюды, топаза, амблигонит-монтебразита, т. е. минералов, содержащих OH , F , P_2O_5 , Li_2O .

Поля преобразованных гранитов схематично показаны на рис. 2. Пояс относительно интенсивно преобразованных гранитов сложен в главной массе породой с последовательностями зерен, неотличимыми от цепей Маркова 2-го порядка. Граниты с последовательностями зерен, аналогичными цепям Маркова выше 2-го порядка, протягиваются по внешнему краю пояса интенсивного метасоматоза, образуя как бы плоскую дугу, параллельную контакту белых гранитов с вмещающими гранодиорит-порфирами и примыкающую на севере к району развития эруптивной брекчии.

На площади верхнего горизонта тела белых гранитов заметно шире поля слабого метасоматоза по альбиту. Здесь область относительно сильного метасоматоза пород сохраняется только на крайнем юге (обр. 42 и 54) и севере (обр. 40 и 92). Область гранитов с марковскими свойствами выше 2-го порядка, по-видимому, также уменьшается. По вертикали названные зоны располагаются примерно одна над другой, но если на площади верхнего горизонта область интенсивного метасоматоза тяготеет к району эруптивной брекчии, то на площади нижнего горизонта она тяготеет к линии, параллельной контакту, но на некотором удалении от поверхности западного контакта тела гранитов.

Если полагать, что внутри зоны наложения более интенсивного метасоматоза граниты с последовательностями зерен, отвечающими марковским свойствам выше 2-го порядка, являются наиболее измененными, то возможна следующая интерпретация преобразования белых гранитов. После возникновения из расплава первичной магматической породы тело дайки подверглось растяжению за счет продолжавшихся тектонических напряжений. Если бы здесь были трещины, то они продолжали бы расширяться, но этому мешали закристаллизовавшиеся в них белые граниты. Растяжение приводило к разделению дайки на блоки. Господствующие системы разломов, по которым смещалась подошва и кровля дайки, имели северо-восточное и северо-западное простирания. Вдоль этих направлений происходило растяжение в самом теле дайки, сопровождавшееся раскрытием контактов между зернами породы. По ослабленным зонам поступали флюиды, вызывавшие преобразование гранита с возникновением вторичного альбита. Естественно, что альбитизация проявилась интенсивнее там, где были более открытые контакты между зернами.

Предложенной схемой хорошо объясняется процесс формирования дайки белых гранитов, слагающей центральную часть западного купола массива Арга-Ынных-Хая. Принятая интерпретация укладывается в общую картину, обнаруженную при исследовании других массивов грани-

тоидов. Так, при изучении Омсукчанского массива оказалось, что граниты с марковскими свойствами выше 2-го порядка также тяготеют к зонам разломов (Вистелиус, Романова, 1972). Аналогичная связь установлена в гранитах Иультинского массива (Чукотка), где простирающиеся зоны с определенными марковскими свойствами контролируются простирающимися жильными системами (Иванов, Подольский, 1974).

Общность простирающихся зон определенной марковской последовательности с простирающимися даек и жил, а также с узором гидрографической сети показана для гранитного массива Карнменелис (Корнуолл, Англия; Vistelius, Lea, 1972).

Таким образом, выявленные свойства последовательностей зерен главных породообразующих минералов гранита хорошо объясняются с единой точки зрения для массивов совершенно разных регионов.

Специфической чертой анализируемых белых гранитов является богатство исходной магмы летучими компонентами, которые концентрировались в верхних частях дайки; видимо, прорыв их во время одной из тектонических подвижек привел к брекчированию пород у северо-западного контакта тела белых гранитов (рис. 1, 4).

Процесс минерализации дайки, связанный с образованием литиевых слюд, топаза, амблигонит-монтебрита и других минералов, а также анализ процессов, обязанных наложению более поздней переработки породы, таких как каолинизация, образование опала и халцедона, возникновение варламовита, должны представлять предмет специальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

- Арабаджева-Цветкова И. Е., Иванов Д. Н., Подольский Ю. В. Отбор проб и их петрографическое исследование при использовании концепции идеального гранита. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 1. Л., «Наука», 1972, с. 48—51.
- Беус А. А., Северов Э. А., Сыгин А. А., Субботин К. Д. Альбитизированные и грейзенизированные граниты (апограниты). М.—Л., Изд-во АН СССР, 1962, 180 с.
- Вистелиус А. Б. Идеальный гранит и его свойства: вероятностная модель, статистическая идентификация, естественные породы. — В кн.: Математические методы в геологии и геологическая информация. М., «Наука», 1972, с. 26—37.
- Вистелиус А. Б., Лельчук Т. С., Талмуд Г. А., Фаас А. В. Статистическая идентификация идеальных гранитов и продуктов их преобразования. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 2. Л., «Наука», 1972, с. 3—46.
- Вистелиус А. Б., Романова М. А. Концепция идеальных гранитов и ее использование при съемочных петрографических и поисковых работах. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 1. Л., «Наука», 1972, с. 4—46.
- Вистелиус А. Б., Романова М. А. О вырожденном случае модели кристаллизации идеальных гранитов. — ДАН СССР, 1976, т. 228, № 1, с. 170—173.
- Иванов Д. Н., Подольский Ю. В. О структуре метасоматического поля восточной части Иультинского гранитного массива. — ДАН СССР, 1974, т. 219, № 1, с. 193—196.
- Материков М. П. Закономерности размещения и геолого-генетические группы оловянных месторождений СССР. М., «Недра», 1974, 144 с.
- Некрасов И. Я. Геохимия олова и редких элементов Верхояно-Чукотской складчатой области. М., «Наука», 1966, 379 с.
- Редкометальные граниты Монголии. М., «Наука», 1971, 239 с.
- Романова М. А. О влиянии начальных стадий грейзенизации на строение последовательностей зерен в магматических гранитах. — В кн.: Математические методы в геологии и геологическая информация. М., «Наука», 1972, с. 42—53.
- Романова М. А. Марковские свойства последовательностей зерен в редкометальных гранитах, их использование при поисковых работах и петрологических исследованиях. — В кн.: Докл. советск. геол. на XXV сессии МГК. М., «Наука», 1976, с. 53—65.
- Чайковский В. К. Геология оловоносных месторождений Северо-Востока СССР. М., Госгеолтехиздат, 1961, 335 с.

- Шапошников К. К., Шапошникова К. И. Некоторые вопросы тектонического районирования Северо-Востока Якутии по геофизическим данным. — Геология и геофизика, 1961, № 3, с. 42—47.
- Aubert Guy. Les coupoles granitiques de Montebbras et D'echassieres (Massif Central Francais) et la genese de leurs mineralisations en etain, lithium, tungstene et beryllium. Faculte des sciences de l'universite de Clermont, 1966, 324 p.
- Eskola Pentti. Postmagmatic potash metasomatism of granite. — Compt. Rend. Soc. Geol. Finlande, 1956, v. 29, p. 85—100.
- Fischer G. Granit und Sial. — Geol. Rundsch., 1951, Bd 39, Hft 1, S. 32—77.
- Vistelius A. B. Grain sequences of the main rock-forming minerals in the Carnmenellis granite, Cornwall. — Geocom. Bull., 1971, v. 4, p. 145—149.
- Vistelius A. B., Lea, Ideal granite and its properties. I. The stochastic model. — J. Int. Assoc. Math. Geol., 1972, v. 4, № 2, p. 89—102.

МАТЕРИАЛЫ К СТОХАСТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ГРАНОДИОРИТОВ (ЧАЛБИНСКИЙ МАССИВ, ПРИАМУРЬЕ)

Ю. А. В ы с о ц к и й

Лаборатория математической геологии Ленинградского отделения ордена Ленина Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, Ленинград

Цель статьи — накопление материала по марковским свойствам последовательностей зерен калиевого полевого шпата, кварца и плагиоклаза в гранодиоритах Чалбинской интрузии. Интрузия расположена в районе Нижнего Приамурья. Часть ее, описываемая в статье, исследована автором под руководством Д. Н. Иванова в 1974 и 1975 гг. При этом для сравнения были собраны не только гранодиориты, но и граниты, что позволило более четко интерпретировать наблюдения.

ОСНОВНЫЕ ЧЕРТЫ ГЕОЛОГИИ МАССИВА

Чалбинский массив сложен биотитовыми, биотит-роговообманковыми гранитами и сопровождается дайковой серией, представленной мелкозернистыми биотитовыми гранитами, гранит-порфирами, пегматоидными лейкократовыми гранитами, пегматитами, аплитами и турмалинсодержащими гранитами. В пределах самого массива встречаются мелкие штоки и дайки аплитовидных гранитов и гранит-порфиров. Чалбинский массив фациально неоднороден, причем различные фации интрузивных пород распределились асимметрично в виде полос северо-восточного простирания, совпадающих с общей вытянутостью массива. На западе устанавливается полоса развития средне- и крупнозернистых биотитовых гранитов шириной до 3 км, практически лишенная приконтактных разностей. Только в южной части этой полосы, вдоль западного контакта массива, прослеживается узкое поле развития порфировидных гранитов шириной от 0.2 до 1.0 км. По направлению к восточному контакту средне- и крупнозернистые биотитовые граниты последовательно сменяются зонами развития порфировидных и резко порфировидных гранитов, содержащих ксенолиты вмещающих пород. Переходы между зонами постепенные, ширина зон достигает 5 км. Такая асимметрия в расположении и мощности фациальных зон, по мнению ряда исследователей (Радкевич и др., 1974), указывает на крутопадающий западный и пологий восточный контакты массива.

Восточный контакт массива усложнен полем развития гранодиоритов. Гранодиориты — макроскопически мелко- и среднезернистые светло-

серые породы массивного облика. Состоят из плагиоклаза (25—38%), кварца (20—35%), калиевого полевого шпата (15—35%), роговой обманки (2—20%) и биотита (5—10%), реже встречается пироксен (до 5%).

АНАЛИЗ НАБЛЮДЕНИЙ

Приступая к изложению, предположим, что концепция идеальных гранитов известна (Vistelius, 1972). Для интерпретации наблюдений принята диаграмма Куширо (Kushiro, 1974).

Объектом нашего исследования были последовательности зерен калиевого полевого шпата (Or), кварца (Q) и плагиоклаза (Pl), выделенные из гранитов и гранодиоритов, охарактеризованных ранее. Результаты исследования последовательностей наносились на геологическую карту, а затем интерпретировались. Расчеты показали, что структурная неоднородность пород, видимая в поле, имеет место также в некоторых шлифах. Это видно из данных табл. 1, в которой обр. 8, 16, 23, 24, 34, 44, 50, 64,

Таблица 1

Результаты оценки однородности
исследованных образцов гранитов и гранодиоритов

Номер образца	Число подпоследовательностей	Порядок марковости	Число степеней свободы	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{набл}$
1	21	2	360	405.20	374.13
2	14	2	234	270.70	259.56
3	25	2	432	481.50	426.44
4	15	2	252	290.00	239.62
6	16	2	270	309.30	281.36
7	32	2	558	614.00	490.50
8	13	2	216	251.30	252.69
9	15	2	252	290.00	282.65
10	25	2	432	481.50	449.74
11	21	2	360	405.20	327.25
12	26	2	450	500.50	376.10
13	21	≥ 3	1080	1157.60	354.55
14	5	2	72	92.81	72.70
15	16	2	270	309.30	290.92
16	6	2	90	113.14	130.05
17	6	2	90	113.14	84.80
23	23	2	396	443.40	443.77
24	34	1	198	85.97	263.25
29 ⁶	19	2	324	367.00	295.71
31	12	≥ 3	594	651.80	315.20
32	13	2	216	251.30	202.58
33	26	2	450	500.50	376.10
34	4	2	54	72.15	54.37
35	7	≥ 3	324	367.00	225.56
36	6	2	90	113.14	84.80
44	8	2	126	153.20	172.96
45	18	2	306	347.80	331.59
46	19	2	324	367.00	291.56
47	17	2	288	328.60	259.21
48	9	1	48	65.17	46.18
49	8	2	126	153.20	139.83
50	9	2	144	173.00	188.58
51	36	2	630	689.50	585.50
52	25	≥ 3	1296	1380.80	89.65
59	12	2	198	231.80	177.96
60	8	2	126	153.20	136.51
64	31	1	180	212.30	231.53
65	11	2	180	212.30	237.78
85	11	≥ 3	540	595.10	414.66
86	21	≥ 3	1080	1157.60	854.20
87	5	2	72	92.81	81.42
195	28	2	486	538.40	383.24
196	41	2	720	783.50	656.22

65 характеризуются неоднородностью исследованных последовательностей. Для анализа неоднородных последовательностей методика исследования не разработана, поэтому в дальнейшем эти образцы не изучаются.

Анализ последовательностей проводился отдельно для гранитов и гранодиоритов. Исследование заключалось в проверке гипотез о порядке марковости всей последовательности в целом, в определении порядка марковского перехода через отдельные минералы и обратимости.

Таблица 2
Результаты исследования последовательностей минеральных зерен в гранитах

Номер образца	Длина последовательности	Значения статистики Δ при проверке марковских гипотез			Принятый порядок марковости	Пути метасоматоза, $\chi^2_{0.05} = 9.49$		
		$H_0: H_1, \chi^2_{0.05} = 9.49$	$H_1: H_2, \chi^2_{0.05} = 21.03$	$H_2: H_3, \chi^2_{0.05} = 51.0$		Or	Q	Ab
1	1077	36.46	25.98	30.97	2	1.72	5.14	19.12
2	1052	127.05	72.26	36.45	2	27.58	24.95	19.74
15	1107	64.89	41.97	29.92	2	10.63	7.67	23.67
17	1030	140.97	48.36	34.36	2	7.15	31.44	9.77
35	1028	80.40	43.57	51.96	≥ 3	15.15	25.17	3.24
36	1060	31.37	24.69	39.42	2	6.04	9.27	9.38
45	1071	77.99	38.96	40.43	2	11.16	12.87	14.93
46	1036	32.69	144.71	40.09	2	2.30	79.13	63.28
47	1088	103.81	62.29	29.05	2	16.85	26.59	18.85
48	1056	18.54	18.43	—	1	—	—	—
49	1065	5.72	23.91	45.88	2	1.70	10.37	11.83
52	1038	47.70	53.72	68.07	≥ 3	5.08	34.11	14.54
59	1068	131.64	45.72	28.27	2	21.34	20.63	3.75
60	1047	109.41	34.69	38.69	2	15.07	18.25	1.37
85	1049	35.45	44.53	52.28	≥ 3	9.74	16.97	17.82
86	1051	55.42	21.82	52.62	≥ 3	0.72	10.52	10.59
87	942	21.90	106.74	34.74	2	15.50	18.74	72.50

В табл. 2 приведены результаты проверки отмеченных гипотез для гранитов. Среди изученных образцов оказался только один (48) с последовательностью зерен, обладающей марковским свойством 1-го порядка. Однако анализ матрицы показал, что этот образец не может быть отнесен к классу идеального гранита. Как видно из табл. 3, соотношения между элементами главной диагонали матрицы переходных вероятностей (p_{ii}) и безусловными вероятностями (p_i) отличаются от соотношений, характерных для идеального гранита при доверительном интервале ν (Вистелиус и др., 1972).

Таблица 3
Результаты анализа матрицы переходных вероятностей для обр. 48

p_i	ν	p_{ii}	ν
$p_1=0.4155$	0.4422—0.3899	$p_{11}=0.4069$	0.4487—0.3666
$p_2=0.3668$	0.3927—0.3415	$p_{22}=0.3229$	0.3654—0.2829
$p_3=0.2177$	0.2399—0.1968	$p_{33}=0.2982$	0.3532—0.2478

Значения доверительных интервалов рассчитаны для уровня значимости 0.05. Оценка симметрии матрицы $\chi^2_x = 0.011$ при критическом значении $\chi^2_{0.05} = 3.84$.

Вторым образцом, отличающимся от остальных проб, является шлиф 49. В этом шлифе последовательность не отличима от марковской 2-го порядка с бернуллиевским свойством. Иными словами, в альтернативе $H_0 : H_1$ принимается H_0 , а в $H_1 : H_2 - H_2$. Такие соотношения, как мы отмечали, наблюдаются при наложении некоторых типов метасоматоза на вырожденный идеальный гранит (Вистелиус, Романова, 1976).

Остальные исследованные образцы дали последовательности зерен, не отличимые от цепей Маркова 2-го и — в некоторых, относительно редких случаях — более высокого порядков. При этом анализ переходов через отдельные состояния показал, что обычно наблюдалось нарушение простоты перехода через два или через все три минерала. Потеря простоты марковского перехода через один минерал (альбит) наблюдалась только в одном случае (обр. 1).

Обращаясь к наблюдаемым значениям Δ , нетрудно заметить, что эти значения во многих случаях невелики. Так, например, в обр. 36 наблюдалось редчайшее соотношение, когда переходы через каждое состояние в отдельности не браковали гипотезу о простой цепи Маркова и только совместное рассмотрение этих значений давало решение в пользу перехода 2-го порядка. В то же время для отдельных образцов значения этих статистик были достаточно велики (в обр. 46 — для переходов через кварц и через плагиоклаз).

Рассмотрим теперь результаты исследования последовательностей зерен в гранодиоритах, они сведены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты исследования последовательностей минеральных зерен в гранодиоритах

Номер образца	Длина последовательности	Значения статистики Δ при проверке марковских гипотез			Принятый порядок марковости	Пути метасоматоза, $\chi^2_{0,05} = 9.49$		
		$H_0 : H_1$, $\chi^2_{0,05} = 9.49$	$H_1 : H_2$, $\chi^2_{0,05} = 21.03$	$H_2 : H_3$, $\chi^2_{0,05} = 51.0$		Or	Q	Ab
3	1055	42.57	29.24	29.36	2	3.81	9.44	16.00
4	1037	12.21	42.99	35.21	2	6.89	23.18	12.92
6	1054	10.66	41.53	34.25	2	6.32	6.62	28.59
7	999	28.46	22.07	38.32	2	2.97	6.95	12.59
9	1112	61.24	67.74	37.56	2	11.92	40.90	14.92
10	1033	25.34	50.48	36.82	2	17.99	17.11	15.38
11	1041	34.42	28.22	36.23	2	10.99	11.99	5.25
12	1055	58.54	54.62	23.57	2	21.72	2.73	24.16
13	1127	142.20	51.91	62.17	≥ 3	15.21	19.52	17.18
14	1008	16.25	73.49	43.25	2	12.55	30.57	30.38
29 ^б	1076	68.95	55.11	33.78	2	13.79	17.82	23.50
31	1055	77.63	29.45	54.86	≥ 3	3.72	7.49	18.24
32	1097	47.22	28.67	42.47	2	6.13	4.22	18.32
33	1104	113.80	39.60	30.03	2	12.71	2.73	24.16
51	1050	74.36	74.75	38.02	2	10.28	36.32	28.15
195	1003	30.84	62.66	39.78	2	26.04	17.06	19.56
196	1013	64.11	23.26	31.47	2	2.47	14.19	6.60

Как видно из таблицы, все изученные последовательности зерен в гранодиоритах не отличимы от цепей Маркова 2-го и более высоких порядков. Наблюдаемые значения Δ при проверке марковских гипотез для каждой последовательности очень близки к тому, что наблюдалось для гранитов. Они также сильно варьируют (особенно в альтернативе $H_0 : H_1$) и в целом имеют довольно умеренные значения.

Анализ переходов через каждый минерал отдельно показал, что в гранодиоритах несколько шире, чем в гранитах, распространен процесс, приводящий к потере простоты перехода только через один минерал. Та-

ким минералом в основном является плагиоклаз и в одном случае — кварц. Потеря простоты перехода для двух и трех минералов в гранодиоритах примерно такая же, как в гранитах.

Нанесем теперь наблюдаемые данные на карту и примем интерпретацию, объясняющую метасоматозом появление у пород последовательностей

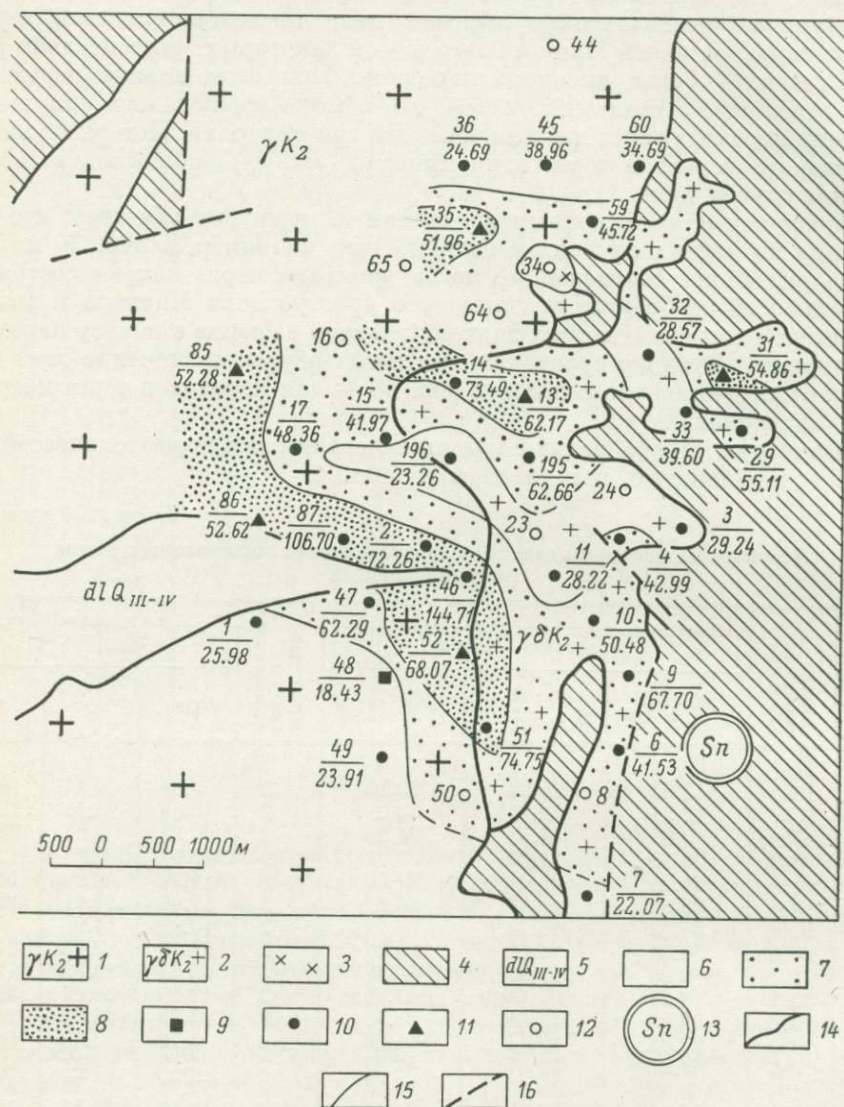


Схема метасоматической зональности восточной части Чалбинского массива гранитоидов.

1 — граниты; 2 — гранодиориты; 3 — аплиты; 4 — юрские отложения; 5 — четвертичные отложения; породы относящиеся: 6 — к I классу, 7 — ко II классу, 8 — к III классу; точки опробования и выявленный порядок маркировки: 9 — 1-й порядок, 10 — 2-й порядок, 11 — выше 2-го порядка; 12 — породы с неоднородным строением последовательности; 13 — участок с оловянной минерализацией; 14 — геологические границы; 15 — границы между различными классами пород; 16 — разрывные нарушения. Дробь: числитель — номер образца, знаменатель — значение статистики Δ .

зерен, близких к цепям Маркова 2-го или более высокого порядков (Вистелиус, Фаас, 1972). Следуя предыдущим исследованиям, мы будем также полагать, что более высокое значение в альтернативе $H_1 : H_2$, решаемой в пользу H_2 , в какой-то мере указывает на большую интенсивность метасоматоза (Вистелиус, Романова, 1972).

На рисунке приведена схема опробования, наложенная на геологическую карту района. У точек опробования условными знаками показаны порядок марковости, выявленный численными методами, и значения статистики Λ . Для выявления узора размещения проб с различными порядками марковости и специфическими значениями Λ все породы были разделены на 3 класса. К первому классу были отнесены породы с последовательностями зерен, аналогичными цепям Маркова 1-го и 2-го порядков, а также возникшие из вырожденных гранитов, если значение Λ в альтернативе $H_1 : H_2$ было ≤ 40 . Во второй класс вошли аналоги цепей Маркова 2-го порядка с $40 < \Lambda < 70$. Наконец, третий класс образовали породы с последовательностями зерен, аналогичными цепям Маркова 2-го порядка с $\Lambda \geq 70$ и более высокого порядка, чем 2-й. Границы между классами по наблюдениям в точках опробования были нанесены на карту, а площадь с одним классом пород во всех пробах покрыта штриховкой, означающей определенный класс.

Сравнивая полученную картину распределения зон различных марковских классов пород с размещением в пределах массива различных петрографических типов пород и положением участка, на котором известна оловянная минерализация, отметим следующее.

Марковские зоны располагаются в целом более или менее перпендикулярно линии контакта массива с вмещающими породами.

Марковские зоны не приурочены к гранитам или гранодиоритам, а секут поля, образованные этими породами, без видимой тенденции к какому-либо полю.

Вне зоны распространения пород с повышенными значениями статистики Λ располагаются породы с низкими значениями Λ . Внутри зоны распространения этих пород находятся породы с наиболее высокими значениями Λ и наиболее высоким порядком марковости.

Примерно на простирании зоны, сложенной породами со статистикой $\Lambda \geq 70$, располагается участок с оловянной минерализацией.

Принимая интерпретацию значений Λ и повышения порядка марковости с интенсивностью начальных стадий метасоматоза, как это было сделано для Омсукчана (Вистелиус, Романова, 1972) и Иульгина (Иванов, Подольский, 1974), полагаем, что изученный интрузив сечется региональными зонами проявления метасоматоза. По этим зонам мигрировали рудоносные флюиды, прошли эту зону и отложили олово во вмещающих породах.

На основании проделанной работы можно сделать вывод о необходимости более широкого исследования изученного массива. Следует проанализировать последовательности на всей территории, занятой гранитами. Было бы полезно также сгустить сеть опробования на участке между пробами 85 и 51 для уточнения структуры наиболее переработанной зоны.

Интересно отметить, что, согласно литературным данным, в исследуемом районе выделяются ряд зон повышенной магматической проницаемости субширотного простирания, а также система разломов северо-западного простирания. Выделенная нами зона как будто согласуется по простиранию с разломами северо-западного направления и находится примерно на продолжении Силинской зоны повышенной магматической проницаемости.

ЛИТЕРАТУРА

- Вистелиус А. Б., Лельчук Т. С., Талмуд Г. А., Фаас А. В. Статистическая идентификация идеальных гранитов и продуктов их преобразования. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 2. Л., «Наука», 1972, с. 3—46.
- Вистелиус А. Б., Романова М. А. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 1. Л., «Наука», 1972, с. 4—47.
- Вистелиус А. Б., Романова М. А. О вырожденном случае модели кристаллизации идеальных гранитов. — ДАН СССР, 1976, т. 228, № 1, с. 170—173.

- Вистелнус А. Б., Фаас А. В. О преобразованиях последовательностей зерен кварца, калиевого полевого шпата и плагиоклаза в идеальных гранитах под действием слабого метасоматоза. — ДАН СССР, 1972, т. 203, № 6, с. 1386—1389.
- Иванов Д. Н., Подольский Ю. В. О структуре метасоматического поля восточной части Иульгинского массива (Чукотка). — ДАН СССР, 1974, т. 219, № 1, с. 193—196.
- Радкевич Е. А., Асманов В. Я., Бакулин Ю. И., Гагаев В. Н., Житенёв Н. Н., Квятковский Е. М., Кокорин А. М., Кокорина Д. К., Коростелев П. Г., Кушев В. Б., Михайлов М. А., Онихимовский В. В., Селезнев П. Н., Степанова М. В. Геология, минералогия и геохимия Комсомольского района. М., «Наука», 1971, 335 с.
- Kushiro I. The System Forsterite—Anortite—Albite—Silica—H₂O of 15 kbar and the genesis of andesitic Magmas in the Upper Mantle. — Rep. Direktor Geophys. Labor. Carnegie Inst., 1974, v. 1655, p. 244—248.
- Vistelius A. Ideal granite and its properties. I. The Stochastic Model. — J. Int. Assoc. Math. Geol., 1972, v. 4, № 2, p. 89—102.

МАТЕРИАЛЫ К СТОХАСТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ГРАНИТОИДОВ В ДОКЕМБРИИ САНГИЛЕНСКОГО СРЕДИННОГО МАССИВА (ЮГО-ВОСТОЧНАЯ ТУВА)

И. К. Козаков, В. Н. Подковыров

Институт геологии и геохронологии докембрия АН СССР, Ленинград

Сангиленский срединный массив расположен в юго-восточной части Тувинской АССР. Докембрийские образования, слагающие его западную часть, разделены И. К. Козаковым и Ф. П. Митрофановым (1976) на четыре стратиграфических комплекса.

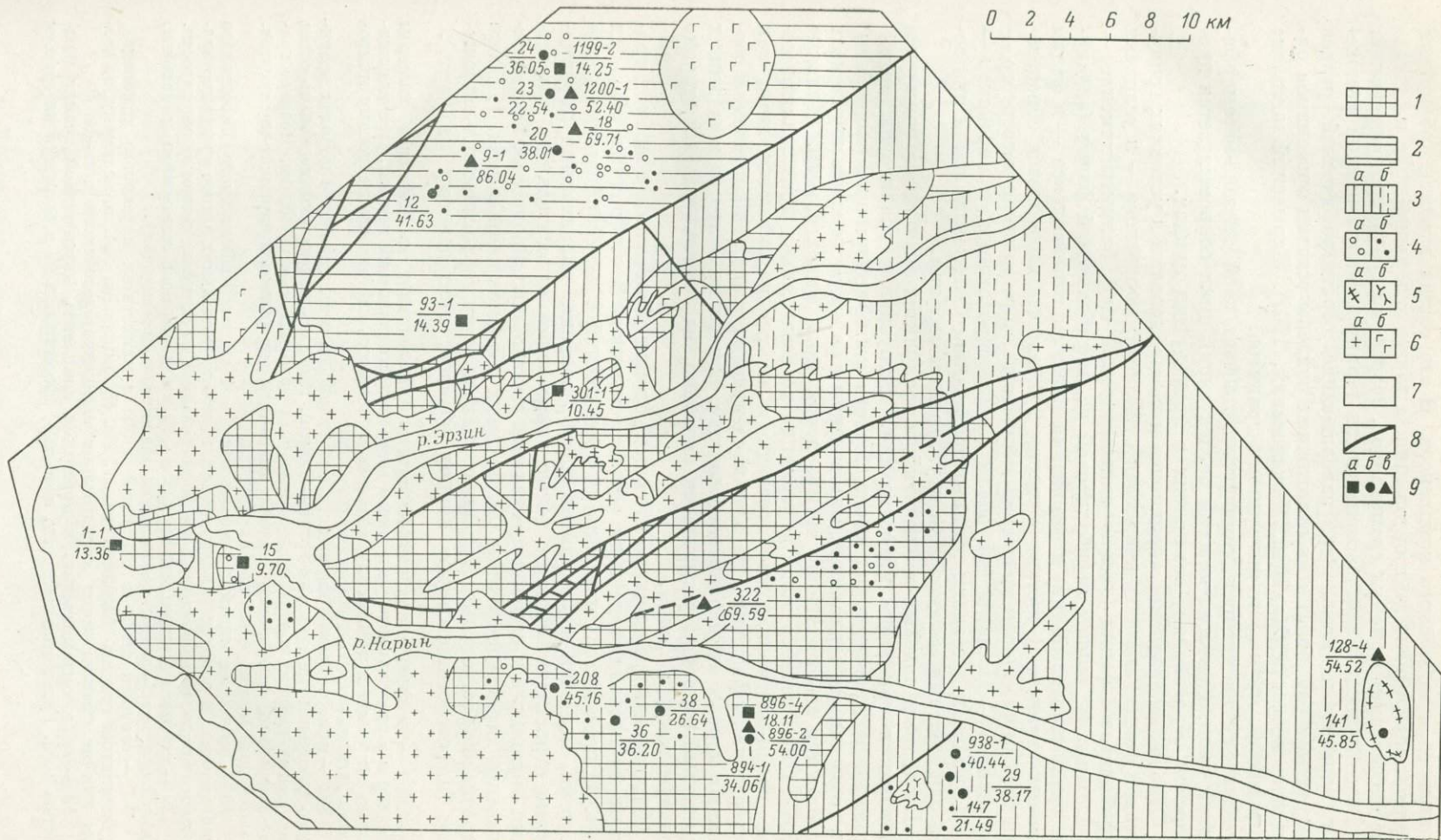
Наиболее древний — эрзинский — сложен гнейсами и сланцами с реликтами гранулитов и чарнокитоидов, а также кварцитами и мраморами с форстеритом. Возраст комплекса предполагается архейским. Гранитоиды в составе этого комплекса представлены мигматитами гранулитовой фации и небольшими массивами эндербитов и чарнокитов. Мигматитовые образования обычно имеют послойный характер, в отдельных случаях это секущие жилы. Мощность лейкосом мигматитов и согласных жил измеряется несколькими сантиметрами, реже 15—30 см. Мощность секущих жил достигает иногда нескольких метров.

Моренский комплекс, отнесенный к нижнепротерозойским образованиям, стратиграфически несогласно залегает на эрзинском комплексе. В его состав входят биотитовые, гранат-биотитовые, иногда с дистеном, гнейсы, сланцы с горизонтами железистых кварцитов, амфиболитов и мраморов. В центральной и северной частях комплекса породы интенсивно мигматизированы. Мигматиты имеют послойный характер, но встречаются образования типа агматитов и секущие гранитные жилы мощностью до нескольких метров. Интрузивные гранитоиды представлены пластовыми телами и отдельными массивами плагиогранитов—гранодиоритов.

Рис. 1. Схема опробования гранитоидов Западного Сангилена (Козаков, Митрофанов, 1976; с упрощениями).

1 — эрзинский комплекс (архей); 2 — моренский комплекс (нижний протерозой); 3 — балыктыг-хемский комплекс (средний протерозой); а — достоверный, б — предполагаемый; 4 — мигматиты и субавтохтонные тела гранитов: а — нижнепротерозойские, б — среднепротерозойские; 5 — среднепротерозойские магматические породы: а — раннекладчатые граниты, Хоромнугский массив, б — позднекладчатые сyenиты, Чжаргалантский шток; 6 — рифейские — нижнепалеозойские интрузивные породы, нерасчлененные: а — гранитоиды, б — базиты-ультрабазиты; 7 — аллювиальные отложения; 8 — разрывные нарушения; 9 — точки отбора образцов и принятые марковские гипотезы: а — цепь Маркова 1-го порядка, б — цепь Маркова 2-го порядка, в — цепь Маркова выше 2-го порядка; *дробь: числитель* — номер образца, *знаменатель* — значение А.

0 2 4 6 8 10 км



- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9

128-4
54.52

141
45.85

24 1199-2
36.03 14.25
23 1200-1
22.54 52.40
20 18
9-1 38.01 69.71
86.04

12
41.63

93-1
14.39

301-1
10.45

1-1
13.36

15
9.70

322
69.59

208
45.16

38
26.64

36
36.20

896-4
18.11
896-2
54.00

894-1
34.06

938-1
40.44 29
147 38.17
21.49

Балыктыгхемский комплекс с несогласием залегает на отложениях эрзинского и моренского комплексов. В его состав входят карбонатные и терригенно-карбонатные отложения, а также небольшие тела и отдельные массивы интрузивных гранитоидов, возраст их среднепротерозойский.

Выше с несогласием располагаются терригенно-карбонатные отложения нарынского комплекса, завершающие стратиграфический разрез в изучаемом районе. В этих отложениях найдены остатки организмов рифейского возраста (Мальцев, Межеловский, 1967). Нарынский комплекс прорывается крупными интрузиями гранитов.

Каждому из четырех комплексов отвечает свой тектоно-метаморфический цикл. При этом каждый последующий цикл сопровождается диафторезом образований, возникших в предыдущих циклах.

Отложения эрзинского комплекса метаморфизованы в условиях гранулитовой фации (шпинель-кварцевая субфация), моренского — в условиях амфиболитовой фации (дистен-силлиманитовый тип), балыктыгхемского — в условиях от эпидот-амфиболитовой до амфиболитовой фации (андалузит-силлиманитовый тип) и отложения нарынского комплекса — в фации зеленых сланцев. В составе эрзинского комплекса выделяются образования трех циклов (если не считать несущественного влияния четвертого — нарынского — цикла) и три эпохи гранитообразования, в моренском — двух циклов и две эпохи гранитообразования; балыктыгхемский претерпел однократный метаморфизм и ультраметаморфизм.

По данным полевых наблюдений, в гранулитах эрзинского комплекса выделяются три этапа мигматизации. Интрузивные гранитоиды архейского возраста внедрялись после первого этапа деформации (эндербиты) и в конце цикла (чарнокиты). В моренском и балыктыгхемском комплексах выделяются соответственно четыре и три этапа мигматизации. Жильные образования первого этапа деформации во всех циклах представляют собой кварц-плагиоклазовые агрегаты и не рассматриваются нами как ультраметаморфические. На всех последующих этапах мигматизации возникают породы анхигранитного состава, причем на более ранних этапах гранитный материал распределен послойно, на заключительных широко развиты секущие жилы.

Отмеченные чрезвычайно сложные условия образования подобных гранитов не позволяют дать их общего описания. В отобранных образцах (рис. 1) проводилось изучение их соотношений с метаморфическими процессами, включая минеральные преобразования, складчатыми деформациями и рассланцеванием с целью определения относительного возрастного положения и степени проявления наложенных процессов. Петрографические характеристики анализируемых образцов даны в табл. 1. Ниже перечислены изученные образцы с указанием их геологического положения (цифры соответствуют номеру образца, приведенному на карте).

301-1 — лейкосома чарнокит-мигматита. Образец взят из ксенолита размером 0.5×1.0 м в гранодиорите рифейского возраста (Баянкольский массив). Предположительно относится к эрзинскому комплексу. Мощность слагающего лейкосому микроклин-плагиоклазового гранита около 2 см.

322 — гиперстеновый микроклиновый гранит из зоны надвига в породах эрзинского комплекса (междуречье Эрзин—Нарын). Площадь выхода тела несколько сотен квадратных метров, контакты с вмещающими породами тектонические. Возраст гранита, вероятно, архейский. Содержит ксенолиты эндербитов и чарнокит-мигматитов. Наложенный метаморфизм не фиксируется.

18 — лейкосома мигматита мощностью до 4 см из гнейсовидного биотитового гранодиорита. В породах фиксируется складчатость нескольких этапов среднепротерозойского цикла, сопровождавшаяся формированием двух новых систем сланцеватости.

20 — согласная жила мощностью 8—10 см в породах моренского комплекса, ортит-биотитовый гранит; в остальном аналогичен предыдущему.

9-1 — секущая апофиза согласной жилы в мигматитах моренского комплекса, мусковитовый гранит. Мощность жилы 5 см, сформирована она, по-видимому, на втором или на третьем этапе мигматизации среднепротерозойского цикла.

12 — лейкосома мигматита в моренском комплексе, двуслюдяной гранит мощностью 3 см. Гранитный материал, вероятно, сформирован на втором или на третьем

Петрографическая характеристика исследованных образцов (содержание минералов в об. %)о

Номер образца	Средний размер зерна, мм	Вторичные изменения	Структура	Текстура	Калиевый полевой шпат	Плагиоклаз	Кварц	Гиперстен	Бiotит	Мусковит	Гранат	Ди-стен	Аксессуарные минералы
301-1	0.24	Бiotит по гиперстелу	Гранитовая	Массивная	21.35	40.84	32.18	1.82	3.81	—	—	—	—
322	0.98	То же	»	»	60.36	12.27	22.86	2.13	2.00	—	—	—	0.38
18	0.76	—	Гранобластовая	Гнейсовидная	16.74	36.00	28.68	—	14.75	2.97	—	—	—
20	0.56	Мусковитизация	Бластогранитовая	»	27.33	35.54	33.30	—	3.18	0.30	—	—	0.35
9-1	1.28	Мусковитизация и окварцевание	»	Массивная	24.63	25.45	35.82	—	2.34	11.76	—	—	—
12	0.44	То же	Гранобластовая	Гнейсовидная	25.50	32.32	29.80	—	4.20	6.74	0.56	—	0.88
208	1.52	» »	Гранитовая	Массивная	34.23	28.03	34.81	—	—	2.93	—	—	—
1-1	0.63	Слабая мусковитизация	»	»	26.28	37.37	33.49	—	2.01	0.80	0.05	—	—
15	1.23	То же	»	»	26.37	29.08	41.83	—	1.35	1.19	0.11	—	0.07
24	0.93	Мусковитизация	»	»	23.62	42.34	28.00	—	1.17	3.86	—	1.01	—
1199-2	0.51	»	»	»	35.22	24.95	35.66	—	1.42	2.13	0.53	0.18	—
1200-1	0.29	»	»	»	33.15	33.53	28.97	—	0.37	2.85	1.12	—	—
23	0.27	»	Бластоаплитовая	»	29.81	34.90	30.34	—	0.18	2.99	1.02	0.76	—
141	0.36	Соссюритизация	Гранитовая	»	29.20	36.86	26.10	—	6.35	8.49	—	—	—
147	0.45	»	Бластогранитовая	Гнейсовидная	42.24	29.87	26.64	—	—	1.12	—	—	0.13
38	0.67	—	»	»	35.14	26.67	26.08	—	—	—	10.52	—	1.59
894-1	0.36	—	Гранитовая	Массивная	42.24	16.74	36.30	—	2.04	2.08	0.59	—	—
896-2	0.79	Мусковитизация	»	»	32.51	26.42	32.45	—	1.41	6.88	—	—	0.33
896-4	0.61	—	»	»	34.21	32.05	31.92	—	1.57	0.24	—	—	—
128-4	0.38	Соссюритизация	Бластогранитовая	Гнейсовидная	47.62	17.86	28.20	—	1.13	4.08	—	—	1.11
29	0.56	»	»	»	32.70	36.16	29.00	—	—	1.04	—	—	1.10
36	1.32	Мусковитизация	»	Массивная	38.21	22.44	33.62	—	0.09	1.60	4.04	—	—
938-1	0.96	—	Гранитовая	»	10.26	44.58	43.88	—	0.58	0.66	—	—	—
93-1	0.24	Калишпатизация, мусковитизация	»	»	34.45	26.14	29.00	—	—	9.33	—	—	—

этапе мигматизации среднепротерозойского цикла, наблюдается изгиб его в пологую, открытую складку.

208 — лейкосома мигматита в породах эрзинского комплекса, участок Хайын-Сайыр; гранит с порфиробластами микроклина. Устанавливается двукратное расслаивание и перекристаллизация материала мигматитов. Мощность лейкосомы неравномерна — от 1 до 5 см.

1-1 — секущая жила мощностью 1.2 м в мигматитах нижнепротерозойского возраста по гранулитам эрзинского комплекса; находится в 220 м к югу от моста на р. Эрзин.

15 — ортогексит — секущее тело двуслюдяного гранита в мигматит-гранитах массива Кызыл-Салтыс, эрзинский комплекс. Сформирован на последнем этапе мигматизации нижнепротерозойского цикла, так же как и гранит обр. 1-1; на первом этапе среднепротерозойской складчатости изогнут в открытую лежачую складку без заметного кливажа ее осевой поверхности. Мощность тела до 5 м.

24 — агматит — двуслюдяной дистеновый гранит с угловатыми, беспорядочно ориентированными глыбами дистеновых гнейсов, моренский комплекс. Контакты тела с вмещающими гнейсами секущие, характерна значительная изменчивость структуры гранита от мелко-среднезернистого до пегматоидного. Возраст гранита нижнепротерозойский.

1199-2 — согласная жила дистен-двуслюдяного гранита в мигматитах моренского комплекса; располагается параллельно осевым поверхностям складок первого этапа среднепротерозойского цикла; наложена складчатость последующих этапов деформации без расслаивания материала. Мощность жилы 5—6 см.

1200-1 — согласная жила в мигматитах моренского комплекса, аналогичная обр. 1199-2. Наложение складчатости сопровождалось формированием новой системы сланцеватости.

23 — согласно секущее тело дистен-двуслюдяного гранита в мигматизированных гнейсах моренского комплекса мощностью от 0.7 до 3 м. Внедрение гранита связано с заключительными этапами мигматизации нижнепротерозойского цикла, в контактах с рамой — зона закалки. Наложение деформаций последующего цикла выражено в двукратной складчатости и формировании системы сланцеватости.

141 — двуслюдяной, иногда с зеленым амфиболом, гранит из центральной части Хоронгусского массива. Счет структуры первого этапа деформаций балыктыгхемского комплекса; с последующими этапами связано расслаивание гранитов в краевых частях массива, вплоть до формирования субавтохтонных жил кварц-полевошпатового материала.

147 — аллохтонный микроклиновый гранит, счет карбонатные отложения балыктыгхемского комплекса и подвергается будинажу и частичному расслаиванию на поздних этапах деформации среднепротерозойского цикла; мощность тела до 4.5 м.

38 — магнетит-гранатовый микроклиновый гранит из мощного (до 250 м) тела конформных структурам рамы гранитов в мигматитах среднепротерозойского возраста по породам эрзинского комплекса. Иногда наблюдается неотчетливая сланцеватость материала гранитов и субпараллельная ориентировка реликтовых пород.

894-1 — лейкосома мигматитов среднепротерозойского возраста. Сложена двуслюдяным гранитом с реликтами кордиерита и силлиманита, мощность лейкосомы до 3 см. Наложение деформации и метаморфизм не обнаружены.

896-2 — образец из центральной части согласной жилы мощностью до 1.2 м, сложенной двуслюдяным гранитом с реликтами андалузита. Расположена жила в мигматитах среднепротерозойского возраста по породам эрзинского комплекса (р. Хунде). Формирование жилы связано со вторым этапом мигматизации среднепротерозойского цикла. Неотчетливо выражены наложенные процессы.

896-4 — биотитовый гранит из приконтактной части той же жилы, что и обр. 896-2; содержит реликты кордиерита и силлиманита. Жила имеет зональное строение, изменяется от мелкозернистого гранита с характерным саблевидным биотитом в контакте с вмещающими мигматитами до крупнозернистого, местами пегматоидного, с крупными порфирировидными выделениями калиевого полевого шпата и кварца, а также с зонами графического пегматита в центре жилы.

128-4 — аллохтонный эпидот-двуслюдяной гранит около выходов граносиенит-сиенитов (вблизи Чжаргалантского штока). Счет структуры первого этапа деформаций среднепротерозойского цикла в карбонатных отложениях балыктыгхемского комплекса. Наблюдается расслаиванность вплоть до перехода в ортогнейс.

29 — аллохтонный эпидот-мусковитовый гранит, аналогичный предыдущему; район Чжаргалантского штока, балыктыгхемский комплекс. Оба гранита, так же как и гранит обр. 147, сформировались, вероятно, при ультраметаморфизме пород эрзинского комплекса в течение второго этапа мигматизации среднепротерозойского цикла и внедрились в вышележащие карбонатные отложения.

36 — субавтохтонная жила мусковит-гранатового гранита в мигматит-гранитах эрзинского комплекса (участок Хайын-Сайыр), мощность жилы 30 см. Наложена складчатость последних этапов среднепротерозойского цикла.

938-1 — ортогексит-двуслюдяной гранит; счет основные структуры мраморов балыктыгхемского комплекса и незначительно ими будинируется. Образуется, по-ви-

димому, на третьем этапе мигматизации среднепротерозойского цикла; мощность тела до 2 м.

93-1 — ортогнейс-мусковитовый гранит мощностью до 1.5 м, расположенный параллельно осевым плоскостям складок третьего этапа среднепротерозойского цикла в моренском комплексе (долина р. Морен). Наблюдается будинаж тела без расланцевания гранита, связанный с наложением деформаций рифейского (нарынского) цикла.

АНАЛИЗ НАБЛЮДЕНИЙ

Общий анализ и постановка работ проведены в соответствии с концепцией идеальных гранитов, предложенной А. Б. Вистелиусом (Vistelius, 1971; Арабаджева-Цветкова и др., 1972; Вистелиус, 1972).

Используя данные табл. 2, можно было бы попытаться восстановить историю формирования каждого из изучаемых гранитов, если бы существовала уверенность, что они образовались из гомогенного, неподвижного относительно кристаллизующихся минеральных индивидов расплава. В нашем случае доказательство этого отсутствует, и в силу сложившихся традиций интерпретация наблюдений дается обычным геологическим путем.

Первая группа наблюдений охватывает обр. 301-1, 1-1, 15, 1199-2, 896-4 и 93-1. В этих разновозрастных гранитоидах последовательности зерен калиевого полевого шпата, кварца и альбита (плагноклаз) не отличимы от простых цепей Маркова. Однако образец из лейкосомы чарнокит-мигматита (301-1) не удовлетворяет модели идеального гранита по значению χ^2 (матрица $С\Lambda_p$ модели не соответствует наблюдаемой матрице $\tilde{P}_{i,j}$).¹ Подобное встречается иногда и в обычных магматических гранитах (см. ст. Д. Н. Иванова и Ю. А. Высоцкого в наст. сб.). Остальные пять образцов этой группы (см. ниже) не отличаются по стохастической структуре последовательностей зерен от идеальных гранитов. Таким образом, явно секущие тела гранитов, подвергшиеся только начальной стадии переработки, не сопровождавшейся расланцеванием, являются объектами, которые можно изучать на основе теории идеальных гранитов. Необходимо отметить, что изучаемые гранитоиды имеют специфические черты, заключающиеся в чрезвычайно высоких значениях Λ в альтернативе $H_0 : H_1$ и очень малых значениях величин Λ в альтернативе $H_1 : H_2$. Иными словами, это резко выраженные простые цепи Маркова. Возможно, эти специфические черты докембрийских гранитоидов и выявленные особенности имеют некоторое общее значение, но для подтверждения этого необходимы дополнительные исследования.

Сравнение матриц $С\Lambda_p$ (теоретической) и $\tilde{P}_{i,j}$ (наблюденной) для образцов пород с простыми цепями Маркова дало следующие значения $\chi^2_{\text{набл}}$ при табличном $\chi^2_{0.05} = 3.84$:

1199-2	896-4	301-1	1-1	15	93-1
0.7848	0.7337	15.4020	0.6449	1.0475	1.4358

Вторая группа образцов (896-2, 894-1, 1200-1, 141, 24, 938-1) — это граниты, имеющие последовательности зерен 2-го или более высокого порядка марковости. Во всех них переход через один минерал имеет более высокий порядок, чем 1-й, а переходы через два других минерала не отличимы от простых цепей Маркова. Если бы это были магматические граниты из верхнего структурного этажа, то эти образцы отвечали бы идеальным гранитам, претерпевшим начальные стадии метасоматической переработки (см. статью Романовой в наст. сб.). Так как во всех случаях $p_{ii} < p_i$ (рис. 2), то можно полагать, что в образцах этой группы (кроме 896-2) имеет место метасоматоз по схеме чужеродного зерна с образованием единичных вторичных зерен. Сопоставляя данные расчетов с описанием образцов, можно сказать, что обр. 894-1, 141, 24 и 938-1 представляют собой

¹ Обозначения те же, что и в ст. Романовой, с. 25—40.

Свойства последовательностей зерен в гранитоидах Сангиленского массива

Номер образца	Длина последовательности		Принятый порядок маркировки	Значения Δ , полученные при проверке марковских гипотез			Значения Δ , полученные при проверке частных марковских переходов через ($\chi^2_{0.5} = 9.49$)			$\chi^2_{\text{табл.}}$, полученные при проверке однородности	
	число зерен	число кусков		$H_0 : H_1$ $\chi^2_{0.05} = 9.49$	$H_1 : H_2$ $\chi^2_{0.05} = 21.03$	$H_2 : H_3$ $\chi^2_{0.05} = 51.00$	Or	Q	Ab	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{\text{табл}}$
301-1	933	18	1	515.34	10.45	—	—	—	—	126.57	102.34
322	1003	28	>2	488.84	39.06	69.59	11.05	22.54	5.47	1589.5	572.65
18	990	46	>2	384.45	67.95	69.71	30.94	23.99	13.03	2545.8	879.10
20	1002	30	2	625.58	125.90	38.01	55.81	36.37	33.28	576.3	435.67
9-1	997	48	>2	598.88	257.04	86.04	44.88	98.12	114.05	2656.3	747.26
12	1004	38	2	565.97	78.10	41.63	24.87	45.27	7.96	727.2	447.68
208	996	86	2	647.72	188.96	45.16	13.59	98.83	76.54	689.5	396.85
1-1	984	37	1	291.46	13.36	—	—	—	—	251.3	223.86
15	3051	69	1	2161.31	9.70	—	—	—	—	456.1	358.08
24	1020	37	2	386.44	24.71	36.05	10.48	4.87	9.37	708.3	535.50
1199-2	996	20	1	435.80	14.25	—	—	—	—	139.9	125.42
1200-1	1005	17	>2	569.69	23.53	52.40	15.37	2.33	5.84	933.5	406.61
23	989	28	2	772.35	199.90	22.54	50.92	77.34	71.65	538.4	313.40
141	1006	22	2	221.46	75.23	45.85	4.30	1.52	69.41	424.3	344.70
147	1007	17	2	485.95	35.78	21.49	13.31	2.24	20.23	328.6	221.97
38	1004	36	2	575.17	132.70	26.64	15.44	62.32	54.93	689.5	519.14
894-1	1002	23	2	541.38	45.01	34.06	6.50	30.84	7.67	443.3	275.00
896-2	992	32	>2	382.02	41.17	54.00	28.14	8.23	4.79	1170.3	742.24
896-4	994	27	1	456.83	18.11	—	—	—	—	186.1	138.90
128-4	1018	24	>2	495.52	33.54	54.52	13.88	6.52	13.15	1321.5	544.09
29	1002	25	2	648.19	204.37	38.17	71.05	38.51	94.82	481.5	321.23
36	999	35	2	647.67	78.85	36.20	28.12	33.54	17.10	670.7	449.08
938-1	1001	26	2	630.29	24.85	40.44	3.41	16.30	5.14	500.5	282.61
93-1	997	24	1	528.88	14.39	—	—	—	—	173.0	136.20

незначительно переработанные идеальные граниты, природа двух других не установлена.

Третья группа образцов (322, 12, 147, 128-4) — это граниты, в которых простой марковский переход сохранился только по одному минералу. Последовательности зерен в них не отличимы от цепей Маркова 2-го и >2-го порядков. Подобные граниты распространены в метасоматически измененных аналогах идеальных гранитов. В нашем случае часто встречаются аналоги марковских последовательностей >2-го порядка. По уст-

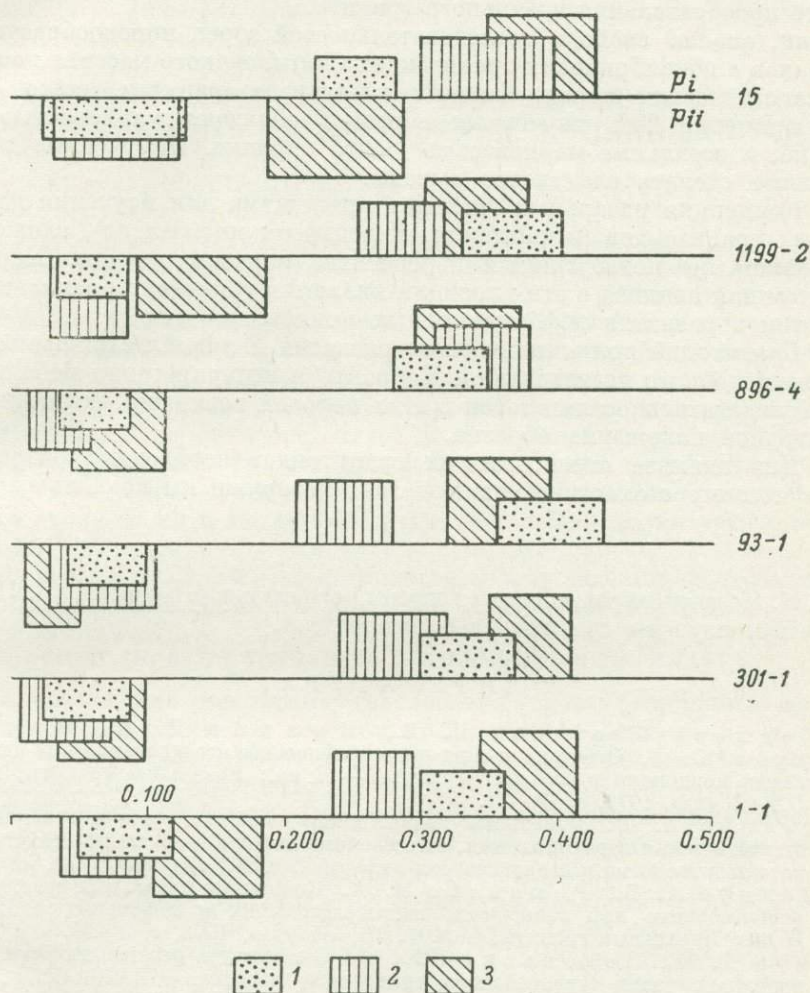


Рис. 2. Соотношения доверительных интервалов p_i и p_{ii} для образцов с простыми цепями Маркова.

1 — микроклин; 2 — кварц; 3 — плагиоклаз.

ному сообщению А. Б. Вистелиуса, граниты Хайдарабадского массива Индии также имеют высокие порядки марковости; возможно, это связано с взаимным смещением зерен породы, а не с метасоматозом.

Образец 12 характеризует лейкосому мигматита из пород, подвергшихся наложенным деформациям, обр. 147 и 128-4 взяты из гранитных тел, подвергшихся рассланцеванию и будинажу, т. е. все три образца взяты из заведомо огнейсованных пород, на которые невозможно распространить представление о чистом проявлении метасоматоза. Таким образом, гранитоиды, претерпевшие наложенные деформации, не могут рассматри-

ваться на основе теории идеальных гранитов или их метасоматических преобразований.

Четвертая (последняя) группа образцов (36, 38, 208, 23, 9-1, 18, 20 и 29) — это граниты, в которых не наблюдалось простого марковского перехода ни через любой из трех минералов. Образцы с такими последовательностями зерен взяты из пород, претерпевших деформацию, метаморфизм, и сказать что-либо об их происхождении невозможно. Часть этих гранитов встречается в ситуациях, когда приложима теория метасоматического преобразования идеального гранита.

Итак, анализ свойств последовательностей зерен породообразующих минералов в докембрийских гранитоидах Сангиленского массива показал, что магматических пород, близких идеальным гранитам, всего около 10%, примерно 25% изученных образцов обладают марковостью 2-го порядка, а остальные марковостью >2 -го порядка. Полученные данные позволяют сделать следующие выводы.

1. Концепция идеальных гранитов приложима для изучения докембрийских гранитоидов (в частности, и лейкосом мигматитов), сложенных материалом, не подвергшимся переработке или деформации. Хорошим объектом для анализа с этих позиций являются гранитоиды заключительных этапов развития деформационных циклов.

2. Гранитоиды полициклического развития являются сложным объектом для подобного исследования. Корректная интерпретация наблюдений над последовательностями зерен в этих породах возможна, если известно структурное положение образца.

3. Для анализа огнейсованных гранитоидов необходима разработка специфических стохастических моделей, которыми мы пока не располагаем.

И. К. Козаковым разработаны вопросы региональной геологии, В. Н. Подковыровым изучены граниты на основе модели.

ЛИТЕРАТУРА

- Арабаджеева-Цветкова И. Е., Иванов Д. Н., Подольский Ю. В. Отбор проб и их петрографическое исследование при использовании концепции идеального гранита. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 1. Л., «Наука», 1972, с. 48—51.
- Вистелиус А. Б. Идеальный гранит и его свойства: вероятностная модель, статистическая идентификация, естественные породы. — В кн.: Математические методы в геологии и геологическая информация. М., «Наука», 1972, с. 26—37.
- Вистелиус А. Б., Романова М. А. Концепция идеальных гранитов и ее использование при съемочных, петрографических и поисковых работах. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 1. Л., «Наука», 1972, с. 3—46.
- Иванов Д. Н., Подольский Ю. В. О структуре метасоматического поля восточной части Иультинского гранитного массива. — ДАН СССР, 1974, т. 219, № 1, с. 193—196.
- Козаков И. К., Митрофанов Ф. П. Региональный полиметаморфизм гранулитового комплекса основания Сангиленского срединного массива. — В кн.: Термодинамический режим метаморфизма. Л., «Наука», 1976, с. 313—316.
- Мальцев Ю. М., Межеловский Н. В. Новые данные по биостратиграфии рифея Сангилены. — В кн.: Стратиграфия докембрия и кембрия Средней Сибири. Красноярск. книжн. изд-во, 1967, с. 376—380.
- Романова М. А. О влиянии начальных стадий грейзенизации на строение последовательности зерен в магматических гранитах. — В кн.: Математические методы в геологии и геологическая информация. М., «Наука», 1972, с. 42—53.
- Vistelius A. B. Grain Sequence of the main rock-forming minerals in the Carnmenellis Granite, Cornwall. — Geocom. Bull., 1971, v. 4, p. 145—149.

II. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЕДИМЕНТАЦИИ

О МЕХАНИЗМЕ ФОРМИРОВАНИЯ СИЛЬВИНИТОВЫХ ПЛАСТОВ ВЕРХНЕКАМСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ КАЛИЙНЫХ СОЛЕЙ

М. Ф. Мохнач

*Лаборатория математической геологии Ленинградского отделения ордена Ленина
Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, Ленинград*

В статье рассматривается механизм формирования сильвинитовых пластов Верхнекамского месторождения. Для этого предлагается стохастическая модель, приемлемость которой выясняется путем сравнения с описанием разреза, составленного группой геологов под руководством В. И. Коппина. Статья не претендует на окончательное решение вопроса, но автору представляется, что предложенная в ней модель в основном охватывает типичные черты явления. Дальнейшее уточнение модели, как кажется, должно идти на основе учета деталей истории осадконакопления.

Современное представление о геологии месторождения читатель может составить по работе А. А. Иванова и М. Л. Вороновой (1975).

МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ СИЛЬВИНИТОВОГО ПЛАСТА

Для объяснения механизма чередования слоев различного состава в пределах сильвинитовых пластов предлагалось много схем. Ни одна из них не была формализована и не давала возможности проверить ее непротиворечивость наблюдениям. Однако на основании взглядов большинства геологов, изучавших месторождение, и личных наблюдений автора в горных выработках отмечаются факты, на основании которых можно построить концептуальную, стохастическую модель.

Факты эти таковы. Наблюдается тенденция к возникновению в вертикальных разрезах толщи последовательностей слоев вида

...тггсггтггт... , где слои сложены: т — терригенным материалом (галопелитом), г — каменной солью и с — сильвинитом. При этом по структуре слой каменной соли, подстилающий галопелит, отличается от слоя каменной соли, покрывающей галопелит. Имеется много данных, указывающих на возможность выпадения отдельных слоев из последовательности указанного вида. Наблюдения в выработках показывают, что практически за слоем любого состава может следовать слой также любого состава, однако вероятность такого следования для различных сочетаний слоев различна.

Исходя из палеогеографических и общегеологических соображений, отмеченную последовательность слоев делят на циклы. Предполагается, что цикл начинается со слоя галопелита, затем идет перистая каменная соль + сильвинит и заканчивается цикл слоем каменной соли высаливания, подстилающей галопелит. Палеогеографические реконструкции предполагают, что слои сильвинита и галопелита образуются в наиболее различных условиях.

Наблюдения и их палеогеографическая интерпретация не позволяют ввести единственную стохастическую модель. Многие особенности строения толщ в схемах, предлагавшихся геологами, не учитываются. Поэтому для выработки определенной модели приходится вводить множество различных вариантов и каждый из них сравнивать с наблюдениями. Модели, не согласующиеся с наблюдениями, а ими являются матрицы переходных частот $N_{i,j}$; $N_{ij,k}$ и $N_{ijk,l}$, $i, j, k, l \in \{t, r, c\}$, где до точки с запятой стоит условие (т. е. фиксированные слои, с которых происходит переход), а после нее указан состав слоя, на который происходит переход, отбрасываются. Таким образом, постепенно, в итоге длительной работы, устанавливается наиболее приемлемая модель.

Для настоящей работы А. Б. Вистелиусом и А. В. Фаасом было построено и сопоставлено с наблюдениями около 40 моделей. Из этих 40 моделей одна оказалась не противоречащей наблюдениям. Эта модель излагается ниже.

Допустим, что имеются две отделенные друг от друга лагуны. Одна практически не имеет водосборного бассейна и примыкает к морю, другая расположена между первой лагуной и обширной плоской сушей, слегка наклоненной к морю. Процесс начинается с того, что депрессия, вмещающая лагуну II, пуста, а лагуна I заполнена морской водой. Из морской воды выпадают сульфаты кальция и каменная соль, остается рапа, подготовленная для садки сильвина. Удельный вес этой рапы достигает достаточной величины, и она начинает через перегородку стекать из лагуны I в депрессию, находящуюся рядом, образуя лагуну II. Из этой рапы отлагается слой сильвинита. По мере фильтрации из лагуны I в лагуну II рапы, осаждающей сильвинит, сток усиливается, и в конце начинает поступать рапа, не способная к садке сильвинита, но резко обогащенная галитом. К этому времени температура воздуха падает, и в зимний период начинает отлагаться галит. Весной сток пресных вод от таяния снега приносит с суши глинистый материал, который отлагается в виде галопелита в лагуне II. В лагуну I талые воды не поступают или поступают в небольшом количестве. По-видимому, в это время перемычка, разделяющая лагуны, частично размывается и в лагуну II поступает рапа, богатая Na^+ и Cl^- , где она разбавляется тальми водами. Чем больше связь с морем, тем рапа богаче Na^+ до и после отложения слоя галопелита. После отложения галопелита и поступления достаточного количества вод, богатых натрием, связь между лагунами I и II прекращается и может начаться испарение. Это испарение доводит концентрацию солей в рапе до уровня, близкого к выделению сильвина. При этом формируется слой каменной соли, покрывающей галопелит. После испарения и выпадения в осадок перистой каменной соли, к моменту выделения сильвинита, уровень в лагуне I оказывается выше, чем в лагуне II. Из-за постоянной связи с морем и поступления сравнительно небольшого количества талых вод концентрация солей в рапе лагуны I выше, чем в лагуне II. Вследствие различия в уровнях концентрированная рапа из лагуны I стекает в лагуну II, где дальнейшее небольшое выпаривание приводит к выделению из нее NaCl и KCl . Далее механизм срабатывает по изложенной схеме.

Итак, процесс в принципе заключается в последовательных реализациях детерминированного цикла: сильвинит—каменная соль высаливания (нижняя каменная соль)—галопелит—перистая каменная соль (верхняя каменная соль). В этом цикле выделяются четыре слоя и три вещества. Слои — это сильвинит, нижняя каменная соль, галопелит, верхняя каменная соль. Вещества — сильвинит, каменная соль и галопелит. Так как количества отложенного сильвинита и галопелита связаны с различными процессами, то взаимного воздействия этих событий не происходит. То же можно сказать и об их соотношении с каменной солью как с веществом. Однако слои одного вещества могут быть как-то связаны, так как они выделяются за счет осаждения из общей массы рапы, хотя после отложения

галопелита ее состав меняется. Кажется возможным, что эта масса, не уходя из бассейна, может влиять и на осаждение каменной соли в следующем цикле.

Обнаружение циклов прямыми геологическими наблюдениями, незначительность глубины размыва, часто наблюдаемая в разрезе, отсутствие некоторых членов цикла делают естественным, с одной стороны, допущение размывов, а с другой — их ограниченность. Будем считать вероятность сохранения или уничтожения каждого слоя в разрезе постоянной.

Предположим, что в пределах одного цикла не может присутствовать менее двух веществ. Иными словами, если отсутствует сильвинит, то присутствует галопелит, если же нет галопелита, то имеется слой сильвинита. В то же время может отсутствовать слой сильвинита и верхняя каменная соль. Верхняя и нижняя каменная соль по существу составляют один слой, разделенный галопелитом. Поэтому, считая возможным некоторое сокращение мощности слоя из-за размыва, растворения или сокращения времени отложения, естественно предположить, что слой верхней каменной соли может исчезать.

Наконец, исходя из ограниченности явления выпадения слоев из цикла, мы полагаем, что в разрезе не может быть выпадения двух слоев подряд (как внутри одного цикла, так и на контакте разных циклов).

Изложенная палеогеографическая схема допускает следующую формализацию.

1. Последовательность слоев в разрезе образована одинаково построенными циклами вида $c_n t_n v_n$, где c — сильвинит, t — каменная соль, v — галопелит; индекс « n » означает нижний, а индекс « v » — верхний слой каменной соли по отношению к галопелиту.

2. В любом цикле некоторые слои могут отсутствовать. При этом отсутствие в разрезе двух слоев подряд не допускается, а после окончания формирования цикла в нем не может быть менее двух веществ. Иными словами, в цикле возможны следующие сочетания слоев: $c_n t_n v_n$; $t_n t_n v_n$; $t_n t$; $c_n t$; $c_n v$; c ; t ; v .

3. Существуют переходные вероятности, характеризующие режим, обеспечивающий наличие или отсутствие слоев. Для последовательности слоев любого состава эти вероятности характеризуются матрицей

$$c^{(h)} \quad o^{(h)}$$

$$c^{(h-1)} \begin{pmatrix} \pi & 1-\pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2-\pi} \\ \frac{1-\pi}{2-\pi} \end{pmatrix}, \quad (\text{A})$$

где c означает присутствие слоя в последовательности из любых слоев, а o — его отсутствие; h указывает место слоя в последовательности, \mathbf{p} — вектор начальных вероятностей.

Аналогичная матрица для последовательности, построенной только из слоев каменной соли, т. е. . . . $t_n t_n t_n t_n$. . ., имеет вид:

$$c_t^{(h)} \quad o_t^{(h)}$$

$$c_t^{(h-1)} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}; \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+p} \\ \frac{p}{\alpha+p} \end{pmatrix}. \quad (\text{B})$$

Матрица (A) описывает вероятности переходов между соседними слоями, а матрица (B) — между смежными слоями галита (т. е. между слоями, разделенными одним слоем). Однако задание перехода на смежный слой индуцирует (косвенно) переход и через слой. Так как мы предполагаем механизм формирования слоев единым, то вероятности в обеих матрицах должны быть согласованы. Требования согласованности приводят к тому,

**Литологический состав сильвинитовой части продуктивной толщи
Верхнекамского месторождения (последнее описание, мощность, мм)**

Состав	Мощность	Состав	Мощность	Состав	Мощность	Состав	Мощность	Состав	Мощность	Состав	Мощность
Пласт АБ											
г	12	с	115	г	6	г	4	г	16	г	4
с	20	т	1	т	5	с	23	т	4	с	50
г	30	г	7	с	18	г	3	т	4	с	4
г	15	т	2	г	8	т	1	г	13	г	3
с	30	с	45	г	18	г	12	г	22	г	2
с	15	г	10	с	15	с	6	г	15	г	2
г	25	с	35	г	5	г	18	г	20	г	1
т	3	г	10	г	5	с	3	г	16	г	4
г	7	с	90	г	35	г	10	г	25	г	4
г	20	т	7	т	6	с	4	г	16	г	4
г	4	г	25	с	20	г	12	г	25	с	3
т	5	с	30	г	20	т	4	г	17	г	2
г	20	г	20	с	25	Пласт КрII		с	17	с	85
с	30	г	3	т	4	с	2	т	10	с	35
г	4	т	5	с	15	с	2	г	20	с	32
г	7	г	6	г	15	с	4	г	30	г	8
с	30	г	6	с	20	с	25	г	25	г	10
г	7	г	25	т	8	с	17	г	12	г	12
г	3	с	4	с	25	г	15	г	60	с	12
г	12	г	6	г	15	г	40	с	12	г	40
с	70	т	40	с	20	с	20	с	30	г	30
г	3	с	7	т	7	с	8	г	8	г	8
г	3	г	3	с	20	с	20	с	25	г	10
г	8	с	40	г	15	г	5	г	12	г	12
с	37	г	4	г	50	г	10	г	12	г	60
с	3	г	6	г	20	г	5	г	12	г	12
с	17	с	20	с	10	с	45	г	40	г	30
с	3	г	5	т	50	с	6	г	8	г	8
с	45	г	5	т	2	г	12	с	50	г	5
г	8	с	12	с	30	г	6	г	35	г	35
г	3	г	4	г	5	с	35	г	12	г	12
с	12	г	6	г	10	г	17	с	12	г	18
г	25	г	15	с	15	г	12	г	30	г	8
г	2	с	20	г	10	г	8	г	8	г	8
г	6	с	35	г	8	с	25	г	50	г	5
с	20	т	45	г	1	г	35	с	5	г	12
с	15	г	12	г	10	г	7	г	12	г	12
г	37	с	4	с	25	г	12	с	35	г	12
г	3	г	50	г	8	с	55	г	12	г	18
г	2	г	40	г	13	г	15	с	12	г	18
г	3	с	25	г	48	г	10	г	15	г	10
с	13	г	2	г	6	г	10	г	12	г	8
г	2	с	13	г	4	с	60	с	18	г	10
г	5	г	90	г	30	г	7	г	18	г	8
г	12	г	10	с	3	г	7	г	4	г	6
с	18	г	6	т	4	г	15	г	2	г	2
г	4	г	11	г	12	с	55	г	10	г	4
г	3	с	12	с	35	г	5	г	25	г	10
с	8	т	25	г	3	т	12	г	12	г	2
с	25	с	4	г	1	с	100	г	2	г	2
г	5	г	7	г	5	с	25	г	10	г	4
г	8	г	15	с	25	с	90	г	25	г	4
с	10	с	3	г	45	с	15	с	10	г	25
с	50	с	30	г	6	г	80	с	10	г	12
г	7	с	3	г	42	г	10	г	2	г	3
г	5	г	3	с	4	с	20	г	10	г	25
г	15	г	20	г	10	г	7	г	4	г	4
с	20	с	2	с	23	г	5	г	3	г	35
с	25	г	40	г	5	г	13	г	10	г	4
с	20	г	2	г	1	г	2	г	25	г	4
с	25	с	65	г	7	г	7	г	4	г	35
с	35	т	7	с	60	г	1	г	35	г	4

Состав	Мощность	Состав	Мощность	Состав	Мощность	Состав	Мощность	Состав	Мощность	Состав	Мощность
Т	8	Г	10	Т	2	С	35	Г	8	Г	30
Г	4	С	25	Г	8	Г	8	С	20	Т	5
Т	4	Г	7	С	3	Т	1	Г	10	Г	30
Г	12	Т	3	Г	8	Т	10	Т	8	Т	5
Т	12	Г	15	Т	1	Т	1	Г	8	Г	10
С	6	Т	3	Г	10	Г	15	С	35	Т	10
Т	3	Г	30	С	65	С	3	Т	4	С	15
Г	8	Т	2	Г	10	Г	12	Т	3	Т	7
Т	5	Г	30	С	30	Т	2	С	35	С	40
Г	35	Т	2	Г	10	Г	7	Т	3	Т	4
С	60	Г	25	Т	15	С	12	Г	8	Г	12
Г	40	Т	20	С	8	Г	12	С	45	Т	1
С	30	С	30	Г	15	Т	5	Г	2	Г	7
Т	10	Т	3	Т	3	Г	4	Т	7	Т	1
Г	6	Г	15	С	8	С	30	С	30	Г	15
С	47	Т	7	Т	4	Т	1	Г	6	Т	7
Г	5	Г	35	С	17	Г	55	Т	4	С	15
Т	4	Т	10	Т	2	Т	5	Г	17	Т	1
Г	12	Г	10	Г	5	Г	4	С	50	С	20
С	4	С	15	Т	2	С	35	Г	10	Г	8
Г	15	Г	6	Г	3	Г	4	Т	3	Т	5
С	3	Т	5	Т	3	Т	5	Г	5	С	40
Т	3	Г	15	Г	5	Г	15	С	10	Т	1
Г	12	Т	12	С	2	С	12	Г	15	Г	30
С	10	С	28	Т	34	Г	4	Т	3	С	30
Г	3	Т	1	Г	15	Т	1	Г	12	Г	15
Т	5	Г	10	С	4	Г	4	С	6	Т	1
Г	25	Т	1	Т	8	С	55	Г	20	Г	25
С	35	Г	13	Т	2	Г	15	Т	3	Т	1
Г	5	С	9	Г	22	Т	2	Г	30	Г	25
С	25	Т	6	Т	3	Т	2	Т	2	С	8
Т	8	С	12	С	12	Пласт КрIII ^а		Г	12	Г	25
Г	6	Т	1	Т	20	Г	4	С	30	С	25
С	33	С	15	Г	33	С	15	Т	2	Т	12
Т	2	Г	5	Г	60	Т	2	Т	3	Т	15
С	20	Т	3	С	10	С	30	Т	3	С	40
Г	5	С	75	С	15	Т	3	Пласт КрIII ^б		Г	8
С	45	Г	10	С	13	Г	22	Г	6	Т	6
Т	3	С	30	С	25	Т	15	С	12	Г	17
Г	7	Т	1	Г	20	Г	40	Т	3	С	21
С	30	С	35	Г	15	Т	2	С	145	Т	2
Г	4	Т	7	С	25	С	4	Т	2	С	22
Т	7	С	85	Г	20	Г	2	Г	25	Т	4
Г	40	Т	1	Т	17	С	4	Т	3	Г	12
С	3	Г	20	С	30	Г	2	С	45	С	25
Т	40	Т	2	Г	7	С	4	Т	3	Г	5
С	4	С	50	Г	3	Г	2	С	15	Т	5
Т	60	Г	7	Т	5	С	4	С	3	Г	15
Г	2	С	7	С	25	Г	3	С	12	С	40
С	15	Г	7	Г	25	С	6	Г	8	Г	17
С	90	С	7	Т	3	Т	15	Т	3	Т	8
Т	2	Г	10	Г	5	Г	3	С	60	С	45
С	80	Т	4	С	15	С	25	Т	3	Г	15
Г	10	Г	12	С	25	Г	6	С	110	Т	4
Т	8	С	55	Г	20	Т	1	Т	3	Г	10
С	35	Г	15	Г	20	Г	10	С	110	С	15
Т	2	С	50	Т	1	С	25	Г	65	Г	10
Г	6	Г	10	Г	8	Т	10	Т	2	Т	2
С	6	Т	5	С	30	Т	3	Г	8	Г	20
Г	12	Г	15	Г	8	С	25	С	15	Т	2
С	30	Т	3	Г	3	Г	30	Г	10	Г	18
Т	3	Г	30	Г	9	Т	2	Т	1	С	10
										Г	15

Состав	Мощность	Состав	Мощность	Состав	Мощность	Состав	Мощность	Состав	Мощность	Состав	Мощность
Пласт КрШ ^в		с	15	с	15	г	60	т	20	г	7
		т	1	г	20	т	8	г	10	с	50
с	15	с	15	т	6	г	15	т	7	г	10
г	10	т	1	г	15	т	1	г	12	т	6
т	1	г	3	с	40	г	3	с	15	с	7
г	8	т	5	г	10	т	6	г	18	г	45
т	1	г	20	т	4	г	18	т	6	т	8

Матрицы переходных частот (число переходов), соответствующие разрезу (они получены непосредственной сортировкой наблюдений), даны ниже.

$$N_{i;j} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{т} & \text{г} & \text{с} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{т} \\ \text{г} \\ \text{с} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 163 & 77 \\ 163 & 0 & 138 \\ 73 & 140 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}; \quad N_{i;j;k} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{т} & \text{г} & \text{с} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{тг} \\ \text{тг} \\ \text{тс} \\ \text{гт} \\ \text{гг} \\ \text{гс} \\ \text{ст} \\ \text{сг} \\ \text{сс} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 62 & 0 & 100 \\ 42 & 34 & 0 \\ 0 & 119 & 43 \\ 0 & 0 & 0 \\ 31 & 106 & 0 \\ 0 & 39 & 34 \\ 101 & 0 & 37 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Проверка марковских альтернатив дала следующее:

Альтернатива	$H_0 : H_1$	$H_1 : H_2$	$H_2 : H_3$
Наблюдаемое значение	650.03	69.34	8.71

Сравнивая с соответствующими значениями χ^2 при 5%-м уровне значимости (они приведены в конце предыдущего параграфа), мы видим, что H_0 бракуется в пользу H_1 , H_1 — в пользу H_2 , а H_3 — также в пользу H_2 . Таким образом, если последовательность однородна, то можно считать, что она не отличима от случайной последовательности, обладающей марковским свойством 2-го порядка, что было предсказано моделью.

Проверяем однородность, сравнивая матрицы $N_{i;j;k}^{(h)}$, составленные для каждого куска отдельно, с такой же матрицей, составленной по всем наблюдениям. Соответствующие подсчеты дают $\chi_{30}^2 = 39.37$. Мы видели, что значение χ_{30}^2 при 5%-м уровне выше этого значения. Таким образом, можно принять, что изучаемая последовательность однородна.

Итак, последовательность слоев в целом не отличима от однородной случайной последовательности, имеющей марковское свойство 2-го порядка.

Проверим переходы через каждое состояние отдельно. Переход через т дает $\Lambda = 8.94$, через г дает $\Lambda = 37.59$, а через с дает $\Lambda = 22.81$. Итак, переход через любое состояние в последовательности обладает свойством 2-го порядка.

Выясним теперь согласие матриц переходных частот, предсказываемое моделью, с наблюдаемыми матрицами переходных частот. Методом проб и ошибок подбираем значения π и p ; в принятом варианте $\pi = 2/3$, $p = 1/4$.

Так как наша последовательность обладает свойством 2-го порядка, то следует проверить согласие для $N_{i;j}$ и $N_{i;j;k}$; матрица $N_{i;j;l}$ также должна согласовываться.

Приводим результаты сравнения; в клетках матриц сверху дано наблюдаемое значение (\tilde{n}), а внизу рассчитанное (n):

$$N_{i,j} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{т} & \text{г} & \text{с} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{т} \\ \text{г} \\ \text{с} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 163 & 77 \\ & 160.0 & 80.0 \\ 163 & 0 & 138.0 \\ 167.2 & & 133.8 \\ 73 & 140 & 0 \\ 76 & 142.0 & \end{pmatrix} \end{matrix}; \quad N_{i,j;k} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{т} & \text{г} & \text{с} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{тг} \\ \text{тс} \\ \text{гг} \\ \text{гс} \\ \text{ст} \\ \text{сг} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 62 & 0 & 100 \\ 54.0 & & 108.0 \\ 42 & 34 & 0 \\ 38.0 & 38.0 & \\ 0 & 119 & 43 \\ & 121.5 & 40.5 \\ 31 & 106 & 0 \\ 34.3 & 102.7 & \\ 0 & 39 & 34 \\ & 36.5 & 36.5 \\ 101 & 0 & 37 \\ 107.5 & & 30.7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Значение χ^2 при сравнении $N_{i,j}$ с $\tilde{N}_{i,j}$ (при $\nu=2$) равно 0.49; соответственно при сравнении $N_{i,j;k}$ с $\tilde{N}_{i,j;k}$ (при $\nu=4$) получаем $\chi^2=5.25$. Легко убедиться, что согласие N с \tilde{N} вполне удовлетворительное. Для контроля рассчитываем χ^2 , сравнивая $N_{ijk;l}$ с $\tilde{N}_{ijk;l}$; при $\nu=10$ оно оказалось равным 15.18, т. е. снова соответствие удовлетворительное.

ВЫВОДЫ

1. Построена стохастическая модель слоеобразования для силвинитовых пластов Верхнекамского месторождения калийных солей. Она показала существование седиментационного цикла вида: силвинит—каменная соль—галопелит—каменная соль. Цикл начинается с силвинита.

2. Построенная модель показала существование определенного механизма, вследствие которого отдельные слои из седиментационного цикла выпадают.

3. Изложенная модель с достаточно высоким уровнем значимости согласуется с наблюдениями.

4. Для изучения истории формирования силвинитовых пластов Верхнекамского месторождения необходимо исследование возможно большего числа разрезов этих пластов и по возможности на всей площади их распространения.

ЛИТЕРАТУРА

- Вистелиус А. Б., Лельчук Т. С., Талмуд Г. А., Фаас А. В. Статистическая идентификация идеальных гранитов и продуктов их преобразования. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 2. Л., «Наука», 1972, с. 3—46.
Иванов А. А., Воронова М. Л. Верхнекамское месторождение калийных солей. — Тр. ВСЕГЕИ, т. 232. Л., «Недра», 1975, 218 с.

О МЕХАНИЗМЕ ФИКСАЦИИ ЗЕРЕН ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ПЕСЧАНЫХ ОТЛОЖЕНИЙ

М. Е. Демина

Лаборатория математической геологии Ленинградского отделения ордена Ленина Математического института АН СССР им. В. А. Стеклова, Ленинград

При изучении песчаных отложений, естественно, возникает вопрос: в какой момент фиксированы частицы, слагающие породу. Возможен случай фиксации частиц непосредственно после отложения, но не менее реальным кажется случай, когда вся масса песка на дне бассейна движется

перед фоссиллизацией и, таким образом, частицы приспособляются друг к другу в процессе этого движения.

Решить отмеченную задачу для данных отложений можно только косвенными способами. Изучение микроструктуры и наблюдения над ориентировкой зерен (Грязнова, 1953; Dapples, Rominger, 1945) указывают на сохранение следов первичного осаждения. Близость упаковки частиц к плотнейшей упаковке говорит как будто в пользу перемещения частиц после их отложения.

Для решения указанной задачи необходимо было попытаться изучить положение не одной частицы, а последовательности частиц в направлении, фиксированном в пространстве. В этом случае, изучая частицы перпендикулярно слоистости, мы исследуем их в постоянно действующем поле силы тяжести, ориентированной вдоль изучаемой последовательности. Изучая последовательность в плоскости слоистости, мы исключаем силу тяжести и подчеркиваем влияние чисто локальных условий. Казалось бы, эти взаимные движения частиц вдоль направления силы тяжести должны вызвать более сложные соотношения между частицами, чем хаотическое воздействие локальных изменений.

Если перевести сказанное на математический язык, то очевидно, что мы должны изучать случайные последовательности, в которых каждому испытанию отвечает одна обломочная частица. При этом решающую роль должны играть переходные вероятности от частицы к частице при фиксированном минеральном составе этих частиц. Иными словами, мы должны изучать матрицы переходных вероятностей $P_{i, \dots, r; l}^{(h)}$, где $i, \dots, r, l \in \{S\}$ зерен различных минералов S , располагающихся в некоторую цепочку, которую мы наблюдаем вдоль произвольной прямой линии. Множество $\{S\}$ состоит из всех возможных в данной породе состояний, т. е. из тех минералов, из которых состоят изучаемые зерна. Если модель, основывающаяся на динамике среды осаждения зерна верна, то скорее всего матрицы, полученные в плоскости слоистости $P_{i, \dots, r; l}^{(h)}$, будут относиться к бернуллиевским последовательностям или к простым цепям Маркова, возможно, с бернуллиевскими переходами через отдельные состояния. При этом естественно ожидать не слишком больших различий между значениями $P_{ij}^{(h)}$ элементов этих матриц.

Матрицы, полученные при изучении шлифов в направлении, перпендикулярном слоистости $P_{i, \dots, r; l}^{(1)}$, должны отражать более сложные взаимоотношения, которые, вероятно, могут повышать марковский порядок возникающих цепей, а также иметь элементы матриц, более отличающиеся друг от друга, чем в матрицах $P_{i, \dots, r; l}^{(h)}$, полученных при изучении породы в плоскости слоистости.

Из сказанного очевидно, что известный успех в интересующем нас вопросе, как нам кажется, может быть достигнут при исследовании марковской структуры последовательностей песчаных зерен в шлифах из соответствующих пород. Шлифы эти должны быть ориентированы по отношению к плоскости слоистости.

Естественно, что все сказанное представляет собой интуитивную вероятностную модель, которая в ходе исследования при достаточном числе наблюдений либо может оказаться непротиворечивой, либо может быть отвергнута. Углубление представлений в будущем позволит формализовать эту модель и сделать заключения более строгими.

ИССЛЕДУЕМЫЙ МАТЕРИАЛ

Для исследования были подобраны образцы, удовлетворяющие следующим условиям.

1. Порядок содержания кварца, калиевого полевого шпата и плагиоклаза один и тот же.
2. Породы более или менее равномернозернистые.

Характеристика исследуемых песчаников

Номер образца, район его взятия	Возраст породы	Краткая характеристика породы	Автор коллекции
Г-395, Западно-Сибирская низменность, Заполярная площадь, скв. 37, гл. 2759 м	Сг ₁	Песчаник, серый средне- и мелкозернистый, массивный, из толщи переслаивания песчаников, алевроитов, глин	Б. А. Лебедев (ВНИГРИ)
Г-428, Западно-Сибирская низменность, Заполярная площадь, скв. 37, гл. 2861 м	Сг ₁		
Г-499, Западно-Сибирская низменность, Уренгойская площадь, скв. 58, гл. 2759 м	Сг ₁		
Г-504, Западно-Сибирская низменность, Уренгойская площадь, скв. 58, гл. 2706 м	Сг ₁	Песчаник серый, среднезернистый, массивный, из толщи переслаивания песчаников, алевроитов, глин	
С-10, Казахстан, Сары-Таш	Сг	Песчаник темно-серый, среднезернистый, со слабо выраженной стратификацией, из толщи переслаивания песчаников, алевроитов, глин	А. Б. Вистелиус (ЛОМИ АН СССР)
171, Узбекистан, Ташми, скв. 1, гл. 1751.4—1754.7 м	Сг	Песчаник желтовато-красный, мелкозернистый слабосцементированный, со слабо выраженной стратификацией, из толщи переслаивания песчаников и алевроитов	
1, Таджикистан, Хирмаджоу	Сг	Песчаник светло-серый, плотный, со слабо выраженной стратификацией, из толщи переслаивания песчаников, алевроитов, глин, известняков	
215А, Узбекистан, Барса-Кельмес	Сг	Песчаник темно-серый, мелкозернистый, плотный, со слабо выраженной стратификацией, из толщи переслаивания песчаников, алевроитов, глин	Л. И. Березкина (Лабор. аэромет.)
12Б, Туркмения, Большой Балхан	Сг ₁	Прослой серых микрополосчатых мелкозернистых песчаников из толщи переслаивания с известняками	
ББФ-20, Туркмения, Большой Балхан	Ј	Песчаник серый, среднезернистый, со слабо выраженной стратификацией, из песчано-глинистой свиты	
1053Д, Северный Казахстан, р. Джаксы-Кайракты	Д ₃	Песчаник красный, средне- и мелкозернистый, микрополосчатый, из конгломерато-песчаниковой свиты	А. Б. Вистелиус (ЛОМИ АН СССР)
39, Казахстан, Кара-Мая	Р	Песчаник желтовато-серый, среднезернистый, слабосцементированный, микрополосчатый, из песчаной толщи	
VIII, Дагестан, Кумтор-Кала	Н ₁	Песчаник серовато-желтый, со слабо выраженной стратификацией, из песчаной пачки	
124, Дагестан, Карабудахкент	Н ₁	Песчаник желтый, слабосцементированный, со слабо выраженной стратификацией, из песчано-глинистой толщи	

Таблица 1 (продолжение)

Номер образца, район его взятия	Возраст породы	Краткая характеристика породы	Автор коллекции
1346, Восточное Забайкалье	J ₁	Песчаник желтовато-серый, среднезернистый, из песчано-глинистой толщи	Т. В. Стасюкевич (ВСЕГЕИ)
512, Западный Казахстан	Сг ₁	Песчаник зеленовато-серый, среднезернистый, из толщи переслаивания песчаников и глин	

3. Количество цемента невелико и распределено в породе довольно равномерно, так чтобы перекристаллизация цемента не могла бы вызвать взаимного смещения зерен.

Среди указанных пород, общая характеристика которых дана в табл. 1, а минеральный состав — в табл. 2, материал был подобран следующим образом. Образцы 12Б, 1053Д, 39 обладали явной тонкой стратификацией. Слои, образующие породу, имели мощность от 0.3 до 5.0 мм, границы между слоиками были отчетливо видны за счет разницы в содержании темноцветных компонентов (главным образом биотита). В шлифе стратификация видна так же отчетливо, как и в образце. В обр. 171, VIII, Хирманджоу и других стратификация выражена значительно слабее. В шлифе она намечалась в виде лимонитизированных кварцевых зерен, в шлифах была почти не заметна. Образцы песчаников из районов Западно-Сибирской низменности (Г-428, Г-395, Г-499, Г-504) представлены массивными породами, лишенными стратификации. Шлифы в породах последнего типа вырезались параллельно и перпендикулярно ограничениям всего песчаного слоя. Наконец, обр. 1346 и 512 представляли собой песчаные породы, подвергшиеся эпигенетическим изменениям с образованием вторичного кварца и полевых шпатов.

Таблица 2

Минеральный состав исследованных песчаников, %

Номер шлифа	Кварц	Кальцевый полевой шпат	Плагиоклаз	Цемент	Аксессуары минералы	Обломки пород
Г-428	26.4	19.2	23.8	6.6	10.8	13.2
Г-395	31.6	17.9	25.9	5.8	8.6	10.2
Г-499	27.8	19.1	38.2	3.9	3.0	8.0
Г-504	24.2	28.8	30.6	4.3	5.4	6.7
С-10	29.4	17.2	29.4	5.7	5.4	12.9
171	29.8	18.4	32.1	8.1	2.2	9.4
1	38.0	17.0	35.0	5.0	2.0	3.0
215А	28.7	16.5	36.7	6.2	3.6	8.3
12Б	32.2	16.7	25.6	4.0	11.1	10.4
1053Д	28.6	19.3	24.8	4.4	7.6	15.3
ББФ-20	29.6	19.7	25.6	6.8	6.2	12.1
39	29.3	18.9	29.8	7.3	2.7	12.0
VIII	43.8	25.3	21.1	4.7	2.5	2.6
124	32.5	10.6	28.3	9.5	8.5	10.6
1346	30.1	24.7	30.0	4.8	6.4	4.0
512	29.4	9.8	29.9	13.9	9.0	8.0

Петрографическая характеристика пород следующая. Структура песчаников псаммитовая. Породы мелко- и среднезернистые. Очертания зерен четкие, размер 0.1—2.5 и 0.1—0.01 мм, форма их угловатая и угловато-окатанная. Цемент соприкосновения — поровый и пленочный. Очень редки участки базального цемента (шл. 512). Породы сложены кварцем,

полевым шпатом (плаггиоклазом и калиевым полевым шпатом), обломками пород, акцессорными минералами (см. табл. 2). Кварц обычен, часть зерен с волнистым угасанием, довольно часты черные точечные включения рудного минерала. Микроклин представлен микроклин-пертитом. Зерна его как свежие, так и пелитизированные. В свежих разностях микроклиновая решетка часто выражена хорошо. В единичных зернах наблюдается микрографическое отрастание с кварцем. Плаггиоклаз, как правило, кислый, альбит-олигоклазового ряда. Состояние зерен очень различно. Зерна свежие, таблитчатые или угловатоокатанные, с хорошо выраженными полисинтетическими двойниками встречаются редко. Большинство же плаггиоклазовых зерен сильно серицитизировано, зерна мутные, двойниковая структура не наблюдается. Местами в разнотельной массе породы бросается в глаза наличие более крупных зерен плаггиоклаза, обрамленных значительно меньшими по размерам зернами кварц-полевошпатовой массы. Среди акцессорных минералов наблюдаются зерна рудного минерала, пластины и чешуйки биотита и мусковита, хлорит, турмалин, циркон, апатит, реже эпидот. Обломки пород представлены кварцитами, глинистыми и слюдястыми сланцами, реже известняками.

Степень свежести породы в шлифах различна. Так, следует отметить более свежие породы из района Западно-Сибирской низменности (шл. 504, 395), а также из районов Хирманджоу в Таджикистане и Кумтор-Кала в Дагестане. Следов вторичных изменений в основной массе шлифов не замечено. Исключение представляют лишь шлифы 1346 (Восточное Забайкалье) и 512 (Западный Казахстан). Здесь часть зерен кварца имеет регенерационные каймы, наблюдается новообразование зерен кварца более мелких размеров, чем основная масса. Участками зерна имеют причудливые очертания явно вторичного характера. Замечается разрушение зерен полевого шпата с образованием чешуек слюды и кварца, отрастание мутных сдвойникованных зерен плаггиоклаза свежими каймами, лишенными двойников.

АНАЛИЗ НАБЛЮДЕНИЙ

Описание последовательностей зерен проводилось по методике, описанной ранее (Арабаджева-Цветкова и др., 1972). Расчеты выполнялись по программе, составленной Талмуд (Вистелиус и др., 1972). Результаты расчетов приведены в табл. 3—5. Изучение данных, помещенных в табл. 4, в целом показывает, что, за исключением обр. VIII, в сечении, параллельном слоистости, во всех случаях исследованные последовательности однородны. Все эти последовательности также обратимы.

Что касается марковских свойств, то всюду наблюдалась одна основная тенденция. В тех случаях, когда в сечениях, параллельных и перпендикулярных слоистости, наблюдается разный порядок марковского свойства, более низкий порядок свойствен последовательностям, наблюдаемым в плоскости слоистости. Соответственно порядок марковского свойства в сечении, перпендикулярном слоистости, всегда был выше. Это отчетливо видно на обр. Г-428, 1, 12Б, 1053Д и 39.

Наблюдение хорошо согласуется с нашим представлением о том, что гравитационное поле приводит к сортировке осаждающихся частиц по удельному весу даже в условиях осаждения при турбулентном режиме и при очень малой разнице в удельном весе осаждающихся частиц.

Рассматривая полученные результаты с точки зрения связи между массивностью породы и марковскими свойствами исследованных в ней последовательностей зерен, обнаруживаем следующее.

Массивные песчаники (обр. Г-428, Г-395, Г-499, Г-504) обладают последовательностями зерен одного и того же типа как в плоскости слоистости, так и перпендикулярно ей. При этом в двух случаях из четырех как по слоистости, так и перпендикулярно ей наблюдались бернуллиевские последовательности. В одном образце наблюдались простые марков-

Матрицы переходных вероятностей в полимиктовых песчаниках

Таблица 3

	Or	Q	Ab	Or	Q	Ab	Or	Q	Ab	Or	Q	Ab
	Г-428, Заполярная площадь			Г-395, Заполярная площадь			Г-499, Уренгойская площадь			Г-504, Уренгойская площадь		
P_i^T	0.139	0.470	0.391	0.173	0.356	0.471	0.159	0.489	0.352	0.210	0.485	0.305
Or	0.133	0.467	0.400	0.181	0.421	0.398	0.167	0.443	0.390	0.194	0.455	0.351
Q	0.100	0.540	0.360	0.147	0.340	0.513	0.100	0.550	0.350	0.117	0.537	0.346
Ab	0.053	0.508	0.439	0.148	0.440	0.412	0.104	0.552	0.344	0.120	0.562	0.318
	0.155	0.461	0.384	0.162	0.331	0.507	0.178	0.466	0.356	0.212	0.481	0.307
	0.148	0.443	0.409	0.203	0.414	0.383	0.163	0.437	0.400	0.202	0.421	0.377
	0.135	0.455	0.410	0.176	0.380	0.444	0.158	0.503	0.339	0.256	0.471	0.273
	0.143	0.476	0.381	0.160	0.417	0.423	0.175	0.432	0.393	0.221	0.450	0.329
	171, Ташми			1, Хирманджоу			215А, Барса-Кельмес			124, Карабудахкент		
P_i^T	0.068	0.583	0.349	0.138	0.470	0.392	0.086	0.512	0.402	0.068	0.546	0.386
Or	0.072	0.546	0.382	0.056	0.660	0.284	0.192	0.366	0.442	0.023	0.863	0.114
Q	0.042	0.704	0.254	0.048	0.455	0.497	0.022	0.633	0.345	0.015	0.588	0.397
Ab	0.000	0.658	0.342	0.017	0.810	0.173	0.119	0.363	0.518	0.000	1.000	0.000
	0.082	0.546	0.372	0.150	0.424	0.426	0.097	0.470	0.433	0.078	0.493	0.429
	0.088	0.474	0.438	0.072	0.624	0.304	0.201	0.307	0.492	0.026	0.843	0.131
	0.049	0.621	0.330	0.158	0.524	0.318	0.081	0.518	0.401	0.057	0.613	0.330
	0.042	0.646	0.312	0.021	0.720	0.259	0.226	0.414	0.360	0.00	0.991	0.009
	С-10, Сары-Таш			ББФ-20, Большой Балхан			VIII, Кумтор-Кала			39, Кара-Мая		
P_i^T	0.030	0.527	0.443	0.065	0.532	0.403	0.078	0.518	0.404	0.029	0.482	0.489
Or	0.060	0.532	0.408	0.059	0.489	0.452	0.039	0.600	0.361	0.058	0.455	0.487
Q	0.00	0.871	0.129	0.030	0.697	0.273	0.071	0.788	0.141	0.00	0.733	0.267
Ab	0.032	0.645	0.323	0.073	0.673	0.254	0.071	0.905	0.024	0.00	0.525	0.475
	0.037	0.484	0.479	0.076	0.498	0.426	0.114	0.474	0.412	0.030	0.455	0.515
	0.069	0.465	0.466	0.081	0.428	0.491	0.060	0.574	0.366	0.074	0.407	0.519
	0.024	0.554	0.422	0.057	0.549	0.394	0.016	0.532	0.452	0.026	0.485	0.489
	0.052	0.607	0.341	0.033	0.537	0.430	0.00	0.606	0.394	0.046	0.503	0.451
	12Б, Большой Балхан			1053Д, р. Джаксы-Кайракты								
P_i^T	0.057	0.365	0.578	0.195	0.275	0.530						
Or	0.146	0.289	0.565	0.050	0.378	0.572						
Q	0.00	0.397	0.603	0.079	0.312	0.609						
Ab	0.051	0.287	0.662	0.00	0.392	0.608						
	0.062	0.330	0.608	0.221	0.218	0.561						
	0.155	0.213	0.632	0.052	0.322	0.626						
	0.056	0.375	0.569	0.227	0.304	0.469						
	0.170	0.332	0.498	0.046	0.408	0.546						

Примечание. Верхние цифры в строках относятся к шлифам, параллельным напластованию, нижние — к шлифам, перпендикулярным напластованию; Т — знак транспонирования у вектора безусловных вероятностей P_i .

Результаты проверки марковских гипотез

Номер образца	Длина последовательности		Принятый порядок марковости	Значения Λ , полученные при проверке марковских гипотез			Значения $\chi^2_{набл.}$ полученные при проверке однородности для принятого порядка марковости		Значения $\chi^2_{набл.}$ полученные при проверке обратимости, $\chi^2_{0.05}=11.07$
	число зерен	число кусков		$H_0 : H_1,$ $\chi^2_{0.05} = 9.49$	$H_1 : H_2,$ $\chi^2_{0.05} = 21.03$	$H_2 : H_3,$ $\chi^2_{0.05} = 51.0$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{набл.}$	
Г-428, напл.	1019	16	0	4.89	24.5	31.3	113.14	73.60	0.13
Г-428, ⊥ напл.	1007	11	1	11.36	17.65	—	79.08	48.29	0.04
Г-395, напл.	886	20	0	3.86	7.95	45.25	53.38	33.93	—
Г-395, ⊥ напл.	1030	24	0	4.28	14.73	52.3	62.83	37.37	—
Г-499, напл.	1031	26	0	7.0	18.1	47.1	67.51	46.50	—
Г-499, ⊥ напл.	950	25	0	8.6	14.5	37.1	65.17	39.90	—
Г-504, напл.	1042	21	1	16.98	11.98	—	146.57	114.49	0.77
Г-504, ⊥ напл.	1016	24	1	15.27	10.62	—	166.42	109.69	3.82
С-10, напл.	1047	20	1	23.14	12.37	—	139.92	73.80	4.41
С-10, ⊥ напл.	1050	17	1	23.13	12.24	—	119.87	87.75	0.15
171, напл.	1073	23	1	12.00	17.25	—	159.82	101.01	0.91
171, ⊥ напл.	1083	25	1	42.55	11.95	—	173.00	110.62	2.02
1, напл.	1060	10	1	29.07	13.70	—	72.15	79.31	0.90
1, ⊥ напл.	1040	9	2	23.08	34.72	36.94	173.00	99.07	1.08
215А, напл.	1033	28	1	26.61	9.19	—	192.17	138.82	0.14
215А, ⊥ напл.	1089	42	1	12.77	16.81	—	283.58	206.31	0.80
12В, напл.	1051	36	0	8.88	7.9	18.9	90.53	51.66	0.12
12В, ⊥ напл.	1092	20	1	35.93	10.13	38.8	139.92	129.37	0.16
1053Д, напл.	1058	21	1	34.40	11.61	—	146.57	123.39	0.17
1053Д, ⊥ напл.	1057	38	2	12.36	25.50	24.28	753.8	388.81	0.29
ББФ-20, напл.	1040	31	1	11.47	9.23	—	212.30	187.17	0.98
ББФ-20, ⊥ напл.	963	27	1	25.72	14.72	—	186.14	132.80	0.01
39, напл.	1044	16	1	10.22	7.25	—	43.77	26.55	2.76
39, ⊥ напл.	1039	19	2	17.48	23.60	21.09	367.0	177.73	0.79
VIII, напл.	1106	20	1	74.02	9.58	—	139.92	194.97	1.39
VIII, ⊥ напл.	1088	14	1	67.28	4.60	—	99.62	64.69	1.00
124, напл.	1024	20	1	17.84	8.97	—	139.92	104.26	0.64
124, ⊥ напл.	1019	9	1	36.10	9.29	—	65.17	16.30	0.00
1346, ⊥ напл.	942	12	2	66.73	35.10	35.46	231.8	162.87	1.83
512, ⊥ напл.	705	19	2	15.91	25.07	47.89	367.00	314.59	8.50

ские цепи в обоих плоскостях. Наконец, у одного образца (Г-428) наблюдалось различие в марковских свойствах в плоскости слоистости и перпендикулярно ей. Однако здесь значение теста, бракующее бернуллиевскую гипотезу, было таково, что вопрос о приемке марковской альтернативы решается не вполне уверенно. Таким образом, для массивных песчаников, видимо, наиболее обычны бернуллиевские последовательности зерен. Это естественно ожидать, если в процессе литификации имели место только небольшие смещения зерен, направленные на переход их в положение плотнейшей упаковки.

Следующая группа, насчитывающая 7 образцов, характеризуется слабо выраженной стратификацией (обр. С-10, 171, 1, 215А, ББФ-20, VIII, 124). У этих образцов как в плоскости слоистости, так и перпендикулярно ей широко распространены последовательности зерен типа простых марковских цепей. Исключение представляет обр. 1, где наблюдается несомненное отличие в типах последовательностей. По-видимому, этот случай отвечает нашей модели при наличии незначительной горизонтальной транспортировки при осаждении частиц, которых связывают определенным образом частицы осаждающегося минерала.

Порядок марковости в шлифах песчаников
для переходов по отдельным минералам

Номер образца	Принятый порядок марковости напластованию			Номер образца	Принятый порядок марковости ⊥ напластованию		
	Or	Q	Ab		Or	Q	Ab
Г-428	0	0	0	Г-428	1	0	0
Г-395	0	0	0	Г-395	0	0	0
Г-499	0	0	0	Г-499	0	0	0
Г-504	1	0	0	Г-504	1	0	0
С-10	1	1	0	С-10	0	0	1
171	0	1	0	171	1	1	1
1	0	0	1	1	2	2	1
215А	1	0	0	215А	0	0	1
12Б	0	0	0	12Б	1	1	1
1053Д	1	0	1	1053Д	0	2	2
ББФ-20	1	0	0	ББФ-20	1	1	1
Шл. 39	1	0	0	Шл. 39	0	1	1
VIII	1	1	1	VIII	1	1	1
124	0	1	1	124	0	1	1
				512	1	1	2
				1346	2	1	2

В последнюю группу входят образцы с ясно выраженной стратификацией (обр. 39, 125, 1053Д). Во всех случаях здесь наблюдается различие в марковских порядках последовательностей зерен, изученных в плоскости слоистости и перпендикулярно ей, что наиболее полно соответствует изложенной нами модели.

Обратимся теперь к частным марковским переходам — посмотрим, каковы переходы в матрицах $P_{Q;i}$, $P_{Or;i}$ и $P_{Ab;i}$, где $i \in \{Or, Q, Ab\}$. Соответствующие данные сведены в табл. 5. Здесь бросается в глаза, что марковское свойство у последовательности зерен часто появляется за счет перехода через зерна микроклина. Это наблюдалось в обр. Г-504, 215Д, 1053Д, ББФ-20 и 39 в сечениях в плоскости слоистости и в обр. Г-428 и Г-504 в сечениях, перпендикулярных слоистости. Таким образом, зерна микроклина по не ясной для нас причине ведут себя, как кажется, отлично от других обломочных минералов. В целом, нужно подчеркнуть, что, как правило, зерна каждого минерала часто ведут себя в последовательности по минералам индивидуально. Чем это вызывается, сказать трудно, так как такие тонкие детали не предусмотрены моделью, для формулировки которой мало конкретных сведений.

Кроме неизмененных песчаников, нами были исследованы два образца (1346 и 512), в которых были видны следы автигенного минералообразования. При расчете последовательностей мы фиксировали каждый индивид минерала. Таким образом, если первичное зерно несло автигенную кайму того же минерала, то вместо одного зерна в последовательности оказывались фиксированными три зерна. Очевидно, что для этого случая необходима разработка специальных моделей. С чисто эвристическими целями мы произвели анализ последовательностей зерен в указанных образцах, оба они дали второй порядок марковости. Таким образом, изучение свойств последовательностей зерен в диагенетизированных песчаниках, видимо, может способствовать выяснению механизма нарастания автигенных индивидов.

ВЫВОДЫ

Изучение массивных и стратифицированных песчаников в сечениях, параллельных слоистости и перпендикулярных им, показало, что в различных типах песчаников эта последовательность заметно отличается.

При этом последовательности зерен в массивных песчаниках имеют тенденцию быть близкими к бернуллиевским и одинаковыми как в плоскости слоистости, так и параллельно ей. В стратифицированных песчаниках последовательности зерен близки к цепям Маркова, при этом порядок цепи, видимо, выше в сечениях, перпендикулярных слоистости. Вероятно, это отражает влияние гравитационного поля и динамики среды на осаждение минералов. При осаждении песчаного материала обломочные частицы либо фиксируются после осаждения, либо незначительно смещаются при уплотнении осадка. Затронутые вопросы требуют специальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

- Арабаджева-Цветкова И. Е., Иванов Д. Н., Подольский Ю. В. Отбор проб и их петрографическое исследование при использовании концепций идеального гранита. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 1. Л., «Наука», 1972, с. 48—51.
- Вистелиус А. Б., Лельчук Т. С., Талмуд Г. А., Фаас А. В. Статистическая идентификация идеальных гранитов и продуктов их преобразования. — В кн.: Идеальные граниты, вып. 2. Л., «Наука», 1972, с. 3—47.
- Грязнова Т. Е. Ориентированные структуры песчаников продуктивной толщи Апшеронского полуострова. — В кн.: Геол. сб. ВНИГРИ, вып. 2. Л., Гостоптехиздат, 1953, с. 224—240.
- Darple E. C., Rominger J. F. Orientation analysis of fine-grained clastic sediments: a report of progress. — J. Geol., 1945, v. 53, № 4, p. 246—261.

ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ * ЯВЛЕНИЯ В ЧЕРЕДОВАНИИ СЛОЕВ МИОЦЕНОВОЙ ФОРМАЦИИ КУНИМИ (ФУКУЙ, ЦЕНТРАЛЬНАЯ ЯПОНИЯ) — ПРИЛОЖЕНИЕ АНАЛИЗА МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

С. Мизутани

*Университет,
отделение наук о земле, Нагойя, Япония*

С. Миура

Университет, отделение геологических наук, Фукуй, Япония

С тех пор как А. Б. Вистелиус впервые в геологии применил модель цепи Маркова, марковские свойства стали использовать для анализа осадочных формаций. Если рассматривать отдельный слой как дискретное состояние, то множество слоев можно анализировать с точки зрения марковской цепи; именно такая математическая модель применена к анализу цикличности осадочных формаций (Allegre, 1964; Carr et al., 1966; Griffiths, 1966; Krumbein, 1967). Матрица переходных вероятностей означает литологические переходы, а статистика теста независимости — степень цикличности или марковские свойства на некотором протяжении (Pottér, Blakely, 1968; Gingerich, 1969).

Геологам известно существование ритмов или циклов в стратиграфическом разрезе, иногда называемых циклотемами. Можно предположить, что такая формация выражена моделью марковской цепи; действительно, во многих работах модель успешно применена для анализа угленосных формаций различных частей мира (Read, 1969; Doveton, 1971; Johnson,

* В оригинале «Random and non-random», но по смыслу решаемой задачи здесь переведено как «зависимые и независимые» (прим. ред.).

Cook, 1973; Miall, 1973; Casshyap, 1975). Даффом и Уолтоном (Duff, Walton, 1962), Даффом, Холлом и Уолтоном (Duff, Hallam, Walton, 1967) обобщены разные типы цикличности осадочных формаций. В зависимости от факторов, контролирующих осадочный процесс, Бирбоуер различает два типа цикличности: авто- и аллоцикличность (Beerbower, 1964, 1969). Они, возможно, помогут при нашем обсуждении взаимоотношений между тектоникой и осадконакоплением. В предлагаемой статье метод марковского анализа наблюдений использован для изучения миоценовой формации Куними в горной местности Ниу (префектура Фукуй, Центральная Япония); особое внимание уделено цикличности изучаемого разреза.

Расходы на исследования частично оплачены фирмой Grant-in-Aid из средств, выделяемых Министерством образования Японии, за что авторы искренне признательны. Все данные обработаны в Вычислительном центре в Нагойя-университете с помощью FACOM 230-60.

СТРАТИГРАФИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

В раннемиоценовое время Японские острова изменили свои структурные особенности и были покрыты вновь образованным осадочным бассейном. Эпикластические и пирокластические материалы, накапливавшиеся в нем, характеризуются переслаиванием зеленых вулканогенных осадков и лав; эти бассейны имеют общее название — район Зеленых туфов. Формация Куними, стратиграфические данные которой здесь изучаются, встречается в горной стране Ниу (36° с. ш., 136° в. д.) и в области Хокурику района Зеленых туфов (Miura, 1971). Совместно с подстилающими и перекрывающими ее вулканическими формациями она образует миоценовую серию, которая на рассматриваемой площади достигает общей мощности 3000 м. Хронологические данные свидетельствуют, что формация Куними относится к среднему миоцену (Miura, Azuma, 1974).

Формация Куними сложена главным образом кластическими породами — конгломератами, песчаниками, аргиллитами, перемежающимися с прослойками риодацитовых туфов, иногда с включениями линзочек лигнита внутри аргиллитов. Конгломерат содержит валуны и обломки размером до крупнозернистого гравия, среди которых преобладают фашии галечных и гравийных конгломератов. В подошве слоев конгломерата, хотя и не часто, имеются раздувы (карманы), это наводит на мысль, что кластический материал транспортировался по множеству небольших каналов. Песчаники сложены грубозернистым материалом, обычно косослоистые и в большинстве случаев лишены органических остатков.

Алевриты и аргиллиты имеют массивную текстуру, иногда видна слоистость, параллельная их напластованию.

Пирокластические породы представлены грубозернистым туфом и агломератовым туфом; материал плохо сортирован, угловатый или полуугловатый, сложен преимущественно обломками вулканических пород, сцементированных тонким туфогенным осадком. В агломератовых фациях встречаются очень редкие обломки лигнита. Тщательная проверка этих обломков показала, что лигнитовый материал полностью или частично обуглен.

Слой конгломерата обычно более мощные, чем слой, сложенные тонкокластическим материалом. По-видимому, мощность слоев изменяется в соответствии с вариацией размера зерен этих слоев. Средняя мощность конгломерата, туфа или агломератового туфа, песчаника, аргиллита и лигнита соответственно равна 126, 114, 45, 21 и 6 см. Суммарная мощность формации Куними оценивается примерно в 700 м. Толща распространена вдоль береговой зоны горной страны Ниу, где можно проследить почти непрерывный стратиграфический разрез мощностью 394 м.

Исходные данные для марковского анализа были взяты из осадочного разреза, последовательно описанного снизу вверх в терминах литологических фаций, как это показано в таблице. Установлено, что имеются в основном два типа переходов из одного состояния в другое — постепенный и прерывистый. В последнем случае слой резко отделяется от предшествующего, а разграничивающая плоскость отчетливо видна в подошве слоя. Наличие такой плоскости означает перерыв в осадконакоплении и последующее возобновление процесса отложения. В силу того что резкая граница отчетливо повторяется в разрезе и зависит от условий отложения осадка, резкое изменение в литологическом составе (с четкой границей раздела) в качестве опыта трактуется (здесь) как одно из состояний или категорий в литологических переходах.

АНАЛИЗ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

Отдельные литологические образования, перечисленные в табл. 1, рассматриваются как дискретные логические состояния. Исходные матрицы, им соответствующие, и матрицы переходных вероятностей получены путем расчета по стандартным программам, составленным Харбо и Бонхамом-Картером. Литологические переходы, установленные для первичных стратиграфических данных, были выражены посредством матриц переходных вероятностей при фиксированной многошаговой истории (Carr et al., 1966; Krumbain, 1975). Статистика теста независимости была вычислена по формуле

$$-2 \log_e \lambda = 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m n_{ij} \log_e (p_{ij}/p_j),$$

где n_{ij} соответствует числу наблюдений в ячейке (i, j) исходной матрицы; p_{ij} — вероятности в ячейке (i, j) матрицы переходных вероятностей; p_j — крайевые (маргинальные) вероятности для j -го столбца в исходной матрице; m — общее число состояний. Тест χ^2 использован в силу того, что $-2 \log_e \lambda$ распределено асимптотически как χ^2 с $(m-1)^2$ степенями свободы.

Если матрица переходных вероятностей, взятая из какой-либо части стратиграфического разреза, идентична такой же матрице из другой части разреза или матрице всего разреза, то говорят, что марковский процесс стационарен. Для прослеживания изменения марковских свойств по разрезу были вычислены матрицы переходных вероятностей и статистики для цепей 1-го порядка постоянной длины из 126 шагов, сдвигаемых по разрезу, с перемещением снизу вверх. Вычисления выполнены следующим образом: первый участок охватывал шаги от t_1 (наиболее ранний по времени шаг) до t_{126} (126-й шаг по времени), . . . , i -тая цепь от t_i до t_{i+125} , . . . Если число шагов в анализируемом отрезке было меньше, то оценка $-2 \log_e \lambda$ варьировала нерегулярно. Если же число шагов было больше, то вариации сглаживались, и очень трудно было выявить изменения марковских свойств. В данной работе (по соглашению) число шагов во всех вычислениях равно 126. Когда m (общее число состояний) равно 5, средняя частота в каждой клетке исходной переходной матрицы составляет 5, общее число частот равняется 125.

Первичные данные затабулированы в столбце I таблицы, где $m=9$, а общее число наблюдений $N=943$. В геологии, чем больше состояний, тем больше возникает проблем. Однако с увеличением числа состояний число ячеек в исходной переходной матрице увеличивается, и, следовательно, частота переходов (f_{ij}) в каждой клетке уменьшается, если стратиграфическая часть фиксирована. Это приводит к тому, что переход из одного состояния в другое становится менее значимым в силу того,

что частота переходов в клетке (i, j) должна быть большей со статистической точки зрения. Кроме того, тонкое различие внутри одного литологического типа не всегда существенно для понимания литологического перехода. В соответствии со сказанным первичные данные по составу слоев были разбиты на шесть классов как минимальные и достаточные состояния путем объединения некоторых состояний в один класс, как это показано в столбце II таблицы.

Состояния в столбцах I и II уменьшены непреднамеренно, из наблюдений, но можно допустить, что не все они нужны для стратиграфического анализа. Ниже будет показано, что осадочные разрезы можно характеризовать, не принимая во внимание такие состояния, которые обозначены как «граница». Подобно тому как мы отличаем пирокластические фации от эпикластических с генетической точки зрения, последовательность эпикластического материала рассматривается исключительно как состояние «туф» для каждого шага стратиграфического разреза. Такой набор состояний дан в столбцах III и IV таблицы. Когда мы исключаем состояние, мы должны перескакивать к следующему шагу и перенумеровывать каждую отметку концептуальной марковской схемы таким образом, что первичная отметка t_i превращается в перенумерованную t'_j ; очевидно, $i > j$ и разность $(i-j)$ равна числу устраненных шагов.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Первоначально литологические фации были разбиты на девять классов, затем они были переразбиты в шесть классов, как это показано в столбцах I и II таблицы. Используя статистику $-2 \log_e \lambda$, исследуем марковские свойства изучаемого стратиграфического разреза отдельно при каждой литологической группировке. Вариации статистики в цепи постоянной длины из 126 шагов по

Стратиграфические данные о миоценовой формации Куниги; литологические состояния и их частоты

Состояние	I, литология	Частота	Состояние	II, литология	Частота	Состояние	III, литология	Частота	Состояние	IV, литология	Частота						
S_1	Конгломерат Грубозернистый песчаник	38	S_1	Конгломерат	38	S_1	Конгломерат	38	S_1	Конгломерат	38						
S_2		142										S_2	400	S_2	400	S_2	400
S_3	Среднезернистый песчаник	113	S_3	Песчаник	400	S_3	Песчаник	400	S_3	Песчаник	400						
S_4		145										S_4	400	S_4	400	S_4	400
S_5	Алеврит, аргиллит Карбонатный аргиллит	154	S_5	Аргиллиты	170	S_5	Аргиллиты	170	S_5	Аргиллиты	170						
S_6		46										S_6	78	S_6	78	S_6	78
S_7		78										S_7	21	S_7	21	S_7	21
S_8		21										S_8	236	S_8	236	S_8	21
S_9	Граница	236	S_9	Граница	943	S_9	Граница	943	S_9	Лигнит	21						
Общее число наблюдений N		943										Общее число состояний m	9	Общее число наблюдений N	707	Общее число состояний m	5
		9			6						629						
											4						

сравнению с временным шагом показаны на рис. 1. Например, верхняя линия здесь представляет вариации $-2 \log_e \lambda$ в стратиграфическом разрезе, трактованном как модель марковской цепи при разбивке разреза на шесть состояний. Здесь $-2 \log_e \lambda = 70.37, 71.95, 70.32, \dots, 49.96$ для цепей $t_1-t_{126}, t_2-t_{127}, t_3-t_{128}, \dots, t_{818}-t_{943}$ соответственно.

Оценка $-2 \log_e \lambda$ для случая, когда $m=9$, изображена на нижней линии рис. 1, она почти параллельна таковой для случая $m=6$ в том же

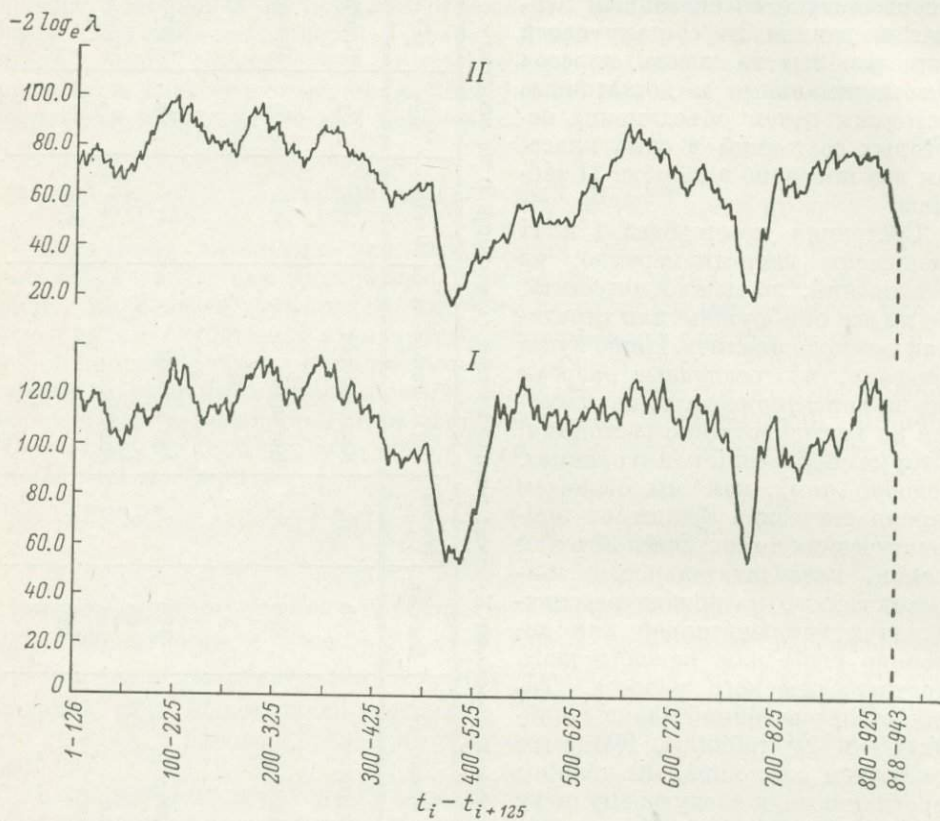


Рис. 1. Изменения статистики $-2 \log_e \lambda$ скользящей цепи, имеющей литологические состояния I и II, объединенные в таблице соответственно в столбцы I и II.

самом стратиграфическом разрезе. Это означает, что большие вариации тренда марковских свойств не зависят от общего числа состояний, если литологические фации классифицировать так, как показано в таблице. В силу этого тренд может быть обсужден в модели, имеющей шесть литологических состояний, показанных в столбце II.

Исходная матрица (f_{ij}) цепи с зависимостью 1-го порядка при перемещении снизу вверх, по направлению к кровле разреза, для всего изучаемого разреза будет следующей:

$$\begin{matrix}
 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\
 \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 26 & 1 & 0 & 0 & 11 \\ 21 & 182 & 78 & 9 & 3 & 106 \\ 1 & 69 & 15 & 11 & 7 & 67 \\ 0 & 4 & 15 & 13 & 4 & 42 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 10 \\ 16 & 114 & 56 & 43 & 7 & 0 \end{pmatrix} & = (f_{ij}).
 \end{matrix}$$

На основании этих стратиграфических данных был найден значительный эффект памяти путем вычисления матриц переходных вероятностей

(p_{ij}), матрицы для независимых испытаний (e_{ij}) и матрицы разностей (d_{ij}), как это было описано Гингеричем (Gingerich, 1969). Результат анализа показан на рис. 2. Для такого типа переходов очевидно, что большинство слоев отделено от верхнего и нижнего прерывистыми изменениями в накоплении осадка. Подобные переходные соотношения становятся более четко выраженными, если использовать матрицы, отвечающие переходам 2-го порядка. Часть матрицы переходных вероятностей такой цепи записывается следующим образом (переходы от более низкой ступени к средней показаны в столбце слева; состояния следующего шага представлены в виде строки сверху):

$$\begin{matrix}
 S_6-S_1 \\
 S_6-S_2 \\
 S_6-S_3 \\
 S_6-S_4 \\
 S_6-S_5 \\
 S_6-S_6
 \end{matrix}
 \begin{pmatrix}
 S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\
 0.0 & 0.625 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.375 \\
 0.061 & 0.298 & 0.202 & 0.018 & 0.018 & 0.404 \\
 0.018 & 0.214 & 0.125 & 0.089 & 0.0 & 0.554 \\
 0.0 & 0.070 & 0.023 & 0.163 & 0.047 & 0.698 \\
 0.0 & 0.143 & 0.286 & 0.0 & 0.0 & 0.571 \\
 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0
 \end{pmatrix}
 = P_{ijk}$$

Хотя состояние, обозначенное как «граница», было взято намеренно, кажется, что прерывистые изменения в осадконакоплении почти всегда вызывают образование некоторых типов слоев. Исключая переход от конгломерата к песчанику, большинство слоев имеет четкие границы как верхней, так и нижней плоскостей напластования, и литологические переходы имеют место через шаг прерывистого изменения в накоплении осадка. Из этого соотношения в осадконакоплении следует, что состояние, обозначенное как «граница», может быть игнорировано и рассматриваться как условие, включенное в каждое состояние. Таким образом, мы можем обратиться со стратиграфическим разрезом формации Куними как с литологической совокупностью, перечисленной в таблице в столбце III. Исходная матрица переходов для цепи, отвечающей зависимости 1-го порядка, в этом случае для тех же стратиграфических данных при общем числе состояний $m=5$ и общем числе наблюдений $N=707$ (из общего числа наблюдений 943—236 получим число частот состояний «граница») будет:

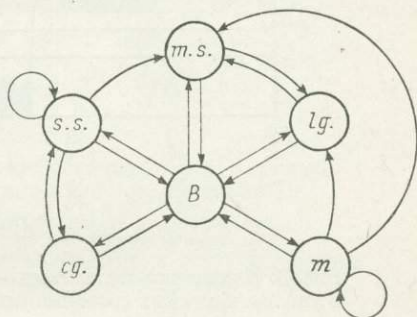


Рис. 2. Схема переходов в осадконакоплении, полученная по стратиграфическим данным, литологические состояния которых даны в таблице в столбце II.

cg. — конгломерат; s. s. — песчаник; m. s. — аргиллит; lg. — лигнит; m — туф; B — граница слоя.

$$\begin{matrix}
 S_1 \\
 S_2 \\
 S_3 \\
 S_4 \\
 S_5
 \end{matrix}
 \begin{pmatrix}
 S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\
 3 & 33 & 1 & 1 & 0 \\
 31 & 256 & 93 & 14 & 5 \\
 4 & 92 & 45 & 19 & 10 \\
 0 & 12 & 23 & 37 & 6 \\
 0 & 7 & 8 & 6 & 0
 \end{pmatrix}
 = (f_{ij})$$

Из рис. 3 видны вариации статистики $-2 \log_e \lambda$, когда взят скользящий отрезок с постоянной длиной из 126 шагов и охвачен весь разрез от низов для отмеченной перегруппировки состояний до кровли разреза. Независимость проверена путем вычислений χ^2 статистики со степенями свободы $(m-1)^2$ при уровне значимости $\alpha=0.005$. Общее число состояний в данной цепи не всегда равно пяти, иногда оно равно четырем. Это имеет прямое

отношение к числу степеней свободы (d. f.) для теста, $\chi^2=34.27$ ($\alpha=0.005$, d. f.=16) и $\chi^2=23.59$ ($\alpha=0.005$, d. f.=9; рис. 3).

Стратиграфические данные обычно включают такие, которые происходят из коротких по времени ритмов или циклических изменений, от длительных колебательных элементов или систематических изменений и от случайных или шумовых компонент. Если литологические последовательности показывают, что они произведены коротким ритмом и однородной случайной компонентой, то литологические переходы, наблюдаемые в цепи, подобны переходам в другой части разреза. В этом случае говорят, что модель марковской цепи стационарна. С другой стороны, если про-

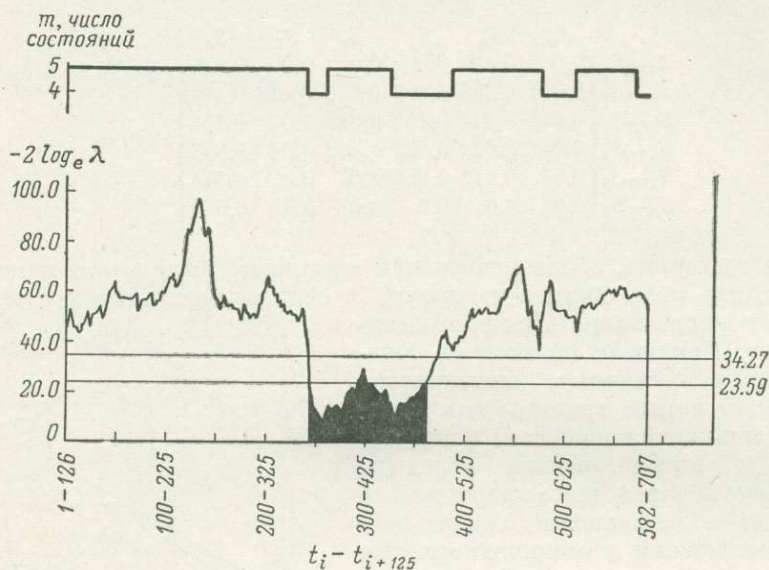


Рис. 3. Изменения статистики $-2 \log_e \lambda$ скользящей цепи в соответствии с литологическими состояниями, приведенными в таблице в столбце III.

Показаны общее число состояний в цепи и оценки χ^2 при 0.005 уровне значимости. Зачернен участок, где тест-статистика меньше, чем χ^2 с $(m-1)^2$ степенями свободы.

цесс осадконакопления включает систематические изменения или длительные колебания, эта стационарность ослабляется и литологические переходы показывают различные модели в зависимости от стратиграфического положения. Как показано на рис. 3, оценка $-2 \log_e \lambda$ изменяется во времени, и литологические переходы теряют свои марковские свойства в средней части разреза. Очевидно, что разрез не стационарен.

Аналогичная обработка анализов была предпринята при исключении состояния, обозначенного «туф», из тех же стратиграфических наблюдений. Пирокластический материал, образовавшийся в процессе вулканической деятельности и принесенный на площадь бассейна, где происходило осадконакопление, был отложен в виде тонких прослоек, включенных в эпикластический материал. Если пренебречь этими пирокластическими образованиями и исключить их, то можно найти характеристики осадка, связанные исключительно с эпикластическими фациями. В этом случае состояния литологических фаций будут такими, как показано в таблице (столбец IV): конгломерат, песчаник, аргиллит и лигнит. Соответствующая матрица переходов построена следующим образом:

$$\begin{matrix}
 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\
 \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 34 & 1 & 0 \\ 31 & 263 & 100 & 5 \\ 4 & 96 & 56 & 14 \\ 0 & 7 & 13 & 1 \end{pmatrix} & = & (f_{ij}),
 \end{matrix}$$

где $m=4$, $N=707-78=629$ (78 — частота «туфа»). Вариация значений $-2 \log_e \lambda$ для скользящего отрезка длиной из 126 шагов дана на рис. 4, независимость проверена путем вычисления критерия χ^2 с $(m-1)^2$ степенями свободы при 0.005 уровне значимости. На рис. 4 можно заметить, что средние части нижней и верхней половин разреза являются марковскими, а оставшиеся промежутки отвечают скорее бернуллиевским характеристикам.

Сравнение рис. 3 и 4 показывает, что когда мы пренебрегли пирокластическими фациями и приняли в расчет только эпикластические фации с лигнитом, то отдельные части формации Кунами не сохранили марковость, другие же все еще отвечали ей. Иными словами, установлены три

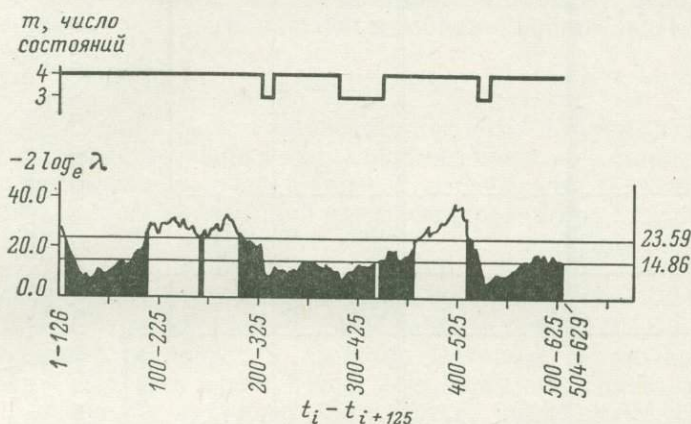


Рис. 4. Изменения статистики $-2 \log_e \lambda$ скользящей цепи, имеющей литологические состояния, приведенные в таблице в столбце IV.

Показаны общее число состояний в цепи и оценки χ^2 для 0.005 уровня значимости. Зачернены участки, где значение статистики меньше, чем χ^2 с $(m-1)^2$ степенями свободы.

следующих типа последовательностей внутри формации Кунами: А — последовательности, в которых состояния являются независимыми; В — последовательности, имеющие марковские свойства, если взяты в расчет пирокластические и эпикластические отложения и лигниты; С — последовательности, сохраняющие марковские свойства, даже если пирокластические фации исключены из разреза. Формация Кунами является нестационарной и состоит из трех типов разреза. Характер вариаций показан на рис. 5; это позволяет обнаружить симметричную мегациклическую последовательность

$$B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B.$$

Такого типа разрезы обусловлены средой, контролирующей условия осадконакопления. Когда все литологические фаии, включая пирокластические и эпикластические, приняты во внимание, то этот тип осадконакопления представляет условия среды, когда же включены не только экзогенные, но и эндогенные факторы, то это позволяет называть такую цикличность аллоциклической, если цикличность выражена хорошо (Weerboer, 1964, 1969). С другой стороны, марковские свойства, установленные только в эпикластических разрезах, представляют эффект памяти процесса осадконакопления относительно транспортировки и отложения только эпикластического материала и, вероятно, никак не связаны или слабо связаны с вулканической деятельностью. О такой циклической природе можно, вслед за Бирбоуером, говорить как об автоциклической. Здесь внимание должно быть обращено на существование слоев мощных агломератовых туфов, развитых в основании последовательности случай-

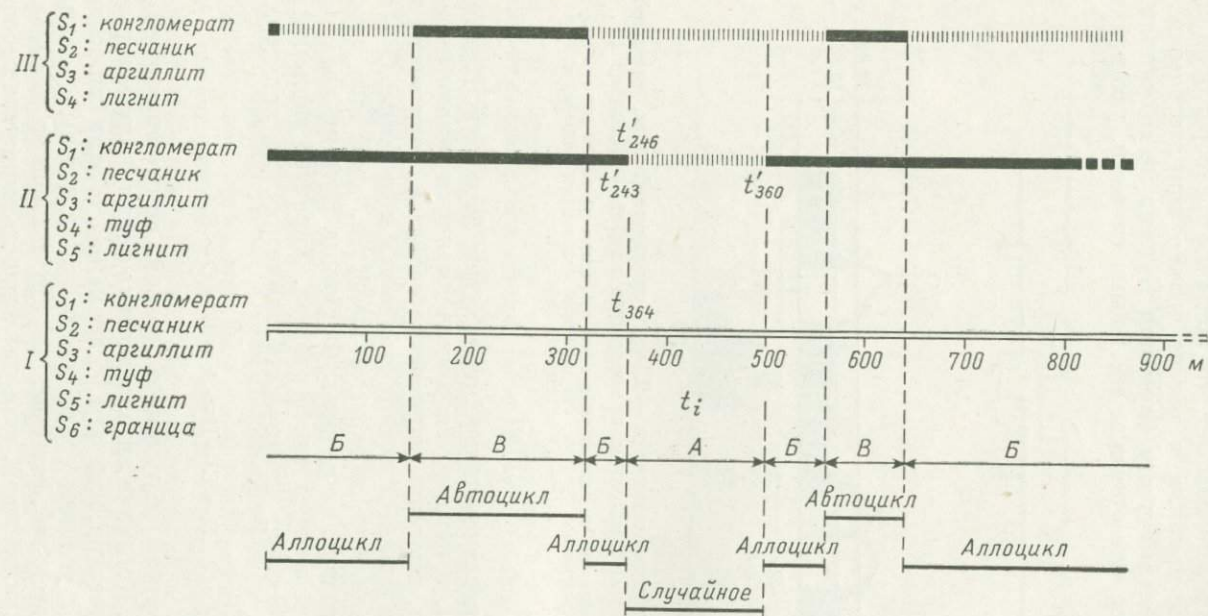


Рис. 5. Циклическая природа миоценовой формации Кузими, обобщенная по рис. 3 и 4.

I — число шагов по исходным стратиграфическим данным; II — результат, полученный по тем же стратиграфическим данным, исключено состояние «граница»; III — результат, полученный по тем же стратиграфическим данным, исключены состояния «граница» и «туф».

ного стратиграфического разреза, отмеченного выше. Слой туфа расположен на отметке t_{364} концептуальной марковской схемы в интервале t_1-t_{943} . После того как исключено состояние «граница» и вновь перенумерованы отдельные шаги, этот слой маркируется как t'_{246} в интервале $t'_1-t'_{707}$. Кроме того, между t'_{249} и t'_{246} в этой же последовательности имеются 5 слоев туфа. Оценка $-2 \log_e \lambda$ убывает в направлении снизу вверх в пределах короткого ряда $t'_{243}-t'_{360}$, как это показано на рис. 4. Важно, что последовательность имеет большую статистику $-2 \log_e \lambda$ тогда, когда она имеет автоциклическую природу, чем тогда, когда последовательность является аллоциклической. В заключение можно сказать, что локальные условия осадконакопления формации Куними, имеющие марковские свойства, были заметно нарушены и изменены в сторону бернуллиевости под влиянием активной региональной тектоники, сопровождающей вулканизм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Стратиграфический разрез миоценовой формации Куними, сложенный лигнитами, эпикластическим и пирокластическим материалом, проанализирован с применением цепей Маркова; исследованы вариации марковских свойств. Данные наблюдений классифицированы по литологическому составу на состояния, показанные в таблице. С помощью цепи Маркова 1-го порядка на отрезке с постоянной длиной в 126 шагов снизу вверх до кровли изучаемого разреза была вычислена статистика $-2 \log_e \lambda$. Тонкие различия внутри литологических фаций дали малый эффект относительно изменения марковских свойств. Матрицы переходных вероятностей, полученные для цепей 1-го и 2-го порядков, показали, что дискретные изменения в литологическом составе, выделяемые как граница слоев, могут рассматриваться как условия, входящие в каждое состояние при литологических переходах в модели марковской цепи.

Найдено, что анализируемый стратиграфический разрез нестационарен, он включает независимые (бернуллиевские) и зависимые (марковские) процессы. Сравнение результатов вычислений, полученных для первичных стратиграфических данных и для данных, когда исключены пирокластические фации, наводит на мысль, что существовали два типа марковских процессов: один — с более высоким значением статистики $-2 \log_e \lambda$, связанный, вероятно, с накоплением осадков, другой — с меньшим значением $-2 \log_e \lambda$, относимый как к вулканическому процессу, так и к накоплению осадков. Формация Куними, видимо, является симметричным мегациклическим разрезом, состоящим из автоциклической и аллоциклической последовательностей и независимых слоев. Циклическая природа разреза интерпретируется как нарушенная и измененная под воздействием региональных движений земной коры, сопровождаемых вулканизмом, до различных состояний, включая независимые процессы.

ЛИТЕРАТУРА

- Allegre C. Vers une logique mathématique des séries sédimentaires. — Bull. Soc. géol. France, ser. 7, 1964, v. 6, p. 214—218.
- Beerbower J. R. Cyclothems and cyclic depositional mechanisms in alluvial plain sedimentation. — Kansas Geol. Surv. Bull., 1964, № 169, p. 31—42.
- Beerbower J. R. Interpretation of cyclic Permo—Carboniferous deposition in alluvial plain sediments in west Virginia. — Geol. Soc. Amer. Bull., 1969, v. 80, p. 1843—1848.
- Carr D. D., Horowitz A., Harbar S. V., Ridge K. F., Rooney R., Straw W. T., Webb W. and Potter P. E. Stratigraphic sections, bedding sequences, and random processes. — Science, 1966, v. 154, p. 1162—1164.
- Casshap S. M. Cyclic characteristics of coal-bearing sediments in the Bochumer formation (Westphal A2) Ruhrgebiet, Germany. — Sediment., 1975, v. 22, p. 237—255.
- Doveton J. H. An application of Markov chain analysis to the Ayrshire coal measurement succession. — Scot. J. Geol., 1971, v. 7, p. 11—27.

- Duff P. M. D., Walton E. K. Statistical basis for cyclothems: a quantitative study of the sedimentary succession in the East Pennine Coalfield. — *Sediment.*, 1962, v. 1, p. 235—255.
- Duff P. M. D., Hallam A., Walton E. K. Cyclic sedimentation. Elsevier, Amsterdam, 1967, 280 p.
- Gingerich P. D. Markov analysis of cyclic alluvial sediments. — *J. Sediment. Petrol.*, 1969, v. 39, p. 330—332.
- Griffiths J. C. Future trends in geomathematics. *Pennsylv. State Univ., Mineral Industries*, 1966, v. 35, p. 1—8.
- Johnson K. R., Cook A. C. Cyclic characteristics of sediments in the Moon Island Beach subgroup. *New Castle Coal Measures, New South Wales. — Math. Geol.*, 1973, v. 5, p. 91—110.
- Krumbein W. C. Fortran IV computer programs for Markov chain experiments in geology. — *Computer Contr., Geol. Surv. Kansas*, 1967, № 13, 38 p.
- Krumbein W. S. Markov models in the earth sciences. — In: *Concepts in Geostatistics*. R. B. McCammon ed., New York, Springer Verlag, 1975, p. 90—105.
- Miall A. D. Markov chain analysis applied to an ancient alluvial plain succession. — *Sediment.*, 1973, v. 20, p. 347—364.
- Miura S. Subsurface geological survey. — In: *Fundamental Land Classification Survey «Fukui»* (in Japanese). Econ. Planning Agency, Japan, 1971, 20 p.
- Miura S., Azuma Y. On some problems relating to the early Miocene formations in the Hokuriku sedimentary basin, central Japan (in Japanese). — *Mem. Fac. Educat. Fukui Univ.*, 1974, p. 11, № 24, p. 15—25.
- Potter P. E., Blakely R. F. Random processes and lithologic transitions. — *J. Geol.*, 1968, v. 76, p. 154—170.
- Read W. A. Analysis and simulation of Namurian sediments in central Scotland using a Markov-process model. — *Math. Geol.*, 1973, v. 1, p. 199—219.
- Vistelius A. B. On the question of the mechanism of the formation of strata. — *DANSSSR*, 1949, v. 65, p. 191—194.

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАКОПЛЕНИЯ АКЦЕССОРНЫХ МИНЕРАЛОВ В ОСАДОЧНЫХ ОТЛОЖЕНИЯХ

Б. П. Харламов

*Лаборатория математической геологии Ленинградского отделения ордена Ленина
Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, Ленинград*

Рассмотрим процесс концентрации обломочного материала в виде акцессорного минерала A в терригенных отложениях — в слое конгломерата, мощном песчаном пласте и т. п. Пусть в некоторой точке в пределах области питания имеется источник интересующего нас вещества A , из которого оно поступает в бассейн осадконакопления и фиксируется в осадке вместе с остальным обломочным материалом. При этом предполагается, что накопление материала компенсирует прогибание бассейна и мощность отложенного осадка пропорциональна времени седиментации (времени накопления толщи, слоя, пласта). Нас будет интересовать содержание вещества A по разрезу и по площади бассейна. Типичная геологическая ситуация может быть заимствована из описания исследования спессартина в осадках апт-сеноманского бассейна Юго-Востока СССР (Вистелиус и др., 1976) или дистена в миоценовых отложениях Дагестана (Вистелиус, 1951).

Предлагается следующий случайный механизм образования меры вещества A . Источник вещества характеризуется случайной последовательностью

$$\{t_i, z_i\}_1^\infty,$$

где z_i — масса i -той частицы ($z_i \geq 0$), а t_i — момент отрыва частицы от источника.

Для определенности мы отсчитываем время от настоящего в прошлое, т. е. t_i равно «возрасту» частицы — разности между настоящим временем

и моментом отрыва частицы от источника. Большим номерам соответствует больший возраст частиц: $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \dots$. Каждая частица блуждает в окружающем пространстве в течение случайного отрезка времени τ_i ($\tau_i \geq 0$). Это блуждание представляет собой случайный процесс с фазовым пространством R^2 (точнее — блуждание вдоль земной поверхности), со случайными моментами начала и остановки. Предполагается, что мощность накопленного осадка пропорциональна времени его накопления. В момент остановки блуждания частица вещества A остается на уровне осадка, соответствующего данному моменту. Таким образом, каждая частица данного вещества, распределенного в исследуемом осадке, характеризуется пятеркой величин

$$(t_i, z_i, \tau_i, x_i, y_i),$$

где (x_i, y_i) — точка на плоскости, соответствующая i -той частице в момент ее остановки; если время измеряется мощностью накопленного осадка, то три координаты i -той частицы, погребенной в осадочной толще, равны $(x_i, y_i, t_i - \tau_i)$ (условие $t_i < \tau_i$ означает, что i -тая частица не содержится в осадочной толще, она еще продолжает блуждать).

Если $I_S(a) = \begin{cases} 1, & a \in S \\ 0, & a \notin S \end{cases}$ — характеристическая функция множества S , то случайная мера \mathfrak{M} накопленного вещества A в слое $R^2 \times [0, \infty)$ определяется равенством (Kallenberg, 1973)

$$\mathfrak{M}(S) = \sum_{i=1, t_i \leq \tau_i}^{\infty} z_i I_S(x_i, y_i, t_i - \tau_i),$$

где $S \subset R^2 \times [0, \infty)$ — измеримое множество. Наша задача — исследовать основные характеристики меры \mathfrak{M} , главным образом ее математическое ожидание, при определенных условиях, наложенных на случайную последовательность $(t_i, z_i, \tau_i, x_i, y_i)_{i=1}^{\infty}$.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ВТОРЫЕ МОМЕНТЫ МЕРЫ \mathfrak{M} . ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Первая характеристика случайной меры \mathfrak{M} — это мера тренда:

$$M(S) = E\mathfrak{M}(S),$$

при этом

$$M(S) = \sum_{i=1}^{\infty} E(z_i I_S(x_i, y_i, t_i - \tau_i)).$$

По свойству условного математического ожидания (Феллер, 1967)

$$\begin{aligned} E(z_i I_S(x_i, y_i, t_i - \tau_i)) &= E(z_i E(I_S(x_i, y_i, t_i - \tau_i) | t_i, z_i)) = \\ &= E(z_i, P((x_i, y_i, t_i - \tau_i) \in S | t_i, z_i)), \end{aligned}$$

отсюда

$$M(S) = E \sum_i z_i P((x_i, y_i, t_i - \tau_i) \in S | t_i, z_i).$$

Для любой измеримой функции f

$$\sum_{i=1}^{\infty} z_i f(t_i, z_i) = \int_{R_+^2} z f(t, z) \nu(dt, dz),$$

где $\nu(B)$ — число таких i , что $(t_i, z_i) \in B$; ν — случайная целочисленная мера R_+^2 ($R_+^2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$). Эта мера характеризует продуктивность источника вещества. Ее задание эквивалентно заданию случайной последовательности $\{t_i, z_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Другая мера, также характеризующая случайную последовательность, это мера μ :

$$\mu(dt, dz) = z \nu(dt, dz),$$

при этом

$$\sum_{i=1}^{\infty} z_i f(t_i, z_i) = \int_{R_+^2} f(t, z) \mu(dt, dz).$$

Пусть $m(B) = E\mu(B)$ — математическое ожидание массы вещества, испускаемого источником в области $B \subset R_+^2$.

Тогда

$$M(S) = \int_{R_+^2} p(S | t, z) m(dt, dz), \quad (1)$$

где $p(S | t, z) = P((x_i, y_i, t_i - \tau_i) \in S | t_i, z_i)$ при $z_i = z, t_i = t$. При этом мы предполагаем, что последняя условная вероятность непосредственно от i не зависит. Следовательно, для вычисления меры тренда достаточно знать характеристику источника (меру m) и условное распределение тройки (x_i, y_i, τ_i) при фиксированной паре (t_i, z_i) . Заметим, что для вывода формулы (1) никаких предположений о стохастической независимости не делается.

Вторая характеристика случайной меры \mathfrak{M} — ее вторые моменты — функция множеств D на $(R_{(+)}^3)^2$, где $R_{(+)}^3 = R^2 \times [0, \infty)$. По определению,

$$D(S_1, S_2) = E\mathfrak{M}(S_1)\mathfrak{M}(S_2),$$

при этом

$$\begin{aligned} D(S_1, S_2) &= E \sum_i \sum_j z_i z_j I_{S_1}(x_i, y_i, t_i - \tau_i) I_{S_2}(x_j, y_j, t_j - \tau_j) = \\ &= E \sum_i z_i^2 I_{S_1 \cap S_2}(x_i, y_i, t_i - \tau_i) + E \sum_{i \neq j} z_i z_j I_{S_1}(x_i, y_i, t_i - \tau_i) I_{S_2}(x_j, y_j, t_j - \tau_j). \end{aligned}$$

Первый член

$$E \sum_i z_i^2 P((x_i, y_i, t_i - \tau_i) \in S_1 \cap S_2 | t_i, z_i) = \int_{R_+^2} z p(S_1 \cap S_2 | t, z) m(dt, dz);$$

он равен 0, если $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Второй член

$$\begin{aligned} E \sum_{i \neq j} z_i z_j P((x_i, y_i, t_i - \tau_i) \in S_1, (x_j, y_j, t_j - \tau_j) \in S_2 | t_i, z_i; t_j, z_j) = \\ = E \int_{R_+^2 \times R_+^2, t_1 \neq t_2} z_1 z_2 p(S_1, S_2 | t_1, z_1; t_2, z_2) \nu(dt_1, dz_1) \nu(dt_2, dz_2) = \\ = \int_{R_+^2 \times R_+^2, t_1 \neq t_2} p(S_1, S_2 | t_1, z_1; t_2, z_2) E\mu(dt_1, dz_1) \mu(dt_2, dz_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p(S_1, S_2 | t_1, z_1; t_2, z_2) = \\ = P((x_i, y_i, t_i - \tau_i) \in S_1, (x_j, y_j, t_j - \tau_j) \in S_2 | t_i, z_i; t_j, z_j) \end{aligned}$$

при $t_i = t_1, z_i = z_1; t_j = t_2, z_j = z_2$.

Пусть $\nu(\Delta t_1 \times \Delta z_1)$ и $\nu(\Delta t_2 \times \Delta z_2)$ независимы, если $\Delta t_1 \cap \Delta t_2 = \emptyset$ (пуассоновское свойство точечного процесса).

Отсюда

$$E\mu(dt_1, dz_1) \mu(dt_2, dz_2) = m(dt_1, dz_1) m(dt_2, dz_2),$$

если $t_1 \neq t_2$.

Пусть, далее, i -тая и j -тая ($i \neq j$) блуждающие частицы условно стохастически независимы, если фиксированы пары (t_i, z_i) и (t_j, z_j) , причем каждая частица зависит только от своей пары:

$$p(S_1, S_2 | t_1, z_1; t_2, z_2) = p(S_1 | t_1, z_1) p(S_2 | t_2, z_2).$$

Тогда второй член равен

$$M(S_1) M(S_2) - \int_{R_+^2} p(S_1 | t, z) p(S_2 | t, z) m^2(dt, dz)$$

и так как

$$v^2(dt, dz) = v(dt, dz),$$

то

$$D(S_1, S_2) = M(S_1) M(S_2) + \int_{R_+^2} (p(S_1 \cap S_2 | t, z) - p(S_1 | t, z) p(S_2 | t, z)) m(dt, dz). \quad (2)$$

Аналогично могут быть получены формулы для высших моментов случайной меры \mathfrak{M} .

МЕРА ТРЕНДА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯХ НА ПРОДУКТИВНОСТЬ ИСТОЧНИКА И НА БЛУЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ

Согласно формуле (1), мера тренда определяется условной вероятностью $p(S | t, z)$ и мерой $m(dt, dz)$. Функция $p(S | t, z)$ имеет смысл условной вероятности события $(x_i, y_i, t_i - \tau_i) \in S$ при фиксированных t_i и z_i , здесь t_i — момент отделения частицы от источника и начало блуждания, z_i — масса частицы, τ_i — время блуждания частицы от начала до остановки, (x_i, y_i) — точка на плоскости, занимаемая частицей в момент остановки. При этом $(x_i, y_i, t_i - \tau_i)$ — координаты точки в слое $R^2 \times [0, \infty)$, занимаемой i -той частицей.

Пусть $q(B | t, z)$ — условная вероятность события $\tau_i \in B$ при фиксированных t_i и z_i , а $r(A | t, z, \tau)$ — условная вероятность события $(x_i, y_i) \in A$ при фиксированных t_i, z_i, τ_i .

Если

$$S_1 \subset R_+^2 \text{ и } S_2 \subset R_+^1 = [0, \infty),$$

то

$$\begin{aligned} p(S_1 \times S_2 | t, z) &= P((x_i, y_i) \in S_1, t_i - \tau_i \in S_2 | t_i, z_i) |_{t_i=t, z_i=z} = \\ &= \int_{t-\tau \in S_2} r(S_1 | t, z, \tau) q(d\tau | t, z). \end{aligned}$$

Пусть, кроме того, существуют плотности $r'(x, y | t, z, \tau)$ и $q'(\tau | t, z)$ условных мер r и q . Тогда существует плотность $M'(x, y, s)$ меры M , при этом

$$M'(x, y, s) = \int_{[s, \infty) \times R_+^1} r'(x, y | t, z, t-s) q'(t-s | t, z) m(dt, dz). \quad (3)$$

В двумерном случае плотность меры тренда называется поверхностью тренда. Мы будем называть M' функцией тренда. Предыдущий пример не единственно возможный, когда функция тренда существует. Вместо существования плотности q' , например, достаточно потребовать, чтобы для t -проекции меры $m(dt, dz)$ существовала плотность.

Пусть τ постоянно: $\tau = \tau_0$ с вероятностью 1. Тогда плотность q' не существует. Рассмотрим разложение меры $m(dt, dz)$ вида $m(dt, dz) = m(dz | t) l(dt)$, где l — мера интенсивности случайного точечного про-

цесса $\{t_i\}_1^\infty$. Предположим, что l обладает плотностью $l'(t)$ интенсивности точечного процесса $\{t_i\}_1^\infty$. Тогда

$$M'(x, y, s) = \int_{R_1^1} r'(x, y | s + \tau_0, z, \tau_0) l'(s + \tau_0) m(dz | s + \tau_0). \quad (4)$$

В частности, если все испускаемые частицы имеют массу $z = z_0$, то

$$M'(x, y, s) = r'(x, y | s + \tau_0, z_0, \tau_0) l'(s + \tau_0) z_0. \quad (4')$$

Пусть мера $m(dt, dz)$ обладает плотностью $m(dt, dz) = m'(t, z) dt dz$, и пусть $q(d\tau | t, z) = q(d\tau | z)$ не зависит от t .

Тогда

$$M'(x, y, s) = \int_{R_2^2} r'(x, y | s + \tau, z, \tau) m'(s + \tau, z) q(d\tau | z) dz. \quad (5)$$

Если же плотности $m'(t, z)$ не существует, но при каждом $i = 1, 2, \dots, z_i$ может принимать не более, чем счетное множество значений — $z_i \in \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, то

$$m(dt, dz) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k(dt) I_{dz}(a_k),$$

где $m_k(dt) = a_k l_k(dt)$ и l_k — мера интенсивности точечного процесса частиц с массой a_k . Пусть для любого k существует интенсивность l'_k и $q(d\tau | t, z) = q(d\tau | z)$.

Тогда

$$M'(x, y, s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{R_1^1} r'(x, y | s + \tau, a_k, \tau) l'_k(s + \tau) q(d\tau | a_k). \quad (6)$$

Пусть $\tau = t$ с вероятностью 1. Это означает, что все испускаемые частицы оседают в одном и том же тонком слое при $s = 0$, при этом

$$M'(x, y, 0) = \int_{R_2^2} r'(x, y | t, z, t) m(dt, dz). \quad (7)$$

Рассмотрим формулу (3). Применяя разложение $m(dt, dz) = m(dz | t) l(dt)$, производя замену $t - s = \tau$ и предполагая, что существует плотность l' , получаем

$$M'(x, y, s) = \int_{R_2^2} r'(x, y | t + s, z, \tau) q'(\tau | \tau + s, z) m(dz | \tau + s) l'(\tau + s) d\tau. \quad (8)$$

Из этой формулы нетрудно получить достаточное условие постоянства M' по накопленной мощности. Вот это условие: мера $m(dt, dz)$ не зависит от сдвига по оси времени t и при $t \geq \tau$ $r'(x, y | t, z, \tau)$ и $q'(\tau | t, z)$ не зависят от t .

ДИФFUЗИОННОЕ БЛУЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ

В рассмотренных случаях (3)–(7) для вычисления функции тренда M' необходимо знать условную плотность $r'(x, y | t, z, \tau)$. Предположим, что случайное блуждание, обладающее этой плотностью, является однородным во времени диффузионным процессом. Пусть $f_x(x, y, s)$ — плотность вероятности распределения блуждающей частицы в момент s от начала процесса. Тогда эта плотность удовлетворяет уравнение Фоккера—Планка (прямое уравнение Колмогорова; Феллер, 1967):

$$\frac{\partial f_x}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial x} (a_x^{(1)} f_x) - \frac{\partial}{\partial y} (a_y^{(2)} f_x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b_x^{(11)} f_x) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (b_x^{(12)} f_x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b_y^{(22)} f_x), \quad (9)$$

где $a_z^{(1)}, a_z^{(2)}, b_z^{(11)}, b_z^{(12)}, b_z^{(22)}$ — некоторые функции от (x, y) : $(a_z^{(1)}, a_z^{(2)})$ — вектор коэффициентов сноса, $\begin{pmatrix} b_z^{(11)} & b_z^{(12)} \\ b_z^{(12)} & b_z^{(22)} \end{pmatrix}$ — положительно определенная при любых (x, y) матрица коэффициентов диффузии.

Предположим, что $f_z(x, y, 0) = \delta(x, y)$ — двумерная δ -функция. Это соответствует источнику частиц, помещенному в начало координат на плоскости. При этом начальном условии и некоторых условиях на коэффициенты (Дынкин, 1963) вероятностное решение этого уравнения существует и единственно.

Допустим, что длительность блуждания τ не зависит от траектории блуждания. В этом случае

$$r'(x, y | \tau + s, z, \tau) = f_z(x, y, \tau).$$

Если τ зависит от траектории, то эта формула не верна. Так будет, например, если τ — момент первого достижения некоторого множества. Из формулы (8) получаем

$$M'(x, y, s) = \int_{R_+^2} f_z(x, y, \tau) q'(\tau | \tau + s, z) m(dz | \tau + s) l'(\tau + s) d\tau.$$

Следовательно, в общем случае функция M' будет удовлетворять сложному интегро-дифференциальному уравнению. Существуют, однако, случаи, когда это уравнение удается свести к дифференциальному.

Пусть $m(dz/t) = m(dz)$ не зависит от t и $q'(\tau | t, z) = q'(\tau | t)$ не зависит от z .

Тогда

$$M'(x, y, s) = \int_{R_+^2} \left(\int_{R_+^2} f_z(x, y, \tau) m(dz) \right) q'(\tau | \tau + s) l'(\tau + s) d\tau.$$

Пусть при каждом s $q'(\tau | \tau + s) l'(\tau + s) = C(s) e^{-\lambda(s)\tau}$, ($C(s), \lambda(s) > 0$) и коэффициенты уравнения (9) не зависят от z . Тогда при выполнении условия дифференцирования под знаком интеграла

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x} (a^{(1)} M') - \frac{\partial}{\partial y} (a^{(2)} M') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b^{(11)} M') + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (b^{(12)} M') + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b^{(22)} M') = \int_{R_+^2} \left(\int_{R_+^2} \frac{\partial}{\partial \tau} f_z(x, y, \tau) m(dz) \right) C(s) e^{-\lambda(s)\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и используя свойство преобразования Лапласа, получаем

$$C(s) \lambda(s) M'(x, y, s) - C(s) \delta!(x, y) m_1,$$

где $m_1 = \int_{R_+^2} m(dz)$ — условное математическое ожидание массы частицы при

фиксированном моменте t отрыва частицы от источника (в данном случае от t не зависит). Простейший пример выполнения условия $q'(\tau | \tau + s) l'(\tau + s) = C(s) e^{-\lambda(s)\tau}$ — это случай, когда интенсивность $l'(t) = C$ постоянна, условная плотность распределения времени блуждания $q'(\tau/t)$ не зависит от t и равна $\lambda e^{-\lambda\tau}$; здесь $C(s) = C\lambda$, $\lambda(s) = \lambda$.

Второй пример, также сводящийся к применению преобразования Лапласа, это случай, когда $\tau = t$ с вероятностью 1. Согласно формуле (7), достаточно потребовать, чтобы $m(dt, dz) = m(dz) C e^{-\lambda t} dt$, при этом интенсивность источника экспоненциально убывает (при направлении времени в прошлое); здесь $C(s) = C$, $\lambda(s) = \lambda$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ТРЕНДА

Рассмотрим случай, когда $M'(x, y, s)$ постоянно по глубине: $M'(x, y, s) = M'(x, y)$ или все частицы вещества сосредоточиваются в бесконечно тонком слое: $s = 0$ (случай $\tau = t$). Предположим, кроме того, что $M'(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\lambda M' - \delta = -\frac{\partial}{\partial x}(a^{(1)}M') - \frac{\partial}{\partial y}(a^{(2)}M') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(b^{(11)}M') + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(b^{(12)}M') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}(b^{(22)}M'). \quad (10)$$

Зная коэффициенты этого уравнения, можно решить его по крайней мере приближенно.

Проиллюстрируем зависимость поверхности $M'(x, y)$ от коэффициентов. В частности, покажем, что эта поверхность может иметь максимумы, не совпадающие по своему положению с источником. Так будет в некоторых точках быстрого изменения коэффициентов.

Рассмотрим одномерный аналог уравнения (10); здесь $M' = M(x)$, $\delta = \delta(x)$, $a = a(x)$, $b = b(x) > 0$, $\lambda > 0$.

Тогда накопление вещества при диффузии вдоль некоторой линии будет выражаться уравнением:

$$\lambda M - \delta = -\frac{\partial}{\partial x}(aM) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bM). \quad (11)$$

Пример 1 (разрыв коэффициентов сноса).

Пусть

$$a(x) = \begin{cases} a, & x < r, \\ 0, & x \geq r \quad (r > 0, a \neq 0), \end{cases}$$

и

$$b(x) = 1 \text{ при любых } x.$$

Уравнение (11) рассматривается в классе обобщенных функций, где он имеет единственное ограниченное решение (Гельфанд, Шилев, 1958). Ищем это ограниченное решение в виде

$$M(x) = \begin{cases} C_1 e^{x(\sqrt{a^2+2\lambda}+a)}, & x < 0, \\ C_2 e^{-x(\sqrt{a^2+2\lambda}-a)} + C_3 e^{(x-r)(\sqrt{a^2+2\lambda}+a)}, & 0 < x < r, \\ C_4 e^{-(x-r)\sqrt{2\lambda}}, & x > r. \end{cases}$$

На каждом из трех интервалов эта функция удовлетворяет уравнению (11). Кроме того, $M(x)$ должна быть непрерывной (если в точках 0 или r есть разрыв, то только член $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bM)$ содержит $\delta'(x)$ или $\delta'(x-r)$ с коэффициентами, отличными от нуля). Отсюда следуют первые два уравнения относительно коэффициентов:

$$(0) \quad C_1 = C_2 + C_3 e^{-r(\sqrt{a^2+2\lambda}+a)},$$

$$(r) \quad C_4 = C_3 + C_2 e^{-r(\sqrt{a^2+2\lambda}-a)};$$

находя обобщенные производные $\frac{\partial}{\partial x}(a(x)M(x))$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}M(x)$ в точках 0 и r и приравнявая коэффициенты при $\delta(x)$ и $\delta(x-r)$ в правой и левой частях равенства, получаем вторые два уравнения относительно коэффициентов:

$$(0') \quad -1 = -\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2\lambda}-a)C_2 + \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2\lambda}+a)e^{-r(\sqrt{a^2+2\lambda}+a)}C_3 - \\ -\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2\lambda}+a)C_1,$$

$$(r') \quad 0 = ae^{-r(\sqrt{a^2+2\lambda}-a)}C_2 + aC_3 - \frac{1}{2}\sqrt{2\lambda}C_4 + \\ + \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2\lambda}-a)e^{-r(\sqrt{a^2+2\lambda}-a)}C_2 - \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2\lambda}+a)C_3.$$

Решая систему уравнений $(0, r, 0', r')$, получаем:

$$C_1 = \frac{1}{\Delta}(\sqrt{a^2+2\lambda}-a + \sqrt{2\lambda} + (\sqrt{a^2+2\lambda}+a - \sqrt{2\lambda})e^{-2r\sqrt{a^2+2\lambda}}), \\ C_2 = \frac{1}{\Delta}(\sqrt{a^2+2\lambda}-a + \sqrt{2\lambda}), \\ C_3 = \frac{1}{\Delta}(\sqrt{a^2+2\lambda}+a - \sqrt{2\lambda})e^{-r(\sqrt{a^2+2\lambda}-a)}, \\ C_4 = \frac{1}{\Delta}2\sqrt{a^2+2\lambda}e^{-r(\sqrt{a^2+2\lambda}-a)},$$

где

$$\Delta = \sqrt{a^2+2\lambda}(\sqrt{a^2+2\lambda}-a + \sqrt{2\lambda}) + (\sqrt{a^2+2\lambda}+a)^2 e^{-2r\sqrt{a^2+2\lambda}}.$$

Произведя несложный анализ решения, можно сделать следующие выводы.

1) При $a > \frac{1}{2}\sqrt{2\lambda}$ в точке $x=r$ имеется локальный («ложный») максимум (рис. 1).

2) При $2r\sqrt{a^2+2\lambda} \leq \ln \frac{(\sqrt{a^2+2\lambda}-a)(\sqrt{a^2+2\lambda}-a + \sqrt{2\lambda})}{(\sqrt{a^2+2\lambda}+a)(\sqrt{a^2+2\lambda}+a - \sqrt{2\lambda})}$ в точке $x=0$ локального максимума нет (рис. 2).

3) При $a < 0$ в точке $x=r$ наступает замедление убывания функции M : $M'_-(r) < M'_+(r)$ (M'_- — производная слева, M'_+ — производная справа; рис. 3).

Пример 2 (разрыв коэффициентов диффузии).

Пусть

$$b(x) = \begin{cases} b, & x < r, \\ 1, & x > r \quad (r > 0, b > 0), \end{cases}$$

и

$$a(x) = 0 \text{ при любых } x.$$

Ищем решение в виде:

$$M(x) = \begin{cases} C_1 e^{x\sqrt{\frac{2\lambda}{b}}}, & x < 0, \\ C_2 e^{-x\sqrt{\frac{2\lambda}{b}}} + C_3 e^{(x-r)\sqrt{\frac{2\lambda}{b}}}, & 0 < x < r, \\ C_4 e^{-(x-r)\sqrt{2\lambda}}, & x > r. \end{cases}$$

На каждом из трех интервалов эта функция удовлетворяет уравнению (11), которое в данном случае имеет вид:

$$\lambda M - \delta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (bM).$$

Находя обобщенные производные $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ в точках 0 и r и приравнявая коэффициенты при $\delta(x)$, $\delta(x-r)$, $\delta'(x)$, $\delta'(x-r)$, в правой и левой частях

равенства, получаем четыре уравнения относительно коэффициентов:

$$(\delta_0) \quad 1 = \frac{1}{2} \left(b \sqrt{\frac{2\lambda}{b}} C_2 - b \sqrt{\frac{2\lambda}{b}} e^{-r \sqrt{\frac{2\lambda}{b}}} C_3 + b \sqrt{\frac{2\lambda}{b}} C_1 \right),$$

$$(\delta'_0) \quad 0 = C_2 + e^{-r \sqrt{\frac{2\lambda}{b}}} C_3 - C_1,$$

$$(\delta_r) \quad 0 = -\sqrt{2\lambda} C_4 + b \sqrt{\frac{2\lambda}{b}} e^{-r \sqrt{\frac{2\lambda}{b}}} C_2 - b \sqrt{\frac{2\lambda}{b}} C_3,$$

$$(\delta'_r) \quad 0 = C_4 - b e^{-r \sqrt{\frac{2\lambda}{b}}} C_2 - b C_3.$$

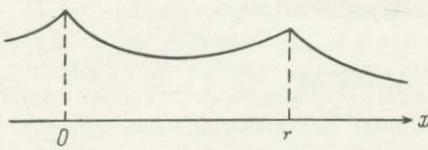


Рис. 1. «Ложный» максимум в точке r , не совпадающий с расположением источника в точке 0 .

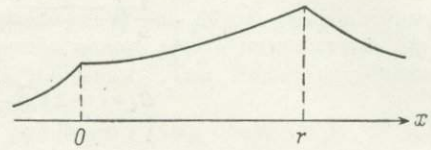


Рис. 2. «Ложный» максимум подавляет «истинный».

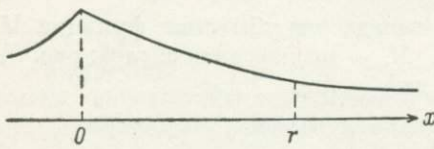


Рис. 3. Отрицательный излом в точке r , когда на интервале $(-\infty, r)$ $a < 0$.

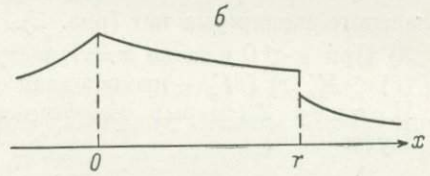
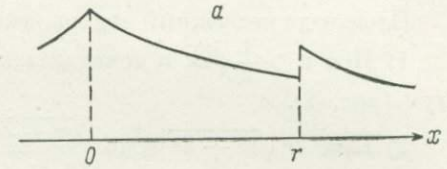


Рис. 4. Скачок в точке разрыва коэффициента диффузии.

$$a - b > 1; \quad б - b < 1.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \left(\sqrt{\frac{2\lambda}{b}} + \sqrt{2\lambda} + \left(\sqrt{\frac{2\lambda}{b}} - \sqrt{2\lambda} \right) e^{-2r \sqrt{\frac{2\lambda}{b}}} \right),$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta} \left(\sqrt{\frac{2\lambda}{b}} + \sqrt{2\lambda} \right),$$

$$C_3 = \frac{1}{\Delta} \left(\sqrt{\frac{2\lambda}{b}} - \sqrt{2\lambda} \right) e^{-r \sqrt{\frac{2\lambda}{b}}},$$

$$C_4 = \frac{1}{\Delta} 2b \sqrt{\frac{2\lambda}{b}} e^{-r \sqrt{\frac{2\lambda}{b}}},$$

где

$$\Delta = b \sqrt{\frac{2\lambda}{b}} \left(\sqrt{\frac{2\lambda}{b}} + \sqrt{2\lambda} \right).$$

Произведя несложный анализ решения, можно сделать следующие выводы.

1) При $b \neq 1$ в точке $x=r$ имеется скачок. Этот скачок положительный, если $b > 1$ (рис. 4, а), и отрицательный, если $b < 1$ (рис. 4, б).

2) В точке $x=0$ всегда имеется локальный максимум. В интервале $(0, r)$ локального минимума нет.

Автор признателен А. Б. Вистелиусу, вдохновившему его на исследование вопросов седиментологии.

ЛИТЕРАТУРА

- Вистелиус А. Б. К истории дистена в среднем миоцене Дагестана. — ДАН СССР, 1951, т. 79, № 1, с. 133—136.
- Вистелиус А. Б., Демина М. Е., Харламов Б. П. Основная задача поисковой геохимии и палеогеографии по терригенным компонентам как задача о структуре случайных полей. — В кн.: Геологическая информация и математическая геология. МГК, XXV сессия, докл. сов. геол. М., 1976, с. 37—47.
- Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними М., 1958.
- Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., 1963.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. II. М., 1967, 752 с.
- Kallenberg O. Characterisation and convergence of random measures and point processes. — Z. Wahrsch. verw. Geb., 27, 1973, p. 9—21.

III. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГЕОЛОГИИ

ОЦЕНКИ СРЕДНЕГО РАЗМЕРА ОБЪЕКТОВ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ В СЕЧЕНИЯХ

Ф. П. Агтерберг

Геологическая служба Канады, Оттава

Большинство объектов, представляющих интерес для геолога, имеет размеры и формы в трехмерном пространстве (R^3). Часто они могут быть измерены только в сечениях (в R^2), вдоль линий (в R^1) или в точках (в R^0) посредством плоскостных, линейных или точечных проб. Тогда важной задачей становится оценка параметров, характеризующих размеры и формы объектов, по измерениям, выполненным в пространстве с более низкой размерностью.

Вне геологической литературы проблема, обсуждаемая здесь, важная в стереологии, определена Элиасом (Elias, 1967) как 3-мерная интерпретация плоскостных представлений или экстраполяция из 2-мерного в 3-мерное пространство. Исчерпывающий обзор количественной стереологии был дан Ундервудом (Underwood, 1970).

Большинство геологов знакомо с задачей оценки относительного объема объектов данного типа, содержащихся в породе, по измерениям их площадей в сечениях. Делесс (Delesse, 1848) был первым, кто дал математическую основу этой проблемы, которая нашла применение в петрографическом модальном анализе (Chayes, 1956).

Экстраполяция формы объектов по измерениям в пространстве с более низкой размерностью представляет более трудную проблему. Выпуклый объект наиболее простой формы есть сфера. Модель, на которой основано большинство теорий экстраполяции форм, состоит из поля сфер различных размеров, центры сфер распределены в R^3 случайно, в соответствии с простым пуассоновым случайным точечным процессом. В статье рассматриваются также поля сфер, при этом многое из теории может быть обобщено применительно к телам иного вида, в частности к равным по форме эллипсоидам вращения.

После крамбейновской документации контролируемого эксперимента с его парадоксальными результатами (Krumbein, Pettijohn, 1938, с. 129—134) задача экстраполяции формы поставила в затруднительное положение многих геологов. Уикселл (Wicksell, 1925) обосновал теорию производных статистик для сферических объектов по измерениям окружностей, составляющих контуры этих объектов в сечениях. Однако приложение этой теории дает результаты, худшие по сравнению с теми, которые получены путем теории аппроксимации, развитой для тех же целей Крамбайном (Krumbein, 1935). Этот парадоксальный результат обсуждается в следующем разделе статьи.

Крамбайновская аппроксимация позднее была широко принята геологами. Результаты расхождений в приложении стереологических методов, существующие у геологов и других специалистов, обобщены Кендал-

лом и Мораном (Kendall, Moran, 1963); затем аппроксимация Крамбайна была вновь принята Саха (Sahu, 1966, 1968); результаты Матерона (Matheron, 1967) также соответствуют общей теории, сформулированной Уикселлом (Wicksell, 1925), Кендаллом и Мораном (Kendall, Moran, 1963).

Ватсон (Watson, 1971) показал, что некоторые стереологические приемы широко использовались без заметного проявления их плохих статистических свойств. Основной причиной того, что некоторые из статистик дают плохие результаты, является то, что они имеют большую или даже бесконечно большую дисперсию. В настоящей работе дается четкое различие между плохими статистиками этого типа и более устойчивыми статистиками, которые могут быть получены при соответствующих преобразованиях случайных величин, использованных для характеристики форм, или путем модификаций способов измерения (методов опробования).

В науках о Земле задача определения формы объектов находит иные применения, например, при характеристике крупных объектов — таких, как оценка по геологическим картам рудных тел, разведанных линейными или плоскостными пересечениями.

Другим приложением является проблема сравнения химического состава образца породы, включая количественную оценку, с данными измерений в шлифах или аншлифах, изготовленных из того же самого образца. Вистелиус (Vistelius, 1960, 1968) и многие другие авторы подсчитали значимость частного распределения результатов химических анализов изверженных пород. Полученные значения концентраций элементов часто могут рассматриваться как взвешенные средние содержания отдельных порообразующих минералов. К примеру, предположим, что весь фосфор в изверженных горных породах сосредоточен в кристаллах апатита или что медь находится в халькопирите. Тогда статистические характеристики — а) размер и форму кристаллов, б) число кристаллов на единицу объема, — можно было бы улучшить оценки их объемного содержания в процентах, полученные при измерении площадей в шлифах. Более детально изучение пространственного распределения минералов в породах может значительно облегчить сравнение результатов химических и модальных анализов.

Важность для геологических наук статистической оценки размера и формы объектов, полученных по измерениям в пространстве с более низкой размерностью в течение последних 10 лет, подчеркивалась Матероном (Matheron, 1967), его коллегами (Serra, 1969) и другими исследователями.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЛЯ ПОЛЯ СФЕР, ПЕРЕСЕКАЕМЫХ ПЛОСКОСТЬЮ ОПРОБОВАНИЯ

Рассмотрим поле сфер в R^3 , переменный размер которых выражен значением радиуса x . Пересечение его случайной плоскостью дает поле кругов в R^2 с переменным радиусом y . Пример единичной сферы, пересеченной случайной плоскостью, изображен на рис. 1; часть поля кругов показана на рис. 2.

На практике предположение, что центры сфер распределены в R^3 случайно, может быть нарушено на коротких расстояниях. Например, объекты могут быть упакованы, и общую модель нельзя (физически невозможно) рассчитать из-за перекрытия, или когда мелкие объекты стремятся заполнить пространство между более крупными. Также невозможно рассчитать пространственные закономерности в размещении различных типов объектов, образующих марковские последовательности вдоль линий сечений.

Исчерпывающее изложение основ теории, используемой здесь, дано Ридом (Reid, 1955) и Таллисом (Tallis, 1970). Ссылки на обширную литературу по этому вопросу можно найти у Морана (Moran, 1966) и Николсона (Nicholson, 1970). Обобщение проблемы о более высоких размерностях было дано Матероном (Matheron, 1967) и Майлзом (Miles, 1972).

Пусть $G(x)$ представляет функции распределения радиусов сфер с моментами $m_k(3) = E(x^k) = \int_0^\infty x^k dG(x)$; $F(x)$ — функция распределения радиусов сфер, пересекаемых случайной плоскостью в поле сфер, с моментами $m_k^*(3) = \int_0^\infty x^k dF(x)$; $H(y)$ — функция распределения радиусов окружностей,

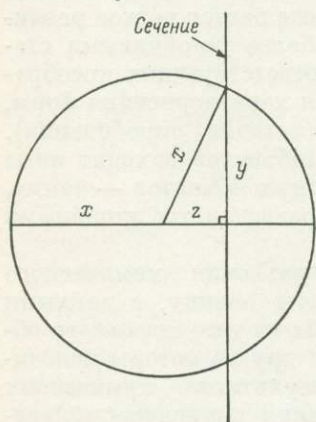


Рис. 1. Сфера радиусом x , пересекаемая плоскостью, нормальной плоскости за-рисовки.

z — кратчайшее расстояние от сечения до центра сферы; y — радиус сечения.

отсюда

образованных на случайной поверхности, с моментами $m_k(2) = E(y^k) = \int_0^\infty y^k dH(y)$. Допускается, что для этих функций существуют производные $g(x)$, $f(x)$ и $h(y)$.

В крамбейновской модели (Krumbein, 1935), которая обсуждалась также Чейзом (Chayes, 1950) и Пелто (Pelto, 1952), $G(x)$ была положена равной $F(x)$. Отношение $G(x) = F(x)$ справедливо только, если все сферы имеют одинаковые радиусы. В общем случае вероятность пересечения сферических зерен возрастает линейно с увеличением их радиусов.

Тогда

$$f(x) = c \cdot x \cdot g(x),$$

где c — постоянная, которая определяется из

$$\int_0^\infty f(x) dx = 1;$$

$$c^{-1} = \int_0^\infty xg(x) dx = m_1(3).$$

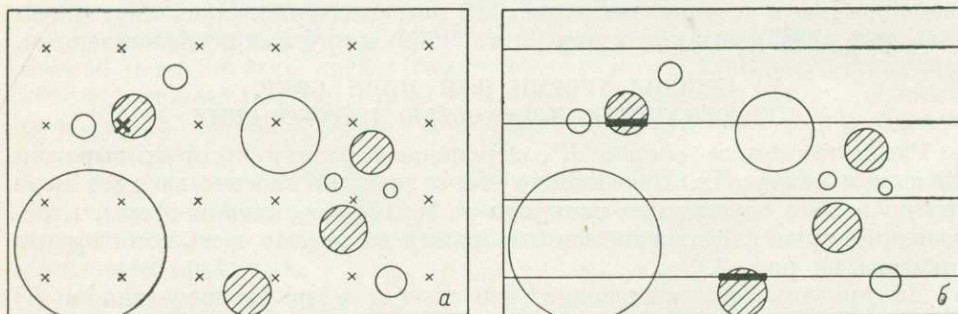


Рис. 2. Два метода опробования для измерения площади кругов, распределенных на плоскости.

Заштрихованы 4 круга промежуточного размера. a — частота по классам размеров, полученная путем подсчета попаданий (пересечений); b — частота по классам размеров, полученная путем суммирования длин хорд пересечений.

Для отношения между моментами $F(x)$ и $G(x)$ имеем выражение

$$m_k^*(3) = \frac{m_{k+1}(3)}{m_1(3)} \quad (1)$$

вместо $m_k^*(3) = m_k(3)$, как ранее допускалось во многих геологических работах со шлифами.

Пусть y представляет радиус сечения окружности, про которую известно, что она соответствует сфере радиусом x . Если z — расстояние между сечением и центром сферы (см. рис. 1), то $y = (x^2 - z^2)^{1/2}$.

Случайное положение сечения, содержащего круг радиусом y , имеет равномерную плотность, равную $dz/2x$.

Следовательно, для y при данном x

$$E(y^k/x) = \int_{-x}^x (x^2 - z^2)^{\frac{1}{2}k} \frac{dz}{2x} = C_k x^k \quad (k \geq -1), \quad (2)$$

где

$$C_k = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}(k+2)\right\}}{\Gamma\left\{\frac{1}{2}(k+3)\right\}}.$$

Постоянная C_k содержит отношение двух гамма-функций. Несколько первых значений этих функций: $C_{-1} = \pi/2$, $C_0 = 1$, $C_1 = \pi/4$, $C_2 = 2/3$, $C_3 = 3\pi/16$, $C_4 = 8/15$, $C_5 = 5\pi/32$.

Для $k = -1$ уравнение (2) дает частный результат:

$$E(y^{-1}/x) = \pi/2x. \quad (3)$$

В предшествующем выводе различие было сделано между сферами в пространстве и сферами с функциями распределения $F(x)$, заведомо пересеченными случайной плоскостью.

Пусть индекс f в E_f означает, что математическое ожидание относится к сферам радиуса x с функцией распределения $F(x)$.

Тогда

$$E(y^k) = E_f \{E(y^k/x)\} = C_k \cdot E_f(x^k) = C_k m_k^* (3). \quad (4)$$

Из уравнений (1) и (4) следует, что

$$m_k(2) = E(y^k) = C_k \frac{m_{k+1}(3)}{m_1(3)}. \quad (5)$$

Это хорошо известный результат (Kendall, Moran, 1963, p. 88); для $k = -1$

$$E(y^{-1}) = \pi/2 m_1(3). \quad (6)$$

Последнее выражение часто используют для оценки $m_1(3)$.

Допустим, что $H(y)$ заменено эмпирическим распределением H_n для n наблюдений. Гармоническое среднее выборки (\hat{y}_{hm}) тогда оценивается выражением:

$$\hat{y}_{hm}^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^{-1}. \quad (7)$$

Замена $E(y^{-1})$ в уравнении (6) на \hat{y}_{hm}^{-1} уравнения (7) дает для $m = m_1(3)$

$$\hat{m} = \frac{\pi}{2} \hat{y}_{hm}. \quad (8)$$

Практическое применение этой техники иллюстрируется таблицей, где использованы экспериментальные данные по наблюдениям в шлифах (Krumbein, 1935). Зерна песка из песчаника Санкт-Питер (Сант-Паул, Миннесота) были распределены на слайде и спроектированы на экран. В итоге был измерен максимальный диаметр каждого зерна. Аналогичные измерения были выполнены в шлифе, срезанном через пропитанный бакелитом образец из того же материала.

Статистики для данных по шлифу были пересчитаны двумя методами, включая обсуждаемый. Результаты, полученные из $H(y)$, сравнимы со значительно более точными статистиками, базирующимися на истинных размерах зерен. Так как все отдельные зерна в пределах части сечения были сосчитаны, то частоты f_1 таблицы часто называют количественными в противоположность весовым частотам, полученным при просеивании.

Частоты горизонтальных диаметров в шлифах из песчаника Сант-Питер (Krumbein, 1935)

Интервал класса, мм	Частота, f_i	Средние точки класса, d_i	Отношение f_i/d_i
0.04—0.08	43	0.06	716.7
0.08—0.12	79	0.10	790.0
0.12—0.16	93	0.14	664.3
0.16—0.20	70	0.18	388.9
0.20—0.24	27	0.22	122.7
0.24—0.28	16	0.26	61.5
0.28—0.32	9	0.30	30.0
0.32—0.36	5	0.34	14.7
0.36—0.40	1	0.38	2.6
Сумма	342		2791.4

Гармоническое среднее для данных таблицы равно

$$\hat{y}_{hm} = \frac{\sum f_i}{\sum (f_i/d_i)} = \frac{342}{2791.4} = 0.1225. \quad (9)$$

Уравнение (8) дает $\hat{m} = 0.1925$ мм как оценку среднего истинного диаметра. Однако эта оценка нестабильна, так как незначительные флуктуации в левом хвосте выборочного распределения увеличиваются непропорционально. Например, положим $d_1 = 0.04$ вместо $d_1 = 0.06$ и приведенного в таблице.

Это очень малое изменение, но оно дает $f_1/d_1 = 1075$ вместо 716.7. Оценка среднего размера зерен после этого небольшого изменения в левом хвосте становится равной 0.1706 мм, что примерно на 10% меньше, чем предыдущая.

Крамбайн и Петтиджон поступили корректно, не используя оценку этого типа. Однако они предлагали принять уравнения, выведенные для ситуации, когда все сферы имеют точно один и тот же диаметр. Такая аппроксимация имеет ограниченное приложение. В ситуации этого типа лучше не оценивать $m_1(3)$, а использовать $M_1(3)$, представляющую собой средний размер зерна в терминах объемных или весовых частот, вместо количественных частот, использованных для $G(x)$ и $m_1(3)$. Ниже будет показано, что $M_1(3)$ является устойчивой оценкой, которая может быть определена столь точно, сколь это необходимо для измерений кругов на плоскости.

Оценка, получаемая из уравнения (8), неустойчива, так как y_{hm}^{-1} и, следовательно, m^{-1} имеют бесконечно большую дисперсию, что впервые было установлено Таллисом (Tallis, 1970). Хотя это не значит, что \hat{y}_{hm} или \hat{m} имеют бесконечную дисперсию, но и для этих статистик возникают некоторые проблемы отыскания оценок. Случайная ошибка, которая, по-видимому, содержится в предшествующей оценке среднего размера зерна (см. таблицу), в этом случае превышает смещение, вводимое при использовании крамбейновской аппроксимации.

Допустим, что задача заключается в оценке среднего числа центров сфер на единицу объема, обозначаемого символом λ . Среднее число сфер,

пересеченных случайной плоскостью с площадью A , тогда будет равно $2\lambda mA$ (Fullman, 1953). Следовательно,

$$\hat{\lambda} = n/2\hat{m}A$$

служит оценкой λ , когда в A действительно насчитывается n кругов. Однако λ имеет бесконечно большую дисперсию, подобно \hat{m}^{-1} и \hat{y}_{hm}^{-1} . Она будет даже менее устойчива, чем \hat{y}_{hm} в подобной ситуации.

Тот факт, что дисперсия величины \hat{y}_{hm}^{-1} бесконечна, широко неизвестен. Эта дисперсия должна быть пропорциональна $E(y^{-1} - \eta)^2$, где $\eta = E(y^{-1}) = \pi/2m$, и должна быть бесконечной, если $E(y^{-2})$ бесконечна, что следует из выражения

$$E(y^{-2}/x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x \frac{dz}{x^2 - z^2} = \infty. \quad (10)$$

Отсутствие устойчивости оценки $m = m_1(3)$ по отношению к ошибкам в левом хвосте оценки распределения $H(y)$ отразится также на моментах

$$m_{k+1}(3) = C_k^{-1} m_k(2) m_1(3). \quad (11)$$

Подобно не может быть осуществима реконструкция $G(x)$ из выражения

$$1 - G(x) = \frac{2m}{\pi} \int_x^\infty \frac{dH(y)}{(y^2 - x^2)^{1/2}}, \quad (12)$$

которое является другим хорошо известным результатом (Matheron, 1967, p. 79; Tallis, 1970, p. 93).

В принципе проблем оценивания, связанных с предыдущими оценками, можно было бы избежать путем применения параметрических методов. Однако Ватсон проанализировал много разных методов и пришел к заключению, что параметрическое приближение трудно и неустойчиво по отношению к ошибкам в левых хвостах (Watson, 1971, p. 483). С другой стороны, он указал, что отношения вида

$$\int_0^\infty x^2 dG(x) \int_0^\infty x^3 dG(x)$$

могут быть точно оценены в том смысле, что ошибки в левых хвостах не оказывают на них чрезмерного влияния.

Ниже рассматриваются устойчивые оценки этого типа, имеющие значение для геологии. Оценки, обсуждаемые в этой статье, использовались ранее, но не указывалось, принадлежат ли они к классу устойчивых оценок, относительно нечувствительных к ошибкам в левых хвостах. Обсуждаемые схемы опробования также использовались ранее. В ряде случаев тем не менее использовалась крамбейновская аппроксимация, хотя в этом не было необходимости. Это, например, объясняет небольшие различия в формулах, что было показано как Пакхамом (Packham, 1955) и Саха (Sahu, 1966, 1968), так и Матероном (Matheron, 1967). Было бы трудной задачей дать обзор и пересмотреть все существующие формулы аппроксимации, но все же на примере можно проиллюстрировать те изменения, которые были бы необходимы.

Пакхам (Packham, 1955) измерил диаметры зерен в шлифе, в параллельных сечениях. Масштаб частоты был основан на суммировании классов: интервалы диаметров, длины хорд, образуемых при пересечении зерен линиями. Процедура эта показана на рис. 2. Подобно методу опробования, когда измеряются только круги, в которые попали точки регулярной сети (рис. 2, а), метод Пакхама дает оценку распределения площади

по радиусам $H_2(y)$. Термин «площадь по радиусам» отражает тот факт, что любая оценка $H_2(y)$ означает суммарную площадь всех кругов, радиусы (y) которых меньше, чем y .

Важная особенность этих двух способов опробования (рис. 2) состоит в том, что частоты определенных классов y берутся пропорционально всей площади, занятой этими классами в сечении. Распределение площадей по радиусам $H_2(y)$ отличается от распределения количественных частот $H(y)$ тем, что больший вес приписан большим кругам. $H(y)$ является результатом измерений всех кругов, попавших в плоскость измерения. Эта процедура применена для получения частот, указанных в таблице.

$H_2(y)$ является распределением, которое может быть получено из $H(y)$ для всех кругов путем умножения каждой количественной частоты на площадь круга, к которому она относится. Очень малые круги, которые трудно измерить, когда используется частотное приближение, также представлены в распределении $H_2(y)$, приведенном на рис. 2. Однако вероятность того, что в малый круг попадет точка (рис. 2, а), уменьшается пропорционально его площади. Вероятность, что круг попадет на линию (рис. 2, б), больше, но его вес пропорционален длине хорды, и окончательная частота становится вновь пропорциональной площади.

Пусть $M_k(2)$ моменты ($k=1, \dots$), основанные на измерении распределения площадей по частотам Пакхама; они легко могут быть сведены к моментам $M_k(3)$ истинных распределений объемных частот. Результаты Матерона (Matheron, 1967, p. 82) в этой ситуации, после округления, следующие:

$$M_1(3) = 1.13M_1(2), \quad M_2(3) = 1.25M_2(2), \quad M_3(3) = 1.36M_3(2). \quad (13)$$

Результаты пакхамовской аппроксимации (Packham, 1955, p. 52):

$$M'_1(3) = 1.18M_1(2), \quad M'_2(3) = 1.33M_2(2), \quad M'_3(3) = 1.47M_3(2). \quad (14)$$

Хотя эти результаты, основанные на общей теории (13) и на приближительной теории (14), близки к данной ситуации, все же нет причин использовать аппроксимации, так как $M_k(3)$ дает оценки, которые являются несмещенными и устойчивыми.

ОЦЕНКИ ДЛЯ МОМЕНТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ОБЪЕМОВ МЕНЬШИХ РАЗМЕРОВ

Моменты $M_k(2)$ распределения площадей по радиусам удовлетворяют соотношению

$$M_k(2) = \int_0^{\infty} y^k dH_2(y). \quad (15)$$

В силу того что частота выражена через значения площади, $dH_2(y)$ пропорционально $y^2 dH(y)$. Из $\int_0^{\infty} dH_2(y) = 1$ следует, что

$$dH_2(y) = \frac{y^2}{m_2(2)} dH(y).$$

Следовательно,

$$M_k(2) = \frac{m_{k+2}(2)}{m_2(2)} \quad (k \geq -3). \quad (16)$$

Функционалы $M_k(2)$ представляют собой моменты $H_2(y)$, если k неотрицательно. Они также существуют для $k = -1, -2, -3$, но $M_{-4}(2) = \infty$.

Аналогичные функционалы $M_k(3)$ для распределений объемов по радиусам $G_3(x)$ равны:

$$M_k(3) = \int_0^{\infty} x^k dG_3(x), \quad (17)$$

отсюда

$$dG_3(x) = \frac{x^3}{m_3(3)} dG(x)$$

и

$$M_k(3) = \frac{m_{k+3}(3)}{m_3(3)} \quad (k \geq -4). \quad (18)$$

При $k \geq 0$ $M_k(3)$ представляют моменты распределения объемов по радиусам, если все объемы имеют одинаковый удельный вес. Например, в осадочной петрологии $M_k(3)$ могут представлять собой моменты распределений частот весовых процентов для материалов, состоящих из свободных сферических зерен и полученных обычным способом при просеивании.

Матерон (Matheron, 1967) ввел общее выражение для моментов меры $M_k(p)$, где

$$M_k(p) = \frac{m_{k+p}(p)}{m_p(p)}, \quad (19)$$

$p = 3, 2$ или 1 означает размерность.

Уравнения (16) и (18) являются частными случаями уравнения (19). Функционалы $M_k(p)$ уравнения (19) будут конечными, только если $k \geq -1 - p$.

Из уравнений (5) и (18)

$$M_k(3) = \frac{C_2 m_{k+2}(2)}{C_{k+2} m_2(2)},$$

следовательно,

$$M_k(3) = \frac{2}{3} C_{k+2}^{-1} M_k(2). \quad (20)$$

Три первых момента, получаемых из этого выражения, были представлены ранее в уравнении (13). Уравнение (20) показывает, что существуют простые взаимоотношения между моментами объемного распределения и распределением площадей по радиусам, которые могут быть измерены одним из способов, приведенных на рис. 2.

Предположим, однако, что вместо этого кривая количественных частот определена из всех кругов части данного шлифа, как это было сделано для таблицы. Тогда $M_k(3)$ может быть вычислено из соотношения

$$M_k(3) = \frac{2}{3} C_{k+2}^{-1} \cdot m_{k+2}(2)/m_2(2) \quad (21)$$

с использованием $m_2(2)$, $m_3(2)$, ..., которые являются моментами $h(y)$.

С другой стороны, если использована одна из двух схем опробования (рис. 2), то это не дает хорошего метода оценки моментов количественных частот $m_k(3)$, так как

$$m_k(3) = \frac{M_{k-3}(3)}{M_{-3}(3)} = \frac{C_{k-1} M_{k-3}(2)}{C_{-1} M_{-3}(2)}$$

и

$$m_k(3) = \frac{\pi}{2} C_{k-1} \frac{M_{k-3}(2)}{M_{-3}(2)} \quad (k \geq 0). \quad (22)$$

Проблема заключается в том, что $M_{-3}(2) = m_{-1}(2)/m_2(2)$ имеет бесконечную дисперсию.

Можно прийти к заключению, что использование одного из методов рис. 2 приводит к выборочному распределению $H_2(y)$ с моментами $M_k(2)$ ($k=1, 2, \dots$), которые легко преобразуются в моменты $M_k(3)$ распределения объемов по радиусам $G_3(x)$ посредством уравнения (20).

Метод, изображенный на рис. 2, а, был широко использован на практике Фридманом (Friedman, 1958), а также Розенфельдом и другими (Rosenfeld e. a., 1953). Расстояние между точками на рис. 1, а или между линиями на рис. 1, б может быть оценено как очень малое, и может быть применена автоматическая развертка, такая как на квантиметре 720 (Fisher, 1971). Тогда уравнение (20) даст переводные множители для моментов, позволяющих исключить смещения, существующие при пересечениях.

На практике может возникнуть ситуация, когда интересующие нас объекты несферичны. Так, Пакхам (Packham, 1955) измерял в шлифах короткие оси окатанных эллипсоидальных зерен. Последующее приложение его теории к сферическим зернам дало результаты, близкие к тем, которые основаны на просеивании. Фридман (Friedman, 1958) в аналогичной ситуации измерял длинные оси, используя позднее эмпирически выведенные формулы для корреляции измерений в шлифе с данными просеивания.

Основное внимание в данной статье было обращено на экстраполяцию по измерениям в сечениях. Результаты можно распространить на случаи пересечения линейными пробами сфер или поля кругов. Под микроскопом это могут быть случайные линии в шлифе.

Плотность вероятности, что сфера радиуса x пересечется случайной линией, равна $x^2 g(x)/m_2(3)$ вместо $xg(x)/m_1(3)$, как это было выведено ранее для пересечения плоскостью опробования. Плотность вероятности, что круг радиусом y пересечется случайной линией (см. рис. 2), равна $y \cdot h(y)/m_1(2)$.

Допустим, что w представляет полухорду, которая равна половине длины хорды, получаемой при пересечении линией круга или сферы; $m_k(1)$ — моменты распределения полухорд. Получим результат, эквивалентный уравнению (5):

$$m_k(1) = C_k \frac{m_{k+1}(2)}{m_1(2)} \quad (k \geq -1). \quad (23)$$

Из уравнений (5) и (23)

$$m_k(1) = E(w^k) = \frac{2}{k+2} \frac{m_{k+2}(3)}{m_2(3)} \quad (k \geq -1). \quad (24)$$

Попытка оценить $m_k(3)$ ($k=1, 2, \dots$) посредством уравнения (24) не приводит к успеху, так как $m_{-2}(1) = E(w^{-2})$ не существует.

На существование проблем экстраполяции формы по данным наблюдений в шлифах впервые обратил мое внимание доктор Х. П. Треттин (Институт осадочной и нефтяной геологии, Калгери). Впервые результаты данной работы были представлены на симпозиуме по статистике и проблемам, с ней связанным, в Оттаве в октябре 1974 г. (университет Карлтон) под председательством профессора Е. Салеха, которому я благодарен за поддержку. Выпущенная по этому случаю работа (Agterberg, 1975) позднее была прочитана профессором Г. С. Ватсоном (университет Принстон) и профессором П. Делфинеем (Центр морфологии математики, Фонтенбло, Франция); всем им я обязан за многие полезные замечания. Благодарен я также мистеру А. Г. Фаббри за предложение улучшить данный текст.

ЛИТЕРАТУРА

- Agterberg F. P. Estimation of the average size of mineral grains from thin-section data. Proc. Symp. Statistics and Related Topics, 1974, Carleton Univ., Ottawa, 1975, p. 16.01—16.15.
Chayes F. On the bias of grain-size measurements made in thin-section. — J. Geol., 1950, v. 58, p. 156—160; 1950, v. 59, p. 274—275.

- Chayes F. Petrographic modal analysis. New York, Wiley, 1956, 113 p.
- Delesse A. Pour determiner la composition des roches. — Ann. des Mines, 1848, v. 13, ser. 4, p. 379—216.
- Elias H. Problems of stereology: — Proc. Second Intern. Congr. for Stereol. Chicago—New York, Springer Verlag, 1967, p. 1—11.
- Fisher C. The new Quantimet 720. — Microscopy, 1971, v. 19, p. 1—20.
- Friedman G. M. Determination of sieve—size distribution from thin-section data for sedimentary petrological studies. — J. Geol., 1958, v. 66, p. 394—416.
- Fullman R. L. Measurement of particle sizes in opaque bodies. — J. Metals, 1953, v. 5, p. 447—452.
- Greenman N. N. On the bias of grain-size measurements made in thin-section, discussion. — J. Geol., 1951a, v. 59, p. 268—274.
- Greenman N. N. The mechanical analysis of sediments from thin-section data. — J. Geol., 1951, v. 59, p. 447—462.
- Kendall M. G., Moran P. A. P. Geometrical probability. London, Griffin, 1963, 125 p.
- Krumbein W. C. Thin-section mechanical analysis of indurated sediments. — J. Geol., 1935, v. 43, p. 482—496.
- Krumbein W. C., Pettijohn F. J. Manual of sedimentary petrography. New York, Appleton—Century, 1938, 549 p.
- Matheron G. Elements pour une theorie des milieux poreux. Paris, Masson, 1967, 166 p.
- Miles R. E. Multi-dimensional perspectives on stereology. — Microscopy, 1972, v. 95, pt 2, p. 181—195.
- Moran P. A. P. A note on recent research in geometrical probability. — J. Appl. Probability, 1966, v. 3, p. 453—563.
- Nicholson W. L. Estimation of linear properties of particle size distributions. — Biometrika, 1970, v. 57, p. 273—297.
- Packham G. H. Volume-, weight- and number-frequency analysis of sediments from thin-section data. — J. Geol., 1955, v. 63, p. 50—58.
- Pelto C. R. The mechanical analysis of sediments from thin-section data, discussion. — J. Geol., 1952, v. 60, p. 402—406.
- Reid W. P. Distribution of sites of spheres in a solid form a study of slices of the solid. — J. Mathem. Phys., 1955, v. 34, p. 95—102.
- Rosenfeld J. L., Ferm J. C. A comparison of sieve and thin-section technique for size analysis. — J. Geol., 1953, v. 61, p. 114—132.
- Sahu B. K. Thin-section analysis of sandstones on weight-frequency basis. — Sediment., 1966, v. 7, p. 225—259.
- Sahu B. K. Thin-section analysis and the moment problem. — Sediment., 1968, v. 10, p. 147—151.
- Serra J. Introduction a la morphologie mathematique, Fasc. 3. Cahiers Centre Morphologie Mathematique. Fontainebleau, France, 1969, 160 p.
- Tallis G. M. Estimating the distribution of spherical and elliptical bodies in conglomerates from plane sections. — Biometrics, 1970, v. 26, p. 87—103.
- Underwood E. E. Quantitative Stereology. Reading Mass, Addison—Wesley, 1970, 274 p.
- Watson G. S. Estimating functionals of particle size distributions. — Biometrika, 1971, v. 58, p. 483—490.
- Wicksell S. D. The corpuscle problem. A mathematical study of a biometric problem. — Biometrika, 1925, v. 17, p. 84—99.
- Vistelius A. B. The skew frequency distributions and the fundamental law of the geochemical processes. — J. Geol., 1960, v. 68, p. 1—22.
- Vistelius A. B. On the checking of the theoretical backgrounds of the stochastic models in concrete geological investigations. 23rd. Int. Geol. Congr., Prague, 1968. Proc., 1968, v. 13, p. 153—161.

ВЫДЕЛЕНИЕ ОШИБОК ИЗ ТЕХНИЧЕСКИХ ДАННЫХ О РЕЗЕРВАРЕ

Д. Марсал

Ганновер, ФРГ

Неопределенность таких характеристик резервуара, как пористость (Φ) или проницаемость (K), по-видимому, имеет три основных источника: неоднородность промышленной залежи, случайные ошибки измерения и соответствующие систематические ошибки.

Первый тип неопределенности может быть оценен с помощью методов, в достаточной степени предоставляемых теорией опробования. В этой статье мы в основном будем иметь дело с отфильтровыванием случайных ошибок, накладывающихся на естественную изменчивость, и с устранением систематических ошибок, которые, к примеру, могут возникать как следствие измерения параметров при низком давлении, а не в условиях, имеющих место в резервуаре. Ошибки всех видов могут приводить к смещению среднего значения и дисперсии и вводить асимметрию, не свойственную распределению изменчивости породы. К счастью, фильтрация ошибок не сложна для выполнения и не ограничивается определенными классами функций распределения.

Второй вопрос, на который в этой статье обращается внимание, относится к обстоятельству, которое до сих пор явно не рассматривали или интуитивно избегали. Это легче всего пояснить с помощью простого числового примера. Пусть для нас представляет интерес среднее значение отношения K/Φ следующих величин:

Φ	$\frac{1}{\Phi}$	K	$K \times \frac{1}{\Phi}$
0.15	6.67	100	667
0.21	4.76	500	2380
0.29	3.45	2000	6900
Среднее значение	4.96	866.7	3316

Произведение ($4.96 \times 866.7 = 4299$) средних значений величин $1/\Phi$ и K намного больше среднего значения отношения K/Φ . Обычно среднее значение произведения случайных величин отличается от произведения средних значений его сомножителей, если по крайней мере два сомножителя взаимосвязаны. Однако в резервуарах взаимосвязи являются скорее правилом, чем исключением. Взаимосвязанными являются проницаемость, пористость, насыщение реликтовой водой, суммарная пористость и остаточное насыщение нефтью; могут быть взаимосвязанными общая мощность, коэффициент сланцеватости, суммарная пористость и т. д. В силу этого распределение произведений ведет к допущению о нормально распределенных сомножителях. Выведенные формулы дают представление о взаимосвязях, что не может быть получено с помощью таких числовых экспериментов, как выборка методом Монте-Карло.

Предполагается, что читатель знаком с необходимостью оценки неопределенности в инженерных расчетах, на что обращается внимание, например, в статье Уолстрона и др. (Walstrom e. a., 1967).

СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ФАКТОРОВ

Пусть Y_1 и Y_2 являются двумя случайными переменными величинами со средними значениями \bar{y}_1 и \bar{y}_2 , дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 и коэффициентом корреляции ρ_{12} . Тогда среднее значение \bar{p}_{12} и дисперсия σ_{12}^2 произведения $p_{12} = Y_1 \cdot Y_2$ могут быть рассчитаны с помощью

$$\bar{p}_{12} = \bar{y}_1 \bar{y}_2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \quad (1)$$

и

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 + \rho_{12}^2), \quad (2)$$

где

$$\sigma_0^2 = \sigma_2^2 \bar{y}_1^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \bar{y}_1 \bar{y}_2 + \sigma_1^2 \bar{y}_2^2. \quad (3)$$

Эти уравнения точны, если величины Y_1 и Y_2 являются нормально распределенными, и достаточно приближенными, если относительные частоты могут быть описаны нормальным двумерным распределением

с искажением в пределах от небольшой степени до умеренной. Формула (1) показывает, что $\rho_{12} \neq 0$ влечет $\bar{p}_{12} \neq 0$, если $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = 0$. Поэтому следует осторожно производить вычисление средней величины произведения, если его сомножители изменяются от нуля до единицы, как в случае пористости, насыщения, коэффициента регенерации и коэффициента сланцеватости. Рассмотрение материалов любой фирмы или литературных источников (Gunn, 1967) показывает, что изменчивость в объеме резервуара таких характеристик породы, как $|\rho| \approx \frac{3}{4}$ и $\sigma \approx \frac{1}{3} \bar{y}$, как правило, приводит к среднему значению \bar{p}_{12} , равному приблизительно $\frac{13}{12} \bar{y}_1 \bar{y}_2$, если $\rho > 0$, и $\frac{11}{12} \bar{y}_1 \bar{y}_2$, если $\rho < 0$.

Пригодность уравнения (1) для дискретных распределений показана на следующем примере, предполагающем применение его к конечным выборкам.

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = 1, \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \frac{1}{3}, \quad \rho_{12} = -1,$$

$$1 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3},$$

$$\bar{p}_{12} = \frac{1}{6} (0 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 1) = \frac{2}{3}.$$

		Абсолютная частота		
		0	1	2
Y ₂ \ Y ₁	0	0	0	1
	1	0	4	0
	2	1	0	0

Если три произвольные переменные величины Y_1 , Y_2 и Y_3 являются нормально распределенными, то произведение $P_{123} = Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3$ имеет среднее значение

$$\bar{p}_{123} \approx \bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \bar{y}_3 + \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13} \bar{y}_2 + \sigma_2 \sigma_3 \rho_{23} \bar{y}_1. \quad (4)$$

Это уравнение не вполне точное, поскольку при его выводе произведение $y_1 y_2 y_3$ было заменено выражением

$$y_1 y_2 y_3 - (y_1 - \bar{y}_1)(y_2 - \bar{y}_2)(y_3 - \bar{y}_3).$$

Распространение уравнения (4) на n взаимно зависимых сомножителей приводит к

$$\bar{p}_{12 \dots n} \approx \bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_n \left[1 + \sum_{r=1}^n \sum_{s=r+1}^n (\sigma_r \sigma_s / \bar{y}_r \bar{y}_s) \rho_{rs} \right]. \quad (5)$$

Если в уравнении (5) по крайней мере одно среднее значение обратится в нуль, то его запись изменится очевидным образом. Ошибка аппроксимации в уравнении (5) увеличивается с возрастанием n .

Более точные формулы могут быть получены путем многократного применения уравнения (1). Например,

$$\bar{p}_{1234} = \bar{p}_{12} \bar{p}_{34} + \sigma_{12} \sigma_{34} \rho_{12, 34},$$

где $\rho_{12, 34}$ — коэффициент корреляции между произведениями P_{12} и P_{34} . Если пары (Y_1, Y_2) и (Y_3, Y_4) не взаимосвязаны, то P_{12} и P_{34} также не взаимосвязаны, так что $\rho_{12, 34} = 0$. В этом случае

$$\bar{p}_{1234} = \bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 \bar{y}_4 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \bar{y}_3 \bar{y}_4 + \sigma_3 \sigma_4 \rho_{34} \bar{y}_1 \bar{y}_2 + \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \rho_{12} \rho_{34}. \quad (6)$$

Числовой пример. Допустим, что в каждом узле сетки, наложенной на карту резервуара, определены общая мощность Y_1 , коэффициент сланцеватости Y_2 , суммарная пористость Y_3 и коэффициент восстановления

ния Y_4 . Предположим, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1 = 100, \quad \sigma_1 = 31 \\ \bar{y}_2 = 0.87, \quad \sigma_2 = 0.11 \\ \bar{y}_3 = 0.22, \quad \sigma_3 = 0.09 \\ \bar{y}_4 = 0.28, \quad \sigma_4 = 0.12 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \rho_{12} = -0.40, \\ \rho_{34} = +0.85, \end{aligned}$$

тогда $\bar{p}_{1234} = 5.359 - 0.084 + 0.799 - 0.013 = 6.061$.

Частотная кривая произведения нормально распределенных сомножителей может быть описана, как искаженное нормальное распределение. Легко понять основную причину расхождения: два равномерно распределенных сомножителя дают неравномерно распределенное произведение, поскольку меньшие значения появляются чаще, чем большие. Это может быть проиллюстрировано с помощью следующего примера.

Частота пар				Произведение пар			
$Y_2 \backslash Y_1$	0	1	2	$Y_2 \backslash Y_1$	0	1	2
0	1	2	1	0	0	0	0
1	2	4	2	1	0	1	2
2	1	2	1	2	0	2	4
Произведение				0 1 2 4			
Частота				7 4 4 1			

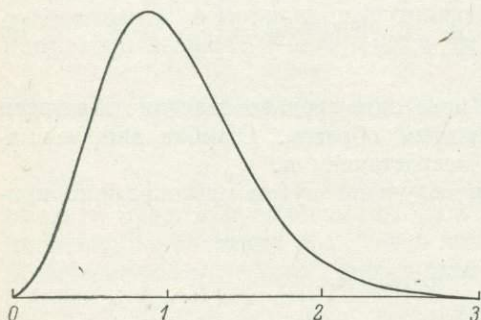
Искаженные нормальные распределения переменной величины x со средним значением \bar{x} , дисперсией σ^2 и третьим моментом μ_3 относительно среднего значения могут быть описаны кривой распределения:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_3 u + \frac{1}{6} \alpha_3 u^3\right) \cdot N(x; \bar{x}, \sigma^2), \quad (7)$$

$$u = (x - \bar{x})/\sigma, \quad \alpha_3 = \mu_3/\sigma^3,$$

$$N(x; \bar{x}, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \cdot \exp\{-(x - \bar{x})^2/2\sigma^2\}. \quad (8)$$

На рисунке изображена типичная частотная кривая произведения двух нормально распределенных сомножителей, где $\bar{x} = 1.0474$, $\sigma = 0.4535$, $\alpha_3 = 0.6572$. Соответствующая кривая, вычисленная с помощью уравнения (7), отличается в интервале значимости $0.3 \leq x \leq 2.4$ меньше, чем на 0.03.



Распределение произведения двух нормально распределенных величин.
Значение максимума равно 0.92.

Третий момент распределения произведения двух нормально распределенных сомножителей относительно среднего значения \bar{p}_{12} определяется выражением

$$\begin{aligned} \mu_3 = & (6\rho_{12} + 2\rho_{12}^3) \sigma_1^2 \sigma_2^3 + \\ & + 6\bar{y}_1 \bar{y}_2 (1 - \rho_{12}^2) \sigma_1^2 \sigma_2^3 + 6\rho_{12} \sigma_1^3 \sigma_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения дисперсии и третьего момента произведения n сомножителей являются довольно сложными.

СЛУЧАЙНЫЕ И СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЯ

Случайные ошибки измерения для n разных источников. Пусть y будет точным значением измеряемого параметра породы. Тогда совокупность всех возможных измерений x_1, x_2, x_3, \dots , выполненных

одним и тем же методом, может быть описана с помощью некоторой частотной кривой $f(x)$ с дисперсией σ_x^2 . Если ошибки измерений возникают от n разных источников, σ_i^2 — дисперсия, обусловленная i -тым источником, а ρ_{rs} — коэффициент корреляции между ошибками r -того вида и s -того вида, то

$$\sigma_x^2 = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sigma_r \sigma_s \rho_{rs}, \quad \rho_{rr} = 1, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Это хорошо известная формула (Уилкс, 1967). Отметим особые случаи:

$$\sigma_x^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + 2\sigma_1\sigma_3\rho_{13} + 2\sigma_2\sigma_3\rho_{23} \quad (n=3)$$

и

$$\sigma_x^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

(различные виды ошибок являются взаимно независимыми, т. е. $\rho_{rs} = 0$, если $r \neq s$). Кроме того, если каждый вид ошибки является нормально распределенным, то суммарная ошибка также является нормально распределенной.

Абсолютные и относительные ошибки. Если абсолютные ошибки не зависят от точного значения y , то среднеквадратичное отклонение σ_x является постоянным. Однако если ошибки уменьшаются при уменьшении y , то относительная ошибка может быть приблизительно постоянной, так что $\sigma_x = \sigma_0 y$ при постоянном числе σ_0 .

В качестве примера допустим, что измерения являются нормально распределенными относительно среднего значения x и что среднее значение x равно y . Тогда соответствующие распределения будут иметь вид:

$$(2\pi\sigma_x^2)^{-1/2} \cdot \exp\{-(x-y)^2/2\sigma_x^2\} = N(x; y, \sigma_x^2)$$

и

$$(2\pi\sigma_0^2 y^2)^{-1/2} \cdot \exp\{-(x-y)^2/2\sigma_0^2 y^2\} = N(x; y, \sigma_0^2 y^2). \quad (11)$$

Однако имеются также другие возможности. Например, пусть надо определить изменение общей мощности непроницаемых слоев резервуара. При измерении мощности одного непроницаемого слоя дисперсия ошибок измерения должна составлять σ^2 . Если число непроницаемых слоев равно m , то общая дисперсия равна $m\sigma^2$ (сравни уравнение (10)). Однако обычно число m меняется от скважины к скважине. Таким образом, фильтрацию ошибок, описанную в следующем параграфе, следует применять к данным, характеризующим скважины одного класса, когда, например, k -тый класс определяется выражением $10(k-1) < m \leq 10k$, $k = 1, 2, \dots$

Систематические ошибки. Измерения должны быть симметрично распределенными относительно точного значения y , а среднее значение x всех измерений должно быть равно y . Однако измерения могут иметь смещение, дающее систематическую ошибку $\Delta = x - y$ и, возможно, асимметрию распределения измерений. Допустим; например, что в пределах резервуара плохо определяется граница между проницаемым и непроницаемым слоями. Тогда в исследовании может быть видна тенденция к переоценке толщин непроницаемых слоев в среднем на h дюймов. В этом случае

$$\Delta = mh,$$

где m — число непроницаемых слоев.

Допустим, что Y является точным значением некоторой случайной величины при атмосферном давлении с относительной частотной кривой $g(Y)$ и что Z является соответствующим значением для условий, имеющих место в резервуаре. Далее, допустим, что $Y = G(Z)$ является функцией, описывающей зависимость Y от Z . Тогда вероятность того, что $y < Y \leq y + dy$ равна $g(y)dy$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка. Следовательно, вероятность того, что $z < Z \leq z + dz$, равна

$g(y)dy = g(G(z)) \frac{dG}{dz} dz$, т. е. если Y является нормально распределенной по закону $N(y, \bar{y}, \sigma_y^2) dy$ и если $Y = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2$, то Z распределяется по закону $(a_1 + 2a_2 z)^{-1/2} \exp\{-(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 - \bar{y})^2 / 2\sigma_y^2\} dz$.

Это показывает, что систематические ошибки могут очень серьезно влиять на изменчивость случайной величины. Если Y является линейной функцией $Y = a_0 + a_1 Z$ и если она распределена по закону $N(y; \bar{y}, \sigma_y^2)$, то Z также является нормально распределенным со средним значением $\bar{z} = (\bar{y} - a_0)/a_1$ и дисперсией $\sigma_z^2 = (\sigma_y/a_1)^2$.

ФИЛЬТРАЦИЯ ОШИБОК

Пусть \bar{y} является точным средним значением какого-либо свойства породы. Допустим далее, что x_i является отдельным значением, измеренным в некоторой точке i ($i = 1, 2, \dots, p$), y_i — соответствующим точным значением. Тогда локальная ошибка равна $x_i - y_i$, локальное отклонение, вызванное изменчивостью породы, будет $y_i - \bar{y}$, а полное отклонение $x_i - \bar{y}$. Очевидно, мы не можем корректировать отдельные значения x_1, x_2, \dots, x_p для того, чтобы получить точные значения y_1, y_2, \dots, y_p , которые могли бы определять частотную кривую $g(y)$, более или менее отражающую изменчивость, вызываемую неоднородностью промышленной зоны. Однако мы в состоянии отфильтровать ряд x_1, x_2, \dots, x_p таким образом, чтобы получить среднее значение \bar{y} , дисперсию $\sigma_y^2 = \mu_{2y}$ и все другие моменты $\mu_{ry} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (y_i - \bar{y})^r$, где $r = 3, 4, \dots$, функции $g(y)$. Это решает проблему,

поскольку преобразование последовательности моментов в соответствующую функцию распределения является стандартной процедурой.

Данные некоррелированы, стандартное отклонение σ_x суммарной случайной ошибки постоянно. Допустим, что Δ является систематической ошибкой наблюдения, $\sigma_x^2 = \mu_{2x}$ — дисперсией случайных ошибок e_i , а μ_{rx} — r -тым моментом ошибок относительно их среднего значения Δ . Δ и μ_{rx} получаем путем измерения отдельного значения s раз и вычисления:

$$\Delta = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s e_i, \quad \sigma_x^2 = \mu_{2x} = \frac{1}{s-1} \sum_{i=1}^s (e_i - \Delta)^2,$$

$$\mu_{rx} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (e_i - \Delta)^r, \quad r = 3, 4, \dots \quad (12)$$

Обычно ошибки оказываются нормально распределенными или по крайней мере симметричными относительно среднего значения Δ . Тогда $\mu_{rx} = 0$, если r нечетное, и $\mu_{rx} > 0$, если r четное. В случае нормального распределения $\mu_{2n} = 1 \cdot 3 \dots (2n - 1) \sigma_x^{2n}$ $n = 1, 2, \dots$

Для того чтобы отфильтровать ряд x_1, x_2, \dots, x_p , вычислим

$$\bar{x} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i, \quad \mu_2 = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x})^2,$$

$$\mu_r = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x})^r, \quad r = 3, 4, \dots; \quad (13)$$

тогда

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \bar{y} + \Delta, \\
 \mu_2 &= \mu_{2y} + \mu_{2x}, \\
 \mu_3 &= \mu_{3y} + \mu_{3x}, \\
 \mu_4 &= \mu_{4y} + 6\mu_{2y}\mu_{2x} + \mu_{4x}, \\
 \mu_5 &= \mu_{5y} + 10\mu_{3y}\mu_{2x} + 10\mu_{2y}\mu_{3x} + \mu_{5x}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Момент μ_r получим путем разложения выражения $(\mu_x + \mu_y)^r$ с помощью бинома, подставляя вместо μ_x^i и μ_y^i соответственно μ_{ix} и μ_{iy} и приравнивая как μ_{1x} , так и μ_{1y} нулю.

Пример. Вернемся к вопросу, упомянутому в последнем параграфе, а именно к определению суммарной толщины m непроницаемых слоев, где m изменяется от скважины к скважине. Предположим, что в результате исследования выяснилось, что ошибка при измерении мощности одного слоя является нормально распределенной со средним значением $+1/10$ фт (3.05 см) и стандартным отклонением также равным $1/10$ фт (3.05 см). Отсюда суммарная ошибка имеет среднее значение $\Delta = m/10$ и дисперсию $\sigma_x^2 = m/100$.

m	Допускаемое суммарное распределение				Отфильтрованное распределение			
	\bar{x}	μ_2	μ_3	μ_4	\bar{y}	μ_{2y}	μ_{3y}	μ_{4y}
10	12.9	1.43	1.72	9.93	11.9	1.33	1.72	9.10
100	22.7	2.40	1.78	20.22	12.7	1.40	1.78	8.82

Измеренные распределения значительно отличаются друг от друга, в то время как отфильтрованные, очевидно, приближаются друг к другу по значению.

Данные некоррелированы, суммарная ошибка является нормально распределенной с постоянной относительной ошибкой. В этом случае стандартное отклонение ошибок равно $\sigma_0 y$, причем фиксированное значение σ_0 является параметром используемого метода измерения. Класс возможных функций распределения параметра породы y составляют функции, равные нулю за пределами интервала $0 < \alpha \leq y \leq \beta$ с фиксированными числами α и β . Это не представляет серьезным ограничением. Формулы фильтра имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \bar{y} + \Delta, \\
 \mu_2 &= (1 + \sigma_0^2) \mu_{2y} + \bar{y}^2 \sigma_0^2, \\
 \mu_3 &= (1 + 3\sigma_0^2) \mu_{3y} + 6\bar{y} \sigma_0^2 \mu_{2y}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Приведенные выражения показывают, что симметричное распределение ошибки вызывает асимметрию! Моменты более высоких порядков могут быть получены с помощью уравнений (17) и (19) (см. ниже).

Данные коррелированы. Рассмотрим n взаимозависимых параметров породы с дисперсией σ_{iy}^2 , $i = 1, 2, \dots, n$, и коэффициентами корреляции $\rho_{rs,y}$, $r = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots, n$.

Суммарная ошибка метода измерения параметра i будет иметь фиксированную дисперсию σ_{ix}^2 . Вследствие наложения ошибок на изменчивость породы получим дисперсии σ_i^2 и коэффициенты корреляции ρ_{rs} . Тогда

$$\begin{aligned}
 \sigma_i^2 &= \sigma_{iy}^2 + \sigma_{ix}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
 \sigma_r \sigma_s \rho_{rs} &= \sigma_{ry} \sigma_{sy} \rho_{rs,y}, \quad r, s = 1, 2, \dots, n, \quad r \neq s,
 \end{aligned} \tag{16}$$

если ошибки и параметры породы являются нормально распределенными. Это показывает, что случайные ошибки переводят истинный коэффициент корреляции $\rho_{rs,y}$ в ρ_{rs} при помощи множителя $[1 - (\sigma_{rx}^2 / \sigma_r^2)]^{1/2} [1 - (\sigma_{sx}^2 / \sigma_s^2)]^{1/2}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЫВОД ФОРМУЛ

Фильтрация ошибок некоррелированных данных

Пусть функция $E(x)$ — плотность распределения вероятностей измерений x ($a \leq x \leq b$), так что $\bar{x} = \int_a^b x E(x) dx = \bar{y} + \Delta$. Далее, допустим, что функция $V(y)$ является плотностью распределения вероятностной изменчивости свойств породы в пределах $\alpha \leq y \leq \beta$ со средним значением $\bar{y} = \int_\alpha^\beta y V(y) dy$. Тогда вероятность того, что измеренная величина лежит в интервале $(x, x + dx]$ и что точное значение лежит в интервале $(y, y + dy]$, равна $E(x) V(y) dx dy$. Следовательно, вероятность того, что измеренная величина находится в интервале $(x, x + dx)$ без наложения какого-либо условия на y , равна

$$T(x) = \int_\alpha^\beta V(y) E(x, \bar{x}) dy.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_a^b x T(x) dx = \int_a^b x dx \int_\alpha^\beta V E dy = \int_a^b \int_\alpha^\beta x V E dy dx = \int_\alpha^\beta \int_a^b x V E dx dy = \\ &= \int_\alpha^\beta V dy \int_a^b x E dx = \int_\alpha^\beta x V dy = \bar{y} + \Delta. \end{aligned}$$

Далее, r -тый момент $T(x)$ относительно его среднего значения \bar{x} равен

$$\mu_r = \int_a^b (x - \bar{x})^r T(x) dx = \int_\alpha^\beta V(y) dy \int_a^b (x - \bar{x})^r E(x) dx,$$

однако

$$x - \bar{x} = x - \bar{y} - \Delta = (x - y - \Delta) + (y - \bar{y}) = (x - x) + (y - \bar{y}).$$

Отсюда

$$\mu_r = \int_\alpha^\beta V(y) dy \int_a^b [(x - x) + (y - \bar{y})]^r E(x) dx.$$

При разложении подынтегрального выражения получаем

$$\mu_r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \int_\alpha^\beta (y - \bar{y})^{r-i} V(y) dy \int_a^b (x - x)^i E(x) dx,$$

поэтому

$$\mu_r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \int_\alpha^\beta \mu_{ix} (y - \bar{y})^{r-i} V(y) dy. \quad (17)$$

Если μ_{ix} не зависит от y , тогда

$$\mu_r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \mu_{ix} \mu_{r-i, y}, \quad r = 2, 3, \dots \quad (18)$$

Однако для любого распределения $\mu_0 = 1$, а $\mu_1 = 0$. Отсюда уравнения (18) соответствуют уравнениям (14). Если x распределяется в соответствии с выражением $(2\pi\sigma_0^2 y^2)^{-1/2} \cdot \exp\{-(x-y-\Delta)^2/2\sigma_0^2 y^2\}$, то $\mu_{ix} = 0$, если i — нечетное число, и $\mu_{ix} = 1 \cdot 3 \dots (i-1)\sigma_0^i y^i$, если i — четное. В этом случае следует пользоваться формулой

$$\mu_{ny} = \int_{\alpha}^{\beta} (y - \bar{y})^n V(y) dy = \binom{n}{0} \int_{\alpha}^{\beta} y^n V dy - \binom{n}{1} \int_{\alpha}^{\beta} \bar{y} y^{n-1} V dy + \dots, \quad (19)$$

дающей

$$\int_{\alpha}^{\beta} y^2 V(y) dy = \mu_{2y} + \bar{y}^2, \quad \int_{\alpha}^{\beta} y^3 V(y) dy = \mu_{3y} + 3\bar{y}\mu_{2y} + \bar{y}^3$$

и т. д.

Справедливость рассуждений, приведенных в этом параграфе, основывается на справедливости формулы

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Однако эта формула является тождеством, если значение $|f(x, y)|$ ограничено в пределах прямоугольника $[a, b; c, d]$, если $\int_a^b f(x, y) dx$ существует для любого фиксированного значения $y \in [c, d]$ и если $\int_c^d f(x, y) dy$ существует для любого фиксированного значения $x \in [a, b]$ (Фихтенгольд, 1962).

Если прямоугольник станет бесконечной полосой или целой плоскостью, то функция $f(x, y)$ должна достаточно быстро стремиться к нулю, поскольку либо $x \rightarrow \pm \infty$, либо $y \rightarrow \pm \infty$, либо оба сразу.

Производящая функция моментов

Производящая функция моментов является действенным средством для определения плотности распределения вероятности функций случайных величин. Для некоторой плотности распределения вероятности $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) определяем производящую функцию моментов, как

$$\Phi(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{\theta x} dx. \quad (20)$$

Если $\Phi(\theta)$ существует для $-\varepsilon \leq \theta \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, то

$$\Phi^{(i)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f(x) dx. \quad (21)$$

Предположим, что $Y = \psi(X)$ есть непрерывная функция X , а $g(y)$ есть плотность распределения вероятности Y ; тогда производящая функция моментов для $g(y)$ имеет вид:

$$\Phi(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{\theta \psi(x)} dx, \quad \Phi^{(i)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^i g(y) dy. \quad (22)$$

Например, выбор $y = x - \bar{x}$ дает моменты функции $f(x)$ относительно среднего значения \bar{x} . Производящая функция моментов двумерной плотности распределения вероятности $f(x_1, x_2)$, где $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, определяется следующим выражением:

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2} dx_1 dx_2; \quad (23)$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2}$ в точке $\theta_1 = \theta_2 = 0$ дают средние значения \bar{x}_1 и \bar{x}_2 . Если функции $Y_i = \psi_i(X_1, X_2)$ ($i = 1, 2$) являются непрерывными, то производящая функция моментов объединенной плотности распределения вероятности $g(y_1, y_2)$ функций Y_1 и Y_2 имеет вид:

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{\theta_1 \psi_1(x_1, x_2) + \theta_2 \psi_2(x_1, x_2)} dx_1 dx_2. \quad (24)$$

Выбор $y_i = x_i - \bar{x}_i$ ($i = 1, 2$) и определение $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_1^2}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_2^2}$ и $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}$ в точке $\theta_1 = \theta_2 = 0$ дают дисперсии σ_1^2 , σ_2^2 и ковариацию $\rho \sigma_1 \sigma_2$, причем ρ является коэффициентом корреляции. Обобщение для многомерных плотностей распределения вероятностей является очевидным.

Производящая функция моментов Φ , обобщенная для n случайных переменных величин, однозначно определяет соответствующую плотность распределения вероятности, если Φ существует для $-\varepsilon \leq \theta_i \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Производящая функция моментов многомерного нормального распределения

Допустим, что Q является симметричной, положительно определенной, квадратичной формой: $Q = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a_{rs} t_r t_s$, т. е. $a_{rs} = a_{sr}$ и $Q > 0$ для действительных t_i , не равных одновременно нулю. Тогда многомерное нормальное распределение случайных величин Z_1, Z_2, \dots, Z_n определяется как

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{|Q|^{1/2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{r,s} a_{rs} (z_r - \bar{z}_r) (z_s - \bar{z}_s) \right\}, \quad (25)$$

где $|Q|$ — определитель матрицы $[Q]$ соответствующей квадратичной формы. Средние значения f равны $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$, а ковариации

$$\sigma_r \sigma_s \rho_{rs} = a^{rs} = \frac{\text{алгебраическое дополнение элемента } a_{rs} \text{ матрицы } [Q]}{|Q|}, \quad (26)$$

$$\rho_{rr} = 1, \quad -1 \leq \rho_{rs} \leq 1, \quad r \neq s,$$

где σ_r^2 — дисперсия z_r без наложения какого-либо условия на $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}, z_{r+1}, \dots, z_n$, причем ρ_{rs} является коэффициентом корреляции между переменными величинами Z_r и Z_s . Если $n = 2$,

$$Q = a_{11} (z_1 - \bar{z}_1)^2 + 2a_{12} (z_1 - \bar{z}_1) (z_2 - \bar{z}_2) + a_{22} (z_2 - \bar{z}_2)^2,$$

$$|Q| = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \quad (27)$$

Если $n = 3$,

$$\sigma_1^2 = \left| \begin{array}{cc} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array} \right| / |Q|, \quad \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} = - \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{array} \right| / Q$$

и т. д.

Производящая функция моментов переменных величин $t_i = z_i - \bar{z}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, имеет вид:

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = (2\pi)^{-1/2n} |Q|^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q + \sum_{i=1}^n \theta_i (z_i - \bar{z}_i) \right\} \times \\ \times dz_1 dz_2 \dots dz_n. \quad (28)$$

Можно показать (Уилкс, 1967), что

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a^{rs} \theta_r \theta_s \right\}. \quad (29)$$

Допустим, что z_1, z_2, \dots, z_n распределены в соответствии с уравнением (25), а

$$L_p = \sum_{i=1}^n l_{pi} (z_i - \bar{z}_i) = \sum_{i=1}^n l_{pi} t_i \quad (p = 1, 2, \dots, m, m \leq n)$$

являются линейно независимыми линейными функциями от $t_i = z_i - \bar{z}_i$.

Тогда производящая функция моментов величин L_1, L_2, \dots, L_m будет иметь вид:

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = (2\pi)^{-1/2n} \cdot |Q|^{1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q + \sum_{p=1}^m \theta_p L_p \right\} \times \\ \times dz_1 dz_2 \dots dz_n. \quad (30)$$

Можно показать (Уилкс, 1967), что

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \sum_{v=1}^m b^{pv} \theta_p \theta_v \right\}, \quad (31)$$

где $b^{pv} = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a^{rs} l_{pr} l_{vs}$.

Отсюда, если $m = 1$ и $L_1 = L = l_1(z_1 - \bar{z}_1) + l_2(z_2 - \bar{z}_2) + \dots + l_n \times (z_n - \bar{z}_n) = l_1 t_1 + l_2 t_2 + \dots + l_n t_n$, то

$$(2\pi)^{-1/2n} |Q|^{1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q + \theta \cdot \sum_{i=1}^n l_i t_i \right\} dz_1 dz_2 \dots dz_n = \\ = \exp \left\{ \frac{1}{2} \theta^2 \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a^{rs} l_r l_s \right\}. \quad (32)$$

В том случае, если n является небольшим числом, все интегрирования могут быть выполнены путем последовательного применения уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (at^2 \pm 2bt + c) \right\} dt = (2\pi/a)^{1/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(c - \frac{b^2}{a} \right) \right\}, \quad (33)$$

которое следует из уравнений

$$at^2 \pm 2bt = (t\sqrt{a} \pm b/\sqrt{a})^2 - (b^2/a) = v^2 - b^2/a$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2 v^2} dv = (2\pi)^{1/2}.$$

Фильтрация ошибок коррелированных данных

Допустим, что Y_1, Y_2 являются случайными величинами, соответствующими двум свойствам породы с нормальным двумерным распределением, со средними значениями \bar{y}_1, \bar{y}_2 , дисперсиями $\sigma_{y1}^2, \sigma_{y2}^2$ и коэффициентом корреляции ρ_{12} .

Предположим, что измеренные значения X_1 распределены относительно точного значения Y_1 в соответствии с $N(X_1; Y_1, \sigma_{x1}^2)$ и что X_2 изменяется относительно Y_2 в соответствии с $N(X_2; Y_2, \sigma_{x2}^2)$. Вероятность того, что $x_1 < X_1 \leq x_1 + dx_1, x_2 < X_2 \leq x_2 + dx_2, y_1 < Y_1 \leq y_1 + dy_1$ и $y_2 < Y_2 \leq y_2 + dy_2$, равна $f(y_1, y_2) \cdot N(x_1; y_1, \sigma_{x1}^2) \cdot N(x_2; y_2, \sigma_{x2}^2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2$. Суммарные отклонения равны $\Delta_1 = x_1 - \bar{y}_1$ и $\Delta_2 = x_2 - \bar{y}_2$. Тогда совместная производящая функция моментов Δ_1 и Δ_2 имеет вид:

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, y_2) g_1(y_1) g_2(y_2) dy_1 dy_2,$$

где

$$g_i(y_i) = (2\pi\sigma_{xi}^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}S_i} dx_i,$$

$$S_i = (1/\sigma_{xi}^2)(x_i - y_i)^2 - 2\theta_i(x_i - \bar{y}_i) \text{ при } i = 1, 2.$$

Применение уравнения (33) дает:

$$g_i(y_i) = \exp\left\{\frac{1}{2}\theta_i^2\sigma_{xi}^2 + \theta_i(y_i - \bar{y}_i)\right\}.$$

Отсюда

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) = (2\pi)^{-1} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^{1/2} e^{1/2(\theta_1^2\sigma_{x1}^2 + \theta_2^2\sigma_{x2}^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\Sigma} dy_1 dy_2,$$

где

$$\Sigma = a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 - 2\theta_1u_1 - 2\theta_2u_2,$$

а

$$u_i = y_i - \bar{y}_i \quad (i = 1, 2).$$

Сравнение с уравнениями (26)–(29) показывает, что

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) = e^{1/2[(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{y1}^2)\theta_1^2 + (\sigma_{x2}^2 + \sigma_{y2}^2)\theta_2^2 + 2\sigma_{y1}\sigma_{y2}\rho_{12}\theta_1\theta_2]}. \quad (34)$$

Сопоставление этого уравнения с уравнением (29) показывает, что суммарные отклонения Δ_1 и Δ_2 являются нормально распределенными:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \right|_{\theta_1=\theta_2=0} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_2} \right|_{\theta_1=\theta_2=0} = 0,$$

отсюда Δ_1 и Δ_2 равны нулю, а x_1 и x_2 , как среднее значений x для всех точек, равны \bar{y}_1 и \bar{y}_2 соответственно, так что $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_1^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_2^2}$ и $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}$ дают соответственно суммарные дисперсии x_1 и x_2 и ковариацию:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_1^2} \right|_{\theta_1=\theta_2=0} &= \sigma_{x1}^2 + \sigma_{y1}^2 = \sigma_1^2 \text{ (суммарная),} \\ \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_2^2} \right|_{\theta_1=\theta_2=0} &= \sigma_{x2}^2 + \sigma_{y2}^2 = \sigma_2^2 \text{ (суммарная),} \\ \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right|_{\theta_1=\theta_2=0} &= \sigma_{y1}\sigma_{y2}\rho_{12} = \sigma_{1, \text{ сумм.}} \cdot \sigma_{2, \text{ сумм.}} \cdot \rho_{\text{сумм.}} \end{aligned} \quad (35)$$

Очевидно, этот результат можно также вывести из уравнений (26) и (34).

Если имеются три коррелированные случайные величины Y_i , относящиеся к трем разным свойствам породы, со средними значениями \bar{y}_i , дисперсиями $\sigma_{y_i}^2$, изменчивости породы, дисперсиями $\sigma_{x_i}^2$ ошибок и корреляцией между свойствами породы с коэффициентами ρ_{12} , ρ_{13} и ρ_{23} , то совместная производящая функция моментов суммарных отклонений $\Delta_i = x_i - \bar{y}_i$ имеет вид:

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) = (\sqrt{2\pi})^{-3} \cdot |Q|^{1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \theta_i^2 \sigma_{x_i}^2 \right\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \Sigma} dy_1 dy_2 dy_3,$$

где

$$|Q| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Sigma = \sum_{i=1}^3 a_{ii} u_i^2 + 2(a_{12} u_1 u_2 + a_{13} u_1 u_3 + a_{23} u_2 u_3) - 2 \sum_{i=1}^3 \theta_i u_i,$$

$$u_i = y_i - \bar{y}_i.$$

Применение уравнений (28) и (29) дает

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 (a_{ii} + \sigma_{x_i}^2) \theta_i^2 + 2(a^{12} \theta_1 \theta_2 + a^{13} \theta_1 \theta_3 + a^{23} \theta_2 \theta_3) \right] \right\}.$$

В соответствии с уравнением (26)

$$\Phi(\theta_1, \theta_2) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 (\sigma_{y_i}^2 + \sigma_{x_i}^2) \theta_i^2 + 2S \right] \right\},$$

$$S = \sigma_{1y} \sigma_{2y} \rho_{12} \theta_1 \theta_2 + \sigma_{1y} \sigma_{3y} \rho_{13} \theta_1 \theta_3 + \sigma_{2y} \sigma_{3y} \rho_{23} \theta_2 \theta_3. \quad (36)$$

Это показывает, что Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 являются нормально распределенными и что

$$\sigma_{\Delta_i, \text{сумм}}^2 = \sigma_{y_i}^2 + \sigma_{x_i}^2,$$

$$\sigma_{\Delta_i, \text{сумм}}^2 \cdot \sigma_{\Delta_j, \text{сумм}}^2 \cdot \rho_{\Delta_i, \text{сумм}} \cdot \rho_{\Delta_j, \text{сумм}} = \sigma_{y_i} \cdot \sigma_{y_j} \cdot \rho_{ij} \quad (37)$$

$$(i, j = 1, 2, 3, i \neq j).$$

Очевидно, что этот результат справедлив для любого числа коррелированных величин, характеризующих породу.

Распределение произведения двух нормально распределенных сомножителей

Предположим, что случайные величины X_1 , X_2 распределены по закону $(2\pi)^{-1} (A_{11} A_{22} - A_{12}^2)^{1/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} A_{11}^2 (x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2A_{12} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + A_{22} (x_2 - \bar{x}_2)^2 \right\}$. Чтобы получить производящую функцию моментов для $x_1 \cdot x_2$, используем тождество:

$$x_1 x_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + (x_1 - \bar{x}_1) \bar{x}_2 + (x_2 - \bar{x}_2) \bar{x}_1 + (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2), \quad (38)$$

которое следует из равенства $(u + h)(v + k) - uv = hv + ku + hk$.

Отсюда производящая функция моментов для $x_1 x_2$ имеет вид:

$$\Phi(\theta) = (2\pi)^{-1} (A_{11} A_{22} - A_{12}^2)^{1/2} \cdot e^{\theta \bar{x}_1 \bar{x}_2} \cdot J, \quad (39)$$

где

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (A_{11} t_1^2 + 2(A_{12} - \theta) t_1 t_2 + A_{22} t_2^2) + \theta (\bar{x}_2 t_1 + \bar{x}_1 t_2) \right\} dt_1 dt_2, \quad (40)$$

$$t_i = x_i - \bar{x}_i \quad (i = 1, 2).$$

Применение уравнения (32) дает ($a_{11} = A_{11}$, $a_{12} = A_{12} - \theta$, $a_{22} = A_{22}$, $l_1 = \bar{x}_2$, $l_2 = \bar{x}_1$)

$$J = 2\pi |A|^{-1/2} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \theta^2 (a^{11} \bar{x}_2^2 + 2a^{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + a^{22} \bar{x}_1^2) \right\},$$

$$a^{11} = A_{22}/|A|, \quad a^{22} = A_{11}/|A|, \quad a^{12} = -(A_{12} - \theta)/|A|, \quad (41)$$

$$|A| = A_{11}A_{22} - (A_{12} - \theta)^2.$$

Однако

$$|A_0| = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0, \quad (42)$$

поскольку $\theta_0 = A_{11}t_1^2 + 2A_{12}t_1t_2 + A_{22}t_2^2$ является положительно определенной формой. Поэтому $\Phi(\theta)$ существует в окрестности точки $\theta = 0$ и

$$\Phi(\theta) = \Phi_1(\theta) \cdot \Phi_2(\theta), \quad (43)$$

где

$$\Phi_1(\theta) = \left(1 + \frac{\theta(2A_{12} - \theta)}{|A_0|} \right)^{-1/2}, \quad (44)$$

$$\Phi_2(\theta) = e^{\theta \bar{x}_1 \bar{x}_2} e^{1/2 \theta^2} \cdot (a^{11} \bar{x}_2^2 + 2a^{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + a^{22} \bar{x}_1^2);$$

здесь a^{11} , a^{12} и a^{22} являются функциями θ , определяемыми уравнением (41).

Производящая функция моментов $N(x, \bar{x}, \sigma^2)$ имеет вид:

$$\Phi(\theta) = e^{\frac{1}{2} \theta^2 \sigma^2 + \theta \bar{x}}$$

Сравнение с уравнением (43) показывает, что произведение $x_1 \cdot x_2$ не является нормально распределенным. Далее, если $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$, то $\Phi(\theta)$ преобразуется в $\Phi_1(\theta)$. С другой стороны, $\Phi_2(\theta)$ была бы производящей функцией моментов с нормальным распределением, если бы a^{11} , a^{12} и a^{22} не зависели от θ .

Получаем

$$\Phi'(0) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}, \quad (45)$$

как среднее значение \bar{p} произведения $p = x_1 \cdot x_2$.

Чтобы получить производящую функцию моментов $p - \bar{p}$, заменяем во второй формуле уравнений (44) $e^{\theta \bar{x}_1 \bar{x}_2}$ на $e^{-\theta \sigma_1 \sigma_2 \rho}$. Вторая и третья производные новой производящей функции моментов дают:

$$\sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 + \rho_{12}^2) + \sigma_0^2, \quad (46)$$

$$\mu_3 = (6\rho_{12} + 2\rho_{12}^3) \sigma_1^2 \sigma_2^3 + 6\bar{x}_1 \bar{x}_2 (1 - \rho_{12}^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 6\rho_{12} \sigma_0^2 \sigma_1 \sigma_2,$$

где

$$\sigma_0^2 = \sigma_2^2 \bar{x}_1^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \sigma_1^2 \bar{x}_2^2. \quad (47)$$

При выводе этих формул были использованы уравнения

$$-A_{12}/|A_0| = \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}, \quad |A_0|^{-1} = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{12}^2),$$

$$A_{11}/|A_0| = \sigma_2^2, \quad A_{22}/|A_0| = \sigma_1^2, \quad (48)$$

полученные из (27) при условии, что $A_{11} = a_{11}$, $A_{12} = a_{12}$ и $A_{22} = a_{22}$.

**Распределение произведения $p = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$
 n нормально распределенных сомножителей x_1, x_2, \dots, x_n**

Предположим, что случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n распределены в соответствии с $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \cdot |A|^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{r,s}^n A_{rs} (x_r - \bar{x}_r) \times (x_s - \bar{x}_s) \right\}$, причем $|A|$ является определителем элементов A_{rs} . Тогда производящая функция моментов для $p = x_1 x_2, \dots, x_n$ будет иметь вид:

$$\Phi(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{\theta x_1 x_2, \dots, x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (49)$$

Интегрирование может быть выполнено путем n -кратного применения уравнения (33). Другой способ заключается в том, чтобы использовать обобщение уравнения (38), а именно:

$$x_1 x_2, \dots, x_n = V + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i) \frac{V}{\bar{x}_i} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}}^n (x_r - \bar{x}_r) (x_s - \bar{x}_s) \frac{V}{\bar{x}_r \bar{x}_s} + \dots \quad (50)$$

где $V = \bar{x}_1 \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$.

Если $\bar{x}_1 = 0$, то необходимо заменить V/\bar{x}_1 на $\bar{x}_2 \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n$ и т. д. Пренебрегая всеми членами после третьего, из уравнения (50) получим довольно хорошую аппроксимацию $p = x_1 x_2, \dots, x_n$, если \bar{x}_i не является близким к нулю, а $i = 1, 2, \dots, n$. Однако если $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_n = 0$, то эта аппроксимация даст $x_1 x_2, \dots, x_n = 0$.

Очевидно, производящая функция моментов аппроксимации имеет вид:

$$\Phi(\theta) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} |A|^{1/2} \cdot e^{\theta V} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{r,s}^n a_{rs} (x_r - \bar{x}_r) (x_s - \bar{x}_s) + \theta \sum_{i=1}^n (x - \bar{x}_i) \frac{V}{\bar{x}_i} \right\} dx_1 \dots dx_n = \sqrt{\frac{|A|}{|Q|}} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} V^2 \theta^2 \sum_{r,s}^n (\bar{x}_r \cdot \bar{x}_s)^{-1} a_{rs} + \theta V \right\}, \quad (51)$$

где $a_{ii} = A_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $a_{rs} = A_{rs} - \frac{\theta V}{\bar{x}_r \bar{x}_s}$, $r, s = 1, 2, \dots, n$, $r \neq s$, причем $|Q|$ является определителем элементов a_{rs} (смотри уравнение (32)). Несколько менее точная аппроксимация получается из выражения

$$p = x_1 x_2, \dots, x_n \simeq \bar{x}_1 \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i) \frac{V}{\bar{x}_i} = p_0. \quad (52)$$

В соответствии с уравнениями (26) и (32) производящая функция моментов p_0 имеет вид:

$$\Phi(\theta) = \exp \left\{ \theta \bar{x}_1 \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n + \frac{1}{2} V^2 \theta^2 \sum_{r,s}^n \frac{\sigma_r \sigma_s \rho_{rs}}{\bar{x}_r \bar{x}_s} \right\}. \quad (53)$$

Производящая функция моментов для $N(x, \bar{x}, \sigma^2)$

$$\Phi(\theta) = e^{1/2 \theta^2 \sigma^2 + \theta \bar{x}}.$$

Это показывает, что p_0 является нормально распределенным, где

$$\bar{p}_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \sigma_{p_0}^2 = V^2 \sum_{r,s}^n \frac{\sigma_r \sigma_s \rho_{rs}}{\bar{x}_r \bar{x}_s}. \quad (54)$$

Принятые обозначения

$\exp \{x\}$	— e^x .
$N(x; \bar{x}, \sigma^2)$	— нормальное распределение для переменной x со средним значением \bar{x} и дисперсией σ^2 .
$P_{12\dots n}$	— произведение n случайных величин.
X, Y, Z	— случайные величины.
x	— измеряемая величина.
y	— точное значение.
z	— точное значение в условиях резервуара.
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}$	— средние значения.
α_3	— асимметрия μ_3/σ^3 .
μ_r	— r -тый момент относительно среднего значения.
ρ	— коэффициент корреляции.
σ	— среднеквадратичное отклонение от среднего значения.
σ^2	— дисперсия.
$\Phi(\theta)$	— производящая функция моментов (см. приложение).

Л И Т Е Р А Т У Р А

- У и л к с С. Математическая статистика. М., «Наука», 1967, 632 с.
- Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. М., Физматгиз, 1962, 807 с.
- Т u n n W. Determination of some Important Petrophysical Data of Oil and Gas Reserves and Comparison of Values Obtain by Different Methods. — In: The Log Analyst, 1967, p. 35—45.
- W a l s t r o m J. E. et al. Evaluating Uncertainty in Engineering Calculations. — J. Petr. Tech., 1967, p. 1595—1603.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РЕШАЮЩИЕ СИСТЕМЫ ПРИ РАЗВЕДКЕ НА НЕФТЬ

Дж. У. Харбо

Университет, Стенфорд, Калифорния, США

Конечной целью применения вероятностных методов является нахождение лучших экономических решений при проведении изысканий. Для выполнения этого необходимо связать между собой геологию и экономику. К счастью, методы включения результирующих вероятностей в экономику разведки нефти имеются и их использование иллюстрируется ниже на нескольких гипотетических примерах. Грейсон (Grayson, 1960) и Мигилл (Megill, 1971) подготовили хороший материал по использованию вероятности при экономическом анализе риска при проведении изысканий.

Рассмотрим сперва конструкцию «Стоимостной таблицы», в которой перечислены возможные выходы (такие как сухая скважина, скважина в 1 млн. баррелей * и т. п.) в зависимости от возможных альтернативных действий (таких как не бурить, бурить со 100%-й отдачей и т. п.). Пример сокращенной стоимостной таблицы (табл. 1) показывает, что наиболее благоприятный выход будет при нахождении месторождения в 2 млн. баррелей, а наиболее благоприятным действием в случае обнаружения такого месторождения является бурение со 100%-й отдачей. Однако при этом совершенно не учтены вероятности получения различных выходов. Как бы ни желательно было найти месторождение в 2 млн. баррелей, более вероятно, что в действительности выходом бурения будет сухая скважина.

Следующий шаг заключается в придании вероятностных значений возможным выходам, как показано в табл. 2. Финансовые заключения,

* 1 баррель (америк.) равен 159 л.

**Гипотетическая стоимостная таблица
с перечнем возможных действий и выходов (в долларах)**

Возможная продукция, баррели	Не бурить	Бурить со 100%-й отдачей	Сдавать в аренду без учета 1/8 стоимости
Сухая скважина	0	—50000	0
150000	0	425000	71000
500000	0	918000	141000
2000000	0	1138000	171000

Примечание. Объемы разведанных нефтяных месторождений являются доходом после вычитания арендной платы землевладельцу за разработку недр. Принимается, что производительность постоянна и составляет 15000 баррелей в год. Цена нефти в настоящее время равняется 6 долларам за 1 баррель и возрастает на 0.25% в год. Сухая скважина стоит 50000 долларов, а скважина, дающая нефть, — 70000 долларов. Стоимость разработки не учитывается. Учетная ставка равна 16%.

соответствующие каждому выходу и действию, должны быть умножены на оценку вероятности данного выхода, а затем полученные произведения суммированы. Сумма представляет собой ожидаемое значение в денежном выражении (ОЗД) данного действия, именно это значение является наиболее важным для принятия решения. Следует отметить, что в табл. 2 ОЗД такого действия, как бурение со 100%-й выработкой, составит всего 15 000 долларов, хотя стоимость месторождения в 2 млн. баррелей составит более 1 млн. долларов. Однако вероятность месторождения в 2 млн. баррелей очень мала (0.002, или 1 случай на 500), в то время как вероятность сухой скважины велика (0.600).

Таблица 2

**Развитие гипотетической стоимостной таблицы,
представленной в табл. 1**

Возможные выходы после вычитания арендной платы землевладельцу, тыс. баррелей	Вероятность	Стоимость возможных действий							
		выработка, %				сдача в аренду без учета стоимости		сдача в аренду с возвратом после выплаты стоимости	
		100	75	50	25	1/8	1/16	25% выработки	50% выработки
0	0.600	—50	—37	—25	—12	0	0	0	0
15	0.150	—7	—5	—3	—1	9	4	0	0
30	0.100	51	38	25	12	17	8	12	25
45	0.070	107	80	53	26	25	12	26	53
75	0.040	211	158	105	52	40	20	52	105
150	0.020	425	318	212	106	71	35	106	212
300	0.010	712	534	356	178	112	56	178	356
500	0.005	918	688	459	229	141	70	229	459
1000	0.003	1099	824	549	274	166	83	274	549
2000	0.003	1138	853	569	283	171	95	284	569
ОЗД		15	11	7	3	10	5	11	23

Примечание. Действие по выбору 100%-й выработки имеет ОЗД, равное 15 000 долларов. Допущения в отношении экономики и производительности идентичны приведенным в табл. 1. ОЗД дано в тысячах долларов.

При расчете стоимостной таблицы (табл. 2) дополнительное уточнение включает принятие допущений о будущей цене на нефть и придание им вероятностных оценок. Если сделаны допущения, что: а) вероятность того, что цены на нефть останутся стабильными, составляет 0.50, б) вероятность того, что цены на нефть будут повышаться на 2% в год, составляет 0.25, а в) вероятность того, что цены на нефть будут уменьшаться на 1% в год, составляет 0.25, тогда цена на нефть через 10 лет будет со-

ставлять 6.16 доллара за баррель, если сегодняшняя ее цена равна 6.00 долларам и т. д. Будущая стоимость нефти имеется в виду при каждом решении о поисках, независимо от того, выражается это количественно или нет.

Судя по табл. 2, действием с наивысшим ОЗД является сдача в аренду с возвратом после выплаты стоимости скважины, с 50% выработки. Тем не менее все действия, перечисленные в таблице, имеют положительные ОЗД, хотя диапазон их значений велик.

ОЗД, приведенное в табл. 2, не следует рассматривать как прогноз определенных финансовых последствий конкретного действия. Финансовые выводы из каждого конкретного действия, связанного с каждым конкретным выходом, перечислены в таблице. Однако ОЗД каждого действия представляет собой выбранный вес финансовых заключений для того действия, которое соответствует вероятностям выходов. Другими словами, ОЗД, приданное каждому действию, может рассматриваться как статистический прогноз, представляющий собой сумму как благоприятных, так и неблагоприятных финансовых результатов, выраженную одним числом.

Поскольку эта таблица применяется как стоимостная, в ней не учтена способность к риску вкладчика капитала. Однако действие может иметь сильно положительное ОЗД, но может привести и к серьезной потере капитала, равной, например, стоимости сухой скважины. Очевидно, при этом необходимо некоторое изменение стоимостной таблицы, учитывающее способность к риску вкладчика капитала. Например, способность к риску небольшой компании является обычно гораздо более ограниченной, чем способность к риску большой нефтяной компании. Политика риска фирмы удобно выражается в виде концепции выгодности, выдвинутой Д. Бернулли и развитой в концепцию индивидуальной выгодности фон Нейманом и Моргенштерном (Neumann, Morgenstern, 1947). Грейсон (Grayson, 1960) дал превосходное введение к рекомендации по использованию концепции выгодности при принятии решения о разведке на нефть, Ньюендорп (Newendorp, 1967) описал два метода получения функции выгодности.

Концепция выгодности дает средство для описания последствий данного события и действия в терминах их выгодности или желательности для отдельного лица. Это может быть сделано с помощью построения функции (обычно представляемой кривой), связывающей финансовые результаты с **выгодностью**. Выгодность выражается в произвольных единицах и является мерой, положительной или отрицательной, отражающей последствия различных финансовых исходов для вкладчика. Функции выгодности относятся как к организациям, так и к отдельным лицам, они показывают взаимосвязь между желаниями отдельного лица (или компании) выиграть (положительная выгода) в погоне за выгодой. Отдельное лицо — бóльший противник риска (желание избежать потерь у него значительно сильнее желания получить соответствующие выгоды — имеет функцию выгодности, в которой отрицательная часть наклонена более круто, чем положительная (рис. 1). Если допустить, что функция выгодности, изображенная на рис. 1, представляет собой функцию выгодности нефтяной компании, перед которой стоят альтернативы, перечисленные в табл. 2, то можно преобразовать значения, приведенные в этой таблице, в значения выгодности и вычислить ожидаемое значение выгодности (ОЗВ), соответствующее каждому действию. Результаты могут быть представлены в виде табл. 3, аналогичной стоимостной таблице. ОЗВ обеспечит, таким образом, объективный способ для наиболее приемлемого действия посредством выбора такого решения, которому будет соответствовать наивысшая ожидаемая выгодность.

В табл. 3 перечислены последствия возможных действий в зависимости от возможных выходов в отношении выгодности в соответствии с функ-

цией выгоды, изображенной на рис. 1. Иными словами, суммы в долларах, приведенные в табл. 2, преобразованы в соответствующую меру выгоды, определенную с помощью данной функции выгоды. Как показано в табл. 3, действием с наибольшей положительной выгодностью является сдача в аренду участка изыскания и затем его возврат

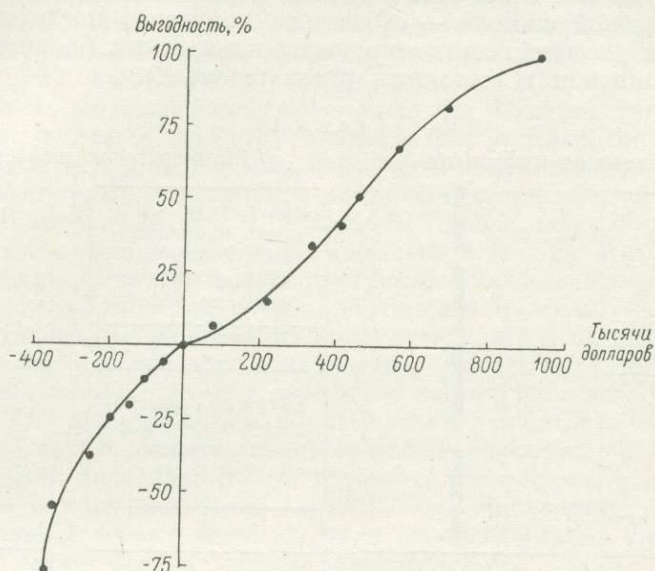


Рис. 1. Кривая гипотетической функции выгоды, использованная при расчете значений выгоды (табл. 3).
Функция выгоды относится к отдельному вкладчику капитала.

с 50%-й выработкой после выплаты. Кроме того, из табл. 3 видно, что хотя все четыре действия, которые включают в себя непосредственную выработку без обеспечения сдачи в аренду, имеют положительные ОЗД (табл. 2), тем не менее все они имеют отрицательные ОЗВ (из-за нежелания компании терпеть убытки), и их необходимо избегать. Однако ситуации со сдачей в аренду являются приемлемыми, поскольку всем им соответствуют положительные ОЗВ, хотя они широко колеблются в зависимости от выбора решения.

Таблица 3

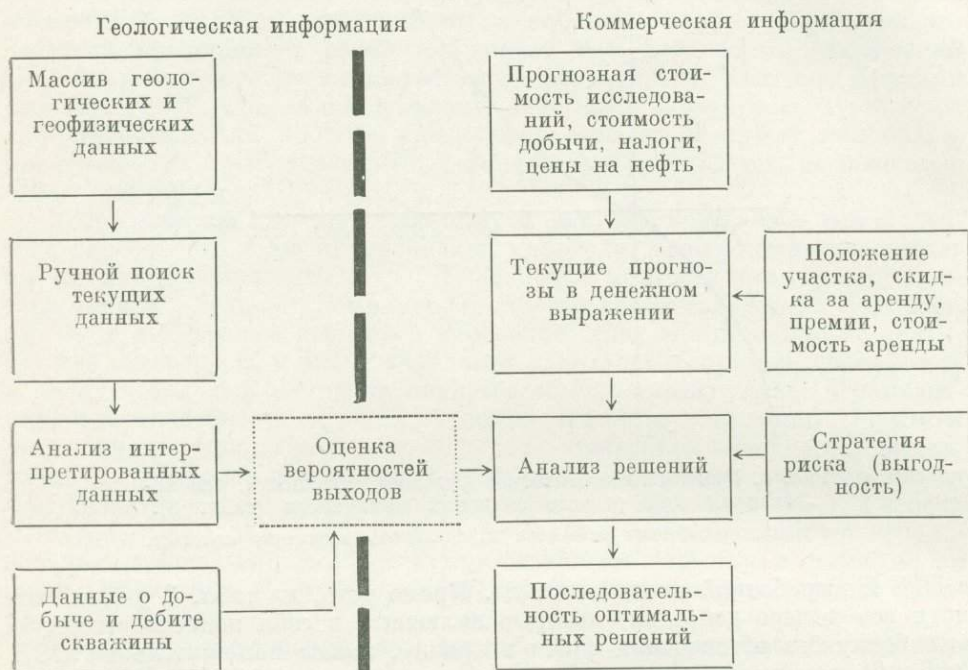
Таблица выгоды, содержащая выходы в денежном выражении

Возможные выходы, тыс. баррелей	Вероятность	Стоимость возможных действий							
		выработка, %				сдача в аренду без учета стоимости		сдача в аренду с возвратом после выплаты	
		100	75	50	25	1/8	1/16	25% выработки	50% выработки
0	0.600	-9	-9	-8	-5	0	0	0	0
15	0.150	-3	-2	-1	0	0	0	0	0
30	0.100	1	1	0	0	0	0	0	0
45	0.070	5	3	1	0	0	0	0	1
75	0.040	15	9	5	1	1	0	1	5
150	0.020	45	30	15	5	2	0	5	15
300	0.010	83	61	35	11	5	1	11	35
500	0.005	98	81	50	18	8	2	18	50
1000	0.003	101	93	63	24	10	3	24	63
2000	0.002	101	95	66	25	11	3	25	66
ОЗВ		-2.5	-3.3	-3.6	-2.7	0.3	0.1	0.6	1.6

КОМПЛЕКСНЫЕ СИСТЕМЫ РАЗВЕДКИ

Теперь мы имеем достаточно широкое представление, чтобы оценить возможность разработки комплексной аналитической системы для принятия решения о разведке. Такая система должна обрабатывать как геологическую, так и экономическую информацию. Конечная цель разработки подобной системы — обеспечить получение последовательности оптимальных решений, соответствующих конкретным финансовым целям нефтяной компании и состоянию риска (схема 1).

Схема 1



Нефтяная промышленность фактически использует общую систему, основные элементы которой указаны на схеме 1. Геологическая и геофизическая информация, а также данные о добыче хранятся в разных массивах данных, независимо от того, используются вычислительные машины или нет. Производится выборочный поиск информации, нужная информация извлекается и интерпретируется. Интерпретированные данные определяются количественно, и дается оценка разведочных работ в соответствии с их вероятностными исходами. После оценки различных выходов выполняется финансовый анализ (часто в виде текущих прогнозов в денежном выражении). Окончательные решения принимаются так, чтобы каждое из них являлось оптимальным для целей компании.

Все эти операции содержат неопределенность и являются по определению вероятностными. Основное положение этой статьи заключается в том, что формализованные, аналитические методы, основанные на математических расчетах, могут быть использованы параллельно с установленными, традиционными методами.

В системах, основанных на математических расчетах, машина не заменяет человека, а помогает ему. Вычислительные машины имеют то преимущество, что многие факторы могут быть взвешены одновременно. Человек, принимающий решение, может последовательно и объективно рассматривать большое количество альтернативных решений.

Разработка комплексной математической системы по принятию решения о разведке на нефть с использованием вычислительных машин —

очень сложная задача. Насколько нам известно, никто еще не предложил такой системы, хотя большинство крупных нефтяных компаний разработали ее элементы. Система Канзасской разведки на нефть (КОХ), разрабатываемая Канзасской геологической службой, является, возможно, одной из наиболее прогрессивных современных систем. Система КОХ включает элементы, показанные на схеме 2 (с. 120).

В прямоугольниках левого ряда дан перечень некоторых способов и технических приемов, используемых в системе КОХ, хотя некоторые из них продолжают разрабатываться. Например, обширный массив данных, содержащий информацию по Стаффордскому округу штата Канзас и северо-западному Канзасу, был многократно просмотрен и переупорядочен при подготовке карт. При нанесении данных, вычерчивании графиков, фильтровании и построении поверхностей тренда для этих провинций использована система SURFACE II (Sampson, 1973). Для вычисления дискриминантных множеств и оценки ошибок использовались другие вычислительные программы, но эти программы дают информацию, которая в свою очередь вводится в программу SURFACE II для последующего изображения на контурной карте и на перспективных диаграммах. Важно, что все эти средства могут быть использованы в тесной связи друг с другом и с обменом информацией между ними.

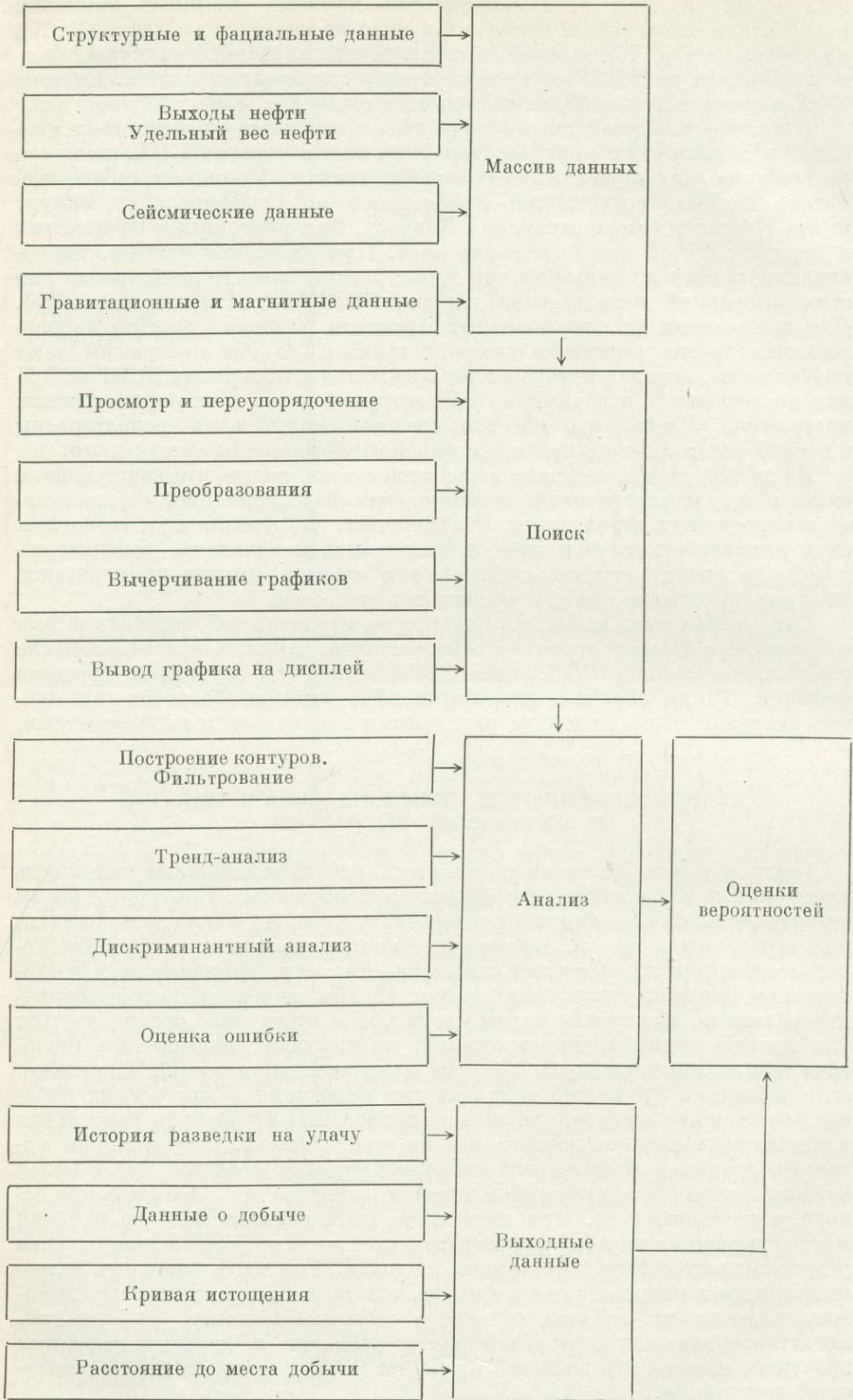
Из первой схемы, приведенной в этой статье, видно, что единственная связь между «геологической» и «коммерческой» информацией осуществляется посредством вероятности. Это означает, что усилия при геологическом анализе в конечном счете должны быть направлены, главным образом, на оценку вероятностей. В свою очередь, анализ коммерческой информации также требует знания вероятностей.

Как указывалось выше, знание теории вероятностей необходимо для современного анализа вероятностных решений, таких, как использование стоимостных таблиц ОЗД, таблиц ожидаемой выгоды и деревьев решений. Таким образом, разработка всей системы обеспечит гармоническую взаимосвязь между ее различными элементами и подэлементами.

КАРТЫ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ДЕНЕЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ, ОЗД И ОЖИДАЕМОЙ ВЫГОДНОСТИ

Геологи и управляющие поисковыми работами понимают полезность контурных карт, дающих разнообразную информацию. Контурные карты широко используются для изображения таких геологических особенностей, как структуры и фации. Кроме того, контурные карты могут быть использованы для изображения статистических мер, применимых к геологическим данным, таких, как ореолы оценки ошибок и дискриминантные различия. Контурные карты могут также эффективно использоваться для представления взаимоотношений, включающих информации геологическую и коммерческую (как это показано на схеме 1). Например, если таблицы ОЗД можно получить для изыскания в конкретных районах, то из этого следует, что «поверхности ОЗД» могут быть рассчитаны и изображены с помощью контуров на всей площади. В этом случае конечным этапом в комплексной системе принятия решений будет вклад благоприятных возможностей вложения капитала на региональной основе, с помощью карт. При этом могут быть использованы по крайней мере четыре типа карт. Карты вероятностей — для отображения выходов установленных событий на данной площади. Ряд карт денежных значений, которые могут отражать финансовые последствия отдельных выходов, вытекающих из установленного события. Наконец, информация, представленная как картами вероятностей, так и картами денежных значений, может быть нанесена на карты ОЗД, а затем на карты ожидаемой выгоды.

Схема 2



Как уже подчеркивалось, картирование реальной поверхности путем нанесения контурных линий легко распространяется и на составление карт воображаемых поверхностей. Поскольку вероятность частного события, такого как бурение сухой скважины, изменяется в соответствии с геологической интерпретацией, то логично выразить изменения вероятностей с помощью контурных карт. На рис. 2 показано семейство гипотетических поверхностей вероятностей. Допустим, что идет бурение разведочной нефтяной скважины, которая расположена на некотором участке в пределах области, показанной на рис. 2. Допустим, что рас-

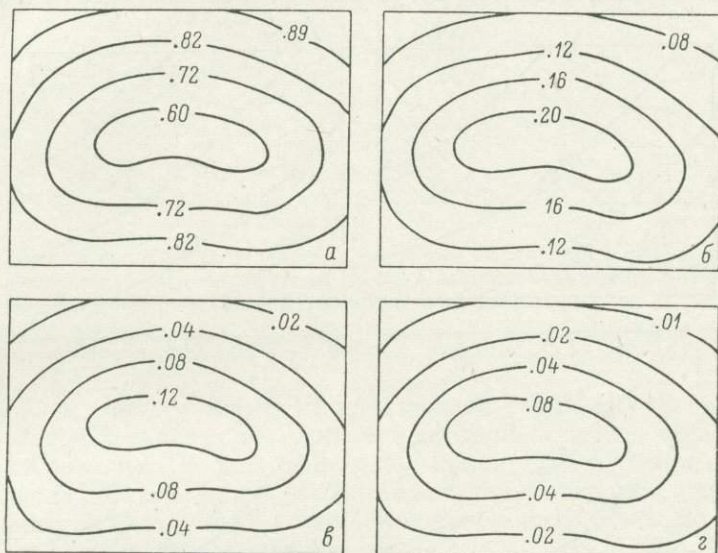


Рис. 2. Гипотетическая вероятность четырех взаимоисключающих результатов, полученных от случайной скважины, пробуренной в любом участке площади.

Скважины, дающие соответственно (в баррелях): а — 0, б — 15 000, в — 40 000, г — 80 000.

сматриваются только четыре возможных исхода бурения: сухая скважина, месторождение с промышленными запасами в 15 000, 40 000 и 80 000 баррелей. В действительности можно было бы рассматривать множество возможных исходов, но для примера обсудим только четыре результата.

Сумма значений вероятностей в конкретном географическом районе в данной области должна равняться 1.0, так как имеется абсолютная уверенность в некотором выходе и выходы определены как обязательно попадающие в один из четырех взаимно исключающих классов. Таким образом, для отображения изменения в пределах конкретной области необходимы четыре поверхности вероятностей, эти поверхности в целом образуют взаимнодополняющие соотношения, так что их сумма в любой географической точке равна 1.0.

Контурные карты вероятностей, приведенные на рис. 2, должны рассматриваться как приближенные оценки вероятностей, что обусловлено существующим уровнем знаний. Допустим, что на данной площади не было пробурено ни одной скважины, но как только будет пробурена разведочная скважина, появится новая информация и возникнет необходимость изменения контурных карт вероятностей. Если скважина окажется сухой, то вероятность того, что другая скважина, пробуренная непосредственно около нее, окажется также сухой, будет весьма высокой (почти 1.0); следовательно, приближенные оценки вероятностей для различных значений успеха (рис. 2, б, в, г) потребуется откорректировать

таким образом, чтобы они оказались весьма низкими в непосредственной близости от этой сухой скважины.

Для каждого частного действия и исхода мы могли бы вычислить «поверхность денежных выражений» и представить ее в виде контуров сумм в долларах в пределах данной области. Например, обнаружение небольшого месторождения будет связано с весьма различными денежными исходами (выражаемыми для всей данной площади) при бурении со 100%-м отбором керна по сравнению с разведочным бурением, выполненным на основе аренды кем-либо другим. В результате анализа различных экономических аспектов могут быть рассчитаны исходы в денежном

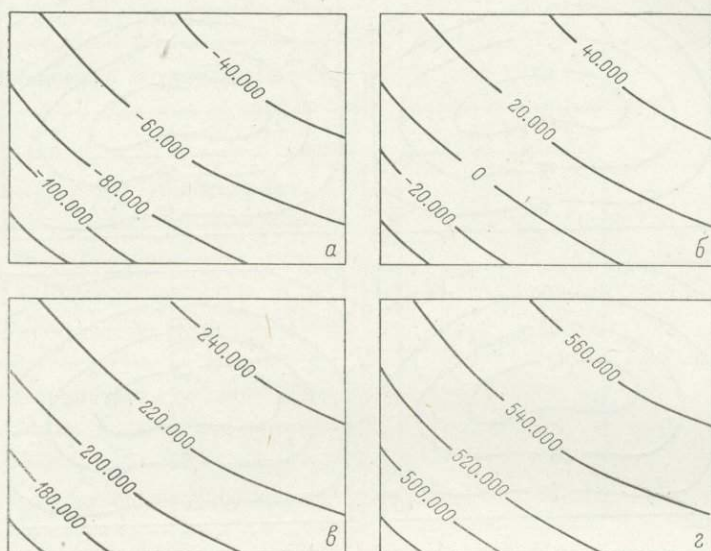


Рис. 3. Карты гипотетической площади, показывающие стоимость бурения (в долларах).

Четыре взаимоисключающих результата относятся к скважинам, дающим соответственно (в баррелях): а — 0, б — 15 000, в — 40 000, г — 80 000.

выражении, в долларах, в пределах данной площади. Они могут различаться от места к месту в зависимости от стоимости бурения и добычи. Например, предположим, что региональное падение пластов направлено на юго-запад; это приводит к тому, что потенциальные продуктивные горизонты становятся в этом направлении все более глубокими. Стоимость бурения сухой скважины (рис. 3, а) в северо-восточном углу этой области составляет всего около 30 000 долларов, но зато достигает почти 115 000 долларов на юго-западе. Такие различия в стоимости бурения, разумеется, будут влиять на «долларовые результаты» в случае открытия месторождения. Месторождения в северо-восточной части этой области будут более выгодными (или связанными с меньшими потерями), чем месторождения на юго-западе из-за различий в стоимости бурения. Значения в денежном выражении будут зависеть также и от учетной ставки. Предполагается, что большие месторождения будут разрабатываться дольше, поэтому часть нефти, которая будет добываться в сравнительно отдаленном будущем, будет иметь меньшую стоимость, чем учитываемая в настоящее время.

Поверхности денежных выражений, иллюстрируемые гипотетическими примерами (рис. 3), не учитывают вероятностей. Каждая такая поверхность относится к конкретному действию, к конкретному выходу, однако поверхность ожидаемых значений в денежном выражении (ОЗД) будет

включать вероятностные представления ряда возможных результатов, являющихся следствием определенного действия. Стоимость в каждой точке этой поверхности будет включать приближенные оценки вероятностей и соответствующие выводы в денежном выражении для всех возможных исходов, являющихся результатом этого конкретного действия.

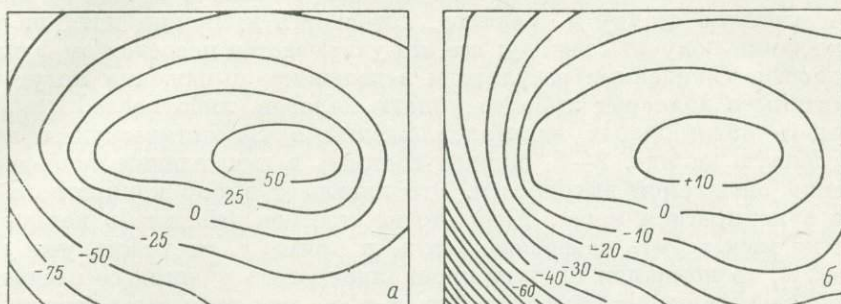


Рис. 4. Карты ожидаемых значений в денежном выражении (ОЗД) и ожидаемой выгоды (ОВД) при бурении со 100%-м опробованием (а) и с использованием функции выгоды (б).

Изолинии ОВД даны в тысячах долларов. Изолинии, означающие на рис. 4, б выгоду, получены с помощью функции, изображенной на рис. 5.

Таким образом, вычисление ОЗД для каждой точки включает перемножение последовательности вероятностей на исходы в денежном выражении и суммирование. На рис. 4 приведен пример для бурения со 100%-м отбором керна. Поверхность рассчитана путем сочетания информации, содержащейся на рис. 2 и 3, для последовательности точек по всей дан-

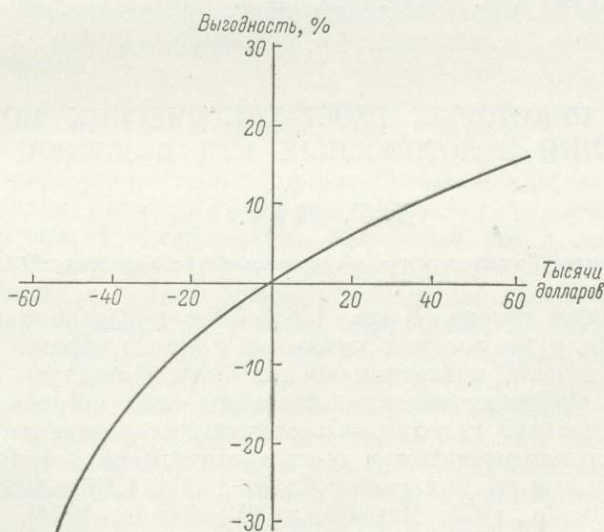


Рис. 5. Функция выгоды, используемая при преобразовании поверхности ОЗД, изображенной на рис. 4, а, в поверхность ожидаемой выгоды (ОВД).

ной площади. Аналогичным образом могут быть рассчитаны поверхности ОЗД для других возможных событий.

Заключительным этапом является составление карт ожидаемой выгоды. Такая карта может быть подготовлена для каждого конкретного действия. На рис. 4, б показана карта ожидаемой выгоды при бурении со 100%-м отбором, полученная с использованием функции выгоды

для гипотетического случая, приведенного на рис. 5. Эффект карты ожидаемой выгодности состоит в том, что она отражает фактически все аспекты, имеющие отношение к принятию решения. Геология рассматривается в вероятностях; стоимость разведки учитывается в затратах; учитывается также выгода от нефтяной продукции (если нефть открыта), включая стоимость добычи, арендную плату, налоги, прогнозы цен на нефть, учетную ставку и, наконец, готовность компании идти на риск при желании получить выгоду; все это учитывается посредством функции выгодности. Ожидаемые результаты в денежном выражении могут быть рассчитаны в долларах либо до уплаты налогов, либо после.

Выбор оптимальных капиталовложений в гипотетическую область, приведенную на рис. 2—5, должен состоять в нахождении наибольшего значения ожидаемой выгодности. Это включает выбор конкретного действия в конкретном месте. Если это конкретное действие в конкретном месте не может быть совершено (если, к примеру, местность уже сдана в аренду), то компании следует проанализировать участок со следующей наибольшей ожидаемой выгодностью, и т. д., при этом все действия должны иметь положительную выгодность.

ЛИТЕРАТУРА

- Gra yson C. J. Decisions under uncertainty. — Drilling decisions by oil and gas operators. Harvard Business School, 1960, 402 p.
- Meg ill R. A. An introduction to exploration economics. Petr. Publis. Co., Tulsa, 1971, 159 p.
- Neumann J., von Morgenstern O. Theory of games and economic behavior. Princeton Univ. Press, 1947, 445 p.
- Newendorp P. D. Application of utility theory to drilling investment decisions. D. Engr. thesis, Univ. Oklahoma, 1967, 145 p.
- Sampson R. J. User's manual for the SURFACE II graphics system. — KOX Project Report. Kansas Geol. Survey, 1973, 144 p.

ОБЗОР НЕКОТОРЫХ ГЕОСТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗОЛОТОНОСНЫХ РУД В ЮЖНОЙ АФРИКЕ

Д. Г. Криге

Англо-Трансваальское объединенное предприятие, ЮАР

В предыдущем обзоре (Krige, 1968) было показано развитие новых методов оценки руды золотых рудников Южной Африки по состоянию на 1966 г. В течение последних 10 лет были достигнуты значительные успехи по дальнейшему совершенствованию этих методов, применению их к полю основного металла, а также по установлению более тесной связи между этими методами и геостатистическими теориями, развиваемыми Матероном и его коллегами (Krige, 1966a, 1966b, 1968, 1970, 1973, 1976; Krige, Rendu, 1975; Matheron, 1971; Rendu, 1976). В настоящей статье рассмотрены главным образом геостатистические модели, которые оказались полезными для практического использования.

Термин «геостатистика», предложенный Матероном в начале 60-х годов, включает изучение распределений оценок в пространстве, таких как содержание руды и мощности, разработку моделей для пространственных переменных и применение этих моделей для оценки рудоносности (Matheron, 1963, 1968). Если исходить из такого определения, то большая часть ранних работ Сисшела, Росса и Криге по применению математической статистики для оценки золотого оруденения в Южной Африке, и особенно метод взвешенного скользящего среднего, введенный около 10 лет назад для оценки запасов (Krige, 1966a), могут быть классици-

цированы как геостатистика. Основная концепция геостатистики состоит в том, что пространственно распределенные переменные обычно являются не случайными переменными, а выражением пространственной структуры внутренних связей, которая может быть представлена количественно с помощью вариограммы (Matheron, 1963) в двух или трех измерениях, в зависимости от природы изучаемой переменной, — например, содержание руды в относительно маломощном осадочном рудном теле или в массивном трехмерном рудном теле соответственно.

Аналогами вариограмм в терминологии классической статистики являются 2- или 3-мерные автокорреляционные или автоковариационные графики, подобные графикам, использованным автором (Krige, 1966a, 1968, 1969). Существенная оговорка относительно применения моделей, основанных на этом приближении, заключается в том, что использованные теоретические модели должны быть адекватны наблюдениям, а пространственная структура, или вариограмма, должна быть устойчива (или стационарна) в пределах площади или объема оцениваемого рудного тела. В природе строгая стационарность маловероятна, но если изменения в характере вариограммы и отклонения от любой другой используемой модели, например, от логнормального распределения, оказывают незначительное влияние на окончательные оценки, то процедура приближения будет оправдана при условии, что получена стоящая выгода от такого приближения по сравнению со схемой классического приближения. На практике, если это необходимо, характеристики могут быть получены путем разбиения рудного тела до тех пор, пока не будет достигнута удовлетворительная стационарность в пределах таких разбиений.

Статистические и геостатистические модели, которые были использованы в Южной Африке, охватывают, главным образом, логнормальное распределение частот, соотношение логарифмическая дисперсия — размер площади, абсолютную дисперсию Де Вийса, вариограмму и крайгинг. Местами направленные и анизотропные схемы вариограммы коррелировались с геологическими данными, например с седиментологическими параметрами.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ

Моделью распределения частот, принятой обычно для оценки содержания золота в рудах, является трехпараметрическая логнормальная функция распределения, где содержание золота (x) после преобразования с помощью функции $\log(x+a)$ распределено нормально и где a — добавочная константа, т. е. третий параметр логнормального распределения. Применимость этой модели к оценке содержания золота в различных типах руд и на различных по размеру участках изучалась автором примерно 15 лет назад (Krige, 1960); в настоящее время этот подход применен к анализу более мелких тел на золотом руднике Хартебистфонтейн (Krige, 1976). Горизонт рудника размером 3 000 м × 900 м был разделен на 5 участков — от № 301 до № 305, а затем участок № 301 был разделен на еще более мелкие площади размером 75 м × 75 м. Полученные при этом наиболее важные графики частот изображены на логарифмически вероятностной бумаге (рис. 1). Графики показывают следующее.

1. При добавлении константы a , равной 150 см г/т, трехпараметрическая логнормальная модель адекватна наблюдаемому распределению для всего горизонта рудника. При обычных оценках запасов данные для взвешенных скользящих средних или оценок крайгинга справедливы для каждой точки опробования, взятой на площади примерно одного размера (Krige, 1966a); следовательно, логнормальная модель может быть использована с уверенностью. Однако логарифмические дисперсии в пределах таких площадей значительно варьируют, и это может сказаться на применении полной логнормальной модели крайгинга.

2. По-видимому, имеет место общий тренд убывания оценок от участка № 301 на запад, к участку № 305; подобный тренд наблюдается и для логарифмических дисперсий. Это говорит о существовании положительной

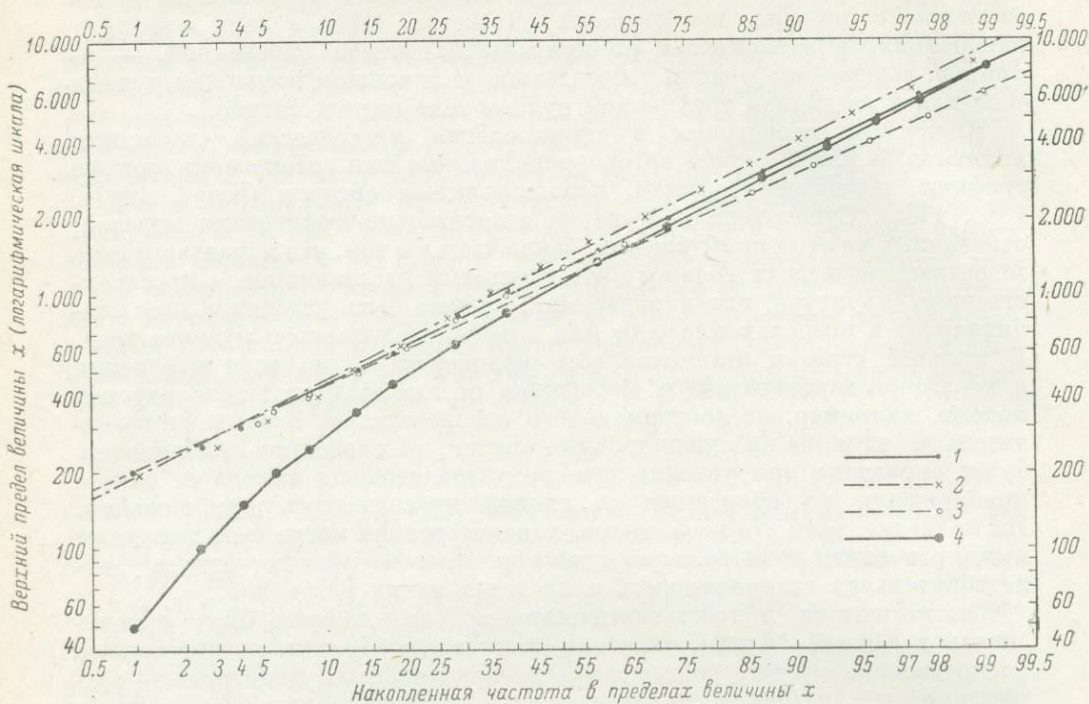


Рис. 1. Распределение частот для горизонта рудника и его двух участков.

Распределение после добавления 150 см·г/т; 1 — горизонт рудника, 2 — участок № 301, 3 — участок № 305, 4 — распределение в пределах горизонта рудника перед добавлением 150 см·г/т.

корреляции между средними оценками и логарифмической дисперсией. Для упомянутых участков обычные статистические тесты показали эту корреляцию как незначимую. Однако для небольших площадей размером 75 м × 75 м корреляция наблюдалась, но в этом случае она была статистически значима.

МОДЕЛЬ «ДИСПЕРСИЯ—РАЗМЕР ПЛОЩАДИ» И АБСОЛЮТНАЯ ДИСПЕРСИЯ

Автор впервые использовал соотношение дисперсия—размер площади в 1952 г. (Krige, 1952) при изучении данных бурения на золотых приисках Оранжевой провинции. Результаты изображены графически (рис. 2). Видно на глаз, что существует линейная зависимость между логарифмической дисперсией оценок и логарифмом размера площади. Позднее такая же зависимость была установлена для оценок рудоносности на всем прииске Клерксдорп (Krige, 1966b), как это показано на рис. 3.

Дальнейшее подтверждение эта модель, а также логарифмическая модель Де Вийса получила при детальном изучении оценок на горизонте рудника Хартбестфонтейн, прииск Клерксдорп (рис. 4).

Математическая основа этой модели детально разработана Матероном (Matheron, 1971) и Рендю (Rendu, 1976).

Модель имеет следующий вид:

$$\text{дисперсия выборки } (\sigma^2) = \text{эффект самородка } (\lambda) + \frac{3\alpha}{2} \log\left(\frac{\text{площадь опробования}}{\text{единичная площадь}}\right),$$

где α — абсолютная дисперсия, зависящая от наклона линии (рис. 4); λ — дисперсия со сдвигом нуля, т. е. дисперсия ошибки внутри площадей

единичного размера (дисперсия, отнесенная к середине интервала сглаживания).

С другой стороны, как видно из табл. 1, рис. 4 и параметров модели, для каждого из пяти участков (301—305) существует зависимость вариаций от средних значений для всего горизонта рудника. Среднее значение «эффекта самородка» равно 0.37 и варьирует от 0.30 для участка № 304

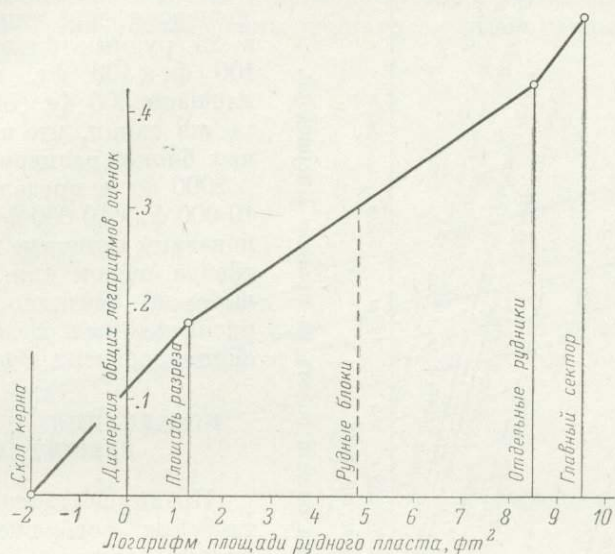


Рис. 2. Зависимость «дисперсия—размер площади» по данным бурения на приисках Оранжевой провинции.

до 0.41 для участка № 301; абсолютная дисперсия средних равна 0.023, она колеблется от 0.015 для участка № 305 до 0.033 для участка № 302. Более высокие значения абсолютных дисперсий, видимо, коррелируются с углами наклона линий, отвечающих участкам, но из-за ограниченного числа наблюдений эта корреляция статистически незначима. Интересно отметить, что при изучении автором рудного тела Ваал-Риер в пределах всего прииска Клерксдорп (Krige, 1966b) среднее значение абсолютной дисперсии после поправки на коэффициент $3/2$ (который не учтен в публикации 1966 г.) было оценено в 0.020.

Таблица 1

Наблюдаемые значения параметров для зависимости дисперсия Де Вийса—размер площади для всего горизонта и 5 участков золотого рудника Хартебестфонтейн

Номер участка	Эффект самородка, λ	Абсолютная дисперсия, α	Среднее, см · г/т
301	0.410	0.028	1730
302	0.370	0.033	1587
303	0.355	0.027	1563
304	0.300	0.023	1527
305	0.390	0.015	1394
Горизонт рудника	0.372	0.023	1554

признаками, такими как направление водотока, ориентировка галек, и т. д.

Однако возможность дальнейшего совершенствования упрощенной процедуры крайгинга на золотых рудниках путем использования полной процедуры логнормального крайгинга (Matheron, 1971; Lallement, 1975) привела к пересмотру логарифмических моделей Де Вийса с точки зрения абсолютной дисперсии и соответствующих моделей линейных вариограмм. Для этой цели были использованы упомянутые выше данные по руднику Хартбистфонтейн.

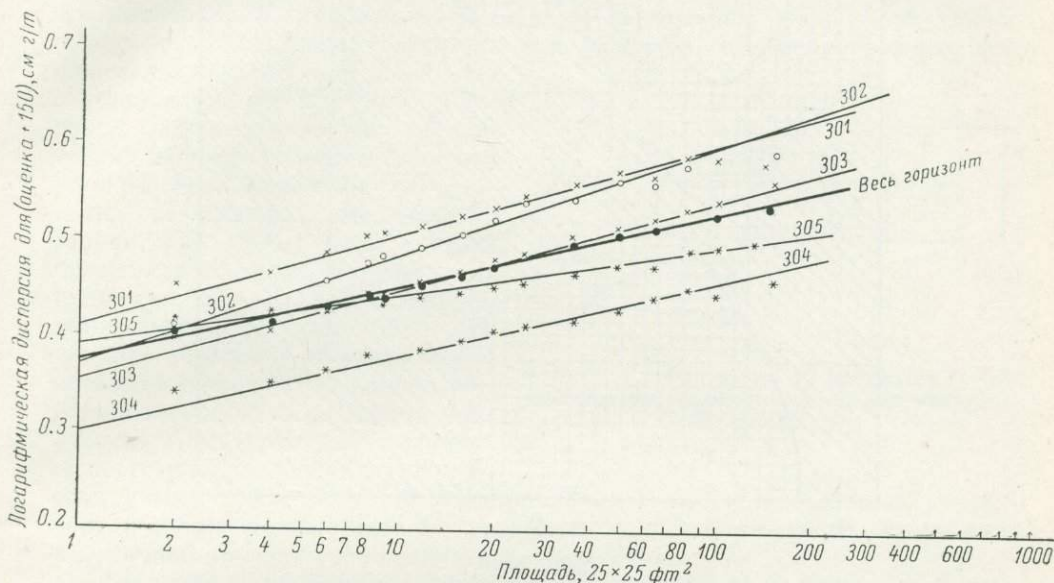


Рис. 4. Зависимость «дисперсия—размер площади» для горизонта золотого рудника Хартбистфонтейн.

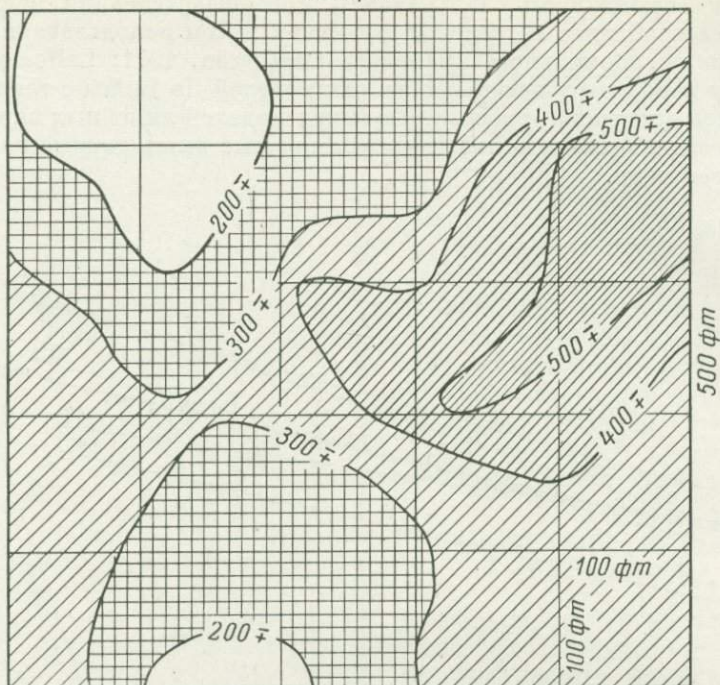
Оценки вариограмм (точнее, оценки полувариограмм) были рассчитаны для всего горизонта и для каждого из 5 участков на основе данных, полученных при всех сдвигах по четырем направлениям: С—Ю, В—З, СВ—ЮЗ, СЗ—ЮВ. Результаты расчетов нанесены на график (рис. 6, см. вкл.). Вариограммы для всего горизонта и для участков № 301, 303—305 кажутся изотропными, т. е. различаются незначимо в зависимости от направлений, поэтому они показаны в виде средних вариограмм. Вариограмма участка № 303 совпадает с вариограммой для всего горизонта. Здесь же нанесены теоретические линейные изотропные вариограммы (тонкие сплошные линии), соответствующие зависимости дисперсия—размер площади, показанной на рис. 4 (Matheron, 1971; Rendu, 1976). В каждом случае существует приемлемое соответствие между наблюдаемой вариограммой (среднее из четырех направлений) и теоретической линейной моделью Де Вийса.

Для участка № 302 (рис. 7, см. вкл.) вариограмма значимо более низкая в направлении С—Ю, т. е. имеет более высокий уровень корреляции в этом направлении.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ

На практике мы используем модель вариограммы среднего для всего горизонта рудника и применяем процедуру геостатистического логнормального крайгинга, основанную на такой модели среднего, когда между участками горизонта встречаются дисперсии, как это показано выше, и когда параметр дисперсии используемой модели логнормального распре-

α
500 φm



б
10000 φm

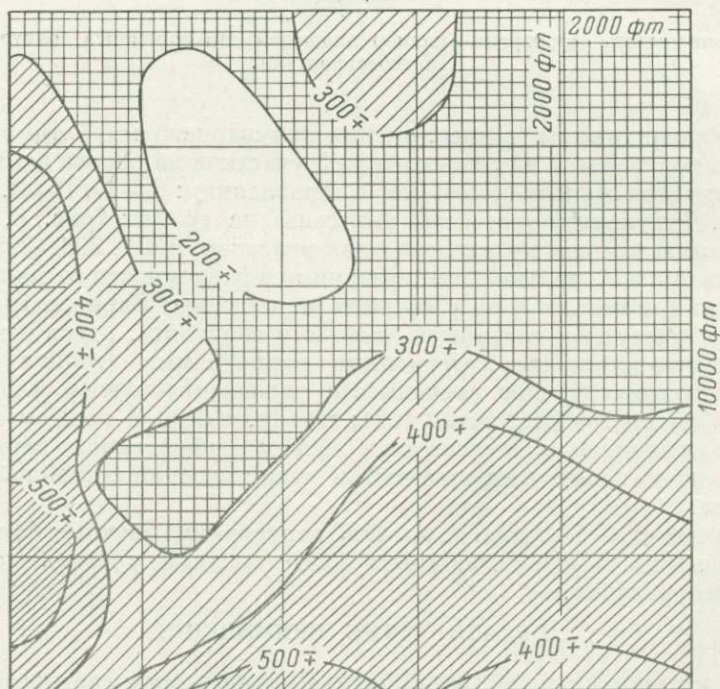


Рис. 5. Типичные поверхности тренда содержания золота на прииске Клерксдорп, полученные на основе двумерных скользящих средних для двух разрезов с подобными средними содержаниями.
а — скользящее среднее для площадей 100 фт×100 фт в пределах выработанного горизонта 500 фт×500 фт; б — скользящее среднее для площадей 2000 фт×2000 фт в пределах выработанного горизонта 10 000 фт×10 000 фт.

деления также имеет дисперсии между участками и внутри них, т. е. когда допущение о стационарности не полностью оправдано.

Предварительное изучение этой проблемы было дано при рассмотрении фиксированной схемы известных данных, использованных для оценки единичной площади блока размером 100 фт×100 фт, как это показано на рис. 8.

Оптимально взвешенные системы для этих данных и соответствующие распределениям и моделям вариограммы Де Вийса сведены в табл. 2. Очевидно, что взвешенная система является достаточно устойчивой и что дисперсия логарифмической ошибки для оценок среднего значения логарифмов несколько возрастает для участков, где использованы неоптимальные веса по сравнению с установленными для всего горизонта. Следовательно, для практических целей разделение горизонта на 5 участков положения существенно не улучшит. Это утешительно, так как данная система применяется на Англо-ваальских рудниках, т. е. система взвешивания используется для всего рудничного горизонта и применяется непосредственно к нетрансформированным оценкам. Однако для участка № 302 может быть получено существенное улучшение оценок, если учесть тренд значений в направлении С—Ю; следовательно, горизонт рудника можно было бы разделить с учетом значимых изменений в величине тренда, наблюдаемого в его пределах.

Дальнейшее улучшение эффективности оценок может быть достигнуто путем применения взвешенных средних, или крайгинга, к преобразованным величинам, т. е. к логарифмам оценок + константа, а затем к преобразованию этих оценок к прямым значениям, выражаемым в см·г/т.

Теоретическая формула для такого преобразования включает предположение об истинной логнормальности, взвешенную среднюю оценку на логарифмической основе (т. е. значение, подвергнутое логарифмическому сглаживанию—крайгингу), дисперсию ошибки этого значения, а также дисперсии выборок единиц различных размеров и рудные блоки, которые необходимо оценить (Lallement, 1975). При оценках золотоносности в случае относительно малых участков, внутри которых дисперсия значительно варьирует от площади к площади, возникают трудности и увеличивается опасность появления смещенных оценок. Это может быть должным образом изучено и устранено только путем детального моделирования тестов на практике, которое проводится в настоящее время.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПРИ ОЦЕНКЕ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ЦВЕТНЫХ МЕТАЛЛОВ

С 1973 г. разрабатывается ряд простых и сложных программ для ЭВМ, улучшающих технику подсчета запасов медно-цинкового рудника «Прииск» на северо-западе Калской провинции. Система основана на стандартной процедуре крайгинга (Krige, 1973) для оценки сортности и удельного веса и не требует объяснений. Однако оценки тоннажа зависят от положения кровли и подошвы рудного тела, определяемого экономическими соображениями. Контуры рудного тела, которые должны обрабатываться, меняются в зависимости от колебаний цен на металл и стоимости добычи.

Рудное тело разбуривается подземными выработками по некоторой нерегулярной сетке, определяемой положением забоев скважин. Следо-

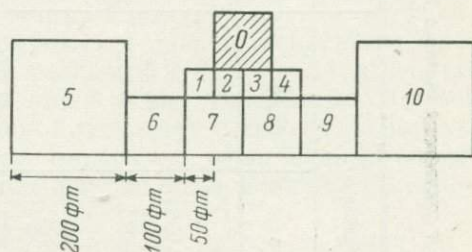


Рис. 8. Расположение 10 квадратов (1/10) наблюдаемых данных для оценки квадрата 100 фт×100 фт.

Наблюденное значение эффекта дисперсий в параметрах систем взвешенного крайгинга и дисперсий ошибки для горизонтов золотого рудника Хартебестфонтейн

	Горизонт рудника	Номер участка на изотропном базисе					Участок № 302 с учетом анизотропии	
		301	302	303	304	305	данные В-З	данные С-Ю
Использованные параметры								
Дисперсия выборки	0.620	0.695	0.680	0.620	0.535	0.545	0.695	0.695
Эффект самородка	0.372	0.410	0.370	0.355	0.300	0.390	—	—
Абсолютная дисперсия	0.023	0.028	0.033	0.027	0.023	0.015	0.033	0.033
Оптимальные веса								
Данные по блокам:								
1	0.118	0.117	0.112	0.115	0.119	0.103	0.066	0.103
2	0.169	0.170	0.174	0.171	0.174	0.146	0.257	0.084
3	0.169	0.170	0.174	0.171	0.174	0.146	0.257	0.084
4	0.118	0.117	0.112	0.115	0.119	0.103	0.066	0.103
5	0.015	-0.018	-0.002	-0.018	-0.015	-0.006	0.001	-0.015
6	0.023	0.015	-0.020	0.002	0.014	0.022	-0.044	-0.044
7	0.015	0.005	-0.013	-0.003	0.002	0.026	0.031	-0.023
8	0.015	0.005	-0.013	-0.003	0.002	0.026	0.031	-0.023
9	0.023	0.015	-0.020	0.002	0.014	0.022	-0.044	-0.044
10	0.015	-0.018	-0.002	-0.018	-0.015	-0.006	0.001	-0.015
Средняя совокупность	0.321	0.423	0.498	0.466	0.411	0.416	0.380	0.792
Дисперсия ошибки среднего значения логарифмов (среднего геометрического)								
На оптимальные веса	0.136	0.162	0.184	0.154	0.132	0.090	0.156	0.215
На веса горизонта рудника	0.136	0.162	0.186	0.155	0.133	0.091	0.165	0.237

вательно, проблема заключается в разработке методики сглаживания поверхности, позволяющей в трехмерном пространстве приводить поверхности кровли и подошвы к одному уровню, в соответствии с данными забоев подземных скважин. Контуры рудного тела сильно варьируют, и обычное машинное оконтуривание блоков дает местами аномальные результаты; в подобном случае нормальная процедура крайгинга оказывается неудовлетворительной. В силу этого был развит и предложен модифицированный вариант универсального крайгинга, оказавшийся приемлемым (Krige, Rendu, 1975; Huijbregts, Matheron, 1971). Система основана главным образом на приведении плоскости к зоне контакта путем задания восьми точек вокруг каждой точки сети, которую надо оценить, и на разности крайгинга. Эта операция осуществляется по равномерной сети 3×3 м, полученные данные оконтуриваются с использованием стандартной процедуры оконтуривания блоков. Результаты дают основу не только для суммирования различий между двумя поверхностями при определении тоннажа, но также и для построения разрезов через рудное тело вдоль любой заданной плоскости с целью планирования бурения шпуров для обеспечения максимума извлечения экономической руды с минимумом разубоживания ее неэкономической рудой или отходами.

ЛИТЕРАТУРА

- Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики. М., «Мир», 1968.
- Huijbregts C., Matheron G. Universal Kriging. — *Canad. Inst. Mining Metall.*, 1971, spec. v. 12, p. 159—169.
- Krige D. G. A statistical analysis of some of the borehole values in the Orange Free State goldfields. — *J. Chem. Metall. and Mining Soc., S. Africa*, 1952, v. 53, p. 47.
- Krige D. G. On the departure of ore value distributions from the lognormal model in South African Gold Mines. — *J. S. African Inst. Mining Metall.*, 1960, v. 61, p. 231—333; 1960, v. 62, p. 63.
- Krige D. G. Two-dimensional weighed moving average trend surfaces for ore valuation. — *J. S. African Inst. Mining Metall.*, 1966a; spec. symp., p. 13.
- Krige D. G. Study of gold and uranium distribution patterns in the Klerksdorp goldfield. — *Geoexploration*, 1966, v. 4, p. 43—53.
- Krige D. G. The role of mathematical statistics in improved ore valuation techniques in South African Gold Mines. — In: *Probl. Mathemat. Geol. Leningrad*, «Nayka», 1968, p. 252—271 (на русск. яз.)
- Krige D. G. The development of statistical models for gold ore valuation in South Africa. Sixth Intern. Mining Congr., Madrid, 1970.
- Krige D. G. Computer applications in investment analysis ore valuation and planning for the Prieska Copper mine. II. Symp. on computer applications in the mineral industries. Tucson, Arizona, April 1973.
- Krige D. G. Some basic considerations in the application of Geostatistics to gold ore valuation. — *S. A. I. M. M.*, spec. vol. on November 1975, 1976.
- Krige D. G., Munro A. H. A review of some conceptual and practical implications of the use of valuation surfaces for gold ore reserve estimation. — *Canad. Inst. Mining Metall.*, 1968, spec. v. 9.
- Krige D. G., Rendu J. M. The fitting of contour surfaces to hanging and foot-wall data for an irregular ore body. — 13 APCOM Clausthal-Zellerfeld, West Germany, October, 1975.
- Krige D. G., Watson M. I., Oberholzer W. J., Du Toit S. R. The use of contour surfaces as predictive models for ore values. A decade of Digital Computing in the Mineral Industry. S. A. I. M. E., Baltimore, Port City Press, 1969, p. 127—161.
- Lallement B. Geostatistische Bewertung einer Goldlagerstätte. 13 APCOM, Clausthal-Zellerfeld. West Germany, October, 1975.
- Matheron G. Principles of Geostatistics. — *Econom. Geol.*, 1963, v. 58, p. 1246—1266.
- Matheron G. The theory of regionalized variables and its applications. Ecole Nation. Super. des Mines de Paris, 1971.
- Rendu J. M. An introduction to Geostatistical Methods of mineral evaluation. — *S. African Inst. Mining Metall.*, 1976, spec. v.

IV. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ЧАСТНЫЙ ТРЕНД-АНАЛИЗ * ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОЛОГИИ УГОЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В СИДНЕЙСКОМ БАССЕЙНЕ (НОВЫЙ ЮЖНЫЙ УЭЛЬС)

А. К. Кук

Университет, отдел геологии, Вуллонгонг, Австралия

Сиднейский бассейн развивался в пермское время как часть мульды, формировавшейся к западу и югу от геосинклинали Новой Англии (рис. 1). Осадконакопление продолжалось и в триасовое время, крупные стратиграфические единицы показаны в табл. 1 (Packham, 1969). Посттриасовая история бассейна точно неизвестна, но наличие юрских спор в диатремах из центральной части бассейна, а также степень метаморфизма углей верхней перми и триаса позволяют предполагать существование послетриасовых отложений значительной мощности. Посттриасовые деформации были относительно слабыми, но они в основном и определили морфологию бассейна. Наблюдаются четкие признаки, подтверждающие наличие сингенетических тектонических деформаций, сопровождавших процесс накопления пермских осадков. Соответствующие полевые данные обобщены в работе Раггата (Raggatt, 1938).

Самые верхние отложения перми содержат разрабатываемые слои угля на площади почти всего бассейна, они хорошо изучены в горных выработках и по данным многочисленных разведочных скважин, включая более поздние, пройденные для оценки нефте- и газоносности площади. Эти верхние угленосные слои, по-видимому, являются преимущественно флювиальными образованиями. Межпластовые осадки представлены песчаниками и сланцами, за исключением северной части бассейна, где широко развиты конгломераты. Известняки в разрезе угленосной толщи Сиднейского бассейна не установлены, хотя в некоторых горизонтах встречаются карбонатные конкреции. Сами угли весьма сходны с углями аналогичных разрезов других континентов Гондваны, но несколько отличаются от типичных вестфальских углей северного полушария. Наиболее четкое различие выражено в слабом развитии обломочных пород. Это послужило основанием для высказывания многими исследователями гипотезы о предположительно дрифтовом (наносном) происхождении углей. Часто присутствуют структуры корней; некоторое различие, вероятно, обусловлено также большим различием флоры, поставившей органический материал для углей Гондваны. Повсеместно условия залегания и текстурные особенности углей имеют черты, характерные для углей автохтонного происхождения, и такое происхождение углей принято

* Под частным тренд-анализом (partial trend-surface analysis) автор подразумевает расчет трендов для отдельных участков, в пределах которых наблюдения уклоняются от поверхности тренда, аппроксимирующей данные наблюдений на всей исследуемой территории. При оперировании такими трендами необходима большая осторожность (прим. ред.).

в данной статье. Экзинит* значительно менее распространен, чем в вестфальских углях северного полушария, более обычным является интернит. Угли имеют общий характер, отличающий их от такового вестфаль-

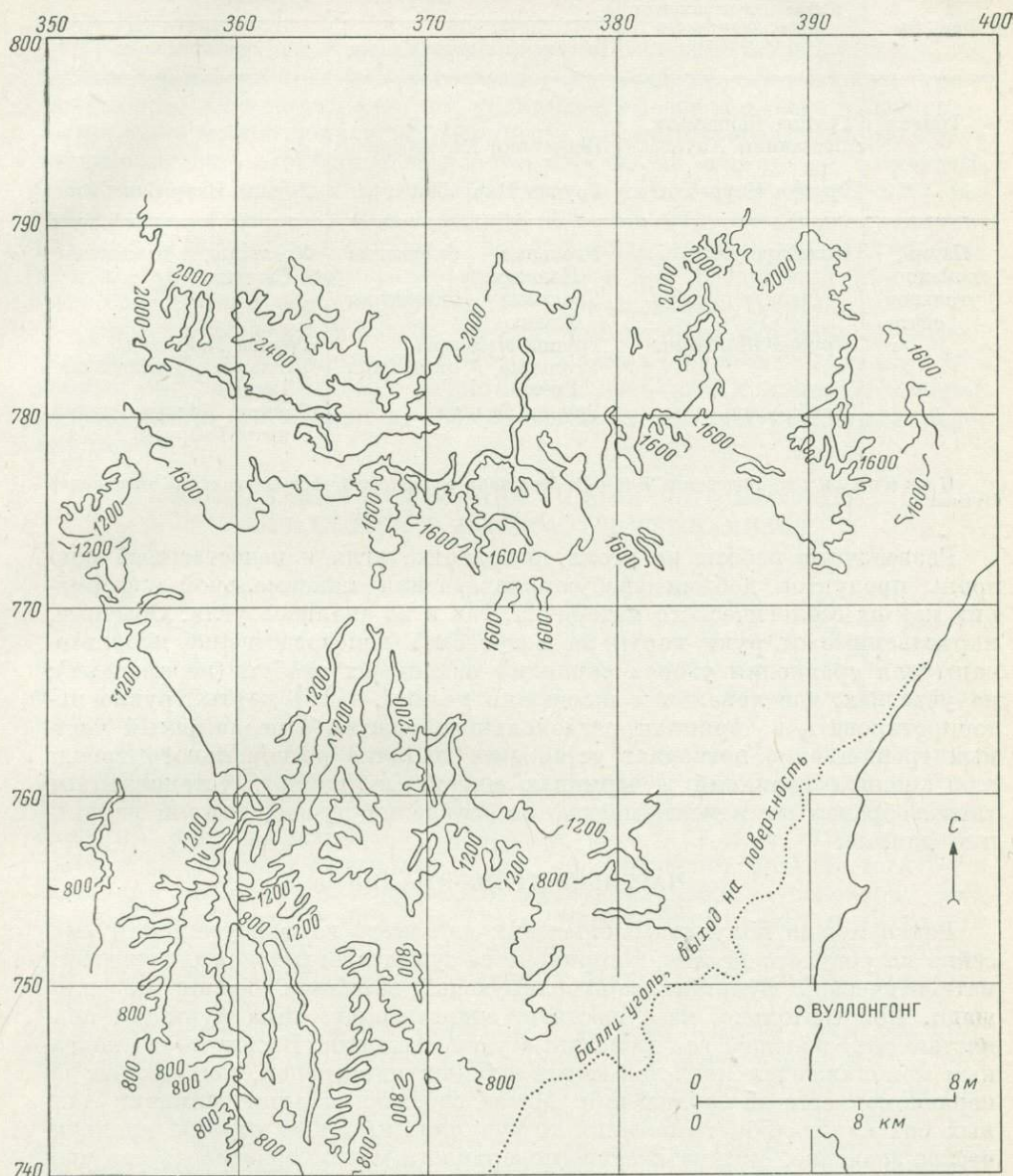


Рис. 1. «Субъективно» построенная карта кровли Балли-уголь, Южное угольное поле.
Интервал между изолиниями — 400 фт (122 м).

ских углей (Сук, 1975). Вероятно, это различие скорее относится к несколько иным условиям осадконакопления, климату и флоре, нежели к какой-либо разнице в способе образования угля. Межпластовые отложения содержат обычно большой процент литокластических пород, переработанный туфогенный материал также является важным компонентом.

* Петрографические термины даны по системе Stopes—Heerlen, установленной Международным комитетом для словаря «Петрология углей» (Coal Petrology) 1963 г. издания, с дополнениями 1971 г.

Основные типы стратиграфических разрезов Сиднейского бассейна

Периоды	Южная, центральная и западная части бассейна	Антиклиналь Лохинвар	
		восточная и южная части	западная часть
Триас	Группа Вьянамата Песчаники Хауксбери Группа Наррабин	Песчаники Хауксбери Группа Наррабин	Группа Наррабин
Пермь, каменно-угольная свита	Иллавара-уголь Группа Шолхевен Клайд-уголь	Угольные отложения Ньюкасл Угольные отложения Томаго Группа Мейтленд Угольные отложения Грета Группа Делвуд	Угольные отложения Синглтен Группа Мейтленд Угольные отложения Грета Группа Делвуд (вулканиты Гайррен)

Примечание. Подгруппа Бич о-ва Мун является верхней частью угольных отложений Ньюкасл.

Разведочные работы на уголь, разработка угля и качественный контроль продуктов добычи требуют извлечения максимальной информации как из геологического материала, так и из анализов угля. Обычные, нарисованные от руки карты не могут быть непосредственно использованы для сравнения узоров вариаций различных свойств (переменных); на участках, где локальные изменения велики, такие карты трудно интерпретировать в терминах регионального тренда. Предлагаемый частный тренд-анализ позволяет установить наличие регионального тренда для анализа вариаций в терминах многих компонент; установленные таким образом компоненты поддаются сравнению лучше, нежели первичные данные.

ЧАСТНЫЙ ТРЕНД-АНАЛИЗ

Редко можно получить наблюдения для всего каменноугольного бассейна по регулярной сети, и априорно не существует методов для введения математической функции, контролирующей вариации оценок на площади. Действительно, не существует единственного типа функции, полностью объясняющей все площадные распределения. В силу этого полезным приближением является метод сглаживания оценок, полученных по неравномерной сети наблюдений. Метод сводится к аппроксимации данных без каких-либо требований к функции, имеющей строгое аналитическое значение. Математические поверхности можно трактовать как численное описание какой-либо части вариаций, так как полное сглаживание данных наблюдений обычно или невозможно, или не требуется.

Методы получения частной тренд-поверхности с помощью обычных полиномов и некоторые расчеты по их применению даны в работах Крамбайна (Krumbein, 1959), Крамбайна и Грайбилла (Krumbein, Graybill, 1965), Харбо и Мерриама (Harbaugh, Merriam, 1968). Используя большие компьютеры, можно сглаживать данные наблюдений поверхностями высоких порядков. Однако такие поверхности имеют тенденцию быть нестабильными, особенно по отношению к изменениям оценок в пределах краевых участков площади опробования. Результаты, излагаемые в данной статье, получены на основе использования полиномов 1—4-й степеней. Если была необходимость получения более сложных поверхностей, то обычно площадь опробования разделялась на меньшие участки так,

чтобы получить менее сложный район, и применялась мозаичная техника. Тщательно подбирая порядок сглаживающей поверхности, можно выделить узоры вариаций так, что крупномасштабные особенности будут описываться трендом, а мелкомасштабные — отклонениями от поверхности тренда.

Тренд-анализ позволяет выявить систематические изменения наблюдаемых данных в пределах всей площади. Если же использовать уравнения более низкой степени, чем уравнение, обеспечивающее общее сглаживание, то можно получить поверхности частного тренда, которые могут характеризовать геометрию всей поверхности, по отдельным ее частям. Отклонения от частных тренд-поверхностей имеют тенденцию давать региональную автокорреляцию. В силу этого контурные карты отклонений (карты разностей) являются потенциально значимыми. Применение частных трендов и карт разностей полезно при разделении крупно- и мелкомасштабных особенностей свойств (Cook, 1969a, 1969b).

Сопоставление компонентов тренда для разных переменных значительно легче, чем сравнение непосредственных первичных данных. Подобным образом могут быть сопоставлены величины и пространственное расположение отклонений от поверхностей тренда для различных переменных.

ИССЛЕДОВАНИЯ ОТЛОЖЕНИЙ СИДНЕЙСКОГО БАССЕЙНА, ВЫПОЛНЕННЫЕ МЕТОДОМ ТРЕНД-АНАЛИЗА

Метод вычерчивания изопакит

Трудности и стоимость разработки угольных пластов в общем случае связаны с глубиной залегания угля, т. е. с мощностью вскрыши. Мощность же вскрыши определяется положением угольных пластов (характером напластования) и топографией поверхности (рельефом).

Большая часть Южного угольного поля в Сиднейском бассейне имеет относительно простую структуру, однако пересеченный рельеф поверхности плато с глубоко врезанными многочисленными оврагами создает сложный узор расположения вскрыши (рис. 1). Кук и Шьельс (Cook, Shiels, 1968) обратили внимание на то, что отношение рельефа к глубине залегания угля, установленное для данной площади, в основном, если не полностью, зависит от характера рельефа. Они вычислили тренд для мощности вскрыши и нашли, что поверхность тренда третьего порядка дает хорошее сглаживание наблюдаемых данных (коэффициент корреляции 0.94, см. рис. 2).

Карты тренда мощности вскрыши дают геометрически простую картину регионального покрытия, что легко может быть использовано при планировании рудника. Кроме того, тренд сглаживает локальный рельеф и обеспечивает получение более реальной картины распределения нагрузок на продуктивный горизонт. Дальнейшее развитие техники дало бы возможность использовать отклонение от тренда для указания зон быстрого изменения мощности вскрыши в районах неглубокого залегания угля.

Анализ взаимоотношения мощности стратиграфических единиц и структурных особенностей бассейна

Раггат (Raggatt, 1938) отметил важность влияния сингенетической тектоники на распределение мощностей отдельных стратиграфических единиц внутри пермского разреза в Сиднейском бассейне. Кук (Cook, 1969a, 1969) изучил изменения мощностей осадков на участке Балли, в пределах Южного угольного поля (рис. 3), а Джонсон (Johnson, 1973, 1974) проанализировал изменения мощностей как самих углей, так и

межпластовых отложений в пределах Северного угольного бассейна на о. Мун, подгруппа Бич.

Мощность всех литологических отложений в угленосных разрезах зависит от баланса материала между привносом осадка (аллохтонного — в случае накопления межпластовых осадков и преимущественно автохтонного — в случае накопления угольных пластов) и уровнем, до которого осадки могут накапливаться. Последний в какой-то степени связан со скоростью прогибания. Там, где фазы позднего тектогенеза сингенетичны

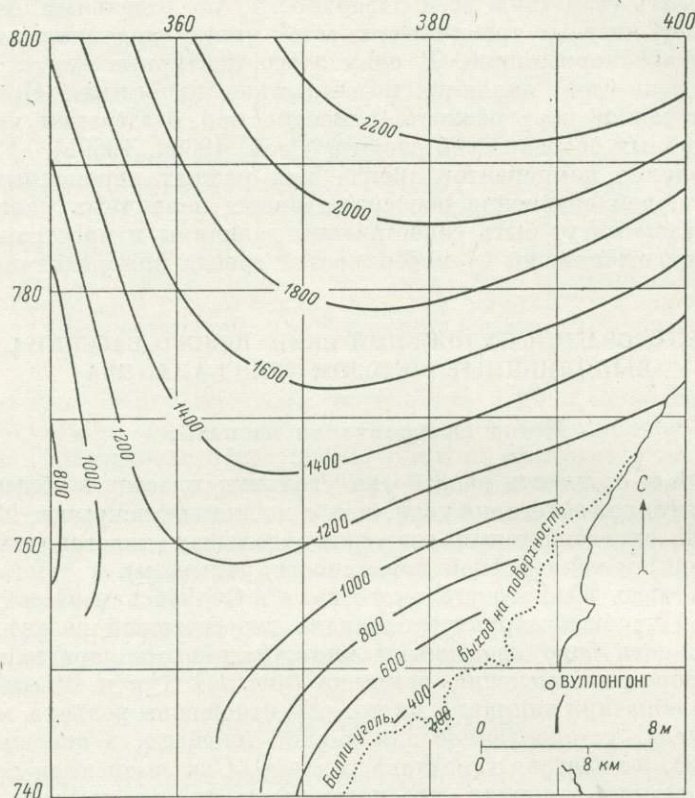


Рис. 2. Поверхность тренда 3-го порядка для мощности кровли Балли-уголь, Южное угольное поле.

177 точек наблюдений. Интервал между изолиниями — 200 фт (~61 м).

структуре, мощность имеет корреляцию с единицами, которые обычно более мощны в пределах структурно отрицательных участков. Однако это взаимоотношение не обязательно будет простым. Например, имеются два ограничивающих условия накопления торфа и, следовательно, формации угольных отложений. Если условия слишком сухие, как результат того, что опускание происходило слишком медленно, процессы окисления будут препятствовать накоплению торфа. Слишком большая скорость оседания, вероятно, благоприятна для нормального, классического обломочного осадконакопления. Там, где это имело место, пласт угля становился более тонким и расщепленным. Что касается неизученной площади, то невозможно априорно решить, обладал ли регион большой или малой скоростью оседания, благоприятной для формирования данной литологии.

Техника, описываемая здесь, помогает установить количественную основу для заключения об относительно наиболее благоприятных струк-

турных условиях осадконакопления для любой литологии и количественно оценить степень структурного контроля над изменением всей мощности для любой геологической провинции.

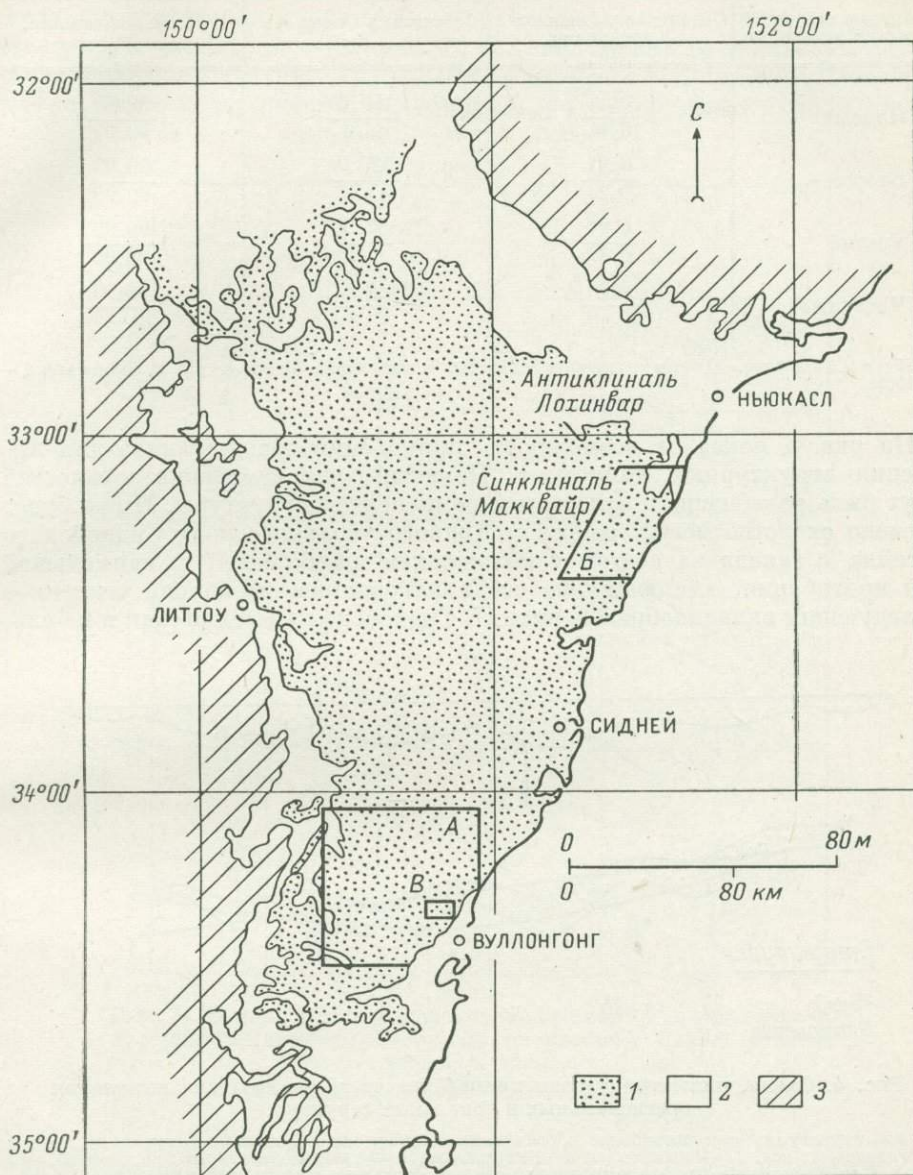


Рис. 3. Карта выходов угленосных отложений в Сиднейском бассейне, Новый Южный Уэльс, Австралия.

А — Южное угольное поле; Б — синклиналь Макквейр; В — угольные разработки Кемира и Корримел. 1 — отложения моложе пермских; 2 — пермские отложения; 3 — отложения древнее пермских.

Взаимоотношения мощности и структуры в углях Балли

Поверхности тренда 1—4-го порядков, сглаживающие структуры угольного пласта (243 точки наблюдений) и его мощность (235 точек наблюдений), а также некоторые обобщенные статистики приведены в табл. 2. Кроме того, сопоставлены поверхности тренда и карты разностей — отклонений от поверхности тренда для коррелируемых оценок.

Статистики поверхностей тренда для структуры (243 наблюдения) и мощностей (235 наблюдений) углей Балли в Южном угольном поле

Порядки поверхностей тренда	Квадрат смешанной корреляции	Статистика Снедекора, F	Уровень значимости, %
Первый	0.56	155.0	99.99
	0.14	18.9	99.99
Второй	0.91	320.0	99.99
	0.29	17.3	99.99
Третий	0.94	37.5	99.99
	0.37	7.6	99.99
Четвертый	0.95	10.5	99.99
	0.40	1.8	70—90

Примечание. Цифры в дробях таблицы: в числителе — структура, в знаменателе — мощность.

На рис. 4 показана возможность применения тренд-анализа для выявления структурных компонент. Показано, как изменения мощностей могут быть разобщены и отнесены к компонентам структуры. Ниже будет отмечено сходство между разрезом Южного угольного поля Сиднейского бассейна с запада на восток с положением наибольшей и наименьшей осей прогибания, влияющих на осадконакопление, несколько усиленное последующим складкообразованием. В Сиднейском бассейне (как и в боль-

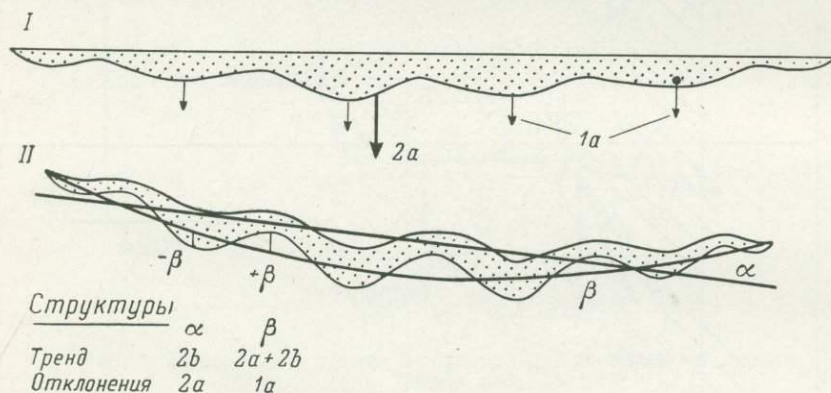


Рис. 4. Схема, иллюстрирующая применение тренд-анализа для выявления региональных и локальных структур.

I — структуры, сингенетические с осадконакоплением: $1a$ — локальные оси, $2a$ — региональная ось. II — послескладчатые структуры. α — тренд-поверхность 1-го порядка, β — тренд-поверхность 2-го порядка для тех же структур. Оценка структур. $-\beta$ — отрицательные отклонения от поверхности тренда, (β) ; $+\beta$ — то же, положительные отклонения.

шинстве других позднепалеозойских и мезозойских бассейнов Австралии) отсутствуют отчетливые инверсии тектонического характера, обычные для многих европейских угольных и нефтеносных бассейнов (Arkell, 1933; Pegrum e. a., 1975).

Тренд структур 1-го порядка показывает наличие регионального падения на север-северо-восток. Тренд мощностей 1-го порядка имеет изопахиты, ориентированные под углом 6° к структурным контурам, и отражает региональное падение мощностей на площади Балли (рис. 5).

Тренд 2-го порядка дает хорошее приближение для части данных, но не позволяет определить главное изменение структур с севера на юг,

контролируемое синклиналию. Таким образом, эти поверхности не дают полезного материала о структуре.

Тренд 4-го порядка дает статистически значимую структурную поверхность и объясняет значительную часть вариации (рис. 6). Дает он также статистически значимую поверхность мощностей и объясняет подавляющую часть этих вариаций. Точки наблюдений расположены неравномерно (Скок, 1969, рис. 1) и имеют некоторую группировку. Проверка стабильности поверхностей, полученных по удаленным группам точек,

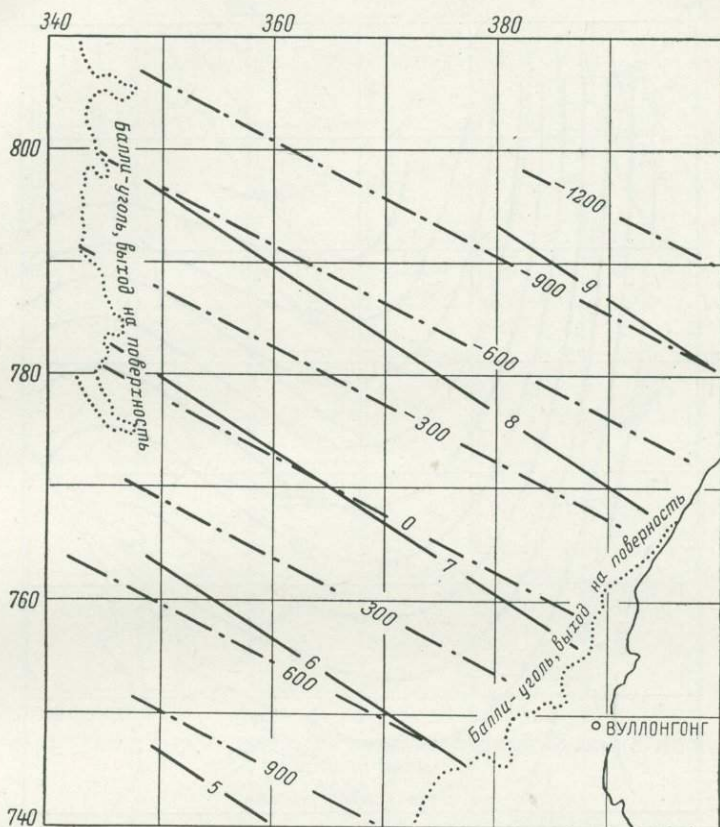


Рис. 5. Тренды 1-го порядка для мощностей (сплошные линии) и структур (прерывистые линии) на площади Балли, Южное угольное поле.

Интервал между изолиниями — 300 фт.

показала высокую степень устойчивости. Это возможно благодаря относительно большому объему наблюдений, а также общему высокому уровню корреляции, которая существует между независимыми и зависимыми переменными.

Узоры трендов структур 4-го порядка и мощностей 3-го порядка (рис. 6, 7) имеют сходство — мощности больше на участках структурных понижений. Это позволяет допустить, что крупные структурные элементы бассейна были активны в процессе осадконакопления и до известной степени контролировали седиментацию.

Отклонения от структурной тренд-поверхности 4-го порядка указывают на существование относительно небольших структур, развитых в пределах ограниченной площади. Большинство структур являются открытыми складками с амплитудой менее 600 фт (приблизительно 200 м). Крупные разломы ассоциируют с некоторыми структурами и имеют раз-

мах смещения до 300 фт (примерно 100 м). Отклонения мощностей от тренд-поверхности 3-го порядка показывают значимую отрицательную корреляцию (в терминах среднего, попарных значений и на площади) с разностями структур и поверхностью 4-го порядка. Это заставляет предполагать, что контроль над седиментацией оказывал влияние даже на мелкие структурные особенности.

На рис. 8 изображен характер совмещения отклонений от поверхностей тренда мощностей и тренда структур. Незаштрихованные участки

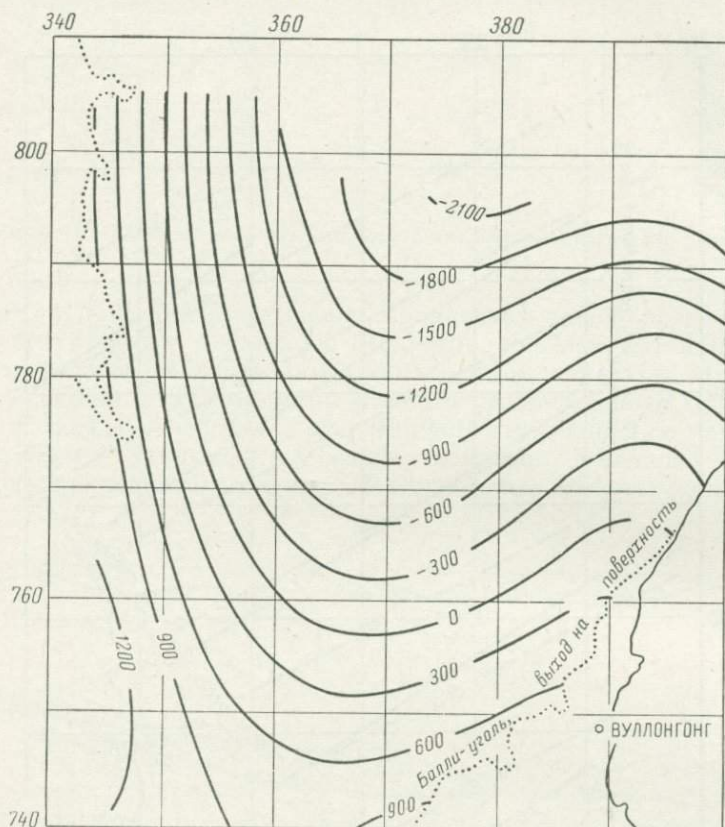


Рис. 6. Тренд 4-го порядка для структур Балли, Южное угольное поле.

Интервал между изолиниями — 300 фт.

означают, что здесь положительные структурные отклонения совпадают с отрицательными отклонениями от тренда мощностей. Клеткой заштрихованы площади, в пределах которых отрицательные отклонения от структурного тренда ассоциируют с положительными отклонениями от тренда мощностей. Эти площади рентабельны для разработки благодаря тому, что в их пределах отложения имеют большие мощности; кроме того, здесь сочетаются и другие благоприятные особенности (см. ниже). Возможны случайные помехи, возникающие при добыче, в частности валуны, менее обычные в структурных понижениях.

Если мощность отложений действительно контролируется скоростью прогибания, то разбиение вариаций мощностей может дать оценку относительной важности различных категорий структурных элементов, а разбиение структурных вариаций — оценку их действительной относительной важности. Данные табл. 3 наводят на мысль, что прогибание в пределах локальных структур (в малом масштабе) в пермское время могло

быть большим, чем в последующее. Однако известно, что многие локальные структуры продолжали существовать в триасе, затухая постепенно от подошвы к кровле разреза. Последующие движения имели местами подчеркнuto выраженную синклиналиную структуру, ориентированную се-

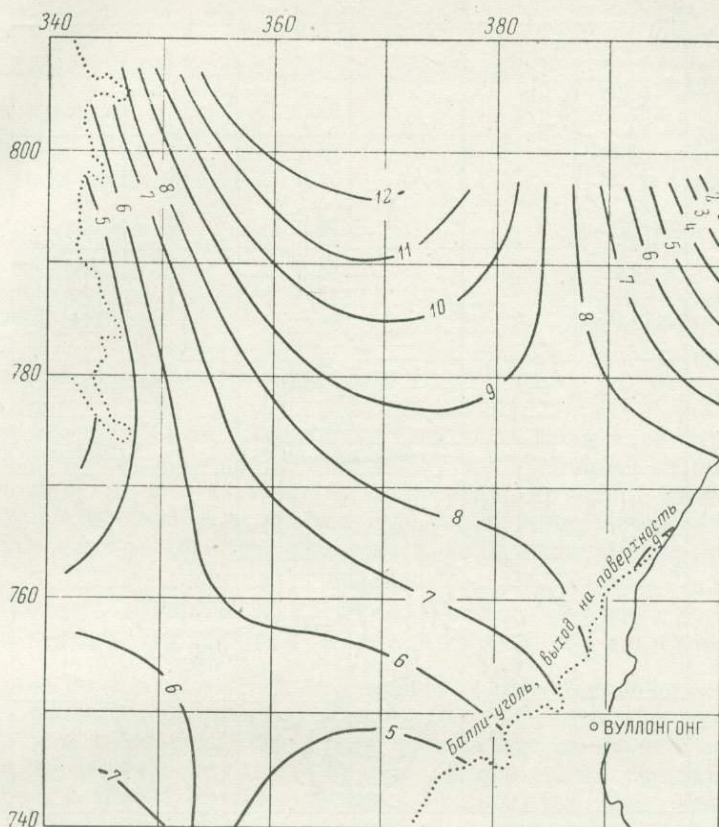


Рис. 7. Тренд 3-го порядка для мощностей углей Балли, Южное угольное поле.

Изолинии даны в футах.

вер—юг, и региональное падение, возрастающее в север-северо-восточном направлении (Скок, 1969 b).

Изложенное относится ко всей площади, где данные собраны по всему Южному угольному полю. Изучение отдельных угольных копей, где данные собраны по более плотной сети наблюдений, заставляет предполагать,

Таблица 3

Относительный вклад структурных элементов в вариации мощностей и структуру угольных пластов Балли, %

Сопоставляемые структуры	Пермское время (основано на изменении мощностей)	Настоящее время (основано на изменении структур)
Мелкомасштабные структуры и случайные вариации — отклонений от поверхности тренда 3-го порядка	62.5	5.5
Оси меридианальной синклинали — тренд 3-го порядка минус тренд 1-го порядка	23.6	38.4
Север-северо-восточное региональное погружение, тренд 1-го порядка	13.9	56.1

что выявленные соотношения между мощностью и структурой столь же обоснованы и для других масштабов наблюдений. Последующее бурение и проходка шахт, возможно, позволят уточнить детали этих соотношений.

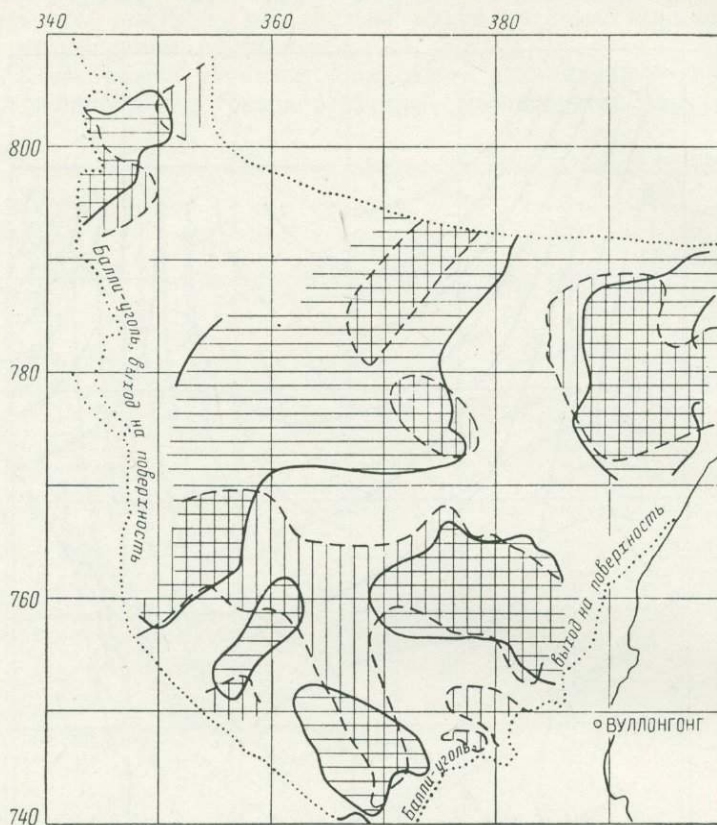


Рис. 8. Карта отклонений от тренда структур (отрицательные обозначены вертикальной штриховкой) и отклонений от тренда 3-го порядка (отрицательные обозначены горизонтальной штриховкой).

Взаимоотношение структуры и мощности отложений в пределах синклинали Макквэйр

Джонсон описал результаты исследований изменений мощности пластов угля и межпластовых отложений в пределах синклинали Макквэйр (Johnson, 1973, 1974), в частности Северного угольного поля о-ва Мун, подгруппы Бич. В табл. 4 приведен процент вариаций, объясняемый поверхностью тренда 4-го порядка, и коэффициент корреляции между отклонениями для мощностей и структур 1-го порядка. Эти данные показывают значительный тренд в изменении мощностей. Толщи приведены снизу вверх, с верхней пачки, принадлежащей углям Вулларах. Для сравнения здесь же дан коэффициент определенности тренда 4-го порядка для структуры угля Вулларах.

Изучение Южного угольного поля показало, что процент вариации, объясняемый трендами, выше для структур и меньше для мощностей, при этом он наиболее высок для углей Вулларах и углей Большого северного поля. Эти же оценки низки для углей Фассиферн и их эквивалентов, особенно там, где они рассланцованы. Возможно это проявляется в силу значительных фациальных изменений на площади, и трудно вы-

Данные о структурах и мощностях для подгруппы Бич
о-ва Мун геосинклинали Макквайр (Johnson, 1973)

Сопоставляемые структуры	Коэффициент определенности 4-го порядка	Коэффициент корреляции отклонения от поверхности тренда мощностей 1-го порядка как функций отклонений от структурной поверхности тренда 1-го порядка (степени свободы)
Пластовая структура, угли Вулларах	0.98	—
Угли Вулларах	0.66	—0.48 (101)
Аргиллит, Меннеринг-парк	0.24	—0.09 * (96)
Конгломерат Тералба	0.54	+0.28 (98)
Большой северный уголь	0.60	—0.36 (99)
Формация Элибана	0.39	—0.13 * (101)
Формация Дойелсон	0.51	—0.18 * (74)
Угли Фассиферн (южные)	0.23	—0.17 (99)

* Не значимы на 95%-м доверительном уровне.

делить их границы. Для отложений углей всего поля характерна значительная отрицательная корреляция между отклонениями от поверхности тренда мощностей и отклонениями от тренда структур. Межпластовые отложения имеют слабую отрицательную корреляцию; исключение составляют конгломераты Тералба, имеющие положительную корреляцию.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТРЕНДА СТРУКТУР, ТРЕНДА МОЩНОСТЕЙ И ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ТРЕНДОВ

Изучение поверхностей тренда в пределах всего Сиднейского бассейна позволяет сделать ряд выводов. Тренды дают значительно лучшее приближение для изменения структур, нежели для изменения мощностей. Несмотря на наличие крупных сбросов, на отдельных участках имеется нечто общее в узорах трендов 3-го и 4-го порядков. Они объясняют не менее 90% всех структурных вариаций. Для некоторых единиц до 70% изменений мощностей объясняется поверхностями тренда более высокого порядка, но обычными являются оценки 50% или меньше (табл. 5).

Таблица 5

Сводные данные, относящиеся к тренд-анализу
переменных, замеренных в углях Балли
(рудники Корримел и Кемира)

Переменные	Порядок поверхности тренда	Процент вариации, объясняемый трендом	Стандартное отклонение оценки	Стандартное отклонение (исходные данные)
Структуры	1	97.9 *	27.3 фт	181.1 фт
	4	99.5 *	12.9 »	
Стратиграфические мощности	1	76.2 *	5.6 дюйма	11.5 дюйма
	4	86.6 *	4.2 »	
Экономические мощности	1	77.9 *	5.5 »	11.8 »
	4	87.3 *	4.2 »	
Зольность поля	1	9.4 **	1.40%	1.47%
	3	41.3 *	1.13%	
Номер английского стандарта разбухания	1	27.9 *	1.07%	1.26%
Содержание фосфора	1	12.3	0.01%	0.02%
Содержание серы	3	11.1 (—)	0.047%	0.050%

* Значимый на уровне 99.5%.

** Значимый на уровне 95—99.5%.

(—) Не значимый на доверительном уровне 95%.

По-видимому, изменения литологии приводят к различию в корреляции между отклонениями от тренда мощностей и отклонениями от тренда структур. В четырех разновидностях углей, где проверялись эти данные (Балли, Вулларх, Большой Северный и Фассиферн), только Фассиферн показал значимую отрицательную связь отклонений от тренда мощностей с отклонениями от тренда структур. Джонсон (Johnson, 1973), изучая разрез синклинали Макквейр, предположил, что отрицательная корреляция для межпластовых осадков обычно менее заметна, чем для пластов угля, конгломераты же Тералба имеют положительную корреляцию. Было бы полезно проверить, сколь обосновано такое заключение для отложений других угольных разрезов. Мощность угольного пласта, казалось бы, должна быть чувствительна к скорости погружения, т. е. к сосуществующей структуре, так как эта структура связана со скоростью прогибания в процессе осадконакопления. Хотя угольные пласты составляют небольшую (обычно около 10%) часть всей мощности угленосных разрезов (таких как циклические разрез пермского каменноугольного бассейна Австралии или карбоновые каменноугольные разрез северного полушария), на формирование торфяных накоплений, имеющих в каждом цикле разреза, приходилась, вероятно, большая часть времени. В силу того что накопление торфа чувствительно к базису эрозии и означает относительно продолжительный период седиментации, оно должно бы быть более показательно для сингенетического прогибания. Накопление же кластического материала, напротив, было относительно быстрым и, видимо, охватывало меньшие масштабы регионального прогибания. На нем, вероятно, сильнее сказывается уплотнение подстилающих пород (включая торф), так как удельный вес кластического материала более чем вдвое превышает плотность вновь образованного торфа. Это отмечается в работе Джонсона (Johnson, 1973), который показал, что кластоосадки имеют отрицательную связь мощностей, не столь сильную со структурой, как с мощностью подстилающих кластических осадков. Хотя оба фактора влияют на все типы седиментации, видимо, мощность углей более точно определяется характером погружения, тогда как мощность кластических отложений скорее контролируется различиями в уплотнении, определяемыми предыдущим типом осадконакопления.

Изменения свойств углей Балли на площади южного крыла синклинали Южная Балли

Площадь южнее оси синклинали Южная Балли и кровли рудников Корримел и Кемира (11.5 миль², или 29.8 км², рис. 3) была выбрана для изучения взаимоотношений между большим числом переменных (Сук, Johnson, 1975). По всему разрезу углей Балли были измерены следующие переменные:

1. Приведенный уровень (фт) подошвы Балли-уголь.
2. Мощность угля (дюймы): а) стратиграфическая, б) экономическая, т. е. стратиграфическая мощность без мощности тонких слоев в кровле и в основании, обычно не разрабатываемых.
3. Зольность угля, исправленная на содержание влаги.
4. Выход летучего материала, исправленный на содержание влаги.
5. Суммарное содержание серы.
6. Содержание фосфора.
7. Номер «английского стандарта разбухания» (B. S. Sw No.).

Число точек наблюдений для различных переменных колебалось между 61 и 122. Число контрольных точек каждого измерения для всех доступных переменных было равно 55.

Поверхности тренда от 1-го до 4-го порядка были вычислены для каждой переменной. В табл. 5 содержатся сводные данные о поверхностях 1-го порядка, о тех, которые статистически значимы, и наивысший статисти-

чески значимый тренд для каждой переменной. Тренды содержания серы не были статистически значимы, но для полноты в таблицу включены сведения о поверхности 3-го порядка.

Статистически значима тренд-поверхность 1-го порядка для направления примерно с северо-запада на юго-восток (рис. 9). Направление простирания, вызываемое содержанием летучих, определяется как типом угля, так и содержанием золы. Тренд структуры 1-го порядка, исправленный с учетом регионального падения в пределах данной площади, как было рассчитано ранее (Соок, 1969а), показывает наиболее близкое соответствие с направлением простираний других переменных. По сравнению со

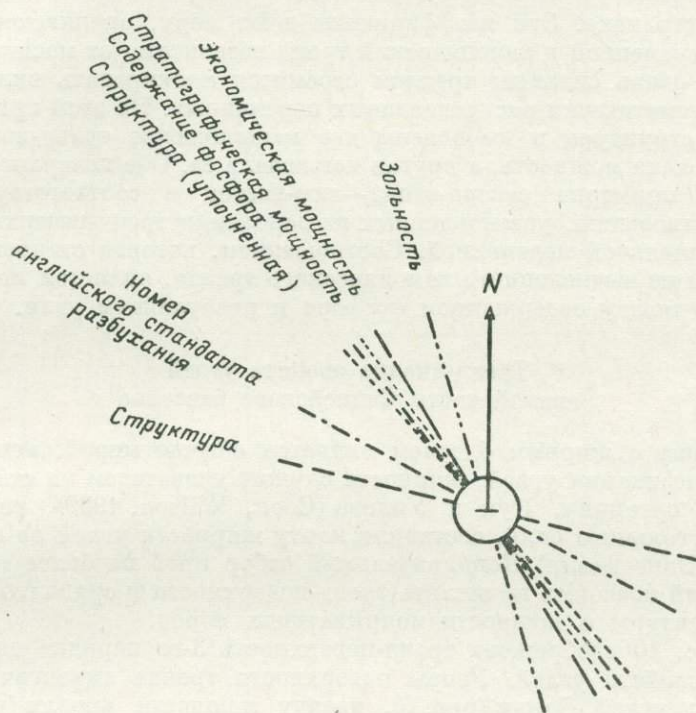


Рис. 9. Направление простираний тренда 1-го порядка анализируемых переменных для углей Балли на участках копей Кемира и Корримел.

структурой угля взаимоотношения имеют следующие формы: 1) обратные связи между мощностью, разбуханием и содержанием фосфора; 2) положительные связи с выходом золы.

Эта общая форма связей сохраняется для отклонений от тренд-поверхностей, хотя в поведении отклонений существуют некоторые локальные исключения.

Результаты тренд-анализа свидетельствуют об относительной прогнозной ценности карт анализируемых переменных. Полученные данные позволяют предполагать, что любая контурная карта изменения содержания серы будет иметь незначительную прогнозную ценность. Прогнозная ценность других переменных колеблется от относительно низкой (например, фосфор) до относительно высокой (например, мощность).

Для проверки выводов, полученных с помощью тренд-анализа, и для дальнейших исследований связи между переменными были вычислены также конические тренд-поверхности по 55 образцам каждой переменной. Эти данные были стандартизированы к среднему 0.0, а стандартные отклонения—к 1.0 для расчета. Коэффициенты, содержащиеся в табл. 6, являются стандартизированными переменными, т. е. влияние масштаба

Данные по канонической корреляции (Жорримел/угольные рудники Кемир)

Первый канонический корень	Направление		Экономическая мощность	Зольность	Выход летучих компонентов	Номер английского стандарта разбухания	Содержание	
	восточное	северное					сера	фосфор
0.901	0.568	+0.811	+0.983	+0.052	-0.089	+0.144	+0.042	+0.000
0.494	0.317	+0.948	Исключ.	0.050	-0.482	+0.833	-0.017	+0.268

на них устранено. Эти коэффициенты дают меру, оценивающую вклад каждой переменной в канонический тренд независимо от масштаба. Переменные с очень сильным трендом стремятся маскировать вклад других менее систематически распределенных переменных. По этой причине была упущена структура и вычислены две канонические тренд-поверхности: одна включала мощность, а другая исключала ее. Обе поверхности ориентированы примерно северо-запад—юго-восток и соответствуют общей форме соотношений, установленных на основании тренд-поверхностей для каждой отдельной переменной. Соотношением, которое становится более очевидным из вычисленного канонического тренда, является положительная связь между содержанием фосфора и разбуханием угля.

Тренд-анализ свойств углей южной части Сиднейского бассейна

Витринит с жирным блеском является обычно мерой, используемой при классификации углей; жирность служит указателем на степень метаморфизма органики. Кук и Уилсон (Cook, Wilson, 1969), изучая угли Южного угольного поля, составили карту жирности углей по горизонтам Балли и Вангавалли. Дополнительный отбор проб по более густой сети наблюдений позволил вычислить тренд-поверхности и сравнить их с трендами структуры и мощности покрывающих пород.

На рис. 10 изображена тренд-поверхность 3-го порядка для отражательных свойств углей. Узоры поверхности тренда аналогичны тренду структуры углей Балли (рис. 6), тренду мощности кровли (рис. 2), но ось расположена восточнее структурного трога (в 10 милях, примерно в 16 км) и несколько восточнее оси максимумов мощности кровли. Тип углей определяется температурой и временем воздействия этой температуры. Температура в пределах самого горизонта угля определяется глубиной залегания и геотермическим градиентом. Общая форма поверхности тренда (рис. 10) может быть объяснена или тем, что оси максимальной мощности кровли лежат восточнее существующего максимума, или тем, что геотермический градиент был более высоким на востоке, нежели на западе. По-видимому, градиент в Сиднейском бассейне растет в восточном направлении, что является более вероятным объяснением различий между рис. 2, 6 и 10.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тренд-анализ применим для решения многих задач при изучении угленосных бассейнов, особенно там, где собрано много систематических наблюдений. Некоторые важные выводы, полученные при использовании частного тренд-анализа и карт отклонений от поверхности тренда, сводятся к следующему.

1. Анализ изменения свойств (переменного) позволяет выявить как смысловое значение контуров, так и оценить эти изменения для большого числа разных переменных.

2. Устранение тренда дает возможность более детально проанализировать особенности небольших вариаций с помощью карт отклонений. Изменения самих отклонений могут соответствовать систематическим отклонениям от трендов и могут быть оконтурены. При этом возможны случайные составляющие, имеющие малое значение.

3. Анализ изменений характеристики на площади помогает сравнивать контуры различных переменных и взаимоотношения между ними. Особенно важен в этом отношении канонический тренд-анализ.

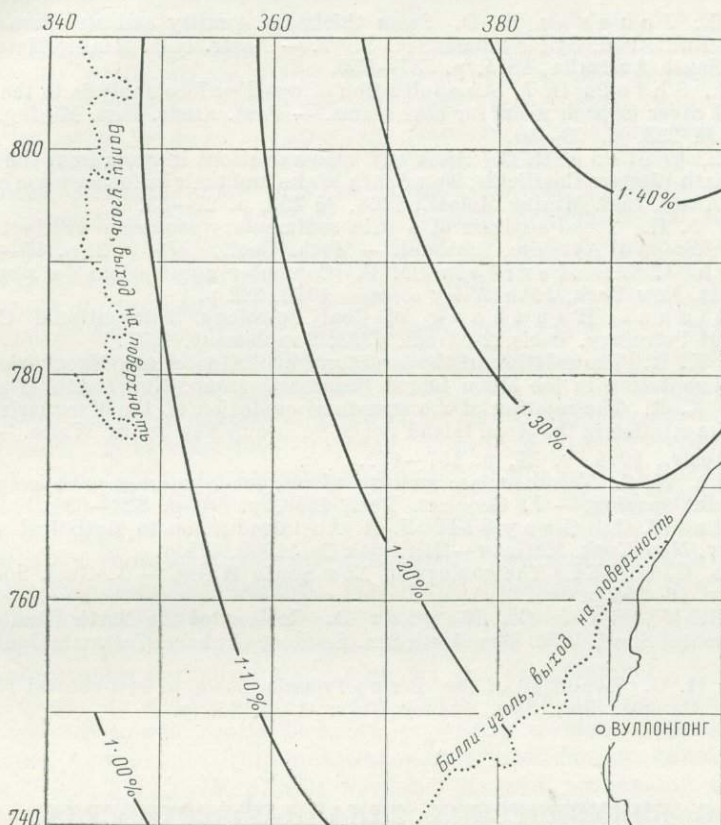


Рис. 10. Тренд-поверхность 3-го порядка для отражательных свойств (жирный блеск) угля в пределах отложений Иллаварра, Южное угольное поле.

Данные получены для углей Балли; в южной части площади — для углей Вунгавилли (83 наблюдения); 90.7% вариаций объясняется с помощью тренд-анализа.

4. Количественная оценка результатов может быть сделана с погрешностью метода составления контурных карт. Карты тренда и карты отклонений дают дополнительную информацию об изменении изучаемых свойств на площади; в частности, тренд-анализ разных свойств угля помогает изучать и интерпретировать их геологические особенности. Это дает более точную основу для планирования поисковых и разведочных работ.

Я благодарен моей супруге за оформление статьи и мистеру Р. Миллеру за помощь при составлении карт. Изучение отражательных свойств витринита обеспечено комитетом «Национальных исследований угля» и «Австралийским исследовательским фондом». Большая часть определенных отражательных свойств выполнена В. К. Джонсоном.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- Arkell W. J. The Jurassic System in Great Britain. London, Oxford Univ. Press, 1933, 681 p.
- Cook A. C. Trend-surface analysis of structure and thickness of Bulli Seam, Sydney Basin, New South Wales. — *Math. Geol.*, 1969a, v. 1, p. 53—78.
- Cook A. C. Contemporaneous Structures in the Southern Coalfield, New South Wales. — *Austr. J. Sci.*, 1969b, v. 32, p. 257—258.
- Cook A. C. The spatial and temporal variation of the type and rank of Australian coals. — In: Cook A. C. (Ed.). *Australian Black Coal — its occurrence, mining, preparation and use*. Austr. Inst. Mining Metall., Illawarra Branch, 1975, p. 63—84.
- Cook A. C., Johnson R. D. Seam thickness, quality and structure variation in the Bulli Coal, Sydney Basin, N. S. W. — *Austr. Inst. Mining Metall., Ann. Conf. South Australia*, 1975, p. 537—550.
- Cook A. C., Shields O. J. An application of trend surface analysis to the preparation of cover isopach maps for coal seams. — *Proc. Austr. Inst. Mining Metall.*, 1968, № 228, p. 53—60.
- Cook A. C., Wilson R. G. Rank and type variations in coals from the Southern and South Western Coalfields, New South Wales and their influence upon coking. — *Proc. Austr. Inst. Mining Metall.*, 1969, № 232, p. 27—39.
- Doveton J. H. Trend-analysis of a thin sedimentary sequence within the Upper Carboniferous of Ayrshire, Scotland. — *Math. Geol.*, 1970, v. 2, p. 47—62.
- Harbaugh J. W., Merriam D. F. Computer applications in stratigraphic analysis. New York, John Wiley & Sons 1968, 282 p.
- International Handbook of Coal Petrology. International Committee for Coal Petrology. Paris, 2-nd ed., 1963, Supplement, 1971.
- Johnson K. R. The relation of the structural evolution of the Macquarie Syncline to sedimentation in the Moon Island Beach Sub-group. New South Wales, 1973.
- Johnson K. R. The relation of the structural evolution of the Macquarie Syncline to sedimentation in the Moon Island Beach Subgroup New South Wales. — *J. Geol. Soc. Austr.*, 1974, v. 21, p. 157—172.
- Krumbein W. C. Trend surface analysis of contour-type maps with irregular control-point spacing. — *J. Geophys. Res.*, 1959, v. 64, p. 823—834.
- Krumbein W. C., Graybill F. A. An introduction to statistical models in geology. New York, McGraw-Hill Book Co., 1965, 475 p.
- Packham G. H. (Ed.) The geology of New South Wales. — *J. Geol. Soc. Austr.*, 1969, v. 16, 654 p.
- Pegrum R. M., Rees G., Naylor D. Geology of the North West European Continental Shelf. V. 2. The North Sea. London, Graham, Trotman Dudley, 1975, 225 p.
- Raggatt H. G. Evolution of the Permo-Triassic basin of east-central New South Wales. Unpubl. doct. diss. Sydney Univ., 1938, 324 p.

О БИКУБИЧЕСКИХ СПЛАЙН-ПОВЕРХНОСТЯХ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНО РАЗНЕСЕННЫХ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Е. Х. Т. Уиттен, М. Е. Кёллинг

Северо-Западный университет, Эванстон, США

В работе Уиттена и Кёллинг (Whitten, Koelling, 1973) рассмотрено соотношение между интерполированием с помощью сплайн-поверхности, пространственной фильтрацией и поверхностями тренда при картировании геологических наблюдений над переменными величинами. Во многих случаях, связанных с решением геологических задач, по существу в распоряжении имеются фактические точные наблюдения, и бикубические сплайн-поверхности служат полезным средством для выявления характера расположения на карте тех или иных исследуемых наблюдаемых величин. Как указывается в упомянутой работе, основное ограничение, свойственное бикубическим сплайн-поверхностям, применяемым в геологии, заключается в том, что все существующие методы требуют расположения данных наблюдений по ортогональной сетке. Однако на практике точки наблюдений расположены, как правило, произвольно и распределены неравномерно.

Цель данной статьи — рассмотреть возможность распространения предложенного в работе Бура (Boor, 1962) метода двумерной подгонки сплайна для использования его в случае географически неравномерных наблюдений.

ОБЗОР РАБОТ, ИМЕЮЩИХ ОТНОШЕНИЕ К РАССМАТРИВАЕМОМУ ВОПРОСУ

В работе Уиттена и Кёллинг (Whitten, Koelling, 1973) на рис. 4 приведены карты сплайн-поверхности для верхней части известняков Данди центральной части штата Мичиган, США. Предложенная в этой работе вычислительная программа требует, чтобы наблюдаемые данные были расположены по прямоугольной сетке, с равномерно расположенными линиями в каждом направлении. Другие стандартные программы для вычислительных устройств, предназначенные для аналогичных целей, например стандартные программы ICS2CE, ICS2DE и ICS2VE, имеются в собрании Объединенных международных математических и статистических библиотек (IMSL Library, 1973), они основаны на алгоритмах, опубликованных Гревилем (Greville, 1967 г.). Это собрание включает и другие стандартные программы (ICS2CU, ICS2DU и ICS2VU, также основанные на алгоритмах Гревилея, 1967 г.) для «неравномерно разнесенных данных», под которыми в этом случае имеются в виду данные, соответствующие пересечениям прямоугольной сетки с неравномерно нанесенными параллельными линиями.

В исчерпывающем обзоре методов подгонки сплайнов Джером (Jerome, 1973), отметил действенность описанного метода квазиинтерполирования (De Boor, Fix, 1973). Этот метод позволяет использовать сплайны типа *B* (Schoenberg, 1946; Curry, Schoenberg, 1947; De Boor, 1972) при образовании сплайн-поверхностей для зависимой переменной величины как функции двух географических независимых переменных (или даже *n* независимых переменных величин). Кусочные сплайны типа *B* вычисляются по отношению к «узлам», которые лежат на пересечениях неравномерно разнесенных прямых линий сетки, положение которых контролируется местоположением наблюдаемых данных, но не совпадает с ним. Хотя для этого метода места опробования могут быть расположены неравномерно, тем не менее географически сгруппированные данные, обычные в геологии, непригодны для использования при методе квазиинтерполирования (Boor, Fix, 1973, p. 33); частные задачи включают определение производных для внутренних географических пунктов и охват больших внутренних зон с редкими разрозненными данными. Кроме того, поверхности, создаваемые с помощью этого метода, в действительности являются поверхностями тренда, так как они представляют собой аппроксимации, которые обычно не имеют наблюдаемых оценок зависимых переменных в каждой заданной точке (Whitten, 1974). В настоящее время (Luche, Schumaker, 1973, p. 35) разработан метод, который в противоположность методу квазиинтерполирования по Буру и Фиксу (Boor, Fix, 1973) основан на точечных оценках. Его преимущество состоит в том, что он может быть создан без использования производных, но с теми же самыми пределами ошибок, что и при методе квазиинтерполирования, и с ячейками (независимо от сетки) для более низких производных. Этот метод также дает скорее поверхность тренда, а не поверхность, точно соответствующую наблюдаемым данным.

Другой подход был предложен Хэнсоном, Радбиллом и Лоусоном (Hanson, Radbill, Lawson, 1972), а позднее Лоусоном и Хэнсоном, которые разработали программу для вычислительного устройства с целью подгонки бивариантной кубической сплайн-поверхности к неравномерно разнесенным данным по методу наименьших квадратов. В программе не существует никаких ограничений, касающихся распределения точек наблюдаемых данных. В результате алгоритм решения не разбивает всю

географическую площадь на отдельные локальные домены, как в случае алгоритмов, используемых в работах Уиттеном и Кёллингом (Whitten, Koelling, 1973) и Буром и Фиксом (Boor, Fix, 1973). При решении по методу наименьших квадратов вычисляют сразу все параметры, хотя каждая часть поверхности, полученной в результате этого, эффективно взвешивается с помощью данных, приуроченных к этой части. Таким же образом для построения алгебраически полиномиальной поверхности тренда в случае неравномерно расположенных данных могут быть использованы ортогональные полиномы (но получаемые в конечном счете коэффициенты уравнения для составления карты являются зависимыми; Whitten, 1970); например, функции сплайнов типа B были использованы Хэнсоном с соавторами (Hanson et al., 1970) и Лоусоном и Хэнсоном (1974 г.), однако полученная карта представляла собой аппроксимирующую поверхность тренда и не соответствовала точно наблюдаемым данным.

В работах Акимы (Akima, 1974a, 1974b) критикуется неудовлетворительность сплайн-интерполирования (с использованием методов Гревилля, 1967 г.) для данных, нанесенных на сетку, хотя цель этих работ заключается в интерполировании данных, необычных для геологии. Стандартные функции сплайн-поверхностей (Boor, 1962; Whitten, Koelling, 1973) построены так, чтобы иметь непрерывные первые и вторые производные. В работе Акимы (Akima, 1974a, рис. 1, в) критикуется сплайн-поверхность, поскольку она не воспроизводит прерывного изменения наклона, отражаемого данными, полученными в результате испытаний.

Хессинг с соавторами разработали метод построения плавно изменяющейся поверхности, проходящей через неравномерно размещенные точки наблюдаемых данных, при котором используются бикубические функции. Для этого метода требуется, чтобы точки наблюдений располагались так, чтобы результат соединения соседних точек отрезками прямой линии был бы топологически эквивалентен плоской прямоугольной сетке. Если данные сгруппированы плотными группами, то при использовании этого метода возникают сложные и даже непреодолимые проблемы. Для каждого пересечения отрезков линий, не занятого точкой наблюдений, должна быть найдена гипотетическая зависимая переменная величина путем подгонки полинома к окружающим точкам существующих данных с использованием метода взвешенных наименьших квадратов.

В работе Уиттена и Кёллинга (Whitten, Koelling, 1973) дана оценка некоторых проблем и трудностей, связанных с интерполированием величин перед подгонкой бикубической сплайн-поверхности.

НЕПОСРЕДСТВЕННАЯ ПОДГОНКА БИКУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ К НЕРАВНОМЕРНО РАСПОЛОЖЕННЫМ ДАННЫМ

Задача состоит в том, чтобы провести плавно изменяющуюся поверхность через ряд точек $\{x_i, y_j, z_{ij}\}$, которые неравномерно разнесены на плоскости XU (рис. 1, а). По смыслу задача является легкой. Плоскость XU сначала делится на треугольники с точками наблюдений в каждой вершине (рис. 1, б). Для каждого треугольника находится полиномиальная поверхность, которая имеет известную зависимую величину Z в каждом из трех соседних треугольников, причем первые производные на границах треугольников являются непрерывными (рис. 1, в). Вся картируемая поверхность определяет множество полиномов, соответствующих площадям отдельных треугольников, проходит через точки исходных данных и является плавно изменяющейся. На практике возникают многочисленные трудности, и для того чтобы понять предложенный метод и связанные с ним проблемы, ниже приводится краткий обзор одномерных и двумерных сплайнов.

ОДНОМЕРНЫЕ СПЛАЙНЫ

Плавно изменяющаяся функция $F_1(X)$ должна проходить через ряд, состоящий из N точек $\{x_i, y_i\}$, и должна удовлетворять следующим условиям:

$$F_1(X)|_{x_i} = y_i,$$

$$dF_1(X)/dX|_{x_i} \text{ — непрерывная величина}$$

и

$$d^2 F_1(X)/dX^2|_{x_i} \text{ — также непрерывная величина.}$$

Эти условия могут быть удовлетворены путем выбора разных кубических полиномов $a + bX + cX^2 + dX^3$ между последовательными точками.

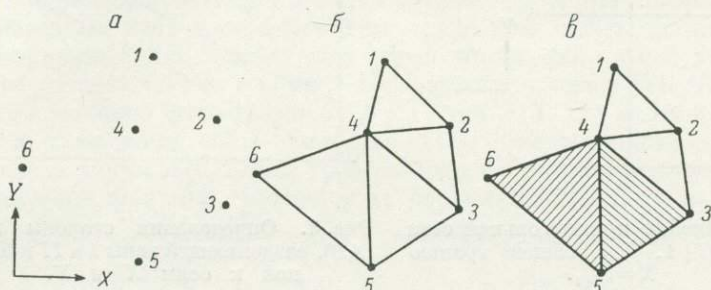


Рис. 1. Точки наблюдений, расположенные на плоскости (X, Y) неравномерно.

a — точки размещены на плоскости (X, Y) ; b — данные разобщены на треугольники; ϵ — треугольники (345) и (456) имеют общую сторону (45).

Первый шаг при решении задачи состоит в определении первой производной y'_i в точке x_i ($1 < i < N$); для получения этих производных должны быть заданы значения y'_1 и y'_N . Между точками i и $i+1$ ($1 < i < N$) вычисляется полином

$$P_i(X) = a_i + b_i X^2 + c_i X^2 + d_i X^3,$$

так что

$$dP_i(X)/dX|_{x_i} = y'_i, \quad dP_i(X)/dX|_{x_{i+1}} = y'_{i+1},$$

$$P_i(x_i) = y_i \text{ и } P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}.$$

Поскольку $P_i(X)$ имеет четыре коэффициента и четыре условия для отрезка между каждой парой точек наблюдений, то это решение является единственным. Функция $F_1(X)$ состоит из функций $P_i(X)$.

ДВУМЕРНЫЕ СПЛАЙНЫ ДЛЯ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ПО РАВНОМЕРНОЙ СЕТИ

Множество точек $\{x_i, y_j, z_{i,j}\}$ равномерно расположено на плоскости X, Y ;

для простоты допустим, что сеть прямоугольна, причем образующие ее линии параллельны осям X и Y .

Требуется найти плавно изменяющуюся функцию $F_2(X, Y)$, которая проходит через каждую из точек; ее находят путем определения бикубической функции

$$P_{ij}(X, Y) = \sum_{l=0}^3 \sum_{m=0}^3 A_{lm}^{ij} X^l Y^m = A_{00}^{ij} + A_{10}^{ij} X + A_{20}^{ij} X^2 + A_{30}^{ij} X^3 + A_{01}^{ij} Y + A_{11}^{ij} XY +$$

$$+ A_{21}^{ij} X^2 Y + A_{31}^{ij} X^3 Y + A_{02}^{ij} Y^2 + A_{12}^{ij} XY^2 + A_{22}^{ij} X^2 Y^2 + A_{32}^{ij} X^3 Y^2 + A_{03}^{ij} Y^3 +$$

$$+ A_{13}^{ij} XY^3 + A_{23}^{ij} X^2 Y^3 + A_{33}^{ij} X^3 Y^3$$

для каждого квадрата сети ij . Коэффициенты A_{im}^{ij} выбираются таким образом, что вдоль каждой границы, разделяющей два квадрата сети, функции соседних квадратов согласованы и имеют непрерывные первые производные. Функция $F_2(X, Y)$ состоит из ряда полиномов $P_{ij}(X, Y)$.

Для того чтобы определить коэффициенты P_{ij} для каждой точки сети наблюдений, используются значения: 1) функции z_{ij} , 2) первых производных по X и Y и 3) второй смешанной производной (т. е. $d/dX d/dY$).

При использовании этих данных P_{ij} имеет требуемые свойства в силу следующих обстоятельств (рис. 2).

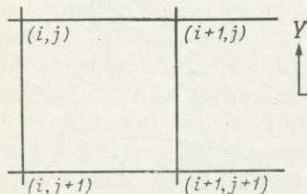


Рис. 2. Ячейки прямоугольной сети (i, j) и $(i+1, j)$ с общей гранью $X = x_{i+1}$.

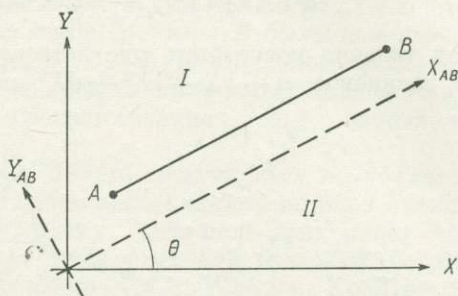


Рис. 3. Определения стороны клетки (AB) , разделяющей зоны I и II и наклонной к осям X и Y .

1) Вдоль границы $X = x_{i+1}$ функции $P_{ij}(X, Y)$ и $P_{i+1,j}(X, Y)$ преобразуются в кубические по оси Y . Поскольку обе функции приводятся к одному и тому же значению и имеют одинаковые производные по Y в точках $(i+1, j)$ и $(i+1, j+1)$, то они преобразуются в одну и ту же кубическую функцию вдоль этой границы.

2) Производные dP_{ij}/dX и $dP_{i+1,j}/dX$ преобразуются в кубические функции по оси Y вдоль линии $X = x_{i+1}$, поскольку

$$dP_{ij}/dX|_{i+1,j} = dP_{i+1,j}/dX|_{i+1,j}$$

и

$$\frac{d}{dY} (dP_{ij}/dX)_{i+1,j} = \frac{d}{dY} (dP_{i+1,j}/dX)_{i+1,j}.$$

Аналогично для точки $(i+1, j+1)$ dP_{ij}/dX и $dP_{i+1,j}/dX$ приводятся к одной и той же кубической функции вдоль границы $X = x_{i+1}$. Подобные соображения справедливы и для трех других границ клетки сети.

Необходимые производные для каждой точки сети получают путем использования одномерных сплайнов так же, как в случае одномерных сплайнов должны быть получены значения производных в точках сети, расположенных в краевых частях площади.

РОЛЬ КУБИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Если A и B являются двумя произвольными точками на плоскости X, Y , то пусть θ_{AB} будет углом, на который должна быть повернута система координат так, чтобы ось X стала параллельна линии AB ; новая повернутая ось X обозначается X_{AB} , а новая ось Y будет осью Y_{AB} . Пусть зона I — часть плоскости X, Y , которая расположена по одну сторону от линии AB , а зона II — часть плоскости X, Y , расположенной по другую сторону от линии AB (рис. 3). Пусть также заданы значения Φ_A и Φ_B функции $P(X, Y)$ в точках A и B и значения Φ'_A и Φ'_B ее первых производных вдоль линии AB (т. е. d/dX_{AB}). При наличии таких данных может быть найден единственный полином $P(X_{AB})$, соединяющий точки A и B , который удовлетворяет условиям:

$$P(X, Y)|_A = \Phi_A, P(X, Y)|_B = \Phi_B, dP(X, Y)/dX_{AB}|_A = \Phi'_A \text{ и } dP(X, Y)/dX_{AB}|_B = \Phi'_B.$$

Например, если A имеет координаты $(0, 0)$, а B — координаты $(1, 3)$, то

$$d/dX_{AB} = \cos \theta_{AB} d/dX + \sin \theta_{AB} d/dY = \frac{1}{2} d/dX + \frac{3}{2} d/dY$$

и полином $P(X_{AB})$, выраженный через значения исходных координат X, Y , имеет вид:

$$P(X, Y) = a + \frac{1}{2} b(X + \sqrt{3} Y) + \frac{1}{4} c(X + \sqrt{3} Y)^2 + d(X + \sqrt{3} Y)^3 \cdot (2)^{-3}.$$

Теперь, если функция $F_I(X, Y)$ лежит в зоне I выше линии AB , а $F_{II}(X, Y)$ — в зоне II ниже линии AB и обе функции преобразуются в кубические вдоль линии AB , удовлетворяя заданным значениям (Φ_A, Φ_B, Φ'_A и Φ'_B) в точках A и B , то обе эти функции преобразуются в один и тот же кубический полином $P(X, Y)$. Если F_I и F_{II} представляют собой производные этих поверхностей по отношению к Y_{AB} , то производные, перпендикулярные AB , согласуются вдоль линии AB .

Можно сделать вывод, что если поверхности в зонах I и II представлены соответственно функциями $C_I(X, Y)$ и $C_{II}(X, Y)$ и если требуется, чтобы эти поверхности согласовывались и имели непрерывные первые производные вдоль линии AB , то эти требования удовлетворяются путем: 1) фиксации значения функций, значений их первых производных и их смешанных производных $\frac{d}{dX_{AB}} \frac{d}{dY_{AB}}$ вдоль линии AB в точках A и B и 2) построения функций C_I и C_{II} таким образом, чтобы $C_I, C_{II}, dC_I/dY_{AB}$ и dC_{II}/dY_{AB} преобразовывались в кубические функции вдоль линии AB .

И, наконец, полезно отметить три упрощающих свойства, применимых к двумерным сплайнам для данных, нанесенных на прямоугольную сеть.

1. В каждой точке сети линии встречаются под прямыми углами, так что смешанная производная вдоль одной из линий является такой же, как производная вдоль перпендикулярной ей линии; поэтому, чтобы построить кусочно-непрерывную функцию с непрерывными первыми производными, необходимы четыре «единицы» информации на одну точку сети.

2. Отсюда следует, что для каждого прямоугольника сети должны быть удовлетворены 16 условий; бикубическая функция

$$F_2(X, Y) = \sum_{l=0}^3 \sum_{m=0}^3 A_{lm} X^l Y^m$$

имеет 16 коэффициентов; она сама и ее первые производные преобразуются в кубические функции вдоль каждой стороны прямоугольника. По этой причине $F(X, Y)$ является функцией, удовлетворяющей требованиям для сплайн-поверхности, но она не будет преобразовываться в кубическую вдоль линии, образующей с осью X угол, отличный от $\frac{n\pi}{2}$ ($n=0, 1, 2, 3$).

3. Требуемые производные в узлах прямоугольной сети легко получить путем использования одномерных сплайнов.

СПЛАЙН-ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ТОЧЕК НАБЛЮДЕНИЙ

Сначала плоскость (X, Y) делится на многоугольники, причем каждая вершина многоугольника совпадает с точкой данных. Как правило, стороны многоугольников под прямыми углами не встречаются (рис. 4), так что смешанная производная вдоль одной стороны многоугольника (AB) отличается от смешанной производной вдоль примыкающей стороны (BC). В общем случае

$$\frac{d}{dX_{ST}} \frac{d}{dY_{ST}} = \cos \theta_{ST} \cdot \sin \theta_{ST} \cdot \left(\frac{d^2}{dY^2} - \frac{d^2}{dX^2} \right) + (\cos^2 \theta_{ST} - \sin^2 \theta_{ST}) \frac{d}{dX} \frac{d}{dY},$$

где θ_{ST} — угол, который линия ST образует с осью X . Поэтому для того чтобы построить кусочно-непрерывную функцию, для каждого угла многоугольника требуется пять «единиц» информации (вместо четырех в случае прямоугольной сети). Таким образом, желательно разделить площадь карты на треугольники (трехсторонние многоугольники) для того, чтобы свести к минимальному числу условий. Исходя из этого, каждой треугольной клетке отвечают пятнадцать условий, и 15 членов полинома требуется для удовлетворения всех степеней свободы и для создания сплайн-поверхности. Первые 10 функций выводятся легко, например:

$$f(X, Y) = X^l Y^m; \quad l = 0, 3; \quad m = 0, 3; \quad (l + m) < 3,$$

т. е.

$$f_1(X, Y) = 1; \quad f_2(X, Y) = X; \quad f_3(X, Y) = X^2; \quad \dots; \quad f_9(X, Y) = XY^2$$

и

$$f_{10}(X, Y) = Y^3.$$

Для построения пяти дополнительных возможных функций требуется выполнить некоторые построения. Вершины каждого треугольника

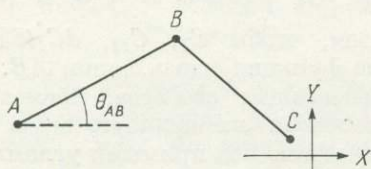


Рис. 4. Вершина неправильного многоугольника, определяемого точками данных наблюдений A, B, C, \dots

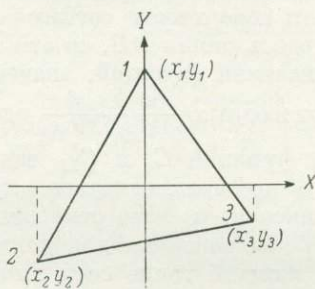


Рис. 5. Преобразованные оси X и Y и координаты системы точек $1, 2, 3$.

обозначаются точками $1(x_1, y_1)$, $2(x_2, y_2)$ и $3(x_3, y_3)$ против часовой стрелки; затем преобразуются координаты путем переноса начала системы координат в «центр» каждого треугольника по очереди (рис. 5). Конкретное значение «центра» здесь таково, что для типичного треугольника: 1) вершина 1 лежит на оси Y ; 2) $|y_1| = |y_2|$, если $|y_2| > |y_3|$, или $|y_1| = |y_3|$, если $|y_3| > |y_2|$, 3) $|x_2| = |x_3|$.

Теперь функции

$$f_{11}(X, Y) = Y_{12} \cdot Y_{13} \cdot Y_{23} \cdot X$$

и

$$f_{12}(X, Y) = Y_{12} \cdot Y_{13} \cdot Y_{23} \cdot Y,$$

где

$$Y_{ij} = -\sin \theta_{ij} \cdot X + \cos \theta_{ij} \cdot Y,$$

имеют соответствующие свойства вдоль сторон треугольника (т. е. функции и их перпендикулярные производные являются кубическими вдоль каждой стороны). Y_{ij} — постоянна вдоль стороны треугольника ij .

Три дополнительные функции могут быть записаны с помощью разрывных функций — $Y_{\text{разр}}$. С этой целью оси преобразуются так, что вершина 1 лежит на положительной полуоси Y .

Пусть тогда

$$Y_{\text{разр}} = Y_{12}, \quad \text{если } X < 0, \\ = Y_{13}, \quad \text{если } X > 0.$$

Теперь, если

$$Y_{\text{разр}} = Y_{12} - (-\sin \theta_{12} \cdot x_1 + \cos \theta_{12} \cdot y_1), \quad \text{если } X < 0, \\ = -\sin \theta_{12} \cdot (X - x_1) + \cos \theta_{12} (Y - y_1),$$

и

$$Y_{\text{разр}} = Y_{13} - (-\sin \theta_{13} \cdot x_1 + \cos \theta_{13} \cdot y_1), \text{ если } X > 0, \\ = -\sin \theta_{13} (X - x_1) + \cos \theta_{13} (Y - y_1),$$

а также

$$Y_{23} = Y_{23} - (-\sin \theta_{23} \cdot x_2 + \cos \theta_{23} \cdot y_2) = \\ = -\sin \theta_{23} \cdot (X - x_2) + \cos \theta_{23} \cdot (Y - y_2),$$

тогда три требуемые функции могут быть записаны в виде:

$$f_{13}(X, Y) = Y_{\text{разр}} \cdot Y_{23} \cdot (X - x_1) \cdot (Y - y_1),$$

$$f_{14}(X, Y) = Y_{\text{разр}} \cdot Y_{23} \cdot (X - x_1) \cdot (X - x_1)$$

и

$$f_{15}(X, Y) = Y_{\text{разр}} \cdot Y_{\text{разр}} \cdot Y_{23} \cdot Y_{23} \cdot (X - x_1),$$

К сожалению, некоторые из этих функций оказываются при вычислении вырождающимися. Тем не менее приведенные выше соотношения дают по крайней мере 13 уравнений, которые позволяют фиксировать первые производные вдоль двух сторон каждого треугольника.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ РЕШЕНИЯ

Если допустить, что имеется 15 функций — $f_1(X, Y), f_2(X, Y), \dots, f_{15}(X, Y)$ (и, следовательно, 15 уравнений), то полученное решение будет иметь следующий вид. Площадь карты X, Y делится на треугольники. При этом предпочитают треугольники, наиболее близкие к равнобедренным; пригодная для этой цели программа вычислительного устройства была подготовлена и описана в работе Лоусона (Lawson, 1972). Для каждой вершины треугольника значение Z известно, но требуется разработать способ определения значений необходимых производных. Взяв каждый треугольник отдельно, преобразуем его в стандартную форму, позволяющую решить систему из 15 уравнений.

К вершине I применяются следующие пять уравнений:

$$\sum_{i=1}^{15} A_i f_i(x_1, y_1) = z_1, \\ \sum_{i=1}^{15} A_i df_i(X, Y) / dX |_{x_1, y_1} = DXI, \\ \sum_{i=1}^{15} A_i df_i(X, Y) / dY |_{x_1, y_1} = DYI, \\ \sum_{i=1}^{15} A_i \frac{d}{dX_{12}} \frac{d}{dY_{12}} f_i(X, Y) |_{x_1, y_1} = DXY_{12}|_1, \\ \sum_{i=1}^{15} A_i \frac{d}{dX_{13}} \frac{d}{dY_{13}} f_i(X, Y) |_{x_1, y_1} = DXY_{13}|_1,$$

где DXI — производная вдоль оси X в точке $I(x_1, y_1)$; DYI — производная вдоль оси Y в точке I , а $DXY_{ij} |_1$ — смешанная производная в точке I вдоль линии ij .

Аналогично имеются пять сопоставимых уравнений для каждой из двух других вершин: $2(x_2, y_2)$ и $3(x_3, y_3)$. Вся система из 15 уравнений может быть записана в матричной форме:

$$M \cdot A = V,$$

где $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{15}\}$ — вектор, содержащий требуемые коэффициенты, а $V = \{z_1, DXI, DYI, \dots, DXY_{23}|_3, DXY_{31}|_3\}$ — вектор условий.

M имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 y_1 & x_1^3 y_1 & y_1^2 & \dots & f_{15}(X, Y)|_{x_1 y_1} \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & 0 & y_1 & 2x_1 y_1 & 3x_1^2 y_1 & 0 & \dots & df_{15}(X, Y)/dX|_{x_1 y_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & 2y_1 & \dots & df_{15}(X, Y)/dY|_{x_1 y_1} \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & y_2 & x_2 y_2 & x_2^2 y_2 & & & \dots & f_{15}(X, Y)|_{x_2 y_2} \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 0 & y_2 & 2x_2 y_2 & & & \dots & df_{15}(X, Y)/dX|_{x_2 y_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & & & \dots & df_{15}(X, Y)/dY|_{x_2 y_2} \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & y_3 & x_3 y_3 & x_3^2 y_3 & & & \dots & f_{15}(X, Y)|_{x_3 y_3} \\ 0 & 1 & 2x_3 & 3x_3^2 & 0 & y_3 & 2x_3 y_3 & & & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & x_3^2 & & & \dots & \cdot \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & \frac{d}{dX_{31}} \frac{d}{dY_{31}} f_{15}(X, Y)|_{x_3 y_3} \end{pmatrix}$$

Чтобы получить коэффициенты A_i , обращаем матрицу M :

$$A = M^{-1} \cdot V.$$

Эти 15 коэффициентов A определяют поверхность для треугольника при использовании уравнения

$$\sum_{i=1}^{15} A_i f_i(X, Y) = Z.$$

Вдоль сторон треугольника поверхности соседних треугольников соединяются при непрерывных первых производных. Такое вычисление трудоемко, так как для каждого треугольника должна быть преобразована иная матрица M 15×15 (в случае ортогональной сетки матрица 16×16 преобразуется только один раз для всей карты).

ПОЛУЧЕНИЕ КОНКРЕТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Вышеизложенная процедура требует определения производных для вершин каждого треугольника. На практике это, кажущееся простым, но необходимое требование выполнить трудно, и в настоящее время никаких определенных методов, по-видимому, не существует. Один из возможных методов получения производных заключается в выборе групп по 10 точек в виде последовательных многоугольников; несколько точек из этих 10 должны лежать внутри каждого многоугольника. При этом кубическая полиномиальная функция

$$H(X, Y) = \sum_{l+m \leq 3} X^l Y^m$$

может быть подобрана для каждой группы из 10 точек; если точки не слишком разбросаны, а внутренние точки располагаются довольно близко к центру многоугольника, то форма функции $H(X, Y)$ около внутренних точек приближается достаточно хорошо к фактической форме желательной сплайн-поверхности. При таком допущении функция $H(X, Y)$ может быть использована для вычисления приближенных значений требуемых конкретных производных в точках, лежащих около центра многоугольника.

При выборе последовательных частично перекрывающихся многоугольников все точки данных будут располагаться внутри одного или более многоугольников. Там, где (x_i, y_i) располагаются в двух или более

многоугольниках, будут наблюдаться некоторые различия в двух (или более) рядах производных. До разработки лучшего метода с успехом применяются средние значения для подобных дублированных производных.

Пример

В одной из ранних работ (Whitten, Koelling, 1973) для построения бикубической сплайн-поверхности авторы использовали данные неравно-

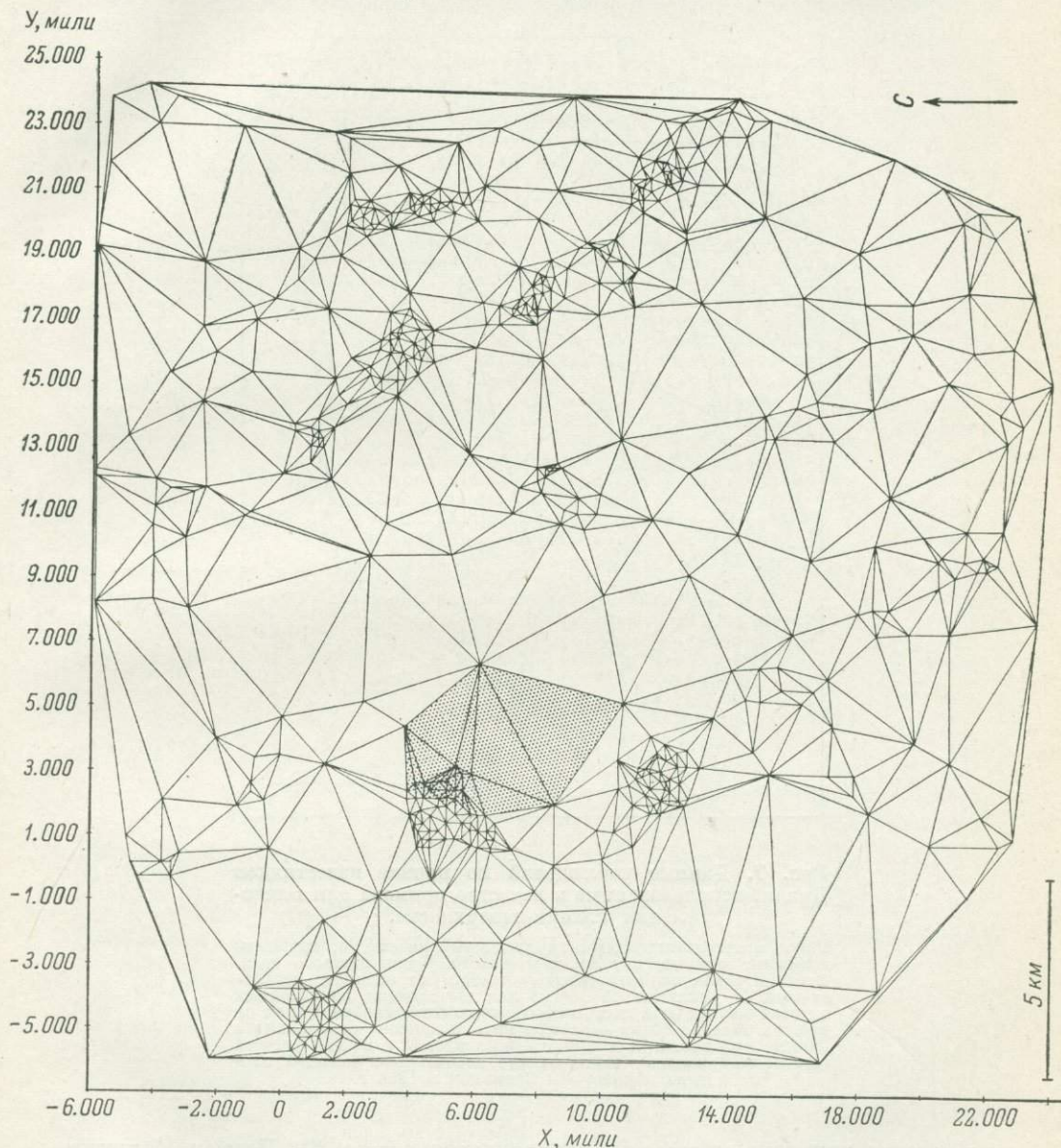


Рис. 6. Данные наблюдений (574) в пределах верхней части подводной площади девонских известняков Данди (Центральный Мичиган), разделенные на тройки, определяющие треугольные клетки.

Программа, разработанная Лоусоном (Lawson, 1972), модифицирована для машины CDC6 400. Шесть треугольных ячеек, взятых для рис. 7 и 8, покрыты точками.

мерно расположенных наблюдений по кровле известняков Данди (Dundee) в пределах подводного участка (Центральный Мичиган). Для интерполяции поднятий кровли известняков во всех узлах прямоугольной сети

были использованы субъективные методы. Те же самые данные были взяты повторно для построения сплайн-поверхности, непосредственно соответствующей исходным данным при неравномерном расположении точек наблюдений.

Программа для вычислительного устройства, предложенная Лоусоном (Lawson, 1972), была использована для разделения точек наблюдений

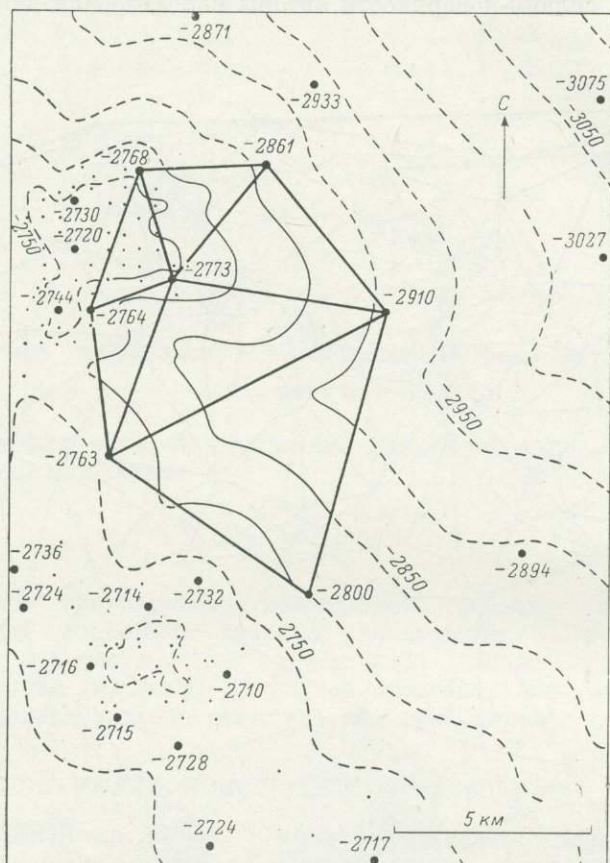


Рис. 7. Данные наблюдений по кровле известняков Давди, использованные в качестве примера для вычисления сплайн-поверхности.

Шесть треугольных клеток, приведенных на рис. 6, выделены жирными линиями с указанием отметок около каждого угла. Отметки возле жирных точек соответствуют оценкам, используемым (в рядах из 10 точек) для вычисления производных в углах клеток (при построении поверхности, изображенной на рис. 8). Мелкие точки означают местоположение скважин (эти данные использованы для построения рис. 6, а не для расчета сплайн-поверхности). Контуры для значительно большей площади нарисованы Бекманом в 1964 г.

на соответствующие множества треугольников (рис. 6). Доктор Кёллинг составила программу для вычислительного устройства FORTRAN-IV, которая позволяет: 1) подбирать различные кубические полиномиальные поверхности для последовательных множеств из 10 точек наблюдений и вычислять производные для точек, лежащих около центра каждого ряда; 2) использовать эти производные при вычислении коэффициентов сплайн-поверхности для каждого треугольника, а также изображать полученную непрерывную поверхность, проходящую через последовательно расположенные треугольники.

На рис. 7 показаны элементы данных для небольшой части плоскости, сплайн-поверхность для которой вычерчена на рис. 8. Нет необходимости подробно излагать доводы в защиту сплайн-поверхности, а не тренд-поверхности (Whitten, Koelling, 1973). Очевидно, что для построения сплайн-поверхности, соответствующей большой сети неравномерно рас-

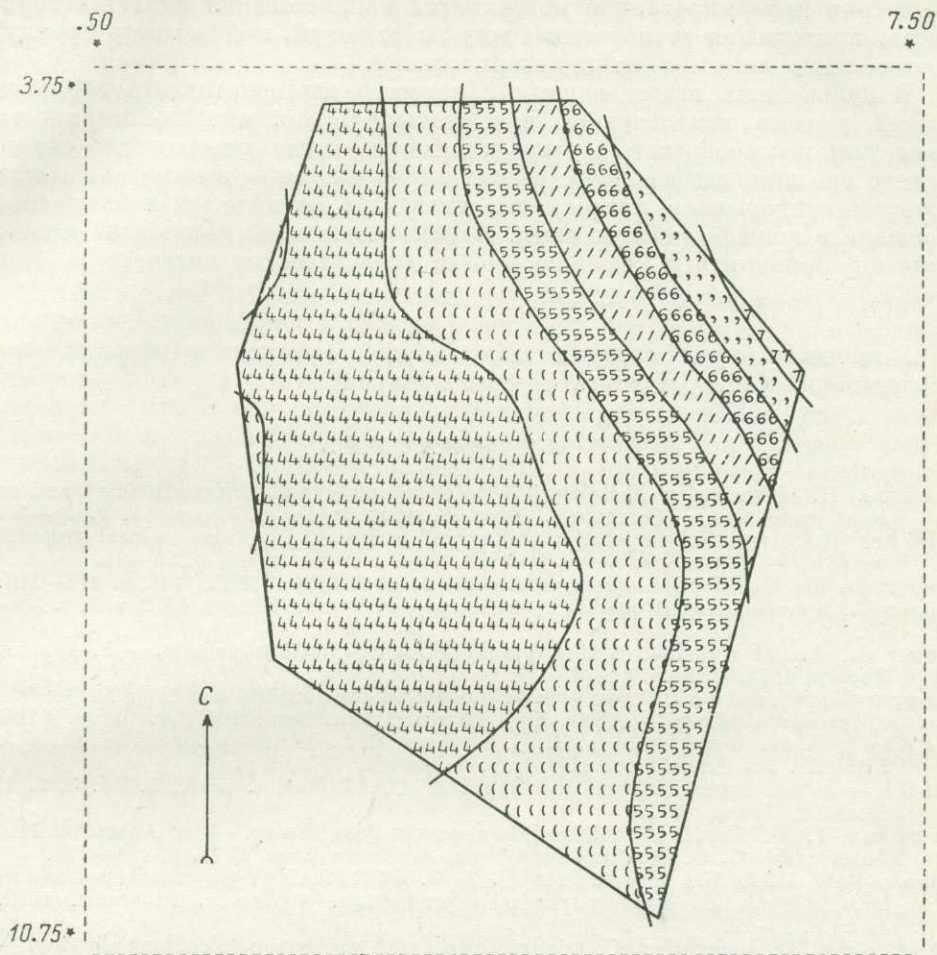


Рис. 8. Сплайн-поверхность для площади, изображенной на рис. 7.

Контурны даны с помощью вычислительной машины CDC6 400. Ниже приведены минимальные оценки зависимой переменной.

Оценки

Символ	масштаби- рованная	истинная
)	.500	-2750.000
4	.750	-2775.000
(1.000	-2800.000
5	1.250	-2825.000
/	1.500	-2850.000
6	1.750	-2875.000
;	2.000	-2900.000
7	2.250	-2925.000

положенных данных наблюдений, потребуется значительно больше машинного времени, чем для большинства стандартных программ, предназначенных для построения поверхности тренда. В тех случаях, когда наблюдаемые данные включают некоторую составляющую ошибку, что часто имеет место, фильтрация, присущая построению тренд-поверхности, возможно, более выгодна. Вероятно, описанная здесь программа для сплайн-поверхности может быть полезной, если допустить, что наблюден-

ные данные свободны от ошибок, а их значения приближаются к высокочастотным составляющим изменчивости. Например, в Мичиганском бассейне структурные складки с амплитудой от 3 до 7 м являются потенциальными углеводородными ловушками. При допущении, что наблюдаемые данные в основном свободны от ошибок, для оценки фактической геометрии деформированной поверхности напластования сплайн-поверхность, проходящая точно через точку наблюдений, может иметь преимущества перед многими тренд-поверхностями.

В дальнейших исследованиях в качестве альтернативного варианта вместо расчета используемой в настоящее время сплайн-поверхности возможно целесообразно изучить соответствующие поверхности скользящего среднего взвешенного, рассчитанные на такое взвешивание, при котором непрерывная поверхность имела бы фактически наблюдаемое значение в каждой точке данных. Однако настоящий метод пока можно успешно применять к решению многих геологических задач.

В процессе работы авторам была оказана поддержка в Военном бюро исследований США (Дурхам, Северная Каролина).

ЛИТЕРАТУРА

- A k i m a H. A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting based on local procedures. — *Communic. Assoc. Comput. Mach.*, 1974a, v. 17, p. 18—20.
- A k i m a H. Bivariate interpolation and smooth surface fitting based on local procedures (E2). — *Communic. Assoc. Comput. Mach.*, 1974b, v. 17, p. 26—31.
- B o o r C., d e. Bicubic spline interpolation. — *J. Math. Phys.*, 1962, v. 41, p. 212—218.
- B o o r C., d e. On calculating with B-splines. — *J. Approx. Theory*, 1972, v. 6, p. 50—62.
- B o o r C., d e., F i x G. J. Spline approximation by quasiinterpolants. — *J. Approx. Theory*, 1973, v. 8, p. 19—45.
- C u r r y H. B., S c h o e n b e r g I. J. On spline distributions and their limits: the Polya distributions. — *Abstr. Bull. Amer. Math. Soc.*, 1947, v. 53, p. 1114.
- H a n s o n R. J., R a d b i l l J. R., L a w s o n C. L. Write-up for SURF, CONTI, SPLVRI. Jet Propulsion Laboratory, California, 1970, 9 p.
- I M S L — International Mathematical and Statistical Libraries. Libr., 3. Ed. 3, v. 1. Houston, Texas, 1973.
- J e r o m e J. W. Topics in multivariate approximation theory. — In: *Approximation Theory* (Ed. G. G. Lorentz). New York, Academic Press, 1973, p. 151—198.
- K o e l l i n g M. E. V., W h i t t e n E. H. T. FORTRAN IV program for spline-surface interpolation and contour map production. — *Geocom. Programs*, 1973, № 9, p. 1—12.
- L a w s o n C. L. Generation of a triangular grid with application to contour plotting. — *Technical Memo 299*, Calif. Inst. Technol., 1972, 24 p.
- L y c h e T., S c h u m a k e r L. L. Local splines approximation methods. — *Math. Res. Center* (Univ. Wisconsin—Madison), 1973, Techn. Summ. Rep., 1417, 53 p.
- S c h o e n b e r g I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. — *Quart. Appl. Math.*, 1946, v. 4, p. 45—99, 112—141.
- W h i t t e n E. H. T. Orthogonal polynomial trend surfaces for irregularly spaced data. — *J. Intern. Assoc. Math. Geol.*, 1970, v. 2, p. 141—152.
- W h i t t e n E. H. T. The practical use of trend—surface analyses in the geological sciences. — In: *Display and analysis of spatial data*. New York, John Wiley and Sons, 1974.
- W h i t t e n E. H. T., B e c k m a n W. A. Jr. Fold geometry within part of Michigan Basin, Michigan. — *Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geol.*, 1969, v. 53, p. 1043—1057.
- W h i t t e n E. H. T., K o e l l i n g M. E. V. Spline-surface interpolation, spatial filtering and trend surfaces for geological mapped variables. — *J. Intern. Assoc. Math. Geol.*, 1973, v. 5, p. 111—126.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НАИМЕНЬШЕЙ ГЛАВНОЙ КОМПОНЕНТЫ

Р. А. Реймент

Упсала-университет, Швеция

С тех пор как Хотеллинг (Hotelling, 1933) ввел в литературу по статистике под названием «анализ главных компонент» использование собственных значений и собственных векторов ковариационной матрицы, всегда, по-видимому, имел место интерес к интерпретации нескольких первых собственных векторов, обеспечивающих большую часть общей дисперсии. Причина этого очевидна — исследователь стремится как можно больше узнать о тех линейных комбинациях анализируемых им переменных величин, которые обуславливают главную часть изменчивости материала.

Однако должен представлять интерес и вопрос иного рода, который, видимо, не рассматривался, хотя некоторые специалисты по математической статистике на нем кратко останавливались (Gower, 1967; Gnanadesikan, Wilk, 1969). Этот вопрос касается возможности выявления линейных связей (с практически постоянной суммой) между изучаемыми переменными по собственному вектору, отвечающему наименьшему собственному числу, т. е. такой комбинации, которая является постоянной или почти постоянной для переменных величин, измеряемых в одной и той же метрике. Оправданность этой идеи может оказаться очевидной не сразу. Гнанадесикан и Уилк (Gnanadesikan, Wilk, 1969) на геометрически построенном примере показали, каким образом наименьшая собственная величина и ее вектор могут быть применены для определения структурных соотношений.

Цель настоящей статьи — обратить внимание на возможности, представляемые наименьшей главной компонентой при решении многих задач геологии. Исчерпывающее окончательное решение затронутого вопроса возможно лишь после оценки всех аспектов, оно требует дальнейших исследований с применением моделирования.

АНАЛИЗ КОМПОНЕНТ

Основываясь на работе Йорескога, Клована и Реймента (Jöreskog, Klován, Reument, 1975), рассмотрим, что понимается под компонентным анализом. При этом ограничимся разработкой модели, отвечающей изучаемому случаю.

Рассмотрим матрицу данных Y , выраженную с отклонением

$$Y = FA' + E, \quad (1)$$

где F — матрица факторных характеристик; A — матрица факторных нагрузок; E — матрица остатков.

Если допустим, что все элементы Y поделены на \sqrt{N} , ковариационная матрица S будет равна

$$S = Y'Y.$$

Эта модель может быть хорошо подобрана путем применения к матрице данных Y метода наименьших квадратов. Поэтому необходимо определить матрицы $F_{(N \times k)}$ и $A_{(p \times k)}$ для заданного значения $k < p$ таким образом, чтобы сумма квадратов всех элементов матрицы

$$E = Y - FA', \quad (2)$$

была бы как можно меньшей.

Решение этой задачи получается в виде

$$FA' = g_1 v_1 u_1' + g_2 v_2 u_2' + \dots + g_k v_k u_k',$$

представляющем k -членов сингулярно-значного Y , соответствующего k наибольшим сингулярным значениям g_1, g_2, \dots, g_k .

Записывая

$$V_k = [v_1, v_2, \dots, v_k],$$

$$U_k = [u_1, u_2, \dots, u_k]$$

и

$$G_k = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_k),$$

получаем решение:

$$FA' = V_k G_k U_k'.$$

Это решение дает произведение FA' , но не дает однозначного решения для самих F и A .

Для A и F имеются два разных решения, оба они будут здесь приведены, но только одно из них может быть использовано для разработки интересующего нас вопроса. Следует отметить, однако, что эти решения по существу одинаковы и отличаются только масштабом при представлении факторов.

Первое решение имеет вид:

$$F = V_k, \quad A = U_k G_k. \quad (3)$$

Поскольку суммы по столбцам матрицы Y равны нулю, то равны нулю и суммы по столбцам матрицы V_k . Поэтому F будет представлено в виде отклонений, и ковариационная матрица сомножителей в этом случае будет равна

$$F'F = V_k' V_k = 1;$$

это означает, что сомножители являются некоррелированными и нормированными. Для матрицы факторных нагрузок имеем

$$A'A = G_k U_k' U_k G_k = G_k^2 = \Lambda_k,$$

где Λ_k — диагональная матрица порядка $k \times k$, диагональные элементы которой ($\lambda_1 = g_1^2, \lambda_2 = g_2^2, \dots, \lambda_k = g_k^2$) являются собственными значениями ковариационной матрицы S .

Если матрица E в выражении (1) мала, то приближенно имеем $Y \approx FA'$, и ковариационная матрица S приближенно равна

$$S = Y'Y \approx AF'FA' = AA'.$$

Предполагая, что $N \geq p$, вычисляем величину $A = U_k \Lambda_k^{-1/2}$, значение которой определяет масштаб каждого собственного вектора так, что квадрат его длины равняется соответствующему собственному значению.

Тогда оценкой F будет $Y A \Lambda_k^{-1}$.

Для второго решения

$$A = U_k, \quad F = V_k G_k. \quad (4)$$

При таком решении ковариационная матрица для факторов равна

$$F'F = G_k V_k' V_k G_k = G_k^2 = \Lambda_k,$$

и является диагональной, но с диагональными элементами, равными собственным значениям S с нисходящим порядком величин. Отсюда следует, что факторы являются все еще некоррелированными, но имеют разные дисперсии.

Для матрицы факторных нагрузок A имеем

$$A'A = U_k' U_k = 1,$$

т. е. столбцы матрицы A являются ортонормированными. Кроме того,

$$S = Y'Y \quad AF'FA' = A \Lambda_k A'.$$

Предполагая, что $N \geq p$, вычислим k наибольших собственных значений S , Λ_k и соответствующие собственные векторы U_k .

Тогда

$$A = U_k \text{ и } F = YA.$$

Именно это решение представляет интерес для данной статьи. Никакого выбора масштаба столбцов матрицы U_k не требуется. При выполнении расчетов для данного исследования принимается, что $k=p$.

В решении 1 все факторы являются некоррелированными и имеют одну и ту же дисперсию, равную единице, так что столбцы матрицы A могут сравниваться непосредственно. В решении 2 факторы также некоррелированы, но они обладают разными дисперсиями, так что столбцы матрицы A сравниваться непосредственно не могут.

Ясно, что приближение, получаемое по решению 1, не приводит к заключению о значении самых малых собственных чисел и их собственных векторов, так как они выглядят как не содержащие существенной информации. По мнению автора, основанному на экспериментальных исследованиях, элементы последнего собственного вектора могут быть использованы, если размер выборки имеет N , равное приблизительно 100 для 10 переменных величин. Это, естественно, не будет жестким правилом, так как важным моментом является то, что дисперсии и ковариации должны быть стабильными. Кроме того, если имеет место значительное случайное изменение наблюдаемых дисперсий и ковариаций, то в сочетании с ошибками округления, накапливаемыми в большинстве методов выделения собственных чисел и собственных векторов, оно создает чрезмерные флуктуации элементов последнего собственного вектора.

Некоторые примеры

Единственный путь, с помощью которого может быть получено подтверждение изложенных выше идей, это практика. Рассмотрим несколько примеров, но отметим, что они являются не более, чем произвольно выбранным рядом наблюдений, и что они ни в коей мере не наилучший материал, иллюстрирующий рассматриваемую проблему.

Планктонные фораминиферы датского возраста. В 1974 г. Мальмгрен (Malmgren, 1974) опубликовал отчет о морфологии некоторых видов датских фораминифер из Северной Скандинавии. Для анализа были выбраны следующие характеристики: длина раковины (x_1), ширина раковины (x_2), высота (x_3), ширина последней камеры (x_4), ширина предпоследней камеры (x_5) и ширина предпредпоследней камеры (x_6).

В табл. 1 приведены элементы последнего собственного вектора ковариационной матрицы логарифмически преобразованных характеристик для видов *Subbotina pseudobulloides* и *Globoconusa daubjergensis*. Согла-

Таблица 1

Шестой собственный вектор для характеристик фораминифер

Характеристики	<i>Subbotina pseudobulloides</i>		<i>Globoconusa daubjergensis</i>
x_1	0.82	0.80	0.70
x_2	-0.39	-0.47	-0.50
x_3	0.10	0.08	0.14
x_4	-0.32	-0.33	-0.43
x_5	0.05	0.08	0.21
x_6	-0.26	-0.12	-0.11
Дисперсия, %	1.2	1.2	0.6
N	100	150	100

сование элементов двух видов *Subbotina pseudobulloides* не нуждается в комментариях. Для сравнения был взят другой вид планктонной фораминиферы — *Globoconusa daubjergensis*. То, что обе свернуты спиралью, отражается на относительных величинах элементов их последнего собственного вектора, но между ними имеется четкое различие. Это различие может быть воспринято как признак того, что собственный вектор наименьшей компоненты может оказаться полезным для систематики в том смысле, что позволит непосредственно сравнивать размеры переменных величин, находящихся в постоянной или в почти постоянной линейной зависимости.

Географическое изменение современной саранчи. Автор изучил три географических обособления *Otocestus heterorrhoidalis*, имеющих в Швеции (Reyment, 1969). В табл. 2 даны собственные векторы наименьших собственных величин для самцов и самок. Переменными величинами являются: длина заднего ребра (x_1), длина передне-спинки (x_2), длина надкрылья (x_3) и наименьшая ширина между краями на передне-спинке (x_4).

Таблица 2

Четвертый собственный вектор для характеристик саранчи

Характеристики	Киннекуль		Оланд		Готланд	
	самцы	самки	самцы	самки	самцы	самки
x_1	0.92	0.83	0.78	0.80	0.80	0.82
x_2	-0.11	-0.52	-0.55	-0.49	-0.60	-0.47
x_3	-0.37	-0.20	-0.27	-0.35	0.02	-0.33
x_4	-0.07	-0.03	0.07	0.01	-0.04	0.02
Дисперсия, %	3.89	3.99	4.31	2.92	4.41	3.15
N	110	101	120	117	128	95

В этом случае наименьшая собственная величина оказывается довольно большой, и едва ли можно ожидать, что она будет указывать на отсутствие изменений в соотношениях между изучаемыми переменными. Внимательное рассмотрение табл. 2 показывает, что такая тенденция есть, но она искажена шумами.

Химизм минералов. Саксена (Saxena, 1969) исследовал силикатные твердые растворы и геотермометрию с точки зрения распределения железа и магния между сосуществующими гранатом и биотитом, используя метод главных компонент. Были проанализированы 93 образца горных пород, образовавшихся при разных давлениях и температурах, при этом учтены следующие характеристики: x_1 — коэффициент распределения обмена катионов на основе $k_{DFe}^{Bi-Gar} = \frac{x_3(1-x_2)}{(1-x_3)x_2}$; содержания: x_2 — железа в гранате, x_3 — в биотите; x_4 — марганца в гранате; x_5 — кальция в гранате; x_6 — Al^{IV} в биотите; x_7 — Al^{VI} в биотите; x_8 — титана в биотите.

При анализе этих характеристик были выделены главные компоненты корреляционной матрицы, с помощью которых Саксена смог различить горные породы нижней и верхней ступени метаморфизма. Наименьшее собственное число обуславливает 0.32% общей дисперсии. Оно связано с собственным вектором (-0.58, -0.66, 0.50, 0.09, 0.00, -0.01, -0.04, -0.15). Эта переменная величина может быть интерпретирована как инвариантная связь между первыми тремя переменными величинами, а именно: $-0.53x_1$, $-0.66x_2$ и $+0.50x_3$. То, что мы имеем в данном случае, очевидно, является выражением коэффициента распределения k_D , т. е. отношения, определяющего x_1 через x_2 и x_3 .

Иными словами, наименьшая главная компонента отражает поведение зависимой величины x_1 .

ЛИТЕРАТУРА

- Hotelling H. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. — J. Ed. Psych., 1933, v. 24, p. 417—441, 498—520.
- Gnanadesikan R., Wilk M. B. Data analytic methods in multivariate statistical analysis. — In: Multivariate Analysis, v. 2. New York, Academic Press, p. 593—638.
- Gower J. C. Multivariate analysis and multidimensional geometry. — Statistician, 1967, v. 17, p. 13—28.
- Jöreskog K. G., Klován J. E., Reyment R. A. Geological Factor Analysis. Amsterdam, Elsevier, 1975.
- Malmgren B. A. Morphometric studies of planktonic foraminifers from the type Danian of Southern Scandinavia. — Stockh. Contr. Geol., 1974, v. 29, p. 1—126.
- Reyment R. A. Some case studies of the statistical analysis of sexual dimorphism. — Bull. geol. Instn. Univ. Upsala, NS, 1969, v. 1, p. 97—119.
- Saxena S. K. Silicate solid solutions and geothermometry. — Contr. Min. Petrol., 1969, v. 22, p. 259—267.

ОБЩИЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ПАРАГЕНЕТИЧЕСКИХ ДИАГРАММ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ, ОСНОВАННЫЕ НА КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ *

А. Г. Краева, Н. Л. Добрецов, Т. М. Блинчик,
Ю. И. Кузнецов **

Институт геологии и геофизики СО АН СССР, Новосибирск

Предлагаемая формализация получения диаграмм состояния многокомпонентных систем дает, во-первых, возможность ставить задачи достаточно широко, без ограничений, поскольку она справедлива при любом числе компонентов, фаз и внешних факторов, и, во-вторых, избавляет исследователя от трудоемкой работы по построению геометрических конструкций и ошибок в них. Первое обстоятельство существенно, так как топология достаточно разработана лишь для систем с тремя виртуальными компонентами (Скрейнемакерс, 1948; Коржинский, 1957).

Второе обстоятельство позволит перейти к массовому анализу любых систем, поскольку наиболее трудоемкая часть построения диаграмм поручается машине.

Примем следующие обозначения: n — размерность системы; $n+1$ — число компонентов; Φ — число фаз, в частности минералов; q — число внешних факторов; $r=(n+1+q-\Phi)$ — вариантность системы; E^q — пространство внешних факторов; P^n — пространство, в котором описывается состав системы.

Суть задачи в том, чтобы представить фазовые превращения (поведение составов) в пространстве внешних факторов E^q .

В основе построения простых диаграмм лежит операция по написанию реакций внутри каждой ассоциации $n+2$ -фазы. Она легко формализуется, поскольку сводится к решению системы $n+1$ -однородных линейных уравнений с $n+2$ -неизвестными (стехиометрическими коэффициентами). Каждой ассоциации $n+2$ -фазы на диаграмме состояния ставится в соответствие $(q-1)$ -мерная поверхность. Конструкция диа-

* В статье не определен ряд понятий, нет четкой постановки задачи, тем не менее публикация работы полезна, так как обращается внимание на важные для петролога вопросы (прим. ред.).

** Разработка методики осуществлена в основном А. Г. Краевой по предложению и с участием Н. Л. Добрецова; уточнение алгоритмов и составление программ для ЭВМ выполнены Т. М. Блинчик и Ю. И. Кузнецовым.

граммы определяется ее пересечениями. Кроме того, практически чаще всего имеют дело с системами, в которых есть «вырожденные» равновесия.

Основные моменты: 1) ранг системы уравнений уменьшается, поэтому в программу нужно вводить операцию его определения для всех сочетаний по $n+2$ -минерала; 2) довольно сложно, но возможно при любом n провести объединение соответствующих им гиперповерхностей такое, чтобы получить в пространстве внешних факторов области устойчивости q -вариантных ассоциаций; 3) выделение вариантов сочетаний стабильных пучков определяется по правилам Скрейнемакерса; 4) для каждой области парагенезисы определяются каждый раз самостоятельно.

Пункты 1, 2 и 4 можно выполнить гораздо эффективнее, если основываться на переборе сочетаний не по $n+2$ -фазы, а по $n+1$. Пункт 3 выполняется в принципе в обоих случаях одинаково. Сочетаниям по $n+1$ -фаза ставятся в соответствие вершины специального графа, который в геометрическом смысле является источником полной информации о системе. Простыми логическими операциями из него можно извлечь все равновесия, вырожденные и невырожденные, парагенезисы и области их существования в E^q и т. д. Кроме того, эти приемы могут служить основой для построения диаграмм систем с фазами переменного состава (Вопросы геохимии, 1975), разница заключается в получении графа. Для систем с фазами переменного состава его можно получить из опытных данных с последующей логической обработкой, для систем с фазами постоянного состава — путем вычисления определителей $n+1$ -го порядка. Ниже приводятся некоторые геометрические предпосылки для алгоритмов построения диаграмм и программа для получения элементов диаграммы в пространстве E^q .

Пусть каждая фаза имеет постоянный состав во всем интервале изменения внешних параметров. Тогда его можно записать в виде вектора-столбца $n+1$ -мерного векторного пространства:

$$A^j = (a_{ji}) \quad (j = 0, \dots, n) \quad (1)$$

Если никаких других данных о системе нет, то сначала полагаем, что для каждой ассоциации $n+1$ -фаза можно найти значения внешних факторов, при которых эти фазы имеют в пространстве составов непрерывную область сосуществования. Геометрически такую ситуацию представляют n -мерным симплексом.* Он натянут на точки с координатами (1), изображающими фазы в n -мерном проективном пространстве. Из множества сочетаний нужно исключить такие, для которых между векторами существует линейная зависимость. Такая группа фаз ведет себя как система с меньшим числом компонентов. В этой ситуации определитель, составленный из $n+1$ -векторов-столбцов, равен нулю (Курош, 1963).

Если два n -мерных симплекса A^{i_0}, \dots, A^{i_n} и $A^{i'_0}, \dots, A^{i'_{n-1}}$, A^j имеют общие внутренние точки, то вместе они образуют подсистему, в которой идет фазовая реакция. Их нужно разделить при нахождении q -вариантной области. Если эти два симплекса находятся по разные стороны от их общей гиперграни, то потенциально они вместе могут остаться q -вариантными. Алгебраическим признаком этих ситуаций служит теорема Гейла (Gale, 1964). В обоих определителях одинаковые столбцы поставим на одни и те же места. Тогда в первом случае они будут иметь один знак, во втором — противоположный. Таким образом, приходим к возможности изучения топологии системы с помощью $(n+1)$ -определителей матрицы составов A :

$$A = (a_{ji}) \quad (j = 0, \dots, n; \quad i = 1, \dots, \Phi). \quad (2)$$

* Симплекс — простейшая выпуклая фигура, в которой каждые k вершин ($k=0, \dots, n$) определяют $(k-1)$ -мерный элемент ее границы.

Доказательства можно найти в соответствующих работах (Краева, Добрецов, 1974; Вопросы геохимии. . ., 1975).

В качестве иллюстрации возьмем пример из работы Д. С. Коржинского (1957). Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$A^1 A^2 A^3 A^4 A^5$

описывает систему рис. 1. Вычисляем все определители 3-го порядка, при этом нулевые отбрасываем. Сравнивая знаки оставшихся, формируем граф. Если два определителя с n общими столбцами имеют один знак, то соответствующие им вершины соединяем «сильным» ребром, если разные — то «слабым», если они не имеют n общих столбцов, то считаем соответствующие им вершины в графе несмежными. Для нашего примера (Краева, Добрецов, 1974) нулевых определителей нет, поэтому число вершин в графе равно числу сочетаний из 5 по 3. Сравнивая знаки, получим граф (рис. 2), который записывается в машине матрицей смежности (табл. 1). В ней сильным ребрам соответствует +1, слабым соответственно -- 1. Примем для такого графа обозначение G_{Φ}^n . Матрица симметрична относительно главной диагонали. На пересечении 1-й строки и 2-го столбца стоит +1. Это соответствует тому, что треугольники $A^1A^2A^3$ и $A^1A^2A^4$ находятся по одну сторону от их общего ребра. На пересечении 1-й строки и 5-го столбца стоит -1 — треугольники $A^1A^2A^3$ и $A^1A^3A^4$ находятся по разные стороны от их общего ребра. На пересечении 1-й строки с 6-м столбцом стоит 0 — треугольники $A^1A^2A^3$ и $A^1A^4A^5$ не имеют общей гиперплоскости.

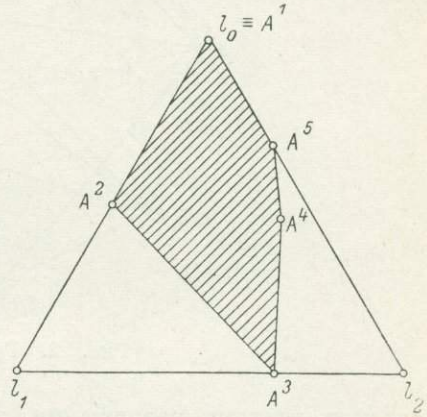


Рис. 1. Пример трехкомпонентной системы.

Поскольку граф строится алгебраически, мы имеем возможность выяснять подобные геометрические ситуации, не ограничивая себя размерностью системы. С другой стороны, именно эти геометрические позиции в конечном счете определяют все элементы парагенетической диаграммы.

Определение 1. Множество пар симплексов с 0-мерным пересечением и с вершинами из данного набора точек-фаз будем называть

Таблица 1

Матрица смежности для системы рис. 2

Вершины графа	X ¹	X ²	X ³	X ⁴	X ⁵	X ⁶	X ⁷	X ⁸	X ⁹	X ¹⁰	Номера столбцов определителей
X ¹	0	+1	+1	+1	-1	0	+1	0	0	-1	1 2 3
X ²		0	+1	-1	+1	-1	0	+1	0	0	1 2 4
X ³			0	0	+1	-1	-1	0	0	+1	1 2 5
X ⁴				0	+1	0	+1	-1	+1	0	2 3 4
X ⁵					0	-1	0	0	+1	+1	1 3 4
X ⁶						0	0	0	+1	+1	1 4 5
X ⁷							0	+1	-1	+1	2 3 5
X ⁸								0	+1	0	2 4 5
X ⁹									0	-1	3 4 5
X ¹⁰										0	1 3 5

системой пересечений, определенной на этом наборе. Условимся обозначать этот комплекс $\bar{K}^{n, \phi}$.

Для рис. 1 система пересечений показана на рис. 3. Она является геометрической моделью фазовых превращений. К ним, конечно, отно-

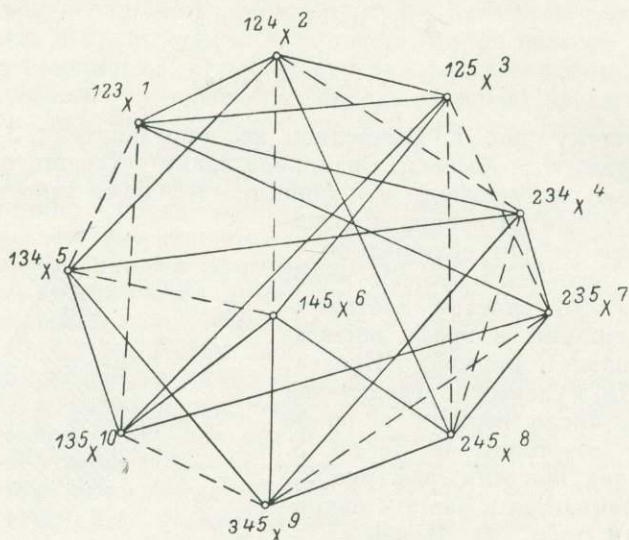


Рис. 2. Граф G_5^2 к рис. 1.

сятся и реакции разложения, т. е. пары точка—симплекс. На первый взгляд может показаться, что не все элементы из $\bar{K}^{n, \phi}$ описываются определителями $(n+1)$ -го порядка в силу того, что размерность их уменьшается с появлением нулевых. Например, на рис. 4 показана ситуация, в которой определитель

$$D_{1, 2, 3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Однако матрица составов обязательно будет иметь ранг 3, поэтому среди всех ее столбцов должен найтись хотя бы один

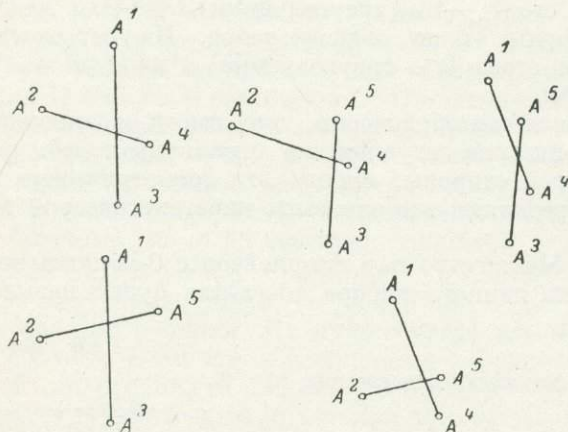


Рис. 3. Система пересечений $k^{-2,5}$.

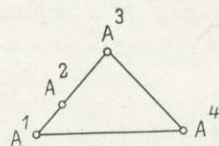


Рис. 4. Элемент системы пересечений $A^2 = A^1, A^3$.

такой, в котором определители $D_{1, 2, 4}$, $D_{1, 3, 4}$ и $D_{2, 3, 4}$ нулю не равны. Соотношение их знаков соответствует виду элемента системы пересечений $A^2 = A^1, A^3$.

Каждому элементу пересечений в E^q соответствует гиперповерхность, в которой все фазы элемента находятся в равновесии. Этим определяется диаграмма рис. 5, составленная для рис. 1 и 2 при $n=2$.

Определение 2. Полиэдр составов называется множеством точек R , для каждой из которых можно написать неотрицательную линейную комбинацию

$$R = \sum_{j=1}^k a_j A^j \quad (a_j \geq 0), \quad (4)$$

где k не больше $n+1$.

Каждая из таких точек представляет собой какую-либо механическую смесь фаз.

Будем обозначать полиэдр составов $K^{n, \phi}$.

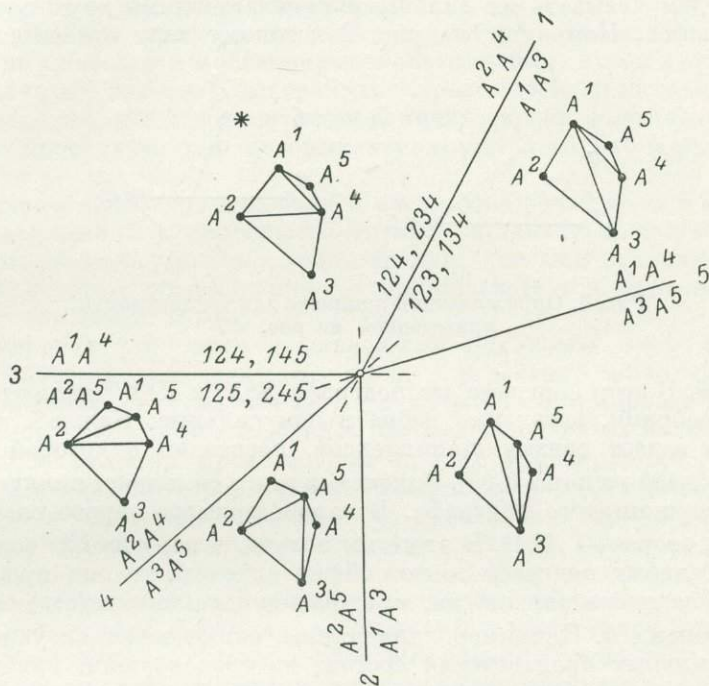


Рис. 5. Триангуляция полиэдров состава.

Говоря о многомерном полиэдре составов, всегда подразумевают его границу, его состав. Из сказанного следует алгебраический признак грани. Точки A^1, \dots, A^{i_n} находятся в одной $(n-1)$ -мерной грани полиэдра $(K^{n, \phi})$, если и только если определители D_{i_1, \dots, i_n, j_1} и D_{i_1, \dots, i_n, j_2} для всех j_1 и j_2 из $1, \dots, \phi$, кроме i_1, \dots, i_n , имеют одинаковые знаки. Легко проверить, что для рис. 1 $D_{1,2,3}$, $D_{1,2,4}$ и $D_{1,2,5}$ имеют один и тот же знак.

Определение 3. Разбиение полиэдров на простейшие геометрические фигуры — симплексы — называется их триангуляцией. Понятно, что для нас имеют смысл те триангуляции, в вершинах которых стоят фазы. Каждая триангуляция является геометрической реализацией, моделью одного из теоретически возможных q -вариантных фазовых комплексов. Множество их обозначим $C^{n, \phi}$.

Что касается рис. 1, то все триангуляции для него находятся на рис. 5 в дивариантных полях. Теорема Гейла дает возможность разыскать триангуляции для полиэдра любой размерности.

Определение 4. Множество симплексов из $\bar{K}^{n, \phi}$, не входящих в данную триангуляцию, назовем дополнительным комплексом. Например, для триангуляции рис. 5, отмеченной звездочкой, дополнительный комплекс показан на рис. 6, б.

О п р е д е л е н и е 5. Симплексы, оставшиеся после удаления из $K^{n, \phi}$ дополнительного комплекса, назовем комплексом, определяющим данную триангуляцию. В нашем примере для той же триангуляции определяющий комплекс показан на рис. 6, а.

Выписывание n -мерных симплексов конкретной триангуляции по последним двум комплексам имеет особое значение при постановке экспериментов, например, для построения диаграмм плавкости. Этот процесс был описан в соответствующей работе (Вопросы геохимии. . . , 1975).

Теперь можно вернуться к использованию графа G_{ϕ}^n .

Элементы системы пересечений читаются в графе полными максимальными подграфами определенного вида. По терминологии упомянутой работы будем называть их сильными произведениями двух полных слабых подграфов. Например, на рис. 2 к такому виду относится подграф

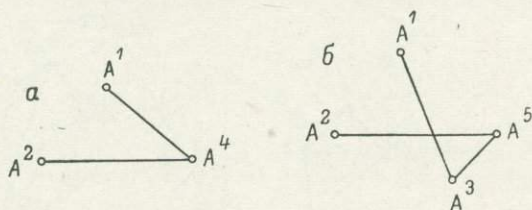


Рис. 6. Определяющий комплекс для триангуляции, приведенной на рис. 5.

$X^5X^6X^9X^{10}$. В этом подграфе два подграфа X^5X^6 и X^9X^{10} являются просто слабыми ребрами, остальные ребра в нем сильные. Каждый из слабых подграфов задает связку n -симплексов, носителем в которой является симплекс одной из пар в $\bar{K}^{n, \phi}$. Индексами этого симплекса являются общие индексы вершин этого подграфа. В нашем примере первое слабое ребро дает A^1A^4 , второе — A^3A^5 . В итоге мы получили пару из $\bar{K}^{2,5}$ (см. рис. 3). Если оба слабых подграфа имеют общие индексы, то они представляют собой вырожденное равновесие, т. е. размерность соответствующей пары из $\bar{K}^{n, \phi}$ меньше n . Например, для системы, включающей ситуацию рис. 4, одно из сильных произведений состоит из трех вершин. Разбиение его на слабые подграфы даст вершину 1, 3, 4 и слабое ребро 1, 2, 4—2, 3, 4. Индекс 4 отбрасываем сразу и получаем пару A^1A^3 — A^2 . В графе такая пара будет представлена несколько раз в разных q -вариантных ассоциациях. В целом «кратные» линии диаграммы находятся как декартовы произведения (Вопросы геохимии. . . , 1975).

Представление фазовых реакций в графе G_{ϕ}^n через $(n+1)$ -фазовую ассоциацию играет особую роль. С одной стороны, это позволяет обходиться с вырожденными и невырожденными равновесиями с помощью одних и тех же процедур. С другой стороны, такое представление эффективно при формировании областей равновесия в E^2 , поскольку фазовые комплексы (триангуляции) формируются сразу — простым объединением этих ассоциаций (n -симплексов).

Другой вид полных подграфов — слабые произведения двух полных сильных подграфов (Вопросы геохимии. . . , 1975). На рис. 2 к ним относится, например, подграф $X^2X^5X^6$. Все соответствующие им n -симплексы имеют общую гипергрань, причем вид графа говорит, что треугольники $A^1A^2A^4$ и $A^1A^3A^4$ находятся по одну сторону от нее, а треугольник $A^1A^4A^5$ — по другую. Если гипергрань лежит на границе полиэдра ($K^{n, \phi}$), то все инцидентные ей симплексы лежат по одну сторону. Это значит, что один из сильных подграфов в соответствующем слабом произведении пуст. Таким образом, каждый из максимальных полных подграфов, состоящий только из сильных ребер, представляет в графе G_{ϕ}^n гипергрань полиэдра. Полная совокупность их дает границу. На рис. 2, например,

такой подграф образуется вершинами X^1, X^2, X^3 . Их общие индексы соответствуют стороне A^1A^2 границы заштрихованного полиэдра рис. 1.

Если гипергрань сложнее по форме, чем симплекс, то ей соответствует декартово произведение графов. Один из них является графом G_k^{n-1} , составленным для вершин грани, другой перебирает все вершины, не лежащие в ней (Вопросы геохимии. . . , 1975).

Наконец, каждая триангуляция полиэдра в G_{ϕ}^n соответствует подграфу, содержащему только слабые ребра. Например, триангуляцию под звездочкой на рис. 5 в графе G_5^2 рис. 2 представляет слабый подграф с вершинами X^2, X^4, X^6 . Обратное не всегда верно, т. е. не всегда слабый подграф определяет триангуляцию. Этим объясняется необходимость перехода от G_{ϕ}^n к сверхграфу (Вопросы геохимии. . . , 1975) прежде, чем найдутся все фазовые q -вариантные комплексы.

Таким образом, граф G_{ϕ}^n позволяет изучать топологию диаграмм состояния, не прибегая к многомерным конструкциям; путем его обработки можно найти все элементы диаграммы. Переходя непосредственно к алгоритмам, заметим, что с математической точки зрения более строго выглядят такие процедуры, при которых используется только матрица смежности.

В сборнике «Вопросы геохимии и алгоритмы качественной теории фазовых превращений в многокомпонентных системах» можно найти один из таких вариантов. Однако с точки зрения экономии времени и памяти ЭВМ на некоторых стадиях пока легче использовать и индексы, представленные в вершинах графа.

В неинвариантной точке в равновесии находятся $n+1+q$ -фаз. Поэтому в основе анализа диаграмм лежит определение триангуляций подполиэдров, натянутых на $n+1+q$ точки-фазы. Формирование области q -вариантного равновесия в каждой связке основано на наличии общих n -симплексов сильных произведений и этих триангуляций. Объединение связок в одну пространственную конфигурацию (областей из разных связок при $q=2$ пучков) основано на объединении триангуляций подполиэдров в триангуляции всего полиэдра составов. При $q=2$ в неинвариантной точке в равновесии находятся $n+3$ -фазы. Формирование дивариантных полей в каждом пучке производится объединением $n+1$ -минеральных ассоциаций сильных произведений в одну триангуляцию подполиэдра, натянутого на эти $n+3$ -фазы. Триангуляция под звездочкой (рис. 5) образуется объединением треугольников, которые в графе (рис. 2) представлены слабыми подграфами сильных произведений $X^1X^2X^4X^5$ и $X^2X^3X^4X^6$ (рис. 7, а, б).

О п р е д е л е н и е 6. Системой образующих нерв * триангуляции полиэдра будем называть совокупность сильных произведений, таких, что один из слабых подграфов каждого входит в нерв триангуляции целиком.

Таким образом, подграфы рис. 7, а, б являются системой образующих для подграфа $X^2X^4X^6$ — нерва триангуляции под звездочкой.

Понятие «система образующих» в данной методике является узловым. По сути все алгоритмы так или иначе будут сводиться к поиску систем образующих и к операциям над ними.

Вопрос построения парагенетических диаграмм при двух внешних факторах с помощью ЭВМ можно считать решенным (Вопросы геохимии. . . , 1975).

Опишем другую последовательность процедур, которая может быть применена при любом q , хотя она тоже не исчерпывает всех способов.

П р о ц е д у р а 1. Находим все $q-1$ -вариантные равновесия (при $q=2$ многовариантных линий). Для этого (Краева, Добрецов, 1974; Вопросы

* Нерв триангуляции, по терминологии, принятой в топологии, — это слабый подграф, в вершинах которого стоят n -симплексы триангуляции. Слабые ребра свидетельствуют о наличии общей, $(n-1)$ -мерной, грани между парой симплексов.

геохимии. . . , 1975) применялся алгоритм Магу (Зыков, 1969; Кофман, 1975), который заодно выделяет и слабые произведения. Множество и тех и других использовалось для того, чтобы найти все поля без понятия «системы образующих», т. е. без триангуляций, а также для того, чтобы для каждой линии найти поле, в котором проходит ее нестабильная часть. Чтобы сразу найти только сильные произведения, сначала можно составить все сочетания по $n+2$ -фазы из ϕ данных и для каждого сочетания выбрать из графа все вершины, индексы которых входят в индексы сочетания. В нашем простом примере для сочетания 1, 2, 3, 4 нужно выбрать вершины X^1, X^2, X^4, X^5 , индексы которых 123, 124, 234, 134 входят в сочетание.

Процедура 2. В каждом сильном произведении находим оба слабых подграфа. Например, в $X^1X^2X^4X^5$ выделяем X^1X^5 и X^2X^4 (рис. 7). Эта процедура легко формализуется (Вопросы геохимии. . . , 1975).

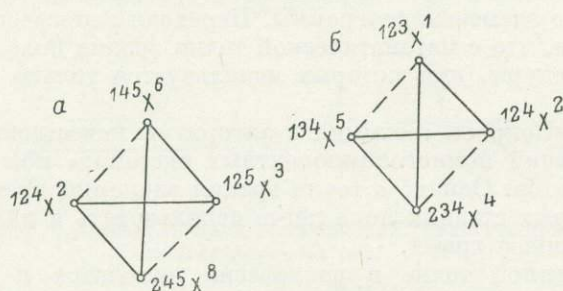


Рис. 7. Двумерные области, соответствующие области под * на рис. 5.

Процедура 3. В каждом слабом подграфе находим индексы, общие для его вершин (1, 3 и 2, 4 в названном сильном произведении); отбросим из них индексы, общие для всего сильного произведения в целом, — случай «вырожденного» равновесия. Получим запись гиперповерхности $q-1$ -вариантного равновесия (см. рис. 5).

Процедура 4. Находим матрицу смежности сверхграфа \bar{G}_{ϕ}^n , происхождение которого можно объяснить следующими обстоятельствами.

Граф G_{ϕ}^n в явном виде дает информацию о пересечении n -симплексов только в том случае, если они имеют общую гипергрань. Если вершины не смежны, то судить о том, пересекаются соответствующие им симплексы или нет, можно, рассматривая граф в целом. Пользуясь соответствующей терминологией (Зыков, 1969), определим сверхграф \bar{G}_{ϕ}^n тем, что в G_{ϕ}^n будем добавлять сильные ребра во всех случаях, когда два n -симплекса пересекаются, а в G_{ϕ}^n не смежны. В матрице смежности вместо нулей будут появляться $+1$.

Если два симплекса A^{i_0}, \dots, A^{i_n} и A^{j_0}, \dots, A^{j_n} пересекаются (сюда же относится и ситуация, когда один симплекс лежит внутри другого), то пересекаются (т. е. имеют общие точки) и их границы. Это значит, что в $\bar{K}^{n, \phi}$ существует такая пара, в которой один симплекс целиком входит в границу симплекса A^{i_0}, \dots, A^{i_n} , а другой — в границу симплекса A^{j_0}, \dots, A^{j_n} . Например, в системе пересечений рис. 3 существование пары $A^1A^4 - A^2A^5$ делает достоверным тот факт, что пары треугольников $A^1A^2A^5$ и $A^1A^3A^4$, $A^1A^4A^5$ и $A^2A^3A^5$, $A^1A^2A^4$ и $A^2A^3A^5$ пересекаются и потому не могут войти парами в одну триангуляцию. Следовательно, если индексы одного элемента пары из $\bar{K}^{n, \phi}$ включаются во множество индексов i -й вершины графа, а индексы другого — в индексы j -й вершины, то на пересечении i -й строки и j -го столбца в матрице смежности

вместо нуля ставится +1. Если это условие не выполняется, то оставляется нуль.

Переходим от табл. 1 к табл. 2.

Таблица 2

Матрица смежности сверхграфа \bar{G}_{ϕ}^n к рис. 1 и 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	+1	+1	+1	-1	0	+1	+1	0	-1
2		0	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1
3			0	0	+1	+1	-1	-1	0	+1
4				0	+1	0	+1	-1	+1	+1
5					0	-1	+1	+1	+1	+1
6						0	+1	+1	+1	+1
7							0	+1	-1	+1
8								0	+1	+1
9									0	-1
10										0

Процедура 5. Находим все триангуляции полиэдра составов. Теперь все триангуляции в G_{ϕ}^n представимы слабыми максимальными связными подграфами, и, наоборот, каждому такому подграфу будет соответствовать триангуляция. Эту задачу можно выполнить с помощью алгоритма Магу. Для чего составляем булево произведение

$$\prod_{i < j, k, \dots} (\bar{x}_i + \bar{x}_j, \bar{x}_k, \dots). \quad (5)$$

где j, k, \dots — номера вершин, сильно смежных с i -й. Раскрывая скобки, на каждом шаге используем закон поглощения, т. е. равенство

$$\bar{x}_i + \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j \cdot \dots = \bar{x}_i. \quad (6)$$

Получаем сумму произведений. Взяв вершины, номера которых отсутствуют в произведении, получаем максимальный слабый связный подграф. Более подробное описание алгоритма можно найти в другой работе (Вопросы геохимии. . ., 1975).

В нашем примере исходное произведение выглядит следующим образом:

$$(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_7 \cdot \bar{x}_8) (\bar{x}_2 + \bar{x}_5 \cdot \bar{x}_7 \cdot \bar{x}_8 \cdot \bar{x}_9 \cdot \bar{x}_{10} \cdot \bar{x}_3) (\bar{x}_3 + \bar{x}_5 \cdot \bar{x}_6 \cdot \bar{x}_{10}) \times \\ \times (\bar{x}_4 + \bar{x}_7 \cdot \bar{x}_9 \cdot \bar{x}_{10}) (\bar{x}_5 + \bar{x}_7 \cdot \bar{x}_8 \cdot \bar{x}_9 \cdot \bar{x}_{10}) (\bar{x}_6 + \bar{x}_7 \cdot \bar{x}_8 \cdot \bar{x}_9 \cdot \bar{x}_{10}) \times \\ \times (\bar{x}_7 + \bar{x}_8 \cdot \bar{x}_{10}) (\bar{x}_8 + \bar{x}_9 \cdot \bar{x}_{10}) = 1.$$

Раскрыв скобки, получаем:

$$\bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \bar{x}_7 \bar{x}_8 \bar{x}_9 \bar{x}_{10} + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_7 \bar{x}_8 \bar{x}_9 \bar{x}_{10} + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \bar{x}_7 \bar{x}_8 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \bar{x}_8 \bar{x}_{10} + \\ + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \bar{x}_7 \bar{x}_9 \bar{x}_{10} = 1.$$

Теперь выпишем триангуляции $X^2 X^4 X^6$, $X^1 X^5 X^6$, $X^1 X^9 X^{10}$, $X^3 X^7 X^9$, $X^3 X^4 X^8$.

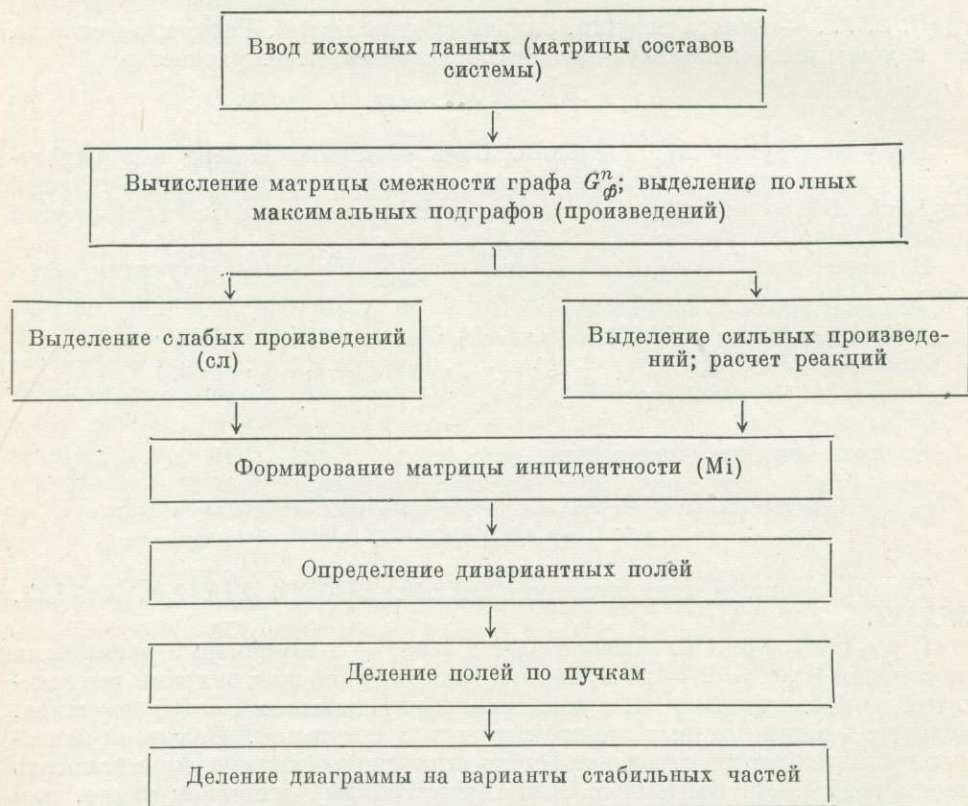
Процедура 6. Распределяем все $q - 1$ -вариантные равновесия по связкам (при $q=2$ — по пучкам). Для этого сначала находим все сочетания из ϕ -фаз по $n+q+1$. Среди сильных произведений выбираем такие, индексы вершин которых целиком входят в сочетании. Получаем названия границ областей в связке. Теперь в каждой области нужно написать парагенезисы. Из найденных выше триангуляций выбираем такие, для которых набранные сильные произведения связки входят в системы образующих. Назвав для каждой триангуляции систему образующих (вернее, ту ее часть, которая относится к связке), указываем границу области существования этого парагенезиса.

Иллюстрация этих рассуждений была дана выше, в связи с введением понятия «системы образующих».

Процедура 7. Находим варианты разбиения диаграммы на стабильные и нестабильные части. Если при решении этого вопроса не использовать каких-либо дополнительных данных, то в общем виде он решится на основе двух моментов. Во-первых, если связка стабильна, то стабильны все ее области. Во-вторых, любая триангуляция в диаграмме не может повториться дважды.

Процедура 8. Для интересующего нас варианта решаем вопрос о наложении областей из разных связок. Если сильные произведения из разных связок являются системой образующих нерва одной и той же триангуляции, то они ограничивают одну и ту же область. Из-за ограниченного объема статьи мы не можем привести достаточно большой пример для иллюстрации двух последних процедур, поэтому и соответствующие операции более подробно описывать не будем.

По алгоритмам, приведенным в соответствующих работах (Краева, Добрецов, 1974; Вопросы геохимии . . . , 1975), написана программа на языке АЛГОЛ (Мак-Кракен, 1967) для транслятора $\alpha=6$ (Буда, 1974), реализованная на ЭВМ БЭСМ-6. По этой программе можно получить необходимые элементы диаграмм состояния при двух внешних факторах, такие как моновариантные линии, дивариантные поля, пучки (инвариантные точки) и входящие в них линии. Кроме того, программа позволяет определить относительное расположение стабильных частей линий в пучке и варианты разбиения диаграммы. Ниже приведена блок-схема для вычисления элементов парагенетических диаграмм.



В качестве исходных данных берутся: матрица смежности графа, матрица подадресации, перебирающая все сочетания из ϕ -фаз по $n+1$, и массив значений определителей.

Сначала в графе выделяются все максимальные полные подграфы по алгоритму Магу (Хофман, 1975), затем из них выделяются сильные произведения. Достаточным условием для этого является проверка смежности трех любых вершин подграфа. Если оказывается, что число слабых ребер нечетно, то такой подграф относится к сильному произведению, если четно — то к слабому.

Каждый из слабых подграфов сильного произведения дает множество $n+1$ -минеральных ассоциаций, которые находятся в одном поле. Соответствующая реакция является границей между двумя полями.

Выражением реакции является равенство

$$\sum_{k=0}^n D_{i_0 \dots i_{k-1} j^k i_{k+1} \dots i_n} \cdot A^{i_k} = D_{i_0 \dots i_n} A^j, \quad (7)$$

где D — значения определителей, подсчитанные при получении матрицы смежности и оставленные в памяти машины; A^{i_k} , A^j — минералы.

Для того чтобы написать реакции в таком виде, нужно из каждого сильного произведения выделить два слабых подграфа. Они отыскиваются также по матрице смежности, для чего берется первая вершина сильного произведения и проверяется тип ее смежности с остальными вершинами того же подграфа. Если ребро оказывается слабым, то данная вершина входит в один подграф с первой, если же ребро сильное, то вершина входит во второй слабый подграф. Затем выбираем общие индексы вершин каждого из слабых подграфов и соответствующие значения определителей, которые являются коэффициентами уравнения реакции. Реакция в виде (7) выводится на печать.

Далее строим матрицу инцидентности (Вопросы геохимии..., 1975) для сильных и слабых произведений. На пересечении i -й строки и j -го столбца ставится -1 , если подграфы имеют общее слабое ребро; $+1$ — если подграфы имеют сильное ребро, 0 — если вообще не имеют общих ребер. Для рис. 1 и 2 составим матрицу (табл. 3).

Таблица 3

Матрица инцидентности к рис. 2

		Слабые произведения										
		X^1	X^2	X^1	X^2	X^3	X^4	X^6	X^1	X^3	X^7	
Сильные произведения		X^2	X^5	X^4	X^4	X^7	X^5	X^8	X^5	X^6	X^9	
		X^3	X^6	X^7	X^8	X^8	X^9	X^9	X^{10}	X^{10}	X^{10}	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
X^1	X^2	1	+1	+1	+1	-1	0	+1	0	-1	0	0
X^1	X^3	2	+1	0	+1	0	-1	0	0	-1	+1	+1
X^2	X^3	3	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	0	+1	0
X^4	X^7	4	0	0	+1	-1	+1	+1	0	0	0	-1
X^5	X^6	5	0	-1	0	0	0	+1	+1	+1	+1	-1

Путем обработки матрицы инцидентности можно получить все поля дивариантных равновесий. Проверяем каждую пару реакций на образование поля. Если в соответствующих им строках на пересечении с одним и тем же столбцом стоит по -1 , то поля нет, если такого столбца нет, то пара реакций образует поле. Например, 1-я пара поля образовать не может (на пересечении с 8-м столбцом стоит по -1), 1-я и 3-я реакции образуют поле.

Эта же матрица дает информацию о положении нестабильных частей линий. Если строки трех реакций на пересечении с одним и тем же столбцом имеют по $+1$, то все три нельзя расположить в одном угле $< 180^\circ$ на плоскости диаграммы. Например, первые три строки на пересечении с первым столбцом имеют по $+1$. Следовательно, нестабильная часть 2-й реакции идет в поле между 1-й и 3-й (рис. 5).

Далее, с помощью сочетаний выбираются все пучки и их линии. По приведенному признаку определяется взаимное расположение нонвариантных точек, т. е. по матрице инцидентности распознаются ситуации рис. 8, а и б, и, наконец, варианты наборов стабильных пучков.

Наступило время заметить, что до сих пор все построения велись только по отношению к инцидентности тех или иных элементов диаграммы. Это значит, что все процедуры велись в проективном пространстве и поэтому результат получался с точностью до «выворачивания» (на рис. 8 пучки можно переименовать). Это влечет за собой большое число вариантов разбиения. Число их резко сократится, если ввести некоторые метрические

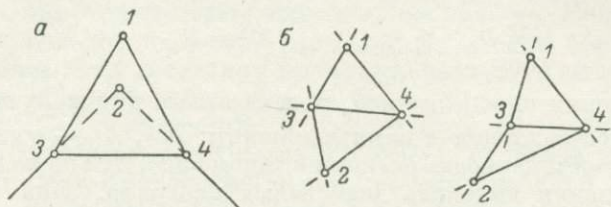


Рис. 8. Пример разбиения диаграмм на стабильные и нестабильные части.

характеристики линий (например, по приращению H_2O и Y или S и V). Тогда, упорядочив линии или касательные к ним по наклонам к осям в каждом пучке, для рис. 8, а мы зафиксируем названия нонвариантных точек. Найдя такие четверки, составим булево произведение

$$P(x_i + x_j), \quad (8)$$

где i и j — номера пучков, аналогичных 1-му и 2-му на рис. 8, а. Раскрывая скобки, используем закон поглощения на каждом шаге, в итоге получим сумму произведений. Взяв номера пучков, не вошедшие в произведение, получим один из вариантов. Если число степеней свободы системы меньше -1 , то в выражение (8) нужно ввести множители, состоящие из сумм пар пучков, лежащих на одной линии.

В конечном итоге на печать выводится массив, представляющий реакции. После каждой строки массива на печать выводятся слабые подграфы соответствующего сильного произведения и уравнения реакции. Затем следует матрица инцидентности, пучки (номера реакций, входящих в пучок) и поля, варианты разбиения на стабильные части.

При использовании метрических характеристик линий результаты могут быть выведены на графопостроитель.

ЛИТЕРАТУРА

- Буда А. О., Васючкова Т. С. и др. Руководство к пользованию системой автоматизации программирования альфа-6. Новосибирск, «Наука», 1974, 158 с.
- Вопросы геохимии и алгоритмы качественной теории фазовых превращений в многокомпонентных системах (диаграммы состояния). Сб. под ред. Добрецова Н. Л. и Краевой А. Г. Новосибирск, «Наука», 1975, 142 с.
- Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск, «Наука», 1969, 544 с.
- Коржинский Д. С. Физико-химические основы анализа парагенезисов минералов. М., Изд-во АН СССР, 1957, 184 с.
- Кoffман А. Введение в прикладную комбинаторику. М., ИЛ, 1975, 480 с.
- Краева А. Г., Добрецов Н. Л. Общие задачи и методы построения парагенетических диаграмм многокомпонентных систем. — В кн.: Статистические методы в геологии, вып. 236. Новосибирск, «Наука», 1974, с. 62—71.
- Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., Физматгиз, 1963, 432 с.
- Мак-Кракен Д. Программирование на АЛГОЛе. М., «Мир», 1967, 184 с.
- Скрейнмакерс Ф. А. Нонвариантные, моновариантные и дивариантные равновесия. М., «Мир», 1948, 215 с.
- Gale D. On the number of faces a convex polytope. — Canad. J. Math., 1964, v. 16, № 1, p. 12—17.

V. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ИЗ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМАТИКИ

ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВЕКТОРОВ * МАРКОВСКИХ МАТРИЦ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРУППОВОЙ ОБОБЩЕННОЙ ОБРАТНОЙ

А. Т. Баруча - Рид

Университет Вайн, Детройт, США

Если A — неособенная матрица порядка m , то решение матричного уравнения $Ax = u$ дается вектором $x = A^{-1}u$, где A^{-1} — обратная A . Если A — особенная матрица или прямоугольная матрица, то возникает вопрос: существует ли матрица \tilde{A} такая, что $x = \tilde{A}u$ является решением уравнения $Ax = u$ для любого u , такого, что уравнение разрешимо.** Если такая матрица \tilde{A} существует, тогда она должна вести себя подобно обратной A^{-1} для A и может быть рассматриваема поэтому как обратная для A в некотором обобщенном смысле.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть A есть $m \times n$ — матрица произвольного ранга. Обобщенной обратной для A называется $n \times m$ — матрица \tilde{A} , что $x = \tilde{A}u$ является решением матричного уравнения $Ax = u$ для любого вектора u , для которого уравнение разрешимо.

Ясно, что может быть более одной обобщенной обратной матрицы; и действительно, некоторое число обобщенных обратных матриц было определено и их свойства изучены. Для детального обсуждения обобщенных обратных матриц и их приложений мы отсылаем к книгам Буллиона и Оделла (Boullion, Odell, 1971) и Рао и Митра (Rao, Mitra, 1971).

Ввиду большого значения матриц в теории конечных марковских цепей интересно исследовать роль, какова бы она ни была, которую играют обобщенные обратные матрицы в теории конечных марковских цепей. Оказывается, что они играют важную роль. Использование обобщенных обратных матриц в теории конечных марковских цепей было начато Децеллом и Оделлом (Decell, Odell, 1967); они применили так называемые обобщенные обратные Мура—Пенроза для получения стационарного вероятностного вектора в случае регулярных или эргодических переходных матриц. Систематическое применение обобщенных обратных матриц в теории конечных марковских цепей произвел Мейер (Meuer, 1975), который использовал групповую обобщенную обратную.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть A — квадратная матрица. Групповой обратной для A , если она существует, называется матрица $A^\#$, которая удовлетворяет условиям: $AA^\#A = A$, $A^\#AA^\# = A^\#$ и $AA^\# = A^\#A$.

Мейер показал, что групповая обратная является подходящей для использования в качестве обобщенной обратной и что она играет централь-

* «Fixed point» в тексте переводится как «стационарный вектор».

** Система уравнений называется разрешимой, если она имеет по крайней мере одно решение.

ную роль в теории конечных марковских цепей. В частности, он показал, что не обязательно вводить фундаментальную матрицу, связанную с эргодической марковской цепью (Kemeny, Snell, 1960); в тех случаях, когда это нужно, она может быть заменена на групповую обратную $A^\#$ для матрицы $A = I - P$. Построение теории конечных цепей Маркова на основе групповой обратной не только элегантно, но и имеет определенные вычислительные преимущества по сравнению с ранее использовавшимися традиционными матричными методами.

В этой заметке, согласно Мейеру, мы рассматриваем применение групповой обратной для некоторых матриц, которые появляются в теории конечных марковских цепей. Мы установим несколько теорем и представим некоторые вычисления с использованием SPEAKEASY для определения стационарного вектора эргодической переходной матрицы.

Цель этой заметки — привлечь внимание специалистов по математической геологии к работе Мейера и языку программирования SPEAKEASY.*

Первый устанавливаемый нами результат утверждает, что для любой переходной матрицы P существует групповая обратная для $I - P$.

Теорема 1. Пусть P — переходная матрица конечной марковской цепи и пусть $A = I - P$. Тогда $A^\# = (I - P)^\#$ существует.

Хорошо известно (Kemeny, Snell, 1960; Bharucha-Reid, 1976), что если P — переходная матрица цепи с поглощением или регулярной цепи, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ существует, а для любой переходной матрицы существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k.$$

Третий предельный результат состоит в том, что если P — переходная матрица эргодической цепи, то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (1-\lambda)^k P^k, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Следующая теорема дает выражение для упомянутых пределов в терминах групповой обратной $A^\#$.

Теорема 2. Пусть P — переходная матрица и пусть $A = I - P$. Тогда

$$Q = I - AA^\# = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k & \text{— для любой цепи,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P^n, & \text{если цепь регулярна или эргодична,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (1-\lambda)^k P^k, & \lambda \in (0, 1), \text{ если цепь эргодична.} \end{cases}$$

В дополнение к теоретической важности этого результата отметим, что выражение $I - AA^\#$ очень легко получить путем вычислительных методов.

Следующие два результата, которые имеют фундаментальное значение, позволят нам получить стационарный вектор переходной матрицы очень простым и прямым способом.

Теорема 3. Пусть P — переходная матрица эргодической марковской цепи из m состояний. Если $A = I - P$, то строки

* С доказательствами установленных теорем и с другими результатами, а также с языком SPEAKEASY читатель может ознакомиться в соответствующих работах (Meuer, 1975; Cohen, Vincent, 1973).

матрицы $Q = I - AA^\#$ все равны единственному стационарному вектору Φ^* матрицы P . Таким образом, $\Phi^* = i_k - a_k A$ ($k = 1, 2, \dots, m$), где i_k означает k -тую строчку I и a_k — k -тую строчку $A^\#$.

Так как все строчки предельной матрицы Q одинаковы, то следующая теорема дает метод для получения отдельной строчки $A^\#$, последней.

Теорема 4. Если P — переходная матрица эргодической цепи из m состояний и матрица $A = I - P$ представлена в виде

$$A = \begin{pmatrix} U & x \\ \dots & \dots \\ y & z \end{pmatrix},$$

где U — матрица $(m-1) \times (m-1)$, x — $(m-1)$ -вектор-столбец ($P_{1m}, P_{2m}, \dots, P_{m-1,m}$), y — $(m-1)$ -вектор-строка ($P_{m1}, P_{m2}, \dots, P_{m,m-1}$) и $z = P_{mm}$, тогда стационарный вектор Φ^* матрицы P равен m -вектору:

$$\Phi^* = \frac{1}{b} (-yU^{-1}; 1),$$

где $b = 1 - hj = 1 - yU^{-1}j$ и j — $(m-1)$ -единичный вектор-столбец.

Вычислим теперь, используя теоремы 3 и 4, а также SPEAKEASY, стационарные векторы для двух переходных матриц. Первая из рассматриваемых матриц является переходной, используемой в примере из работы Мейера (Meier, 1975).

Пример 1.

```
P=MATRIX (4, 4 : 0, .5, .5, 0, .5, 0, .5, 0, .5, .25, 0, .25, .25, .25, .25, .25)
PRINT (1 - P)
(A 4 BY 4 MATRIX)
1      - .5      - .5      0
- .5     1      - .5      0
- .5   - .25     1      - .25
- .25  - .25   - .25     .75
U=MATRIX (3, 3 : 1, - .5, - .5, - .5, 1, - .5, - .5, - .25, 1)
X=VECTOR (3 : - .25, - .25, - .25)
H=X *INVERSE (U)
PRINT (H)
H(A VECTOR WITH 3 COMPONENTS)
-3      -2.5     -3
J=VECTOR (3 : 1, 1, 1)
B=1 - H*J
PRINT (B)
B=9.5
V=VECTOR (4 : 3, 2.5, 3, 1)
W=1/B*V
PRINT (W)
W (A VECTOR WITH 4 COMPONENTS)
.31579   .26316   .31579   .10526
SUM (W)
SUM (W)=1
```

Таким образом, мы видим, что стационарный вектор $\Phi^* = (\varphi_1^*, \dots, \varphi_4^*)$ переходной матрицы P дается вектором W ; следовательно, $\varphi_1^* = 0.31579$, $\varphi_2^* = 0.26316$, $\varphi_3^* = 0.31579$, $\varphi_4^* = 0.10526$.

Второй пример, который мы приводим, принадлежит Крамбайну (Krumbein, 1967), который рассмотрел переходную матрицу для переходов между песчаником, глинистым сланцем и известняком в честерской серии (Верхнее Миссисипи) в Индиане. Обозначим состояния следующим образом: S_1 — песчаник, S_2 — глинистый сланец, S_3 — известняк. В работе

Крамбайна (Krumbein, 1967) для нахождения стационарного вероятностного вектора переходной матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 0.74 & 0.23 & 0.03 \\ 0.10 & 0.61 & 0.29 \\ 0.05 & 0.38 & 0.57 \end{pmatrix}$$

используется программа FORTRAN.

Как будет ясно из приведенного ниже примера, использование теорем 3 и 4 вместе с вычислительными преимуществами SPEAKEASY делает определение стационарных векторов задачей очень простой.

Пример 2.

```
P=MATRIX (3, 3 : .74, .23, .03, .10, .61, .29, .05, .38, .57)
PRINT (1 - P)
(A 3 BY 3 MATRIX)
.26      -.23      -.03
-.1      .39      -.29
-.05     -.38      .43
U=MATRIX (2, 2 : .26, -.23, -.10, .39)
X=VECTOR (2: -.05, -.38)
X=X* INVERSE (U)
PRINT (H)
H (A VECTOR WITH 2 COMPONENTS)
-.73342   -1.4069
J=VECTOR (2 : 1, 1)
B=1 - H*J
PRINT (B)
B=3.1403
V=VECTOR (3: .73342, 1.4069, 1)
W=1/B*V
PRINT (W)
W (A VECTOR WITH 3 COMPONENTS)
.23355    .44801    .31844
SUM (W)
SUM (W)=1
```

Таким образом, мы видим, что предельные вероятности для трех состояний равны: $\varphi_1^* = 0.23355$, $\varphi_2^* = 0.44801$, $\varphi_3^* = 0.31844$.

ЛИТЕРАТУРА

- Bharucha-Reid A. T. Finite Markov chains. — In: Applications and Computational Methods. 1976.
- Boullion T. L., Odell P. L. Generalized Inverse Matrices. New York, Wiley (Interscience), 1971.
- Cohen S., Vincent C. M. An Introduction to SPEAKEASY. — Argonne Nation Labor., Rep. ANL-7995. Argonne, Illinois, 1973.
- Decell H. P., Odell P. L. On the fixed point probability vector of regular or ergodic transition matrices. — J. Amer. Statist. Assoc., 1967, v. 62, p. 600—602.
- Kemeny J. G., Snell J. L. Finite Markov Chains. New York, Van Nostrand, 1960.
- Krumbein W. C. FORTRAN IV computer programs for Markov chains in geology. Comput. Contr. 13, State Geological Survey. Univ. of Kansas, Lawrence, 1967.
- Meyer C. D. The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains. 1975, SIAM Rev., 17, p. 443—464.
- Odell P. L., Decell H. P. On Computing the fixed point probability vector of ergodic transition matrices. — J. Assoc. Comput. Mach., 1967, v. 14, p. 765—768.
- Rao C. R., Mitra S. K. Generalized Inverse Matrices and its Applications. New York, Wiley, 1971.

РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ ДЛЯ ВЕЛИЧИН С ОГРАНИЧЕННОЙ СУММОЙ

Н. Р. Бартлетт

Отдел математической статистики Комиссии по научным исследованиям, Мельбурн, Австралия

Дж. Н. Дарроч

Университет Флиндерс, Австралия

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О РЕГРЕССИИ

Пусть X, Y — неотрицательные случайные величины, чья сумма ограничена числом s , например, веса двух минералов в образце породы. Таким образом, плотность вероятности для (X, Y) задана в треугольнике $X \geq 0, Y \geq 0, X+Y \leq s$.

Дарроч и Ратклиф (Darroch, Ratcliff, 1970) решали вопрос о корреляционной зависимости между X и Y при предположениях о функциях регрессии Y на X и X на Y , которые они считали справедливыми по крайней мере приближенно. В частности, они приняли, что регрессионная функция отношения $Y/s - X$ на X линейна относительно X , т. е. что

$$E \left[\frac{Y}{s-X} \mid X \right] = \theta + \Phi X. \quad M_1$$

Здесь M_1 эквивалентно

$$E [Y \mid X] = (s - X) (\theta + \Phi X),$$

так что регрессионная функция Y на X — квадратичная функция от X . Предположение о регрессии, представляющее «нулевую зависимость», у них было принято в виде

$$E \left[\frac{Y}{s-X} \mid X \right] = \theta, \quad H_1$$

т. е. как постоянство регрессии отношения $Y/s - X$ на X . Это эквивалентно

$$E [Y \mid X] = \theta (s - X).$$

Пусть U и V — две случайные величины, такие, что регрессия U на V линейна. Тогда, как это хорошо известно, U имеет постоянную регрессию на V , тогда и только тогда, когда $\rho(U, V) = 0$, где

$$\rho(U, V) = \frac{E[(U - \mu)(V - \nu)]}{\{E[(U - \mu)^2] E[(V - \nu)^2]\}^{1/2}}.$$

Здесь E означает математическое ожидание; через μ и ν обозначены соответственно $E[U]$ и $E[V]$.

Отсюда следует, что при выполнении M_1 H_1 справедливо тогда и только тогда, если

$$\rho \left(\frac{Y}{s-X}, X \right) = 0.$$

Таким образом, степень зависимости Y от X или, более точно, мера того, насколько неверно H_1 по сравнению с M_1 , может быть измерена как $\rho \left(\frac{Y}{s-X}, X \right)$. Аналогично коэффициент корреляции $\rho \left(\frac{X}{s-Y}, Y \right)$ измеряет степень зависимости X от Y . Тот факт, что зависимости Y от X и X от Y являются отдельными понятиями для величин с ограниченными суммами и требуют двух коэффициентов корреляции вместо одного, был

главным в статье Дарроча и Ратклифа. Та же особенность возникает при изучении полной зависимости в отличие от корреляции или зависимости 2-го порядка, как это было подчеркнуто Даррочем (Darroch, 1971) и Даррочем и Джеймсом (Darroch, James, 1974).

В настоящей статье мы рассматриваем следствия замены модельного предположения M_1 о квадратичности регрессии Y на X допущением

$$E[Y|X] = \theta + \Phi X, \quad L_1$$

т. е. линейностью регрессии Y на X .

С практической точки зрения вполне вероятно, что L_1 не столь широко приемлемо, как M_1 , но несомненно возможны случаи, когда оно более предпочтительно. Рассуждая теоретически, M_1 имеет важное преимущество перед L_1 , заключающееся в том, что оно гарантирует следующее: когда X задано и равно или близко s , то ожидаемое значение величины Y равно или близко нулю. L_1 не имеет этого свойства, но это не влечет серьезных последствий, если только общая вероятность (X, Y) вблизи края граничного треугольника незначительна. Теоретическое сравнение показывает, что L_1 имеет преимущества перед M_1 при обобщении задачи на три и более величины. Пусть X, Y, Z удовлетворяет $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, X+Y+Z \leq s$. Тогда очевидное обобщение M_1 с двух величин на три подразумевается, например, как

$$E\left[\frac{Z}{s-X-Y} \mid X, Y\right] = (\theta + \Phi X + \Psi Y),$$

т. е.

$$E[Z|X, Y] = (s - X - Y)(\theta + \Phi X + \Psi Y).$$

Трудность, связанная с этим допущением, состоит в том, что модель M_1 должна соответствовать $E[Z|X]$ и $E[Y|X]$ и должны быть сделаны искусственные допущения о форме $E[Y^2|X]$.

С другой стороны, простым распространением L_1 является

$$E[Z|X, Y] = (\theta + \Phi Y + \Psi Y),$$

что представляет собой линейную регрессию на две переменные, и это тривиально соответствует линейной регрессии на одну переменную.

Наша цель здесь не в обсуждении деталей относительных достоинств L_1 и M_1 , мы скорее хотим рассмотреть, как различие между L_1 и H_1 может быть охарактеризовано коэффициентом корреляции. Выбор коэффициента в этом случае не так очевиден, как это было для M_1 и H_1 , в действительности M_1 была выбрана частично для того, чтобы сделать простым выбор коэффициента корреляции.

КОЭФФИЦИЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИИ

Нам нужен коэффициент корреляции, который измеряет, насколько H_1 неверна, если ее сравнивать с M_1 .

Прежде всего определим для любых случайных величин U и V коэффициент корреляции

$$\tau(U, V) = \frac{E[UV]}{\{E[U^2]E[V^2]\}^{1/2}}.$$

Заметим, что $\rho(U, V) = \tau(U - \mu, V - \nu)$.

Далее выишем L_1 и H_1 в виде

$$E[Y|X] = \alpha(s - X) + \beta X, \quad L_1$$

$$E[Y|X] = \alpha(s - X). \quad H_1$$

Тогда может быть показано, что коэффициент корреляции $\tau(Y_1, X_1)$, где

$$Y_1 = Y - \frac{E[Y(s-X)]}{E[(s-X)^2]}(s-X), \quad X_1 = X - \frac{E[X(s-X)]}{E[(s-X)^2]}(s-X),$$

обладает требуемым свойством измерять отклонение от H_1 относительно L_1 . Точнее, $\tau(Y_1, X_1)$ равен нулю, если и только если H_1 верна, и он равен ± 1 , если и только если $Y = \alpha(s-X) + \beta X$ с $\beta \neq 0$ и

$$1 - \tau^2(Y_1, X_1) = \frac{\text{остаточная дисперсия, когда } L_1 \text{ верна}}{\text{остаточная дисперсия, когда } H_1 \text{ верна}},$$

где остаточная дисперсия есть $E\{Y - E[Y|X]\}^2$.

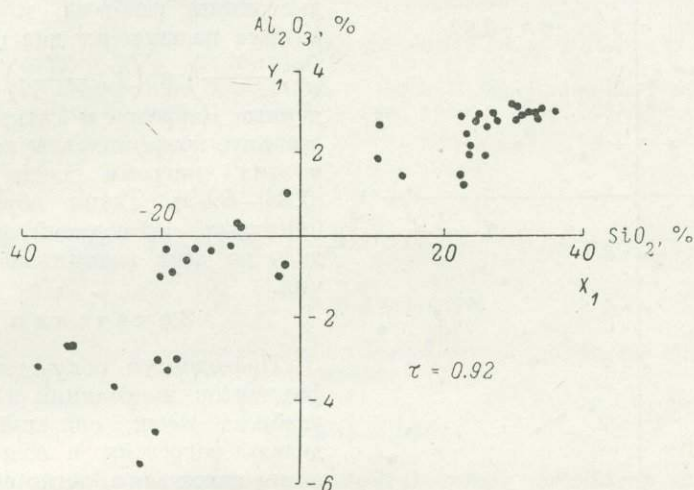


Рис. 1. Диаграмма разброса точек содержаний SiO_2 и Al_2O_3 в эффузивных породах Таупо.

Для оценки $\tau(Y_1, X_1)$ по выборочным данным математические ожидания величин заменяются выборочными средними значениями обычным путем. Как при любом исследовании корреляции, диаграммы разброса точек (X_1, Y_1) много говорят относительно истинности L_1 и H_1 . Так, если L_1 верна, разброс точек происходит около прямой, проходящей через начало, и H_1 верна, если и только если наклон этой линии равен нулю. Эти свойства диаграммы разброса точек есть следствие легко доказуемого факта, что

$$E[Y_1 | X_1] = \beta X_1.$$

Применим теперь эти идеи к данным Штайнера (Steiner, 1958), которые были использованы также с иллюстративными целями Даррочем и Ратклифом. Штайнер привел химические анализы 45 образцов эффузивных пород и 3 образцов Таупо вулканической серии. Здесь мы рассмотрим содержания $X = \text{SiO}_2, \%$, и $Y = \text{Al}_2\text{O}_3, \%$. Поскольку X и Y выражены в процентах от s , ограничение суммы $s = 100$. Диаграмма, показывающая разброс точек X_1, Y_1 , дана на рис. 1. Она показывает, что L_1 — удовлетворительная модель для регрессии Y на X , поскольку разброс точек может считаться происходящим около прямой, проходящей через начало координат. Однако угол наклона прямой определенно отличен от нуля, а значение $\tau(X_1, Y_1)$, равное 0.92, указывает на большое отклонение от H_1 и сильную «положительную» зависимость Y от X .

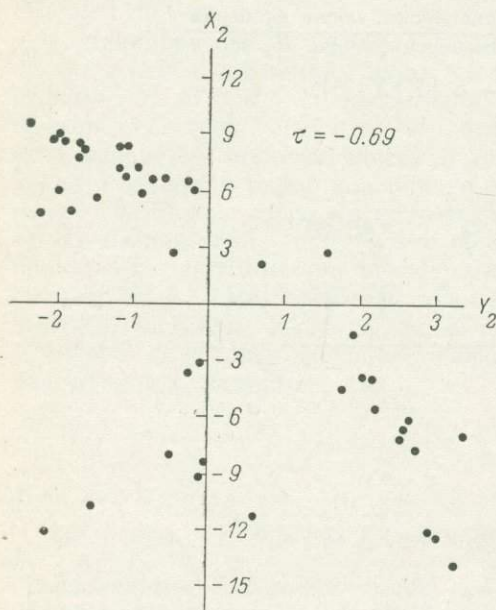
Как мы уже отмечали, связь между X и Y имеет два вида; второй вид, выражающийся в сравнении L_2 с H_2 , определен как

$$\begin{aligned} E[X|Y] &= \gamma(s-Y) + \delta Y, & L_2 \\ E[X|Y] &= \gamma(s-Y). & H_2 \end{aligned}$$

Разность между L_2 и H_2 измеряется $\tau(X_2, Y_2)$, где

$$X_2 = X - \frac{E[X(s-Y)]}{E[(s-Y)^2]}(s-Y), \quad Y_2 = Y - \frac{E[Y(s-Y)]}{E[(s-Y)^2]}(s-Y).$$

Диаграмма разброса точек (Y_2, X_2) (рис. 2) показывает, что L_2 не так хороша, как модель L_1 , так как регрессия X_2 на Y_2 не так очевидно линейна как регрессия Y_1 на X_1 . Однако если все же принять L_2 в качестве модели



и заметить, что тогда $\tau(X_2, Y_2) = -0.69$, то будет видно, что имеется сильная «отрицательная» зависимость X от Y . Рассмотренные диаграммы разброса точек очень похожи на такие же диаграммы для $(X, \frac{Y}{s-X})$ и $(Y, \frac{X}{s-Y})$, приведенные Даррочем и Ратклифом. Более того, коэффициенты корреляции у этих диаграмм почти такие же (0.94—0.69). Таким образом, для принятых наблюдений выбор модели не дает значительного различия.

З а м е ч а н и я

Проведенное обсуждение коэффициентов корреляции и диаграмм разброса точек, связанных с моделью регрессии с соответствующими гипотезами, легко обобщается на модель

$$E[Y|X] = \alpha U + \beta V$$

и гипотезу

$$E[Y|X] = \alpha U,$$

Рис. 2. Диаграмма разброса точек (X_2, Y_2) .

Объяснения в тексте.

где $U = u(X)$, $V = v(X)$.

Тогда результирующий коэффициент корреляции есть $\tau(Y^*, V^*)$, где

$$Y^* = Y - \frac{E[UY]}{E[U^2]}U, \quad V^* = V - \frac{E[VU]}{E[V^2]}V.$$

Простейший пример дается моделью

$$E[Y|X] = \alpha + \beta X$$

и гипотезой

$$E[Y|X] = \alpha,$$

в случае $Y^* = Y - E[Y]$, $V^* = X - E[X]$, так что $\tau(Y^*, V^*) = \rho(Y, X)$ — простой классический коэффициент корреляции.

Возвращаясь к вопросу о величинах, ограниченных суммой, можно предложить другой пример модели и гипотез, даваемых M_1 и H_1 , выраженных в виде

$$E[Y|X] = \alpha(s-X) + \beta X(s-X), \quad M_1$$

$$E[Y|X] = \alpha(s-X). \quad H_1^{**}$$

Это соответствует небольшому видоизменению приближения, принятого Даррочем и Ратклифом и изложенного в начале этой статьи.

** Отсутствует в оригинале, но по смыслу оно должно быть (прим. ред.).

В заключение отметим, что коэффициент корреляции $\tau (Y^*, V^*)$ является примером более общего понятия «частичный коэффициент корреляции случайной величины и пространства модели при заданном пространстве гипотез». Эта концепция была определена и развита Бартлеттом (Bartlett, 1973).

ЛИТЕРАТУРА

- Bartlett N. R. Generalised partial correlation and principal components. Thesis. Flinders University South Australia, 1973.
- Darroch J. N. A definition of independence for bounded-sum, nonnegative, integer-valued variables.— *Biometrika*, 1971, v. 58, p. 357—368.
- Darroch J. N., James I. R. F -independence and null correlation of continuous, bounded-sum, positive variables. — *J. Royal Statist. Soc., Ser. B*, 1974, v. 36, p. 467—483.
- Darroch J. N., Ratcliff D. Null correlation for proportions, II. — *J. Math. Geol.*, 1970, v. 2, p. 307—312.
- Steiner A. Petrographic implications of the 1954 Ngauruhoe Lava and its Xenoliths. — *New. Zealand J. Geol., Geophys.*, 1958, v. 1, p. 325—363.

НОВЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В АНАЛИЗЕ ОБЪЕМНОГО СОСТАВА

Р. С. Андерсен

Вычислительный центр Австралийского национального университета, Канберра, Австралия

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Основная проблема количественной геологии состоит в определении объемной доли какого-нибудь или всех минералов, которые составляют определенный класс пород. Эта проблема является примером стереологической задачи: определение свойств трехмерной структуры по данным низшей размерности. Первый опубликованный анализ этой проблемы принадлежит Делессу (Delesse, 1848). Он касался оценки объемной доли в геологическом контексте, при этом использовал без доказательства «эквивалентность» плоскостных и объемных долей. Эта эквивалентность (иногда называемая соотношением Делесса) имеет длинную и богатую событиями историю, которую частично описал Чейз (Chayes, 1956).

После чтения книги Чейза (Chayes, 1956) геолог может заключить, что вероятностная и статистическая природа анализа объемного отношения уже установлена, а результаты несмещенного характера одно- и двухмерного подсчета точек, а также линейного и плоскостного анализов как оценок объемной доли определены. Таким образом, читатель может сделать вывод, что необходимо лишь применить один из этих методов для получения несмещенной оценки объемной доли некоторого элемента в данной выборке. При таком подходе вопросы, относящиеся к дисперсии и эффективности самих методов оценки объемной доли, были бы сняты, как выражение чрезмерной осторожности по отношению к их применению, так как эти методы гарантируют получение несмещенных оценок. Следующее затруднение возникает в самой уверенности в том, что допущения, которые были использованы при доказательстве несмещенности названных оценок, соответствуют практике. Вообще вопросы и трудности получения оценок, возникающие при анализе этого явления, не обсуждаются в упомянутой книге Чейза, хотя они охватывают крайне сложную область, выходящую за пределы его компетенции и намерений.

В качестве вклада в развитие современной математической геологии ниже дается строгий анализ и обсуждение новейших исследований в области изучения объемного состава.

§ 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

2.1. Без потери общности предположим, что данная порода состоит из минерала (α -фаза), включенного в некоторый конгломерат (β -фаза), и что один минерал можно отличить от другого.

Пусть объемная доля α -фазы

$$V_f = V_\alpha / V,$$

где V_α — объем α -фазы в образце объема V , на котором будут производиться наблюдения.

Пусть в случайном плоском сечении (p), проведенном через образец, $A_{\alpha, p}$ означает площадь α -фазы, A_p — площадь сечения. Тогда доля площади $A_{f, p}$ этой α -фазы в плоскости будет равна отношению двух зависимых переменных $A_{\alpha, p}$ и A_p , т. е.

$$A_{f, p} = A_{\alpha, p} / A_p.$$

Таким образом, при серии n случайных плоских сечений p средняя доля площади

$$A_f = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n (A_{\alpha, p} / A_p). \quad (2.1)$$

Как установлено, A_f не обязательно несмещенная оценка V_f .

Это верно, если A_p постоянно — основное допущение, которое делается в большинстве доказательств того, что A_f — несмещенная оценка V_f . Это часто подразумевается в литературе, когда обсуждается применимость метода для определения A_f .

Действительно, когда определяют A_f , необходимо сделать выбор между следующими двумя стратегиями.

Стратегия 1. Сечение образца производится таким образом, что A_p остается постоянной, так что A_f является автоматически несмещенной оценкой V_f . Это часто достигается путем предварительного разбиения образца, чтобы получить прямоугольную призму, и последующей потери информации об отброшенном материале.

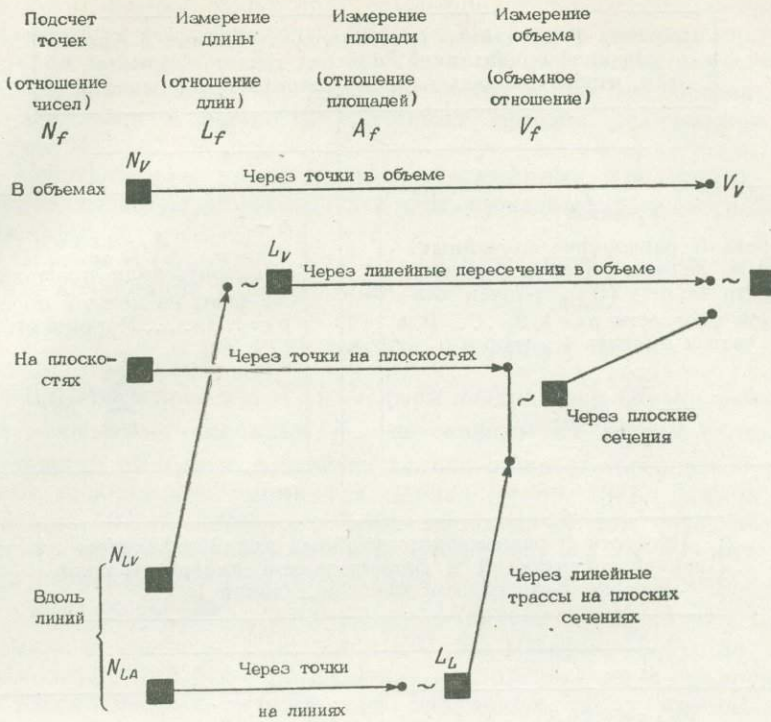
Стратегия 2. Допускается сечение образца как такового и использование имеющейся статистической теории, рассматривающей отношение зависимых случайных величин для изучения свойств из (2.1). Хотя при этом не происходит потери информации, затрагиваемая теория статистических оценок значительно сложнее (см., например, Майлз и Дэви (Miles, Davy, 1975), которые вычислили смещение, ассоциированное с использованием A_f из (2.1)).

Выбор представляет собой сравнение проигрышей от потери информации и от статистической сложности. На практике и в дальнейшем нами предпочитается первый из двух проигрышей, но существуют ситуации (в биологических приложениях, например), когда потеря информации не может быть допущена и должен быть принят последний подход.

Аналогичное рассуждение применимо, когда для оценки V_f используются линейные сечения. Мы не будем продолжать обсуждения этого, так как в дальнейшем будем предполагать, что длины линейных сечений постоянны. Тогда соответствующая доля попаданий в α -фазу, а именно L_f , автоматически будет несмещенной оценкой V_f (иногда это соотношение называется розивалевским (Rosiwal, 1898)).

2.2. Существует восемь различных оценочных процедур, в результате которых может быть определено объемное отношение V_f (схема 1).

С х е м а 1



Все эти восемь процедур определяются семью оценочными цепями, начинающимися из каждого блока (черный квадрат) и заканчивающимися на блоке справа, означающем прямое оценивание V_f .

Тривиальная цепь, которая начинается и кончается справа, рассматривается как самостоятельная процедура. Обозначения N_V , N_A , N_{LV} , N_{LA} , L_V и L_L введены во избежание двусмысленности при обсуждении различных форм N_f и L_f .

Формула, использованная для вычисления V_f , будет зависеть от того, как была проведена оценочная процедура. Например, если процедура такова, что V_f оценивается несмещенно, с помощью N_f , L_f или A_f , то формула, которая определяет соответствующую величину N_f , A_f или V_f , будет определять и V_f . Если это не так, то формула, определяющая подходящую величину N_f , L_f или A_f , должна быть поправлена способом, обсужденным Майлзом и Дэви (Miles, Davy, 1975), прежде чем V_f может быть определено.

В последующем мы ограничим свое внимание методами исследования, которые дают несмещенную оценку V_f по N_f , L_f или A_f . Для того чтобы избежать двусмысленности, мы отличаем различные формы для N_f и L_f способом, показанном на схеме 1, и обозначаем A_f и V_f символами A_V и V_V . Главное преимущество этой записи состоит в том, что она может быть теперь использована для недвусмысленного определения различных методов (оценочные цепи, которые связаны с V_V) определения V_V . Они становятся V_V -, N_V -, L_V -, A_V -, N_{LV} -, N_{LA} -, L_L -, N_{LV} - и N_{LA} -методами.

При допущении, что линии и плоскости, связанные с применением методов, изображенных на схеме 1, были проведены случайно (т. е. равно-

Схема 2

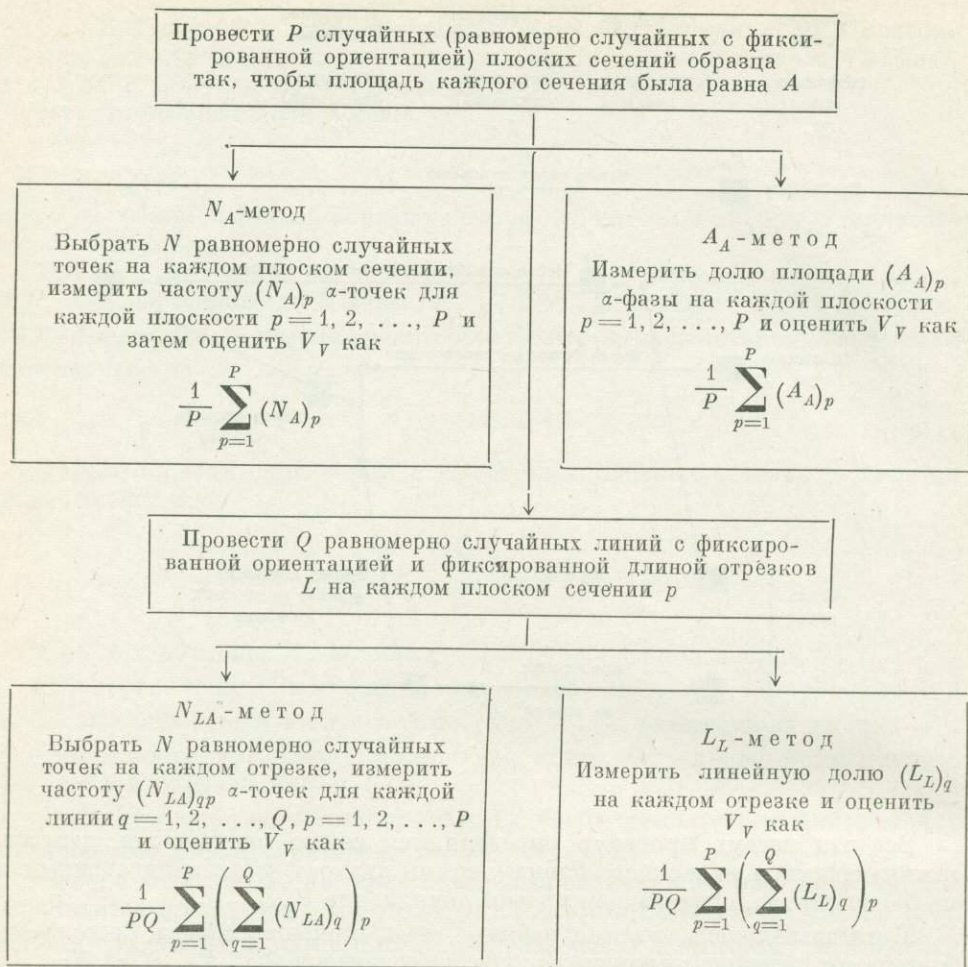
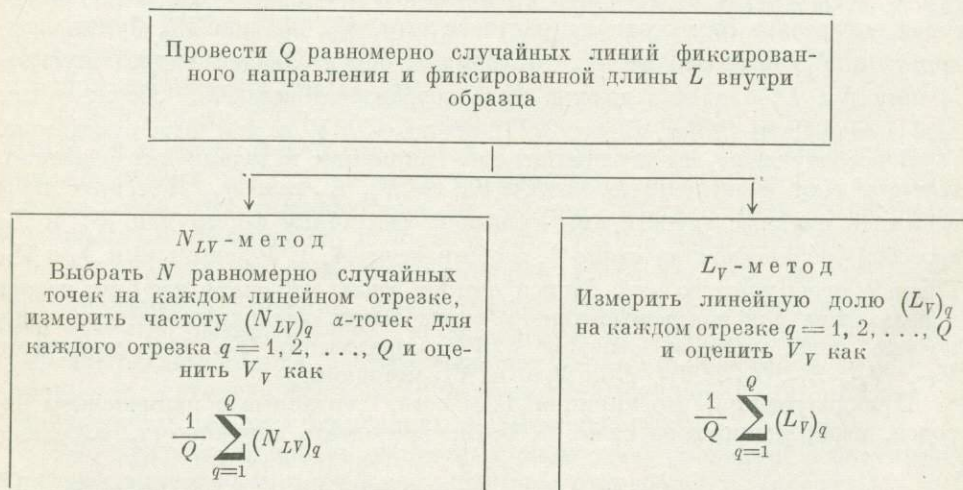


Схема 3



мерно случайно при фиксированной ориентации) в образце, имеющем форму прямоугольной призмы, дальнейшее разбиение вариантов методов счета неизбежно зависит от того, случайно были взяты точки или систематически. Мы сохраним обозначения N_V , N_A , N_{LA} и N_{LV} -метод для случайного выбора, а обозначения N_V^* , N_A^* , N_{LA}^* и N_{LV}^* -метод введем для систематического выбора. Это дает в итоге 12 различных методов для анализа объемного отношения.

2.3. Действительные процедуры, использованные для A_A , L_L , N_A и N_{LA} -методов, показаны на схеме 2, а использованные для L_V - и N_{LV} -методов — на схеме 3.

2.4. Примем $E(\cdot)$, $\text{var}(\cdot)$ и $\text{covar}(\cdot)$ для обозначения математического ожидания, ковариации и корреляции.

§ 3. РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗОВ

Хотя выводы о том, что A_f и L_f (при подходящем определении) являются несмещенными оценками V_f , независимы от любых структурных предположений об α -фазе и зависят только лишь от того, как проведены случайные плоскости и линии (см. Майлз (Miles, 1973), Майлз и Дэви (Miles, Davy, 1975)), такие допущения необходимы для того, чтобы оценить дисперсии предыдущих методов. Например, без добавочных предположений априори ничего не может быть сказано о дисперсиях A_f , кроме того, что они принадлежат замкнутому интервалу $[0, V_f(1 - V_f)]$.

Недавние исследования (начиная с Чейза (Chayes, 1956)) по анализу объемных отношений были направлены на определение и сравнение дисперсий рассмотренных методов при различных типах предположений.

1. Моран (Moran, 1973) заметил, что в случае, когда добавочные допущения не могут быть сделаны, дисперсия не может быть оценена экспериментально путем повторения процесса пересечения и оценки частоты с последующим вычислением дисперсии этих результатов. Он доказал, что использованные сечения должны быть независимы и случайно расположены, если итоговая оценка дисперсии является несмещенной. Недостаток состоит в большом объеме работы перед тем, как может быть получена удовлетворительная оценка дисперсии.

2. Несколько авторов вычислили дисперсию A_f при упрощающих предположениях о структуре α -фазы. В частности, Хасофер (Hasofer, 1963) определил границы дисперсий некоторых методов, когда площади являются круговыми сечениями случайно распределенных сфер одинакового размера. Рассел и Джофсон (Russell, Joephson, 1965) исследовали проблему определения площади области, случайно помещенной на равномерную сетку. Они показали, что дисперсия A_f при менее ограничительных допущениях, чем сделанные Хасофером (Hasofer, 1963), может быть вычислена с помощью преобразования зонного картирования. Однако основное содержание их работы ограничено измерением площади кругов и регулярных областей. Несмотря на определенный интерес, результаты Хасофера (Hasofer, 1963), Рассела и Джофсона (Russell, Joephson, 1965) мало освещают более общий вопрос о дисперсиях оценок объемных отношений.

3. Наиболее детальный анализ дисперсий, начиная с 1956 г., был произведен Хиллардом и Каном (Hilliard, Cahn, 1961; Hilliard, 1968). В последней статье дан частичный обзор прошлых работ наряду с более прагматическим обсуждением анализа объемных отношений с точки зрения полученных результатов, а также список новейшей литературы по затронутому вопросу. Важность статьи Хилларда и Кана (Hilliard, Cahn, 1961) двойственна.

а) В предположении, что пересечения α -фазы секущей плоскостью происходят дискретными площадями, распределенными на плоскости

случайно, они выводят оценки для относительной дисперсии многих рассмотренных выше методов. Единственный недостаток этих результатов состоит в том, что они приспособлены к ситуации, где объемная доля мала и форма α -фазы такова, что имеет требуемую форму в случайных плоских сечениях. Таким образом, их результаты не охватывают ситуации, когда или объемная доля α -фазы велика, или форма α -фазы не имеет нужного вида в случайных плоских сечениях.

б) Они дают важное практическое заключение, что при сравнении дисперсий не всегда правильно нормировать их относительно действительной площади исследуемых плоских сечений. Хиллард (Hilliard, 1968b) приводит убедительный прагматический аргумент, что дисперсии должны быть нормированы в соответствии с процедурой, связанной с применением ассоциированных методов. Поступая так, они получают результат, противоположный интуитивному представлению о том, что методы систематического подсчета точек для оценки A_A и L_L (а именно, N_A^* - и N_L^* -методы) имеют меньшие относительные дисперсии, чем прямое измерение A_A и L_L (т. е. A_A и L_L -методы).

Уместность и важность этих результатов частично анализируются ниже с целью объяснения упомянутого численного интуитивного результата Хилларда и Кана (Hilliard, Cahn, 1961).

§ 4. ДИСПЕРСИИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ

Так как различные методы взаимосвязаны, начнем с вычисления их дисперсий по схеме 2. Для A_A -метода V_V оцениваем выражением

$$\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (A_A)_p.$$

Если мы обозначим дисперсию этой величины как $\text{var}(A_A)$, то

$$\text{var}(A_A) = \frac{1}{P} \text{var}((A_A)_p). \quad (4.1)$$

С другой стороны, для L_L -метода мы используем линейное отношение

$$(L_L)_p = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q (L_L)_q$$

в качестве оценки $(A_A)_p$ для каждой плоскости $p = 1, 2, \dots, P$, и, следовательно, оценка V_V равна

$$\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (L_L)_p = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \left(\frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q (L_L)_q \right)_p = \frac{1}{PQ} \sum_{p=1}^P \left(\sum_{q=1}^Q (L_L)_q \right)_p. \quad (4.2)$$

Используя стандартный результат для условных дисперсий (см. Приложение) и обозначая $\text{var}(L_L)$ дисперсию L_L -метода, мы получаем:

$$\text{var}(L_L) = \frac{1}{P} E_p(\text{var}((L_L)_p)) + \text{var}(A_A) = \frac{1}{PQ} E_p(\text{var}((L_L)_{qp})) + \frac{1}{P} \text{var}((A_A)_p), \quad (4.3)$$

так как $\text{var}((L_L)_p) = \frac{1}{Q} \text{var}((L_L)_{qp})$.

В случае N_A -метода мы можем использовать те же аргументы, что и в случае L_L -метода, для вывода

$$\text{var}(N_A) = \frac{1}{P} E_p(\text{var}(N_A)_p) + \text{var}(A_A). \quad (4.4)$$

Однако если мы обозначим через $(N_\alpha)_p$ число α -точек, которые встречаются в плоскости p , то сможем применить следующий, хорошо известный результат (см., например, Чейз (Chayes, 1956))

$$\text{var}((N_\alpha)_p) = N(A_A)_p [1 - (A_A)_p], \quad (4.5)$$

чтобы получить

$$\text{var}(N_A) = \frac{1}{PN} E_p((A_A)_p [1 - (A_A)_p]) + \frac{1}{P} \text{var}((A_A)_p), \quad (4.6)$$

где

$$\text{var}((N_A)_p) = \frac{1}{N} \text{var}((N_\alpha)_p).$$

Окончательно для N_{LA} -метода, используя аналогичные вычисления, получаем

$$\text{var}(N_{LA}) = \frac{1}{P} E_p(\text{var}((N_{LA})_p)) + \text{var}(A_A), \quad (4.7)$$

где

$$(N_{LA})_p = \left(\frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q (N_{LA})_q \right)_p, \quad (4.8)$$

и на плоскости p

$$\text{var}((N_{LA})_p) = \frac{1}{Q} E_q(\text{var}(N_{LA})_{qp}) + \text{var}(L_L)_p. \quad (4.9)$$

Комбинируя (4.7) и (4.9) и используя аналог (4.5) для линейных отрезков, а именно для линии q с $(N_\alpha)_q$ α -точками

$$\text{var}((N_\alpha)_q) = N(L_L)_q [1 - (L_L)_q],$$

в итоге получаем, что

$$\begin{aligned} \text{var}(N_{LA}) &= \frac{1}{PQN} E_p E_q((L_L)_{qp} [1 - (L_L)_{qp}]) + \frac{1}{P} E_p(\text{var}(L_L)_p) + \text{var}(A_A) = \\ &= \frac{1}{PQN} E_p E_q((L_L)_{qp} [1 - (L_L)_{qp}]) + \frac{1}{PQ} E_p(\text{var}(L_L)_{qp}) + \frac{1}{P} \text{var}((A_A)_p). \quad \text{И}(4.10) \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения могут быть применены к двум методам схемы 3. Полученные дисперсии приведены в табл. 1 наряду с дисперсиями для всех других методов (схема 1).

Для N_V -метода, где N точек выбрано случайно в образце породы объема V , распределение N точек в V_L будет эквивалентно проведению N независимых биномиальных испытаний, т. е. каждая точка или попадает, или не попадает в α -фазу. Отсюда общее число $(N_\alpha)_V$ α -точек будет следовать биномиальному распределению с математическим ожиданием

$$E((N_\alpha)_V) = NV_V \quad (4.11)$$

и дисперсией

$$\text{var}((N_\alpha)_V) = NV_V(1 - V_V). \quad (4.12)$$

Таким образом, обозначая $N_V = (N_\alpha)_V/N$ (относительная частота успешных контактов с α -фазой), получим

$$E(N_V) = V_V \quad (4.13)$$

и

$$\text{var}(N_V) = \frac{1}{N} V_V(1 - V_V). \quad (4.14)$$

Дисперсии для методов объемного отношения по схеме 1

Метод	Дисперсия
N_V	$\text{var}(N_V) = \frac{1}{N} V_V (1 - V_V)$
L_V	$\text{var}(L_V) = \frac{1}{Q} \text{var}((L_V)_q)$
N_{LV}	$\text{var}(N_{LV}) = \frac{1}{QN} E_q((L_V)_q [1 - (L_V)_q]) + \frac{1}{Q} \text{var}((L_V)_q)$
A_A	$\text{var}(A_A) = \frac{1}{P} \text{var}((A_A)_p)$
L_L	$\text{var}(L_L) = \frac{1}{PQ} E_p(\text{var}((L_L)_{qp})) + \frac{1}{P} \text{var}((A_A)_p)$
N_A	$\text{var}(N_A) = \frac{1}{PN} E_p((A_A)_p [1 - (A_A)_p]) + \frac{1}{P} \text{var}((A_A)_p)$
N_{LA}	$\text{var}(N_{LA}) = \frac{1}{PQN} E_p E_q((L_L)_{qp} [1 - (L_L)_{qp}]) +$ $+ \frac{1}{PQ} E_p(\text{var}((L_L)_{qp})) + \frac{1}{P} \text{var}((A_A)_p)$

§ 5. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ

Мы можем теперь использовать дисперсии из табл. 1 как основание для сравнения различных методов схемы 1. А именно, мы будем использовать дисперсию метода как меру его точности и на этом основании сравним методы. Существуют два пути, по которым такое сравнение может быть проведено.

1. **Фиксированная выборочная стратегия.** При этом подходе оптимальный метод берется такой, для которого V_V определяются с наибольшей точностью (т. е. имеет наименьшую дисперсию), когда все методы применимы для выборки одного и того же фиксированного размера (т. е. P , Q , N остаются одинаковыми для всех методов).

2. **Стратегия эффективной цены.** При таком подходе оптимальный метод — это один из тех методов, которые обеспечивают V_V с заданной точностью (достигаемой заданной дисперсией) при минимуме затрат (цена). Таким образом, размер выборки (т. е. P , Q и N) может быть разным для разных методов. Равнозначно оптимальный метод — это такой, который обеспечивает V_V с наибольшей точностью, когда все методы применимы с одной и той же суммой затрат.

При использовании стратегии 1 без дополнительных предположений методы должны быть разделены на три различные группы: а) N_V — непосредственный, б) методы схемы 2, в) методы схемы 3. В первой N_V оптимально потому, что оно единственно: в то же время во второй A_A оптимально, так как дисперсия этого метода, а именно $\text{var}((A_A)_p)/P$, является нижней границей для дисперсий L_L , N_A и N_{LA} , которая не может быть ими достигнута. Аналогично рассуждая, получаем, что L_V — оптимальный метод для третьей группы.

Для сравнения N_V , A_A и L_V необходимы дополнительные предположения. Например, если $P = Q = N$, то optimum будет зависеть от относительных размеров $\text{var}((A_A)_p)$, $\text{var}((L_V)_q)$ и $V_V(1 - V_V)$. Так как

$$0 \leq \text{var}((A_A)_p) \leq V_V(1 - V_V) \text{ и } 0 \leq \text{var}((L_V)_q) \leq V_V(1 - V_V),$$

то N_V никогда не бывает оптимальным относительно A_A и L_V .

В общем можно ожидать, что $\text{var}((A_A)_p) < \text{var}((L_V)_q)$ и, следовательно, что A_A — оптимально.

С другой стороны, если

$$\text{var}((A_A)_p) \div \text{var}((L_V)_q) \div V_V(1 - V_V),$$

то оптимальность будет зависеть от относительного размера P , Q и N и, следовательно, от условий, при которых плоские сечения, случайные линии и случайные точки в объеме могут быть реализованы.

В итоге для стратегии 1 мы заметим, что в сравнении с L_L - и N_A -методами N_A будет оптимальным, если

$$N > Q E_p((A_A)_p) [1 - (A_A)_p] / E_p(\text{var}(L_L)_{qp}), \quad (5.1)$$

т. е. при данном Q (5.1) дает нижнюю границу предыдущего вида, которой должен быть равен размер N , если N_A -метод способен дать более точную оценку V_V , чем L_L . В ситуации, где цена получения случайных точек на плоскости p невелика сравнительно с ценой проведения случайных линий, (5.1) показывает, как невелика она должна быть для того, чтобы N_A -метод был более предпочтительным.

В случае стратегии 2 заключения о том, какой метод является оптимальным, существенно зависят от относительных размеров P , Q и N , использованных при разных методах. Во избежание двусмысленности обозначим $P(M)$, $Q(M)$, $N(M)$ как число плоскостей, линий или точек, использованных при применении метода M . Кроме того, выражение $M_1 \lesssim M_2$ указывает, что при стратегии 2 M_1 оптимальнее метода M_2 .

Теперь рассмотрим ситуацию, где проверяются только A_A и L_L . Заключение, что $A_A \lesssim L_L$, верно только тогда, когда для данных $P(A_A)$ и $Q(L_L)$ число плоскостей $P(L_L)$, использованных при применении L_L , ограничено сверху величиной

$$P(A_A) \left\{ \frac{1}{Q(L_L)} E_p(\text{var}(L_L)_{qp}) + \text{var}((A_A)_p) \right\} / \text{var}((A_A)_p).$$

Ясно, что если $P(A_A) = P(L_L)$, то не существенно, как велико $Q(L_L)$; мы всегда имеем $A_A \lesssim L_L$. Действительно, это просто перефразировка заключения, полученного при использовании стратегии 1.

Мы можем записать условия, при которых L_L -, N_A - и N_{LA} -методы более оптимальны по сравнению с A_A -методом, а именно те условия, которые приводят к обратному заключению об оптимальности, нежели выведенные с использованием стратегии 1. Они даны в табл. 2 наряду со сравнениями оптимальности L_L -, N_A - и N_{LA} -методов. Аналогичные результаты получены при сравнении L_V - и N_{LV} -методов. Они также приведены в табл. 2.

Сущность результата Хилларда и Кана (Hilliard, Cahn, 1961; Hilliard, 1968, см. б) в § 3) состоит в том, что если цена выбора образования точек на плоскости достаточно велика по сравнению с измерением площадей, то применение N_A - и N_{LA} -методов является более точным (т. е. оптимальными при стратегии 2), когда они сравниваются с теми A_A -методами, которые все имеют одну и ту же цену. Однако они выводят свои результаты при более сильных предположениях, чем использованные здесь, и не дают точных условий типа или ранга, приведенного в табл. 2. Действительно, табл. 2 показывает: 1) что аргументы Хилларда и Кана применимы ко всем методам схемы 1 и 2) как недорогое приспособление (использующее данные низшей размерности) должно быть сопоставлено с другим приспособлением (данных той же или высшей размерности) перед тем, как первое может заменить последнее в качестве оптимального метода.

З а м е ч а н и е 1. Хиллард и Кан (Hilliard, Cahn, 1961; Hilliard, 1968) в действительности выводят свои заключения для N_{LA}^* - и N_A^* -методов. Однако предположения, которые они делают о распределении α -фазы, эквивалентны требованию, что корреляция между соседними точками при

Аргументы выбора стратегии

Оптимальность	Условия преимущества
$L_L \prec A_A$	$P(L_L) > P(A_A) \{1 + E_p(\text{var}((L_L)_{qp})/Q(L_L) \text{var}((A_A)_p))\}$
$N_A \prec A_A$	$P(N_A) > P(A_A) \{1 + E_p((A_A)_p [1 - (A_A)_p])/N(N_A) \text{var}((A_A)_p)\}$
$N_{LA} \prec A_A$	$P(N_{LA}) > P(A_A) \{1 + [E_p E_q((L_L)_{qp} [1 - (L_L)_{qp}])/N(N_{LA}) + E_p(\text{var}((L_L)_{qp})]/Q(N_{LA}) \text{var}((A_A)_p)\}$
$N_A \prec L_L$	$N(N_A) > Q(L_L) \{E_p((A_A)_p [1 - (A_A)_p])/E_p(\text{var}(L_L)_{qp})\},$ $P(N_A) = P(L_L)$
	$P(N_A) > P(L_L) \frac{\{E_p((A_A)_p [1 - (A_A)_p])/N(N_A) + \text{var}((A_A)_p)\}}{\{E_p(\text{var}((L_L)_{qp}) + \text{var}((A_A)_p)\}},$ $P(N_A) \neq P(L_L)$
$N_{LA} \prec L_L$	$Q(N_{LA}) > Q(L_L) \{1 + E_p E_q((L_L)_{qp} [1 - (L_L)_{qp}])/N(N_{LA}) \times E_p(\text{var}((L_L)_{qp}))\},$ $P(N_{LA}) = P(L_L)$
	$P(N_{LA}) > P(L_L) \{1 + E_p E_q((L_L)_{qp} [1 - (L_L)_{qp}])/N(N_{LA}) \text{var}((A_A)_p)\},$ $Q(N_{LA}) = Q(L_L)$
$N_{LA} \prec N_A$	$\frac{\{E_p E_q((L_L)_{qp} [1 - (L_L)_{qp}])/Q(N_{LA}) N(N_{LA}) + E_p(\text{var}(L_L)_{qp})/Q(N_{LA}) + \text{var}((A_A)_p)\}}{\{E_p(\text{var}((L_L)_{qp}))/Q(L_L) + \text{var}((A_A)_p)\}},$ $P(N_{LA}) \neq P(L_L), Q(N_{LA}) \neq Q(L_L)$
	$Q(N_{LA}) > N(N_A) \{E_p E_q((L_L)_{qp} [1 - (L_L)_{qp}])/N(N_{LA}) + E_p(\text{var}((L_L)_{qp}))/E_p((A_A)_p [1 - (A_A)_p])\},$ $P(N_{LA}) = P(N_A)$
$N_{LA} \prec N_A$	$\frac{\{E_p E_q((L_L)_{qp} [1 - (L_L)_{qp}])/N(N_{LA}) Q(N_{LA}) + E_p(\text{var}((L_L)_{qp}))/Q(N_{LA}) + \text{var}((A_A)_p)\}}{\{E_p((A_A)_p [1 - (A_A)_p])/N(N_A) + \text{var}((A_A)_p)\}},$ $P(N_{LA}) \neq P(N_A)$
	$Q(N_{LV}) > Q(L_L) \{1 + E_q((L_V)_q [1 - (L_V)_q])/N(L_V) \text{var}((L_V)_q)\}$
$N_V \prec L_V$	$N(N_V) > Q(L_V) \{V_V (1 - V_V)/\text{var}((L_V)_q)\}$
$L_V \prec A_A$	$Q(L_V) > P(A_A) \{\text{var}((L_V)_q)/\text{var}((A_A)_p)\}$
$N_V \prec A_A$	$N(N_V) > P(A_A) \{V_V (1 - V_V)/\text{var}((A_A)_p)\}$

систематическом подсчете точек равна нулю. Предыдущее показывает, что их заключение действительно применимо к N_{LA} - и N_A -методам без каких-либо условий на структуру α -фазы.

З а м е ч а н и е 2. При допущении, что $V_V \ll 1$, дисперсии, выведенные Хиллардом и Каном (Hilliard, Cahn, 1964), приближаются к дисперсиям N_V -метода. Таким образом, можно было бы заключить (но в деталях это здесь не рассматривается), что применение ими N_{LA}^* - и N_A^* -методов должно приближаться к N_V -методу по результатам, верность которых они установили.

§ 6. ЗАКЛЮЧЕНИЯ И ОБОБЩЕНИЯ

В этом разделе обсуждается применимость метода подсчета точек для оценки свойств иных, нежели L_f , A_f и V_f .

При рассмотрении общей применимости метода подсчета точек для определения трехмерных структурных свойств (по данным низшей размерности) можно сделать следующие заключения.

1. Метод подсчета точек может быть использован для определения трехмерных структурных свойств, иных, нежели L_f , A_f и V_f . Например, Хиллард (Hilliard, 1968a) обсудил использование распределения длин отрезков для определения моментов распределения размера частиц в непрозрачном образце (подсчет точек мог бы быть использован и для определения таких распределений); Дехоф (Dehoff, 1967; см. также: Кан (Cahn, 1967)) показал, как оценить среднюю кривизну поверхности по изменениям путем счета. Это ведет к рассмотрению общих вопросов, касающихся взаимоотношений свойств, которые можно измерить, и тех, которые нам необходимо получить. Потенциально перспективным полем поисков в этой области является изучение свойств средних S -мерных проекций n -мерных объектов X , а именно $M_S^{(n)}\{X\}$. Введение в теорию функционалов $M_S^{(n)}\{X\}$ можно найти у Майлза (Miles, 1975).

2. Метод подсчета точек не может быть использован для определения всех трехмерных структурных свойств, когда подсчет точек применяется только к образцам данного объекта (как отличие от его использования для оценки свойств компонент внутри выборки). Например, распределение размера частиц не может быть определено посредством подсчета точек, если этот подсчет не применен к каждому отдельному наблюдению частицы для получения ее размера. Вопросы о технике, которая может быть использована, когда подсчет точек не применим, ведут к вопросам, касающимся свойств функционала $M_S^{(n)}\{X\}$, так же как при рассмотрении вопросов о геометрических вероятностях, структурных элементах и преобразованиях типа попаданий—промахов (см., например, Matheron, 1972; Serra, 1972; Klein, Serra, 1972).

З а м е ч а н и е. Так как трехмерные структурные свойства определены в терминах наблюдений низшей размерности, когда удовлетворены подходящие предположения и условия, то необходимо изучить эти предположения и условия. Они гарантируют, что требуемые трехмерные структурные свойства определены в терминах наблюдений низшей размерности. При таких исследованиях $M_S^{(n)}\{X\}$ -функционалы играют важную роль. Например, Майлзом (Miles, 1975) показано, что если m — число пересечений случайной плоскости F , проходящей через тело X с N выпуклыми частицами X_1, X_2, \dots, X_n , содержащимися в X , то

$$E(m) = NM_1^{(3)}/M_1^{(3)}\{X\}, \quad (6.1)$$

где $M_1^{(3)} = \{M_1^{(3)}\{X_1\}, \dots, M_1^{(3)}\{X_n\}\}$.

Следовательно, если $E(m)$ и $M_1^{(3)}\{X\}$ оценены, то $M_1^{(3)}$ не может быть использовано для определения N из (6.1), так как это определение зависит от N .

Выпишем стратегию для анализа объемного отношения. Ключевые шаги следующие.

1. Выбираем основную стратегию, а именно стратегию 1 или 2 из § 2. Соответственно готовим образец. Предположим, что принята стратегия 1.

2. Выбираем используемый метод. Если точность более важна, чем расходы, то применяется стратегия 1 из § 5. Оптимальный метод тогда будет (обычно) A_A . Если цена является главным фактором, то решение должно быть основано на табл. 2 для того, чтобы заключить, какой метод является самым дешевым, а затем его предпочесть.

3. Сечения необходимы такие, чтобы выбранная оценка была несмещенной (схемы 2 и 3).

З а м е ч а н и е. Обсуждение доступной инструментальной техники может быть найдено у Дехофа и Райнса (Dehoff, Rhines, 1968).

В заключение отметим, что в последней статье Робинсона (Robinson, 1974) о стереологии утверждается: «Точность обычно зависит от числа измеренных полей больше, чем от числа измерений в данном поле». Это утверждение имеет силу для систем, где поля соответственно случайны (см., например, Miles, 1972, § 11). Вышеизложенные результаты поясняют, почему это верно.

Автор признателен Пэму Дэви, Тони Джейкаману и Роджеру Майлзу за полезную дискуссию и считает своей приятной обязанностью выразить им свою благодарность.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Цель Приложения — вычисление взаимоотношений между $\text{var}(L_L)$ и $\text{var}(A_A)$, когда L_L оценено как

$$L_L = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (L_L)_p \quad (\text{П. 1})$$

и A_A оценено как

$$A_A = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (A_A)_p, \quad (\text{П. 2})$$

где $(A_A)_p$ и $(L_L)_p$ означают соответственно отношение площадей α -фазы, измеренной прямо в плоскости p , и линейное отношение α -фазы, измеренное в плоскости p , когда q — равномерно случайное линейное пересечение (фиксированной ориентации) длины L на плоскости p . Действительно, если плоскости p ($p=1, 2, \dots, P$) равномерно случайны с фиксированной ориентацией, то $(L_L)_p$ независимые и одинаково распределенные случайные величины, и мы можем записать

$$\text{var}(L_L) = \text{var}\left(\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (L_L)_p\right) = \frac{1}{P} \text{var}((L_L)_p) = \frac{1}{P} E_p(E((L_L)_p) - V_V)^2. \quad (\text{П. 3})$$

Используя тот факт, что

$$\text{var}(X) = E[(X - c)^2] - (E(X) - c)^2, \quad (\text{П. 4})$$

где X — случайная переменная и c — постоянная, и полагая $X = (L_L)_p$ и $c = V_V$, из (П. 3) получаем:

$$\begin{aligned} \text{var}(L_L) &= \frac{1}{P} E_p(\text{var}((L_L)_p)) + (E((L_L)_p) - V_V)^2 = \frac{1}{P} E_p(\text{var}((L_L)_p)) + \\ &+ \frac{1}{P} E_p(((A_A)_p - V_V)^2) = \frac{1}{P} E_p(\text{var}((L_L)_p)) + \frac{1}{P} \text{var}((A_A)_p) = \\ &= \frac{1}{P} E_p(\text{var}((L_L)_p)) + \text{var}(A_A). \end{aligned} \quad (\text{П. 5})$$

З а м е ч а н и е 1. Формулы для условной дисперсии (см., например, Parzen, 1962, р. 54, 55), а именно

$$\text{var}(X) = E_Y\{\text{var}(X/Y)\} + \text{var}_Y\{E(X/Y)\}, \quad (\text{П. 6})$$

могли бы быть использованы для вывода (П. 5). В действительности (П. 4) может быть использовано для доказательства (П. 6) (Parzen, 1962, р. 54, 55).

З а м е ч а н и е 2. Преимущество (П. 6) двойное, оно показывает: 1) что путем применения различных форм условности по Y могут быть получены различные формулы для $\text{var}(X)$; 2) как может быть определена дисперсия для более развернутых процедур, а также как выражается $\text{var}(N_{LA})$ в терминах $\text{var}(L_L)$ и $\text{var}(A_A)$.

- Cahn J. W. The significance of average mean curvature and its determination by quantitative metallography. — Trans. Metal. Soc., 1967, AIME 239, p. 610—616.
- Chayes F. Petrographic Model Analysis. New York, J. Wiley, 1956.
- Delesse A. Procède mecanique pour determiner la composition des roches. — Ann. Mines., 1848, v. 13, p. 379—388.
- Hasofer A. M. On the reliability of the point-counter method in petrography. — Aust. J. Appl. Sci., 1963, v. 14, p. 168—179.
- Hilliard J. E. Direct determination of the moments of the size distribution of particles in an opaque sample. — Trans. Metal. Soc., 1968a, AIME 242, p. 1373—1380.
- Hilliard J. E. Measurement of volume in volume. Chapter 3 in Quantitative Microscopy. New York, McGraw-Hill, 1968b.
- Hilliard J. E., Cahn J. W. An evaluation of procedures in quantitative metallography for volume-fraction analysis. — Trans. Metal. Soc., 1961, AIME 221, p. 344—352.
- Hoff R. T., de. The quantitative estimate of mean surface curvature. — Trans. Metal. Soc., 1967, AIME 239, p. 617—621.
- Hoff R. T., de, Rhines F. N. Quantitative Microscopy. New York, McGraw-Hill, 1968.
- Klein J. C., Serra J. The Texture Analyser. — J. Microscope, 1972, v. 95, p. 345—356.
- Matheron G. Random sets theory and its applications in stereology. — J. Microscope, 1972, v. 95, p. 15—23.
- Miles R. E. Multi-dimensional perspectives on stereology. — J. Microscope, 1972, v. 95, p. 181—195.
- Miles R. E. On the information derivable from random plane and line sections of an aggregate of convex particles embedded in an opaque medium. Proc. F. arth Conference on Probability Theory, Sept. 12—18, Romania, Brazov, 1973.
- Miles R. E. A direct derivation of certain surface integral formulae for the mean projections of a convex set. Adv. Appl. Prob., 1975.
- Miles R. E., Davey P. Probabilistic foundations of stereology. Proceedings of the Fourth International Congress for Stereology. Washington, September 1975.
- Moran P. A. P. The probabilistic basis of stereology. — Adv. Appl. Prob. Spec. Suppl., 1972, p. 69—91.
- Parzen E. Stochastic Processes. San Francisco, Holden—Day Inc., 1962.
- Robinson A. L. Stereology: Promise of a more quantitative microscopy. — Science, 1974, v. 185, p. 243—244.
- Rosival A. Ueber geometrische Gesteinsanalysen usiv. — Verhandl. K. K. Geol. Reich; Wien, 1898, v. 5, 6, p. 143.
- Russell A. M., Josephson N. S. Measurement of area by counting. — J. Appl. Prob., 1965, v. 2, p. 339—351.
- Serra J. Stereology and structuring elements. — J. Microscope, 1972, v. 95, p. 93—103.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СИНГУЛЯРНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ
КАК ОБЪЕДИНЯЮЩАЯ ЧЕРТА МНОГИХ МЕТОДОВ
УПОРЯДОЧИВАНИЯ *

Дж. К. Гоуер

Экспериментальная станция Ротамстед, Харпенден, Херст, Англия

Большинство классических методов многомерного упорядочивания выводится из оптимизации отношения двух квадратичных форм, что, естественно, ведет к алгебраическим задачам об их собственных значениях. Для многих современных идей характерно, что они основываются на другом алгебраическом подходе — разложении сингулярных значений. Это утверждение состоит в том, что если ${}_nX_m$ — прямоугольная матрица, то $X = {}_nU\Sigma_mV_m$, где U и V — ортогональные матрицы и Σ — диагональная матрица имеет не нулевые элементы только на главной диагонали.

Основная теорема гласит, что если $r \leq \min(n, m)$, то матрица

$$X_r = {}_nU_r\Sigma_rV_m$$

* Поступили только тезисы (прим. ред.).

(здесь первые r столбцов взяты из U и V) минимизирует L_2 -норму $\|X - U_r \Sigma_r V_r\|$.

Важны следующие вопросы, связанные с разложением сингулярных значений: 1) мультипликативные модели, 2) индивидуальное масштабирование, 3) подгонка вращением, 4) анализ соответствия, 5) анализ асимметрии.

О ДВУХ КЛАССАХ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ — ВЫПУКЛЫХ И ВЫПУКЛЫХ С КВАДРАТОМ — И О ПРИЛОЖЕНИЯХ ТАКИХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А. В. Фаас

Лаборатория математической геологии Ленинградского отделения ордена Ленина Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, Ленинград

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Для некоторых классических неравенств можно установить матричные аналоги, получающиеся при рассмотрении частичного упорядочения по положительной определенности среди эрмитовых матриц ($A \preceq B$ означает для эрмитовых A , B , что матрица $A - B$ неотрицательно определена) вместо линейного упорядочения \geq среди вещественных чисел.

Цель настоящей работы — получение подобных матричных аналогов для неравенств, главным образом из области теории вероятностей и математической статистики.

Так, в § 4 рассмотрены аналоги информационных неравенств, модификации неравенства моментов и неравенства Чебышева, а в § 5, 6 — неравенство Рао—Блекуэлла для четных функций и неравенство, содержащее информационную матрицу Фишера.

Упорядочение $A \preceq B$ естественно возникает при сравнении двух n -мерных случайных векторов x и y : если A является ковариационной матрицей для x , а B — для y , то $A \preceq B$ в том и только в том случае, когда для любого набора коэффициентов c_1, \dots, c_n дисперсия линейной формы $\sum_{i=1}^n c_i x_i$ не меньше дисперсии $\sum_{i=1}^n c_i y_i$.

Систематический метод для получения матричных аналогов числовых неравенств — использование монотонных и выпуклых матричных функций матричного аргумента. Матричные монотонные функции введены и изучены К. Лёвнером в 1934 г., выпуклые матричные функции охарактеризованы в работах Ф. Краусса (Krauss, 1936), Ю. Бендата и С. Шермана (Bendat, Sherman, 1955). В этих статьях авторы предполагали аргумент вещественной симметрической либо эрмитовой матрицей, однако результаты почти автоматически переносятся на более общий случай эрмитизуемого аргумента (комплексная матрица X эрмитизуема, если для нее найдется такая эрмитова положительно определенная матрица H , зависящая от X , что HX будет эрмитовой), причем структура как монотонных матричных функций, найденная К. Лёвнером, так и выпуклых матричных функций, установленная Ф. Крауссом, Ю. Бендатом и С. Шерманом, для эрмитизуемого аргумента * сохраняется.

* Ю. Л. Далецкий (1962) исследовал монотонные матричные функции эрмитизуемого аргумента без ограничения $H \preceq O$, но для выпуклых функций такое ограничение неизбежно, если мы не хотим свести класс выпуклых функций к тривиальным случаям.

Характеризация множества эрмитизуемых матриц дана в теореме 1. Понятие эрмитизуемости в настоящей работе переносится на случайные матрицы (§ 3), для которых лемма 1 показывает, что выпуклость функции по Бендату—Шерману эквивалентна с выполнением неравенства Иенсена для математических ожиданий. Таким путем получают неравенства, содержащие математические ожидания случайных эрмитизуемых матриц (§ 4). Подобные неравенства полезны при изучении решения линейной системы, матрица коэффициентов которой случайна (§ 4).

Выпуклые с квадратом матричные функции появились в связи с предложенным Ю. В. Линником обобщением неравенства Рао—Блекуэлла на прямоугольные вещественные матрицы. В работе А. Н. Лебедева, Ю. В. Линника и др. (1971) указаны достаточные условия, при которых проходит такое обобщение, заключающиеся в одновременной матричной выпуклости и матричной монотонности используемой квадратичной функции потерь. В § 5 рассмотрен этот аналог неравенства Рао—Блекуэлла для прямоугольных комплексных матриц и показано, что необходимые и достаточные условия его выполнимости заключаются в матричной выпуклости с квадратом функции потерь. Условия работы Н. А. Лебедева, Ю. В. Линника и др. были близки к необходимым: если интервал, содержащий сингулярные числа случайной прямоугольной матрицы, включает 0, то матричная монотонность вместе с матричной выпуклостью эквивалентна матричной выпуклости с квадратом — теорема 3 настоящей работы (этого, разумеется, нет для функций числового аргумента). Когда интервал не охватывает нуля, такая эквивалентность отсутствует.

Принадлежность функции Ψ к классу матрично выпуклых с квадратом необходима и достаточна для того, чтобы неравенство

$$E\Psi(\mathbf{X}\mathbf{X}^*) \leq \Psi(E\mathbf{X}\mathbf{E}\mathbf{X}^*) \quad (1)$$

выполнялось при любом распределении случайной прямоугольной комплексной матрицы \mathbf{X} , если только фигурирующие в (1) математические ожидания существуют (теорема 2).

Неравенство (1) полезно, в частности, для изучения ковариационных матриц, когда \mathbf{x} является m -мерным вектором-столбцом.

Однако класс матричных функций, выпуклых с квадратом, очень узок. Так, например, неравенство $E[(\mathbf{X}\mathbf{X}^*)^\mu] \leq (E\mathbf{X}\mathbf{E}\mathbf{X}^*)^\mu$ справедливо только в тривиальных случаях $\mu=0$ и $\mu=1$ (см. § 5). Поэтому представляет интерес ценой отказа от произвольности распределения \mathbf{X} получить более широкие достаточные условия для функции Ψ , при которых неравенство (1) имело бы место. Этому вопросу посвящен § 6, где предполагается, что \mathbf{x} — случайный m -мерный вектор-столбец, $\Psi(\mathbf{x})$ монотонна и выпукла лишь как функция числового аргумента при дополнительном предположении о распределении вектора \mathbf{x} , заключающемся в том, что все компоненты вектора имеют одинаковые условные математические ожидания, если евклидова норма вектора фиксирована. Такое условие выполняется для симметрически зависимых случайных величин, математические ожидания которых существуют. Это влечет справедливость неравенства (1) для вектора-столбца \mathbf{x} с симметрически зависимыми компонентами (теорема 4).

С той же точки зрения рассмотрен матричный аналог информационного неравенства, предложенный в работе А. Н. Лебедева, Ю. В. Линника и др. (1971; теорема 5).

Настоящая статья реализует небольшую часть обширной программы работ по теории матриц, намеченных Ю. В. Линником в последний год жизни. Она стимулирована также практическими работами Лаборатории математической геологии, где исследования А. Б. Вистелиуса требуют повседневного оперирования со случайными матрицами. Автор благодарен М. З. Соломяку, прочитавшему рукопись статьи и сделавшему ряд ценных замечаний.

§ 2. МОНОТОННЫЕ И ВЫПУКЛЫЕ МАТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Неравенство $X \zeta 0$ для эрмитовой матрицы X порядка n означает, что матрица X неотрицательно определена, т. е. что форма $z^* X z$ неотрицательна при любом выборе компонент n -мерного комплексного вектора-столбца z (* — операция транспонирования и замены элементов сопряженными).

В случае вещественного линейного пространства $X \zeta 0$ означает, по определению, неотрицательную определенность симметрической вещественной матрицы X .

Здесь полезно расширить определение упорядочения ζ , охватывая несимметричные матрицы; будем называть матрицу X вещественно неотрицательно определенной, если X вещественна и величина $x^T X x$ неотрицательна при любом выборе компонент вещественного вектора-столбца x (T — операция транспонирования). Вещественная неотрицательная определенность несимметричной матрицы X эквивалентна, очевидно, с неотрицательной определенностью симметрической матрицы $X + X^T$.

Пр и м е р 1. Матричный аналог неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим в простейшем случае имеет вид:

$$\frac{X_1 + X_2}{2} \zeta X_1^{1/2} X_2^{1/2}, \quad (2)$$

где X_1, X_2 — вещественные симметрические неотрицательно определенные матрицы. Правая часть в (2) может не быть симметрической матрицей, поэтому упорядочению ζ нельзя придать смысл обычной неотрицательной определенности. Однако неравенство (2) справедливо, если интерпретировать ζ как вещественную неотрицательную определенность.

Действительно, пусть Y_1, Y_2 — вещественные симметрические матрицы. Тогда $(Y_1 - Y_2)^2 \zeta 0$, что равносильно с $Y_1^2 + Y_2^2 - Y_1 Y_2 - Y_2 Y_1 \zeta 0$; полагая теперь $\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2} - Y_1 Y_2 = U$, запишем последнее неравенство в виде

$U + U^T \zeta 0$. Это эквивалентно с $U \zeta 0$, т. е. $\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2} \zeta Y_1 Y_2$. Подстановка $Y_1^2 = X_1, Y_2^2 = X_2$ дает (2).

Далее, например, любопытно, что произведение Шура (вычисляемое по правилу «элемент на элемент», т. е. $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$) двух вещественно неотрицательно определенных матриц, из которых одна симметрическая, является вещественно неотрицательно определенной матрицей. Таким образом, здесь нет необходимости в обычном требовании, чтобы оба сомножителя были симметрическими (хотя симметрия одной из матриц существенна, так как без этого вещественная неотрицательная определенность произведения Шура может теряться).

Чтобы доказать это, напомним, что для любой вещественной симметрической неотрицательно определенной матрицы B существует такой вещественный случайный вектор-столбец y с нулевыми математическими ожиданиями всех компонент, что $B = E(y y^T)$ (E — оператор взятия математического ожидания); тогда произведение Шура $S = A \cdot B$ имеет общий элемент $s_{ij} = a_{ij} E(y_i y_j)$; квадратичная форма, отвечающая матрице S , есть $x^T S x = \sum_{i,j} x_i x_j a_{ij} E(y_i y_j)$. Полагая $x_i y_i = v_i$, где x_i — число, y_i — случайная величина, v_i — новая случайная величина, заменим $x^T S x$ на $\sum_{i,j} a_{ij} E(v_i v_j) = E \sum_{i,j} a_{ij} v_i v_j$. Последнее выражение неотрицательно в силу предположенной вещественной неотрицательной определенности A .

Частичное упорядочение ζ используется в определениях рассматриваемых далее классов матричных функций. Для построения матричной функции матричного аргумента, как известно, берется функция числового аргумента, определенная на спектре аргумента-матрицы (возможно,

вместе с производными), затем по минимальному полиному этой матрицы и выбранной функции строят интерполяционный полином Лагранжа—Сильвестра.

Мы будем иметь дело главным образом с функциями эрмитова аргумента или с функциями, аргумент которых — матрица простой структуры (т. е. матрица, элементарные делители которой в поле комплексных чисел однократны). Такие функции удобнее определять, не прибегая к интерполяционному полиному. В дальнейшем будем обозначать числовую функцию малой буквой, а индуцируемую ею матричную функцию — соответствующей большой буквой.

Функцию эрмитова аргумента X можно определить как

$$F(X) = U_X f(\Lambda_X) U_X^*$$

где U_X — унитарная матрица из представления $X = U_X \Lambda_X U_X^*$, Λ_X — диагональная матрица с характеристическими числами X в том же представлении. Для матриц простой структуры используем также упрощенное определение матричной функции. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — набор из всех различающихся характеристических чисел матрицы X простой структуры. Функция от нее определяется с помощью спектрального разложения X как

$$F(X) = \sum_{i=1}^k P_i f(\lambda_i),$$

где P_i — проекционная матрица, отвечающая характеристическому числу λ_i .

Оба частных определения матричной функции согласуются, как известно (Rinehart, 1955), с общим определением, использующим интерполяционный полином.

К. Лёвнер (Löwner, 1934) ввел следующее определение монотонных матричных функций.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\phi(x)$ — ограниченная вещественнозначная функция вещественного аргумента, определенная на интервале J^* , а $\Psi(X)$ — индуцируемая ею матричная функция симметрического вещественного аргумента. $\Psi(X)$ монотонна на J , если для двух любых вещественных симметрических матриц X_1, X_2 произвольного, но одинакового порядка со спектрами, принадлежащими J , неравенство $X_1 \preceq X_2$ влечет неравенство $\Psi(X_1) \preceq \Psi(X_2)$.

Лёвнер установил следующую характеризацию монотонных функций. Для матричной монотонности на J необходимо и достаточно совместное выполнение следующих трех условий: 1) чтобы $\phi(x)$ была аналитична на J как функция вещественной переменной, 2) чтобы $\phi(x)$ допускала такое аналитическое продолжение $\phi(z)$ на комплексную плоскость, которое было бы регулярной функцией всюду, за возможным исключением точек вещественной оси, и, наконец, 3) чтобы $\phi(z)$ обладала свойством $\text{Im } z > 0 \Rightarrow \text{Im } \phi(z) \geq 0$.

Заметим, что матричная монотонность $\Psi(X)$ на J влечет бесконечную дифференцируемость $\phi(x)$ внутри J .

Ф. Краусс (Krauss, 1936) дал следующее определение выпуклых матричных функций.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\phi(x)$ и $\Psi(X)$ заданы, как в определении 1; $\Psi(X)$ выпукла на J , если для любых двух вещественных симметрических матриц X_1, X_2 произвольного, но одинакового порядка со спектрами, принадлежащими J , справедливо неравенство $p_1 \Psi(X_1) + p_2 \Psi(X_2) \preceq \Psi(p_1 X_1 + p_2 X_2)$ при $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1$.

* Здесь и в дальнейшем интервал J может быть открытым, замкнутым, полуоткрытым, как ограниченным, так и неограниченным.

Бендат и Шерман (Bendat, Sherman, 1955) показали, что для выпуклости $\Psi(X)$ на J необходимо и достаточно, чтобы семейство

$$\psi_{x_0}(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0} \quad (3)$$

при любом $x_0 \in J$ состояло из функций, индуцирующих матрично монотонные функции на J . В той же работе Бендата и Шермана установлены следующие свойства $\psi(x)$, индуцирующей матрично выпуклую $\Psi(X)$ на J : а) $\psi(x)$ аналитична как функция вещественной переменной в J и допускает такое аналитическое продолжение $\psi(z)$ на комплексную плоскость, которое регулярно всюду, за возможным исключением точек вещественной оси вне J , б) $\text{Im } \psi(z) > 0 \Rightarrow \text{Im} \left[\frac{\psi(z) - \psi(x_0)}{z - x_0} \right] \geq 0$ (для любого $x_0 \in J$), в) в окрестности $x_0 - R_0 < x < x_0 + R_0$ любой точки x_0 из J функция $\psi(x)$ имеет единственное представление

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \psi'(x_0)(x - x_0) + \int_{-1/R_0}^{1/R_0} \frac{(x - x_0)^2 d\varphi(t)}{1 - t(x - x_0)}, \quad (4)$$

где R_0 — радиус сходимости ряда $\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$, $\varphi(t)$ — ограниченная неубывающая функция вещественной переменной t , постоянная для $|t| > 1/R_0$.

Заметим, что совместное выполнение а) и б) либо а) и в) также представляет необходимые и достаточные условия матричной выпуклости на J , если интервал ограниченный.

Действительно, свойство а) показывает, что если взять в качестве x_0 середину интервала J , то R_0 — не менее половины длины J , и представление (4) имеет место для всех $x \in J$, а матричная монотонность семейства (3) вытекает, как можно доказать, из представления (4).

Любопытно, что если $\psi(x)$ индуцирует матрично выпуклую $\Psi(X)$, то из этого не следует, что $\psi'(x)$ индуцирует матрично монотонную функцию.

§ 3. ФУНКЦИИ ЭРМИТИЗУЕМЫХ МАТРИЦ

Определение 3. Квадратную комплексную матрицу X мы называем эрмитизуемой, если существует такая положительно определенная эрмитова матрица H_X , что $H_X X$ — эрмитова. Матрицу H_X будем называть эрмитизующей.

Теорема 1. 1) Для эрмитизуемости матрицы необходимо и достаточно, чтобы она имела вещественный спектр и простую структуру. 2) Множество матриц, эрмитизуемых с помощью H_X , вместе с X содержит всякую функцию $F(X)$, если соответствующая числовая функция $f(x)$ вещественнозначна и определена на спектре X . 3) Количества отрицательных, нулевых и положительных характеристических чисел у X совпадают с количествами отрицательных, нулевых и положительных характеристических чисел у $H_X X$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $U = (H_X^{-1/2})^* (H_X X) H_X^{-1/2}$, где квадратный корень предполагается арифметическим. Поскольку H_X — положительно определенная эрмитова, U подобна X и одновременно конгруэнтна с $H_X X$. Этим доказано утверждение 3).

Для установления критерия эрмитизуемости 1) используем результат Таусски (Беллман, 1969, с. 252): произведение двух эрмитовых матриц, из которых хотя бы одна положительно определена, подобно вещественной диагональной матрице.

Покажем необходимость условия 1) для эрмитизуемости. Если X эрмитизуема, то $X = H_X^{-1} (H_X X)$ и (согласно упомянутой теореме о подобии) X подобна вещественной диагональной, т. е. имеет вещественный спектр. Как известно (Гантмахер, 1967), подобие с диагональной матрицей равно-

сильно наличию простой структуры. Для установления достаточности 1) заметим, что из наличия у X простой структуры следует подобие X с вещественной диагональной матрицей, т. е. $X = D\Lambda D^{-1}$ ($|D| \neq 0$), что можно записать как $X = (DD^*)(D^{*-1}\Lambda D^{-1})$. Полагая $DD^* = H_1$, $D^{*-1}\Lambda D^{-1} = H_2$, видим, что H_1 — эрмитова положительно определенная, а H_2 — эрмитова (в силу предполагаемой вещественности Λ). Таким образом, $H_1^{-1}X = H_2$ и X эрмитизуема.

Переходя к доказательству 3), заметим, что из равенства $H_X X = X^* H_X$ следует $H_X X^k = X^* H_X X^{k-1} = \dots = (X^*)^k H_X$, т. е. X^k эрмитизуема с помощью H_X . $F(X)$ представляет интерполяционный полином от X с вещественными (в силу вещественности спектра X и вещественнозначности $f(x)$) коэффициентами. Очевидно, что $\sum_k a_k X^k$ эрмитизуема с помощью H_X при вещественных a_k , этим завершается доказательство теоремы.

Множество всех матриц, эрмитизуемых с помощью данной H_0 , очевидно, состоит из $H_0^{-1}\{H\}$, где второй множитель пробегает все множество эрмитовых матриц.

Введем упорядочение на множестве комплексных матриц, эрмитизуемых с помощью одной и той же H : $X_1 \underset{H}{\subseteq} X_2$ по определению означает, что $HX_1 \subseteq HX_2$.

Легко показать, что соотношение $\underset{H}{\subseteq}$ действительно задает частичный порядок (содержащий упорядочение по положительной определенности среди эрмитовых матриц как частный случай) и что упорядочение не зависит от возможного выбора эрмитизующей матрицы:

$$HX_1 \underset{H}{\subseteq} HX_2 \Rightarrow H_1 X_1 \underset{H_1}{\subseteq} H_1 X_2, \quad (5)$$

если H_1 наряду с H является эрмитизующей матрицей.

Определим теперь монотонные и выпуклые функции от аргумента, множество значений которого эрмитизуемо с помощью одной и той же матрицы.

Определение 1а. Пусть $\psi(x)$ — вещественнозначная функция вещественной переменной, определенная на интервале J , а $\Psi(X)$ — индуцируемая ею матричная функция. $\Psi(X)$ называется матрично монотонной на J функцией эрмитизуемого аргумента, если для любых двух матриц X_1, X_2 произвольного, но одинакового порядка, со спектрами, принадлежащими J , эрмитизуемых с помощью одной и той же H неравенство $HX_1 \underset{H}{\subseteq} HX_2$ влечет $H\Psi(X_1) \underset{H}{\subseteq} H\Psi(X_2)$.

Определение 2а. Пусть $\psi(x)$, $\Psi(X)$, X_1, X_2 заданы, как в определении 1а. $\Psi(X)$ называется матрично выпуклой на J функцией эрмитизуемого аргумента, если справедливо неравенство

$$H[p_1\Psi(X_1) + p_2\Psi(X_2)] \underset{H}{\subseteq} H\Psi(p_1 X_1 + p_2 X_2) \text{ при } p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1. \quad (6)$$

Возможная неединственность эрмитизующей матрицы в определениях 1а, 2а не имеет значения; если $\Psi(X)$ монотонна (выпукла) по отношению к некоторой эрмитизующей H , то она будет монотонной (выпуклой) по отношению ко всякой другой эрмитизующей H_1 . Действительно, вместе с X_1, X_2 , согласно теореме 1, эрмитизуемыми будут $\psi(p_1 X_1 + p_2 X_2)$ и $p_1 \psi(X_1) + p_2 \psi(X_2)$; тогда независимость монотонности и выпуклости от выбора эрмитизующей матрицы следует из (5).

В упоминавшейся работе Бендата и Шермана установлено, что характеристика функции $\psi(x)$, индуцирующей матрично выпуклую (монотонную) функцию, сохраняется, когда $\psi(x)$ индуцирует в гильбертовом пространстве операторную выпуклую (монотонную) функцию. При этом неравенство $A \Rightarrow B$ для двух самосопряженных операторов означает, что скалярное произведение Ax и x не превосходит скалярного произведения Bx и x , где x — произвольный вектор из гильбертова пространства.

Из этого следует, что, введя скалярное произведение x и y , как (Hx, y) , где H — положительно определенный самосопряженный оператор, такой, что HA и HB — самосопряженные операторы, мы переносим характеристику выпуклых (монотонных) операторных функций самосопряженного аргумента на выпуклые (монотонные) функции эрмитизуемых операторов в гильбертовом пространстве.

В частности, получаем следующий очевидный результат: $\psi(x)$ индуцирует на интервале J матричную выпуклую (монотонную) функцию эрмитизуемого аргумента тогда и только тогда, когда она индуцирует выпуклую (монотонную) на J матричную функцию вещественного аргумента.

О п р е д е л е н и е 4. Случайная комплексная матрица X называется эрмитизуемой, если все принимаемые ею значения (за возможным исключением множества нулевой меры) могут быть эрмитизованы с помощью одной постоянной матрицы.

Определения 1а и 2а приложимы к эрмитизуемым случайным матрицам. Однако для получения неравенств, содержащих математические ожидания, вместо неравенства (6) полезнее матричный аналог неравенства Иенсена для выпуклых функций, т. е. неравенство

$$H[E\psi(X)] \leq H\psi(EX), \quad (7)$$

где E — математическое ожидание, X — эрмитизуемая случайная матрица, H — эрмитизующая матрица.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть X — эрмитизуемая случайная матрица произвольного порядка, $\psi(x)$ — ограниченная вещественнозначная функция вещественной переменной, определенная на интервале J , $\Psi(X)$ — индуцируемая ею матричная функция. Будем называть $\Psi(X)$ выпуклой на J матричной функцией, если неравенство (7) выполняется для любого распределения X , ограниченного лишь предположениями, что спектр X принадлежит J и математические ожидания из (7) существуют.

Определение 5 только выглядит более общим, чем определение 2а.

Лемма 1. Определения 2а и 5 эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения случайной эрмитизуемой матрицы видно, что EX эрмитизуема с помощью той же H . Согласно теореме 1, матрицы $E\Psi(X)$ и $\Psi(EX)$ также эрмитизуемы с помощью H , поэтому их можно сравнить по $\frac{\leq}{H}$.

Очевидно, что определение 5 содержит определение 2а. Покажем, что определение 2а содержит определение 5, если распределение X в определении 5 дискретное.

Пусть $\Psi(X)$ — выпукла на J в смысле определения 2а. Надо показать, что неравенство

$$H \left[\sum_{i=1}^n t_i \Psi(Y_i) \right] \leq H \Psi \left(\sum_{i=1}^n t_i Y_i \right), \quad \left(t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right) \quad (8)$$

справедливо при любом n , если Y_i — любые неслучайные эрмитизуемые с помощью H матрицы со спектрами в J .

При доказательстве индукцией по n индукционная гипотеза заключается в том, что (8) справедливо при всех $n < N$. Имеем

$$\sum_{i=1}^N t_i \Psi(Y_i) = (1 - t_N) \sum_{i=1}^{N-1} t_i / (1 - t_N) \Psi(Y_i) + t_N \Psi(Y_N).$$

Положив $t_i / (1 - t_N) = p_i$, $Y_i = V_i$ ($i=1, 2, \dots, N-1$) и использовав индукционное предположение при $n=N-1$, получим

$$H \sum_{i=1}^N t_i \Psi(Y_i) \leq H \left[(1 - t_N) \Psi \left(\sum_{i=1}^{N-1} p_i V_i \right) + t_N \Psi(Y_N) \right].$$

Обозначим $\sum_{i=1}^{N-1} p_i V_i = X_1$, $Y_N = X_2$, $1 - t_N = p_1$, $t_N = p_2$; спектры X_1 , X_2 принадлежат J , и эти матрицы, очевидно, эрмитизуемы с помощью H . Используем снова индукционную гипотезу при $n=2$; тогда будем иметь

$$H \sum_{i=1}^N t_i \Psi(Y_i) \leq H [p_1 \Psi(X_1) + p_2 \Psi(X_2)] \leq H \Psi(p_1 X_1 + p_2 X_2).$$

Поскольку $\Psi(p_1 X_1 + p_2 X_2) = \Psi[(1 - t_N) \sum_{i=1}^{N-1} p_i V_i + t_N Y_N] = \Psi\left(\sum_{i=1}^N t_i Y_i\right)$, неравенство (8) справедливо и при $n=N$. Наконец, справедливость (8) при $n=1, 2$ следует из определения выпуклости 2а.

Случай произвольного распределения X получается из дискретного предельным переходом по хорошо известной схеме (см., например, (Беккенбах, Беллман, 1965, гл. I, § 18)).

В дальнейшем для характеристики выпуклости мы будем использовать только определение 5, содержащее аналог неравенства Иенсена.

§ 4. МАТРИЧНЫЕ АНАЛОГИ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

§ 4.1. Моменты и неравенство Чебышева

Лемма 2. $\psi(x) = x^\alpha$ индуцирует монотонно возрастающую матричную функцию для $0 \leq \alpha \leq 1$ на $(0, \infty)$, монотонно убывающую матричную функцию для $-1 \leq \alpha \leq 0$ на $(0, \infty)$, выпуклую матричную функцию для $1 \leq \alpha \leq 2$ на $[0, \infty)$ и для $-1 \leq \alpha \leq 0$ на $(0, \infty)$, вогнутую матричную функцию для $0 \leq \alpha \leq 1$ на $(0, \infty)$. Не существует других значений α , кроме указанных, для которых имелись бы интервалы монотонного возрастания, убывания, выпуклости и вогнутости степенной функции, а для приведенных значений α такие интервалы исчерпываются указанными.

Как видим, области монотонности и выпуклости устроены для степенной матричной функции иначе, чем для скалярной.

Доказательство. Как отмечалось в предыдущем параграфе, можно ограничиться доказательством утверждений для случая вещественного симметрического аргумента. С этой целью достаточно проверить выполнение условий 1), 2) и 3) Лёвнера для монотонности (см. с. 203) и условий а), б) Бендата—Шермана для выпуклости (см. с. 204). Монотонное убывание и вогнутость рассматриваются как монотонное возрастание и выпуклость для $\psi(x) = -x^\alpha$.

Справедливость условий, связанных с регулярностью (т. е. 1) и 2) на с. 203 и а) на с. 204), для выделенных интервалов очевидна. Остается проверить выполнение условий, связанных с отображением верхней полуплоскости на себя (т. е. 3) на с. 203 и б) на с. 204). Так, для выпуклости нужно установить, когда неравенство $\operatorname{Im} z > 0$ влечет $\operatorname{Im} \left(\frac{z^\alpha - x_0^\alpha}{z - x_0} \right) \geq 0$ (для действительных x_0 и при $0 < \arg z < \pi$), что приводится к утверждению: $0 < \varphi < \pi$ влечет

$$\sin(\alpha - 1)\varphi + u^\alpha \sin \varphi - u \sin \alpha\varphi \geq 0, \quad (9)$$

где $\varphi = \arg z$, $u = x_0 / \operatorname{mod} z$.

Используя элементарные неравенства

$$\begin{cases} \sin \alpha\varphi \geq \alpha \sin \varphi & \text{при } 0 < \alpha < 1 \\ \sin \alpha\varphi \leq \alpha \sin \varphi & \text{при } \alpha \geq 1 \end{cases} \quad (0 < \varphi < \pi),$$

$$\begin{cases} x^\alpha > \alpha x - \alpha + 1 & \text{при } \alpha > 1, \text{ также при } \alpha < 0, \\ x^\alpha < \alpha x - \alpha + 1 & \text{при } 0 \leq \alpha < 1, \quad (x > 0) \end{cases}$$

можно показать, что при $-1 \leq \alpha \leq 0$ и $1 \leq \alpha \leq 2$ левая часть (9) всегда неотрицательна, если $x_0 \geq 0$, однако в случае $\alpha < 0$ точку $x_0 = 0$ ввиду нарушения в ней требуемой аналитичности $\psi(x) = x^\alpha$ надо исключить. Так получаются интервалы выпуклости в лемме 2.

Для других значений α соответствующим выбором x_0 , φ , $\rho = \text{mod } z$ (при действительных x_0 и $0 < \varphi < \pi$) можно сделать левую часть (9) как положительной, так и отрицательной. Точно так же при $1 \leq \alpha \leq 2$ и $-1 \leq \alpha \leq 0$ можно добиться разного знака, если $x_0 < 0$. Аналогично доказываются утверждения, связанные с вогнутостью, монотонным возрастанием и убыванием.

В теории вероятностей используются неравенства для моментов неотрицательных случайных величин (неравенства для абсолютных моментов):

$$E x \leq [E(x^r)]^{1/r} \quad (1 \leq r < \infty), \quad (10)$$

$$E x \geq [E(x^r)]^{1/r} \quad (0 < r \leq 1). \quad (11)$$

Рассмотрим аналоги для случайных неотрицательно определенных эрмитизуемых матриц (неотрицательная определенность эрмитизуемой матрицы означает, согласно определению § 3, что $H_X X \subseteq 0$). Неравенство (10) сохраняется для матриц в полном объеме:

$$H E X \supseteq H [E(X^r)]^{1/r} \quad \text{при } 1 \leq r < \infty. \quad (12)$$

Область, где справедливо (11), оказывается урезанной:

$$H E X \subseteq H [E(X^r)]^{1/r} \quad \text{при } 1/2 \leq r \leq 1 \quad (13)$$

(если X — эрмитова или вещественная симметрическая, то в (12) и (13) можно положить $H = I$).

Для значений $0 < r < \frac{1}{2}$ между матрицами $H E X$ и $H [E(X^r)]^{1/r}$ нельзя установить упорядочения, независимого от распределения X .

Чтобы установить неравенства (12) и (13), заметим, что X^p для $0 \leq p \leq 1$, согласно лемме 2, — вогнутая матричная функция на $(0, \infty)$. Это означает, что неравенство $H E(X^p) \supseteq H (E X)^p$ справедливо для случайной эрмитизуемой неотрицательно определенной X при $0 \leq p \leq 1$. Так как $X^{1/p}$ также является случайной эрмитизуемой, неотрицательно определенной, то $H E X \supseteq H [E(X^{1/p})]^p$. Полагая $1/p = r$, видим, что $H E X \supseteq H [E(X^r)]^{1/r}$ при $1 \leq r < \infty$.

Пусть $1 \leq p \leq 2$. Выпуклость, согласно лемме 2, дает $H E(V^p) \subseteq H (E V)^p$. Положив $V = X^{1/p}$, будем иметь $H E X \subseteq H [E(X^{1/p})]^p$. Замена $p = 1/r$ приводит к $H E X \subseteq H [E(X^r)]^{1/r}$ при $1/2 \leq r \leq 1$.

Пусть, наконец, $0 < r < \frac{1}{2}$. Предположим, что между матрицами $H E X$ и $H [E(X^r)]^{1/r}$ существует упорядочение, независимое от распределения X . Положив $X = V^{1/r}$, а затем $1/r = \alpha$, мы получили бы такое же упорядочение между $H E(V^\alpha)$ и $H (E V)^\alpha$ при $\alpha > 2$. Согласно определению 5 выпуклости, это означало бы, что $\psi(x) = x^\alpha$ для $\alpha > 2$ индуцирует выпуклую либо вогнутую матричную функцию, что противоречит утверждению леммы 2.

Для неотрицательной случайной величины x с математическим ожиданием $E x$ в теории вероятностей имеется неравенство $t p(x \geq t) \leq E x$, ($t > 0$), где $p(x \geq t)$ — вероятность выполнения неравенства $x \geq t$.

Матричный аналог. Пусть X — случайная эрмитова неотрицательно определенная матрица с математическим ожиданием $E X$, T — постоянная эрмитова положительно определенная матрица. Тогда

$$p(X \subseteq T) T \supseteq E X. \quad (14)$$

Числовой множитель $p(X \xi T)$ означает вероятность выполнения неравенства $X \xi T$; эта вероятность есть интеграл Лебега—Стилтьеса. $\int_{X \xi T} dP(X)$, где $P(X)$ — распределение случайной матрицы X ; $EX = \int_{X \xi 0} X dP(X)$, где интеграл можно рассматривать либо как матрицу, составленную из интегралов Лебега—Стилтьеса соответствующих элементов, либо как интеграл от функции, принимающей значения в банаховом пространстве над полем вещественных чисел (оба подхода эквивалентны).

Неравенство (14), равносильное с $\int_{X \xi T} T dP(X) \xi \int_{X \xi 0} X dP(X)$, очевидно, выполняется.

Пусть V — случайная эрмитова матрица с математическим ожиданием EV и «дисперсией» $D_V = E[(V - EV)^2]$. Положим $X = (V - EV)^2$, $T = tD_V$. Из (14) получим:

$$p[(V - EV)^2 \xi tD_V] \leq \frac{1}{t}, \quad (t > 0).$$

Это неравенство Чебышева для эрмитовых матриц. Аналог более употребительной формы неравенства Чебышева $p[|V - EV| \xi tD_V^{1/2}] \leq \frac{1}{t^2}$ для матриц неверен.

4.2. Информационные неравенства

Как известно, в теории информации важную роль играет выпуклость функции $\psi(x) = x \ln x$ для $x > 0$.

Лемма 3. $\psi(x) = x \ln x$ индуцирует выпуклую матричную функцию на любом интервале $[a, b]$ при $0 < a < b < \infty$.

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий Бендата—Шермана а) и б). Справедливость а) очевидна. Проверим, что

$$\operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \left(\frac{z \ln z - x_0 \ln x_0}{z - x_0} \right) > 0, \quad (x_0 > 0). \quad (15)$$

Условие (15) эквивалентно равенству

$$\operatorname{sign} \left[\operatorname{Im} \left(\frac{z \ln z - x_0 \ln x_0}{z - x_0} \right) \right] = 1, \quad (x_0 > 0),$$

которое приводится к

$$\operatorname{sign} \left[\frac{\varphi}{\sin \varphi} + u \ln u - \frac{u \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi} \right] = 1, \quad (u > 0, \quad 0 < \varphi < \pi),$$

где $\varphi = \arg z$, $\rho = \operatorname{mod} z$, $u = \frac{x_0}{\rho}$.

При $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ имеем

$$0 \leq \frac{\varphi \cos \varphi}{\sin \varphi} < 1,$$

поэтому

$$\frac{\varphi}{\sin \varphi} + u \ln u - \frac{u \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi} > 1 + u \ln u - u.$$

Положительность $1 + u \ln u - u$ при $u > 0$ очевидна. Если

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi,$$

то

$$\frac{\varphi}{\sin \varphi} + u \ln u - \frac{u\varphi \cos \varphi}{\sin \varphi} > 1 + u \ln u + \frac{u\varphi |\cos \varphi|}{\sin \varphi} > 0.$$

Таким образом, неравенство $\mathbf{H}\mathbf{E}(\mathbf{X} \ln \mathbf{X}) \underset{\mathbf{H}}{\leq} \mathbf{H}(\mathbf{E}\mathbf{X}) \ln(\mathbf{E}\mathbf{X})$ справедливо для случайной эрмитизуемой матрицы \mathbf{X} с положительным спектром.

Следствие. Пусть $\psi(x)$ — ограниченная вещественная переменная, положительная на интервале J , \mathbf{X} — случайная эрмитизуемая матрица со спектром в J и, наконец, $\mathbf{E}[\Psi(\mathbf{X})] \underset{\mathbf{H}}{\leq} \mathbf{I}$. Тогда

$$\mathbf{E}[\Psi(\mathbf{X}) \ln \Psi(\mathbf{X})] \underset{\mathbf{H}}{\leq} 0. \quad (16)$$

Доказательство. Положим $\Psi(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$. В силу леммы 3 будем иметь:

$$\mathbf{H}\mathbf{E}(\mathbf{Y} \ln \mathbf{Y}) \underset{\mathbf{H}}{\leq} \mathbf{H}(\mathbf{E}\mathbf{Y}) \ln(\mathbf{E}\mathbf{Y}). \quad (17)$$

Матрица $\mathbf{H}(\mathbf{E}\mathbf{Y}) \ln(\mathbf{E}\mathbf{Y})$ — эрмитова (согласно утверждению 2) из теоремы 1) и имеет неотрицательный спектр (условие $\mathbf{E}\mathbf{Y} \underset{\mathbf{H}}{\leq} \mathbf{I}$ и 3) из теоремы 1), поэтому правая часть неравенства (17) неотрицательно определена, и (16) доказано.

В теории информации широко используются следующие два неравенства (Рао, 1968).

1) Для дискретных положительных величин. Пусть a_i, b_i — такие положительные числа, что $\sum_i a_i, \sum_i b_i$ сходятся, причем $\sum_i a_i \geq \sum_i b_i$. Тогда

$$\sum_i a_i \ln \left(\frac{a_i}{b_i} \right) \geq 0.$$

2) Для функций от случайной величины. Пусть x — случайная величина, $\psi_1(x), \psi_2(x)$ — неотрицательные функции, такие, что $\mathbf{E}\psi_1(x) \geq \mathbf{E}\psi_2(x)$, тогда $\mathbf{E} \left[\psi_1(x) \ln \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)} \right] \geq 0$.

Матричный аналог первого неравенства. Пусть $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$ — такие эрмитовы положительно определенные матрицы, что $\sum_i \mathbf{A}_i, \sum_i \mathbf{B}_i$ сходятся, причем

$$\sum_i \mathbf{A}_i \underset{\mathbf{H}}{\leq} \sum_i \mathbf{B}_i, \text{ тогда}$$

$$\sum_i \mathbf{A}_i^{1/2} \ln(\mathbf{A}_i^{1/2} \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i^{1/2}) \mathbf{A}_i^{1/2} \underset{\mathbf{H}}{\leq} 0. \quad (18)$$

Матричный аналог второго неравенства. Пусть \mathbf{X} — случайная эрмитова матрица, $\psi_1(x), \psi_2(x)$ — неотрицательные на спектре \mathbf{X} функции вещественной переменной, такие, что $\mathbf{E}\Psi_1(\mathbf{X}) \underset{\mathbf{H}}{\leq} \mathbf{E}\Psi_2(\mathbf{X})$, тогда

$$\mathbf{E} \{ \Psi_1(\mathbf{X}) \ln [\Psi_1(\mathbf{X}) \Psi_2^{-1}(\mathbf{X})] \} \underset{\mathbf{H}}{\leq} 0. \quad (19)$$

Чтобы установить (18), запишем это неравенство в эквивалентном виде

$$\sum_i \mathbf{A}_i^{1/2} [-\ln(\mathbf{A}_i^{1/2} \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{A}_i^{1/2})] \mathbf{A}_i^{1/2} = \sum_i \mathbf{A}_i^{1/2} \ln(\mathbf{A}_i^{-1/2} \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i^{-1/2}) \mathbf{A}_i^{1/2} \Rightarrow 0.$$

Заметим, что неравенство $\ln x \leq x - 1$, справедливое для положительных чисел, влечет неравенство для положительно определенных эрмитовых матриц $\ln \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X} - \mathbf{I}$ и что неравенства $\mathbf{X}_1 \underset{\mathbf{H}}{\leq} \mathbf{X}_2$ и $\mathbf{A}\mathbf{X}_1\mathbf{A} \underset{\mathbf{H}}{\leq} \mathbf{A}\mathbf{X}_2\mathbf{A}$ эквивалентны, когда $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ — эрмитовы, \mathbf{A} — невырожденная эрмитова, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{A}_i^{1/2} \ln(\mathbf{A}_i^{-1/2} \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i^{-1/2}) \mathbf{A}_i^{1/2} &\Rightarrow \sum_i \mathbf{A}_i^{1/2} (\mathbf{A}_i^{-1/2} \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i^{-1/2} - \mathbf{I}) \mathbf{A}_i^{1/2} = \\ &= \sum_i \mathbf{B}_i - \sum_i \mathbf{A}_i \Rightarrow 0, \end{aligned}$$

откуда следует (18).

Так же просто установить справедливость (19). Заметим, однако, что мы получили матричные аналоги (18) и (19) только для эрмитовых (а не эрмитизуемых) матриц.

4.3 Случайные линейные системы

Рассмотрим линейную систему n уравнений с n неизвестными

$$Ax = b, \tag{20}$$

в которой как матрица коэффициентов A , так и вектор свободных членов b случайны.

Предположим, что A не вырождена, что существуют математические ожидания EA , Eb и что вектор b стохастически независим от матрицы A (это означает, что набор компонент вектора стохастически независим от набора элементов матрицы, хотя между компонентами вектора может существовать стохастическая зависимость, так же как между элементами матрицы).

Наряду с (20) рассмотрим детерминированную систему

$$(EA)y = Eb. \tag{21}$$

Систему (20) можно считать результатом рандомизации (21), т. е. результатом добавления случайных невязок с нулевыми математическими ожиданиями к матрице EA и вектору Eb .

Можно ожидать, что рандомизация в среднем «растягивает» вектор решения, так что, например, имеется неравенство для норм

$$E \|x\|^2 \geq \|y\|^2. \tag{22}$$

Когда случаен лишь вектор b , а не матрица A , неравенство (22) легко доказывается для эвклидовых норм: $E(x^*x) \geq y^*y$. При произвольном распределении случайной матрицы (22) не выполняется. Укажем некоторые характерные случаи, когда (22) имеет место.

Пусть в дальнейшем A — случайная эрмитова положительно определенная матрица, b — случайный комплексный вектор, стохастически независимый от A .

а) Если ввести норму векторов формулой $\|v\|_1 = [v^*(EA)v]^{1/2}$, то (22) выполняется, т. е.

$$E \|x\|_1^2 \geq \|y\|_1^2. \tag{23}$$

б) Когда математическое ожидание A представляет собой скалярную матрицу (например, в практически распространенном случае, если производят вычисления с выборочной ковариационной матрицей некоррелированных величин, имеющих одинаковые дисперсии), а также

в) когда множество значений, принимаемых A , состоит из коммутирующих матриц, — неравенство (22) выполняется для обычных эвклидовых норм.

Доказательство этих утверждений опирается на следующее полезное матричное неравенство.

Лемма 4. Пусть X — случайная эрмитова положительно определенная матрица, вместе с X^{-1} имеющая математическое ожидание. Тогда

$$E [X^{-1}(EX)X^{-1}] \leq E(X^{-1}). \tag{24}$$

Доказательство. Если $V = V^* \geq 0$, то в силу матричной выпуклости $\Psi(V) = V^{-1}$ имеем $E(V^{-1}) \leq (EV)^{-1}$; полагая $V = X^{-1}$, получаем $EX \leq [E(X^{-1})]^{-1}$, такое неравенство равносильно с

$$E(X^{-1})EXE(X^{-1}) \leq E(X^{-1}). \tag{25}$$

Используя эрмитовость X , левую часть (25) можно записать, как $E[X^{-1}(EX)^{1/2}][(EX)^{1/2}E(X^{-1})] = E[X^{-1}(EX)^{1/2}E[X^{-1}(EX)^{1/2}]^*]$. Поскольку всегда $E(UU^*) \leq EUEU^*$, то, полагая $U = X^{-1}(EX)^{1/2}$, получаем (24).

Следствие. Если $EX = I$, то

$$E(X^{-2}) \leq E(X^{-1}) \leq I, \quad (26)$$

если только рассматриваемые математические ожидания существуют.

Из (24) получаем

$$E[X^{-1}(EX)X^{-1}] \leq E(X^{-1}) \leq (EX)^{-1}, \quad (27)$$

откуда при $EX = I$ следует (26).

Докажем теперь утверждения а), б) и в). Справедливость а), т. е. справедливость неравенства $E[b^*A^{-1}(EA)A^{-1}b] \geq (Eb^*)(EA)^{-1}(Eb)$, следует из очевидного неравенства $E[b^*(EA)^{-1}b] \geq (Eb^*)(EA)^{-1}(Eb)$ и из (27). Точно так же при $EA = cI$ из (26) выводим, что $Ex^*x = E(b^*A^{-2}b) \geq \frac{1}{c^2}Eb^*Eb = y^*y$. Допустим, наконец, что значения, принимаемые A , коммутируют. Заменим систему (20) равносильной $(EA)^{-1}Ax = (EA)^{-1}b$, т. е. системой $Bx = \beta$, где $B = (EA)^{-1}A$, как нетрудно заметить, эрмитова в силу предположения о перестановочности значений A . Кроме того, B положительно определена и имеет математическое ожидание I , а вектор $\beta = (EA)^{-1}b$ стохастически независим от B . Таким образом, этот случай сводится к предыдущему (со скалярной EA).

§ 5. ВЫПУКЛЫЕ С КВАДРАТОМ МАТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

5.1. Определение и свойства

В приложениях нередко встречаются неравенства с прямоугольной или с квадратной матрицей X вида

$$E[\Psi(XX^*)] \leq \Psi(EXEX^*). \quad (28)$$

Так, для решения вопроса, будет ли рандомизация линейной системы (см. предыдущий параграф) вызывать в среднем «растяжение» вектора решения, достаточно установить неравенство $E[(XX^*)^{-1}] \leq (EXEX^*)^{-1}$, т. е. неравенство вида (28) с $\Psi(V) = V^{-1}$; к тому же типу (28) с прямоугольной матрицей относится матричный аналог неравенства Рао—Блекуэлла, изучаемый в конце настоящего параграфа.

Будем далее предполагать, что сингулярные числа случайной матрицы X , имеющей математическое ожидание, принадлежат интервалу с концами a, b ($0 \leq a \leq b$), который будем обозначать $J_{a,b}$ (интервал может быть как ограниченный, так и неограниченный, открытый или замкнутый, также полуоткрытый). Тогда при любом распределении X характеристические числа $V = XX^*$ будут принадлежать J_{a^2,b^2} , а характеристические числа $V_1 = EXEX^*$ — интервалу J_{0,b^2} . Если X эрмитова, то ее характеристические числа принадлежат объединению двух интервалов $\{J_{-b,-a} \cup J_{a,b}\}$.

Относительно матричной функции $\Psi(V)$ эрмитова аргумента будем предполагать, что она индуцирована ограниченной вещественнозначной функцией $\psi(v)$ вещественной переменной, определенной на J_{0,b^2} , и такой, что математические ожидания в (28) существуют.

Будем говорить, что неравенство (28) справедливо для матричной функции Ψ , если оно выполняется для случайной комплексной прямоугольной матрицы X произвольной размерности $n \times m$ с любым распределением, удовлетворяющим только сделанным предположениям относительно сингулярных чисел и математических ожиданий. Таким образом, справедливость неравенства связана лишь со строением $\psi(v)$.

Определение 6. Функция эрмитова аргумента $\Psi(V)$ является матрично выпуклой с квадратом на $\{J_{-b, -a} \cup J_{a, b}\}$, если неравенство

$$E[\Psi(V^2)] \leq \Psi[E^2(V)] \quad (29)$$

выполняется для случайной эрмитовой матрицы V произвольного порядка при любом распределении V , таком, что характеристические числа V принадлежат $\{J_{-b, -a} \cup J_{a, b}\}$ и математические ожидания в (29) существуют.

Полезность определения 6 видна из следующей теоремы.

Теорема 2. Каждое из неравенств с прямоугольной матрицей X

$$E[\Psi(XX^*)] \leq \Psi(EXEX^*), \quad E\Psi(X^*X) \leq \Psi(EX^*EX) \quad (30)$$

справедливо тогда и только тогда, когда $\Psi(V)$ является матрично выпуклой с квадратом на $\{J_{-b, -a} \cup J_{a, b}\}$.

Доказательство. Необходимость тривиальна, поскольку неравенства (30) должны выполняться, в частности, для эрмитовой X со спектром, принадлежащим $\{J_{-b, -a} \cup J_{a, b}\}$. Рассмотрим квадратную случайную матрицу V порядка $n + m$ с $n \geq m$, образованную клетками

$$V = \begin{pmatrix} O_{m \times m} & X_{n \times m}^* \\ X_{n \times m} & O_{n \times n} \end{pmatrix},$$

где $X_{n \times m}$ — прямоугольная случайная матрица, сингулярные числа которой принадлежат $J_{a, b}$. V — эрмитова, и нетрудно показать, что характеристические числа V принадлежат $\{J_{-b, -a} \cup J_{a, b}\}$. Таким образом, в части достаточности для V должно выполняться неравенство (29). Клеточное представление (29) дает

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|c} E[\Psi(X_{n \times m}^* X_{n \times m})] & O_{m \times n} \\ \hline O_{n \times m} & \Psi(EX_{n \times m} EX_{n \times m}^*) \end{array} \right) \leq \\ & \leq \left(\begin{array}{c|c} \Psi(EX_{n \times m}^* EX_{n \times m}) & O_{m \times n} \\ \hline O_{n \times m} & \Psi(EX_{n \times m} EX_{n \times m}^*) \end{array} \right), \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности n, m следуют неравенства (30).

Изучим теперь важный для дальнейшего частный случай, когда интервал, содержащий сингулярные числа X , включает 0. Тогда объединение $\{J_{-b, -a} \cup J_{a, b}\}$ оказывается интервалом $J_{-b, b}$.

Класс матричных функций, выпуклых с квадратом на $\{J_{-b, -a} \cup J_{a, b}\}$, шире класса матричных функций, выпуклых с квадратом на $J_{-b, b}$. Это же справедливо для матричной выпуклости. Действительно, нетрудно убедиться, что матричная выпуклость с квадратом (матричная выпуклость) на $J_{-b, b}$ влечет матричную выпуклость с квадратом (матричную выпуклость) на $\{J_{-b, -a} \cup J_{a, b}\}$, но обратное утверждение не имеет места.

Так, рассмотрим

$$\psi(x) = \psi(x^2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \{(-2, -1] \cup [1, 2)\}, \\ 0, & \text{если } x \notin \{(-2, -1] \cup [1, 2)\}. \end{cases}$$

Неравенство $E\Psi(X) \leq \Psi(EX)$ для эрмитовой X тогда эквивалентно с $I \leq \Psi(\Lambda_{EX})$, где Λ_{EX} — диагональная матрица с характеристическими числами EX по диагонали. Последнее неравенство, очевидно, справедливо. Таким образом, $\Psi(X)$ является матрично выпуклой, а также матрично выпуклой с квадратом на $\{(-2, -1] \cup [1, 2)\}$. На $(-2, 2)$ функция $\Psi(X)$ не будет, как легко убедиться, ни матрично выпуклой, ни матрично выпуклой с квадратом.

Теорема 3. 1) Числовая функция $\psi(x)$ индуцирует матрично выпуклую с квадратом на $J_{-b, b}$ функцию в том и только в том случае, когда $\psi(x)$

индуцирует матрично монотонную и одновременно матрично выпуклую на J_{0, b^2} функцию. 2) Функции $\psi(x)$ из 1) имеют следующее характеристическое представление:

$$\psi(x) = \psi(0) + cE_t \frac{x}{1-t^2x} \text{ при } 0 \leq x < b, \quad (31)$$

где c — положительная постоянная, t — случайная вещественная величина, сосредоточенная на $[-1/R, 1/R]$ (здесь R — радиус сходимости ряда

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k).$$

Замечание. Эквивалентность монотонности вместе с выпуклостью на J_{0, b^2} и выпуклости с квадратом на $J_{-b, b}$ не имеет прецедента для числовых функций; это явление также не будет иметь места, если рассматривать функции матриц лишь одного, заданного порядка n .

Для доказательства полезны две следующие леммы.

Лемма 5. Дробно-рациональная функция $\psi(x) = \frac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}$ со следующими ограничениями на коэффициенты — 1) коэффициенты вещественны; 2) $\beta\gamma - a\delta \leq 0$; 3) по крайней мере один из коэффициентов γ, δ не равен нулю — индуцирует матрично монотонную функцию на $(-\infty, -\delta/\gamma)$ и на $(-\delta/\gamma, \infty)$, матрично выпуклую функцию на $(-\infty, -\delta/\gamma)$, при дополнительном ограничении $\delta/\gamma < 0$ индуцирует матрично выпуклую с квадратом функцию на $(-|\delta/\gamma|^{1/2}, |\delta/\gamma|^{1/2})$. Если условие $\delta/\gamma < 0$ не выполняется, то не существует никакого невырожденного интервала для матричной выпуклости с квадратом. При $\gamma = 0$ матричные монотонность, выпуклость и выпуклость с квадратом имеют место на $(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Непосредственное применение критериев матричной монотонности и выпуклости, указанных на с. 203, 204, и применение критерия матричной выпуклости к $\tau(x) = \frac{ax^2 + \beta}{\gamma x^2 + \delta}$ для установления выпуклости с квадратом.

Лемма 6. Пусть $R(X, t)$ — матричная функция случайного эрмитова аргумента X , зависящая от случайного числового вещественного параметра t ; предположим, что существует математическое ожидание $ER(X, t)$ относительно совместного распределения X, t . Если $R(X, t)$ — выпуклая на интервале J при каждом значении t функция эрмитова аргумента, то математическое ожидание относительно распределения t , т. е. $E_t[R(X, t)]$, — также выпуклая на J функция эрмитова аргумента.

Доказательство. Согласно определению 5, требуется показать, что неравенство

$$E_X[R(X, t)] \preceq R(EX, t) \quad (32)$$

влечет неравенство

$$E_X E_t[R(X, t)] \preceq E_t R(EX, t). \quad (33)$$

Существование повторных математических ожиданий в (33) и возможность менять их порядок обосновываются известной теоремой «Анализа» (см., например, Шварц, 1972, гл. IV, теорема 77). Переставляя математические ожидания в (33) слева, запишем это неравенство в виде $E_t E_X[R(X, t)] \preceq E_t R(EX, t)$, что справедливо в силу (32).

Лемма справедлива и для несколько более общего случая, когда X — эрмитизуемый случайный аргумент.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что $J_{-b, b}$ — открытый интервал (доказательство для общего случая аналогично), тогда J_{0, b^2} — интервал, открытый справа и замкнутый слева.

Получим сначала представление (31). Пусть $\psi(x)$ индуцирует функцию, матрично выпуклую с квадратом на $J_{-b, b}$. Функция $\tau(x) = \psi(x^2)$ должна

индуцировать выпуклую матричную функцию на J_{0, b^2} . В силу свойства регулярности а) при матричной выпуклости (см. с. 204) радиус сходимости R ряда Тейлора для $\tau(x)$ относительно точки $x_0=0$ не менее b . Согласно представлению б), при матричной выпуклости (см. с. 204) имеем:

$$\tau(x) = \tau(0) + \tau'(0)x + \int_{-1/R}^{1/R} \frac{x^2 d\varphi(t)}{1-tx} \quad (\text{для } -b < x < b),$$

откуда

$$\tau(x) = \frac{\tau(x) + \tau(-x)}{2} = \tau(0) + \int_{-1/R}^{1/R} \frac{x^2 d\varphi(t)}{1-t^2x^2}$$

и

$$\psi(x) = \psi(0) + \int_{-1/R}^{1/R} \frac{x d\varphi(t)}{1-t^2x} \quad (0 \leq x < b^2).$$

Положим $v(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(-1/R)}{\varphi(1/R) - \varphi(-1/R)}$, $c = \varphi(1/R) - \varphi(-1/R)$ и доопределим $v(t)$ по непрерывности слева (это возможно, так как $\varphi(t)$ — ограниченная неубывающая функция), обозначая полученную функцию $\omega(t)$.

Тогда $\omega(t)$ — функция распределения случайной вещественной величины t , сосредоточенная на $[-1/R, 1/R]$. Очевидно, что $\psi(x)$ можно записать в эквивалентной форме как

$$\psi(x) = \psi(0) + c \int_{-1/R}^{1/R} \frac{x d\omega(t)}{1-t^2x} = \psi(0) + cE_t \frac{1}{1-t^2x} \quad (0 \leq x < b^2).$$

Покажем теперь, что $\Psi(X)$ матрично монотонна и матрично выпукла на J_{0, b^2} . Для этого достаточно, чтобы семейство $k_t(x) = \frac{x}{1-t^2x}$ индуцировало такую функцию при каждом $t \in [-1/R, 1/R]$. По отношению к матричной монотонности это очевидно, а по отношению к матричной выпуклости следует из леммы 6. Используя лемму 5 с учетом того, что $R \geq b$, устанавливаем для $k_t(x)$ требуемые свойства на интервале, содержащем $[0, b^2]$. Поскольку матричная монотонность (выпуклость) на некотором интервале влечет матричную монотонность (выпуклость) на любом вложенном интервале, $\Psi(X)$ матрично монотонна и выпукла на $[0, b^2]$.

Пусть теперь $\Psi(X)$ — матрично монотонна и одновременно матрично выпукла на $[0, b^2]$. Покажем, что

$$E[\Psi(X^2)] \preceq \Psi(E^2X), \quad (34)$$

если характеристические числа случайной эрмитовой матрицы X принадлежат $(-b, b)$. Положим $X^2 = V$; при произвольном распределении X со спектром в $(-b, b)$ спектры X^2 , $E X^2$, $E^2 X$ будут принадлежать $[0, b^2]$, поскольку $\lambda_{\max}(X^2) \in [0, b^2]$ и $E X^2 \preceq E^2 X \preceq 0$. В силу предположенной матричной выпуклости на $[0, b^2]$ имеем $E[\Psi(X^2)] \preceq \Psi[E(X^2)]$ и $\Psi[E(X^2)] \preceq \Psi[E^2(X)]$ — в силу матричной монотонности на том же интервале, откуда следует неравенство (34).

Таким образом, $\Psi(X)$ матрично выпукла с квадратом на $J_{-b, b}$.

5.2. Выпуклость с квадратом и неравенства для прямоугольных матриц

Пусть X — прямоугольная комплексная случайная матрица любой размерности $m \times n$ с произвольным распределением, удовлетворяющим, однако, требованиям, чтобы сингулярные числа X находились в указанных далее интервалах и чтобы существовали указанные математические ожидания.

Тогда, например, справедливы следующие неравенства:

1) $E\left(\frac{aX^*X}{I-b^2X^*X}\right) \leq \frac{aEX^*EX}{I-b^2EX^*EX}$, если $a > 0$, $b > 0$ и сингулярные числа X принадлежат $\left[0, \frac{1}{b}\right)$, I — единичная матрица порядка m ;

2) $E\left[\ln\left(I - \frac{1}{a^2}X^*X\right)\right] \geq \ln\left(I - \frac{1}{a^2}EX^*EX\right)$, если $a > 0$ и сингулярные числа X принадлежат $[0, a)$;

3) $E\left\{(X^*X)^{1/2} \ln \left[\frac{aI + (X^*X)^{1/2}}{aI - (X^*X)^{1/2}}\right]\right\} \leq (EX^*EX)^{1/2} \ln \left[\frac{aI + (EX^*EX)^{1/2}}{aI - (EX^*EX)^{1/2}}\right]$, если $a > 0$ и сингулярные числа X принадлежат $[0, a)$ (предполагается, что $\psi(x) = x^{1/2}$ представляет арифметический корень).

Докажем эти неравенства. Согласно теореме 3, для справедливости неравенств 1)–3) необходимо и достаточно, чтобы функции $\psi_1(x) = \frac{ax}{1-b^2x}$,

$\psi_2(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{a^2}\right)$, $\psi_3(x) = \sqrt{x} \ln \frac{a + \sqrt{x}}{a - \sqrt{x}}$ индуцировали соответствующие

матрично выпуклые с квадратом функции на $\left(-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right)$, на $(-a, a)$ и на $(-a, a)$. Убедиться в этом проще всего с помощью представления (31) для $\psi(x)$, индуцирующих матрично выпуклые с квадратом функции. Так, при дискретном распределении t , имеющем равные веса $1/2$ в точках $-b, b$, получаем при соответствующем выборе констант $\psi(0)$ и c в (31) функцию $\psi_1(x)$ и неравенство 1). При распределении t , сосредоточенном на $\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]$ с плотностью вероятности $f(t) = a^2|t|$, получим $\psi_2(x)$ и, таким образом, неравенство 2). При равномерном распределении t , сосредоточенном на $\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]$, получим $\psi_3(x)$ и неравенство 3).

Рассмотрим теперь вопрос, при каких вещественных μ справедливо неравенство

$$E[(X^*X)^\mu] \leq (EX^*EX)^\mu, \quad (35)$$

если сингулярные числа X принадлежат интервалу $[0, a)$.

Согласно теореме 2, неравенство (35) справедливо тогда и только тогда, когда $\psi(x) = x^\mu$ индуцирует матрично выпуклую с квадратом на $(-a, a)$ функцию, или эквивалентным образом (по теореме 3), когда $\psi(x) = x^\mu$ индуцирует матрично выпуклую и одновременно матрично монотонную (возрастающую) на $[0, a^2)$ функцию. Для монотонности в соответствии с леммой 2 мы должны иметь $0 \leq \mu \leq 1$, а для выпуклости $1 \leq \mu \leq 2$ либо $\mu = 0$. Таким образом, подходящими значениями являются только $\mu = 0$ и $\mu = 1$; неравенство (35) имеет место лишь в тривиальных случаях $\mu = 0$, $\mu = 1$.

5.3. Матричные аналоги неравенства Рао—Блекуэлла и неравенства, содержащего информационную матрицу Фишера

Оба рассматриваемых далее неравенства были предложены А. Н. Лебедевым, Ю. В. Линником и др. (1971). В той же работе указаны достаточные условия для выполнения этих неравенств, заключающиеся в матричной монотонности вместе с матричной выпуклостью функции Ψ . Используя выпуклость с квадратом, укажем необходимые и достаточные условия справедливости этих неравенств, распространяя одновременно область задания матричного аргумента на комплексные прямоугольные матрицы.

Как известно, при оценивании параметра полезен метод улучшения оценки Рао—Блекуэлла.

Пусть на выборочном пространстве наблюдений имеется семейство $\{P_\theta\}$ вероятностных распределений, зависящих от параметра θ , x — некоторая

оценка для θ , $\omega(x, \theta)$ — функция потерь, s — достаточная статистика для семейства $\{P_\theta\}$.

Если $\omega(x, \theta)$ — функция, выпуклая по x при каждом θ , то имеет место неравенство Рао—Блекуэлла

$$E[\omega(x, \theta)] \geq E\{\omega[E(x/s), \theta]\}, \quad (36)$$

показывает, что новая оценка $x_1 = E(x/s)$, представляющая условное математическое ожидание старой оценки x относительно достаточной статистики s , в среднем выгоднее при выпуклой функции потерь (кроме того, x_1 является достаточной и будет несмещенной, если несмещенной была оценка x).

Обычно разумно предполагать, что $\omega(x, \theta)$ является четной функцией отклонения $x - \theta$, т. е. $\omega(x, \theta) = \psi[(x - \theta)^2]$, и неравенство Рао—Блекуэлла (36) принимает вид

$$E\psi[(x - \theta)^2] \geq E\psi\{[E(x/s) - \theta]^2\}. \quad (37)$$

Пусть теперь параметр Θ представляет комплексную матрицу размера $m \times n$ с $m \geq n$, оценка X — комплексную матрицу такого же размера, S — достаточную для семейства $\{P_\Theta\}$ статистику.*

Матричный аналог (37) имеет вид:

$$E\psi[(X - \Theta)(X - \Theta)^*] \geq E\psi\{[E(X/S) - \Theta][E(X/S) - \Theta]^*\} \quad (38)$$

(Лебедев, Линник и др., 1971; случай вещественных Θ, X).

Предположим, что сингулярные числа матрицы $X - \Theta$ принадлежат интервалу $J_{a,b}$.

Предложение 1. Для справедливости неравенства (38) необходимо и достаточно, чтобы $\Psi(V)$ была матрично выпуклой с квадратом на $\{J_{-b, -a} \cup J_{a,b}\}$ функцией эрмитова аргумента V ; в частном случае, когда интервал $J_{a,b}$ включает точку 0, необходимо и достаточно, чтобы $\Psi(V)$ была матрично монотонной и матрично выпуклой на $J_{0,b}$ (что совпадает с достаточными условиями из работы А. Н. Лебедева, Ю. В. Линника и др., 1971).

Доказательство. Пусть $\Psi(V)$ — выпуклая с квадратом на $\{J_{-b, -a} \cup J_{a,b}\}$ функция эрмитова аргумента V . Рассмотрим условную случайную матрицу $X - \Theta/S$, взятую при фиксированном значении статистики S (относительно понятия «условная случайная величина» и его корректного использования см., например, работу С. Уилкса (1967)).

Сингулярные числа этой матрицы принадлежат, очевидно, тому же интервалу $J_{a,b}$. Поэтому, согласно теореме 2, справедливо неравенство

$$E\psi[(X - \Theta/S)(X - \Theta/S)^*] \geq \psi\{[E(X - \Theta/S)][E(X - \Theta/S)^*]\},$$

эквивалентное с неравенством

$$E\{\psi[(X - \Theta)(X - \Theta)^*/S]\} \geq \psi\{[E(X/S) - \Theta][E(X/S) - \Theta]^*\}. \quad (39)$$

Взяв еще раз математические ожидания относительно S от обеих частей (39), получим неравенство (38).

Если неравенство (38) справедливо, то оно должно выполняться и в том частном случае, когда $m = n$, параметрическое пространство состоит из единственной точки Θ_0 , представляющей эрмитову матрицу порядка m , и случайная матрица $X - \Theta$ является эрмитовой того же порядка со спектром, принадлежащим $\{J_{-b, -a} \cup J_{a,b}\}$. В качестве S тогда можно взять константу, и (38) получит вид

$$E[\Psi(V^2)] \geq \Psi[E^2(V)],$$

* Без каких-либо изменений можно рассмотреть более общий случай, когда S — достаточная σ -алгебра.

где V — случайная эрмитова матрица со спектром, принадлежащим указанному объединению. Это означает требуемую выпуклость с квадратом.

Если сингулярные числа X принимают нулевое значение, объединение интервалов сводится к $J_{-b, b}$, и теорема 3 сводит необходимые и достаточные условия к одновременной матричной монотонности и выпуклости на J_{0, b^2} (однако матричная монотонность вместе с матричной выпуклостью на J_{0, b^2} не дают ни необходимого, ни достаточного условия выполнения (38), когда сингулярные числа $X - \Theta$ принадлежат $\{J_{-b, -a} \cup J_{a, b}\}$).

Пример 2. В качестве числовой функции потерь, индуцирующей соответствующую матричную в (38), можно, например, взять $\omega(x, \theta) = (x - \theta)^2$ при любом распределении случайной матрицы X в (38).

Если сингулярные числа $X - \Theta$ принадлежат интервалу $[0, a]$, можно взять $\omega(x, \theta) = \frac{(x - \theta)^2}{1 - 1/a^2(x - \theta)^2}$ либо, например, $\omega(x, \theta) = |x - \theta| \ln \frac{a + |x - \theta|}{a - |x - \theta|}$.

Матричный аналог (38) неравенства Рао—Блекуэлла при подобном выборе функции потерь будет иметь место, как бы ни была распределена случайная матрица X , если только математические ожидания в (38) существуют.

Перейдем к неравенству, связанному с информационной матрицей Фишера. Пусть параметр Θ теперь представляет собой вещественную прямоугольную матрицу, а вещественная матрица X является его несмещенной оценкой. Введем (следуя работе А. Н. Лебедева, Ю. В. Линника и др. (1971)) информант L , представляющий собой прямоугольную матрицу размером $m \times n$ с общим элементом $l_{ij} = \frac{\partial}{\partial \theta_{ij}} \ln P$, где P — функция правдоподобия, отвечающая семейству $\{P_\Theta\}$, и матрицу $F(\Theta) = E(LL^T)$ (при $n=1$ матрица $F(\Theta)$ совпадает с информационной матрицей Фишера). Тогда при обычных условиях регулярности будет иметь место неравенство

$$E\{\Psi[(X - \Theta)(X - \Theta)^T]\} \leq \Psi[(2n - 1)F^{-1}(\Theta)], \quad (40)$$

если $\Psi(V)$ — матрично монотонная и одновременно матрично выпуклая на интервале, содержащем спектр матрицы $V = (X - \Theta)(X - \Theta)^T$ и включающем точку 0, функция эрмитова аргумента V (Лебедев, Линник и др., 1971). В частном случае $n=1$, $\Psi(V) = V$ из (40) получается известное неравенство, сравнивающее ковариационную матрицу оценки с информационной матрицей Фишера. Аналогично предложению 1, можно доказать следующее предложение.

Предложение 2. Для справедливости неравенства (40) необходимо и достаточно, чтобы $\Psi(V)$ была матрично выпуклой с квадратом на $\{J_{-b, -a} \cup J_{a, b}\}$ функцией эрмитова аргумента V , где $J_{a, b}$ — интервал, содержащий сингулярные числа матрицы $X - \Theta$.

Пример 3. В качестве $\psi(v)$, индуцирующей $\Psi(V)$ в (40), можно взять, как в предыдущем примере, $\psi(v) = v$ — при любом распределении X , $\psi(v) = \frac{v}{1 - v/a^2}$ или $\psi(v) = |v| \ln \frac{a + |v|}{a - |v|}$, если сингулярные числа X принадлежат $[0, a]$.

§ 6. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СПРАВЕДЛИВОСТИ НЕРАВЕНСТВ (28), (38) и (40) ДЛЯ СЛУЧАЯ ВЕКТОРА-СТОЛБЦА X

Неравенство (28) полезно как само по себе, так и потому, что из него следуют матричный аналог неравенства Рао—Блекуэлла (38) и неравенство, содержащее информант (40). В приложениях неравенства (28), (38) и (40) особенно часто нужны в том частном случае, рассматриваемом в настоящем разделе, когда X — вектор-столбец с m компонентами.

Как мы видели в § 5, для справедливости (28) и вытекающих из него неравенств (38) и (40) необходимо и достаточно, чтобы матричная функция была выпуклой с квадратом функцией эрмитова аргумента. Однако класс

таких матричных функций весьма узок и не содержит, например, важной для приложений функции $\Psi(V) = V^\mu$ ($\mu \neq 0, 1$).

До настоящего параграфа мы считали неравенство справедливым, если оно выполнялось при любом распределении случайной матрицы (ограничиваясь лишь требованиями существования математических ожиданий и принадлежности сингулярных — либо характеристических — чисел некоторому интервалу).

Предполагая теперь X вектором-столбцом, значительно расширим достаточные условия, при которых будут выполняться неравенства (28), (38) и (40), ценой введения специальных предположений о распределении X .

Теорема 4. Для справедливости (28) достаточно, чтобы дважды дифференцируемая $\psi(x)$ была монотонна и выпукла в обычном смысле для $x > 0$, чтобы $\psi(0) = 0$ и чтобы условные математические ожидания компонент X при фиксированной норме вектора X были одинаковы, т. е. чтобы

$$E\left(x_i \left/ \sum_{k=1}^m x_k x_k = h \right.\right) \text{ не зависели от } i.$$

Пример 4. В качестве случайного вектора X в (28) можно взять любой случайный вектор с симметрически зависимыми компонентами, для которого существуют указанные в (28) математические ожидания. Если $\psi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4, то неравенство (28) выполняется.

Доказательство теоремы 4. Матрица XX^* в качестве эрмитовой имеет однократные элементарные делители, поэтому для функции этой матрицы справедливо спектральное представление (см. с. 203) $\Psi(XX^*) = \sum_{i=1}^m P_i(XX^*) \psi[\lambda_i(XX^*)]$, где λ_i — i -е характеристическое число, P_i — соответствующая этому λ_i матрица проектирования для XX^* .

Учитывая, что $\lambda_1(XX^*) = X^*X$, $\lambda_2(XX^*) = \lambda_3(XX^*) = \dots = \lambda_m(XX^*) = 0$ и что $\psi(0) = 0$, неравенство (28) можно заменить на эквивалентное

$$E\left[\frac{\psi(X^*X)}{X^*X}(XX^*)\right] \leq \frac{\psi(EX^*EX)}{EX^*EX}(EXEX^*). \quad (41)$$

Левую часть (41) запишем в виде

$$E\left\{E\left[\frac{\psi(X^*X)}{X^*X}(XX^*)/X^*X = h\right]\right\}$$

и используем вспомогательное неравенство

$$E\left[\frac{\psi(X^*X)}{X^*X}(XX^*)/X^*X = h\right] \leq \frac{\psi[E(X^*/X^*X = h)E(X/X^*X = h)]}{E(X^*/X^*X = h)E(X/X^*X = h)}. \quad (42)$$

Чтобы убедиться в справедливости (42), отметим, что для дважды дифференцируемой $\psi(x)$ выпуклость вместе с условием $\psi(0) = 0$ влекут монотонное возрастание функции $r(x) = \frac{\psi(x)}{x}$ при $x > 0$ (формула Тейлора). Учитывая очевидные соотношения $E(X^*/X^*X = h)E(X/X^*X = h) \leq E(X^*X/X^*X = h)$, $E(X/X^*X = h)E(X^*/X^*X = h) \Rightarrow E(XX^*/X^*X = h)$, правую часть (42) заменим на $\frac{\psi[E(X^*X/X^*X = h)]}{E(X^*X/X^*X = h)} [E(XX^*/X^*X = h)]$, после чего она будет совпадать с левой.

Таким образом, (42) имеет место.

Используя теперь (42), заменим левую часть (41) на

$$E\left\{\frac{\psi[E(X^*/X^*X = h)E(X/X^*X = h)]}{E(X^*/X^*X = h)E(X/X^*X = h)} [E(X/X^*X = h)E(X^*/X^*X = h)]\right\}.$$

Это выражение, в силу предположенного свойства условных математических ожиданий, совпадает с $\frac{E}{m} E \{ \psi [E(X^*/X^*X = h) E(X/X^*X = h)] \}$, где E — матрица размером $m \times m$, все элементы которой — единицы. Заметим далее, что предположение теоремы об условных математических ожиданиях влечет также равенства $E x_i = E x_j$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m$). Учитывая равенство математических ожиданий, в правой части (41) получим $(E/m) \psi(E X^*/E X)$; в силу выпуклости $\psi(x)$ будем иметь

$$E \{ \psi [E(X^*/X^*X = h) E(X/X^*X = h)] \} \geq \psi \{ E [E(X^*/X^*X = h) E(X/X^*X = h)] \},$$

а в силу неравенства $E[R^*(h)R(h)] \geq ER^*(h)ER(h)$ и монотонного возрастания $\psi(x)$ получим

$$\psi \{ E [E(X^*/X^*X = h) E(X/X^*X = h)] \} \geq \psi(E X^* E X),$$

что доказывает (41) и вместе с ним неравенство (28).

Если x — случайный вектор-столбец с m вещественными компонентами, несмещенно оценивающий вектор-столбец θ с m компонентами, то неравенство (40) из § 5 в этом частном случае принимает вид:

$$E \Psi [(x - \theta)(x - \theta)^T] \leq \Psi [F^{-1}(\theta)], \quad (43)$$

где $F(\theta)$ — информационная матрица Фишера.

Теорема 5. Пусть $x - \theta = y_0$ представляет вектор-столбец с совместной плотностью вероятности компонент $f_0(y_1, \dots, y_m)$, которая является четной функцией своих аргументов (при каждом допустимом значении θ); пусть условные математические ожидания $E \left(y_i^2 / \sum_{k=1}^m y_k^2 = h \right)$ не зависят от i . Тогда для справедливости неравенства (43) достаточно, чтобы непрерывно дифференцируемая функция $r(x) = \frac{\psi(x)}{x}$ была монотонна и выпукла для $x > 0$ и чтобы $\psi(0) = 0$.

Пример 5. Неравенство (43) выполняется для нормального вектора x , компоненты которого независимы, имеют одинаковую дисперсию и вектор математических ожиданий θ , если взять, например, $\psi(x) = x^\mu$ с $\mu \geq 2$.

Доказательство теоремы 5. Рассмотрим следующий аналог неотрицательной коррелированности случайных величин. Пусть x — случайная величина, X — случайная матрица, пусть определено совместное распределение X и x . Будем считать, что x и X неотрицательно коррелированы, если $E x X \geq E x E X$.

Пусть, далее, $E(X/x = h)$ представляет матрицу, элементы которой — функции от h , имеющие непрерывную производную. Можно доказать следующее утверждение: если $r(x)$ — непрерывная монотонная не убывающая функция и $E(X/x = h)$ — монотонно не убывающая по h матрица (это означает, что из неравенства $h_1 \geq h_2$ следует $E(X/x = h_1) \leq E(X/x = h_2)$), то X и $r(x)$ неотрицательно коррелированы.

Возвращаясь к неравенству (43), запишем его левую часть в виде $E \left[\frac{\psi(y^T y)}{y^T y} (y y^T) \right]$. Поскольку $r(y^T y) = \frac{\psi(y^T y)}{y^T y}$ — монотонно возрастающая функция аргумента $y^T y$, а $E(y y^T / y^T y = h) = \begin{pmatrix} h/m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h/m \end{pmatrix}$ — монотонно возрастающая по h матрица, то

$$E \left[\frac{\psi(y^T y)}{y^T y} (y y^T) \right] \leq E \frac{\psi(y^T y)}{y^T y} E (y y^T). \quad (44)$$

Используя выпуклость $\frac{\psi(x)}{x}$, заменим правую часть (44) на

$$\frac{\psi [E(y^T y)]}{E(y^T y)} E (y y^T). \quad (45)$$

Применим далее известное неравенство $E\mathbf{y}\mathbf{y}^T \geq F^{-1}(\theta)$ и следствие из него $E(\mathbf{y}^T\mathbf{y}) \geq \lambda_{\max}[F^{-1}(\theta)]$, где λ_{\max} — максимальное характеристическое число и перейдем от (45) к

$$\frac{\psi[\lambda_{\max}[F^{-1}(\theta)]]}{\lambda_{\max}[F^{-1}(\theta)]} F^{-1}(\theta).$$

Остается показать, что

$$\frac{\psi[\lambda_{\max}[F^{-1}(\theta)]]}{\lambda_{\max}[F^{-1}(\theta)]} F^{-1}(\theta) \leq \Psi[F^{-1}(\theta)]. \quad (46)$$

Симметрическая вещественная матрица $\Psi[(F^{-1}(\theta))]$ имеет представление $\Gamma_0 \Psi(\Lambda_0^{-1}) \Gamma_0^T$, где Γ_0 — ортогональная матрица, Λ_0 — диагональная, ненулевые элементы которой — характеристические числа $F^{-1}(\theta)$. Умножая обе части (46) слева на Γ_0^T , а справа на Γ_0 , получим равносильное неравенство с диагональными матрицами

$$\frac{\psi[\lambda_{\max}[F^{-1}(\theta)]]}{\lambda_{\max}[F^{-1}(\theta)]} \Lambda_0^{-1} \leq \Psi(\Lambda_0^{-1}),$$

откуда

$$\frac{\psi[\lambda_{\max}[F^{-1}(\theta)]]}{\lambda_{\max}[F^{-1}(\theta)]} \lambda_i[F^{-1}(\theta)] \geq \psi[\lambda_i[F^{-1}(\theta)]].$$

Последнее неравенство справедливо в силу предположенной монотонности $r(x) = \frac{\psi(x)}{x}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Неравенства, основанные на монотонных, выпуклых и вогнутых с квадратом матричных функциях, могут быть полезны при работе со случайными матрицами, например в теории оценивания параметров, в ковариационном анализе и при рассмотрении случайных линейных систем; эти неравенства находят применение также в теоретической физике (Wigner, 1949, 1951).

Мы видели, что многие неравенства из области теории вероятностей и математической статистики имеют непосредственные аналоги для матриц, если заменить линейное упорядочение среди чисел частичным упорядочением по положительной определенности среди матриц (разумеется, с ограничениями, сужающими области справедливости соответствующих неравенств).

Это, по-видимому, означает, что при изучении случайных матриц (по крайней мере эрмитовых положительно определенных случайных матриц) имеет определенные преимущества точка зрения, рассматривающая матрицу не как n^2 -мерную (в случае симметрии $\frac{n(n+1)}{2}$ -мерную) случайную величину, а как случайный элемент частично упорядоченной алгебраической структуры. Так, в работе, продолжающей настоящую, автор надеется показать, как рассмотрение неравенств «по положительной определенности» позволяет найти асимптотическое распределение наи-

большого и наименьшего собственных чисел «средней» матрицы $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ при довольно широких условиях.

С другой стороны, классические неравенства математического анализа, такие как неравенства Минковского, Гельдера, Коши—Шварца (последнее неравенство, сформулированное для матриц, не представляет частного случая неравенства Гельдера), не допускают матричных аналогов в принятом нами смысле. Единственным известным автору неравенством из области геометрии чисел, обладающим матричным аналогом изучае-

мого типа, является неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

ЛИТЕРАТУРА

- Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М., «Мир», 1965, 276 с.
Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., «Наука», 1969, 367 с.
Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967, 575 с.
Далецкий Ю. Л. Дифференцирование функций, зависящих от параметра. — Изв. вузов, математика, 1962, 2 (27), с. 52—64.
Лебедев А. Н., Линник Ю. В. и др. Монотонные выпуклые матричные функции потерь в статистике. — Тр. МИАН, 1971, т. СХII, с. 291—299.
Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. М., «Наука», 1968, 547 с.
Уилкс С. Математическая статистика. М., «Наука», 1967, 632 с.
Шварц Л. Анализ. Т. I. М., «Мир», 1972, 824 с.
Bendat J., Sherman S. Monotone and convex operator functions. — Trans. Amer. Math. Soc., 1955, v. 79, No. 1, p. 58—71.
Krauss F. Über konvexe Matrixfunktionen. — Math. Z., 1936, v. 41, S. 18—42.
Löwner K. Über monotone Matrixfunktionen. — Math. Z., 1934, v. 38, S. 177—216.
Rinehart R. F. The equivalence of definitions of a matrix function. — Amer. Math. Monthly, 1955, v. 62, p. 395—414.
Wigner E. P. Nuclear reactions and level widths. — Amer. J. Phys., 1949, v. 17, p. 99—109.
Wigner E. P. On a class of analytic functions from the quantum theory of collisions. — Ann. Math., 1951, v. 53, p. 36—67.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

- Акима Х. 152
 Арцимович Л. А. 7
 Бартлет Н. Р. 187
 Бендат Ю. 200, 203—205, 207
 Березкина Л. И. 64
 Бернулли Д. 116
 Бирбоуер Дж. 74, 77
 Блинчик Т. М. 167
 Боголюбов Н. Н. 7
 Бонхам—Картер Г. 72
 Буллион Т. 179
 Бур К. 151, 152
 Ватсон Г. С. 91, 95, 98
 Вернадский В. И. 6
 Виноградов И. М. 7
 Вистелиус А. Б. 6—8, 11, 25, 27, 51, 53,
 54, 56, 64, 70, 89, 91, 201
 Воронова М. А. 55
 Гингерич П. 75
 Гнанадесиган Р. 163
 Грайбилл Ф. 136
 Гревиль 151
 Грейсон С. 114, 116
 Далецкий Ю. Л. 200
 Даррош Дж. 183—185
 Дафф П. 70, 74
 Де Вийс 125, 126, 128, 129, 131
 Делесс А. 90, 187
 Делфинея П. 98
 Дехоф 197
 Децелл Х. 179
 Джейкаман Т. 198
 Джеймс И. 184
 Джером Дж. 151
 Джонсон К. 137, 144, 146, 149
 Джофсон Н. 191
 Добрецов Н. Л. 167
 Дэви П. 188, 189, 191, 198
 Иванов А. А. 55
 Иванов Д. Н. 40
 Йореског К. 163
 Кан Дж. 191, 192, 195—197
 Келль Н. Г. 7
 Кендалл М. 90, 91
 Кёллинг М. 150—152, 160
 Клован Дж. 163
 Козаков И. К. 46
 Колмогоров А. Н. 6, 7
 Копнин В. И. 55
 Коржинский Д. С. 169
 Краева А. Г. 167
 Крамбайн У. 90, 91, 94, 136, 181, 182
 Краусс Ф. 200, 203
 Криге Д. 124
 Кузнецов Ю. И. 167
 Кук А. 137, 148
 Лебедев А. Н. 201, 216—218
 Лебедев Б. А. 64
 Лёвнер К. 200, 203, 207
 Линник Ю. В. 201, 216—218
 Лоусон К. 151, 152, 157, 160
 Майлз Р. 91, 188, 189, 191, 197, 198
 Мальмгрен Б. А. 165
 Матерон Г. 91, 95—97, 124, 126
 Мейер К. 179, 180
 Мерриам Д. 136
 Миггил Р. 114
 Миллер Р. 149
 Митра С. 179
 Митрофанов Ф. П. 46
 Моран П. 91, 191
 Моргенштерн О. 116
 Нейман Дж. 116
 Николсон У. 91
 Ньюендорп П. 116
 Оделл П. 179
 Пакхам Г. 95, 98
 Пелто К. 92
 Петтиджон Ф. 94
 Радбил Дж. 151
 Райнс Ф. 197
 Рао С. 179
 Рассел А. 191
 Ратклиф Д. 183—185
 Регатт Х. 134, 137
 Реймент Р. 163
 Рендю Дж. 126
 Рид У. 91
 Робинсон А. 198
 Розенфельд Дж. 98
 Росс 124
 Саксена С. 166
 Салех Е. 98
 Сарманов О. В. 6
 Саха Б. 91, 94
 Сипел 124
 Скрейнемакерс Ф. 168
 Соломяк М. Э. 201
 Стасюкевич Т. В. 65

Таллис Г. 91, 94
Талмуд Г. А. 86
Третгин Х. П. 98

Уикселл С. 90, 91
Уилк М. 163
Уилкс С. 217
Уилсон Р. Г. 148
Уиттен Е. Х. Т. 150—152
Ундервуд Е. Е. 90
Уолстром Дж. Е. 100
Уолтон Е. 70, 71

Фаас А. В. 27, 56
Фаббри А. Г. 98
Фикс Дж. 151, 152
Фишер Г. 25
Фридман Г. 98

Харбо Дж. 72, 136
Хасофер А. М. 191
Хессинг 152
Хиллард Дж. 191, 192, 195—197
Холл А. 71
Хотеллинг Х. 163
Хэнсон Р. 151, 152

Чейз Ф. 92, 187, 191, 193

Шварцахер В. 8
Шерман С. 200, 203—205
Штайнер А. 185
Шуберт Б. А. 11
Шбельс О. 137

Элиас Х. 90
Эскола П. 25

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоковариация 125
 Автокорреляция 125, 137
 Алгоритм Магу 174, 175, 177—
 Альтернатива 11, 14, 17, 23, 31, 44, 51,
 58
 Альтернативные действия 114
 Анализ компонентный 163
 Анализы модальные 91
 Аппроксимация крамбайновская 90, 94
 Асимметрия 100
- Бином** 105
 Блуждание 81
 — диффузионное 84
- Вариограмма** 125, 128, 129, 131
Вектор 157, 158
 — безусловных вероятностей 22
 — коэффициентов сноса 85
 — стационарный 179, 181
 Векторное пространство 168
 Векторы собственные 163—166
 Величины случайные 183
 Вероятность 27, 121, 122, 124
 — априорная 11
 — условная 82
 Взвешенное среднее скользящее 124, 162
 Выбор систематический 191
 — случайный 191
 Выгодность 116
- Гамма-функция** 93
 Геология аналитическая 6
 — математическая 6, 8, 187
 Геометрия комбинаторная 167
 Гиперповерхность 168
 Гипотеза 27
 Гранит вырожденный идеальный 27, 33,
 34, 37, 43
 — идеальный 9, 11, 19, 21, 22, 24, 25,
 29, 34, 37, 41, 42, 51
 Граница 75
 Граф 168, 169, 172—174, 176, 177
- Делитель элементарный 219
 Диаграмма Куширо 41
 Динамика среды 63
 Дисперсия 91, 95, 100, 102—105, 108,
 125, 129, 131, 132, 163, 164, 191—194,
 196
 — остаточная 185
 Дифференциация фазовая 7
 Диффузия 22
 Длительность блуждания 85
 Дополнение алгебраическое 108
- Зависимость полная 184
 Значение сингулярное 164, 199
 — среднее 100
 Значения собственные 163, 199
- Интеграл Лебега—Стилтьеса** 209
 Интервал доверительный 11, 18, 19
 Интерполяция линейная 23
 Информация геологическая 118, 119
 — коммерческая 118, 119
 Источник вещества 80
- Клетка** 154, 213
 Ковариация 128
 Компонента главная 163
 Компоненты 148, 167
 — виртуальные 167
 Корреляция 111, 126, 127, 129, 138, 142,
 146, 183, 185, 195
 — ложная 7
 Коэффициент восстановления 101
 — корреляции 100, 101, 105, 108, 110,
 137, 144, 183—187
 — частичный 187
 — распределения 166
 Крайгинг 125, 128, 129, 131—133
 Кривизна 197
- Лемма** 32
- Максимум локальный** 87, 89
Матрица 27, 33, 57, 158, 159, 169, 177,
 221
 — групповая обобщенная обратная 179
 — диагональная 11, 164, 199, 205, 213
 — инцидентности 177, 178
 — ковариационная 128, 163, 164, 201
 — комплексная 205, 217
 — коэффициентов диффузии 85
 — марковская 179
 — неособенная 179
 — неогрицательная определенная 202
 — обратная 179
 — ортогональная 199, 221
 — особенная 179
 — остатков 163
 — переходных вероятностей 11, 19, 42,
 66, 70, 72, 74
 — частот 56, 61
 — прямоугольная 179, 199, 201, 212, 213
 — регулярная переходная 179
 — факторных характеристик 163
 — Фишера информационная 200, 218
 — *C* 11, 51
 — эргодическая переходная 179, 180
 — эрмитова 200, 204, 208, 209, 210, 217

- Матрицы обобщенные обратные Мура—
 Пенроза 179
 — случайные 201
 Мера вещества 80
 — случайная 81
 — тренда 81, 83
 Метод минимума χ^2 11
 — наименьших квадратов 151
 Методы картирования гранитных мас-
 сивов 7
 — параметрические 95
 — эвристические 134
 Множество счетное 84
 Модели геостатистические 124, 125
 Моделирование стохастическое 25, 27
 Модель идеального гранита 19, 27—29,
 51
 — концептуальная стохастическая 6
 — метасоматоза 23
 — стохастическая 53, 55, 56, 62
 Момент 92, 95, 96, 98
 — отрыва 80
 — третий 102
 Моменты вторые 81

 Независимость стохастическая 82
 Неравенства информационные 200, 209
 — матричные 7
 Неравенство 11, 31
 — моментов 200, 207
 — Рао—Блекуэлла 200
 — Чебышева 200, 207, 209
 Нерв триангуляции 173
 Норма эвклидова 211

 Обратимость 66
 — последовательности 11
 Однородность 41, 58, 61
 — последовательности 11
 Ожидание математическое 81, 82, 85,
 93, 183, 191, 201, 206, 208, 211, 212,
 214, 217—220
 — условное математическое 81, 201
 Оператор самосопряженный 205, 206
 Определенность положительная 205
 Определитель 168, 169, 171
 Ортонормированность 164
 Отношение объемное 188
 Оценка несмещенная 91, 187, 189, 191,
 197
 Оценочные процедуры 188
 — цепи 189
 Ошибка 104, 105, 151, 161, 166
 — абсолютная 102
 — систематическая 100, 103, 104
 Ошибки случайные 102, 104, 105

 Парагенетические диаграммы 167
 Параметр 100, 102
 Переход частный марковский 69
 — через один минерал, марковский 43
 Переходы через минералы 51
 Плоскость слоистости 63, 66, 68, 69
 — случайная 91
 Плотность вероятности 98
 — меры тренда 83
 — распределения вероятностей 106
 Площадь сечения 188
 Поверхность бикубическая 150
 — тренда 119, 128, 130, 136—140, 142—
 144, 147, 148, 151, 161
 Подпоследовательность 42, 57, 58

 Поле метасоматическое 22, 24
 — сфер 90
 Полином 136, 152—156
 — Лагранжа—Сильвестра 203
 Полиэдр 171
 Порядок марковости высокий 51
 Последовательность бернуллиевская 11,
 27, 29, 33, 34, 63, 66
 — немарковская 31, 33
 Преобразование Лапласа 85
 Принятие решения 115, 116
 Прогноз статистический 116
 Произведение булево 175, 178
 — декартово 172
 — Шура 202
 Производная 152—160
 — обобщенная 86, 87
 Пространство 133, 167
 — банахово 209
 — гильбертово 205
 — проективное 168
 — фазовое 81
 Процесс случайный 81
 — точечный 82
 Пучек 176

 Равновесие 168
 Размер средний 90
 Разрыв коэффициентов диффузии 87
 — — сноса 86
 Распределение биномиальное 193
 — выборочное 98
 — дискретное 101
 — логнормальное 125
 — многомерное нормальное 108
 — нормальное 100
 — трехпараметрическое логнормаль-
 ное 125
 — частот 125
 Регрессия 128, 183, 185
 Резервуар 99, 101, 103
 Ряд Тейлора 215

 Свойство марковское 12, 39, 40, 66, 70
 — пуассоновское 82
 Связка 175
 Сглаживание 127, 131, 133, 136, 137
 Сетка ортогональная 150, 158
 Сечение 93
 — линейное 188
 Симплекс 168
 Система замкнутая 38
 — пересечений 170
 — решающая 114
 Слой смежные 57
 Слой 55, 56, 80, 103, 105
 Согласованность 57
 Состояние 72, 191
 Спектр 202
 Сплайн-поверхность 150, 151, 153—156,
 158—162
 Способ опробования 96
 Среднее гармоническое 94
 Статистика 73, 98, 139, 140
 — достаточная 217
 Степени свободы 18
 Стереология 90, 187, 198
 Стратегия 188, 195, 197
 — фиксированная выборочная 194
 — эффективной цепи 194
 Структура метасоматического поля 9

- последовательностей, стохастическая 51
- Суммы ограниченные 183
- Схема метасоматической зональности 11
- чужеродного зерна 51
- чужеродных вростков 27
- Теорема 32
- Теорема Гейла 168, 171
- Теория опробования 100
 - укрупнения 7
- Тест 68, 72, 131
- Тесты статистические 6, 27, 126
- Точность 198
- Траектория блуждания 85
- Тренд 126, 131, 134, 136, 137, 140—150, 152
- Тренд-анализ 134, 137, 140, 148
 - частный 134, 136, 137
- Треугольник 152
- Триангуляция 171—173
- Узел сети 101
- Упаковка плотнейшая 63
- Упорядочивание многомерное 199
- Уравнение дифференциальное 86
 - интегрально-дифференциальное 85
 - матричное 179
- Уровень значимости 18, 140
- Фазы 167
- Фильтрация 150
 - ошибок 100, 104
- Форма квадратичная 108, 199
- Функции матричные 200, 205
 - — монотонные 200, 207
- Функционал 96
- Функция выпуклая матричная 202, 206, 207, 209, 213, 218
 - дробно-рациональная 214
 - измеримая 81
 - кусочно-непрерывная 155, 156
 - моментов, производящая 107
 - потерь 201, 217
 - распределения 92
 - тренда 83
 - характеристическая 81
- Хорда 98
- Цепи марковские 7
- Цепь Маркова простая 11, 21, 28, 29, 33, 46, 51, 63, 66
 - второго порядка 11, 23, 31, 34, 38, 43, 44, 46, 79
- Цепь марковская 70, 72
- Цикл 55—57, 70
- Цикличность 70, 71
- Частоты весовые 94
 - количественные 94
- Числа характеристические 203
- Число сингулярное 216
 - состояний 72
- Элементы матрицы 11
- Эффект саморodka 126—128, 132
- F*-независимость 7

УКАЗАТЕЛЬ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ НАЗВАНИЙ

- Австралия 140, 146
 Актогайский район 9
 Англия 11, 39, 199
 Арга-Бинных-Хая, массив 11, 25, 38
 Баянкольский массив 50
 Бювар, массив 25
 Восточное Забайкалье 65
 Вуллонгонг 134
 Ганновер 99
 Дагестан 64, 66, 80
 Детройт 179
 Джаксы-Кайракты, р. 64
 Западно-Сибирская низменность 64
 Заполярная площадь 63
 Индиана, штат 181
 Индия 53
 Казахстан 64
 Канада 90
 Канберра 187
 Карабудахкент, сел. 64
 Кара-мая, горы 64
 Карменеллис, массив 11, 39
 Корнуолл, граф. 11, 22, 39
 Кумтор-Кала, сел. 64
 Кызылтас, массив 9, 11, 12, 14, 18, 21—
 23
 Ленинград 9, 25, 40, 46, 55, 62, 80, 201
 Мальсбург, массив 11
 Мельбурн 183
 Мичиган, штат 151
 Монголия 25
 Монтебрас, массив 25
 Мун, о-в 138
 Ниу, район 71
 Новосибирск 167
 Новый Южный Уэльс, штат 134
 Омсукчан, сел. 22, 45
 Оттава 90
 Приамурье 40
 Сангиленский массив 54
 Сиднейский бассейн 134
 Скандинавия 165
 Стенфорд 114
 Тува юго-восточная 46
 Упсала 163
 Уренгойская площадь 64
 Фукуй, район 70
 Хайдарабадский массив 53
 Хоромнугский массив 50
 Хунде 50
 Центральный Казахстан 9, 10
 Центральный Французский массив 25
 Чалбинский массив 40, 44
 Чукотка, п-ов 39
 Швеция 166
 Эванстон 150
 Эрзин, р. 50
 Южная Африка 124
 Якутия 25
 Япония 70

РЕФЕРАТЫ

УДК 552.321.1(574.3) : 519

О природных аналогах идеальных гранитов (на примере массива Кызылтас в Центральном Казахстане). Иванов Д. П. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 9—25.

Изучение неизмененного гранитного массива показывает, что аналоги идеальных гранитов существуют в природе, причем, как правило, они представлены породами, условия кристаллизации которых были близкими к принятым при построении модели. Существенным фактором, влияющим на отклонение от модели идеального гранита, является высокое содержание летучих компонентов в кристаллизующемся расплаве. Структура метасоматического поля нерудоносного гранитного массива, содержащего аналоги идеальных гранитов, отличается от структуры метасоматического поля массива, несущего оруденение. Библ. — 16 назв., рис. — 2, табл. — 2.

УДК 550.8 : 519

Белые граниты Арга-Ынних-Хая (Якутия) и механизм их образования. Романова М. А. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 25—40.

Анализ пород проводится путем сравнения модели идеального гранита и моделей его преобразования с данными наблюдений в шифах. Показывается первично магматическое происхождение белых гранитов массива Арга-Ынних-Хая (северо-восточная Якутия), выделяются зоны различной степени преобразования их метасоматическими процессами. Даются некоторые общие принципы построения вероятностных моделей формирования обычных гранитов и гранитов, насыщенных летучими компонентами. Библ. — 19 назв., рис. — 2, табл. — 8.

УДК 552.321.1(571.62) : 519

Материалы к стохастическому моделированию процессов формирования гранитоидов (Чалбинский массив, Приамурье). Высоккий Ю. А. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 40—46.

Даются марковские характеристики последовательностей зерен кварца, калиевого полевого шпата и плагиоклаза в гранодиоритах и гранитах Чалбинского массива. Среди исследованных образцов не встречено ни одного аналога идеального гранита. Ряд образцов показывает неоднородное строение последовательностей. Основная их масса имеет последовательности, неотличимые от марковских 2-го и более высокого порядков. Нанесенные на геологическую схему числовые характеристики образцов позволяют выявить в пределах изученной части массива региональные зоны проявления метасоматоза. На продолжении одной из зон находится участок с оловянной минерализацией. Библ. — 8 назв., рис. — 1, табл. — 4.

УДК 552.321.1 (571.52) : 519

Материалы к стохастическому моделированию процессов формирования гранитоидов в докембрии Сангиленского срединного массива (юго-восточная Тува). Казаков П. К., Подковыров В. Н. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 46—54.

Даются марковские характеристики последовательностей зерен в различных гранитоидах Сангиленского массива и их геологическое описание. Показывается, что для части образцов предположение о кристаллизации пород по схеме идеального гранита не противоречит наблюдениям; для образцов из лейкосом мигматитов и огнейсованных гранитов необходимо построение специальных стохастических моделей. Библ. — 8 назв., рис. — 2, табл. — 2.

УДК [553.632. (470.53) + 551.314] : 519

О механизме формирования сильвинитовых пластов Верхнекамского месторождения калийных солей. Мохнач М. Ф. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 55—62.

Изучен разрез сильвинитовых отложений в Верхнекамском калийном месторождении. Введена модель, позволяющая установить специфику чередования слоев в терминах марковской последовательности. Показано резкое различие в условиях накопления слоев солей — сильвинита, каменной соли и глинистых отложений. Работа дает предпосылки к созданию новой схемы седиментации в соленосных бассейнах. Библ. — 2 назв., табл. — 1.

УДК 552.143 : 519

О механизме фиксации зерен при формировании песчаных отложений. Демина М. Е. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 62—70.

На основе интуитивной вероятностной модели седиментации изучены матрицы переходных вероятностей массивных и микрополосчатых разностей полимиктовых песчаников. Полученные результаты

позволяют говорить об отличии свойств последовательностей песчаных зерен, исследованных в плоскости слоистости, от тех же свойств, изученных в направлении, перпендикулярном слоистости. Библиография. — 4 назв., табл. — 5.

УДК 551.305 : 519

Зависимые и независимые явления в чередовании слоев миоценовой формации Куними (Фукуй, Центральная Япония) — приложение анализа марковских цепей. Мицутаки С., Миура С. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 70—80.

Опытным путем в разрезе миоценовых отложений формации Куними (Центральная Япония) по данным описания разрезов найдены вероятности перехода от слоя данного фиксированного состава к слоям всех составов, встреченных в разрезе. Расчет статистики максимального правдоподобия для полученных марковских матриц показал, что исключение из разреза слоев пирокластических образований понижает значение соответствующей статистики, т. е. зависимость между составами слоев для разреза в целом снижается, если в осадочной толще накапливался вулканогенный материал. Библиография. — 19 назв., рис. — 5, табл. — 1.

УДК 550.84 : 519

Об одной математической модели накопления акцессорных минералов в осадочных отложениях. Харламов Б. П. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 80—89.

Рассматривается случайная мера в трехмерном пространстве, образованная в результате действия трех случайных факторов: 1) источник частиц вещества испускает их по закону случайного точечного процесса, 2) частицы блуждают в пространстве по закону диффузионного марковского процесса, 3) блуждающие частицы останавливаются в случайный момент времени и фиксируются в толще осадка на уровне, соответствующем моменту остановки. Исследуется математическое ожидание случайной меры. В терминах параметров точечного процесса и блуждания с остановкой приводятся формулы для плотностей меры математического ожидания. Рассматриваются примеры с разрывом коэффициентов уравнений диффузии. Библиография. — 6 назв., рис. — 4.

УДК 551 : 519

Оценки среднего размера объектов по измерениям в сечениях. Агтерберг Ф. П. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 90—99.

Рассматриваются методы оценки моментов распределений размеров сфер по измерениям кругов в шлифах. Предполагается, что сферы имеют центры, которые случайно распределены в трехмерном пространстве; сечения расположены случайно. Показано, что моменты распределения объемных размеров сфер могут быть легко оценены по моментам распределения размеров окружностей, измеренных в шлифах. Результаты оценок являются несмещенными, устойчивыми по отношению к ошибкам на левом хвосте распределения вычисленного размера. Библиография. — 30 назв., рис. — 2, табл. — 1.

УДК 550.8 : 518.9

Выделение ошибок из технических данных о резервуаре. Марсал Д. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 99—114.

Показывается, как для улучшения основных данных, необходимых для исследований с помощью моделирования, а также для оценки исходного углеводорода в залежи и его общих запасов, следует тщательно отфильтровывать всякого рода случайные и систематические ошибки, влияющие на истинные средние значения, дисперсии, асимметрии, коэффициенты корреляции и другие параметры, возникающие из-за неоднородности резервуара. Особое внимание уделяется тому, что подсчет запасов и другие свойства, являющиеся результатом нескольких факторов, приводят к систематической ошибке, достигающей 10 и более процентов, если используются средние значения этих факторов. Это происходит из-за корреляции между соответствующими свойствами породы. Все формулы удобны для применения, формулы фильтрации не ограничены специальными распределениями. В конце статьи дается вывод формул. Библиография. — 4 назв., рис. — 1.

УДК 550.8 002.63

Вероятностные решающие системы при разведке на нефть. Харбо Дж. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 114—124.

Оценивается выбор оптимальных решений при проведении разведочных работ на нефть. Приводятся примеры из опыта нефтяной промышленности США. Анализируется конструкция «стоимостной таблицы» и прилагаются вероятностные значения возможных выходов. Ожидаемое значение рассматривается как статистический прогноз, представляющий сумму благоприятных и неблагоприятных результатов. Подчеркивается, что наряду с традиционными методами могут быть использованы формализованные и аналитические методы, основанные на математических расчетах. Библиография. — 5 назв., рис. — 5, табл. — 3.

УДК 550.8 : 519

Обзор некоторых геостатистических моделей для оценки золотосодержащих руд в Южной Африке. Криге Д. Г. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 124—133.

Дается обзор геостатистических моделей, применяемых при оценке золотосодержащих руд Южной Африки. Подробно рассматриваются работы, опубликованные за последние 10 лет. Особое внимание уделяется моделям логнормального распределения частот, абсолютной дисперсии Де Вейса, линейной логарифмической зависимости (дисперсия—размер площади), логарифмической вариограммы Де Вейса, а также влиянию вариаций в моделях на геостатистические оценки запасов руд на разных участках рудника. Библиография. — 17 назв., рис. — 8, табл. — 2.

УДК 550.8 : 518.9

Частный тренд-анализ при изучении геологии угольных полей в Сиднейском бассейне (Новый Южный Уэльс). Кук А. С. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 134—150.

Изучение вариаций большого числа различных свойств как самих пластов угля, так и межпластовых отложений в пределах Сиднейского бассейна выполнено с применением тренд-анализа. Частный тренд-анализ позволил расчленить вариации наблюдаемых свойств на компоненты, имеющие

геологическое значение. Корреляция между свойствами более эффективна, если использовать компоненты, полученные из частного тренд-анализа. Установлены важные взаимоотношения между структурой, приведенной к уровню стратиграфических горизонтов, и многими другими свойствами отложений, включая мощности пластов. Вычисление тренда дает информацию, которая может быть использована при планировании рудника, при прогнозе запасов угля. Каноническая форма корреляции поверхности тренда может быть использована при изучении взаимоотношений характеристик на площади; она является полезной техникой, особенно в комбинации с частным тренд-анализом выборочных характеристик. Библ. — 17 назв., рис. — 10, табл. — 6.

УДК 550.8 : 519

О бикубических сплайн-поверхностях для неравномерно разнесенных данных наблюдений. Уиттен Е. Х. Т., Коллинг М. Е. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 150—162.

Рассматриваются методы расчета сплайн-поверхностей для анализа наблюдений, размещенных в узлах неравномерной сети опробования. Обсуждаются существующие программы для построения сплайн-поверхностей; приводятся алгоритмы для одного из возможных методов расчета сплайн-поверхности. Метод иллюстрируется на примере анализа наблюдений над залеганием известняков в центральной части штата Мичиган, США. Библ. — 17 назв., рис. — 8.

УДК 56.07 : 519

Интерпретация наименьшей главной компоненты. Реймент Р. А. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 163—167.

Показывается возможность использования для анализа собственного вектора, отвечающего наименьшему характеристическому числу. Предполагается, что этот вектор позволяет судить о существовании постоянной суммы у изучаемых случайных величин. Приводятся примеры из практики. Библ. — 7 назв., табл. — 2.

УДК 519.1 : 550.41 : 546.01

Общие методы и алгоритмы построения парагенетических диаграмм многокомпонентных систем, основанные на комбинаторной геометрии. Краева А. Г., Добрецов Н. Л., Блинчик Т. М., Кузнецов Ю. И. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 167—178.

Излагается новая методика построения парагенетических диаграмм, которая может быть использована при физико-химическом изучении магматических и метаморфических пород, а также при химических и технологических исследованиях, т. е. во всех случаях, когда исследователь имеет дело со сложной многокомпонентной системой. Библ. — 10 назв., рис. — 8, табл. — 3.

УДК 519.220

Вычисление стационарных векторов марковских матриц с использованием групповой обобщенной обратной. Баруча-Рид А. Т. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 179—182.

Мейером (Meuer, 1975) недавно рассмотрено значение групповой обобщенной обратной для матриц в теории конечных марковских цепей. В частности, им дан метод вычисления некоторых векторов и матриц, имеющих важное значение в теории конечных марковских цепей и их приложениях. В статье приводится вычислительный метод для результатов Мейера по получению стационарного вектора вероятностей марковской матрицы; дается пример из геологии. Библ. — 9 назв.

УДК 550.8 : 519

Регрессия и корреляция для величин с ограниченной суммой. Бартлетт Н. Р., Дарроч Дж. Н. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 183—187.

Рассматривается вопрос о смысле коэффициента корреляции и регрессии в тех случаях, когда изучается связь между неотрицательными случайными величинами, сумма значений которых не превышает некоторую постоянную. Библ. — 5 назв., рис. — 2.

УДК 551 : 519

Новейшие результаты в анализе объемного состава. Андерсен Р. С. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 187—199.

Исследуются современные аспекты оценки объемных долей многофазного объекта как предмета стереологии. Особое внимание уделяется вопросу получения несмещенных оценок в условиях, реализуемых на практике. Дается подробный анализ постановки вопроса. Библ. — 21 назв., табл. — 2.

УДК 550.8 : 519

Разложение по сингулярным значениям как объединяющая черта многих методов упорядочивания. Гоуер Дж. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 199, 200. Многомерное упорядочивание выводится из оптимизации отношения двух квадратичных форм. Рассматриваются мультипликативные модели (тезисы).

УДК 519.221

О двух классах матричных функций — выпуклых и выпуклых с квадратом — и о приложениях таких функций в теории вероятностей. Фаас А. В. — В кн.: Исследования по математической геологии. Л., «Наука», 1978, с. 200—220.

Рассматриваются матричные аналоги классических неравенств (главным образом из области теории вероятностей и математической статистики), получающиеся при замене линейного упорядочения ξ среди чисел на частичное упорядочение по положительной определенности ξ среди матриц. Такого рода неравенства оказываются полезными в различных прикладных и теоретических вопросах. В качестве аппарата для получения неравенств изучаются и используются классы монотонных, выпуклых и выпуклых с квадратом матричных функций. Библ. — 14 назв.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОЛОГИИ

Утверждено к печати
Ордена Ленина Математическим институтом
им. В. А. Стеклова АН СССР

Редактор издательства Семенова Е. А.
Художник Сысалов В. П.
Технический редактор Чешейко Л. Н.
Корректоры Добрянская С. В., Привалова Л. А.
и Семиглазова С. И.

ИБ № 8284

Сдано в набор 22.11.77. Подписано к печати 04.07.78.
М-08645. Формат $70 \times 108^{1/16}$. Бумага типографская
№ 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Печ. л.
 $14^{1/2} + 1$ вкл. ($1/4$ печ. л.) = 20,65 усл. печ. л. Уч.-изд.
л. 21.28. Тираж 1900. Изд. № 6645. Тип. зак. 38.
Цена 3 р. 40 к.

Ленинградское отделение издательства «Наука»
199164, Ленинград, В-164, Менделеевская линия, д. 1

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12

3 р. 40 к.

2485



«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ