



Б.А. НЕЛЕПО, И.Е. ТИМЧЕНКО

СИСТЕМНЫЕ
ПРИНЦИПЫ
АНАЛИЗА
НАБЛЮДЕНИЙ
В ОКЕАНЕ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

551.46

Б. А. НЕЛЕПО, И. Е. ТИМЧЕНКО

СИСТЕМНЫЕ
ПРИНЦИПЫ
АНАЛИЗА
НАБЛЮДЕНИЙ
В ОКЕАНЕ

2629

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 1978



Системные принципы анализа наблюдений в океане Нелепо Б. А., Тимченко И. Е. К., «Наук. думка», 1977. 222 с.

Монография посвящена системному подходу к проблеме прогнозирования явлений в океане путем автоматизации процессов сбора и обработки информации. На основе теории адаптивной фильтрации наблюдений в ней рассматриваются динамико-стохастические модели океанических процессов и полей и обосновываются принципы сочетания гидродинамических задач океанографии со статистическими методами анализа наблюдений. В качестве составных элементов системного подхода изучаются вопросы оптимальной интерполяции случайных полей и планирования измерений в океане.

Приведены примеры использования динамико-стохастических моделей для последовательного прогнозирования процессов и полей океана. Рассчитана на специалистов-геофизиков, работающих над проблемами моделирования и численного анализа физических процессов и полей.

Ил. 69. Табл. 5. Список лит.: с. 213—220 (193 назв.).

Ответственный редактор *Р. З. Сагдеев*

Рецензенты *А. С. Саркисян, Г. С. Дворянинов*

Редакция литературы о Земле

ВВЕДЕНИЕ

Прогноз и состояние океана как среды имеет важное научное и практическое значение для человечества. Накопленные океанологией знания свидетельствуют о сложной пространственно-временной изменчивости основных гидрофизических, гидрохимических, биологических полей океана. Вследствие бесконечного разнообразия причин, формирующих погоду в океане, наряду с уравнениями гидромеханики, описывающими главные черты динамики водных масс, применяются различные стохастические методы моделирования и фильтрации данных наблюдений. Проблемы, возникающие при сочетании детерминированных и вероятностных подходов к исследованию явлений в океане, практически еще не исследованы. Между тем в условиях автоматизации сбора и обработки океанологической информации такой способ исследования (условно именуемый нами системным подходом к анализу явления) должен оказаться наиболее эффективным. Применению системного подхода в задачах расчета и прогноза океанологических процессов и полей по данным наблюдений посвящена настоящая работа.

Из-за слабой изученности большинства из рассматриваемых вопросов в книге нет обзора океанологических работ по вероятностному моделированию и анализу полей океана. Сходные по постановке задачи объективного и четырехмерного анализов метеорологических полей изложены только в том объеме, который был признан необходимым с учетом их специфики. Отдельные результаты работы (например, возможные варианты океанологических информационных систем) следует расценивать лишь как постановку задачи для дальнейшего исследования.

Считаем своим приятным долгом выразить глубокую признательность академикам Л. М. Вреховских и А. М. Обухову, чл.-кор. АН СССР А. С. Монину за обсуждение отдельных разделов работы и ценные советы, способствовавшие улучшению ее содержания.

ЗАДАЧИ ФИЗИКИ ОКЕАНА
И СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ

§ 1. Прикладные аспекты океанологических исследований

Мировой океан, всегда игравший значительную роль в жизни человечества, стал в настоящее время сферой хозяйственной деятельности людей. Неизмеримо возросло прикладное значение океанологических исследований. В наши дни океан как объект исследований привлекает ученых не только из-за огромных пищевых и минеральных ресурсов, таящихся в его необъятных просторах, но и потому, что он непосредственно влияет на формирование погоды и климата на территориях большинства стран.

Именно поэтому из года в год увеличивается флот научно-исследовательских судов, выполняющих измерения температуры, солености, направлений и скорости морских течений, проводящих определение химического состава вод, прозрачности, преломления света, концентрации планктона и многих других характеристик океанской среды.

Получаемые в морских экспедициях данные наблюдений необходимы для решения основных проблем, стоящих перед океанологией. Главные проблемы современной океанологии:

Фундаментальные

Создание единых термогидродинамических моделей системы океан — атмосфера для различных пространственно-временных масштабов явлений

Создание моделей экосистем океана

Создание физико-химических моделей переноса и накопления веществ в океане

Прикладные

Прогноз ветрового волнения, краткосрочный прогноз погоды, прогноз условий океанской среды для нужд мореплавания и рыбного промысла, долгосрочный прогноз погоды, прогнозирование тропических ураганов

Прогноз биологической продуктивности отдельных районов и всего Мирового океана для использования его пищевых ресурсов

Обнаружение районов, представляющих интерес для промышленного извлечения минеральных ресурсов, контроль за загрязнением океана и разработка средств борьбы с загрязнениями

Исследование закономерностей пространственного распределения полезных ископаемых в дне Мирового океана, и в первую очередь в шельфовых зонах

Обнаружение районов, представляющих интерес для промышленной добычи полезных ископаемых из морского дна

Исследование тектонических явлений на акваториях Мирового океана

Прогноз землетрясений и волн цунами

Мы остановимся на прикладных проблемах физики океана. Главная заключается в создании термогидродинамических моделей, объединяющих океан и атмосферу над ним в единую систему, которые позволили бы описывать процессы, происходящие в океане и атмосфере, и прогнозировать их.

Трудность решения общей проблемы состоит в том, что система уравнений термогидродинамики океана и атмосферы не замкнута и имеет весьма сложный вид. Поэтому для различных масштабов явлений, изучаемых в океане и атмосфере, необходимы свои модели, отвечающие частным прикладным проблемам гидрофизики.

Область микромасштабов. Среди прикладных проблем, решение которых определяется главным образом процессами, происходящими в области микромасштабов, следует назвать краткосрочный прогноз погоды и прогноз ветрового волнения в море. Для построения физико-математических моделей мелкомасштабного взаимодействия океана и атмосферы, на которых могут быть основаны прогностические схемы, необходимы исследования пограничных слоев воды и воздуха, прилегающих к границе раздела между ними.

Именно в этих слоях создаются большие горизонтальные и вертикальные градиенты температуры, возникающие за счет поглощения солнечной радиации и испарения. Потоки тепла, направленные в океан из атмосферы или идущие в обратном направлении, создают в атмосфере сложную циркуляцию воздушных масс, образуют облака и таким образом формируют погоду в атмосфере. Одновременно весьма существенные изменения производят атмосферные процессы (и в первую очередь ветер) в верхнем слое океана.

Знание структуры пограничных слоев и физики взаимодействия океана и атмосферы в области малых масштабов явлений должно служить основой для понимания мезо- и макромасштабной циркуляции в атмосфере и океане. Разнообразие циркуляционных систем в воде и воздухе объясняется бесконечным множеством граничных условий, существующих между ними.

Значительную роль в движениях водных и воздушных масс играет турбулентность. Благодаря турбулентности происходит интенсивный обмен теплом, влагой и моментом количества движения через границу раздела между ними. Турбулентная диффузия обеспечивает перемешивание водных и воздушных масс, препятствует накоплению взвешенных частиц (и в том числе загрязнителей). Под влиянием турбулентных движений, возникающих за счет ветрового и волнового перемешиваний, происходит углубление верхнего квазиоднородного слоя океана

Тонкая структура (или тонкая стратификация) играет основную роль в генерации микротурбулентности в верхнем слое океана и определяет ее главные характеристики, перемежаемость во времени и пространственное распределение. Физика взаимодействия океана и атмосферы сложна и еще относительно мало изучена. Для дальнейшего совершенствования научных представлений о мелкомасштабных явлениях в океане необходимы комплексные измерения, выполняемые с научно-исследовательских судов или специальных станций в океане.

Область мезомасштабов. К мезомасштабным явлениям в океане в первую очередь относят квазигеострофические вихри, подъемы и опускания глубинных вод и фронтальные разделы в океане. С областью мезомасштабов связаны прикладные проблемы краткосрочного прогноза погоды и предсказания условий океанической среды для практического использования в навигации, рыболовном промысле и других отраслях народного хозяйства.

Центральное место в исследованиях мезомасштабных динамических процессов в океане занимает проблема вихревых возмущений поля скорости. Начало интенсивным исследованиям в этом направлении было положено в 1970 г., когда на советском гидрофизическом полигоне в Центральной Атлантике была открыта новая закономерность движений водных масс в океане — существование больших циклонических и антициклонических вихрей с параметрами, лежащими в диапазоне синоптической изменчивости океана [16]. Горизонтальные размеры вихрей составляют сотни километров. Вихри перемещаются со скоростью нескольких километров в сутки, двигаясь преимущественно на запад.

Синоптические вихревые движения водных масс проникают в глубину океана на несколько километров. Энергия, сосредоточенная в подобных образованиях, сравнима по величине с энергией крупных океанических течений. Существование синоптических вихрей было обнаружено также американскими учеными в районе Саргасова моря в 1973 г. во время специальной экспедиции МОДЕ-1 [138].

Развитие теоретических исследований динамики океана в области мезомасштабов, а также накопленные экспериментальные данные позволили в последние годы построить ряд динамических моделей, объясняющих природу синоптических вихрей, механизм их энергоснабжения, взаимодействия со средними течениями, исследовать вихреобразные ответвления Гольфстрима (ринги).

Понимание механизма синоптического вихреобразования является главной проблемой нестационарной теории океанических течений. Ее решение позволит построить теоретические модели для прогнозирования условий океанской среды.

На основании теоретических исследований высказано предположение о том, что в океане существует своеобразное вихревое поле, образованное многими вихрями. Была высказана гипотеза о волновой природе вихревых образований, причем среди последних можно выделить быстрые (c периодом волн около трех месяцев)

и медленные (с периодом: волн около года) вихри [91]. В частности, динамика вихря, зарегистрированного на Советском Атлантическом полигоне, оказалась близкой к динамике бароклинных планетарных волн Россби [44].

Схематически вихревые образования океана изображены на рис. 1. В Атлантическом океане наиболее вероятными районами ин-

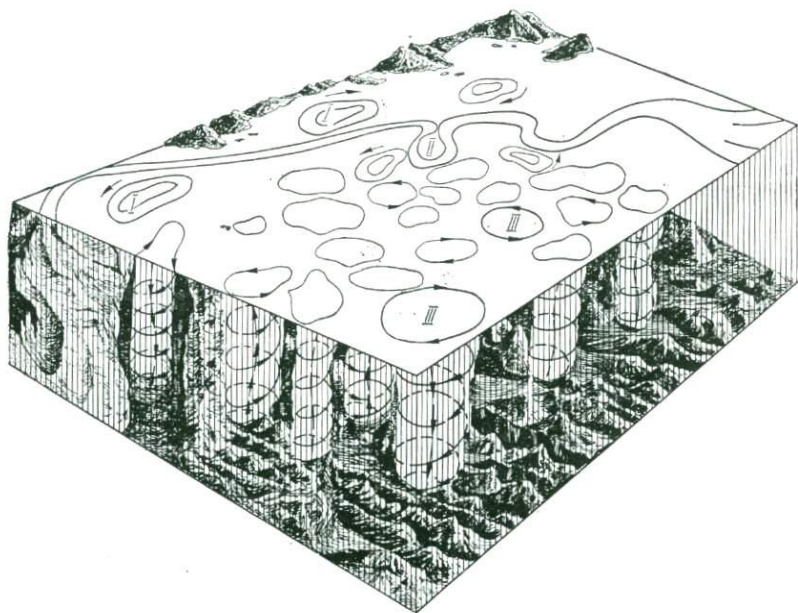


Рис. 1. Мезомасштабные динамические процессы в океане в районе Гольфстрима: I — ринги Гольфстрима, II — меандры, III — синоптические вихри.

тенсивных вихревых движений являются области, прилегающие к Гольфстриму. Однако даже на значительном удалении от Гольфстрима существуют крупные вихри открытого океана.

Помимо уточнения современных представлений о динамике океана исследования океанических вихрей имеют прикладное значение для рыболовного промысла в открытом океане. Синоптические вихри, существующие во времени около двух лет, способны поддерживать мощные подъемы водных масс, а следовательно, обеспечивать вынос питательных веществ из глубин океана к его поверхности. В этих условиях в открытом океане могут существовать районы, перспективные для рыболовства.

В силу отмеченных особенностей необходимы комплексные экспериментальные и теоретические исследования синоптических вихрей. Этим целям посвящена совместная советско-американская программа исследований «ПолиМОДЕ», являющаяся продолжением советской программы «Полигон-70» и американской «МОДЕ-1» [138]. Районы работ, выполняемых по программе «ПолиМОДЕ»,

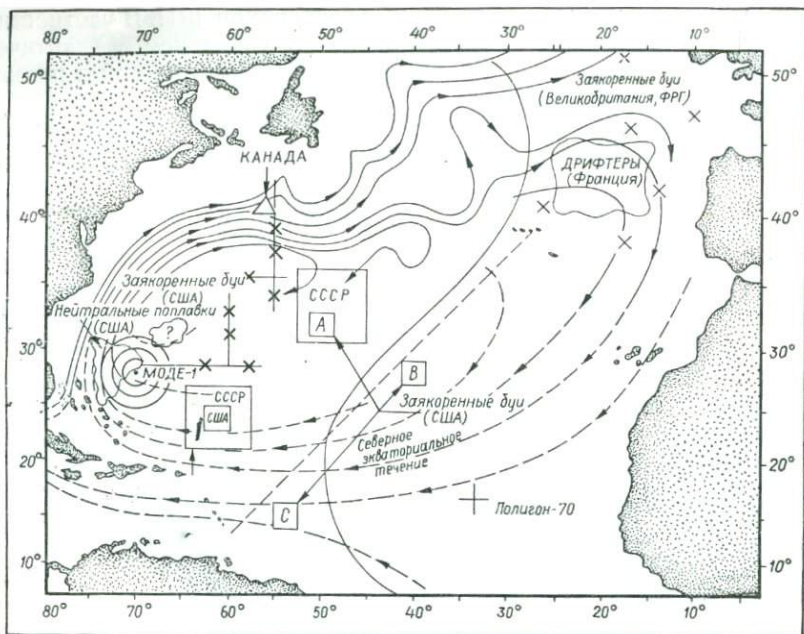


Рис. 2. Проект совместных советско-американских исследований в Атлантическом океане «ПолиМОДЕ».

приведены на рис. 2. Гидрологическими исследованиями в рамках этой программы в 1976 г. на НИС «Академик Вернадский» подтверждено существование синоптических вихревых движений водных масс в этом районе.

Область макромасштабов. Центральное место в океанологических исследованиях занимают проблемы крупномасштабного взаимодействия океана и атмосферы. Важнейшее прикладное значение имеет задача повышения точности долгосрочных прогнозов погоды за счет получения более точных начальных данных с огромных акваторий Мирового океана.

Приближенный характер уравнений динамики атмосферы, используемых для прогноза погоды, не позволяет осуществлять прогноз более чем на две недели с необходимой для практики точностью. Поэтому дальнейшее совершенствование прогнозов должно идти по пути повышения качества начальных данных.

Основное значение для прогноза погоды приобретает поле поверхностной температуры океана. Для построения оперативных карт температуры поверхности океана должна привлекаться информация с научно-исследовательских судов, кораблей погоды и метеорологических искусственных спутников Земли.

Необходимы специальные исследования процессов зарождения и развития тропических ураганов. Это позволит организовать службу заблаговременного предупреждения судов, находящихся в море,

и населения стран, лежащих в опасных районах, о приближении урагана.

Исследования крупномасштабных процессов в океане и атмосфере важны также в связи с проблемой изучения вариаций климата Земли. Загрязнение атмосферы и поверхности льдов, а также поверхности океанов нефтью, увеличивающийся выброс отработанного тепла в атмосферу могут повлечь за собой изменения климата нашей планеты. Поэтому проблема защиты окружающей среды от загрязнений связана с проблемой долгосрочного прогноза погоды.

Таким образом, большинство прикладных проблем физики океана сводится к прогнозу природных условий в атмосфере и океане. Общим принципом развития этих исследований следует считать принцип комплексного использования всей доступной информации об изучаемом явлении. В связи с этим необходимо повышать эффективность океанологических исследований за счет внедрения автоматизированных систем сбора и обработки информации об океане. Повышения эффективности океанологических исследований можно достичь также за счет использования оптимальных методов обработки океанологической информации.

§ 2. Автоматизация процессов сбора и обработки океанологической информации

Сбор научной информации о физических полях океана осуществляется в настоящее время главным образом научно-исследовательскими судами, выполняющими экспедиционные рейсы в различные районы Мирового океана. Огромные размеры океанических акваторий, ограниченные по продолжительности и по возможностям провести измерения экспедициями на научно-исследовательских судах, а также высокая стоимость экспедиций выдвинули в начале 60-х годов задачу повышения эффективности океанологических исследований.

Под эффективностью океанологических исследований понимается отношение стоимости полученной информации к затратам на проведение исследований. Поэтому повышение эффективности океанологических экспедиций осуществляется путем увеличения объема научной информации, собранной в каждом рейсе научно-исследовательского судна.

Для повышения информативности выполняемых в океане измерений разработана и создана новая автоматизированная измерительная аппаратура для морских исследований. Эта аппаратура объединена в специальные комплексы автоматизированного сбора и обработки информации об океане. Крупным шагом в решении проблемы автоматизации океанологических исследований явилось оснащение крупных научно-исследовательских судов электронными вычислительными машинами.

Некоторые результаты исследований МГИ АН УССР в области автоматизации океанологических исследований. В нашей стране

работы по созданию автоматизированных систем сбора и обработки океанологической информации были начаты по инициативе академика АН УССР А. Г. Колесникова [34]. Первая из таких систем была создана в Морском гидрофизическом институте АН УССР на нис «Михаил Ломоносов». В работах по созданию системы принял участие Институт кибернетики АН УССР, оснастивший судно ЭВМ «Днепр-1».

В процессе разработки автоматизированной системы под руководством А. Г. Колесникова были сформулированы принципы автоматизации океанологических исследований. Все применяемые в морских экспедициях средства сбора информации классифицировались на ряд комплексов, в которые вошли: зондирующие, буксируемые, автономные и другие [34]. Были определены стандартные методики обработки на ЭВМ основных океанологических характеристик, измеряемых в экспедициях, и создано соответствующее математическое обеспечение в виде библиотеки стандартных программ обработки данных.

В целях оснащения автоматизированных систем необходимой аппаратурой в Морском гидрофизическом институте АН УССР сконструирована новая морская измерительная техника. Она может работать в качестве элементов судовой автоматизированной системы. На нис «Михаил Ломоносов» была осуществлена радиальная связь лабораторий судна с судовым вычислительным центром. Внедрение автоматизированной системы на этом судне позволило значительно увеличить объем и качество получаемой в экспедициях научной информации.

Более совершенная автоматизированная система сбора и обработки данных была создана в МГИ УССР на нис «Академик Вернадский». В ее состав вошли более эффективные измерительные комплексы аппаратуры, разработанные в институте в начале 70-х годов. Корабль располагал большими возможностями для проведения исследований и более совершенной ЭВМ «Минск-22».

Главным отличием автоматизированной системы на нис «Академик Вернадский» явилось кольцо информационной связи между лабораториями и судовым вычислительным центром, а также между различными лабораториями. Идея оперативного информационного обмена между ЭВМ и исследовательскими лабораториями потребовала более высокого уровня организации измерений и вычислительных работ. Для ее реализации потребовалось разработать комплекс обмена информацией и диспетчерские программы, управляющие вводом в ЭВМ информации от различных измерительных комплексов на приоритетной основе.

Разработанные и установленные на научно-исследовательских судах МГИ АН УССР судовые автоматизированные системы обеспечили первичную обработку научной информации непосредственно в экспедициях. Для окончательной обработки данных и получения конечных результатов исследований в институте был создан береговой центр сбора и обработки информации.

Дальнейшим развитием идеи автоматизации океанологических исследований явились работы МГИ АН УССР по созданию единой автоматизированной системы сбора, передачи и обработки информации. В эту систему в качестве составных элементов вошли судовые подсистемы сбора и первичной обработки данных, береговой вычислительный и приемно-управляющий центр, автономные телеметрические буи, устанавливаемые в океане, и каналы связи между всеми элементами системы [34].

Была разработана структура системы, отвечающая весьма широкому кругу задач океанологии. На береговом вычислительном центре была создана библиотека стандартных программ обработки наблюдений, в которую, в частности, вошли программы построения на ЭВМ карт полей океана статистическими методами [5]. Под руководством А. Г. Колесникова была создана автономная телеметрическая станция, радиоприемный центр «Наука», разработано более 20 автоматизированных комплексов морской измерительной аппаратуры и среди них гидрологический зонд «Исток», геофизический комплекс «Рельеф», буксируемый комплекс «Нырок», фотометры-прозрачмеры, турбулиметры «Агат» и «Аист» [34].

Работы МГИ АН УССР в области автоматизации океанологических исследований подготовили основу для системного подхода к организации исследований явлений, протекающих в океане.

Автономные станции в океане. Одним из высокоэффективных средств исследований являются автоматические или обитаемые автономные станции в океане. Основным достоинством таких станций (по сравнению с научно-исследовательскими судами) является возможность проводить комплексные измерения параметров среды в течение весьма продолжительного времени. Конструкция автономных станций в ряде случаев позволяет избежать качки буя и, следовательно, предохранить от качки измерительную аппаратуру, что дает возможность проводить измерения даже в условиях сильных штормов.

Наиболее простые автономные станции — автоматические буи, устанавливаемые на якорю в море. Они несут на себе измерительную аппаратуру, аппаратуру регистрации и хранения информации, передачи данных по радио или гидроакустическому каналу связи, аппаратуру телеметрического управления, источники питания и др. Для предохранения приборов от поверхностного волнения часто устанавливаются притопленные буи, у которых наполненный воздухом (или другим легким материалом) контейнер фиксируется на определенной глубине под поверхностью океана.

Больших успехов в создании обитаемых станций-лабораторий в открытом море добились французские ученые. По инициативе известного океанолога Ж.-И. Кусто во Франции было сконструировано несколько уникальных сооружений, называемых буй-лабораториями [102].

Буй-лаборатория представляет собой установленную на якорях и плавающую в вертикальном положении трубу большого диа-

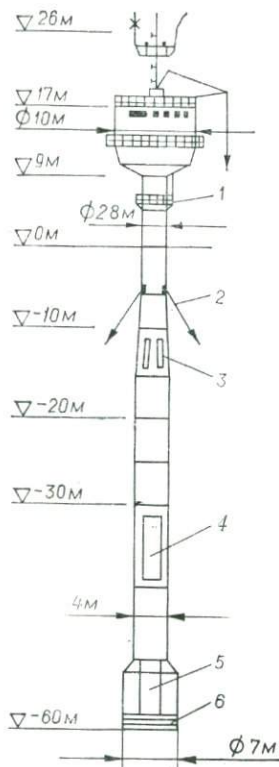


Рис. 3. Буй-лаборатория «Бора-2»:

1 — подъемник, 2 — якорная линия, 3 — сжатый воздух, 4 — вода, 5 — топливо, 6 — балласт.

метра. В верхней части ее расположены надстройки с лабораториями и каютами для экипажа и научных сотрудников. Схематическое изображение последнего варианта буй-лаборатории «Бора-2» приведено на рис. 3.

Буй «Бора-2» введен в строй в 1974 г. Он был установлен на трех якорях в Лионском заливе. В июле 1976 г. буй находился на удалении около 400 миль от берега в точке с координатами $04^{\circ} 43$ с. ш. и $42^{\circ} 00$ в. д. В этот период в районе буя и на нем непосредственно выполнялись исследования по проблеме «Взаимодействие океана и атмосферы» в рамках программы второй советско-французской экспедиции «Cofigrasov-II». Некоторые результаты исследований по этой программе будут приведены в § 26.

Внешний вид надводной части буя «Бора-2» приведен на рис. 4. Лабораторные, жилые и вспомогательные помещения расположены в надстройке, изготовленной из алюминиевых сплавов. Там же находится машинное отделение (два дизель-генератора, опреснитель воды с производительностью 100 л/ч и установка для кондиционирования воздуха). Запасов энергии для работы буя хватает на год.

Обитаемая надстройка имеет четыре палубы. На первой (нижней) расположено машинное отделение, на второй — лабораторное помещение, предназначенное для исследований широкого профиля. Здесь же находится кабельная лебедка для работы с гидрологическим зондом, механическая мастерская и подсобные помещения. На третьей палубе расположена лаборатория с регистрационной аппаратурой и автоматическая гидрометеостанция, а также кают-компания, камбуз, две одноместные и две двухместные каюты. На верхней (четвертой) палубе смонтирован подъемный кран с поворотной стрелой на 360° , метеоприборы, антенны и др.

Экипаж буя состоит из двух человек (капитана и механика), научный состав из четырех — шести.

Конструкция буя «Бора-2» и условия для проведения исследований на нем позволяют получать уникальную научную информацию. Даже в самые сильные штормы, которые бывают весьма часто в Лионском заливе, буй практически не испытывает качки. Дальнейшее совершенствование конструкции буя и снижение его стоимости

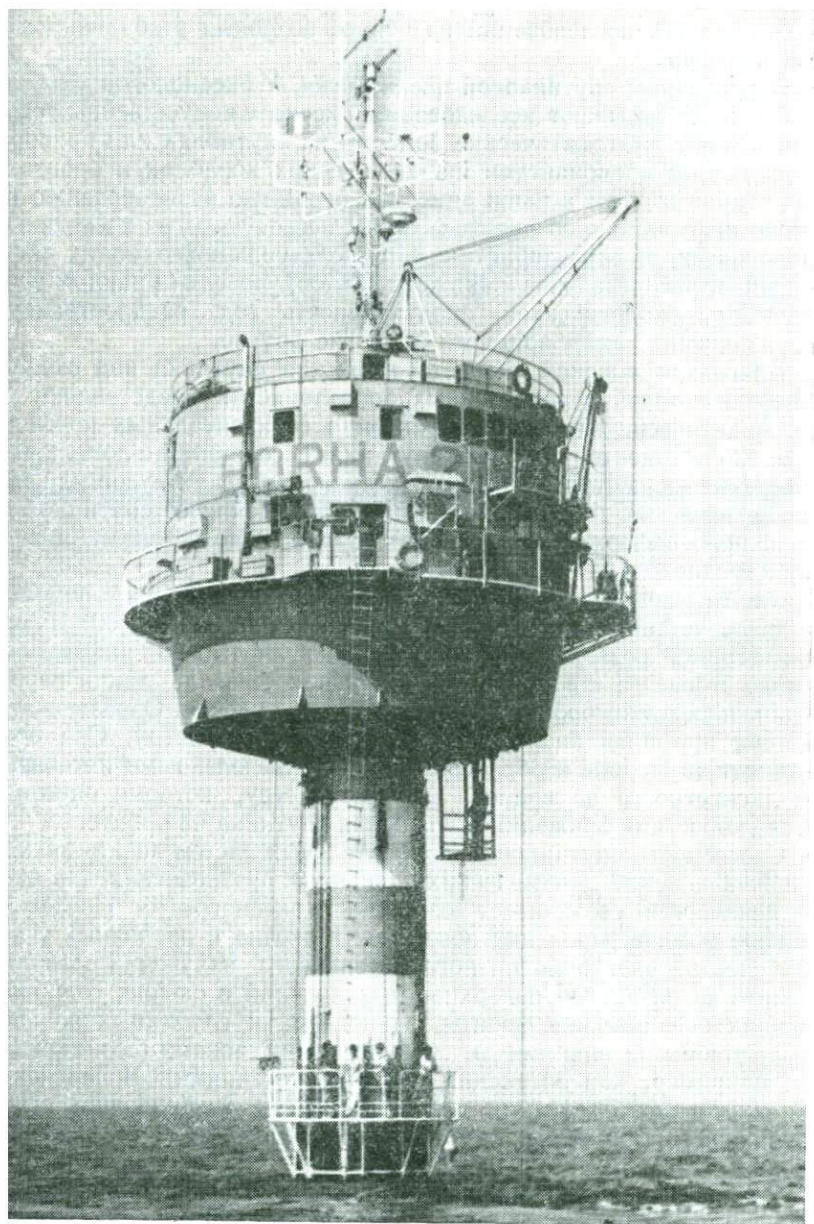


Рис. 4. Общий вид французского буя-лаборатории «Бора-2».

позволит создать весьма эффективные средства автоматизации океанологических исследований на основе подобных стабилизированных платформ.

Перспективы спутниковой океанологии. У океанологов все больший интерес вызывают исследования океана с искусственных спутников Земли. Автоматические приборы на спутниках или приборы, управляемые космонавтами на космических кораблях и орбитальных станциях, уже в наши дни дают огромную разнообразную научную информацию об океанах. Среди исследуемых из космоса океанологических характеристик — температура поверхности моря, волнение, распределение и движение льдов, уровень (и наклон уровня) моря, биологическая продуктивность вод, распространение загрязняющих океан примесей и многие другие.

Благодаря высокой скорости движения спутника над океаном измерения полей перечисленных характеристик представляют собой практически мгновенные фиксации горизонтальных профилей поля вдоль траектории полета спутника. В сочетании с локальными измерениями, поступающими от океанографических судов или сети телеметрических буйковых станций, наблюдения со спутников дают ценную информацию для построения карт полей океана и решения народнохозяйственных задач (рис. 5).

Один из возможных способов информации об океане с помощью датчика, установленного на спутнике, показан на рис. 60. Вращение датчика позволяет последовательно считывать информацию о поле строка за строкой в некоторой полосе вдоль линии пересечения плоскости орбиты с поверхностью океана. Образующаяся система профилей аналогична телевизионному растру. Она представляет двумерное изображение поля с определенными интервалами дискретности по времени и пространству, которые определяются скоростями движения и вращения спутника на орбите.

Способность спутниковых измерительных систем давать двумерное изображение динамических процессов, развивающихся в океане, неизмеримо увеличивает возможности океанографии. Последовательное фотографирование поверхности океана в различных участках спектра электромагнитного и теплового излучений позволяет следить за развитием поверхностных явлений в океане, сопровождающих океанические фронты, за подъемами глубинных вод, мезомасштабными вихрями и турбулентными зонами (возникающими, например, при обтекании островов течениями). В перспективе за счет использования синтезированных изображений станет возможным проведение «объемных» исследований в верхнем слое океана.

Значительные перспективы имеют также методы активного зондирования океана из космоса. Уже в настоящее время широко применяются радиолокационные методы измерения характеристик ветрового волнения. Измеряя обратное рассеяние радиоволн, можно оценивать величину скорости ветра, касательного напряжения трения и других характеристик поверхности океана.

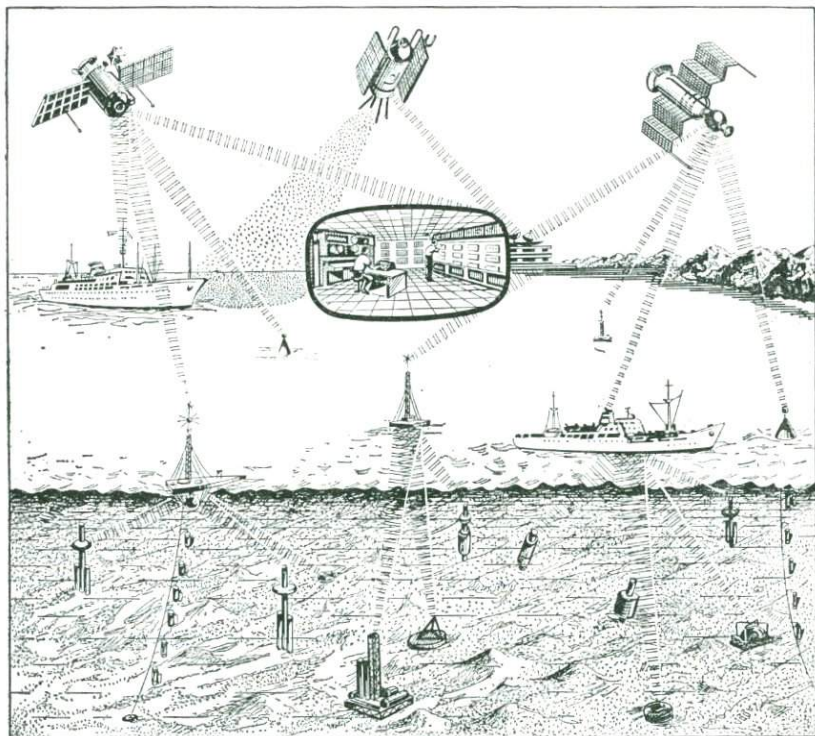


Рис. 5. Современные средства сбора и передачи океанологической информации.

Использование лазерного излучения в недалеком будущем позволит повысить точность подобных измерений.

На основе применения спутниковых средств измерения и связи возможно создание высокоэффективных систем автоматизации океанологических исследований. В сочетании с данными автономных (или обитаемых) станций в океане, научно-исследовательских судов и береговых центров сбора и анализа информации спутниковые измерительные системы способны решить многие важные проблемы современной океанологии.

Для эффективного использования больших информационных систем в океанологии необходима разработка принципов сбора информации и ее анализа, отвечающих конкретным фундаментальным и прикладным проблемам физики океана. Одним из современных подходов к этим проблемам является объединение в большую информационную систему модели изучаемого в океане явления и потока информации об этом явлении, поступающего от измерительных комплексов.

Последовательный анализ информации о явлении, введение поправок в модель явления (по принципу обратной связи) и управление процессами сбора и обработки данных должны обеспечить опти-

мальное использование всей доступной информации. Как уже отмечалось, изучению возможностей автоматизации океанологических исследований на подобном информационном уровне посвящается настоящая работа.

§ 3. Системный подход к анализу явлений в океане

Благодаря успехам современной теории управления, и в частности теории сложных динамических систем [30], идеи и методы динамико-стохастического моделирования природных объектов проникают в физику атмосферы и океана. Ряд динамико-стохастических моделей атмосферных процессов разработаны в метеорологии для повышения точности прогнозов погоды [18, 80]. Методы теории сложных систем успешно применяются для описания взаимодействия морских организмов со средой обитания [58]. Существуют отдельные работы, в которых причинно-следственные связи между явлениями в океане представлены в виде моделей динамических систем [49].

Тенденция к применению результатов современной теории систем в океанологии объясняется возросшим в последние годы уровнем организации океанологических исследований. Для эффективного использования научно-исследовательских судов и океанографической аппаратуры необходимо проводить анализ информационных потоков в системах сбора и обработки океанографических данных. Методы теории систем являются научной основой автоматизации океанографических исследований. Поэтому можно считать, что в современной океанологии складывается новый «системный» подход к изучению явлений в океане.

При проведении любого научного исследования возникает проблема рационального использования всей доступной информации об изучаемом явлении. Решение проблемы обычно содержит три этапа. На первом этапе для создания приближенной математической модели и планирования физических экспериментов используется априорная информация о явлении, накопленная в результате предыдущих исследований. На втором этапе организуются физические эксперименты для получения дополнительной информации о явлении. Поскольку новую информацию, как правило, дают непосредственные измерения явления, задачей второго этапа исследований является оптимизация процедуры измерений с учетом финансовых затрат, принципиальных или технических трудностей осуществления экспериментов.

Третий этап исследований заключается в обработке данных измерений и получении промежуточных или окончательных результатов. Системный подход к организации исследований означает научно обоснованный выбор стратегии исследований на каждом из этих этапов, что в конечном счете обеспечивает получение желаемых результатов при минимальной затрате средств, т. е. обеспечивает наиболее эффективные исследования.

Некоторые общие положения теории систем. Теория систем сложилась как один из разделов современной теории управления. Ее основы были заложены в трудах ученых, разрабатывавших проблемы теории управления,— А. А. Фельдбаума [89], Р. Калмана [129], Р. Беллмана [3], А. Балакришна [2], А. Брайсона [15] и многих других.

Основные результаты теории систем связаны с формулировкой проблем теории управления в пространстве состояний системы, т. е. в таком пространстве, все точки которого представляют собой возможные состояния исследуемой динамической системы. Анализ систем в пространстве состояний позволяет решать задачи оптимального управления системой при различных критериях качества управления, идентификации параметров модели системы, оптимального планирования экспериментов и др. Как будет показано ниже, решение этих задач позволяет найти ответы на многие практические вопросы океанографических исследований.

Значительный вклад в формулировку математической теории систем внесли работы Р. Калмана [125, 132]. В общем виде Калман рассматривает систему как некоторую структуру, в которую в определенные моменты времени вводятся вещество, энергия или информация, меняющие состояние системы и определяющие ее дальнейшее поведение. Текущее состояние определяется как та часть настоящего и прошлого системы, которая необходима для определения настоящего (идентификация) и будущих (прогнозирование) значений выходных параметров системы.

Математическое определение системы Σ , приведенное в [30], включает в себя восемь параметров:

$$\Sigma = (T, X, U, \Omega, Y, \Gamma, \varphi, \eta), \quad (3.1)$$

где T — множество моментов времени; X — множество состояний системы; U — множество мгновенных значений входных воздействий; $\Omega = \{\gamma : T \rightarrow Y\}$ — множество мгновенных значений выходных величин Y ; $\Gamma = \{\gamma : T \rightarrow Y\}$ — множество выходных величин системы; φ — переходная функция состояния системы; η — выходное отображение системы.

Пространство состояний системы Σ является обобщением понятия фазового пространства физической системы, хорошо известного в теоретической физике [65]. Переходная функция состояния системы φ описывает траекторию точки, характеризующей динамику системы в пространстве состояний. Входное воздействие на систему выражается в переводе этой точки вдоль траектории в пространстве состояний из начального состояния $X(t_0)$ в некоторое новое

$$x(t_1) = \varphi(t_0, t_1) x(t_0). \quad (3.2)$$

Выходное отображение системы η связывает выходные параметры системы $y(t)$ с ее состоянием $x(t)$.

Определение системы как восьмерки параметров (3.1) позволяет классифицировать математическую теорию систем по ряду

направлений, в которых исследуются задачи устойчивости, экстремального управления, идентификации параметров, структурного анализа и синтеза. Конкретизация задач теории систем по каждому из этих направлений дает возможность выделить различные частные классы систем, важнейшими из которых являются стационарные линейные системы.

Линейные динамические системы со среднеквадратичным критерием качества обладают свойством дуальности (двойственности), благодаря которому многие важные результаты теории управления могут быть использованы для анализа стохастических систем и, в частности для синтеза оптимальных фильтров [128]. На основе принципа дуальности могут быть успешно решены задачи моделирования стационарных случайных океанологических процессов для дальнейшего прогнозирования их значений.

Методы анализа систем в пространстве состояний открывают возможности для создания динамико-стохастических моделей процессов и полей в океане. Такая возможность обеспечивается важным свойством подобных методов, заключающемся в следующем. Для многих систем, имеющих случайным образом изменяющиеся параметры, можно так определить состояние системы, чтобы траектория системы в пространстве состояний представляла собой решение детерминированного уравнения. Подобные детерминированные уравнения, называемые уравнениями динамики системы, служат для прогнозирования будущих значений состояний стохастических систем. Это свойство будет использовано ниже при разработке методов прогнозирования океанологических процессов и полей.

Предпосылки системного подхода к изучению физических процессов в океане. Развитие океанографии, как и любой фундаментальной науки, происходит по различным направлениям. Наиболее важным из них является теоретическое, в котором работами В. В. Шулейкина [96], Г. Свердрупа [175], К. Россби [164], В. Б. Штокмана [95], Г. Стоммела [173], П. С. Линейкина [50], А. С. Моница [62], В. М. Каменковича [31], А. С. Саркисяна [77], А. И. Фельзенбаума [88] и других ученых создан прочный фундамент современной физики океана. На основании теории построена общая картина океанической циркуляции, выявлены основные закономерности турбулентных и волновых движений в океане, исследованы процессы взаимодействия океана и атмосферы. Все это составило научную основу для проведения измерений в океане, для постановки и решения частных прикладных проблем океанографии.

Теоретическое изучение океана связано с использованием все более сложных гидродинамических моделей. Это объясняется сложностью протекающих в океане процессов, а также естественным желанием исследователей учесть все более тонкие эффекты явлений, приблизить модель к реальной природе. Однако чем сложнее модель, тем труднее ее анализировать и решать задачи на ЭВМ. Можно без преувеличения сказать, что дальнейшее развитие теоретического подхода к задачам физики океана определяется перспектива-

ми развития вычислительных методов и создания новых классов мощных ЭВМ.

Наряду с совершенствованием теории в океанографии происходит постоянное накопление данных экспериментальных наблюдений. Хотя в целом прямых инструментальных измерений полей океана существует еще крайне мало, их количество для отдельных районов океана быстро увеличивается от года к году. В последнее десятилетие делаются попытки систематизировать экспериментальные данные по некоторым выделенным районам, чтобы получить представление о пространственных распределениях океанологических характеристик.

Успешно применяется в океанологии статистический анализ временных рядов наблюдений. Хорошо разработанные методы теории случайных функций позволили стандартизировать процедуры анализа спектра процессов, выделения периодических составляющих, сглаживания наблюдений и т. д. Значительный вклад в становление этого второго направления исследований в океанографии, которое условно можно назвать статистическим, внесли работы А. С. Моница [62], А. М. Яглома [98], В. Г. Корты [40], В. Манка [146], Н. Филиппса [90], Р. В. Озмидова [72], В. И. Беляева [5], С. А. Китайгородского [33] и многих других.

Наконец, третье направление, которое также условно можно назвать техническим, составляют работы в области автоматизации океанографических измерений. Они ведутся с целью разработки принципов и методов осуществления измерений, создания комплексов измерительной, вычислительной и управляющей техники. Как уже отмечалось в § 2, в этом направлении сделаны еще только первые шаги. Однако перспективность его несомненна. Достаточно указать на открытие тонкой структуры полей океана, которое стало возможным благодаря появлению новых приборов, повысивших точность гидрологических измерений и сделавших возможным непрерывное зондирование толщи океана по глубине.

Пример комплексного использования технических средств для изучения явлений в океане — исследования на океанографических полигонах. Впервые осуществленные длительные измерения на сети буйковых станций в период проведения Советского Аравийского (1967 г.) и Советского Атлантического (1970 г.) полигонов привели к открытию мезомасштабных вихрей, характерных для динамической структуры поля скорости в океане [16].

Перспективы технического направления в океанологии связываются с проблемами создания стационарной сети океанологических станций и использованием искусственных спутников Земли для измерений характеристик океана из космоса и ретрансляции информации.

Наиболее рациональной представляется такая организация океанографических исследований, когда возможности теории и эксперимента дополняют друг друга. Математическую модель явления и наблюдаемые с помощью измерительных приборов отдельные

его свойства целесообразно рассматривать как единую информационную систему, отражающую процесс сбора и обработки океанографической информации. Тогда оптимизация системы будет означать повышение эффективности ее работы, т. е. повышение эффективности исследований данного явления. Подобный метод анализа, как уже отмечалось, характерен для современной теории систем. Поэтому рациональное сочетание теоретических и статистических методов океанологических исследований с техническими средствами, объединенными в автоматизированный комплекс получения и обработки информации, можно назвать системным подходом к изучению явлений в океане.

Естественным началом системного подхода является формулировка цели исследований. Поскольку обычно задача сводится к расчету или прогнозу явлений (процесса, поля), цель исследований должна определять некоторый показатель качества расчета, например среднеквадратичную ошибку построения карты поля.

В соответствии с выбранной целью должна быть разработана теоретическая модель явления, учитывающая наиболее важные из его физических свойств. Степень сложности модели определяется возможностью производить расчеты на ЭВМ, входящей в средства технического обеспечения системы. Учитывая приближенный характер динамической модели явления, необходимо ввести процедуру постоянной корректировки результатов расчета явления путем сравнения их с наблюдениями и статистического анализа ошибок. Постоянное сравнение результатов функционирования системы с заданным критерием качества должно давать возможность корректировать модель явления и осуществлять планирование измерений таким образом, чтобы технические средства измерений использовались наиболее эффективно.

Таким образом, исходя из возможностей теории и имеющихся технических средств для проведения измерений и вычислений в океанографической информационной системе должен существовать своеобразный баланс между степенью упрощения теоретической модели явления и количеством текущей информации, поступающей от измерительных приборов для корректировки ошибок расчета и прогноза. Поскольку измерения процессов и полей океана, как и вычисления на ЭВМ, обычно производятся через некоторые интервалы времени, анализ данных и корректировка модели процесса должны выполняться последовательно в моменты поступления новой информации.

Принципы системного анализа океанографической информации. Основываясь на приведенных предпосылках системного подхода к анализу явлений в океане, можно сформулировать некоторые общие принципы системного изучения океанографической информации. Эти принципы определяют последовательность основных операций, которые должны выполняться при организации и проведении океанографических исследований:

1. Определение целей конкретных океанографических исследований.

2. Оценка условий реализуемости этих целей, т.е. возможностей их достижения с учетом существующих ограничений (принципиальных или технических) на организацию и проведение исследований.

3. Выбор критериев качества исследований, позволяющих оценивать степень достижения поставленных целей.

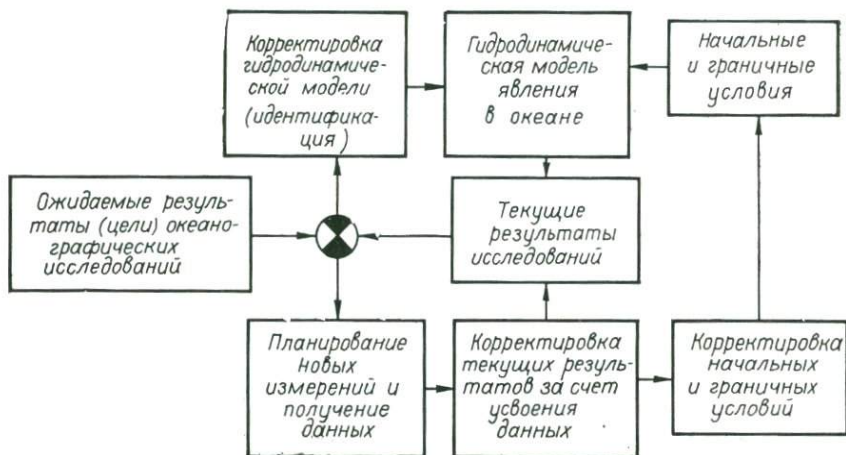


Рис. 6. Функциональная взаимосвязь между основными операциями системного анализа океанологической информации.

4. Разработка теоретической модели явления, отвечающей целям исследований и условиям реализуемости.

5. Нахождение стохастических алгоритмов обработки наблюдений для последовательной корректировки результатов расчетов, выполняемых на основе теоретической модели.

6. Объединение теоретической модели и стохастических алгоритмов в единую динамико-стохастическую модель явления, обеспечивающую последовательное сравнение на основе выбранных критериев качества текущих результатов исследований с ожидаемыми результатами (целями) и дающую возможность управлять получением и обработкой информации о явлении по принципу обратной связи.

7. Проведение численных экспериментов на ЭВМ с целью идентификации параметров динамико-стохастической модели и планирования измерений.

8. Организация последовательной обработки океанографической информации на ЭВМ с использованием динамико-стохастической модели явления по принципу непосредственного усвоения новых данных.

На рис. 6 специальным значком двойного сравнения показано существование двух ветвей обратной связи, управляющих обра-

боткой информации и действующих в направлении достижения ожидаемых результатов (целей) исследований.

В настоящей работе мы будем использовать в качестве конкретных целей исследований получение расчетных или прогностических значений процессов и полей в океане по данным наблюдений. Исходя из этого, для разработки системного подхода к анализу океанографических явлений мы основное внимание сосредоточим на проблемах моделирования, оптимальной фильтрации и планирования измерений в океане.

§ 4. Проблема прогнозирования и фильтрации процессов и полей в океане

Как уже отмечалось, главной задачей системного подхода к анализу явлений в океане является разработка динамико-стохастической модели явлений, учитывающей важнейшие (с точки зрения цели исследований) свойства явления. Стохастическая часть подобной модели должна обеспечивать оптимальное использование информации, содержащейся в океанологических наблюдениях.

Разработка статистических методов анализа наблюдений базируется на результатах теории оптимальной фильтрации случайных процессов и полей. Наиболее разработанной в настоящее время является теория оптимальной линейной фильтрации случайных процессов. Поэтому рассмотрение проблем прогнозирования процессов и полей в океане мы начнем с этого более простого случая.

Ключевая проблема оптимальной линейной фильтрации случайных процессов. Общее решение проблемы оптимальной линейной фильтрации случайных процессов было заложено в фундаментальных работах А. Н. Колмогорова [38], М. Г. Крейна [47] и Н. Винера [189]. За 35 лет, прошедших с момента появления этих работ, теория оптимальной фильтрации интенсивно развивалась, а ее результаты нашли многочисленные приложения в науке и технике.

В научной литературе существует ряд обзорных статей, посвященных истории развития методов оптимальной фильтрации [98, 116]. Среди них заслуживает внимания статья известного американского ученого Т. Кайла [124], в которой в весьма сжатой форме дана сводка главных достижений в этой новой области знаний.

Т. Кайла приводит простую формулировку «ключевой проблемы» оптимальной фильтрации и показывает связь классических результатов теории с современными методами анализа случайных процессов. Рассмотрим ключевую проблему оптимальной фильтрации в трактовке Т. Кайла.

Пусть наблюдаемый в океане процесс $y(s)$ измерен на интервале времени от t_0 до t_f и может быть представлен в виде суммы

$$\vec{y}(s) = \vec{z}(s) + \vec{v}(s), \quad t_0 \leq s \leq t_f, \quad (4.1)$$

где

$$E \{ \vec{v}(t) \cdot \vec{v}^T(s) \} = I_p \delta(t - s). \quad (4.2)$$

I_p — единичная матрица размерности $p \times p$; $v(s)$ — случайный белый шум (ошибки измерений процесса); $z(s)$ — истинный процесс в океане, имеющий нулевое значение и в общем случае коррелированный с ошибками измерений

$$E \{ \vec{z}(t) \vec{v}^T(s) \} = \begin{cases} \text{произвольная функция, } t \geq s, \\ 0, & t < s. \end{cases} \quad (4.3)$$

Определим корреляционную функцию $\vec{y}(s)$ в виде

$$R_y(t, s) = E \{ \vec{y}(t) \vec{y}^T(s) \} = I_p \delta(t - s) + K(t, s), \quad (4.4)$$

причем

$$K(t, s) = E \{ \vec{z}(t) \vec{z}^T(s) + \vec{z}(t) \vec{v}^T(s) + \vec{v}(t) \vec{z}^T(s) \}. \quad (4.5)$$

Проблема оптимальной фильтрации заключается в нахождении оценки $\hat{z}(t|t_f)$, имеющей вид

$$\hat{z}(t|t_f) = \int_{t_0}^{t_f} H(t, \tau) y(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (4.6)$$

и удовлетворяющей условию

$$\text{tr} E \{ [\vec{z}(t) - \hat{z}(t)] [\vec{z}(t) - \hat{z}(t)]^T \} = \min. \quad (4.7)$$

Условие (4.7) выполняется, когда оценка процесса $\hat{z}(t)$ ортогональна всем измерениям процесса на интервале его наблюдения

$$E \{ [\vec{z}(t) - \hat{z}(t|t_s)] \vec{y}^T(s) \} = 0, \quad t_0 \leq s \leq t_f. \quad (4.8)$$

Решение задачи (4.6), (4.7) состоит в нахождении функции $H(t, \tau)$ из интегрального уравнения

$$H(t, s) + \int_{t_0}^{t_f} H(t, \tau) K(\tau, s) d\tau = E \{ \vec{z}(t) \vec{z}^T(s) \} + E \{ \vec{z}(t) \vec{v}^T(s) \}, \quad (4.9)$$

$$t_0 \leq t, \quad s \leq t_f.$$

В зависимости от соотношения величин t_0 , t , t_f могут иметь место три отдельные задачи: $t_f < t$ — оптимального прогнозирования процесса, $t_f = t$ — оптимальной фильтрации, $t_f > t$ — оптимального сглаживания.

Обозначим через $\hat{z}(t)$ выражение

$$\hat{z}(t) = \hat{z}(t|t) = \int_{t_0}^t h(t, s) y(s) ds.$$

Тогда ключевая проблема оптимальной фильтрации может быть представлена в следующей форме: найти решение интегрального урав-

нения

$$h(t, s) + \int_{t_0}^t h(t, \tau) K(\tau, s) d\tau = K(t, s), \quad (4.10)$$

$$t_0 \leq s \leq t \leq t_f$$

при условии (4.8).

Впервые эта проблема (для случая $p = 1, t_0 = -\infty$) была решена Н. Винером [189]. В этом случае наиболее просто решение выглядит, когда случайный процесс имеет рациональную спектральную плотность. Тогда корреляционную функцию процесса можно представить в виде

$$K(t, s) = K(|t - s|) = \sum_1^n \alpha_i \exp(-\beta_i |t - s|) =$$

$$= \begin{cases} \sum_1^n \alpha_i \exp(-\beta_i t) \exp(\beta_i s), & t \geq s, \\ \sum_1^n \alpha_i \exp(-\beta_i s) \exp(\beta_i t), & t \leq s. \end{cases}$$

Как показал Винер, для ядер $K(t, s)$, обладающих такими свойствами, двухстороннее преобразование Лапласа

$$S_y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t) + K(t)] \exp(-st) dt$$

есть просто отношение двух полиномов от s^2 . Анализируя расположение корней этих полиномов на комплексной плоскости в каждом отдельном случае можно найти единственное представление спектра $S_y(s)$ (факторизация [189]) в виде произведения двух функций

$$S_y(s) = S_y^+(s) S^+(-s), \quad (4.11)$$

причем

$$S_y^+(s) = \prod_1^n (s - z_i) / \prod_1^n (s - p_i). \quad (4.12)$$

В последнем выражении z_i и p_i есть нули и полюса $S_y(s)$ расположены в левой полуплоскости ($\text{Re } z_i < 0, \text{Re } p_i < 0$). Решение ключевой проблемы оптимальной фильтрации для этого случая сводится к нахождению передаточной функции оптимального фильтра

$$H_{\text{opt}}(s) = 1 - [S_y^+(s)]^{-1}. \quad (4.13)$$

Предложенный Н. Винером метод факторизации для решения уравнения (4.10) приводит к весьма сложным математическим выражениям для передаточных функций фильтров. Этот метод неудобен для организации обработки временных рядов наблюдений на ЭВМ и не дает возможности усваивать новые данные в процессе обработки ряда. Более перспективным подходом к решению проблемы опти-

мальной фильтрации является подход Р. Калмана [125], основанный на анализе случайных процессов в пространстве состояний или на использовании модели процесса Гаусса — Маркова.

Модели случайных процессов Гаусса — Маркова. Предположим, что имеются наблюдения случайного процесса $x(t)$, проведенные на интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$ (для простоты мы ограничимся рассмотрением скалярных процессов).

Проблема прогнозирования процесса по этим наблюдениям состоит в нахождении условных распределений его будущих значений. Проблема фильтрации аналогична проблеме предсказания: по данным наблюдений $y(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$ необходимо найти условные распределения вероятности другого процесса $z(t)$, связанного с $y(t)$ некоторой зависимостью. Прогноз и фильтрация будут оптимальными, если вся информация, содержащаяся в измерениях, используется для расчета в тех точках, где нет измерений.

Проблемы фильтрации и предсказания допускают оптимальные решения в том случае, когда $z(t)$ и $y(t)$ являются процессами Гаусса и Маркова [126]. Условное распределение вероятностей процесса Гаусса полностью определяется его средним значением и вторыми моментами. Для процессов Маркова достаточно определить эти моменты для одного момента времени, чтобы однозначно рассчитать их для всех остальных моментов времени.

Процесс Маркова отличается от случайных процессов другого типа детерминированными уравнениями динамики, описывающими поведение во времени условных средних значений процессов. Известные первый и второй моменты распределения вероятностей для одного из моментов времени могут быть использованы в качестве начальных условий при решении уравнения динамики. В результате статистические характеристики процесса могут быть предсказаны в любой его точке. Это в свою очередь позволяет получить объективные оценки значений самого процесса.

В результате характерного для процессов Маркова сочетания детерминированных и вероятностных свойств они могут рассматриваться в качестве математической основы для системного подхода к анализу океанологических процессов. Это обстоятельство будет использовано нами в дальнейшем при оптимальной фильтрации процессов и полей в океане на основе динамико-стохастических моделей.

В проблеме фильтрации условные средние значения процессов будут зависеть от наблюдаемых величин $y(t)$. Они находятся путем «пропускания» величин $y(t)$ через оптимальный фильтр. Условные вторые моменты не связаны с наблюдениями и потому могут рассчитываться независимо от них. Однако знание их в момент времени $t = \tau$ необходимо для расчета условных средних значений в тот же момент времени. Поэтому прежде чем предсказать ожидаемое значение процесса $z(\tau)$, нужно независимо предсказать на этот момент условную дисперсию процесса. Это свойство модели Гаусса — Маркова используется в оптимальном фильтре Р. Калмана [126].

Отмеченные свойства процессов Маркова требуют ответа на вопрос: в какой степени реальные процессы в океане могут рассматриваться как процессы Маркова? В общем виде ответ на этот вопрос дает теория случайных функций [98]. Действительно, известно, что любой случайный процесс может быть сведен к процессу типа процесса Маркова, если подходящим образом определить «состояние» его. В качестве состояний должны использоваться известные из наблюдений значения процесса. Главная задача состоит в выборе минимального количества наблюдений процесса для образования некоторого вектора, представляющего состояние $z(t)$. Размерность вектора состояния определяет порядок дифференциального уравнения динамики системы.

Как известно, допущение распределения вероятностей процесса Гаусса эквивалентно ограничению класса алгоритмов оптимальной фильтрации и предсказания линейными алгоритмами [99]. Поскольку такое допущение приводит к значительному упрощению задачи, мы будем также считать, что фильтрация и прогноз относятся к классу линейных оценок его значений.

Примем, что путем использования вектора состояний процесса $z(t)$ временной ряд океанологических величин представлен в виде случайной последовательности $z(t), z(t+1), \dots, z(t+m)$ Гаусса—Маркова. В теории управления известно, что такая случайная последовательность генерируется рекурсионным соотношением

$$z(t+1) = \Phi(t+1, t) z(t) + \Gamma(t+1, t) W(t). \quad (4.14)$$

Здесь $W(t_0), W(t_0+1), \dots$ — последовательность независимых случайных векторов Гаусса—Маркова, удовлетворяющих условию

$$E \{W(t_1) W(t_2)\} = 0, \quad t_1 \neq t_2. \quad (4.15)$$

Для произвольного момента времени уравнение (4.14) может быть записано в виде

$$z(t_1) = \Phi(t_1, t_0) z(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Phi(t_1, t) \Gamma(t, t-1) W(t-1). \quad (4.16)$$

Матрицы Φ в уравнениях (4.14) и (4.16) называются переходными, поскольку они описывают преобразования вектора состояния $\vec{z}(t)$ в пространстве состояний. Матрица Γ предусматривает функцию управления динамической системой. Уравнения (4.14) и (4.16) являются уравнениями некоторой линейной динамической системы управления, эквивалентной исследуемому процессу.

Для того чтобы завершить общее моделирование, необходимо ввести уравнение, описывающее измерение процесса:

$$y(t) = H(t) z(t) + v(t). \quad (4.17)$$

Матрица $H(t)$ в уравнении (4.17) показывает, что вектор состояния в общем случае связан некоторым преобразованием с вектором измерений $\vec{y}(t)$. Добавление «шума» $v(t)$ позволяет учесть погрешности измерений.

Уравнения (4.14) и (4.17) можно назвать моделью исследуемого процесса Гаусса — Маркова.

Моделирование и оптимальная фильтрация пространственных случайных полей океана. Пространственные поля океана представляют собой мгновенные распределения параметров, характеризующих состояние морской среды в пространстве. Для наглядности (иллюстрации) обычно их представляют в виде карт, построенных для определенных глубин. Имея в виду это обстоятельство, мы будем считать основной целью изучения пространственных полей океана расчет их карт и ограничимся рассмотрением двухмерных полей $f(x)$, где $\vec{x} = (x_1, x_2)$.

Известно, что наиболее удобной моделью для пространственных полей большинства океанологических параметров является случайная функция координат. Применение такой модели позволяет использовать результаты А. Н. Колмогорова [38], Л. С. Гандина [19], Д. Питерсена и Д. Миддлтона [150] и других авторов для решения задачи расчета пространственных полей по дискретным измерениям, выполненным в произвольных точках поля \vec{x}_k .

Использование подобной модели для реальных полей океана становится возможным, если предварительно выделить так называемую детерминированную составляющую поля. Существует ряд практических приемов выделения детерминированной составляющей (см., например, [5]). Здесь мы будем считать, что значения поля не имеют закономерных изменений в пространстве и во времени и могут быть описаны случайными функциями.

Предположим, что в качестве модели поля использована однородная и изотропная случайная функция координат $f(\vec{x})$, имеющая нулевое среднее значение и корреляционную функцию $K(\vec{x})$. Тогда формулами оптимальной интерполяции [19] можно выразить значение поля $f(\vec{x})$ в произвольной точке через известные величины $\hat{f}(\vec{x}_k)$ в точках измерений $\{\vec{x}_k\}$

$$\hat{f}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n g(\vec{x}, \vec{x}_i) f(\vec{x}_i). \quad (4.18)$$

В этой линейной комбинации весовые коэффициенты $g(\vec{x}, \vec{x}_i)$ должны быть подобраны таким образом, чтобы среднеквадратичная ошибка восстановления поля

$$\varepsilon(\vec{x}) = E \{ |f(\vec{x}) - \hat{f}(\vec{x})|^2 \} \quad (4.19)$$

приняла минимальное значение. Для этого нужно решить систему уравнений Колмогорова [38]

$$K(\vec{x}, \vec{x}_l) = \sum_{m=1}^n g(\vec{x}, \vec{x}_m) K(\vec{x}_l, \vec{x}_m), \quad (4.20)$$

$$l = 1, 2, \dots, n.$$

Формулы (4.18) и (4.20) представляют собой так называемый корреляционный алгоритм объективного анализа или оптимальной интерполяции поля [19]. Результаты интерполяции обеспечивают восстановление случайного поля с максимально возможной точностью. Иными словами, информация, содержащаяся в измерениях поля, используется наилучшим способом.

Применение алгоритма оптимальной интерполяции к наблюдениям физических полей океана связано с рядом практических трудностей. Прежде всего по наблюдениям поля необходимо оценить адекватность ему однородной и изотропной модели, на которой основан алгоритм. Это означает, что должны быть разработаны простые и удобные на практике методы проверки данных на однородность и изотропность. Поскольку большинство пространственных полей океана отличаются от однородных и изотропных моделей в той или иной степени, необходимы практические способы учета или устранения этого явления.

Одним из наиболее простых способов устранения нестационарности пространственных полей океана является разделение поля на детерминированную и случайную составляющие. Под детерминированной составляющей понимается определенное тем или иным способом поле осредненных значений (норм), которое может быть получено из исходной выборки путем сглаживания ее по пространству. Случайной составляющей в таком случае является поле отклонений от норм

$$f'(\vec{x}) = f(\vec{x}) - E\{f(\vec{x})\}. \quad (4.21)$$

Удачное разделение исходного поля на детерминированную и случайную составляющие следует считать одним из важных моментов моделирования.

Для учета анизотропии поля, например, по корреляционной функции, может быть введен так называемый эллипс корреляций, учитывающий изменение параметров корреляционной функции при вращении ее вокруг начала координат. Этого же результата можно достичь путем линейной деформации в направлении максимальной (или минимальной) анизотропии.

Отдельным вопросом, требующим исследования, является влияние фактической несинхронности данных наблюдений о пространственных полях океана. Учет несинхронности или ослабление ее влияния путем введения соответствующих поправок в наблюдения должен выполняться до проведения расчетов.

Разработка практических приемов объективного анализа океанографических полей [6] составляет главную задачу построения карт полей океана по наблюдениям. Объективный анализ пространственных полей является также важным составным элементом задачи оптимального прогнозирования пространственно-временных полей океана.

Практическое применение объективного анализа связано и с трудностями вычислительного характера. Известно, что при реше-

нии на ЭВМ систем уравнений (4.20) высокого порядка проявляется вычислительная неустойчивость, время счета и память ЭВМ используются с большой нагрузкой. Поэтому представляет интерес переход от корреляционного к спектральному алгоритму оптимальной интерполяции. Такой переход становится возможным, когда измерения поля выполнены в узлах правильной сетки, покрывающей акваторию океана. Выполнив преобразование по Фурье формул оптимальной интерполяции (4.18)—(4.20), можно определить общую для всего поля весовую функцию интерполяции $g(\vec{x})$. Например, если измерения поля выполнены в узлах 60-градусной ромбической сетки, формула оптимальной интерполяции поля имеет вид [150]

$$\hat{f}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \frac{J_1(|\vec{\omega}_c| \rho_k)}{\pi \sqrt{3} |\vec{\omega}_c| \rho_k} f(\vec{x}_k), \quad (4.22)$$

$$\rho_k = |\vec{x} - \vec{x}_k|.$$

Она легко реализуется на ЭВМ.

Вычислительные преимущества спектрального алгоритма интерполяции настолько очевидны, что разработка его вариантов для различных сеток измерений должна стать одной из практических задач обработки океанографических наблюдений. Это обстоятельство тем более заслуживает внимания, что в океанографии (в отличие от метеорологии) стационарной сети станций для измерений полей нет. Съёмки полей производятся эпизодически в отдельных районах, и точки измерений могут быть запланированы заранее в узлах правильной сетки.

Однако практическое применение спектрального алгоритма интерполяции должно быть обосновано. Прежде всего необходима экспериментальная проверка влияния границ области измерений на точность интерполяции, поскольку формулы спектрального алгоритма выводятся в предположении о безграничной сетке измерений на плоскости. Требуется исследования вопрос о влиянии числа станций на точность расчета поля спектральным методом.

Наконец, в практических ситуациях океанологи обычно имеют пространственные распределения наблюдений нескольких полей океана одновременно. Эти поля зачастую связаны между собой детерминированными или вероятностными зависимостями. Следовательно, наблюдения каждого из полей содержат в себе информацию о других полях, которую целесообразно использовать при построении карт каждого поля. Одновременное использование информации о различных полях при интерполяции каждого из них получило название статистического согласования полей океана [8].

Задача статистического согласования может рассматриваться как обобщение задачи оптимальной интерполяции. Оценки согласо-

ванных величин каждого из полей ищутся в виде линейной комбинации

$$\hat{f}_1(\vec{x}) = \sum_k g_1(\vec{x}, \vec{x}_k) f_1(\vec{x}_k) + \sum_m g_2(\vec{x}, \vec{x}_m) f_2(\vec{x}_m). \quad (4.23)$$

Весовые коэффициенты определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} K_1(\vec{x}, \vec{x}_k) &= \sum_l g_1(\vec{x}, \vec{x}_l) K_1(\vec{x}_k, \vec{x}_l) + \sum_m g_2(\vec{x}, \vec{x}_m) K_{12}(\vec{x}_k, \vec{x}_m), \\ K_{12}(\vec{x}_1, \vec{x}_m) &= \sum_n g_2(\vec{x}, \vec{x}_n) K_2(\vec{x}_m, \vec{x}_n) + \sum_k g_1(\vec{x}, \vec{x}_k) K_{12}(\vec{x}_k, \vec{x}_m). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Эта задача более сложная, чем задача оптимальной интерполяции, и до сих пор в океанологической литературе существуют лишь единичные попытки ее решения [5, 8]. Вместе с тем по отношению к корреляционному алгоритму оптимального согласования (4.23), (4.24) также справедливы высказанные соображения, касающиеся трудностей практической реализации метода оптимальной интерполяции. Задача нахождения спектральных алгоритмов оптимального согласования представляется еще более важной.

Моделирование и оптимальная фильтрация пространственно-временных полей океана. Моделирование пространственно-временных полей океана для построения их диагностических и прогностических карт по результатам наблюдений является одной из основных проблем океанологии. Основываясь на сформулированной выше концепции системного подхода, мы будем рассматривать эту проблему с точки зрения возможности последовательной статистической корректировки данными наблюдений результатов расчета поля на основе некоторой (достаточно простой) детерминированной модели поля. Одна из таких возможностей состоит в обобщении на случайные поля введенной модели Гаусса — Маркова, успешно использованной Р. Калманом [125] для оптимальной фильтрации и прогнозирования случайных процессов.

Предположим, что изменчивость поля по пространству и во времени приближенно может быть описана при помощи линейного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} + \int_{(\vec{y})} \lambda(\vec{x}, \vec{y}, t) \alpha(\vec{y}, t) d\vec{y} = f(\vec{x}, t). \quad (4.25)$$

По отношению к большинству реальных полей океана такое приближение будет оправдано при условии выделения нелинейной части или кусочно-линейной аппроксимации функций, описывающих нелинейную динамику реальных полей. Функция $\alpha(\vec{x}, t)$ в общем случае должна рассматриваться как некоторая вектор-функция, обозначающая состояние линейной динамической системы, эквивалентной изучаемому полю, или совокупности полей, согласно модели Гаусса — Маркова.

Решение уравнения (4.24) имеет вид

$$\alpha(\vec{x}, t) = \int_{(\vec{x})} h(\vec{x}, t; \vec{y}, t_0) \alpha(\vec{y}, t_0) d\vec{y} + \int_{(\vec{x})} \int_{t_0}^t h(\vec{x}, t; \vec{y}, t_0) f(\vec{y}, \tau) d\vec{y} d\tau. \quad (4.25)$$

Таким образом, значения поля в моменты времени t выражаются с помощью функции Грина $h(\cdot)$ через начальные распределения (карту поля в предшествующий момент времени t_0) и функцию $f(\vec{y}, t)$. Относительно последней вводится предположение, что она коррелирована по пространству и имеет свойства белого шума во времени. Функция $f(\vec{y}, t)$ описывает возбуждение, подаваемое на вход эквивалентной динамической системы управления, на выходе которой реализуется рассматриваемое поле в момент времени t .

Как и в случае одномерных процессов, наилучшей оценкой поля в данной точке в будущий момент времени будет условное среднее значение, индуцированное всеми предшествующими измерениями поля. Учитывая некоррелированность по времени возбуждения $f(\vec{x}, t)$, для оценки поля имеем

$$\hat{\alpha}(\vec{x}, t) = \int_{(\vec{x})} h(\vec{x}, t; \vec{y}, t_0) E \{ \alpha(\vec{y}, t_0) \} d\vec{y}. \quad (4.26)$$

Это уравнение позволяет осуществлять прогноз поля шаг за шагом во времени. Однако ошибка прогноза будет быстро расти ввиду значительного упрощения модели и неточных начальных условий. Для поддержания ошибки прогнозирования на определенном уровне необходима постоянная коррекция прогноза за счет новой информации, содержащейся в текущих измерениях поля. Процедура введения поправок по аналогии с методом Р. Калмана [125] была предложена Д. Питерсеном [153].

§ 5. Общие принципы планирования наблюдений в океане

Планирование наблюдений является важной составной частью системного подхода к анализу океанологических явлений.

В общем случае проблема планирования наблюдений в океане заключается в рациональной организации сбора информации для дальнейшей ее обработки в соответствии с заранее поставленными целями океанографических исследований. В зависимости от целей исследований, имеющихся технических средств, а также существующих возможностей проведения экспериментов в океане критериями рационального планирования могут стать стоимость океанологических работ, точность полученной информации или другие показатели качества, характеризующие процесс исследований.

Рассматривая проблемы моделирования и оптимальной фильтрации океанографических процессов и полей, мы условились считать основной целью исследований расчет и прогнозирование их значений на основе динамико-стохастических моделей. Критерием качества расчета и прогноза пространственно-временного поля океана обычно служит среднеквадратичная ошибка построения карты, которая является функцией времени и координат. Среднее значение ошибки оптимальной интерполяции, используемой для построения диагностической или прогностической карты поля, удобно использовать в качестве критерия качества планирования наблюдений.

Поэтому более конкретно под планированием океанографических наблюдений мы будем понимать процедуру нахождения зависимостей средней ошибки расчета и прогноза от количества измерений полей океана и их размещения в четырехмерном пространстве-времени. Задача планирования измерений должна решаться в каждом отдельном случае исследований на основе математической модели, применяемой для описания изучаемого явления в океане.

Таким образом, можно сформулировать два общих принципа планирования наблюдений в океане:

а) до проведения измерений должны быть сформулированы критерии качества океанологических исследований, отвечающих поставленной цели исследований и возможностям их осуществления;

б) на основе модели явления должны быть найдены аналитические или эмпирические связи критериев качества с главными экономическими (стоимость) и техническими (количество океанологических станций, интервалы между измерениями и др.) показателями океанологических исследований.

Как уже отмечалось, теоретические вопросы планирования наблюдений в океане в настоящее время не изучены. Хотя без предварительного составления плана работ не обходится ни одна из многочисленных морских экспедиций, планирование наблюдений основывается исключительно на опыте аналогичных работ и на пробных измерениях, осуществляемых непосредственно в рейсе научно-исследовательского судна. Разработка теоретических основ планирования наблюдений должна существенно улучшить подготовку экспедиций, повысить их эффективность за счет экономии времени и средств, затрачиваемых на получение океанологической информации.

В зависимости от математической модели, используемой для количественного представления изучаемого в океане явления, возможны два подхода к планированию исследований. Если цели исследований и ожидаемый объем информации об изучаемом процессе (поле) позволяют ввести статистическую модель процесса (поля), теоретически возможно установить аналитические формулы, связывающие критерии качества исследований с экономическими и техническими показателями организации исследований. Этот первый подход к планированию наблюдений наиболее прост в реализации.

В случае, когда для описания явления в океане применяется динамическая или динамико-стохастическая модель, основную роль в планировании измерений приобретают численные эксперименты на ЭВМ. По результатам численных экспериментов в модельных условиях могут быть получены основные соотношения, используемые для организации наблюдений в океане.

Мы кратко остановимся на некоторых приложениях общих принципов планирования наблюдений к задачам измерения океанологических процессов, пространственных и пространственно-временных полей океана.

Планирование измерений океанографических процессов. Основным вопросом при планировании измерений океанографических процессов является определение наилучшего интервала между дискретными отсчетами процесса во времени. Этот вопрос хорошо исследован в статистической теории связи и в радиотехнике. В ряде океанологических работ для определения оптимального интервала дискретности использована фундаментальная теория отсчетов Котельникова — Шеннона [41], связывающая интервал дискретности с верхней граничной частотой спектра процесса [5—8].

Обозначим интервал дискретности Δt , спектр процесса $\Phi(\omega)$, верхнюю граничную частоту ω_c . Тогда в силу теоремы отсчетов имеем

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_c}. \quad (5.1)$$

Если интервал между отсчетами равен Δt , ошибка восстановления процесса по дискретным ординатам его может быть сделана равной нулю. Если же интервал необходимо увеличить сверх Δt , ошибка восстановления процесса всегда будет отлична от нуля вследствие эффекта «перекрытия спектров» [150]. Ее среднее значение можно оценить по формуле

$$\bar{\varepsilon} = \int_{|\omega| > \omega_c} \Phi(\omega) d\omega. \quad (5.2)$$

Формулы (5.1) и (5.2) справедливы, если измерения процесса доступны на всем временном интервале $[-\infty, \infty]$. Если же объем измерений процесса ограничен небольшим количеством отсчетов, как это имеет место при использовании модели процесса Гаусса — Маркова и применении фильтра Калмана, целесообразно попытаться установить связь между ошибкой фильтрации и предсказания и интервалом между отсчетами процесса.

Планирование измерений пространственных полей океана. Использование стационарной модели поля предопределяет тот критерий, который служит для выбора оптимальной схемы расположения измерений в поле, а также для нахождения оптимального алгоритма восстановления поля по дискретным измерениям. Этим

критерием является среднеквадратичное отклонение

$$\varepsilon(\vec{x}) = E \{ |f(\vec{x}) - \hat{f}(\vec{x})|^2 \}, \quad (5.3)$$

где $\hat{f}(\vec{x})$ — результат интерполяции.

Величина $\varepsilon(\vec{x})$ характеризует степень неопределенности полученных значений поля, которая всегда существует на практике из-за ограниченного объема измерений, а также ввиду отличия реального поля от стационарной модели. В силу этого среднеквадратичная ошибка интерполяции естественным образом связана с тем количеством информации о состоянии поля, которое приносят измерения. Установим эту связь. Введем энтропию поля

$$H = -E \{ \ln \theta(\xi) \}, \quad (5.4)$$

где $\theta(\xi)$ — функция распределения величины $\xi = f(\vec{x})$. Будем считать, что распределение вероятностей $\theta(\xi)$ — по Гауссу, т. е. что $\theta(\xi) = \theta(0, \sigma^2)$. Тогда первоначально до измерений в поле его энтропию можно записать в виде формулы

$$H_0 = \ln [V \sqrt{2\pi e \sigma^2}].$$

После того как поле измерено в некотором множестве точек, его энтропия H_1 определится наведенными в каждой точке условными нормальными законами распределения, дисперсии которых будут меняться от точки к точке

$$H_1 = E \{ \ln [V \sqrt{2\pi e \varepsilon(\vec{x})}] \}. \quad (5.5)$$

Поэтому общее количество информации о состоянии поля, полученное в результате измерений, составит

$$\Delta H = H_0 - H_1 = \ln \sigma - E \{ \ln \sqrt{\varepsilon(\vec{x})} \}. \quad (5.6)$$

Из последнего выражения непосредственно видно, что количество информации ΔH определяется средней по полю величиной ошибки интерполяции.

Сбор и обработка гидрофизической информации должны быть организованы таким образом, чтобы измерения приносили максимум информации, т. е. чтобы средняя ошибка интерполяции стремилась к нулю. С информационной точки зрения процесс изучения гидрофизического поля аналогичен потоку информации в замкнутой системе автоматического управления, осуществляющей регулирование по принципу минимизации средней ошибки интерполяции $\varepsilon(\vec{x})$. Построение поля состоит из отдельных этапов получения и обработки информации, на каждом из которых уточняются представления о нем за счет уменьшения энтропии H_0 .

Д. Питерсен и Д. Миддлтон [150] установили идеализированные условия, при которых ошибка $\varepsilon(\vec{x})$ исчезает по всему полю. Эти условия могут быть получены путем представления алгоритма опти-

мальной интерполяции в пространстве волновых чисел ($\vec{\omega}$). Суть их состоит в следующем. Спектр поля $\Phi(\vec{\omega})$ должен занимать ограниченную область в пространстве ($\vec{\omega}$), а сетка измерений поля должна быть регулярной и бесконечной в пространстве измерений (\vec{x}). Кроме того, ячейка сетки измерений должна иметь такие размеры и такую форму, чтобы периодические повторения основания спектра $\Phi(\vec{\omega} + \vec{u}_{(m)})$ в пространстве волновых чисел, возникающие вследствие дискретизации поля, не перекрывались. В этом случае измерения поля теоретически содержат всю информацию о его состоянии, и, следовательно, энтропия поля H_0 исчезает.

По отношению к двумерным изотропным полям наибольшая эффективность измерений достигается, когда центры оснований вторичных спектров находятся в узлах 60-градусной ромбической сетки, имеющей шаг $2\omega_c$, где ω_c — верхняя граничная частота спектра поля.

Учитывая соответствие, существующее между спектральной сеткой и сеткой измерений, нетрудно установить, как должна выглядеть оптимальная система размещения измерений в поле $f(\vec{x})$. В силу ортогональности базисных векторов, вытекающей из свойств преобразования Фурье

$$\vec{v}_l \cdot \vec{u}_k = 2\pi\delta_{lk}, \quad (5.7)$$

δ_{lk} — символ Кронекера,

сетка измерений должна быть также 60-градусной, ромбической. Шаг этой сетки, т. е. оптимальное расстояние между отсчетами поля, может быть найден из условия

$$P \cdot Q = 4\pi^2. \quad (5.8)$$

Обозначим шаг сетки измерений a . Тогда, принимая во внимание, что шаг спектральной сетки равен $2|\vec{\omega}_c|$, получим

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{3}|\vec{\omega}_c|}. \quad (5.9)$$

Эффективность измерения изотропного поля с подобным шагом будет наибольшей и составляет величину $\kappa = 90,8\%$, тогда как для квадратной сетки измерений $\kappa = 78,5$ [150]. Таким образом, учет статистической структуры гидрофизических полей позволяет существенно уменьшить необходимое количество измерений по сравнению с размещением их по узлам квадратной сетки.

Отметим, что на практике статистическая структура гидрофизических полей оказывается неизотропной. Часто в подобных случаях неизотропность поля по отношению к корреляционной функции и спектру является следствием постоянной по полю тенденции, увеличивающей или уменьшающей статистическую связь между

значениями поля в определенном направлении. Например, исследования статистической структуры поля концентраций кислорода в Тропической Атлантике [36] показали, что интервалы корреляции в широтном направлении на 30—40% превышают интервалы корреляции вдоль меридианов. Поэтому основание спектра поля в пространстве волновых чисел удобно моделировать эллипсом, имеющим соответствующее отношение полуосей $\gamma = \omega_{c1}/\omega_{c2}$, где ω_{c1} и ω_{c2} — верхние граничные частоты в двух перпендикулярных направлениях, отвечающих минимальной и максимальной корреляциям.

Предложенная модель описывает простейший случай нарушения изотропности поля и приводится к изотропной модели линейным растяжением пространства ($\vec{\omega}$) с коэффициентом γ . По этой причине рациональная сетка измерений уже не будет 60-градусной, спектральная сетка измерений должна принять форму параллелограмма со сторонами h_1 и h_2 :

$$h_1 = \frac{2\pi \sqrt{1 + \gamma^2}}{\sqrt{3}\omega_c}; \quad h_2 = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{3}\omega_c};$$

$$\omega_c = \min \{\omega_{c1}, \omega_{c2}\} \quad (5.10)$$

и острым углом α

$$\alpha = \arctg \sqrt{3}\gamma. \quad (5.11)$$

По отношению к измерениям неизотропного поля в узлах такой сетки сохраняют силу идеализированные условия исчезновения среднеквадратичной ошибки интерполяции, о которых говорилось выше.

**ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НАБЛЮДЕНИЙ
СЛУЧАЙНЫХ ОКЕАНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

**§ 6. Оптимальная фильтрация
временных рядов наблюдений
как задача теории управления**

Обработка временных рядов океанологических наблюдений обычно заключается в восстановлении сглаженной составляющей измеряемого в океане процесса путем соответствующего преобразования его спектра. Нахождение способа преобразования спектра, удовлетворяющего заданному критерию качества, является задачей оптимальной фильтрации океанологических данных.

В океанологической литературе описано применение разнообразных методов фильтрации наблюдений. В ряде работ приводятся результаты использования теории оптимальной фильтрации стационарных случайных процессов по среднеквадратичному критерию качества [10, 45]. Подходы к решению задач фильтрации в этих работах основаны на упомянутых в § 4 и ставших уже классическими исследованиях А. Н. Колмогорова [38], Н. Винера [189], А. М. Яглома [98] и других авторов.

Использованию классических методов оптимальной фильтрации в практике обработки временных рядов океанологических наблюдений препятствует ряд причин: сложность построения уравнения фильтра, необходимость использования длинных рядов наблюдений, удовлетворяющих условию стационарности, и др. Эти трудности еще более возрастают, если одновременно с фильтрацией данных необходимо предсказывать будущие значения преобразованного ряда наблюдений. Между тем именно такая обработка измерений особенно важна в океанологических информационных системах, главной целью которых, как уже отмечалось, является прогнозирование наблюдаемого процесса.

Классические способы фильтрации, основанные на стохастических моделях процесса, оказываются недостаточно эффективными в практических ситуациях, когда имеются не слишком длинные (по сравнению с интервалом корреляции) ряды наблюдений. Поступление «свежей» информации — одиночных отсчетов измеряемого процесса — в подобных случаях слабо сказывается на ошибках обработки измерений. Между тем очевидно, что при оценке будущих значений процесса по короткому ряду наблюдений текущие измерения должны «усваиваться» наиболее полно.

Системный подход к изучению явлений в океане на основе использования ЭВМ и автоматизированных измерительных комплексов аппаратуры требует организации обработки наблюдений одновременно с измерениями процесса. Поэтому методы фильтрации должны быть «чувствительными» к текущей информации, поступающей в ЭВМ с датчиков аппаратуры.

Изложенные соображения объясняют целесообразность применения адаптивных алгоритмов оптимальной фильтрации океанологических наблюдений. В качестве основы для создания таких алгоритмов может быть использован метод фильтрации Калмана, который разработан и широко используется в современной теории управления [125—132]. Р. Калман, А. А. Фельдбаум и др. показали, что задача оптимальной фильтрации временного ряда наблюдений при определенных допущениях становится эквивалентной задаче конструирования линейной динамической системы управления, оптимизирующей среднеквадратичный критерий качества (см., например, [89, 128]).

Рассмотрим подробнее постановку Р. Калманом [125] задачи оптимальной фильтрации случайных процессов, имея в виду последующее использование результатов для обработки временных рядов наблюдений в океане. Пусть известны значения процесса \vec{z}_k , измеренные на некотором интервале времени $t_0 \leq \tau \leq t$. Эти значения «индуцируют» условные законы распределения вероятностей связанного с процессом \vec{z} процесса \vec{x} на интервале $[t_0, t]$, а также и за его пределами. Нахождение условных средних значений, т. е. оценок \hat{x} в пределах интервала наблюдений, есть задача фильтрации данных; при $\tau > t$ решается задача прогноза.

Обе задачи могут быть эффективно решены, если предположить, что ряд измеренных значений \vec{z}_k и профильтрованная составляющая ряда являются последовательностями Маркова с распределениями вероятностей Гаусса [98]. Условные функции распределения процесса по Гауссу полностью определяются своими средними значениями и дисперсиями. Если к тому же процесс обладает марковским свойством, достаточно оценить условные средние значения и дисперсии процесса для одного момента времени, чтобы иметь возможность восстанавливать его значения в любой другой момент.

В последнем случае условные средние значения зависят от измеренных величин процесса и определяются путем пропускания наблюдений через оптимальный фильтр. Условные дисперсии, напротив, не зависят от самих измерений, а определяются лишь количеством отсчетов и моментами времени между ними. Поэтому условные дисперсии могут быть рассчитаны заранее, если моменты времени будущих измерений процесса установлены заблаговременно. В свою очередь это позволяет заранее определять весовые коэффициенты для будущих измерений процесса и таким путем использовать их в процедуре оптимальной фильтрации ряда.

Выведем основные уравнения фильтра Калмана. Известно, что марковская случайная последовательность распределенных по Гауссу величин генерируется рекурсионным соотношением

$$\vec{x}(t+1) = \Phi(t+1, t) \vec{x}(t) + \Gamma(t+1, t) \vec{W}(t), \quad (6.1)$$

в котором $\vec{W}(t_0), \vec{W}(t_0+1), \dots$ — случайные вектора Гаусса, статистически не связанные друг с другом; $\Phi(t+1, t)$ — матрица, описывающая переходы в пространстве состояний системы (6.1) в различные моменты времени; $\Gamma(t+1, t)$ — матрица, учитывающая характер возбуждения системы, генерирующей процесс $\vec{x}(t)$.

Примем, что

$$E \{ \vec{W}(t) \} = 0 \quad \text{при всех } t, \quad (6.2)$$

тогда в силу свойств временного ряда $\vec{W}_k(t)$ его корреляционная матрица имеет вид

$$Q(t, t_1) = E \{ \vec{W}(t) \vec{W}^T(t_1) \} = \begin{cases} Q(t), & t = t_1, \\ 0, & t \neq t_1 \end{cases} \quad (6.3)$$

(индекс T означает транспонирование).

В общем случае прибор, измеряющий процесс, фиксирует не отсчеты \vec{x}_k , а некоторые преобразованные величины \vec{y}_k . Здесь и в дальнейшем мы будем считать, что прибор выполняет линейное преобразование процесса следующего вида:

$$\vec{z}(t) = H(t) \vec{x}(t) + \vec{v}(t) = \vec{y}(t) + \vec{v}(t), \quad (6.4)$$

в котором $\vec{v}(t)$ есть белый шум — ошибки измерений с корреляционной матрицей:

$$R(t, t_1) = E \{ \vec{v}(t) \vec{v}^T(t_1) \} = \begin{cases} R(t), & t = t_1, \\ 0, & t \neq t_1, \end{cases} \quad (6.5)$$

где $H(t)$ — матрица, характеризующая свойства измерительного прибора и процедуры измерений.

Уравнение (6.1) представляет собой линейное уравнение динамики наблюдаемого физического процесса. В то же время переменная $\vec{x}(t)$ характеризует состояние некоторой линейной динамической системы управления, описываемой этим уравнением. Таким образом, временному ряду наблюдений, моделируемому случайной последовательностью Гаусса — Маркова (6.1), эквивалентна дискретная линейная динамическая система управления, возбуждаемая белым шумом (рис. 7).

Вектор $\vec{x}(t)$ представляет собой некоторый «истинный» ненаблюдаемый в общем случае процесс. Ряд наблюдаемых значений процесса \vec{z}_k есть результат преобразования этого процесса звеном $H(t)$ и добавления шума $\vec{v}_k(t)$.

Введем обозначения

$$\hat{\vec{x}}(t_1 | t) = E \{ \vec{x}(t_1) | \vec{z}(t_0), \dots, \vec{z}(t) \}; \quad (6.6)$$

$$\tilde{\vec{x}}(t_1 | t) = \vec{x}(t_1) - \hat{\vec{x}}(t_1 | t); \quad (6.7)$$

$$P(t_1 | t) = E \{ \tilde{\vec{x}}(t_1 | t) \tilde{\vec{x}}^T(t_1 | t) \}. \quad (6.8)$$

$\hat{\vec{x}}(t_1 | t)$ — условное среднее значение $\vec{x}(t_1)$, найденное по отрезку ряда наблюдений $\vec{z}(\tau)$ при $t_0 \leq \tau \leq t$; $\tilde{\vec{x}}(t_1 | t)$ — «ошибка» фильтрации, т. е. отклонение оценки условного среднего значения процес-

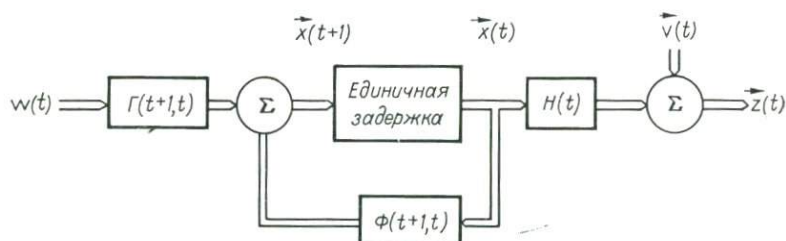


Рис. 7. Линейная динамическая система управления, эквивалентная случайной последовательности Гаусса — Маркова [126].

са в момент времени t от истинной величины; $P(t_1 | t)$ — матрица условных дисперсий ряда ошибок фильтрации.

Для нахождения оптимального фильтра при высказанных ранее предположениях относительно статистики временного ряда наблюдений необходимо получить формулы, выражающие $\hat{\vec{x}}(t+1 | t)$ и $P(t+1 | t)$ через известные величины. Следуя Р. Калману [125], будем искать выражение для $\hat{\vec{x}}(t+1 | t)$ по индукции, предположив, что значение $\hat{\vec{x}}(t | t-1)$ — известно. Уравнение (6.1), дающее выражение для условного среднего значения ряда в момент времени, может быть разбито на две части:

1) условное среднее значение, определенное наблюдениями

$$\vec{z}_0(t_0), \dots, \vec{z}(t-1), \quad (6.9)$$

2) условное среднее значение, определенное погрешностью предсказания наблюдения $\vec{z}(t)$ по ряду наблюдений

$$\tilde{\vec{z}}(t | t-1) = \vec{z}(t) - H(t) \hat{\vec{x}}(t | t-1) = H(t) \tilde{\vec{x}}(t | t-1) + \vec{V}(t). \quad (6.10)$$

Согласно теореме «об ортогональных проекциях» (см. § 4) оба множества величин (6.9) и (6.10) являются независимыми. Поэтому их

значения могут вычисляться порознь. Находя условные математические ожидания левой и правой частей равенства (6.1) по отношению к наблюдениям (6.9), получим

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1|t) = & \Phi(t+1, t) \hat{x}(t|t-1) + \Gamma(t+1, t) \hat{W}(t|t-1) + \\ & + E\{\vec{x}(t+1) | \vec{z}(t|t-1)\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Так как в силу условия (6.2) второй член в правой части полученного равенства обращается в нуль, задача сводится к определению последнего члена формулы.

Приведем важный для дальнейшего результат: условное среднее значение вектора Гаусса \vec{x}_1 по отношению к вектору Гаусса \vec{x}_2 есть случайный вектор Гаусса вида [3]

$$\vec{\mu}_1 + \sigma_{12} \sigma_{22}^{-1} (\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2). \quad (6.12)$$

Имея в виду этот результат, вернемся к вычислению условного среднего значения ряда наблюдений (6.11). Введем две матрицы ковариаций, которые характеризуют статистику ошибок фильтрации. Первая матрица имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\vec{z}(t|t-1)] = & \text{cov}[H(t) \vec{x}(t|t-1) + \vec{V}(t)] = \\ = & H(t) P(t|t-1) H^T(t) + R(t). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Для нахождения второй матрицы мы используем уравнение (6.1):

$$\begin{aligned} \text{cov}[\vec{x}(t+1), \vec{z}(t|t-1)] = \\ = \text{cov}[\Phi(t+1, t) \vec{x}(t) + \Gamma(t+1, t) \vec{W}(t), \vec{z}(t|t-1)] = \\ = \text{cov}[\Phi(t+1, t) \vec{x}(t|t-1), \vec{z}(t|t-1)] + \text{cov}[\Gamma(t+1, t) \vec{W}(t), \vec{V}(t)] = \\ = \Phi(t+1, t) P(t|t-1) H^T(t) + \Gamma(t+1, t) C(t), \end{aligned} \quad (6.14)$$

где матрица $C(t)$ учитывает возможную взаимную корреляцию между белым шумом $\vec{W}(t)$ и ошибками наблюдений $\vec{V}(t)$

$$\text{cov}[\vec{W}(t), \vec{V}(t)] = C(t). \quad (6.15)$$

Теперь можно выразить через введенные матрицы последний член уравнения (6.11). Применяя к нему формулу (6.12), получим

$$\begin{aligned} E\{\vec{x}(t+1) | \vec{z}(t|t-1)\} = & E\{\vec{x}(t+1)\} + E\{\vec{x}(t+1), \\ & \vec{z}(t|t-1)^T\} E\{\vec{z}(t|t-1) \vec{z}(t|t-1)^T\}^{-1} \vec{z}(t|t-1) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -E \{ \vec{z}(t|t-1) \} &= \text{cov} [\vec{x}(t+1), \vec{z}(t|t-1)] \text{cov} [\vec{z}(t|t-1)]^T \times \\
 &\times \vec{z}(t|t-1) = [\Phi(t+1, t) P(t|t-1) H^T(t) + \Gamma(t+1, t) C(t)] \times \\
 &\times [H(t) P(t|t-1) H^T(t) + R(t)]^T \vec{z}(t|t-1). \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

Подставим выражение (6.16) в формулу (6.11) и используем равенство (6.10)

$$\hat{\vec{x}}(t+1|t) = \psi(t+1, t) \hat{\vec{x}}(t|t-1) + K(t) \vec{z}(t). \quad (6.17)$$

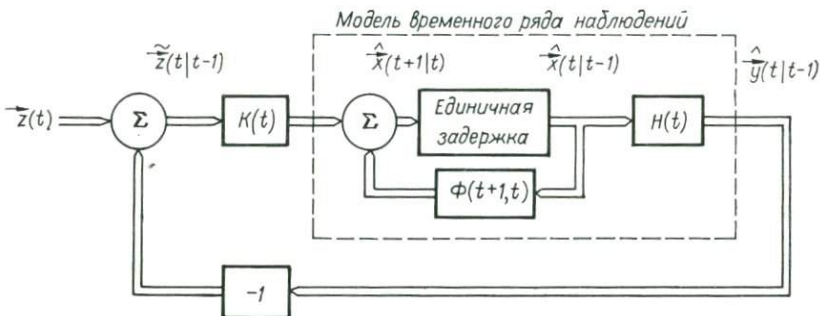


Рис. 8. Линейная динамическая система, эквивалентная уравнениям оптимального фильтра [126].

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 K(t) &= [\Phi(t+1, t) P(t|t-1) H^T(t) + \Gamma(t+1, t) C(t)] \times \\
 &\times [H(t) P(t|t-1) H^T(t) + R(t)]^T, \quad (6.18)
 \end{aligned}$$

$$\psi(t+1, t) = \psi(t+1, t) \hat{\vec{x}}(t|t-1) + K(t) \vec{z}(t). \quad (6.19)$$

Уравнения (6.17), (6.18) являются уравнениями оптимального фильтра Калмана.

Уравнения фильтра могут быть представлены в виде замкнутой системы автоматического управления (рис. 8), в которую в качестве отдельного элемента включена модель временного ряда наблюдений (рис. 7).

Сигнал ошибки фильтрации ряда пропускается в этой системе через звено с передаточной функцией $K(t)$. Это звено такое же, как и вход в систему, являющуюся моделью временного ряда при условии, что условное среднее значение $\hat{\vec{x}}(t+1)$ берется по отношению к разности $\vec{z}(t) - \hat{\vec{z}}(t|t-1)$, т. е. к ошибкам предсказания измерений процесса. Это условное среднее состоит из двух частей: одна из

них обусловлена оценкой величины $\hat{x}(t+1|t-1)$, другая — оценкой $\vec{w}(t)$.

Прогнозируемое значение ряда наблюдений $\hat{x}(t+1|t)$ может быть получено в момент времени t . Однако в уравнении оптимального фильтра используется оценка $\hat{x}(t|t-1)$, поэтому в цепи обратной связи модели предусмотрена задержка на единичный интервал времени.

Величина матрицы $K(t)$ показывает, какое количество информации относительно состояния системы $\vec{x}(t+1)$ содержится в ошибках фильтрации $\vec{z}(t|t-1)$.

В уравнениях оптимального фильтра (6.17), (6.18) содержится матрица условных ковариаций ошибок фильтрации $P(t|t-1)$, которую необходимо выразить через известные на момент времени t величины. Для нее Р. Калманом было установлено рекурсионное соотношение. Остановимся на этом выводе [125].

Напишем выражение для ковариации ошибок фильтра

$$\begin{aligned} \text{cov}[\vec{x}(t+1|t-1)] &= \text{cov}[\Phi(t+1, t)\vec{x}(t|t-1) + \\ &+ \Gamma(t+1, t)\vec{W}(t)] = \Phi(t+1, t)P(t|t-1)\Phi^T(t+1, t) + \\ &+ \Gamma(t+1, t)Q(t)\Gamma^T(t+1, t), \end{aligned} \quad (6.20)$$

Одним из следствий формулы (6.12) является следующее утверждение: матрица ковариаций случайного вектора Гаусса \vec{x}_1 , условны х по отношению к вектору \vec{x}_2 , не зависит от \vec{x}_2 и определяется выражением

$$\sigma_{11} - \sigma_{12}^T \sigma_{22}^{-1} \sigma_{12}. \quad (6.21)$$

Подставляя в формулу (6.21) выражение (6.20) и выполняя преобразование, получим

$$\begin{aligned} P(t+1|t) &= \Phi(t+1, t) \{P(t|t-1) - [P(t|t-1)H^T(t) + \\ &+ \Gamma(t+1, t)C(t)][H(t)P(t|t-1) + C^T(t)\Gamma^T(t+1, t)] \times \\ &\times \Phi^T(t-1, t) + \Gamma(t+1, t)Q(t)\Gamma^T(t+1, t)\}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Полученное рекурсионное соотношение позволяет выразить величину $P(t+1|t)$ через значения $P(t|t-1)$ и таким путем осуществлять последовательную фильтрацию временного ряда наблюдений.

Таким образом, уравнения (6.17)—(6.19) и (6.22) полностью определяют распределения вероятностей будущих значений временного ряда наблюдений, т. е. при всех $t' \geq t$, условные по отношению

к известному отрезку ряда $\vec{z}(t_0), \dots, \vec{z}(t)$. Важным свойством рекурсионного соотношения является его независимость от значений ряда наблюдений. Матрица условных ковариаций зависит только от взаимного положения членов ряда (отсчетов физического процесса) на временной оси. Это свойство открывает возможности для рационального планирования океанографических наблюдений.

Для решения уравнения (6.22) необходимо определить начальное состояние матрицы ковариаций $P(t_0 | t_0 - 1)$. Поскольку

$$P(t_0 | t_0 - 1) = P(t_0) = \text{cov}[\vec{x}(t_0)], \quad (6.23)$$

в качестве начального состояния обычно принимается дисперсия временного ряда наблюдений.

Резюмируя приведенную в этом параграфе постановку Калманом задачи оптимальной фильтрации временного ряда наблюдений, сформулируем еще раз основные результаты.

Решение задачи фильтрации состоит в вычислении условного среднего значения и условной дисперсии ряда наблюдений по формулам (6.17)—(6.19) и (6.22).

Условные средние значения находятся с помощью оптимального фильтра (6.17)—(6.19), представляющего собой замкнутую систему управления, на вход которой поступают измерения физического процесса. В качестве начального состояния фильтра принимается условие $\hat{\vec{x}}(t_0 | t_0 - 1) = 0$.

Условные дисперсии рассчитываются с помощью рекурсионного соотношения (6.22). Они не зависят от измерений процесса и определяются только количеством наблюдений и интервалами между ними. Условные дисперсии позволяют найти $K(t)$ — весовую матрицу оптимального фильтра. Начальное состояние $P(t_0)$ в рекурсионном соотношении принимается равным дисперсии процесса.

Решение проблемы фильтрации особенно удобно проводить одновременно с предсказыванием будущих значений ряда. В этом случае $\hat{\vec{x}}(t + 1 | t)$ и $P(t + 1 | t)$ содержат всю необходимую информацию для нахождения условной функции распределения вероятностей будущих значений процесса.

Поскольку в процессе обработки временного ряда наблюдений происходит изменение матриц $P(t + 1 | t)$ и $K(t)$, фильтр Калмана «подстраивается» под статистику ошибок предсказания и выходит на оптимальный режим фильтрации, отвечающий минимальным погрешностям. Таким образом, фильтр Калмана представляет собой саморегулирующийся алгоритм обработки данных.

Отмеченные свойства фильтра Калмана дают основание предполагать, что их использование при обработке временных рядов океанографических наблюдений позволит создать методы фильтрации и предсказания данных, обладающие высокой точностью и использующие небольшой объем фактических наблюдений. Следу-

ет, однако, отметить, что практическая реализация алгоритма фильтрации связана с рядом трудностей, обусловленных сложностью формул фильтрации и отсутствием общих рекомендаций по выбору физически обоснованных математических моделей временных рядов океанографических наблюдений.

§ 7. Алгоритм оптимальной фильтрации временных рядов океанологических наблюдений

Общие уравнения фильтра Калмана (6.17)—(6.19) и (6.22), полученные в предыдущем параграфе, представляют собой достаточно сложную систему матричных соотношений. В них предусмотрена возможность управления возбуждающим воздействием на входе динамической системы, эквивалентной наблюдаемому гидрофизическому процессу, а также учтена возможная корреляция между этим воздействием и ошибками измерений. Для изучения свойств фильтра, проявляющихся при обработке временных рядов океанографических наблюдений, целесообразно упростить основные уравнения и перейти к рассмотрению следующей математической модели ряда [172]:

$$\begin{aligned}\vec{x}_k &= \Phi_{k,k-1}\vec{x}_{k-1} + \vec{W}_{k-1}, \\ \vec{z}_k &= H_k\vec{x}_k + \vec{V}_k.\end{aligned}\quad (7.1)$$

В уравнениях (7.1) вектор \vec{x}_k представляет состояние эквивалентной линейной динамической системы, возбуждаемой со стороны входа случайной последовательностью \vec{W}_k в пространстве состояний (\vec{x}) [101]. Управления возбуждением теперь нет.

Уравнение измерений процесса (6.4) мы сохраняем в прежней форме. Будем считать, что корреляции между векторами \vec{W}_k и \vec{V}_k также нет, а их статистика известна и подчинена следующим условиям:

$$\begin{aligned}E\{\vec{W}_k\} &= E\{\vec{V}_k\} = 0, \\ E\{\vec{W}_k\vec{W}_k^T\} &= Q_k\delta_{kj}, \\ E\{\vec{V}_k\vec{V}_k^T\} &= R_k\delta_{kj}, \\ E\{\vec{V}_k\vec{W}_k^T\} &= E\{\vec{V}_k\vec{x}_k^T\} = 0.\end{aligned}\quad (7.2)$$

Предположим, что в нашем распоряжении имеется ряд наблюдений гидрофизического процесса, выполненных до момента времени t_{k-1} включительно. Находя, с учетом формул (7.2), оценку по формуле (7.1), имеем

$$\vec{x}'_k = \Phi_{k,k-1}\vec{x}_{k-1}.\quad (7.3)$$

Аналогичным образом можно найти предсказанное значение измерения процесса в момент времени t_k :

$$\vec{z}_k = H_k \Phi_{k,k-1} \vec{x}_{k-1}. \quad (7.4)$$

Образум разность

$$\vec{e}_k = \vec{z}_k - H_k \Phi_{k,k-1} \hat{\vec{x}}_{k-1}.$$

Согласно теореме об ортогональных проекциях [98] разности \vec{e}_k содержат ту же информацию о процессе, что и сами измерения. Поэтому оценка процесса в момент времени t_k может быть представлена в следующем виде:

$$\hat{\vec{x}}_k = \Phi_{k,k-1} \hat{\vec{x}}_{k-1} + K_k [\vec{z}_k - H_k \Phi_{k,k-1} \hat{\vec{x}}_{k-1}], \quad (7.5)$$

где K_k — весовая матрица оптимальной фильтрации. Уравнение (7.5) представляет собой более простую форму уравнения (6.17). Значения матрицы K_k должны минимизировать среднеквадратичную ошибку оценки состояния системы. Обозначим величину этой ошибки P_k . Как отмечалось в § 6, в фильтре Калмана происходит последовательная минимизация ошибки P_k по мере адаптации фильтра.

Для нахождения весовой матрицы K_k рассмотрим первоначально но выражение для P_k :

$$P_k = E \{ (\hat{\vec{x}}_k - \vec{x}_k)^T (\hat{\vec{x}}_k - \vec{x}_k) \} = E \{ \tilde{\vec{x}}_k \tilde{\vec{x}}_k^T \}, \quad (7.6)$$

где

$$\tilde{\vec{x}}_k = \hat{\vec{x}}_k - \vec{x}_k.$$

Подставляя в формулу (7.6) выражения (7.3)—(7.5), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{x}} &= (\Phi_{k,k-1} \hat{\vec{x}}_{k-1} + K_k [\vec{z}_k - H_k \Phi_{k,k-1} \hat{\vec{x}}_{k-1}]) - \Phi_{k,k-1} \vec{x}_{k-1} - \vec{W}_{k-1} = \\ &= \Phi_{k,k-1} \hat{\vec{x}}_{k-1} - K_k H_k \Phi_{k,k-1} \hat{\vec{x}}_{k-1} + K_k \vec{V}_k + K_k H_k \vec{W}_{k-1} - \vec{W}_{k-1} = \\ &= (J - K_k H_k) (\Phi_{k,k-1} \hat{\vec{x}}_{k-1} - \vec{W}_{k-1}) + K_k \vec{V}_k. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Подставим далее полученное соотношение в выражение для P_k :

$$\begin{aligned} P_k &= E \{ [(J - K_k H_k) (\Phi_{k,k-1} \hat{\vec{x}}_{k-1} - \vec{W}_{k-1}) + K_k \vec{V}_k] [(J - K_k H_k) \times \\ &\times (\Phi_{k,k-1} \hat{\vec{x}}_{k-1} - \vec{W}_{k-1}) + K_k \vec{V}_k]^T \} = (J - K_k H_k) \Phi_{k,k-1} \times \\ &\times E \{ \hat{\vec{x}}_{k-1} \hat{\vec{x}}_{k-1}^T \} \Phi_{k,k-1}^T (J - K_k H_k)^T + (J - K_k H_k) Q_{k-1} \times \\ &\times (J - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T. \end{aligned}$$

Обозначим

$$P'_k = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}. \quad (7.8)$$

Тогда выражение для матрицы ошибок фильтрации принимает вид

$$P_k = (J - K_k H_k) P'_k (J - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T = P'_k - K_k H_k P'_k - \\ - P'_k H_k^T K_k^T + K_k (H_k P'_k H_k^T + R_k) K_k^T. \quad (7.9)$$

Анализ формулы (7.9) позволяет получить выражение для нахождения оптимальной весовой матрицы K_k . Так как P'_k не зависит от K_k , а матрица $(H_k P'_k H_k^T + R_k)$ является симметричной и положительно определенной, формулу (7.9) можно переписать в виде [3]

$$P_k = P'_k + (K_k S_k - A_k) (K_k S_k - A_k)^T - A_k A_k^T, \quad (7.10)$$

где $S_k S_k^T = H_k P'_k H_k^T + R_k$, A_k — некоторая матрица. Выражение (7.10) эквивалентно образованию квадратичного полинома, являясь дополнением до полного квадрата. Почленное сравнение формул (7.9) и (7.10) позволяет определить неизвестную матрицу A_k :

$$A_k = P'_k H_k^T (S_k^{-1})^T. \quad (7.11)$$

Минимум P_k достигается при обращении выражений в скобках в нуль. Поэтому

$$A_k = K_k S_k = P'_k H_k^T (S_k^{-1})^T.$$

Отсюда для весовой матрицы фильтра имеем

$$K_k = P'_k H_k^T [H_k P'_k H_k^T + R_k]^{-1}. \quad (7.12)$$

Подставляя выражение (7.12) в формулу (7.9), получим

$$P_k = P'_k - K_k H_k P'_k. \quad (7.13)$$

Формулы (7.5), (7.8), (7.11) и (7.13) представляют собой упрощенный вариант уравнений оптимального фильтра Калмана (6.17)—(6.19) и (6.22).

Уравнение (7.5), как и общее уравнение (6.17), позволяет получить оценку среднего значения условного закона распределения вероятностей процесса для будущего момента времени. Весовая матрица K_k в уравнении (7.5), которая вычисляется независимо от ряда наблюдений, определяется величиной дисперсии условного закона распределения вероятностей. Для нахождения условной дисперсии необходимо решить уравнение (7.13).

Последовательность операций при фильтрации временного ряда наблюдений теперь состоит в следующем [172]:

1) В начальный момент времени $t = t_0$ на основании физических соображений и априорной информации о процессе определяются величины $\hat{P}_0, \hat{x}_0, \hat{Q}_0$. Для получения несмещенных оценок в качестве

\vec{x}_0 берется среднее значение процесса, которое обычно принимается равным нулю. В качестве P_0 выбирается дисперсия процесса.

2) В момент времени поступления первого измерения процесса $t = t_1$ находится предполагаемая оценка дисперсии ошибок фильтрации

$$P'_1 = \Phi_{1,0} P_0 \Phi_{1,0}^T + Q_0.$$

3) Рассчитывается весовая матрица

$$K_1 = P'_1 H_1^T [H_1 P'_1 H_1^T + R_1]^{-1}.$$

4) Находится профильтрованное значение ряда наблюдений

$$\hat{x}_1 = \Phi_{1,0} \hat{x}_0 + K_1 [\vec{z}_1 - H_{1,0} \Phi_{1,0} \hat{x}_0].$$

5) Рассчитывается дисперсия ошибки фильтрации

$$P_1 = P'_1 + K_1 H_1 P'_1.$$

6) Вычисляется прогнозируемое значение ряда

$$\hat{x}_2 = \Phi_{21} \hat{x}_1.$$

7) В момент времени $t = t_2$, когда поступает следующий член ряда наблюдений, все операции повторяются.

Таким образом, процесс фильтрации временного ряда наблюдений имеет итеративный характер. По мере поступления новой информации последовательно минимизируется дисперсия ошибок фильтрации. Через некоторое число шагов фильтр достигает установившегося режима, которому соответствует минимальная ошибка обработки.

Для практического использования алгоритма теперь остается определить основные матрицы, характеризующие модель временного ряда наблюдений: Φ , H , P_0 , Q_0 , R . Как уже отмечалось, общих методов нахождения этих матриц по данным наблюдений не существует. Однако в каждом конкретном случае они могут быть построены на основании имеющейся информации о процессе.

§ 8. Идентификация параметров моделей стационарных гидрофизических процессов

Большинство физических процессов, исследуемых в океане, имеют сплошные спектры, заключенные в широком диапазоне пространственных масштабов и временных частот. Каждое отдельное явление в океане, изучаемое в определенной области масштабов и частот, можно рассматривать как макроскопическое следствие огромного количества независимых случайных явлений, происходящих в области более мелких масштабов и более высоких частот. Являясь результатом суперпозиции мелкомасштабных флуктуаций, наблюдаемые гидрофизические процессы чаще всего имеют распределение вероятностей Гаусса [72].

В § 6, 7 отмечалось, что временной ряд океанографических наблюдений, имеющий распределение вероятностей Гаусса, можно рассматривать как процесс на выходе линейной динамической системы, возбуждаемой со стороны входа белым шумом. Этот шум эквивалентен по мощности энергии мелкомасштабных флуктуаций процесса.

Практически выбор линейной математической модели ряда наблюдений уже означает допущение распределения вероятностей процесса Гаусса. Принимая во внимание указанную зависимость, моделирование ряда следует начинать с оценки параметров закона распределения его значений.

Степень близости закона распределения вероятностей к таковому Гаусса может быть установлена обычными средствами: нахождением асимметрии, эксцесса, критерия Корню и др. Мы не будем останавливаться на этих вопросах, адресуя читателя к специальным руководствам по статистике (см., например, [75]); примем, что анализируемый ряд наблюдений всегда распределен по Гауссу. Отметим, что такое допущение оправдывается еще и тем обстоятельством, что в случае распределения не по Гауссу часто путем несложных преобразований можно привести исходный ряд к ряду с нормальным распределением вероятностей [75].

Вывод формулы фильтра Калмана в § 6 существенно опирался на предположение о том, что изучаемый процесс носит характер процесса Маркова. Случайная последовательность величин y_0, y_1, \dots, y_k , которой мы моделируем временной ряд наблюдений, является последовательностью Маркова, если для всех y_k

$$P_r[y_k | y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_0] = P_r[y_k | y_{k-1}], \quad (8.1)$$

т. е. если плотности распределения вероятностей для «будущих» значений ряда y_k зависят только от известных в «настоящий» момент времени значений y_{k-1} и не зависят от всех предшествующих величин ряда y_i ($i < k - 1$). Плотность совместного распределения вероятностей случайной последовательности Маркова может быть полностью определена заданием начальной плотности распределения $P_r(y_0)$ и плотностей вероятностей перехода процесса из состояния y_{k-1} в состояние y_k $P_r[y_k | y_{k-1}]$. Она равна произведению плотностей вероятностей переходов и начальной плотности распределения

$$P_r[y_k, y_{k-1}, \dots, y_0] = P_r[y_k | y_{k-1}] P_r[y_{k-1} | y_{k-2}] \dots \dots P_r[y_1 | y_0] P_r[y_0]. \quad (8.2)$$

Плотность распределения $P_r[y_{k-1}]$ случайной последовательности Гаусса — Маркова, как отмечалось в § 6, полностью определяется заданием двух детерминированных последовательностей: условных средних значений и условных матриц ковариаций.

Для практической оценки соответствия временного ряда наблюдений случайной последовательности Маркова достаточно воспользоваться свойством «марковости в широком смысле». Это свойство

заключается в следующем [118]. Пусть D_{kj} — корреляционная матрица некоторой (в общем случае векторной) случайной последовательности \vec{x}_k между членами \vec{x}_k и \vec{x}_j . Если эта матрица удовлетворяет соотношению

$$D_{kj}D_{ji}^{-1}D_{il} = D_{ki} \quad (t_k \geq t_j \geq t_l), \quad (8.3)$$

то последовательность является марковской в широком смысле.

Легко убедиться, что все временные ряды с экспоненциальными корреляционными функциями удовлетворяют соотношению (8.3) и, следовательно, могут быть моделированы случайными последовательностями Маркова. В тех случаях, когда это соотношение не выполняется, исходный ряд y_k можно преобразовать в векторный \vec{x}_k , корреляционная матрица которого подчинена условию (8.3). Для этого достаточно взять в качестве компонент вектора \vec{x}_k m последовательных значений исходного ряда наблюдений (ошибки измерений здесь не учитываются)

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_{k-m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1x_k \\ {}^2x_k \\ \vdots \\ {}^mx_k \end{pmatrix}.$$

Величина m определяется по характеру корреляционной функции ряда с учетом известных физических свойств процесса.

Высказанные соображения дают основание считать, что временные ряды океанографических наблюдений могут быть моделированы случайными последовательностями \vec{x}_k Гаусса и Маркова. Здесь вектор \vec{x}_k может рассматриваться как вектор состояния многомерной линейной динамической системы, возбуждаемой чисто случайной последовательностью Гаусса и имеющей начальное состояние по Гауссу:

$$\vec{x}_k = \Phi_{k,k-1}\vec{x}_{k-1} + \vec{W}_{k-1}. \quad (8.4)$$

Для идентификации параметров оптимального фильтра Калмана теперь необходимо определить переходную матрицу системы $\Phi_{k,k-1}$ в выражении (8.4) из физических условий и наблюдений. Матрица $\Phi_{k,k-1}$ представляет дифференциальный механизм переходов вектора состояния системы в пространстве (\vec{x}) и соответствует некоторому линейному дифференциальному уравнению, описывающему динамику исследуемого процесса в океане:

$$a_m \frac{d^m Y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} Y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 Y(t) = u(t), \quad (8.5)$$

где $u(t)$ — случайное возбуждение на входе системы.

Исходя из общих свойств решений линейных дифференциальных

уравнений при нахождении параметра m в каждом конкретном случае следует учитывать известные физические закономерности процесса. Например, если известно, что временной ряд содержит явно выраженные периодические составляющие (суточный ход температуры в верхнем слое моря, инерционные колебания скорости течений и т. д.), порядок уравнения и величины коэффициентов должны быть выбраны из условий существования периодических ре-

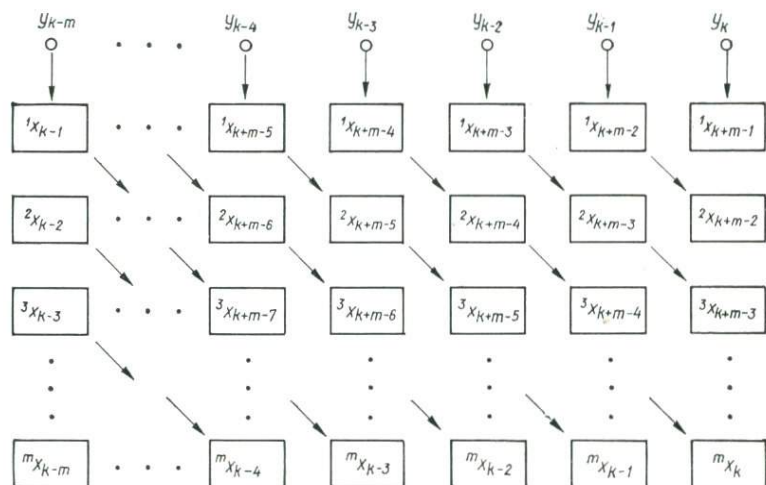


Рис. 9. Схема образования векторного процесса \vec{x}_k .

шений. Чем выше порядок уравнения, тем больше последовательных членов ряда наблюдений участвуют в качестве компонент вектора \vec{x}_k и тем больше исходной информации, содержащейся в наблюдениях, используется при оптимальной фильтрации (предсказании). С другой стороны, с увеличением порядка уравнения возрастает сложность математической обработки ряда (увеличивается порядок матриц фильтра). Поэтому в конкретных ситуациях следует находить компромисс между этими противоречивыми тенденциями.

Поскольку временные ряды наблюдений являются дискретными ординатами непрерывного процесса в океане, уравнение динамики (8.5) должно быть переписано в эквивалентной конечно-разностной форме

$$y_k = \alpha_1 y_{k-1} + \alpha_2 y_{k-2} + \dots + \alpha_0 y_0 + W_{k-1}. \quad (8.6)$$

Для приведения уравнения (8.6) к каноническому уравнению последовательности (8.4) Гаусса — Маркова введем m -мерный вектор \vec{x}_k , т. е. положим $k = m$. Компоненты вектора \vec{x}_k выразим через величину y_k ряда наблюдений, согласно схеме, приведенной на рис. 9. Например, для уравнения динамики третьего порядка ($k =$

= 3), пользуясь этой схемой, получаем

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} {}^1x_k \\ {}^2x_k \\ {}^3x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{k-2} \\ y_{k-1} \\ y_k \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_{k-1} = \begin{pmatrix} y_{k-3} \\ y_{k-2} \\ y_{k-1} \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Выразим переходную матрицу $\Phi_{k,k-1}$ случайной последовательности Маркова (8.4) через корреляционную матрицу преобразованного временного ряда \vec{x}_k . Подставляя уравнение (8.4) в формулу для корреляционной матрицы

$$D_{k,k-1} = E \{ \vec{x}_k \vec{x}_{k-1}^T \}, \quad (8.8)$$

получим

$$E \{ [\Phi_{k,k-1} \vec{x}_{k-1} + \vec{W}_{k-1}] \vec{x}_{k-1}^T \} = \Phi_{k,k-1} E \{ \vec{x}_{k-1} \vec{x}_{k-1}^T \} + E \{ \vec{W}_{k-1} \vec{x}_{k-1}^T \}. \quad (8.9)$$

Считая, что статистической связи между случайным возбуждением \vec{W}_k и вектором \vec{V}_k нет, из формулы (8.9) получим

$$D_{k,k-1} = \Phi_{k,k-1} D_{k-1,k-1}.$$

Далее, используя свойство положительной определенности корреляционной матрицы, нетрудно разрешить последнее соотношение относительно матрицы

$$\Phi_{k,k-1} = D_{k,k-1} D_{k-1,k-1}^{-1}. \quad (8.10)$$

Формула (8.10) устанавливает замечательную связь между корреляционной матрицей временного ряда наблюдений и переходной матрицей эквивалентной ему линейной динамической системы управления. Эта связь является следствием марковского характера ряда \vec{x}_k , что тем самым оправдывает введенные нами преобразования исходного ряда y_k в ряд \vec{x}_k .

Свойство ряда \vec{x}_k по Маркову позволяет столь же просто выразить ковариационную матрицу случайного возбуждения на входе системы Q_k через матрицу корреляций $D_{k,k-1}$. По определению (см. § 7) матрица Q_k имеет вид

$$Q_k = E \{ \vec{W}_k \vec{W}_k^T \}. \quad (8.11)$$

Подставляя в формулу (8.11) выражение для \vec{W}_k из формулы (8.4), находим [172]:

$$\begin{aligned} Q_{k-1} &= \{ \vec{W}_{k-1} \vec{W}_{k-1}^T \} = E \{ (\vec{x}_k - \Phi_{k,k-1} \vec{x}_{k-1}) (\vec{x}_k - \Phi_{k,k-1} \vec{x}_{k-1})^T \} = \\ &= D_{kk} - \Phi_{k,k-1} D_{k-1,k} - \Phi_{k,k-1}^T D_{k,k-1} + \Phi_{k,k-1} \Phi_{k,k-1}^T D_{k-1,k-1}. \end{aligned}$$

Используя соотношение (8.10), нетрудно показать, что последние два члена сокращаются. Таким образом, выражение для матри-

цы принимает вид

$$Q_{k-1} = D_{kk} - D_{k,k-1}D_{k-1,k-1}^{-1}D_{k-1,k}. \quad (8.12)$$

Процедура моделирования океанографических процессов может быть автоматизирована путем составления специальной программы анализа на ЭВМ временных рядов наблюдений. Основной операцией при этом должно быть определение порядка и коэффициентов уравнения динамики (8.5). Для этого воспользуемся методом максимального правдоподобия [73]. Обозначив $c_y(j)$ — выборочную оценку ковариационной функции ряда наблюдений, получим следующие разностные уравнения правдоподобия:

$$c_y(j) = \hat{\alpha}_1 c_y(j-1) + \hat{\alpha}_2 c_y(j-2) + \dots + \hat{\alpha}_m c_y(j-m) \\ (j = 1, 2, \dots, m).$$

Выборочная оценка остаточной дисперсии имеет вид

$$S_u^2(m) = \frac{1}{N-2m-1} S(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_m).$$

Как известно, величина S_u^2 должна принимать минимальное значение в точке, соответствующей порядку уравнения (8.5). В тех случаях, когда функция $S_u^2(m)$ не имеет отчетливо выраженного минимума, метод можно усилить нахождением частной корреляционной функции.

Эти соображения были положены в основу предложенной в работе [86] программы автоматического моделирования и оптимальной фильтрации океанографических процессов. Программа содержит полный цикл операций идентификации параметров фильтра, начиная от ввода наблюдений и кончая выдачей предсказанных значений процесса на заданный интервал времени вперед.

§ 9. Прогнозирование стационарных гидрофизических процессов методом Калмана

Мы рассмотрим на примерах процедуру моделирования временных рядов океанографических наблюдений и оптимальной фильтрации их значений. С чисто иллюстративными целями мы остановимся на наблюдениях, проведенных в северо-западной части Средиземного моря. Эти измерения были осуществлены летом 1969 г. на французском буе-лаборатории, который находился в Лионском заливе (примерно в 100 милях южнее Марселя) и был установлен на глубине 2500 м. Наблюдения проводились в ходе первой советско-французской экспедиции COFRASOV-I по проблеме «Взаимодействие атмосферы и океана» на буе-лаборатории и на нис «Михаил Ломоносов» [35].

Обработка ряда наблюдений глубины изотермического слоя. На основании измерений с буя-лаборатории температуры моря на фиксированных горизонтах были построены изотермы, представляю-

щие вариации глубины залегания слоя с постоянной температурой.

Обозначим сглаженный ряд y_k и будем считать его «полезной» составляющей ряда наблюдений z_k . Для упрощения расчетов здесь мы ограничимся уравнением динамики (8.5) первого порядка. Практически это означает экспоненциальную аппроксимацию корреляционной функции составляющей y_k . На рис. 10 приведены выборочные оценки корреляционной функции и ее аппроксимация экспонентой

$$D_{k,k-1} = \exp \langle -0,25 | t_k - t_{k-1} | \rangle. \quad (9.1)$$

Уравнение динамики в данном случае имеет простейший вид

$$y_k = \alpha_1 y_{k-1} + \omega_{k-1}. \quad (9.2)$$

Оно совпадает по форме со скалярным каноническим уравнением динамики случайной последовательности Маркова

$$x_k = \Phi_{k,k-1} x_{k-1} + \omega_{k-1}. \quad (9.3)$$

Подставим выражение для корреляционной функции (9.1) в формулы (8.10) и (8.12) и найдем выражения для матриц $\Phi_{k,k-1}$ и Q_{k-1} , которые в нашем случае содержат только по одному члену:

$$\begin{aligned} \Phi_{k,k-1} &= \exp \langle -0,25 | t_k - t_{k-1} | \rangle, \\ Q_{k-1} &= 1 - \exp \langle -0,5 | t_k - t_{k-1} | \rangle. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Итерационный алгоритм фильтрации принимает вид

$$\Phi_{1,0} = 0,75; \quad Q_1 = 0,4; \quad P_0 = 1; \quad R = 0,68; \quad H = 1; \quad \hat{x}_0 = 0, \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= 0,75 \hat{x}_{k-1} + K_k [z_k - 0,75 \hat{x}_{k-1}], \\ P'_k &= 0,56 P_{k-1} + 0,4, \\ K_k &= P'_k [P'_k + 0,68]^{-1}, \\ P_k &= P'_k [1 - K_k]. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Последовательное выполнение итераций по схеме (9.6) показало, что величины P_k — ошибки фильтрации и K_k — весовой коэффициент фильтра достигают установившихся значений уже на шестом — девятом члене ряда. Для оценки фактической погрешности фильтрации была вычислена дисперсия отклонений

$$\tilde{x}_k = y_k - \hat{x}_k. \quad (9.7)$$

Ее величина оказалась равной 0,1.

Целью второго эксперимента явилось нахождение зависимости ошибки оптимальной фильтрации от временного интервала между последовательными «измерениями» процесса. Для этого были проведены расчеты по формулам (9.6), (9.7) с различными интервалами: 2, 4, 8, 12 и 16 ч. По результатам расчетов была построена кри-

вая $E\{\tilde{x}^2\}$, изображенная на рис. 10. С увеличением интервала ошибки фильтрации, как и следовало ожидать, растет.

Предсказание вектора скорости течения в море по временному ряду наблюдений. Прогноз измеренных значений скорости течений с помощью введенной в § 7 математической модели ряда наблюдений был рассмотрен в работе [82]. Остановимся на результатах этой работы.

В качестве ряда наблюдений в ней были использованы измерения скорости течений в Лионском заливе, выполненные при помощи вертушек Плесси на французском буе-лаборатории. На рис. 11 приведены результаты корреляционно-спектрального анализа наблюдений скорости течений.

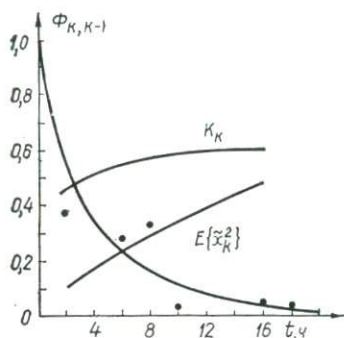


Рис. 10. Переходная функция $\Phi_{k,k-1}$, весовая функция K_k и ошибка прогнозирования глубины изотермического слоя моря $E\{\tilde{x}_k^2\}$.

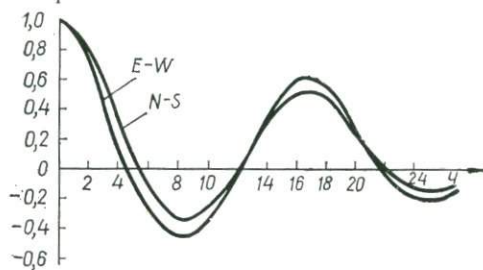


Рис. 11. Корреляционные функции широтной ($E - W$) и меридиональной ($N - S$) составляющих скорости течений.

Исходя из отмеченных особенностей временного ряда вектора скорости течений, примем, что сглаженные меридиональная и широтная составляющие ряда могут быть представлены линейными уравнениями второго порядка

$$a_2 \frac{d^2 Y}{dt^2} + a_1 \frac{dY}{dt} + [Y(t) - \mu] = W(t), \quad (9.8)$$

где Y — составляющая скорости течений, W — чисто случайный процесс, μ — среднее значение составляющей скорости.

Как известно [75], уравнение (9.8) описывает колебательный процесс, если корни π_1 и π_2 его характеристического уравнения

$$d_2 c^2 + d_1 c + 1 = 0$$

комплексны:

$$\pi_1 = \omega_n e^{i\theta}, \quad \pi_2 = \omega_n e^{-i\theta}.$$

В этом случае процесс $Y(t)$ имеет экспоненциально-косинусную корреляционную функцию.

Так как отсчеты скорости течения выполняются в дискретные моменты времени t_k , уравнение (9.8) следует привести к дискретной

форме:

$$Y_k - \mu = \alpha_1(Y_{k-1} - \mu) + \alpha_2(Y_{k-2} - \mu) + W_k \quad (9.9)$$

($k = 1, 2, 3, \dots$).

В форме (9.9) уравнение описывает дискретную линейную динамическую систему второго порядка, на вход которой подается через равные промежутки времени возбуждающий систему белый шум W_k . Под действием возбуждения система совершает возмущенное периодическое движение.

Будем считать, что среднее значение процесса $\mu = 0$. Введем обозначения

$$Y_{k-1} = 'x_k; \quad Y_k = ''x_k; \quad \vec{x}_k = ('x_k, ''x_k), \quad (9.10)$$

тогда уравнение (9.9) может быть представлено в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 'x_k \\ ''x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 'x_{k-1} \\ ''x_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ W_k \end{bmatrix}. \quad (9.11)$$

Вектор \vec{x}_k будем называть состоянием дискретной линейной динамической системы, выходом которой являются профильтрованные временные ряды наблюдений — проекций скорости течений. Матрицу

$$\Phi_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}_{k,k-1} \quad (9.12)$$

назовем переходной матрицей системы, поскольку она описывает переходы вектора \vec{x}_k в пространстве состояний системы (\vec{x}_k) [101].

Каждый член исходного временного ряда наблюдений представляет собой измерение состояния системы — сглаженных значений компонент скорости в момент времени t_k . В векторно-матричной форме процесс измерения принимает вид

$$\begin{bmatrix} 'z_k \\ ''z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 'x_k \\ ''x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V_k \end{bmatrix}. \quad (9.13)$$

Воспользуемся упрощенным вариантом фильтра Калмана, полученным в § 7. Определим основные матрицы, входящие в формулы фильтра (7.5), (7.8), (7.12) и (7.13).

Обозначая члены матриц соответствующими верхними индексами слева, вместо уравнения (7.8) будем иметь

$$\begin{aligned} {}^{11}P'_k &= {}^{22}P_{k-1}; \\ {}^{12}P'_k &= {}^{21}\Phi_{k,k-1} {}^{21}P_{k-1} + {}^{22}\Phi_{k,k-1} {}^{22}P_{k-1}; \\ {}^{21}P'_k &= {}^{21}\Phi_{k,k-1} {}^{12}P_{k-1} + {}^{22}\Phi_{k,k-1} {}^{22}P_{k-1}; \\ {}^{22}P'_k &= ({}^{21}\Phi_{k,k-1})^2 {}^{12}P_{k-1} + {}^{22}\Phi_{k,k-1} {}^{21}\Phi_{k,k-1} [{}^{21}P_{k-1} + {}^{12}P_{k-1}] + \\ &\quad + ({}^{22}\Phi_{k,k-1})^2 {}^{22}P_{k-1} + {}^{22}Q_{k-1}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Теперь можно решить уравнение (7.13) относительно членов весовой матрицы

$$\begin{aligned} {}^{11}K_k &= {}^{12}P'_k [{}^{22}P'_k + {}^{11}R]^{-1}; \\ {}^{21}K_k &= {}^{22}P'_k [{}^{22}P'_k + {}^{11}R]^{-1}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Наконец, для завершения итерационного цикла найдем члены матрицы P_k из уравнения (7.13):

$$\begin{aligned} {}^{11}P_k &= {}^{11}P'_k - {}^{11}K_k {}^{21}P'_k, & {}^{12}P_k &= {}^{12}P'_k - {}^{11}K_k {}^{22}P'_k, \\ {}^{21}P_k &= {}^{21}P'_k [1 - {}^{21}K_k], & {}^{22}P_k &= {}^{22}P'_k [1 - {}^{21}K_k]. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Таким образом, остается определить конкретные значения матриц Φ , Q , R и P_0 по исходному ряду наблюдений. Эти матрицы играют роль констант (для стационарных процессов) при решении задачи прогноза.

Выразим переходную матрицу фильтра Φ через матрицу коэффициентов корреляции ряда наблюдений D . Для этого подставим в формулу (8.10) соотношения (8.8) и (9.10)

$$\begin{aligned} \Phi_{k,k-1} &= D_{k-1,k-1}^{-1} \begin{bmatrix} E \{Y_{k-1}, Y_{k-2}\} & E \{Y_{k-1}, Y_{k-1}\} \\ E \{Y_k, Y_{k-2}\} & E \{Y_k, Y_{k-1}\} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} d_{k-1,k-2} d_{k-1,k-1} & \\ d_{k,k-2} d_{k,k-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{k-2,k-2} d_{k-2,k-1} \\ d_{k-1,k-2} d_{k-1,k-1} \end{bmatrix}^{-1}, \end{aligned} \quad (9.17)$$

где введены обозначения $d_{k,k-1} \equiv \{Y_k Y_{k-1}\}$.

Решая матричное уравнение (9.17) относительно членов матрицы $\Phi_{k,k-1}$, получим

$$\begin{aligned} {}^{11}\Phi_{k,k-1} &= 0, \\ {}^{12}\Phi_{k,k-1} &= 1, \\ {}^{21}\Phi_{k,k-1} &= \frac{d_{k,k-1} [d_{k,k-2} - d_{k-1,k-2}]}{d_{k-2,k-1} [d_{k,k-2} - d_{k-1,k-2}] + d_{kk}^2}, \\ {}^{22}\Phi_{k,k-1} &= \frac{d_{kk} d_{k,k-1}}{d_{k-2,k-1} [d_{k,k-2} - d_{k-1,k-2}] + d_{kk}^2}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Сопоставим полученные соотношения для членов матрицы с равенством (9.12). Как видим, формулы (9.18) дают выражения для коэффициентов линейной регрессии рядов наблюдений скорости

$${}^{k,k-1}\alpha_2 = {}^{21}\Phi_{k,k-1}, \quad {}^{k,k-1}\alpha_1 = {}^{22}\Phi_{k,k-1}.$$

Аналогичным путем из уравнения (8.11) легко получить формулы для членов ковариационной матрицы возбуждения на входе системы

$$\begin{aligned} {}^{11}Q_{k-1} &= {}^{12}Q_{k-1} = {}^{21}Q_{k-1} = 0, \\ {}^{22}Q_{k-1} &= d_{kk} - {}^{21}\Phi_{k,k-1} d_{k-2,k} - {}^{22}\Phi_{k,k-1} d_{k-1,k}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Таким образом, процедуру моделирования ряда наблюдений скорости течений можно считать законченной.

Эксперименты по прогнозированию значений скорости течений на основе полученных формул были организованы следующим образом. Исходные данные наблюдений проекций скорости течений предварительно были осреднены по интервалу 4,5 ч для выделения сглаженных составляющих Y_k . Корреляционные функции составляющих приведены на рис. 11. Флуктуационные составляющие оказались практически некоррелированными и были моделированы белым шумом с дисперсией, имеющей величину 20% дисперсии исходного ряда.

В соответствии с приведенным алгоритмом ставились задачи фильтрации и прогнозирования каждого из сглаженных рядов по двум, следующим друг за другом, отсчетам скорости

В соответствии с приведенным алгоритмом ставились задачи фильтрации и прогнозирования каждого из сглаженных рядов по двум, следующим друг за другом, отсчетам скорости

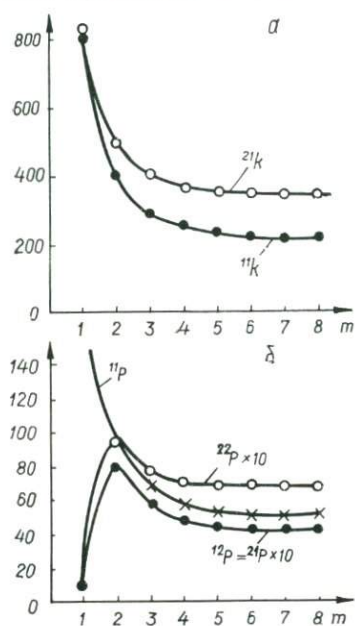


Рис. 12. Изменение параметров фильтра Калмана с ростом числа итераций:
 а — весовые коэффициенты, б — элементы корреляционной матрицы ошибок.

В последнем выражении черта над Y_{k-1} означает оценку сглаженной составляющей без учета измерения, поступающего в момент времени t_k .

Профильтрованные по формуле (9.20) значения \hat{Y}_{k-1} и \hat{V}_{k-2} далее использовались для предсказания будущих величин ряда Y_{k-1+n}

$$\hat{Y}_{k-1+n} = ^{21}\Phi_n \hat{Y}_{k-2} + ^{22}\Phi_n \hat{Y}_{k-1}. \quad (9.21)$$

Для определения точности фильтрации и предсказания сопоставлены значения ряда, рассчитанные по формулам (9.13) и (9.25) с фактическими значениями соответствующих сглаженных составляющих.

На рис. 12, а показан ход изменения весовых коэффициентов оптимальной фильтрации в зависимости от числа итераций. Как

$$Y_{k-2} = ^1x_{k-1};$$

$$Y_{k-1} = ^{11}x_{k-1}.$$

Предсказываемое (фильтруемое) значение составляющих рассчитывалось на момент времени t_{k-1+n} , где n характеризует интервал упреждения при прогнозировании.

Формула (9.12) для случая фильтрации принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{k-1+n} = & ^{21}\Phi_n \bar{Y}_{k-2} + \\ & + ^{22}\Phi_n \bar{Y}_{k-1} + ^{21}K_n [z_{k-1+n} - \\ & - ^{21}\Phi_n \bar{Y}_{k-2} - ^{22}\Phi_n \bar{Y}_{k-1}]. \end{aligned} \quad (9.20)$$

следует из рисунка, алгоритм фильтрации приходит в устойчивое состояние уже на седьмой-восьмой итерации. Расчеты весовых коэффициентов фильтра Калмана, проведенные при различных упреждениях, показали, что с ростом заблаговременности прогноза (увеличение параметра) сходимости фильтра к устойчивому состоянию улучшаются. Например, для случая предсказания значений ряда на 24 ч вперед устойчивые значения весовых коэффициентов достигаются через три-четыре итерации.

На рис. 12, б показан ход изменения коэффициентов корреляционной матрицы ошибок фильтрации для интервала упреждения

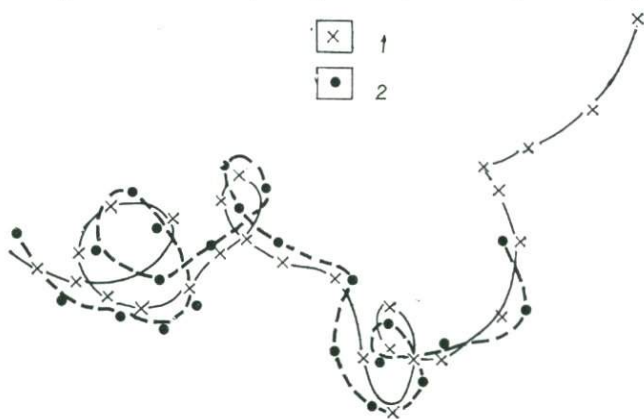


Рис. 13. Прогнозирование прогрессивного вектора скорости на 15 ч вперед (глубина 5 м):

1 — измеренные величины скорости, 2 — прогностические значения.

0,5 ч. Аналогичные зависимости имели место для других интервалов упреждения.

Среднеквадратичная ошибка фильтрации по формуле (9.24) по результатам расчетов составляла 30—40% дисперсии сглаженной составляющей ряда. На рис. 13 приведен пример предсказания сглаженных значений вектора скорости течений с интервалом упреждения 15 ч. Для сопоставления измеренных и предсказанных значений вектора скорости использовались наблюдения, выполненные на французском бье-лаборатории на глубине 5 м. Графики, построенные по результатам обработки исходного ряда наблюдений и по результатам расчетов по формулам (9.24) и (9.25), — прогрессивные векторы скорости течений [149] — свидетельствуют об удовлетворительном совпадении «измеренных» и предсказанных значений скорости.

§ 10. Моделирование нестационарных гидрофизических процессов

Нестационарность гидрофизических процессов обычно проявляется в уходе среднего значения процесса от постоянного уровня (тренде) и в изменениях выборочных корреляционных функций. Если обработка ряда наблюдений производится после получения всего ряда, проще всего устранить нестационарность одним из обычных приемов (скользящее осреднение и др.). Эти приемы, хорошо разработанные в статистике (см., например, [75]), широко используются в современной океанографии.

При автоматизации обработки наблюдений в условиях морских экспедиций возникает проблема анализа нестационарных процессов непосредственно в ходе измерений. В этом случае необходимо применять более тонкие приемы учета нестационарности, которые существуют в теории управления, но практически еще не нашли применения в океанологии.

Важное значение приобретает учет нестационарности при системном подходе к моделированию гидрофизических процессов для целей прогноза их значений в реальном масштабе времени. Теория оптимальной фильтрации Р. Калмана и Р. Бьюси, на которой основан системный подход, открывает возможности для разработки адаптивных фильтров, позволяющих «отслеживать» простые формы нестационарности гидрофизических процессов.

Р. Калман моделировал прогнозируемую составляющую ряда наблюдений детерминированным линейным уравнением динамики, т. е. использовал параметрический подход. В этом направлении большой интерес представляют также работы Г. Дженкинса и Д. Ватса [25] и Дж. Бокса и Г. Дженкинса [13].

Параметрический подход к моделированию нестационарных гидрофизических процессов, по-видимому, является наиболее перспективным для использования в судовых автоматизированных системах сбора и обработки информации. Анализ временных рядов наблюдений можно разбить на два основных этапа: выбор параметрической модели ряда и предсказание значений наблюдаемого процесса. В подобной форме задача моделирования гидрофизических процессов представлена в работе [13]. Остановимся на этой работе и рассмотрим модели, описывающие однородные нестационарные процессы в океане.

Известно, что для таких процессов d -я разность будет стационарна с нулевым средним значением и ее можно описать следующей разностной схемой:

$$\Phi(B) z_t = \Theta(B) a_t, \quad (10.1)$$

т. е.

$$\Phi(B) \omega_t = \Theta(B) a_t, \quad (10.2)$$

где $\omega_t = \nabla^d z_t$; $t = 0, 1, 2, \dots, N$; N — длина ряда z_t ; ∇ — оператор взятия разности $\nabla z_t = z_t - z_{t-1}$; B — оператор сдвига назад

$Bz_t = z_{t-1}$; a_t — белый шум; $\varphi(B)$ — обобщенный нестационарный оператор; $\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \dots - \Phi_p B^p$ — оператор авторегрессии порядка p ; $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ — оператор скользящего среднего порядка q . Предполагается, что оператор $\Phi(B)$ стационарен, т. е. корни характеристического уравнения $\Phi(B) = 0$ лежат вне единичного круга, оператор $\theta(B)$ обратим, т. е. корни характеристического уравнения $\theta(B) = 0$ лежат вне единичного круга.

Случай, когда корни уравнения $\Phi(B) = 0$ лежат на единичной окружности, представляет однородные нестационарные процессы. В частности, непериодические ряды хорошо описываются моделями, у которых одни или несколько корней равны единице. Эти модели имеют уравнения вида (10.1), (10.2) и называются моделями авторегрессии — проинтегрированного скользящего среднего порядка (p, d, q) . Процесс в этом случае определяется из формулы (10.2):

$$\omega_t = \Phi_1 \omega_{t-1} + \dots + \Phi_p \omega_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}. \quad (10.3)$$

При $d = 0$ модель (10.3) описывает стационарный процесс. Требования стационарности и обратимости накладываются независимо, и в общем случае операторы $\Phi(B)$ и $\theta(B)$ имеют разные порядки.

Модель (10.3) содержит определенные параметры, значения которых должны оцениваться по экспериментальным данным. Остановимся конкретно на каждом этапе построения моделей.

Выбор полезного класса моделей, идентификация пробной модели. Пусть известен временной ряд z_1, z_2, \dots, z_n . Первоначально в предположении стационарности находятся выборочные оценки среднего значения и автокорреляционной функции ряда. Анализ выборочных оценок позволяет определить полезный класс моделей. В частности, в него могут входить модели, записанные либо в виде процесса авторегрессии порядка p , либо процесса скользящего среднего порядка q , либо смешанного процесса авторегрессии — скользящего среднего порядка (p, q) . Каждый из этих процессов можно трактовать как выход линейного фильтра, входом которого служит белый шум. Передаточные функции фильтров принимают соответственно вид $\Phi^{-1}(B)$, $\theta(B)$, $\Phi^{-1}(B)\theta(B)$. Для того чтобы сузить класс моделей, представляющих исходный временной ряд, обычно используются методы идентификации моделей. Конкретная цель идентификации — выбор значений p, d, q и получение предварительных оценок параметров модели.

Проведем анализ выборочных автокорреляционной и частной автокорреляционной функций. В работе [25] показано, что автокорреляционная функция стационарного процесса авторегрессии удовлетворяет разностному уравнению

$$r_k = \hat{\Phi}_1 r_{k-1} + \hat{\Phi}_2 r_{k-2} + \dots + \hat{\Phi}_p r_{k-p}, \quad (10.4)$$

$$k = 0, 1, \dots, K,$$

Поведение автокорреляционных функций для d -й разности процесса

Порядок уравнения	(1, d , 0)	(0, d , 1)
Поведение ρ_k	Экспоненциально затухают	Только $\rho_1 \neq 0$
Поведение Φ_k	Только $\Phi_{11} \neq 0$	Доминирует экспоненциальное затухание
Предварительные оценки	$\Phi_1 = \rho_1$	$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$
Допустимый диапазон	$-1 < \Phi_1 < 1$	$-1 < \theta_1 < 1$

а частная автокорреляционная функция — системе уравнений

$$r_j = \hat{\Phi}_{k1} r_{j-1} + \dots + \hat{\Phi}_{k(k-1)} c_{j-k+1} + \hat{\Phi}_{kk} r_{j-k}, \quad (10.5)$$

$$j = 0, 1, \dots, k,$$

где $\hat{\Phi}_{kj}$ — выборочная оценка j -го коэффициента процесса авторегрессии порядка k ; Φ_{kk} — выборочная оценка последнего коэффициента процесса авторегрессии порядка k . Последовательно меняя порядки процессов авторегрессии 1, 2, 3, ..., k , найдем значения частных автокорреляционных функций $\hat{\Phi}_{11}$, $\hat{\Phi}_{22}$, ..., $\hat{\Phi}_{kk}$. Тогда для процессов авторегрессии порядка p имеем

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_{kk} \neq 0 & \text{для } k \leq p, \\ \hat{\Phi}_{kk} = 0 & \text{для } k > p. \end{cases}$$

Другими словами, частная автокорреляционная функция процесса авторегрессии порядка p обрывается на интервале, следующем за p . Автокорреляционная функция такого процесса состоит из совокупности затухающих экспонент и синусоид. Если один из корней характеристического уравнения $\Phi(B) = 0$ близок к единице, автокорреляционная функция процесса будет спадать медленно и почти линейно. Это свидетельствует о нестационарности процесса z_t , хотя возможно, что его разности ∇z_t , $\nabla^2 z_t$, $\nabla^3 z_t$ — стационарны. Поэтому следует найти три разностных ряда

$$\nabla z_t = \omega_t^{(1)} = z_t - z_{t-1},$$

$$\nabla^2 z_t = \omega_t^{(2)} = z_t - 2z_{t-1} + z_{t-2},$$

$$\nabla^3 z_t = \omega_t^{(3)} = z_t - 3z_{t-1} + 3z_{t-2} - z_{t-3}.$$

авторегрессии — проинтегрированного скользящего среднего порядка (p, d, q)

(2, $d, 0$)	(0, $d, 2$)	(1, $d, 1$)
<p>Наложение экспонент и затухающих синусоид</p> <p>Только $\Phi_{11} \neq 0, \Phi_{22} \neq 0$</p> $\Phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \Phi_2 = \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}$ $-1 < \Phi_2 < 1, \Phi_2 + \Phi_1 < 1, \Phi_2 - \Phi_1 < 1$	<p>Только $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$</p> <p>Доминирует наложение экспонент и затухающих синусоид</p> $\rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$ $\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$ $ \theta_2 < 1, \theta_2 + \theta_1 < 1, \theta_2 - \theta_1 < 1$	<p>Экспоненциально затухают, начиная с первой задержки</p> <p>С первой задержки доминирует экспоненциальное затухание</p> $\rho_1 = \frac{(1-\theta_1\Phi_1)(\Phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\Phi_1\theta_1}$ $\rho_2 = \rho_1\Phi_1$ $-1 < \Phi_1 < 1 \quad -1 < \theta_1 < 1$

Далее, для каждого ряда, начиная с исходного, вычисляется среднее значение

$$\bar{\omega}^{(d)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \omega_t^{(d)}, \quad (10.6)$$

автоковариационная функция

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (\omega_t^{(d)} - \bar{\omega}^{(d)}) (\omega_{t+k}^{(d)} - \bar{\omega}^{(d)}), \quad (10.7)$$

$$k = 0, 1, \dots, K$$

и автокорреляционная функция

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}, \quad k = 0, 1, \dots, K. \quad (10.8)$$

Выберем по 20 точек автокорреляционной и частной автокорреляционной функции для каждого ряда и определим, при каком d автокорреляционная функция быстро затухает. Идентифицировав таким образом d на основании анализа поведения выборочных автокорреляционной и частной автокорреляционной функции, можно подобрать значения p и q .

Свойства теоретических автокорреляционной и частной автокорреляционной функций для различных моделей авторегрессии — скользящего среднего — приведены в табл. 1 [25]. Таким образом, после первого этапа идентификации становятся известными значения p, d, q .

На втором этапе идентификации находятся начальные оценки для Φ из уравнения Юла-Уокера

$$\hat{\Phi} = R_p^{-1} r_p, \quad (10.9)$$

где R_p — выборочная корреляционная матрица размером $(p \times p)$, содержащая коэффициенты корреляции r_k до порядка $p - 1$; r_p — вектор (r_1, r_2, \dots, r_p) . В отличие от процессов скользящего среднего порядка оценки параметров авторегрессии, получаемые из (10.9), весьма близки к эффективным оценкам максимального правдоподобия [13]. В предположении порядка авторегрессии p выборочные частные автокорреляции порядка $p + 1$ и выше приближенно независимы и имеют дисперсию вида $\sigma^2 [\hat{\Phi}_{kk}] \simeq \frac{1}{n}$, где $n = N - d$ [13]. Тогда стандартная ошибка выборочной частной автокорреляции

$$\sigma [\hat{\Phi}_{kk}] \simeq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad k \geq p + 1. \quad (10.10)$$

Ограничимся в нашем случае вычислением для частных автокорреляций доверительных пределов в две стандартные ошибки. Пользуясь модифицированной последовательностью ковариаций c_j процесса ω ,

$$c'_j = \sum_{i=0}^p \Phi_i^2 c_i + \sum_{i=1}^p (\Phi_0 \Phi_i + \Phi_1 \Phi_{i+1} + \dots + \Phi_{p-i} \Phi_p) d_i, \quad (10.11)$$

$$d_j = c_{j+1} + c_{j-1}, \quad \Phi_0 = -1, \quad j = 0, 1, \dots, q,$$

получим начальные оценки параметров скользящего среднего в модели гидрофизического процесса. Для этого воспользуемся методом Ньютона — Рафсона, обладающим быстрой сходимостью

$$\theta_j = -\tau_j / \tau_0, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (10.12)$$

Обозначим $\tau' = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_q)$, где $\tau_0^2 = \sigma_a^2$. Тогда, если τ^i — оценка τ , полученная в результате i -й итерации, новые значения в результате $(i + 1)$ -й итерации вычисляем по формуле

$$\tau^{i+1} = \tau^i - (T^i)^{-1} f_i, \quad (10.13)$$

где

$$f' = (f_0, f_1, \dots, f_q), \quad f_i = \sum_{i=0}^{q-i} \tau_i \tau_{i+i} - c'_i,$$

$$T = \begin{vmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_q \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_q & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_q \\ 0 & \tau_0 & \dots & \tau_{q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tau_0 \end{vmatrix}.$$

Получив установившееся значение τ , находим значения параметров θ_j по формуле (10.12). В конце второго этапа идентификации вычисляем оценку дисперсии белого шума, которую предста-

$$\hat{\sigma}_a^2 = \begin{cases} \tau_0^2, & q > 0 \\ c_0 - \sum_{i=1}^p \hat{\Phi}_i c_i, & q = 0. \end{cases} \quad (10.14)$$

Оценивание параметров. После того как процесс идентификации привел к пробному варианту модели процесса, вычислим эффективные оценки ее параметров. Для нахождения оценок воспользуемся принципом максимального правдоподобия.

Пусть $n = N - d$ разностей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ образуют ряд W . Тогда задача подгонки параметров Φ и θ смешанной модели авторегрессии — проинтегрированного скользящего среднего порядка (p, d, q) — эквивалентна задаче подгонки к ω стационарной смешанной модели авторегрессии — скользящего среднего порядка (p, q) , — которую можно представить в виде

$$a_t = \tilde{\omega}_t - \Phi_1 \tilde{\omega}_{t-1} - \Phi_2 \tilde{\omega}_{t-2} - \dots - \Phi_p \tilde{\omega}_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q}, \quad (10.15)$$

где $\omega = \nabla^d z_t$ и $\tilde{\omega}_t = \omega_t - \mu$ с $\bar{\omega} = \mu$. Для $d > 0$ $\mu = 0$, так как $\nabla^d z_t = \Delta^d z_t$ (10.15). Значения ω не могут быть сразу представлены в (10.15) для вычисления a_t , так как начальные условия разностного уравнения еще неизвестны. Вычислив p значений W_* ряда ω и q значений a_* ряда a , найдем по формуле (10.15) величины a_1, a_2, \dots, a_n . Предположив, что a распределены по нормальному закону, найдем условную сумму квадратов:

$$S_*(\Phi, \theta) = \sum_{t=1}^n a_t^2(\Phi, \theta/W_*, a_*, W), \quad (10.16)$$

которая дает оценки максимального правдоподобия параметров (Φ, θ) . Значения условной суммы квадратов S_* находятся в интервале обратимости параметра θ , т. е. от -1 до $+1$.

Для наглядности [78] проводилось аналитическое и графическое изучение условной функции правдоподобия. Отметим, что условная сумма квадратов S_* вычислялась только для процессов скользящего среднего порядка $(0, d, q)$. Для процессов авторегрессии оценки находились из уравнения Юла-Уокера. В общем случае для любой смешанной модели вычислялась безусловная сумма квадратов

$$S(\Phi, \theta) = \sum_{t=-h}^n [a_t/\Phi, \theta, W]^2, \quad (10.17)$$

где $[a_t/\Phi, \theta, W] = E [a_t/\Phi, \theta, W]$ — условное математическое ожидание a_t при фиксированных Φ, θ и W ; h соответствует случаю $[\omega_{-h}] = 0$.

Диагностическая проверка модели. Предположим, что при помощи методов, описанных выше, по конкретному временному ряду

идентифицирована модель процесса в океане и оценены ее параметры. Эта модель должна быть подвергнута диагностической проверке на адекватность исследуемому процессу.

Один из методов диагностической проверки — введение в модель избыточных параметров. Идентифицировав модель и считая ее правильной, можно убедиться в том, что более сложная модель не улучшает качества прогноза процесса.

Другой способ проверки качества модели основан на анализе остаточных ошибок оценки параметров модели. Этот метод более удобен на практике. Предположим, что была использована модель $\hat{\Phi}(B)\omega_t = \hat{\theta}(B)a_t$ и на ее основе получены оценки максимального правдоподобия $(\hat{\Phi}, \hat{\theta})$. Тогда величины $\hat{a}_t = \hat{\theta}^{-1}(B)\hat{\Phi}(B)\omega_t$ называются остаточными ошибками. Доказано, что для адекватной модели $\hat{a}_t = a_t + \theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ [13].

По мере увеличения длины ряда \hat{a}_t становится все ближе к белому шуму a_t . Следовательно, можно ожидать, что изучение a_t может выявить и указать природу неадекватности модели: при точной оценке параметров Φ и θ выборочные автокорреляции ряда $r_k(\hat{a})$ должны быть некоррелированы и распределены приблизительно нормально относительно нулевого среднего с дисперсией $\frac{1}{n}$. Эти факты можно использовать для оценки статистической значимости кажущихся отклонений автокорреляций от нуля.

На практике мы не знаем истинных значений параметров, а располагаем только выборочными оценками $(\hat{\Phi}, \hat{\theta})$, по которым можем вычислить не a , а \hat{a} . Поэтому удобнее оценить адекватность модели, пользуясь критерием

$$Q = n \sum_{m=1}^k r_m^2(\hat{a}). \quad (10.18)$$

Если подгоняемая модель удовлетворительна, то Q распределено приближенно как λ^2 с $(k - p - d)$ степенями свободы, где $n = N - d$ — число значений ω , используемых при подгонке. В случае несоответствия модели исследуемым данным значение Q будет больше значения λ^2 с $(k - p - d)$ степенями свободы.

Таким образом, всесторонняя проверка подобранной модели завершает алгоритм моделирования нестационарных случайных процессов в океане. Модель позволяет осуществлять анализ и предсказание наблюдаемых в океане процессов на ЭВМ непосредственно в ходе измерений.

§ 11. Автоматизация моделирования и прогнозирования на ЭВМ нестационарных гидрофизических процессов

Применяя параметрический подход Дженкинса и Бокса [13], поставим целью автоматизировать весь процесс анализа временного ряда наблюдений: от выбора основных параметров модели до нахождения прогностических оценок процесса, измеряемого в океане.

Пусть известны значения временного ряда до момента времени t включительно. Необходимо найти прогнозируемое значение ряда z_{t+l} в момент $t + l$.

Наблюдение z_{t+l} , генерируемое процессом

$$\varphi(B) z_t = \Phi(B) (1 - B)^d z_t = \theta(B) a_t,$$

можно выразить при помощи разностного уравнения

$$z_{t+l} = \varphi_1 z_{t+l-1} + \dots + \varphi_{p+d} z_{t+l-p-d} - \theta_1 a_{t+l-1} - \dots - \theta_q a_{t+l-q} + a_{t+l}, \quad (11.1)$$

$$\varphi(B) = \Phi(B) (1 - B)^d = \Phi(B) \nabla^d, \quad (11.2)$$

где $\varphi(B)$ — нестационарный оператор; $\Phi(B)$ — стационарный оператор. Тогда, как отмечалось выше, прогноз $z_t(l)$ с минимальной среднеквадратичной ошибкой есть условное математическое ожидание величины z_{t+l} при заданных значениях z_t, z_{t-1}, \dots

$$\hat{z}_t(l) = [z_{t+l}] = E(z_{t+l}/z_t, z_{t-1}, \dots). \quad (11.3)$$

Поэтому достаточно взять условное математическое ожидание от каждого члена уравнения (11.1), чтобы получить прогностические оценки $\hat{z}_t(l)$:

$$\hat{z}_t(l) = \varphi_1 [z_{t+l-1}] + \dots + \varphi_{p+d} [z_{t+l-p-d}] + [a_{t+l}] - \theta_1 [a_{t+l-1}] - \dots - \theta_q [a_{t+l-q}]. \quad (11.4)$$

При вычислении условных математических ожиданий в (11.4) полагаем

$$\begin{aligned} [z_{t-j}] &= z_{t-j}, & j &= 0, 1, 2, \dots, \\ [z_{t+j}] &= \hat{z}_t(j), & j &= 1, 2, \dots, \\ [a_{t-j}] &= a_{t-j} = z_{t-j} - \hat{z}_{t-j-1}(1), & j &= 0, 1, 2, \dots, \\ [a_{t+j}] &= 0, & j &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11.5)$$

Чтобы найти доверительные пределы для прогнозов, вычисляемых по формуле (11.4), и иметь возможность получать новые прогнозы путем коррекции старых, нужно найти весовые коэффициенты $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{l-1}$ из уравнения

$$\varphi(B) \psi(B) = \theta(B) \quad (11.6)$$

с помощью уравнивания коэффициентов при одинаковых степенях B . Зная значения φ и θ , в результате получим выражения для ψ :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 1, \quad \psi_1 = \varphi_1 - \theta_1, \quad \psi_2 = \varphi_1\psi_1 + \varphi_2 - \theta_2, \dots, \\ \psi_j &= \varphi_1\psi_{j-1} + \dots + \varphi_{p+d}\psi_{j-p-d} - \theta_j, \\ \psi_j &= 0 \quad \text{при } j < 0 \text{ и } \theta_j = \theta \quad \text{при } j > q. \end{aligned} \quad (11.7)$$

При $j > k$ веса ψ удовлетворяют разностному уравнению

$$\psi_j = \varphi_1\psi_{j-1} + \varphi_2\psi_{j-2} + \dots + \varphi_{p+d}\psi_{j-p-d}, \quad (11.8)$$

где k — наибольшее из целых чисел $(p + d - 1)$ и q . Подставляя значения весов, вычисленных по формулам (11.7), (11.8), в формулу

$$z_{t+l}(\pm) = \hat{z}_t(l) \pm u_{\varepsilon/2} \left(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2 \right)^{1/2} \sigma_a, \quad (11.9)$$

найдем доверительные интервалы прогнозов для любого уровня вероятности и каждого упреждения l . Здесь $u_{\varepsilon/2}$ — квантиль уровня $1 - \varepsilon/2$ стандартного нормального распределения [75].

Когда становится известным новое наблюдение временного ряда z_{t+1} , прогноз для момента $t + 1$ может быть подправлен по формуле

$$\hat{z}_{t+1}(l) = \hat{z}_t(l + 1) + \psi_l a_{t+1}. \quad (11.10)$$

Для этого нужно вычислить новое значение ошибки прогноза

$$a_{t+1} = z_{t+1} - \hat{z}_t(1) \quad (11.11)$$

и использовать разностное уравнение (11.4), в котором t заменить на $t + 1$. Дисперсия ошибки прогноза на l шагов вперед для любого момента t определяется выражением

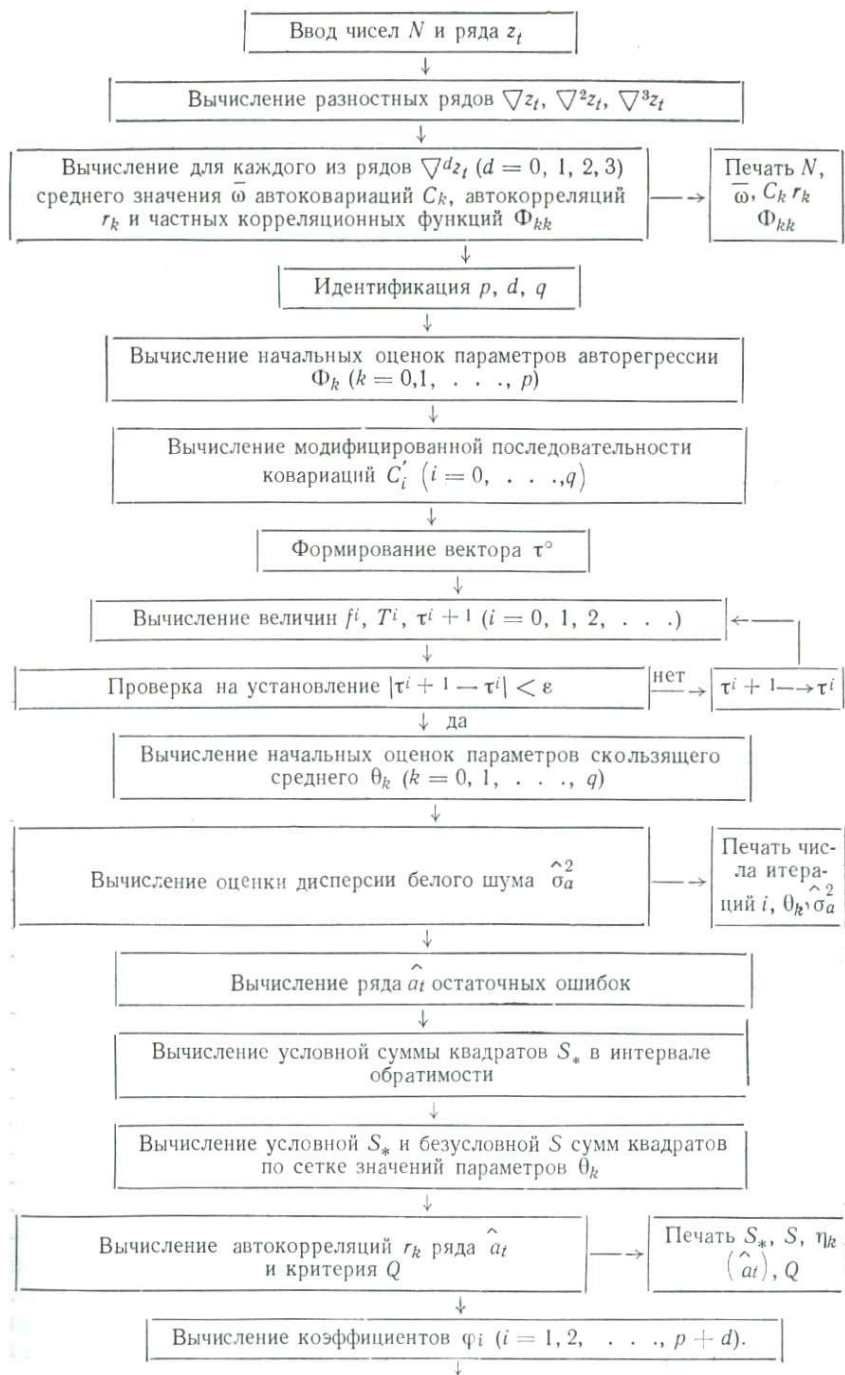
$$V(l) = \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2 \right\} \sigma_a^2. \quad (11.12)$$

Ошибки прогноза, допущенные в различные моменты времени, имеют автокорреляционные функции, рассчитываемые по формуле

$$\rho[e_t(l), e_{t-j}(l)] = \begin{cases} \frac{\sum_{i=j}^{l-1} \psi_i \psi_{i-j}}{\sum_{i=0}^{l-1} \psi_i^2}, & 0 \leq j < l, \\ 0, & j \geq l. \end{cases} \quad (11.13)$$

Как видно из формулы (11.13), автокорреляции ρ для задержек, больших l , равны 0.

Изложенные соображения были положены в основу создания написанной на языке АЛГОЛ программы, позволяющей проводить для каждого временного ряда три этапа итеративного построения моделей и прогнозирование значений временных рядов для различных упреждений. Блок-схема программы имеет вид:



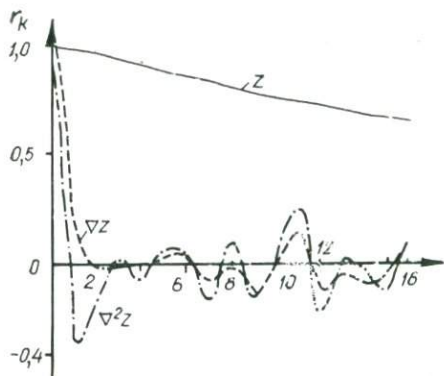


Описанный алгоритм моделирования и программа автоматической обработки ряда наблюдений были применены к измерениям различных гидрофизических процессов. Некоторые результаты обработки приведены в статье [79].

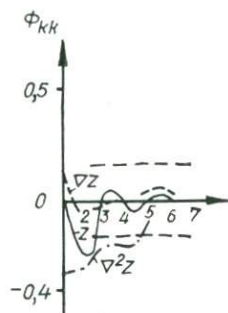
Основой для численных расчетов послужили три временных нестационарных ряда: A, B, C . Ряды A, B — температура воды на горизонтах 1 и 150 м. (Эти временные ряды были построены по данным отчета Скрипсовского института океанографии [2]. Продолжительность наблюдения — с 22 мая по 31 октября 1964 г.) Ряд C — температура воды на горизонте 15 м. (Этот ряд был построен по данным наблюдений, выполненных на французском буе-лаборатории в 1969 г. в Лионском заливе [3]. Продолжительность наблюдений — с 26 по 31 июля 1969 г.)

Выборочные автокорреляции $z, \nabla^2 z$ и ∇z , рассчитанные по формуле (10.8) для рядов A, B, C , приведены на рис. 14, $a, в, д$. Соответствующие им частные автокорреляции, вычисленные по формуле (10.5), показаны на рис. 14, $б, г, е$. Выборочная автокорреляционная функция ряда A затухает медленно и почти линейно. Следовательно, временной ряд A может быть описан как процесс скользящего среднего порядка $(0, 1, 1)$. Однако анализ частной автокорреляции z и ∇z показывает, что его можно описать также смешанной моделью авторегрессии — скользящего среднего порядка $(1, 1, 1)$.

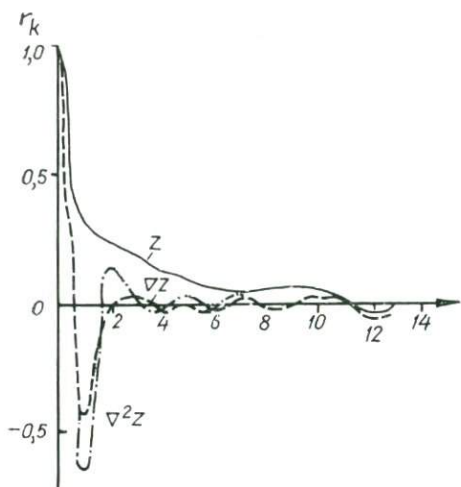
Автокорреляции ряда B подтверждают необходимость перехода по меньшей мере к первым разностям. Частная автокорреляционная



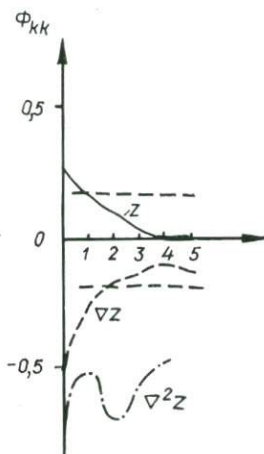
a



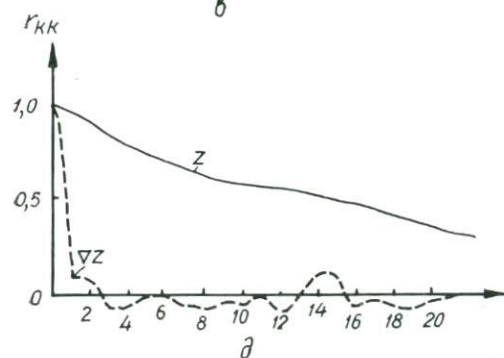
δ



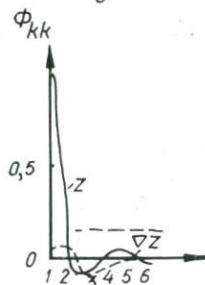
б



z



в



e

Рис. 14. Выборочные автокорреляционные функции (а, б, в) и выборочные частные автокорреляции (б, г, е), а и б — ряд А; в и г — ряд В; д и е — ряд С.

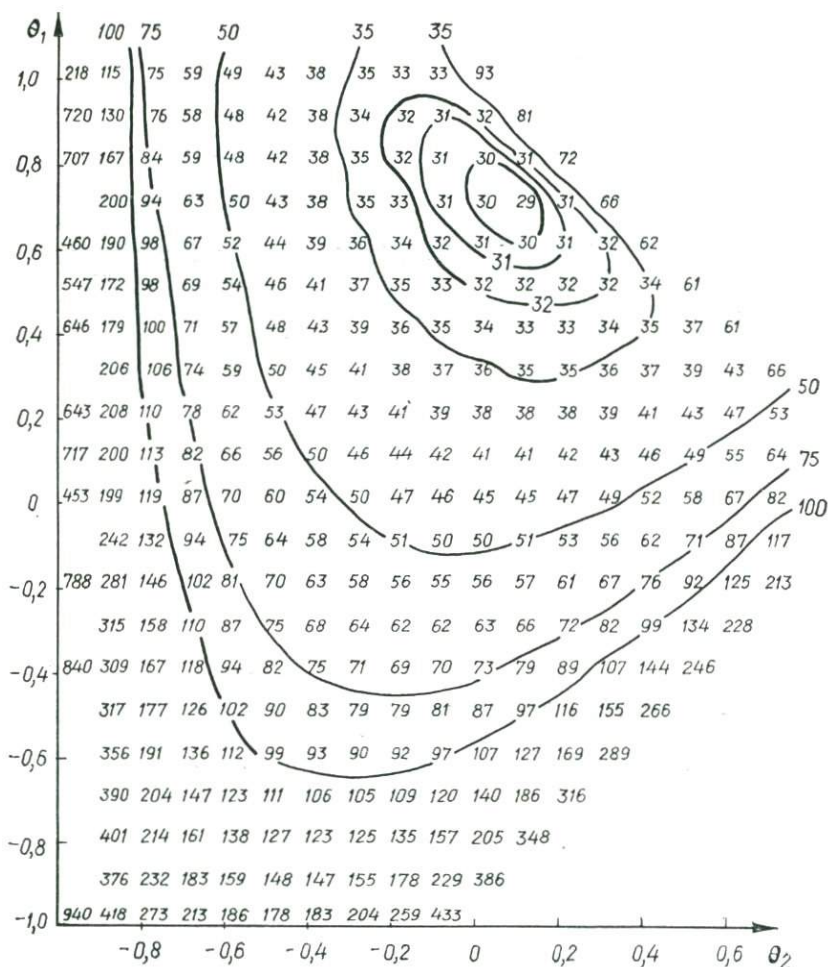


Рис. 15. Таблица значений безусловной суммы квадратов для ряда B.

функция ∇z ряда B затухает приблизительно как экспонента — ряд B может быть описан как процесс скользящего среднего порядка (0, 1, 2). Выборочная автокорреляционная функция ряда C представляет собой экспоненциально-косинусную кривую. В частной автокорреляционной функции доминирует наложение экспонент и затухающих синусоид — ряд C можно описать как процесс авторегрессии порядка (2, 1, 0).

Приближенные начальные оценки параметров получены по формулам (10.6), (10.9), (10.12), (10.14). Оценки параметров скользящего среднего определяются посредством вычисления условной и безусловной сумм квадратов по формулам (10.16) и (10.17).

На рис. 15 приведены значения безусловной суммы квадратов

$S(\theta_1, \theta_2) \cdot 10^{-1}$ и приближенные изолинии для ряда B , к которому был подогнан процесс скользящего среднего порядка $(0, 1, 2)$. Минимальное значение суммы квадратов достигается при $\theta_1 \cong 0,7$ и $\theta_2 = 0,01$ (вместо $\hat{\theta}_1 = 0,68$ и $\hat{\theta}_2 = 0,012$). Далее идентифицированные модели подвергаются диагностической проверке. На-

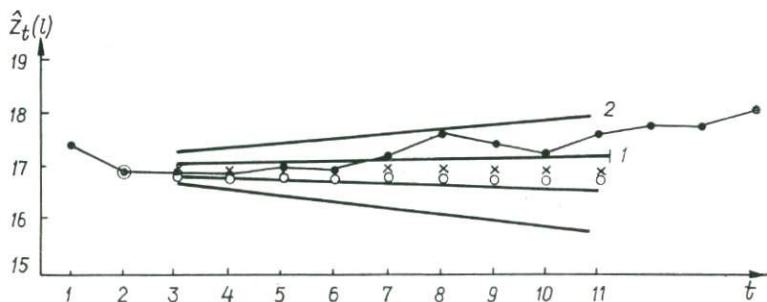


Рис. 16. Прогноз значений ряда $A(t)$ и подправленные прогностические значения (2).

ходятся автокорреляции $r_k(\hat{a})$ ряда остаточных ошибок \hat{a} , а затем вычисляются значения критерия Q по формуле (10.18).

В табл. 2 приведены значения статистики Q для моделей, подгоняемых к рядам A, B, C . Все значения Q оказались меньше 95-процентной квантили для χ^2 с $(k - p - d)$ степенями свободы. Можно предположить, что модели $(1, 1, 1), (0, 1, 2), (2, 1, 0)$ рядов A, B, C могут точно объяснить исследуемые процессы. На основе этих моделей были получены прогнозы для разных моментов времени t и разных упреждений l .

Результаты прогнозирования по формулам (11.4), (11.5) для ряда A представлены на рис. 16. Дисперсии ошибок прогноза для рядов A, B, C представлены на рис. 17, (кривые 1 — 3). Как видно из рисунка, дисперсии прогноза растут при увеличении интервала упреждения, что характерно для нестационарных случайных океанографических процессов.

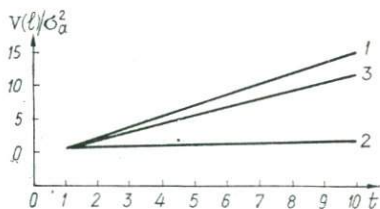


Рис. 17. Дисперсии ошибок прогноза.

Ряд: 1 — A , 2 — B , 3 — C .

Приведенные результаты подтверждают возможность автоматического моделирования нестационарных случайных океанографических процессов на ЭВМ. Метод позволяет усваивать новые данные, поступающие в ходе расчетов, и подправлять прогнозируемые значения с помощью корректировки весов Ψ .

Разработанная программа является одним из первых примеров использования параметрического подхода для прогнозирования нестационарных случайных процессов, развивающихся в океане.

**ОБЪЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ ОКЕАНА**

**§ 12. Статистическое моделирование
пространственных случайных полей океана**

К пространственным полям океана относятся такие поля, которые в рассматриваемый отрезок времени имеют постоянные значения в каждой отдельно взятой точке пространства. Математически пространственные поля океана описываются функциями одних только координат, не зависящими от времени. Такая модель поля отображает мгновенное пространственное распределение физических величин.

Интерес к пространственным полям океана объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, карты любых океанографических характеристик, являющиеся наиболее удобной формой обобщения материалов наблюдений, дают изображение пространственных полей. Во-вторых, в задачах динамики океана важную роль играют начальные условия, которые по существу также относятся к дискретной форме представления полей по пространству.

Известно, что большинство полей океана имеют сложный характер пространственной изменчивости. Поэтому наиболее общими моделями для них являются случайные функции координат. Использование случайных функций в качестве приближения реальных полей связано с определенными трудностями и требует целого ряда допущений. К ним относятся гипотезы об эргодичности, однородности и изотропности, «замороженности» полей, нормальном распределении вероятностей их значений и т. д. Эти вопросы подробно обсуждаются в океанографической литературе (А. С. Монин и А. М. Яглом [65]; Р. В. Озмидов [72]; Б. А. Нелепо [67]; В. И. Беляев [5]; и др.). Не останавливаясь здесь на них, отметим, что выбор модели должен оправдываться результатами последующих расчетов. Поэтому важное значение имеет проверка выдвинутых гипотез путем оценки статистических характеристик поля по материалам наблюдений. Такая проверка, как и само применение статистических моделей, возможна лишь при наличии достаточных по объему выборок, т. е. при значительных количествах измерений по пространству.

Статистическое моделирование пространственных полей успешно применяется в метеорологии в связи с задачами прогноза погоды. Вероятностные модели метеорологических полей позволили автоматизи-

зировать обработку огромных массивов синоптической информации, поступающей с метеостанций. Одновременно был разработан и введен в практику метод объективного анализа наблюдений, обеспечивающий восстановление поля с максимальной (по сравнению с другими методами) точностью.

Метод объективного анализа был разработан Л. С. Гандиным и его сотрудниками в Главной геофизической обсерватории [19]. В основу метода положены результаты теории экстраполирования и фильтрации случайных функций, принадлежащие А. Н. Колмогорову [38]. Примененная Л. С. Гандиным вероятностная модель поля позволяет находить оценки его значений \hat{f} по формулам

$$\begin{aligned}\hat{f} &= \bar{f} + \hat{f}', \\ \hat{f}'_0 &= \sum_{i=1}^n p_i f'_i,\end{aligned}\quad (12.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_{ij} p_j + \eta_i p_i = \mu_{0i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (12.2)$$

где f'_i — отклонения от нормы \bar{f} значений метеоэлемента; p_i — весовые множители, определяемые из системы уравнений (12.1); μ_{ij} — значения нормированной корреляционной функции поля, отвечающие расстояниям между станциями с номерами i и j ; $\eta_i = \sigma_i^2 / f'^2$ — мера ошибки наблюдений элемента в точке расположения i -й станции; σ_i — среднеквадратичная ошибка наблюдений.

Оценка значений поля по приведенным формулам получила название оптимальной интерполяции (по среднеквадратичному критерию) [19]. Одним из свойств оптимальной интерполяции является аналитическая зависимость меры ошибки интерполяции от весовых коэффициентов и функции корреляции поля

$$\varepsilon = 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{ij} p_i p_j - \sum_{i=1}^n \eta_i p_i^2. \quad (12.3)$$

В метеорологической литературе имеется много работ о применении метода объективного анализа [14, 20, 26, 53, 56]. Результаты этих работ подтвердили перспективность применения статистических моделей полей в задачах прогноза погоды.

Несколько позже, чем в метеорологии, метод объективного анализа был использован для построения карт пространственных полей океана. Одна из первых работ в этом направлении была выполнена Р. Б. Дубиной и Ю. В. Николаевым [28], которые провели восстановление поля поверхностной температуры моря Лаптевых по наблюдениям на редкой и неравномерной сети станций. Для определения коэффициентов интерполяции в формуле (3.1.1) авторы применили методы линейного программирования.

Исследования в области объективного анализа случайных полей океана в течение ряда лет проводились в Морском гидрофизическом

институте АН УССР. Эти исследования имели целью проверку возможности построения на ЭВМ карт полей океана способом оптимальной интерполяции, оценку точности метода, разработку удобных для практического использования алгоритмов и программ статистического анализа наблюдений.

Отправным пунктом послужили результаты упомянутых метеорологических работ. В то же время в силу специфики процессов сбора и обработки океанографической информации были рассмотрены также и новые методы расчета полей, использовать которые можно, когда станции в океане расположены в узлах регулярной сетки [26].

Способом оптимальной интерполяции (12.1), (12.2) было построено поле концентраций ^{90}Sr на поверхности Атлантического океана [11]. Несмотря на существенную несинхронность наблюдений поля и неравномерную освещенность ими акватории Атлантики, построенная карта правильно отражала особенности пространственного распределения радиоактивных выпадений из атмосферы на поверхность океана. Эта карта позволила судить о крупномасштабных свойствах поля концентрации ^{90}Sr . Более подробно результаты этого расчета приводятся в [67].

Был выполнен объективный анализ поля поверхностной температуры Черного моря [9]. В этой задаче использовалась более представительная выборка значений поля. Однако детальное изучение статистической структуры поля выявило нестационарность его по отношению к средним значениям и корреляционной функции. Для учета нестационарности была проведена целая серия пробных расчетов, в ходе которых выполнялась оптимальная интерполяция полей отклонений от средних значений.

Оптимальная интерполяция была использована при построении карты поля рельефа дна для одного из районов Атлантического океана (гребневая часть хребта Рейкьянис) и поля концентрации планктона в Черном море [29], [10].

Объективный анализ плотности в океане в приложении к глубинным горизонтам Южной и Экваториальной Атлантики был выполнен в Институте океанологии АН СССР М. Н. Кошляковым [43].

Упомянутые исследования в области объективного анализа океанографических полей показали, что метод оптимальной интерполяции обеспечивает высокую точность построения карт при условии тщательного анализа наблюдений и учета вероятностных свойств полей. Вместе с тем при интерполировании на основе использования корреляционной функции невозможно заранее установить зависимость между точностью расчета карты и необходимой для ее обеспечения плотностью станций. В то же время именно такие зависимости важны при планировании океанографических съемок.

Вопросы планирования океанографических наблюдений для построения карт полей океана особенно актуальны в связи с существующими проектами создания больших систем океанических станций (Проект ОГСООС) и организацией комплексных исследований на

полигонах по международным программам. При осуществлении подобных проектов можно организовать получение информации таким образом, чтобы станции наблюдений были расположены в узлах достаточно густой регулярной сетки.

Д. Питерсен и Д. Миддлтон в цикле работ по измерению и расчету случайных полей рассмотрели спектральный алгоритм оптимальной интерполяции, который они получили, преобразовав формулы (12.2), (12.3) по Фурье [150—152]. Как уже отмечалось, условием для этого является регулярное расположение станций в пространстве.

Спектральный алгоритм оптимальной интерполяции позволяет спланировать заранее съемку поля, поскольку в нем шаг сетки измерений оказывается связанным простыми соотношениями с формой и размерами основания спектра пространственного поля $\Phi(\vec{\omega})$. Кроме того, при его использовании существенно упрощаются вычислительные операции расчета карты на ЭВМ. Решение системы уравнений (12.2) для каждого узла интерполяционной сетки заменяется вычислением значений весовой функции, которая чаще всего представляет собой элементарную комбинацию тригонометрических функций.

Упрощения, вносимые в расчет карты при спектральном подходе, особенно значительны, когда необходимо выполнить объективный анализ совокупности полей, статистически связанных между собой. В метеорологии такой случай анализа получил название оптимального статистического согласования полей [19, 53].

Несмотря на очевидную перспективность использования спектральных методов анализа наблюдений, в океанографической литературе практически нет примеров их применения. Это объясняется отсутствием соответствующих измерений полей в узлах правильных сеток. Для оценки возможностей спектрального алгоритма оптимальной интерполяции в МГИ АН УССР были выполнены численные эксперименты на моделях пространственных полей океана, которые дали хорошие результаты [84].

Спектральным методом интерполяции была построена карта рельефа дна на полигоне в районе о-ва Альборан [83]. Съемка полигона производилась с использованием судовой ЭВМ НИС «Михаил Ломоносов» непосредственно на полигоне, расчет карты произведен по завершению съемки.

На основании объективного анализа пространственных полей океана разработаны теоретические основы автоматизации сбора и обработки океанографической информации для построения карт. Вероятностное моделирование пространственных полей дало возможность объединить в единый информационный процесс получение наблюдений по пространству и их анализ, завершающийся построением на ЭВМ карты поля с заданной точностью.

§ 13. Корреляционный алгоритм оптимальной интерполяции

Рассмотрим основные свойства вероятностной математической модели пространственного поля океана $f(\vec{x})$. Будем считать поле $f(\vec{x})$ однородным и изотропным, имеющим нулевое среднее значение $E\{f(\vec{x})\} = 0$ и нормальное распределение вероятностей. Здесь и далее \vec{x} — вектор с компонентами x_1, x_2, x_3 . Предположим также, что известны корреляционная функция $K(\vec{x})$ и дисперсия поля $K(0)$. Тогда можно утверждать, что значения поля в произвольной точке \vec{x} (с вероятностью 0,62) не выходят за пределы интервала, равного $\{K(0)\}^{1/2}$. Всякое измерение поля в какой-либо системе точек $\{\vec{x}_k\}$ нарушает априорную неопределенность его значений. Отсчеты $\{f(\vec{x}_k)\}$ индуцируют по всему полю условные (нормальные [98]) законы распределения вероятностей с дисперсиями $\epsilon_0(\vec{x}) \leq K(0)$, меняющимися от точки к точке. Величины дисперсий будут характеризовать апостериорную неопределенность значений поля в каждой точке.

Целью расчета случайного поля является нахождение условных средних значений $\hat{f}(\vec{x})$, индуцированных измерениями $\{\vec{x}_k\}$. Очевидно, что среднеквадратичная ошибка расчета условного среднего $\epsilon(\vec{x})$ не может быть меньше практически существующей неопределенности $\epsilon_0(\vec{x})$, т. е. дисперсии соответствующего точке \vec{x} условного закона распределения вероятностей. Поэтому задача расчета поля состоит в нахождении такого способа оценки $f(\vec{x})$, при котором ошибка $\epsilon(\vec{x})$ в среднем менее всего отличается от $\epsilon_0(\vec{x})$:

$$\epsilon(\vec{x}) = \min E \{ |f(\vec{x}) - \hat{f}(\vec{x})|^2 \}. \quad (13.1)$$

Следуя общепринятой терминологии, мы будем называть алгоритм восстановления значений поля, удовлетворяющий этому условию, оптимальной интерполяцией [6, 19].

В теории стационарных случайных функций показано [98], что оптимальной интерполяцией при распределении вероятностей Гаусса является линейная аппроксимация значений поля по формуле

$$\hat{f}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n g(\vec{x}, \vec{x}_i) f(\vec{x}_i). \quad (13.2)$$

Функция $g(\vec{x})$ — весовая для отсчетов поля $f(\vec{x}_i)$. Согласно фундаментальной теореме А. Н. Колмогорова [38] ее значения находятся из системы уравнений, к которой приводит минимизация среднеквадратичной ошибки $\epsilon(\vec{x})$. Введем корреляционную функцию

поля $K(\vec{x}, \vec{x}_r)$:

$$K(\vec{x}, \vec{x}_r) = E \{f(\vec{x})f(\vec{x}_r)\},$$

тогда, подставляя (13.2) в (13.1), имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{x}) = & K(0) - 2 \sum_{k=1}^n g(\vec{x}, \vec{x}_k) K(\vec{x}, \vec{x}_k) + \\ & + 2 \sum_{k=1}^1 \sum_{r=1}^n g(\vec{x}, \vec{x}_k) g(\vec{x}, \vec{x}_r) K(\vec{x}_k, \vec{x}_r). \end{aligned}$$

Для нахождения условий минимума $\varepsilon(\vec{x})$ продифференцируем последнее выражение по $g(\vec{x}, \vec{x}_k)$ и приравняем нулю производную

$$K(\vec{x}, \vec{x}_r) = \sum_{k=1}^n g(\vec{x}, \vec{x}_k) K(\vec{x}_k, \vec{x}_r) \quad (13.3)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n).$$

Система уравнений Колмогорова (13.3) служит для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяции по формуле (13.2). Число уравнений в системе равно числу измерений поля, привлекаемых для оценки неизвестного значения в точке \vec{x} . Как следует из формулы (13.3), оптимальными являются такие весовые коэффициенты, которые позволяют восстанавливать значение неслучайной функции корреляции поля $K(\vec{x}, \vec{x}_r)$ по значениям $K(\vec{x}_k, \vec{x}_r)$.

Используя геометрическое представление метода наименьших квадратов, введенное Колмогоровым, легко показать, что оптимальная интерполяция действительно обеспечивает минимум $\varepsilon(\vec{x})$. Будем рассматривать случайные величины $f(\vec{x})$ как векторы линейного пространства H . По отношению к пространству H векторы оценок поля $\hat{f}(\vec{x})$, получающиеся из формулы интерполяции при всевозможных значениях весовой функции $g(\vec{x})$, образуют конечномерное линейное подпространство H_n , натянутое на n векторов $f(\vec{x}_k)$. Условие (13.1) есть не что иное, как квадрат расстояния между точками $f(\vec{x})$ и $\hat{f}(\vec{x})$ в пространстве H .

Таким образом, определение величин $g(\vec{x}, \vec{x}_k)$, дающих экстремум выражению (13.1), сводится к опусканию перпендикуляра из точки $f(\vec{x})$ на подпространство H_n . При этом минимизируется величина $\varepsilon(\vec{x})$. Из геометрической интерпретации системы уравнений (13.3) следует, что ее решение всегда существует и единственно.

Подставляя выражение для $K(\vec{x}, \vec{x}_r)$ из (13.3) в (13.1), получим формулу для среднеквадратичной ошибки оптимальной оценки поля:

$$\varepsilon(\vec{x}) = K(0) - \sum_{r=1}^n g(\vec{x}, \vec{x}_r) K(\vec{x}, \vec{x}_r). \quad (13.4)$$

Из нее следует, что ошибка восстановления поля тем меньше, чем сильнее корреляционные связи между значениями поля в точке \vec{x} и точках \vec{x}_k . Для того чтобы подчеркнуть значение корреляционной функции при восстановлении поля по формулам (13.2), (13.3), мы условимся называть последние корреляционным алгоритмом оптимальной интерполяции.

Остановимся на основных свойствах корреляционного алгоритма. Первое состоит в том, что ошибка интерполяции исчезает в точках отсчетов. Это свойство объясняется «точечной ортогональностью» весовой функции [150]:

$$g(\vec{x}_l, \vec{x}_k) = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Оно может быть проверено непосредственным нахождением значений весовой функции из уравнений (13.3) для любой конкретной системы отсчетов поля.

По отношению к произвольной системе отсчетов поля справедливо также и второе свойство корреляционного алгоритма: ошибка интерполяции не уменьшается при исключении любого из отсчетов.

Увеличение ошибки $\varepsilon(\vec{x})$, вызываемое устранением из интерполяционной формулы какого-либо отсчета поля, например, в точке \vec{x}_r , определяется выражением

$$\varepsilon^{(n-1)}(\vec{x}_r) - \varepsilon^{(n)}(\vec{x}_r) = \frac{[g(\vec{x}, \vec{x}_r)]}{\Delta_{rr}} \Delta, \quad (13.5)$$

в котором $\varepsilon^{(n)}(\vec{x}_r)$ — ошибка интерполяции по n отсчетам; Δ — определитель корреляционной матрицы системы уравнений (13.3); Δ_{rr} — определитель той же матрицы без r -го столбца и r -й строки.

Второе свойство корреляционного алгоритма позволяет оценивать степень влияния на результат интерполяции каждого из отсчетов. Это дает возможность использовать выражение (13.5) в качестве практического критерия при выборе количества отсчетов поля в интерполяционной формуле. Главным достоинством корреляционного алгоритма оптимальной интерполяции является наивысшая, по сравнению с другими методами, точность интерполяции в тех случаях, когда сеть станций наблюдений оказывается относительно редкой.

При определении густоты сети станций наблюдений обычно сравнивают среднее расстояние между станциями и интервал корреляции поля. Считается, что соотношение между этими величинами должно быть такого порядка, чтобы в окружность, описанную радиусом корреляции поля, попадало около 10 станций [7]. Хотя на первый взгляд точность интерполяции должна возрастать с увеличением количества данных, использование на практике более 10 влияющих станций не улучшает количества оптимальной интерполяции, а увеличивает ошибки расчета поля.

Это явление объясняется накоплением ошибок, допущенных при измерении поля, а также неустойчивостью вычислительного процесса решения систем уравнений высокого порядка для нахождения весов оптимальной интерполяции. С увеличением количества влияющих станций резко возрастает и время расчета поля на ЭВМ.

Результаты применения корреляционного алгоритма оптимальной интерполяции зависят от того, насколько справедлива использованная вероятностная модель для исследуемого поля океана.

Расчет карты поля должен сопровождаться тщательным анализом статистических свойств поля, эмпирической оценкой характеристик распределения вероятностей его значений. Чтобы не загромождать изложение излишними деталями, мы не приводим достаточно простых методов нахождения таких оценок [75]. Ниже эти методы иллюстрируются примерами построения карт полей океана по наблюдениям.

§ 14. Построение карт гидрофизических полей методом оптимальной интерполяции

Оптимальная интерполяция является наиболее точным и вместе с тем объективным методом обобщения данных наблюдений о физических полях океана. Использовать ее для построения карт полей можно в тех случаях, когда временной эволюцией поля можно пренебречь в сравнении с его изменчивостью по пространству.

Предположение об отсутствии временной эволюции поля (его «замороженности» [65]) в каждом конкретном случае требует специального обоснования. Однако часто при моделировании пространственно-временных полей океана временная эволюция, содержащаяся в данных измерений, может быть заметно ослаблена путем несложных предварительных преобразований. В качестве примера можно указать на способы выделения периодических составляющих (суточный ход температуры моря, инерционные колебания скорости и др.), которые позволяют привести к одному сроку результаты измерений на станциях, выполненные в различные моменты времени.

Выполнение условий однородности и изотропности поля также требует специального исследования, заключающегося в оценке корреляционных и спектральных функций поля по различным выборкам, образованным из данных наблюдений. Используемые методы анализа статистической структуры поля могут быть весьма различными в зависимости от объема и качества («репрезентативности», см. § 16) данных о поле, а также от априорной информации об изменчивости поля в пространстве.

Мы остановимся на использовании методов статистического анализа наблюдений для построения карт полей океана на ЭВМ. Сначала рассмотрим гидрофизические поля, обладающие значительной изменчивостью по пространству в области синоптических масштабов.

Статистический анализ поля скорости в океане. Интерес к применению методов оптимальной интерполяции для картирования поля скорости в океане в последние годы значительно возрос в связи с проблемой изучения мезомасштабного вихревого движения в океане. Возможность построения карт поля скорости в области мезомасштабов появилась в результате осуществления крупных поли-

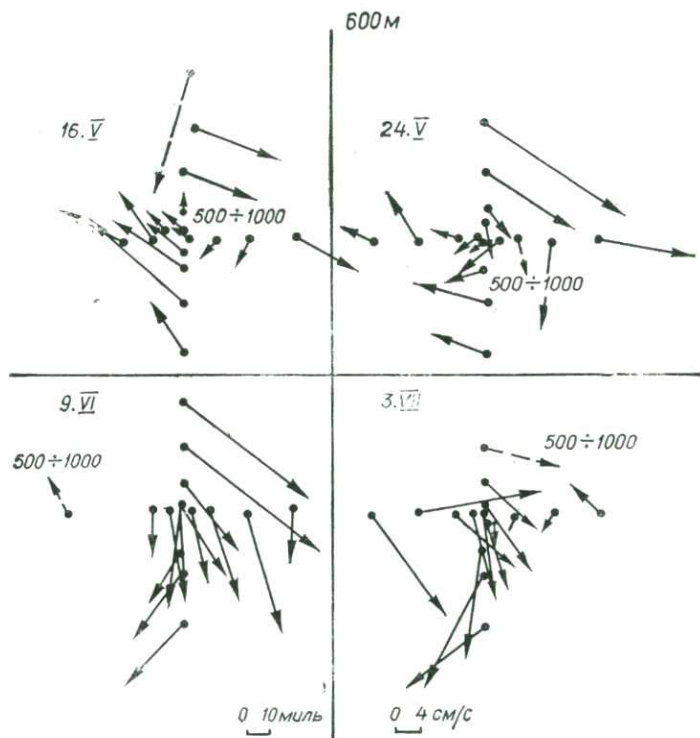


Рис. 18. Наблюдения скоростей течений на глубине 600 м на Советском Атлантическом полигоне в 1970 г. [45].

гонных экспериментов, проведенных советскими [16] и американскими [162] учеными. Наиболее интересные материалы были получены при анализе измерений скорости течений на Советском Атлантическом полигоне в 1970 г.

Полигон был расположен в северной части Тропической Атлантики и оснащен 17 заякоренными буйковыми станциями, имевшими измерители скорости течений на 10 горизонтах от 25 до 1500 м. Продолжительность измерений на полигоне составила около 6 мес. Станции располагались по двум взаимно перпендикулярным направлениям на удалениях от центра креста, составлявших 5, 10, 17,5 и 24 морские мили. Дискретность измерений по времени была равна 30 мин.

Основным результатом измерений на полигоне явилось обнаружение крупного антициклонического вихря. Последний отчетливо прослеживался на всех горизонтах непосредственно по диаграммам скоростей в точках расположения буйковых станций (рис. 18).

Оптимальная интерполяция измерений скорости на полигоне была осуществлена М. Н. Кошляковым и Ю. М. Грачевым [45]. Первоначально из наблюдений скорости ими были устранены инерционные и приливные колебания скорости течений. Для этого было выполнено сглаживание данных по формуле Тьюки [42]

$$\begin{aligned} \tilde{u}(i) = & \\ = \frac{1}{l} \sum_{j=i-\frac{l}{2}}^{i+\frac{l}{2}} \left\{ u(j) \left[1 + \right. \right. & \\ \left. \left. + \cos \frac{2\pi(j-i)}{l} \right] \right\}. & \end{aligned} \quad (14.1)$$

Эффективный период сглаживания составил 84 ч. После проведения сглаживания измерения поля скорости можно было принять за выборки из чисто пространственных реализаций мезомасштабной составляющей поля.

Анализ пространственных корреляционных функций продольной и поперечной составляющих скорости показал, что по виду одноименные функции подобны на всех горизонтах. В качестве примера на рис. 19 приведены корреляционные функции скорости на глубине 600 м.

Интересно сопоставить результаты М. Н. Кошлякова и Ю. М. Грачева с таковыми американских исследователей, приведенными в отчете об итогах эксперимента «МОДЕ-1» (измерения на буйковых станциях в районе Саргассова моря) [162]. Сравнение интервалов корреляции составляющих поля скорости показывает, что их величины близки к значениям, полученным на Советском Атлантическом полигоне (рис. 20).

При построении карт скорости течений методом оптимальной интерполяции М. Н. Кошляков и Ю. М. Грачев использовали аналитические формулы для аппроксимации продольной K_{LL} и поперечной

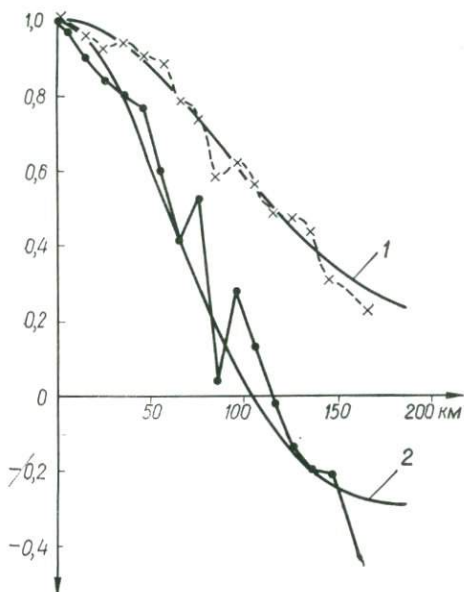


Рис. 19. Корреляционные функции составляющих скоростей течений на Советском Атлантическом полигоне:

1 — продольная, 2 — поперечная.

K_{NN} корреляционных функций:

$$K_{LL}(r) = \left(1 + \alpha r + \frac{1}{3} \alpha^2 r^2\right) e^{-\alpha r}, \quad (14.2)$$

$$K_{NN}(r) = \left(1 + \alpha r - \frac{1}{3} \alpha^3 r^3\right) e^{-\alpha r}. \quad (14.3)$$

На основе этих функций рассчитывались компоненты корреляционного тензора векторного поля и строились соответствующие

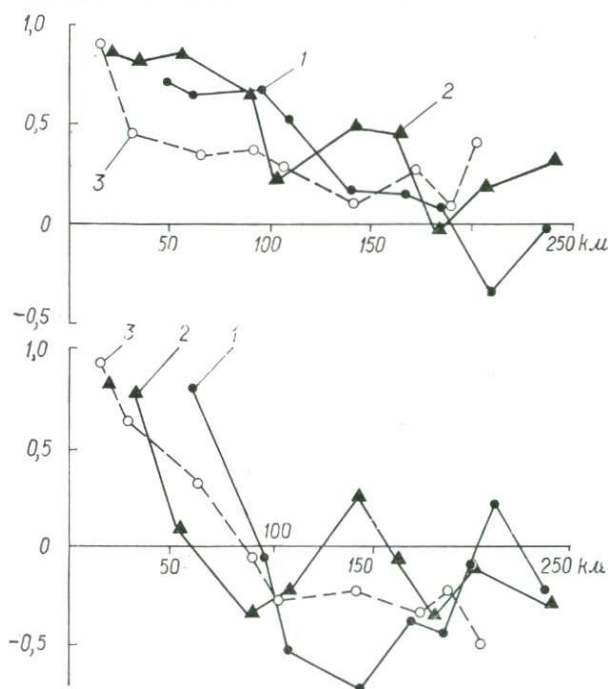


Рис. 20. Корреляционные функции составляющих скоростей течений по измерениям в Саргассовом море [138], м:

1 — 500—800, 2 — 1500—3000, 3 — 5000—54 000

матрицы в системе уравнений для нахождения весовых коэффициентов оптимальной интерполяции поля (13.3).

Формулы оптимальной интерполяции с учетом векторного характера поля скорости $\vec{v} = (u, v)$ на плоскости принимают вид

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^n (p_i u_i + q_i v_i), \quad (14.4)$$

$$\hat{v} = \sum_{i=1}^n (r_i u_i + s_i v_i). \quad (14.5)$$

Весовые коэффициенты p_i , q_i , r_i , s_i определяются из совместного решения двух пар систем уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\varphi_{ij} p_j + \chi_{ij} q_j) + \eta_i p_i &= \varphi_{0i}, \\ \sum_{i=1}^n (\chi_{ij} p_j + \psi_{ij} q_j) + \eta_i q_i &= \chi_{0i} \end{aligned} \right\}, \quad (14.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\varphi_{ij} r_j + \chi_{ij} s_j) + \eta_i r_i &= \chi_{0i}, \\ \sum_{i=1}^n (\chi_{ij} r_j + \psi_{ij} s_j) + \eta_i s_i &= \psi_{0i} \end{aligned} \right\}, \quad (14.7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &= K_{LL}(r_{ij}) \cos^2 \alpha_{ij} + \\ &\quad \times K_{NN}(r_{ij}) \sin^2 \alpha_{ij}, \\ \psi_{ij} &= K_{LL}(r_{ij}) \sin^2 \alpha_{ij} + \\ &\quad + K_{NN}(r_{ij}) \cos^2 \alpha_{ij}, \quad (14.8) \\ \chi_{ij} &= [K_{LL}(r_{ij}) - \\ &\quad - K_{NN}(r_{ij})] \sin \alpha_{ij} \cos \alpha_{ij}, \end{aligned}$$

α — угол, образуемый радиусом-вектором r с осью x , n — количество станций, участвующих в интерполяции, η_i — дисперсии ошибок измерений скорости на станциях.

В расчетах, выполненных М. Н. Кошляковым и Ю. М. Грачевым по формулам (14.4)—(14.8), количество влияющих станций выбиралось равным 6, среднее значение η принималось 0,15. На рис. 21 в качестве примера приведена карта поля скорости для горизонта 600 м, построенная на ЭВМ. Анализ полученных карт течений на полигоне позволил определить некоторые параметры зарегистрированного приборами синоптического вихря: среднюю скорость дрейфа (4,5 см/с), направление движения (255°), его размеры (100 км).

§ 15. Построение карт пространственного распределения кислорода по наблюдениям в Тропической Атлантике

В качестве второго примера использования оптимальной интерполяции для расчета крупномасштабного поля океана приведем результаты объективного анализа измерений кислорода на горизонте 100 м

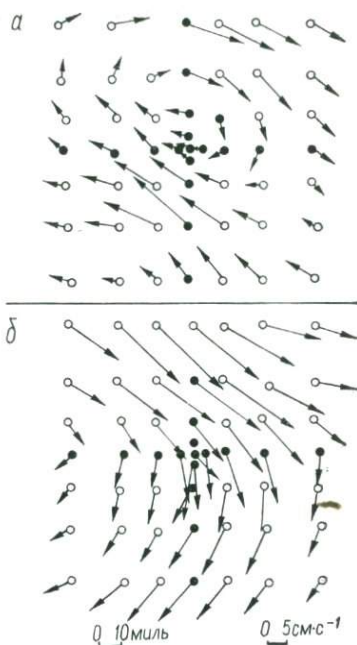


Рис. 21. Карты скоростей течений на горизонте 600 м для двух различных моментов времени, построенные методом оптимальной интерполяции [45].

в Тропической Атлантике, опубликованные А. Г. Колесниковым и др. [36].

После открытия экваториальных противотечений: в Тихом океане — течения Кромвелла (1951 г.), в Атлантическом — течения Ломоносова (1959 г.), в Индийском — течения Тареева внимание исследователей разных стран было привлечено к изучению тропических областей Мирового океана, поскольку выяснилось, что протекающие в них физические, химические и биохимические процессы имеют свои специфические особенности. Наиболее полные исследования в тропической зоне Атлантического океана проведены в 1963—1964 гг. по программе Международных совместных исследований Тропической Атлантики (МСИТА), названной «Эквалант» [36], разработанной Межправительственной океанографической комиссией ЮНЕСКО.

По данным экспедиционных исследований в этой зоне по международной программе был подготовлен и издан ЮНЕСКО под редакцией А. Г. Колесникова I том океанографического атласа МСИТА — физическая океанография. Анализ полученных на тех же станциях химических данных (экспедициями «Эквалант-I» и «Эквалант-II») показал, что они менее полноценны, чем физические, поэтому непосредственно для построения более подробных карт малоприменимы.

Приведенный в работе [19] метод объективного анализа наблюдений был использован в МГИ АН УССР для построения карт II тома атласа МСИТА (химическая и биологическая океанография), также изданного ЮНЕСКО. В качестве примера в ней рассматривается построение карты поля кислорода на горизонте 100 м.

Для расчета карты поля кислорода были использованы данные станций, выполненных в период экспедиции «Эквалант-I» (февраль — март 1963 г.). Станции наблюдений (рис. 22) были расположены по акватории неравномерно: большая часть сконцентрирована на гидрологических разрезах, пересекающих район в различных направлениях (в основном вдоль меридианов и в пределах от 15° с. ш. до 12° ю. ш.). Некоторые станции, осуществленные разными судами, либо полностью совпадали, либо располагались столь близко, что не несли дополнительной информации. Такие станции были исключены из рассмотрения. В расчетах использовались данные наблюдений 450 станций. Плотность их по акватории составила в среднем 9 станций в каждом пятиградусном квадрате, или 0,33 станции в каждом одноградусном. Таким образом, плотность наблюдений для построения подробных карт с одноградусной сеткой была явно недостаточной.

Протяженность района исследований с юга на север вызвала необходимость пересчета координат для устранения ошибок в определении расстояний из-за различной кривизны поверхности по широте. За начало отсчета была принята точка пересечения экватора с нулевым меридианом. Все значения широт станций наблюдений пересчитаны по формуле $\varphi'_i = \lambda_i \cos \varphi_i$, где λ_i , φ_i — географические долгота и широта; φ'_i — новое значение широты для i -й станции.

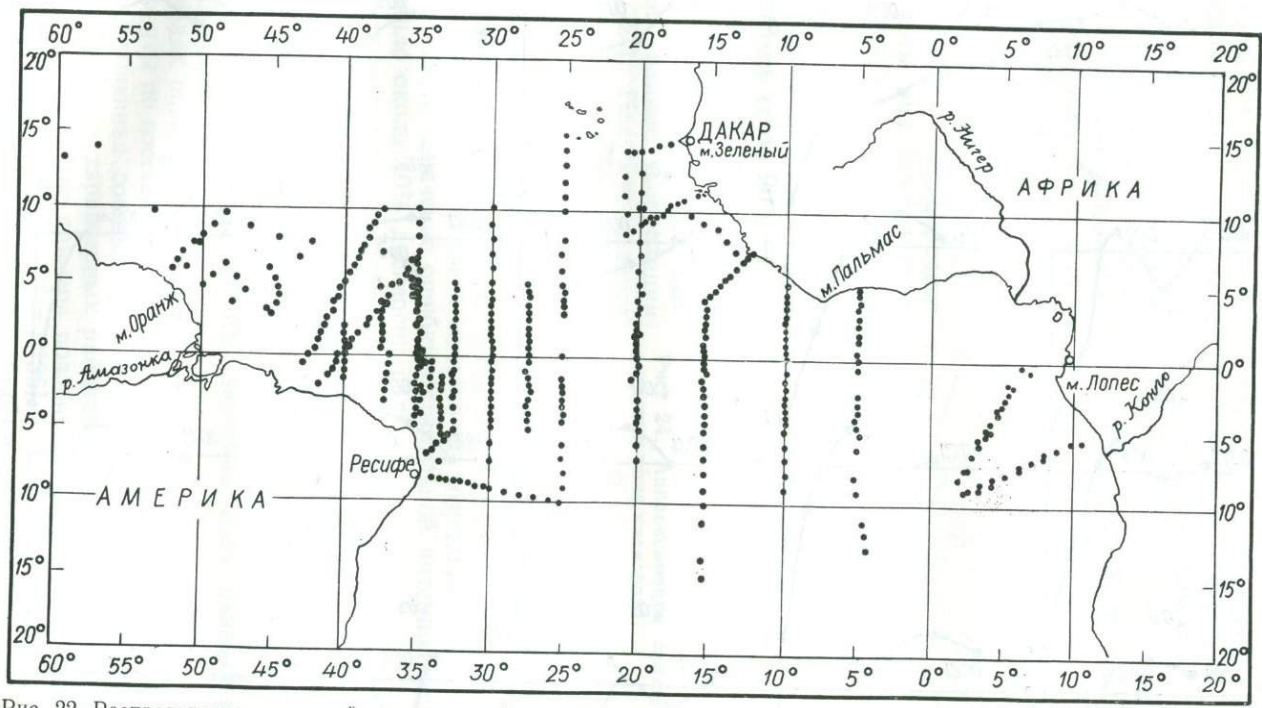


Рис. 22. Распределение измерений концентраций кислорода по акватории Атлантического океана.

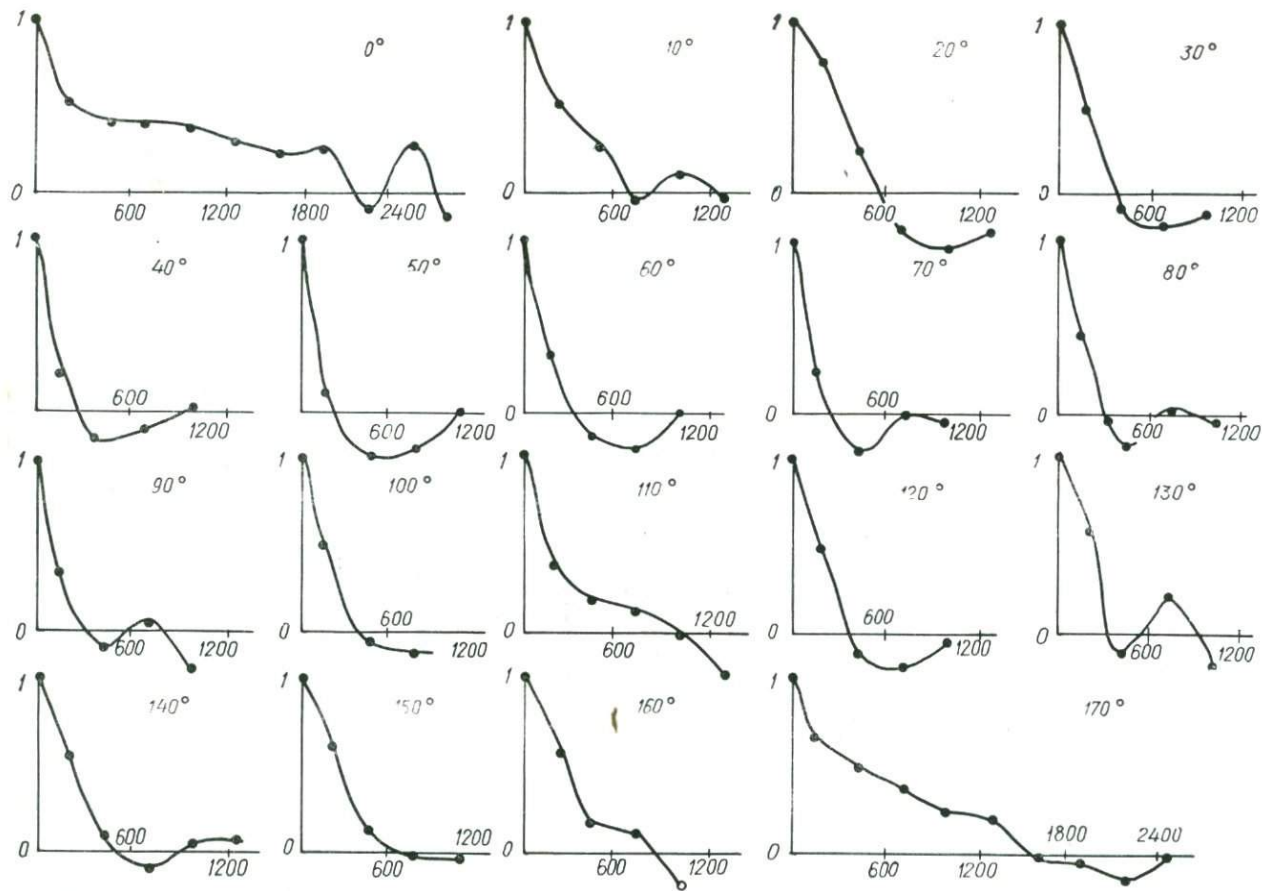


Рис. 23. Корреляционные функции случайной составляющей поля концентраций кислорода, построенные вдоль различных азимутальных направлений.

Для решения этой задачи проведено два эксперимента. В первом в качестве детерминированной составляющей поля использовалась плоскость (14.10), коэффициенты которой были найдены по методу наименьших квадратов. Случайную компоненту составили отклонения значений поля от этой плоскости. Среднее значение случайной составляющей оказалось близким к нулю ($0,35 \cdot 10$ мл/л), дисперсия имела величину $0,62$ (мл/л)².

Для проверки условия изотропности поля были вычислены его корреляционные функции (рис. 23) по различным направлениям через каждые 10° . Поле обладало существенной неоднородностью; хотя вид корреляционной функции сохранялся, скорость убывания ее вдоль параллелей (угол 0°) была значительно меньше, чем вдоль меридианов (угол 90°).

Чтобы учесть анизотропию поля в алгоритме оптимальной интерполяции (рис. 23), был введен эллипс корреляции (рис. 24). Полуоси эллипса приблизительно соответствуют интервалам корреляции поля: 1400 км вдоль экватора и 280 — поперек его.

Восстановление поля было проведено по формулам (13.2)—(13.4) в узлы квадратной сетки, шаг которой был равен 1° . Количество станций, участвующих в интерполяции в узел, было установлено эмпирически: точность расчета заметно не возрастала, если их было больше шести. Значение ошибки оптимальной интерполяции поля составило около 40% дисперсии поля.

Построенная карта изображена на рис. 25. В общих чертах она правильно отражает пространственное распределение растворенного в морской воде кислорода; несколько отличны от установленных представлений распределения расчетных величин концентраций вдоль экватора. В юго-западной части акватории, где практически наблюдения не велись, значения поля оказались явно завышенными.

В целях повышения точности карты целесообразно провести эксперименты по восстановлению поля кислорода при условии, что детерминированная составляющая поля выбирается индивидуально для каждого из характерных районов исследуемой акватории Атлантики. В качестве примера подобного эксперимента используем результаты упомянутой работы [36].

Авторы работы отметили, что особенностью района исследований в меридиональном направлении является значительное понижение

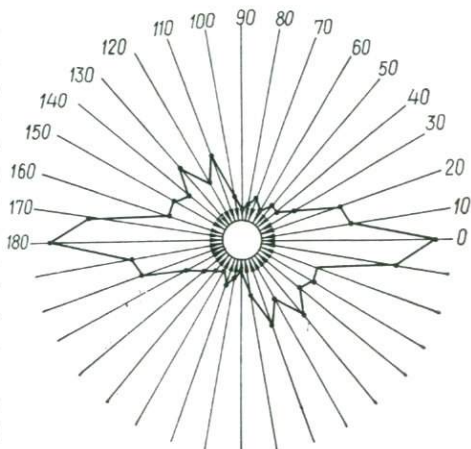


Рис. 24. Аппроксимация эллипсом анизотропии поля кислорода.

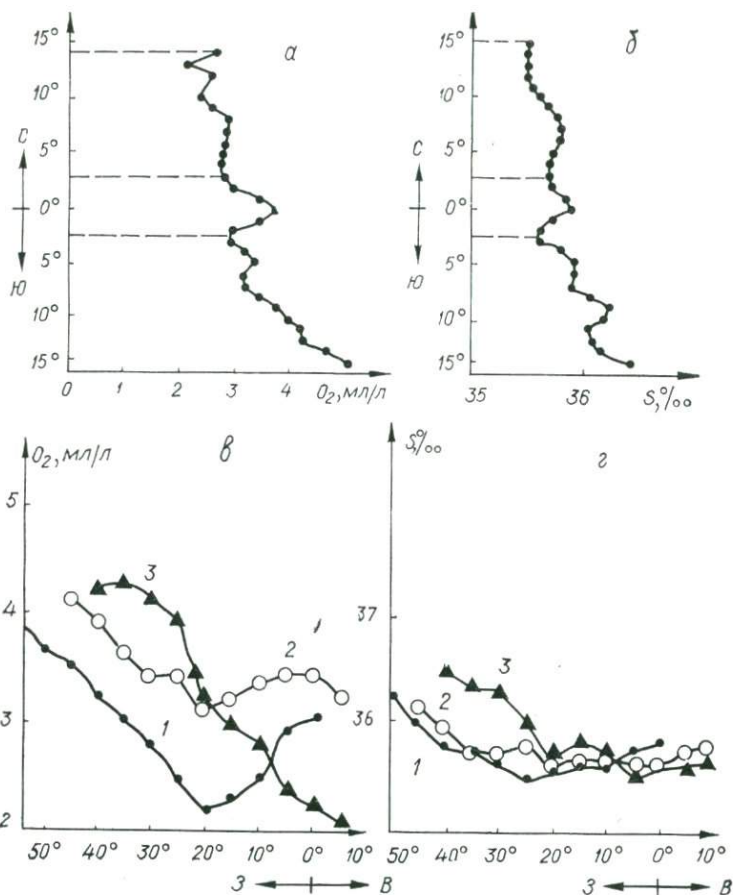


Рис. 26. Распределение средних значений поля кислорода и солёности в широтном (а, б) и меридиональном (в, г) направлениях. Зоны: 1 — северная, 2 — экваториальная, 3 — южная [36].

концентрации кислорода с запада на восток. Поэтому целесообразно было из массива данных выделить детерминированную составляющую как функцию географических координат места наблюдений, а поле отклонений от нее считать случайной составляющей. Таким образом, на каждой станции наблюдаемое значение O_2 было представлено в виде суммы двух компонент

$$O(\varphi_i, \lambda_i) = \bar{O}(\varphi_i, \lambda_i) + O'(\varphi_i, \lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (15.1)$$

где n — количество станций наблюдений в зоне. Детерминированная составляющая, как это следует из рис. 26, может быть аппроксимирована следующим образом:

$$\bar{O}(\varphi_i, \lambda_i) = a_0 + a_1\lambda_i + a_2\varphi_i. \quad (15.2)$$

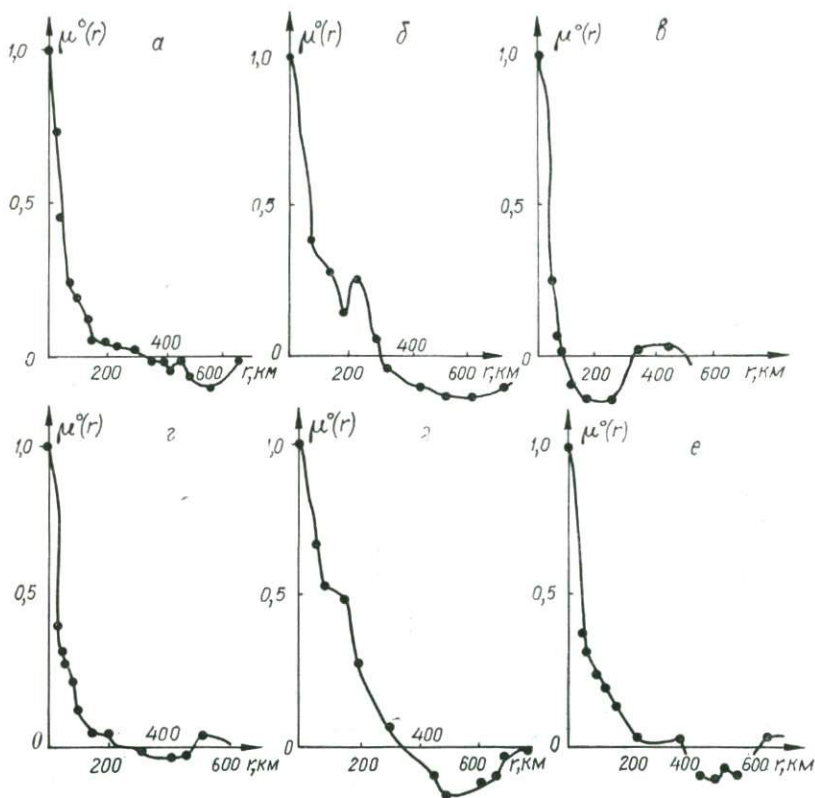


Рис. 27. Оценки пространственных нормированных автокорреляционных функций поля отклонений кислорода для зон:

северной (часть: а — восточная, б — западная); экваториальной (часть: в — восточная, г — западная); южной (часть: д — восточная, е — западная).

Для определения \bar{O} была проведена оценка пространственных характеристик поля в широтном и меридиональном направлениях с использованием всего массива наблюдений. Для этого рассчитывались значения кислорода и солёности соответственно по 2- и 10-градусным зонам. Шаг скользящего осреднения данных составил 1° по широте и 5° по долготе. Кривые осреднённых значений представлены на рис. 27, а — г.

Исходя из анализа кривых на рис. 27, а, б и принимая во внимание известные особенности динамики вод этого района, вся область исследования была разбита по широте на три зоны: экваториальную от $2^\circ 30'$ с. ш. до $2^\circ 30'$ ю. ш. (область течения Ломоносова), северную до 15° с. ш. и южную до 12° ю. ш. С учетом осреднённого распределения кислорода и солёности по долготе (рис. 27, в, г) северная, экваториальная и южная зоны в свою очередь были разбиты еще на две зоны, каждая по 20° з. д. Таким образом, расчеты по восстановле-

нию поля кислорода производились в каждой из шести зон. Количество станций по зонам представлено в табл. 2.

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 в выражении (15.10) определялись методом наименьших квадратов отдельно для каждой зоны. Значения полученных величин a_0, a_1, a_2 для шести зон приведены в табл. 2.

Для восстановления значений случайной составляющей O' поля концентрации кислорода из (15.9), полученной вычитанием из данных наблюдений соответствующих значений детерминированной составляющей, применялся метод оптимальной интерполяции по формулам (13.2)—(13.4).

Осуществлено три основных этапа при построении карты поля O_2 : изучение статистической структуры поля O' , восстановление значений этого элемента в узлах регулярной сетки путем оптимальной интерполяции, уточнение поля O_2 по другому полю (солености) способом оптимального согласования. При построении карты суточный ход концентрации O_2 вошел в случайную составляющую. Инструментальная ошибка определения концентраций O_2 принималась равной 0,02 мл/л.

Анализ пространственной статистической структуры поля кислорода в указанных шести зонах показал, что в пределах доверительных интервалов для оценок корреляционных функций условие изотропности вдоль различных направлений (через 45°) сохраняется. Полученные нормированные на дисперсии оценки пространственных корреляционных функций (см. рис. 56) были аппроксимированы аналитическими выражениями вида $e^{-\alpha r} \cos \beta r$, где r — расстояние в километрах. Значения коэффициента α и β для всех зон приведены также в табл. 2.

Дисперсии поля отклонений в каждой зоне предполагались постоянными по пространству, их значения и средние значения O' во всех зонах даны в таблице. Они практически равны нулю. Анализ пространственной статистической структуры (рис. 28) выявил особенности экваториальных зон, заключающиеся в меньших радиусах корреляции по сравнению с северными и южными зонами, имеющими практически одинаковые структуры. Этот факт подтверждается полученными величинами коэффициентов α и β . Таким образом, правильность произведенного деления на зоны подтверждается структурой поля кислорода в исследуемом районе.

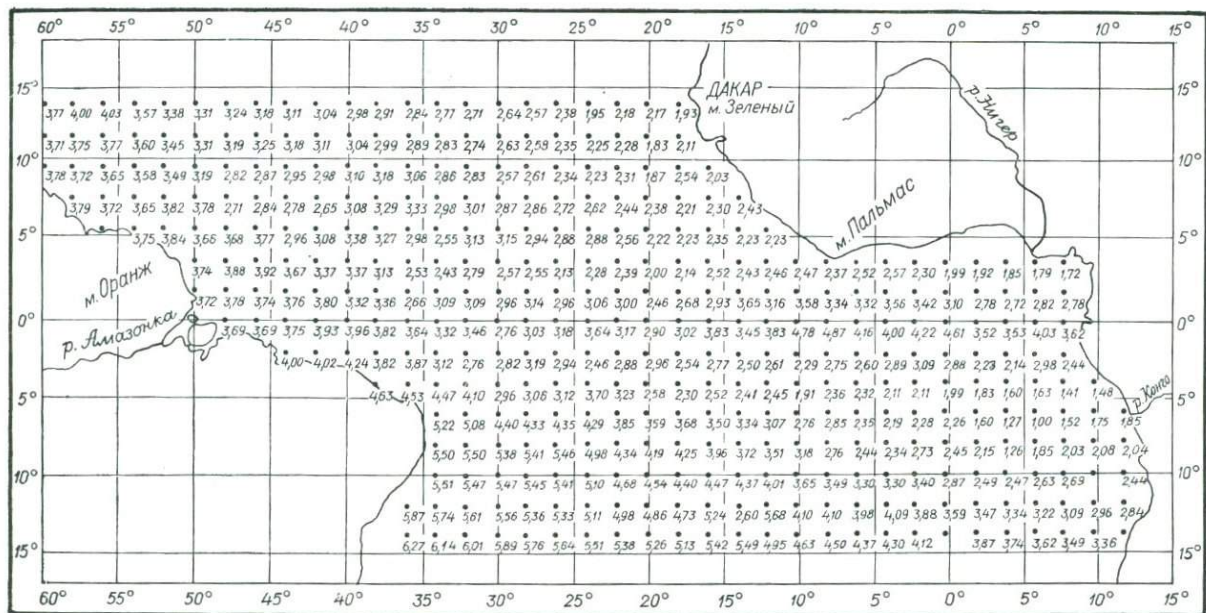
Поле O' восстанавливалось в узлах регулярной сетки с шагом один географический градус; каждое значение вычислялось в виде линейной комбинации ближайших к узлу m наблюдаемых значений O'_i , попавших в круг корреляции,

$$O_0' = \sum_{i=1}^m g_i O_i' \quad (15.3)$$

Весовые множители интерполяции g_i представляли собой решения системы линейных алгебраических уравнений (13.3), вытекающей из условия минимума ошибки восстановления поля. Коэффи-

Характеристики пространственной статистической структуры полей отклонения растворенного в воде кислорода и солености [36]

Элемент	Параметр	Северная зона		Экваториальная зона		Южная зона	
		восточная часть	западная часть	восточная часть	западная часть	восточная часть	западная часть
O_2	a_0	3,34	1,25	3,30	2,09	1,61	-0,27
	a_1	0,96	-3,25	0,23	-2,52	-3,17	-5,47
	a_2	-5,49	-2,06	8,04	-2,16	-7,58	-16,97
	O_1	$-0,3 \cdot 10^{-9}$	$-20 \cdot 10^{-9}$	$0,3 \cdot 10^{-9}$	$0,1 \cdot 10^{-8}$	$-0,5 \cdot 10^{-9}$	$-0,1 \cdot 10^{-7}$
	σ	0,091	0,215	0,253	0,440	0,370	0,233
	α	0,015	0,0056	0,0208	0,019	0,0047	0,014
	β	0,0052	0,0045	0,0157	0,005	0,0042	0,005
S	a_0	35,83	34,66	35,72	35,14	35,28	33,44
	a_1	0,80	-1,72	0,48	-1,13	-0,53	-3,94
	a_2	-0,26	0,85	1,01	-2,02	-3,30	-9,43
	\bar{S}'	$0,35 \cdot 10^{-8}$	$-0,3 \cdot 10^{-7}$	$-0,5 \cdot 10^{-8}$	$0,5 \cdot 10^{-7}$	$-0,5 \cdot 10^{-7}$	$-0,9 \cdot 10^{-7}$
	σ_s^2	0,005	0,065	0,023	0,065	0,044	0,096
	α	0,018	0,0043	0,039	0,01	0,007	0,014
	β	0,006	0,0039	0,0196	0,005	0,0035	0,005
$O_2 \sim S$	λ	0,055	0,302	0,091	0,148	0,119	0,412
	γ	0,278	0,429	0,336	0,623	0,512	0,740
	α	0,018	0,0040	0,017	0,009	0,0037	0,012
	β	0,016	0,0038	0,015	0,005	0,0035	0,005
N — количество станций в зоне		71	103	47	89	68	73
Количество станций в одноградусном квадрате		0,60	0,22	0,31	0,64	0,25	0,52
Количество станций в пятиградусном квадрате		14,8	5,5	7,8	16	6,3	13



циентами этой системы служили значения автокорреляционной функции расстояний между станциями, участвующими при интерполяции в данный узел. Таким образом была получена карта распределения растворенного в морской воде кислорода в виде значений в узлах регулярной сетки (рис. 28).

Точность восстановления значений поля, оцениваемая отношением среднеквадратичного значения ошибки интерполяции к дисперсии, определялась по формуле

$$\varepsilon = 1 - \sum_{i=1}^m g_i \mu_{0i}, \quad (15.4)$$

где g_i — весовые множители интерполирования, μ_{0i} — коэффициенты корреляции между узлом интерполяции и влияющими станциями. Среднее значение меры ошибки ε оказалось равным 0,62, что соответствует среднеквадратичной ошибке 0,41 мл/л.

Полученная карта более подробно, чем карта, приведенная на рис. 25, отражает основные особенности явлений, протекающих в данном районе Атлантики. По-видимому, дальнейшее усложнение детерминированной составляющей поля не даст заметного выигрыша в точности интерполяции. Для повышения точности карты поля кислорода необходима дополнительная информация, которая содержится в измерениях других полей, связанных с полем кислорода.

§ 16. Спектральный алгоритм оптимальной интерполяции

Обобщение корреляционного алгоритма оптимальной интерполяции. Рассмотренный метод объективного анализа данных был основан на использовании значений корреляционной функции поля. Спектр поля, являющийся обращением Фурье от корреляционной функции, содержит ту же информацию о поле, что и функция корреляции. Поэтому нетрудно получить соотношения, связывающие оптимальные значения весовых коэффициентов интерполяции поля через значение его спектра. Такие соотношения, установленные Д. Питерсеном и Д. Миддлтоном [150], часто оказываются более удобными для практического использования, чем аналогичные им формулы, приведенные в § 13. Кроме того, как это будет показано ниже, спектральная формулировка задачи оптимальной интерполяции позволяет получить некоторые следствия, важные для планирования наблюдений в океане.

Использовать спектр поля при построении на ЭВМ карты его значений можно в тех случаях, когда измерения произведены в узлах правильной (регулярной) сетки, покрывающей акваторию океана. Тогда как в метеорологии измерения полей выполняются на существенно нерегулярной сети наземных метеорологических станций, станции наблюдений в океане могут размещаться в определенном порядке, образуя правильную сетку.

Важным преимуществом спектрального алгоритма интерполяции является аналитическая связь между шагом сетки измерений поля и средней точностью его расчета. Кроме того, наиболее выгодная конфигурация сети измерений в океане связана с формой основания спектра поля. Оба факта играют важную роль при планировании океанографических исследований.

Спектральный алгоритм оптимальной интерполяции позволяет также в ряде случаев значительно упростить вычисления при расчете поля. Корреляционный алгоритм интерполяции требует решения системы уравнений (13.2) для каждой точки поля, тогда как при спектральном подходе следует лишь определить значения аналитически заданной весовой функции поля, значения которой и являются оптимальными весами интерполяции.

Метод нахождения оптимальных весовых функций однородных и изотропных случайных полей состоит в переводе уравнений (13.3) из пространства (\vec{x}) в пространство $(\vec{\omega})$ посредством преобразования Фурье:

$$\Phi(\vec{\omega}) = \int_{(\vec{x})} K(\vec{x}) e^{-i\vec{\omega}\vec{x}} d\vec{x},$$

где $\vec{\omega}$ — вектор, компоненты которого — волновые числа $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, соответствующие координатным осям x_1, x_2, x_3 . Обозначение $K(\vec{x})$ здесь и далее употребляется для функции корреляции поля $K(\vec{x}, \vec{x}_k)$, когда начало координат помещено в точку \vec{x}_k . Выполним это преобразование способом, предложенным в работе [150].

Введем в рассмотрение регулярную сетку отсчетов поля, образованную периодическим повторением в пространстве ячейки сетки постоянной формы, например, в виде параллелограмма (рис. 29). Будем считать случайное поле однородным и изотропным, имеющим нулевое среднее значение и корреляционную функцию $K(\vec{x})$. Для простоты мы ограничимся рассмотрением двухмерных полей.

Положение узлов сетки измерений может быть описано посредством векторного базиса $(\vec{V}_j) = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$:

$$\vec{V}_{[l]} = l_1 \vec{V}_1 + l_2 \vec{V}_2 \quad (l_1, l_2 = 0, \pm 1; \pm 2, \dots). \quad (16.1)$$

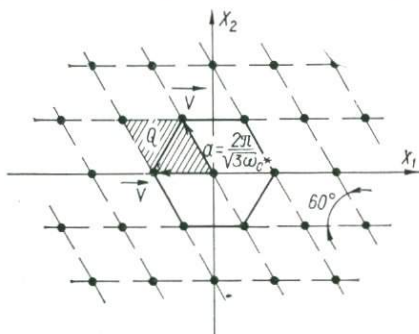


Рис. 29. Сетка измерений изотропного случайного поля.

Тогда в новых обозначениях корреляционный алгоритм оптимальной интерполяции имеет вид

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \sum_{[l]} f(\vec{V}_{[l]}) g(\vec{x} - \vec{V}_{[l]}), \\ K(\vec{x}) &= \sum_{[l]} K(\vec{V}_{[l]}) g(\vec{x} - \vec{V}_{[l]}), \end{aligned} \quad (16.2)$$

где оптимальная весовая функция $g(\vec{x})$ определяется по известной корреляционной функции поля.

Процесс измерения поля в узлах сетки измерений можно рассматривать как умножение значений поля на двухмерную последовательность δ -функций Дирака, расположенных в узлах сетки измерений. Применяя эту процедуру также к непрерывной корреляционной функции и пользуясь известным свойством δ -функций

$$\int_{\vec{x}} K(\vec{\xi}) \delta(\vec{\xi} - \vec{V}_{[l]}) d\vec{\xi} = K(\vec{V}_{[l]}),$$

где $\vec{\xi}$ — вектор с компонентами ξ_1, ξ_2, ξ_3 , отсчитываемыми по осям x_1, x_2, x_3 , для формулы (13.3) имеем следующее представление

$$\begin{aligned} K(\vec{x}) &= \sum_{[l]} g(\vec{x} - \vec{V}_{[l]}) \int K(\vec{\xi}) \delta(\vec{\xi} - \vec{V}_{[l]}) d\vec{\xi} = \\ &= \int_{\vec{x}} K(\vec{\xi}) g(\vec{x} - \vec{\xi}) \sum_{[l]} \delta(\vec{\xi} - \vec{V}_{[l]}) d\vec{\xi}. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Теперь необходимо разложить сумму $\sum_{[l]} \delta(\vec{\xi} - \vec{V}_{[l]}) \equiv \Delta(\vec{x})$ в ряд Фурье на плоскости. Напишем сначала общее выражение для двухмерного ряда Фурье:

$$H(\vec{x}) = \sum_{[m]} c_{[m]} e^{i\vec{x} \cdot \vec{u}_{[m]}}. \quad (16.4)$$

Функция $H(\vec{x}) = H(\vec{x} + \vec{V}_{[l]})$ определена на том же векторном базисе $\{\vec{V}_{[l]}\}$, что и сетка измерений поля. Преобразование Фурье переводит этот базис в базис $\{\vec{u}_{[k]}\}$ пространства волновых чисел $(\vec{\omega})$. При этом выполняется условие ортогональности векторов:

$$\vec{V}_j \cdot \vec{u}_k = 2\pi \delta_{jk} \quad (\delta_{jk} \text{ — символ Кронекера}). \quad (16.5)$$

Линейная комбинация векторов

$$\vec{u}_{[m]} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \quad (m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

описывает положение узлов спектральной сетки в пространстве $(\vec{\omega})$.

Коэффициенты разложения (16.4) имеют вид

$$c_{[m]} = \frac{1}{S_{\Gamma}} \int H(\vec{x}) e^{-i\vec{x} \cdot \vec{u}_{[m]}} d\vec{x}, \quad (16.6)$$

где Γ — параллелограмм, образованный базисными векторами \vec{V}_1 и \vec{V}_2 и имеющий площадь S_Γ .

Покажем теперь, что система функций $e^{i\vec{x}\vec{u}_{[m]}}$ в разложении Фурье (16.4) ортогональна в пределах параллелограмма Γ . Для этого определим линейное преобразование пространства (\vec{x}) в пространство ($\vec{\lambda}$) с помощью соотношения

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2, \quad 0 \leq \lambda_j < 1, \quad j = 1, 2.$$

Якобиан этого преобразования есть константа Q , определяемая выражением

$$Q = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix},$$

где v_i — компонента вектора $\vec{v}_{[l]}$, введенного ранее по формуле (16.1).

Используя это преобразование с учетом (16.5), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} e^{-i\vec{x}\vec{u}_{[m]}} dx &= Q \int_0^1 \int_0^1 e^{-2\pi i(m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2)} d\lambda_1 d\lambda_2 = \\ &= Q \int_0^1 e^{-2\pi i m_1 \lambda_1} d\lambda_1 \int_0^1 e^{-2\pi i m_2 \lambda_2} d\lambda_2 = \begin{cases} Q, & m_1 = m_2 = 0 \\ 0, & m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \\ &\quad (\text{кроме } m_1 = m_2 = 0). \end{aligned}$$

Поскольку λ_1 и λ_2 изменяются в пределах базисных векторов \vec{V}_1 и \vec{V}_2 , образующих параллелограмм Γ , из последнего соотношения при $m_1 = m_2$ непосредственно следует, что Q является площадью этого параллелограмма.

Нетрудно убедиться в том, что на каждую ячейку сетки измерений приходится только один отсчет поля и, следовательно, только одна δ -функция, образующая этот отсчет. Так как ячейка Γ находится между бортами \vec{V}_1 и \vec{V}_2 , можно считать, что δ -функция имеет бесконечное значение в начале координат ($\vec{V}_{[l]} = 0$).

Заменяя теперь $H(\vec{x})$ в (16.6) на $|\Delta|(\vec{x})$, получим

$$c_{[m]} = \frac{1}{Q} \int_{\Gamma} \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{x}\vec{u}_{[m]}} d\vec{x} = \frac{1}{Q}.$$

Таким образом, искомое разложение последовательности δ -функций в ряд Фурье имеет вид

$$\Delta(\vec{x}) = \frac{1}{Q} \sum_{[m]} e^{i\vec{x}\vec{u}_{[m]}}. \quad (16.7)$$

Подставим (16.7) в (16.3) и изменим порядок суммирования и интегрирования:

$$K(\vec{x}) = \sum_{[m]} \int_{(\vec{x})} K(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi}\vec{u}_{[m]}} \frac{g(\vec{x} - \vec{\xi})}{Q} d\vec{\xi}. \quad (16.8)$$

Подынтегральное выражение в (16.8) есть свертка двух функций $K(\vec{\xi})e^{i\vec{\xi}\vec{u}_{[m]}}$ и $\frac{g(\vec{\xi})}{Q}$. Поэтому, выполняя преобразование Фурье по

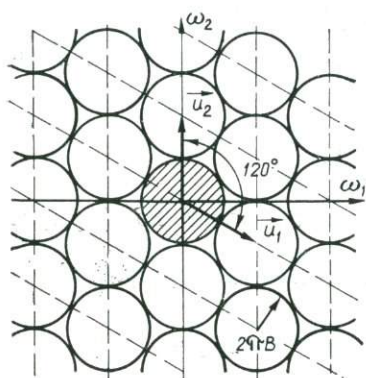


Рис. 30. Спектральная сетка и расположение оснований вторичных спектров.

отношению к левой и правой частям (16.8), находим

$$\Phi(\vec{\omega}) = \frac{G(\vec{\omega})}{Q} \sum_{[m]} \Phi(\vec{\omega} + \vec{u}_{[m]}), \quad (16.9)$$

где $\Phi(\vec{\omega})$ — спектр мощности поля, $G(\vec{\omega})$ — спектр весовой функции.

Соотношение (16.9) является спектральным аналогом второй из формул (16.3), определяющей оптимальные значения значения весовой функции интерполирования в рамках корреляционной теории. Сумма в правой части (16.9) представляет собой «эффект повторения спектров», проявляющийся при дискретизации непрерывных полей.

Этот эффект состоит в том, что в пространстве волновых чисел образуется периодическое повторение спектра квантованного поля $\Phi(\vec{\omega})$ вокруг каждого узла спектральной сетки (рис. 30).

Найдем теперь спектральный аналог выражения для среднеквадратичной ошибки оптимальной интерполяции (16.4)

$$\varepsilon(\vec{x}) = M \{|f(\vec{x}) - \hat{f}(\vec{x})|^2\} = K(0) - \sum_{[l]} K(\vec{x} - \vec{V}_{[l]}) g(\vec{x} - \vec{V}_{[l]}). \quad (16.10)$$

Для этого заметим, что вследствие (16.3) сумма в правой части (16.10) может быть представлена в виде (16.8), которая в свою очередь по формуле Парсеваля [150] может быть приведена к виду

$$\sum_{[l]} \int_{(\vec{x})} K(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi}\vec{u}_{[l]}} \frac{g(\vec{x} - \vec{\xi})}{Q} d\vec{\xi} = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{[l]} \int_{(\vec{\omega})} \Phi(\vec{\omega} + \vec{u}_{[l]}) e^{-i\vec{\xi}\vec{u}_{[l]}} \frac{G(\vec{\omega})}{Q} d\vec{\omega}. \quad (16.11)$$

Дисперсия поля $K(0)$ обычно выражается через спектр мощности $\Phi(\vec{\omega})$:

$$K(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{(\vec{\omega})} \Phi(\vec{\omega}) d\vec{\omega}. \quad (16.12)$$

Подставляя (16.11) и (16.12) в соотношение (16.10), получим

$$\varepsilon(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{(\vec{\omega})} \left[\Phi(\vec{\omega}) - \frac{G(\vec{\omega})}{Q} \sum_{\{l\}} e^{-i\vec{\xi} \cdot \vec{u}_{\{l\}}} \Phi(\vec{\omega} + \vec{u}_{\{l\}}) \right] d\vec{\omega}. \quad (16.13)$$

При помощи формулы (16.13) Д. Питерсен и Д. Миддлтон установили следующие условия, при которых среднеквадратичная ошибка оптимальной интерполяции исчезает для всех точек поля:

1) спектр поля $\Phi(\vec{\omega})$ должен занимать ограниченную область в пространстве волновых чисел $(\vec{\omega})$. В противном случае неизбежно перекрытие вторичных спектров $\Phi(\vec{\omega} + \vec{u}_{\{l\}})$ при любой спектральной сетке, что делает отличным от нуля интеграл справа в соотношении (16.13);

2) сетка измерений $\{\vec{V}_{\{l\}}\}$ должна быть такой, чтобы вторичные спектры в пространстве волновых чисел соприкасались, не перекрываясь (см. рис. 59);

3) спектр весовой функции должен иметь вид

$$G(\vec{\omega}) = \begin{cases} Q, & \Phi(\vec{\omega}) \neq 0, \\ 0, & \Phi(\vec{\omega} + \vec{u}_{\{l\}}) \neq 0 \end{cases} \quad (16.14)$$

и может быть произвольным в областях пространства волновых чисел, находящимся между соседними повторениями спектра.

Выполнение этих условий обеспечивает оптимальное представление непрерывного поля дискретными отсчетами. Вместе с тем при наличии указанных условий можно распространить на случайные поля содержание широко известной в теории связи теоремы отсчетов Котельникова — Шеннона [41]. Таким образом, спектральная формулировка задачи экстраполирования стационарных случайных последовательностей устанавливает связь теории оптимальной интерполяции Колмогорова с теоремой отсчетов.

Практическое значение полученных результатов заключается в том, что спектральная формулировка задачи оптимальной интерполяции позволяет находить простые алгоритмы построения полей с помощью весовой функции. С учетом (16.14) выражение для весовой функции двумерного изотропного поля, являющейся преобразованием Фурье от $G(\vec{\omega})$, имеет вид

$$g(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{(\vec{\omega})} G(\vec{\omega}) e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{x}} d\vec{\omega} = \frac{Q}{4\pi^2} \int_{|\vec{\omega}| < 2\pi B} e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{x}} d\vec{\omega}, \quad (16.15)$$

где $B = \frac{\omega_c}{2\pi}$, а ω_c — верхняя граничная частота спектра поля $\Phi(\vec{\omega})$.

Путем перехода к сферическим координатам выражение (16.15) приводится к простому представлению через функцию Бесселя

первого порядка [150]:

$$g(\vec{x}) = \frac{I_1(2\pi B|\vec{x}|)}{2\sqrt{3}B|\vec{x}|}. \quad (16.16)$$

На рис. 31 изображено изменение этой весовой функции с расстоянием $|\vec{x}|$.

Спектральная формула интерполяции изотропного двумерного поля принимает вид

$$\hat{f}(\vec{x}) = \sum_{|l|} \frac{I_1(2\pi B|\vec{x}_{|l|})}{2\sqrt{3}B|\vec{x}_{|l|}} \hat{f}(\vec{x}_{|l|}). \quad (16.17)$$

Этот алгоритм весьма просто реализуется на ЭВМ при расчете поля. Аналогично могут быть выведены формулы оптимальной ин-

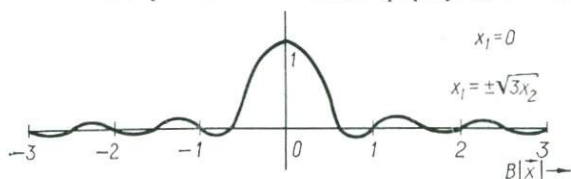


Рис. 31. Весовая функция [150].

терполяции для каждого конкретного спектра поля при условии, что сетка отсчетов выбрана в соответствии с формой основания спектра.

Приведенные здесь результаты спектральной формулировки задачи интерполирования двумерных однородных и изотропных случайных полей тривиальным образом распространяются и на общий случай N -мерных полей [150].

Предварительная фильтрация наблюдений. Рассмотрим теперь более общую проблему восстановления случайного поля океана по результатам дискретных измерений, выполняемым со случайными ошибками. Помимо ошибок, связанных с неточностью метода измерения, в океане практически всегда имеют место погрешности определения местоположения станций. Поэтому отсчеты поля следует представлять в виде суммы истинного значения поля $s(\vec{x})$ и шумовой составляющей ошибок наблюдений $n(\vec{x})$ различной природы:

$$\hat{f}(\vec{x}_k) = s(\vec{x}_k) + n(\vec{x}_k). \quad (16.18)$$

Задача расчета карты поля по измерениям (16.18) состоит в оптимальной фильтрации поля со среднеквадратичным критерием качества

$$\varepsilon(\vec{x}) = E \{ |s(\vec{x}) - \hat{s}(\vec{x})|^2 \}. \quad (16.19)$$

Будем считать, что карта поля должна иметь вид таблицы расчетных значений в узлах некоторой правильной сетки.

Измерения поля могут располагаться произвольно по отношению к этой сетке. Однако для того чтобы иметь возможность использовать преобразование Фурье, мы предположим, что станции в океане также образуют правильную сеть в пространстве (\vec{x}) и что их положения описываются векторным базисом $(\vec{V}_j) = \vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{[m]} &= m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 + \dots + m_n \vec{V}_n, \\ m_1, m_2, \dots, m_n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (16.20)$$

Отсчеты поля в узлах сетки измерений удобно представить как результаты осреднения непрерывного поля $f(\vec{x})$ с некоторой весовой функцией $\gamma(\vec{x})$, характеризующей метод измерений

$$\Psi(\vec{V}_{[m]}) = \int_{(\vec{x})} f(\vec{x}) \gamma(\vec{V}_{[m]} - \vec{x}) d\vec{x}. \quad (16.21)$$

Формула оптимальной фильтрации значений поля принимает вид

$$\hat{s}(\vec{x}) = \sum_{[m]} \Psi(\vec{V}_{[m]}) g(\vec{x} - \vec{V}_{[m]}). \quad (16.22)$$

Подобное осреднение поля можно рассматривать как линейную фильтрацию до измерений, или «префильтрацию», тогда как для расчета карты используется «постфильтрация».

На основе введенной модели Д. Питерсен и Д. Миддлтон [150], [152] исследовали существующую связь между оптимальными весовыми функциями $\gamma(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ и обосновали объективный подход к оценке «репрезентативности» измерений случайного поля. Ввиду того что понятие репрезентативности измерений тесно связано с проблемами планирования наблюдений в океане, остановимся подробнее на результатах работы [150].

Введем обозначения для корреляционных функций:

$$\begin{aligned} K_{ss}(\vec{x}) &= E \{s(\vec{y}) s(\vec{y} + \vec{x})\}, \\ K_{ff}(\vec{x}) &= E \{f(\vec{y}) f(\vec{y} + \vec{x})\}, \\ K_{fs}(\vec{x}) &= E \{f(\vec{y}) s(\vec{y} + \vec{x})\}, \\ K_{sf}(\vec{x}) &= E \{s(\vec{y}) f(\vec{y} + \vec{x})\} = K_{fs}(-\vec{x}). \end{aligned} \quad (16.23)$$

Тогда (16.19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{x}) &= K_{ss}(0) - 2 \sum_{[m]} (g(\vec{x}) - \vec{V}_{[m]}) \int_{(\vec{x})} \gamma(\vec{V}_{[m]} - \vec{y}) K_{fs}(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} + \\ &+ \sum_{[l]} \sum_{[m]} g(\vec{x} - \vec{V}_{[l]}) g(\vec{x} - \vec{V}_{[m]}) \int_{(\vec{x})} \int_{(\vec{x})} \gamma(\vec{V}_{[m]} - \vec{y}) \gamma(\vec{V}_{[l]} - \vec{z}) \times \\ &\times K_{ff}(\vec{z} - \vec{y}) d\vec{y} d\vec{z}. \end{aligned} \quad (16.24)$$

Для нахождения условий минимума ошибки $\varepsilon(\vec{x})$ необходимо варьировать формулу (16.24) по $g(\vec{x})$ и $\gamma(\vec{x})$. Выполняя варьирование по $g(\vec{x})$, находим

$$\begin{aligned} & 2 \int_{(\vec{x})} \gamma(\vec{V}_{[k]} - \vec{y}) K_{fs}(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} = \\ & = \sum_{[l]} g(\vec{x} - \vec{V}_{[l]}) \int_{(\vec{x})} \int_{(\vec{x})} \gamma(\vec{V}_{[k]} - \vec{y}) \gamma(\vec{V}_{[l]} - \vec{z}) K_{ff}(\vec{z} - \vec{y}) d\vec{y} d\vec{z} + \\ & + \sum_{[m]} g(\vec{x} - \vec{V}_{[m]}) \int_{(\vec{x})} \int_{(\vec{x})} \gamma(\vec{V}_{[m]} - \vec{y}) \gamma(\vec{V}_{[k]} - \vec{z}) K_{ff}(\vec{z} - \vec{y}) d\vec{y} d\vec{z}. \end{aligned} \quad (16.25)$$

Применение теоремы Парсеваля к этому выражению дает

$$\begin{aligned} 2\Phi_{fs}(\vec{\omega}) \Gamma(-\vec{\omega}) &= \frac{G(\vec{\omega})}{Q} \sum_{[l]} \Gamma(\vec{\omega} - \vec{u}_{[l]}) \Gamma(\vec{u}_{[l]} - \vec{\omega}) [\Phi_{ff}(\vec{\omega} - \vec{u}_{[l]}) + \\ & + \Phi_{ff}(\vec{u}_{[l]} - \vec{\omega})]. \end{aligned} \quad (16.26)$$

Здесь $\Gamma(\vec{\omega})$, $G(\vec{\omega})$, $\Phi_{fs}(\vec{\omega})$, $\Phi_{ff}(\vec{\omega})$ — преобразования Фурье от функций $\gamma(\vec{x})$, $g(\vec{x})$, $K_{fs}(\vec{x})$, $K_{ff}(\vec{x})$; $\{\vec{u}_i\}$ — базис в пространстве волновых чисел $(\vec{\omega})$, двойственный базису $\{\vec{V}_j\}$.

Чтобы выполнить варьирование по $\gamma(\vec{x})$, необходимо ввести среднее значение ошибки $\varepsilon(\vec{x})$ по пространству (\vec{x}) в качестве меры ее величины, определяемой выбором весовой функции префильтрации при фиксированной функции $g(\vec{x})$.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{Q} \int_{(b)} \varepsilon(\vec{x}) d\vec{x} = K_{ss}(0) - \frac{2}{Q} \sum_{[m]} \int_{(b)} g(\vec{x} - \vec{V}_{[m]}) \int_{(\vec{x})} \gamma(\vec{V}_{[m]} - \vec{y}) \times \\ & \times K_{fs}(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} d\vec{x} + \frac{1}{Q} \sum_{[l]} \sum_{[m]} \int_{(b)} g(\vec{x} - \vec{V}_{[l]}) g(\vec{x} - \vec{V}_{[m]}) \int_{(\vec{x})} \int_{(\vec{x})} \gamma(\vec{V}_{[m]} - \\ & - \vec{y}) \gamma(\vec{V}_{[l]} - \vec{z}) K_{ff}(\vec{z} - \vec{y}) d\vec{y} d\vec{z} d\vec{x}. \end{aligned} \quad (16.27)$$

Варьирование этого выражения по $\gamma(\vec{x})$ приводит к условию минимума $\bar{\varepsilon}$, аналогичному (16.26):

$$\begin{aligned} 2\Phi_{fs}(\vec{\omega}) G(-\vec{\omega}) &= \frac{\Gamma(\vec{\omega})}{Q} [\Phi_{ff}(\vec{\omega}) + \\ & + \Phi_{ff}(-\vec{\omega})] \sum_{[m]} G(\vec{\omega} - \vec{u}_{[m]}) \cdot G(\vec{u}_{[m]} - \vec{\omega}). \end{aligned} \quad (16.28)$$

Таким образом, спектры весовых функций оптимальной префильтрации и постфильтрации могут быть найдены из совместного реше-

ния уравнений (16.26) и (16.28). Анализируя эти уравнения, можно сделать вывод, что спектры $\Gamma(\vec{\omega})$ и $G(\vec{\omega})$ могут быть отличными от нуля только в пределах базисной ячейки пространства волновых чисел. При этом должно быть выполнено условие

$$G(\vec{\omega}) \Gamma(\vec{\omega}) = 2Q \frac{\Phi_{fs}(\vec{\omega})}{\Phi_{ff}(\vec{\omega}) + \Phi_{ff}(-\vec{\omega})}. \quad (16.29)$$

Очевидно, что выбор формы базисной ячейки, которую мы обозначим «С», влияет на величину ошибки (16.27). Будучи преобразовано к пространству волновых чисел, выражение для ошибки принимает вид

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(\vec{\omega})} \Phi_{ss}(\vec{\omega}) d\vec{\omega} - \frac{4}{(2\pi)^n} \int_{(c)} \frac{\Phi_{fs}(\vec{\omega}) \Phi_{fs}(-\vec{\omega}) \Phi_{ff}(-\vec{\omega})}{[\Phi_{ff}(\vec{\omega}) + \Phi_{ff}(-\vec{\omega})]^2} d\vec{\omega}. \quad (16.30)$$

В случае, когда ошибок измерений нет, последнее выражение дает известную формулу, выражающую среднюю ошибку интерполяции через спектр поля

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(\vec{\omega})-c} \Phi_{ss}(\vec{\omega}) d\vec{\omega}. \quad (16.31)$$

Здесь интегрирование происходит по всему пространству $(\vec{\omega})$ за пределами основной ячейки спектральной сетки.

При помощи соотношения (16.30) Д. Питерсен и Д. Миддлтон ввели следующее определение репрезентативности наблюдений случайного поля: наблюдения должны являться результатом линейной фильтрации (осреднения) непрерывного поля исходных данных со спектром $\Gamma(\vec{\omega})$, обладающим такими свойствами: для каждого счетного множества аргументов $\{(\vec{\omega}) + \vec{u}_{[k]}\}$

$$\Gamma(\vec{\omega} + \vec{u}_{[k]}) = \frac{2\Phi_{fs}(\vec{\omega} + \vec{u}_{[k]})}{\Phi_{ff}(\vec{\omega} + \vec{u}_{[k]}) + \Phi_{ff}(-\vec{\omega} - \vec{u}_{[k]})}, \quad (16.32)$$

причем значения $[k]$ в (16.20) выбираются такими, чтобы величина

$$\frac{\Phi_{fs}(\vec{\omega} + \vec{u}_{[k]}) \Phi_{fs}(-\vec{\omega} - \vec{u}_{[k]}) \Phi_{ff}(-\vec{\omega} - \vec{u}_{[k]})}{[\Phi_{ff}(\vec{\omega} + \vec{u}_{[k]}) + \Phi_{ff}(-\vec{\omega} - \vec{u}_{[k]})]^2} \quad (16.33)$$

достигала максимума. Для всех других значений $[k]$ спектр $\Gamma(\vec{\omega} + \vec{u}_{[k]}) = 0$.

Операция префильтрации наблюдений позволяет преобразовать спектр поля к такому виду, чтобы его основание в пространстве $(\vec{\omega})$ в точности соответствовало размерам и конфигурации ячейки спектральной сетки и, следовательно, интерполяционной сетки,

выбранной для представления поля. Использование расчетных значений поля, полученных путем префильтрации для восстановления $s(\vec{x})$ в произвольной точке, связано с меньшей ошибкой, чем интерполирование по исходным данным. В этом состоит преимущество использования репрезентативных наблюдений.

§ 17. Применение спектрального алгоритма интерполяции в задачах построения карт полей океана

Численные эксперименты на модели случайного пространственного поля. Отмеченные преимущества спектрального алгоритма оптимальной интерполяции перед корреляционным алгоритмом делают перспективным построение карт полей океана на ЭВМ этим методом.

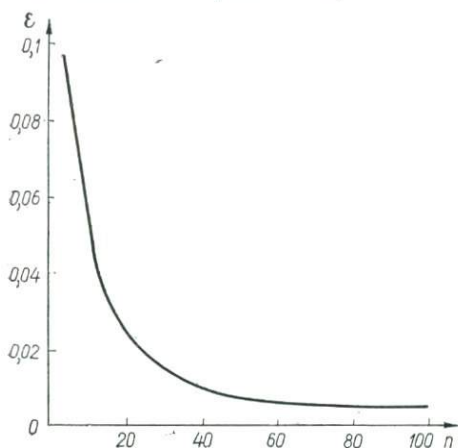


Рис. 32. Зависимость средней ошибки интерполяции от количества использованных станций.

Однако при выводе формул для весовых функций, например формулы (16.16), использовалось предположение о том, что сетка измерений безгранична в пространстве (\vec{x}) . На практике сеть океанографических станций всегда имеет конечные размеры. Поэтому следует ожидать, что применение спектрального алгоритма интерполяции связано с некоторой ошибкой построения карты, обусловленной влиянием границ полигона, на котором размещена сеть станций.

Для оценки возможности практического применения метода целесообразно провести численные эксперименты по расчету случайных полей океана на моделях. Помимо определения точности спектрального метода интерполяции в таких экспериментах можно установить необходимое количество станций, обеспечивающих интерполяцию с заданной ошибкой.

Один из первых численных экспериментов приведен в работе [84]. Ввиду того что авторы этой работы не располагали океанографическими наблюдениями в узлах достаточно густой сетки измерений, они провели моделирование на ЭВМ некоторого «условного» случайного поля океана, обладающего известными статистическими свойствами.

В качестве моделей полей были выбраны реализации случайных функций с экспоненциальными корреляционными связями. Значе-

ния параметров корреляционных функций подбирались близкими к тем, которые получаются при измерении реальных полей океана. На рис. 32 приведена оценка корреляционной функции температуры воды на глубине 300 м для района северо-западной Атлантики, полученная по наблюдениям. Эта корреляционная функция была аппроксимирована с помощью зависимости

$$K(\rho) = \exp\{-\alpha\rho^2\}, \quad (17.1)$$

где $\alpha = 2,5 \cdot 10^4$.

Для моделирования двумерного изотропного поля с корреляционной функцией (17.1) был выбран метод формирующих фильтров [94]. Он прост и удобен при реализации его на ЭВМ. В то же время он обеспечивает хорошее качество модели: ее автокорреляционная функция с высокой степенью точности совпадает с заданной.

Рассмотрим свертку идеального белого шума (спектральная плотность $1/4\pi^2$) с некоторой четной функцией $\varphi(x)$, которую назовем формирующей:

$$u(\vec{x}) = \int_{(\vec{x})} F(\vec{x} - \vec{y}) \varphi(\vec{y}) d\vec{y}. \quad (17.2)$$

Тогда в пространстве волновых чисел будет иметь место соотношение

$$S(\vec{\omega}) = \frac{c^2(\vec{\omega})}{4\pi^2}, \quad (17.3)$$

где $S(\vec{\omega})$ — спектральная плотность поля; $c(\vec{\omega})$ — спектр Фурье формирующей функции; $\vec{\omega}$ — вектор пространства волновых чисел.

Применяя преобразование Ханкеля, из (17.3) получим

$$\varphi(\rho) = \int_0^\infty [S(\vec{\omega})]^{1/2} I_0(\vec{\omega}\rho) \vec{\omega} d\vec{\omega}, \quad (17.4)$$

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2).$$

Таким образом, процедура вычисления формирующей функции сводится к нахождению интеграла (17.4), в котором $S(\vec{\omega})$ определяется преобразованием Ханкеля функции корреляции. Если интеграл не вычисляется аналитически, можно использовать численные методы. Однако при этом резко увеличивается объем вычислений и снижается качество моделирования.

Формирующая функция, соответствующая случайному полю с корреляционной функцией (17.1), имеет вид

$$\varphi(\rho) = \exp\{-2\alpha\rho^2\}. \quad (17.5)$$

При реализации метода на ЭВМ выражение (17.2) заменяется конечной суммой: вместо непрерывного поля получается совокупность

значений в конечном дискретном множестве точек. Идеальный белый шум представляется последовательностью псевдослучайных чисел с соответствующим законом распределения, получаемым программным способом.

Дискретный аналог формулы (17.2) запишется в виде

$$u(\vec{x}_0) = \sum_n F(\vec{x}_n) \varphi(\vec{x}_0 - \vec{x}_n), \quad (17.6)$$

где $u(\vec{x}_0)$, $F(\vec{x}_n)$ — амплитуды реализации случайного поля и белого шума соответственно в точках \vec{x}_0 и \vec{x}_n .

Близость корреляционной функции модели к корреляционной функции (17.1) зависит от расстояния между узлами a , т. е. от шага численного интегрирования выражения (17.2) и размеров области суммирования. С увеличением предела суммирования и уменьшением шага степень совпадения обеих функций увеличивается.

Ординаты формирующей функции с ростом модуля вектора $|\vec{\omega}_0 - \vec{\omega}_n|$ достаточно быстро стремятся к нулю. Поэтому при расчетах можно ограничиться относительно небольшим числом членов суммы (17.6). Конкретные размеры области суммирования определялись экспериментально в зависимости от вида функции корреляции и величины a . Последняя выбиралась следующим образом: строился спектр плотности моделируемого процесса и устанавливалась верхняя граничная частота $|\vec{\omega}_c|$ при условии, чтобы средняя ошибка расчета поля

$$\bar{\epsilon} = \int_{(\vec{\omega})-p} \Phi(\vec{\omega}) d\vec{\omega} \quad (17.7)$$

не превышала заданной величины. Тогда

$$a = \frac{4\pi}{\sqrt{3} |\vec{\omega}_c|}. \quad (17.8)$$

Для проведения численных экспериментов по оптимальной интерполяции желательно иметь поле, которое содержит возможно большее число точек «измерений». Это необходимо для наиболее точного вычисления как характеристик самой случайной функции, так и поля ошибок интерполяции. Память использованной при расчетах ЭВМ М-220М позволила построить модель однородного и изотропного случайного поля при относительно небольших затратах машинного времени на моделирование (порядка 3 ч). Модель поля содержала 16 тысяч узлов ромбической сетки. Для удобства расчетов сеточная область была выбрана в виде правильного шестиугольника.

Расчеты по каждой модели проводились при одинаковом шаге сетки, составляющем 20 миль. При этом, как показали графики спектров полей, величина $\bar{\epsilon}$ (ожидаемой средней ошибки интерполя-

ции) для первой модели составила 0,05, для второй она оказалась практически равной нулю.

Чтобы оценить точность спектрального метода расчета поля, была выполнена интерполяция по формулам восстановления поля, измеренного в узлах 60-градусной ромбической сетки:

$$\hat{f}(\vec{x}) = \sum_{[k]} g(\vec{x} - \vec{v}_{[k]}) f(\vec{v}_{[k]});$$

$$g(x_1 x_2) = \left[2x_1 \cos \frac{|\vec{\omega}_c| x_1}{\sqrt{3}} \cos |\vec{\omega}_c| x_2 - 2x_1 \cos \frac{2|\vec{\omega}_c| x_1}{\sqrt{3}} - \right. \\ \left. - 2\sqrt{3} x_2 \sin \frac{|\vec{\omega}_c| x_1}{\sqrt{3}} \sin |\vec{\omega}_c| x_2 \right] / |\vec{\omega}_c|^2 x_1 (x_1^2 - 3x_2^2); \quad (17.9)$$

$$k = 1, 2, \dots, N; \quad |\vec{\omega}_c| = 2\pi B.$$

В качестве сетки измерений в этом расчете была использована сетка в два раза крупнее, чем исходная. Интерполяция производи-

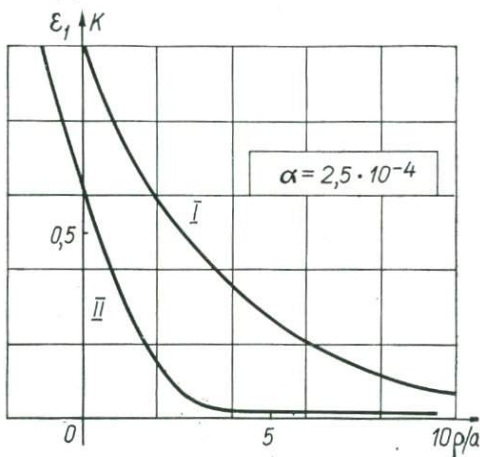


Рис. 33. Корреляционная функция (I) и зависимость ошибки интерполяции (II) от расстояния до границ области измерений.

лась в «пропущенные» узлы исходной сетки и варьировалось «количество станций», участвующих в интерполяции. По результатам этого эксперимента был построен график зависимости количества станций от средней ошибки интерполяции.

Как следует из рис. 32, спектральный метод интерполяции обеспечивает высокую точность расчета уже при 10 станциях, используемых при интерполяции. Увеличение их количества до более 30 в рассмотренном случае экспоненциальной корреляции поля практически не приводит к выигрышу в точности расчета, поскольку кривые ошибок имеют отчетливо выраженную область насыщения.

Целью второго эксперимента являлась оценка влияния границ области измерений на точность интерполяции. Количество «станций» $[K]$ в интерполяционной формуле (17.9) в этом эксперименте было выбрано достаточно большим ($N = 80$) с учетом сокращения их количества по мере приближения к границам области. На рис. 33 приведена ошибка интерполяции в зависимости от безразмерного параметра $\rho/\sqrt{3}a$, характеризующего расстояние до границы области измерений. Отрицательные значения расстояний означают выход за пределы области и соответствуют случаю экстраполяции. Принимая во внимание, что интервал корреляции (определенный по

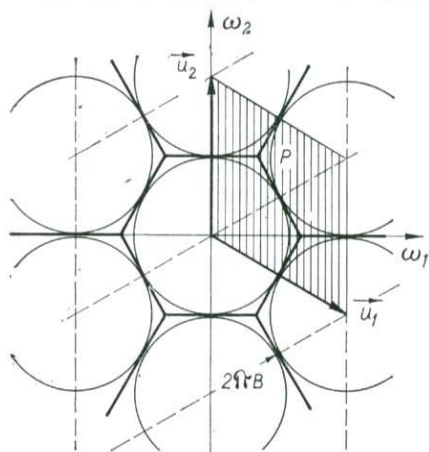


Рис. 34. Ячейка спектральной сетки в форме 60-градусного ромба.

уровню 0,01) составляет 4,5 безразмерных единицы, из графика рис. 33 следует, что влияние границ становится существенным лишь при расстояниях, не превышающих интервала корреляции поля. На основании численных экспериментов сделан вывод о том, что спектральный алгоритм расчета пространственных полей океана обладает высокой точностью и позволяет сравнительно просто осуществлять интерполяцию на ЭВМ. Этот вывод подтверждают также результаты применения метода к фактическим наблюдениям пространственного поля рельефа дна на специальном полигоне. Эксперимент по построению карты рельефа дна в районе о. Альборан с использованием спектрального метода интерполяции приводится ниже (в § 29) в связи с задачей планирования съемки пространственных полей океана на полигонах.

Оптимальное сглаживание наблюдений. В § 16 рассмотрена операция префильтрации данных. Смысл этой операции состоит в преобразовании исходного поля к такому виду, чтобы его спектр соответствовал форме сетки, выбранной для его представления. Иначе говоря, операцию префильтрации можно рассматривать как идеальное ограничение спектра исходного поля, при котором его основание в пространстве волновых чисел принимает форму ячейки спектральной сетки, двойственной сетке измерений (см. рис. 30).

В тех случаях, когда измерения поля выполнены в узлах достаточно густой сетки, но содержат значительные ошибки, целесообразно перейти сначала к более редкой сети «измерений», представляющей сглаженное по отношению к исходному полю. Восстановление поля следует производить из узлов этой вторичной, более редкой

сетки. В таких случаях операция префильтрации совпадает с оптимальным сглаживанием наблюдений.

Рассмотрим карту поля концентраций кислорода на глубине 100 м в Тропической Атлантике (см. рис. 28). Предположим, что значения поля, рассчитанного в узлах прямоугольной сетки с шагом в 1° (60 миль), должны быть сглажены для получения осредненных значений в узлах 60-градусной ромбической сетки со стороной $a = 5^\circ \simeq 300$ миль. В соответствии с изложенной в § 16 методикой спектр поля, изображенного на рис. 28, должен быть ограничен в основании гексагональной ячейкой, имеющей площадь P (рис. 34).

Используем связь между площадью ячейки сетки измерений Q и площадью соответствующей ей ячейки P .

$$QP = (2\pi)^N, \quad (17.10)$$

где N — размерность пространства. Определим «частоту среза», до которой должно произойти ограничение спектра поля. Так как площадь 60-градусного ромба связана с шагом сетки формулой

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2,$$

из выражения (17.10) имеем

$$P = \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}} a^2. \quad (17.11)$$

Отсюда для верхней граничной частоты спектра сглаженного поля (рис. 34) находим

$$B = \frac{4\pi}{\sqrt{3} a} \cong 0,012 \text{ миль}^{-1}.$$

Формула оптимального сглаживания поля имеет вид [152]

$$\hat{f}_{[k]}(\vec{0}) = \frac{\hat{f}(x_{[k]})}{4\pi^2} \int_p \Gamma(\vec{\omega}) G(\vec{\omega}) e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{x}_{[k]}} d\vec{\omega}. \quad (17.12)$$

В этой формуле интеграл представляет собой оптимальное взвешивание, которое необходимо применить к полю, известному в $[k]$ -м узле исходной сетки, чтобы получить значение сглаженного поля в узле $\vec{x} = \vec{0}$ гексагональной сетки. $G(\vec{\omega})$ — спектр весовой функции восстановления исходного непрерывного поля, $\Gamma(\vec{\omega})$ — спектр весовой функции префильтрации. Интегрирование должно производиться по уже найденной площади ячейки P (17.11).

Замечая, что спектр $\Phi(\vec{\omega})$ изотропен и шумов измерений нет, а также используя условие репрезентативности наблюдений (16.32), потребуем, чтобы $\Gamma(\vec{\omega})$ имел вид

$$\Gamma(\vec{\omega}) = \begin{cases} 1, & |\vec{\omega}| < B, \\ 0, & |\vec{\omega}| \geq B. \end{cases}$$

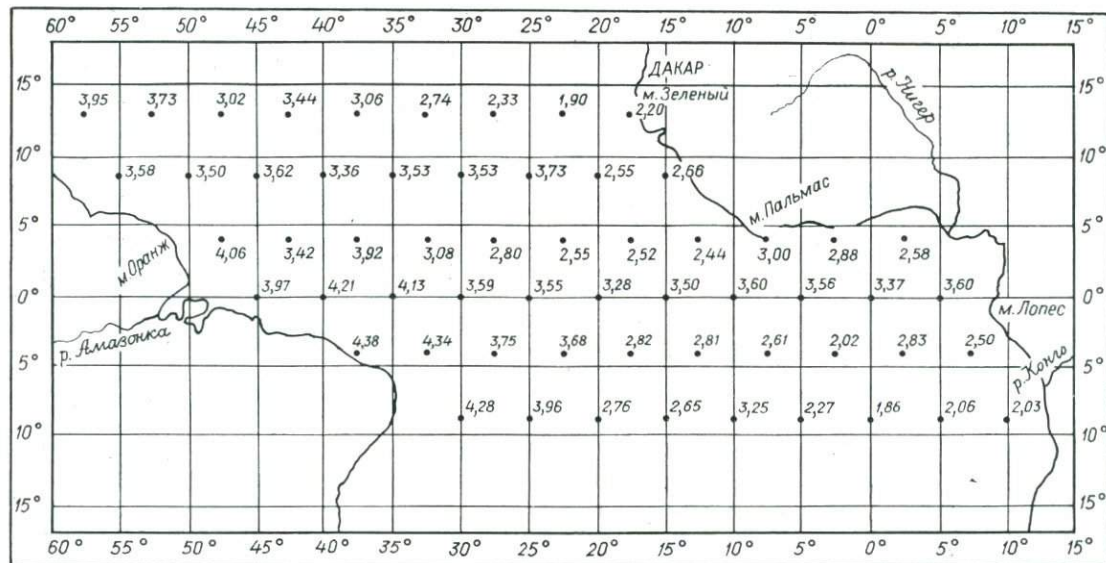


Рис. 35. Карта распределения кислорода на глубине 100 м, полученная оптимальным сглаживанием поля, изображенного на рис. 28.

Тогда условие (16.29) дает

$$G(\vec{\omega}) = \begin{cases} Q, & |\vec{\omega}| < B, \\ 0, & |\vec{\omega}| \geq B. \end{cases}$$

Таким образом, оптимальное сглаживание поля должно происходить с весовой функцией (17.9), к которой приводит интегрирование выражения $\Gamma(\vec{\omega}) G(\vec{\omega}) = Q$ в формуле (17.12).

В соответствии с изложенной методикой была составлена программа оптимального сглаживания поля концентраций кислорода для ЭВМ М-220М и построена карта его сглаженных значений (рис. 35). Величина концентрации кислорода в произвольной точке поля теперь может быть восстановлена по его значениям в узлах гексагональной сетки с помощью спектрального алгоритма интерполяции.

§ 18. Статистическое согласование океанографических полей

Корреляционный алгоритм оптимального согласования полей. При расчете карт физических полей океана по данным экспедиционных рейсов научно-исследовательских судов, как правило, имеются данные наблюдений, относящихся к полям различной физической природы, но связанных между собой статистическими зависимостями. В подобных случаях возникает задача комплексного использования информации при расчете каждого из полей. Подобная задача получила в метеорологии название «статистическое согласование полей» [20].

Рассмотрим алгоритм нахождения согласованного поля по данным измерений двух однородных и изотропных случайных полей $f_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x})$. Предположим, что оба поля представлены дискретными отсчетами в узлах одной и той же регулярной сетки $\{x_{[k]}\}$. Примем также, что измеренные значения полей содержат случайные ошибки наблюдений, описываемые функциями $N_1(\vec{x})$ и $N_2(\vec{x})$ так, что отсчеты полей представляют собой суммы

$$\begin{aligned} r_1(\vec{x}_k) &= f_1(\vec{x}_k) + N_1(\vec{x}_k), \\ r_2(\vec{x}_k) &= f_2(\vec{x}_k) + N_2(\vec{x}_k). \end{aligned} \quad (18.1)$$

Оптимальное согласование полей заключается в одновременном использовании последовательностей отсчетов (18.1) для нахождения оценок $\hat{f}_1(\vec{x})$ и $\hat{f}_2(\vec{x})$, менее всего отличающихся от истинных полей $f_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x})$. В такой постановке задача согласования полей является обобщением задачи оптимальной фильтрации стационарной случайной последовательности [98] на случай двух последовательностей, статистически связанных между собой.

Оценка согласованных величин каждого из полей, например поля $f_1(\vec{x})$, ищется в виде линейной комбинации

$$\hat{f}_1(\vec{x}) = \sum_k g_1(\vec{x}, \vec{x}_k) r_1(\vec{x}_k) + \sum_m g_2(\vec{x}, \vec{x}_m) r_2(\vec{x}_m). \quad (18.2)$$

Причем весовые коэффициенты $g_1(\vec{x}, \vec{x}_k)$ и $g_2(\vec{x}, \vec{x}_m)$ должны обращать в минимум средний квадрат ошибки восстановления поля

$$\varepsilon(\vec{x}) = E \{ |f_1(\vec{x}) - \hat{f}_1(\vec{x})|^2 \}. \quad (18.3)$$

Введем обозначения для автокорреляционных функций полей

$$K_1(\vec{x}, \vec{x}_k) \equiv E \{ \rho_1(\vec{x}) f_1(\vec{x}_k) \}; \quad K_2(\vec{x}, \vec{x}_k) \equiv E \{ \rho_2(\vec{x}) f_2(\vec{x}_k) \},$$

а также для функции взаимной корреляции, описывающей статистическую связь между полями

$$K_{1,2}(\vec{x}, \vec{x}_k) \equiv E \{ f_1(\vec{x}) f_2(\vec{x}_k) \}.$$

Далее, предположим, что функции ошибок наблюдений $N_1(\vec{x})$ и $N_2(\vec{x})$ представляют собой белый шум, т. е. не коррелированы между собой и с полями $f_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x})$.

Подставим выражение (18.2) в (18.3) и выполним преобразование с учетом введенных обозначений:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{x}) = & K_1(\vec{x}, \vec{x}) - 2 \sum_k g_1(\vec{x}, \vec{x}_k) K_1(\vec{x}, \vec{x}_k) - 2 \sum_m g_2(\vec{x}, \vec{x}_m) \times \\ & \times K_{12}(\vec{x}, \vec{x}_m) + \sum_k \sum_l g_1(\vec{x}, \vec{x}_k) g_1(\vec{x}, \vec{x}_l) [K_1(\vec{x}_k, \vec{x}_l) + K_{N_1}(\vec{x}, \vec{x}) \delta_{kl}] + \\ & + \sum_m \sum_n g_2(\vec{x}, \vec{x}_m) g_2(\vec{x}, \vec{x}_n) [K_2(\vec{x}_m, \vec{x}_n) - K_{N_2}(\vec{x}, \vec{x}) \delta_{mn}] + \\ & + 2 \sum_k \sum_m g_1(\vec{x}, \vec{x}_k) g_2(\vec{x}, \vec{x}_m) K_{12}(\vec{x}_k, \vec{x}_m), \end{aligned} \quad (18.4)$$

где через $K_{N_1}(\vec{x}, \vec{x})$ и $K_{N_2}(\vec{x}, \vec{x})$ обозначены дисперсии шумов соответственно $N_1(\vec{x})$ и $N_2(\vec{x})$.

Для нахождения условий, при которых ошибка $\varepsilon(\vec{x})$ принимает минимальное значение, продифференцируем выражение (18.4) по $g_1(\vec{x}, \vec{x}_k)$ и $g_2(\vec{x}, \vec{x}_m)$ и приравняем производные нулю. Выполняя указанные действия, находим

$$\begin{aligned} K_1(\vec{x}, \vec{x}_k) = & \sum_l g_1(\vec{x}, \vec{x}_l) K_1(\vec{x}_k, \vec{x}_l) + \\ & + g_1(\vec{x}, \vec{x}_k) K_{N_1}(\vec{x}, \vec{x}) + \sum_m g_2(\vec{x}, \vec{x}_m) K_{1,2}(\vec{x}_k, \vec{x}_m), \end{aligned}$$

$$K_{12}(\vec{x}, \vec{x}_m) = \sum_n g_2(\vec{x}, \vec{x}_n) K_2(\vec{x}_n, \vec{x}_n) + \quad (18.5)$$

$$+ g_2(\vec{x}, \vec{x}_m) K_{N2}(\vec{x}, \vec{x}) + \sum_k g_i(\vec{x}, \vec{x}_k) K_{12}(\vec{x}_k, \vec{x}_m).$$

Система уравнений (18.5) позволяет определить значения оптимальных (относительно минимума $\varepsilon(\vec{x})$) весовых функций согласования $g_1(\vec{x}, \vec{x}_l)$ и $g_2(\vec{x}, \vec{x}_m)$, если известны автокорреляционные функции полей, а также функция взаимной корреляции. В дальнейшем для простоты будем полагать, что ошибок измерений нет. Очевидно, что для нахождения весовых функций $g_1(\vec{x}, \vec{x}_l)$ и $g_2(\vec{x}, \vec{x}_k)$ достаточно в системе (18.1) положить равными нулю дисперсии шумов $K_{N1}(\vec{x}, \vec{x})$ и $K_{N2}(\vec{x}, \vec{x})$.

Рассмотрим случай, встречающийся на практике, когда получить оценки $K_2(\vec{x})$ и $K_{12}(\vec{x})$ сложнее, чем найти корреляционную функцию $K_1(\vec{x})$, поскольку данных о поле $f_2(\vec{x})$, привлекаемых для расчета $f_1(\vec{x})$, оказывается недостаточно для надежного определения $K_2(\vec{x})$ и $K_{12}(\vec{x})$. В таком случае естественно выразить функции $K_2(\vec{x})$ и $K_{12}(\vec{x})$ через $K_1(\vec{x})$, используя общие сведения о характере связей, существующих между двумя полями.

Одним из возможных способов решения этого вопроса является представление поля $f_2(\vec{x})$ в качестве результата линейного преобразования исходного поля $f_1(\vec{x})$:

$$f_2(\vec{x}) = \int_{(\vec{x})} \gamma(\vec{x} - \vec{y}) f_1(\vec{y}) d\vec{y}. \quad (18.6)$$

Вид передаточной функции $\gamma(\vec{x} - \vec{y})$ преобразования (18.6) должен определяться из физических соображений.

Линейными преобразованиями приближенно описывается достаточно широкий класс физических взаимодействий, вытекающих из общей системы уравнений гидродинамики. Кроме того, выбор линейного преобразования оправдывается простотой связей, существующих между корреляционными функциями и спектрами процессов на входе и выходе линейной динамической системы [75]

$$K_2(\vec{x}) = \int_{(\vec{x})} b_\gamma(\vec{z}) K_1(\vec{x} - \vec{z}) d\vec{z},$$

$$b_\gamma(\vec{z}) = \int_{(\vec{x})} \gamma(\vec{u}) \gamma(\vec{u} - \vec{z}) d\vec{u}, \quad (18.7)$$

где

$$K_{12}(\vec{x}) = \int_{(\vec{x})} \gamma(\vec{z}) K_1(\vec{x} - \vec{z}) d\vec{z}.$$

Например, если поле $f_2(\vec{x})$ образовано добавлением белого шума к полю $f_1(\vec{x})$ (что, очевидно, может иметь место, когда измерения исходного поля выполняются одновременно двумя приборами, обладающими различной точностью), связи между корреляционными функциями оказываются элементарно простыми.

$$K_{12}(\vec{x}, \vec{x}_k) = K_1(\vec{x}, \vec{x}_k),$$

$$K_2(\vec{x}_k, x_l) = K_1(\vec{x}_k, \vec{x}_l) + K_N(\vec{x}, \vec{x}) \delta_{kl}.$$

В работе [20] содержится другой пример линейного преобразования, когда поле $f_2(x_1, x_2)$ представляет собой результат осреднения поля $f_1(x_1, x_2)$ по некоторой площади S

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{S} \int_S f_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Функция взаимной корреляции при этом имеет вид

$$K_{12}(x'_1, x'_2) = \frac{1}{S} \iint_S K_1[\sqrt{(x_1 - x'_2)^2 + (x_2 - x'_1)^2}] dx_1 dx_2.$$

Наиболее интересным является случай, когда функция взаимной корреляции $K_{12}(\vec{x}, \vec{x}_k)$ и автокорреляционная функция $K_2(\vec{x}, \vec{x}_k)$ выражаются через производные от $K_1(\vec{x}, \vec{x}_k)$. Известно, что если $\vec{f}_2(\vec{x}) = \nabla f_1(\vec{x})$, тогда

$$K_{12}(\vec{x}, \vec{x}_k) = - \frac{\partial K_1(\vec{x} - \vec{x}_k)}{\partial x_l},$$

$$K_2(\vec{x}, \vec{x}_k) = - \frac{\partial^2 K_1(\vec{x} - \vec{x}_k)}{\partial x_l \partial x_p}.$$
(18.8)

Этот случай подробно рассмотрен в работе [155], согласно которой весовые функции восстановления поля определяются следующей системой:

$$K_1(\vec{x}, \vec{x}_q) = \sum_n g_1(\vec{x}, \vec{x}_n) K_1(\vec{x}_n, \vec{x}_q) - \sum_n \nabla K_1(\vec{x}_q, \vec{x}_n) h(\vec{x}, \vec{x}_n),$$
(18.9)

$$\nabla K_1(\vec{x}, \vec{x}_q) = \sum_n g_1(\vec{x}, \vec{x}_n) \nabla K_1(\vec{x}_n, \vec{x}_q) +$$

$$+ \sum_n \vec{n}(\vec{x}, \vec{x}_n) \nabla \{ \nabla K_1(\vec{x}_n, \vec{x}_q) \},$$

где вектор $\vec{n}(\vec{x}, \vec{x}_n)$ имеет в качестве составляющих весовые функции согласования, применяющиеся к соответствующим составляющим градиента поля $\vec{f}_2(\vec{x}) = \nabla f_1(\vec{x})$. При этом выражение

для среднеквадратичной ошибки согласования принимает вид

$$E(\vec{x}) = K_1(\vec{x}, \vec{x}) - \sum_n K_1(\vec{x}, \vec{x}_n) g_1(\vec{x}, \vec{x}_n) - \nabla K_1(\vec{x}, \vec{x}_n) h(\vec{x}, \vec{x}_n). \quad (18.10)$$

Таким образом, общий корреляционный алгоритм (18.5), а также различные алгоритмы (типа системы уравнений (18.8)) позволяют решить задачу согласования гидрофизических полей. Однако в рамках корреляционной теории не удастся получить рекомендаций для рационального размещения измерений в поле, которые необходимы при согласовании полей. Значительно большие возможности в этом отношении открывает спектральная формулировка задачи согласования.

Спектральная формулировка задачи оптимального согласования.

Сущность спектральной формулировки состоит в переводе системы уравнений (18.5), а также выражения для ошибки согласования посредством преобразования Фурье к пространству волновых чисел ($\vec{\omega}$). Первоначально такой переход требует использования нового допущения о том, что измерения полей выполняются в узлах периодической (т. е. регулярной) сетки. Однако по отношению к гидрофизическим полям такое допущение не приводит к потере общности, поскольку при планировании комплексных измерений в океане ничто не мешает выбрать периодическую сетку для размещения станций.

Целесообразность спектрального подхода объясняется возможностью применить в пространстве ($\vec{\omega}$) одну из наиболее фундаментальных теорем статистической теории связи: теорему отсчетов Котельникова — Шеннона. Как уже отмечалось в § 16, эта теорема устанавливает соответствие между интервалами, через которые выполняются измерения в пространстве наблюдений (\vec{x}), и шириной основания спектра поля в пространстве ($\vec{\omega}$).

Следует отметить, что в теореме отсчетов используются основания спектров полей $f_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x})$ в отдельности. Поэтому для ее применения в задаче согласования необходимо предварительно выразить статистические свойства поля $f_2(\vec{x})$, а также характеристику взаимосвязи между полями через спектр поля $f_1(\vec{x})$. Таким образом, использовать теорему отсчетов можно лишь по отношению к частным задачам согласования.

Для иллюстрации остановимся вновь на примере согласования, приведенном в работе [155]. Будем считать, что измерения полей $f_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x})$ выполнены в узлах регулярной сетки, положение узлов которой в пространстве (\vec{x}) описывается с помощью векторного базиса $\{v_j\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ (для определенности мы ограничимся здесь рассмотрением двухмерных полей):

$$\vec{v}_{[l]} = l_1 \vec{v}_1 + l_2 \vec{v}_2 \quad (l_1, l_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

Преобразование Фурье переводит сетку измерений в спектральную сетку с векторным базисом $\{\vec{u}_i\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$:

$$\vec{u}_{[m]} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \quad (m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

При этом имеют место соотношения

$$\vec{v}_j \vec{u}_i = 2\pi \delta_{ji}, \quad P \cdot Q = (2\pi)^2, \quad (18.11)$$

где Q и P — площади ячеек сетки измерений и спектральной сетки соответственно.

Обозначим спектр мощности поля $f_1(\vec{x})$ через $\Phi(\vec{\omega})$, спектр весовой функции $g(\vec{x})$ через $G(\vec{\omega})$ и спектр векторной функции $\vec{h}(\vec{x})$ через $\vec{H}(\vec{\omega})$. Тогда преобразование к пространству волновых чисел формулы (18.10) для среднеквадратичной ошибки согласования даст следующее выражение:

$$E(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{(\vec{\omega})} \left\{ \Phi(\vec{\omega}) - \frac{1}{Q} \sum_n l^{ix} u_{[n]} \Phi(\vec{u}_{[n]} - \vec{\omega}) [G(\vec{\omega}) - i(\vec{u}_{[n]} - \vec{\omega}) \vec{H}(\vec{\omega})] \right\} d\vec{\omega}. \quad (18.12)$$

Анализ условий, при которых ошибка согласования обращается в нуль в пространстве волновых чисел, позволяет сделать важные выводы относительно выбора рациональной системы измерений и нахождения оптимальных весовых функций. Так, например, из равенства (18.12) следует, что условия, которым должны удовлетворять спектры оптимальных весовых функций, имеют вид

$$\begin{aligned} G(\vec{\omega}) + i\vec{\omega} \vec{H}(\vec{\omega}) &= Q, & \text{где } \Phi(\vec{\omega}) \neq 0; \\ i\vec{u}_{[n]} \vec{H}(\vec{\omega}) &= Q, & \text{где } \Phi(\vec{u}_{[n]} - \vec{\omega}) \neq 0. \end{aligned} \quad (18.13)$$

Кроме того, анализ соотношений (18.13) позволил авторам работы [150] прийти к весьма существенному для практических приложений выводу о том, что сетка измерений поля, содержащая в каждом узле отсчеты амплитуд и градиентов, может быть сделана в три раза более редкой, чем сетка отсчетов одних только амплитуд, обеспечивающая восстановление поля с той же ошибкой. Это означает, что каждая компонента градиента поля $\vec{f}_2(\vec{x}) = \nabla f_1(\vec{x})$ может рассматриваться как источник дополнительной информации о состоянии поля $f_1(\vec{x})$, причем объем этой информации равен тому, который содержится в измерениях амплитуд самого поля $f_1(\vec{x})$.

Для изотропного поля $f_1(\vec{x})$, измеренного в узлах 60-градусной ромбической сетки (такая сетка позволяет обеспечить требуемую точность построения поля при наименьшем количестве измерений),

выведены [155] весовые функции оптимального согласования:

$$\begin{aligned}
 g(x_1, x_2) &= \frac{6\sqrt{3}}{(2\pi B)^3} \frac{\sin(2\pi B/\sqrt{3})x_1 (\cos 2\pi B)x_2 - \cos(2\pi B/\sqrt{3})x_1}{x_1(x_1^2 - 3x_2^2)}, \\
 h_1(x_1, x_2) &= \frac{6\sqrt{3}}{(2\pi B)^3} \frac{\sin(2\pi B/\sqrt{3})x_1 (\cos 2\pi B)x_2 - \cos(2\pi B/\sqrt{3})x_1}{(x_1 - 3x_2^2)}, \\
 h_2(x_1, x_2) &= \frac{6\sqrt{3}}{(2\pi B)^3} \frac{x_2 \sin(2\pi B/\sqrt{3})x_1 (\cos 2\pi B)x_2 - \cos(2\pi B/\sqrt{3})x_1}{x_1(x_1^2 - 3x_2^2)}.
 \end{aligned} \tag{18.14}$$

Преимущество применения оптимальных весовых функций типа (18.14) для согласования полей на ЭВМ вполне очевидно. Достаточно напомнить, что при использовании корреляционного алгоритма нахождение значений весовых коэффициентов $g(\vec{x}, \vec{x}_n)$ и $h(\vec{x}, \vec{x}_n)$ требует совместного решения двух систем уравнений (18.9), порядок которых определяется количеством измерений, участвующих в согласовании. В то же время расчет этих коэффициентов на ЭВМ по формулам типа (18.14) не вызывает никаких затруднений.

Заметим, что реальные гидрофизические поля имеют спектры, теоретически не ограниченные в пространстве $(\vec{\omega})$. Ограничение спектров до определенной области волновых чисел R в этом пространстве происходит в процессе измерений и последующей обработки данных. Формулы (18.14) выведены для случая, когда основание спектра поля или область R , до размеров которой осуществлено ограничение реального спектра, представляет собой правильный шестиугольник.

Однако предварительная фильтрация поля может иметь результатом и другую конфигурацию области R . В связи с этим представляет интерес получить аналогичные выражения для оптимальных весовых функций согласования, отвечающих наиболее часто встречающимся формам оснований спектров. В качестве одной из таких форм естественно в первую очередь рассмотреть квадратную область R .

Вывод весовых функций согласования для полей амплитуд и полей градиентов, имеющих квадратное основание спектра. Пусть поле $f_1(\vec{x})$, спектр которого занимает квадратную область R в пространстве $(\vec{\omega})$, измерено в узлах некоторой сетки (рис. 36). В этих же узлах содержатся отсчеты градиентов поля. Нетрудно подобрать такой векторный базис $\{u_{[k]}\}$, чтобы спектры поля всюду в пространстве $(\vec{\omega})$ были перекрыты ровно три раза. На рис. 36 изображено шесть областей в пределах основания спектра поля, в которых перекрытие осуществляется различными тройками повторений $\Phi_1(\vec{\omega} + u_{[k]})$ спектра $\Phi_1(\vec{\omega})$, находящегося в начале координат. Векторы смещений, вызывающие перекрытие в каждой области, помещены в табл. 3. Как следует из рис. 36 и 37, составляющие базисных

векторов имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \left(\frac{8\pi B}{3}; 0 \right); & \vec{u}_2 &= \left(\frac{4\pi B}{3}; 2\pi B \right); \\ \vec{v}_1 &= \left(-\frac{3B}{4}; \frac{1}{2B} \right); & \vec{v}_2 &= \left(0; \frac{1}{B} \right). \end{aligned} \quad (18.15)$$

Площадь Q ячейки сетки измерений составляет величину

$$Q = \frac{3}{4B^2}. \quad (18.16)$$

Подставляя соответствующие величины в соотношения (18.14), нетрудно определить для каждой из шести областей (рис. 37)

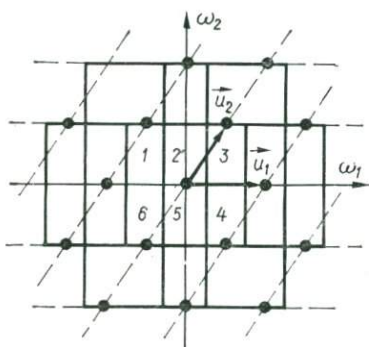


Рис. 36. Троекратное перекрытие оснований спектров поля и его градиента.

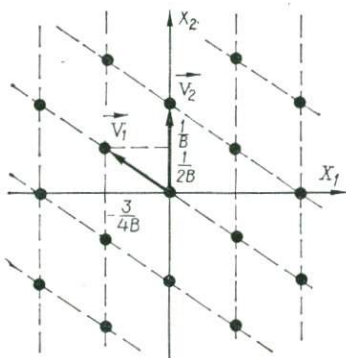


Рис. 37. Оптимальная сетка измерений поля и его градиента [155].

спектры оптимальных весовых функций согласования. Например, принимая во внимание, что первая область перекрыта основаниями тех спектров, которые соответствуют векторам $(\vec{u}_2 - \vec{u}_1); -\vec{u}_1; 0$, из условий (18.14) получим

$$-i\vec{u}_1 \vec{H}(\vec{\omega}) = -i \left[\frac{8\pi B}{3} H_1(\vec{\omega}) \right] = Q,$$

$$i(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \vec{H}(\vec{\omega}) = i \left[-\frac{4\pi B}{3} H_1(\vec{\omega}) + 2\pi B H_2(\vec{\omega}) \right] = Q,$$

$$G(\vec{\omega}) + i\vec{\omega}_1 H_1(\vec{\omega}) + i\vec{\omega}_2 H_2(\vec{\omega}) = Q.$$

Отсюда непосредственно следует, что в пределах первой области имеют место равенства

$$H_1(\vec{\omega}) = \frac{i3Q}{8\pi B},$$

$$H_2(\vec{\omega}) = \frac{iQ}{4\pi B},$$

$$G(\vec{\omega}) = Q \left[1 + \vec{\omega}_1 \frac{3}{8\pi B} - \vec{\omega}_2 \frac{1}{4\pi B} \right].$$

Сводка формул спектров для любой из шести областей содержится в табл. 3. Весовые функции согласования находятся обратным преобразованием Фурье от соответствующих им спектров. Практически для нахождения весовых функций необходимо вычислить

Таблица 3

Спектры весовых функций

Область перекрытия (см. рис. 3б)	Векторы, вызывающие перекрытие	$H(\vec{\omega})$	$G(\vec{\omega})$
1	$-\vec{u}_1$	$H_1(\vec{\omega}) = \frac{i3Q}{8\pi B}$	$G(\vec{\omega}) = Q \left[1 + \omega_1 \frac{3}{8\pi B} - \frac{\omega_2}{4\pi B} \right]$
	$\vec{u}_2 - \vec{u}_1$	$H_2(\vec{\omega}) = -\frac{iQ}{4\pi B}$	
2	\vec{u}_2	$H_1(\vec{\omega}) = 0$	$G(\vec{\omega}) = Q \left[1 - \frac{\omega_2}{2\pi B} \right]$
	$\vec{u}_2 - \vec{u}_1$	$H_2(\vec{\omega}) = -\frac{iQ}{2\pi B}$	
3	\vec{u}_1	$H_1(\vec{\omega}) = -\frac{i3Q}{8\pi B}$	$G(\vec{\omega}) =$ $= Q \left[1 - \frac{3}{8\pi B} \omega_1 - \frac{1}{4\pi B} \omega_2 \right]$
	\vec{u}_2	$H_2(\vec{\omega}) = -\frac{iQ}{4\pi B}$	
4	\vec{u}_1	$H_1(\vec{\omega}) = -\frac{i3Q}{8\pi B}$	$G(\vec{\omega}) =$ $= Q \left[1 - \frac{3}{8\pi B} \omega_1 + \frac{1}{4\pi B} \omega_2 \right]$
	$\vec{u}_1 - \vec{u}_2$	$H_2(\vec{\omega}) = \frac{iQ}{4\pi B}$	
5	$-\vec{u}_2$	$H_1(\vec{\omega}) = 0$	$G(\vec{\omega}) = Q \left[1 + \frac{\omega_2}{2\pi B} \right]$ $G(\vec{\omega}) =$
	$\vec{u}_1 - \vec{u}_2$	$H_2(\vec{\omega}) = \frac{iQ}{2\pi B}$	
6	$-\vec{u}_1$	$H_1(\vec{\omega}) = \frac{i3Q}{8\pi B}$	$= Q \left[1 + \frac{3}{8\pi B} \omega_1 + \frac{1}{4\pi B} \omega_2 \right]$
	$-\vec{u}_2$	$H_2(\vec{\omega}) = \frac{iQ}{4\pi B}$	

девять двумерных интегралов по шести областям. Опуская громоздкие выкладки, сопровождающие эти расчеты, приведем в конечном виде оптимальные весовые функции согласования

$$h_1(x_1, x_2) = \frac{4,5}{(2\pi B)^3 x_1 x_2} \sin \frac{4\pi B}{3} x_1 \sin 2\pi B x_2 \sin \frac{2\pi B}{3} x_1,$$

$$h_2(x_1, x_2) = \frac{3}{(2\pi B)^3 x_1 x_2} \sin \frac{2\pi B}{3} x_1 \sin 2\pi B x_2 \cos \frac{2\pi B}{3} x_1,$$

$$g(x_1, x_2) = \frac{6}{(2\pi B)^2 x_1 x_2} \sin \frac{2\pi B}{3} x_1 \sin \pi B x_2 \cos \frac{2\pi B}{3} x_1 \times \quad (18.17)$$

$$\times \left[2x_1 \sin \pi B x_2 \cos \frac{2\pi B}{3} x_1 - 2\pi x_1 x_2 \cos \frac{2\pi B}{3} x_1 \cos \pi B x_2 + \right.$$

$$\left. + 3x_2 \cos \pi B x_2 \sin \frac{2\pi B}{3} x_1 \right].$$

Найденные весовые функции позволяют легко и быстро вычислять на ЭВМ оптимальные оценки поля $f(x_1, x_2)$, согласованного с полями составляющих градиента $f_1(x_1, x_2)$ при квадратном основании спектра. Аналогичным путем могут быть выведены зависимости, учитывающие иные конфигурации основания спектра.

§ 19. Уточнение карты поля кислорода на основе измерений поля солености

Рассмотрим задачу уточнения поля концентраций кислорода, рассчитанного ранее по наблюдениям на станциях (см. § 15), за счет информации, содержащейся в измерениях солености, которые были проведены одновременно с определениями кислорода. Применим метод оптимального согласования и поставим цель: построить карту концентраций кислорода на глубине 100 м, статистически согласованную с полем солености на этой же глубине [36].

Предпосылкой для совместного статистического анализа двух полей является известная консервативность поля солености. Кроме того, точность измерений солености обычно несколько выше, чем точность определений кислорода. Наконец, измерения солености были выполнены частично в тех районах акватории, где не проводились определения кислорода.

Прежде чем была построена карта, был выполнен анализ статистической структуры поля солености и найдена взаимная корреляционная функция двух полей. Разделение поля солености на детерминированную и случайную составляющие производилось аналогично описанному в § 15 способу.

Из определений солености S в каждой из шести зон была исключена детерминированная составляющая \bar{S} , вычисленная по формуле (15.10). Соответствующие значения величин a_0, a_1, a_2 приведены в табл. 2.

Пространственная статистическая структура поля отклонений солености S' оказалась аналогичной структуре поля отклонений кислорода (рис. 38, а, б). Корреляционные функции были аппроксимированы аналитическими кривыми вида $e^{-\alpha r} \cos \beta r$; коэффициенты α, β , средние значения и дисперсии отклонений солености в каждой зоне представлены в табл. 2. Хорошее соответствие пространственной структуры полей кислорода и солености подтверждает возможность их статистического согласования.

Для получения количественных оценок связности полей кисло-

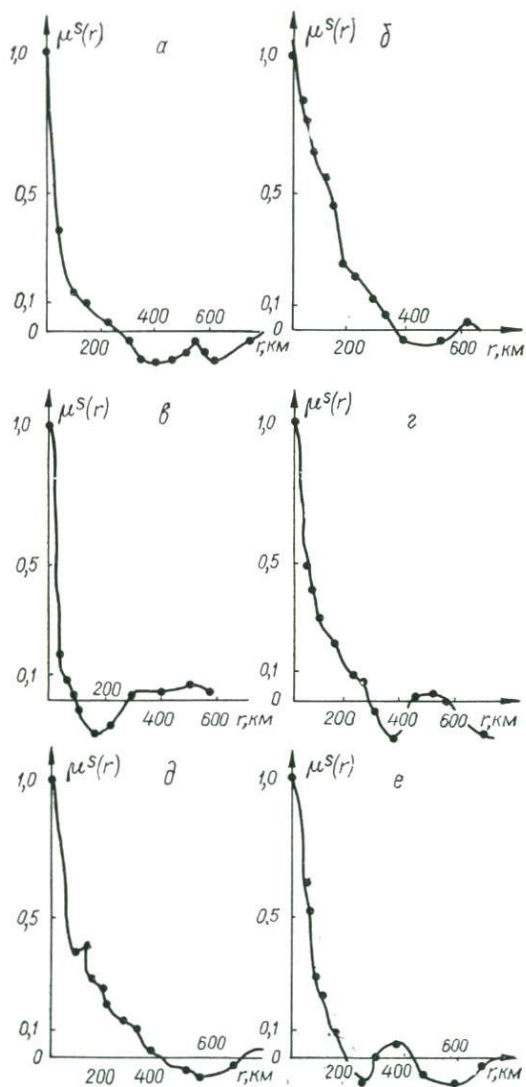


Рис. 38. Оценки пространственных корреляционных функций поля солёности по зонам: северной (часть: *a* — восточная, *б* — западная); экваториальной (часть: *v* — восточная, *z* — западная); южной (часть: *d* — восточная, *e* — западная).

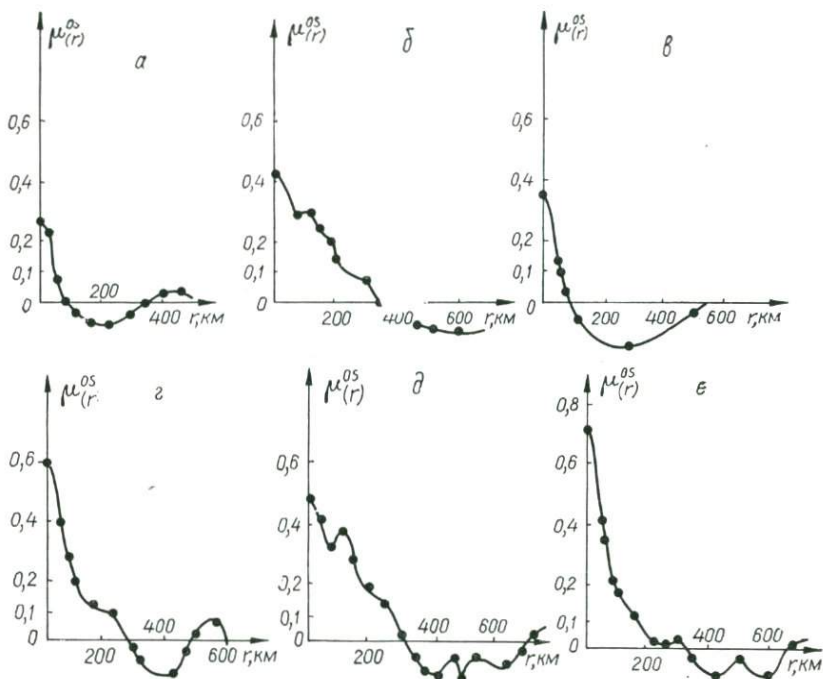


Рис. 39. Оценки взаимных корреляционных функций полей кислорода и солености по зонам, обозначенным на рис. 38.

рода и солености для случайных составляющих этих полей были вычислены пространственные взаимные корреляционные функции. Значения их определялись по формуле

$$\mu(r_k) = \frac{1}{n_k} \sum_{i,j=1}^{n_k} O'_i S'_j / \sqrt{\sigma_o^2 \sigma_s^2}, \quad (19.1)$$

где O'_i , S'_j — значения случайных составляющих полей кислорода и солености для станций i и j , расстояния между которыми попадают в соответствующую градацию r_k ; n_k — количество произведений $O'_i S'_j$, попавших в k -ю градацию. Нормировка произведена на корень квадратный из произведения дисперсий этих полей в соответствующих зонах.

Дисперсии поля солености в каждой из зон предполагались постоянными; они приведены (наряду со средними значениями) для всех шести зон в табл. 2.

Полученные оценки нормированных взаимных корреляций (рис. 39, $a - e$) были аппроксимированы аналитическими кривыми вида $\gamma e^{-\alpha r} \cos \beta r$, где r — расстояние, γ — значение функции $\mu(r)$

из (19.1) при $i = j$, т. е. при $r = 0$. Значения α , β , γ для всех зон приведены в табл. 2.

Коэффициент пространственной взаимной корреляции во всех зонах принимает максимальное значение при $r = 0$, однако величина его при этом существенно изменяется. Большие значения он принимает в западных зонах, что соответствует большей статистической связности исследуемых полей в западной части акватории по сравнению с восточной. Кроме того, значения его увеличиваются с севера на юг.

На основе представлений о пространственной статистической структуре было осуществлено согласование полей растворенного кислорода и солёности: поле кислорода уточнялось по данным о солёности.

Согласованное значение O'_c определялось в виде

$$O'_c = \sum_{i=1}^m (g_i O'_i + l_i S'_i), \quad (19.2)$$

где O'_i и S'_i — значения случайных компонент полей кислорода и солёности соответственно на m станциях, попадающих в круг взаимной корреляции; g_i , l_i — весовые множители, определяемые с учетом пространственной статистической структуры полей из условия оптимальности ошибок вычисления O'_c .

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \mu_{ij}^o g_j + \eta_i g_i + \lambda \sum_{j=1}^m \mu_{ji}^{os} l_j &= \mu_{oi}^o, \\ \sum_{j=1}^m \mu_{ji}^{os} g_j + \lambda \sum_{j=1}^m \mu_{ji}^s l_j + \lambda \zeta_i l_i &= \mu_{oi}^{os} \end{aligned} \quad (19.3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m),$$

где верхние значки o , s , os соответствуют пространственным авто- и взаимной корреляционным функциям полей кислорода (O') и солёности (S'); нижние индексы отвечают номерам станций, по отношению к которым берутся значения корреляционных функций; индекс o относится к точке, в которой осуществляется согласование. Через λ обозначено отношение дисперсий σ_s^2 к σ_o^2 , значения которого для каждой зоны дано в табл. 2; η и ζ — средние квадраты ошибок определения полей кислорода ($\eta = 0,02$) и солёности ($\zeta = 0,025$), нормированные на дисперсии этих полей.

Таким образом, с помощью ЭВМ была получена карта согласованного поля растворенного в воде кислорода в виде значений в узлах квадратной сетки с шагом в 1° (рис. 40).

Оценка ошибки восстановления согласованного поля кислорода, отнесенная к дисперсии этого поля, вычислялась в каждом узле интерполяции по формуле

$$\varepsilon = 1 - \sum_{i=1}^m (g_i \mu_{oi}^o + \lambda l_i \mu_{oi}^{os}). \quad (19.4)$$

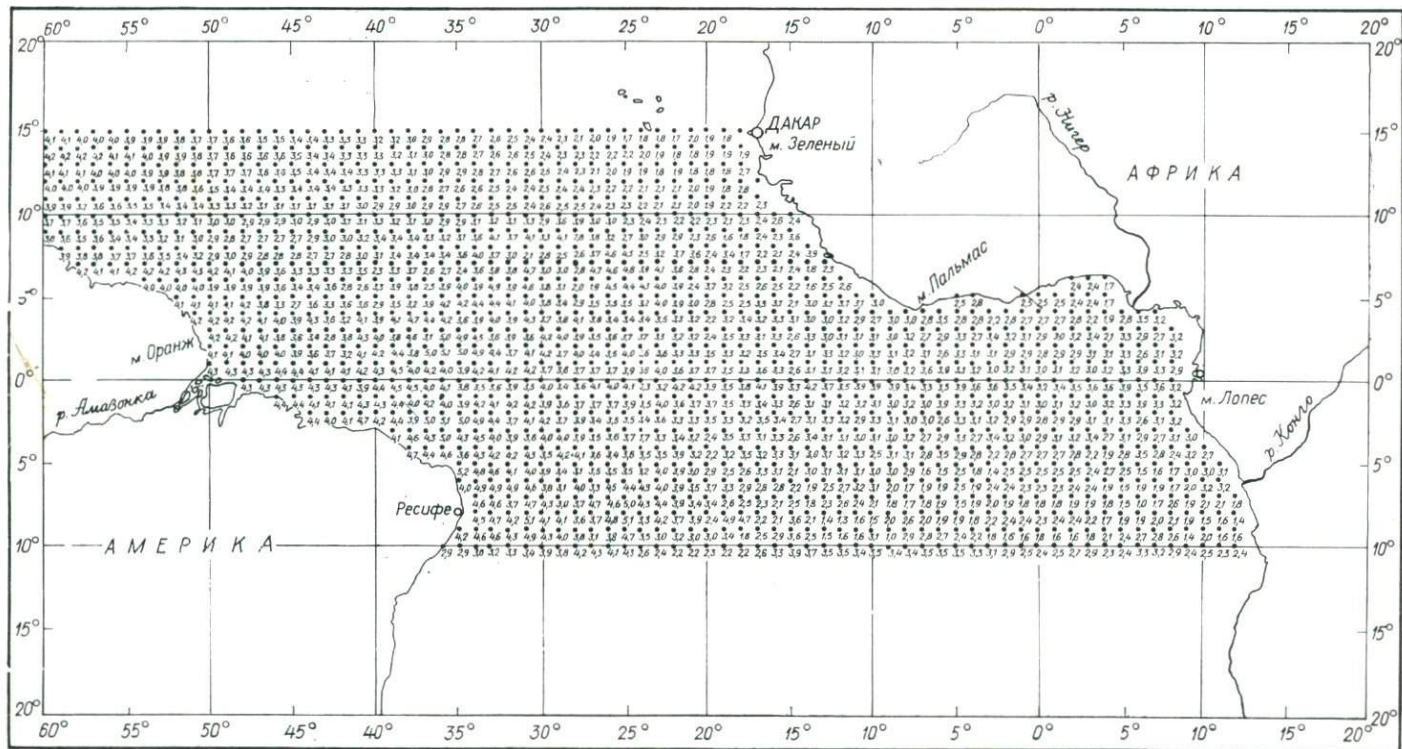


Рис. 40. Карта распределения кислорода на глубине 100 м, построенная путем оптимального согласования с полем солёности на том же горизонте.

Среднее значение меры ошибки ε после согласования полей уменьшилось по сравнению с картой поля кислорода до согласования и составило 0,40, что соответствует среднеквадратичной ошибке 0,33 мл/л. Таким образом, в результате изучения поля солености уточнена карта поля кислорода практически по всей акватории, где проводились измерения полей.

Анализируя поле кислорода на 100-метровом горизонте, полученное методом объективного анализа на ЭВМ, наблюдаем соответствие распределения концентраций кислорода общей схеме циркуляции вод в этой области океана [36].

Характер корреляционных функций (рис. 38 и 39) свидетельствует о существовании «периодической компоненты» в случайной составляющей поля. Отметим, что в работе [36] (по результатам эксперимента ТРОПЭКС) приводятся данные о меандрировании течения Ломоносова. Используя полученные результаты, можно провести оценку масштаба периодических колебаний значений кислорода вдоль экватора по глубине относительно 100-метрового горизонта, т. е. в другой плоскости. Как показывают оценки, он имел порядок 400 км. Дальнейшие исследования по программе ТРОПЭКС позволят установить новые особенности течения Ломоносова.

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
ПОЛЕЙ ОКЕАНА**

**§ 20. Об использовании методов
четырёхмерного анализа наблюдений
в метеорологии**

Название «четырёхмерный анализ метеорологических наблюдений» объединяет методы численного интегрирования уравнений динамики атмосферы с использованием дополнительной информации о метеорологических полях в ходе расчетов. Необходимость привлечения дополнительной информации объясняется неполным или неточным заданием начальных условий, что практически всегда имеет место при решении прогностических задач.

Расчет метеорологических полей осуществляется на основе приближенных уравнений динамики атмосферы и связан с дискретизацией их значений. Поэтому физико-математическая модель системы метеорологических полей по существу представляет собой некоторый конечно-разностный алгоритм, реализуемый на ЭВМ, а решение прогностических задач сводится к численным экспериментам на моделях при различных начальных и граничных условиях. С этой точки зрения прогноз погоды является нахождением нестационарного решения уравнений динамики атмосферы при фиксированных начальных условиях [62].

Первые наиболее важные эксперименты по численному прогнозу метеорологических полей были проведены И. А. Кибелем [32], Е. Н. Блиновой [12], О. М. Филлипсом [159], Г. И. Марчуком [53] в 50-х годах. В расчетах были определены центры действия атмосферы и построено среднегодовое зональное поле температуры [53]. С. А. Машковичем [56] построена среднегодовая зональная циркуляция атмосферы. О. М. Филлипсом [116], Дж. Смагоринским [169], В. Минцем [140], К. Лейтсом [136] и др. проведены численные эксперименты, в которых удалось получить периодические изменения циркуляции атмосферы, отражающие синоптическую изменчивость реальных метеорологических полей.

Численные эксперименты по океанической циркуляции выполнены в цикле работ А. С. Саркисяна [76, 77], К. Брайненом и М. Коксом [108], В. П. Кочергинным [55] и др.

В последующих работах за счет уточнения динамических уравнений и применения более совершенных численных схем удалось

получить многие важные результаты современной теории численных прогнозов погоды [54]. Наиболее полно достижения и перспективы в области численного интегрирования уравнений динамики атмосферы рассмотрены в монографиях А. С. Моница [62], Г. И. Марчука [53]. В них отмечается, что дальнейшее повышение точности прогноза возможно при одновременном совершенствовании теоретических моделей, представляющих атмосферу и океан как единую физическую систему, и использовании всей доступной информации об исследуемых полях.

Рассмотренный метод объективного анализа был разработан для восстановления пространственных полей метеоэлементов в районах, где проводилось мало наблюдений. С его развитием появилась возможность проводить оптимальную интерполяцию недостающих значений в узлы регулярной сетки со станций наблюдений. Оптимальная интерполяция стала важным элементом общей численной схемы прогноза погоды. Как отмечает Г. И. Марчук [53], новые теоретические модели прогноза погоды наложили весьма жесткие требования на обработку начальных данных. В настоящее время об объективном анализе метеорологических полей можно говорить, только имея в виду конкретную сферу его использования для целей прогноза погоды.

Следующим шагом на пути уточнения прогноза погоды стал переход к непрерывному усвоению синоптической и несиноптической информации, т. е. к постоянной корректировке начальных условий в численных схемах прогноза. Для решения проблемы наиболее полного использования несиноптической информации потребовалось создание различных приемов четырехмерного анализа данных [19, 26, 56].

Четырехмерный анализ метеорологических полей представляет собой анализ данных наблюдений в четырехмерном пространстве-времени, который проводится на основе численных моделей и сопровождается усвоением информации о полях в ходе вычислений. Как отмечает Л. С. Гандин [19], в настоящее время в метеорологии существует два основных подхода к проведению четырехмерного анализа. В одном из них новая информация включается в численную схему в дискретные моменты времени по мере ее поступления и накопления в течение некоторого интервала времени, предшествующего моменту включения. Способы использования дополнительной информации весьма различны. В простейшем случае вновь поступившие данные используются для замены расчетных значений поля в соответствующих точках.

Применяются и разнообразные методы приведения несиноптических наблюдений к нужному моменту времени: пространственно-временная интерполяция данных, перенос данных по специальным траекториям, получаемым путем численных экспериментов с прогностической моделью и др.

Второй подход, в отличие от первого — дискретного, можно было бы назвать непрерывным. Суть его состоит в том, что усвоение

новых данных происходит без задержки именно в те моменты времени, когда они поступают со станций или из других источников метеорологической информации: попутные измерения на судах, метеорологические спутники, шары-зонды и т. д.

Значение четырехмерного анализа для практики прогноза погоды весьма велико. Этот метод позволяет наиболее полно использовать всю доступную информацию о метеорологических полях, синтезировать достижения теории численного прогнозирования погоды и преимущества объективного анализа данных. Поэтому в настоящее время четырехмерный анализ представляет собой новое интенсивно развивающееся направление в метеорологии.

Вместе с тем проблемы четырехмерного анализа метеорологических полей сложны и еще далеки от решения. В литературе существует лишь небольшое количество работ, содержащих результаты применения четырехмерного анализа к реальным полям атмосферы. В большинстве работ, посвященных проблемам этого метода, приводятся результаты численных экспериментов на моделях полей. Упомянем некоторые из этих работ, не претендуя на полноту и тщательность отбора.

Л. С. Гандин и Р. Л. Каган [20] рассмотрели эффект уменьшения меры ошибок построения прогностического поля путем согласования результатов численного прогноза с интерполированными со станций значениями поля. В наиболее простом случае, когда в произвольной точке поля известны прогностическое значение f_1 и результаты интерполяции f_2 в эту точку, статистическое согласование имеет ошибку, оцениваемую формулой

$$\varepsilon = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2}, \quad (20.1)$$

где η_1 и η_2 — меры ошибок прогноза и интерполяции. Сравнивая эту ошибку с величиной ошибки согласования двух полей по результатам независимых измерений [20]

$$\varepsilon_H = \frac{\eta_1^H \eta_2^H}{\eta_1^H + \eta_2^H + \eta_1^H \eta_2^H}, \quad (20.2)$$

нетрудно убедиться в том, что увеличение точности при оптимальном согласовании анализа с прогнозом значительно меньше при прочих условиях, чем при согласовании данных независимых измерений. Это указывает на необходимость правильного учета статистики ошибок интерполяции и прогноза при четырехмерном анализе метеорологических полей.

Е. М. Добрышман [26] анализировал влияние «недостатка» информации на решение задачи прогноза метеорологических полей в ряде простейших случаев. Под «недостатком» информации понималось отсутствие начальных данных для части области и ошибки в начальных условиях. Например, для простейшего процесса диффузии нехватка начальных данных требует решения обратной задачи:

в момент поступления новой информации приходится возвращаться к начальному состоянию, чтобы таким путем восстановить недостающие начальные данные.

Метод уточнения численного прогноза за счет согласования исходных полей по полным уравнениям гидротермодинамики предложен А. И. Федоровой и М. С. Фуксом-Рабиновичем [87]. Согласование, которое названо динамическим, осуществляется при помощи многократного интегрирования систем прогностических уравнений на один шаг вперед, а затем назад.

Численные эксперименты по четырехмерному объективному анализу на основе спектральной прогностической модели выполнены С. А. Машковичем и И. Г. Вейлем [57]. В отличие от упомянутых подходов к проблеме уточнения прогноза в этих экспериментах ставилась задача непрерывного усвоения текущей метеорологической информации. Процедура усвоения новых данных заключалась в следующем: рассчитывался прогноз на момент времени, в который должны быть проведены наблюдения. Затем прогностическое распределение метеоэлементов модифицировалось с учетом поступивших данных наблюдений, и новые поля метеоэлементов использовались в качестве исходного для дальнейшего прогнозирования.

К наиболее перспективным направлениям четырехмерного анализа в метеорологии относится подход Д. Питерсена [153—156]. Он основан на распространении теории оптимальной фильтрации Калмана на пространственно-временные поля метеорологических элементов. Этот подход подробно рассматривается в настоящей главе применительно к возможности его использования для оптимальной фильтрации случайных океанологических процессов и полей. Не останавливаясь здесь на существовании метода, отметим, что в метеорологической литературе описаны отдельные численные эксперименты по четырехмерному анализу метеополей с использованием стохастических уравнений [114, 141].

Г. Миякода и О. Талагранд применили оптимальную интерполяцию в поле ошибок прогноза для введения поправок в результаты прогноза на основе простейшей баротропной квазигеострофической модели. Ряд алгоритмов усвоения данных на основе последовательных статистических принципов рассмотрен в работах Сонечкина [80]. Однако эти работы относятся к частным прогностическим задачам и скорее иллюстрируют трудности, возникающие при сочетании детерминированных и вероятностных методов расчета полей, чем способствуют разработке принципов четырехмерного анализа данных с использованием стохастических моделей.

Ряд важных численных экспериментов был посвящен проблеме предсказуемости атмосферных процессов. В качестве меры предсказуемости Дж. Чарни [109], Дж. Смагоринский [170] и др. рассматривали различие между прогнозами по измененным и истинным начальным условиям.

А. С. Монин [62] исследовал общую проблему предсказуемости атмосферных движений. Хотя эти исследования выполнены

задолго до того времени, когда четырехмерный анализ оформился в самостоятельный раздел метеорологии, их результаты можно рассматривать в качестве физической основы четырехмерного анализа наблюдений.

Для характеристики предсказуемости атмосферных процессов Монин использовал интервал времени прогнозирования, до которого ошибки прогнозов не превышают средние климатические вариации прогнозируемых величин. Этот интервал, называемый пределом предсказуемости, зависит от типа процессов и формы рассматриваемых их количественных характеристик, от характера и величины начальных ошибок и от качества прогностического метода.

Общая математическая формулировка проблемы предсказуемости заключается в следующем [62]. Будем считать, что состояние атмосферы ω можно представить в виде суперпозиции компонент с различными масштабами L :

$$\omega = \sum_L \omega_L. \quad (20.3)$$

Пусть $d^2[\omega', \omega'']$ — некоторая количественная мера различия между двумя состояниями ω' и ω'' . Эволюция состояния атмосферы тогда может быть представлена некоторым уравнением динамики в пространстве состояний (ω):

$$\dot{\omega}(t) = A^t \omega(0), \quad (20.4)$$

где A^t — некоторый оператор (аналог переходной функции в теории фильтра Калмана). Так как начальные условия неизбежно содержат случайные ошибки, состояние системы $\omega(t)$ в начальный и последующие моменты времени следует считать случайной функцией. Если в начальный момент времени известно распределение вероятностей $P_0(d\omega)$ на множестве возможных состояний $\Omega = \{\omega\}$, то можно определить среднеквадратичную ошибку предсказания компонент масштаба L на срок t :

$$\sigma_L^2(t) = \overline{d^2[\omega_L(t), \omega_L(t)]}. \quad (20.5)$$

Предположим, что известно также климатическое распределение вероятностей $P(d\omega)$, имеющее дисперсию

$$\sigma_L^2 = \langle d^2[\omega_L, \langle \omega_L \rangle] \rangle \quad (20.6)$$

(следуя работе [62], мы обозначаем квадратными скобками климатическое осреднение). Тогда пределом предсказуемости t_L компонент масштаба L будет верхняя грань значений t , при которых выполняется условие

$$\sigma_L^2(t) < \sigma_L^2. \quad (20.7)$$

Использование пространства состояний (ω) и представление динамики атмосферы стохастическими уравнениями вида (20.4) по существу означает допущение пространственно-временных полей метеоэлементов Маркова. Как отмечает Монин [62], принципиаль-

ное значение может иметь гипотеза Колмогорова, согласно которой случайный процесс $\omega(t)$, описывающий эволюцию турбулентного потока в среде с исчезающей вязкостью ($\nu \rightarrow 0$), при больших значениях асимптотически становится марковским. Рассматривая метеорологические поля на конечной пространственной сетке точек с шагом $L \gg (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$, можно предположить, что получаемый при такой аппроксимации метеорологических полей конечномерный случайный процесс $\omega(t)$ будет асимптотически марковским.

Распределение вероятностей процесса $P_t(d\omega)$ Маркова при $t > t_1$ однозначно определяется состоянием $\omega(t_1)$ и не зависит от предыстории процесса. Поэтому существует принципиальная возможность предсказывать наперед не только состояния ω , но и характеристики (моменты) распределения вероятностей состояний.

П. Томпсон [181] и А. С. Монин [63] предложили уравнения для прогноза статистических характеристик (одноточечных первых и вторых моментов) метеорологических полей. В рамках баротропной модели (в пренебрежении третьими моментами и в предположении изотропности незонального поля скорости) А. С. Монин [63] получил следующие уравнения для индекса циркуляции $\alpha = \overline{u_\lambda}/a \sin \theta$, меридионального потока импульса $\tau = \overline{u_\theta u_\lambda}$ и кинетической энергии незональных движений:

$$E = \frac{1}{2} (\overline{u_\theta^2} + \overline{u_\lambda^2})$$

(черточка — зональное осреднение, штрих — отклонение от зонального среднего),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= - \frac{1}{a^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial \tau \sin^2 \theta}{\partial \theta}, & \frac{\partial \tau}{\partial t} &= - E \sin \theta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= - \tau \sin \theta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Полученные уравнения, отмечает А. С. Монин, описывают нелинейное распространение волн вдоль меридиана. Особое значение уравнения типа (20.8) приобретают в связи с задачами последовательного уточнения прогнозов. Возможность предсказывать на будущие моменты времени элементы статистической структуры поля позволяет использовать в численной схеме прогноза оптимальную интерполяцию текущих наблюдений поля, т. е. разработать методы непрерывного и объективного усвоения новых данных.

Поскольку основные положения теории предсказуемости (характер полей Маркова, стохастические уравнения состояния физической системы, возможность прогнозировать элементы статистической структуры поля) содержатся в упомянутом выше методе последовательного анализа Калмана — Питерсена, в настоящей главе мы сосредоточим внимание именно на этом варианте четырехмерного анализа наблюдений.

§ 21. Постановка задачи последовательного анализа пространственно-временных полей океана

Рассмотрим пространственно-временное поле океана $\alpha(\vec{x}, t)$, где $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — координаты поля. Будем считать, что поле измерено в системе точек $\{(\vec{x}_k, t_j)\}: k = 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, \dots, v$. Поставим задачу построения карты поля для момента времени t_j .

Если измерений достаточно много и все они относятся к моменту времени t_0 , расчет карты поля на этот момент времени может быть выполнен методом оптимальной интерполяции [150]. Критерием качества карты в таком случае явится среднеквадратичная ошибка интерполяции, принимающая минимальные величины для коэффициентов интерполяции, которые удовлетворяют системе уравнений Колмогорова (13.2).

Однако подавляющее большинство измерений в океане выполняется в разные сроки. Кроме того, наибольший интерес представляют карты будущих, т. е. прогностических значений поля. Следовательно, необходима экстраполяция текущих значений поля на будущий момент времени t_1 .

Метод объективного анализа наблюдений формально может быть использован для статистической экстраполяции, если выполняются перечисленные в § 13 допущения, относящиеся к модели поля. Для этого первоначально по наблюдениям метода должна быть определена корреляционная функция пространственно-временного поля $\alpha(\vec{x}, t)$. Затем из системы уравнений (13.2) определяются коэффициенты экстраполирования и восстанавливается поле прогностических значений.

Однако на практике этот способ оказывается неудовлетворительным по нескольким причинам. Прежде всего в практических ситуациях данных наблюдений явно недостаточно для надежной оценки пространственно-временной корреляционной функции. По этой же причине в интервал корреляции поля попадают лишь одиночные измерения, что снижает точность прогноза. Кроме того, единичные текущие измерения мало влияют на точность экстраполяции по формуле (13.1). Эти недостатки характерны для любого метода анализа наблюдений, применяемого в условиях малой выборки [75].

Поскольку информация, содержащаяся в измерениях, используется при объективном анализе наиболее полно, очевидно, что улучшить качество прогноза можно только за счет привлечения дополнительной информации о состоянии поля, т. е. об его изменчивости по пространству и времени. Такая информация, как известно, содержится в детерминированных уравнениях гидродинамики, применяемых для моделирования сложных физических процессов, развивающихся в океане.

Моделирование океанических процессов на основе теоретического аппарата гидромеханики связано с рядом трудностей иного характера. Модель поля представляет собой систему уравнений в частных производных, удовлетворяющих соответствующим начальным и граничным условиям. Для определения коэффициентов уравнений, как правило, необходимы специальные измерения. Чем выше необходимая точность расчета и прогноза поля, тем сложнее система уравнений, представляющего его, и тем труднее анализ и расчет по ней поля на ЭВМ. Кроме того, адекватность выбранной модели реальным физическим процессам в исследуемом районе океана может быть установлена лишь после проведения большого количества экспериментов по сравнению с предвычисленными и наблюдаемыми величинами процессов и полей.

Изложенные особенности статистической и детерминированной модели полей океана приводят к мысли о создании комбинированного способа описания и анализа пространственно-временных полей океана, в котором могли бы сочетаться преимущества каждого из этих двух подходов.

В главе II подробно рассматривался алгоритм адаптивного фильтра Калмана, который, по существу, занимает промежуточное положение между детерминированными способами линейной экстраполяции и теорией оптимальной фильтрации стационарных случайных функций. Как отмечалось, преимущества фильтра Калмана состоят в том, что он не требует большого объема исходных данных и последовательно усваивает новую информацию по мере ее поступления. Таким образом, распространение алгоритма фильтрации Калмана на пространственно-временные поля, обладающие определенными свойствами, должно дать некоторый комбинированный способ анализа и прогноза этих полей.

Как уже было отмечено в § 3, основным принципом системного подхода к анализу процессов и полей в океане является сравнение (на основе выбранного заранее критерия качества) расчетных значений поля или процесса с их прогностическими оценками, вытекающими из выбранных математических моделей явлений в океане. Организация сравнения по принципу адаптивного фильтра Калмана должна дать весьма эффективный способ подгонки параметров модели к их реальным величинам и тем самым обеспечить наилучшее качество прогнозирования явлений в океане.

Обобщение алгоритма фильтра Калмана на случайные поля (применительно к метеорологическим полям) выполнено в работах Д. Питерсена [153, 154]. Д. Питерсен назвал его методом последовательного анализа наблюдений, по-видимому, желая подчеркнуть положенный в основу метода способ последовательного уточнения прогноза, что характерно для адаптивного фильтра Калмана [125].

Корреляционный алгоритм последовательного анализа наблюдений. Основным предположением, лежащим в основе метода последовательного анализа наблюдений, является существование линейного закона, которому подчинена динамика исследуемого физиче-

ского поля океана (или совокупности связанных между собой полей). Поскольку реальные поля океана описываются нелинейными уравнениями гидродинамики, речь идет об упрощенной, линеаризованной гидродинамической модели поля. Она может быть использована, например, для отклонений от осредненных значений реальных полей и в течение малых (по сравнению с временными масштабами осреднения) интервалов времени.

Представим уравнение динамики линеаризованной модели поля в виде

$$\frac{\partial \alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} + \int_{(\vec{x})} h(\vec{x}, t; \vec{y}, t) \alpha(\vec{y}, t) d\vec{y} = f(\vec{x}, t). \quad (21.1)$$

Здесь $\alpha(\vec{x}, t)$ — скалярная (или векторная) функция, описывающая пространственно-временное поле океана; $h(\vec{x}, t, \vec{y}, s)$, $t > s$ — функция Грина; $f(\vec{x}, t)$ — функция возбуждения, моделирующая внешнее энергетическое воздействие на поле.

Уравнение (21.1) является аналогом уравнения состояния одномерного фильтра Калмана (7.1): оно описывает поведение некоторой линейной динамической системы с распределенными параметрами [51]. Исследуемое поле $\alpha(\vec{x}, t)$ является выходом этой системы, возбуждаемой полем $f(\vec{x}, t)$ со стороны входа. Функция Грина $h(\vec{x}, t, \vec{y}, s)$ характеризует реакцию системы на возбуждение и по существу может рассматриваться как эквивалент переходной функции фильтра Калмана (7.1).

Решение уравнения (21.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{x}, t) = & \int_{(\vec{x})} h(\vec{x}, t; \vec{y}, t_0) \alpha(\vec{y}, t_0) d\vec{y} + \\ & + \int_{(\vec{x})} \int_{t_0}^t h(\vec{x}, t; \vec{y}, \tau) f(\vec{y}, \tau) d\vec{y} d\tau. \end{aligned} \quad (21.2)$$

Как и в одномерном случае, для нахождения алгоритма оптимального фильтра необходимо, чтобы функция возбуждения системы $\alpha(\vec{x}, t)$ имела свойства белого шума по времени и не была коррелирована со значениями поля

$$\begin{aligned} E \{f(\vec{x}, t) \alpha(\vec{y}, \tau)\} &= 0, \\ E \{f(\vec{x}, t) f(\vec{y}, \tau)\} &= F(\vec{x}, \vec{y}, t) \delta(t - \tau), \\ E \{f(\vec{x}, t)\} &= 0. \end{aligned} \quad (21.3)$$

Оптимальной (относительно среднеквадратичной ошибки) оценкой поля в будущий момент времени t является поле условных средних значений $\hat{\alpha}(\vec{x}, t)$, индуцированное всеми доступными измерению

значениями $\alpha(\vec{x}, t_0)$ при $t > t_0$. Находя условное среднее значение выражения (21.2) с учетом (21.3), имеем

$$\hat{\alpha}_0(\vec{x}, t) = E_0 \{ \alpha(\vec{x}, t) \} = \int_{(\vec{x})} h(\vec{x}, t; \vec{y}, t_0) E_0 \{ \alpha(\vec{y}, t_0) \} d\vec{y}, \quad (21.4)$$

где через $E_0 \{ \alpha(\vec{y}, t_0) \}$ обозначено условное математическое ожидание поля по отношению ко всем наблюдениям, поступившим до момента времени t_0 включительно.

В пределах корректности модели поля уравнением (21.4) можно прогнозировать его значения. Для этого, как следует из (21.4), необходимо решить уравнение динамики (21.1) с начальными условиями $E_0 \{ \alpha(\vec{y}, t_0) \}$, которые представляют собой карту пространственных распределений поля в начальный момент времени t_0 .

В главе III было показано, что карты пространственных полей океана целесообразно строить, используя метод объективного анализа [19]. Таким образом, оптимальный прогноз поля находится путем применения уравнения (21.4) к карте поля, рассчитанной с помощью оптимальной интерполяции измеренных значений в узлах сетки. Оптимальная интерполяция по пространству и оптимальный прогноз по времени последовательно выполняются для каждого интервала времени $[t_0, t]$.

Следует учесть, однако, что как интерполяция, так и прогноз поля выполняются с неизбежными погрешностями, которые возникают за счет недостаточного объема наблюдений (по пространству) и упрощенной динамической модели поля (по времени). Поэтому на каждом шаге экстраполяции поля необходима последовательная коррекция оценок его значений. Исправление погрешностей в методе фильтрации Калмана — Питерсена происходит благодаря использованию информации, содержащейся в текущих измерениях поля. Процедура исправления погрешностей составляет основу метода последовательного анализа наблюдений.

Представим наблюдения поля $\alpha(\vec{x}, t)$ в виде линейной операции, примененной к мгновенному пространственному распределению значений поля [153]:

$$\beta_k(t) = \int_{(\vec{x})} \alpha(\vec{y}, t) g_k(\vec{y}, t) d\vec{y} + n_k(t). \quad (21.5)$$

Функцию $n_k(t)$, учитывающую ошибки измерений, мы будем считать белым шумом. Функция $g_k(\vec{y}, t)$ учитывает одновременно пространственное осреднение и инерционные свойства прибора или метода измерения поля.

По аналогии с уравнением (21.4) выпишем выражение для прогнозируемой на момент времени t величины измерения поля в точке

$$\hat{\beta}_k(t) = \int_{(\vec{x})} \hat{\alpha}(\vec{y}, t) g_k(\vec{y}, t) d\vec{y}. \quad (21.6)$$

Обозначим t_{-1} — момент времени, в который поступили наиболее поздние измерения перед текущим моментом времени t_0 . Если все эти измерения были использованы для построения карты поля на момент времени t_{-1} , то значение карты мы будем обозначать $\hat{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_{-1})$. Прогностическая карта, построенная на момент времени t_0 при использовании тех же наблюдений, будет обозначена $\hat{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_0)$.

Введем в рассмотрение ошибки в предсказании измерений на момент времени

$$\tilde{\beta}_k(t_0) = \beta_k(t_0) - \hat{\beta}_{k,-1}(t_0). \quad (21.7)$$

Нетрудно показать (например, с использованием геометрической интерпретации метода наименьших квадратов [98]), что величины $\tilde{\beta}_k(t_0)$ ортогональны множеству данных наблюдений, полученных на момент времени t_{-1} и, следовательно, содержат всю новую информацию о поле на момент времени t_0 . Это означает, что оптимальная оценка поля в момент времени t_0 должна состоять из прогностической карты $\hat{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_0)$, к которой оптимальным способом добавлены значения поля невязок прогноза

$$\hat{\alpha}_0(\vec{x}, t_0) = \hat{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_0) + \sum_{k=1}^{N_0} \Delta_k(\vec{x}, t_0) \tilde{\beta}_k(t_0). \quad (21.8)$$

Весовые коэффициенты $\Delta_k(\vec{x}, t_0)$ должны выбираться из условия минимума ошибки

$$\epsilon_0(\vec{x}, t_0) = E \{ |\alpha(\vec{x}, t_0) - \hat{\alpha}_0(\vec{x}, t_0)|^2 \}. \quad (21.9)$$

Для нахождения весовых коэффициентов напомним условие ортогональности линейной среднеквадратичной оценки [124]

$$E \{ [\alpha(\vec{x}, t_0) - \hat{\alpha}_0(\vec{x}, t_0)] \beta_k(t_m) \} = 0, \quad (21.10)$$

$$k = 1, 2, \dots, N_m, \quad m = 0, -1, -2, \dots$$

Подставляя (21.8) в (21.10), получим

$$E \left\{ \left[\alpha(\vec{x}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_0) - \sum_{l=1}^{N_0} \Delta_l(\vec{x}, t_0) \tilde{\beta}_l(t_0) \right] \beta_k(t_m) \right\} = 0, \quad (21.11)$$

$$k = 1, 2, \dots, N_m, \quad m = 0, -1, -2, \dots$$

Для момента времени t_0 уравнение (21.11) имеет вид

$$E \left\{ \left[\alpha(\vec{x}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_0) - \sum_{l=1}^{N_0} \Delta_l(\vec{x}, t_0) \tilde{\beta}_l(t_0) \right] \tilde{\beta}_k(t_0) \right\} = 0, \quad (21.12)$$

$$k = 1, 2, \dots, N_0.$$

Определим корреляционную функцию ошибок прогноза

$$P_0(\vec{x}, \vec{y}) = E \{ [\alpha(\vec{x}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_0)] [\alpha(\vec{y}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{y}, t_0)] \}. \quad (21.13)$$

Будем считать, что ошибки измерений $n_k(t)$ некоррелированы со значениями поля. Тогда, подставляя (21.5) — (21.7) в (21.12), получим

$$\int_{(\vec{x})} g_k(\vec{y}, t_0) P_0(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} = \sum_{l=1}^{N_0} \Delta_l(\vec{x}, t_0) \left[\int_{(\vec{x})} \int_{(\vec{x})} g_k(\vec{z}, t_0) g_l(\vec{y}, t_0) \times \right. \\ \left. \times P_0(\vec{y}, \vec{z}) d\vec{y} d\vec{z} + R_{kl}(t_0) \right], \quad (21.14) \\ R_{kl}(t_0) \equiv E \{n_k(t_0) n_l(t_0)\}.$$

Обозначим в равенстве (21.14) выражение в квадратных скобках $k_{kl}(t_0)$. Тогда имеем

$$K_{kl}(t_0) = \int_{(\vec{x})} \int_{(\vec{x})} g_k(\vec{z}, t_0) g_l(\vec{w}, t_0) P_0(\vec{z}, \vec{w}) d\vec{z} d\vec{w} + R_{kl}(t_0) = \\ = \left\{ \int_{(\vec{x})} g_k(\vec{z}, t_0) [\alpha(\vec{z}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{z}, t_0)] d\vec{z} + n_k(t_0) \right\} \times \\ \times \left\{ \int_{(\vec{x})} g_l(\vec{w}, t_0) [\alpha(\vec{w}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{w}, t_0)] d\vec{w} + n_l(t_0) \right\} = \\ = E \{[\hat{\beta}_k(t_0) - \hat{\beta}_{k,-1}(t_0)] [\hat{\beta}_l(t_0) - \hat{\beta}_{l,-1}(t_0)]\} = E \{\tilde{\beta}_k(t_0) \tilde{\beta}_l(t_0)\}. \quad (21.15)$$

Аналогичным образом находим

$$\int_{(\vec{x})} g_k(\vec{y}, t_0) P_0(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} = \int_{(\vec{x})} g_k(\vec{y}, t_0) E \{[\alpha(\vec{x}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_0)] \times \\ \times [\alpha(\vec{y}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{y}, t_0)]\} d\vec{y} = E \{\tilde{\beta}_k(t_0) [\alpha(\vec{x}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_0)]\} = \\ = E \{\tilde{\beta}_k(t_0) \tilde{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_0)\}. \quad (21.16)$$

Выражение (21.15) представляет собой коэффициент корреляции в поле ошибок прогноза между двумя точками \vec{x}_k и \vec{x}_l , в которых были выполнены измерения. Формула (21.16) дает выражение для взаимной корреляционной функции поля ошибок прогноза, между точкой измерения поля \vec{x} и произвольной точкой $\Delta_k(\vec{x}, t_0)$.

С учетом этих двух формул уравнение (21.14) может быть разрешено относительно весовых коэффициентов

$$\Delta_k(\vec{x}, t_0) = \sum_{l=1}^{N_0} [K^{-1}(t_0)]_{lk} \int_{(\vec{x})} g_l(\vec{z}, t_0) P_0(\vec{x}, \vec{z}) d\vec{z} = \\ = \sum_{l=1}^{N_0} [K^{-1}(t_0)]_{lk} E \{\tilde{\beta}_l(t_0) \tilde{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_0)\}. \quad (21.17)$$

Как следует из последнего уравнения, весовые коэффициенты интерполяции в поле ошибок прогноза пропорциональны величине корреляции между аномалиями измерений $\tilde{\beta}_i(t_0)$ и невязками прогноза $\tilde{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_0)$. Качественные измерения, выполненные вблизи точки \vec{x} (в которой уточняется прогноз по формуле (21.8)), будут учтены с большим весом, чем измерения, слабо коррелированные с полем $\alpha(\vec{x}, t)$.

На практике для вычисления величин $\Delta_k(\vec{x}, t_0)$ необходимо знать функцию корреляции $P_0(\vec{x}, \vec{z})$ на момент времени t_0 . Покажем, что эта функция связана рекурсионным соотношением с функцией $P_{-1}(\vec{x}, \vec{z})$ и, таким образом, может быть найдена из анализа статистики поля ошибок прогноза на предыдущем этапе расчетов, т. е. в момент времени t_{-1} .

Введем корреляционную функцию ошибок прогноза, которую будет иметь поле после выполнения корректировки прогноза по формуле (21.8):

$$\begin{aligned} P'_0(\vec{x}, \vec{y}) &= E \{ [\alpha(\vec{x}, t_0) - \hat{\alpha}_0(\vec{x}, t_0)] [\alpha(\vec{y}, t_0) - \hat{\alpha}_0(\vec{y}, t_0)] \} = \\ &= E \{ [\alpha(\vec{x}, t_0) - \hat{\alpha}_0(\vec{x}, t_0)] [\alpha(\vec{y}, t_0)] \} = E \{ [\alpha(\vec{x}, t_0) - \hat{\alpha}(\vec{x}, t_0)] \times \\ &\quad \times [\alpha(\vec{y}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{y}, t_0)] \}. \end{aligned} \quad (21.18)$$

Подставляя теперь (21.5)—(21.8) в последнюю формулу и учитывая определение $P_0(\vec{x}, \vec{y})$, находим

$$\begin{aligned} P'_0(\vec{x}, \vec{y}) &= E \left\{ \left[\alpha(\vec{x}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{x}, t_0) - \sum_{k=1}^{N_0} \Delta_k(\vec{x}, t_0) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_{(\vec{x})} g_k(\vec{z}, t_0) [\alpha(\vec{z}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{z}, t_0)] d\vec{z} \right] [\alpha(\vec{y}, t_0) - \hat{\alpha}_{-1}(\vec{y}, t_0)] \right\} = \\ &= P_0(\vec{x}, \vec{y}) - \sum_{k=1}^{N_0} \Delta_k(\vec{x}, t_0) \int_{(\vec{x})} g_k(\vec{z}, t_0) P_0(\vec{z}, \vec{y}) d\vec{z}. \end{aligned} \quad (21.19)$$

Выведенные соотношения позволяют написать рекурсионное соотношение, связывающее корреляционные функции (матрицы) $P_0(\vec{x}, \vec{y})$, $P_0^1(\vec{x}, \vec{y})$ и $P_1(\vec{x}, \vec{y})$, для двух последовательных моментов времени t_0 и t_1 [153]:

$$P_1(\vec{x}, \vec{y}) = E \{ [\alpha(\vec{x}, t_1) - \hat{\alpha}_0(\vec{x}, t_1)] [\alpha(\vec{y}, t_1) - \hat{\alpha}_0(\vec{y}, t_1)] \} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(\vec{x})} \int_{(\vec{x})} h(\vec{x}, t_1; \vec{z}, t_0) h(\vec{y}, t_1; \vec{w}, t_0) P'_0(\vec{z}, \vec{w}) d\vec{z} d\vec{w} + \\
&+ \int_{(\vec{x})} \int_{(\vec{x})} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} h(\vec{x}, t_1; \vec{z}, \tau) h(\vec{y}, t_1; \vec{w}, \sigma) E\{f(\vec{z}, \tau) \times f(\vec{w}, \sigma)\} d\vec{z}. \quad (21.20)
\end{aligned}$$

Это соотношение является аналогом уравнения (7.13) одномерного фильтра Калмана. С его помощью проводится прогнозирование статистики ошибок метода на момент времени t_1 .

Таким образом, в корреляционный алгоритм последовательного анализа для пространственно-временных полей океана включаются в качестве основных уравнений формулы (21.14), (21.18) и (21.20).

Как и в одномерном фильтре Калмана, процедура анализа состоит в последовательности итераций, в ходе которых алгоритм приходит в устойчивое состояние и дает на каждый момент времени карту прогнозистических значений и откорректированную за счет последних наблюдений карту текущих значений поля. Блок-схемы обработки информации при последовательном анализе приведены в § 32.

При анализе на ЭВМ реальных полей океана формулы последовательного анализа заменяются эквивалентными им конечно-разностными соотношениями. Поэтому на практике вместо функции Грина может быть использована некоторая подпрограмма, дающая решение уравнения динамики поля.

§ 22. Спектральная формулировка метода последовательного анализа

Рассматривая задачу построения карты пространственного поля по измерениям на станциях в океане, мы выделили специальный случай, когда станции расположены в узлах правильной сетки, покрывающей район исследований. В таком случае становится возможной спектральная формулировка алгоритма оптимальной интерполяции. Помимо более компактной записи формул спектральный алгоритм позволил получить в явном виде весовые функции интерполяции для наиболее важных видов сеток: ромбической (гексагональной), прямоугольной и т. д. Кроме того, представление интерполяционных формул в пространстве волновых чисел ($\vec{\omega}$) показывает явную зависимость ошибки построения карты от интервала между станциями и от их количества, что весьма важно знать при планировании измерений в океане.

Исходя из этих соображений целесообразно переписать основные формулы алгоритма последовательного анализа, выведенные в § 21, преобразовав их по Фурье. Спектральный вариант метода последовательного анализа был предложен в работе Д. Питерсона [153]. Остановимся на выводе его основных формул. Будем использовать введенные в § 16 допущения, касающиеся неограниченности перио-

дической сетки измерений, однородности измеряемого физического поля океана, а также системы базисных векторов.

Периодичность сетки измерений и однородность поля имеют результатом то обстоятельство, что функции $g(\vec{x}, t)$, $P(\vec{x}, \vec{y})$, $\Delta(\vec{x}, t_0)$, как и элементы матриц K и Γ , являются функциями только расстояний между произвольной точкой поля и узлом сетки измерений

$$\begin{aligned} g_k(\vec{x}, t) &= g(\vec{x} - \vec{v}_{[k]}, t_0), \\ P(\vec{x}, \vec{y}) &= P(\vec{x} - \vec{v}_{[k]}, \vec{y} - \vec{v}_{[k]}), \\ \Delta_k(\vec{x}, t_0) &= \Delta(\vec{x} - \vec{v}_{[k]}, t_0). \end{aligned} \quad (22.1)$$

Перепишем уравнение (21.15) в таком виде:

$$\Gamma^T(\vec{x}, t_0) \Delta(\vec{y}, t_0) = \Delta^T(\vec{x}, t_0) K(t_0) \Delta(\vec{y}, t_0), \quad (22.2)$$

где

$$\Gamma(\vec{x}, t_0) \equiv \int_{(\vec{x})} g_k(\vec{z}, t_0) P_0(\vec{x}, \vec{z}) d\vec{z},$$

а $\Delta(\vec{x}, t_0)$ — вектор-столбец с составляющими $\{\Delta_k(\vec{y}, t_0)\}$. С учетом условий (22.1) имеем

$$\Gamma_0(\vec{x} - \vec{v}_{[k]}) = \sum_{[l]} \Delta_0(\vec{x} - \vec{v}_{[l]}) K_0(\vec{v}_{[l]} - \vec{v}_{[k]}) \quad (22.3)$$

или

$$\Gamma_0(\vec{x}) = \sum_{[k]} K_0(\vec{v}_{[k]}) \Delta_0(\vec{x} - \vec{v}_{[k]}). \quad (22.4)$$

Представим измерения поля в виде операции наложения на него системы δ -функций. Тогда получим

$$\Gamma_0(\vec{x}) = \sum_{[k]} \int_{(\vec{x})} K_0(\vec{z}) \Delta_0(\vec{x} - \vec{z}) \delta(\vec{z} - \vec{v}_{[k]}) d\vec{z}. \quad (22.5)$$

Воспользуемся теперь разложением последовательности δ -функций в ряд Фурье (см. формулу (16.7)):

$$\Gamma_0(\vec{x}) = \frac{1}{Q} \sum_{[k]} \int_{(\vec{x})} K_0(\vec{z}) \Delta_0(\vec{x} - \vec{z}) \exp(i\vec{z} \cdot \vec{u}_{[k]}) d\vec{z}. \quad (22.6)$$

Замечая, что последнее выражение представляет собой свертку двух функций, можно сразу написать уравнение для определения весовых функций последовательного анализа:

$$\Gamma_0(\vec{v}) = \frac{\Delta_0(\vec{v})}{Q} \sum_{[k]} K_0(\vec{v} - \vec{u}_{[k]}). \quad (22.7)$$

Полученное выражение является обобщением формулы (16.9), справедливой для пространственных полей.

Рекурсионное соотношение метода последовательного анализа (21.20) также может быть представлено в пространстве волновых чисел. Введем для этого преобразование Фурье от $P(\vec{x}, \vec{y})$ с учетом возможной неоднородности поля ошибок прогноза:

$$P(\vec{\mu}, \vec{\nu}) = \int \int_{(\vec{x})} P(\vec{x}, \vec{y}) \exp\langle -i\vec{x} \cdot \vec{\mu} \rangle \exp\langle -i\vec{y} \cdot \vec{\nu} \rangle d\vec{x}d\vec{y}. \quad (22.8)$$

Тогда выражение (21.20) примет вид

$$\begin{aligned} P_1(\vec{\mu}, \vec{\nu}) &= \int \int \int_{(\vec{x})} h(\vec{x} - \vec{z}, t_1 - t_0) h(\vec{y} - \vec{w}, t_1 - t_0) \times \\ &\times \left[P_0(\vec{z}, \vec{w}) - \sum_{[k]} \Delta_0(\vec{w} - \vec{v}_{[k]}) \Gamma_0(\vec{z} - \vec{v}_{[k]}) \right] \times \\ &\times \exp\langle -i\vec{x} \cdot \vec{\mu} \rangle \exp\langle -i\vec{y} \cdot \vec{\nu} \rangle d\vec{x}d\vec{y}d\vec{z}d\vec{w} + Q_1(\vec{\mu}, \vec{\nu}). \end{aligned} \quad (22.9)$$

Подставляя в последнюю формулу равенство (22.7) и выражая сумму экспонент через ряд δ -функций, приведем ее к следующему виду [153]:

$$\begin{aligned} P_1(\vec{\mu}, \vec{\nu}) &= H(\vec{\mu}, t_1 - t_0) H(\vec{\nu}, t_1 - t_0) \times [P_0(\vec{\mu}, \vec{\nu}) - \\ &- \frac{(2\pi)^n \Gamma_0(\vec{\nu}) \Gamma_0(\vec{\mu}) \sum_{[k]} \delta(\vec{\mu} + \vec{\nu} - \vec{u}_{[k]})}{\sum_{[k]} K_0(\vec{\nu} - \vec{u}_{[k]})}] + Q_1(\vec{\mu}, \vec{\nu}), \end{aligned} \quad (22.10)$$

$$\Gamma_m(\vec{\nu}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(\vec{x})} P_m(\vec{\nu}, \vec{\zeta}) g(-\vec{\zeta}) d\vec{\zeta},$$

$$K(\vec{\nu}) = G(-\vec{\nu}) \Gamma(\vec{\nu}) + R(\vec{\nu}).$$

Формулы (22.7) и (22.10) представляют собой спектральный вариант алгоритма последовательного анализа наблюдений.

§ 23. Свойства алгоритма последовательного анализа наблюдений

Рассмотрим некоторые свойства корреляционного и спектрального алгоритмов последовательного анализа наблюдений. Оба алгоритма служат для нахождения прогностических величин поля и оперируют со значениями ошибок предсказания в тех точках, где эти ошибки могут быть оценены, например в точках измерений поля. Оптимально использовать информацию, содержащуюся в измерениях, можно, если динамическая модель поля достаточно подробно описывает поведение статистической структуры поля ошибок прогноза.

Наиболее удобным представляется случай, когда исследуемое поле $\alpha(\vec{x})$ путем некоторых преобразований можно привести к однородному случайному полю Гаусса с экспоненциальной по пространству корреляционной функцией. Обычным условием такого преобразования является разложение исходного поля на несколько компонент, каждая из которых удовлетворяет отмеченным свойствам [15, 23]. Если затем ввести векторную функцию

$$\alpha(\vec{x}, t) = [\alpha_1(\vec{x}, t), \dots, \alpha_m(\vec{x}, t)]^T, \quad (23.1)$$

то формулы последовательного анализа, приведенные в § 21—22, могут быть распространены на поле $\alpha(\vec{x}, t)$ (при соответствующем переходе к векторно-матричным обозначениям).

Решение уравнения динамики поля (21.1) в терминах «функции Грина» или «переходной функции» системы примет вид

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{x}, t) = & \int \int_{(\vec{x})} h(\vec{x} - \vec{y}; t - t_0) \alpha(\vec{y}, t_0) dy + \\ & + \int_{(\vec{x})} \int_{t_0}^t h(\vec{x} - \vec{y}; t - \tau) f(\vec{y}, \tau) d\vec{y} d\tau. \end{aligned} \quad (23.2)$$

В этой формуле функция Грина $h(\vec{x}, t)$ является решением уравнения (21.1) в векторно-матричной форме при условии, что $f = 0$ и $h(\vec{x}, 0) = J\delta(\vec{x})$, где J — единичная матрица при $\vec{x} = 0$.

Важным свойством линейной динамической модели является рекурсионная связь пространственно-временной корреляционной матрицы поля $K(\vec{x}, t)$ с функцией Грина:

$$K(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) = \int_{(\vec{x})} h(\vec{x} - \vec{z}; t - \rho) K(\vec{z} - \vec{y}; \rho - \tau) d\vec{z}, \quad (23.3)$$

где

$$\begin{aligned} K(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) = & E \{ [\alpha(\vec{x}, t) - E \{ \alpha(\vec{x}, t) \}] \times \\ & \times [\alpha(\vec{y}, \tau) - E \{ \alpha(\vec{y}, \tau) \}]^T \}. \end{aligned} \quad (23.4)$$

Введем пространственно-временной и пространственный спектры поля

$$\Phi(\vec{v}, \omega) = \int_{(\vec{x})} \int_{-\infty}^{\infty} K(\vec{x}, t) \exp[-i\vec{x}^T \vec{v} - i\omega t] d\vec{x} dt, \quad (23.5)$$

$$\Phi_t(\vec{v}, t) = \int_{(\vec{x})} K(\vec{x}, t) \exp[-i\vec{x}^T \vec{v}] d\vec{x}. \quad (23.6)$$

Используя условие некоррелированности по времени функции возбуждения $f(\vec{x}, t)$, входящей в уравнение динамики (21.1), можно показать, что пространственно-временной спектр поля $\Phi(\vec{v}, \omega)$ выражается через функцию Грина и чисто пространственный спектр $\Phi_t(\vec{v}, t)$. Для этого подставим в формулу (23.4) выражение (23.2) и выполним операции осреднения. Тогда получим

$$K(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) = \int_{(\vec{x})} \int_{-\infty}^{\infty} h(\vec{x} - \vec{z}, t - \sigma) F(\vec{z} - \vec{w}) \times \\ \times h^T(\vec{y} - \vec{w}, \tau - \sigma) d\vec{z} d\vec{w} d\sigma. \quad (23.7)$$

Применяя к этому выражению теорему Парсеваля и выполняя преобразование Фурье по пространству и по времени, находим [154]:

$$\Phi(\vec{v}, \omega) = H(\vec{v}, \omega) \psi(\vec{v}) H^T(-\vec{v}, -\omega) = H(\vec{v}, \omega) \psi(\vec{v}) H^{T*}(\vec{v}, \omega). \quad (23.8)$$

Здесь $H(\vec{v}, \omega)$ — преобразование Фурье от функции Грина; $\psi(\vec{v})$ — преобразование Фурье от $F(\vec{x})$. В то же время чисто пространственное преобразование Фурье от $K(\cdot)$ дает

$$\Phi_t(\vec{v}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_t(\vec{v}, t - \rho) \psi(\vec{v}) H_t^T(-\vec{v}, -\rho) d\rho. \quad (23.9)$$

Используем теперь свойство функций Грина

$$h(\vec{x} - \vec{z}, t - \rho) = \int_{(\vec{x})} h(\vec{x} - \vec{y}, t - \sigma) h(\vec{y} - \vec{z}, \sigma - \rho) d\vec{y}, \quad (23.10) \\ t \geq \sigma \geq \rho.$$

Для этого сначала применим к нему преобразование Фурье

$$H_t(\vec{v}, t - \rho) = H_t(\vec{v}, t - \sigma) H_t(\vec{v}, \sigma - \rho), \quad t \geq \sigma \geq \rho. \quad (23.11)$$

Полагая теперь $\tau = 0$ в последней формуле и подставляя ее в выражение (23.9), находим

$$\Phi_t(\vec{v}, t) = H_t(\vec{v}, t) \Phi_t(\vec{v}, 0), \quad t > 0. \quad (23.12)$$

$$\Phi_t(\vec{v}, t) = \Phi_t(\vec{v}, 0) H_t^T(-\vec{v}, -t), \quad t < 0.$$

Таким образом, для линейной динамической модели поля можно выразить пространственно-временной спектр поля $\Phi(\vec{v}, \omega)$ в терминах чисто пространственного спектра поля $\Phi_t(\vec{v}, 0)$ и функции Грина

$$\Phi(\vec{v}, \omega) = H(\vec{v}, \omega) \Phi_t(\vec{v}, 0) + \Phi_t(\vec{v}, 0) H^T(-\vec{v}, -\omega). \quad (23.13)$$

Приведенный результат, принадлежащий Д. Питерсену [154], выражает основное свойство алгоритма последовательного анализа: взаимосвязь пространственного и пространственно-временного спектров поля со спектром функции возбуждения. Это свойство означает, что при условии известной динамики поля нет необходимости проводить исследования его статистической структуры в различные моменты времени. Подробные измерения поля в начальный момент времени дают возможность оценить его корреляционные и спектральные характеристики во все последующие моменты времени. Измерения поля фактически используются лишь для текущей коррекции прогноза или, иными словами, для компенсации погрешностей идеализированной динамической модели поля.

Комбинируя выражения (23.8) и (23.13), нетрудно получить формулу для определения спектра функции возбуждения $f(\vec{x}, t)$ в уравнении динамики поля:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{v}) &= H^{-1}(\vec{v}, \omega) [H(\vec{v}, \omega) \Phi_t(\vec{v}, 0) + \Phi_t(\vec{v}, 0) H^T(-\vec{v}, -\omega)] \times \\ &\times H^{T^{-1}}(-\vec{v}, -\omega) = H^{-1}(\vec{v}, \omega) \Phi_t(\vec{v}, 0) + \Phi_t(\vec{v}, 0) H^{T^{*-1}}(\vec{v}, \omega). \end{aligned} \quad (23.14)$$

Эта формула весьма важна в двух аспектах. Прежде всего она дает практический способ оценки спектра функции возбуждения через пространственный спектр поля, который может быть получен непосредственно по наблюдениям. Кроме того, экспериментальная проверка равенства (23.14), как и равенства (23.13), позволяет судить об адекватности использованной линейной динамической модели реальному полю океана.

Несмотря на более сложный вид, формула (23.14) имеет тот же смысл, что и выражение (8.12), которое было использовано нами при практическом моделировании одномерных океанологических процессов для применения к ним алгоритма фильтра Калмана. Как уже отмечалось, это является следствием марковских процессов и полей.

Спектральный алгоритм последовательного анализа дает возможность восстанавливать карты откорректированных значений поля непосредственно в пространстве волновых чисел. Применяя преобразование Фурье к формулам (21.8) и (21.4), получаем

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_0(\vec{v}, t_0) &= \hat{\alpha}_{-1}(\vec{v}, t_0) + \Delta_0(\vec{v}) \sum_{|k|} \exp\langle -i\vec{v} \cdot \vec{v}_{|k|} \rangle \times \\ &\times [\hat{\beta}_{|k|}(t_0) - \hat{\beta}_{|k|-1}(t_0)], \end{aligned} \quad (23.15)$$

$$\hat{\alpha}_0(\vec{v}, t_1) = H(\vec{v}, t_1 - t_0) \hat{\alpha}_0(\vec{v}, t_0). \quad (23.16)$$

Таким образом, ошибки прогнозирования измерений поля добавляются к прогностическим величинам поля (23.16) путем «взвешивания» с оптимальной весовой функцией $\Delta_0(\vec{v})$. Среднеквадратичная ошибка обработки наблюдений по формуле (12.15) дается

выражением [154]

$$\varepsilon_0(\vec{x}, \vec{x}) = P_0(\vec{x}, \vec{x}) - \sum_{[k]} \frac{(2\pi)^N}{Q} \exp(i\vec{u}_{[k]}\vec{x}) \times \int_{(\vec{x})} \Gamma_0(\vec{\mu}) \Delta_0(\vec{u}_{[k]} - \vec{\mu}) d\vec{\mu}. \quad (23.17)$$

Нетрудно заметить, что эта формула аналогична формуле (16.13), дающей ошибку интерполяции пространственного поля, измеренного на периодической сетке.

Приведенные формулы выражают основные свойства алгоритма последовательного анализа наблюдений, вытекающие из линейной динамической модели поля. При моделировании полей океана с использованием систем линеаризованных уравнений гидродинамики необходимо в каждом отдельном случае отыскивать некоторые аналоги этих формул. В процессе реализации метода на ЭВМ вместо них должны применяться конечно-разностные соотношения. Точность прогнозирования, как и надежность метода (сходимость, устойчивость и т. д.), в этих условиях можно оценить лишь экспериментальным путем.

§ 24. Последовательный анализ наблюдений вертикального распределения скорости течений

Движения водных масс в океане чаще всего имеют неустановившийся характер. Даже в области макромасштабов, где можно выделить стационарные системы течений, примерами неустановившихся движений служат явления, вызываемые прохождением атмосферных депрессий. В области мезо- и микромасштабов, как известно, преобладают сложные нестационарные движения, которые по результатам измерений обычно представляют собой реализации случайных функций. Поэтому прогнозирование течений в море — весьма сложная задача. В основу любого метода предсказания должна быть положена математическая модель изучаемого явления. Современная теория морских течений располагает мощным математическим аппаратом для моделирования и анализа установившихся движений водных масс [77]. Однако любая теоретическая модель может успешно описывать только сглаженную (осредненную) составляющую реальной изменчивости скорости течений в море. Для описания флуктуационной составляющей необходимо использовать стохастические модели.

По-видимому, наиболее перспективным подходом к моделированию реальных течений в море для прогнозирования их значений является применение комбинированных динамико-стохастических моделей. В основу подобной модели, как уже отмечалось в главе I, должна быть положена физическая модель, описывающая наиболее важные черты осредненного движения. Для учета флуктуационной составляющей необходимо использовать измерения реальных

скоростей течений и реализовать некоторую статистическую процедуру введения поправок в расчетные величины скорости. Таким образом, существенной особенностью динамико-стохастической модели поля скорости в океане является постоянное сравнение вычисленных и измеренных значений скорости и адаптации алгоритма с целью уменьшения расхождения в этих значениях.

В большинстве работ о нестационарных морских течениях не сравниваются полученные результаты с данными непосредственных измерений скорости. Одной из немногих попыток явилась работа французских ученых М. Крепона и Д. Бегиса [103]. В ней авторами были рассмотрены модели, не зависящие от пространственных вариаций ветра. Целью работы явилось сравнение результатов расчетов скоростей течений, выполненных на основе ряда простых теоретических моделей, с данными наблюдений. В качестве последних были использованы материалы первой советско-французской экспедиции 1969 г. («Cofragsov-1») в Лионском заливе [35, 46].

Мы используем результаты работы [102] для идентификации некоторых параметров прогностической модели.

Идентификации параметров модели по наблюдениям. М. Крепон и Д. Бегис поставили своей целью найти по данным наблюдений неизвестные параметры физической модели, предназначенной для расчета горизонтальных составляющих вектора скорости $\vec{V} = (u, v)$. Численные эксперименты были проведены на моделях двух типов. В первом случае использованные для идентификации параметров уравнения движения имели вид

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} + \nu \varphi (u^2 + v^2) \right] u(t) - f v(t) &= \frac{c_{10}}{\rho} |\vec{\omega}| \omega_x(t), \\ \left[\frac{d}{dt} + \nu \varphi (u^2 + v^2) \right] v(t) + f u(t) &= \frac{c_{10}}{\rho} |\vec{\omega}| \omega_y(t), \quad (24.1) \\ u(0) &= u_{\Phi}(0), \quad v(0) = v_{\Phi}(0), \end{aligned}$$

где ν — кинематический коэффициент турбулентной вязкости; $\vec{\omega}(t) = (\omega_x, \omega_y)$ — скорость ветра; ρ — плотность воды; c_{10} — коэффициент торможения; f — параметр Кориолиса; $\varphi(x)$ — положительная дифференцируемая и возрастающая функции.

Неизвестными параметрами модели являются c_{10} , f и ν . Для определения их значений по данным наблюдений был использован градиентный метод [53]. Пусть $\vec{u}_{\Phi}(t) = (u_{\Phi}(t), v_{\Phi}(t))$ — измеренные значения вектора скорости течений на интервале времени $[0, T]$. Обозначим расчетные значения скоростей, полученные из решения системы уравнений (12.1), $\vec{u}(t) = (u(t), v(t))$ и введем среднеквадратичный критерий отличия $\vec{u}(t)$ от $\vec{u}_{\Phi}(t)$:

$$L = \int_0^T \{ (u_{\Phi}(t) - u(t))^2 + (v_{\Phi}(t) - v(t))^2 \} dt. \quad (24.2)$$

Тогда задача определения параметров c_{10} , f и v сводится к минимизации (табл. 4) функционала (24.2).

В расчетах были использованы измерения на бье-лаборатории в Лионском заливе, проведенные в период с 18 по 31 июля 1969 г., когда штилевые условия внезапно сменились сильным штормом, вызванным мистралем. Буй находился на удалении $d = 100$ км от берега, глубина термоклина составляла около 25 м, глубина места 2500 м. Различие в плотности над и под термоклином оценива-

Таблица 4

Результаты идентификации параметров модели (первый эксперимент)

Период наблюдений (1969 г.)	c_{10}	f	v
18.VII — 31.VII	$1,01 \cdot 10^{-3}$ $1,01 \cdot 10^{-3}$	$1,002 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ($T = 17$ ч 25 м) $1,005 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ($T = 17$ ч 22 м)	$0,9 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ $0,25 \cdot 10^{-6}$
26.VII (12 ч) — 31.VII (12 ч)	$1,62 \cdot 10^{-3}$ $1,69 \cdot 10^{-3}$	$0,9467 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ($T = 18$ ч 26 м) $0,9530 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ($T = 18$ ч 19 м)	$0,7 \cdot 10^{-6}$ $0,18 \cdot 10^{-14}$
Мистраль	$1,62 \cdot 10^{-3}$	$0,9462 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ($T = 18$ ч 27 м)	$0,6 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$

лось величиной $\Delta\rho/\rho$ и имело порядок 10^{-3} . Внутренний радиус деформации c_2/f имел порядок 5 км, а отношение $\frac{d}{c_2/f}$ составляло около 20. Таким образом, использование модели (24.1) с локальным ветром оказалось оправданным.

М. Крепон и Д. Бегис провели также второй численный эксперимент по идентификации параметров модели, в которой скорости течения уже не были осреднены по вертикали:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(z, t) - fv(z, t) &= v \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(z, t), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(z, t) + fu(z, t) &= v \frac{\partial^2}{\partial z^2} v(z, t). \end{aligned} \quad (24.3)$$

Граничные условия в этом случае имели вид

$$\begin{aligned} v \frac{\partial u(0, t)}{\partial z} &= c_{10} \frac{\rho_a}{\rho_w} |\omega| \omega(t), \\ \frac{\partial u(-H, t)}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

где ρ_a , ρ_w — плотности воздуха и воды. Начальные условия были выбраны в следующей форме:

$$1) \quad u_0(z_\Phi) = u_\Phi(z_\Phi),$$

$$2) \quad \frac{\partial u_0(0)}{\partial z} = c_{10} \frac{\rho_a}{\rho_w} |\omega| \omega(0), \quad (24.4)$$

$$3) \quad \frac{\partial u_0(-H)}{\partial z} = 0,$$

где $u_\Phi(z_\Phi)$ — измерения скорости на горизонте z_Φ . Результаты второго численного эксперимента приведены в табл. 5.

На рис. 41 приведены результаты расчета составляющей скорости течений по модели (24.3), (24.4) при значениях параметров, соответствующих периоду мистралья. Хорошее совпадение расчетных значений скорости с измерениями свидетельствует о высоком качестве моделирования.

Таблица 5

Результаты идентификации параметров модели (второй эксперимент)

Период наблюдений (1969 г.)	c_{10}	f	ν (cgs)
21.VII—31.VII	$1,26 \cdot 10^{-3}$	$0,95 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ($T = 18 \text{ ч } 20 \text{ м}$)	100
Мистраль	$1,46 \cdot 10^{-3}$	$0,93 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ($T = 18 \text{ ч } 50 \text{ м}$)	120

Последовательное усвоение данных. Используем модель Крепона и Бегиса для осуществления последовательного усвоения данных. Тем самым мы перейдем к динамико-стохастической модели для вертикальных распределений скорости течений в верхнем слое моря. В качестве дополнительного влияющего фактора мы введем переменный по глубине коэффициент турбулентной вязкости $\nu(z)$, считая, однако, что его значения на поверхности согласуются со значениями, приведенными выше.

Для организации последовательного усвоения данных необходимо теперь ввести процедуры прогноза граничных условий, текущего сравнения прогнозируемых значений скорости с наблюдениями, вычисления и введения поправок в зависимости от невязок прогнозов во все расчетные величины профилей скорости.

Прогноз граничных условий. Для этой цели использовались данные о модуле скорости ветра и его направлении с 27 по 31 июля 1969 г., полученные по программе «Cofrasov-I». Составляющие тангенциального напряжения вектора $T_x(t)$ и $T_y(t)$ вычислялись по формуле Россби — Монтгомери

$$\begin{aligned} T_x(t) &= c_f \rho |\omega(t)| \omega_x(t), \\ T_y(t) &= c_f \rho |\omega(t)| \omega_y(t), \end{aligned} \quad (24.5)$$

где

$$0,0008 \text{ при } |\omega| < 6,7 \text{ м/с,}$$

$$c_i = 0,0017 \quad |w| = 6,7 \text{ м/с,}$$

$$0,0026 \quad |w| > 6,7 \text{ м/с,}$$

$$\rho = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} \text{ — плотность воздуха;}$$

$$\omega_x(t) = |\omega(t)| \cos \alpha; \quad \omega_y(t) = |\omega(t)| \sin \alpha.$$

Учитывая, что данные наблюдений о скоростях ветра и течений были получены с некоторой ошибкой, будем прогнозировать $T_x(t)$,

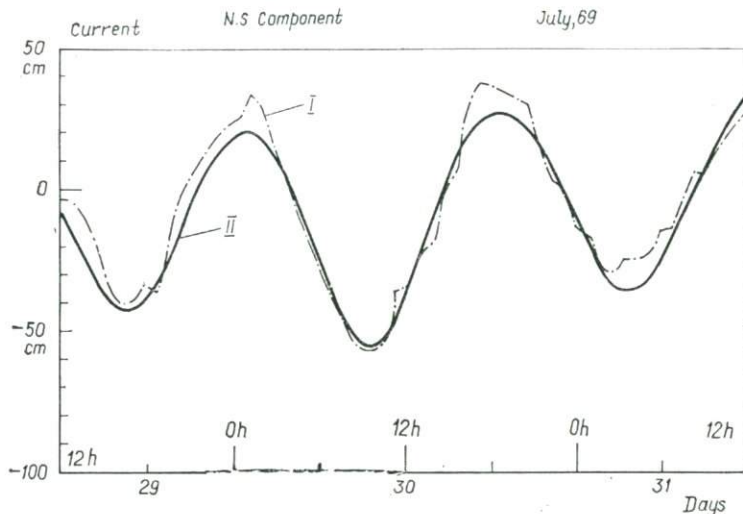


Рис. 41. Расчетные (I) и измеренные (II) значения составляющей скорости течения по данным М. Крепона и Д. Бегиса [102].

$T_y(t)$ и граничные условия на «дне» $u(t)$ и $v(t)$, используя готовую программу автоматического моделирования и прогнозирования [86], приведенную в § 11.

В табл. 2 показано, какой порядок уравнения динамики подобран для каждого из четырех временных рядов и какова дисперсия прогноза, получаемая при использовании метода Калмана.

На рис. 42 изображены временные ряды $T_x(t)$ и $T_y(t)$, полученные в результате прогнозирования с 27 по 31 июля 1969 г. Нестационарные участки кривых соответствуют мистралу, начавшемуся 29 июля. На рис. 43 для того же периода времени представлены кривые составляющих скорости течений на «дне». В настоящей работе нас будет интересовать период действия мистрала.

Модель вертикального распределения скорости течения, зависящая только от локального ветра. Рассмотрим прогностическую модель, представленную системой уравнений движения

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} - \Omega v(z, t) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu(z) \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial t} = \Omega u(z, t) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu(z) \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \right) = 0,$$
(24.6)

со следующими граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad v(z) \frac{\partial u(0, t)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} T_x(t), \\ v(z) \frac{\partial v(0, t)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} T_y(t), \end{aligned} \quad (24.7)$$

$$\begin{aligned} \text{при } z = H \quad u(H, t) &= u(t), \quad v(H, t) = v(t), \\ \text{при } t = 0 \quad u(z, 0) &= u_0(z), \quad v(z, 0) = v_0(z). \end{aligned} \quad (24.8)$$

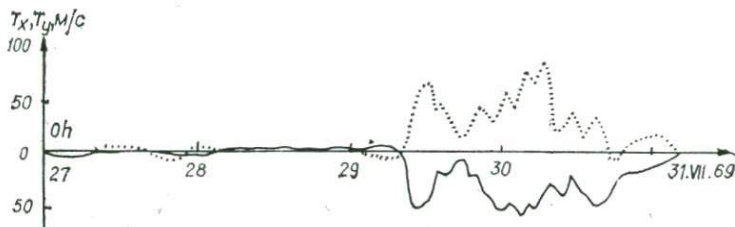


Рис. 42. Результаты прогнозирования составляющих тангенциально-го напряжения ветра: сплошная линия — T_x , пунктирная линия — T_y .

В уравнениях (24.6)—(24.8) u , v — составляющие скорости течения вдоль декартовых осей координат X , Y (начало координат расположено на невозмущенной поверхности океана, ось X направлена на восток, ось Y — на север, ось Z — вертикально вниз); T_x , T_y — составляющие тангенциального напряжения ветра; t —

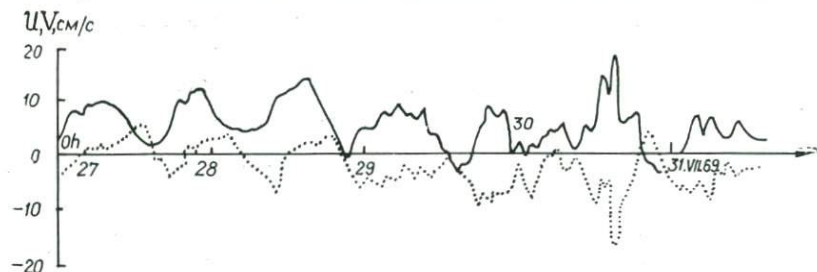


Рис. 43. Результаты прогнозирования составляющих скоростей течений: сплошная линия — u , пунктирная линия — v .

время; Ω — параметр Кориолиса; $\nu(z)$ — кинематический коэффициент турбулентной вязкости; ρ — плотность морской воды; $u_0(z)$, $v_0(z)$ — составляющие скорости течения на «дне» (60 м), считающиеся известными из данных наблюдений. За начало отсчета принято время начала мистрала 10 ч 29 июля 1969 г. На данный момент вертикальное распределение $u_0(z)$, $v_0(z)$ представлено на рис. 44. Для расчетов использовались измерения скорости течения на горизонтах 5, 10, 15, 20, 30, 60 м.

Численный алгоритм решения системы уравнений. Для численного интегрирования уравнений (24.6)—(24.8) применим неявную

двухслойную разностную схему, абсолютно аппроксимирующую эти уравнения и абсолютно устойчивую при $\alpha \geq \frac{1}{2}$ [78]:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} - \Omega (\alpha v_k^{n+1} + \beta v_k^n) - \nu \frac{\Delta_{-1} \Delta_{+1}}{h^2} [\alpha u_k^{n+1} + \beta u_k^n] -$$

$$- \frac{\partial v}{\partial z} \left[\alpha \frac{u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}}{2h} + \beta \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} \right] = 0, \quad (24.9)$$

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\tau} + \Omega (\alpha u_k^{n+1} +$$

$$+ \beta u_k^n) - \nu_k \frac{\Delta_{-1} \Delta_{+1}}{h^2} [\alpha v_k^{n+1} +$$

$$+ \beta v_k^n] -$$

$$- \frac{\partial v}{\partial z} \left[\alpha \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_{k-1}^{n+1}}{2h} +$$

$$+ \beta \frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2h} \right] = 0,$$

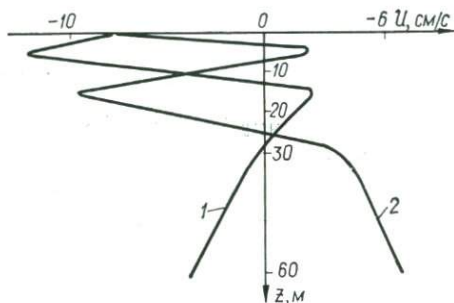


Рис. 44. Начальные профили составляющих скорости:

1 — $u_0(z)$, 2 — $v_0(z)$.

где τ — шаг разностной схемы по времени; h — шаг по оси z ; $\Delta_{\pm 1}$,

Δ_{-1} — операторы разностной схемы; $\beta = 1 - \alpha$. Вводя обозначения [79], систему уравнений (24.9) запишем в векторно-матричном виде

$$A_k \vec{\Psi}_{k-1} + B_k \vec{\Psi}_k + C_k \vec{\Psi}_{k+1} = \vec{D}_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (24.10)$$

для реализации которого применим метод матричной факторизации [3].

Начальные прогоночные соотношения, а именно: матрицы X_0 и \vec{Y}_0 , вектор \vec{Y}_0 , определяются из граничного условия на поверхности океана

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{Y}_0 = \frac{h}{\rho \nu_k} \begin{pmatrix} T_x(t) \\ T_y(t) \end{pmatrix}. \quad (24.11)$$

Соотношением $\vec{\Psi}_N = X_N \vec{\Psi}_{N+1} + \vec{Y}_N$ можно определить вектор $\vec{\Psi}_N$ по известному из граничного условия на глубине 60 м вектору $\vec{\Psi}_{N+1}$ от N до 0.

Алгоритм последовательного усвоения данных наблюдений. Уравнения (24.9) приближенно описывают динамику вертикального распределения скорости течения в море. Поэтому прогностические значения скорости течения будут содержать значительные ошибки. Чтобы компенсировать их, вычислим текущие ошибки прогноза на тех горизонтах, где имеются данные наблюдений, т. е. на горизонтах 5, 10, 15, 20, 30, 60 м. Используя эти ошибки, путем линейной

интерполяции получим значения ошибок прогноза с шагом 1 м по оси Z .

В § 21 было показано, что для коррекции ошибок предсказания в момент времени t_1 необходимо выполнить оптимальную интерполяцию в поле ошибок прогноза и добавить результаты интерполирования к оценкам детерминированной составляющей поля течения. Однако в целях упрощения алгоритма мы заменили оптимальную интерполяцию обычной линейной. Такая замена не приводит к заметным ошибкам, поскольку измерения представлены на достаточно густой сетке. Таким образом, алгоритм последовательного анализа состоит в следующем.

Из численного решения системы уравнений (24.6) — (24.8) находится оценка $\hat{\Psi}(z, t_1)$ вертикального профиля скорости течения для момента t_1 .

На горизонтах, где имеются данные наблюдений, вычисляется ошибка прогноза по формуле

$$\delta\hat{\Psi}(z_k, t_1) = \vec{\Psi}(z_k, t_1) - \hat{\Psi}(z_k, t_1).$$

Проводится линейная интерполяция ошибок прогноза на горизонтах 0, 1, 2, ..., 60 м.

Оптимальная оценка с усвоением данных измерений вычисляется по формуле

$$\vec{\Psi}(z, t_1) = \hat{\Psi}(z, t_1) + \delta\vec{\Psi}(z, t_1)$$

для всех горизонтов 0, 1, 2, ..., 60 м.

Полученные таким образом значения скорости течения принимаются за начальные условия, и весь алгоритм расчета повторяется для следующего момента времени, когда поступают новые данные измерений.

Численные результаты. На основании изложенного алгоритма была составлена программа предсказания вертикального профиля скорости течения на языке АЛГОЛ. Фактические данные наблюдений были предварительно сглажены с периодом 1 ч, чтобы устранить случайные ошибки измерений. Прогноз вертикального профиля скорости течения осуществлялся с заблаговременностью от 1 до 10 ч на горизонтах 0, 1, 2, ..., 60 м. Шаг численной схемы по времени $\tau = 10$ мин. Данные измерений для вычисления ошибок прогноза вводились через каждые 30 мин. Прогнозируемые величины сравнивались с действительно наблюдаемыми в соответствующие моменты времени значениями скоростей течений.

Расчеты проводились с различными значениями коэффициента $\nu(z)$. Коэффициент $\nu(z)$ задавался таблично в точках $z = 0, 1, 2, \dots, 60$ м. Ход коэффициента $\nu(z)$ с глубиной был выбран характерным для района Лионского залива в летнее время [46]. Максимальное значение $\nu(z)$ равнялось $120 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ на поверхности моря, а мини-

мальное — $20 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ на глубине 30 м, на «дне», за которое принималась глубина 60 м, значение $\nu(z)$ равнялось $85 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$.

Во втором эксперименте $\nu(z)$ брался почти постоянным по глубине, т. е. на поверхности моря он равнялся $120 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, затем линейно уменьшался до $110 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ на «дне». Результаты прогноза при таком коэффициенте $\nu(z)$ получились лучше, чем в первом эксперименте, что дополнительно подтверждает введенные М. Крепоном и Д. Бегисом предположения.

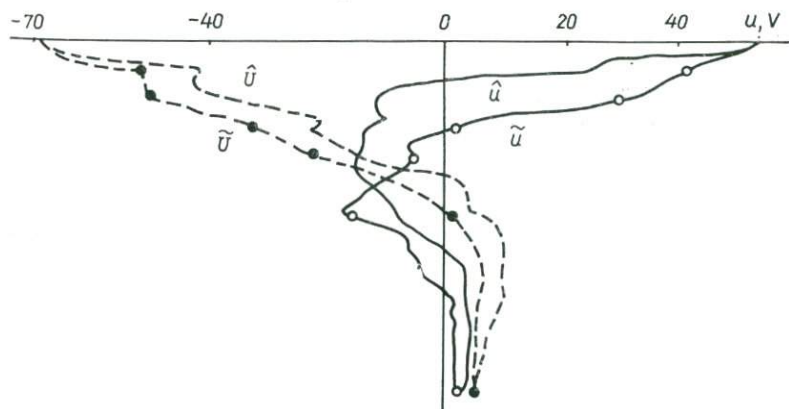


Рис. 45. Примеры прогнозирования вертикальных профилей составляющих скорости течений на 10 ч. Черными и светлыми кружками обозначены измеренные значения.

На рис. 45 изображены результаты прогнозирования компонент скорости \tilde{u} и \tilde{v} в Лионском заливе. Светлыми и темными кружочками изображены данные наблюдений компонент скорости течения u и v на горизонтах 5, 10, 15, 20, 30, 60 м. На них оптимальная оценка решения модели $\tilde{\Psi}$ совпадает с данными наблюдений. Прогнозируемые кривые неплохо согласуются с наблюдениями для моментов времени 1—5 ч. Несколько хуже было совпадение при прогнозе на 10 ч.

Дисперсия ошибки прогноза возрастает по мере увеличения заблаговременности прогноза. Например, отношение дисперсии ошибки прогноза к дисперсии сглаженной составляющей при прогнозе на 1 ч равнялось 0,3 для компоненты u и 0,2 для компоненты v ; при прогнозе на 5 ч эти цифры равнялись 0,5 для u и 1,15 для v , а для 10 ч — 0,75 и 1,15 соответственно. На основании анализа ошибок прогноза можно сделать вывод о том, что использованная в работе [102] модель зависимости течений от ветра с глубиной может давать неплохие результаты для предсказания на 1—5 ч вперед.

При увеличении заблаговременности прогноза до 10 ч ошибки становятся сравнимыми по величине с дисперсией сглаженных составляющих компонент скорости. Поэтому лучшие результаты

можно получить только путем усложнения детерминированной части модели.

Метод, рассмотренный в этом параграфе, представляется интересным и эффективным с той точки зрения, что используя его, можно непрерывно усваивать поступающие от приборов данные и прогнозировать скорости течений с удовлетворительной точностью на 1—5 ч вперед. Дальнейшие исследования в области динамико-стохастического моделирования вертикальной структуры скоростей течений в море должны привести к созданию более эффективных вычислительных алгоритмов прогнозирования скорости течений.

§ 25. Прогнозирование вертикальных профилей температуры в верхнем слое моря

Применим метод последовательного анализа данных к наблюдениям вертикального распределения температуры моря. В качестве измерений вертикального профиля температуры снова воспользуемся данными, полученными в ходе первой советско-французской экспедиции в Лионском заливе [35]. Измерения проводились на французском буйе-лаборатории на горизонтах 0, 10, 15, 20, 30 и 60 м летом 1969 г. в период нахождения буя в 100 милях к югу от Марселя.

При разработке прогностической схемы нами использовались общие соотношения, приведенные в § 21—23. Основные этапы исследований: разработка прогностической модели, учитывающей динамику профиля температуры и использующей фактические наблюдения для коррекции ошибок прогноза; оценка точности численной схемы прогноза в зависимости от ряда факторов; оценка сходимости итерационного алгоритма предсказания и др.

Осуществим последовательный анализ наблюдений температурного профиля моря на основе предсказания корреляционной матрицы ошибок и оптимальной интерполяции их значений. Такой метод решения задачи прогноза был реализован И. Е. Тимченко и В. Д. Яриным [85]. Из-за сложности вычислительного алгоритма, описывающего вертикальное распределение температуры в море, они использовали простейшую линейную модель распределения тепла по вертикали в море: не учитывались адвекция тепла и горизонтальный турбулентный обмен, а также инерционные колебания поля скорости течений в Лионском заливе и связанные с ними изменения термической структуры верхнего слоя моря.

Эти недостатки математической модели должны были компенсироваться текущей информацией, содержащейся в измерениях вертикального профиля температуры. Подобная компенсация, как отмечалось выше, характерна для метода последовательного анализа данных. Исследование связи между степенью упрощения модели поля и объемом используемой текущей информации представляет самостоятельный интерес и может проводиться только экспериментальным путем. Оценка качества прогноза вертикального распреде-

ления температуры при грубой модели поля — также одна из целей настоящего исследования.

Идентификация модели вертикального распределения температуры в море. Вертикальное распределение температуры в море можно описать общим уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + F(z) + f_0(z), \quad (25.1)$$

в котором T — температура; x, y, z — пространственные координаты; v_x, v_y, v_z — компоненты скорости течений; K_x, K_y, K_z — коэффициенты турбулентного обмена теплом; $F(z)$ — детерминированная функция, характеризующая приток тепла по вертикали; $f_0(z)$ — случайная функция типа белого шума (вводится для описания разнообразных неучтенных тепловых явлений, а также ошибок определения величин, входящих в уравнение (25.1)). Упростим уравнение, имея в виду особенности гидрологического режима Лионского залива.

В период проведения измерений на бую-лаборатории, результаты которых были использованы для расчетов, в Лионском заливе наблюдались штилевые условия. Дрейфовых течений не было, что позволяет пренебречь влиянием адвекции и опустить соответствующие члены в уравнении (25.1). Из-за незначительного влияния горизонтального перемешивания на вертикальное распространение тепла [24], в уравнении (25.1) могут также быть опущены члены, содержащие K_x, K_y . Член $F(z)$ может быть записан в виде [85]

$$F(z) = \frac{1-A}{c\rho} I_0 e^{-\beta z},$$

где A — альбеда; c, ρ — теплоемкость и плотность морской воды; I_0 — инсоляция; β — коэффициент поглощения солнечной радиации.

Величина I_0 была вычислена в зависимости от времени суток по номограммам, приведенным в работе [24], а коэффициент β принят равным 0,1.

С учетом изложенного перепишем уравнение (25.1) в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \frac{1-A}{c\rho} I_0(t) e^{-\beta z} + f_0(z). \quad (25.2)$$

Сформулируем начальные и граничные условия задачи. Будем считать, что температура на поверхности моря задана функцией $\mu(t)$, а на нижнем горизонте (60 м) она сохраняется неизменной. Вертикальное распределение температуры в начальный момент времени известно. Тогда начальные и граничные условия принимают вид

$$T(0, t) = \mu(t),$$

$$T(l, t) = \text{const},$$

$$T(z, 0) = T(z).$$

В уравнении (25.2) необходимо определить коэффициент вертикального турбулентного обмена теплом $K(z)$.

Для этого проинтегрируем уравнение в пределах от z до l , где $l = 60$ м — глубина, на которой значения температуры остаются практически постоянными за все время наблюдений.

$$\int_z^l \frac{\partial T}{\partial z} dz = K(z) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z + \frac{1-A}{c\rho} I_0 \int_z^l e^{-\beta z} dz + \int_z^l f_0(z) dz. \quad (25.3)$$

Чтобы уменьшить влияние имеющих в измерениях ошибок, осредним (25.3) за весь период наблюдений θ . Так как среднее значение f_0 по θ полагаем равным нулю, то соответствующий член в осредненном уравнении пропадает:

$$\frac{1}{\theta} \int_0^\theta K(z) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z dt = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \int_z^l \frac{\partial T}{\partial z} dx dt - \frac{1-A}{c\rho} \int_0^\theta I_0 \int_z^l e^{-\beta z} dz dt.$$

Пользуясь теоремой о среднем, заменим левую часть уравнения выражением

$$K^*(z) \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z dt,$$

где $K^*(z)$ — некоторое среднее значение в интервале $[0, \theta]$. Замечая, что первый член в правой части пренебрежимо мал по сравнению со вторым, найдем выражение для определения $K(z)$:

$$K(z) = \frac{\frac{1-A}{c\rho} I_0 \frac{1}{\beta} (e^{\beta l} - e^{-\beta l})}{\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \Big|_z} \quad (25.4)$$

(черта сверху означает осреднение по времени).

Алгоритм последовательного анализа. Вертикальный профиль температуры $T(z, 0)$, используемый в качестве начальных условий при прогнозировании, восстанавливается путем интерполяции по измерениям температуры на дискретных горизонтах и потому содержит неизбежные ошибки. В свою очередь граничные условия также не могут быть известны точно и прогнозируются на будущие моменты времени с погрешностями. Кроме того, в уравнение (25.2) входит случайная функция $f_0(z)$.

Поэтому для прогноза профиля температуры на практике вместо (25.2) необходимо использовать уравнение

$$\frac{\partial \hat{T}(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial \hat{T}(z, t)}{\partial z} \right] + \frac{1-A}{c\rho} I_0(t) e^{-\beta z} \quad (25.5)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}\hat{T}(z, 0) &= T(z, 0) + \delta T(z, 0), \\ \hat{T}(0, t) &= \mu(t) + \delta\mu(t), \\ \hat{T}(l, t) &= \text{const},\end{aligned}\tag{25.6}$$

где $T(z, t)$ — оценка истинного значения поля; $T(z, 0)$ — неизвестное истинное значение температурного профиля в начальный момент времени; $\delta T(z, 0)$ — ошибка интерполяции $T(z, 0)$ с дискретных горизонтов; $\delta\mu(t)$ — ошибка прогноза температуры на поверхности моря. Будем полагать, что

$$E\{\delta\mu(t)\} = E\{\delta T(z, 0)\} = E\{f_0(z)\} = 0.$$

Уравнение (25.5) приближенно описывает динамику вертикального распределения температуры в море. Прогноз значений температуры, основанный на использовании уравнений (25.5), (25.6), будет содержать значительные погрешности. Чтобы компенсировать эти погрешности в соответствии с методом последовательного анализа, введем в рассмотрение текущие ошибки предсказания температуры в тех точках профиля, где производятся наблюдения:

$$\delta T(z_k, t_1) = T(z_k, t_1) - \hat{T}(z_k, t_1).$$

Для получения $\delta(z, t_1)$ в остальных точках необходимо выполнить интерполяцию.

Допустим, что случайные возмущения $f(z, t)$ и ошибки в начальных и граничных условиях распределены по нормальному закону. Тогда в силу линейности уравнения (25.5) $\delta T(z, t)$ — будут также величины Гаусса. Для случайных функций Гаусса наилучшей интерполяционной формулой является линейная комбинация известных значений, веса которой определяются из условия минимума дисперсии ошибки.

Известно, что истинные значения функции $T(z, t)$ должны быть ортогональны к ошибкам интерполяции [124]

$$E\{T(z, t), T(z_k, t_1)\} = 0.$$

Следовательно, ошибки интерполяции (прогноза) $\delta T(z_k, t_1)$ содержат всю новую информацию относительно истинного значения поля в момент t_1 , когда поступают «свежие» измерения поля.

Для коррекции ошибок предсказания в момент времени t_1 необходимо выполнить оптимальную интерполяцию в поле ошибок прогноза и добавить результаты интерполирования к оценкам поля $T(z, t_1)$. Это возможно, если известна статистика поля ошибок прогноза, в будущие моменты времени. Как отмечалось, метод адаптивной фильтрации Калмана позволяет устанавливать рекурсионные соотношения, связывающие значения корреляционной функции поля ошибок прогноза для текущего и будущего момента времени.

Чтобы определить корреляционную функцию поля ошибок $P(z, v)$, введем сначала уравнение, которому удовлетворяет ошибка прогноза $\delta T(z, t)$. Для этого вычтем из (25.2) выражение (25.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\delta T(z, t)]}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial [\delta T(z, t)]}{\partial z} \right] + f_0(z, t), \\ \delta T(z, 0) &= \delta T^0(z, 0), \\ \delta T(0, t) &= \delta \mu(t), \\ \delta T(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (25.7)$$

Преобразуем (25.7) к нулевым однородным граничным условиям, введем функции $Y(z, t) = -z/l \delta \mu(t)$. Тогда уравнение для новой функции $W(z, t) = \delta T(z, t) - Y(z, t)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial W(z, t)}{\partial z} \right] + f_0(z, t) - \frac{\partial Y(z, t)}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial Y(z, t)}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (25.8)$$

$$W(z, 0) = \delta T(z, 0) - Y(z, 0), \quad W(0, t) = W(l, t) = 0$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial W(z, t)}{\partial z} \right] + f_1(z, t), \\ \frac{\partial Y(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial Y(z, t)}{\partial z} \right] + f_2(z, t), \\ f_1(z, t) + f_2(z, t) &= f_0(z, t). \end{aligned} \quad (25.9)$$

Используя (25.9) и выражение для производной от корреляционной функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E \{ W(z, t), W(v, t) \} &= P_1(z, v) = \\ &= E \left\{ \frac{\partial W(z, t)}{\partial t} W(v, t) \right\} + E \left\{ W(z, t) \frac{\partial W(v, t)}{\partial t} \right\}. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Найдем уравнение для $P_1(z, v, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(z, v, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial P_1(z, v, t)}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[K(v) \frac{\partial P_1(z, v, t)}{\partial v} \right] + \\ &+ Q_{11}(z, v), \\ P_1(z, v, 0) &= E \{ W(z, 0) W(v, 0) \}, \\ P_1(0, 0, t) &= P_1(l, l, t) = 0. \end{aligned} \quad (25.11)$$

Здесь

$$Q_{ij} = E \{ f_i(z, t); f_j(v, t) \}.$$

Найдем, далее, выражение для $Q_{11}(z, v, t)$:

$$Q_{11}(z, v, t) = Q_{00}(z, v, t) - 2Q_{02}(z, v, t) + Q_{22}(z, v, t).$$

Так как ошибка прогноза граничных условий не коррелирована с $f_0(z, t)$, имеем $Q_{02}(z, v, t) \equiv 0$:

$$Q_{22}(z, v, t) = E \left\{ \left[\frac{\partial K(z)}{\partial z} \frac{\delta \mu(t)}{l} - \frac{z}{l} \frac{\partial(\delta \mu)}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial K(v)}{\partial v} \frac{\delta \mu(t)}{l} - \frac{v}{l} \frac{\partial(\delta \mu)}{\partial t} \right] \right\} = \frac{zv}{l^2} \frac{\partial^2 R(t, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{l^2} \left[v \frac{\partial K(z)}{\partial z} + z \frac{\partial K(v)}{\partial v} \right] \frac{\partial R(t_1, t_2)}{\partial t} + \\ + \frac{\partial K(z)}{\partial z} \frac{\partial K(v)}{\partial v} \frac{1}{l^2} R(t, t), \\ R(t, t_2) = E \{ \delta \mu(t_1), \delta \mu(t_2) \}.$$

Выбором численной схемы решения уравнения (25.9) определяется некоторая (переходная) матрица A , которая позволяет приближенно определять по вектору начальных значений в моменты t_0 значение корреляционной функции в момент $t_1 = t_0 + \Delta t$. Точность определения зависит от шага Δt .

Запишем конечно-разностное соотношение для нахождения P_1 :

$$P_1(z, v, t_1) = AP_1(z, v, t_0)A^T + Q(z, v, t_0). \quad (25.12)$$

В выражении (25.12) величины z и v принимают значения, определяемые шагом расчетной сетки.

Таким образом, алгоритм последовательного анализа данных заключается в следующем:

1. Из численного решения уравнения (25.5) находится оценка $\hat{T}(z, t_1)$ температурного профиля на момент t_1 ;

2. Параллельно из равенства (25.12) определяется корреляционная функция ошибки $P_1(z, v, t)$;

3. В момент поступления новых данных $t = t_1$ вычисляется ошибка прогноза в точках z_k ; $\delta T(z_k, t_1) = T(z_k, t_1) - \hat{T}(z_k, t_1)$;

4. Производится коррекция прогноза за счет информации, содержащейся в поступивших в момент времени t_1 измерений.

Оптимальная оценка $\tilde{T}(z, t_1)$ с учетом новых данных выражается формулой

$$\tilde{T}(z, t_1) = \hat{T}(z, t_1) + \sum_{k=1}^N \Delta_k(z, t_1) W(z_k, t_1) + Y(z, t). \quad (25.13)$$

Весовые функции Δ_k в формуле (25.13) определяются через корреляционную функцию P_1 из системы уравнений

$$\Delta_k(z, t_1) = \sum_{n=1}^N [K^{-1}(t_1)]_{nk} P_1(z_k, z), \quad (25.14)$$

где N — число измерений поля; $K^{-1}(t_1)$ — обратная матрица от корреляционной матрицы, образованной из значений функции корреляции в точках измерений поля;

5. Корреляционная матрица ошибки корректируется в соответствии с формулой

$$\tilde{P}_1(z, v, t_1) = P_1(z, v, t_1) - \sum_{k=1}^N P_1(z_k, v, t) \Delta_k(z, t), \quad (25.15)$$

где \tilde{P}_1 — исправленное значение корреляционной функции P в связи с поступлением новых измерений;

6. Процесс обработки данных повторяется последовательно во времени в течение каждого временного интервала между моментами получения новой информации. В качестве начальных данных для уравнения (25.5) используется оптимальная оценка (25.13), а величины P_1 служат начальными условиями для решения уравнения (25.12).

Корреляционную матрицу $Q(z, v)$, характеризующую возбуждение, поступающее на вход линейной динамической системы с переходной матрицей A , можно найти из уравнения

$$Q(z, v) = P_1(z, v) - AP_1(z, v)A^T. \quad (25.16)$$

Матрица Q определяет величину энергии случайных флуктуаций температуры $\hat{f}(z, t)$, обусловленных погрешностями моделирования исследуемого физического поля, и находится через корреляционную функцию этого поля.

Результаты прогнозирования вертикального распределения температуры в Лионском заливе. В соответствии с приведенным алгоритмом последовательного анализа наблюдений температуры, выполненных на французском буе-лаборатории, была составлена программа обработки данных на ЭВМ М-220М. Для упрощения расчетов в качестве граничных значений на поверхности брались фактические измерения температуры, которые были известны с интервалом в 5 мин. Прогноз граничных условий осуществлялся методом фильтра Калмана.

Прогноз температурного профиля был выполнен с заблаговременностью в 1, 2, 3, 4, 5 и 6 ч. На каждом шаге последовательно анализа на АЦПУ выводились графики весовых функций, оценки температуры $\hat{T}(z, t_1)$ по уравнению (25.5), откорректированные оценки $\tilde{T}(z, t_1)$, фактические измерения поля $T(z_k, t)$, а также величины ошибок прогноза для горизонтов 5, 10, 15, 20 и 30 м.

На рис. 46 показаны результаты предсказания профилей вертикального распределения температуры с упреждением по времени, составлявшем 1—6 ч. Как следует из рисунка, степень совпадения результатов прогноза с фактическими наблюдениями можно признать хорошей. Среднее значение среднеквадратичной ошибки предсказания случайной составляющей профиля возрастало по мере увеличения заблаговременности прогноза. Например, при прогнозировании температуры на глубине 5 м на 1 ч вперед ошибка имела величину 0,2, тогда как при заблаговременности прогноза 6 ч

она составила 0,6 дисперсии случайной составляющей профиля температуры на этом горизонте.

Исследование сходимости итерационного алгоритма последовательного анализа к устойчивому состоянию показало, что весовые функции фильтрации практически достигают асимптотически устойчивых значений уже на 5—7 шаге итераций. На рис. 47 приведены графики весовых функций, полученные путем решения си-

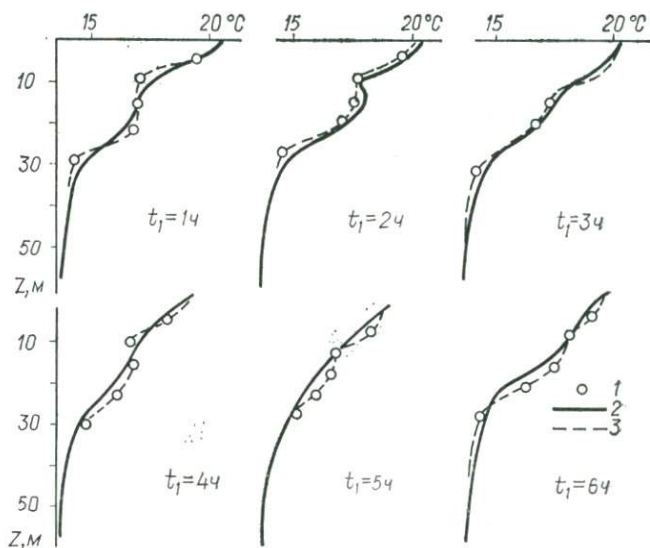


Рис. 46. Примеры прогнозирования профилей температуры в верхнем слое моря на 1—6 ч вперед.

Значения: 1 — измеренные, 2 — прогностические; 3 — результаты последовательного анализа.

стемы уравнений (25.14). Устойчивое состояние алгоритма последовательного анализа считалось достигнутым, когда максимальное значение разностей между весовыми функциями на двух последовательных шагах итераций не превышало величины 0,01. Расчеты показали, что скорость сходимости алгоритма почти не зависит от заблаговременности прогнозирования при интервалах упреждения 1—6 ч.

На основании анализа ошибок прогнозов сделан вывод о том, что использованная в работе упрощенная динамическая модель распределения температуры моря с глубиной может эффективно применяться в алгоритме последовательного анализа для предсказания профилей температуры на 1—6 ч вперед. Из-за сильных временных корреляционных связей на таких интервалах прогнозирования текущая информация (одиночные измерения профиля температуры на пяти дискретных горизонтах) оказывается достаточной, чтобы компенсировать погрешности динамической модели.

При увеличении заблаговременности до 5—6 ч ошибки предсказания становятся сравнимыми по величине с дисперсией флуктуаций температуры на среднем по глубине горизонте (15 м). Для больших интервалов времени при неизменном объеме текущей информации динамическое уравнение (25.5) следует уточнять. Другой путь повышения качества прогноза состоит в уменьшении дискретности измерений по вертикали.

Как показывают результаты расчетов, выбранная для прогнозирования вертикального профиля температуры математическая модель температурного поля позволила реализовать на ЭВМ метод

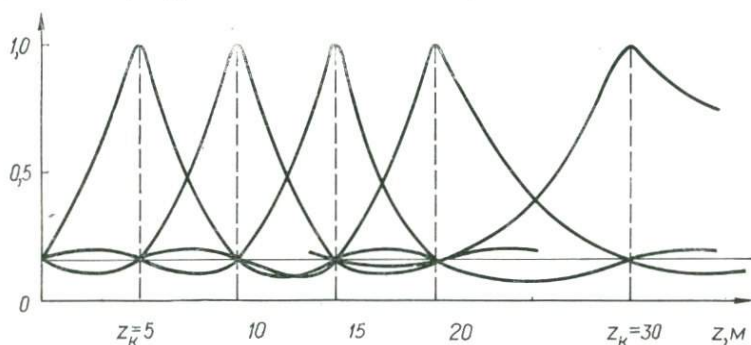


Рис. 47. Весовые функции последовательного анализа температурных профилей.

последовательного анализа океанографических наблюдений. Полученный алгоритм обработки информации осуществляет прогноз вертикального профиля температуры с относительно высокой точностью на 1—6 ч вперед. В ходе расчетов удалось исследовать сходимость фильтра к устойчивому состоянию и оценить границы применимости упрощенного динамического уравнения поля температуры.

Полученные результаты свидетельствуют о большой перспективности применения метода последовательного анализа данных в океанографических информационных системах, создаваемых для прогнозирования физических полей океана по материалам наблюдений.

§ 26. Моделирование и прогноз вертикального распределения температуры моря в экспедиционных условиях

В качестве детерминированной части прогностической схемы в § 25 использовалось уравнение турбулентной теплопроводности в простейшей форме (без учета адвективных членов и горизонтального турбулентного обмена). Погрешности модели компенсировались текущей информацией о профиле, усваиваемой в ходе вычислений.

Дальнейшее развитие такого подхода к прогнозу профилей температуры состоит в разработке динамико-стохастической модели, включающей в себя идентификацию в общем случае неизвестных коэффициентов уравнений, используемых при прогнозе.

Попытка осуществить идентификацию динамико-стохастической модели переноса тепла в верхнем слое моря представляет особый интерес в связи с задачей последовательного анализа вертикального температурного профиля в реальном масштабе времени, т. е. непосредственно в экспедиционных условиях. Ввод данных в судовую ЭВМ и их обработка в реальном времени, как уже отмечалось, составляют основу системного подхода к проблеме автоматизации океанографических исследований. Для решения проблемы следует учитывать ограниченный объем памяти и малое быстродействие существующих в настоящее время ЭВМ на научно-исследовательских судах. Поэтому экспедиционные условия налагают определенные ограничения на численные модели, применяемые для прогноза океанологических явлений.

Идентификация модели. Для последовательного прогнозирования вертикальных профилей температуры необходимы измерения профилей, осуществляемые обычно с борта научно-исследовательского судна. Летом в 1976 г. в Генуэзском заливе Средиземного моря экспедицией на нис «Академик Вернадский», выполнявшей исследования по советско-французской программе «Cofrasov-II», была проведена многосуточная станция, в ходе которой получены вертикальные профили температуры с интервалом времени 30 мин.

По ряду наблюдений температуры на различных горизонтах в течение первых суток проведения многосуточной станции был идентифицирован переменный с глубиной коэффициент вертикальной турбулентной теплопроводности, затем выполнен прогноз вертикального распределения температуры верхнего слоя моря с оптимальным усвоением текущих измерений (последовательный анализ).

В качестве прогностического уравнения для вертикального распределения температуры в верхнем слое моря было использовано выражение (25.2) [85]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \frac{1-A}{c\rho} I(t) e^{-\beta z} \quad (26.1)$$

с граничными условиями

$$T(0, t) = \mu_1(t),$$

$$T(L, t) = \mu_2(t),$$

где T — температура; z — вертикальная координата; A — альбедо; c, ρ — теплоемкость и плотность морской воды; β — коэффициент поглощения солнечной радиации; I — интенсивность солнечной радиации.

Выбор такой простой модели для решения поставленной задачи обуславливается несколькими причинами. Во-первых, теория динамики верхнего слоя к настоящему времени недостаточно разрабо-

тана. Во-вторых, основной акцент в данном исследовании был поставлен на отработку методики идентификации модели и проведения последовательного анализа в условиях экспедиции. С другой стороны, уравнение (26.1) при определенных условиях [85], которые приблизительно выполнялись во время проведения эксперимента, дает удовлетворительные результаты в тех слоях моря, где нет больших градиентов температуры.

Введем в рассмотрение l -мерные векторные величины $\vec{T}(t)$ и $\vec{F}(t)$, компонентами которых являются значения соответствующих функций в точках $z = z_k$ ($k = 0, 1, \dots, l$). Тогда будет иметь место приближенное векторное равенство

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = A \cdot \vec{T}(t) + \vec{F}(t), \quad (26.2)$$

в котором матрица A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{k_1 + k_0}{h_1^2} & \frac{k_1}{h_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{k_1}{h_1^2} - \frac{k_1 + k_2}{h_1^2} & \frac{k_2}{h_2^2} & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \left[\frac{k_{l-2} - k_{l-1}}{h_{l-1}^2} + \frac{2k_1}{h_{l-1}(h_l + h_{l-1})} \right] & \left[\frac{k_{l-1} - k_{l-2}}{h_{l+1}^2} - \frac{2k_{l-1}}{h_{l-1}h_l} \right] & & \end{pmatrix}, \quad (26.3)$$

где k_i — пока неопределенные коэффициенты,

$$h_i = z_i - z_{i-1}.$$

Известно, что решением (26.2) является

$$\vec{T}(t) = \Phi(t, t_0) \vec{T}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \cdot \vec{F}(\tau) d\tau, \quad (26.4)$$

где

$$\Phi(t, t_0) = e^{-A(t-t_0)} \quad (26.5)$$

переходная матрица состояния системы (26.2). Разлагая (26.5) в ряд Тейлора и ограничиваясь членами первого порядка малости, переписем (26.4) в виде:

$$\begin{aligned} \vec{T}(t_n) &= [I + A\Delta t] \vec{T}(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (I + A\Delta t) F(\tau) d\tau \approx \\ &\approx [I + A\Delta t] \vec{T}(t_{n-1}) + \vec{F}(t_{n-1}) \Delta t, \end{aligned} \quad (26.6)$$

где

$$t_{n-1} = t_0; \quad t_n = t; \quad \Delta t = t_n - t_{n-1}.$$

Или, вводя обозначения $[I + A\Delta t] = A_0$ и $\vec{F}\Delta t = \vec{F}$, получим

$$\vec{T}(t_n) = A_0\vec{T}(t_{n-1}) + \vec{F}(t_{n-1}). \quad (26.7)$$

Таким образом, задача идентификации свелась к определению матрицы A_0 , для нахождения которой воспользуемся методом стохастической аппроксимации [73]. В соответствии с этим оценка матрицы A_0 дается следующим рекуррентным выражением

$$\begin{aligned} A_k^0 &= A_{k-1}^0 + \rho_k \sum_{i=k-1}^k [\vec{T}_i - (\hat{A}_{k-1}^0 \vec{T}_{i-1} + \vec{F}_{i-1})] \vec{T}_{i-1}^T = \\ &= \hat{A}_{k-1}^0 + \rho_k \sum_{i=k-1}^k [\vec{T}_i \vec{T}_i^T - (\hat{A}_{k-1}^0 \vec{T}_{i-1} \vec{T}_{i-1}^T + \vec{F}_{i-1} \vec{T}_{i-1}^T)], \end{aligned} \quad (26.8)$$

где \hat{A}_k^0 — оценка матрицы A_0 через k шагов; ρ_k — весовые коэффициенты, удовлетворяющие условию сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2$ и сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k$.

Как видим из (26.8), первое условие означает, что дисперсия оценки при увеличении k стремится к нулю, второе условие необходимо, чтобы на оценку матрицы \hat{A}_k^0 влияло достаточное количество последовательных измерений.

На рис. 48 для примера приведены оценки коэффициентов турбулентной теплопроводности для глубин 7,5 и 2,5 м в зависимости от числа итераций. Через 10—12 итераций последовательные оценки коэффициентов начинают колебаться с небольшой амплитудой около некоторого среднего уровня, который и принимался за искомые значения коэффициента турбулентной теплопроводности на соответствующих глубинах. Вертикальный ход коэффициента турбулентной теплопроводности, вычисленный в соответствии с изложенным методом, приведен на рис. 49.

Эти значения были использованы затем при проведении последовательного анализа наблюдения температуры в следующий период.

Численный алгоритм прогнозирования профилей температуры. Истинная эволюция температурного профиля во времени может быть представлена уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + I_0 I^{-\beta z} + f(z, t), \\ T(z, 0) &= \varphi(z) + \tilde{\varphi}(z), \\ T(0, t) &= \mu_1(t) + \tilde{\mu}_1(t), \end{aligned} \quad (26.9)$$

$$T(l, t) = \mu_2(t) + \tilde{\mu}_2(t),$$

$$I_0 = \frac{1-A}{c\rho} l.$$

В нем члены $f(z, t)$, $\tilde{\varphi}(z)$, $\tilde{\mu}_1(t)$, $\tilde{\mu}_2(t)$ отражают вклад неучитываемых в данной упрощенной модели факторов, а также погрешнос-

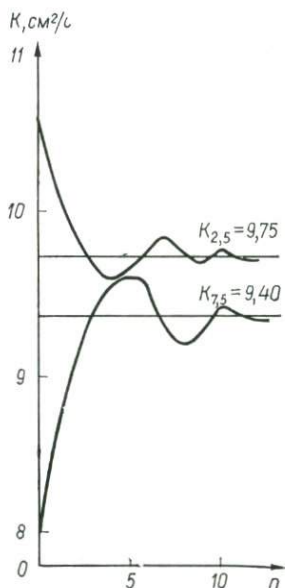


Рис. 48. Идентификация коэффициентов турбулентной теплопроводности.

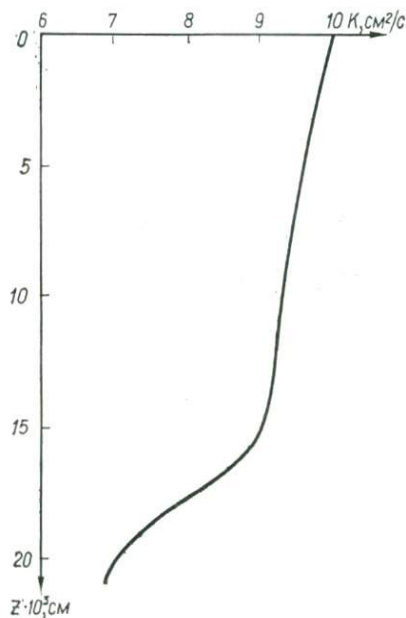


Рис. 49. Вертикальный профиль коэффициента турбулентной теплопроводности.

ти в определении начальных и граничных условий. Значения этих величин являются случайными функциями времени и глубины.

Представим, что они нормально распределены и что справедливы следующие условия:

$$E \{f(z, t)\} = E \{\tilde{\varphi}(z)\} = E \{\tilde{\mu}_1(t)\} = E \{\tilde{\mu}_2(t)\} = 0,$$

$$E \{f(z, t_i) f(y, t_k)\} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ Q(z, y) & \text{при } i = k, \end{cases}$$

где $E \{ \cdot \}$ — символ математического ожидания. Прогноз температуры осуществляется по уравнению

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right] + I_0 l^{-\beta z},$$

$$\hat{T}(z, 0) = \varphi(z), \quad (26.10)$$

$$\hat{T}(0, t) = \mu(t),$$

$$\hat{T}(l, t) = \text{const.}$$

Температура на поверхности на последующие моменты времени рассчитывалась с помощью фильтра Калмана по формуле

$$\tilde{T}^{j+1} = F' \tilde{T}^j, \quad (26.11)$$

где

$$\tilde{T}^j = \begin{Bmatrix} T^{j-1} \\ T^j \end{Bmatrix}, \quad F' = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0,365 & 1,364 \end{vmatrix} \text{ — переходная}$$

матрица фильтра, найденная по методу, изложенному в работе [82]. В системе (26.10) величина \hat{T} является условным относительно прошлых измерений математическим ожиданием. Как известно (например, [98]), условное математическое ожидание случайной функции Гаусса является оптимальной оценкой величины функции по среднеквадратичному критерию.

Если в некоторый момент времени t были получены новые измерения случайной функции в некоторых точках, то для улучшения оценки необходимо определить математическое ожидание, условное относительно новых измерений. Определенное методом последовательного анализа оно равно сумме прогностических величин на этот момент времени, найденных с помощью решения уравнения (26.10), и результатов оптимальной интерполяции невязок между прогностическими значениями в точках измерений и измерениями.

Оптимальные весовые функции интерполяции находятся в зависимости от ковариационной функции ошибок прогноза. Выведем уравнение, описывающее эволюцию ковариационной функции ошибок. Вычитая (26.9) из (26.10), получим выражение для ошибки прогноза

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right] + f,$$

$$\tilde{T}(z, 0) = \tilde{\varphi}(z),$$

$$\tilde{T}(0, t) = \tilde{\mu}_1(t) = \tilde{\mu}(t), \quad (26.12)$$

$$\tilde{T}(l, t) = 0.$$

Приведем систему (26.12) к однородным граничным условиям.

Для этого введем вспомогательную функцию $u = \tilde{T} - \left(1 - \frac{z}{l}\right) \mu(t)$.

Для нее будет справедливо уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial z} - c \frac{\partial \mu}{\partial t} + f - \frac{\alpha}{l} \mu,$$

$$\begin{aligned} u(z, 0) &= \bar{\varphi}(z), \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \end{aligned} \quad (26.13)$$

где l — толщина рассматриваемого слоя,

$$\begin{aligned} c(z) &= \left(1 - \frac{z}{l}\right), \\ \alpha &= \frac{\partial K(z)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Представим (26.13) в разностном виде

$$\begin{aligned} \frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t} &= K(z) \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{(\Delta z)^2} + \alpha \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta z} - \\ &- c(z) \frac{\mu^{j+1} - \mu^j}{\Delta t} - \frac{\alpha}{l} \mu^j + f, \end{aligned} \quad (26.14)$$

где $\Delta t, \Delta z$ — шаги по времени и глубине соответственно.

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \frac{K(z) \cdot \Delta t}{\Delta z^2} &= a, \quad \frac{\alpha \Delta t}{\Delta z} = b, \quad (1 - 2a - b) = g, \\ (a + b) &= d, \quad \left(c - \frac{\alpha \Delta t}{l}\right) = \beta, \end{aligned}$$

получим из (26.14)

$$u_i^{j+1} = gu_i^j + du_{i+1}^j - a_{i-1}^j u_{i-1}^j - c\mu^{j+1} - \beta\mu^j + f\Delta t \quad (26.15)$$

или в векторных обозначениях

$$\vec{u}^{j+1} = \Phi \vec{u}^j - \vec{c}\mu^{j+1} + \vec{\beta}\mu^j + \vec{f}\Delta t, \quad (26.16)$$

где компонентами векторов являются значения соответствующих величин в узлах сетки ($i = 1, 2, \dots, M$; M — число узлов), а матрица имеет следующий вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & g & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & g & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a & g & d \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (26.17)$$

Тогда ковариационная матрица $P_{i,j}^{j+1}$ функции $u(z)$ в момент времени t^{j+1} вычисляется через ее значения на предыдущем временном шаге t^j с помощью выражения

$$P_{i,k}^{j+1} = E \{ \vec{u}^{j+1} (\vec{u}^{j+1})^T \} = E \{ [\Phi \vec{u}^j - \vec{c}\mu^{j+1} + \vec{\beta}\mu^j + \vec{f}\Delta t] [\Phi^T \vec{u}^j -$$

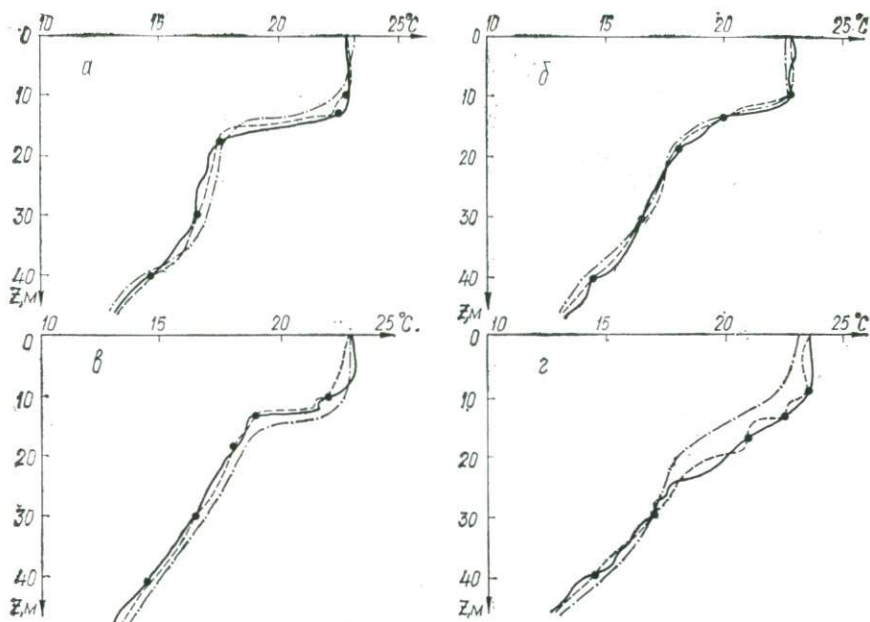


Рис. 50. Примеры прогнозирования вертикальных профилей температуры: результирующие (штрих-пунктир), истинные (сплошные линии), результаты последовательного анализа для различных моментов усвоения данных (пунктир); а — 2 ч; б — 6 ч 30 мин; в — 11 ч 30 мин; г — 15 ч 30 мин.

$$-\vec{c}^T \mu^{j+1} + \vec{\beta}^T \mu^j + \vec{f}^T \Delta t] \approx \Phi P_{ik}^j \Phi^T + R_{\mu_{jj}} (\vec{\beta} \vec{\beta}^T - \vec{c} \vec{c}^T) - R_{\mu_{j,j+1}} (\vec{c} \vec{\beta}^T + \vec{\beta} \vec{c}^T) + \Delta t Q_{i,k}.$$

Здесь $R_{\mu_{kl}}$ — матрица ковариаций ошибок прогноза граничных условий $R_{\mu}^{j+1,j} = F R_{\mu}^{j,j}$, $R_{\mu}^{j+1,j+1} = F R_{\mu}^{j,j} F^T + Q_{0,0}$.

Для определения ковариационной матрицы возбуждения $Q_{i,k}$ воспользуемся тем, что при постоянных Φ , F и Q при отсутствии новых измерений при $t \rightarrow \infty$ ковариационная матрица ошибки прогноза стремится к ковариационной матрице самого поля, а ковариационная матрица ошибки прогноза граничных условий — к ковариационной матрице K поверхностной температуры.

Учитывая, что

$$P_{i,k} = E \{u_i u_k^T\} = \{[\tilde{T} - \tilde{c}\mu] [\tilde{T} - \tilde{c}\mu]^T\} = K_{ik} - \vec{c} \vec{c}^T K_{ij}^j,$$

получим выражение для Q_{ik}

$$Q_{ik} = K_{ik} - \vec{c} \vec{c}^T K_{ij}^j - \Phi [K_{ik} - \vec{c} \vec{c}^T K_{ij}^j] \Phi^T - K_{ij}^j (\vec{\beta} \vec{\beta}^T - \vec{c} \vec{c}^T) + K_{ij}^{j-1} (\vec{c} \vec{\beta}^T + \vec{\beta} \vec{c}^T).$$

Результаты применения метода в экспедиционных условиях. Для идентификации параметров модели, описывающей эволюцию вертикального профиля температуры, и проведения последовательного анализа данных, поступающих с измерительного комплекса «Исток», был составлен комплекс программ для судовой ЭВМ «Минск-32». Для расчета использовались данные, полученные при зондировании верхнего слоя моря измерительным комплексом «Исток» в Генуэзском заливе в период с 8 по 11 июля (всего 45 зондирований).

Первичные данные обрабатывались по стандартной программе СВЦ «Минск-32» для перевода кодов, полученных на перфоленте с выходного перфоратора прибора, в численные значения измеряемых параметров.

Комплекс «Исток» давал отсчеты температуры с интервалом по глубине в 1 м. При проведении последовательного анализа использовались лишь некоторые из них. Тем самым имитировалось измерение температуры приборами, подвешенными на тросе на фиксированных горизонтах. Остальные измерения служили для контроля точности прогноза и последовательного анализа. Количество и расположение используемых при анализе точек варьировалось.

На рис. 50 в качестве примера приведены результаты последовательного анализа, выполненного 9 июля 1976 г. На этих графиках сплошными кривыми показаны истинные температурные профили, штрих-пунктирными — результаты прогноза по уравнению и пунктирными кривыми — результаты последовательного анализа. Новые данные выбирались в 2 ч 30 мин, 6 ч 30 мин, 11 ч 30 мин, 15 ч 30 мин и в 19 ч 30 мин на горизонтах, отмеченных точками.

Установившиеся весовые функции приведены на рис. 47. Установление имеет место, так как при расчетах выборка данных производилась через равные интервалы времени на одних и тех же гори-

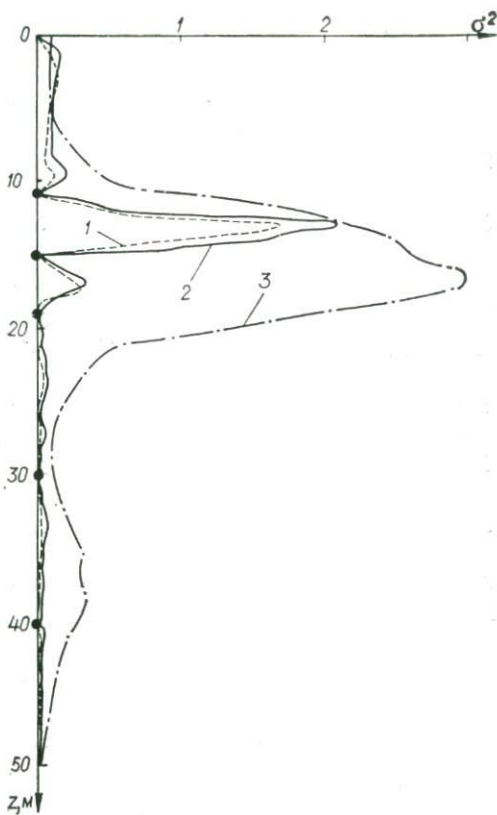


Рис. 51. Дисперсии ошибок последовательного анализа как функции глубины.

зонах. В этом случае достигается большая экономия машинного времени потому, что расчет ковариационной функции ошибок прогноза и весовых функций последовательного анализа, занимающий большую часть времени (40 из 50 мин при прогнозе на 4 ч), следует производить лишь один раз на первом шаге итераций.

Кривые дисперсий ошибок последовательного анализа (рис. 51) рассчитывались при временах заблаговременности прогноза, равных 2 ч (пунктирная линия) и 4 ч (сплошная линия). Выборка новых данных производилась на горизонтах 9, 13, 17, 30, 40 м и 11, 15, 19, 30, 40 м. Штрих-пунктирная кривая на этих графиках показывает поведение дисперсии температуры на соответствующих горизонтах в рассматриваемый период времени.

Результаты расчетов показали, что выбранная для прогнозирования вертикального распределения температуры математическая модель температурного поля позволила реализовать в экспедиционных условиях метод последовательного анализа наблюдений температуры с предварительной идентификацией параметров модели во время проведения многосуточной станции в Генуэзском заливе.

На основании анализа ошибок сделан вывод о том, что использованная для прогноза температурного профиля упрощенная математическая модель может применяться в алгоритме последовательного анализа в рассматриваемых условиях при интервале упреждения, равном 4—5 ч.

Как видно из рис. 51, ошибка последовательного анализа резко возрастает в интервале глубин 10—20 м, т. е. в слое максимального градиента температуры. Для увеличения срока заблаговременности прогноза необходимо использовать модели, которые учитывали бы особенности динамики термоклина.

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ПЛАНИРОВАНИЮ
ОКЕАНОГРАФИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ§ 27. Измерение океанографических процессов
в связи с использованием методов
адаптивной фильтрации

В главе II рассматривалась теория фильтра Калмана в приложении к задачам обработки временных рядов океанографических наблюдений. Как отмечалось, временному ряду наблюдений соответствует некоторая линейная динамическая система, состояния которой включают в себя по определенному правилу последовательность измерений процесса. Качество работы системы, или, что одно и то же, ошибки фильтрации и предсказания процесса, оценивается величиной ковариационной матрицы

$$P_k = E \{(\hat{x}_k - \bar{x}_k)^T (\hat{x}_k - \bar{x}_k)\}. \quad (27.1)$$

Матрица P_k должна зависеть от количества измерений процесса, входящих в вектор начального состояния системы \bar{x}_0 , и от интервала Δ между измерениями

$$\Delta_k = \bar{z}_k - \bar{z}_{k-1}. \quad (27.2)$$

Нахождение зависимости ошибки фильтрации от количества использованных измерений процесса может быть организовано программным путем одновременно с моделированием процесса на ЭВМ. Обычно число измерений совпадает по величине с порядком уравнения динамики (7.1). Поскольку фильтр Калмана быстро сходится к устойчивому состоянию, для адаптации фильтра и проведения фильтрации достаточно взять отрезок ряда длиной $(5 \div 8) m\Delta$, где m — порядок уравнения динамики.

Более сложной оказывается зависимость матрицы P_k от величины интервала Δ . В общем случае она может быть выражена аналитически только для процессов, имеющих уравнение динамики первого порядка. Вместе с тем алгоритм фильтра Калмана позволяет указать верхние и нижние пределы, в которых заключены значения матрицы P_k .

Для установления этих границ введем понятие «наблюдаемости системы», которое часто используется в современной теории управления [15, 23].

Линейную динамическую систему, эквивалентную рассматриваемому океанографическому процессу, мы будем называть полностью наблюдаемой на интервале $[t_0, t_N]$, если по каждому измерению состояния системы \vec{z}_k может быть определено ее начальное состояние \vec{x}_0 . Образует матрицу Y_N из N измерений процесса

$$\vec{z}^N = \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vdots \\ \vec{z}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \Phi_{1,0} \\ H_2 \Phi_{2,0} \\ \vdots \\ H_N \Phi_{N,0} \end{bmatrix} \vec{x}_0 \equiv Y_N \vec{x}_0. \quad (27.3)$$

Тогда начальное состояние \vec{x}_0 может быть выражено через матрицу измерений

$$\vec{x}_0 = (Y_N^T Y_N)^{-1} Y_N^T \vec{z}^N. \quad (27.4)$$

Из выражения (27.4) видно, что линейная динамическая система является полностью наблюдаемой на интервале $[t_0, t_N]$ тогда и только тогда, когда матрица Y_N имеет ранг, равный n . Этот вывод эквивалентен требованию, чтобы матрица

$$M_{N,1} \equiv Y_N^T Y_N = \sum_{i=1}^N \Phi_{i,0}^T H_i^T H_i \Phi_{i,0} \quad (27.5)$$

была положительно определенной [3].

Введенные обозначения позволяют теперь сформулировать известные в теории управления общие результаты [15, 23, 172]:

ковариационная матрица ошибки фильтра Калмана имеет в качестве нижней границы величину

$$\Phi_{k,0} [P_0^{-1} + M_{k,1}]^{-1} \Phi_{k,0}^T \leq P_k; \quad (27.6)$$

ковариационная матрица фильтра Калмана имеет в качестве верхней границы величину

$$P_k \leq \Phi_{k,0} [P_0^{-1} + M_{k,1}]^{-1} \Phi_{k,0}^T + W_{k,1}, \quad (27.7)$$

где матрица $W_{k,1}$ находится из выражения

$$W_{k,1} = \sum_{i=1}^k \Phi_{k,i} Q_{i-1} \Phi_{k,i}^T.$$

Формулами (27.6) и (27.7) можно оценивать пределы, в которых заключена ошибка фильтрации процесса, когда фильтр достигает устойчивого состояния. Зависимость этих пределов от интервала между наблюдениями может быть установлена лишь путем численных экспериментов.

§ 28. Планирование сети станций для измерения случайных пространственных полей океана

Построение карт различных пространственных полей океана — одна из важнейших конечных целей океанографических исследований. Эффективность применения статистических методов расчета карт океанографических полей определяется объемом данных, которые имеются в распоряжении океанологов. Чем полнее и значительнее по объему исходная информация о поле, тем выше точность его восстановления в произвольной точке. Однако из экономических соображений количество измерений поля должно быть ограничено лишь тем минимумом, который является необходимым для успешного применения оптимальной интерполяции. Поэтому на практике следует выбирать такую схему измерений в поле, которая обеспечивает заданную (среднюю по полю) точность интерполяции при наименьшем возможном количестве измерений. Установление зависимостей ошибки интерполяции от количества станций и от их взаимной ориентации и составляет основное содержание задачи о планировании съемки пространственных океанографических полей.

В настоящее время в океанологической литературе мало работ о планировании сети океанологических станций. Наиболее подробно вопросы оптимального размещения станций в океане рассмотрены в статьях В. И. Беляева и И. Е. Тимченко [6, 7], Г. А. Моисеева и И. Е. Тимченко [60, 61]. Значительный опыт планирования сети станций накоплен в метеорологии, где проблема рационального расположения наземных пунктов метеонаблюдений является весьма актуальной [20]. Остановимся на результатах некоторых метеорологических работ.

Задачи планирования сети метеорологических станций. В связи с развитием измерительной техники и использованием спутниковых систем сбора метеорологической информации в последнее десятилетие в метеорологии развивается экономический подход к решению задач рационального планирования систем метеорологических наблюдений. Внедрение автоматизированных систем сбора и обработки метеоданных для осуществления прогнозов погоды требует значительных материальных затрат. Стоимость метеорологической информации должна быть сопоставлена с теми возможными убытками в народном хозяйстве, которые предотвращаются за счет прогнозирования погоды. Л. С. Гандин и Р. Л. Каган [20] приводят в качестве примера Японию, где на содержание всей метеорологической службы расходуется существенно меньше средств, чем снижение потерь в народном хозяйстве, обусловленное заблаговременными оповещениями о тайфунах.

Рассмотрим задачу о рациональном размещении сети метеостанций [20]. Предположим, что затраты на содержание сети метеостанций могут быть представлены в виде формулы

$$C = C_0 N, \quad (28.1)$$

где C_0 — стоимость информации, поступающей от одной метеостанции; N — количество метеостанций. Для оценки возможных потерь в народном хозяйстве из-за недостатка метеоинформации Л. С. Гандин и Р. Л. Каган предложили использовать параметр неточности информации F . Потери L можно выразить через линейную функцию от F

$$L(N) = aF(N) + b, \quad a > 0, \quad (28.2)$$

которая учитывает зависимость этого параметра от густоты станций. Максимальными будут потери в том случае, когда $N = 0$.

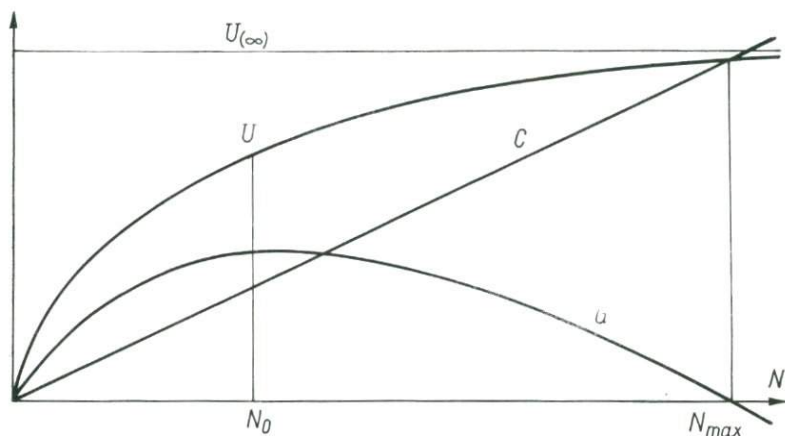


Рис. 52. К нахождению рациональной системы метеостанций [20].

Уменьшение потерь благодаря работе N метеостанций имеет вид

$$U(N) = L_{\max} - L(N) = a[F(0) - F(N)], \quad (28.3)$$

а польза от их содержания определяется из формулы

$$G(N) = U(N) - C_0(N). \quad (28.4)$$

Из этой формулы непосредственно следует, что полезность работы станций пропорциональна их количеству. С ростом числа N функция $G(N)$ возрастает от нуля до предельного значения $U(\infty) = aF(0)$. Графическое изображение поведения U , C и G как функции N приведено на рис. 52, заимствованном из работы Л. С. Гандина и Р. Л. Кагана [27]. Непосредственно из рисунка видно, что при рациональной системе станций должно выполняться условие

$$-\left. \frac{dF}{dN} \right|_{N=0} > \frac{C_0}{a}. \quad (28.5)$$

Содержание метеосети оправдывается, если $N < N_{\max}$, т. е. при условии, когда справедлива формула

$$a[F(0) - F(N_{\max})] = C_0 N_{\max}. \quad (28.6)$$

Наиболее рациональным является такое количество станций N_0 , когда имеет место равенство

$$-\left. \frac{dE}{dN} \right|_{N=N_0} = \frac{C_0}{a}. \quad (28.7)$$

Конкретные рекомендации по планированию метеостанций могут быть получены при рассмотрении более узкой задачи: выбора наилучшего расстояния между станциями.

Оценки наиболее выгодного расстояния между станциями производятся на основе метода Дроздова и Шепелевского [21]. При этом используется подход, основанный на статистической модели пространственного поля метеоэлементов. Дроздов и Шепелевский установили аналитическую связь между распределением ошибок оптимальной интерполяции $\varepsilon(l)$ на отрезке l , соединяющем две соседние метеостанции, и длиной этого отрезка:

$$\varepsilon(l) = \frac{3}{2} K(0) - 2K\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2} K(l) + \frac{1}{2} \eta, \quad (28.8)$$

где η — среднеквадратичная ошибка наблюдений на станциях. Выражение (28.8), называемое формулой Дроздова — Шепелевского, является простым частным случаем общей формулы для ошибки оптимальной интерполяции (13.4).

При помощи статистической модели пространственного поля можно построить распределение ошибок оптимальной интерполяции не только вдоль прямой, соединяющей две станции, но и по всему полю. Это свойство алгоритма оптимальной интерполяции весьма существенно для планирования сети океанологических станций.

В отличие от метеорологии, где уже имеется сложившаяся сеть наземных метеостанций, в океане существует возможность выбирать пункты расположения буйковых или гидрологических станций в узлах правильной сетки, покрывающей район исследований. Поэтому весьма важно располагать аналитическими формулами, подобными формуле Дроздова — Шепелевского, которые позволяли бы выбирать рациональную форму сетки измерений поля при планировании съемок океанологических полей в рейсах научно-исследовательских судов.

Выбор сетки измерений при известном спектре случайного пространственного поля океана. Пусть случайное пространственное поле океана $f(\vec{x})$ определено на плоскости и имеет нулевое среднее значение. Будем считать, что поле измерено в узлах сетки, положение которых описывается комбинацией базисных векторов $\{\vec{V}_j\} = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2\}$ (см. формулу (5.7)).

Если известна форма основания спектра поля, то всегда можно выбрать такие сетки измерений поля (а следовательно, соответствующие им спектральные сетки), когда условия тождественного обращения в нуль ошибки интерполяции, следующие из выражения (16.13), будут выполнены.

Наибольший интерес при планировании измерений представляет спектральная сетка, которая позволяет удовлетворить этим условиям при минимальном числе узлов. Будем называть эту сетку наиболее эффективной. Для сравнения эффективности различных сеток отсчетов Миякава предложил использовать параметр

$$\eta = \frac{S}{P} = \frac{SQ}{(2\pi)^n}, \quad (28.9)$$

где S — площадь, занимаемая основанием спектра поля в пространстве $(\vec{\omega})$.

Пусть, например, спектр изотропной случайной составляющей двумерного поля ограничен частотой $\omega_c = 2\pi B$. Если спектральная сетка имеет квадратную форму, наиболее плотное размещение оснований спектров $\Phi(\vec{\omega} + \vec{u}_{(m)})$ на плоскости $(\vec{\omega})$, при котором выполняются условия обращения в нуль ошибки интерполяции, показано на рис. 28. В этом случае параметр $\eta = \pi B^2/4B^2 = 0,785$. На рис. 59 приведено наиболее плотное расположение оснований спектров поля для 60-градусной ромбической сетки. Эффективность этой сетки характеризуется значениями

$$\eta = \frac{\pi B^2}{2\sqrt{3} B^2} = 0,908, \quad (28.10)$$

т. е. существенно выше, чем у квадратной. Можно показать, что 60-градусная ромбическая сетка и является наиболее эффективной для двумерных изотропных полей [150].

Для нахождения сетки измерений, соответствующей выбранной спектральной сетке, достаточно воспользоваться соотношениями (16.1) и (16.5). Из условия ортогональности базисных векторов следует, что 60-градусной ромбической спектральной сетке соответствует сетка измерений, основная ячейка которой также имеет форму 60-градусного ромба (см. рис. 30). Сторона этого ромба, или шаг между измерениями, может быть легко найден из соотношения (28.9):

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{3} \omega_c}. \quad (28.11)$$

Следовательно, если известна частота B для спектра двумерного изотропного поля, найти рациональный интервал между измерениями поля несложно. Аналогично в случае трехмерного поля наиболее эффективная сетка измерений имеет ячейку, представляющую собой правильный параллелепипед, грани которого образованы 60-градусным ромбом, а ребра определяются формулой [9]

$$a = \frac{\pi \sqrt{2}}{\omega_c}. \quad (28.12)$$

Предложенный метод нахождения наиболее эффективных сеток измерений основан на двух предположениях, идеализирующих реальные условия, при которых производятся измерения физических полей океана. Первое — предположение о неограниченной сетке

измерений — не соответствует реальным условиям. Поэтому ошибка интерполяции принципиально не может обратиться в нуль во всех точках поля. Тем не менее при достаточных размерах области измерений среднее значение ошибки может быть уменьшено практически до любой требуемой величины. В настоящее время в океанологической литературе нет общих методик, позволяющих выбирать размеры области измерений, обеспечивающие заданную величину ошибки. Известны лишь частные соотношения, полученные для одномерных реализаций полей [4].

Второе допущение — об ограниченной и правильной (в форме круга) области определения спектра поля — также зачастую на практике не выполняется. Спектры многих физических полей океана не изотропны и имеют сплошной характер до высоких частот и мелких пространственных масштабов, поэтому, как правило, необходимо предварительное сглаживание измерений для приведения основания спектра поля к требуемой форме.

Если же без предварительного сглаживания поля происходит ограничение реального спектра частотой среза $\omega_c = 2\pi B$, определяемой выбором конкретной сетки измерений, то это приводит к перекрытию вторичных спектров $\Phi(\vec{\omega} + \vec{u}_{[m]})$, с чем также связана составляющая ошибки расчета поля.

Эта составляющая может быть оценена с помощью выражения (16.13), которое справедливо в тех случаях, когда предположение о неограниченной сетке измерений можно считать допустимым. Раскрывая скобки под интегралом и считая, что спектр весовой функции удовлетворяет условиям обращения в нуль $\varepsilon(\vec{x})$, находим

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} \Phi(\vec{\omega}) d\vec{\omega}, \quad (28.13)$$

где Ω — область пространства волновых чисел, лежащая за пределами окружности основания спектра, связанного с основной ячейкой спектральной сетки. Если известно основание спектра поля, формула может быть использована для нахождения оценочных зависимостей между величиной шага сетки измерений и средним значением ошибки оптимальной интерполяции случайной составляющей поля, выполненной по результатам измерений на такой сетке. Таким образом, основная задача планирования сети измерений случайного однородного поля океана сводится к установлению формы основания его спектра.

Нахождение спектра случайного изотропного поля океана по одномерным реализациям. На стадии планирования эксперимента случайное пространственное поле океана обычно предполагается изотропным. Условие изотропности поля позволяет перейти от корреляционных функций, рассчитанных для одномерных реализаций поля, к его спектру [60]. Планированию измерений должно предшествовать получение одномерных реализаций поля и вычисление их статистических характеристик. Эта задача может быть решена

практически с помощью зондирующих устройств или буксируемых комплексов аппаратуры. При планировании измерений в океане, как правило, можно найти одномерную реализацию случайной составляющей поля, которая является проекцией n -мерного поля на выбранное направление в пространстве.

Общая формула, связывающая корреляционную функцию одномерной проекции изотропного поля с его спектром, имеет вид [60]

$$\Phi_n(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^{\infty} K(r) \left(\frac{r}{\omega}\right)^{\frac{n-2}{2}} I_{\frac{n-2}{2}}(\omega) r dr, \quad (28.14)$$

где r — модуль сдвига, т. е. $r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$; ω — модуль вектора в пространстве волновых чисел; $I_\nu(z)$ — функция первого рода Бесселя порядка ν .

Приведем конкретные выражения для спектральных плотностей полей с чаще всего встречающимися корреляционными функциями, полученные с помощью (28.14). В качестве типовых корреляционных функций выберем следующие аналитические выражения, которыми обычно аппроксимируются эмпирические функции корреляции случайных составляющих физических полей океана

$$K(r) = e^{-\alpha r^2}, \quad (28.15)$$

$$K(r) = e^{-\alpha r}, \quad (28.16)$$

$$K(r) = \frac{(\alpha r)^\nu}{z^{\nu-1} \Gamma(\nu)} K_\nu(\alpha r), \quad (28.17)$$

$$K(r) = e^{-\alpha r} \cos \beta r, \quad (28.18)$$

где $K_\nu(z)$ — функция Макдональда порядка ν ; $\Gamma(z)$ — гамма-функция; $\alpha > 0$; ν может принимать произвольные положительные значения. В частности, функция (28.17) при $\nu = 1/2$ совпадает с (28.16), а при $\nu = 3/2$ равна $K(\bar{r}) = |e^{-\alpha r} (1 + \alpha r)|$, что также часто используется на практике.

Соответствующие спектральные плотности будут иметь вид

$$\Phi_n(\omega) = \frac{1}{(2\sqrt{\alpha\pi})^n} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}, \quad (28.19)$$

$$\Phi_n(\omega) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad (28.20)$$

$$\Phi_n(\omega) = \frac{\Gamma(\nu + n/2)}{\pi^{n/2} \Gamma(\nu)} \cdot \frac{\alpha^{2\nu}}{(\alpha^2 + \omega^2)^{\nu + n/2}}, \quad (28.21)$$

$$\Phi_n(\omega) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi \frac{n+1}{2}} \times \frac{\alpha \cos \frac{n+1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\alpha\beta}{\gamma} + \beta \sin \frac{n+1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\alpha\beta}{\gamma}}{[\gamma^2 + 4\alpha^2\beta^2]^{\frac{n+1}{4}}}, \quad (28.22)$$

где

$$\gamma \equiv \omega^2 + \alpha^2 - \beta^2.$$

Нетрудно заметить, что если в первых трех случаях (при положительных значениях корней) спектральные плотности неотрицательны при любой размерности, то для четвертой функции спектральная плотность всегда неотрицательна только при $n = 1$. При $n > 1$ параметры, очевидно, должны удовлетворять некоторым специальным условиям, обеспечивающим положительную определенность функции корреляции поля.

Так как выражение для средней ошибки интерполяции представляет собой интеграл от соответствующей спектральной плотности по области вне гипершара с радиусом, равным модулю частоты ω_c , то задача сводится к интегрированию функций (28.19) — (28.22) в n -мерном пространстве волновых чисел. Однако в общем случае интегрирование этих функций сопряжено с весьма громоздкими выкладками. Поэтому ниже предлагаются более простые способы нахождения средних значений ошибки оптимальной интерполяции от частоты среза спектра поля, соответствующей выбранному интервалу между станциями.

Зависимость ошибки интерполяции от интервала между измерениями поля. Выражение для ошибки интерполяции двухмерного поля имеет вид [60]

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \int_0^{\omega_c} \int_0^{\omega_c} \Phi_2(\omega) \omega d\omega \quad (28.23)$$

(дисперсия принимается равной единице).

Подставляя сюда Φ_2 из (28.14) при $n = 2$, имеем

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \int_0^{\omega_c} \int_0^{\infty} \omega K(r) J_0(\omega r) dr d\omega.$$

Меняя порядок интегрирования и делая замену переменных $y = \omega r$, перепишем формулу следующим образом:

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \int_0^{\infty} \frac{K(r)}{r} \int_0^{\omega_c r} y J_0(y) dy dr,$$

откуда, используя рекуррентное соотношение для функций Бесселя,

$$yI_0(y) = \frac{d}{dy} yI_1(y),$$

получаем

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \omega_c \int_0^{\infty} K(r) I_1(\omega_c r) dr$$

или

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \omega_c H_2 \left\{ \frac{K(r)}{r} \right\}, \quad (28.24)$$

где $H_1 \left\{ \frac{K(r)}{r} \right\}$ — преобразование Ханкеля первого порядка.

Таким образом, в случае двухмерного изотропного поля ошибку интерполяции оказывается можно вычислить по корреляционной функции, получаемой из любой одномерной реализации поля.

Перейдем теперь к трехмерному пространству. В нем формула, аналогичная (28.23), имеет вид

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 - \int_0^{\omega_c} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_3(\omega) \omega^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\omega.$$

Производя интегрирование по угловым координатам

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 - 4\pi \int_0^{\omega_c} \Phi_3(\omega) \omega^2 d\omega$$

и подставляя вместо $\Phi_3(\omega)$ его выражение из (28.14) при $n = 3$, имеем

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 + 2 \int_0^{\omega_c} \frac{d\Phi_1(\omega)}{d\omega} \omega d\omega,$$

откуда

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 + 2\omega_c \Phi_1(\omega) - 2 \int_0^{\omega_c} \Phi_1(\omega) d\omega. \quad (28.25)$$

Замечая, что первый и третий члены в правой части (28.25) дают выражение для ошибки в одномерном случае, можно записать (28.25) следующим образом:

$$\varepsilon_3(\omega_c) = \varepsilon_1(\omega_c) - \omega_c \frac{d\varepsilon_1(\omega_c)}{d\omega_c}.$$

Найденные выражения позволяют определить количество отсчетов поля, обеспечивающих заданную точность его восстановления

ния. Действительно, при условии, что область измерений достаточно велика для количества отсчетов, приближенно имеем

$$N_{\text{ср}} \simeq \frac{V}{Q},$$

где V — «объем» области измерений; Q — «объем» элементарной ячейки сетки измерений.

Рассмотрим конкретные зависимости, полученные для полей с корреляционными функциями (28.15) — (28.18), в случаях $n = 2, 3$;

$$1) \quad K(r) = e^{-\alpha r^2}.$$

В двухмерном и трехмерном случаях спектральные плотности соответственно имеют вид

$$\Phi_2(\omega) = \frac{1}{4\alpha\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \quad \text{и} \quad \Phi_3(\omega) = \frac{1}{8(\alpha\pi)^{3/2}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}.$$

Формула (28.24) для случая двух измерений приводит к выражению

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 - \frac{\omega_c}{4\alpha} {}^1F_1\left(1, 2, -\frac{\omega_c^2}{4\alpha}\right).$$

Здесь ${}^1F_1(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, преобразовывая которую, получаем

$$\varepsilon_2(\omega_c) = e^{-\frac{\omega_c^2}{4\alpha}},$$

откуда

$$\omega_c = 2\sqrt{\alpha \ln \varepsilon^{-1}}.$$

С учетом указанных соотношений для ω_c , α , $N_{\text{ср}}$ в двухмерном случае имеем

$$a = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{\ln \sqrt{\varepsilon^{-1}}}, \quad (28.26)$$

$$N_{\text{ср}} \simeq \frac{2\sqrt{3}H}{\pi^2} \alpha \ln \varepsilon^{-1}, \quad (28.27)$$

где H — площадь области измерений; a — шаг сетки измерений. В трехмерном случае, используя (28.25), получаем

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\omega_c}{\sqrt{4\alpha}} e^{-\frac{\omega_c^2}{4\alpha}} - F\left(\frac{\omega_c}{4\alpha}\right), \quad \omega_c = \frac{2\pi\sqrt{2\alpha}}{a}.$$

Здесь $F(z)$ — интеграл ошибок, имеющий вид $F = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-y^2} dy$.

$$2) \quad K(r) = e^{-\alpha r}.$$

Соответствующие спектральные плотности —

$$\Phi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)^{3/2}}, \quad \Phi_3(\omega) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}.$$

Формула (28.24) в этом случае дает

$$\varepsilon_2(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\alpha^2}}},$$

откуда, учитывая (28.12), получим

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\alpha} \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad (28.28)$$

$$N_{\text{ср}} \simeq \frac{H\sqrt{3}}{2\pi^2} \alpha^2 \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2}, \quad (28.29)$$

где H — площадь области измерений.

Для трехмерного случая, используя (28.25), получаем

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{\omega_c}{\alpha}}{1 + \frac{\omega_c^2}{\alpha^2}} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_c}{\alpha},$$

откуда с учетом (28.12)

$$\varepsilon_3(\alpha) = 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\alpha}{\pi\sqrt{2}} a}{1 + \left(\frac{\alpha}{\pi\sqrt{2}} a\right)^2} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\pi\sqrt{2}} a.$$

$$3) \quad K(r) = \frac{(\alpha r)^{\nu}}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} K_{\nu}(\alpha r).$$

Соответствующие спектральные плотности —

$$\Phi_2(\omega) = \frac{\nu}{\pi} \cdot \frac{\alpha^{2\nu}}{(\alpha^2 + \omega^2)^{\nu+1}}, \quad \Phi_3(\omega) = \frac{\nu + \frac{1}{2}}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)} \times \\ \times \frac{\alpha^{2\nu}}{(\alpha^2 + \omega^2)^{\nu+3/2}}.$$

В двухмерном случае из (28.24) следует

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)} \cdot \frac{\omega_c^2}{\alpha^2} {}_2F_1\left(\nu+1, 1, 2, \frac{\omega_c^2}{\alpha^2}\right),$$

где ${}_2F_1(a, b, c, z)$ — гипергеометрический ряд. Проведя соответствующие преобразования, получаем

$$\varepsilon_2(\omega_c) = \frac{\alpha^{2\nu}}{(\omega_c^2 + \alpha^2)^{\nu}},$$

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon^{1/\nu}}{1 - \varepsilon^{1/\nu}}}, \quad (28.30)$$

$$N_{\text{cp}} \simeq \frac{H\sqrt{3}}{2\pi^2} \alpha^2 \frac{1 - \varepsilon^{1/\nu}}{\varepsilon^{1/\nu}}. \quad (28.31)$$

Заметим, что при $\nu = \frac{1}{2}$ из последних соотношений находятся формулы, полученные выше для второго случая.

Для трехмерного пространственного поля, опуская промежуточные выкладки, приведем только конечный результат при $\nu = 3/2$:

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\omega_c}{\alpha} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\alpha^2}\right)}{\left(1 + \frac{\omega_c^2}{\alpha^2}\right)^2} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_c}{\alpha},$$

$$\varepsilon_3(a) = 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\alpha}{\pi\sqrt{2}} a \left(1 - \frac{\alpha^2}{2\pi^2} a^2\right)}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} a^2\right)} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\pi\sqrt{2}} a.$$

$$4) \quad K(r) = e^{-\alpha r} \cos \beta r.$$

Формула (28.22) для $n = 2$ и $n = 3$ соответственно дает

$$\Phi_2 = \frac{\alpha \sqrt{(\gamma^2 + \eta^2)^{3/2} + \gamma(\gamma^2 - 3\eta)} + \beta \sqrt{(\gamma^2 + \eta^2)^{3/2} - \gamma(\gamma^2 - 3\eta)}}{2\sqrt{2}\pi(\gamma + \eta)^{3/2}},$$

$$\Phi_3 = \frac{\alpha}{\pi^2} \frac{\gamma^2 + 4\beta^2(K^2 - \beta^2)}{(\gamma^2 + 4\alpha^2 - \beta^2)^2},$$

$$\gamma \equiv K^2 + \alpha^2 - \beta^2,$$

$$\eta \equiv 4\alpha^2\beta^2.$$

В этом случае преимущество вычисления $\varepsilon_2(\omega_c)$ с использованием формулы (28.24) по сравнению с прямым интегрированием выражения для $\Phi_2(\omega)$ особенно заметно:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\omega_c) &= 1 - \omega_c \int_0^\infty K(r) I_1(\omega_c r) dr = \\ &= \frac{\alpha \sqrt{(\gamma^2 + \eta)^{1/2} + \gamma} + \beta \sqrt{(\gamma^2 + \eta)^{1/2} - \gamma}}{\sqrt{2}(\gamma^2 + \eta)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\varepsilon_1(\omega_c) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_c + \beta}{\alpha} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{2\alpha\beta}$$

и используя формулу (28.25), имеем

$$\varepsilon_3(\omega_c) = \frac{3}{2} + \frac{\omega_c}{\pi} \frac{2\alpha\gamma}{\gamma^2 + \eta} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega_c + \beta}{\alpha} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{2\alpha\beta}.$$

Подставляя в эти выражения вместо ω_c связанные с ней a и $N_{\text{ср}}$, можно получить искомые соотношения для планирования сети станций.

Таким образом, выписанными здесь зависимостями можно теоретически определять шаг измерения и количество отсчетов, обеспечивающих заданную точность восстановления поля, если построена по одномерной реализации случайного поля корреляционная функция аппроксимирована одной из рассмотренных типовых функций. Некоторые из этих зависимостей представлены в виде графиков на рис. 53 и 54. По оси абсцисс на всех графиках отложены значения величины относительной средней ошибки интерполяции, изменяющейся от 0 до 1.

Предположение об изотропности случайных составляющих позволило свести рассмотрение задачи планирования сети измерений к одномерному пространству. Реальные поля, как отмечалось, редко удовлетворяют с достаточной точностью условию изотропности. С несколько большей степенью точности их корреляционные функции аппроксимируют функциями, поверхности равных значений у которых являются эллипсоидами.

Легко убедиться в том, что для нахождения направления главных осей эллипсоида анизотропности в двухмерном поле достаточно осуществить измерения трех одномерных реализаций поля и рассчитать по ним соответствующие этим направлениям функции корреляции. Для трехмерного поля необходимо выполнить измерения

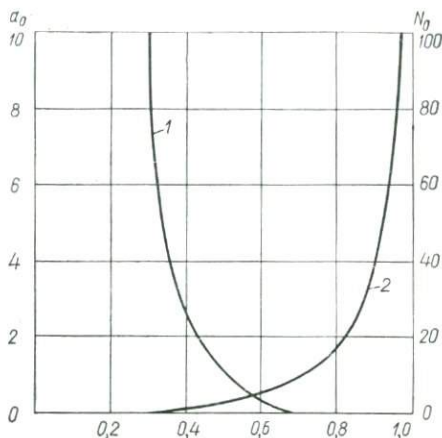


Рис. 53. Зависимость ошибки оптимальной интерполяции двумерного поля, имеющего экспоненциальную корреляционную функцию, от числа станций N и расстояния между ними a :

$$1 - N_0, \quad 2 - a_0 \quad (N = \alpha^2 \sqrt{3} \quad H N_0 / \pi^2; \quad a = 2\pi a_0 / \alpha \sqrt{3}).$$

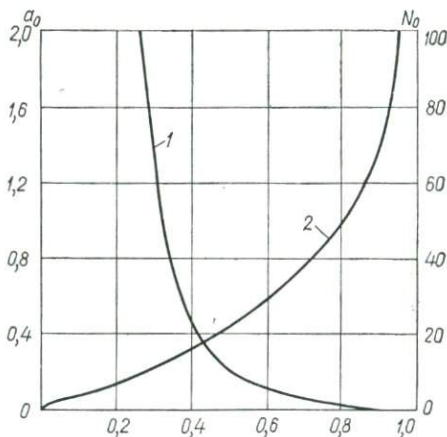


Рис. 54. Зависимость ошибки оптимальной интерполяции трехмерного поля.

Усл. обозначения те же, что и на рис. 53 ($N = 4V\alpha^3 N_0 / 3\pi V\sqrt{2}^3$; $a = \pi V\sqrt{2} a_0 / \alpha$).

по шести направлениям. Зная соотношения полуосей анизотропии, нетрудно изменить масштабы координатных осей поля таким образом, чтобы привести его к изотропной модели [7]. Очевидно, что приведенные расчетные формулы сохраняют силу в подобных случаях элементарной анизотропии.

Полученные зависимости позволяют решать вопросы планирования съемки случайных гидрофизических полей, т. е. теоретическим путем определять интервалы между станциями a при

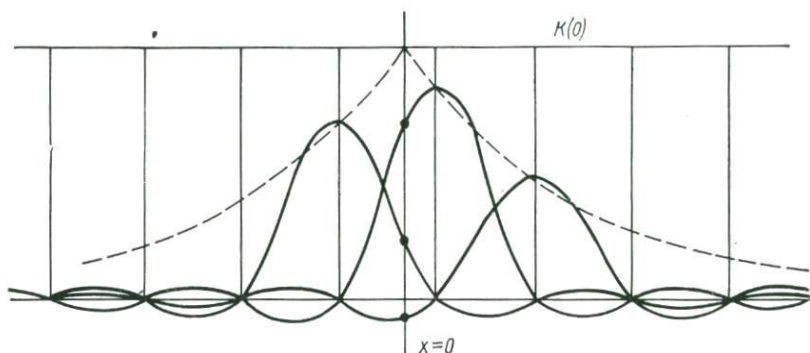


Рис. 55. Формирование ошибок оптимальной интерполяции.

размещении их в поле. Для применения изложенной методики достаточно лишь оценить эмпирическую функцию корреляции одномерной реализации поля, взятой в произвольном направлении, и аппроксимировать ее одной из типовых аналитических формул.

Следует отметить, что найденные таким способом оценки будут верны в первом приближении. Тот факт, что область измерений поля имеет конечные размеры, несомненно, приведет к увеличению ошибок расчета карты методом оптимальной интерполяции для тех точек, которые находятся вблизи границ района. Поэтому целесообразно рассмотреть в отдельности составляющую ошибки расчета поля, вызванную влиянием границ.

Об учете влияния границ области измерений. Предположим, что спектр поля ограничен, и рассмотрим составляющую ошибки, обусловленную конечными размерами области измерений в пространстве (\vec{x}) .

Весовая функция $g(\vec{x})$ в формуле (16.13) есть та функция, которая восстанавливает значения детерминированной функции корреляции поля $K(\vec{x})$ по ее значениям в узлах сетки измерений. Это следует из выражения (16.10) для ошибки оптимальной интерполяции, которое с учетом равенства (16.8) может быть переписано в виде

$$\varepsilon(\vec{x}) = K(0) - K(\vec{x}), \quad (28.32)$$

где $K(0)$ — дисперсия поля. Используя это выражение, поясним процесс исчезновения ошибки $\varepsilon(\vec{x})$ при выполнении всех условий оптимальности.

Пусть, например, корреляционная функция поля $K(\vec{x})$ убывает по закону экспоненты. При оптимальной интерполяции в точку \vec{x} мы вправе расположить в этой точке начало координат и считать, что $\vec{x} = 0$. Если точка $\vec{x} = 0$ совпадает с одним из узлов сетки измерений, тогда вследствие ортогональности весовых функций ряда Котельникова — Шеннона в выражении (16.10) остается только один член $K(\vec{x}) = K(0)$ и ошибка интерполяции (28.32) исчезает. Ограничимся для простоты одномерным случаем и рассмотрим интерполяцию поля в направлении оси x в точке $x = 0$, не совпадающей с последовательностью отсчетов поля (рис. 55). По отношению к этой точке отсчеты функции корреляции убывают по экспоненциальному закону (изображены пунктиром). Величины отсчетов модулируют амплитуды соответствующих весовых функций (см. рис. 31), «хвосты» которых, суммируясь согласно (16.10), восстанавливают значение $K(x)$ в точке $x = 0$.

Из рис. 55 видно, что наибольший вклад в значение $K(x)$ вносят ближайшие отсчеты корреляционной функции, в основном определяющие точность интерполяции. По мере приближения к границе области измерения величина $K(x)$ будет восстанавливаться с возрастающей ошибкой, а следовательно, и среднеквадратичная ошибка интерполяции $\varepsilon(x)$ будет увеличиваться. Тогда для нахождения пределов изменения $\varepsilon(x)$ достаточно произвести оценку приближения функции $K(x)$ конечной суммой ряда Котельникова — Шеннона $K_N(x)$, содержащей N членов:

$$\varepsilon(x) = K(x) - K_N(x),$$

где N — число отсчетов поля, попадающих в область измерений.

Подобная оценка может быть получена методами теории целых функций после некоторых дополнительных предположений относительно поведения функции корреляции при $|x| \rightarrow \infty$. В частности, применяя результаты работы Б. С. Цыбакова и В. П. Яковлева [92] к детерминированной функции корреляции, можно показать, что при убывании $K(x)$ за пределами области измерений по степенному закону

$$|K(x)| < \frac{C}{x^m}$$

получим

$$\varepsilon(x) \leq \frac{0,52 \sqrt{2}}{\sqrt{2m-1} D^{\frac{2m-1}{2}}}, \quad (28.33)$$

где $D = N$ — параметр, характеризующий размеры области измерений.

Оценки типа (28.33) и приведенные зависимости средней ошибки интерполяции от параметров сети станций позволяют установить в первом приближении размеры области измерений, необходимой для построения поля, с учетом влияния границ района на точность расчета карты. Более точным, хотя и более трудоемким, способом оценки влияния границ полигона является проведение численных экспериментов с моделями полей, подобными рассмотренным в § 17. В частности, график на рис. 33 устанавливает зависимость ошибки расчета карты от расстояния до границы области измерений, график на рис. 32 позволяет определять необходимое количество станций для полей с экспоненциальными корреляционными связями.

§ 29. Рационализация съемки пространственного поля рельефа дна

В качестве иллюстрации приведенной в § 28 методики планирования измерений пространственных полей океана рассмотрим задачу съемки поля рельефа дна на морском полигоне для расчета на ЭВМ его карты. Использование рельефа дна в качестве примера случайного пространственного поля океана удобно в методическом отношении для проведения расчетов, поскольку оно практически не зависит от времени. Что же касается пространственной изменчивости поля (расчлененности рельефа дна), то мы будем предполагать, что однородная и изотропная случайная функция координат хорошо моделирует рельеф дна в пределах выбранного полигона.

В августе 1970 г. экспедиция МГИ АН УССР на нис «Михаил Ломоносов», выполняя исследования по программе 25-го рейса, провела съемку рельефа дна на специальном полигоне в Альборановом море [83]. Целью работ явилась проверка в натуральных условиях применимости статистических методов планирования измерений случайных пространственных полей и расчета их карт на ЭВМ способом оптимальной интерполяции.

Для проведения исследований был выбран относительно «спокойный» участок рельефа дна Альборанового моря, не представляющий большого интереса в геолого-морфологическом отношении, но удобный с точки зрения отработки методики статистического анализа. Ставилась задача получить минимально необходимое количество данных наблюдений, обеспечивающее построение карты рельефа дна полигона с заданной точностью.

Выбранный участок рельефа дна представлял собой прямоугольник со сторонами 40×20 миль, ориентированный вдоль побережья Испании (рис. 56). На основании предварительного анализа штурманских карт было известно, что глубины в пределах полигона изменяются случайно около среднего значения (900 м), расчлененность дна незначительная и сохраняется одинаковой по всему полигону. Это позволило использовать в качестве модели исследуемого участка рельефа дна реализацию двухмерной однородной и изотропной случайной функции $f(x_1, x_2)$.

Съемка полигона и анализ статистической структуры рельефа дна. Для применения изложенной в § 28 методики первоначально судно пересекло полигон по диагонали. Полученный при этом диагональный профиль рельефа дна был представлен в дискретном виде и введен в судовую ЭВМ («Днепр-1») для расчета корреляционной функции. Аппроксимация значений корреляционной функции была выполнена с помощью функции

$$K(r) = e^{-\alpha r} \cos \beta r, \quad \alpha = 0,082, \quad \beta = 0,17. \quad (29.1)$$

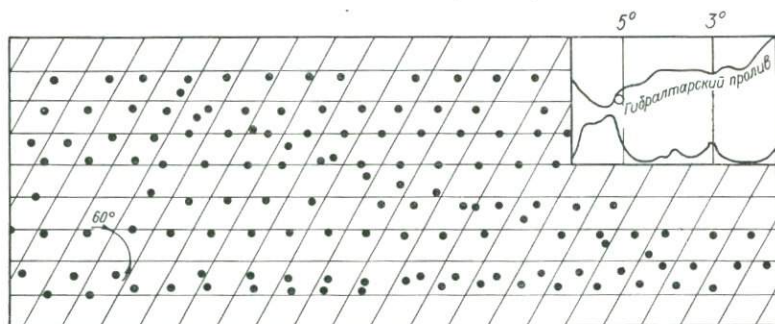


Рис. 56. Сетка измерений и контрольные точки съемки глубин на примерном полигоне в Средиземном море.

Двухмерный спектр поля $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ теперь может быть найден по формуле

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K(r) \cdot I_0(\omega_0 r) dr, \quad (29.2)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; $I_0(\omega r)$ — функция Бесселя. Практически, однако, удобнее использовать зависимость ошибки интерполяции от верхней граничной частоты спектра, которая выведена для корреляционной функции (29.1) в § 28. Запишем ее в следующем виде:

$$E_{\text{ср}}(\omega_c) = \frac{\alpha \sqrt{[(\omega_c^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]^{1/2} - (\omega_c^2 + \alpha^2 - \beta^2)} + \beta \sqrt{[(\omega_c^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2]^{1/2} - (\omega_c^2 + \alpha^2 - \beta^2)}}{\sqrt{2} \pi [(\omega_c^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]^{1/2}}. \quad (29.3)$$

При выбранных значениях параметров α и β для обеспечения средней ошибки интерполяции порядка 5% дисперсии поля значение ω_c в формуле (29.3) должно было составить 1,4 мили⁻¹. По формуле (28.11) тогда легко найти, что интервал между отсчетами глубин на полигоне должен составлять 2,3 мили. Это соответствует расстоянию порядка 2 миль между параллельными галсами при съемке полигона.

Все расчеты, связанные с нахождением расстояния между галсами, проводились за время движения судна по первому галсу (верхняя граница полигона на рис. 56). Таким образом, планирование

съемки оказалось возможным осуществить одновременно с измерениями на полигоне.

Всего в пределах полигона было получено 10 параллельных профилей рельефа дна. Значения глубин, снятые с этих профилей, образовали 60-градусную ромбическую сетку измерений, а пропущенные при этом глубины были использованы в качестве контрольных измерений при оценке точности интерполяции.

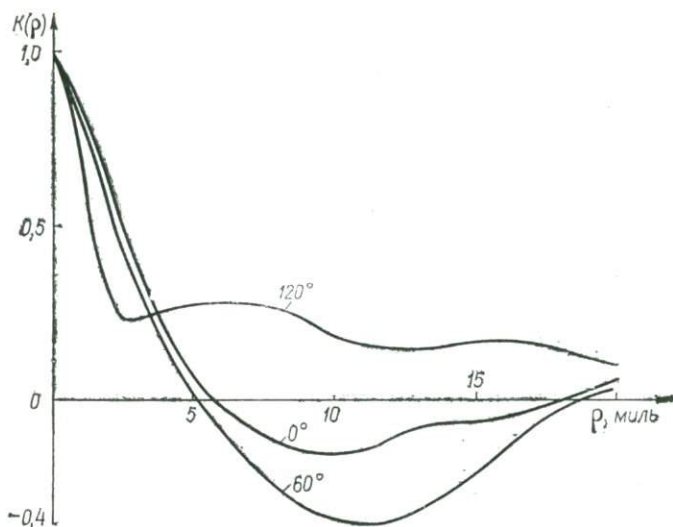


Рис. 57. Проверка изотропности отклонения поля рельефа дна от сглаженной составляющей.

Для проверки степени однородности и изотропности поля были рассчитаны корреляционные функции поля по трем направлениям, составляющим углы 0, 60 и 120°. Для уменьшения нестационарности выполнено сглаживание исходного поля при различных параметрах пространственного осреднения и осуществлен переход к полям отклонений от сглаженных значений. Наилучшее совпадение корреляционных функций по различным направлениям в поле отклонений было получено при сглаживании по шестиугольной пространственной области, содержавшей 65 значений глубин в узлах сетки измерений. Графики корреляционных функций для этого случая приведены на рис. 57.

Расчет поля рельефа дна и построение карты. Интерполяция значений глубин выполнялась на ЭВМ «М-220М» с применением спектрального алгоритма оптимальной интерполяции (§ 16). Отметим, что расчет рельефа дна подобным методом, насколько нам известно, был осуществлен впервые. Результаты расчета опубликованы в статье [83].

Для оценки точности спектрального алгоритма оптимальной

интерполяции первоначально было проведено восстановление значений поля в контрольных точках, в которых глубины были известны заранее (см. рис. 56). Расчет проведен по данным непосредственных измерений, а также по полям отклонений от среднего при различных степенях осреднения. В каждом эксперименте находилось среднее значение ошибки оптимальной интерполяции. На рис. 58 среднее значение ошибки интерполяции представлено в виде функции от размеров области осреднения, использованной при разделении поля на изотропную и анизотропную составляющие. Величины

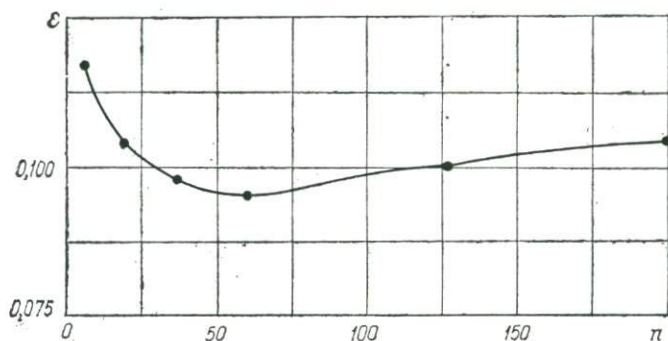


Рис. 58. Зависимость средней ошибки интерполяции от размеров области осреднения.

анизотропной составляющей находились путем линейной интерполяции. Крайняя справа точка на графике соответствует оптимальной интерполяции по исходным данным без предварительного вычитания анизотропной составляющей.

Приведенные на графике результаты расчетов свидетельствуют о высокой точности спектрального метода интерполирования. Минимальное значение ошибки интерполяции, как и следовало ожидать, было получено, когда интервал сглаживания обеспечивал наилучшее разделение поля на изотропную и анизотропную составляющие.

Средняя точность расчета составила 10% дисперсии поля, т. е. оказалась несколько ниже полученной теоретическим путем по формуле (29.3) оценки $\epsilon_{\text{ср}} = 5\%$. Это можно объяснить влиянием границ полигона, проявлением остаточной анизотропии поля отклонений и ошибками линейной интерполяции. Однако в целом совпадение теоретической и экспериментальной ошибок расчета следует признать хорошим.

Карта рельефа дна полигона была построена по результатам интерполирования в узлы квадратной сетки, имеющей шаг 0,8 мили (рис. 59). Сетка измерений отмечена на карте специальными значками. Среднеквадратичная ошибка построения карты составила ± 41 м, т. е. 5% средней глубины полигона. Построение карты на ЭВМ, включая время выдачи материала на АЦПУ, заняло 5 мин.

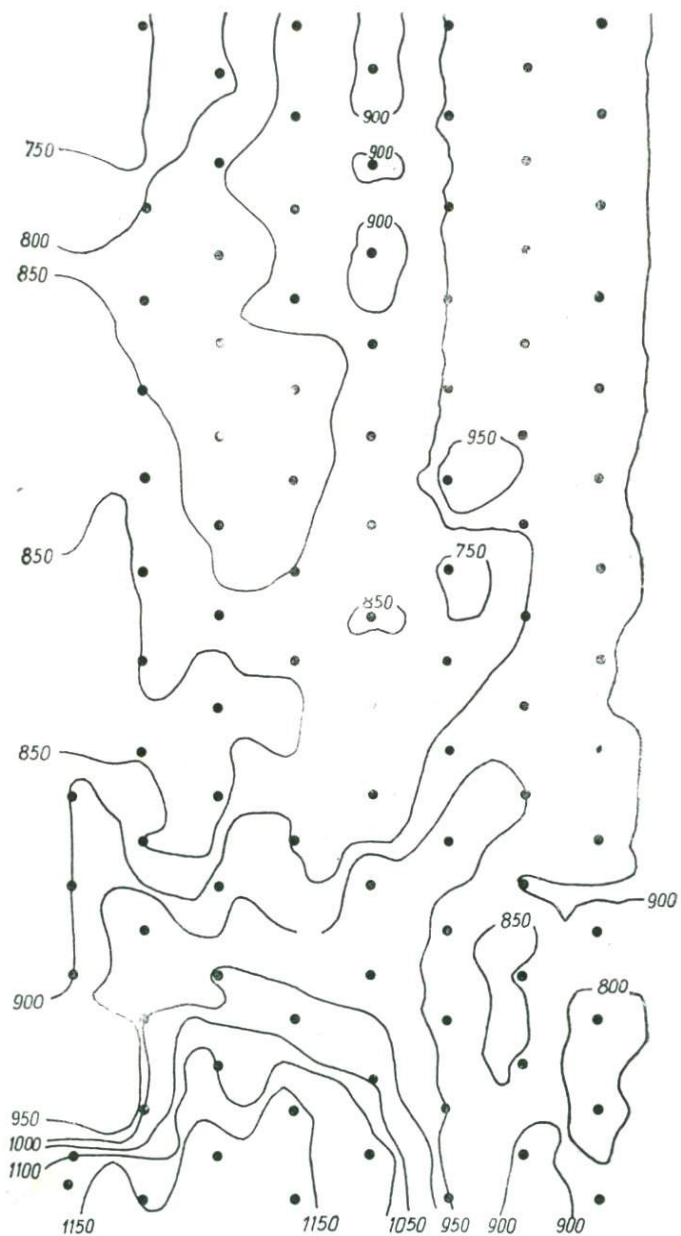


Рис. 59. Карта поля рельефа дна, построенная с помощью спектрального алгоритма оптимальной интерполяции,

Таким образом, использованные в этом эксперименте теоретические формулы планирования съемки и построения карты поля дали хорошие результаты.

Отметим, что эти результаты являются примером практического использования системного подхода к анализу пространственного поля рельефа дна. При планировании полигона в Средиземном море в качестве конечной цели исследований была определена карта поля рельефа дна. Критерием качества расчета карты (т. е. показателем качества достижения цели исследований) явилась средняя по полигону ошибка оптимальной интерполяции поля глубин. Выбор критерия качества был продиктован свойствами использованной статистической модели поля — однородной и изотропной случайной функции координат.

Проведенные для проверки изотропности поля численные эксперименты по нахождению рационального пространственного сглаживания поля позволили разделить поле на детерминированную и случайную составляющие. Одновременно размеры основания спектра случайной составляющей были приведены в соответствие с выбранной для представления поля 60-градусной ромбической сеткой измерений.

Благодаря выбору 60-градусной ромбической сетки процедура оптимального построения карты поля на ЭВМ была сведена к весьма простым формулам спектрального алгоритма оптимальной интерполяции (см. § 16). Как уже отмечалось, такой метод интерполяции не только дает большую экономию машинного времени, но и (что принципиально важно) позволяет использовать оптимальную интерполяцию в экспедиционных условиях, на маломощных ЭВМ, устанавливаемых на научно-исследовательских судах.

§ 30. Об измерении статистически связанных полей

Особенностью проведения океанографических исследований является высокая стоимость создания и эксплуатации в океане автономных станций, предназначенных для получения гидрометеорологической информации. Экономически более выгодно производить комплексные измерения большого количества океанографических и метеорологических параметров на редкой сети наблюдений, чем увеличивать количество станций в исследуемом районе.

Поскольку ошибка расчета каждого поля определяется плотностью наблюдений поля по пространству, при планировании сети станций важно учитывать комплексный характер измерений. Задача оптимального использования информации о различных полях для построения карт на ЭВМ рассматривалась в § 18 и по аналогии с метеорологическими работами была названа статистическим согласованием океанографических полей.

Планирование сети станций для построения согласованных карт полей по результатам наблюдений в настоящее время практи-

чески не исследовано. В метеорологической литературе, кроме названных работ Л. С. Гандина и Р. Л. Кагана [19, 20], упоминание об этом содержится в статье Д. Питерсена [154]. В океанографических работах постановка подобной задачи, по-видимому, не рассматривалась.

Интуитивно ясно, что повышение информативности измерений на каждой станции может иметь результатом увеличение расстояний между ними, т. е. более выгодную плотность сети измерений в океане. Для оценки такой возможности попытаемся распространить приведенную в § 28 методику планирования съемки отдельно взятого пространственного поля океана на совокупность однородных и изотропных случайных полей.

Наиболее простое дело обстоит, когда сеть станций производит измерения двух полей, связанных между собой линейной зависимостью. Для построения карты одного из этих полей достаточно, используя известную между ними связь, выразить функцию взаимной корреляции и автокорреляционную функцию второго поля через функцию корреляции первого поля (см. § 18). Например, если измеряется одновременно поле и его градиент (или другое поле, являющееся линейной функцией от градиента), ошибка оптимального согласования полей зависит только от корреляционной функции одного поля (см. (18.10)):

$$\begin{aligned} \epsilon_{\min}(\vec{x}) = & K(0) - \sum_{[l]} [K(\vec{x} - \vec{x}_{[l]}) g(\vec{x}, \vec{x}_{[l]}) - \\ & - \nabla K(\vec{x} - \vec{x}_{[l]}) h(\vec{x}, \vec{x}_{[l]})]. \end{aligned} \quad (30.1)$$

При оптимальных весовых функциях согласования $g(\vec{x})$ и $h(\vec{x})$ ошибка (30.1) может быть сделана (теоретически) сколь угодно малой. Использование же в формуле согласования (18.2) независимых измерений поля и его производных по двум взаимно перпендикулярным направлениям дает возможность увеличить расстояние между станциями в три раза, сохраняя величину ошибки (30.1) на том же уровне.

Допустим теперь, что размещенная в океане сеть станций способна одновременно производить измерения n случайных пространственных полей океана. Образует вектор, составляющими которого будут значения полей $f_i(\vec{x})$ в каждой точке пространства

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \{f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})\}.$$

Векторное поле $\vec{\alpha}(\vec{x})$ будем считать однородным случайным полем координат. Введем корреляционную матрицу этого поля

$$K(\vec{y} - \vec{x}) = E \{[\vec{\alpha}(\vec{y}) - E\{\vec{\alpha}(\vec{y})\}] T [\vec{\alpha}(\vec{x}) - E\{\vec{\alpha}(\vec{x})\}]\}. \quad (30.2)$$

В формуле (30.1) $E\{\vec{\alpha}(\vec{y})\}$ обозначает векторную функцию, составляющими которой служат поля норм или средних значений.

Диагональными элементами матрицы $K(\vec{y} - \vec{x})$ являются дисперсии соответствующих полей, в то время как недиагональные элементы (при $\vec{x} \neq \vec{y}$) представляют собой функции взаимной корреляции, которые выражают статистические связи, существующие между каждой парой полей.

Будем считать, что m полей из общей совокупности имеют отличные от нуля взаимные корреляционные функции. Это означает, что каждая пара таких полей должна быть связана между собой линейной зависимостью типа уравнения регрессии. В общем виде это условие может быть записано следующим образом:

$$\int_{(\vec{x})} \vec{\alpha}^T(\vec{x}) c_i(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{x} = a_i(\vec{y}) \quad (30.3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Формула (30.3) представляет собой линейные пространственные операции над векторным полем $\vec{\alpha}(\vec{x})$ с некоторыми детерминированными функциями $C_i(\vec{x})$ [154].

Покажем, что каждая линейная операция (30.3) эквивалентна существованию нулевого собственного значения спектральной матрицы $\Phi(\vec{\omega})$ [154]:

$$\Phi(\vec{\omega}) = \int_{(\vec{x})} K(\vec{z}) \exp[-i\vec{z}^T \vec{v}] d\vec{z}. \quad (30.4)$$

Осредним выражение (30.3), а затем вычтем из него результат осреднения. Тогда получим

$$\int_{(\vec{x})} [\vec{\alpha}^T(\vec{x}) - E\{\vec{\alpha}^T(\vec{x})\}] C_i(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{x} = 0. \quad (30.5)$$

Умножая (30.5) на разность $[\vec{\alpha}(\vec{z}) - E\{\vec{\alpha}(\vec{z})\}]$ и вновь осредняя результат умножения, находим

$$\int_{(\vec{x})} K(\vec{z} - \vec{x}) C_i(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{x} = 0 \quad (30.6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Формула (30.6), справедливая при всех \vec{z} и \vec{y} , представляет собой свертку корреляционной матрицы поля $\vec{\alpha}(\vec{x})$ с матрицей $C_i(\vec{x})$. В пространстве волновых чисел ее эквивалентом является следующее произведение:

$$\Phi(\vec{\omega}) C_i(\vec{\omega}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (30.7)$$

Сопоставляя (30.7) с характеристическим уравнением для матрицы $\Phi(\vec{\omega})$

$$[\lambda_i I - \Phi] C_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (30.8)$$

легко убедиться в том, что матрица $\Phi(\vec{\omega})$ имеет m нулевых собственных значений, которым соответствует m собственных функций $C_i(\vec{\omega})$. Следовательно, корреляционная матрица совокупности n полей $K(\vec{x})$ имеет ранг $n - m$.

Приведенный выше известный результат линейной алгебры показывает, что в общем случае согласования n полей океана, необходимые для нахождения весовых функций согласования значения авто- и взаимных корреляционных функций, могут быть выражены через $n - m$ авто- и взаимных корреляционных функций. Когда ранг $K(x)$ равен единице, все авто- и взаимные корреляционные функции полей находятся по автокорреляционной функции только одного поля, которая должна быть известна заранее.

Основываясь на этом результате, Д. Питерсен [154] рассмотрел пример согласования статистических свойств двух пространственных метеорологических полей: скалярного поля геопотенциала (высота изобарической поверхности) $h(x, y)$ и векторного поля ветра $[u(x, y), v(x, y)]$. В качестве линейных детерминированных связей между тремя скалярными полями h, u, v было использовано условие баланса

$$u = -\frac{g}{f} \cdot \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v = \frac{g}{f} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (30.9)$$

где g — гравитационная постоянная; f — параметр Кориолиса.

Собственные векторы матрицы $\Phi(\vec{\omega})$, соответствующие нулевым собственным числам, в этом случае имели вид

$$\left[\frac{g}{f} i\omega_2 \vdots 1 \vdots 0 \right] \text{ и } \left[-\frac{g}{f} i\omega_2 \vdots 0 \vdots 1 \right], \quad (30.10)$$

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2).$$

Ранг матрицы был равен единице и, следовательно, все авто- и взаимные спектры системы трех полей оказалось возможным выразить через спектр поля $\Phi_{hh}(\vec{\omega})$:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{uu}(\vec{\omega}) &= \left(\frac{g}{f}\right)^2 \omega_2^2 \Phi_{hh}(\vec{\omega}), & \Phi_{vv}(\vec{\omega}) &= \left(\frac{g}{f}\right)^2 \omega_1^2 \Phi_{hh}(\vec{\omega}), \\ \Phi_{uh}(\vec{\omega}) &= -\frac{g}{f} i\omega_2 \Phi_{hh}(\vec{\omega}), & \Phi_{vh}(\vec{\omega}) &= \frac{g}{f} i\omega_1 \Phi_{hh}(\vec{\omega}), \\ \Phi_{uv}(\vec{\omega}) &= \left(\frac{g}{f}\right)^2 \omega_1 \omega_2 \Phi_{hh}(\vec{\omega}). \end{aligned} \right\} \quad (30.11)$$

Для определения рационального пространственного интервала между станциями достаточно теперь воспользоваться формулами § 28, устанавливающими зависимость формы и размеров ячейки сетки измерений от верхней граничной частоты спектра $\Phi_{hh}(\vec{\omega})$. Найденный таким путем шаг сетки измерений обеспечит восстанов-

ление поля геопотенциала с наперед заданной точностью по одним только измерениям этого поля. Считая, что на каждой станции одновременно будут производиться измерения всех трех параметров u , v , h , мы вправе увеличить найденный шаг сетки в три раза.

Аналогичным образом в случае n полей, корреляционная матрица которых имеет ранг, равный единице, шаг сетки измерений может быть увеличен в n раз. Ошибка расчета карты каждого поля не должна при этом возрастать, так как за счет увеличения количества измерений на станциях общий объем информации о полях не будет уменьшен.

§ 31. Планирование наблюдений пространственно-временных полей океана

Постановка задачи и численный эксперимент Д. Питерсена. Задача планирования съемки пространственно-временного поля океана формально отличается от рассмотренного выше случая пространственного поля наличием дополнительного параметра — времени. Принципиальное отличие состоит в динамических свойствах пространственно-временных полей.

Изменения поля во времени могут задаваться различными способами. При попытке установить аналитические связи критерия качества расчета (прогноза) поля приходится иметь дело с весьма сложными системами уравнений теоретической гидромеханики. Это делает практически невозможным аналитический подход к планированию сети станций [61].

Несмотря на различие динамических моделей полей океана, критерием качества прогнозирования в большинстве случаев удобно считать среднюю по полю среднеквадратичную ошибку построения карты прогностических значений. Для установления связей средней ошибки прогноза с количеством информации, поступающей от станций наблюдений, целесообразно использовать численные эксперименты на ЭВМ.

В метеорологической литературе приведены результаты численных экспериментов по оценке информативности сети метеостанций в различных районах земного шара [20]. Большинство расчетов было проведено в связи с обоснованием методов четырехмерного анализа метеорологических полей (см. § 20). Однако что касается адаптивных методов усвоения данных, то в настоящее время существуют лишь единичные работы с описанием возможных численных моделей.

Один из примеров использования численных алгоритмов последовательного усвоения данных содержится в уже упоминавшейся статье Д. Питерсена [153]. В ней описан случай усвоения одиночных измерений поля, поступающих в несиноптические сроки, и проведена оценка динамики поля ошибок прогноза. Рассмотрим этот результат.

Питерсен изучал возможность последовательного усвоения одиночных отсчетов поля, поступающих от сканирующего датчика,

установленного на летательном аппарате (например, на спутнике) и выполняющего дистанционные измерения в дискретные моменты времени (рис. 60). Для упрощения задачи он использовал относительно простое уравнение динамики поля, которое было выбрано в форме двухмерного уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u + \frac{u}{\tau} = f(\vec{x}, t), \quad (31.1)$$

где $u(x_1, x_2, t)$ — изучаемое поле; D — коэффициент турбулентной диффузии или теплопроводности; τ — параметр «утечки»; $f(x_1, x_2, t)$ — случайная функция, обладающая свойствами белого шума. Простой вид уравнения (31.1) позволил использовать функцию Грина и применить спектральный алгоритм последовательного анализа наблюдений, рассмотренный в § 22. Функцию Грина (или отклик линейной динамической системы, представляющей поле, на импульсное воздействие со стороны ее входа) можно записать в таком виде:

$$h(x_1, x_2, \tilde{t}) = \begin{cases} 0, & \tilde{t} < 0, \\ \frac{1}{2Dt} \exp\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2Dt} - \frac{\tilde{t}}{\tau}\right], & \tilde{t} > 0. \end{cases} \quad (31.2)$$

Применяя уравнение Фурье — преобразование функции Грина, имеем

$$\begin{aligned} H(\mu_1, \mu_2, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2, \tilde{t}) \exp[-i(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)] dx_1 dx_2 = \\ &= \exp\left\{\left[D(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \frac{1}{\tau}\right]t\right\}, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (31.3)$$

Между моментами последовательного усвоения данных t_0 и t_1 функция $f(\vec{x}, t)$ в уравнении (31.1) учитывает поступление энергии в систему. Двойной спектр корреляционной функции накопленного системой возбуждения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{01}(\vec{\mu}, \vec{\nu}) &= (2\pi)^2 \int_{t_0}^{t_1} H(\vec{\mu}, t_1 - \tau) H(-\vec{\nu}, t_1 - \tau) \Phi d\tau \delta(\vec{\mu} + \vec{\nu}) = \\ &= \frac{(2\pi)^2 \left\{1 - \exp\left[-\left(2D|\vec{\mu}|^2 + \frac{1}{\tau}\right)(t_1 - t_0)\right]\right\}}{2\left[D|\vec{\mu}|^2 + \frac{1}{\tau}\right]} \Phi \delta(\vec{\mu} + \vec{\nu}). \end{aligned} \quad (31.4)$$

В формуле Φ — постоянная по величине дисперсия белого шума $f(\vec{x}, t)$.

Ввиду того что Питерсен рассматривал только усвоение одиночных данных, итерационный алгоритм последовательного анализа (21.14) — (21.20) оказалось возможным представить в более простом виде. Уравнение для нахождения весовых коэффициентов Δ оптимальной интерполяции ошибки предсказания из той точки \vec{x}_k , где появляется очередное измерение поля, в произвольную точку

поля \vec{x} можно записать так:

$$\Delta(\vec{x}, t_m) = \frac{P_m(\vec{x}, \vec{x}_m)}{P_m(\vec{x}_m, \vec{x}_m) + \sigma_m^2}, \quad (31.5)$$

где σ_m^2 — дисперсия измеряемого поля в точке \vec{x}_m .

При последовательном усвоении данных поле ошибок прогноза непрерывно меняется. Поэтому зная наперед распределение изолиний ошибок, можно определять те точки поля, где более всего ощущается недостаток информации. Измерения поля следует производить именно в этих точках. Поиск точек, обладающих наибольшей энтропией, легко осуществлять программным путем на ЭВМ.

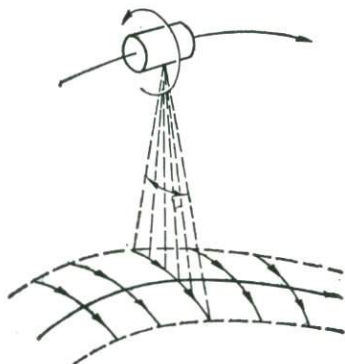


Рис. 60. Один из способов зондирования поверхности океана из космоса [153].

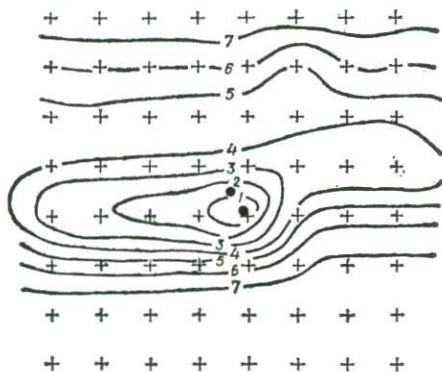


Рис. 61. Ошибки последовательного анализа после усвоения численной схемой одиночного измерения поля [153].

Таким образом, при планировании наблюдений пространственно-временных полей океана основной является формула (21.20) алгоритма последовательного анализа, связывающая между собой значения корреляционной матрицы ошибок прогноза поля на двух последовательных шагах итераций. В рассматриваемом нами численном эксперименте Питерсена эта формула имела вид

$$P_{m+1}(\vec{\mu}, \vec{\nu}) = H(\vec{\mu}) H(\vec{\nu}) [P_m(\vec{\mu}, \vec{\nu}) - \Delta(\vec{x}, t_m) P_m(\vec{\mu}, \vec{x}_m)] + \Phi_{10}(\vec{\mu}, \vec{\nu}). \quad (31.6)$$

В начальный момент времени ($t = 0$) ковариационная матрица ошибок прогноза (в пространстве волновых чисел) совпадает со спектром пространственного поля

$$P_0(\vec{\mu}, \vec{\nu}) = \frac{(2\pi)^2 \Phi \delta(\vec{\mu} + \vec{\nu})}{2 \left[D |\vec{\mu}|^2 + \frac{1}{\tau} \right]}. \quad (31.7)$$

Поэтому выбор сети измерений в начальный момент времени должен быть основан на оценке размеров и формы основания спектра

поля P_0 . При этом может быть использована методика планирования сети станций для измерений пространственных полей океана.

В численном эксперименте Д. Питерсена была использована квадратная сеточная область размером 8×8 узлов. Основные константы в формулах (31.1) — (31.5) имели следующие величины: $D = 2$, $(t_{m+1} - t_m) = 0,01$, $\tau = 5$, $\Phi = 9,56$, $\sigma_m^2 = 0,1$. Дисперсия поля и шаг сетки были постоянными и полагались равными единице.

На рис. 61 показаны изолинии ошибок последовательного анализа после усвоения одиночного измерения поля в точке, отмеченной кружком. Поскольку в численном эксперименте сканирование сеточной области (и усвоение данных) начиналось с третьей строки, сгущение изолиний ошибок наблюдается в нижней части сеточной области, которая еще не была охвачена измерениями. Для повышения точности прогноза «измерения» следует планировать именно в местах сгущения изолиний.

Попробуем теперь провести численные эксперименты по последовательному анализу пространственно-временного поля, наблюдаемого на сети станций. Для этого нам придется прибегнуть к построению модели поля, имеющей известные статистические свойства.

Моделирование пространственно-временного поля диффузионного типа. Физические поля в океане формируются при воздействии разнообразных факторов, основными из которых являются течения и турбулентная диффузия. Система уравнений, описывающая динамику поля, в общем случае бывает громоздкой и с трудом поддается решению. Имея в виду разработку методов планирования измерений при последовательном анализе данных, целесообразно ограничиться рассмотренным уравнением диффузии (31.1), которым приближенно может быть моделирован процесс распространения тепла и различных примесей в районах океана, где поле скоростей можно считать случайным.

Член $\frac{u}{\tau}$ в уравнении (31.1) учитывает поток вещества или тепла в глубь океана.

Последовательность решений уравнения (31.1) для различных моментов времени рассматривалась нами как модель «истинного поля». Для численного решения уравнения (31.1) производилось расщепление уравнения на два одномерных [17], которые, в свою очередь, аппроксимировались разностной схемой

$$\begin{aligned} & \frac{0,5\Delta t D}{\Delta^2} u_{i-1, i_2}^{j+\frac{1}{2}} - u_{i, i_2}^{j+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\Delta t D}{\Delta^2} \right) + \frac{0,5\Delta t D}{\Delta^2} u_{i+1, i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \\ & = - \frac{0,5\Delta t D}{\Delta^2} (u_{i, i_2-1}^j + u_{i+1, i_1}^j) - u_{i, i_2}^j \left(1 - \frac{0,5\Delta t}{\tau} - \frac{\Delta t D}{\Delta^2} \right), \\ & \frac{0,5\Delta t D}{\Delta^2} u_{i_2-1, i_1}^{j+1} - u_{i_2, i_1}^{j+1} \left(1 + \frac{\Delta t D}{\Delta^2} \right) + \frac{0,5\Delta t D}{\Delta^2} u_{i_2+1, i_1}^{j+1} = \end{aligned} \quad (31.8)$$

$$= -\frac{0,5\Delta t D}{\Delta^2} \left(u_{i_1-1, i_2}^{j+\frac{1}{2}} + u_{i_1+1, i_2}^{j+\frac{1}{2}} \right) - u_{i_1, i_2}^{j+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{0,5\Delta t}{\tau} - \frac{\Delta t D}{\Delta^2} \right),$$

где Δ — шаг по пространству, Δt — временной шаг.

Приведенная система разностных уравнений решалась по схеме переменных направлений [53], которая является устойчивой при любых шагах по времени и по пространству и имеет точность $O(\Delta t^2 + \Delta^2)$.

Для имитации случайного воздействия $f(x, y)$ на каждом промежуточном временном шаге к получаемому решению добавлялись некоррелированные случайные числа, распределенные по нормальному закону с дисперсией d , которые получались при помощи программного датчика.

Конкретные расчеты проводились на квадратной сетке в области $(50 \times 50)\Delta$. Для упрощения программы граничные условия были приняты нулевыми.

В качестве начального условия использовалась модель пространственного однородного и изотропного случайного поля с корреляционной функцией

$$K(\rho) = \exp(-\beta\rho), \quad (31.9)$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Для получения реализации случайной функции с заданными статистическими свойствами использовался метод формирующих функций [94]. В соответствии с этим методом значения поля в узлах квадратной сетки рассчитываются по формуле

$$u_{m,n} = \sum_{p=-p_0}^{p_0} \sum_{r=-r_0}^{r_0} F_{m-p, n-r} \Phi_{p,r}, \quad (31.10)$$

где F_{kl} и Φ_{ij} — матрицы значений случайных чисел и формирующей функции соответственно. При этом формирующая функция определяется корреляцией моделируемого поля. Корреляционной функции (31.9) соответствует функция

$$\Phi(\rho) = \rho^{-\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{4}}(\beta\rho), \quad (31.11)$$

где $K_{\frac{1}{4}}(z)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента порядка $1/4$, имеющая значение при $\rho = 0$ порядка $1/2$. Однако интеграл от нее на любом конечном интервале существует. Поэтому она может быть использована в качестве формирующей функции.

Алгоритм вычисления $K_{\frac{1}{4}}(z)$ очень громоздкий и неудобный при расчетах, поэтому нами был выбран приближенный метод, заключающийся в аппроксимации корреляционной функции (31.9) функцией

$$K(x, y) = e^{-\beta(|x|+|y|)},$$

которой соответствует формирующая функция

$$\Phi(x, y) = \frac{2\beta^2}{\pi^2} K_0(\beta x) K_0(\beta y).$$

При этом значительно упрощается процесс суммирования по формуле (31.10).

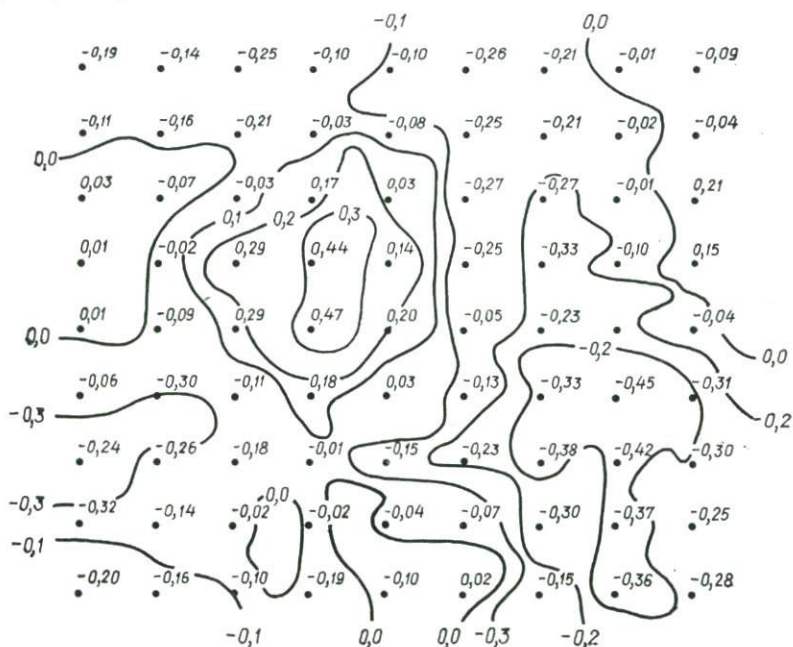


Рис. 62. Карта ошибок прогноза до усвоения новых данных.

Численные эксперименты на модели поля. Целью проведения экспериментов явилось получение оценок точности прогноза от различных параметров, характеризующих метод последовательного анализа наблюдений и имеющих значение для планирования измерений поля. В экспериментах было использовано то обстоятельство, что имелась возможность сравнить результаты прогноза поля с «истинным» полем, определяемым моделью в каждый момент времени. Прогноз осуществлялся по уравнению (31.1), но без учета члена $f(x, y)$.

В первом эксперименте находилась ошибка прогноза в зависимости от временного интервала предсказания (заблаговременности прогноза). В качестве единицы измерения времени была использована величина t^* , связанная с коэффициентом диффузии в уравнении (31.1):

$$t^* = \frac{\Delta^2}{2D}. \quad (31.12)$$

Интервал упреждения при прогнозировании выбирался от $5t^*$ до $15t^*$.

Измерения имитировались выборкой значений «истинного» поля. Были рассмотрены три варианта густоты сети станций, содержащей 13×13 , 9×9 и 7×7 точек, расположенных в узлах квадратной сетки с интервалами между станциями, равными соответственно 4, 6 и 8 расстояниям между узлами сетки, представляющей истинное поле. Таким образом, здесь и в дальнейшем в качестве единицы измерения расстояний в поле принимался шаг квадратной сетки модели.

Прогноз и исправление ошибок прогноза проводились по специальной программе последовательного анализа наблюдений, составленной в соответствии с алгоритмом метода для ЭВМ М-220.

На рис. 62 приведена карта поля ошибок прогноза, построенная для центральной области модели, содержащей 18×18 значений

ошибок предсказания истинного поля (с шагом сетки равным 2Δ), нормированных на величину среднеквадратичного отклонения поля. Интервал упреждения для этого случая был равен $15t^*$, а шаг между «измерениями» — 6Δ . Приведенные на рисунке изолинии ошибок свидетельствуют о том, что их величины в основном находятся в интервале $(-0,3; 0,3)$. Поле ошибок представляется случайным без явно выраженных неоднородностей. Это подтверждается анализом корреляционных функций поля ошибок прогноза (рис. 63), построенных в продольном (1) и поперечном (2) направлениях. Обе корреляционные функции практически совпадают при значениях аргументов, меньших интервала корреляции. Поэтому поле можно считать изотропным. Средняя по полю дисперсия ошибок прогноза $P(x, y)$, нормированная на дисперсию истинного поля, составила 0,05.

Поскольку сеть станций была регулярной по пространству, оптимальная интерполяция в каждый момент поступления измерений производилась с использованием спектрального алгоритма. Весовые функции интерполяции имели вид

$$g(x - x_k, y - y_k) = \frac{\sin 2\pi B(x - x_k) \sin 2\pi B(y - y_k)}{(2\pi B)^2 (x - x_k)(y - y_k)}. \quad (31.13)$$

Интерполяция выполнялась во все узлы исходной сети (с шагом, равным Δ). Для эффективного применения спектрального ал-

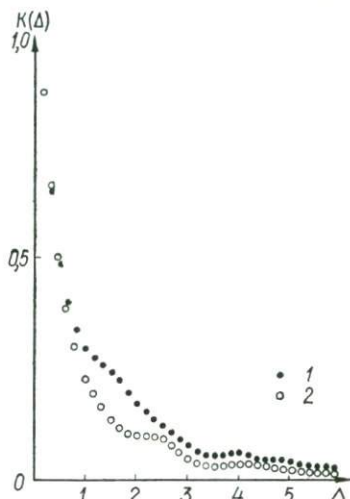


Рис. 63. Корреляционные функции поля ошибок прогноза.

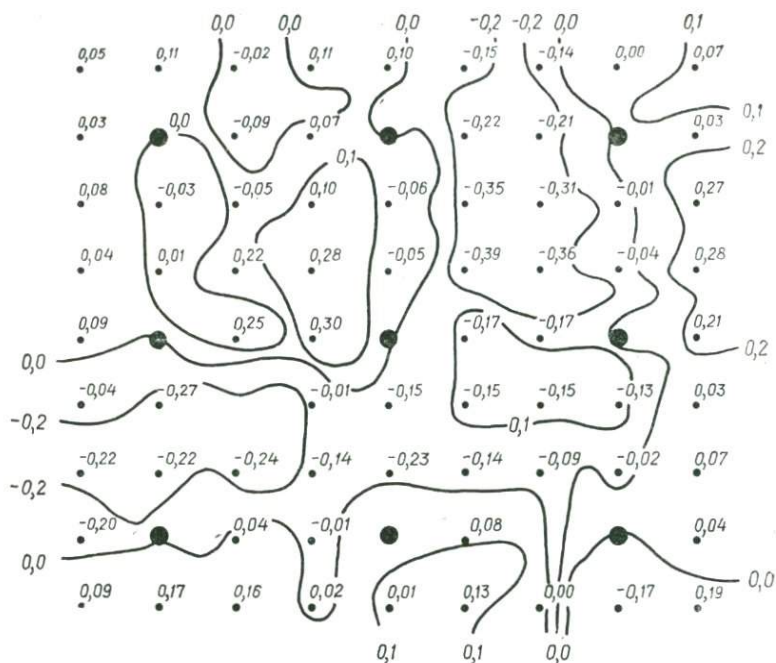


Рис. 64. Карта ошибок прогноза после оптимальной коррекции. Точками отмечено положение станций.

горитма интерполяции выполнена операция ограничения спектра поля ошибок в использовании пространственного косинус-фильтра.

Исправленная за счет содержащейся в наблюдениях информации карта ошибок прогноза приведена на рис. 64. Как следует из него, интервал значений ошибок сократился практически до величины $(-0,1; 0,1)$. Среднее значение дисперсии ошибки последовательного анализа P_1 для этой карты составило величину $0,03$.

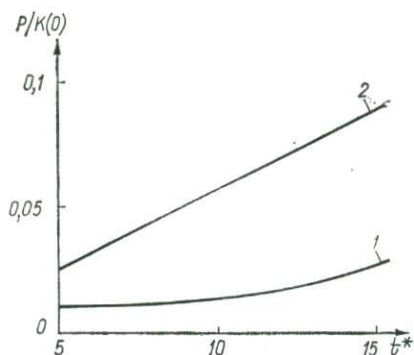


Рис. 65. Зависимость среднеквадратичной ошибки анализа (1) и прогноза (2) от интервала упреждения.

На рис. 65 приведены зависимости дисперсии ошибки прогноза и анализа от интервала упреждения при количестве станций измерений, равном 169. Из рисунка следует, что дисперсия ошибки прогноза растет пропорционально интервалу упреждения. Ошибка анализа остается почти постоянной для всех интервалов.

Во втором эксперименте исследовалась скорость сходимости последовательного анализа к устойчивому состоянию, которое определялось по установлению поля ошибок прогноза и интерполяции на постоянных уровнях, зависящих от времени упреждения и густоты «сети измерений». Эти уровни достигались, как правило, через 3—5 итераций, что свидетельствует о быстрой сходимости алгоритма. На рис. 66 показано поведение дисперсии ошибки прогноза с течением времени при интервале упреждения, равном $5t^*$, и количестве станций 169 (13×13). Скачкообразное падение дисперсии соответствует моментам поступления новых измерений, на основе которых производилась корректировка прогнозов. Из рисунка видно,

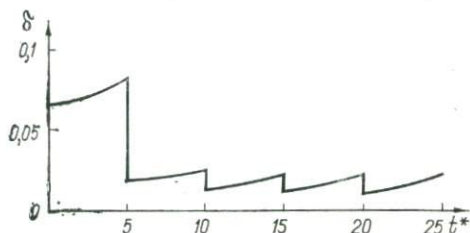


Рис. 66. Уменьшение среднеквадратичной ошибки прогноза в моменты поступления новых измерений.

что начиная со второго шага, кривая приобретает периодический характер, что свидетельствует об установлении алгоритма. Проведенные численные эксперименты показали высокую точность метода последовательного анализа и быструю сходимость его алгоритма. Выполнение подобных экспериментов на моделях реальных полей океана, как показывают расчеты, дает ценную информацию, касающуюся организации измерений и выбора параметров модели поля, применяемой в методе последовательного анализа.

§ 32. Организация сбора и обработки данных при последовательном анализе океанографической информации

Принципы системного анализа океанографических наблюдений и метод последовательного усвоения данных являются весьма перспективными для использования в автоматизированных системах сбора и обработки информации о физических полях океана. Основным назначением таких систем является прогнозирование наблюдаемых процессов и полей. Подобные системы должны последовательно минимизировать ошибки прогноза, усваивая новую информацию по мере ее поступления. Мы рассмотрим вопросы организации сбора и обработки информации в таких системах. Поскольку эти вопросы важны для их проектирования, в первую очередь речь пойдет о некоторых возможных вариантах океанографических информационных систем, использующих принцип последовательного анализа наблюдений.

Научно-исследовательское судно и автоматическая буйковая станция. В этом наиболее простом варианте системы измерительный

комплекс сосредоточен на автоматической буйковой станции — АБС (рис. 67). Обычно такая станция способна проводить измерения в отдельной точке поля с помощью приборов, расположенных на различных горизонтах. Информация, передаваемая для обработки на находящееся вблизи от станции научно-исследовательское судно, представляет собой дискретные отсчеты вертикальных профилей основных гидрологических параметров и скоростей течений. Подсистема обработки информации, базирующаяся на судовом вычислительном центре — СВЦ, должна осуществлять анализ и прогнозирование измеряемых вертикальных распределений параметров.

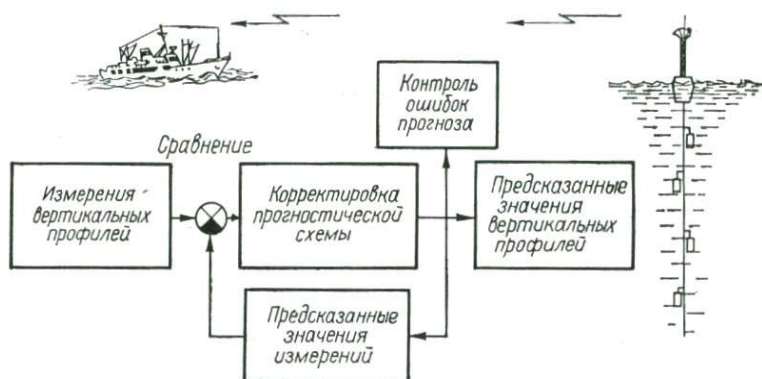


Рис. 67. Последовательная обработка информации при прогнозировании вертикального распределения параметров моря.

Прогноз вертикальных профилей полей океана методом последовательного анализа проводится на основе упрощенных гидродинамических моделей исследуемых процессов подобно тому, как осуществлялся прогноз вертикальных профилей составляющих скорости течений и температуры по наблюдениям на французском бую-лаборатории.

Запишем уравнение динамики для вертикального профиля параметра α в символическом виде

$$\hat{\alpha}_v(z, t_{v+1}) = A\alpha_v(z, t_v) + Q_v, \quad (32.1)$$

где $\hat{\alpha}_v(\cdot)$ — оценка величины профиля по данным измерений, имевшимся на момент времени t_v ; A — оператор, представляющий динамику системы; Q_v — функция возбуждения системы; z — глубина.

Начальными условиями для прогноза служат измерения вертикальных профилей поля в момент времени t_0 . Уравнение измерений в общем случае имеет вид

$$\beta_v(z_k, t_v) = B_k\alpha_v(z_k, t_v), \quad (32.2)$$

в котором B_k — оператор, представляющий характеристики прибора (или метода измерений) в точке z_k в момент времени t_v . В ка-

честве граничных условий используются измерения на верхнем и нижнем горизонтах.

Прогноз профиля на момент времени t_{v+1} производится с помощью соотношения (32.1) на судовом вычислительном центре. После приема (по радиоканалу) текущих измерений вертикальных профилей на АБС в момент времени t_{v+1} на СВЦ должна производиться корректировка прогноза в соответствии с методикой последовательного анализа наблюдений:

$$\hat{\alpha}_{v+1}^*(z, t_{v+1}) = \hat{\alpha}_v(z, t_{v+1}) + \sum_{k=1}^N \Delta_k(z, z_k, t_{v+1}) \times \\ \times [\beta_{v+1}(z_k, t_{v+1}) - \hat{\beta}_v(z_k, t_{v+1})]. \quad (32.3)$$

Весовые коэффициенты $\Delta_k(z, z_k, t_{v+1})$ находятся из системы уравнений (21.14).

Процедура корректировки состоит в оптимальной фильтрации значений невязок прогноза вдоль вертикального профиля, иначе — восстановления непрерывной функции по дискретным отсчетам с интервалом, равным среднему расстоянию между датчиками измерительных приборов. В первом приближении это расстояние d можно оценить по формуле

$$d \cong \frac{2\pi}{\lambda_c}, \quad (32.4)$$

где λ_c — (условная) верхняя граничная частота спектра невязок прогноза, которую легко можно определить в установившемся режиме фильтрации.

Для предсказания вертикальных распределений параметров обычно необходимо прогнозировать граничные условия. В рассматриваемом случае прогноз граничных условий может эффективно выполняться с помощью алгоритма одномерного фильтра Калмана. Если интервал упреждения предписан заранее, величина погрешности в определении граничных условий на момент прогноза оценивается по соответствующим формулам (см. § 27).

Общая схема последовательной обработки информации приведена на рис. 67. В практических ситуациях эта схема может быть дополнена информацией, получаемой непосредственно с борта научно-исследовательского судна.

Сеть автоматических буйковых станций и центр обработки данных. Размещение в океане некоторого количества автоматических буйковых станций позволяет поставить задачу расчета и прогноза исследуемых полей в районе, охваченном измерениями. Система датчиков, преобразователей информации и каналов связи обеспечивает поступление измерений в центр обработки данных в установленные заранее (синоптические) сроки.

Последовательность основных операций анализа и обработки информации в системе представлена на рис. 68. Наблюдения с сети станций первоначально используются для проведения объективного

анализа полей, включающего исследование статистической структуры полей, выполнение оптимальной интерполяции их значений и статистическое согласование взаимосвязанных полей. Результатами анализа являются карты пространственных полей для района измерений. Помимо самостоятельного интереса, который представляют собой карты пространственных распределений океанографиче-

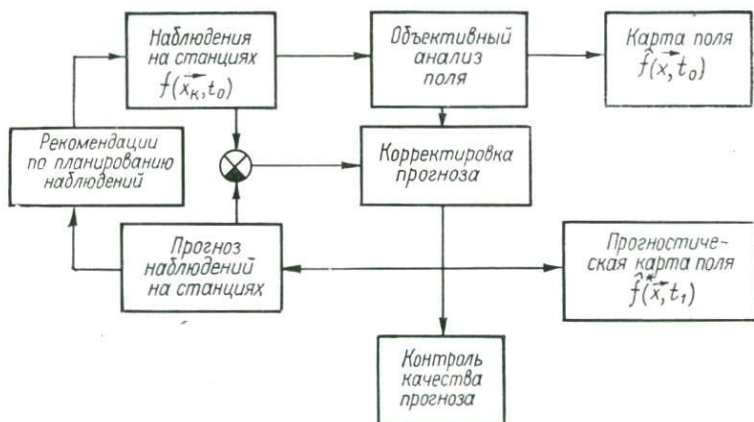


Рис. 68. Последовательный анализ синоптических наблюдений на стационарной сети автоматических буйковых станций.

ских параметров, величины полей в узлах расчетной сетки должны использоваться на каждом шаге вычислений по времени в качестве начальных условий при прогнозировании.

В общем виде уравнение динамики прогнозируемого поля имеет вид

$$\frac{\partial \alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} + \int_{(\vec{x})} \lambda(\vec{x}, \vec{y}, t) \alpha(\vec{y}, t) d\vec{y} = f(\vec{x}, t) \quad (32.5)$$

Уравнение измерений (32.2) сохраняет свою форму при соответствующем изменении оператора $B(\vec{x}_k, t)$, который в этом случае включает пространственное осреднение приборов.

Чтобы определить рациональную форму ячейки сети станций, обеспечивающую наиболее эффективное использование информации для построения карт, достаточно воспользоваться методикой планирования съемки. В частности, формулы типа (28.6) позволяют найти необходимый шаг сетки в зависимости от наперед заданной средней ошибки интерполяции в поле невязок прогноза. Однако поскольку статистика поля ошибок прогноза в установившемся режиме фильтрации заранее неизвестна, для планирования сети станций первоначально целесообразно провести пробные расчеты на модели поля.

Один из подобных примеров численного эксперимента был описан в § 31 применительно к модели поля, имевшей уравнение

диффузии в качестве уравнения динамики (32.6). В ходе расчетов на модели необходимо выбрать временные интервалы между измерениями на станциях между последовательными итерациями в численной схеме решения уравнения (32.6) для обеспечения сходимости и устойчивости вычислительного процесса. Эти и другие параметры численной схемы, от которых зависит качество прогноза, должны

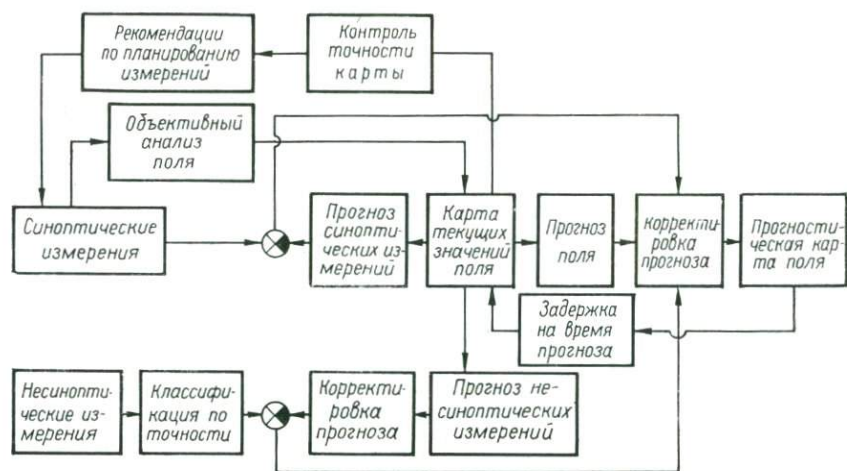


Рис. 69. Комплексное использование синоптической и асиноптической информации при системном изучении полей океана.

выводиться на печать для контроля точности расчета и принятия решений, касающихся планирования наблюдений на станциях.

Комплексное использование синоптической и несиноптической информации. Рассмотрим теперь наиболее общий случай большой океанографической информационной системы, которая включает в себя сеть автоматических буйковых станций, научно-исследовательские суда, оснащенные зондирующими и буксируемыми комплексами аппаратуры, а также различные средства дистанционного зондирования поверхности океана (например, спутниковую систему сбора и передачи информации). Основой системы должен являться береговой центр сбора и обработки океанографической информации, поступающей от различных измерительных средств. Этот центр решает задачи расчета и прогноза полей океана и атмосферы над ним в районе исследований, последовательного усвоения текущей информации о состоянии полей и задачи управления сбором и обработкой информации.

Работа стационарных измерительных средств — сети буйковых станций — в структуре системы может быть организована подобно работе сети метеорологических станций, информация с которых поступает в определенные часы (синоптические сроки). Мы будем называть эту информацию синоптической. Зондирования полей по вертикали, проводимые с нис, измерения с помощью буксируемых

комплексов аппаратуры, попутные измерения с судов, пересекающих район и, наконец, дистанционные зондирования поверхности океана со спутников являются примерами несиноптических наблюдений. Поскольку их использование не менее важно, чем обработка синоптических данных, возникает задача оптимального усвоения несиноптической информации.

В главе IV приведены теория последовательного усвоения несиноптических наблюдений и примеры построения карт полей с их использованием. Здесь мы рассмотрим общую схему сбора и обработки синоптической и несиноптической информации. Условимся считать, что синоптические наблюдения выполняются идентичными приборами и имеют одинаковую точность. Напротив, несиноптические измерения существенно различаются по точности, поскольку методы и средства проведения измерений различны.

Общая схема комплексного использования информации для расчета и прогноза полей в больших океанографических системах сбора и обработки данных приведена на рис. 69. Центральным элементом этой схемы служит карта текущих значений поля, хранящаяся в памяти ЭВМ центра обработки данных. Карта постоянно обновляется за счет анализа поступающей информации. Она же используется в качестве начальных условий для прогнозирования поля.

Синоптическая и несиноптическая информации параллельно применяются для последовательной корректировки прогноза поля. Отличие этих двух информационных потоков заключается в том, что несиноптические наблюдения предварительно классифицируются по точности, а их прогностические значения приводятся к соответствующему уровню «репрезентативности».

Карта текущих значений поля в каждый момент времени t_v представляет собой совместный результат объективного анализа синоптических наблюдений и исправленной на основе комплексного усвоения информации карты прогностических значений поля на момент времени t_v .

Контроль точности карты — среднее значение ошибок оптимальной интерполяции и прогноза — служит критерием для рационального отбора синоптической информации, т. е. планирования измерений в системе. Выходом системы являются карты прогностических и диагностических значений измеряемых и рассчитываемых полей в районе проведения исследований.

Приведенное схематическое описание возможных вариантов океанографических информационных систем, действующих по принципу последовательного анализа информации, представляет собой попытку обрисовать общую последовательность операций по сбору и обработке наблюдений. Информационные блок-схемы системы (рис. 67—69) нуждаются в дальнейшем уточнении с учетом конкретных динамических моделей процессов и полей, изучаемых в океане.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрищенко А. А., Беляев В. И., Ермоленко А. И., Тимченко И. Е. Исследование поля поверхностной температуры Черного моря статистическими методами.— Материалы Всесоюз. симпоз. по изуч. Чер. и Средизем. морей. Ч. 1. К., 1973, с. 27—31.
2. Балакришнан А. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1974. 260 с.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., Физматгиз, 1969. 367 с.
4. Беляев В. И., Болдырев В. С. Применение теории случайных функций к изучению морских течений.— Океанология, 1963, № 3, вып. 6, с. 953—961.
5. Беляев В. И. Обработка и теоретический анализ океанографических наблюдений. К., «Наук. думка», 1973. 296 с.
6. Беляев В. И., Тимченко И. Е. О применении объективного и четырехмерного анализа в океанографии.— Мор. гидрофиз. исслед., 1972, № 2, с. 80—92.
7. Беляев В. И., Тимченко И. Е. Размещение измерений и точность восстановления поля при автоматизированном сборе и обработке гидрофизической информации.— Автоматизация науч. исслед. морей и океанов. Симпоз., 1968 г. Ч. 1. Севастополь, 1969. с. 327—341.
8. Беляев В. И., Тимченко И. Е., Ярин В. Д. Статистическое согласование гидрофизических полей.— Мор. гидрофиз. исслед., 1970, № 1, с. 81—97.
9. Беляев В. И., Ермоленко А. И., Жилина А. И., Тимченко И. Е. Объективный анализ поля температуры Черного моря.— ДАН УССР. Сер. Б, 1968, № 5, с. 421—424.
10. Беляев В. И., Ермоленко А. И., Жилина А. И., Тимченко И. Е. О возможности применения оптимальной интерполяции при построении карты температурного поля Черного моря.— Мор. гидрофиз. исслед. № 1, 1969, с. 193—211.
11. Беляев В. И., Доронин И. Ф., Ермоленко А. И. и др. Объективный анализ поля концентрации стронция-90 в Атлантическом океане.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1969, 5, № 8, с. 860—867.
12. Блинова Е. Н. Гидродинамическая теория волн давления и центров действия атмосферы.— ДАН СССР, 1943, 39, № 3, с. 243—248.
13. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и упр. Вып. 1. М., 1974. 406 с.
14. Борисенков Е. П. Физико-статистические методы анализа и предвычисления метеорологических полей.— Тр. Аркт. и Антаркт. НИИ, 1963, 263. 243 с.
15. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М., «Мир», 1972. 544 с.
16. Бреховских Л. М., Кошляков М. И., Федоров К. Н. и др. Полигонный гидрофизический эксперимент в тропической зоне Атлантики.— ДАН СССР, 1971, 198, № 6, с. 1434—1437.
17. Бутрова Н. В., Тимченко И. Е., Ярин В. Д. Последовательный анализ наблюдений на стационарной сети океанических станций.— Мор. гидрофиз. исслед. № 1, Севастополь, 1975, с. 91—101

18. *Власова И. Л., Сонечкин Д. М.* Динамико-стохастические уравнения для прогноза погоды.— Тр. Гидрометцентра СССР, 1976, вып. 181, с. 3—97.
19. *Гандин Л. С.* Объективный анализ метеорологических полей. Л., Гидрометеиздат, 1963. 287 с.
20. *Гандин Л. С., Каган В. Л.* Статистические методы интерпретации метеорологических данных. Л., Гидрометеиздат, 1976. 280 с.
21. *Дроздов О. А., Шепелевский А. А.* Теория интерполяции в стохастическом поле метеорологических элементов и ее применение к вопросам метеорологических карт и рационализации сети.— Тр. НИУ ГУГМС, 1946. Сер. 1, вып. 13, с. 65—115.
22. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961. 284 с.
23. *Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч.* Пространство состояний в теории управления. М., Физматгиз, 1970. 397 с.
24. *Джеймс Р.* Прогноз термической структуры океана. Л., Гидрометеиздат, 1971. 160 с.
25. *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения. Вып. 2. 1973. 287 с.
26. *Добрышман Е. М.* Некоторые вопросы, связанные с объективным анализом метеорологической информации по существующей сети станций. М., Изд-во АН СССР, 1963. 234 с.
27. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М., ФМ, 1963. 856 с.
28. *Дубина Р. Б., Николаев Ю. В.* Автоматический ввод и обработка океанологической информации на ЭВМ «Урал-2».— Тр. Ин-та океанологии АН СССР, 1964, № 75, с. 69—72.
29. *Ермоленко А. И., Есюнин Р. Е., Солодова С. М.* Построение карты рельефа дна гребневой части хребта Рейкьянес методом объективного анализа.— Мор. гидрофиз. исслед. № 5, Севастополь, 1971, с. 216—225.
30. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., «Мир», 1971. 390 с.
31. *Каменков В. М.* Основы динамики океана. Л., Гидрометеиздат, 1973. 240 с.
32. *Кибель И. А.* Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. М., Гостехиздат, 1957. 375 с.
33. *Китайгородский С. А.* Физика взаимодействия атмосферы и океана. Л., Гидрометеиздат, 1970. 283 с.
34. *Колесников А. Г. и др.* Автоматизированный комплекс для исследования турбулентных процессов в океане.— Автоматизация науч. исслед. морей и океанов. Ч. 1. Симпоз. 1971 г. Севастополь. 1972, с. 24—34.
35. *Колесников А. Г., Неуймин Г. Г.* Основные итоги совместных советско-французских исследований по теме «Взаимодействие атмосферы и океана». Сов.-фр. исслед. Севастополь, МГИ АН УССР, 1972, с. 6—14.
36. *Колесников А. Г., Ермоленко А. И., Новоселов А. А., Тимченко И. Е.* К методике построения карт химических элементов для акватории океана, недостаточно освещенной наблюдениями.— Мор. гидрофиз. исслед. № 3, Севастополь, 1976, с. 5—16.
37. *Колмогоров А. Н.* Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве.— Бюл. Моск. ун-та 1941, № 2, с. 7—18.
38. *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей.— Изв. АН СССР. Сер. мат. 1941, 5, № 11, с. 3—11.
39. *Коняев К. В.* Спектральный анализ случайных процессов и полей. М., «Наука», 1973. 168 с.
40. *Корт В. Г.* О крупномасштабном взаимодействии океана и атмосферы.— Океанология, 1970, 10, вып. 2, с. 222—239.
41. *Котельников В. А.* О пропускной способности эфира. М., Изд-во Упр. связи РККА, 1933. 62 с.
42. *Кошляков М. Н.* Сглаживание результатов океанографических наблюдений — Океанология, 1964, 4, вып. 3, с. 488—496.
43. *Кошляков М. Н.* Объективный анализ поля плотности в океане в приложении

- к глубинным горизонтам Южной и Экваториальной Атлантики.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1973, 9, № 1, с. 520—538.
44. Кошляков М. Н. Результаты наблюдений на атлантическом полигоне 1970 г. в свете некоторых моделей свободных волн Россби.— Океанология, 1973, 13, вып. 5, с. 760—767.
 45. Кошляков М. Н., Грачев Ю. М. Среднемасштабные течения на гидрофизическом полигоне в тропической Атлантике.— «Атлантический гидрофизический полигон-70». М., «Наука», 1974, с. 163—180.
 46. Крепон М., Гонелла Ж., Лакомб А., Станислас Г. Французская часть исследований по совместной франко-советской программе.— В кн.: Советско-французские исследования. Севастополь, 1972, с. 13—25.
 47. Крейн М. Г. О проблеме экстраполяции А. Н. Колмогорова.— ДАН СССР, 1945, 46, с. 306—309.
 48. Ламли Дж. Л., Пановский Г. А. Структура атмосферной турбулентности. М., «Мир», 1966. 220 с.
 49. Лебедев В. Л., Айзатуллин Т. А., Хайлов К. М. Океан как динамическая система. Л., Гидрометеиздат, 1974. 250 с.
 50. Линейкин П. С. Основные вопросы динамической теории бароклинного слоя моря. Л., Гидрометеиздат, 1957. 150 с.
 51. Лионс Ж. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. М., «Мир», 1974. 287 с.
 52. Мартынов М. В., Тимченко И. Е. Планирование наблюдений океанографических процессов в связи с задачами оптимальной фильтрации.— Мор. гидрофиз. исслед. № 2, Севастополь, 1974, с. 174—188.
 53. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Л., Гидрометеиздат, 1967. 356 с.
 54. Марчук Г. И. Об уравнениях динамики бароклинного океана.— ДАН СССР, 1967, 173, № 6, с. 1317—1320.
 55. Марчук Г. И., Кочергин В. П. О вертикальной структуре течений в бароклинном океане.— Метеорология и гидрология, 1968, № 2, с. 3—10.
 56. Машкович С. А. Применение в целях четырехмерного анализа методов согласования метеорологических полей и оптимальной интерполяции.— Тр. ГМИ, 1972, вып. 103, с. 3—12.
 57. Машкович С. А., Вейль И. Г. Численные эксперименты по четырехмерному объективному анализу на основе спектральной прогностической модели.— Метеорология и гидрология, 1972, № 3, с. 3—15.
 58. Менишуткин В. В. Математическое моделирование популяций и сообществ водных животных. М., «Наука», 1971. 316 с.
 59. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. Т. 1-2. М., «Сов. радио», 1961.
 60. Моисеев Г. А., Тимченко И. Е. Планирование сети станций для измерений случайных составляющих физических полей океана.— Мор. гидрофиз. исслед., № 5, Севастополь, 1971, с. 124—143.
 61. Моисеев Г. А., Тимченко И. Е. Рационализация съемки пространственно-временных полей океана для построения прогностических карт.— Мор. гидрофиз. исслед., № 4, 1973, с. 132—148.
 62. Монин А. С. Прогноз погоды как задача физики. М., «Наука», 1969. 184 с.
 63. Монин А. С. Основные особенности морской турбулентности.— Океанология, 1970, 10, вып. 2, с. 240—248.
 64. Монин А. С., Обухов А. М. Малые колебания атмосферы и адаптация метеорологических полей.— Изв. АН СССР. Сер. Геофизика, 1958, № 11, с. 1360—1373.
 65. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1-2, М., «Наука», 1967.
 66. Монин А. С., Каменкович В. М., Корт В. Г. Изменчивость Мирового океана. Л., Гидрометеиздат, 1974. 262 с.
 67. Нелепо Б. А. Ядерная гидрофизика. М., «Атомиздат», 1970. 244 с.
 68. Нелепо Б. А., Зудин О. С. Статистический анализ информации о радиоактивном загрязнении океана. Л., Гидрометеиздат, 1975. 112 с.

69. *Обухов А. М.* Статистическое описание непрерывных полей.— Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, 1954, № 24, с. 3—42.
70. *Обухов А. М.* О статистически ортогональных разложениях эмпирических функций.— Изв. АН СССР. Сер. Геофизика, 1960, № 3, с. 432—439.
71. *Овсянникова О. А.* Прогнозирование морских неперіодических течений на основе метода линейной экстраполяции случайных процессов.— Тр. ГОИНА, 1965, вып. 85, с. 173—184.
72. *Озмидов Р. В.* Горизонтальная турбулентность и турбулентный обмен в океане. М., «Наука», 1968. 199 с.
73. *Острем К. Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. М., «Мир», 1973. 321 с.
74. *Портер У.* Современные основания общей теории систем. М., «Наука», 1974. 344 с.
75. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., «ФМ», 1957. 659 с.
76. *Саркисян А. С.* Основы теории и расчет океанических течений. Л., Гидрометеоиздат, 1966. 123 с.
77. *Саркисян А. С.* Динамика неперіодических морских течений.— Изв. АН СССР, 1967, 3, № 9, с. 915—927.
78. *Солодова С. М., Тимченко И. Е., Хлопушина С. И.* Моделирование на ЭВМ нестационарных случайных океанографических процессов.— Мор. гидрофиз. исслед. № 1. Севастополь, 1976, с. 56—65.
79. *Солодова С. М., Тимченко И. Е., Хлопушина С. И.* Прогноз вертикальной структуры течений в море на основе динамико-стохастической модели.— Мор. геофиз. исслед., № 4, Севастополь, 1976, с. 57—65.
80. *Сонечкин Д. М.* Динамико-стохастический подход к задаче объективного анализа данных разнородных гидрометеорологических наблюдений.— Тр. ГМЦ, 1976, вып. 181, с. 3—97.
81. *Тимченко И. Е.* Прогнозирование гидрофизических процессов на основе фильтров Калмана.— Мор. гидрофиз. исслед., № 1, Севастополь, 1973, с. 99—109.
82. *Тимченко И. Е.* Предсказание вектора скорости течения в море по временно-му ряду наблюдений.— Мор. гидрофиз. исслед., № 2, Севастополь, 1973, с. 105—118.
83. *Тимченко И. Е., Ярин В. Д.* Статистический анализ рельефа дна в Альборановом море.— Мор. гидрофиз. исслед. № 5, Севастополь, 1971, с. 207—215.
84. *Тимченко И. Е., Ярин В. Д.* Численные эксперименты по расчету случайных полей океана на ЭВМ спектральным методом.— Автоматизация науч. исслед. морей и океанов. 5-й Всесоюз. симпоз. Севастополь, 1972, с. 19—23.
85. *Тимченко И. Е., Ярин В. Д.* Последовательный анализ вертикального распределения температуры в Лионском заливе.— Мор. гидрофиз. исслед., № 3, Севастополь, 1973, с. 116—129.
86. *Тимченко И. Е., Хлопушина С. И.* Автоматизация моделирования и адаптивная фильтрация исследуемых процессов на ЭВМ.— Тр. конф. Автоматизация науч. исслед. на основе применения ЭВМ. Новосибирск, 1974, с. 116—129.
87. *Фукс-Рабинович М. С.* К вопросу о вариационном методе согласования полей геопотенциала и скорости ветра в рамках соленоидальной модели атмосферы.— Тр. Гидрометцентра СССР, 1970, вып. 54, с. 86—94.
88. *Фельдбаум А. И.* Теоретические основы и методы расчета установившихся морских течений. М., Изд-во АН СССР, 1960. 127 с.
89. *Фельдбаум А. А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. М., ФМ, 1966. 408 с.
90. *Филиппс О. М.* Динамика верхнего слоя океана. М., «Мир», 1969. 267 с.
91. *Фомин Л. М., Ямпольский А. Д.* Локальная кинематика синоптических вихревых возмущений в поле скорости океанских течений.— ДАН СССР, 1977, 232, № 1, с. 50—53.
92. *Цыбаков Б. С., Яковлев В. П.* Радиотехника и электроника, 1965, 4, № 3, с. 49—57.
93. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М., ИЛ, 1963, 829 с.

94. Шкурский Б. И. Метод математического моделирования двумерных случайных полей.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 6, с. 141—145.
95. Штокман В. Б. Избранные труды по физике моря. Л., Гидрометеониздат, 1970. 336 с.
96. Шулейкин В. В. Физика моря. М., «Наука», 1968. 1083 с.
97. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Л., Гидрометеониздат, 1963. 404 с.
98. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций.— Успехи мат. наук, 1952, 7, № 5, с. 3—168.
99. Яглом А. М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1955, 4, с. 24—79.
100. Balakrishnan A. V. A new computing technique in system identification.— J. Comput. and Syst. Sci., 1968, 2, p. 3—27.
101. Balakrishnan A. V. Foundation of the state space theory. J. Comput. and Syst. Sci., 1967, 1, p. 17—31.
102. Begis D. Crepon M. On the generation of currents by winds: an identification method to determine oceanic parameters.— Proc. Lab. Océanogr. phys. Paris, 1975, p. 1—31.
103. Bengtsson L., Gustavsson N. Assimilation of non-synoptic observations.— Tellus, 1972, 24, N 5, p. 383—399.
104. Blinova E. Hydrodynamical long-range weather forecasting in the USSR. WMO, Boulder, Colo, 1964, p. 34.
105. Blinova E. Kibel J. Hydrodynamical methods of short- and long-range weather forecasting in the USSR.— Tellus, 1959, 9, N 4, p. 447—463.
106. Brekhovskikh L. M. Fedorov K. N. Fomin L. M. e. a. Large-scale multi-buoy experiment in the Tropical Atlantic. Deep-Sea Res., 1971, 18, p. 1189—1206.
107. Brogan W. L. Optimal control theory to systems described by partial differential equations. New York, Acad. press, 1968. 300 p.
108. Bryan K., Cox M. D. The numerical investigation of the general ocean circulation.— MWR, 1967, 19, N 1, p. 3—27.
109. Charney J. G. Non-linear theory of a wind-driven homogeneous layer near the Equator.— Deep-Sea Res., 1960, 6, N 4, p. 303—310.
110. Charney J. Halem M. Jastrow R. Use of incomplete historical data to infer the present state of atmosphere.— J. Atmos. Sci., 1969, 26, p. 1160—1163.
111. Cressman G. Barotropic divergence and the very long atmospheric waves.— MWR, 1958, 86, N 8, p. 87—89.
112. Cressman G. An operational objective analysis system.— MWR, 1959, 87, N10, p. 24—35.
113. Cressman G. Hubert W. A study of numerical forecasting errors.—MWR, 1957, 85, N 7, p. 38—42.
114. Epstein E. S. Stochastic dynamic prediction.—Tellus, 1969, 21, N 6, p. 739—759.
115. Epstein E. S. The role of initial uncertainties in prediction.— J. Appl. Meteorol., 1969, 8, p. 67—73.
116. Falb P. L. Infinite-dimensional filtering: the Kalman-Bucy filter in Hilbert space.— Inform. and Contr., 1967, 11, p. 3—73.
117. Fjörtoft R. On the use of space-smoothing in physical weather forecasting.— Tellus, 1955, 7, N 4, p. 462—480.
118. Fleming W. H. Some Markovian optimization problems.— J. Math. and Mech., 1963, 12, N 1, p. 234—261.
119. Fleming W. H. Quality and a priori estimates in Markovian optimization problems.— J. Math. Anal. and Appl., 1966, 16, p. 17—27.
120. Fleming W. H. Optimal control of partially observable diffusions.— SIAM J. Contr., 1968, 6, p. 181—206.
121. Friedman A. Shinbrot M. The initial value problem for the linearized equations of water waves.— J. Math. and Mech., 1967, 27, p. 34—42.
122. Hidaka K. A hydrodynamical computation of non-linear equatorial flow.— Rec. Oceanogr, Works Jap., 1963, 7, N 1, p. 8—15.

123. *Hwang M., Seinfeld J. H., Gavalas G. R.* Optimal least-square filtering and interpolation in distributed parameter systems.— *J. Math. Anal. and Appl.*, 1972, **39**, N 1, p. 121—137.
124. *Kailath T.* A view of three decades of linear filtering theory.— *IEEE Trans Inform. Theory*, 1974, **11—20**, N 2, p. 3—44.
125. *Kalman R. E.* A new approach to linear filtering and prediction problems.— *ASME. J. Basic Eng.*, 1960, **82**, p. 127—139.
126. *Kalman R. E., Bucy R. S.* New results in linear prediction and filtering theory. *J. Basic Eng.*— *Trans. ASME, D.*, 1961, **83**, p. 21—39.
127. *Kalman R. E.* Canonical structure of linear dynamical systems.— *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1962, **48**, p. 231—253.
128. *Kalman R. E.* Mathematical description of linear dynamical systems.— *SIAM J. Contr.*, 1963, **1**, p. 3—26.
129. *Kalman R. E.* Algebraic structure of linear dynamical systems.— *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1965, **54**, p. 16—41.
130. *Kalman R. E.* Toward a theory of difficulty of computation in optimal control.— *Proc. 4th IBM Sci. Comput. Symp.*, 1966, p. 121—129.
131. *Kalman R. E.* Algebraic aspects of the theory of dynamical systems in differential equations and dynamical systems. *Acad. press*, 1967. 160 p.
132. *Kalman R. E.* On partial realization of a linear input/output map.— *Guillemain Anniv. Vol.*, Holt, 1970, p. 211—234.
133. *Kasahara A.* On certain finite-difference methods for fluid dynamics.— *MWR*, 1965, **93**, N 1, p. 27—31.
134. *Kasahara A.* Simulation experiments for meteorological observing systems for GARP.— *NCAR, Boulder*, 1971, p. 14—24.
135. *Kushnir H. J.* Filtering for linear distributed parameter systems.— *SIAM J. Contr.*, 1970, **8**, p. 208—217.
136. *Leith C. E.* Numerical simulation of the earth's atmosphere.— *Meth. Comput. Phys.* **4**. N. Y., Ac., 1965, p. 121—133.
137. *Leith C.* Lagrangian advection in an atmospheric model.— *WMO Techn. Notes*, 1965, N 66. 120 p.
138. *Mc Williams J., Flierl G.* Optimal, quasi-geostrophic wave analysis of MODE array data.— *Deep-Sea Res.*, 1976, **23**, p. 285—300.
139. *Menhara R. K.* On the identification of variances and adaptive Kalman filtering.— *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1970, **AC—15**, N 2, p. 126—130.
140. *Mintz V.* Very long-term global integration of primitive equations of atmospheric motion.— *WMO Techn. Notes*, 1965, N 66. 30 p.
141. *Mijakoda K., Talagrand O.* The assimilation of past data in dynamical analysis. P. 1—2.— *Tellus*, 1971, **23**, Nos. 4—5, p. 73—81.
142. *Miyakawa H.* Sampling theorem of stationary stochastic variables in multi-dimensional spaces.— *J. Inst. Elec. Comm. Eng. (Japan)*, 1959, N 42, p. 111—117.
143. *Morel P., Lefevre C., Rabreau G.* On initialization and non-synoptic data assimilation.— *Tellus*, 1971, **23**, N 3, p. 197—206.
144. *Mortensen R. E.* Stochastic optimal control with noisy observations.— *Int. J. Contr.*, 1966, **4**, p. 133—142.
145. *Munk W. H.* On the wind-driven ocean circulation.— *J. Meteorol.*, 1950, N 7, p. 31—36.
146. *Munk W. H., Carrier G. F.* The wind-driven circulation in ocean basins of various shapes.— *Tellus*, 1969, **2**, p. 27—43.
147. *Munk W., Phillips N.* Coherence and band structure of inertial motion in the sea.— *Revs Geophys.*, 1968, **6**, N 4, p. 216—229.
148. *Nishimura T.* On the apriory information in sequential estimation problems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1966, **AC—11**, N 2, p. 147—149.
149. *Pastoukhov A. F., Timchenko I. E.* Structure des champs de courants dans la partie Nord — Ouest de la Méditerranée. Paris., Publ. CNEXO, 1972, p. 73—81.
150. *Petersen D. P., Middleton D.* Sampling and reconstruction of wave-number-limited functions in N-dimensional Euclidean spaces.— *Inform. and Contr.*, 1962, **5**, p. 81—104.

151. *Petersen D. P.* Smoothing and differential operators for digital processing of sampled field-data. NEREM 63 Record, Lewis Winner. N. Y., 1963, p. 153—172.
152. *Petersen D. P., Middleton D.* On representative observations.— *Tellus*, 1963, 15, p. 387—405.
153. *Petersen D. P.* On the concept and implementation of sequential analysis for linear random fields.— *Tellus*, 1968, 20, p. 78—93.
154. *Petersen D. P.* Static and dynamic constraints on the estimation of space-time covariance and wavenumber-frequency spectral fields.— *J. Atmos. Sci.*, 1973, 30, p. 141—152.
155. *Petersen D. P., Middleton D.* Reconstruction of multi-dimensional stochastic fields from discrete measurement of amplitude and gradient.— *Inform. and Contr.*, 1964, 7, p. 62—84.
156. *Petersen D. P., Truske T. N.* A study of objective analysis techniques for meteorological fields. Albuquerque, 1969. 60 p.
157. *Petersen D. P., Truske T. N.* Spectral analysis and data processing for multi-variable multidimensional fields. Albuquerque, 1970. 45 p.
158. *Phillips N.* On the problem of initial data for primitive equations.— *Tellus*, 1960, 12, N 2, p. 78—86.
159. *Phillips N.* Numerical weather prediction.— *Adv. Comput.*, 1960, 1, 170 p.
160. *Phillips N.* Geostrophic motion.— *Revs. Geophys.*, 1963, 1, N 2, p. 104—114.
161. *Phillips N.* The equations of motion for shallow rotating atmosphere and traditional approximation.— *J. Atmos. Sci.*, 1966, 23, N 5, p. 626—628.
162. *Robinson A., Schmitz W.* The mid-ocean dynamics experiment (MODE): meso-scale eddies at the general circulation of the ocean.— *Procès-verb.* 1974, 13, p. 27—40.
163. *Robinson A., Stommel H.* The oceanic thermocline and associated thermocline convection.— *Tellus*, 1959, 11, N 3, p. 295—308.
164. *Rosby C. G.* Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of the semi-permanent centres of action.— *J. Mar. Res.*, 1939, 2, 38, N 1, p. 35—38.
165. *Rutherford I. D.* Data assimilation by statistical interpolation of forecast error fields.— *J. Atmos. Sci.*, 1972, 29, p. 809—815.
166. *Sakawa Y.* Optimal filtering in linear distributed parameter systems.— *Int. J. Contr.*, 1972, 16, N 1, p. 101—117.
167. *Sasaki Y.* An objective analysis based on the variational method.— *J. Meteorol. Soc., Japan*, 1958, 36, N 3, p. 78—84.
168. *Sasaki Y.* Proposed inclusion of time variation terms, observational and theoretical, in numerical variational objective analysis.— *J. Meteorol. Soc. Jap.*, 1969, 47, p. 115—124.
169. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with the primitive equations. I. *Mon. Weather Rev.*, 1963, 91, N 3, p. 7—27.
170. *Smagorinsky J.* Some aspects of general circulation.— *QJ RMS*, 1964, 90, N 383, p. 24—37.
171. *Smagorinsky J.* Problems and promises of deterministic extended-range forecasting.— *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, 1969, p. 83—97.
172. *Sorenson A.* Kalman filtering technique.— *Adv. Contr. Syst.*, 1965, p. 160—230.
173. *Stommel H.* Wind-drift near the equator.— *Deep-Sea Res.*, 1960, 6, N 4, p. 298—302.
174. *Stommel H., Veronis G.* Steady convective motion in a horizontal layer of fluid, etc.— *Tellus*, 1957, 9, p. 401—407.
175. *Sverdrup H. V.* Wind-driven currents in a baroclinic ocean.— *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1947, 33, p. 211—226.
176. *Szwallow J.* Variable currents in Mid-Ocean.— *Oceanus*, 1976, 19, N 3, p. 36—51.
177. *Thompson P. D.* Notes on the theory of large-scale disturbances in atmospheric flow with applications to numerical weather prediction.— *Geophys. Res. Pap.*, 1952, N 16, p. 23—29.
178. *Thompson P. D.* Optimum smoothing of two-dimensional fields.— *Tellus*, 1956, 8, p. 384—393.

179. *Thompson P. D.* Uncertainty of initial state as a factor in the predictability of large-scale atmospheric flow patterns.— *Tellus*, 1957, 9, p. 275—295.
180. *Thompson P. D.* A dynamical method of analysing meteorological data.— *Tellus*, 1961, 13, p. 3—19.
181. *Thompson P. D.* Numerical weather analysis and prediction.— New York, Macmillan, 1961. 360 p.
182. *Timchenko I. E.* Optimal filtering and prediction of observations in oceanography on the basis of Kalman filters.— Proc. IEEE Int. Conf. Halifax, Can., 1974, p. 216—222.
183. *Timchenko I. E.* Optimal filtering and prediction of oceanographical observations. II Colloq. int. expl. océans. Bordeaux, 1974, p. 321—329.
184. *Tzafestas S. G.* State-observer design for linear sequential machines.— *Int. J. Syst. Sci.*, 1973, 4, N 1, p. 33—41.
185. *Tzafestas S. G., Nightingale J. M.* Optimal filtering, smoothing and prediction in linear distributed systems.— *Proc. IEEE*, 1968, 115, p. 281—293.
186. *Veronis G., Stommel H.* The action of variable wind stress on a stratified ocean.— *J. Mar. Res.*, 1956, N 1, p. 43—75.
187. *Wang P. K. C.* Control of a distributed parameter system with a free boundary.— *Int. J. Contr.*, 1967, 5, N 4, p. 121—137.
188. *Weiss L., Kalman R. E.* Contributions to linear system theory.— *Int. J. Eng. Sci.*, 1965, 3, p. 31—62.
189. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York, Wiley and Sons, 1949. 200 p.
190. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, with engineering applications. New York, Technol. press and Wiley, 1949. 240 p.
191. *Wong E.* Recent progress in stochastic processes — a survey. *IEEE Trans. Inform Theory*, 11—19, May, 1973, p. 262—275.
192. *Yaglom A. M.* Second-order homogeneous random fields.— *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Stat. and Problem.*, 1961, 2, p. 78—94.
193. *Zakai M., Ziv J.* Lower and upper bounds on the optimal filtering of certain diffusion processes.— *IEEE*, 1972, IT—18, N 3, p. 37—44.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
<i>Глава I.</i> Задачи физики океана и современная теория систем	4
§ 1. Прикладные аспекты океанологических исследований	4
§ 2. Автоматизация процессов сбора и обработки океанологической информации	9
§ 3. Системный подход к анализу явлений в океане	16
§ 4. Проблема прогнозирования и фильтрации процессов и полей в океане	22
§ 5. Общие принципы планирования наблюдений в океане	31
<i>Глава II.</i> Оптимальная фильтрация наблюдений случайных океанологических процессов	37
§ 6. Оптимальная фильтрация временных рядов наблюдений как задача теории управления	37
§ 7. Алгоритм оптимальной фильтрации временных рядов океанологических наблюдений	45
§ 8. Идентификация параметров моделей стационарных гидрофизических процессов	48
§ 9. Прогнозирование стационарных гидрофизических процессов методом Калмана	53
§ 10. Моделирование нестационарных гидрофизических процессов	60
§ 11. Автоматизация моделирования и прогнозирования на ЭВМ нестационарных гидрофизических процессов	67
<i>Глава III.</i> Объективный анализ пространственных случайных полей океана	74
§ 12. Статистическое моделирование пространственных случайных полей океана	74
§ 13. Корреляционный алгоритм оптимальной интерполяции	78
§ 14. Построение карт гидрофизических полей методом оптимальной интерполяции	81
§ 15. Построение карт пространственного распределения кислорода по наблюдениям в Тропической Атлантике	85
§ 16. Спектральный алгоритм оптимальной интерполяции	96
§ 17. Применение спектрального алгоритма интерполяции в задачах построения карт полей океана	106
§ 18. Статистическое согласование океанографических полей	113
§ 19. Уточнение карты поля кислорода на основе измерений поля солёности	122

<i>Глава IV.</i>	Последовательные методы прогнозирования полей океана	128
§ 20.	Об использовании методов четырехмерного анализа наблюдений в метеорологии	128
§ 21.	Постановка задачи последовательного анализа пространственно-временных полей океана	134
§ 22.	Спектральная формулировка метода последовательного анализа	141
§ 23.	Свойства алгоритма последовательного анализа наблюдений	143
§ 24.	Последовательный анализ наблюдений вертикального распределения скорости течений	147
§ 25.	Прогнозирование вертикальных профилей температуры в верхнем слое моря	156
§ 26.	Моделирование и прогноз вертикального распределения температуры моря в экспедиционных условиях	164
<i>Глава V.</i>	Системный подход к планированию океанографических наблюдений	174
§ 27.	Измерение океанографических процессов в связи с использованием методов адаптивной фильтрации	174
§ 28.	Планирование сети станций для измерения случайных пространственных полей океана	176
§ 29.	Рационализация съемки пространственного поля рельефа дна	190
§ 30.	Об измерении статистически связанных полей	195
§ 31.	Планирование наблюдений пространственно-временных полей океана	199
§ 32.	Организация сбора и обработки данных при последовательном анализе океанографической информации	207
	Литература	213

БОРИС АЛЕКСЕЕВИЧ НЕЛЕПО
ИГОРЬ ЕВГЕНЬЕВИЧ ТИМЧЕНКО

**СИСТЕМНЫЕ ПРИНЦИПЫ
АНАЛИЗА НАБЛЮДЕНИЙ
В ОКЕАНЕ**

*Печатается по постановлению ученого совета
Морского гидрофизического института АН УССР*

Редактор *Л. К. Медникова*
Оформление художника *Г. М. Балюна*
Художественный редактор *Г. И. Малинкович*
Технические редакторы *А. М. Капустина,*
Г. М. Терезюк
Корректоры *П. А. Росич,*
Р. С. Борисова

Информ. бланк № 2013

Сдано в набор 23.02.78. Подп. в печ. 25.07.78.
БФ 00739. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типогр. № 1.
Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 14,0. Уч.-изд.
л. 13,55. Тираж 1000 экз. Заказ. № 8-331. Цена
2 руб. 30 коп.

Издательство «Наукова думка».
252601, Киев, ГСП, Репина, 3.

Книжная фабрика «Коммунист» РПО «Поли-
графкнига» Госкомиздата УССР, 310012,
Харьков-12, Энгельса, 11.

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «НАУКОВА ДУМКА»
В 1979 г. ВЫЙДЕТ В СВЕТ КНИГА:

Парамонов А. Н., Забурдаев В. И., Кушнир В. М. Современные методы и средства измерения гидрологических параметров океана. — 20 л. — Яз. рус. — 3 р. 40 к.

Монография посвящена разработке современной океанографической аппаратуры и методике ее использования. Анализируются методы измерения температуры, солености, гидростатического давления и плотности морской воды. Рассмотрены принципы измерения параметров морских течений и теоретические вопросы, связанные с вычислением статических погрешностей основных методов, несинхронностью измерений и т. д. Проанализированы структуры и принципы действия зондирующих и буксируемых измерительных комплексов. Приведены данные об автоматических буйковых станциях и автономных приборах.

Заинтересует специалистов, занимающихся экспериментальными исследованиями океана и работающих в области разработки океанографической измерительной аппаратуры.

Предварительные заказы на эту книгу принимают все магазины книготоргов, магазины «Книга — почтой» и «Академкнига».

Наиболее продолжительное время (не позже чем за квартал до выхода книги в свет) заказы на наши издания принимает книжный магазин издательства «Наукова думка» (252001, г. Киев-1, ул. Кирова, 4), который высылает книги иногородним заказчикам наложенным платежом.

Просим также широко пользоваться услугами магазинов — опорных пунктов издательства: Дома книги — магазина № 200 (340048, г. Донецк-48, ул. Артема, 147а), магазина «Мир книги» (310003, в. Харьков-3, пл. Советской Украины, 2/2) и магазина научно-технической книги № 19 (290006, в. Львов-6, пл. Рынок, 10), который также высылает книги иногородним заказчикам наложенным платежом.

2629

2005.57.001

FRANKOPIA LANTANA