Ф. А. Усманов

Основы математического анализа геологических структур

„ФАН"

АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ
им. Х. М. АБДУЛЛАЕВА

Ф. А. УСМАНОВ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ФАН» УЗБЕКСКОЙ ССР
ТАШКЕНТ – 1977

51
У 75

УДК 51:55

Ф. А. Усманов. **Основы математического анализа геологических структур.** Ташкент. Изд-во «Фан» УзССР, 1977. Табл.—4, рис.—5, библ.—214 назв.

В монографии приведены результаты разработок математических вопросов, возникающих при анализе, описании, сопоставлении и систематике структур геологических объектов. Излагаются элементы теории геологических структур, построенной на основе теории множеств, математической логики и теории графов. Приводятся результаты логико-математического исследования свойств наиболее распространенных типов геологических структур.

Даются математические постановки и решения основных стереологических задач геологии, относящихся к определению пространственных характеристик геологических тел и строения геологических объектов по данным их случайных прямолинейных и плоских сечений. Описываются статистические методы исследования пространственной связи между совокупностями геологических объектов. Эффективность предлагаемых методов и решений задач иллюстрируется примерами из разных областей геологии и результатами моделирования на ЭВМ.

Работа рассчитана на геологов и математиков, интересующихся вопросами применения математических методов и ЭВМ в геологии.

Ответственный редактор
докт. физ.-мат. наук В. Г. Винокуров

У $\frac{20802-589}{355(06)-77}$ 44–77

ВВЕДЕНИЕ

Математические методы исследования применяются во всех разделах геологии. Десятилетие назад они использовались главным образом как вспомогательные вычислительные методы при обработке эмпирических данных. Теперь достижения математики все чаще используются для решения фундаментальных теоретических вопросов геологии.

Аналогично развивались и другие науки, обладающие сейчас сильно развитым математическим аппаратом. В физике еще с XVII в. математические методы применяются как основной инструмент в теоретических исследованиях. Известно, что теоретическая физика возникла вследствие расширения и углубления применения математических методов в физике.

В биологии и географии математика ранее также использовалась для обработки данных наблюдений, а сейчас она является основой для построения теоретической части этих наук (Акчурин, 1974; Корнеева, 1969; Лакин, 1973; Нееф, 1974; Новые идеи в географии, 1976; Романовский и др., 1975; Харвей, 1974).

Наука располагает многочисленными примерами, когда математические идеи, факты и методы оказывали плодотворное влияние на развитие научных теорий.

Один из близких к геологии примеров — построение теории структур кристаллов Е. С. Федоровым и А. Шенфлисом в 1890—1891 гг., блестяще подтвержденной в 1912 г. опытами по дифракции рентгеновских лучей в кристаллах. Эта теория, оказавшаяся исключительно плодотворной, привела к возникновению некоторых новых направлений в математике и физике, легла в основу ряда точных наук — геометрической кристаллографии, рентгеноструктурного анализа, физики твердого тела и др.

В качестве другого примера можно привести теорию парагенезисов минералов, построенную Д. С. Коржинским (1957, 1973), В. А. Жариковым (1961, 1968), А. А. Маракушевым (1965, 1968), Л. Л. Перчуком (1970) и др. Создание теорий структур кристаллов и парагенезисов минералов — убедительный для геологов пример успешной математизации целых областей науки, свидетельствующий об эффективности теоретического математического моделирования на основе современной физики и химии.

Таким образом, на современном этапе одна из основных задач в области применения математических методов в геологии — использование достижений математики для решения общих и фундаментальных теоретических и методических вопросов, для построения геологических теорий.

Уже очевидно, что математизация геологии, усовершенствование методов обработки геологических данных приводит к уточнению системы геологических понятий, развитию и расширению теоретической части геологии. По нашему мнению, «математизация» и «теоретизация» геологии — тесно взаимосвязанные процессы.

Тенденция развития направления математизации геологии от применения математических методов для обработки эмпирических данных к более широкому их использованию при решении фундаментальных задач отмечается и другими исследователями (Абрамович, 1975; Абрамович, Груза, Романовский, 1972; Боровиков и др., 1976; Вистелиус, 1969; Воронин, Еганов, 1974; Воронин и др. 1967, Гольдин, Волков, Гольдина, 1970; Родионов, 1968; Шарапов, 1973 и др.).

Использование достижений современной математики для решения теоретических вопросов геологии уже определилось как самостоятельное направление, весьма важное для развития геологической науки (по существующим представлениям объем теоретической части той или иной науки — показатель уровня ее развития). Однако это направление имеет большое значение и для увеличения эффективности применения математических методов и ЭВМ при решении прикладных задач геологии. Это, вероятно, одна из причин усиления тенденции математического исследования фундаментальных вопросов геологии.

В области применения математических методов и ЭВМ в геологии возникла такая ситуация, когда данные, получаемые нестрогими традиционными способами, обрабатываются современными строгими и эффективными методами обработки информации. Это приводит к тому, что часто невозможно оценить достоверность конечных результатов исследования.

Сталкиваясь с подобными трудностями, мы пришли к убеждению, что для получения от применения математических методов и ЭВМ такого же эффекта, который они дают в точных науках, геологическое исследование нужно проводить с математической точностью на всех его этапах, на основе логически строгой системы понятий, опираясь на теоретические разработки.

Не принижая значения применения математических методов для решения конкретных прикладных задач, мы считаем, что несмотря на отмеченную тенденцию до сих пор не уделяется должного внимания общим теоретическим и методологическим вопросам, в частности логическому и математическому исследованию основ геологии. Анализируя некоторые геологические понятия и методы, можно убедиться, что математическая логика, теория множеств и топология — удобные инструменты для математического исследования наиболее общих вопросов геологии. Однако проникновение идей этих фундаментальных разделов математики в геологию происходит сравнительно медленно.

Изложенные соображения побудили автора заняться вопросами математизации геологии в общетеоретическом и методическом плане.

Известно, что ряд направлений математики возник и развивался из-за потребностей физики и других «математизированных» наук. Геология, несомненно, обладающая специфическими в математическом отношении задачами, начала предъявлять запросы к математике главным образом в последние два десятилетия. В связи с этим возникает вопрос, представляет ли современная математика достаточные средства для математизации геологии?

На основе опыта математической геологии можно утверждать следующее: современная математика настолько богата понятиями, фактами, методами и направлениями, что их вполне достаточно для математической постановки и решения теоретических, методических и практических задач геологии. Однако существуют специфические геологические задачи, для решения которых нужно разрабатывать некоторые математические вопросы. Такая ситуация возникала в различных областях физики. Например, в физике твердого тела нашли применение некоторые теоремы, специально сформулированные для математического описания решетки идеального кристалла.

Математические теории геологических объектов и процессов могут быть двух видов: частные, относящиеся к геологическим объектам и процессам определенного класса (литология, формационный анализ, стратиграфия и т. п.), и общие, охватывающие все геологические объекты или процессы.

Возможность построения общих геологических теорий начала обнаруживаться только в последние годы. Намечается несколько направлений, которые, возможно, приведут к построению общегеологических теорий. К ним, в частности, относятся исследования общих свойств «геологического пространства» (Воронин и др., 1967; Косыгин, Воронин, 1965; Косыгин, 1974_1 и др.) и «геологического времени» (Косыгин, 1974_1; Косыгин, Салин, Соловьев, 1974; Симаков, Оноприенко, 1975_1, 1975_2 и др.).

В создании математической теории геологических объектов и процессов возможны два пути — дедуктивный и индуктивный. Первый состоит в построении общих теорий с последующим вычленением частных путем детализации и углубления отдельных частей, а второй — в построении частных теорий с последующим обобщением до общих путем выделения наиболее общих понятий, принципов, фактов и т. п. Каждый из этих путей имеет недостатки и достоинства и, по-видимому, оба одновременно будут использованы при построении общих и частных геологических теорий на математической основе.

Главная цель наших исследований — разработка основ математического анализа структур геологических объектов (кроме структур кристаллов). Эти основы включают, во-первых, теоретические разработки, математически обобщающие представления о главнейших свойствах структур различных геологических объектов и, во-вторых, основные математические методы исследования строения геологических объектов. В соответствии с этим монография состоит из двух частей — теоретической и методической.

В первой части изложены элементы общей математической теории структур геологических объектов. В общей теории геологических структур должны найти отражение общие свойства структур всех геологических объектов на макрофизическом уровне, а в частных — специфические свойства структур геологических объектов отдельных типов — структур пород и руд, тектонических структур.

Наибольший интерес и вместе с тем наибольшую трудность представляет построение общей теории. Нуждается в обосновании сама возможность построения такой теории. Прежде всего возникает вопрос о том, достаточно ли общих свойств у структур геологических объектов, которые могли бы составить предмет исследования общей теории.

Несмотря на большой диапазон размеров геологических объектов (от долей миллиметров для зерен пород до тысяч километров для геосфер) существуют общие понятия, принципы и методы, относящиеся ко всем геологическим объектам. Ряд задач математически формулируется одинаково для всех геологических объектов. К общим понятиям, определяемым независимо от размеров геологических объектов, относится геологическое тело (в широком смысле — как часть любого геологического объекта, которую можно выделить по некоторому признаку), геологическая граница, геологический признак, геологическое событие, структура (строение) и состав геологического объекта и др. Выявление и исследование общих для всех геологических объектов или процессов понятий, принципов, задач, очевидно, имеет большое значение для теоретической геологии и построения общих математических методов решения геологических задач.

Имеются публикации, в которых сопоставляются структуры различные по порядку размеров и выделяются некоторые их общие свойства. Делаются попытки распространить фундаментальные понятия (структурная решетка, элементарная ячейка, симметрия и т. п.) учения о структурах кристаллов на структуры пород и других геологических объектов (Косыгин, 1974_1, Васильев, Драгунов, Рундквист, 1972; Драгунов, Айнемер, Васильев, 1974).

Отличия и общие черты структур геологических объектов с размерами разных порядков обсуждаются также в связи с развитием представлений об иерархическом характере выделения геологических объектов (Васильев, Драгунов, Рундквист, 1972; Драгунов, 1973; Драгунов, Айнемер, Васильев, 1974; Косыгин, Вотах, Соловьев, Черкасов, 1972; Круть, 1973; Рундквист, $1971_{1,2}$).

Сопоставление структур геологических объектов с размерами разных порядков производилось и в работах, посвященных формализации геологических понятий (Косыгин, Воронин, 1965; Воронин, Еганов, 1968_1, 1968_2, 1968_3, 1972, Воронин и др., 1967 и др.).

При сопоставлении учения о структуре кристаллов с учением о структурах пород и руд и структурной геологией обнаруживается огромный разрыв. Известно, что учение о структурах кристаллов представляет собой хорошо развитую теорию, построенную на математической основе, тогда как учение о структурах пород и руд сводится к нестрогому словесному описанию и систематизации встречающихся в этих объектах структур. Почему до сих пор не построена математическая теория структур пород, руд и тектонических структур, тогда как такая теория для структур кристаллов была создана еще в конце XIX в.? Это, видимо, объясняется тем, что структуры кристаллов в математическом отношении более простые, чем структуры пород, руд и тектонические структуры.

Во-первых, с математической точки зрения структуры кристаллов определяются системой точек в трехмерном евклидовом пространстве, а структура пород и другие геологические структуры — системой произвольных геометрических объектов (точки, линии, поверхности и тела). Простейшие элементы структур кристаллов — точки, образующие узлы кристаллической решетки. Точка в пространстве полностью задается ее координатами, а пространственное отношение между двумя точками полностью определяется одним вектором. Простейшими элементами геометрической модели структур пород, руд и состоящих из них геологических объектов могут быть, кроме точек, линии, поверхности и тела в трехмерном евклидовом пространстве. Эти геометрические фигуры характеризуются, кроме положения в пространстве, размерами, формой и т. п. Отношения между ними более разнообразные, чем пространственные отношения между точками.

Во-вторых, структуры кристаллов, как отмечают многие исследователи, более упорядочены, чем структуры пород, руд и состоящих из них геологических объектов. Поэтому они достаточно точно описываются детерминированной моделью — решеткой идеального кристалла. Об однородности и изотропности структур пород и руд можно говорить только в вероятностном, статистическом смысле.

Указанные причины приводят к тому, что если при математическом описании структур кристаллов основной группой преобразований является группа движений в трехмерном пространстве (параллельный перенос и вращение), то при математическом описании структур пород и других геологических объектов, кроме движения, большое значение имеют также более общие преобразования такие, как аффинное, топологическое и др.

Таким образом, существуют принципиальные отличия структур кристаллов от структур пород, руд и других геологических объектов с точки зрения математического их описания. Поэтому для построения математической теории структур этих объектов нужно найти подходы, принципы и математический аппарат, отличающиеся от используемых в теории структур кристаллов. Однако для использования опыта построения математической теории структур кристаллов желательно выяснить, что общего между структурами сопоставляемых объектов с точки зрения их математического описания. Общее для них, очевидно, то, что они характеризуются некоторыми геометрическими фигурами (точками — структуры кристаллов; точками, линиями, поверхностями и телами — структуры пород, руд и других геологических объектов) и некоторыми пространственными отношениями между ними.

Изучение опыта по выделению, систематике и описанию геологических структур и созданию теории структур кристаллов позволяет прийти к выводу, что в основу общей математической теории геологических структур нужно положить связные множества точек (тела, поверхности, линии) в трехмерном евклидовом пространстве и пространственные бинарные отношения между ними, подобранные таким образом, чтобы через них определялись всевозможные геологические структуры.

Два геометрических объекта с фиксированными пространственными отношениями между ними (например, два тела, одно из которых включает другое, два соприкасающихся тела и т. п.) можно рассматривать как простейшую элементарную структуру. Комбинируя различные элементарные структуры, можно строить разнообразные более сложные структуры. Например, в породе с пойкилитовой структурой любая пара зерен может находиться в одном из следующих отношений: 1) имеют общую границу (контактируют) и одно из зерен (ойкокристалл) вмещает второе (хадакристалл); 2) имеют общую границу и одно из зерен не вмещает второе (ойкокристаллы); 3) не имеют общей границы (изолированы). Определенная комбинация пар зерен, находящихся в этих отношениях («элементарные структуры»), образует пойкилитовую структуру.

Утверждение, приведенное выше, означает, что структуру любого геологического объекта можно расчленить на элементарные структуры, относящиеся к некоторым типам и, наоборот, все разнообразие геологических структур можно построить из небольшого числа исходных элементарных структур (аналогично тому, как большое количество разнообразных химических соединений представляет собой различные «комбинации» из сравнительно небольшого числа атомов).

Для построения общей теории геологических структур нужно выделить основные исходные элементарные структуры, разработать формальные операции синтеза из них теоретически возможных видов сложных структур и полученные абстрактные структуры сопоставить с реальными геологическими структурами.

Таким образом, в общей математической теории структур геологических объектов можно выявить две группы задач: 1) выделение небольшого числа исходных пространственных бинарных отношений между геометрическими объектами с фиксированными свойствами (гл. 1), 2) построение из них моделей основных типов структур геологических объектов, исследование их математических свойств (гл. 2).

Для построения основ математического анализа геологических структур, кроме общей теории этих структур, нужно разработать математические методы их исследования.

Специфика геологических объектов такова, что в большинстве случаев их строение изучается по сечениям некоторой поверхностью или линией. Можно утверждать, что одна из первых задач, возникающих при изучении структуры каждого геологического объекта,— установление пространственных характеристик структуры данного объекта по информации, извлекаемой из его сечений, так как конечный объект исследования — именно структура в трехмерном пространстве. Количественные методы решения этих задач, получивших название стереологических, в геологии, особенно в петрографии, разрабатываются уже с середины XIX в. Однако достижения некоторых разделов современной математики, особенно теории геометрических вероятностей и интегральной геометрии, открывают новые возможности для строгого решения более широкого круга стереологических задач в самом общем и типичном случае, когда тело или система тел произвольной формы (в том числе геометрически неправильной) пересекается прямой или плоскостью, проведенной случайно (гл. 3).

Вторую группу наиболее распространенных задач, возникающих при анализе строения геологических объектов, составляет установление пространственной связи между составными частями объектов, выделенными по разным признакам (при анализе текстур горных пород, выделении групп пространственно ассоциирующих объектов в парагенетическом, формационном и металлогеническом анализах и др.). Математические методы определения меры пространственной связи между совокупностями тел могут служить основой для строгого (количественного) решения многих задач из различных областей геологии (гл. 4).

Поскольку настоящая монография — первая работа по построению общих основ математического анализа структур геологических объектов, многие вопросы, очевидно, не могут быть рассмотрены с исчерпывающей полнотой и детальностью. Ряд построений нужно рассматривать как общую основу для более детальных исследований.

Математические модели процессов «структурообразования» не рассматриваются. Они связаны с реконструкцией геологических событий и требуют иной методологической основы. Их обсуждению, очевидно, должно предшествовать создание математических моделей структур, наблюдаемых в настоящее время в геологических объектах.

Изложенные в монографии результаты — итог работ длительного периода. Первые исследования некоторых вопросов геологии Средней Азии количественными методами выполнены еще в 1957—1958 гг. С 1963 г. мы применяем математические методы и ЭВМ для решения различных задач петрографии, металлогении и региональной геологии. Разработка методов и теоретических вопросов сочеталась с математической обработкой конкретных геологических материалов. С 1965 г. исследования проводились в математической группе лаборатории металлогении и с 1973 г.— в группе автоматизированных систем научных исследований (АСНИ) ИГиГ АН УзССР. Теоретические и методические результаты положены в основу разрабатываемых автоматизированных систем анализа геологической картографической информации и строения горных пород в шлифах, информационно-поисковой системы по металлогении и др.

Общепринятые в математике обозначения (например, символы операций объединения и пересечения множеств, логические символы и т. п.) используются без пояснения. Специальные обозначения расшифровываются перед их первым использованием. Формулы нумеруются двумя числами. Первое число указывает на номер параграфа в данной главе, а второе — на номер формулы в этом параграфе. Номер главы при ссылке на формулу из этой же главы не указывается и отмечается только в тех случаях, когда ссылка делается на формулу в другой главе. В конце книги помещен список условных обозначений и указатель терминов.

Стремление изложить материал, во-первых, по возможности строго, с расчетом на математиков и геологов, работающих в области применения математических методов и ЭВМ в геологии, и, во-вторых, как можно проще, имея в виду геологов, еще не приобщившихся к математическим методам, привело к тому, что иногда приходилось излагать одно и то же на математическом и геологическом языках.

Автор пользовался консультациями Х. М. Абдуллаева, И. Х. Хамрабаева, Т. М. Мацокиной, Р. А. Мусина, Е. М. Бутовской, Ю. А. Воронина и В. Г. Винокурова. Значительную помощь автору оказали также неоднократные обсуждения рассматриваемых вопросов с О. М. Борисовым, А. М. Боровиковым, А. Н. Бугаецом, А. Н. Дмитриевым, С. В. Гольдиным, Э. А. Егановым, И. А. Егановой, Р. М. Константиновым, В. А. Нагаевым, В. И. Оноприенко, А. В. Покровским, Д. А. Родионовым, Р. А. Садыковым, В. А. Соловьевым, И. П. Шараповым, И. И. Шифриным и А. М. Шурыгиным.

Часть I. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Глава I. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ГЕОЛОГИЧЕСКИМИ ТЕЛАМИ. БИНАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ГЕОЛОГИЧЕСКИМИ ТЕЛАМИ — ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕМЕНТЫ СТРУКТУР ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ.

§ 1. Представления о геологических телах и отношениях между геологическими телами — основа для математизации геологии

Одна из главных особенностей геологических объектов состоит в неоднородности и сложности их строения. Потребности изучения и компактного изображения основных свойств этих объектов привели к разработке в геологии метода исследования строения неоднородных материальных тел. Этот метод, который можно назвать геологическим методом исследования строения материальных тел (или неоднородных сред), заключается в следующем.

В рассматриваемой части физического пространства (например, в какой-нибудь части земной коры) в фиксированный момент времени, все точки или участки, обладающие некоторыми признаками, объединяются в связные области (любые две точки могут быть соединены непрерывной кривой, лежащей внутри связной области). В результате данная часть физического пространства разбивается на конечное множество связных областей, каждая из которых однородна в отношении рассматриваемых признаков. Таким образом, описание данной части физического пространства сводится к перечислению характеристик выделенных однородных областей (геологические тела) и описанию отношений между ними.

Существуют две группы причин, способствующих широкому распространению в геологии указанного метода: принципиальные, связанные со спецификой геологических объектов, и методологические, связанные с удобствами изучения и описания их строения. Рассмотрим их подробно.

Строение геологических объектов, как правило, обладает некоторой дискретностью, обусловленной наличием резких границ, при пересечении которых свойства вещества изменяются скачкообразно. Одна из причин, приводящих к появлению резких границ и дискретности, связана с тем, что свойства геологических объектов в большинстве случаев представляют собой качественные признаки. Например, минералы, слагающие горную породу, представляют собой качественно различные образования, отличающиеся строением кристаллической решетки. Это обстоятельство приводит к тому, что границы между составными частями породы являются резкими и строение породы — дискретным (состоящее из участков, ограниченных резкими границами). Отличия между породами разного генезиса (осадочный, магматический и метаморфический), очевидно, также качественные. Резкие границы между геологическими телами, сложенными породами различного состава, строения, фациальности и генезиса, приводят к тому, что строение отдельных участков земной коры тоже дискретно. Более крупные геологические тела — структурно-фациальные зоны, тектонические блоки и т. п.— также выделяются по признакам, качественно отличающимся друг от друга, или резко ограничены разрывными нарушениями. Таким образом, строение всей литосферы от микротел — зерен, кристаллов и других составных частей пород, выделяемых на минеральном уровне, и до тел крупных (планетарных) размеров — структурных зон, блоков и т. п., носит явно выраженный дискретный характер.

Дискретное строение геологических объектов формирует специфику всех разделов геологии, их содержание, методологию и отличает геологию от геохимии и геофизики, в которых исследуются главным образом непрерывные поля.

В некоторых случаях применение описанного метода исследования строения геологических объектов обусловлено методологическими причинами. К ним относится процедура дискретизации поля количественной, непрерывной величины. Например, точное описание изменения средних размеров зерен в пределах интрузива, очевидно, связано с громоздкими объемами замеров и вычислений, поэтому в первом приближении можно ограничиться выделением мелкозернистых, среднезернистых и крупнозернистых разностей пород, различающихся при визуальном наблюдении. При геологическом картировании широко применяется (явно или неявно) процедура дискретизации.

Таким образом, переход от непрерывных полей со сложным строением к дискретным осуществляется в целях сжатия информации (путем выделения наиболее существенной), облегчения ее сбора, а также упрощения изучения и описания строения геологических объектов.

Способы выделения в геологическом объекте участков, однородных по тем или иным признакам, зависят от природы этих признаков, размеров выделяемых участков (масштаба исследования) и т. п.

Когда в геологическом объекте исследуются составные части небольших размеров, ограниченные резкими границами, обычно не возникает необходимости выделения этих частей специальными способами. К подобным объектам относится большинство типов горных пород, в которых отдельные составные части — зерна, вкрапленники, основная масса и т. п., отчетливо выделяются макро- или микроскопически. Иногда границы геологических тел резки и доступны для наблюдения (например, границы интрузивных тел), но из-за больших размеров приходится для оконтуривания применять специальные методы геокартирования. С некоторыми оговорками можно считать, что разграничение более крупных геологических тел провести труднее, чем мелких.

Выделение геологических тел по непосредственно не наблюдаемым признакам (генетические, фациальные, возрастные и т. п.) часто сопряжено с большими трудностями.

Для разграничения геологических объектов по значениям случайных величин применяются специальные методы (Родионов, 1967, 1968, 1972).

Указанные причины возникновения дискретных моделей строения геологических объектов привели к тому, что представления о геологических телах, в широком смысле — как об однородных составных частях геологических объектов, и отношениях между геологическими телами входят в основание большинства разделов геологии: в петрографии это представления о составных частях породы и структурных соотношениях между ними, в региональной геологии — о геологических телах, сложенных породами, и различных (структурные, возрастные, генетические) соотношениях между этими телами, в тектонике — о тектонических зонах, блоках и т. п. и о возрастных, причинно-следственных отношениях между ними и т. п.

Хотя представления о геологических телах и отношениях между ними в разделах геологии различны, однако метод изучения строения геологических объектов путем выделения однородных частей и исследования отношений между ними во всех разделах геологии формально (математически) одинаков и сводится к следующему. В заданной части физического пространства строится своеобразное дискретное поле — функция, определенная в точках этой части пространства, значениями которой являются качественные признаки.

Если понятие системы использовать в широком смысле как совокупность элементов произвольной природы, находящихся в определенных отношениях друг с другом, то можно считать, что описанный метод изучения строения геологических объектов опирается на системный подход. В такой интерпретации этот метод состоит в том, что изучение строения геологического объекта сводится к изучению системы однородных составных частей этого объекта, т. е. совокупности частей с определенными отношениями между ними. Если однородную по тем или иным признакам часть любого геологического объекта называть геологическим телом, то всякий неоднородный геологический объект можно представить как систему геологических тел. В связи с этим геологическое тело и система геологических тел могут служить фундаментальными понятиями геологии.

При изучении геологических объектов возникают задачи двоякого рода: связанные с изучением свойств отдельных геологических тел и отношений между геологическими телами. Эти свойства и отношения четко разделяются на геометрические (пространственные, структурные) и вещественные (материальные).

Структуру геологического объекта в большинстве случаев можно представить через геометрические свойства составляющих его однородных частей и геометрические (пространственные) бинарные отношения между этими частями. В этом смысле пара геологических тел и отношение между ними, рассматриваемые с геометрической точки зрения, представляют собой простейшую элементарную структуру, а определенное сочетание типов таких элементарных структур в большинстве случаев определяет структуру геологического объекта.

Основной метод изучения строения геологических объектов, вероятно, начал разрабатываться с появлением первых описаний строения геологических объектов, зарисовок обнажений и шлифов горных пород, геологических карт, схем и т. п. Уже разработаны (не на математическом уровне) способы выделения однородных по данным признакам геологических тел, входящих в сложные тела; выделены главнейшие отношения между геологическими телами, такие как «контактирование», «пересечение» (в геологическом смысле), «включение», «неотличимость», «сходство» (например, по составу), отношения по возрасту — «древнее», «моложе», «одновозрастные», пространственному положению — «выше», «ниже», условиям формирования — «сходные или эквивалентные по фациальности», генетическому или парагенетическому родству и т. п.

Выделены наиболее важные задачи, возникающие при изучении отношений между геологическими телами, и найдены возможные пути их решения. В частности, можно указать на способы определения отношений между геологическими телами по возрасту (относительного возраста), через другие отношения (например, установление относительного возраста даек на основании изучения их пересечений, определение возрастной последовательности слоев осадочных пород по данным их пространственного взаиморасположения в разрезах и т. п.).

Интенсивный процесс проникновения математики во все области геологии, а также эффективное использование ЭВМ для обработки геологической информации привели к необходимости формального, математического освоения и дальнейшего развития исторически сложившихся геологических представлений. Вопросы выделения, описания и классификации геологических тел или однородных по тем или иным признакам областей с формальных позиций исследованы подробно. (Бугаец, 1973; Бугаец и др., 1968; Воронин, 1964; Воронин и др., 1967; Воронин, Еганов, 1968_1, 1968_2, 1968_3, 1972; Гольдин, 1965; Гольдин, Волков, Гольдина 1970; Драгунов, 1973; Драгунов, Айнемер, Васильев, 1974; Еганов, 1971; Каратаев и др., 1974; Косыгин, Воронин, 1965; Косыгин, 1974_1. Косыгин, Кулындышев и др., 1974; Миронов, 1975; Панич, Киршин, 1974; Родионов, 1967, 1968, 1972; Углов, 1974; Четвериков, 1968; Шафрановский, Плотников, 1975). Однако отношение между геологическими телами в математическом плане специально и систематически не исследсвались. В некоторых работах в связи с теми или иными задачами математической геологии освещались отношения между геологическими объектами. В частности, рассматривались возможность использования в геологии бинарных отношений между структурными элементами по их пространственному положению для описания геологических структур (Воронин и др., 1967; Борукаев, и др., 1968), изоморфность отношений между геологическими телами в стратиграфии «выше», «ниже», «эквивалентно» отношениям между событиями «позже», «раньше» и «одновременно» (Косыгин, Соловьев, 1969; Косыгин, 1970; Салин, Соловьев, 1974); формальные определения и свойства некоторых отношений между геологическими телами (Воронин и др., 1967; Воронин, Еганов, 1968_1, 1968_2, 1968_3, 1972; Гольдин, Волков, Гольдина, 1970; Усманов, 1974_1), использование отношений порядка для упорядочения объектов в геологии (Воронин, Еганова, Еганов, 1974), некоторые общие вопросы изучения отношений между геологическими телами (Кренделев, Кренделев, 1973).

Отдельные типы отношений между геологическими телами используются для решения важных конкретных геологических задач на количественной основе. Для изучения количественных характеристик строения гранитоидов и построения математической модели процессов кристаллизации использовано отношение «контактирования» между зернами породообразующих минералов (Белов, 1963; Вистелиус, 1966_1, 1966_2, 1966_3, 1967_1, 1967_2, 1967_3, 1972; Вистелиус, Романова, 1972; Иванов, 1963, 1968; Романова, 1972; Усманов, 1971; Agterberg, 1966; Rogers, Bogy, 1958 и др.).

Таким образом, при формальной интерпретации многих геологических задач возникают вопросы, касающиеся отношений между геологическими телами. Необходимость их специального рассмотрения вытекает из специфики указанного основного метода исследования строения неоднородных геологических объектов.

Для математического исследования отношений между геологическими телами мы использовали общую теорию бинарных отношений и теорию графов (Бернс, 1962; Зыков, 1969; Калужнин, 1973; Куратовский, Мостовский, 1970; Маркус, 1970; Пензов, 1968; Столл, 1968; Фор и др., 1966; Харари, 1973; Шиханович, 1965; Шрейдер, 1970, 1971, 1973 и др.).

Оказалось, что для описания многих свойств систем геологических тел достаточно ограничиться введением ссновных бинарных отношений на множествах тел и использованием теории бинарных отношений (не прибегая к общей теории n-арных отношений). Установление соответствия между отношениями на множествах геологических тел, с одной стороны, и понятиями теории бинарных отношений и теории графов — с другой, дает возможность использовать достижения этих развитых математических теорий (методы, понятия, теоремы, связи между различными отношениями, их свойства и т. п.) в геологии.

Перечислим основные термины, используемые в монографии. Термин «геологическое тело» нами применяется в соответствии с представлениями, изложенными Ю. А. Косыгиным (1974_1), Ю. А. Ворониным и др. (1967). Геологическим телом называем любую твердую часть Земли, которая может быть выделена по какому-либо признаку.

Для построения математической модели геологического тела это определение необходимо уточнить. То, что геологическое тело выделяется по некоторому признаку, означает, что существует хотя бы один такой признак, который присутствует во всех точках данного тела и поверхность тела является границей между точками, обладающими и не обладающими этим признаком. Геологическое тело занимает связную область пространства, ограниченную конечным числом замкнутых поверхностей. Объем геологического тела, площадь и число изгибов его поверхности также являются конечными*. Примеры геологических тел — зерна, кристаллы, вкрапленники и другие составные части горных пород и руд, интрузивные тела, рудные тела, слои осадочных пород, материки, геосферы и т. п.

Необходимость введения понятия, охватывающего содержательно столь различные объекты, вызвана тем, что существует большая группа задач, которые математически формулируются одинаково для всех геологических тел независимо от их абсолютных размеров.

Системой геологических тел будем называть множество геологических тел $L=\{G_i\}\, i=1,2,\ldots,k$, с числом тел $k\geqslant 2$, в фиксированный момент времени. Фиксирование времени приводит к тому, что свойства и пространственные положения геологических тел данного множества также являются фиксированными. Поэтому можно считать, что система геологических тел — это множество геологических тел, состоящее из двух и больше тел с фиксированными свойствами и относительными пространственными положениями. Ограничивающие условия в этом определении подобраны таким образом, чтобы в системе геологических тел можно было бы рассматривать отношения между геологическими телами.

Под «геологическим объектом» понимаем одно геологическое тело или систему геологических тел. Исходим из следующих представлений: если геологический объект однородный по рассматриваемым свойствам, то он представляет собой одно геологическое тело; если неоднородный, то это совокупность некоторого числа геологических тел, выделенных по рассматриваемым признакам.

---

* То, что объем геологического тела не является бесконечно большим, следует из его определения и конечности объема Земли. Отмечая конечность объема геологического тела, мы подчеркиваем, что он не может быть также и бесконечно малым.

Система геологических тел выделяется таким образом, что входящие в нее геологические тела сопоставимы друг с другом в содержательном, геологическом смысле. Это относится и к парам тел, для которых рассматривается то или иное бинарное отношение. В представлениях об иерархии геологических объектов (Васильев, Драгунов, Рундквист, 1972; Драгунов, 1973; Драгунов, Айнемер, Васильев, 1974; Косыгин, Вотах, Соловьев, Черкасов, 1972; Круть, 1973, и др.) указанное условие означает, что мы будем рассматривать такие совокупности тел, в которых все тела относятся к одному и тому же уровню (рангу) — либо к минералам, либо к породам, либо к формациям и т. п. В связи с этим условием не возникает необходимости вводить какие-либо ограничения в формальных построениях, однако оно важно с содержательных позиций. Например, хотя отношение контактирования (наличие общей границы в виде поверхности) определено для двух произвольных тел любых размеров в трехмерном евклидовом пространстве, применительно к геологическим телам оно имеет содержательный смысл только тогда, когда эти два контактирующих тела выделены по сопоставимым признакам и сравнимы по размерам, например оба — зерна минералов в некоторой породе, или сложены породами, или оба являются оболочками Земли и т. п. (нет смысла говорить о контактировании некоторого кристалла с геологическим телом, сложенным породой, или интрузивного тела с тектоническим поясом и т. п.*

Существуют разнообразные определения термина «структура» в различных областях геологии. Желательно выбрать такое, которое, с одной стороны, отвечало бы целям построения общей математической теории геологических структур, с другой — отражало бы традиционно сложившееся понятие структуры в различных разделах геологии. Анализ многочисленных определений понятия структуры в учении о структурах пород и руд, в тектонике и в работах по применению математики в геологии позволяет прийти к выводу, что указанным требованиям удовлетворяет следующее определение. Структурой геологического объекта, или геологической структурой, называется любая совокупность геометрических свойств составных частей или (и) геометрических отношений между составными частями геологического объекта. Поскольку составные части геологического объекта, через которые определяется структура, выделяются по фиксированной совокупности признаков, то выявляемые в данном объекте структурные свойства, очевидно, также связаны с исследуемыми признаками.

Используя понятия геологического тела и отношения в теории множеств, определим бинарное отношение на множестве геологических тел L как упорядоченную пару множеств $\varphi = \langle \Phi, L \rangle$, где

* Но некоторые из отношений (например, рассмотренные ниже отношения совместимости и включения) имеют смысл применительно к геологическим телам, принадлежащим как к одному и тому же, так и к разным уровням (рангам).

$\Phi \subseteq L \times L$ — множество всевозможных упорядоченных пар геологических тел из L вида $< G_i, G_j >$.

Абстрагируясь от некоторых свойств реального геологического тела G_i и системы геологических тел $L = \{G_i\}$, можно рассматривать их геометрические модели — замкнутую связную область (геометрическое тело) A_i и множество $M = \{A_i\}$ замкнутых связных областей, (геометрических тел) в трехмерном евклидовом пространстве R^3,—совпадающие с ними по всем геометрическим характеристикам (форма, размеры, пространственные положения, ориентация и т. п.). Поэтому определения и утверждения будем формулировать для геометрического тела и произвольного конечного множества $M = \{A_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ геометрических тел в R^3.

Учитывая, что абстрактно можно представить тела, ограниченные поверхностями, обладающими разнообразными «необычными» свойствами, введем следующее ограничение на свойства геометрического тела, рассматриваемого в качестве модели геологического тела: число отрезков, отсекаемых телом, на любой секущей его прямой конечно. Это условие, вытекающее из определения геологического тела, существенно лишь с точки зрения строгости формальных построений. Оно не ограничивает область приложений этих построений, так как выполняется для моделей всех геологических тел.

Поскольку мы рассматриваем с математических позиций наиболее общие свойства строения геологических объектов, введенные понятия геологического тела, системы геологических тел, тела и множества тел в евклидовом пространстве R^3, отношения между геологическими телами и между телами в R^3 будут центральными понятиями.

Одна из трудностей состоит в выборе основных исходных бинарных отношений между геологическими телами. Число различных бинарных отношений между телами в R^3 бесконечно*. Поэтому необходимо сформулировать некоторые существенные для геологических приложений формальные условия, ограничивающие число выбираемых исходных отношений, и свести задачу к нахождению полной системы бинарных отношений между телами в R^3, удовлетворяющих этим условиям. Однако оказалось, что из-за большого разнообразия отношений между геологическими телами невозможно подобрать такие формальные условия.

В связи с этим при выборе основных исходных отношений, кроме математических соображений, нужно руководствоваться также и геологическим опытом, полагая, что в ходе длительного раз-

---

* Справедливость этого утверждения видна из следующего примера. Определим бинарные отношения φ_k, $\kappa = 1, 2, 3, \ldots$ так: тела A_i и A_j в R^3 находятся в отношении φ_k, если их пересечение $A_i \cap A_j$ есть поверхность рода P [или $(2P+1)$— связная поверхность]. Число этих отношений в R^3 неограниченно.

вития геологической науки произошел отбор важнейших отношений между геологическими телами. Мы выбирали в качестве исходных те из отношений между геометрическими телами, которые широко используются в геологии. Например, в качестве одного из отношений между телами можно было бы ввести отношение, определяемое на основании замеров расстояний между центрами масс тел, или отношение по средним величинам кривизны их поверхности. Однако эти отношения не рассматриваются, так как они в геологии не используются широко (вероятно из-за трудности замера), как контактирование, изолированность, включение, вмещение, идиоморфизм и др.

Исследования показали, что наиболее часто используемые для описания строения геологических объектов отношения между телами относятся к наиболее общим отношениям, сохраняющимся при разнообразных преобразованиях точек пространства, в котором находятся эти тела. В частности, многие отношения между телами, используемые в геологии, сохраняются при произвольных топологических преобразованиях точек пространства*. К ним, например, относятся упомянутые отношения изолированности, контактирования, включения и вмещения. Известно, что топологические свойства фигур наиболее «устойчивые» и «глубокие» (Ефимов, 1971). Учитывая, это, а также стремясь придать построениям достаточную общность, будем рассматривать главным образом такие пространственные отношения между телами, которые сохраняются при преобразованиях точек пространства довольно общего вида.

Большинство рассматриваемых отношений сохраняется при произвольных топологических преобразованиях точек пространства и, следовательно, не зависят от метрических характеристик (длина, угол, площадь, объем и т. п.), т. е. от абсолютных размеров тел. Стремление к наибольшей общности привело к тому, что на форму тел также не накладывается никаких ограничений (тело может быть ограниченным одной или больше одной односвязными или многосвязными замкнутыми поверхностями, геометрически правильной или неправильной формы, выпуклым, невыпуклым и т. д.)**

Систематику отношений между геологическими телами по формальным (математическим) свойствам, очевидно, лучше изложить после их формальных определений. Кратко перечислим основные виды отношений между геологическими телами, выделяемые по содержательному их смыслу: 1) пространственные (геометриче-

---

* Топологию, как известно, называют качественной геометрией (Александров, Ефремович, 1935). По нашему мнению, «качественность» геологии отчасти связана с тем, что в ней широко используются топологические свойства тел, отношений между ними и структур.

** Формы геологических тел описаны достаточно подробно (Косыгин и др., 1974; Драгунов, Айнемер, Васильев, 1974; Гольдин, Волков, Гольдина, 1970; Шафрановский, Плотников, 1975, и др.).

ские) — по их пространственному положению, объему, форме и т. п. («включается», «контактируют», «лежит выше» и т. п.), 2) временные — по времени их образования («древнее», «моложе», «одновозрастные», «не древнее» и т. п.), 3) вещественные — по их составу и физическим свойствам («с бо́льшим средним содержанием компонента *X*, чем...», «более плотное, чем...» и т. п.), 4) генетические (парагенетические) — по их происхождению («связаны генетически», «связаны парагенетически» и т. п.), 5) фациальные — по условиям их формирования («эквивалентные по фациальности», «сходные по фациальности» и т. п.).

В методологическом плане важно различать отношения: наблюдаемые (прямые) — доступные непосредственным наблюдениям (устанавливаемые непосредственными наблюдениями) и ненаблюдаемые (косвенные) — недоступные непосредственным наблюдениям, устанавливаемые через их связи с непосредственно наблюдаемыми отношениями. Примеры наблюдаемых отношений — некоторые пространственные и вещественные отношения, а ненаблюдаемых — временные, генетические и фациальные.

При формальном определении основных отношений между геологическими телами задача облегчается тем, что многие отношения, различающиеся содержательно, определяются формально одинаково. Это позволяет сильно сократить число рассматриваемых отношений введением наиболее общих отношений.

Применяем следующие термины и обозначения, обычно используемые в теории бинарных отношений и математической логике (Калужнин, 1973; Кемени, Снелл, Томпсон, 1963; Клини, 1973; Колмогоров, Фомин, 1972; Куратовский, Мостовский, 1970; Новиков, 1973; Шиханович, 1965; Шрейдер, 1970, 1971).

$\varphi_M = \langle \Phi, M \rangle$ — бинарное отношение, где $\Phi \subseteq M \times M$, M — базисное множество, Φ — график отношения. В том случае, когда это не приводит к недоразумениям, будем опускать индекс M в символе φ_M.

$A_i \varphi A_j$ — „тело A_i находится в отношении φ к телу A_j".

$\varphi_1 \cup \varphi_2 = \langle \Phi_1 \cup \Phi_2, M \rangle$ — объединение отношений $\varphi_1 = \langle \Phi_1, M \rangle$ и $\varphi_2 = \langle \Phi_2, M \rangle$.

$\varphi_1 \cap \varphi_2 = \langle \Phi_1 \cap \Phi_2, M \rangle$ — пересечение отношений $\varphi_1 = \langle \Phi_1, M \rangle$ и $\varphi_2 = \langle \Phi_2, M \rangle$.

$\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n$ — произведение (композиция) отношений $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$, заданных на множестве M. В частном случае при $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n$ $\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ раз}} = \varphi^n$. Отношение $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n$ выполняется тогда и только тогда, когда существует такая последовательность: $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$; $A_l \in M$, $l = 1, 2, \ldots, n-1$, что $A_i \varphi_1 A_1$, $A_1 \varphi_2 A_2, \cdots, A_{n-2} \varphi_{n-1}, A_{n-1}, A_{n-1} \varphi_n A_j$.

$\hat{\varphi} = \varphi \cup \varphi^2 \cup \varphi^3 \cup \ldots$ — транзитивизация или транзитивное замыкание отношения φ.

$\varphi_1 \subseteq \varphi_2$ — „отношение φ_1 включается в отношение φ_2" (для графиков Φ_1 и Φ_2 отношений φ_1 и φ_2 выполняется условие $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$).

φ^{-1} — обращение (инверсия) отношения $\varphi \left(A_i \varphi^{-1} A_j \overset{Df}{\rightleftarrows} A_j \varphi A_i \right)$.

$\overline{\varphi}$ — дополнение к отношению $\varphi \left(A_i \overline{\varphi} A_j \overset{Df}{\rightleftarrows} \neg (A_i \varphi A_j) \right)$, где $\neg$ — логическое отрицание).

$\varphi_1 \setminus \varphi_2 = \langle \Phi_1 \setminus \Phi_2, M \rangle$ — разность отношений $\varphi_1 = \langle \Phi_1, M \rangle$ и $\varphi_2 = \langle \Phi_2, M \rangle$.

§ 2. Основные исходные бинарные отношения между геологическими телами.

Определения, обозначения и названия основных исходных бинарных отношений между телами в R^3 приведены в табл. 1. Эти определения сформулированы для двух произвольных тел. Используя их, можно вводить соответствующие отношения на множестве тел следующим образом. Пусть M — произвольное множество тел в R^3. Выделим все пары тел из M, для которых выполнено отношение φ. Совокупность Φ таких пар тел вместе с самим множеством M (упорядоченная пара множеств $\langle \Phi, M \rangle$) определяет отношение φ на множестве тел M, которую обозначим через $\varphi_M = \langle \Phi, M \rangle$, где $\Phi \subseteq M \times M$, Φ — множество упорядоченных пар тел $\langle A_i, A_j \rangle$, $A_i, A_j \in M$, для которых выполнено отношение φ.

Дадим пояснение к табл. 1 и введем некоторые отношения, не приведенные в ней.

При рассмотрении относительного пространственного расположения любых двух тел A_i и A_j в R^3 может возникнуть одна и только одна из следующих ситуаций.

Тела A_i и A_j не имеют общих точек, т. е. они изолированы друг от друга. Этому случаю соответствует определенное в табл. 1 бинарное отношение изолированности α.

Тела A_i и A_j „соприкасаются" по некоторым поверхностям, линиям или в точках (т. е. общая часть $A_i \cap A_j$ есть непустое множество точек, объем которого равен нулю). Этому случаю отвечает отношение соприкосновения β, определение которого приведено в табл. 1.

Тела A_i и A_j пространственно „совмещаются", если под этим понимать то, что имеется некоторая конечная область трехмерного пространства, являющаяся одновременно частью одного и другого тела (т. е. общая часть $A_i \cap A_j$ тел A_i и A_j есть множество точек в R^3, объем которого не равен нулю). Этому случаю соответствует определенное в табл. 1 отношение совместимости γ.

Частный случай соприкосновения двух тел — контактирование, понимаемое как соприкосновение тел по некоторой поверхности

Таблица 1

Основные бинарные отношения между телами в трехмерном евклидовом пространстве

Название и обозначение	Определение
α — изолированность, $A_i \alpha A_j$ — „тела A_i и A_j не имеют общих точек" или „тело A_i изолировано от тела A_j"	$(A_i \alpha A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} [(A_i \cap A_j) = \varnothing]$, где A_i и A_j — произвольные тела в трехмерном евклидовом пространстве R^3
β — соприкосновение, $A_i \beta A_j$ — „тела A_i и A_j соприкасаются"	$(A_i \beta A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(A_i \cap A_j) \neq \varnothing] \wedge \wedge [v(A_i \cap A_j) = 0]\}$, где $v(A_i \cap A_j)$ — объем пересечения $A_i \cap A_j$ тел A_i и A_j
σ — контактирование, $A_i \sigma A_j$ — „тела A_i и A_j контактируют"	$(A_i \sigma A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} [(A_i \cap A_j) = P]$, где P — поверхность в R^3
σ_1 — вмещающее контактирование, $A_i \sigma_1 A_j$ „тела A_i и A_j контактируют по замкнутой поверхности, во внутренней стороне, от которой расположено тело A_j"	$(A_i \sigma_1 A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(A_i \cap A_j) = P'] \wedge \wedge (A_j \subseteq D_{P'})\}$ где P' — произвольная замкнутая поверхность в R^3, $D_{P'}$ — область в R^3, ограниченная поверхностью P'
ω_1 — идиоморфизм (автоморфизм), $A_i \omega_1 A_j$ — „по заданному оператору ψ тело A_i идиоморфно относительно тела A_j; тело A_j ксеноморфно относительно тела A_i"	$(A_i \omega_1 A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(A_i \cap A_j) \subseteq \subseteq \psi(A_i)] \wedge [(A_i \cap A_j) \not\subseteq \psi(A_j)]\}$*, где $\psi: M \to S$ — отображение (оператор), которое каждому телу $A_i \in M$ $(M = \{A_i\})$ ставит в соответствие некоторую замкнутую поверхность $\psi(A_i) \in S$ $(S = \{\psi(A_i)\})$
ω_2 — панидиоморфизм, $A_i \omega_2 A_j$ — „тела A_i и A_j идиоморфны по заданному оператору ψ"	$(A_i \omega_2 A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(A_i \cap A_j) \subseteq \subseteq \psi(A_i)] \wedge [(A_i \cap A_j) \subseteq \psi(A_j)]\}$
ω_3 — панксеноморфизм, $A_i \omega_3 A_j$ — „тела A_i и A_j ксеноморфны по заданному оператору ψ"	$(A_i \omega_3 A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(A_i \cap A_j) \not\subseteq \not\subseteq \psi(A_i)] \wedge [(A_i \cap A_j) \not\subseteq \psi(A_j)]\}$
γ — совместимость, $A_i \gamma A_j$ — „тела A_i и A_j имеют общую часть"	$(A_i \gamma A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(A_i \cap A_j) \neq \varnothing] \wedge \wedge [v(A_i \cap A_j) \neq 0]\}$

* Здесь $\not\subseteq$ — символ отрицания включения.

Название и обозначение	Определение
γ_1—частичная совместимость, $A_i\ \gamma_1 A_j$ — „тела A_i и A_j имеют общую часть, не совпадающую полностью ни с одним из них“	$(A_i\ \gamma_1 A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(A_i \cap A_j) = D] \wedge \wedge (D \neq A_i) \wedge (D \neq A_j) \wedge (v(D) \neq 0)]\}$, D — область в R^3, $v(D)$ — объем области D
γ_2 — включение, $A_i\ \gamma_2 A_j$ (или $A_j \subseteq \subseteq A_i$) — „тело A_i включает тело A_j“ (тела A_i и A_j имеют общую часть, совпадающую с телом A_j)“	$(A_i\ \gamma_2 A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} [(A_i \cap A_j) = A_j]$
η — вмещение, $A_i\ \eta A_j$ — „тело A_i вмещает тело A_j“	$(A_i\ \eta A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{\exists P\ [P \subset A_i) \wedge \wedge (P \subset \vert = A_j) \wedge (A_j \subset D_P)]\}$, где P — замкнутая поверхность в R^3, D_P — область в R^3, ограниченная поверхностью P $\exists$ — квантор существования
μ — уплотнение, $A_i\ \mu A_j$ — „тело A_i уплотняется телом A_j“	$(A_i\ \mu A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{\exists D\ [(D \subseteq A_j) \wedge \wedge (m(A_i \cup D) < m(A_i))]\}$, где D — область в R^3, $m(A_i)$ и $m(A_i \cup D)$ — число замкнутых поверхностей, ограничивающих соответственно тело A_i и область $A_i \cup D$
ν — связывание, $A_i\ \nu A_j$ — „тело A_i связывается телом A_j“	$(A_i\ \nu A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{\exists D\ [(D \subseteq A_j) \wedge \wedge (n(A_i \cup D) < n(A_i))]\} \rightleftarrows \rightleftarrows \{\exists D\ [(D \subseteq A_j) \wedge (q(A_i \cup D) < < q(A_i))]\}$, где D — область в R^3, $n(A_i)$ и $n(A_i \cup D)$ — связность тела A_i и области $A_i \cup D$, $q(A_i)$ и $q(A_i \cup D)$ — род поверхности тела A_i и поверхности, ограничивающей область $A_i \cup D$
λ_L — следование, $A_i\ \lambda_L A_j$ — „при движении по заданной линии L, в фиксированном направлении тело A_j будет пересечено после тела A_i“	$(A_i\ \lambda_L A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(A_i \cap L) \neq \varnothing] \wedge \wedge [(A_j \cap L) \neq \varnothing] \wedge [g(A_i \cap L) < < g(A_j \cap L)]\}$, где $g(A_i \cap L)$ и $g(A_j \cap L)$ — номера пересечений тел A_i и A_j лини-

Название и обозначения	Определение
	ей L (нумерация произведена по порядку пересечений тел при движении по линии L в заданном направлении)
$\varkappa$ — совмещение преобразованием (отображением), $A_i \varkappa A_j$ — „тела A_i и A_j можно совместить друг с другом преобразованием $f \in F$"	$(A_i \varkappa A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} (\exists f \in F)[(f^{-1} \in F) \wedge \wedge (f: A_i \to A_j) \wedge \left(f^{-1}: A_j \to A_i\right)]$, где f — взаимно однозначная функция, ставящая каждой точке $P \in A_i$ в соответствие точку $P' \in A_j$, f^{-1} — обратная функция, F — множество функций, удовлетворяющих некоторым заданным условиям
ρ_0 — упорядоченность по характеристикам, $A_i\ \rho_0 A_j$ — „значение функции f в A_i меньше, чем в A_j"	$(A_i\ \rho_0\ A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} [f(A_i) < f(A_j)]$, где f — функция, заданная на множестве тел M, значениями которой являются действительные числа
ε_0 — эквивалентность по характеристикам, $A_i\ \varepsilon_0 A_j$ — „значения функции f в A_i и A_j равны"	$(A_i\ \varepsilon_0 A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} [f(A_i) = f(A_j)]$

или поверхностям. Бинарное отношение, названное отношением контактирования σ, определено в табл. 1. Отношение контактирования между геологическими телами — одно из важнейших и широко распространенных. Это связано с основным методом исследования неоднородных геологических объектов путем проведения в них поверхностей (поверхностей контакта), ограничивающих составляющие эти объекты геологические тела.

Опираясь на топологическую систематику поверхностей в R^3 (Александров, Ефремович, 1935; Гильберт, Кон-Фоссен, 1951; Базылев, Дуничев, 1975 и др.), мы предприняли попытку систематизировать отношения контактирования по топологическим свойствам общей границы между телами (контактовой поверхности).

Общей границей между двумя контактирующими телами может быть либо одна замкнутая поверхность, либо $n (n=1,2...)$ незамкнутых поверхностей. В соответствии с этим можно выделить два вида отношений контактирования между телами: по замкнутой поверхности и незамкнутой.

Дальнейшее деление отношения контактирования по замкнутой поверхности можно производить по двум признакам: по положению контактирующих тел относительно поверхности контакта и по роду или связности поверхности контакта.

По первому признаку можно различать вмещающее и вмещаемое контактирование. В отношении вмещающего контактирования, по приведенному определению (см. табл. 1), находится тело, расположенное во внешней стороне от замкнутой поверхности контакта, к телу, расположенному во внутренней стороне от этой поверхности, второе из этих тел к первому находится в отношении вмещаемого контактирования. Например, в отношении вмещающего контактирования находятся кристалл к включенным в нем более мелким кристаллам, зона в зональном кристалле — к следующей, внутренней по отношению к ней зоне; интрузивное тело к включенному в нем останцу кровли; земная кора к верхней мантии и т. п.

По топологическому типу поверхности контакта можно определить отношение контактирования по замкнутой поверхности рода $P (P=0,1,2,...)$: контактирование по замкнутой поверхности рода нуль (поверхность контакта гомеоморфна сфере), контактирование по замкнутой поверхности рода один (поверхность контакта гомеоморфна тору) и т. п. Контактирование по замкнутой поверхности рода больше чем один в геологии встречается редко.

Объединяя указанные признаки, можно выделять отношения вмещающего и вмещаемого контактирования по поверхности рода P $(P=0,1,...)$.

Частные типы отношения контактирования по незамкнутой поверхности также можно выделять по положению контактирующих тел относительно поверхности контакта и по топологическим свойствам этой поверхности. По первому признаку можно выделить следующие два типа отношений. Первый — асимметричные отношения контактирования по незамкнутой поверхности (поверхностям); в этом случае два контактирующих тела различаются по их положению относительно поверхности контакта; одно из важнейших и широко распространенных отношений этого типа — отношение связывающего контактирования (см. § 3). Второй — симметричные отношения контактирования по незамкнутой поверхности (поверхностям); сюда относится отношение простого контактирования (см. § 3).

По числу компонент связности общей границы между контактирующими телами можно определить отношения контактирования по $n (n=1,2,...)$ незамкнутым поверхностям (когда два тела имеют общие границы в n изолированных друг от друга частях). При $n=1$ можно выделять отношения контактирования по незамкнутой поверхности гомеоморфной плоской r-связной $(r=1,2,3,...)$ области и по поверхности рода $P (P=0,1,...)$ с r отверстиями $(r=1,2...)$.

Система отношений контактирования включает все возможные виды этих отношений: любая пара тел, имеющая общие границы в виде поверхности (поверхностей), находится в одном из указанных отношений контактирования. Справедливость этого утверждения можно доказать, опираясь на топологическую систематику поверхностей в R^3.

Рассмотрим типы отношений контактирования, выделяемые по характеру соответствия формы контактовой поверхности контактирующим телам.

На рис. 1 показаны некоторые примеры этих отношений. Отношения, аналогичные указанным на рис. 1, широко используются при описании структур кристаллических агрегатов (кристаллических горных пород, сплавов и т. п.). При рассмотрении структур кристаллических пород используется понятие собственной формы кристалла (зерна), идиоморфизма и ксеноморфизма (Половинкина, 1966). Если фигуры 1 и 2 на рис. *1, а* рассматривать как плоские срезы кристаллов соответственно тригональной и кубической

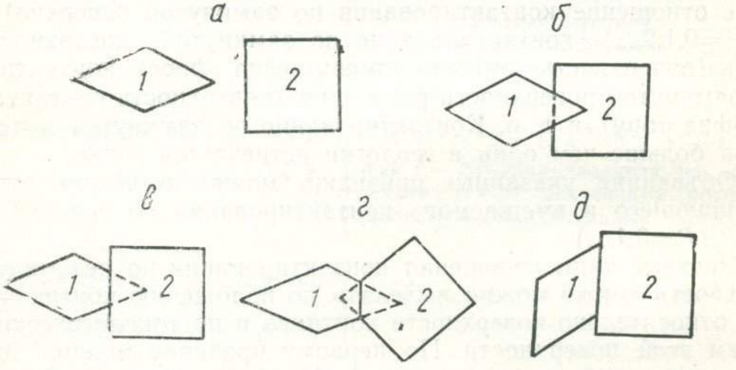

Рис. 1. Отношения между фигурами по форме общей границы

сингоний, то отношения на рис. 1 в терминах петрографии можно выразить следующим образом: рис. *1, б* — «кристалл 1— идиоморфный (относительно кристалла 2), кристалл 2— ксеноморфный (относительно кристалла 1)» или «кристалл 1 на границе с кристаллом 2 обладает собственной формой, а кристалл 2 ею не обладает»; *в* — кристалл 2—идиоморфный, кристалл 1—ксеноморфный; *г* — «кристаллы 1 и 2—ксеноморфные»; *д* — «кристаллы 1 и 2— идиоморфные».

Таким образом, форма каждого реального кристалла сопоставляется с формой идеального кристалла, называемой собственной формой. Если распространить понятие собственной формы на другие геологические тела, которые не являются кристаллами, например на интрузивные тела (штоки, дайки и т. п), рудные тела (жилы, штокверки и т. п.), пласты осадочных пород, то можно обобщить понятия идиоморфизма и ксеноморфизма следующим образом. Некоторым типам геологических тел свойственна своя форма (собственная, или характеристическая). Форма данного реального тела на контакте его со вторым телом в силу причин, связанных с этим вторым телом, может не совпасть с собственной формой данного тела. Такими причинами могут быть условия, мешавшие формированию данного тела (например, наличие при этом рядом второго тела), как это, в частности, происходит у кристаллов, или же нарушение первичной формы тела при формировании соседнего тела.

Допустим, что некоторый гранитовый интрузив G_1 «прорывает» толщу известняков G_2, на эродированной поверхности тела гранитов G_1 залегает слой конгломератов G_3; все породы пересечены дайкой диабаза G_4. Если в качестве собственной формы этих тел считать форму их «первичной» поверхности (реконструированную некоторым способом), то, проводя формальную аналогию с рассмотренным выше, можно утверждать, что тело гранитов на контакте с известняками обладает собственной формой (идиоморфно), а на контакте со слоем конгломератов G_3 и дайкой диабаза G_4 не обладает им (ксеноморфно); дайка G_4 идиоморфна на контакте со всеми остальными телами и т. п.

Подобные примеры формально можно обобщить следующим образом. Каждому телу A_i на основании его свойств ставится в соответствие некоторая замкнутая поверхность $\psi(A_i)$, которую называем характеристической поверхностью данного тела. Эта поверхность может совпасть с поверхностью самого тела или ее частью. В общем случае характеристическая поверхность произвольного тела A_i строится на основании каких-либо свойств этого тела, в частном случае она находится путем экстраполяции частей поверхности самого тела, как это показано на рис. 1 (пунктирные линии).

Общие формальные определения исходных отношений, выделенных по характеру соответствия формы контактовой поверхности контактирующим телам, приведены в табл. 1. Названия этих отношений составлены из наиболее близких по значению терминов петрографии. Отношение идиоморфизма ω_1 выполняется для упорядоченной пары контактирующих тел тогда и только тогда, когда контактовая поверхность совпадает с характеристической поверхностью (или ее частью) первого тела и не совпадает с характеристической поверхностью второго. Инверсию (обращение) ω_1^{-1} отношения идиоморфизма можно назвать отношением ксеноморфизма. Отношение панидиоморфизма (панксеноморфизма) выполняется только в том случае, когда поверхность контакта является (соответственно не является) характеристической поверхностью обоих контактирующих тел.

Очевидно, высказывание о выполнении определенных таким образом отношений идиоморфизма, ксеноморфизма, панидиоморфизма и панксеноморфизма приобретает содержание только в том случае, когда указан конкретный способ получения характеристической поверхности каждого тела. Это обстоятельство отражено введением оператора ψ в определении перечисленных отношений.

Отношения между соприкасающимися геологическими телами по форме поверхности их общей границы имеют важное значение для установления последовательности в образовании этих тел. Большинство методов определения последовательности в образовании минеральных индивидов в породах и рудах основано именно на этих отношениях (Григорьев, 1961; Григорьев, Лушников, 1967; Дементьева, 1964; Заварицкий, 1956; Мокиевский, Шафрановский, 1957; Половинкина, 1966; Чесноков, 1974; Шафрановский, Григорьев, 1948, и др.).

Выделенные типы отношений контактирования соответствуют общим геометрическим свойствам границы между телами. Для более подробной систематики этих отношений можно использовать классификацию геологических границ, разработанные Ю. А. Косыгиным (1974_1), Ю. А. Ворониным и др. (1967), С. В. Гольдиным и др. (1970).

Рассмотрим теперь отношение совместимости γ. Выше отмечено, что это отношение выполняется в том случае, когда имеется некоторая конечная область трехмерного пространства, являющаяся одновременно частью и одного, и другого тела. В табл. 1 приведены следующие типы отношений совместимости: 1) частичная совместимость γ_1 (два тела имеют общую часть, не совпадающую полностью ни с одним из них), 2) включение γ_2 (каждая точка второго тела является также точкой и первого тела). Приведем примеры.

Пусть в гранитовом массиве G_0 выделены тела G_1 — биотитовых гранитов, G_2 — лейкократовых гранитов, G_3 — альбитизированных гранитов, состоящих из альбитизированных разностей биотитовых и лейкократовых гранитов. В этом случае отношение включения γ_2 выполнено для следующих упорядоченных пар тел $<G_0, G_1>$, $<G_0, G_2>$, $<G_0, G_3>$, а частичной совместимости γ_1 — $<G_1, G_3>$ и $<G_2, G_3>$.

Пусть выделена некоторая металлогеническая зона. Эта зона (рассматривается как первое тело) к каждому из геологических тел, частично или полностью входящих в нее, находится в бинарном отношении, соответственно частичной совместимости γ_1 и отношении включения γ_2. Большинство отношений между геологическими телами по пространственному их положению для облегчения сопоставления определено через пересечение множеств точек $(A_i \cap A_j)$, хотя некоторые из них могли бы быть более просто определены через другие операции над множествами.

Отношение вмещения η выполнено только в том случае, когда существует некоторая замкнутая поверхность P, удовлетворяющая следующим условиям: 1) все точки поверхности P являются и точками тела $A_i (P \subset A_i)$, 2) все точки тела A_j принадлежат области D_P, ограниченной поверхностью $P (A_j \subset D_P)$, 3) P не совпадает с поверхностью тела A_j. Из определений, приведенных в табл. 1, следует, что если для произвольной пары тел $<A_i, A_j>$ выполнено вмещающее контактирование σ_1, то для этой же пары тел выполнено также отношение вмещения η, т. е. $\sigma_{1,M} \subseteq \eta_M$, где M — произвольное множество тел. Однако обратное утверждение в общем случае несправедливо, так как существуют такие пары тел, для которых выполнено вмещение η, но не выполнено вмещающее контактирование σ_1. Это случается, например, тогда, когда G_i и G_j неконтактирующие зоны некоторого концентрически зонального геологического тела.

Отношение уплотнения μ выполнено для упорядоченной пары тел $<A_i, A_j>$ если в теле A_j можно выделить часть D, удовлетворяющую следующему условию: число замкнутых поверхностей, ограничивающих область, полученную объединением D и A_i меньше числа замкнутых поверхностей, ограничивающих тело A_i (в частном случае тело A_j и область D могут совпадать). Очевидно, это отношение не выполнено в случае, когда тело A_i ограничено только одной замкнутой поверхностью.

Отношение уплотнения выполнено для упорядоченной пары геологических тел, если внутри первого тела имеется полость и второе тело или его некоторая часть заполняет эту полость. Из определений следует, что если тело A_i уплотняется телом $A_j (A_i \mu A_j)$, то A_i и A_j либо соприкасаются $(A_i \beta A_j)$, либо имеют общую часть $(A_i \gamma A_j)$, но они не изолированы.

Для определения отношения связывания ν использовано свойство связности тел и род их поверхности. Это отношение выполнено для упорядоченной пары тел $<A_i, A_j>$, если в теле A_j можно выделить часть D, удовлетворяющую следующему условию: связность области $A_i \cup D$, полученной объединением A_i и D, меньше связности тела A_i (или род поверхности, ограничивающей область $A_i \cup D$, меньше рода поверхности тела A_i). Очевидно, если это отношение выполнено для упорядоченной пары тел $<A_i, A_j>$, то тело A_i ограничено поверхностью рода один или больше (тор, крендель и т. п.).

Проводя аналогию с материальными телами, можно считать, что тело A_i „связыватся" (по определению) телом A_j, если в A_i имеется „отверстие", которое „закрыто" телом A_j или некоторой его частью. Из определений следует, что если тело A_i находится в отношении связывания ν к телу A_j, то они не изолированы (соприкасаются или имеют общую часть). Некоторые частные виды отношения связывания ν (определенные в следующем параграфе) широко распространены в геологии.

Отношение следования λ_L выполнено между телами A_1 и A_2 в том случае, когда при движении по заданной линии L в фиксированном направлении второе тело следует после первого (для редукции λ_L^r этого отношения второе тело следует непосредственно после первого, для инверсии λ_L^{-1} первое тело — после второго, для объединения $\lambda_L \cup \lambda_L^{-1}$ отношения следования λ_L и его инверсии λ_L^{-1} одно из двух тел следует после другого). Отношение следования λ_L будет выполнено, например, для двух пластов осадочных пород, если известно, что в некотором разрезе при движении в фиксированном направлении (например, снизу вверх) пласт 2 встречен после пласта 1 или если при пересечении шлифа по некоторой линии в фиксированном направлении зерно 2 следует после зерна 1. Таким образом, отношение следования имеет место в том случае, когда можно отметить некоторую последовательность в пространственном расположении геологических тел.

Многие отношения между геологическими телами характеризуются совпадением некоторых их геометрических свойств. Отношения этого типа можно сформулировать с помощью понятия преобразования (отображения) точек пространства, удовлетворяющих тем или иным условиям (Ефимов, Розендорн, 1970; Ефимов, 1971; Постников, 1973, и др.). Основой для этого может служить следующее положение: различия в пространственном положении, ориентации, формах и размерах двух сопоставляемых тел определяют вид преобразований, нужных для совмещения одного с другим. Зависимость свойств преобразований, необходимых для совмещения одного тела с другим, от их относительного пространственного положения, ориентации и сходства формы можно использовать для выделения отношений между ними по этим признакам. При выделении этих отношений, учитывая большое разнообразие отношений между геологическими телами, целесообразно не ограничиваться понятиями эквивалентности фигур и основываться на общем понятии преобразования (отображения). Поэтому рассмотрим вообще отношения совмещения произвольными преобразованиями.

Общую схему выделения таких отношений можно выразить следующим образом. Пусть A_i и A_j — два произвольных тела в трехмерном евклидовом пространстве R^3. Будем считать, что для пары тел $<A_i, A_j>$ выполнено отношение совмещения преобразованием вида F, если существует взаимооднозначное отображение $f{:}A_i \longrightarrow A_j$, $f \in F$, переводящее A_i в A_j, и обратное отображение $f^{-1}{:}A_j \longrightarrow A_i$, $f^{-1} \in F$, где F — класс функций, обладающих определенными свойствами. В зависимости от этих свойств можно вводить различные отношения данного типа. Общее формальное определение отношения этого типа приводится в табл. 1. Это определение можно рассматривать как некоторую «форму» в том смысле, что, подставляя вместо F в данное определение множество функций, удовлетворяющих условиям, выполняющимся при тех или иных преобразованиях, можно получать определения отношений совмещения соответствующими преобразованиями. Например, если в это определение вместо F поставить F_1, обозначающее класс непрерывных функций, то получим определение отношения совмещения топологическим преобразованием.

Приведем некоторые отношения, которые можно определить указанным способом: χ_1 — совмещение параллельным переносом, χ_2 — совмещение движением, χ_3 — аффинным преобразованием, χ_4 — преобразованием подобия (отношение подобия), χ_5— проективным преобразованием, χ_6— топологическим преобразованием.

Рассмотрим несколько примеров. Отношение χ_4 выполняется, в частности, для двух кристаллов одинаковой формы (которые можно рассматривать как подобные фигуры).

Два пласта осадочных пород, залегающих без углового несогласия, при некоторых дополнительных условиях можно рассматривать как тела, которые можно совместить с помощью параллельного переноса и сжимающего отображения, а в случае их залегания с угловым несогласием, кроме того, еще и некоторого вращения. Следовательно, для них будут выполняться соответственно совмещение параллельным переносом и сжимающим отображением, совмещение параллельным переносом; сжимающим отображением и вращением.

Совмещение топологическим преобразованием выполняется для пар гомотопных тел. Например, между двумя произвольным образом изогнутыми пластами, между двумя рудными телами, одно из которых имеет пластообразную, а другое—изометрическую форму, между двумя оболочками Земли и т. п. Однако совмещение топологическим преобразованием не выполняется между ядром Земли и ее оболочками, между фигурами, представляющими собой поперечные сечения кольцевой дайки и дайки обычной и т. п.

Можно выделить два типа отношений строгой упорядоченности ρ_0 и эквивалентности ε_0 по характеристикам.

1. Отношения упорядоченности ρ_1 и эквивалентности ε_1 по значениям количественного признака. Определение этих отношений можно получить соответственно из определений отношений ρ_0 и ε_0, приведенных в табл. 1, если в них дополнительно указать, что значения функции f представляют собой значения некоторого количественного признака. В качестве примеров ρ_1 и ε_1 можно привести отношения сопоставления геологических тел по значениям любого количественного признака w: величины среднего содержания какого-либо компонента в телах, геометрических характеристик тел (размеров, объема и т. п.) и др. В частности, если $w=v$, где v — величина объема тела, то $A_i \rho_1 A_j$ — „объем тела A_i меньше объема тела A_j “.

Исходим из условия, что каждое геологическое тело G_i можно соотнести с некоторым отрезком времени $\left[t_i' \ t_i'' \right]$, в течение которого происходило образование данного тела, формирование его первичной поверхности. Например, для пласта в нормальном залегании t_i', t_i'' соответствуют времени отложения прослоек, примыкающих соответственно к его подошве и кровле.

Определим отношения „моложе“ τ_1 (или „образовался позже“)*, „древнее“ τ_1^{-1} („образовался раньше“) и „одновозрастные“ τ_2 между геологическими телами G_i и G_j выражениями $t_i'' > t_j''$, $t_i'' < t_j''$ и $t_i'' = t_j''$, где t_i'' и t_j'' —концы интервалов времени формирования геологических тел G_i, G_j (координаты точек на оси времени, соответствующие концам указанных интервалов).

Эти отношения, характеризующие последовательность образования геологических тел, будем называть отношениями относительного возраста. В их определениях неявно принимается, что конец формирования геологического тела совпадает с началом его существования как целостного геологического объекта. С таким представлением согласуются существующие методы определения последовательности образования геологических тел по структурным соотношениям между их поверхностями. Однако недостатком приведенных определений является то, что строгое выполнение равенства $t_i'' = t_j''$ для реальных геологических тел маловероятно. На практике геологические тела считаются одновозрастными, если это равенство выполняется приблизительно, т. е. если разность $|t_i'' - t_j''|$ меньше некоторого порога, определяемого условиями решаемой задачи, точностью метода определения возраста и т. п.

Нужно заметить, что возможны и другие определения отношений относительного возраста. Например, отношения «моложе» и «древнее» между геологическими телами G_i и G_j можно было бы определить соответственно выражениями $t_j'' \leqslant t_i'$, $t_j'' \geqslant t_i'$ (где t_i' — начало формирования тела G_i), а отношение одновозрастности определить так, чтобы оно выполнялось в случае, когда перекрываются интервалы времени формирования геологических тел. Можно было бы также считать началом существования геологического тела начало его формирования. Однако эти определения согласуются с существующими методами установления относительного возраста в меньшей степени, чем приведенные выше.

Используя введенные отношения, можно определить другие отношения относительного возраста: $\left(G_i \tau_1 \cup \tau_1^{-1} G_j\right) = \left(G_i \overline{\tau_2} G_j\right)$ — — „геологические тела G_i и G_j разновозрастные“, $G_i \tau_1 \cup \tau_2 G_j$ —

* Термины «моложе», «древнее» мы применяем, по определению, в смысле «образовался позже» и «образовался раньше». В этих смыслах указанные термины можно применить и для образовавшихся последовательно, но имеющих приблизительно одинаковый геологический возраст тел (например, для последовательно кристаллизовавшихся из расплава зерен интрузивной породы), и для тел (интрузивные тела, слои и т. п.) с резко различными геологическими возрастами. Непривычный термин «старше», по-видимому, лучше отражает это понятие, чем «древнее», так как говоря «древнее» обычно имеют в виду тела различного геологического возраста.

„геологическое тело G_i не древнее тела G_j (моложе или одновозрастно)“ и т. п.

Если в определении отношения ε_0 значение функции f в A_i рассматривать как вектор $< q_{i1}, q_{i2}, q_{i3} >$, задающий ориентацию тела A_i, то полученное отношение будет характеризовать относительную ориентацию тел. Это отношение, которое обозначим через π и назовем „согласностью“ или „согласием“, в некоторых частных случаях совпадает с введенным выше отношением совмещения параллельным переносом. Отношение π можно использовать для обобщения и экспликации существующих в геологии понятий о „согласном (конкордантном, параллельном) залегании пластов“, „параллельной (линейно-параллельной, плоско-параллельной) текстуры“ пород и т. п.

2. Отношение строгой упорядоченности ρ_2 и эквивалентности ε_2 по набору качественных признаков. Если в определениях отношений ρ_0 и ε_0 в табл. 1 дополнительно указать, что значение $f(A_i) = l$ функции f в теле A_i есть порядковый номер присутствующего в данном теле A_i качественного признака u_l ($l = 1, 2, \dots n$) из некоторого упорядоченного набора качественных признаков $< u_1, u_2, \dots, u_n >$, то получаются соответственно определения отношений ρ_2 и ε_2 (т. е. в данном случае $f(A_i) = l$ означает, что тело A_i обладает l-ым признаком). Из полученных таким образом определений следует, что каждое тело обладает одним и только одним признаком из упорядоченного набора признаков $< u_1, u_2, \dots, u_n >$. Отношение ρ_2 (ε_2) выполнено для пары тел $< A_i, A_j >$ тогда и только тогда, когда номер признака, которым обладает тело A_i, меньше (соответственно равно) номера признака, которым обладает тело A_j.

Необходимость рассмотрения отношений ρ_2 и ε_2 возникает, в частности, при сопоставлении тел по номерам присутствующих в них признаков, упорядоченных таким образом, что этот порядок имеет содержательный смысл, например, когда нужно сопоставить слои осадочных пород по типам находящихся в них остатков организмов, пронумерованных в порядке их возрастной последовательности.

§ 3. Операции над бинарными отношениями на множествах геологических тел. Производные отношения

Используя бинарные отношения, приведенные в § 2, как исходные, с помощью операций над отношениями можно определить другие отношения, которые в отличие от исходных будем называть производными. Очевидно, такое разделение отношений условно, так как в качестве исходных (первичных) можно взять другие отношения.

Для каждого отношения, приведенного в таблице 1, можно определить дополнение к нему по формуле $\left(A_i\bar{\varphi}A_j\right) \overset{Df}{\rightleftarrows}$ $\overset{Df}{\rightleftarrows} \neg\left(A_i\varphi A_j\right)$. Например, используя отношение изолированности α, можно определить отношение неизолированности $\bar{\alpha}$. Аналогично, дополнением к отношению эквивалентности по характеристикам ε_0 будет отношение неэквивалентности (неравенства) по характеристикам $\bar{\varepsilon}_0$.

Для несимметричных отношений σ_1, σ_2, γ_2, η, λ_L, ρ_1, ω_1 можно определить их инверсии (обращения) σ_1^{-1}, σ_2^{-1}, γ_2^{-1}, η^{-1}, λ_L^{-1}, ρ_1^{-1}, ω_1^{-1} по формуле $\left(A_i\varphi^{-1}A_j\right) \overset{Df}{\rightleftarrows} (A_j\varphi A_i)$. Например, инверсией отношения следования λ_L будет $A_i\lambda_L^{-1}A_j$ — „при следовании по заданной линии L в фиксированном направлении тело A_j будет встречено раньше тела A_i“. Для симметричного отношения, согласно известной теореме, инверсия совпадает с самим отношением.

Ряд распространенных в геологии отношений может быть определен через бинарные отношения, указанные в табл. 1, с помощью операций объединения и пересечения соответственно по формулам

$$\bigcup_{l=1}^{m} \varphi_l = \left\langle \bigcup_{l=1}^{m} \Phi_l,\ M \right\rangle \text{ и } \bigcap_{l=1}^{m} \varphi_l = \left\langle \bigcap_{l=1}^{m} \Phi_l,\ M \right\rangle.$$

В качестве примеров приведем некоторые из них.

1) $\sigma_1 \cup \sigma_2^{-1}$ — „вмещающее контактирование или его инверсия“ („контактирование с вмещающим или вмещаемым телом“), $A_i\sigma_1 \cup \sigma^{-1}A_j$ — „тела A_i и A_j контактируют по замкнутой поверхности“.

2) $\gamma_2 \cup \gamma_2^{-1}$ — „включение или его инверсия“. $A_i\gamma_2 \cup \gamma_2^{-1}A_j$ — „тела A_i и A_j имеют общую часть, совпадающую с одним из них“.

3) $\eta \cup \eta^{-1}$ — „вмещение или вмещаемость“, $A_i\eta \cup \eta^{-1}A_j$ — „одно из тел A_i и A_j вмещает другое“.

4) $\rho_0 \cup \varepsilon_0$ — „нестрогая упорядоченность по характеристикам“, $A_i\,\rho_0 \cup \varepsilon_0 A_j$ — „значение $f\left(A_i\right)$ функции f в A_i не больше, чем ее значение $f\left(A_j\right)$ в A_j“ (аналогично $\rho_1 \cup \varepsilon_1$ и $\rho_2 \cup \varepsilon_2$)“.

5) $\gamma_2 \cap \bar{E}$ — „включение и неравенство“ $A_i\gamma_2 \cap \bar{E}A_j$ — „тело A_i включает тело A_j, $A_i \neq A_j$“, E — отношение равенства.

6) $\alpha \cap \eta$ — „изолированность и вмещение“ $A_i\alpha \cap \eta A_j$ — „тела A_i и A_j изолированы, тело A_i вмещает тело A_j“ (пример этого отношения приведен в § 2).

7) $\sigma \cap \pi\ (\alpha \cap \pi)$ — „контактирование (изолированность) и согласие“, $A_i\sigma \cap \pi A_j\ (A_i\alpha \cap \pi A_j)$ — „тела A_i и A_j контактируют (соответственно изолированы) и согласные“.

8) $\mu \cap \sigma$ — „заполнение“ (или „контактирование и уплотнение“), $A_i\mu \cap \sigma A_j$ „тело A_j заполняет „полость“ внутри тела A_i“. Это отношение является частным видом отношения вмещающего контактирования и выполняется в том случае, когда тело A_i контактирует с телом A_j по замкнутой поверхности и тело A_j ограничено только этой поверхностью*.

9) $\mu \cap \gamma$ — „уплотнение и совместимость“, $A_i\mu \cap \gamma A_j$ — „тела A_i и A_j имеют общую часть и части тела A_j заполняют „полости“ внутри тела A_i“.

10) $\nu \cap \sigma$ — „связывание и контактирование“, $A_i\nu \cap \sigma A_j$ — „тело A_i контактирует с телом A_j и связывается им“. Определим отношение связывающего контактирования σ_2 следующим образом: упорядоченная пара тел $< A_i, A_j >$ находится в отношении связывающего контактирования σ_2, если тела A_i и A_j контактируют и тело A_i связывается телом A_j, а тело A_j не связывается телом A_i, т. е. $(A_i \sigma_2 A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} [(A_i\sigma A_j) \wedge (A_i\nu A_j) \wedge (A_j \bar{\nu} A_i)]$. В этом отношении находится, например, некоторый пласт к „проходящей насквозь“ жиле (или дайке, штоку и т. п.) при этом подразумевается, что в месте прохождения жилы через данный пласт вмещающей породой является только порода этого пласта.

11) $\nu \cap \gamma$ — „связывание и совместимость“, $A_i\nu \cap \gamma A_j$ — „тело A_i имеет общую часть с телом A_j и связывается им“.

Производные отношения можно также получить как разность некоторых введенных выше отношений. Определим отношение простого контактирования выражением $\sigma_3 \overset{Df}{\rightleftarrows} \sigma \setminus \left(\sigma_1 \cup \sigma_1^{-1} \cup \sigma_2 \cup \cup \sigma_2^{-1}\right)$. В этом отношении находится всякая пара тел, для которой выполнено отношение контактирования σ, но не выполнены отношения вмещающего и связывающего контактирования (σ_1, σ_2) и их инверсии $\left(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}\right)$. Отношение простого контактирования выполнено, например, для соседних контактирующих зерен пород, для контактирующих пластов осадочных пород и т. п.

---

* Тела, для которых выполнено это отношение заполнения $\mu \cap \sigma$ по терминологии, предложенной С. В. Гольдиным (Гольдин и др., 1970), можно назвать «вмещающим» и «вмещаемым». Однако эти термины мы используем для тел, находящихся в более общем отношении — вмещения η. Вмещаемое тело, говоря нестрого, находится внутри вмещающего тела, заполняя или не заполняя полость в нем. Например, для литосферы и ядра Земли выполнено отношение вмещения η, но не выполнено отношение заполнения $\mu \cap \sigma$.

Многие распространенные отношения между геологическими телами можно определить через исходные отношения, перечисленные в табл. 1, как их композиции (произведения) с помощью операции умножения по формуле $(A_l \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} (\exists A_{q_1} \in M)(\exists A_{q_2} \in M) \cdots (\exists A_{q_{n-1}} \in M) \cdot [(A_l \varphi_1 A_{q_1}) \wedge (A_{q_1} \varphi_2 A_{q_2}) \wedge \cdots \wedge (A_{q_{n-1}} \varphi_n A_j)]$. В частном случае, когда $\varphi_l = \varphi$, $l = 1, 2, \ldots, n-1$ вместо $A_l \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ раз}} A_j$ будем писать $A_l \varphi^n A_j$. Например, композицией отношений контактирования при $n = 2$ будет отношение $(A_l \sigma \circ \sigma A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} (A_l \sigma^2 A_j)$, которое будет выполнено для тел A_l и A_j, если существует тело $A_q \in M$, контактирующее с телами A_l и A_j; композиция $A_l \sigma^n A_j$ будет выполнена, если существуют такие тела $A_{q_1}, A_{q_2}, \ldots, A_{q_{n-1}}$, что $<A_l, A_{q_1}>$, $<A_{q_1}, A_{q_2}>, \ldots, <A_{q_{n-1}}, A_j>$ — пары контактирующих тел $(A_l \sigma A_{q_1}, A_{q_1} \sigma A_{q_2}, \ldots, A_{q_{n-1}} \sigma A_j)$.

Очень важны отношения, которые можно определить через исходные отношения, приведенные в табл. 1, с помощью операции, называемой транзитивизацией или транзитивным замыканием (Василевский, 1973; Шрейдер, 1970, 1971) по формуле

$$(A_l \hat{\varphi} A_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} (A_l \varphi \cup \varphi^2 \cup \varphi^3 \cup \cdots \cup \varphi^n \cup \cdots A_j)$$

Таким образом, если φ — некоторое отношение на множестве M, то его транзитивизация φ будет выполнена в том случае, если выполнена хотя бы одна композиция вида φ^n $(n = 1, 2, \ldots)$. Например, транзитивизация отношения контактирования σ между телами A_l и A_j будет выполнена в том случае, если выполнено хотя бы одно из отношений $A_l \sigma A_j$, $A_l \sigma^2 A_j, \ldots, A_l \sigma^n A_j, \ldots$ Существует теорема, утверждающая, что транзитивизация транзитивного отношения совпадает с самым отношением. Следовательно, $\hat{\gamma}_2 = \gamma_2$, $\hat{\eta} = \eta$, $\hat{\lambda}_L = \lambda_L$, $\hat{\varkappa} = \varkappa$, $\hat{\rho}_0 = \rho_0$ и $\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0$. Транзитивизации отношений $\beta, \gamma, \bar{\alpha}, \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \gamma_1$ играют большую роль в геологии.

Ю. А. Воронин и Э. А. Еганов (1972) с помощью термина «общая граница между телами» вводят некоторые отношения на множестве геологических тел, объединяемых по условиям и обстановкам их образования. Если высказывание „тела A_l и A_j имеют общую границу" равносильно высказыванию „$[A_l \cap A_j \neq \varnothing] \wedge [v(A_l \cap A_j) = 0]$", где $v(A_l \cap A_j)$ — объем множества

$A_i \cap A_j$, то выражениям „тела A_i и A_j — ближайшие соседи“, „тела A_i и A_j соседи“ и „множество тел M есть пространственная компонента связности“, составленным с применением терминов указанных авторов, отвечают соответственно высказывания „для тел A_i и A_j выполнено отношение соприкосновения β“, „для тел A_i и A_j выполнена транзитивизация $\hat{\beta}$ отношения соприкосновения“ и „на множестве тел $M \hat{\beta} = \langle M^2, M \rangle$“, употребляемые в данной работе.

§ 4. Математические свойства основных бинарных отношений на произвольном множестве геологических тел. Систематика отношений между геологическими телами на математической основе

Для построения классификации отношений между геологическими телами нужно рассмотреть основные формальные их свойства. Напомним основные свойства бинарных отношений, обычно рассматриваемые в общей теории бинарных отношений (Шиханович, 1965; Шрейдер, 1971 и др.).

Пусть M — множество элементов произвольной природы. Бинарное отношение $\varphi = \langle \Phi, M \rangle$ на множестве M называется

рефлексивным, если для любого элемента x из M отношение φ выполнено с самим этим элементом, т. е. $(\forall x \in M)(x\varphi x)$;

антирефлексивным, если для любого элемента x из M отношение φ не выполнено с самим этим элементом, т. е. $(\forall x \in M) \times \times (x\bar{\varphi}x)$;

симметричным, если для любых двух элементов x и y, принадлежащих M, из того, что x находится в отношении φ с y следует, что y находится в отношении φ с x, т. е. $(\forall x \in M)$ $(\forall y \in M)[(x\varphi y) \to (y\varphi x)]$;

асимметричным, если для любых различных элементов x и y, принадлежащих M, из того, что x находится в отношении φ с y, следует, что y не находится в отношении φ с x, т. е. $(x\varphi y) \to (y\bar{\varphi}x)$ (здесь и ниже перед выражениями опущены кванторы);

антисимметричным, если для любых двух элементов x и y, принадлежащих M, из того, что x находится в отношении φ с y и y находится в отношении φ с x, следует, что x и y совпадают, т. е. $(x\varphi y) \wedge (y\varphi x) \to (x = y)$;

транзитивным, если для любых трех элементов x, y и z, принадлежащих M, из того, что x находится в отношении φ с y и y находится в отношении φ с z, следует, что x находится в отношении φ с z, т. е. $[(x\varphi y) \wedge (y\varphi z)] \to (x\varphi z)$;

антитранзитивным, если для любых элементов $x, y, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ $(x, y \neq x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принадлежащих M, из того, что отношение φ выполнено для пар $\langle x, x_1 \rangle$, $\langle x_1, x_2 \rangle, \ldots$

..., $<x_n, y>$, следует, что оно не выполнено для пары $<x, y>$, т. е. $[(x\varphi x_1) \wedge (x_1\varphi x_2) \wedge \cdots \wedge (x_n\varphi y)] \rightarrow (x\overline{\varphi} y)$;

связным, если для любых двух различных элементов x и y, принадлежащих M, из того, что x и y не совпадают, следует, что x находится в отношении φ с y или y находится в отношении φ с x, т. е. $(x \neq y) \rightarrow [(x\varphi y) \vee (y\varphi x)]$.

Отношение φ на множестве M называется полным, если оно выполнено для всякой пары элементов из M, пустым, если оно не выполнено для всех пар элементов из M, диагональным, или отношением равенства, если оно выполнено для каждой пары совпадающих и не выполнено для любой пары несовпадающих элементов из M, эквивалентностью, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно; толерантностью, если оно рефлексивно и симметрично; нестрогим порядком, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно; совершенным нестрогим порядком, если оно рефлексивно, антисимметрично, транзитивно и связано; строгим порядком, если оно антирефлексивно и транзитивно; совершенным строгим порядком, если оно антирефлексивно, транзитивно и связано; редукцией строгого порядка, если оно антитранзитивно.

В табл. 2 перечислены свойства рассмотренных раньше (§ 2 и 3) бинарных отношений на множествах тел в R^3, установленные непосредственно из определений отношений, и отмечены положения отношений между геологическими телами в общей систематике бинарных отношений. Зная формальные свойства отношений между геологическими телами, кроме классов, перечисленных в табл. 2 (эквивалентность, толерантность и т. п.), можно выделить классы отношений с теми или иными свойствами или логически возможными сочетаниями свойств — класс симметричных отношений между геологическими телами, класс транзитивных отношений, класс антирефлексивных и симметричных отношений и т. п. Ограничимся перечислением основных формальных свойств отношений между геологическими телами и наиболее важных классов отношений, выделенных по этим свойствам.

Основные бинарные отношения на произвольном множестве тел в R^3 по свойствам распределяются следующим образом:

эквивалентности (рефлексивные, симметричные и транзитивные отношения): совмещение преобразованием $\varkappa$ ($\varkappa_i$, $i=1,2, ..., 6$), эквивалентности по характеристикам ε_0, ε_1, ε_2, τ_2; транзитивизация неизолированности $\hat{\alpha}$, транзитивизация совместимости $\hat{\gamma}$;

толерантности (рефлексные и симметричные отношения): неизолированность α, совместимость γ;

отношения строгого порядка (антирефлексивные, асимметричные и транзитивные отношения): вмещение η, следование λ_L, упорядоченность по характеристикам ρ_0, ρ_1, ρ_2, τ_1; изолирован-

Таблица 2

Основные свойства бинарных отношений на произвольном множестве тел в трехмерном евклидовом пространстве

Название и обозначение отношения	Свойства: рефлексивность	антирефлексивность	симметричность	асимметричность	антисимметричность	связность	транзитивность	антитранзитивность	Положение в систематике бинарных отношений
Изолированность α		+	+						
Неизолированность $\overline{\alpha}$	+		+						Толерантность
Соприкосновение β		+	+						
Контактирование σ		+	+						
Вмещающее контактирование σ_1		+		+				+	Редукция строгого порядка
Связывающее контактирование σ_2		+		+					
Простое контактирование σ_3		+	+						
Идиоморфизм ω_1		+		+					
Ксеноморфизм ω_1^{-1}		+		+					
Панидиоморфизм ω_2		+	+						
Панксеноморфизм ω_3		+	+						
Совместимость γ	+		+						Толерантность
Частичная совместимость γ_1		+	+						
Включение γ_2	+				+		+		Нестрогий порядок
Вмещение η		+		+	+		+		Строгий порядок
Следование λ_L		+		+	+		+		Строгий порядок
Уплотнение μ		+							
Связывание ν		+							
Совмещение преобразованием $\varkappa$ ($\varkappa_i$, $i=1,2...,6$)	+		+				+		Эквивалентность
Упорядоченность по характеристикам ρ_0 (ρ_1, ρ_2, τ_1)		+		+	+		+		Строгий порядок

Продолжение табл. 2

Название и обозначение отношения	Свойства								Положение в систематике бинарных отношений
	рефлексивность	антирефлексивность	симметричность	асимметричность	антисимметричность	связность	транзитивность	антитранзитивность	
Эквивалентность по характеристикам ε_0 (ε_1, ε_2, τ_2)	+		+				+		Эквивалентность
Вмещение или вмещаемость $\eta \cup \eta^{-1}$		+	+						
Нестрогая упорядоченность по характеристикам $\rho_0 \cup \varepsilon_0$	+				+		+		Нестрогий порядок
Изолированность и вмещение $\alpha \cap \eta$		+		+	+		+		Строгий порядок
Вмещающее контактирование и ксеноморфизм $\sigma_1 \cap \omega_1^{-1}$		+		+				+	Редукция строгого порядка
Включение и неравенство $\gamma_2 \cap \overline{E}$		+		+	+		+		Строгий порядок
Контактирование и согласие $\sigma \cap \pi$		+	+						
Заполнение $\mu \cap \sigma$		+		+					
Уплотнение и совместимость $\mu \cap \gamma$		+							
Связывание и контактирование $\nu \cap \sigma$		+							
Связывание и совместимость $\nu \cap \gamma$		+							
Транзитивизация соприкосновения $\hat{\beta}$			+				+		
Транзитивизация контактирования $\overset{\frown}{\sigma}_1$			+				+		
Транзитивизация вмещающего контактирования $\hat{\sigma}_1$		+		+	+		+		Строгий порядок

Название и обозначение отношения	Свойства								Положение в систематике бинарных отношений
	рефлексивность	антирефлексивность	симметричность	асимметричность	антисимметричность	связность	транзитивность	антитранзитивность	
Транзитивизация простого контактирования $\hat{\sigma}_3$			+				+		
Транзитивизация совместимости $\hat{\gamma}$	+		+				+		Эквивалентность
Транзитивизация идиоморфизма $\hat{\omega}_1$							+		
Транзитивизация панидиоморфизма $\hat{\omega}_2$			+				+		
Транзитивизация неизолированности $\hat{\bar{\alpha}}$	+		+				+		Эквивалентность
Транзитивизация контактирования и согласия $\widehat{\sigma\cap\pi}$			+				+		
Транзитивизация контактирования и неэквивалентности $\widehat{\sigma\cap\bar{\varepsilon}_0}$			+				+		

ность и вмещение $\alpha\cap\eta$, включение и неравенство $\gamma_2\cap\bar{E}$, транзитивизация вмещающего контактирования $\hat{\sigma}_1$, транзитивизация связывающего контактирования $\hat{\sigma}_2$;

отношения нестрогого порядка (рефлексивные, антисимметричные и транзитивные отношения): включение γ_2, нестрогая упорядоченность по характеристикам $\rho_0\cup\varepsilon_0$, $\rho_1\cup\varepsilon_1$, $\rho_2\cup\varepsilon_2$, $\tau_1\cup\tau_2$;

редукция строгого порядка (антитранзитивное отношение): вмещающее контактирование σ_1.

Среди бинарных отношений между телами оказались и такие, которые не могут быть отнесены к перечисленным типам, обычно рассматриваемым в теории бинарных отношений:

антирефлексивные и симметричные отношения: изолированность α, соприкосновение β, контактирование σ, простое контактирование σ_3, панидиоморфизм ω_2, панксеноморфизм ω_3, частичная совместимость γ_1, неэквивалентность по характеристикам $\overline{\varepsilon_0}$ $\overline{\varepsilon_1}$, $\overline{\varepsilon_2}$ $\overline{\tau_2}$; ряд отношений, полученных объединением антирефлексивных и асимметричных отношений с соответствующими инверсиями — $\sigma_1 \cup \sigma_1^{-1}$, $\sigma_2 \cup \sigma_2^{-1}$ и т. п.; изолированность и согласие $\alpha \cap \pi$, контактирование и согласие $\sigma \cap \pi$;

антирефлексивные и асимметричные отношения: связывающее контактирование σ_2, идиоморфизм ω_1, ксеноморфизм ω_1^{-1}, заполнение $\mu \cap \sigma$;

симметричные и транзитивные отношения: транзитивизации следующих отношений — соприкосновения $\hat{\beta}$, контактирования $\hat{\sigma}$, простого контактирования $\hat{\sigma}_3$, частичной совместимости $\hat{\gamma}_1$, панидиоморфизма $\hat{\omega}_2$, панксеноморфизма $\hat{\omega}_3$, контактирования и согласия $\widehat{\sigma \cap \pi}$, контактирования и неэквивалентности $\widehat{\sigma \cap \overline{\varepsilon}_0}$;

транзитивные отношения: транзитивизации идиоморфизма ω_1 и ксеноморфизма $\hat{\omega}_1^{-1}$;

антирефлексивные отношения: уплотнение μ, связывание ν, уплотнение и совместимость $\mu \cap \gamma$, связывание и контактирование $\nu \cap \sigma$, связывание и совместимость $\nu \cap \gamma$.

О свойствах отношений, указанных в табл. 2 и выше, необходимо заметить следующее. Эти свойства характерны для бинарных отношений на произвольном множестве тел M в R^3. Если же свойства множества тел M ограничить введением определенных условий, то некоторые из бинарных отношений на этом множестве, кроме перечисленных выше, приобретают те или иные дополнительные свойства. Например, транзитивизация отношения идиоморфизма $\hat{\omega}_1$ на произвольном множестве тел M обладает только свойством транзитивизации. Однако, если потребовать, чтобы множество тел M удовлетворяло некоторым условиям, то на этом множестве $\hat{\omega}_1$ будет обладать, кроме транзитивности, свойствами антирефлексивности и асимметричности.

Многие из введенных отношений оказались антирефлексивными. Среди отношений, выделенных как исходные, некоторые из антирефлексивных обладают свойством асимметричности, а другие — симметричности. Транзитивизации первых являются строгими порядками, вторых — симметричными и транзитивными отношениями (уже не обладающими свойством антирефлексивности), которые в зависимости от свойств конкретных рассматриваемых множеств тел могут быть как рефлексивными, так и нерефлексивными. В первом случае имеем отношение эквивалентности, а во втором — своеобразные нерефлексивные, симметричные и транзитивные отношения.

Бинарное отношение между телами суть признак (свойство), определенный на фигурах, представляющих собой пары тел. Поэтому для них применимы все методы исследования геометрических фигур. Отсюда следует, что при систематике пространственных отношений между геологическими телами можно использовать понятие преобразования. Допустим, что производится некоторое точечное преобразование T евклидового пространства R^3 — отображение этого пространства на себя (Ефимов, 1971; Постников, 1973, и др.). Все отношения между телами в этом пространстве — все свойства фигур, состоящих из пар тел — относительно этого преобразования можно разбить на два класса: сохраняющиеся и несохраняющиеся при преобразовании T.

По этому принципу можно выделить класс отношений между телами в трехмерном евклидовом пространстве R^3, сохраняющихся при вращении пространства R^3 вокруг некоторой оси или точки, класс отношений между телами в R^3, сохраняющихся при параллельных переносах, класс отношений между телами в R^3, сохраняющихся при преобразовании подобия, класс отношений между телами в R^3, сохраняющихся при топологических преобразованиях и т. п. Выделенные таким способом классы не являются классами разбиения множества отношений между телами. Эти классы находятся между собой в таких же соотношениях, как и соответствующие им преобразования.

Приведем примеры. Отношение следования λ_L и определяемые через него отношения «ниже», «выше» (например, «пласт A_i лежит по разрезу выше пласта A_j ») не сохраняются при зеркальном отражении относительно некоторой плоскости. Если при движении по прямой в некотором направлении тело A_i следует после тела A_j , то после зеркального отражения относительно соответствующим образом подобранной плоскости, наоборот, тело A_j будет следовать после тела A_i (считается, что направление движения по прямой не изменяется). Однако, если для тел A_i и A_j выполняется отношение подобия (т. е. они подобны) или совмещения движением (т. е. они конгруэнтны), то и после зеркального отражения для них будет выполняться это отношение.

Многие из наиболее часто рассматриваемых пространственных отношений между геологическими телами относятся к классу отношений, сохраняющихся при произвольных топологических преобразованиях пространства. Известно, что свойства размерности, связности, замкнутости множеств точек (многообразий) инвариантны относительно топологического преобразования. Поэтому если два тела контактируют (имеют общую поверхность), то и после произвольного топологического преобразования пространства, в котором находятся эти тела, они также будут контактировать, если они контактируют по замкнутой поверхности, и после такого преобразования они будут контактировать по замкнутой поверхности. Отношения контактирования и вмещающего контактирования сохраняются при топологических преобразованиях. Такие отношения можно назвать топологическими.

Исследования показывают, что класс топологических отношений между геологическими телами имеет в геологии исключительно большое значение. Введенные исходные отношения изолированности, соприкосновения, совместимости, частичной совместимости, включения, вмещения, связывания, совмещения топологическим преобразованием и определенные через них производные отношения относятся к классу топологических отношений.

Описанные выше формальные свойства и систематику отношений между геологическими телами, как будет показано, можно использовать для классификации структур геологических объектов и решения конкретных геологических задач. По отношениям эквивалентности можно производить разбивку множества тел на классы. Отношения строгого и нестрогого порядка можно применить для упорядочения тел по тем или иным признакам.

При использовании бинарных отношений между телами в описательных целях и для решения некоторых других задач удобно представлять их в виде графов или матриц, получаемых следующим образом: каждое тело соотносится с одной вершиной графа, вершины i и j соединяются дугой — линией со стрелкой (для несимметричных отношений) или звеном — линией без стрелки (для симметричных отношений), если для пары тел $<A_i, A_j>$, соответствующих этим вершинам, выполняется данное отношение; в случае матричного представления i-у телу соответствует i-я строка и i-й столбец матрицы $\|a_{ij}\|$, в которой $a_{ij} = 1$ $(a_{ij} = 0)$, если пара тел $<A_i, A_j>$ находится (соответственно не находится) в данном отношении.

Итак, рассмотрены основные бинарные отношения на множестве тел в трехмерном евклидовом пространстве. Как видно, введенных бинарных отношений достаточно для экспликации многих отношений между геологическими телами. Исследование показывает, что на практике довольно редко возникает необходимость оперировать n-арными отношениями (отношения порядка $n, n \geqslant 2$).

§ 5. n-арные отношения между множествами геологических тел

n-арное отношение между множествами тел в R^3 — кортеж (упорядоченный набор), компонентами которого являются $n+1$ множеств

$$\varphi^{(n)} = <\Phi, M_1, M_2, \dots, M_n>,$$

где M_l, $l = 1, 2 \dots n$ — некоторые множества тел;

$$\Phi \subseteq M_1 \times M_2 \times M_3 \times \cdots M_n;$$

здесь $M_1 \times M_2 \times \cdots M_n$ — декартовое произведение множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$ (множество всех кортежей вида $<A_1, A_2, \dots$ $\dots, A_n>$, $A_1 \in M_1$, $A_2 \in M_2, \dots, A_n \in M_n$).

Если $<A_1, A_2, \dots, A_n> \in \Phi$, то мы говорим, что „для кортежа $<A_1, A_2, \dots, A_n>$ выполнено n-арное отношение $\varphi^{(n)} = <\Phi, M_1, M_2, \dots, M_n>$“. Вместо $<A_1, A_2, \dots, A_n> \in \Phi$ удобно применять обозначение $\left(A_1, A_2, \dots, A_n;\ \varphi^{(n)}\right)$.

Рассмотрим n-арные отношения, которые можно определить путем непосредственного обобщения определений некоторых бинарных отношений, приведенных в табл. 1. Если в определениях отношений α, β, γ вместо $A_i \alpha A_j$, $A_i \beta A_j$, $A_i \gamma A_j$ и $A_i \cap A_j$ поставить соответственно $\left(A_1, A_2, \dots, A_n;\ \alpha^{(n)}\right)$, $\left(A_1, A_2, \dots A_n;\ \beta^{(n)}\right)$, $\left(A_1, A_2, \dots, A_n;\ \gamma^{(n)}\right)$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, то получим определения n-отношений $\alpha^{(n)}$, $\beta^{(n)}$ и $\gamma^{(n)}$, при этом $\alpha^{(2)} \overset{Df}{=} \alpha$, $\beta^{(2)} \overset{Df}{=} \beta$ и $\gamma^{(2)} \overset{Df}{=} \gamma$.

Рассмотрим n-арные отношения соприкосновения, которые можно определить выражениями

$$\left(A_1, A_2, \dots, A_n;\ \beta_k^{(n)}\right) \overset{Df}{\rightleftarrows} \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i = L_k\right)$$

$$k = 0,\ 1,\ 2, \tag{5.1}$$

где L_0, L_1, L_2 — соответственно некоторые точка, линия и поверхность в R^3. n-арные отношения $\beta_0^{(n)}$ и $\beta_1^{(n)}$ назовем отношениями соприкосновения в точке и по линии. Согласно определению, эти отношения выполняются для n тел, имеющих общую часть в виде точки или линии. Любые три и больше тела в трехмерном пространстве не могут иметь общую часть в виде поверхности. Следовательно, n-арное отношение контактирования $\beta_2^{(n)}$ при $n > 2$ между всякими множествами тел в трехмерном евклидовом пространстве R^3 — пустое отношение.

В отличие от этого существуют тела, для которых отношения $\beta_0^{(n)}$ и $\beta_1^{(n)}$ выполняются при $n = 2, 3, 4, \dots$. При больших n они встречаются сравнительно редко. „Радиально-лучистые“ системы (сферолиты, некоторые конкреции и др.) можно рассматривать как системы геологических тел, для которых выполнено отношение соприкосновения в точке (в центре системы) $\beta_0^{(n)}$ при $n \gg 2$.

§6. Бинарные отношения между телами (связные области) в двумерном и одномерном евклидовых пространствах. Определение бинарных отношений между телами по отношениям между их сечениями

Структурные свойства систем геологических тел в большинстве случаев можно изучать только по сечениям, полученным пересечением их некоторыми поверхностями и линиями (например, поверхностью рельефа, осью скважины, плоскостью шлифа, линией сканирования шлифа и т. п.). Поэтому многие задачи, относящие-

Таблица 3

Основные бинарные отношения между фигурами на плоскости

Название и обозначение отношения в R^2	Определение отношения
α' — изолированность, $B_i\,\alpha' B_j$ — „плоские фигуры B_i и B_j не имеют общих точек", где B_i и B_j — произвольные фигуры в двумерном эвклидовом пространстве R^2	$(B_i\,\alpha' B_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} [(B_i \cap B_j) = \varnothing]$
β' — соприкосновение, $B_i\,\beta' B_j$ — „плоские фигуры B_i и B_j соприкасаются"	$(B_i\,\beta' B_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(B_i \cap B_j) \neq \varnothing] \wedge [s(B_i \cap B_j) = 0]\}$, где $s(B_i \cap B_j)$ — площадь пересечения $B_i \cap B_j$ фигур B_i и B_j
σ' — контактирование, $B_i\,\sigma' B_j$ — „плоские фигуры B_i и B_j контактируют"	$(B_i\,\sigma' B_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} [(B_i \cap B_j) = L]$, где L — линия в R^2
σ_1' — вмещающее контактирование, $B_i\,\sigma_1' B_j$ — „плоские фигуры B_i и B_j контактируют по замкнутой линии, внутри которой расположено B_j"	$(B_i\,\sigma_1' B_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} [(B_i \cap B_j) = L'] \wedge (B_j \subseteq D_{L'})$, где L' — произвольная замкнутая линия в R^2, $D_{L'}$ — область в R^2 ограниченная линией L'
ω_1' — идиоморфизм, $B_i\,\omega_1' B_j$ — „плоская фигура B_i идиоморфна по оператору ξ относительно тела B_j, плоская фигура B_j ксеноморфна относительно B_i"	$(B_i\,\omega_1' B_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(B_i \cap B_j) \subseteq \xi(B_i)] \wedge [(B_i \cap B_j) \subseteq\!\mid\!\equiv \xi(B_j)]\}$, где $\xi: S \to T$ — отображение (оператор), которое плоской фигуре $B_i \in S$, ставит в соответствие некоторую замкнутую линию $\xi(B_i) \in T$.
ω_2' — панидиоморфизм, $B_i\,\omega_2' B_j$ — „плоские фигуры B_i и B_j идиоморфны по оператору ξ"	$(B_i\,\omega_2' B_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(B_i \cap B_j) \subseteq \xi(B_i)] \wedge [(B_i \cap B_j) \subseteq \xi(B_j)]\}$
ω_3' — панксеноморфизм, $B_i\,\omega_3' B_j$ — „плоские фигуры B_i и B_j ксеноморфны по оператору ξ"	$(B_i\,\omega_3' B_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(B_i \cap B_j) \subseteq\!\mid\!\equiv \xi(B_i)] \wedge [(B_i \cap B_j) \subseteq\!\mid\!\equiv \xi(B_j)]\}$

Название и обозначение отношения в R^2	Определение отношения
γ' — совместимость, $B_i\ \gamma' B_j$ — „плоские фигуры B_i и B_j имеют общую часть"	$(B_i\ \gamma' B_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(B_i \cap B_j) \neq \neq \varnothing] \wedge [s(B_i \cap B_j) \neq 0]\}$
γ_1' — частичная совместимость, $B_i\ \gamma_1' B_j$ — „плоские фигуры B_i и B_j имеют общую часть, не совпадающую ни с одним из них"	$(B_i\ \gamma_1' B_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(B_i \cap B_j) = = Q] \wedge (Q \neq B_i) \wedge (Q \neq B_j)\}$, где Q — произвольная область двумерного евклидового пространства R^2
γ_2' — включение, $B_i\ \gamma_2' B_j$ (или $B_j \subseteq B_i$) — „плоская фигура B_i включает фигуру B_j "	$(B_i\ \gamma_2' B_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} [(B_i \cap B_j) = B_j]$
η' — вмещение, $B_i\ \eta' B_j$ — „плоская фигура B_i вмещает плоскую фигуру B_j "	$(B_i\ \eta' B_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{\exists L\ [(L \subset B_i) \wedge \wedge (B_j \subset Q_L)]\}$, где L — замкнутая линия в R^2, Q_L — область в R^2, ограниченная замкнутой линией L
ν' — связывание, $B_i\ \nu' B_j$ — „плоская фигура, B_i связывается плоской фигурой B_j "	$(B_i\ \nu' B_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{\exists Q[(Q \subseteq B_j) \wedge \wedge n(B_i \cup Q) < n(B_i)]\}$, где Q — область в R^2, $n(B_i)$, $n(B_i \cup Q)$ — связность фигур B_i и $B_i \cup Q$

ся к изучению систем геологических тел, связаны с определением свойств этих систем по характеристикам их сечений. Подробное обсуждение этих задач приводится в главе 3. Здесь же мы рассмотрим только те из них, которые относятся к нахождению бинарных отношений между телами по отношениям между их прямолинейными и плоскими сечениями.

С этой целью нам необходимо определить, по аналогии с рассмотренными выше отношениями между телами в R^3, основные бинарные отношения между фигурами на плоскости и между отрезками на прямой. Определения, приведенные в таблицах 3 и 4, получены преобразованием соответствующих определений между телами в трехмерном евклидовом пространстве R^3 для тел (плоских фигур и отрезков) в двумерном R^2 и одномерном R^1 евклидовых пространствах. Мы сочли возможным присвоить им названия соответствующих отношений между телами в R^3 с дополнительным указанием размерности рассматриваемого пространства (например, отношения совместимости в двумерном R^2 и одномерном R^1 евклидовых пространствах R^1, отношение контактирования в R^2 и т. п.).

Очевидно, отношения между телами в трехмерном евклидовом пространстве более разнообразные, чем в двумерном и, тем более,

Таблица 4

Основные бинарные отношения между отрезками на прямой

Название и обозначение отношения в R^1	Определение отношения
α'' — изолированность $C_i\ \alpha'' C_j$ — „отрезки прямой C_i и C_j не имеют общих точек“	$(C_i\ \alpha'' C_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} (C_i \cap C_j = \varnothing)$
β'' — соприкосновение $C_i\ \beta'' C_j$ — „отрезки прямой C_i и C_j соприкасаются“.	$(C_i\ \beta'' C_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} (C_i \cap C_j) \neq \varnothing] \wedge$ $\wedge [t(C_i \cap C_j) = 0]\}$, где $t(C_i \cap C_j)$ — длина пересечения $C_i \cap C_j$ отрезков C_i и C_j.
γ'' — совместимость $C_i\ \gamma'' C_j$ — „отрезки прямой C_i и C_j имеют общую часть (длина которой не равна нулю)“.	$(C_i\ \gamma'' C_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} (C_i \cap C_j) \neq \varnothing] \wedge$ $\wedge [t(C_i \cap C_j) \neq 0]\}$.
γ_1'' — частичная совместимость $C_i\ \gamma_1'' C_j$ — „отрезки прямой C_i и C_j имеют общую часть, не совпадающую ни с одним из них“	$(C_i\ \gamma_1'' C_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{[(C_i \cap C_j) =$ $= z] \wedge (z \neq C_i) \wedge (z \neq C_j)\}$, где z — отрезок прямой
γ_2'' — включение $C_i\ \gamma_2'' C_j$ (или $C_j \subseteq C_i$) — „отрезок C_i включает отрезок C_j“.	$(C_i\ \gamma_2'' C_j) \overset{Df}{\rightleftarrows} \{(C_i \cap C_j = C_j)$

одномерном евклидовых пространствах. Например, в двумерном пространстве R^2 отсутствуют отношения, соответствующие отношениям связывающего контактирования и соприкосновения по поверхности, а в одномерном пространстве не определены также многие другие отношения.

Так как отношения, перечисленные в таблицах 3 и 4, аналогичны рассмотренным выше отношениям между телами в трехмерном евклидовом пространстве R^3, мы не будем здесь приводить их словесное описание и иллюстративные примеры.

Сопоставление определений, приведенных в таблицах 1, 3 и 4, показывает, что основные свойства соответствующих отношений на множествах тел в трехмерном, двумерном и одномерном евклидовых пространствах совпадают.

Отношения между сечениями тел, очевидно, зависят от отношения между самими телами, положения данного сечения относительно тел и формы пересекаемых тел.

Пусть тела A_i и A_j в R^3 пересечены плоскостью P, B_i и B_j — плоские фигуры, полученные при пересечении, $B_i \subseteq A_i \cap P$, $B_j \subseteq A_j \cap P$. Если тела A_i и A_j находятся в отношении изолированности α (включения γ_2, вмещения η), то для плоских фигур B_i и B_j также будет выполнено отношение изолированности α' (соответственно, включения γ_2', вмещения η'). Наоборот, если для фигур B_i и B_j выполнено отношение неизолированности $\overline{\alpha}'$, то можно утверждать, что сами тела A_i и A_j находятся в отношении неизолированности $\overline{\alpha}$.

Таким образом, в некоторых случаях на основании изучения отношений между сечениями тел можно делать однозначные выводы об отношениях между самими телами. Это связано с тем, что при пересечении тел, находящихся в данном отношении плоскостью или прямой, полученные сечения могут находиться только в определенных отношениях и, наоборот, если известно, что сечения тел находятся в некотором отношении, то это накладывает ограничения на число возможных отношений, в которых могут находиться сами тела. Рассмотрим этот вопрос на примере некоторых наиболее распространенных отношений.

Пусть для плоских фигур B_i и B_j, полученных в результате пересечения геологических тел G_i и G_j некоторой плоскостью P, выполнено отношение контактирования σ' (имеется общая граница между фигурами в виде линии). Из этого можно заключить, что сами геологические тела G_i и G_j находятся в отношении контактирования σ (имеют общую границу в виде поверхности).

Логически возможен случай, когда тела G_i и G_j соприкасаются по прямой L и контактирующие плоские фигуры B_i и B_j получены в результате пересечения этих тел плоскостью, проходящей через прямой L. Однако в реальных системах геологических тел этот случай практически не осуществляется.

Нахождение отношений идиоморфизма ω_1, панидиоморфизма ω_2 и панксеноморфизма ω_3 по плоским сечениям тел возможно, когда оператор ψ, по которому устанавливаются эти отношения, полностью определяется оператором ψ', по которому устанавливаются соответствующие отношения между плоскими сечениями тел. При выполнении этого условия можно утверждать, что если для плоских сечений геологических тел выполнено отношение идиоморфизма ω_1 (панидиоморфизма ω_2, панксеноморфизма ω_3), то сами тела находятся в отношении идиоморфизма ω_1 (панидиоморфизма ω_2, панксеноморфизма ω_3). В этом утверждении формально сформулирован главный принцип, на котором основан широко применяемый метод определения структурных отношений между минералами в породах и рудах по отношениям, наблюдаемым в их плоских срезах (шлифах).

Если для плоских фигур B_i и B_j, полученных в результате пересечения геологических тел G_i и G_j некоторой плоскостью, выполнено отношение совместимости γ', то сами тела находятся в отношении совместимости γ.

Очевидно, что по прямолинейным сечениям тел может быть установлено меньшее число отношений между телами, чем по плоским.

Пусть отрезки прямой C_i и C_j, полученные пересечением геологических тел G_i и G_j прямой L, находятся в отношении соприкосновения β'' (совместимости γ'', частичной совместимости γ_1''). Из этого можно заключить, что геологические тела G_i и G_j находятся в отношении контактирования σ (соответственно, совместимости γ, частичной совместимости γ_1). Случай, когда тела соприкасаются в точке (или по прямой) и отрезки C_i, C_j, находящиеся в отношении β'', получены в результате пересечения тел прямой, проходящей через точку соприкосновения, для реальных геологических тел практически не осуществляется.

§ 7. Логико-математическое исследование задач на нахождение отношений между геологическими телами. Задачи определения последовательности образования геологических тел.

Задачи реконструкции геологических событий и их последовательности по сохранившимся следам относятся к наиболее сложным. Специфичность этих задач состоит в том, что при их решении осуществляется переход от статического геологического пространства в динамическое. В течение всей истории развития геологической науки эти задачи, как известно, считались важнейшими, и к настоящему времени найдены многочисленные методы, признаки и принципы, позволяющие осуществить указанный переход (принципы Стено, Головкинского, последовательности кристаллизации, актуализма, методы определения геологического возраста и корреляции разрезов, признаки генетической и фациальной принадлежности геологических тел и т. п.).

В последнее время наблюдается тенденция к теоретическому обобщению и математическому освоению исторического опыта и знаний в этой области геологии. Наметилось, в частности, направление, ставящее задачу построения общей теории геологического времени (Васильев, 1972; Симаков, Оноприенко, 1975_1, 1975_2). Появились работы по формальному логическому анализу ретроспективных задач (Конторович, 1968; Косыгин, 1964, 1974_1, 1974_2; Косыгин, Соловьев, 1969, 1974; Соловьев, 1974, 1976; Салин, 1974; Усманов, 1976_2). При решении некоторые из них применяют математические методы (Висталиус, 1966_1, 1962_2, 1966_3 и др.; Девдариани, 1973, 1974; Колмогоров, 1949; Крамбейн и др., 1973; Миронов, 1974, 1975).

Приведем результаты теоретических, логико-математических исследований ретроспективных задач на нахождение отношений между геологическими телами.

При изучении систем геологических тел часто возникают задачи на отыскании некоторых неизвестных отношений по данным отношениям. Наиболее часто встречающиеся задачи этого типа можно сформулировать следующим образом: дано бинарное отношение ξ на множестве геологических тел L, нужно найти бинарное отношение φ на этом же множестве тел L, связанное с данным отношением условиями $P_1, P_2, \ldots, P_m$, где $P_1, P_2, \ldots, P_m$ — некоторые условия (высказывания), связывающие неизвестное отношение φ и данное отношение ξ.

Задачи такого типа, как правило, возникают в том случае, когда неизвестное отношение φ невозможно (в принципе) установить непосредственным наблюдением, а только косвенно, используя его связи с такими отношениями, которые можно наблюдать.

Среди отношений между геологическими телами по признаку доступности непосредственному наблюдению нами были выделены наблюдаемые (прямые) и ненаблюдаемые (косвенные, определяемые по некоторым косвенным признакам). Основные исходные наблюдаемые отношения между геологическими телами приведены в табл. 1. Как было отмечено (§ 2), к числу наиболее часто исследуемых в геологии ненаблюдаемых, косвенных отношений относятся отношения между геологическими телами по возрасту, эквивалентности или сходству условий их формирования (фациальности), родству («генетическое» или «парагенетическое»). Установление этих отношений связано с реставрацией прошедших событий по их «следам». Такие ненаблюдаемые отношения назовем ретроспективными. Для установления между геологическими телами ретроспективных отношений используются связанные с ними каким-либо образом отношения, доступные наблюдению в настоящее время.

Ретроспективные отношения по терминологии Ю. А. Косыгина,— это отношения в ретроспективных системах (Косыгин, Соловьев, 1969; Косыгин, 1970, 1974_1).

В сформулированной выше задаче на нахождение отношения неизвестным обычно является ненаблюдаемое (в частном случае — ретроспективное) отношение, а данным — наблюдаемое.

Анализ ситуаций наиболее часто возникающих при решении задач нахождения отношений между геологическими телами приводит к выводу, что в зависимости от данного множества тел L в большинстве случаев выполняется одно из следующих условий, связывающее неизвестное отношение φ с данным отношением ξ.

(7. 1). Из выполнения известного отношения ξ для пары тел $\langle G_i, G_j \rangle$, принадлежащих множеству L, следует, что для этой пары тел будет выполнено неизвестное отношение

$$(\forall G_i \in L)(G_j \in L)\left[(G_i \xi G_j) \rightarrow (G_i \varphi G_j)\right],$$

т. е в этом случае данное отношение ξ включается в неизвестное отношение $\varphi : \xi \subseteq \varphi$.

(7. 2). Если для пары тел $\langle G_i, G_j \rangle$ выполнено неизвестное отношение φ, то для этой пары тел выполнено также данное отношение ξ (обратный первому случаю):

$$(\forall G_i \in L)(\forall G_j \in L)\left[(G_i \varphi G_j) \rightarrow (G_i \xi G_j)\right],$$

т. е в этом случае неизвестное отношение включается в данное: $\varphi \subseteq \xi$.

(7. 3). Выполняется одновременно первое и второе условия:

$$(\forall G_i \in L)(\forall G_j \in L)\left[(G_i \xi G_j) \rightleftarrows (G_i \varphi G_j)\right],$$

т. е неизвестное отношение φ на множестве тел L совпадает с данным отношением $\xi : \varphi = \xi$

Кроме перечисленных, можно выделить случаи, когда выполняются включения $\xi \subset \varphi$ или $\varphi \subset \xi$ и $\varphi \neq \xi$. Условия, связывающие неизвестные отношения с данными, строятся на основании некоторых представлений о данной системе тел, гипотез и предположений о процессах, приведших к формированию систем тел (в случае, когда неизвестны ретроспективные отношения).

Приведем примеры. Пусть $L = \{G_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ — некоторая система даек интрузивных пород. На множестве L дано отношение идиоморфизма $\omega_{1, L}$ по оператору, определенному таким образом, что $\omega_{1, L}$ выполнено для всех упорядоченных пар даек $\langle G_i, G_j \rangle$, в которых первая пересекает (в геологическом смысле) вторую. Неизвестным является отношение "моложе" $\tau_{1, L}$. Если предположить, что из факта пересечения дайки G_j дайкой G_i следует, что G_i моложе G_j, то для известного отношения $\omega_{1, L}$ и неизвестного $\tau_{1, L}$ выполняется условие (7.1), т. е $\omega_{1, L} \subseteq \tau_{1, L}$. Однако данная система даек может быть такой, что условие (7.2) не выполняется, так как возможны случаи, когда дайка G_i моложе дайки G_j, но они не пересекаются.

Очевидно, что данное отношение ξ несет полную информацию о неизвестном отношении φ, если на заданном множестве тел L выполняется условие (7, 3), т. е. когда $\xi_L = \varphi_L$. В случае выполнения условия (7. 1) данное отношение несет частичную информацию о неизвестном: на основании данного отношения можно указать только некоторые из пар тел, для которых выполняется неизвестное отношение. В случае выполнения условия (7. 2) на основании установления данного отношения между некоторыми телами невозможно сделать вывод о том, что между телами будет выполнено неизвестное отношение.

При исследовании систем геологических тел весьма часто возникает вопрос о том, какие из наблюдаемых отношений могут быть использованы для установления тех или иных ненаблюдаемых (в частности, ретроспективных). Рассмотрим этот вопрос сначала в общем плане, затем для конкретных отношений.

Перечислим в общем виде условия, необходимые для нахождения ненаблюдаемых отношений между геологическими телами.

(7. 4). Для нахождения ненаблюдаемого отношения φ на множестве геологических тел L необходимо и достаточно установить существование наблюдаемого отношения ξ_L на множестве тел L, равного ненаблюдаемому отношению φ_L.

Достаточность этого условия очевидна, необходимость его следует из следующих рассуждений. Пусть найдено некоторым косвенным способом отношение φ_L, недоступное непосредственному наблюдению. Очевидно, для этого могли быть использованы только наблюдаемые факты. Совокупность этих фактов и определяет некоторое наблюдаемое отношение на данном множестве тел L, совпадающее с φ_L. Так как это наблюдаемое отношение совпадает с φ_L по основным формальным свойствам (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, связность, транзитивность), то из условия (7. 4) вытекает следующее, более общее условие необходимости.

(7.5). Для нахождения ненаблюдаемого отношения φ_L на множестве геологических тел L необходимо (но недостаточно!) существование наблюдаемого отношения ξ_L, совпадающего с φ_L по всем формальным свойствам.

Выполнение только условия (7.5) недостаточно для нахождения ненаблюдаемого отношения φ_L: в принципе, могут быть наблюдаемые отношения на L, совпадающие с φ_L по всем формальным свойствам, связь которых с φ_L не установлена или не существует.

(7.6). Для определения того, что произвольное геологическое тело G_i находится в ненаблюдаемом отношении φ_L к телу $G_j (G_i \ \varphi_L \ G_j)$ необходимо и достаточно установить, что а) G_i находится в некотором наблюдаемом отношении ξ_L к телу $G_j (G_i \xi_L G_j)$ и б) из того, что тело G_i находится в отношении ξ_L к телу G_j следует, что G_i находится в отношении φ_L к телу G_j, т. е $(G_i \xi_L G_j) \rightarrow (G_i \varphi_L G_j)$.

Выяснение условия «а» в (7. 6), очевидно, сводится к наблюдениям. Практически бывает трудно обосновать выполнимость условия «б». Для этого обычно используют различные предположения (гипотезы) и экстраполяции (принцип актуализма, закон последовательности напластования и т. п.). На содержательном уровне обычно бывает легче обосновать обратную импликацию: «из того, что геологическое тело G_i находится в ненаблюдаемом отношении φ_L к телу G_j, следует, что G_i находится в наблюдаемом отношении ξ_L к телу G_j, т. е $(G_i \varphi_L G_j) \to (G_i \xi_L G_j)$ (или по другому: то, что тело G_i находится в наблюдаемом отношении ξ_L к телу G_j, есть следствие того, что G_i находится в ненаблюдаемом отношении φ_L к G_j). Однако, очевидно, что из $(G_i \varphi_L G_j \to \to (G_i \xi_L G_j)$ не следует, что $(G_i \xi_L G_j) \to (G_i \varphi_L G_j)$, так как в общем случае, если $(G_i \varphi_L G_j) \to (G_i \xi_L G_j)$, то отношение φ_L включается в отношение $\xi_L : \varphi_L \sqsubseteq \xi_L$. Следовательно, могут быть пары геологических тел, для которых выполнено ξ_L, но не выполнено φ_L.

(7.7). Если для произвольных — ненаблюдаемого φ_L и наблюдаемого ξ_L — отношений и геологических тел G_i и G_j выполняется условие $(G_i \varphi_L G_j) \to (G_i \xi_L G_j)$, то для установления истинности высказывания $(G_i \xi_L G_j) \to (G_i \varphi_L G_j)$ достаточно и необходимо обосновать несуществование отношения φ'_L не равного φ_L, такого, что $(G_i \varphi'_L G_j) \to (G_i \xi_L G_j)$.

Сформулированные выше условия (7.4) — (7.7) можно использовать при поиске наблюдаемого отношения, пригодного для установления по нему того или иного ненаблюдаемого отношения.

Если известно, что ненаблюдаемое отношение должно обладать некоторыми формальными свойствами, то по условию (7. 5) необходимое для его определения наблюдаемое отношение должно совпадать с ним по всем формальным свойствам. Например, если известно, что ненаблюдаемое отношение φ есть отношение эквивалентности (толерантности, порядка), то необходимое для его установления наблюдаемое отношение нужно искать среди отношений эквивалентности (соответственно толерантности, порядка).

В случае выполнения условия (7. 1) менее жесткого, чем (7. 3), такое строгое правило уже не действует. Однако и в этом случае наблюдаемое отношение ξ, которое можно использовать для установления ненаблюдаемого отношения φ, также должно отвечать некоторым требованиям, вытекающим из этого условия. Из условия (7. 1), в частности, следует: 1) если φ асимметрично, то и ξ асимметрично; 2) если φ антирефлексивно, то и ξ антирефлексивно; 3) если ξ рефлексивно, то и φ рефлексивно; 4) если ξ антисимметрично, то и φ антисимметрично; 5) транзитивизация $\hat{\xi}$ (транзитивное замыкание отношения ξ) включается в транзитивизацию $\hat{\varphi}$: $\hat{\xi} \subseteq \hat{\varphi}$; 6) отношение обратное ξ включается в отношение обратное $\varphi : \xi^{-1} \subseteq \varphi^{-1}$; 7) отношение ξ включается в транзитивизацию $\hat{\varphi}$ отношения $\varphi : \xi \subseteq \hat{\varphi}$.

На примере отношений относительного возраста рассмотрим некоторые вопросы использования наблюдаемых отношений для установления ненаблюдаемых. Установление отношений между геологическими телами по времени их образования в общем сводится к обоснованию следования их из некоторых, непосредственно наблюдаемых отношений между ними. Рассмотрим вопрос о том, какие из наблюдаемых отношений можно использовать для установления отношения одновозрастности $\tau_{2,L}$ на данном множестве геологических тел L. Отношение одновозрастности τ_2 есть эквивалентность. Поэтому, согласно приведенным выше общим рассуждениям, среди наблюдаемых отношений только те могут нести о τ_2 полную информацию, которые являются также отношениями эквивалентности (обладают свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности). Среди наблюдаемых отношений, введенных в §§ 2, 3, для установления отношения одновозрастности обычно используются эквивалентности ε_0, ε_1 и ε_2 (эквивалентности по положению в разрезе или по некоторым вещественным и геометрическим свойствам и т. п.). Решение вопроса о том, какое из этих наблюдаемых отношений нужно использовать для нахождения отношения $\tau_{2,L}$ зависит от свойств конкретного данного множества геологических тел L и заключается в обосновании того, что на данном множестве геологических тел L $\tau_{2,L} = \varepsilon_L$ или $\varepsilon_L \subseteq \tau_{2,L}$, где ε_L — наблюдаемое отношение эквивалентности.

Рассмотрим наблюдаемые отношения, которые можно использовать для установления отношения «древнее» τ_1^{-1} или «моложе» τ_1. Это отношение, как выше отмечено,— строгий порядок. Поэтому наблюдаемые отношения, которые могут нести полную информацию об этом отношении, также должны быть строгим порядком (должны обладать свойствами антирефлексивности, транзитивности, асимметричности и антисимметричности; последние два из этих свойств — следствие первых двух). Среди определенных в §§ 2, 3 наблюдаемых отношений такие — η, $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$, $\gamma_2 \cap \bar{E}$, $\lambda_L \rho_0$, ρ_2 и $\hat{\omega}_1$. Действительно, именно эти отношения на практике обычно используются для установления отношений упорядоченности геологических тел по возрасту ("древнее" τ_1^{-1} и "моложе" τ_1). Рассмотрим каждое из этих отношений. Так как на произвольном множестве тел отношения $\hat{\sigma}_1$ и $\gamma_2 \cap \bar{E}$ включаются в отношение вмещения η, из этих отношений мы ограничимся рассмотрением η.

В принципе, не исключается возможность, когда для некоторой пары геологических тел $< G_i, G_j >$ выполняется отношение вмещения η и в то же время не выполняется отношение упорядоченности по возрасту τ_1 и τ_1^{-1}, т. е эти тела могут быть одновозрастными.

Однако в ряде случаев, исходя из содержательных предпосылок, удается обосновать, что для данного множества тел L отношение вмещения η_L совпадает с $\tau_{1,\,L}$ или включается в него. На практике чаще всего вмещаемое тело оказывается более древним (т. е из $G_i \eta_L G_j$ следует, $G_i \tau_{1,\,L} G_j$). Возможен также обратный случай. В качестве примера зональных структур, в которых вмещаемые тела являются более ранними, можно привести так называемые зональные структуры нарастания. "Если нет признаков замещения, то в зональных структурах нарастания и обрастания минералы внутренних зон будут более ранние, чем внешних. Это относится, в частности, к включениям, располагающимся по разным зонам роста кристалла. Подобные соотношения минералов не представляют редкости" (Чесноков, 1974, стр. 59).

Отношение следования λ_L, которое характеризует упорядоченность пересечений геологических тел данной системы некоторой фиксированной линией L, часто используется для установления отношений упорядоченности геологических тел по возрасту. Для некоторых систем геологических тел на содержательном уровне удается обосновать, что отношение следования, определенное для некоторой линии L, совпадает с $\tau_1\left(\tau_1^{-1}\right)$ или же включается в него.

К таким системам относятся, в частности, системы пластов осадочных пород, порядок пересечения которых по линии, проведенной перпендикулярно плоскостям напластования, совпадает с их возрастной последовательностью. Существуют, очевидно, и такие системы геологических тел, для которых выполнено отношение следования, определенное для некоторой линии L, но тем не менее они являются одновозрастными. К ним относятся, например, системы зерен в образцах некоторых типов пород. Для установления отношений упорядоченности по возрасту большое значение имеет редукция отношения следования λ_L, которое можно назвать отношением непосредственного следования и обозначить через λ_L^r, и отношение $\lambda_L \cap \sigma$, выполняемое в том и только в том случае, когда при движении по заданной линии L в фиксированном направлении тело G_i будет пересечено раньше тела G_j и при этом G_i и G_j контактируют; а также отношение $\lambda_L \cap \hat{\sigma}$, которое будет выполнено в том случае, если при движении по заданной линии L геологическое тело G_i будет пересечено раньше тела G_j и G_i, G_j связаны через цепочку контактирующих тел. Приведем пример использования отношений упорядоченности по качественному набору признаков ρ_2 и ρ_2^{-1} для установления отношений упорядоченности по возрасту τ_1 и τ_1^{-1}. Пусть признак u_l ($l = 1, \dots, m$), по которому устанавливается отношение ρ_2 (см. § 3), определен так, что геологическое тело $G_i \in L$ обладает признаком u_l ($l = 1, \dots, m$), если в нем содержатся остатки фауны l-ого вида из некоторого, упорядоченного в порядке возрастной последовательности, набора видов фауны. Тогда отношение $\rho_{2, L}$ на данном множестве тел L совпадает с отношением $\tau_{1, L}$ или $\tau_{1, L}^{-1}$.

Пусть значение функции $f(G_i)$ в определении отношения ρ_0 соответствует содержанию некоторого продукта радиоактивного распада в геологическом теле $G_i \in L$, по которому определяется "абсолютный" возраст тела G_i. Тогда отношение $\rho_{0, L}$ на множестве тел L совпадает с отношением $\tau_{1, L}$ на этом же множестве тел.

Для установления относительного возраста геологических тел очень большое значение имеют отношения идиоморфизма ω_1, ксеноморфизма ω_1^{-1}, панксеноморфизма ω_3, панидиоморфизма ω_2 и их транзитивизации. Очень часто содержательно удается обосновать, что отношение $\hat{\omega}_{1, L}$ на множестве тел L совпадает с $\tau_{1, L}$ $\left(\tau_{1, L}^{-1}\right)$ или включается в него. Примеры были приведены при описании отношений идиоморфизма и ксеноморфизма.

Кроме перечисленных выше, встречаются также случаи, когда нахождение отношения τ_{1, L_1} на множестве L_1 осуществляется отображением некоторого другого множества тел L_2 с заданным на нем отношением τ_{1, L_2} в данное множество L_1. В этих случаях исходят из условия, что отображение множества L_2 в множество L_1 есть гомоморфизм (в частном случае – изоморфизм) отношения τ_{1, L_2} в отношение τ_{1, L_1}, т. е из выполнения отношения τ_{1, L_2} между телами G_i' и G_j' множества L_2 следует, что будет выполнено отношение τ_{1, L_1} между соответствующими телами G_i'' и G_j'' множества L_1. Такой способ нахождения отношений τ_1, τ_1^{-1} широко применяется, в частности, при корреляции слоев осадочных толщ.

Перечисленные выше наблюдаемые отношения, используемые для установления возрастных отношений геологических тел «моложе» τ_1 или «древнее» τ_1^{-1}, в общем на произвольном множестве геологических тел L могут быть несвязными. В этом случае отношения возраста устанавливаются только между некоторыми телами данного множества L. Для установления возрастной последовательности всех тел множества L необходимо, чтобы отношение «моложе» τ_1 (или «древнее» τ_1^{-1}) на L было совершенным строгим порядком, т. е. оно должно обладать свойствами антирефлексивности, асимметричности, антисимметричности, транзитивности и связности. Первые четыре из этих свойств выполняются для отношения «моложе» τ_1 на произвольном множестве тел в силу определения этого отношения. Является ли отношение τ_1 на множестве тел L связным, зависит от свойств данного множества тел. Если множество тел L такое, что для любых двух различных тел G_i и G_j либо G_i моложе G_j, либо G_j моложе G_i, тогда отношение «моложе» τ_1 на этом множестве обладает свойством связности и только в этом случае можно установить возрастную последовательность всех тел данного множества L. На основании известной теоремы теории бинарных отношений о возможности упорядочения множества элементов произвольной природы с заданным на нем отношением совершенного строгого порядка можно сформулировать следующие условия, при выполнении которых возможно установление возрастной последовательности геологических тел.

(7.8). Для установления возрастной последовательности $< G_1, G_2, \ldots G_k >$ всех тел произвольного множества геологических тел L достаточно, чтобы на данном множестве тел L одно из следующих наблюдаемых отношений было связным и равным отношению "моложе" $\tau_{1,\,L}$ $\left(\text{или "древнее" } \tau_{1,\,L}^{-1}\right)$: вмещения η, транзитивизации вмещающего контактирования $\hat{\sigma}_1$, транзитивизации связывающего контактирования $\hat{\sigma}_2$, включения и неравенства $\gamma_2 \cap \bar{E}$, следования λ_L (по некоторой линии) и упорядоченности по характеристикам ρ_0, ρ_1, ρ_2.

(7.9) Для установления возрастной последовательности $< G_1, G_2, \ldots, G_k >$ всех геологических тел произвольного множества геологических тел L необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий: а) для любых двух различных тел G_i и G_j множества L либо G_i моложе G_j, либо G_j моложе G_i т. е

$$(\forall G_i \in L)(\forall G_j \in L)\{(G_i \neq G_j) \rightarrow$$

$$\rightarrow [(G_i \, \tau_{1,\,L} \, G_j) \vee (G_j \, \tau_{1,\,L} \, G_i)]\};$$

б) на множестве тел L существует наблюдаемое отношение совершенного строгого порядка (т. е. обладающее свойствами антирефлексивности, антисимметричности, транзитивности и связности) равного отношению „моложе“ τ_1 или „древнее“ τ_1^{-1}.

Для установления последовательности образования геологических тел различных размеров и происхождения обычно используются отношения, передаваемые словами «сечет», «пересекает» (о микропрожилке, дайке и т. п.), «прорывает» (об интрузии), «проникает», «пронизывает», «частично замещает» (о минерале), «залегает на эродированной поверхности» (некоторого тела) и т. п. Ниже мы попытаемся обобщить и логически уточнить эти отношения.

Термины «геологическая граница», «резкостная геологическая граница», «дизъюнктивная геологическая граница», «геологическое тело», «резкостное геологическое тело» мы используем в соответствии с их определениями, приведенными в работах Ю. А. Косыгина и Ю. А. Воронина (Косыгин, 1974_1; Воронин и др., 1967). Мы будем рассматривать только резкостные (естественные) геологические границы и резкостные геологические тела (тела, ограниченные только резкостными геологическими границами). Слово «резкостное» для краткости будем опускать.

Формальный анализ перечисленных выше и подобных им отношений между геологическими телами приводит к следующему заключению. Установление этих отношений основано на представлениях о том, что каждое геологическое тело имело некоторую первоначальную поверхность, нарушенную до образования или при формировании другого тела, имеющего с данным общую границу. Поэтому для наших целей оправдано введение общих понятий первичной и вторичной границы геологического тела.

Будем исходить из условия, указанного в § 2, согласно которому каждому резкостному геологическому телу в принципе можно соотнести некоторый интервал времени, в течение которого происходило формирование тела. Поверхность, ограничивающую тело к концу этого интервала, назовем первичной (или синхронной) границей (поверхностью) тела.

Всякую поверхность или часть поверхности геологического тела, ограничивающую его в настоящее время, не совпадающую с первичной его границей (в ее нынешнем положении), назовем вторичной (асинхронной) границей данного тела. Вторичная граница возникает вследствие различных причин: разрыва сплошности и смещения, разрушения части тела, проявления магматических, метасоматических, денудационных и других процессов.

Приведем примеры. Если зерно x некоторого минерала в породе образовалось в результате частичного замещения зерна y другого минерала, то граница между ними первичная для x и вторичная для y. Если прожилка x некоторого минерала (или дайка x некоторой породы) «сечет» прожилку y другого минерала (дайку y другой породы), то общая граница между ними в месте пересечения первичная для x и вторичная для y. Поверхность магматического контакта интрузивного тела x с толщей y — первичная граница для интрузивного тела x и вторичная для толщи y. Если слой конгломератов x залегает на эродированной поверхности интрузивного тела y, то граница между ними первичная для слоя x и вторичная для интрузивного тела y. Если толща x залегает несогласно на толще y, то поверхность несогласия — первичная граница для x и вторичная для y. Если контакт между геологическими телами x и y тектонический, то граница между ними вторичная и для x и для y.

Установление того, вторична ли граница тела, в общем сводится к наблюдениям и некоторым реконструкциям, позволяющим определить совпадает ли она с первичной границей этого тела, с учетом изменений ее пространственного положения и формы, происходивших после ее образования. В частности, если удастся обосновать, что данная граница проходит по внутренней части первоначального тела, то тем самым, очевидно, будет обоснована вторичность этой границы. В некоторых случаях, исследуя тело в тех местах, где первичная граница явно сохранилась, устанавливается комплекс геометрических и вещественных признаков, присущих первичной границе и части тела непосредственно примыкающей к ней, позволяющих обнаруживать участки, где первичная граница отсутствует. Для интрузивных тел, например, в качестве одного из таких признаков может служить отсутствие вдоль вторичной границы эндоконтактовых фаций. В ряде случаев достаточно надежными критериями первичности и вторичности границы являются геометрические соотношения поверхностей тел.

Обоснуем справедливость следующего утверждения.

(7. 10). Если граница между геологическими телами x и y недизъюнктивная (т. е. не является поверхностью разрыва сплошности) и вторичная для тела y, то тело x моложе, чем тело y.

Следующее утверждение мы приведем, опустив его обоснование*.

(7. 11). Если граница между телами x и y не дизъюнктивная, то эта граница не может быть вторичной для обоих этих тел.

Из этого утверждения непосредственно следует истинность следующего высказывания.

(7. 12). Если граница между телами x и y не дизъюнктивная и вторичная для тела y, то она первичная для тела x.

Учитывая утверждение (7. 12), а также то, что первичная граница одновозрастна с самим телом, вторичная — моложе самого тела (это следует из определений), можно убедиться в истинности утверждения (7. 10).

Будем говорить, что «геологическое тело x сечет геологическое тело y» или «для упорядоченной пары тел $\langle x, y\rangle$ выполнено отношение сечения ψ» $(x \, \psi \, y)$, если граница между ними является не дизъюнктивной и вторичной для тела y (согласно утверждению (7. 12), эта граница будет первичной для x). Отношение сечения ψ на произвольном множестве геологических тел

---

* Обоснование этого утверждения можно провести, основываясь на следующее положение: две поверхности $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$, расположенные соответственно внутри тел $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ невозможно привести в соприкосновение, не нарушив сплошности этих тел.

обладает свойствами антирефлексивности (никакое тело само себя не сечет) и асимметричности (если тело x сечет тело y, то тело y не сечет тело x). Отношение «моложе» τ_1, кроме этих свойств, обладает также свойством транзитивности (если тело x моложе тела z и тело z моложе тела y, то тело x моложе тела y) и, следовательно, является отношением строгого порядка.

Определим транзитивизацию $\hat{\psi}$ (транзитивное замыкание) отношения сечения ψ следующим образом: отношение $\hat{\psi}$ выполнено для всякой упорядоченной пары геологических тел $\langle x, y \rangle$, если тело x сечет тело y или существует такая последовательность тел $z_1, z_2, \ldots, z_n (n = 1,2, \ldots)$, что x сечет z_1,, z_1 сечет $z_2, \ldots, z_n$ сечет y. Отношение $\hat{\psi}$ в отличие от отношения сечения ψ, кроме антирефлексивности и асимметричности, обладает также свойством транзитивности и является отношением строгого порядка.

На основании утверждения (7. 10), определения отношения $\hat{\psi}$ и транзитивности отношения «моложе» τ_1 можно сформулировать следующее утверждение.

(7.13). Для любой пары геологических тел $\langle x, y \rangle$ из выполнения для нее транзитивизации $\hat{\psi}$ отношения сечения следует, что тело x моложе тела $y \left(x \hat{\psi} y \rightarrow x \tau_1 y \right)$, т. е. на произвольном множестве геологических тел L транзитивизация $\hat{\psi}$ отношения сечения включается в отношение „моложе" $\tau_1 \left(\hat{\psi} \subseteq \tau_1 \right)$.

Использовав утверждение (7. 13) и некоторые теоремы общей теории бинарных отношений, можно доказать, что истинно следующее высказывание.

(7. 14.). Если на данном множестве геологических тел L транзитивизация $\hat{\psi}$ отношения сечения обладает свойством связности (т. е. если для любой пары тел $\langle x, y \rangle$, принадлежащих множеству L, либо $y \hat{\psi} x$, либо $x \hat{\psi} y$), то можно установить возрастную последовательность всех тел данного множества.

(7. 15). Пусть на множестве геологических тел L задано отношение одновозрастности τ_2 (т. е. для любых двух тел, принадлежащих множеству L, известно одновозрастны они или неодновозрастны). Тогда множество геологических тел L можно разбить на классы эквивалентности по возрасту $L_1, L_2, \ldots, L_k$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) любые два тела, принадлежащие к одному и тому же классу — одновозрастные, принадлежащие к разным классам — разновозрастные; 2) если существует пара тел $\langle x_i, x_j \rangle$, удовлетворяющая условиям: $x_i \in L_i$, $x_j \in L_j$, $x_i \hat{\psi} x_j$, не существует такой пары тел $\langle y_i, y_j \rangle$, удовлетворяющей условиям: $y_i \in L_i$, $y_j \in L_j$ и $y_j \hat{\psi} y_i$; 3) если для любых двух

классов L_i и L_j найдется пара тел $\langle x_i, x_j \rangle$, удовлетворяющая условиям $x_i \in L_i$, $x_j \in L_j$ и выполнено либо $x_i \hat{\psi} x_j$, либо $x_j \hat{\psi} x_i$, то классы эквивалентности по возрасту можно пронумеровать таким образом, что любое тело, принадлежащее к классу с i-ым номером, моложе любого тела, принадлежащего к классу с номером большим, чем i.

Приведенные выше утверждения характеризуют математико-логическую структуру ретроспективных реконструкций в геологии. В заключение заметим, что в обосновании сформулированных выше утверждений не использованы какие-либо допущения (посылки), накладывающие ограничения на свойства (на размеры, форму, происхождение и т. п.) геологических тел, для которых справедливы эти утверждения. Они могут быть применены, например, и к микроскопическим зернам пород и к региональным зонам в земной коре. Опыт обобщений, изложенный в данной главе, показывает, что существуют утверждения, справедливые для всех геологических тел, независимо от их размеров и происхождения. Выявление их, по нашему мнению, имеет большое значение для построения общей теоретической геологии.

Выводы

1. Один из наиболее распространенных методов изучения строения геологических объектов сводится к выделению в них однородных по тем или иным признакам частей (геологических тел), описанию этих частей и отношений между ними. Представления о геологических телах как об однородных частях любых геологических объектов и отношений между ними — основополагающие для многих разделов геологии. Поэтому при математизации геологии, построении математических теорий геологических объектов нужно исходить из этих представлений.

Исследования показали, что в основу математической теории геологических структур нужно положить небольшое число пространственных бинарных отношений между телами в трехмерном евклидовом пространстве, рассматриваемых как простейшие элементарные структуры и подобранных таким образом, чтобы, комбинируя их, можно было бы построить модели структур всевозможных геологических объектов. В связи с этим возникает необходимость построения математической теории отношений между геологическими телами. Полученные результаты составляют основу такой теории.

2. По содержательным признакам выделяются следующие виды отношений между геологическими телами: 1) пространственные, 2) временные, 3) вещественные, 4) генетические, 5) фациальные. С методологической точки зрения среди отношений между геологическими телами важно различать устанавливаемые прямыми наблюдениями и недоступные непосредственным наблю-

дениям, устанавливаемые косвенно через их связи с наблюдаемыми отношениями. К последним относятся, в частности, возрастные, генетические и фациальные отношения между геологическими телами, определение которых связано с реконструкцией событий геологического прошлого.

3. Установлено, что ряд важнейших и широко распространенных отношений между геологическими телами математически формулируется независимо от вещественного состава и абсолютных размеров тел — одинаково как для микроскопических зерен минералов, так и для геологических тел сложенных породами и для крупных региональных зон в земной коре. Они инвариантны относительно топологического преобразования точек пространства. Это обстоятельство позволяет построить основу общегеологической теории отношений между геологическими телами. Оказалось, что большинство наиболее важных отношений между геологическими телами можно определить через небольшое число (около 20) исходных бинарных отношений, с помощью известных операций над бинарными отношениями. Используя язык теории множеств и математической логики, определены основные для геологии отношения между телами в трехмерном евклидовом пространстве.

4. Исследование широко распространенных бинарных отношений между геологическими телами показало, что по математическим свойствам они весьма разнообразны. Среди них имеются почти все известные типы бинарных отношений (эквивалентность, толерантность и т. п.), а также такие, которые не находят места в существующей общей систематике бинарных отношений.

Математические свойства отношений между геологическими телами можно использовать для решения разнообразных конкретных геологических задач.

5. Пространственные отношения между геологическими телами часто можно установить не иначе как на основании наблюдения отношений между сечениями этих тел некоторыми поверхностями или линиями. Зависимость отношений между плоскими и прямолинейными сечениями геологических тел от отношений между самимим телами позволяет получить математическое решение этой задачи.

6. Логико-математический анализ задач на нахождение отношений между геологическими телами позволяет выявить математические критерии и правила, которые можно использовать для решения этих задач. Большинство таких задач связано с нахождением ненаблюдаемых отношений, недоступных прямым наблюдениям (возрастные, генетические и др.), по наблюдаемым отношениям (пространственные, вещественные и др.), устанавливаемым прямыми наблюдениями.

Оказалось, что для решения подобных задач большое значение имеют формальные математические свойства отношений (рефлексивность, симметричность, транзитивность и т. п.). Используя их, удается обосновать ряд утверждений общегеологического характера. К ним, в частности, относятся следующие.

Если известно, что искомое ненаблюдаемое отношение должно обладать некоторыми из следующих свойств: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, асимметричность, антисимметричность, связность, транзитивность и антитранзитивность, то наблюдаемое отношение, по которому можно установить искомое, должно обладать теми же свойствами. Например, отношение между геологическими телами моложе τ_1 (древнее), являющееся отношением строгого порядка, обладающее свойствами антирефлексивности, антисимметричности и транзитивности, можно установить только по наблюдаемым отношениям с такими же свойствами, а отношение «одновозрастности» τ_2, являющееся эквивалентностью (т. е. обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности), можно установить только по наблюдаемым отношениям эквивалентности.

Для установления возрастной последовательности всех геологических тел произвольного множества геологических тел L необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: а) для любых различных тел G_i и G_j множества L, либо G_i моложе G_j, либо G_j моложе G_i; б) на множестве тел L существует наблюдаемое отношение совершенного строгого порядка (т. е. обладающее свойствами антирефлексивности, антисимметричности, транзитивности и связности), равного отношению „моложе“ τ_1 или „древнее“ τ_1^{-1}

Для геологических тел произвольных размеров, состава и происхождения справедливо следующее утверждение: если граница между геологическими телами x и y вторична (в соответствии с определением в § 7) для тела y и не является поверхностью разрыва сплошности, то тело x моложе тела y.

Ряд сформулированных и доказанных утверждений касается связей отношений относительного возраста («моложе», «древнее», «одновозрастные») с некоторыми непосредственно наблюдаемыми геометрическими отношениями между геологическими телами.

Изложенный в главе 1 опыт теоретических разработок и обобщений показывает, что существуют утверждения справедливые для всех геологических тел независимо от их размеров, состава и происхождения. Выявление их имеет большое значение для построения общей теоретической геологии.

Глава 2. **ОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СВОЙСТВА ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР.**

§ 1. Систематика геологических структур на математической основе.

Применению математических методов для описания структур геологических объектов посвящена обширная литература. Однако общему теоретическому исследованию математических свойств геологических структур уделяется недостаточно внимания.

Имеются работы по формальному определению некоторых важнейших понятий структурной геологии (Воронин и др., 1967; Косыгин, Воронин, 1965; Косыгин, $1974_{1,2}$); по общим вопросам математического описания геологических структур (Борукаев и др., 1968; Бухарцев, Мирчинк, 1962; Вистелиус, 1958; Воронин и др., 1967; Воронин, Еганов, 1968_1, 1968_2, 1968_3; Гзовский, 1971; Драгунов, Айнемер, Васильев, 1974; Ержанов и др., 1975; Кренделев Ф. П., Кренделев С. Ф., 1973; Кулындышев, 1973; Миронов, 1975; Рац, 1973; Усманов, 1974_1, 1976_1, 1977, Шафрановский, Плотников, 1975; Bailey, 1975; Whitten, 1969 и др.).

В частности отмечалось, что геологическую структуру математически можно описывать, задавая форму, размеры, координаты центров масс и ориентации структурных элементов, а также некоторые множества бинарных отношений, характеризующих взаимное расположение этих элементов (Воронин и др. 1967). Исследовалась возможность математической постановки и решения отдельных задач, возникающих при изучении структур сложных геологических тел (Воронин, Еганова, Еганов, 1974; Гольдин, Волков, Гольдина, 1970).

Имеются примеры успешного применения математических методов при исследовании происхождения тектонических структур (Гзовский 1971; Ержанов и др., 1975) и изучении процессов формирования строения интрузивных пород (Вистелиус, 1966_2, 1966_3, 1967_1, 1967_2, 1967_3, 1972; Вистелиус, Романова, 1972; Иванов, 1963, 1968; Романова, 1972; Rogers, Bogy, 1958). В некоторых публикациях намечаются пути синтеза представлений о различных геологических процессах (например, по выделению общих «эндогенных режимов», объединяющих условия протекания тектонических, магматических и метаморфических процессов, Белоусов, 1975).

В учении о структурах и текстурах горных пород и руд, в структурной геологии вопрос о систематике структур горных пород, руд и других геологических объектов разработан слабо. Это, по-видимому, объясняется большим разнообразием структур геологических объектов и отсутствием общих принципов для их систематики. В настоящей работе в качестве таких принципов мы попытались использовать некоторые математические положения.

Структуры геологических объектов с точки зрения их математического описания четко разделяются на два больших класса: 1) описываемые через конечное или счетное множество точек пространства, 2) описываемые через несчетное множество точек пространства. К первым относятся структуры кристаллов на уровне атомов, характеризующиеся взаимным расположением точек, соответствующих узлам кристаллической решетки, ко вторым — структуры геологических объектов, элементами которых являются связные множества точек пространства — структуры горных пород, структуры отдельных участков земной коры, сложенных породами и т. п.

Структуры (строение) геологических объектов — горных пород, формаций и вообще отдельных частей Земли, относящиеся ко второму из выделенных выше классов, мы объединяем под термином «геологические структуры». При этом термины «структура» и «строение» геологического объекта используются как синонимы.

Когда мы говорим о структуре геологического объекта, то подразумеваем неоднородный геологический объект, в котором можно выделить составные части, резко разграниченные. В соответствии с определениями (§ 1, гл., 1) составные части неоднородного геологического объекта с математических позиций можно рассматривать как некоторые тела, а сам неоднородный геологический объект как систему тел. В такой системной интерпретации все свойства геологического объекта могут быть представлены через свойства ее составных частей и отношения между ними. Эти свойства и отношения, как было отмечено в гл. 1, довольно четко разделяются на вещественные (материальные) и геометрические (пространственные). К вещественным свойствам отдельной составной части геологического объекта относятся состав и физические свойства — плотность, твердость, проводимость и т. п., к геометрическим — размеры, форма, ориентация и т. п. К вещественным отношениям между составными частями геологического объекта принадлежат отношения между ними по их вещественным свойствам (состав, физические свойства), к геометрическим — отношения между ними по форме, размеру, пространственному положению, ориентации и т. п.

В введенных терминах структурные свойства геологического объекта это такие свойства, которые определяются через геометрические свойства составных частей и геометрические отношения между составными частями.

Такое определение в общем соответствует традиционно сложившимся представлениям, согласно которым различаются, с одной стороны, состав и физические свойства геологических объектов, с другой — свойства, характеризующие их строение.

Для систематики геологических структур на математической основе предлагается два подхода (взаимно дополняющих друг друга), которые условно можно называть геометрическим и системным*. В первом из них в качестве модели структуры геологического объекта рассматривается множество точек в трехмерном евклидовом пространстве, и систематика структур производится по признаку, сохраняются ли данные структурные свойства при тех или иных преобразованиях точек пространства. Во втором подходе структура рассматривается как система — совокупность структурных элементов (связных множеств точек) с определенными пространственными отношениями между ними. Рассмотрим более подробно вопросы использования указанных подходов для систематики геологических структур.

Между свойствами геологических структур и преобразованиями точек пространства имеется определенная зависимость. В качестве примера рассмотрим преобразование подобия точек пространства и некоторые структуры пород. Представим себе, что производится преобразование подобия точек пространства, в котором находится порода с равномернозернистой структурой.

Структура, полученная после преобразования, также будет равномернозернистой. Другими словами — свойство породы обладать равномернозернистой структурой инвариантно относительно преобразования подобия. Это же утверждение справедливо и для неравномернозернистой, призматически зернистой и других структур, параллельной, массивной и подобных текстур.

Однако имеются структуры, не сохраняющиеся при преобразовании подобия. Например, структуры пород, определяемые через абсолютные размеры зерен — крупнозернистые, среднезернистые, мелкозернистые и т. п. При преобразовании подобия в зависимости от коэффициента преобразования среднезернистая структура может перейти в крупнозернистую или, наоборот, мелкозернистую. Таким образом, относительно преобразования подобия все структуры и текстуры пород разделяются на сохраняющиеся и несохраняющиеся (в указанном выше смысле) при этом преобразовании.

В качестве другого примера приведем топологическое преобразование. Упомянутые выше структуры пород (равномернозернистая, призматическизернистая) и текстуры (параллельная, массивная), сохраняющиеся при преобразовании подобия не сохраняются при произвольном топологическом преобразовании. На-

* Ю. А. Косыгиным (1974_1) указаны два направления в исследовании геологических структур, названные им этими же терминами. Оба выделенных здесь подхода относятся к геометрическому направлению исследований в его понимании.

пример, при некотором топологическом преобразовании равномернозернистая структура может перейти в неравномернозернистую, параллельная текстура — в массивную. Однако конкреционная структура, компактная (плотная) концентрически-скорлуповатая текстуры пород, концентрически зональное строение Земли сохраняются при произвольном топологическом преобразовании.

Согласно существующим представлениям структурные свойства геологических объектов определяются независимо от фиксированной системы отсчета, и поэтому они инвариантны относительно произвольного движения — параллельного переноса и вращения. Следовательно, это преобразование в отличие от указанных выше невозможно использовать для классифицирования геологических структур.

Опираясь на понятие преобразования точек пространства можно выделить классы геологических структур, сохраняющихся при произвольных преобразованиях подобия, аффинном, топологическом и др. Очевидно, что выделенные таким способом классы не представляют собой разбиения множества геологических структур, так как классы соответствующие более общим преобразованиям включают другие в качестве подклассов.

Второй подход к систематике геологических структур, названный выше системным, основан на использовании в качестве классификационных признаков геометрических свойств составных частей геологического объекта и геометрических отношений между ними. По этой группе признаков можно различать виды структур геологических объектов, выделяемых: 1) по форме составных частей (призматически зернистая, микролитовая, чешуйчатая и другие структуры пород, складчатая, блоковая и подобные тектонические структуры); 2) по размерам составных частей (например, структуры пород, выделяемые по абсолютной величине составных частей — крупнозернистая, среднезернистая, мелкозернистая и т. п., по относительной величине составных частей — равномернозернистая, неравномернозернистая и т. п., Заварицкий, 1956); 3) по геометрическим отношениям между составными частями (например, гипидиоморфнозернистая, пойкилитовая и подобные структуры пород).

Большинство структур пород и руд относятся к структурам, выделяемым по геометрическим бинарным отношениям между их составными частями. Эти структуры имеют также важное значение для реконструкции процессов, приведших к формированию геологических объектов.

Используя классификацию бинарных отношений между геологическими телами, описанную в § 4 гл. 1, можно выделить следующие основные классы структур геологических объектов, определяемых через геометрические отношения между их составными частями:

1) структуры с отношениями эквивалентности (или структуры эквивалентности);

2) структуры с отношениями порядка (структуры порядка или упорядоченные структуры);
3) структуры с отношениями толерантности (структуры толерантности);
4) структуры с антирефлексивными и симметричными отношениями.

Следует заметить, что в одном и том же геологическом объекте могут наблюдаться структуры различных видов и классов, выделяемых по размерам составных частей и отношениям между ними, по отношениям эквивалентности и порядка, и т. п. Это соответствует традиционно сложившимся представлениям о структурах геологических объектов (например, в одной и той же интрузивной породе можно наблюдать равномернозернистую и гипидиоморфнозернистую структуры).

В данной главе мы рассмотрим математические модели и главнейшие математические свойства вышеназванных четырех основных классов структур геологических объектов, выделяемых по отношениям между их составными частями. В целях достижения наибольшей общности построений, основное внимание будет уделено тем структурам, которые инвариантны (в указанном выше смысле) относительно топологических преобразований точек пространства. Поэтому рассмотренные ниже структуры не зависят от абсолютных размеров тел.

Задачи, возникающие при исследовании структур геологических объектов, выделяемых по размерам их составных частей, рассмотрены в следующей главе.

Математической моделью структуры того или иного типа является множество тел в трехмерном евклидовом пространстве R^3, на свойства которого наложены ограничения, зависящие от свойств структур данного типа. Эти ограничения обычно сводятся к фиксированию некоторых свойств бинарных отношений на данном множестве тел. Например, высказывания $\hat{\beta}_M = \theta_M$, $\gamma_M = O_M$ (θ_M, O_M — полное и пустое отношения на множестве тел M) определяют некоторые виды структур. Для достижения достаточной строгости изложения все определения и утверждения будем формулировать для множеств тел в трехмерном евклидовом пространстве.

§ 2. Математические модели и свойства структур с отношениями толерантности и структур с антирефлексивными и симметричными отношениями

Рассмотрим структуры, порождаемые антирефлексивными и симметричными отношениями между геологическими телами: отношениями изолированности α, соприкосновения β и контактирования σ, а также рефлексивными и симметричными отношениями (толерантностями): неизолированности $\overline{\alpha}$ и совместимости γ.

Основные математические свойства этих структур определяются свойствами перечисленных отношений. Некоторые из сформулированных ниже определений и утверждений, касающихся отношений изолированности α, соприкосновения β и контактирования σ на множествах тел, объединение которых есть связная область, характеризуют наиболее общие свойства строения геологических объектов.

Вначале, используя термины введенные в §§ 2, 3, 4 гл. 1, определим множества тел, удовлетворяющих некоторым условиям, а затем рассмотрим свойства перечисленных отношений на этих множествах.

Определение 2. 1. Множество тел M в трехмерном евклидовом пространстве R^3 будем называть множеством изолированных тел, если пересечение любых двух различных тел A_i, $A_j \in M$, $A_i \neq A_j$ есть пустое множество, т. е. если для M выполняется условие

$$(\forall A_i \in M)(\forall A_j \in M)\{(A_i \neq A_j) \rightarrow (A_i \cap A_j) = \varnothing\}.$$

Определение 2. 2. Множество тел M в трехмерном евклидовом пространстве R^3 будем называть связным множеством тел или множеством неизолированных тел, если объединение всех тел этого множества есть связная область, т. е. если для M выполняется условие $\bigcup\limits_{A_i \in M} A_i = D$, где D некоторая связная область трехмерного евклидового пространства R^3.

Определение 2. 3. Множество тел M в R^3 будем называть плотным множеством тел, если объединение всех тел множества M $D = \bigcup\limits_{A_i \in M} A_i$ есть тело, ограниченное одной замкнутой поверхностью.

Из определений 2. 2 и 2. 3 следует, что любое плотное множество тел является связным множеством тел. Выделим несколько классов связных множеств тел.

Определение 2. 4. Множество тел M в R^3 будем называть множеством соприкасающихся тел, если оно связано и отношение совместимости γ_M на этом множестве M равно отношению равенства E_M, т. е. если для M выполняются условия

$$\bigcup_{A_i \in M} A_i = D, \ \gamma_M = E_M.$$

Определение 2.5. Множество тел M в R^3 будем называть множеством контактирующих тел, если оно связно и разность $\overline{\alpha}_M \setminus \sigma_M$ отношения неизолированности $\overline{\alpha}_M$ и контактирования σ_M равна отношению равенства E_M, т. е если для M выполняются условия

$$\bigcup_{A_i \in M} A_i = D, \ \overline{\alpha}_M \setminus \sigma_M = E_M.$$

Определение 2. 6. Множество тел M в R^3 будем называть множеством совмещающихся тел, если оно связно и отношение соприкосновения β_M на этом множестве M равно пустому отношению O_M, т. е. если для M выполняются условия

$$\bigcup_{A_i \in M} A_i = D, \ \beta_M = O_M.$$

Поскольку отношение контактирования σ включается в отношение соприкосновения β (согласно их определениям), то множество контактирующих тел есть также множество соприкасающихся тел.

Названия выделенных классов множеств тел подобраны так, что они согласуются с основными свойствами множеств этих классов.

Граф отношения соприкосновения на множестве изолированных тел не имеет ребер (состоит только из вершин) и называется пустым (Зыков, 1969). Граф отношения совместимости на множестве изолированных тел относится к классу вырожденных графов — при каждой его вершине имеется одна петля. Граф отношения изолированности на множестве изолированных тел является полным графом (любые две различные его вершины смежны — соединены звеном).

Приведем некоторые примеры множеств геологических тел, геометрические свойства которых совпадают со свойствами выделенных выше множеств тел в трехмерном евклидовом пространстве R^3. Множество изолированных тел в R^3 является геометрической моделью, например, системы изолированных зерен акцессорных минералов в образце породы. Пример систем геологических тел, соответствующих плотному и неплотному множествам контактирующих тел в R^3, — система зерен образцов пород, соответственно с компактной (плотной) и пористой текстурой (Половинкина, 1966).

Из определений 2. 1—2. 6 и бинарных отношений изолированности α, соприкосновения β, контактирования σ и совместимости γ следует истинность следующих утверждений.

1. На любом множестве изолированных тел M в R^3 отношение соприкосновения β_M равно пустому отношению O_M, отношение совместимости γ_M равно отношению равенства E_M, а отношение изолированности α_M — разности полного отношения θ_M и отношения равенства E_M: $\beta_M = O_M$, $\gamma_M = E_M$, $\alpha_M = \theta_M \setminus E_M$.

2. На любом связном множестве тел в R^3 отношение изолированности α_M не равно разности полного отношения θ_M и отношения равенства E_M: $\alpha_M \neq \theta_M \setminus E_M$.

Из этого следует, что отношение неизолированности $\overline{\alpha}_M$ на связном множестве тел M не равно отношению равенства E_M:

$$\overline{\alpha}_M \neq E_M.$$

3. На любом множестве соприкасающихся (в частности, контактирующих) тел M в R^3 отношение соприкосновения β_M не равно пустому отношению O_M, отношение изолированности α_M не равно разности полного отношения θ_M и отношения равенства E_M:

$$\beta_M \neq O_M,\ \alpha_M \neq \theta_M \setminus E_M.$$

4. На любом множестве совмещающихся тел M отношение совместимости γ_M не равно отношению равенства E_M, отношение изолированности α_M не равно разности полного отношения θ_M и отношения равенства E_M:

$$\gamma_M \neq E_M,\ \alpha_M \neq \theta_M \setminus E_M.$$

Рассмотрим свойства отношений неизолированности $\overline{\alpha}$, соприкосновения β и совместимости γ на связных множествах тел. Отметим сначала, что согласно определениям отношений изолированности α, соприкосновения β и совместимости γ для любого множества тел M выполняются равенства

$$\alpha_M \cup \beta_M \cup \gamma_M = \theta_M, \tag{2.1}$$

$$\alpha_M \cap \beta_M = O_M,\ \alpha_M \cap \gamma_M = O_M,\ \beta_M \cap \gamma_M = O_M. \tag{2.2}$$

Из этих равенств, в частности, следует

$$\overline{\alpha}_M = \gamma_M \cup \beta_M, \tag{2.3}$$

т. е. отношение неизолированности $\overline{\alpha}$ выполнено для тех и только для тех пар тел, для которых выполнено либо отношение соприкосновения γ либо отношение совместимости β. Поэтому во всех нижеследующих утверждениях отношение неизолированности $\overline{\alpha}$ и его транзитивизацию $\hat{\overline{\alpha}}$ можно заменить соответственно объединением $\gamma \cup \beta$ и транзитивизацией этого объединения $\widehat{\gamma \cup \beta}$.

Лемма 2.1. *Множество тел M в трехмерном евклидовом пространстве R^3 связно тогда и только тогда, когда транзитивизация $\hat{\overline{\alpha}}$ отношения неизолированности $\overline{\alpha}$ на этом множестве равна полному отношению.*

На основании определения 2.2 и равенства (2.3) это утверждение можно записать в форме следующих эквиваленций:

$$\Big(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D\Big) \rightleftarrows \Big(\hat{\overline{\alpha}}_M = \theta_M\Big) \rightleftarrows \Big(\widehat{\beta_M \cup \gamma_M} = \theta_M\Big), \tag{2.4}$$

где M — произвольное множество тел в R^3; D — некоторая связная область трехмерного евклидова пространства R^3.

На языке теории графов лемму 2.1 можно сформулировать так: множество тел M связно тогда и только тогда, когда граф отношения неизолированности на этом множестве M есть связный граф (для любых двух различных вершин существует соединяющая их цепь).

Истинность леммы 2. 1 непосредственно следует из определений связного множества тел и транзитивизации $\hat{\alpha}$ отношения неизолированности.

Следствие 2. 1. По определению отношений изолированности α, соприкосновения β, контактирования σ и совместимости γ для произвольного множества тел M имеют место включения.

$$\beta_M \subseteq \overline{\alpha}_M, \tag{2.5}$$

$$\sigma_M \subseteq \overline{\alpha}_M, \tag{2.6}$$

$$\gamma_M \subseteq \overline{\alpha}_M. \tag{2.7}$$

На основании (2.5) — (2.7) можем написать импликацию:

$$\left(\hat{\beta}_M = \theta_M\right) \vee \left(\hat{\sigma}_M = \theta_M\right) \vee \left(\hat{\gamma}_M = \theta_M\right) \rightarrow \left(\hat{\overline{\alpha}}_M = \theta_M\right). \tag{2.8}$$

Из (2. 8) и леммы 2. 1. следует, что если на множестве тел M в R^3 транзитивизация одного из отношений: соприкосновения β_M, контактирования σ_M и совместимости γ_M равна полному отношению θ_M, то множество тел M — связное.

Теорема 2. 1. Множество тел M в трехмерном евклидовом пространстве R^3 является множеством соприкасающихся тел тогда и только тогда, когда на этом множестве транзитивизация $\hat{\beta}_M$ отношения соприкосновения β_M равна полному отношению θ_M, и для любых двух разных тел множества M выполнено отношение соприкосновения β_M или отношение изолированности α_M. Учитывая определение 2.4 множества соприкасающихся тел теорему 2.1 можно записать в следующей форме:

$$\left(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D\right) \wedge \left(\gamma_M = E_M\right) \rightleftarrows \left(\hat{\beta}_M = \theta_M\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\beta_M \cup \alpha_M\right) = \left(\theta_M \setminus E_M\right), \tag{2.9}$$

где M — произвольное множество тел;

D — некоторая связная область трехмерного евклидового пространства R^3.

В терминах теории графов теорему 2. 1 можно сформулировать следующим образом. Множество тел M в R^3 является множеством соприкасающихся тел в том и только в том случае, когда граф отношения соприкосновения β_M на этом множестве M связный, а объединение $\beta_M \cup \alpha_M$ отношений соприкосновения β_M и изолированности α_M есть полный граф.

Доказательство. Коньюнкцию в левой части (2. 9) на основании (2. 2), (2. 3), (2. 4) и теоремы эквивалентности (Клини, 1973, стр. 30) можно представить:

$$\Big(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D\Big) \wedge (\gamma_M = E_M) \rightleftarrows \Big(\beta_M \widehat{\cup} \gamma_M = \theta_M\Big) \wedge$$
$$\wedge (\gamma_M = E_M) \rightleftarrows \Big(\beta_M \widehat{\cup} E_M = \theta_M\Big) \wedge (\gamma_M = E_M) \rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows \Big(\hat{\beta}_M = \theta_M\Big) \wedge (\beta_M \cup \alpha_M = \theta_M \setminus E_M).$$

При написании последней коньюнкции использована эквиваленция

$$\Big(\beta_M \widehat{\cup} E_M = \theta_M\Big) \rightleftarrows \Big(\hat{\beta}_M = \theta_M\Big), \tag{2.10}$$

получаемая из определения отношения соприкосновения β, и эквиваленция

$$(\gamma_M = E_M) \rightleftarrows (\alpha_M \cup \beta_M = \theta_M \setminus E_M), \tag{2.11}$$

устанавливаемая на основании (2. 1) и (2. 2).

Следствие 2. 2. Множество тел M в трехмерном евклидовом пространстве R^3 является множеством контактирующих тел тогда и только тогда, когда на этом множестве M транзитивизация $\hat{\sigma}_M$ отношения контактирования σ_M равна полному отношению θ_M и для любых двух различных тел множества M выполнено отношение контактирования σ_M или отношение изолированности α_M. Используя определение 2.5 множества контактирующих тел, это утверждение можно записать в форме следующей эквиваленции:

$$\Big(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D\Big) \wedge \Big(\bar{\alpha}_M \setminus \sigma_M = E_M\Big) \rightleftarrows \Big(\hat{\sigma}_M = \theta_M\Big) \wedge$$
$$\wedge (\alpha_M \cup \sigma_M = \theta_M \setminus E_M), \tag{2.12}$$

где M и D те же, что и для (2.9).

Доказательство. Из (2. 1) и (2. 2) для произвольного множества тел M в R^3 можно получить

$$\Big(\bar{\alpha}_M \setminus \sigma_M = E_M\Big) \rightleftarrows (\gamma_M = E_M) \wedge (\beta_M = \sigma_M). \tag{2.13}$$

Подставив (2. 13) в левую часть (2. 12) и затем использовав (2. 9), можно убедиться в истинности (2. 12).

Согласно (2. 12), чтобы произвольное множество тел было множеством контактирующих тел необходимо и достаточно, чтобы любая пара тел этого множества «входила» в некоторую цепочку контактирующих тел и любые два различных тела контактировали или были изолированными.

Из (2. 12) вытекает, что для любого множества контактирующих тел M в R^3 выполняется равенство

$$\alpha_M \cup \sigma_M = \hat{\sigma}_M \setminus E_M. \tag{2.14}$$

Эквиваленция аналогичная (2. 9) и (2. 12) может быть установлена также для произвольного множества совмещающихся тел M в R^3 и транзитивизации $\hat{\gamma}_M$ отношения совместимости:

$$\Big(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D\Big) \wedge (\beta_M = O_M) \rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows \Big\{\Big(\hat{\gamma}_M = \theta_M\Big) \wedge \Big[\,(\alpha_M \cup \gamma_M) = \theta_M\Big]\Big\}. \tag{2.15}$$

На основании (2.1), (2.3), (2.4) имеем

$$\Big(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D\Big) \wedge (\beta_M = O_M) \rightleftarrows \Big(\widehat{\beta_M \cup \gamma_M} = \theta_M\Big) \wedge$$
$$\wedge\, (\beta_M = O_M) \rightleftarrows \Big(\hat{\gamma}_M = \theta_M\Big) \wedge (\alpha_M \cup \gamma_M = \theta_M).$$

Таким образом, произвольное множество тел M в трехмерном евклидовом пространстве R^3 тогда и только тогда является множеством совмещающихся тел, когда на этом множестве M тразитивизация $\hat{\gamma}_M$ отношения совместимости γ_M равна полному отношению θ_M и для любой пары тел выполнено отношение совместимости γ_M или отношение изолированности α_M.

Как видно из (2.15), для любого множества совмещающихся тел M в R^3 выполняется равенство

$$\alpha_M \cup \gamma_M = \hat{\gamma}_M. \tag{2.16}$$

Рассмотрим теперь некоторые свойства структур с нерефлексивными, симметричными и транзитивными отношениями.

Согласно известной теореме теории бинарных отношений, если отношение ε на множестве Q есть эквивалентность, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно, то существует единственное такое разбиение $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ множества Q на классы эквивалентности, что для любых x, $y \in Q$, $x \varepsilon y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному и тому же классу разбиения (Шрейдер, 1971; Шиханович, 1965 и др.).

Наоборот, если разбиение $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ множества Q такое, что для любых x, $y \in Q$; $x \varepsilon y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному и тому же классу разбиения, то отношение ε есть эквивалентность. Эквивалентность ε и разбиение $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ называют сопряженными (Шиханович, 1965).

Пусть $\varphi_Q = <\Phi, Q>$ — нерефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на произвольном множестве Q. Так как для φ_Q условие рефлексивности не выполнено, то для него не справедлива приведенная выше теорема о существовании сопряженного разбиения. Докажем, что для отношения φ_Q справедлива следующая

Теорема (2.2). Если отношение $\varphi_Q = <\Phi, Q>$ на множестве Q нерефлексивно, симметрично и транзитивно, то

1) существует разбиение $H = \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$ множества Q такое, что для любых элементов $x, y \in Q$, $x\varphi_Q y$ выполнено тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному и тому же классу разбиения, за исключением единственного класса Q_0,

2) классу Q_0 принадлежат такие и только такие элементы множества Q, которые не находятся в отношении φ_Q ни с каким элементом множества Q, т. е. $(\forall x \in Q)(\forall z \in Q_0)(z\overline{\varphi}_Q x)$.

Доказательство. Из симметричности и транзитивности отношения φ_Q следует, что оно неантирефлексивно. Действительно, пусть x и y такие элементы множества Q, что $x\varphi_Q y$. Тогда по симметричности выполнено также $y\varphi_Q x$, а из $x\varphi_Q y$, $y\varphi_Q x$ и транзитивности имеем $x\varphi_Q x$ и, следовательно, φ_Q неантирефлексивно. Но, поскольку φ_Q нерефлексивно существует такой элемент $z \in Q$, что $z\overline{\varphi}_Q z$. Подмножество элементов z, принадлежащих Q, для которых $z\overline{\varphi}_Q z$, обозначим через Q', а подмножество элементов x, для которых $x\varphi_Q x$, обозначим через Q''. Очевидно, что $\{Q', Q''\}$ есть разбиение множества Q. Рассмотрим сужение $\varphi_{Q''}$ отношения φ_Q на множество Q''. Известно (Шиханович, 1965), что если некоторое отношение обладает какими-то из основных свойств (в том числе симметричностью и транзитивностью), то его сужение также обладает этими свойствами. Следовательно, отношение $\varphi_{Q''}$ симметрично и транзитивно. Но по определению в множество Q'' входят только такие элементы x, для которых $x\varphi x$ т. е. $\varphi_{Q''}$ также рефлексивно. Таким образом, $\varphi_{Q''}$ есть эквивалентность. По приведенной выше теореме существует разбиение множества Q'' такое, что для любых $x, y \in Q''$, $x\varphi_{Q''}y$ выполнено в тех и только в тех случаях, когда x и y принадлежат одному и тому же классу разбиения. Обозначим это разбиение через $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$. Так как $\{Q', Q''\}$ — разбиение множества Q, а $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ — разбиение класса Q'', то отсюда следует, что $\{Q', Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ есть разбиение множества Q.

Теперь осталось только доказать, что $Q' = Q_0$. Для этого нужно доказать, что если $z \in Q'$, то z не находится в отношении φ_Q ни с одним из элементов множества Q. Допустим, что есть некоторый элемент $x \in Q$, для которого $z\varphi_Q x$, тогда по симметричности — $x\varphi_Q z$, а из $z\varphi_Q x$, $x\varphi_Q z$ и транзитивности имеем $z\varphi_Q z$, что противоречит указанному выше условию, согласно которому множеству Q' принадлежат только такие элементы z, для которых $z\overline{\varphi}_Q z$. Так как для всех $x \in Q''$ выполнено $x\varphi_Q x$, то классу Q' принадлежат все такие элементы множества Q, которые не находятся в отношении φ_Q ни к одному из элементов множества Q, т. е. $Q' = Q_0$. Теорема доказана.

Следствие 2.3. Для любого нерефлексивного, симметричного и транзитивного отношения φ_Q существует такое подмножество Q'' его базисного множества Q, что сужение данного отношения $\varphi_{Q''}$ на это подмножество Q'' есть эквивалентность.

При доказательстве теоремы 2.2 было установлено, что сужение $\varphi_{Q''}$ отношения φ_Q на множество Q'' ($Q'' \subset Q$) есть эквивалентность. Поскольку на свойства отношения φ_Q, кроме симметричности, транзитивности и отсутствия рефлексивности, не было наложено никаких других ограничений, то очевидна справедливость утверждения, приведенного как следствие, для любых отношений, обладающих этими свойствами.

Следствие 2.4. Если отношение $\varphi_Q = \langle \Phi, Q \rangle$ на множестве Q нерефлексивно, симметрично и транзитивно, то существует разбиение $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$ множества Q такое, что сужение отношения φ_Q на одно из классов разбиения есть пустое отношение, а на любой из всех остальных классов — полное отношение.

Докажем теперь, что справедлива также и обратная

Теорема 2.3. Пусть $\varphi_Q = \langle \Phi, Q \rangle$ — некоторое отношение на множестве Q. Если 1) разбиение $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$ множества Q такое, что для любых $x, y \in Q$, $x\varphi_Q y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному и тому же классу разбиения, кроме единственного класса Q_0, 2) классу Q_0 принадлежат такие и только такие элементы множества Q, которые не находятся в отношении φ_Q ни к одному из элементов множества Q, т. е. $(\forall x \in Q)\ (\forall z \in Q_0)\ \left(z\overline{\varphi}_Q x\right)$, то отношение φ_Q нерефлексивно, симметрично и транзитивно.

Доказательство. Пусть $\varphi_{Q \setminus Q_0}$ есть сужение отношения φ_Q на множество $Q \setminus Q_0 = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$. По условию теоремы для любых $x, y \in Q \setminus Q_0$ $x\varphi_{Q \setminus Q_0} y$ выполнено тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному и тому же классу разбиения $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ множества $Q \setminus Q_0$. Следовательно, согласно приведенной выше теореме о сопряженных эквивалентностях и разбиениях, отношение $\varphi_{Q \setminus Q_0}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно. Из условий 1 и 2 доказываемой теоремы следует, что отношения φ_Q и

$\varphi_{Q\setminus Q_0}$ отличаются только базисными множествами, а графики у них равны. Таким образом, φ_Q тоже симметрично и транзитивно. Но оно нерефлексивно, так как по условию 1 существуют $x \in Q$ такой, что $x\overline{\varphi}_Q x$.

Нерефлексивное, симметричное и транзитивное отношение φ_Q и разбиение $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ его базисного множества Q, связанные доказанными выше теоремами, в отличие от сопряженных эквивалентностей и разбиений будем называть соответствующими.

Рассмотрим некоторые примеры применения теорем 2.2 и 2.3 к системам тел. Пусть $M = \{A_i\}$, $i = 1,2, \dots, k$; $k \geqslant 2$ такое множество тел в трехмерном евклидовом пространстве R^3 среди которых имеются контактирующие тела, т. е. отношение контактирования на этом множестве не равно пустому отношению. Как видно из табл. 2, транзитивизация $\hat{\sigma}$ отношения контактирования является симметричным и транзитивным отношением. Хотя отношение контактирования σ антирефлективное, его транзитивизация $\hat{\sigma}$ этим свойством не обладает. Если она на данном множестве тел M также и нерефлексивна, тогда M можно разбить на подмножества M_0, M_1, $M_2, \dots, M_n$ таким образом, что в M_0 войдут такие тела, каждое из которых не контактирует ни с одним из других тел множества M. В любом из остальных подмножеств, для всякой пары тел можно найти такую цепочку контактитрующих тел, в которой эти два тела будут крайними. При этом для любых двух тел, входящих в разные подмножества, такая цепочка не существует. На множестве тел M', которому принадлежат все тела множества M, кроме тел подмножества M_0, транзитивизация $\hat{\sigma}_{M'}$ отношения контактирования есть эквивалентность.

Граф Г отношения $\hat{\sigma}$ на множестве тел M состоит из n полных подграфов $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ с вершинами, соответствующими подмножествам $M_1, M_2, \dots, M_n$, и из „голых“ вершин, соответствующих телам подмножества M_0. Вершины, входящие в различные подграфы Γ_s, Γ_t, $s, t = 1, \dots, n$; $s \neq t$, не соединяются звеньями.

§ 3. Математические модели и свойства структур с отношениями порядка

Рассмотрим структуры, порождаемые отношениями порядка: вмещающего контактирования σ_1 (редукция строгого порядка, см. § 4, гл. I), транзитивизации вмещающего контактирования $\hat{\sigma}_1$ (строгий порядок), включения γ_1 (нестрогий порядок), вмещения η (строгий порядок) и транзитивизации идиоморфизма $\hat{\omega}_1$.

Все эти отношения обладают свойствами транзитивности (за исключением вмещающего контактирования, которое антитранзитивно) и асимметричности. Именно эти их свойства определяют основные особенности рассматриваемого класса структур.

Главнейшее из свойств структур с отношениями порядка — возможность упорядочения в них тел (структурных элементов). В большинстве случаев такую упорядоченность удается интерпретировать с содержательной точки зрения. Это связано с тем, что отношения порядка между элементами в рассматриваемых структурах возникают в результате последовательного развития процессов во времени или же действия сил с постоянным направлением. Например, порядок в чередовании зон разного состава в зональном кристалле или порядок определяемый отношениями идеоморфизма и ксеноморфизма между зернами некоторых минералов обусловлен последовательным развитием во времени процесса кристаллизации; порядок в последовательности слоев в слоистых осадочных толщах вызван последовательным развитием процесса осадконакопления; порядок в чередовании геосфер, вероятно, обусловлен направленностью гравитационных сил к центру Земли.

Близкая к этому точка зрения высказана также В. И. Васильевым: формирование нижней и верхней границ анизотропных объектов (например, зональных рудных тел) разделено промежутком времени структурообразования (Васильев, 1972).

В общем можно сказать, что отношения порядка между элементами структур возникают вследствие действия факторов, в которых также можно предусмотреть некоторый порядок. Поэтому структуры с отношениями порядка имеют важное значение для реконструкции прошедших геологических процессов и, в частности, процессов формирования пород, последовательности образования геологических тел и т. п.

Ниже мы выделим отвечающие некоторым условиям множества тел в трехмерном евклидовом пространстве, которые можно рассматривать как математические модели наиболее важных структур с отношениями порядка. Затем сформулируем утверждения о свойствах этих множеств и связях между ними.

Начнем со структур, порождаемых отношением вмещения η.

Отношение вмещения η на произвольном множестве тел M обладает свойствами антирефлексивности, асимметричности и транзитивности, т. е. является отношением строгого порядка (табл. 2). Однако свойством связности это отношение обладает не на всяком множестве тел. Условие связности отношения вмещения η на множестве M можно записать в виде равенства.

$$\eta_M \cup \eta_M^{-1} = \theta_M \setminus E_M. \tag{3.1}$$

Если выполнено условие (3. 1), то отношение вмещения η на множестве M — совершенный строгий порядок. Из этого и из известной теоремы теории бинарных отношений о совершенном строгом порядке (Шрейдер, 1971) вытекает следующая

Лемма 3.1. Если множество тел M в R^3 такое, что для любых двух различных тел A_i, $A_j \in M$ либо A_i вмещает A_j, либо A_j вмещает A_i, то на множестве M можно выбрать такую нумерацию тел $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, при которой тело A_i вмещает тело A_j $(A_i \eta A_j)$ тогда и только тогда, когда номер j тела A_j меньше номера i тела A_i.

Таким образом, A_1 вмещается всеми телами множества M, а A_k вмещает все тела множества M, каждое предыдущее по номеру тело вмещается всеми последующими телами. Тело A_1 естественно назвать центральным, а A_k — периферическим.

Определение 3.1. Множество тел M в трехмерном евклидном пространстве R^3 назовем множеством тел совершенно строго упорядоченным по отношению вмещения η, если для любых различных тел A_i, $A_j \in M$, $A_i \neq A_j$ либо A_i вмещает A_j, либо A_j вмещает A_i, т. е. если выполняется условие (3.1).

Граф отношения вмещения η на множестве тел, совершенно строго упорядоченном по этому отношению, в соответствии с леммой 3.1 имеет вид (при числе тел равном 4) по рис. 2.

В качестве примера подобных множеств тел в R^3 можно привести геометрическую модель множества «концентрически-зональных» геологических тел: совокупность оболочек и ядра Земли, множество зон в зональном кристалле или в конкрециях пород с конкреционными структурами (Половинкина, 1966).

Теорема 3.1. Если на множестве тел M в трехмерном евклидовом пространстве R^3 объединение $\hat{\sigma}_{1,M} \cup \hat{\sigma}^{-1}_{1,M}$ транзитивизаций отношений вмещающего контактирования $\sigma_{1,M}$ и его инверсии $\sigma^{-1}_{1,M}$ выполнено для любых двух различных тел, то M — множество контактирующих тел и множество тел, совершенно строго упорядоченное по отношению вмещения.

Используя определения 2.5 и 3.1, теорему 3.1 можно записать в следующем виде

$$(\hat{\sigma}_{1,M} \cup \hat{\sigma}^{-1}_{1,M} = \theta_M \setminus E_M) \to \Big[\Big(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D\Big) \wedge (\bar{\alpha}_M \setminus \sigma_M = E_M) \wedge$$

$$\wedge \left(\eta_M \cup \eta^{-1}_M = \theta_M \setminus E_M\right)\Big], \tag{3.2}$$

где D — связная область в R^3.

Доказательство. Поскольку для любой пары различных тел из множества M выполнена транзитивизация отношения вмещающего контактирования или его инверсии, то $\hat{\sigma}_M = \theta_M$ и $\alpha_M \cup \sigma_M = \theta_M \setminus E_M$. Из этого с учетом следствия 2.2 (эквиваленция (2.12)) вытекает, что M — множество контактирующих тел.

Согласно определениям отношения вмещающего контактирования σ_1 и вмещения η для произвольного множества тел выполняются включения $\hat{\sigma}_1 \subseteq \eta$ и $\hat{\sigma}_1^{-1} \subseteq \eta^{-1}$. Учитывая это и свойство антирефлексивности отношения вмещения η_M, можно написать следующую импликацию

$$\left(\hat{\sigma}_{1,M} \cup \hat{\sigma}_{1,M}^{-1} = \theta_M \setminus E_M\right) \to \left(\eta_M \cup \eta_M^{-1} = \theta_M \setminus E_M\right),$$

т. е. в соответствии с определением 3. 1 M — множество тел, совершенно строго упорядоченное по отношению вмещения.

Теорема 3. 2. Если множество тел M в R^3 есть плотное множество тел, множество контактирующих тел и множество тел, совершенно строго упорядоченное по отношению вмещения η (или, короче — плотное множество контактирующих тел, упорядоченных по отношению вмещения), то объединение $\hat{\sigma}_{1,M} \cup \hat{\sigma}_{1,M}^{-1}$ транзитивизаций отношений вмещающего контактирования $\sigma_{1,M}$ и его инверсии выполнено для любых двух различных тел множества M.

На основании определений 2.3, 2.5 и 3.1 эту теорему можно записать так:

$$\left[\left(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D'\right) \wedge \left(\overline{\alpha}_M \setminus \sigma_M = E_M\right) \wedge \left(\eta_M \cup \eta_M^{-1} = \theta_M \setminus E_M\right)\right] \to$$

$$\to \left(\hat{\sigma}_{1,M} \cup \hat{\sigma}_{1,M}^{-1} = \theta_M \setminus E_M\right) \qquad (3.3)$$

где D' — тело ограниченное одной замкнутой поверхностью.

Доказательство. Из условия теоремы, с учетом леммы 3. 1, следует, что тела множества M можно пронумеровать так, что каждое предыдущее по номеру тело вмещается последующим. Пронумеруем тела указанным образом. Так как M — множество контактирующих тел и плотное множество тел, любые два тела с номерами отличающимися на единицу, контактируют по замкнутой поверхности. Следовательно, для двух различных тел выполнена транзитивизация отношения вмещающего контактирования σ_1 или его инверсии σ_1^{-1}.

Следствие 3.1. Если M есть плотное множество тел и объединение $\hat{\sigma}_{1,M} \cup \hat{\sigma}_{1,M}^{-1}$ транзитивизаций отношений вмещающего контактирования $\sigma_{1,M}$ и его инверсии $\sigma_{1,M}^{-1}$ выполнено для любых двух различных тел множества M, то

1) тела множества $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ можно пронумеровать так, что A_i находится в отношении вмещающего контактирования к телу A_{i-1} $(i = 2,3 \ldots, k)$;

2) все тела, кроме центральной A_1, ограничены двумя замкнутыми поверхностями — внешней и внутренней;

3) внешняя поверхность тела A_{i-1} является внутренней поверхностью тела $A_i (i = 2,3, \ldots, k)$.

Граф транзитивизации вмещающего контактирования на множестве тел, удовлетворяющих указанным условиям, имеет вид, показанный на рис. 2.

Теорема 3. 3. Если на множестве тел M в трехмерном евклидовом пространстве R^3 отношение включения $\gamma_{2,M}$ связно, то M — множество тел совершенно строго упорядоченное по отношению вмещения η и множество совмещающихся тел.

На основании определений 2. 6 и 3. 1 множества тел, совершенно строго упорядоченного по отношению вмещения η, и мно-

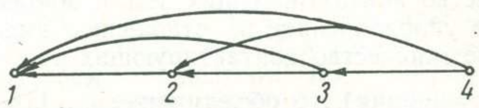

Рис. 2. Граф отношения вмещения на множестве тел, совершенно строго упорядоченном по этому отношению

жества совмещающихся тел, определения свойства связности бинарных отношений, теорему 3. 3 можно написать в форме

$$\left(\theta_M \setminus E_M \subset \gamma_{2,M} \cup \gamma_{2,M}^{-1}\right) \to \left(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D\right) \wedge \left(\beta_M = O_M\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\eta_M \cup \eta_M^{-1} = \theta_M \setminus E_M\right), \tag{3.4}$$

где D — некоторая связная область в R^3.

Доказательство. Из условия теоремы и определения свойства связности бинарных отношений следует, что

$$\theta_M \setminus E_M \subset \gamma_{2,M} \cup \gamma_{2,M}^{-1}. \tag{3.5}$$

На основании определений отношений включения γ_2 и вмещения η можно написать $\gamma_2 \setminus E \subseteq \eta$. Следовательно,

$$\left(\theta_M \setminus E_M \subset \gamma_{2,M} \cup \gamma_{2,M}^{-1}\right) \to \left(\theta_M \setminus E_M \subseteq \eta_M \cup \eta_M^{-1}\right),$$

т.е. M множество тел совершенно строго упорядоченное по отношению вмещения η. Так как отношение включения γ_2 рефлексивно, то из (3.5) следует, что $\gamma_{2,M} \cup \gamma_{2,M}^{-1} = \theta_M$. Учитывая это, а также равенства (2.2) можно убедиться, что на множестве M отношение соприкосновения равно пустому отношению. Из (3.5) видно также, что M — связное множество тел. Следовательно, в соответствии с определением (2.6) M есть множество совмещающихся тел.

Определение 3.2. Множество тел $M=\{A_i\}$, $i = 0,1,2, \ldots, k$ в трехмерном евклидовом пространстве R^3 назовем множеством, состоящим из вмещаемых тел и одного вмещающего тела, если существует одно и только одно тело A_0, принадлежащее множеству M, которое вмещает все остальные тела множества M, и для любой пары, не совпадающих с A_0 тел $< A_i, A_j >$, A_i, $A_j \in M$, $A_i \neq A_0$, $A_i \neq A_0$ не выполнено отношение вмещения η или его инверсия η^{-1}, т. е. если для множества тел M выполнены условия

$$(\forall A_i \in M_1)(A_0 \eta A_i), \tag{3.6}$$

где $M_1 = M \setminus \{A_0\}$, $\{A_0\}$, — множество, которому принадлежит только тело A_0;

$$\left(\forall < A_i, A_j > \in M_1^2\right)\left[\left(A_i \bar{\eta} A_j\right) \wedge \left(A_j \bar{\eta} A_i\right)\right], \tag{3.7}$$

где $\bar{\eta}$ — дополнение к отношению вмещения η т. е.

$$\left(A_i \bar{\eta} A_j\right) \rightleftarrows \urcorner\ (A_i \eta A_j).$$

Граф отношения вмещения η на множестве тел, удовлетворяющем этим условиям, характеризуется следующими особенностями: из одной вершины (точки сочленения) выходят дуги, соединяющие ее со всеми остальными вершинами, которые не являются смежными. На рис. 3 показан такой граф для шестиэлементного множества (тело 1 вмещает все остальные тела).

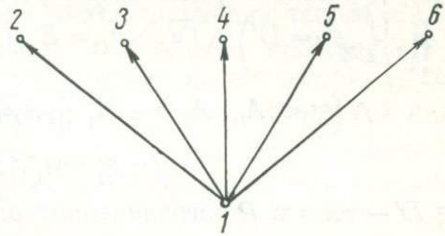

Рис. 3. Граф отношения вмещения на множестве тел, состоящем из вмещаемых тел (*2, 3, 4, 5, 6*) и одного вмещающего тела (*1*)

Множества геологических тел, геометрические модели которых — множество, состоящее из вмещаемых тел и одного вмещающего тела, имеют широкое распространение. К ним относятся образцы пород с порфировой структурой (если основную массу можно рассматривать как одно тело), кристаллы с включениями, интрузивные тела с ксенолитами и т. п., а также гетерогенные системы, известные под названием матричных систем. Следующая лемма связывает свойства структур подобных систем с некоторыми введенными выше понятиями.

Лемма 3. 2. Если множество тел M в трехмерном евклидовом пространстве R^3 такое, что существует одно тело $A_0 \in M$, которое находится в отношении вмещающего контактирования $\sigma_{1,M}$ к каждому из остальных тел этого множества M, то M есть множество контактирующих тел, состоящее из вмещаемых тел и одного вмещающего тела.

В соответствии с определениями 2. 5 и 3. 2 лемму 3. 2 можно записать в виде

$$[(\forall A_i \in M_1)(A_0 \sigma_{1,M} A_i)] \to \Big[\Big(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D\Big) \wedge (\overline{\alpha}_M \setminus \sigma_M = E_M)\Big] \wedge$$

$$\wedge [(\forall A_i \in M_1)(A_0 \eta A_i)] \wedge \Big[\big(\forall < A_i, A_j > \in M_1^2\big)\big(A_i \overline{\eta}_M A_j\big) \wedge$$

$$\wedge \left(A_j \overline{\eta}_M A_j\right)\Big], \qquad (3.8)$$

где D — как и раньше, связная область в R^3, $M_1 = M \setminus \{A_0\}$, $\}A_0\}$ — одноэлементное множество, которому принадлежит только одно тело A_0.

Справедливость леммы 3. 2 становится очевидным, если иметь в виду, что согласно условию леммы и определению отношения вмещающего контактирования, тело A_0 контактирует с каждым из остальных тел множества M по замкнутой поверхности.

Лемма 3. 3. Пусть M — 1) плотное множество тел, 2) множество контактирующих тел, 3) множество, состоящее из вмещаемых тел и одного вмещающего тела A_0. Тогда тело A_0 находится в отношении вмещающего контактирования к каждому из остальных тел множества M. В соответствии с определениями 2.3, 2.5, 3.2 лемму 3. 3 можно представить в форме

$$\Big\{\Big(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D'\Big) \wedge \left(\overline{\alpha}_M \setminus \sigma_M = \boldsymbol{E}_M\right) \wedge [(\forall A_i \in M_1)(A_0 \eta_M A_i)] \wedge$$

$$\wedge \left(\forall < A_i, A_j > \in M_1^2\right)\Big[\left(A_i \overline{\eta}_M A_j\right) \wedge \left(A_j \overline{\eta}_M A_i\right)\Big]\Big\} \to$$

$$\to [(\forall A_i \in M_1)(A_0 \sigma_{1,M} A_i)], \qquad (3.9)$$

где D' — тело в $\boldsymbol{R}^3$ ограниченное одной замкнутой поверхностью,

$$M_1 = M \setminus \{A_0\},$$

$\{A_0\}$ — множество, которому принадлежит только одно тело A_0.

Доказательство. Выберем произвольно одно тело $\boldsymbol{A}_i \in M$, $\boldsymbol{A}_i \neq A_0$ $(i = 1,2, \ldots, k)$. Согласно условию теоремы $\boldsymbol{A}_0$ вмещает A_i, т. е. имеется замкнутая поверхность $P \subset \boldsymbol{A}_0$, все точки которой являются также и точками тела A_0, и тело, ограниченное этой поверхностью включает тело A_i. Из этого утверждения, с с учетом того, что $\boldsymbol{M}$ — плотное множество тел и множество контактирующих тел, следует, что $\boldsymbol{A}_0$ контактирует с A_i по замкнутой поверхности, совпадающей с поверхностью тела A_i.

Таким образом, тело A_0 находится в отношении вмещающего контактирования к телу $A_i (A_0 \sigma_{1,M} A_i,\ i = 1,2, \ldots k)$. Очевидно, эти рассуждения справедливы для любого тела $\boldsymbol{A}_j \in M$, за исключением $A_0\ (A_j \neq A_0)$.

Граф отношения вмещающего контактирования на множестве тел, удовлетворяющем условиям леммы 3.3, имеет вид, показанный на рис. 3.

Используя отношение идиоморфизма ω_1, панидиоморфизма ω_2 и панксеноморфизма ω_3 выделим некоторые классы множеств тел в трехмерном евклидовом пространстве R^3.

Определение 3.3. Множество контактирующих тел $M = \{A_i\}$ $i = 1,2, ..., k$; $k \geqslant 2$ в R^3 назовем множеством тел панидиоморфных по оператору ψ, если на этом множестве M отношение панидиоморфизма $\omega_{2, M}$ по оператору ψ равно отношению контактирования σ_M, т.е. если выполнено равенство

$$\omega_{2,M} = \sigma_M. \tag{3.10}$$

Определение 3.4. Множество контактирующих тел $M = \{A_i\}$, $i = 1,2, ..., k$; $k \geqslant 2$ в трехмерном евклидовом пространстве R^3 назовем множеством тел панксеноморфных по оператору ψ, если на этом множестве M отношение панксеноморфизма $\omega_{3, M}$ по оператору ψ равно отношению контактирования, т. е. если выполняется равенство

$$\omega_{3,M} = \sigma_M. \tag{3.11}$$

Определение 3.5. Множество контактирующих тел $M = \{A_i\}$, $i = 1,2, ..., k$; $k \geqslant 2$ в трехмерном евклидовом пространстве R^3 назовем множеством тел гипидиоморфных по оператору ψ, если на этом множестве M объединение $\omega_{1, M} \cup \omega_{1, M}^{-1}$ отношений идиоморфизма $\omega_{1, M}$ и ксеноморфизма $\omega_{1, M}^{-1}$ по оператору ψ равно отношению контактирования ω_M, т. е. если выполняется равенство

$$\omega_{1, M} \cup \omega_{1, M}^{-1} = \sigma_M.$$

Примеры множеств геологических тел, геометрической моделью которых являются множества панидиоморфных тел в R^3: множества зерен образцов пород с панидиоморфнозернистой, призматически-зернистой структурами, совокупность пластов, залегающих без углового несогласия (при соответствующем подборе оператора, по которому устанавливается панидиоморфизм). Множества панксеноморфных тел в R^3 могут быть геометрической моделью множества зерен образцов пород с панксеноморфнозернистой (аллотриаморфнозернистой) структурой. К множествам геологических тел, геометрическая модель которых совпадает с множеством гипидиоморфных тел в R^3, можно отнести (с некоторыми оговорками) множество зерен образцов пород с гипидиоморфнозернистой структурой, совокупность слоев, залегающих с угловым несогласием, множества «пересекающихся» даек и т. п.

Как видно, из табл. 2, транзитивизация $\hat{\omega}_1$ отношения идиоморфизма ω_1 на произвольном множестве тел обладает свойством транзитивности. Наличие других свойств зависит от данного множества тел. Можно привести примеры таких множеств тел, на которых транзитивизация $\hat{\omega}_1$ отношения идиоморфизма ω_1 по некоторым операторам обладает свойствами рефлексивности и симметричности или антирефлексивности, асимметричности и связности.

Теорема 3. 4. Пусть на множестве тел M в трехмерном евклидовом пространстве R^3 транзитивизация $\hat{\omega}_1$ отношения идиоморфизма ω_1 (по некоторому оператору ψ) обладает свойствами асимметричности и связности, т. е. для множества тел M в R^3 выполняется условие

$$(\forall A_i \in M)(\forall A_j \in M)\left[(A_i \neq A_j) \rightarrow (A_i \hat{\omega}_1 A_j) \vee \vee (A_j \hat{\omega}_1 A_i\right),$$

где $(A_i \hat{\omega}_1 A_j) \vee \vee (A_j \hat{\omega}_1 A_i)$ означает либо $A_i \hat{\omega}_1 A_j$, либо $A_j \hat{\omega}_1 A_i$ ($\vee\vee$ — знак дизъюнкции в исключающем смысле). Тогда существует единственная такая нумерация тел множества $M = \{A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_k\}$, при которой если номер j тела A_j больше номера i тела A_i на один (т. е. если $j = i + 1$, $j = 1,2, \ldots, k$; $i = 1,2, \ldots, k-1$), то A_i идиоморфно относительно A_j $(A_i \omega_1 A_j)$.

Доказательство. В теории бинарных отношений доказана теорема, согласно которой, если некоторое отношение асимметрично, то оно антирефлексивно (Шрейдер, 1971, стр. 40, теорема 1. 2). По условию теоремы 3.4 отношение $\hat{\omega}_1$ на M асимметрично. Следовательно, оно антирефлексивно.

Таким образом, отношение $\hat{\omega}_1$ на множестве M по условию теоремы обладает свойствами антирефлексивности, асимметричности и связности, а по определению $\hat{\omega}_1$ оно также транзитивно, т. е. отношение ω_1 на множестве M — совершенный строгий порядок. Следовательно, в соответствии с известной теоремой теории бинарных отношений о совершенном строгом порядке на множестве M можно выбрать такую нумерацию $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, что $A_i \hat{\omega}_1 A_j$ тогда и только тогда, когда $i < j$.

Теперь покажем, что эта нумерация обладает также свойством, о котором говорится в теореме 3.4. Выберем два тела со смежными номерами — A_i и A_{i+1}, $i = 1,2, \ldots, k-1$. Поскольку $A_i \hat{\omega}_1 A_j$, то либо существует кортеж $< A_i, A_{l_1}, \ldots, A_{l_n}, A_{i+1} >$, такой, что $A_i \omega_1 A_{l_1}$, $A_{l_1} \omega_1 A_{l_2}, \ldots, A_{l_n} \omega_1 A_j$ $(n \geqslant 1)$, либо $A_i \omega_1 A_{i+1}$. Допустим, что имеет место первый случай. Составим последовательность $< A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{l_1}, A_{l_2}, \ldots, A_{l_n}, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_k >$. Очевидно, что число элементов в этой последовательности больше k. Следовательно, некоторые тела вошли в нее больше одного раза (так как число тел множества M равно k). Тогда существует последовательность $< A_j A_{q_1}, \ldots, A_{q_m}, A_j >$, такая, что $A_j \hat{\omega}_1 A_j$. Это противоречит условию антирефлексивности отношения $\hat{\omega}_1$ на множестве M. Поэтому остается допустить, что имеет место второй случай, т.е. $A_i \omega_1 A_{i+1}$. Очевидно, эти рассуждения справедливы для всех $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Теорема доказана.

Определение 3.6. Множество тел M в трехмерном евклидовом пространстве R^3 назовем множеством тел совершенно строго упорядоченным по отношению идиоморфизма ω_1, если существует единственная нумерация тел множества $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, такая, что если номер i тела A_i больше номера j тела A_j на один, то A_i идиоморфно относительно A_j. Если множество тел M совершенно строго упорядочено по отношению идиоморфизма, то согласно теореме 3.4 граф транзитивизации идиоморфизма $\left(\text{также и ксеноморфизма } \omega_1^{-1}\right)$ имеет вид, показанный на рис. 2.

В качестве примера системы геологических тел, геометрическая модель которой является множеством тел в R^3, совершенно строго упорядоченным по отношению идиоморфизма ω_1, можно привести множество даек, последовательно пересекающих друг друга, или совокупность зерен породы, каждое из которых идиоморфно относительно другого.

Теорема 3.4 означает, что для того, чтобы произвольное множество тел M в R^3 было множеством тел, совершенно строго упорядоченным по отношению идиоморфизма ω_1, достаточно, чтобы любая пара различных тел $\langle A_i, A_j \rangle$; $A_i, A_j \in M$, $A_i \neq A_j$ входила в некоторую цепочку тел $\langle A_i, A_{l_1}, \ldots, A_{l_n}, A_j \rangle$, такую, что каждое тело в ней находилось бы в отношении идиоморфизма к соседнему справа телу, или же, чтобы каждое тело находилось в этом отношении к соседнему слева телу, но, чтобы ни для какой пары одновременно эти два случая не имели места.

§ 4. Математические модели и свойства структур с отношениями эквивалентности

Рассмотрим структуры, возникающие в том случае, когда некоторые части геологического объекта можно считать эквивалентными в том или ином смысле. Например, зерна одного минерала в образце некоторой породы эквивалентны в том смысле, что они являются зернами одного и того же минерала. Зерна пород могут быть эквивалентными не только по составу, но и по геометрическим признакам — форме, размерам и т. п. Аналогично можно рассматривать эквивалентность геологических тел, сложенных породами, по тем или иным признакам — вещественным, геометрическим, возрастным, фациальным, генетическим.

Хотя вещественные свойства отдельных частей геологического объекта, как выше было указано, не относятся к структурным, однако они связаны со строением объекта, так как по ним выделяются однородные его участки. Поэтому мы будем рассматривать структуры, порождаемые отношением эквивалентности между составными частями геологического объекта по произвольному признаку. Основные математические свойства этих структур обусловлены свойствами отношения эквивалентности — рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью.

Используя известную теорему теории множеств о разбиениях множества на классы эквивалентности и сопряженных с ними отношениях эквивалентности (Шиханович, 1965; Шрейдер, 1971 и др.) можно показать, что если на множестве составных частей обьекта задано некоторое отношение эквивалентности, то эти составные части разбиваются на классы эквивалентности. Например, если отношение эквивалентности на множестве зерен образца некоторой породы определено так, что любые два зерна, относящиеся к одному и тому же минералу эквивалентны, то множество зерен разбивается на классы эквивалентности — на подмножества зерен отдельных минералов.

Структуры с отношениями эквивалентности чаще всего возникают в случаях, когда геологический объект разбивается на однородные по некоторым признакам участки (участки, сложенные одним и тем же минералом, одной и той же породой и т. п.), т. е. представляет собой совокупность частей, выделенных по некоторой системе признаков. В связи с этим ниже мы кратко рассмотрим вопросы выделения геологических тел, как совокупностей точек, в которых присутствуют те или иные признаки, и соответствия между системами геологических тел и системами геологических признаков.

Пусть D—замкнутая область в трехмерном евклидовом пространстве R^3; $\{u_1(p),\ u_2(p),\ \ldots,\ u_m(p)\}$ — совокупность функций, называемых далее признаками, таких, что для любой точки $p \in D$ либо $u_l(p) = 1$, либо $u_l(p) = 0$ ($l = 1,2,\ \ldots,\ m$). Будем говорить, что признак $u_l(p)$ присутствует в точке p, если $u_l(p) = 1$ и отсутствует в точке p, если $u_l(p) = 0$. Подмножество всех точек области D, для которых $u_l(p) = 1$, обозначим через D_l ($u_l(p)$, очевидно, — характеристическая функция множества точек D_l).

Мы говорим, что в замкнутой области D задана система признаков $\{u_1(p),\ u_2(p),\ \ldots,\ u_m(p)\}$, если выполнены условия: 1) $\bigcup\limits_{l=1}^{M} D_l = D$; 2) пересечение $D_l \cap D_r$ ($l,\ r = 1,2,\ \ldots,\ m$; $l \neq r$) есть либо пустое множество, либо непустое множество точек в R^3, объем которого равен нулю.

Рассмотрим случай, когда D_l есть объединение k связных областей $A_{l1}, A_{l2},\ \ldots,\ A_{lk}$, удовлетворяющих условиям

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_{li} = D_l,\ A_{li} \cap A_{lj} = \varnothing,\ i,\ j = 1,2,\ \dots,\ k,\ i \neq j.$$

Область A_{li} и множество областей $\{A_{l1}, A_{l2}, \dots, A_{lk}\}$ назовем телом и множеством тел, выделенными по признаку u_l, а множество областей $\{A_{l_i}\}$, $l = 1,2, \dots, m$; $i = 1,2, \dots, k$ — множеством тел, выделенным по системе признаков $\{u_l\}$, $l = 1,2, \dots, m$.

Пример системы признаков — совокупность минералов, из которых состоит образец данной породы. В каждой точке внутри образца, за исключением точек граничных поверхностей, присутствует один и только один из минералов, слагающих породу. Каждому признаку соответствует система зерен одного минерала, системе признаков — система зерен всех минералов в данном образце.

В качестве примера системы признаков из другой области геологии можно привести совокупность пород, выделенных в некотором участке земной коры. В этом случае каждому признаку соответствует система геологических тел, сложенных одной породой, системе признаков — система всех геологических тел, слагающих данный участок. В каждой точке внутри данного участка, за исключением точек граничных поверхностей, присутствует только одна из пород, слагающих данный участок.

Понятие системы геологических признаков, понимаемое в указанном выше смысле, является исключительно общим. Это связано с тем, что от любой совокупности признаков, определенных в точках некоторой области, можно перейти с помощью определенных процедур к некоторой системе признаков. Эти процедуры сводятся к следующим.

Если в некоторых точках заданной области D присутствуют одновременно признаки $u_1, u_2, \dots, u_m$, то можно перейти к новому признаку, определенному следующим образом: признак u выполнен тогда и только тогда, когда одновременно выполнены признаки $u_1, u_2, \dots, u_m$. Например, признаки «наличие известняков» и «наличие пород карбонового возраста» могут отмечаться одновременно в одной и той же точке (совместимы). Из этих двух признаков мы можем перейти к одному новому признаку — «наличие карбоновых известняков».

Если в некоторых точках области D не присутствует ни один признак из заданной совокупности признаков, то можно определить признак, который выполняется тогда и только тогда, когда не выполняются ни один из признаков этой совокупности. Приведем пример. В точках внутри пор в образце некоторой породы не присутствует ни один из минералов, из которых состоит данная порода. Отсутствие минералов формально можно рассматривать как новый признак. Совокупность минералов, из которых состоит эта порода, вместе с этим новым признаком образует систему признаков.

Вводя указанным способам новые признаки из любой заданной совокупности признаков можно перейти к системе признаков, таких, что в каждой точке области D, за исключением граничных поверхностей, присутствует один и только один из признаков данной системы.

Системы геологических тел, выделенных по системе признаков обладают рядом особенностей. Поскольку каждое тело в ней выделяется ограничением связного множества точек, в которых присутствует некоторый признак, то любые два тела, в точках которых присутствует один и тот же признак, не имеют общих границ (изолированы) и в любых двух контактирующих телах присутствуют разные признаки.

Таким образом, каждому геологическому признаку, заданному в точках некоторой области, в общем случае соответствует множество тел, в точках которых присутствует данный признак. Поэтому изучение отношений между геологическими признаками, заданными в точках некоторой области, можно свести к исследованию отношений между множествами геологических тел, выделенными по этим признакам.

Ниже мы попытаемся разобрать математические модели, соответствующие изложенным представлениям.

Сначала рассмотрим математические модели, соответствующие в общем широко применяемым в геологии процедурам объединения тел некоторого множества и расчленения отдельных тел. Эти процедуры непосредственно связаны с изложенными выше способами перехода из одной совокупности признаков к другой. Примерами процедур расчленения тел могут быть выделение отдельных минералов в образце породы, расчленение некоторой толщи осадочных пород на слои, расчленение интрузивного массива на тела отдельных разновидностей пород и т. п. Примерами процедур объединения тел могут быть переход от системы зерен минералов к телам, сложенным породами; объединение участков породы, обладающих некоторым общим признаком; переход от крупномасштабных карт к более мелкомасштабной сводной карте; переход от карты, на которой выделены отдельные типы пород, к карте, на которой выделены отдельные формации пород и т. п.

Пусть M — некоторое множество тел в трехмерном евклидовом пространстве R^3, выделенных по произвольной совокупности признаков. Из этого множества тел M, называемого далее исходным, получим множество тел M^-, называемое далее производным, по следующей процедуре.

Из исходного множества тел M выберем одно тело. Если это тело «не пересекается» поверхностями других тел исходного множества на отдельные части (т. е. оно не находится в отношении совместимости ни к одному телу множества M), то «введем» его в производное множество тел M^-; если же оно «пересекается» на n отдельных частей, то в производное множество M^- «введем» каждую из этих частей как самостоятельное тело. Последовательно будем выбирать тела из исходного множества тел M и для каждого из них будем применять указанную процедуру. В результате получим производное множество тел M^{-}, связанное определенным образом с исходным множеством M. Если среди тел множества M не имеются такие, которые находятся в отношении совместимости, то исходное множество M и полученное из него указанным способом производное множество M^{-} совпадают. Сформулируем более строго описанную процедуру.

Пусть $M = \{A_i\}$, $i = 1,2, \ldots, k$ — произвольное множество тел в трехмерном евклидовом пространстве. Обозначим через $M^{-} = \left\{A_l'\right\}$, $l = 1,2, \ldots, m$; $(m \geqslant k)$, наибольшее по числу тел множество тел удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\bigcup\limits_{l=1}^{m} A_l' = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$,

2) любое тело $A_l' \in M^{-}$ совпадает с некоторым телом или с пересечением некоторых тел множества M,

3) любые два различных тела множества M^{-} не находятся в отношении совместимости

$$\left(\forall A_l' \in M^{-}\right)\left(\forall A_t' \in M^{-}\right)\left[\left(\quad A_l' \neq A_t' \right) \rightarrow \left(A_l' \,\overline{\gamma}\, A_t'\right)\right.$$

Можно показать, что для любого множества тел M в трехмерном евклидовом пространстве существует только одно множество тел M^{-}, удовлетворяющее перечисленным условиям.

Пусть H_0 — совокупность (система*) всех множеств тел в трехмерном евклидовом пространстве R^3. Определим оператор F^{-}, который назовем оператором расчленения, как отображение, ставящее каждому множеству тел $M \in H_0$ в соответствие одно множество тел $M^{-} \in H_0$, связанное с M указанными выше условиями. Символ $F^{-}(M)$ будет означать результат действия оператора F^{-} на множество тел M.

$$F^{-}(M) = M^{-}.$$

Рассмотрим теперь процедуру объединения тел. Пусть M — некоторое исходное множество тел в R^3, выделенных по произвольной совокупности признаков. Перейдем от этого множества к производному множеству тел M^{+} по следующей процедуре. Последовательно будем выбирать тела из исходного множества M. Если выбранное тело изолировано от других тел этого множества «введем» его в производное множество M^{+}, если же оно входит в некоторое подмножество неизолированных тел исходного множества M, то совокупность всех точек, принадлежащих телам этого подмножества, введем в производное множество M^{+} как одно тело.

* Множества, элементами которых являются множества, можно назвать системой множеств (Шиханович, 1965).

В частном случае когда исходное множество M есть множество изолированных тел (по определению 2. 1), то исходное M и производное M^+ множества совпадают. Более строго процедуру объединения можно сформулировать следующим образом.

Пусть $M = \{A_i\}$, $i = 1,2, \ldots, k$; $k \geqslant 2$, — произвольное множество тел в трехмерном евклидовом пространстве R^3. Наименьшее по числу тел множество тел $\left\{A_l^{''}\right\}$, $l = 1,2, \ldots, m$, удовлетворяющее условию

$$\bigcup_{l=1}^{m} A_l^{''} = \bigcup_{i=1}^{k} A_i,$$

обозначим через M^+. Очевидно, что для любого множества тел $M \in H_0$, существует одно и только одно множество тел $M^+ \in H_0$, отвечающее указанным требованиям. Отображение, которое каждому множеству тел $M \in H_0$ ставит в соответствие одно множество тел $M^+ = \left\{A_l^{''}\right\}$, будем называть оператором объединения и обозначать через F^+ —

$$F^+(M) = M^+.$$

Оператор объединения F^+ является в некотором смысле обратным оператору расчленения F^-.

Рассмотрим свойства выделенных в § 2 классов множеств тел, связанные с введенными операторами. Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

1. Если M — множество изолированных тел, то множества $F^-(M)$ и $F^+(M)$, полученные из M операциями расчленения и объединения, совпадают с исходным множеством M, т. е.

$$(\alpha_M = \theta_M \setminus E_M) \rightarrow \left[\left(M^- = M\right) \wedge \left(M^+ = M\right)\right], \tag{4.1}$$

где M — произвольное множество тел,

$$M^- = F^-(M),\ M^+ = F^+(M).$$

2. Если M — множество неизолированных тел, то множество тел M^+, полученное из M операцией объединения F^+, состоит из одного тела, совпадающего с объединением $\bigcup\limits_{A_l \in M} A_l$ всех тел множества M.

Используя лемму 2.1, это утверждение можно записать в следующем виде:

$$\left(\overset{\wedge}{\alpha}_M = \theta_M\right) \rightarrow (M^+ = \{D\}), \tag{4.2}$$

где $\{D\}$ — множество, которому принадлежит только одно тело D

$$D = \bigcup_{A_l \in M} A_l,\ M^+ = F^+(M).$$

3. Если M — множество соприкасающихся тел, то $F^{-}(M)$, полученное из M операцией расчленения совпадает с исходным множеством тел M.

Используя определение 2. 3 и теорему 2. 1, это утверждение можно представить в виде

$$[(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D) \wedge (\gamma_M = E_M)] \vee [(\hat{\beta}_M = \theta_M) \wedge (\beta_M \cup \alpha_M = \\ = \theta_M \setminus E_M)] \rightarrow [M = F^{+}(M)]. \tag{4.3}$$

Высказывание, сформулированное аналогичным образом для множества совмещающихся тел, было бы ложным.

4. Для любого множества тел M

$$\gamma_{M^-} = E_{M^-}, \tag{4.4}$$

где $M^- = F^-(M)$.

Поясним это важное свойство оператора расчленения F^-, вытекающее из его определения.

Пусть M такое множество тел, что отношение совместимости γ_M не равно отношению равенства E_M на этом множестве. Это означает (с учетом рефлексивности отношения γ_M), что существует хотя бы одна пара различных тел $<A_i, A_j>$, $A_i \neq A_j$, для которой выполнено отношение совместимости — $A_i \gamma_M A_j$. В частном случае M есть множество совмещающихся тел. Операцией расчленения F^- из M будет получено множество тел $M^- = F^-(M)$ такое, что отношение совместимости γ_{M^-} на множестве M^- равно отношению равенства $\gamma_{M^-} = E_{M^-}$, т.е. оно не выполнено ни для какой пары **различных** тел этого множества. Чтобы обратно получить исходное множество, достаточно знать какие из тел производного множества F^- нужно объединить (для каких подмножеств M_r^-, $r = 1,2, \ldots, m$, производного множества M^- применить операцию объединения). Следовательно, если задано производное множество M^- и его подмножества M_r^-, $r = 1,2, \ldots, m$, то тем самым определено исходное множество M, т. е. задание кортежа $<M^-, M_1^-, M_2^-, \ldots, M_m^->$ равносильно заданию исходного множества M. Однако производное множество тел $F^-(M)$ „проще", чем исходное множество тел M в том смысле, что различные тела производного множества находятся либо в отношении изолированности, либо контактирования, но не в отношении совместимости. Говоря не строго, применив оператор расчленения мы можем избежать рассмотрения отношения совместимости*.

* Анализ некоторых геологических методов приводит к выводу, что очень часто в геологии применяются процедуры, соответствующие введенному выше оператору расчленения с целью упрощения в указанном смысле.

Определение 4. 1. Множество тел M в трехмерном евклидовом пространстве R^3 будем называть множеством несовмещающих тел, если отношение совместимости γ на этом множестве равно отношению равенства $\gamma_M = E_M$ (т. е. если отношение совместимости не выполнено для любых двух р а з л и ч н ы х тел этого множества).

Используя введенный термин, описанное выше свойство оператора расчленения F^- можно сформулировать следующим образом: результат применения оператора расчленения F^- к любому исходному множеству тел в R^3 есть множество несовмещающихся тел.

Оператор расчленения в содержательном смысле соответствует переходу от системы тел, выделенных по произвольной совокупности признаков, к системе тел, выделенных по совокупности несовместимых признаков.

Таким образом, изучение системы геологических тел, выделенных по любой совокупности признаков, формально можно свести к изучению системы тел, выделенных по системе признаков. Ниже рассмотрены некоторые математические свойства структур подобных систем тел.

Во главе 2 мы рассматривали отношения, определенные на одном множестве вида, $\varphi_M = <\Phi, M>$, где $\Phi \subseteq M^2$. В более общем случае бинарное отношение представляет собой кортеж, компонентами которого являются три различных множества—

$$\varphi_{M_l M_t} = <\Phi,\ M_l,\ M_t>,$$

где $\Phi \subseteq M_l \times M_t$, $M_l \times M_t$ — декартовое произведение множеств M_l и M_t (множество всех упорядоченных пар вида $<x_l, x_t>$, где $x_l \in M_l$, $x_t \in M_t$). В частном случае, когда $M_l = M_t = M$ и $\varphi_{M,M} = <\Phi, M, M>$, получается отношение на множестве тел M, т. е. $\varphi_{M,M} \overset{Df}{=} \varphi_M = <\Phi,\ M>$.

Очевидно, что все введенные выше определения бинарных отношений автоматически переносятся на случай отношений между двумя множествами тел. В этом общем случае вместо введенных выше обозначений отношений, имеющих вид

φ_M, будем писать φ_{M_l, M_t} $\left(\alpha_{M_l, M_t}, \beta_{M_l, M_t}\ \gamma_{M_l M_t}\right.$ и т. д.$\left.\right)$

Используя введенные в главе 2, бинарные отношения между телами, определим теперь некоторые бинарные отношения на множествах, элементами которых являются множества тел, т. е. отношения в системе $H = \{M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n\}$ множеств тел в трехмерном евклидовом пространстве R^3. В частном случае система H множеств тел совпадает с фактор-множеством M/ε множества тел M по некоторой эквивалентности ε.

Необходимость введения отношений на множествах, элементами которых являются множества тел, наряду с отношениями на самих множествах тел вызвана следующими обстоятельствами. Выше было отмечено, что в общем случае каждому множеству тел соответствует один признак, по которому выделены тела этого множества. Поэтому отношения на множествах, элементами которых являются множества тел, в сущности характеризуют отношения между признаками, по которым выделяются геологические тела. Проиллюстрируем это на примере интрузивных пород. Множество зерен образца или шлифа некоторой интрузивной породы разбивается на подмножества зерен отдельных минералов или генераций минералов (в случае, когда имеются минералы, кристаллизовавшиеся в несколько стадий). Изучая отношения идиоморфизма и ксеноморфизма между зернами разных минералов, устанавливаются некоторые отношения между самими минералами, слагающими данную породу. Из этого примера видно, что отношения на множествах, элементами которых являются множества тел, можно определить через отношения между телами. В принципе для описания структур можно было бы ограничиться введенными в гл. 1 бинарными отношениями на множествах тел, не переходя к отношениям в системе множеств тел. Однако такой переход существенно упрощает формулировки некоторых утверждений и как видно из приведенного выше примера оправдан содержательно.

Определение 4.2. Пусть $H = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ — произвольное множество (система), элементами которого являются множества тел $M_l = \{A_{l1}, A_{l2}, \ldots, A_{lk}\}$, $l = 1, 2, \ldots, r$, в трехмерном евклидовом пространстве R^3. Будем говорить, что для упорядоченной пары множеств тел $\langle M_l, M_t \rangle$ выполнено

обобщенное отношение изолированности α^*, если

$$\alpha_{M_l, M_t} = \theta_{M_l, M_t};$$

обобщенное отношение соприкосновения β^*, если

$$\beta_{M_l, M_t} \neq O_{M_l, M_t}, \quad \bar{\alpha}_{M_l, M_t} \setminus \beta_{M_l, M_t} = O_{M_l, M_t};$$

обобщенное отношение контактирования σ^*, если

$$\sigma_{M_l, M_t} \neq O_{M_l, M_t}, \quad \bar{\alpha}_{M_l, M_t} \setminus \sigma_{M_l, M_t} = O_{M_l, M_t};$$

обобщенное отношение совместимости γ^*, если

$$\gamma_{M_l, M_t} \neq O_{M_l M_t}, \quad \bar{\alpha}_{M_l, M_t} \setminus \gamma_{M_l, M_t} = O_{M_l, M_t};$$

обобщенное отношение идиоморфизма ω_1^* по оператору ψ, если для отношения идиоморфизма ω_{1, M_l, M_t} по данному оператору ψ выполняются условия

$$\omega_{1,\, M_l,\, M_t} \neq O_{M_l,\, M_t},\ \overline{\alpha}_{M_l,\, M_t} \setminus \omega_{1,\, M_l,\, M_t} = O_{M_l,\, M_t};$$

и будем писать соответственно

$$M_l \alpha^* M_t,\ M_l \beta^* M_t,\ M_l \sigma^* M_t,\ M_l \gamma^* M_t,\ M_l \omega_1^* M_t.$$

Определение 4.3. Фактор-множество $M/\varepsilon = \{M_1 M_2, \ldots, M_n\}$ множества тел M в R^3 по эквивалентности ε будем называть разбиением множества соприкасающихся (контактирующих) тел на классы изолированных тел, если M есть множество соприкасающихся (контактирующих) тел (по определениям 2.4 и 2.5) и каждый из классов эквивалентности $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — множество изолированных тел, т.е.

$$\alpha_{M_l} = \theta_{M_l} \setminus E_{M_l},\ l = 1, 2, \ldots, n.$$

Из определений 4.2 и 4.3 непосредственно следует справедливость следующего утверждения: если фактор-множество $M/\varepsilon = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ — разбиение множества соприкасающихся (контактирующих) тел на классы изолированных тел, то обобщенное отношение соприкосновения β^* (соответственно, контактирования σ^*) на фактор-множестве M/ε не равно пустому отношению. Если пустое отношение и обобщенные отношения соприкосновения и контактирования на фактор-множестве M/ε обозначить соответственно через $O^*_{M/\varepsilon}$, $\beta^*_{M/\varepsilon}$, $\sigma^*_{M/\varepsilon}$, то это утверждение можно записать в следующем виде:

$$\beta^*_{M/\varepsilon} \neq O^*_{M/\varepsilon},\ \sigma^*_{M/\varepsilon} \neq O^*_{M/\varepsilon}.$$

Теорема 4.1. Фактор-множество $M/\varepsilon = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ множества тел M в R^3 по произвольной эквивалентности ε является разбиением множества соприкасающихся тел на классы изолированных тел тогда и только тогда, когда транзитивизация $\widehat{\overline{\varepsilon}_M \cap \beta_M}$ пересечения отношений неэквивалентности $\overline{\varepsilon}_M$ и соприкосновения β_M равна полному отношению и для любых двух различных тел выполнены отношения соприкосновения β_M и неэквивалентности $\overline{\varepsilon}_M$, или отношение изолированности α_M.

Использовав определение 2.4 и 4.3, теорему 4.1 можно представить в следующей форме:

$$\Big(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D\Big) \wedge (\gamma_M = E_M) \wedge (\varepsilon_M \setminus E_M \subseteq \alpha_M) \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows \Big\{\Big(\widehat{\beta_M \cap \overline{\varepsilon}} = \theta_M\Big) \wedge [(\beta_M \cap \overline{\varepsilon}_M) \cup \alpha_M = \theta_M \setminus E_M]\Big\}, \quad (4.5)$$

где D — некоторая связная область в R^3.

В левой части эквиваленции (4.5) условие теоремы, состоящее в том, что $M/\varepsilon=\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ является разбиением на классы изолированных тел, записана в виде включения

$$\varepsilon_M \setminus E_M \subseteq \alpha_M, \tag{4.6}$$

которое словесно можно изложить так: для любых двух различных тел A_i, $A_j \in M$, $A_i \neq A_j$ из того, что они принадлежат одному классу эквивалентности, следует, что они изолированы.

Доказательство. Сначала докажем, что истинность высказывания в левой части эквиваленции (4. 5) влечет истинность высказывания в правой ее части. Из выражения (4.6) непосредственно следует, что

$$\overline{\alpha}_M \setminus E_M \subseteq \overline{\varepsilon}_M. \tag{4.7}$$

Поскольку для данного множества тел $\gamma_M = E_M$, то на основании равенства (2.3) можно написать $\beta_M = \overline{\alpha}_M \setminus E_M$ и с учетом (4.7) $\beta_M \subseteq \overline{\varepsilon}_M$. Следовательно,

$$\beta_M \cap \overline{\varepsilon}_M = \beta_M. \tag{4.8}$$

Так как по условию теоремы M—множество контактирующих тел, то для него справедлива эквиваленция (2.9). Высказывание в правой части эквиваленции (4.5) получим, подставив (на основании (4.8) вместо β_M в правую часть (2.9) $\beta_M \cap \overline{\varepsilon}^M$.

Допустим теперь, что высказывание в правой части эквиваленции (4.5) истинно. Докажем, что тогда истинно высказывание в левой части (4.5). Для произвольного множества тел выполняется включение $\beta \cap \overline{\varepsilon} \subseteq \beta$. Учитывая это из равенств в правой части (4.5) получим $\hat{\beta}_M = \theta_M$ и $\beta_M \cup \alpha_M = \theta_M \setminus E_M$.

Отсюда на основании эквиваленции (2.9) заключаем, что $\bigcup\limits_{A_i \in M} A_i = D$ и $\gamma_M = E_M$. Второе равенство в правой части (4.5) означает, что любые два различных тела из множества M изолированы или соприкасаются и неэквивалентны. Отсюда следует, что если два различных тела из M эквивалентны, то они изолированы, т. е. $\varepsilon_M \setminus E_M \subseteq \alpha_M$. Теорема доказана.

Теорема 4. 1. означает, что, если множество соприкасающихся тел разбито на классы изолированных тел, то любая пара тел входит в некоторую цепочку, в которой соседние тела соприкасаются и относятся к разным классам. При этом для любых двух различных тел выполнено отношение соприкосновения β и принадлежности к разным классам $\overline{\varepsilon}$ или отношение изолированности α. Справедливо также обратное этому утверждение.

Аналогичным образом можно доказать истинность следующей эквиваленции для случая разбиения множества контактирующих тел на классы изолированных тел:

$$\left[\left(\bigcup_{A_i \in M} A_i = D\right) \wedge \left(\overline{\alpha}_M \setminus \sigma_M = E_M\right) \wedge \left(\varepsilon_M \setminus E_M \subseteq \alpha_M\right)\right] \rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows \left\{\left(\sigma_M \mathbin{\widehat{\cap}} \overline{\varepsilon}_M = \theta_M\right) \wedge \left[\left(\sigma_M \cap \overline{\varepsilon}_M\right) \cup \alpha_M = \theta_M \setminus E_M\right]\right\}. \quad (4.9)$$

Если множество тел M выделено по системе признаков $\{u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_m\}$, подмножества M_l, $l = 1, 2, \ldots, m$ множества M — по отдельным признакам этой системы способом, изложенным в начале данного параграфа, то:

1. M — множество соприкасающихся тел (по определению 2.4);

2. $\{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$ есть разбиение множества соприкасающихся тел на классы изолированных тел (по определению 4.2).

Справедливость первого утверждения можно обосновать следующим образом. Из способа выделения множества тел M по системе признаков имеем

$$\bigcup_{A_{li} \in M} A_{li} = D,$$

где D — связная область в R^3;

$$\alpha_M \cup \beta_M = \theta_M \setminus E_M$$

(для любой пары различных тел A_{li}, $A_{tj} \in M$, $A_{li} \neq A_{tj}$ выполняется отношение соприкосновения β или отношение изолированности α).

Следовательно, $\gamma_M = E_M$ и M есть множество соприкасающихся тел.

Справедливость утверждения о том, что $\{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$ есть разбиение множества M на подмножества (классы) изолированных тел также непосредственно вытекает из способа выделения тел подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_m$ множества M. Таким образом, для любого множества тел M, выделенного по системе признаков, применимы теоремы 2.1 и 4.1.

Отсюда, в частности, следует, что если множества тел M выделено по системе признаков $\{u_l\}$ (т. е. если оно получено указанным выше способом), то для любой пары тел A_{li}, $A_{tj} \in M$ этого множества существует цепочка тел $< A_{li}, A_{q_1 s_1}, A_{q_2 s_2}, \ldots$ $\ldots, A_{q_n s_n}, A_{tj} >$, такая, что любые два соседних тела в этой цепочке контактируют и соответствуют разным признакам (выделены по разным признакам). Кроме этого, любые два различных тела A_{li}, $A_{tj} \in M$, $A_{li} \neq A_{tj}$, соприкасаются или изолированы. Наоборот, если на множестве тел M, выделенному по совокупности признаков $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, транзитивизация $\widehat{\beta_M \cap \bar{\varepsilon}_M}$ отношения соприкосновения и вхождения в подмножества тел, соответствующие разным признакам, равно полному отношению $\left(\widehat{\beta_M \cap \bar{\varepsilon}_M} = \theta_M\right)$ и для любой пары различных тел $A_{li}, A_{tj} \in M$, $A_{li} \neq A_{tj}$ выполняется отношение контактирования и принадлежности к разным подмножествам $\beta_M \cap \bar{\varepsilon}_M$ или отношение изолированности α_M, т. е.

$$\left(\beta_M \cap \bar{\varepsilon}_M\right) \cup \alpha_M = \theta_M \setminus E_M,$$

то совокупность $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ является системой признаков. По другому: для того, чтобы эта совокупность была системой признаков необходимо и достаточно выполнения двух условий

$$\widehat{\beta_M \cap \bar{\varepsilon}_M} = \theta_M, \quad \left(\beta_M \cap \bar{\varepsilon}_M\right) \cup \alpha_M = \theta_M \setminus E_M.$$

Таким образом, теоремы 2. 1 и 4, 1 раскрывают математические свойства широко распространенных структур геологических объектов, возникающих при выделении совокупностей тел по системам признаков.

Рассмотрим теперь структуры с отношениями эквивалентности и идиоморфизма.

Лемма 4.1. Пусть фактормножество M/ε множества тел M по произвольной эквивалентности ε удовлетворяет следующим условиям:

$$\varepsilon_M \setminus E_M \subseteq \overline{\omega_{1,M} \cup \omega_{1,M}^{-1}} \tag{4.10}$$

$$(\forall M_l \in M/\varepsilon)\,(\forall M_t \in M/\varepsilon)\left[(M_l \neq M_t) \to \left(M_l \hat{\omega}_1^* M_t\right) \vee\vee \right.$$
$$\left. \vee\vee \left(M_t \hat{\omega}_1^* M_l\right)\right], \tag{4.11}$$

где $\omega_{1,M}$ — отношение идиоморфизма на множестве M по некоторому оператору ψ;

ω_1^* — обобщенное отношение идиоморфизма на фактормножестве M/ε по оператору ψ;

$\vee\vee$ — знак дизъюнкции в исключающем смысле.

При выполнении условий (4.10) и (4.11) существует единственная такая нумерация $M/\varepsilon = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ классов эквивалентности, что если номер t класса M_t больше номера l класса M_l на один, т.е. если $t = l + 1$, $l = 1,2, \dots, m - 1$; $t = 2,3, \dots, m$, то M_l находится в отношении обобщенного идиоморфизма к M_t $\left(M_l \omega_1^* M_t\right)$. Истинность этого утверждения доказывается аналогично теореме 3.4. Условие (4.10) означает, что если тела A_i, $A_j \in M$, $A_i \neq A_j$ входят в один класс эквивалентности, то они не находятся в отношении идиоморфизма ω_1 или ксеноморфизма ω_1^{-1}. Условие (4.11) означает, что если классы эквивалентности M_l, $M_t \in M/\varepsilon$ не совпадают $(M_l \neq M_t)$, то для пары $< M_l, M_t >$ или $< M_t, M_l >$ выполнена транзитивизация $\hat{\omega}_1^*$ обобщенного отношения идиоморфизма, т. е. $\hat{\omega}_1^*$ обладает свойством связности и асимметричности.

Лемму 4. 1 можно использовать, в частности, для определения условий, необходимых для упорядочения совокупностей геологических тел по возрасту и минералов или генераций минералов в интрузивной породе по степени идиоморфизма. В этом случае классам эквивалентности M_1, $M_2, \ldots, M_n$ соответствуют совокупности одновозрастных геологических тел, отдельные минералы или генерации минералов.

§ 5. О строгом описании и сопоставлении геологических структур

Из предыдущих параграфов данной главы видно, что основные типы структур геологических объектов, определяемых через геометрические отношения между их составными частями, математически можно описывать через введенные в главе 1 бинарные отношения между телами.

Можно выделить два способа математического описания структур указанного класса — детерминированный и вероятностный (или статистический). В детерминированном способе описания фиксируются все отношения между всеми составными частями геологического объекта. Поскольку каждое бинарное отношение можно представить в виде матрицы или графа, то описание структуры этим способом будет представлять собой некоторую совокупность матриц или графов. При вероятностном (статистическом) способе описания структур геологических объектов фиксируются усредненные характеристики: доли пар тел, для которых выполнены те или иные наблюдаемые отношения, коэффициенты, характеризующие статистические зависимости отношений и т. п. Эти характеристики можно оценивать из детерминированного описания породы или же по выборкам структурных отношений между составными частями, получаемыми непосредственно из геологического объекта. Вероятностное описание, очевидно, удобно применять к тем геологическим объектам, в которых выделяется достаточно большое число составных частей. К таким геологическим объектам, в частности, относятся горные породы и руды.

Математическое описание геологических структур позволяет сопоставлять (сравнивать) их с достаточной строгостью. Сопоставление структур геологических объектов по геометрическим свойствам отдельных составных частей (например, их размерам) больших трудностей не вызывает (если эти свойства определены достаточно точно). Труднее строго сопоставлять структуры, определяемые через геометрические отношения между составными частями. Ниже мы попытаемся эксплицировать понятия сходства и эквивалентности подобных структур.

Пусть L_1 и L_2 — две системы геологических тел (в частном случае — системы однородных частей двух геологических объектов); M_1 и M_2 — геометрические модели систем геологических тел L_1 и L_2, т. е. множества тел в трехмерном пространстве R^3, совпадающие с L_1 и L_2 по всем геометрическим свойствам.

Мы говорим, что системы геологических тел L_1 и L_2 (или соответствующие им геологические объекты) имеют одинаковую структуру по отношениям $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, если $\theta_{M_1} \setminus E_{M_1} \subseteq \varphi_{l, M_1}$, $\theta_{M_2} \setminus E_{M_2} \subseteq \varphi_{l, M_2}$, $l = 1, 2, \ldots, m$, т. е. если эти отношения обязательно выполнены для любых двух различных тел каждого из множеств M_1 и M_2.

Мы говорим, что системы геологических тел L_1 и L_2 (или соответствующие им геологические объекты) имеют сходную структуру по отношениям $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, если $\varphi_{l, M_1} \neq O_{M_1}$, $\varphi_{l, M_2} \neq O_{M_2}$, $l = 1, 2, \ldots, m$, т. е. если для каждого из этих отношений существует хотя бы одна пара тел в каждом из множеств M_1 и M_2, для которой выполнено данное отношение.

Например, образцы пород с призматически зернистой структурой, структурно одинаковы по транзитивизации $\hat{\omega}_2$ отношения панидиоморфизма ω_2 (при соответствующем подборе оператора ψ, по которому устанавливается это отношение); два сложных геологических тела, понимаемых в соответствии с определением сложного геологического тела, данного в работах Косыгина (1974$_1$); Воронина и др. (1967), структурно одинаковы по транзитивизации $\hat{\beta}$ отношения соприкосновения β; образцы гранита и гранодиорита структурно сходны по объединению $\omega_1 \cup \omega_1^{-1}$ отношений идиоморфизма ω_1 и ксеноморфизма ω_1^{-1} (при соответствующем подборе оператора ψ) и т. п.

Выводы

1. В математическом отношении составные части любого неоднородного геологического объекта можно рассматривать как некоторые тела, а сам неоднородный геологический объект — как систему тел. В такой системной интерпретации все свойства неоднородного геологического объекта могут быть представлены

через геометрические и вещественные (материальные) свойства ее составных частей и отношения между ними.

Для систематики геологических структур на математической основе предлагается два подхода, названные геометрическим и системным. В первом из них выделяются классы структур, сохраняющихся при преобразованиях точек пространства того или иного вида: преобразования подобия, аффинного, топологического преобразования и т. п. (т. е. инвариантных относительно преобразований данного вида). В системном подходе можно различать классы структур геологических объектов, выделяемые по форме составных частей, по относительным и абсолютным размерам составных частей, по геометрическим отношениям между составными частями. В последнем классе выделяются типы структур с отношениями эквивалентности, порядка, толерантности и с антирефлексивными и симметричными отношениями. Для каждого из этих типов структур построены математические модели и исследованы основные математические их свойства.

2. Структуры, порождаемые антирефлексивными и симметричными отношениями изолированности $\bar{\alpha}$, соприкосновения β и контактирования σ, а также рефлексивными и симметричными отношениями (толерантностями) неизолированности α и совместимости γ обладают рядом особенностей.

В частности, для них справедливо следующее утверждение: множество тел в трехмерном евклидовом пространстве является множеством соприкасающихся (контактирующихся, совмещающихся, по определениям 2.4, 2.5, 2.6) тел тогда и только тогда, когда на этом множестве транзитивизация отношения соприкосновения β (соответственно контактирования σ, совместимости γ) равна полному отношению и для любых двух различных тел выполнено отношение соприкосновения β (соответственно контактирования σ, совместимости γ) или изолированности α.

Из доказанной общей теоремы о нерефлексивных, симметричных и транзитивных отношениях на произвольном множестве (теорема 2.2), в частности, следует истинность следующего утверждения: если транзитивизация $\hat{\sigma}$ отношения контактирования σ на данном множестве тел M нерефлексивна, тогда множество M можно разбить на подмножества $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ таким образом, что в M_0 будут входить тела, не контактирующие с другими телами множества M; в любом из остальных подмножеств для всякой пары тел можно найти цепочку контактирующих тел, такую, что эти два тела являются крайними в цепочке. При этом для любых двух тел, входящих в разные подмножества, такая цепочка не существует.

3. Основным свойством структур с отношениями порядка — вмещающего контактирования σ_1, включения γ_2, вмещения η и транзитивизации $\hat{\omega}_1$ отношения идиоморфизма — является возможность упорядочения множества по этим отношениям. Свойст-

ва структур с отношениями порядка выражается, в частности, в следующих утверждениях.

Если множество тел M в трехмерном евклидовом пространстве такое, что для любых двух различных тел A_i, $A_j \in M$ либо A_i вмещает A_j, либо A_j вмещает A_i, то тела множества M можно пронумеровать так, что тело A_i вмещает тело A_j тогда и только тогда, когда номер тела A_i меньше номера тела A_j. Отсюда следует, что если множество тел M отвечает указанному условию, то существует одно тело (периферическое), вмещающее все тела множества M, и одно тело (центральное), вмещаемое всеми телами этого множества; каждое предыдущее по номеру тело вмещается всеми последующими телами. Если на множестве тел M объединение транзитивизаций отношений вмещающего контактирования и его инверсии выполнено для любых двух различных тел, то M является множеством контактирующих тел (по определению 2. 5) и множеством тел, совершенно строго упорядоченным по отношению вмещения (по определению 3. 1). Обратное этому утверждение справедливо в том случае, когда M— также плотное множество тел (по определению 2. 3).

Если множество тел M является множеством контактирующих тел, совершенно строго упорядоченным по отношению вмещения η, и плотным множеством тел (по определениям 2.3, 2.5 и 3.1), то: 1) тела множества $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ можно пронумеровать так, что A_i находится в отношении вмещающего контактирования σ_1 к телу A_{i-1} $(i = 2, 3, \ldots, k)$; 2) все тела, кроме центральной A_1, ограничены двумя замкнутыми поверхностями— внешней и внутренней; 3) внешняя поверхность тела A_{i-1}— совпадает с внутренней поверхностью тела A_i $(i = 2, 3, \ldots, k)$.

Если для любых двух тел множества M справедливо, что одно из них включает другое, то M — множество тел, совершенно строго упорядоченное по отношению вмещения η, и множество совмещающихся тел (по определениям 2. 6 и 3. 1).

Если множество тел M является плотным множеством контактирующих тел, состоящим из вмещаемых тел и одного вмещающего тела A_0 (по определению 3. 2), то тело A_0 находится в отношении вмещающего контактирования σ_1 к каждому из остальных тел множества M.

Пусть множество тел M такое, что на этом множестве транзитивизация $\hat{\omega}_1$ отношения идиоморфизма ω_1 обладает свойствами асимметричности и связности. Тогда существует единственная такая нумерация тел множества $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, при которой, если номер тела A_j больше номера тела A_i на один $(j=i+1)$, то A_i идиоморфно относительно A_j.

4. Большинство структур с отношениями эквивалентности возникает тогда, когда геологический объект разбивается на одно-

родные по некоторым признакам участки (сложенные одним и тем же минералом, одной и той же породой и т .п.). Каждому геологическому признаку, заданному в точках некоторой области D, в общем случае соответствует система геологических тел, в точках которых присутствует данный признак. От любой совокупности признаков, определенных в точках некоторой области D, можно перейти с помощью определенных процедур к системе признаков, т. е. к совокупности признаков, таких, что в каждой точке области D присутствует один и только один из этих признаков (за исключением точек поверхностей, разграничивающих множества точек с разными признаками).

Если множество соприкасающихся тел разбито на классы изолированных тел, то любая пара тел входит в некоторую цепочку, в которой соседние тела соприкасаются и относятся к разным классам.

При этом любые два различных тела либо изолированы, либо находятся в отношении соприкосновения β и входят в разные классы. Из этого утверждения, в частности, следует, что если множество тел M выделено по системе признаков, то для любой пары тел этого множества существует цепочка тел, такая, что любые два соседних тела в этой цепочке контактируют и соответствуют разным признакам (выделены по разным признакам). Кроме этого, любые два различных тела контактируют или изолированы. Справедливо также и обратное этому утверждение.

Доказано также утверждение, определяющее условия, выполнение которых необходимо для упорядочения совокупностей тел по отношению идиоморфизма.

Содержащиеся в главах 1 и 2 теоретические разработки можно использовать для строгого описания, сопоставления и систематики геологических структур.

Часть II. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Глава 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТРУКТУР ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПО ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ И ПЛОСКИМ ИХ СЕЧЕНИЯМ. СТЕРЕОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ГЕОЛОГИИ.

§ 1. Общая постановка стереологических задач геологии

Одна из особенностей геологических объектов состоит в том, что в большинстве случаев они изучаются с помощью сечений, получаемых в результате пересечения их некоторой поверхностью (поверхность Земли и горной выработки, плоскость шлифа и т. п.) и линией (ось скважины, линия профиля и т. п.). Поэтому задачи установления пространственных свойств геологических объектов на основании изучения их сечений относятся к наиболее распространенным и типовым. В петрографии это связано с тем, что с середины прошлого века, когда впервые начали применяться поляризационные микроскопы, главнейшим методом изучения строения горных пород становится исследование тонких срезов (прозрачных шлифов) пород под микроскопом. Петрографические приложения описываемых в данной главе методов будут освещены более подробно.

В настоящее время в развитии петрографических методов исследования начинается новый этап, связанный с появлением сканирующих микроскопов и автоматических микроанализаторов (АМА) — электронных устройств, способных автоматически считывать и частично обрабатывать информацию о строении микрообъектов в шлифах под микроскопом (Иваницкий и др., 1968, 1967, 1972; Урбах, 1962; Лариков и др., 1968; Богомолова, Коф, 1968; Богданов, Долгоносова и др., 1968; Сметанич, 1972; Гартштейн и др., 1972; Бойцов и др., 1972; Бродская, 1973; Бродская, Семенова, Купман, 1972).

Сканирующие микроскопы, состыкованные с ЭВМ, могут считывать и обрабатывать почти всю информацию о строении породы, содержащейся в шлифах. Опыт использования автоматических микроанализов в биологии, металлографии и петрографии приводит к выводу, что они, автоматизируя измерения, в десятки раз ускоряют микроскопические исследования и при этом позволяют получить объективное, точное описание основных свойств строения пород. По нашему мнению, с внедрением сканирующих микроскопов, автоматических микроанализаторов и ЭВМ петрографические методы исследования поднимаются на качественно новую ступень своего развития, сравнимую по своему значению с развитием этих методов в результате внедрения микроскопов.

Сканограммы, получаемые при сканировании площади шлифа сканирующими микроскопами, содержат в себе информацию о линейных сечениях микрообъектов.

В связи с изложенным первостепенное значение приобретают вопросы математической обработки информации о строении пород, извлекаемой из плоских и прямолинейных их сечений. При разработке этих вопросов необходимо учитывать, что плоскости шлифов и линии сканирования в шлифах почти всегда занимают случайное положение по отношению к зернам и другим элементам структуры пород.

Большинство задач, возникающих при изучении строения пород под микроскопом, связано с переходом от «структурного рисунка», наблюдаемого в случайных плоских и прямолинейных сечениях, к «структурному рисунку» в трехмерном пространстве, ибо в конечном итоге именно он и представляет интерес.

Задачи, связанные с таким переходом возникают не только в геологии, но и других науках (биология, металлография, прикладная физика и др.) при изучении структуры естественных и искусственных объектов по их сечениям. Первоначально методы решения этих задач разрабатывались самостоятельно в каждой из перечисленных наук. Впоследствии была установлена математическая их общность и возникла (сравнительно недавно) новая ветвь науки, получившая название стереологии (Салтыков, 1970).

Приведем краткий обзор основных публикаций по стереологии, характеризующий возникновение, развитие и современное состояние, исследований в этой области. При этом, учитывая математическую общность стереологических задач, возникающих в различных науках, не ограничимся обзором стереологических работ в геологии.

Стереологические исследования в петрографии известны под названием геометрического анализа шлифов. Он подразделяется на количественно-минералогический и морфо-гранулометрический анализы. В первом исследуется количественно-минералогический (модальный) состав, во втором — распределение размеров зерен породы.

По всей вероятности, наиболее ранней работой, относящейся к стереологии, является статья Делеса (1848 г.), в которой впервые была предложена методика количественно-минералогического анализа шлифов, усовершенствованная Розивалем в 1898 г. В последующее время было опубликовано много работ, посвященных различным вопросам количественно-минералогического анализа: развитию методики, усовершенствованию техники измерения, обоснованию и интерпретации соотношения площадь — объем, известного под названием соотношения Делеса (Чейз, 1963) и т. п.

В публикациях прослеживается постепенное развитие количественно-минералогического анализа от непосредственного измерения площадей зерен в шлифах (Johannsen, 1919) до метода подсчета точек (Глаголев, 1933). Автор последнего метода А. А. Глаголев внес большой вклад в развитие методов геометрического и, в частности, количественно-минералогического анализа шлифов (Глаголев, 1933, 1941 и др.).

В более поздних работах, посвященных количественно-минералогическому анализу, главное внимание уделяется строгому математическому его обоснованию (Чейз, 1963; Иванов, Фаас, 1964; Родионов, 1960; Гячяускас, 1964; Hasofer, 1963; Demirmen, 1971; Bodziony, 1965_1, 1965_2 и др.). Наиболее строгое математическое решение задачи этого анализа, основанное на достижениях интегральной геометрии, дано в работах Бодзионы и Гячяускаса (Bodziony, 1965_1, 1965_2; Гячяускас, 1964). Однако их решения не являются достаточно общими, так как они получены при предположении выпуклости форм всех зерен породы, что конечно не всегда выполняется для реальных пород. Решение Ф. Чейза получено без такого ограничения формы зерен, однако секущая плоскость у него проводится перпендикулярно некоторому фиксированному направлению; поэтому не все параметры, определяющие положение плоскости в пространстве, случайные.

Таким образом, строгое математическое решение задачи количественно-минералогического анализа для самого общего и типичного случая, когда система зерен породы произвольных форм пересекается случайной плоскостью или прямой, до сих пор не получено. Иными словами для общего случая этот анализ математически не обоснован.

Перейдем теперь к рассмотрению истории развития и современного состояния морфо-гранулометрического анализа.

В 1935 г. появилась первая работа У. Крамбейна (Krumbein W. C., 1935) по морфо-гранулометрическому или механическому анализу шлифа, в которой излагались результаты изучения распределения размеров частиц в песчаниках на основании замеров в тонких срезах. Им форма зерен предполагается сферической. Впоследствии А. А. Глаголев обобщил методику морфо-гранулометрического анализа и на случай, когда зерна имеют эллипсоидальную форму (Глаголев, 1950). В работах У. Крамбейна и А. А. Глаголева, так же как и в более поздней петрографической литературе (Глаголев, 1963, Krumbein, Pettijohn, 1938; Greenman 1951_1, 1951_2 Rosenfeld, Jacobson, Ferm, 1953; Packham, 1955), не учитывался тот факт, что зерна больших размеров имеют бо́льшую вероятность попасть в срез, хотя в биологической литературе еще в 1925—1926 гг. дано математически строгое решение этой же задачи (для случаев частиц сферической и эллипсоидальной формы) (Wicksell, 1925, 1926).

Большой вклад в развитие стереологии внес С. А. Салтыков — автор многочисленных работ по стереометрической металлографии (Салтыков, 1958, 1970 и др.).

Нужно отметить, что хорошо развитые количественные методы стереометрической металлографии почти без изменений могут быть использованы и в «стереометрической» петрографии.

В более поздних работах, посвященных методам определения распределения размеров микрообъектов (частиц, зерен и т. п.), по распределению размеров их сечений в срезах в петрографии, металлографии и биометрике, также по количественно-минералогическому анализу, наблюдается тенденция к математическому их обоснованию с использованием более сложного математического аппарата. Среди них нужно отметить фундаментальные труды И. Бодзионы (Bodziony, 1965_1, 1965_2, 1970) по количественным характеристикам структур пород и их определению в шлифах, работы, посвященные задачам стереологии в геологии, биометрике, металлографии и прикладной физике (Elias и др., 1954, 1955; De Hoff, Rhinea, 1961; Weibel, Elias, 1967; Goldsmith, 1967; Taliis, 1970; Nicholson, 1970; Кендалл, Моран, 1972; Богацкий, Дмитриев, 1974; и др.).

В связи с автоматизацией анализа структур микрообъектов под микроскопом повысился интерес к математической обработке результатов автоматических замеров геометрических характеристик микроструктур (Урбах, 1962, Богомолова, Коф, 1968; Богданов, Долгоносова и др., 1968; Бродская, 1972; Бродская, Гельтман, 1972; Иваницкий и др., 1967, 1968, 1972; Гартштейн и др., 1972; Лариков и др., 1968; Сметанич и др., 1972; и др.).

Резюмируя обзор публикаций по стеорологии можно сказать, что до сих пор отсутствует достаточно общее строгое решение основных задач морфо-гранулометрического анализа. Имеющиеся в различных областях наук решения этих задач, частично отраженные в приведенном обзоре получены для тел (зерна, частицы) геометрически правильных форм — сферических, эллипсоидальных, цилиндрических и т. п. В действительности, как известно, в большинстве пород зерна имеют сложные, часто неправильные очертания. Отсутствует общее решение этих задач даже для класса выпуклых тел, не говоря уже о телах произвольных форм.

По мнению И. Бодзионы (Bodziony, 1965_1), из-за разнообразия конфигураций минеральных зерен в породах ограничение рассматриваемых форм до шара или эллипсоида может привести к ненадежным результатам.

Сложность конфигураций зерен пород и вызванные этим математические трудности, по-видимому, главная причина отставания морфо-гранулометрического анализа по сравнению с количественно-минералогическим (в котором этот фактор большого значения не имеет).

Такого же мнения придерживаются и некоторые другие исследователи. Ф. Чейз, в частности, пишет, что «полное отсутствие успеха в деле измерения размера зерна в шлифе и кроме того, полная неудача попыток оценить относительную частость сечений зерен в единицах площади являются главным образом следствием сложности гранитной структуры. В структуре, состоящей из зерен простых очертаний, каждый тип измерения, вероятно, был бы относительно простым, и даже соотношение, связывающее их, могло бы быть установлено довольно легко» (Чейз, 1963, стр. 93).

М. Кендалл и П. Моран при выводе уравнения для определения распределения диаметров шаров по распределению длины пресечения их со случайной прямой отмечают, что попытка обобщить это уравнение «на случай, когда тела не являются шарами не привели к успеху» (Кендалл, Моран, 1972, стр. 110).

Вместе с тем появление сканирующих микроскопов, автоматических микроанализаторов и ЭВМ, позволяющих автоматизировать извлечение и обработку информации о строении микрообъектов, выдвигает в число актуальных вопросы математического обеспечения этих систем.

Учитывая изложенное выше, в данной главе основное внимание уделяется математическому решению задач морфо-гранулометрического и количественно-минералогического анализов для наиболее общего и типичного случая, когда порода с зернами произвольных форм пересекается случайными плоскостями или прямыми.

Можно выделить прямые стереологические задачи петрографии, связанные с переходом от пространственных характеристик структур пород к плоскостным и линейным их характеристикам (например, выбор плоскости среза, линии сканирования, шага сканирования и т. п.), и обратные — связнные с переходом от характеристик плоских и линейных сечений пород к их пространственным характеристикам (Усманов, 1974_2). Обратные стереологические задачи математически формулируются как нахождение характеристик систем тел, поверхностей, линий в трехмерном евклидовом пространстве по их пересечениям некоторыми поверхностями или линиями.

Главные особенности стереологических задач петрографии — сложность форм структурных элементов (тела, поверхности, линии), статистический характер структур пород (обусловленный сочетанием большого числа вероятностно-упорядоченных в пространстве структурных элементов) и случайность сечений. Учитывая эти особенности, можно утверждать, что наиболее удобным математическим аппаратом при решении стереологических задач петрографии будет теория вероятностей (особенно ее раздел — теория геометрических вероятностей), математическая статистика и интегральная геометрия.

В дальнейшем мы будем опираться на некоторые результаты, полученные главным образом в последнее время в перечисленных разделах математики, содержащиеся, например, в работах М. Кендалла, П. Морана, Л. А. Сантало, И. М. Яглома, И. М. Гельфанда, В. Бляшке, Г. И. Дринфельда, В. И. Семянистого, А. Новикова (Кендалл, Моран, 1972; Сантало, 1956; Яглом, 1956; Гельфанд и др., 1962; Бляшке, 1938; Дринфельд, 1950; 1952; Семянистый, 1961, 1967; Новиков, 1966).

По соображениям, изложенным в гл. 1, постановки и решения задач мы будем формулировать для тел и систем тел в трехмерном евклидовом пространстве. В случае горных пород и руд телам будут соответствовать зерна, кристаллы, включения, вкрапленики, основная масса и вообще отдельные, целостные части пород и руд, выделяемые по тем или иным признакам из окружающих частей, а системам тел — системы всех зерен или зерен отдельных минералов, системы вкраплений в образцах пород и руд, совокупность галек в образце конгломерата и т. п.

Некоторые из предлагаемых методов можно распространить на геологические тела, сложенные породами и рудами. Поэтому использование для формулировки задач общего математического понятия тела и множества тел в трехмерном евклидовом пространстве (системы тел) вполне оправдано как с точки зрения требования общности, так и строгости изложения.

Определения употребляемых в данной главе терминов можно найти в работах М. Кендалла, П. Морана, Л. А. Сантало, В. Бляшке, Бодзионы и др. (Кендалл, Моран, 1972; Сантало, 1956; Бляшке, 1938; Bodziony, 1965_1, 1965_2).

В методе Монте-Карло (метод статистических испытаний) обычно разыгрывается положение случайной точки. Широко известен метод оценки отношения объемов двух тел, одно из которых включает другое, по отношению количеств случайных точек, попавших в данные тела. На этом методе основан один из вариантов точечного метода определения в шлифах относительного объема минералов, слагающих породу. Однако применение метода случайной точки для оценки объема тела в абсолютных единицах ($мм^3$, $см^3$ и т. п.) в геологии ограниченно, так как для этого необходима информация об объеме (в абсолютных единицах) другого тела, включающего данное тело (Соболь, 1973; Гячяускас, 1964; Чейз, 1963; Иванков, 1974).

Для решения многих стереологических задач геологии нужен метод, который можно назвать обобщением классического метода Монте-Карло на случай, когда разыгрывается случайное положение в пространстве не точки, а произвольного геометрического объекта — полупрямой (луч), прямой, плоскости, области трехмерного пространства и т. п. В обобщенном методе Монте-Карло можно использовать достижения интегральной геометрии и теории геометрических вероятностей. Введем некоторые основные понятия, рассматриваемые в этих разделах математики.

В интегральной геометрии и теории геометрических вероятностей в качестве меры множеств точек, полупрямых (лучей), прямых, плоскостей и других геометрических объектов используются меры, удовлетворяющие условию инвариантности относительно трансляции, вращения и инверсии в евклидовом пространстве. В теории геометрических вероятностей на основании меры, удовлетворяющей этому условию, определяются вероятностная мера и понятия случайной точки, прямой, плоскости и т. п.

Для определения случайной точки в евклидовом пространстве используется мера Лебега. Вероятность попадания точки в область D_1 трехмерного евклидового пространства, если известно, что она попала в область D_2, включающей D_1, будет равна $\frac{v(D_1)}{v(D_2)}$, где $v(D_1)$ и $v(D_2)$ — объемы областей D_1 и D_2. В двумерном и одномерном случаях в этом соотношении вместо объема, очевидно, будут площадь и длина.

Если направление в трехмерном пространстве определяется угловыми координатами θ и φ в сферической системе координат, то элементом меры множества направлений, инвариантной относительно вращения, будет $\sin\theta d\theta d\varphi$. Выбор этой меры приводит к тому, что вероятность попадания случайного направления в телесный угол ω будет равна $\frac{\omega}{4\pi}$, т. е. все направления равновероятны.

Случайный луч можно определить как луч с началом в случайной точке и со случайным направлением, независящим от координат начала (как луч, проведенный из случайной точки в случайном направлении). Для определения случайной прямой на плоскости положение прямой удобно описывать параметрами ρ и θ-полярными координатами основания перпендикуляра, опущенного из начала системы координат на прямую. В параметрическом пространстве, определенном этими параметрами, каждой точке (ρ, θ) соответствует одна прямая, а элементом меры множества прямых будет $d\rho d\theta$ (Кендалл, Моран, 1972, стр. 16). Пусть D_1 и D_2 — две области в этом параметрическом пространстве и $D_1 \subset D_2$. Тогда вероятность попадания точки, соответствующей случайной прямой, в область D_1, если известно, что она попала в область D_2, будет равна $\frac{s(D_1)}{s(D_2)}$, где $s(D_1)$ и $s(D_2)$ — площади областей D_1 и D_2 в параметрическом пространстве.

Если прямая в трехмерном евклидовом пространстве определяется координатами точки пересечения с некоторой плоскостью и направлением, то для случайной прямой точка пересечения является случайной в указанном выше смысле и независимо от этой точки все направления равновероятны (Кендалл, Моран, 1972, стр. 87).

Пусть положение плоскости в трехмерном пространстве определяется параметрами θ, φ, ρ — сферическими координатами основания перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала системы координат. Тогда элементом меры множества плоскостей, удовлетворяющей указанным выше условиям, будет $\sin\theta d\theta d\varphi d\rho$. Выбор этой меры приводит к тому, что направление нормали к случайной плоскости—случайное в указанном выше смысле, а расстояние ρ от начала системы координат до случайной плоскости распределено равномерно (для конечного интервала значений ρ) (Кендалл, Моран, 1972, стр. 21).

Рассмотрим функции, определенные на множествах некоторых геометрических объектов (лучи, прямые, плоскости и их пересечения с телами), принимающие значения в множестве действительных чисел (т. е. функции, которые каждому геометрическому объекту из некоторого множества геометрических объектов ставят в соответствие одно действительное число).

Приведем пример такой функции. Пусть $\{L: A \cap L \neq \varnothing\}$ — множество всех прямых секущих тело A, $t(L)$ — функция, которая каждой прямой $L \in \{L: A \cap L \neq \varnothing\}$ ставит в соответствие длину пересечения тела A и прямой L.

Большинство соотношений, которые мы будем выводить, относятся к средним значениям функций, определенных на множествах геометрических объектов.

Приведем пример. Пусть $f(x, y, z)$ — некоторая функция, определенная на множестве точек тела A. Среднее значение функции $f(x, y, z)$, полученное усреднением по всем точкам тела A, равно

$$\overline{f} = \frac{\iiint\limits_{(x,\, y,\, z) \in A} f(x,\, y,\, z)\, dxdydz}{\iiint\limits_{(x,\, y,\, z) \in A} dxdydz},$$

где тройной интеграл в знаменателе дроби, являющийся мерой множества точек тела A, равен объему тела A, а $dxdydz$ есть «плотность» (или элемент меры) множества точек.

В следующих параграфах рассмотрены задачи определения геометрических характеристик тел и систем тел по информации, получаемой из их пересечений со случайными полупрямыми, прямыми и плоскостями.

Характеристики, которые определяются для тел, геометрически правильной формы, для некоторых классов тел (сферические, эллипсоидальные и др.) рассмотрены в отмеченных выше работах. К таким характеристикам относятся, например, радиус сферы, длина ребра куба, длина полуосей эллипсоидов и т. п.

Рассмотрим характеристики, представляющие собой функционалы, определяемые на любом теле в трехмерном евклидовом пространстве.

В интегральной геометрии основные функционалы тел — объем, площадь поверхности, полная средняя кривизна и полная гаусова кривизна. Согласно теореме Хадвигера, для функционалов, определенных в классе выпуклых тел, каждый функционал, обладающий свойствами инвариантности относительно группы движения, аддитивности и монотонности, можно представить как сумму указанных основных функционалов с положительными коэффициентами (приводится по Bodziony, 1965_2, формула (2.7)). В геологии, в частности в петрографических и петрофизических задачах, наибольший интерес представляют объем и площадь поверхности тела. Характеристики кривизны поверхности тела в этих задачах почти не используются (поэтому мы их не рассматриваем). Рассмотрим еще две характеристики — толщину и среднюю площадь проекции тела, которые нужны при решении ряда геологических задач.

Единственное ограничение, которое накладывается на свойства тел, сводится к тому, что число отрезков, отсекаемых телом на любой секущей его прямой, конечно. Однако, как отмечалось в гл. 1, это условие носит чисто формальный характер, оно не ограничивает область приложений полученных результатов, поскольку выполняется для всех естественных (материальных) тел. В дальнейшем, специально не оговаривая указанное ограничение, мы будем говорить о телах «произвольной» формы — геометрически правильных или неправильных, выпуклых или невыпуклых, односвязных или многосвязных, ограниченных одной или больше замкнутыми поверхностями (т. е. с «полостями» внутри) и т. п.

§ 2. Определение геометрических характеристик тела произвольной формы по случайным прямолинейным его сечениям

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется некоторое тело A произвольной формы, пересеченное случайно проведенными прямыми. Для каждой из этих прямых известны расстояния между точками пересечения поверхности тела данной прямой (так как расматривается тело произвольной формы, то не исключается, что число точек пересечения поверхности тела случайной прямой может быть больше двух). Нужно оценить объем и площадь поверхности тела.

Решение сформулированной задачи нам нужно для решения более типичных стереологических задач геологии, рассмотренных в § 4. Однако задачи, которые сводятся к рассматриваемой, в геологии встречаются также и как самостоятельные. Например, задача оценки объема геологического, в частности рудного тела, случайно подсеченного скважинами, когда располагаем информацией только о длине пересечений.

Сначала решим задачу определения объема тела произвольной формы по данным его сечений лучами. Некоторые соотношения, полученные при решении этой задачи, используются для решения задачи, сформулированной в начале данного параграфа и задач, рассматриваемых в §§ 3 и 5.

Решение этой задачи проведем по следующей схеме. Построим функцию, ставящую в соответствии каждому лучу, с началом в теле A, одно действительное число и удовлетворяющую следующему условию: среднее ее значение, полученное усреднением по всем лучам с началами в теле A, равно объему этого тела. Построив такую функцию, оценку объема тела сведем к оценке ее среднего значения.

Положение луча (полупрямой) в трехмерном пространстве задается пятью параметрами: декартовыми координатами x, y, z его начала и сферическими угловыми координатами θ, φ его направления. Луч, определяемый параметрами x, y, z, θ, φ обозначим через $K_{x, y, z, \theta, \varphi}$.

Пусть A — тело произвольной формы, а $\{K_{x, y, z, \theta, \varphi} : (x, y, z) \in A\}$ — множество всех лучей с началами в теле A. Определим на этом множестве функцию $f(x, y, z, \theta, \varphi)$ следующим образом. Если луч $K_{x, y, z, \theta, \varphi}$ пересекает поверхность тела A только один раз, то

$$f(x, y, z, \theta, \varphi) = \frac{4\pi}{3} [r(x, y, z, \theta, \varphi)]^3,$$

где r — длина отрезка, отсеченного телом A на луче $K_{x, y, z, \theta, \varphi}$ (т. е. расстояние от начала луча до точки пересечения его с поверхностью тела).

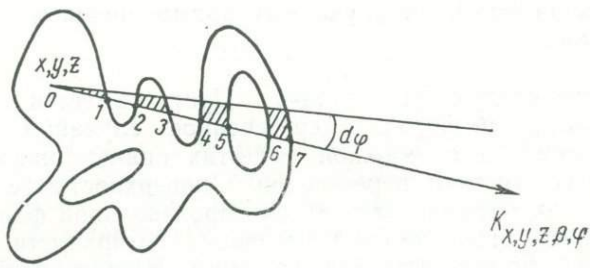

Рис. 4. График, иллюстрирующий определение функции $f(x, y, z, \theta, \varphi)$ (2. 1). Показано сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси $0\ Z$.

Если луч $K_{x, y, z, \theta, \varphi}$ пересекает поверхность тела A в двух и больше точках, то

$$f(x, y, z, \theta, \varphi) = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=0}^{m-1} \{[r_{2i+1}(x, y, z, \theta, \varphi)]^3 - [r_{2i}(x, y, z, \theta, \varphi)]^3\}, \tag{2.1}$$

где $r_j(x, y, z, \theta, \varphi)$ — расстояние от начала (x, y, z) луча $K_{x, y, z, \theta, \varphi}$ до j-ой $(j = 2i + 1, 2i)$ точки пересечения этого луча с поверхностью тела A (рис. 4). При написании выражения (2.1) для удобства записи условно положено $r_0 = 0$. $m = m(x, y, z, \theta, \varphi)$ — число отрезков, отсеченных телом A на луче $K_{x, y, z, \theta, \varphi}$.

Ниже покажем, что функция $f(x, y, z, \theta, \varphi)$ удовлетворяет указанному выше условию: среднее ее значение по множеству всех лучей с началами в теле A равно объему этого тела.

Мера множества всех лучей с началами в фиксированной точке (x, y, z), очевидно, равна мере множества всех направлений $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi$, а мера множества точек тела A равна объему v этого тела $\iiint_{(x, y, z)\in A} dxdydz = v$. Мера $\mu_K(A)$ множества всех лучей с началами в точках тела A равна*

$$\mu_K(A) = \iiint_{(x, y, z)\in A} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\varphi dxdydz = 4\pi v \tag{2.2}$$

В соответствии с этой мерой среднее значение функции $f(x, y, z, \theta, \varphi)$ по множеству всех лучей с началами в теле A есть

$$\overline{f} = \frac{\iiint_{(x, y, z)\in A} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x, y, z, \theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi dxdydz}{\iiint_{(x, y, z)\in A} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\varphi dxdydz}. \tag{2.3}$$

Рассмотрим входящий в это выражение интеграл

$$\frac{4\pi}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sum_{i=0}^{m-1} \{[r_{2i+1}(x, y, z, \theta, \varphi)]^3 - [r_{2i}(x, y, z, \theta, \varphi)]^3\} \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Объем dv_j части пространства конической формы, соответствующей в сферической системе пределам изменения координат $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_j$, $\theta' \leqslant \theta \leqslant \theta' + d\theta$ и $\varphi' \leqslant \varphi \leqslant \varphi' + d\varphi$, равен

$$dv_j = \int_0^{\rho_j} \rho^2 \sin\theta d\theta d\varphi d\rho = \frac{1}{3}\rho_j^3 \sin\theta d\theta d\varphi$$

($\rho^2 \sin\theta d\theta d\varphi d\rho$ — элемент объема в сферической системе координат).

Сумма

$$dv = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{m-1} \{[r_{2i+1}(x, y, z, \theta, \varphi)]^3 - [r_{2i}(x, y, z, \theta, \varphi)]^3\} \sin\theta d\theta d\varphi$$

при любых фиксированных θ, φ и $(x, y, z)\in A$ равна объему части тела, заключенной в телесном угле, соответствующем $\sin\theta d\theta d\varphi$ с вершиной в точке (x, y, z) (на рис. 4 показано продольное сечение этой части пространства плоскостью, проходящей

---

* Это равенство можно вывести более строго, используя кинематическую плотность тела [Bodziony, 1965, формула (2. 11)].

через точку (x, y, z)). Следовательно, в любой точке $(x, y, z) \in A$ выполняется равенство

$$\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{i=0}^{m-1} \{[r_{2i+1}(x, y, z, \theta, \varphi)]^3 -$$

$$- [r_{2i}(x, y, z, \theta, \varphi)]^3\} \sin \theta d\theta d\varphi = v \qquad (2.4)$$

Подставив (2.4) в (2.3) и учитывая, что интеграл $\iiint\limits_{(x, y, z) \in A} dxdydz$ равен объему v тела A, а интеграл в знаменателе дроби в (2.3) согласно (2.2) равен $4\pi v$, получим

$$\bar{f} = \frac{\iiint\limits_{(x, y, z) \in A} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(x, y, z, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi dxdydz}{\iiint\limits_{(x, y, z) \in A} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta d\varphi dxdydz} =$$

$$= \frac{1}{4\pi v} \iiint\limits_{(x, y, z) \in A} dxdydz \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(x, y, z, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = v. \qquad (2.5)$$

Для выпуклого тела A_0 эту формулу можно записать в следующем виде

$$\bar{f}_0 = \frac{\iiint\limits_{(x, y, z) \in A} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{4\pi}{3} [r(x, y, z, \theta, \varphi)]^3 \sin \theta d\theta d\varphi \, dxdydz}{\iiint\limits_{(x, y, z) \in A} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta d\varphi \, dxdydz} = v_0, \qquad (2.6)$$

где $r(x, y, z, \theta, \varphi)$ — длина отрезка, отсекаемого выпуклым телом A_0 на луче $K_{x, y, z, \theta, \varphi}$ (расстояние от точки $(x, y, z) \in \boldsymbol{A}$ в направлении (θ, φ) до поверхности тела A_0); v_0 — объем тела A_0.

Формулу (2. 5) можно использовать для оценки объема тела A по конечному числу пересечений тела A с лучами с началами в этом теле. Оценка объема тела сводится к оцениванию интегралов, входящих в (2. 5) одним из известных способов. Рассмотрим случай, когда эти интегралы оцениваются методом Монте-Карло (методом статистических испытаний).

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых из множества лучей с началами в теле A случайно выбирается один луч. Выбор можно производить так. Из тела A случайно выбирается точка (все точки тела A равновероятны). Независимо от выбранной точки из множества всех направлений случайно выбирается одно направление (все направления равновероятны). Из выбранной точки в выбранном направлении проводится луч K. Для построенного луча вычисляется значение введенной выше функции $f(x, y, z, \theta, \varphi)$. Пусть этим способом для выбранных лучей $K_1, K_2, \ldots, K_n$ получены n значений $f_1, f_2, \ldots, f_n$ функции $f(x, y, z, \theta, \varphi)$. Среднее арифметическое из этих значений согласно (2.5) — состоятельная и несмещенная оценка $\hat{v}$ объема v тела A.

$$\hat{v} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} f_l . \tag{2.7}$$

Для выпуклого тела на основании равенства (2.6) формулу (2.7) можно представить в виде

$$\hat{v}_0 = \frac{4\pi}{3n}\sum_{l=1}^{n} r_l^3 , \tag{2.8}$$

где r_l — длина отрезка, отсеченного выпуклым телом A_0 на луче K_l $(l = 1, 2, \ldots, n)$, случайно выбранном указанным выше способом.

Погрешность оценки (2.7) определяется как погрешность средней арифметической. Оценка $\sigma_{\hat{v}}$ среднего квадратического отклонения величины $\hat{v}$ вычисляется по формуле

$$\sigma_{\hat{v}} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{n}} ,$$

где

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{l=1}^{n}\left(f_l - \hat{v}\right)^2} .$$

Перейдем теперь к рассмотрению сформулированной в начале основной задачи данного параграфа. Сначала введем некоторые функции, определенные на множествах прямых, секущих данное тело, и найдем их связи с искомыми характеристиками тела, затем используем эти зависимости для решения задачи.

Положение прямой в трехмерном пространстве будем задавать четырьмя параметрами: сферическими угловыми координатами θ' и φ', определяющими направление прямой, и координатами x', y' — точки ее пересечения с перпендикулярной к ней плоскостью. Обозначим через $L_{\theta', \varphi', x', y'}$ прямую, определяющуюся параметрами $\theta', \varphi', x', y'$.

В соответствии с результатами, изложенными в работе М. Кендалла, П. Морана (1972, стр. 87—89), меру $\mu_L(A)$ множества $\{L: A \cap L \neq 0\}$ всех прямых, секущих тело A произвольной формы, можно представить выражением

$$\mu_L(A)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x',y')\in A'_{\theta',\varphi'}} dx'dy', \qquad (2.9)$$

где через $A'_{\theta',\varphi'}$ обозначена ортогональная проекция тела на плоскость, перпендикулярную прямой $L_{\theta',\varphi',x',y'}$ или, по терминологии И. И. Яглома, В. Г. Болтянского (1951),— тень тела на эту плоскость. Интегрирование по x' и y' производится по всем точкам, принадлежащим $A'_{\theta',\varphi'}$

Введем следующие величины.

1. Средняя площадь проекции тела. Пусть $g(\theta', \varphi')$ — функция, определенная как площадь ортогональной проекции тела A на плоскость, нормаль к которой имеет направление (θ', φ'). Среднее значение этой функции, полученное усреднением по всем направлениям, равно

$$\overline{g}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(\theta',\varphi')\sin\theta' d\theta' d\varphi'}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta' d\varphi'}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(\theta',\varphi')\sin\theta' d\theta' d\varphi'. \qquad (2.10)$$

Используя эту величину, называемую дальше средней площадью проекции тела, выражение (2.9) можно преобразовать следующим образом.

$$\mu_L(A)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x',y')\in A'_{\theta',\varphi'}} dx'dy' =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(\theta',\varphi')\sin\theta' d\theta' d\varphi' = 2\pi\overline{g}\,. \qquad (2.11)$$

2. Среднее число отрезков прямолинейного сечения тела. Пусть $q(\theta', \varphi', x', y')$ — число отрезков, отсеченных телом A на прямой $L_{\theta',\varphi',x',y'}$. Среднее значение этой величины, полученное усреднением по всем прямым, секущим тело A, в соответствии с (2.9) равно

$$\overline{q}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x',y')\in A'_{\theta',\varphi'}} q(\theta',\varphi',x',y')dx'dy'}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x',y')\in A'_{\theta',\varphi'}} dx'dy'}\,. \qquad (2.12)$$

Эту величину назовем средним числом отрезков прямолинейного сечения тела.

Интеграл в числителе дроби в (2.12) — обобщение формулы (2.13) в работе Л. А. Сантало (1966, ч. I, § 2) на случай множества прямых в трехмерном пространстве, секущих заданную поверхность. Обобщив указанную формулу на этот случай, можно убедиться, что интеграл в числителе дроби в (2.12) равен πs. Учитывая это и равенство (2.11) из (2.12), получим

$$\frac{s}{\overline{g}} = 4\overline{q}, \qquad (2.13)$$

т. е. среднее число отрезков прямолинейного сечения тела произвольной формы равно отношению площади его поверхности к средней площади проекции, помноженному на $\frac{1}{4}$ $\Big($отсюда непосредственно следует, что для любого невыпуклого тела найдется такая прямая, на которой данное тело отсекает больше, чем $\frac{s}{4\overline{g}}$ отрезков$\Big)$.

Если обозначить через $\overline{q'}$ среднее число точек пересечения поверхности тела прямой, полученное усреднением по всем прямым, секущим данное тело, то, учитывая, что $\overline{q'} = 2\overline{q}$, вместо (2.13) можно написать

$$s = 2\overline{g}\,\overline{q'}. \qquad (2.14)$$

Из формулы (2.13) в частном случае, когда тело имеет выпуклую форму, и, следовательно, $\overline{q} = 1$, можно получить известное соотношение, о котором говорится в работе Кендалла и Морана (1972, стр. 88):

$$s_0 = 4\overline{g}_0,$$

где s_0 и $\overline{g}_0$ — площадь поверхности и средняя площадь проекции выпуклого тела A_0.

3. Средняя длина прямолинейного сечения тела. На множестве прямых, секущих тело A произвольной формы, определим функцию $t(\theta', \varphi', x', y')$ как длину пересечения тела A прямой $L_{\theta', \varphi', x', y'}$. Если тело A отсекает от прямой $L_{\theta', \varphi', x', y'}$ только один отрезок, то $t(\theta', \varphi', x', y')$ равен длине этого отрезка; если он отсекает больше одного отрезка, то $t(\theta', \varphi' x', y')$ равен сумме длин этих отрезков

$$t(\theta', \varphi', x', y') = \sum_{j=1}^{q} t_j(\theta', \varphi', x', y'), \qquad (2.15)$$

где $q = q(\theta', \varphi', x', y')$ — число отрезков, отсеченных телом A на прямой $L_{\theta', \varphi', x', y'}$;

$t_j(\theta', \varphi', x', y')$ — длина j-ого отрезка.

В соответствии с формулой (2.9) среднее значение функции $t(\theta', \varphi', x', y')$, полученное усреднением по всем прямым, секущим тело A, равно

$$\overline{t} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x', y')\in A'_{\theta', \varphi'}} t(\theta', \varphi', x', y')\, dx'dy'}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x', y')\in A'_{\theta', \varphi'}} dx'dy'}. \qquad (2.16)$$

Эту величину назовем средней длиной прямолинейного сечения тела.

В частном случае для выпуклого тела A_0 формула (2.16) переходит в следующую:

$$\overline{t}_0 = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x', y')\in A'_{\theta', \varphi'}} t_0(\theta', \varphi', x', y')\, dx'dy'}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x', y')\in A'_{\theta', \varphi'}} dx'dy'}, \qquad (2.17)$$

где $t_0(\theta', \varphi', x', y')$ — длина отрезка отсекаемого выпуклым телом A_0 на прямой $L_{\theta', \varphi', x', y'}$. Интеграл $\iint\limits_{(x', y')\in A'_{\theta', \varphi'}} t(\theta', \varphi', x', y')\, dx'dy'$ равен объему v тела A. Поэтому интеграл в числителе дроби в (2.16) равен $4\pi v$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x', y')\in A'_{\theta'; \varphi'}} t(\theta', \varphi', x', y')\, dx'dy' = 4\pi v. \qquad (2.18)$$

Учитывая это, а также равенство (2.11) из (2.16), вычислим

$$\overline{t} = \frac{v}{\overline{g}}. \qquad (2.19)$$

Таким образом, средняя длина прямолинейного сечения тела произвольной формы равна отношению объема тела к средней площади проекции*.

Подставив выражение для $\overline{g}$, найденное из (2.13), в формулу (2.19), получим

$$\frac{v}{s} = \frac{\overline{t}}{4\overline{q}}, \qquad (2.20)$$

т. е. справедливо следующее утверждение: для тела произвольной формы отношение его объема к площади поверхности рав-

* Заметим, что отсюда, в частности, вытекает истинность следующего утверждения: для любого тела найдется такая прямая, длина пересечения которой с данным телом больше, чем отношение его объема к средней площади проекции.

но отношению средней длины и среднего числа отрезков прямолинейного сечения этого тела, помноженному на $\frac{1}{4}$.

Из формулы (2.20) в частном случае, когда тело A_0 имеет выпуклую форму и, следовательно, $q = 1$, можно получить соотношение, выведенное М. Кендаллом и П. Мораном (1972, стр. 90):

$$\overline{t}_0 = \frac{4v_0}{s_0} \tag{2.21}$$

где v_0, s_0 и $\overline{t}_0$ — объем, площадь поверхности и средняя длина прямолинейного сечения выпуклого тела A_0.

Формулы (2.13), (2.19) и (2.20) позволяют вычислить для любого тела соотношения объема v, площади поверхности s и средней площади проекции $\overline{g}$ через среднее число отрезков $\overline{q}$ и среднюю длину $\overline{t}$ прямолинейного сечения. Чтобы каждый из перечисленных характеристик тела выразить только через величины, измеряемые и подсчитываемые на прямолинейных сечениях, кроме указанных выше, нужно вывести еще одно соотношение, связывающее объем и среднюю площадь проекции тела. Для этого необходимо построить некоторую функцию $F'(\theta', \varphi', x', y')$, определенную на множестве прямых, секущих тело A, среднее значение которой выражалось бы через объем и среднюю площадь проекции тела A. Для нахождения такой функции воспользуемся равенствами (2.5). Согласно им, как выше отмечалось, среднее значение функции $f(x, y, z, \theta, \varphi)$ (определенной выражением (2.1)) по множеству всех лучей с началами в теле A равно объему этого тела. Это же среднее значение функции $f(x,y,z,\theta,\varphi)$ можно получить по-другому: усреднив сначала функцию $f(x,y,z,\theta,\varphi)$ по всем лучам, лежащим на прямой L, с началами в точках пересечения $A \cap L$ тела A и прямой L, затем полученную величину — по всем прямым, секущим тело A, с весом прямо пропорциональным мере множества лучей, лежащих на прямой L, с началами в точках пересечения $A \cap L$. Проделаем эти расчеты.

Среднее значение функции $f(x,y,z,\theta,\varphi)$ по множеству всех лучей, лежащих на прямой L, с началами в точках пересечения $A \cap L$, направление которых совпадает с одним фиксированным направлением прямой, равно (очевидно, это среднее значение является функцией от параметров θ', φ', x', y' прямой L):

$$\frac{\int\limits_{z' \in A \cap L} f(z')\, dz'}{\int\limits_{z' \in A \cap L} dz'} = \frac{\frac{\pi}{3} F'(\theta', \varphi', x', y')}{t(\theta', \varphi', x', y')}, \tag{2.22}$$

где

$$f(z') = \frac{4\pi}{3} \sum_{l=0}^{m-1} \{[r_{2l+1}(z')]^3 - [r_{2l}(z')]^3\}, \tag{2.23}$$

$r_j(z')$ — расстояние от точки $(z') \in A \cap L$ до j-ой ($j = 2i+1,\ 2i$)— —точки пересечения поверхности тела A лучом K, лежащим на прямой с началом в точке z' (в (2.23) условно взято $r_0 = 0$). m—число отрезков, отсеченных телом A на этом луче.

При написании равенства (2.22) введено обозначение:

$$F'(\theta', \varphi', x', y') = \frac{3}{\pi} \int\limits_{z' \in A \cap L} f(z')\,dz' = 4 \int\limits_{z' \in A \cap L} \sum_{i=0}^{m-1} \{[r_{2i+1}(z')]^3 - \\ - [r_{2i}(z')]^3\}. \tag{2.24}$$

Мера множества всех лучей, лежащих на прямой L, с началами в точках пересечения $A \cap L$, равна $\int\limits_{z' \in A \cap L} dz' = t(\theta', \varphi', x', y')$ длине пересечения $A \cap L$. Усредняя $\dfrac{\frac{\pi}{3} F'(\theta', \varphi', x', y')}{t(\theta', \varphi', x', y')}$ с весом, прямо пропорциональным $t(\theta', \varphi', x', y')$ по всем прямым секущим тело A, получим

$$\bar{f} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \int\limits_{(x', y') \in A'_{\theta', \varphi'}} \frac{\pi}{3} F'(\theta', \varphi', x', y')\,dx'dy'}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \int\limits_{(x', y') \in A'_{\theta', \varphi'}} t(\theta', \varphi', x', y')\,dx'dy'} = v. \tag{2.25}$$

Эта величина есть среднее значение функции $f(x, y, z, \theta, \varphi)$ по множеству всех лучей с началами в теле A и согласно (2.5) равна объему v тела A. Интеграл в знаменателе дроби в (2.25) согласно (2.18) равен $4\pi v$. Учитывая это, из (2.25) выведем

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \int\limits_{(x', y') \in A'_{\theta', \varphi'}} F'(\theta', \varphi', x', y')\,dx'dy' = 12v^2. \tag{2.26}$$

Поделив обе части этого равенства на интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \times$ $\times \int\limits_{(x', y') \in A'_{\theta', \varphi'}} dx'dy'$, который согласно (2.11) равен $4\pi\bar{g}$, получим

$$\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x', y') \in A'_{\theta', \varphi'}} F'(\theta', \varphi', x', y')\,dx'dy'}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x', y') \in A'_{\theta', \varphi'}} dx'dy'} = \frac{3}{\pi}\frac{v^2}{\bar{g}} = \bar{F}'. \tag{2.27}$$

Выражение в левой части равенства (2.27) совпадает со средним значением $\overline{F}'$ функции $F'(\theta', \varphi', x', y')$ по множеству всех прямых, секущих тело A.

Функция $F'(\theta', \varphi', x', y')$ определена выше выражением (2.24) через интеграл от функции $f(z')$. Для расчетов более удобно выразить ее через расстояние между точками пересечения тела A прямой $L_{\theta', \varphi', x', y'}$. Интеграл в (2.24) можно преобразовать в сумму интегралов вида $\int\limits_{z_l'}^{z_{l+1}'} \left(z_j' - z'\right)^3 dz'$, где z_j' и z_l' — координаты j-ой и l-ой точек пересечения прямой $L_{\theta', \varphi', x', y'}$ поверхности тела A. После этого каждый из полученных интегралов можно вычислить. Опустив эти вычисления, напишем конечный их результат:

$$F'\left(\theta', \varphi', x', y'\right) = \sum_{i=1}^{q} \left[t^{4}_{2i, 2i-1} + \sum_{j=i+1}^{q} \left(t^{4}_{2i-1, 2j} - t^{4}_{2i, 2j} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - t^{4}_{2i-1, 2j-1} + t^{4}_{2i, 2j-1} \right) \right], \tag{2.28}$$

где $q = q(\theta', \varphi', x', y')$ — число отрезков, отсекаемых телом A на прямой, $t_{\mu, \nu}$ — расстояние между μ-ой и ν-ой ($\mu, \nu = 2i, 2i - 1, 2j, 2j - 1$; $i = 1, 2, \ldots, q$; $j = i + 1, i + 2, \ldots, q$) — точками пересечения прямой $L_{\theta', \varphi', x', y'}$ поверхности тела A*.

В частном случае для выпуклого тела A_0 выражение (2.24) очень упрощается:

$$F_0'\left(\theta', \varphi', x', y'\right) = \left[t_0\left(\theta', \varphi', x', y'\right)\right]^4, \tag{2.29}$$

где $t_0(\theta', \varphi', x', y')$ — длина отрезка, отсеченного выпуклым телом A_0 на прямой $L_{\theta', \varphi', x', y'}$.

Подставив (2.29) в равенство (2.27), получим среднее значение функции $F'(\theta', \varphi', x', y')$ для случая выпуклого тела:

---

* Нумерация точек пересечения производится следующим образом: фиксируется одно из двух направлений, соответствующих прямой, и точки пересечения нумеруются так, что номера возрастают в фиксированном направлении (значение функции $F'(\theta', \varphi', x', y')$ в общем случае зависит также от того, какое из двух направлений фиксировано). Индекс j во внутренней сумме в (2.28) при каждом фиксированном i пробегает значения от $i+1$ до q. Например, при $q = 3$ (2.28) распишется так: $t^4_{2,1} + t^4_{4,1} - t^4_{4,2} - t^4_{3,1} + t^4_{3,2} + t^4_{6,1} - t^4_{6,2} - t^4_{5,1} + t^4_{5,2} + t^4_{4,3} + t^4_{6,3} - t^4_{6,4} - t^4_{5,3} + t^4_{5,4} + t^4_{6,5}$.

$$\overline{F}_0' \equiv \overline{t_0^4} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x',\,y')\in A'_{\theta',\varphi'}} [t_0(\theta',\varphi',x',y')]^4 dx'dy'}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' d\varphi' \iint\limits_{(x',\,y')\in A'_{\theta',\varphi'}} dx'dy'}. \tag{2.30}$$

Из равенств (2.13), (2.19) и (2.27) находим

$$v = \frac{\pi}{3}\frac{\overline{F'}}{\overline{t}}, \tag{2.31}$$

$$S = \frac{4\pi}{3}\frac{\overline{q}\,\overline{F'}}{(\overline{t})^2}. \tag{2.32}$$

$$\overline{g} = \frac{\pi}{3}\frac{\overline{F'}}{(\overline{t})^2}. \tag{2.33}$$

Для случая выпуклого тела соответствующие формулы можно вывести, подставив в (2.31), (2.32) и (2.33) вместо $\overline{t}$ и $\overline{F'}$ соответственно $\overline{t}_0$ и $\overline{t_0^4}$, определяемые формулами (2.17) и (2.30), а также учитывая, что для выпуклого тела $\overline{q} = 1$,

$$v_0 = \frac{\pi}{3}\frac{\overline{t_0^4}}{\overline{t}_0}, \tag{2.34}$$

$$s_0 = \frac{4\pi}{3}\frac{\overline{t_0^4}}{(\overline{t}_0)^2}, \tag{2.35}$$

$$\overline{g}_0 = \frac{\pi}{3}\frac{\overline{t_0^4}}{(\overline{t})^2}. \tag{2.36}$$

Формулы (2.31), (2.32) и (2.33) можно использовать для оценки объема, площади поверхности и средней площади проекции тела произвольной формы и размеров по величинам, измеряемым и подсчитываемым на прямолинейных сечениях тела. Вычисление оценок указанных характеристик сводится к оцениванию каким-либо способом интегралов, входящих в формулы (2.12), (2.16), (2.27)) для средних значений $\overline{q}, \overline{t}, \overline{F'}$ функций q, t и F'. Для нашего случая, по соображениям изложенным в § 1 данной главы, интерес представляют оценки, получаемые методом Монте-Карло. Приведем эти оценки.

Пусть произведено n независимых испытаний, в каждом из которых тело A случайно пересекается прямой, что можно рассматривать как случайный выбор одной прямой из множества всех прямых, секущих тело A. Один из возможных способов осуществления этой процедуры состоит в следующем.

Выберем произвольно шар R, включающий тело A. Из центра шара проведем луч в случайно выбранном направлении (все направления равновероятны). Пусть θ', φ' — сферические координаты выбранного направления. Пересечем шар R плоскостью E так, чтобы она проходила через центр шара и направление нормали к ней имело координаты θ' и φ'. Из круга, соответствующего пересечению шара R и плоскости E, случайно выберем точку (все точки круга равновероятны). Из выбранной точки (x', y') проведем прямую $L_{\theta', \varphi', x', y'}$ перпендикулярно плоскости E. Если эта прямая пересекает тело A, то она является случайной прямой, секущей тело A. Если эта прямая не пересекает тело A, то она не выбирается, и процедура повторяется сначала.

Описанная процедура повторяется до тех пор пока, не будет получено n прямых $L_1, L_2, \dots, L_n$, секущих тело A. Для каждой из этих прямых вычисляются значения функций: $q(\theta', \varphi', x', y')$ – число отрезков, отсекаемых телом A на прямой $L_{\theta', \varphi', x', y'}$; $t(\theta', \varphi', x', y')$ — длина пересечения тела A и прямой $L_{\theta', \varphi', x', y'}$; $F'(\theta', \varphi', x', y')$ — функция, определяемая выражением (2.28). Полученные в результате n значений каждой из этих функций обозначим через $q_1, q_2, \dots, q_n$; $t_1, t_2, \dots, t_n$; $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$. Средние арифметические из этих значений, которые обозначим через $\hat{q}, \hat{t}, \hat{F}'$ согласно формулам (2.12), (2.16) и (2.27), будут состоятельными и несмещенными оценками величин $\bar{q}, \bar{t}$ и $\bar{F}'$

$$\hat{q} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} q_l, \tag{2.37}$$

$$\hat{t} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} t_l, \tag{2.38}$$

$$\hat{F}' = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} F'_l. \tag{2.39}$$

Подставив эти выражения в (2.31), (2.32) и (2.33) вместо $\bar{q}, \bar{t}$ и $\bar{F}'$, получим соответствующие оценки $\hat{v}, \hat{s}, \hat{g}$ объема v, площади поверхности s и средней площади проекции $\bar{g}$ тела A.

$$\hat{v} = \frac{\pi}{3} \frac{\hat{F}'}{\hat{t}} = \frac{\pi}{3} \frac{\sum_{l=1}^{n} F'_l}{\sum_{l=1}^{n} t_l}, \tag{2.40}$$

$$\hat{s} = \frac{4\pi}{3} \frac{\hat{q}\hat{F'}}{\left(\hat{t}\right)^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{\left(\sum\limits_{l=1}^{n} q\right)\left(\sum\limits_{l=1}^{n} F'_l\right)}{\left(\sum\limits_{l=1}^{n} t_l\right)^2}, \tag{2.41}$$

$$\hat{g} = \frac{\pi}{3} \frac{\hat{F'}}{\left(\hat{t}\right)^2} = \frac{\pi}{3} \frac{n \sum\limits_{l=1}^{n} F'_l}{\left(\sum\limits_{l=1}^{n} t_l\right)^2}. \tag{2.42}$$

Если тело имеет выпуклую форму, то согласно (2.17) и (2.30) оценками $\overline{t}_0$ и $\overline{t}_0^4$ являются

$$\hat{t}_0 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} t_{0,\,l}, \tag{2.43}$$

$$\hat{t}_0^4 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} t_{0,\,l}^4, \tag{2.44}$$

где $t_{0,\,l}$ — длина отрезка, отсекаемого выпуклым телом A_0 на l—ой случайно проведенной секущей прямой.

Оценки объема v_0, площади поверхности s_0 и средней площади проекции $\overline{g}_0$ выпуклого тела A_0 можно получить, подставив (2.43) и (2.44) в соотношения (2.36), (2.34) и (2.35) вместо $\overline{t}_0$ и $\overline{t}_0^4$:

$$\hat{v}_0 = \frac{\pi}{3} \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} t_{0,\,l}^4}{\sum\limits_{l=1}^{n} t_{0,\,l}} \tag{2.45}$$

$$\hat{s}_0 = \frac{4\pi}{3} \frac{n \sum\limits_{l=1}^{n} t_{0,\,l}^4}{\left(\sum\limits_{l=1}^{n} t_{0,\,l}\right)^2} \tag{2.46}$$

$$\hat{g}_0 = \frac{\pi}{3} \frac{n \sum\limits_{l=1}^{n} t_{0,\,l}^4}{\left(\sum\limits_{l=1}^{n} t_{0,\,l}\right)^2} \tag{2.47}$$

Дисперсии оценок $\hat{q}$, $\hat{t}$ и $\hat{F'}$, определяемых формулами (2.37), (2.38) и (2.39), оцениваются как дисперсия средней арифметической. Средние квадратические отклонения оценок $\hat{v}$, $\hat{s}$ и $\hat{g}$ можно вычислить как средние квадратические отклонения функций от случайных аргументов $\hat{q}$, $\hat{t}$ и $\hat{F}'$, определенных формулами (2.40), (2.41) и (2.42), методом линеаризации (Вентцель, 1964).

Можно показать, что оценки (2.40)—(2.42) и (2.45)—(2.47) являются состоятельными, но смещенными.

Формулы (2.40), (2.41) и (2.42), очевидно, и есть решение задачи, сформулированной в начале данного параграфа.

§ 3. Определение геометрических характеристик тела произвольной формы по случайным плоским его сечениям

Пусть тело A произвольной формы пересечено n плоскостями $E_1, E_2, \dots E_n$, проведенными случайно, в соответствии с определением случайной плоскости, упомянутом в § 1 данной главы. Задача, рассматриваемая ниже, состоит в следующем: использовав величины, которые могут быть измерены на каждом из n случайных плоских сечений тела A, нужно оценить объем, площадь поверхности и среднюю толщину тела. Примеры таких задач — оценивание объема некоторого зерна или включения в породе по его сечению плоскостью шлифа, плоскостью полировки полированного образца породы, оценивание объема рудного тела по его сечению поверхностью рельефа или поверхностью горной выработки (если сечение можно рассматривать как случайное и приблизительно плоское). К этой же задаче сводится оценка среднего или суммарного объема совокупности геологических тел, каждое из которых пересечено случайно плоскостью.

Решение настоящей задачи нужно также для решения других стереологических задач, рассматриваемых в следующих параграфах.

Пусть положение плоскости в трехмерном евклидовом пространстве задается параметрами θ'', φ'' и ρ'' — сферическими координатами точки пересечения плоскости перпендикуляром, опущенным к ней от начала системы координат. Плоскость, определяемую параметрами θ'', φ'' и ρ'', будем обозначать через $E_{\theta'', \varphi'', \rho''}$. Меру $\mu_E(A)$ множества $\{E: A \cap E \neq \varnothing\}$ всех плоскостей, секущих тело A произвольной формы, в соответствии с результатами, приведенными в работе* (Кендалл, Моран, 1972, стр. 96), можно представить через интеграл

* В указанной работе выведена формула для меры множества плоскостей, секущих выпуклое тело (трехмерная область). Однако, как видно из способа вывода этой формулы, при использовании введенной ниже величины $h(\theta'', \varphi'')$, выражения для мер множеств секущих выпуклое и невыпуклое тела имеют одинаковый вид.

$$\mu_E(A) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta'' d\theta'' d\varphi'' \int_{\rho'' \in A''_{\theta'', \varphi''}} d\rho'' =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h(\theta'', \varphi'') \sin\theta'' d\theta'' d\varphi'', \qquad (3.1)$$

где $A''_{\theta'', \varphi''}$ — множество значений ρ'', при которых плоскость $E_{\theta'', \varphi'', \rho''}$ при фиксированных θ'' и φ'' пересекает тело A, $h(\theta'', \varphi'')$ — толщина тела A в направлении (θ'', φ'')*.

Средняя толщина тела, полученная усреднением $h(\theta'', \varphi'')$ по всем направлениям (по всем значениям θ'', φ''), равна

$$\overline{h} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h(\theta'', \varphi'') \sin\theta'' d\theta'' d\varphi''}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta'' d\theta'' d\varphi''} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h(\theta'', \varphi'') \sin\theta'' d\theta'' d\varphi''. \qquad (3.2)$$

Используя величину $\overline{h}$, выражение (3.1) перепишем в виде

$$\mu_E(A) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h(\theta'', \varphi'') \sin\theta'' d\theta'' d\varphi'' = 2\pi\overline{h}. \qquad (3.3)$$

Рассмотрим некоторые функции, определенные на множестве всех плоскостей, секущих тело A произвольной формы, и соотносящие каждой плоскости из этого множества одно действительное число. Эти функции можно записать как функции от θ'', φ'', ρ'' — параметров, задающих положение плоскости.

Одна из этих функций — площадь пересечения $A \cap E$ тела A и плоскости $E_{\theta'', \varphi'', \rho''}$, которую обозначим через $p(\theta'', \varphi'', \rho'')$. Если при пересечении тела A плоскостью $E_{\theta'', \varphi'', \rho''}$ образуется одна плоская фигура, то $p(\theta'', \varphi'', \rho'')$ — площадь этой фигуры, если же образуется m изолированных плоских фигур (что возможно для тела невыпуклой формы), то $p(\theta, \varphi'', \rho'')$ — сумма площадей этих m фигур.

---

* Расстояние между опорными плоскостями выпуклого тела, проведенными перпендикулярно фиксированному направлению, различными авторами называется по-разному — «шириной», «высотой» и «толщиной» выпуклого тела в фиксированном направлении (Яглом, Болтянский, 1951; Салтыков, 1970; Кендалл, Моран, 1972). Мы используем термин «толщина тела в фиксированном направлении», распространив его на случай тела произвольной формы.

Среднее значение функции $p(\theta'', \varphi'', \rho'')$, полученное усреднением по всем плоскостям, секущим тело A, в соответствии с (3.1) равно

$$\bar{p} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta'' d\theta'' d\varphi'' \int\limits_{\rho''\in A''_{\theta'',\varphi''}} p(\theta'', \varphi'', \rho'') d\rho''}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta'' d\theta'' d\varphi'' \int\limits_{\rho''\in A''_{\theta'',\varphi''}} d\rho''}. \tag{3.4}$$

Интеграл $\int\limits_{\rho''\in A''_{\theta'',\varphi''}} p(\theta'', \varphi'', \rho'')\, d\rho''$ при любых фиксированных θ'' и φ'' равен объему v тела A. Поэтому интеграл в числителе дроби в (3.4) равен $4\pi v$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta'' d\theta'' d\varphi'' \int\limits_{\rho''\in A''_{\theta'',\varphi''}} p(\theta'', \varphi'', \rho'')\, dp'' = 4\pi v. \tag{3.5}$$

Интеграл в знаменателе дроби в (3.4) согласно (3.1) и (3.3) равен $4\pi\bar{h}$. Подставив эти величины в (3.4), получим

$$\bar{p} = \frac{v}{\bar{h}}. \tag{3.6}$$

Следовательно, для тела произвольной формы средняя площадь плоского сечения равна отношению объема к средней толщине.

Определим теперь функцию $u(\theta'', \varphi'', \rho'')$ как суммарную длину периметров плоских фигур, полученных при пересечении тела A плоскостью $E_{\theta'',\varphi'',\rho''}$. Если при пересечении тела A плоскостью $E_{\theta'',\varphi'',\rho''}$ образуется одна плоская фигура, то $u(\theta'', \varphi'', \rho'')$ — длина периметра этой фигуры.

В соответствии с выражением (3.1) для меры множества плоскостей, секущих тело A, среднее значение $\bar{u}$ функции $u(\theta'', \varphi'', \rho'')$ равно

$$\bar{u} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta'' d\theta'' d\varphi'' \int\limits_{\rho''\in A''_{\theta'',\varphi''}} u(\theta'', \varphi'', \rho'')\, d\rho''}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta'' d\theta'' d\varphi'' \int\limits_{\rho''\in A''_{\theta'',\varphi''}} d\rho''}. \tag{3.7}$$

М. Кендаллом и П. Мораном (1972, стр. 96) показано, что если u — длина кривой пересечения некоторой поверхности B плоскостью, то интеграл от u по множеству всех пересекающих плоскостей равен площади поверхности B, помноженной на

$\frac{1}{2}\pi^2$. Так как это утверждение справедливо также и в том случае, когда вместо поверхности B взята поверхность тела A произвольной формы, то отсюда (с учетом (3.1)) следует, что интеграл в числителе дроби в (3.7) равен $\pi^2 s$ (s — площадь поверхности тела A); а интеграл в знаменателе этой дроби согласно (3.1) и (3.3) равен $4\pi\bar{h}$. Подставив эти величины в (3, 7), получим

$$\bar{u} = \frac{\pi s}{4\bar{h}}. \tag{3.8}$$

Таким образом, мы вывели два соотношения — (3.6) и (3.8) — связывающие искомые характеристики тела v, s и $\bar{h}$ с величинами $\bar{p}$ и $\bar{u}$, оцениваемыми на плоских сечениях. Для нахождения каждого из этих характеристик нужно найти еще одно соотношение между этими величинами и средним значением некоторой функции, вычисляемой по данным плоского сечения. Для нахождения такого соотношения воспользуемся способом, использованным выше в § 2 при построении функции $F'(\theta', \varphi', x', y')$. Обратимся опять к функции $f(x, y, z, \theta, \varphi)$, определяемой выражением (2.1). В (2.5) среднее значение этой функции, равное объему тела A, вычислено усреднением по множеству всех лучей с началами в теле A. Это же среднее значение, очевидно, можно получить также следующим образом. Вычислим сначала среднее значение этой функции по множеству всех лучей, лежащих на плоскости E, с началами в точках пересечения $A\cap E$ тела A и плоскости E. Затем полученную величину усредним с весом, пропорциональным мере этого множества лучей.

Среднее значение функции $f(x, y, z, \theta, \varphi)$ по множеству лучей на плоскости E, с началами в $A\cap E$, равно (эта величина, очевидно, функция от θ'', φ'', ρ'' — параметров плоскости E):

$$\frac{\int\limits_0^{2\pi} \iint\limits_{(x'', y'')\in A\cap E} f(x'', y'', \alpha)\, dx''\, dy''\, d\alpha}{\int\limits_0^{2\pi} \iint\limits_{(x'', y'')\in A\cap E} dx''\, dy''\, d\alpha} = \frac{\frac{\pi}{3} F''(\theta'', \varphi'', \rho'')}{2\pi p(\theta'', \varphi'', \rho'')}, \tag{3.9}$$

где

$$f(x'', y'', \alpha) = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=0}^{q-1} \{[r_{2i+1}(x'', y'', \alpha)]^3 - [r_{2i}(x'', y'', \alpha)]^3\}; \tag{3.10}$$

$r_j(x'', y'', \alpha)$ — расстояние от точки $(x'', y'') \in A\cap E$ до j-ой ($j = 2i+1,\ 2i$) точки пересечения поверхности тела A лучом на плоскости E с началом в точке (x'', y'') и направлением (α) (α — угловая координата в полярной системе координат на плоскости E).

При написании выражения (3.10) для удобства записи принято, что $r_0 = 0$. В (3.9) введено обозначение.

$$F''(\theta'', \varphi'', \rho'') = \frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi} \iint_{(x'', y'') \in A \cap E} f(x'', y'', \alpha)\, dx''\, dy''\, d\alpha. \quad (3.11)$$

Мера множества всех лучей на плоскости E с началами в $A \cap E$ равна $\int_0^{2\pi} \iint_{(x'', y'') \in A \cap E} dx'' dy'' d\alpha = 2\pi p\,(\theta'', \varphi'', \rho'')$. Усредняя $\dfrac{\frac{\pi}{3} F''(\theta'', \varphi'', \rho'')}{2\pi p\,(\theta'', \varphi'', \rho'')}$ с весом прямо пропорциональным $2\pi p\,(\theta'', \varphi'', \rho'')$ по всем плоскостям, секущим тело A, получим среднее значение $\overline{f}$ функции $f(x, y, z, \theta, \varphi)$, которое согласно (2.5) равно объему тела A:

$$\overline{f} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta'', d\theta'', d\varphi'' \int_{\rho'' \in A''_{\theta'', \varphi''}} F''(\theta'', \varphi'', \rho'')\, d\rho''}{6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta'' d\theta'' d\varphi'' \int_{\rho'' \in A''_{\theta'', \varphi''}} p\,(\theta'', \varphi'', \rho'') d\rho''} = v. \quad (3.12)$$

Интеграл в знаменателе дроби в (3.12) согласно (3.5) равен $4\pi v$. Используя это из (3.12), найдем

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta'' d\theta'' d\varphi'' \int_{\rho'' \in A''_{\theta'', \varphi''}} F''(\theta'', \varphi'', \rho'')\, d\rho'' = 24\pi v^2.$$

Поделив обе части этого равенства на интеграл $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \int_{\rho'' \in A''_{\theta'' \rho''}} \sin\theta'' d\theta'' \times$ $\times\, d\varphi'' d\rho''$, который согласно (3.1) и (3.3) равен $4\pi \overline{h}$, получим

$$\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta'' d\theta'' d\varphi'' \int_{\rho'' \in A''_{\theta'', \varphi''}} F''(\theta'', \varphi'', \rho'') d\rho''}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \int_{\rho'' \in A''_{\theta'', \varphi''}} \sin\theta'' d\theta'' d\varphi'' d\rho''} = \frac{6v^2}{\overline{h}} = \overline{F}''. \quad (3.13)$$

Выражение в левой части этого равенства совпадает со средним значением функции $F''(\theta'', \varphi'', \rho'')$ по множеству всех плоскостей, секущих тело A.

Подставив выражение для $\overline{h}$, найденное из (3.6), в (3.13) вычислим

$$v = \frac{1}{6} \frac{\overline{F''}}{\overline{p}}, \qquad (3.14)$$

Из соотношений (3.6) и (3.14)

$$\overline{h} = \frac{1}{6} \frac{\overline{F''}}{(\overline{p})^2}. \qquad (3.15)$$

Из (3.8) и (3.15) —

$$s = \frac{2}{3\pi} \frac{\overline{u}\,\overline{F''}}{(\overline{p})^2}. \qquad (3.16)$$

Формулы (3.14), (3.15) и (3.16) выражают объем v, среднюю толщину $\overline{h}$ и площадь поверхности s тела A произвольной формы через средние значения $\overline{p}$, $\overline{u}$ и $\overline{F''}$ функций $p(\theta'', \varphi'', \rho'')$, $u(\theta'', \varphi'', \rho'')$ и $F''(\theta'', \varphi'', \rho'')$, которые могут быть оценены по плоским сечениям тела. Это оценивание сводится к оценке каким-либо способом интегралов, входящих в выражения (3.4), (3.7) и (3.13). Рассмотрим оценивание этих интегралов методом Монте-Карло.

Производятся независимые испытания, в каждом из которых тело A произвольной формы случайно пересекается плоскостью. Случайное пересечение можно рассматривать как случайный выбор одной плоскости из множества всех плоскостей, секущих тело A. Один из возможных способов осуществления такого выбора сводится к следующему.

Выбирается произвольно шар R, включающий тело A. Из центра шара в случайно выбранном направлении (все направления равновероятны) проводится луч. На отрезке отсеченной на этом луче шаром R выбирается случайно точка (все точки отрезка равновероятны). Через эту точку перпендикулярно лучу проводится плоскость. Если эта плоскость пересекает тело A, то она является плоскостью случайно выбранной из множества всех плоскостей, секущих тело A. Если эта плоскость не пересекает тело A, то она не выбирается. Эта процедура повторяется до тех пор пока не будет выбрано достаточное число секущих плоскостей.

Пусть этим способом выбрано n секущих плоскостей $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Для каждой выбранной плоскости вычислим значения функций $p(\theta'', \varphi'', \rho'')$, $u(\theta'', \varphi'', \rho'')$ и $F''(\theta'', \varphi'', \rho'')$*. Значения этих функций, соответствующих плоскостям $E_1, E_2, \ldots, E_n$, обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $F''_1, F''_2, \ldots, F''_n$. Средние арифметические этих значений, которые обозначим через $\hat{p}$, $\hat{u}$, $\hat{F}''$, согласно формулам (3.4), (3.7) и (3.13), являются состоятельными и несмещенными оценками величин $\overline{p}$, $\overline{u}$ и $\overline{F''}$.

---

* Вычисление значения функции $F''(\theta'', \varphi'', \rho'')$ сводится к оценке каким-либо способом кратного интеграла в (3.11).

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} p_l\,, \tag{3.17}$$

$$\hat{u} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} u_l, \tag{3.18}$$

$$\hat{F''} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} F''_l\,. \tag{3.19}$$

Оценки $\hat{v}$, $\hat{h}$, $\hat{s}$ объема v, средней толщины $\bar{h}$ и площади s поверхности тела A можно получить подставив $\hat{p}$, $\hat{u}$ и $\hat{F''}$ вместо $\bar{p}$, $\bar{u}$ и $\bar{F}''$ в формулы (3.14), (3.15) и (3.16):

$$\hat{v} = \frac{1}{6}\,\frac{\sum_{l=1}^{n} F''_l}{\sum_{l=1}^{n} p_l} \tag{3.20}$$

$$\hat{h} = \frac{1}{6}\,\frac{n\sum_{l=1}^{n} F''_l}{\left(\sum_{l=1}^{n} p_l\right)^2} \tag{3.21}$$

$$\hat{s} = \frac{2}{3\pi}\,\frac{\left(\sum_{l=1}^{n} F''_l\right)\left(\sum_{l=1}^{n} u_l\right)}{\left(\sum_{l=1}^{n} p_l\right)^2} \tag{3.22}$$

Эти оценки являются состоятельными, но смещенными.

В приведенных выше формулах для определения характеристик тела по плоским сечениям содержатся величины площади и периметров плоских фигур, полученных при пересечении тела плоскостью. В стереологических задачах геологии (особенно, петрографии) вследствии того, что формы геологических тел обычно бывают сложными и геометрически неправильными, оценка указанных характеристик плоского сечения также производится проведением секущих прямых на плоскости сечения. Положение этих прямых относительно плоского сечения тела часто случайное. В связи с этим возникает задача определения характеристик плоской фигуры произвольной конфигурации по пересечениям их прямыми, проводимыми случайно на плоскости. Очевидно эта задача — аналог (для двумерного случая) рассмотренных задач трехмерного пространства, поэтому приведем только конечные результаты ее решения.

Прямую $L_{\alpha,\rho}$ на плоскости зададим параметрами α, ρ-полярными координатами точки пересечения данной прямой перпендикуляром, опущенным из начала системы координат.

Введем следующие функции, определенные на множестве всех прямых на плоскости, секущих плоскую фигуру произвольной конфигурации (связную замкнутую область на плоскости):

$q_1(\alpha, \rho)$ — число отрезков, отсекаемых фигурой B на прямой $L_{\alpha,\rho}$;

$\overline{q}_1$ — среднее число отрезков прямолинейного сечения плоской фигуры B, полученное усреднением $q_1(\alpha, \rho)$ по всем прямым, секущим B:

$$\overline{q}_1 = \frac{\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\rho \in B'_\alpha} q_1(\alpha, \rho)\, d\rho d\alpha}{\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\rho \in B'_\alpha} d\rho d\alpha}, \tag{3.23}$$

где через B'_α обозначена проекция фигуры B на прямую, перпендикулярную прямой $L_{\alpha,\rho}$. В случае, если B выпуклая фигура, то $q_1(\alpha, \rho) = 1$, $\overline{q}_1 = 1$;

$t_1(\alpha, \rho)$ — длина пересечения $B \cap L_{\alpha,\rho}$ фигуры B и прямой $L_{\alpha,\rho}$.

Если на прямой $L_{\alpha,\rho}$ фигура B отсекает один отрезок, то $t_1(\alpha, \rho)$ — длина этого отрезка; если она отсекает больше одного, то $t_1(\alpha, \rho)$ — их суммарная длина;

$\overline{t}_1$ — средняя длина прямолинейного сечения плоской фигуры B, полученная усреднением $t_1(\alpha, \rho)$ по множеству всех прямых, секущих B:

$$\overline{t}_1 = \frac{\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\rho \in B'_\alpha} t_1(\alpha, \rho)\, d\rho d\alpha}{\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\rho \in B'_\alpha} d\rho d\alpha}; \tag{3.24}$$

$h_1(\alpha)$ — длина проекции B'_α фигуры B на прямую, перпендикулярную прямой $L_{\alpha,\rho}$;

$\overline{h}_1$ — средняя длина проекции плоской фигуры B, полученная усреднением $h_1(\alpha)$ по всем значениям α:

$$\overline{h}_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h_1(\alpha)\, d\alpha; \tag{3.25}$$

$F_1(\alpha, \rho)$ — функция, определяемая выражением

$$F_1(\alpha, \rho) = \sum_{i=1}^{q} \left[t^3_{2i, 2i-1} + \sum_{j=i+1}^{q} \left(t^3_{2i-1, 2j} - t^3_{2i, 2j} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - t^3_{2i-1, 2j-1} + t^3_{2i, 2j-1} \right) \right], \qquad (3.26)$$

здесь $q = q(\alpha, \rho)$ — число отрезков, отсекаемых фигурой B на прямой $L_{\alpha, \rho}$;

$t_{\mu, \nu}$ — расстояние между μ-ой и ν-ой ($\mu, \nu = 2i, 2i-1, 2j, 2j-1$; $i = 1, 2, \ldots, q$; $j = i+1, i+2, \ldots, q$) точками пересечения границы фигуры B и прямой $L_{\alpha, \rho}$. Функция $F_1(\alpha, \rho)$ аналогична функции, определенной выше выражением (2.28) для трехмерного случая*.

Площадь p_1, периметр u_1 и средняя длина проекции $\bar{h}_1$ плоской фигуры B произвольной конфигурации выражаются через введенные выше величины, определяемые на прямолинейных сечениях, формулами:

$$p_1 = \frac{\pi}{3} \frac{\overline{F}_1}{\overline{t}_1}, \qquad (3.27)$$

$$u_1 = \frac{\pi^2}{6} \frac{\overline{q}_1 \overline{F}_1}{(\overline{t}_1)^2}, \qquad (3.28)$$

$$h_1 = \frac{\pi}{3} \frac{\overline{F}_1}{(\overline{t}_1)^2}. \qquad (3.29)$$

В частном случае для выпуклой плоской фигуры эти формулы переходят в следующие:

$$p_{1,0} = \frac{\pi}{3} \frac{\overline{t^3_{1,0}}}{\overline{t}_{1,0}}, \qquad (3.30)$$

$$u_{1,0} = \frac{\pi^2}{6} \frac{\overline{t^3_{1,0}}}{(\overline{t}_{1,0})^2}, \qquad (3.31)$$

$$\overline{h}_{1,0} = \frac{\pi}{3} \frac{\overline{t^3_{1,0}}}{(\overline{t}_{1,0})^2}, \qquad (3.32)$$

где $\overline{t^3_{1,0}}$ — среднее значение величины $\left[t_{1,0}(\alpha, \rho) \right]^3$, полученное усреднением по всем прямым секущим фигуру B,

$t_{1,0}(\alpha, \rho)$ — длина отрезка, отсекаемого фигурой B на прямой $L_{\alpha, \rho}$;

---

* См. сноску на стр. 123.

$\overline{t}_{1,0}$ — средняя длина секущих фигуры B, полученная усреднением $t_{1,0}(\alpha, \rho)$ по всем прямым, секущим B.

Можно показать, что из равенств (3.30), (3.31), и (3.32) выводятся формула Коши (Кендалл, Моран, 1972, стр. 69, формула (3.2)) и соотношение, доказанное Крофтоном в одной из его теорем о выпуклых фигурах, приведенное в работе (Кендалл, Моран, 1972, стр. 77).

Пусть $\{L_1, L_2, ..., L_n\}$ — совокупность прямых, являющаяся случайной выборкой из множества всех прямых, секущих плоскую фигуру B. Выбор прямых осуществляется аналогично описанным выше для трехмерного случая процедурам статистических испытаний. Выбирается произвольно круг, включающий фигуру B. Через ее центр в случайном направлении (все направления равновероятны) проводится луч K. Из отрезка, отсекаемого кругом на этом луче, случайно выбирается точка (все точки отрезка равновероятны). Через эту точку перпендикулярно лучу K проводится прямая. Если эта прямая пересекает фигуру B, то она отбирается как случайно выбранная секущая прямая, если не пересекает — то не выбирается. Испытания повторяются до получения достаточного числа секущих прямых*.

Значения определенных выше функций $q_1(\alpha, \rho)$, $t_1(\alpha, \rho)$, $F_1(\alpha, \rho)$, $t_{1,0}(\alpha, \rho)$ для l-ой случайно выбранной секущей прямой обозначим соответственно через $q_{1,l}$, $t_{1,l}$, $F_{1,l}$ и $t_{1,0,l}$. Тогда состоятельными оценками площади p_1, периметра u_1, средней длины $\overline{h}_1$ проекции плоской фигуры произвольной формы соответственно являются

$$\hat{p}_1 = \frac{\pi}{3} \frac{\sum_{l=1}^{n} F_{1,l}}{\sum_{l=1}^{n} t_{1,l}}, \tag{3.33}$$

$$\hat{u}_1 = \frac{\pi^2}{6} \frac{\left(\sum_{l=1}^{n} q_{1,l}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} F_{1,l}\right)}{\left(\sum_{l=1}^{n} t_{1,l}\right)^2}, \tag{3.34}$$

$$\hat{h}_1 = \frac{\pi}{3} \frac{n \sum_{l=1}^{n} F_{1,l}}{\left(\sum_{l=1}^{n} t_{1,l}\right)^2}. \tag{3.35}$$

---

* Испытания можно проводить по схеме, при которой избегается получение несекущих прямых. Однако при этом усложняется процедура выбора прямой.

В случае выпуклой плоской фигуры эти формулы переходят в следующие:

$$\hat{p}_{1,0} = \frac{\pi}{3} \frac{\sum_{l=1}^{n} t_{1,0,l}^{3}}{\sum_{l=1}^{n} t_{1,0,l}}, \tag{3.36}$$

$$\hat{u}_{1,0} = \frac{\pi^2}{6} \frac{n \sum_{l=1}^{n} t_{1,0,l}^{3}}{\left(\sum_{l=1}^{n} t_{1,0,l}\right)^2}, \tag{3.37}$$

$$\hat{h}_{1,0} = \frac{\pi}{3} \frac{n \sum_{l=1}^{n} t_{1,0,l}^{3}}{\left(\sum_{l=1}^{n} t_{1,0,l}\right)^2}. \tag{3.38}$$

Стандартные отклонения введенных в данном параграфе случайных величин можно оценивать способом, указанным в конце § 2.

Таким образом, мы рассмотрели случаи пересечения тела в трехмерном пространстве плоскостью и прямой и пересечения плоской фигуры прямой. Сопоставление приведенных выше основных соотношений приводит к выводу о возможности их обобщения. Выявление единой структуры этих соотношений дает возможность свести исследование предложенных выше оценок к изучению лишь некоторых из них (см. § 7 данной главы).

Введем следующие обозначения:

R^n — n-мерное ($n = 2,3$) евклидово пространство;

A^n — n-мерная замкнутая связная область в пространстве R^n;

G_A^{n-1} — гиперповерхность в пространстве R^n, ограничивающая область A^n;

E^m — m-мерная ($m=1,2$) плоскость в пространстве R^n (E^1 — прямая, E^2 — обычная плоскость);

B_A^{n-1} — ортогональная проекция области A^n на $(n-1)$-мерную плоскость E^{n-1};

$\mu\left(B_A^{n-1}\right)$ — мера множества точек проекции B_A^{n-1};

$\overline{\mu\left(B_A^{n-1}\right)}$ — средняя мера множества точек проекции области A^n, полученная усреднением $\mu\left(B_A^{n-1}\right)$ по всем направлениям;

$\mu(A^n)$, $\mu\left(G_A^{n-1}\right)$, $\mu(A^n \cap E^m)$ — меры множеств точек A^n, G_A^{n-1} и $A^n \cap E^m$;

$\nu\left(G_A^{n-1} \cap E^m\right)$ — мера множества точек $G_A^{n-1} \cap E^m$, если это множество несчетное и число точек, если это множество конечное (случай, когда $G_A^{n-1} \cap B^m$ — бесконечное счетное множество — не рассматривается);

$\overline{\mu\left(A^n \cap E^m\right)}$, $\overline{\nu\left(G_A^{n-1} \cap E^m\right)}$ — средние значения величин $\mu\left(A^n \cap E^m\right)$, $\nu\left(G_A^{n-1} \cap E^m\right)$, полученные усреднением по всем m-мерным плоскостям E^m, для которых выполняется условие $A^n \cap E^n \neq \varnothing$;

$F^{(n+1)}(E^1)$ — функция, определяемая выражением

$$F^{(n+1)}(E^1) = \sum_{i=1}^{q}\left[t_{2i,\,2i-1}^{n+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=i+1}^{q}\left(t_{2i-1,\,2j}^{n+1} - t_{2i,\,2j}^{n+1} - t_{2i-1,\,2j-1}^{n+1} + t_{2i,\,2j-1}^{n+1}\right)\right], \tag{3.39}$$

где $t_{k,\,l} = t_{k,\,l}(E^1)$ — расстояние между k-ой и l-ой точками пересечения гиперповерхности G_A^{n-1} прямой E^1 в пространстве R^n ($k,\ l = 2i,\ 2i-1,\ 2j,\ 2j-1;\ i = 1, 2, \ldots, q;\ j = i+1, i+2, \ldots q$);

$\overline{F^{(n+1)}}$ — среднее значение функции $F^{(n+1)}(E^1)$, полученное усреднением по всем прямым E^1, для которых $A^n \cap E^1 \neq \varnothing$.

Используя введенные обозначения равенства (2.31), (3.14) и (3.27) можно записать в следующей общей форме:

$$\mu\left(A^n\right) = k_1 \frac{\overline{F^{(n+1)}}}{\overline{\mu\left(A^n \cap E^m\right)}}, \tag{3.40}$$

где k_1 — константа. Равенства (2.31), (3.14) и (3.27) получаются из этой формулы, соответственно при $n = 3$, $m = 1$, $k_1 = \frac{\pi}{3}$; $n = 3$, $m = 2$, $k_1 = \frac{1}{6}$ и $n = 2$, $m = 1$, $k_1 = \frac{\pi}{3}$.

Обобщением соотношений (2.32), (3.16) и (3.28) является формула

$$\mu\left(G_A^{n-1}\right) = k_2 \frac{\overline{\nu\left(G_A^{n-1} \cap E^m\right) \cdot F^{(n+1)}}}{\left[\overline{\mu\left(A^n \cap E^m\right)}\right]^2}, \tag{3.41}$$

где k_2 — константа.

Эта формула переходит в указанные соотношения, соответственно при $n = 3$, $m = 1$, $k_2 = \frac{4\pi}{3}$; $n = 3$, $m = 2$, $k_2 = \frac{2}{3\pi}$ и $n = 2$, $m = 1$, $k_2 = \frac{\pi^2}{6}$.

Соотношения (2.33) и (3.29) можно получить из формулы

$$\mu\left(B_A^{n-1}\right) = k_3 \frac{F^{(n+1)}}{\left[\mu\left(A^n \cap E^m\right)\right]^2} \tag{3.42}$$

при $n = 3$, $m = 1$, $k_3 = \frac{\pi}{3}$ и $n = 2$, $m = 1$, $k_3 = \frac{\pi}{3}$.

Из равенств (3.40), (3.41) выводится формула, выражающая зависимость между мерами множеств точек n-мерной ($n = 2,3$) области и ее границы:

$$\frac{\mu\left(A^n\right)}{\mu\left(G_A^{n-1}\right)} = k' \frac{\overline{\mu\left(A^n \cap E^m\right)}}{\overline{\nu\left(G_A^{n-1} \cap E^m\right)}}, \tag{3.43}$$

где $k' = \frac{k_1}{k_2}$ — константа. Соотношение (2.20) — частный случай этой зависимости.

Из равенств (3.41), (3.42) выводится соотношение

$$\frac{\mu\left(G_A^{n-1}\right)}{\mu\left(B_A^{n-1}\right)} = k'' \overline{\nu\left(G_A^{n-1} \cap E^m\right)}, \tag{3.44}$$

где $k'' = \frac{k_2}{k_3}$. Это соотношение в частном случае при $n = 3$, $m = 1$, $k'' = 4$ совпадает с равенством (2.13).

§ 4. Определение геометрических характеристик системы тел по случайным прямолинейным ее сечениям

Рассмотрим задачу определения распределения геометрических характеристик тел произвольных форм, образующих некоторую систему по случайным прямолинейным сечениям данной системы.

Совокупность тел, пересеченных случайно проведенной прямой или плоскостью, представляет нерепрезентативную (непредставительную) выборку из системы тел, так как большие тела в общем имеют бóльшую вероятность быть пересеченными. Поэтому решение данной задачи не сводится к простой оценке геометрических характеристик каждого из пересеченных тел.

Задачи, которые сводятся к рассматриваемой, довольно часто встречаются в различных областях геологии. Линию на плоскости шлифа или полированного образца породы, проведенную независимо от положения зерен, можно рассматривать как случайную по отношению к зернам породы. Определение распределения объемов или площадей поверхностей зерен по отрезкам, отсекаемым на такой линии зернами, относится к рассматриваемой задаче. В качестве другого примера можно привести задачу оценки суммарного объема тел, пересеченных скважиной по длинам отрезков, отсекаемых телами на оси скважины, когда пересечение можно считать случайным.

Рассмотрим сначала задачу оценки среднего объема тел произвольных форм, образующих некоторую систему, по результатам пересечения этой системы случайными полупрямыми (лучами).

Для пояснения этой задачи можно привести следующий пример. На плоскость среза породы (в прозрачном шлифе или в полированном образце) «случайно бросается» точка (x,y,z). В случайном направлении (θ, φ) от этой точки проводится луч $K_{x, y, z, \theta, \varphi}$ (см. рис. 4). Измеряются расстояния между точками пересечения луча и поверхности зерна, в которое попала точка (x, y, z). Эта процедура повторяется n раз. По полученным результатам необходимо оценить средний объем зерен породы.

Общая формальная постановка задачи сводится к следующему.

Пусть имеется система тел M произвольных форм — множество связных областей в трехмерном евклидовом пространстве. Допустим также, что число тел No системы M достаточно большое и характеристики отдельных тел (объем, площадь поверхности и т. д.) можно рассматривать как реализации непрерывных случайных величин, так что имеет смысл говорить о распределении этих характеристик в системе тел M*. В область D, включающую тела системы M, «случайно бросается» точка (x,y,z). Если эта точка попала в некоторое тело A, то от нее в случайном направлении (θ,φ) проводится луч $K_{x, y, z, \theta, \varphi}$. Измеряются расстояния между точками пересечения лучом $K_{x, y, z, \theta, \varphi}$ поверхности тела A_k (см. рис. 4). Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет получено n лучей с началами в телах системы M.

По полученным данным нужно оценить средний объем тел.

Вероятность (λ_k) того, что начало случайного луча попадает в k-ое тело прямо пропорциональна объему этого тела:

$$\lambda_k = \frac{v_k}{v},$$

где v и v_k — объем области D и k-ого тела. Поэтому для получения оценки $\widetilde{V}$ среднего объема $\bar{V}$ тел системы M по выборке тел, в которых оказались начала случайных полупрямых, нужно объемы тел в этой выборке усреднять с весом обратно пропорциональным их объемам, т. е. с весом $c\frac{1}{v_k}$ (c — коэффициент пропорциональности). С учетом, того, что в k-ом теле могут оказаться начала больше одной полупрямой, выражение для $\widetilde{V}$ имеет вид

$$\widetilde{V} = \sum_{k=1}^{N} c\frac{1}{v_k} \cdot n_k \cdot v_k = c\sum_{k=1}^{N} n_k, \tag{4.1}$$

---

* Если число тел системы мало́, для оценки характеристик каждого тела этой системы по случайным сечениям можно применить приведенные выше формулы. Рассматриваемые ниже задачи возникают именно тогда, когда число тел N_0 достаточно большое.

где n_k — число лучей с началами в теле A_k, N—число тел, в которых расположены начала одной или более полупрямых.

Для удобства записи будем считать, что тела системы M пронумерованы таким образом, что $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ — есть совокупность тел, в которых расположены начала одной или более полупрямых, а $\{A_{N+1}, A_{N+2}, \dots, A_{N_0}\}$ — совокупность тел, в которых не оказалось начала ни одной полупрямой.

Коэффициент c в (4.1) можно найти из условия нормировки:

$$\sum_{k=1}^{N} c\frac{n_k}{v_k} = 1. \qquad (4.2)$$

Подставив в (4.1) значение c из (4.2) и выражение (2.7) для оценки объема k-ого тела, получим

$$\widetilde{V} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} n_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{n_k}{\hat{v}_k}}, \qquad (4.3)$$

где

$$\hat{v}_k = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n_k} f_{kl};$$

здесь f_{kl} — значение функции f, определяемой выражением (2.1), вычисленное для k-ого тела и l-ого луча с началом в k-ом теле.

Покажем, что выражение (4.3) — состоятельная оценка для среднего объема системы тел.

Очевидно, что при стремлении числа n случайно выбираемых лучей к бесконечности, число тел N, в которые попадают начала одной и более лучей, будет стремиться к числу N_0 тел системы. Можно принять также, что при $n \to \infty$ отношение $\frac{n_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} n_k}$ сходится по вероятности к $\frac{v_k}{\sum\limits_{k=1}^{N_0} v_k}$, т. е. при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{n_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} n_k} - \frac{v_k}{\sum\limits_{k=1}^{N_0} v_k}\right| \leqslant \varepsilon\right] = 1. \qquad (4.4)$$

Поэтому, при больших n_k будет выполняться приближенное равенство, точность которого увеличивается с увеличением n_k

$$n_k \approx \frac{v_k}{\sum\limits_{k=1}^{N_0} v_k} \sum_{k=1}^{N} n_k. \tag{4.5}$$

Подставив (4.5) в (4.3) и учитывая, что число членов в каждой сумме в (4.3) при $n \to \infty$ стремится к N_0 и $\hat{v}_k \to v_k$, получим

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} n_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{n_k}{v_k}} - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N_0} v_k\right| \leqslant \varepsilon\right] = 1. \tag{4.6}$$

Из равенства (4.6) следует, что выражение (4.3) действительно — состоятельная оценка среднего объема тел системы

$$\overline{V} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N_0} v_k.$$

Можно показать, что эта оценка является смещенной.

Все величины, входящие в формулу (4.3), могут быть вычислены по данным замеров или подсчетов по пересечениям системы тел со случайно проведенными лучами. Таким образом, формула (4.3) есть решение сформулированной выше задачи.

Рассмотрим теперь задачу оценки усредненных геометрических характеристик системы тел по пересечениям этой системы случайно проведенными прямыми.

Допустим, что система тел M пересечена прямыми $L_1, L_2, \ldots, L_n$, случайно проведенными, способом, описанным в § 2. При этом некоторые тела системы могут быть не пересечены ни одной прямой, другие пересечены несколькими или, в частном случае, всеми прямыми.

Пересечение системы тел M случайно проведенной прямой L образует совокупность отрезков прямой L, которую мы называем случайным прямолинейным сечением системы тел M.

Задача, которую рассмотрим ниже, состоит в том, что нужно оценить характеристики распределения объемов и площадей поверхностей тел системы M по ее n ($n=1, 2, \ldots$) случайным прямолинейным сечениям.

Пусть D — некоторая связная область трехмерного пространства, включающая все тела системы M, $A_k \subset D$; $k = 1, 2, \ldots, N_0$. Вероятность (λ_k) того, что прямая L, случайно выбранная из множества всех прямых, секущих область D, пересечет тело A_k, равна отношению мер множеств прямых секущих тело A_k и область D. Отсюда с учетом (2.11) имеем

$$\lambda_k = \frac{\mu_L(A_k)}{\mu_L(D)} = \frac{\overline{g}_k}{\overline{g}}, \tag{4.7}$$

где $\mu_L(A_k)$ и $\mu_L(D)$ — меры множеств прямых секущих, соответственно, тело A_k и область D;

$\overline{g}_k$ и $\overline{g}$ — средние площади проекций тела A_k и области D, определяемые по формуле (2.10).

Из (4.7) видно, что вероятность λ_k пересечения k-ого тела случайной прямой пропорциональна средней площади проекции $\overline{g}_k$ и коэффициент пропорциональности $\frac{1}{\overline{g}}$ — постоянная величина для всех тел системы M.

Пусть нужно оценить средний объем $\overline{V}$ тел системы M по выборке тел, пересеченных случайно выбранной прямой L. Для этого, в силу изложенных выше соображений, объемы тел, пересеченных прямой, должны быть усреднены с весом обратно пропорциональным средней площади проекции тел (так как тела с большей средней площадью проекции имеют бо́льшую вероятность быть пересеченной прямой), т. е. с весом $c\frac{1}{\overline{g}_k}$ (c — коэффициент пропорциональности):

$$\widetilde{V} = \sum_{k=1}^{N} c\frac{1}{\overline{g}_k} v_k, \tag{4.8}$$

$\widetilde{V}$ — оценка среднего объема $\overline{V}$ тел системы M. Суммирование в (4.8) производится по всем N телам, пересеченным случайно выбранной прямой L.

Рассмотрим случай, когда система тел M пересекается случайно проведенными прямыми $L_1, L_2, \dots, L_n$. Обозначим через n_k ($n_k = 1, 2, \dots, n$) число прямых, пересекающих k-ое тело. Для удобства записи будем считать, что тела системы M, пронумерованные так, что $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ есть совокупность тел, пересеченных одной или более прямыми, а $\{A_{N+1}, A_{N+2}, \dots, A_{N_0}\}$ — совокупность тел, не пересеченных ни одной прямой. Обобщением формулы (4.8) на этот случай является формула

$$\widetilde{V} = \sum_{k=1}^{N} c\frac{n_k}{\overline{g}_k} v_k. \tag{4.9}$$

Коэффициент c найдем из условия нормировки —

$$\sum_{k=1}^{N} c\frac{n_k}{\overline{g}_k} = 1.$$

С учетом этого равенства перепишем (4.9):

$$\widetilde{V} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{n_k}{\bar{g}_k} v_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{n_k}{\bar{g}_k}}. \qquad (4.10)$$

Оценками $\hat{v}_k$ и $\hat{g}_k$ объема и средней площади проекции тела A_k по n_k случайным прямолинейным сечениям согласно (2.40) и (2.42) будут

$$\hat{v}_k = \frac{\pi}{3} \frac{\sum\limits_{l=1}^{n_k} F'_{kl}}{\sum\limits_{l=1}^{n_k} t_{kl}}$$

$$\hat{g}_k = \frac{\pi}{3} \frac{n \sum\limits_{l=1}^{n_k} F'_{kl}}{\left(\sum\limits_{l=1}^{n_k} t_{kl}\right)^2}, \qquad (4.11)$$

где F'_{kl} и t_{kl} те же величины, что и F'_l и t_l, введенные в § 2, записанные здесь для k-ого тела.

Подставив в (4.10) вместо v_k и $\bar{g}_k$ их оценки для оценки среднего объема тел получим

$$\widetilde{V} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{n_k}{\hat{g}_k} \hat{v}_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{n_k}{\hat{g}_k}}. \qquad (4.12)$$

Из способа вывода формулы (4.12) видно, что ее обобщением на случай оценки начального момента порядка α распределения объемов тел является выражение

$$\nu_\alpha(V) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{n_k}{\hat{g}_k} \left(\hat{v}_k\right)^\alpha}{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{n_k}{\hat{g}_k}}. \qquad (4.13)$$

Разобьем весь интервал изменения оценок объемов тел, пересеченных одной и более прямыми, на m подынтервалов

$$\left(v_i - \frac{1}{2}\Delta v,\ v_i + \frac{1}{2}\Delta v \right)\ i = 1,\ 2, \ldots,\ m,$$

и перейдем к отдельной нумерации совокупности тел с оценками объемов, попадающими в i-ый интервал, так что $\{A_{i1}, A_{i2}, \ldots \ldots, A_{ij}, \ldots, A_{iN_i}\}$ есть совокупность всех тел, пересеченных одной и более прямыми, оценки объемов которых попадают в i-ый интервал. Тогда формулу (4.12) можно переписать в виде

$$\widetilde{V} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{n_{ij}}{\hat{g}_{ij}} v_i}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{n_{ij}}{\hat{g}_{ij}}}, \tag{4.14}$$

где n_{ij} — число прямых секущих тело A_{ij};

$\hat{g}_{ij}$ — оценка средней площади проекции тела A_{ij}.

Представим равенство (4.14) в форме

$$\widetilde{V} = \sum_{i=1}^{m} \hat{P}_i \left(v_i - \frac{1}{2}\Delta v \leqslant v \leqslant v_i + \frac{1}{2}\Delta v \right) \cdot v_i, \tag{4.15}$$

где

$$\hat{P}_i \left(v_i - \frac{1}{2}\Delta v \leqslant v \leqslant v_i + \frac{1}{2}\Delta v \right) = \frac{\sum_{i=1}^{N_i} \frac{n_{ij}}{\hat{g}_{ij}}}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{n_{ij}}{\hat{g}_{ij}}}, \tag{4.16}$$

$$i = 1,\ 2, \ldots,\ m.$$

Из формулы (4.15) видно, что $\hat{P}_i \left(v_i - \frac{1}{2}\Delta v \leqslant v \leqslant v_i + \frac{1}{2}\Delta v \right)$ — оценка отношения $\frac{N_{0i}}{N_0}$ числа тел N_{0i} с объемами, попадающими в интервал $\left(v_i - \frac{1}{2}\Delta v,\ v_i + \frac{1}{2}\Delta v \right)$, к числу всех тел N_0 системы M, т. е. выражение (4.16) определяет распределение объемов тел системы M через величины, измеряемые и подсчитываемые на случайных прямолинейных сечениях системы тел.

Покажем, что выражение (4.16) является состоятельной оценкой отношения $\frac{N_{0i}}{N_0}$.

Пусть число n секущих прямых стремится к бесконечности. По аналогии с (4.5), используя (4.7), можно вывести следующее приближенное равенство, точность которого увеличивается с увеличением n_{ij}:

$$n_{ij} \approx c\hat{g}_{ij}, \tag{4.17}$$

где c — коэффициент, не зависящий от i и j.

Подставив в (4.16) $c\hat{g}_{ij}$ вместо n_{ij} и имея в виду, что при $n \to \infty$ $\hat{g}_{ij} \to g_{ij}$, убеждаемся что, при $n \to \infty$ каждый член в суммах, входящих в (4.16), стремится к c:

$$\frac{n_{ij}}{\hat{g}_{ij}} \to c,$$

с другой стороны, число N_i членов в каждой сумме при $n \to \infty$ будет стремится к числу тел N_{0i}, объемы которых находятся в интервале $\left(v_i - \frac{1}{2} \Delta v, \ v_i + \frac{1}{2} \Delta v \right)$.

Учитывая сказанное, приходим к выводу, что при $n \to \infty$ $\hat{P}_i$ по вероятности сходится к $\frac{N_{oi}}{N_o}$ и, следовательно, является состоятельной оценкой этого отношения. Аналогично доказывается состоятельность оценки (4.13). Можно также показать, что оценки (4.13) и (4.16) — смещенные.

Используя (4.16) или (4.13), можно получить оценки центральных моментов распределения объемов тел системы.

Все величины, входящие в формулы (4.13) и (4.16), могут быть вычислены по данным прямолинейных сечений системы тел M и, следовательно, они представляют собой решение сформулированной в начале задачи.

В частном случае, когда имеется только одно случайное прямолинейное сечение системы M, в формулах (4.12), (4.13) и (4.16) нужно положить $n_k = 1$ ($k = 1, 2, \ldots, N$); тогда формула (4.12) для оценки среднего объема переходит в следующую

$$\tilde{V} = \frac{\pi}{3} \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} t_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{t_k^2}{F_k'}}. \tag{4.18}$$

В тех случаях, когда система тел M пересекается n случайными прямыми, но невозможно идентифицировать отрезки, отсекаемые на прямых одним телом (т. е. выделить все отрезки, отсекаемые одним телом), приходится вычислять оценки (4.13) и (4.16) для каждой прямой и затем их усреднять. Однако это, очевидно, нежелательно, ибо, как было выше отмечено, оценки (4.13) и (4.16) — смещенные.

Возможен также случай, когда не удается установить, отсечены ли данные m отрезков на прямой одним телом невыпуклой формы или же m выпуклыми телами. Если вычислить в данном случае оценки начальных моментов объемов тел по формуле (4.13) при предположении выпуклости формы тел, то полученные числа будут характеризовать только нижние границы возможных значений оцениваемых начальных моментов.

Для вывода оценок характеристик распределения площадей поверхностей тел системы M по случайным сечениям в приведенных выше формулах величины объема нужно заменить соответствующими величинами площади поверхности. Аналогично выводятся оценки характеристик распределения средних площадей проекций тел. Ниже приведем основные формулы для этих величин.

Распределение площадей поверхностей тел системы M определяется по случайным прямолинейным сечениям формулой

$$\hat{P}_i\left(s_i - \frac{1}{2}\Delta s \leqslant s \leqslant s_i + \frac{1}{2}\Delta s\right) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_i'} \frac{n_{ij}}{\hat{g}_{ij}}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{N_i'} \frac{n_{ij}}{\hat{g}_{ij}}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.19}$$

где N_i' — число тел, пересеченных одной и больше прямых, оценки площади поверхностей которых попадают в интервал $\left(s_i - \frac{1}{2}\Delta s,\ s_i + \frac{1}{2}\Delta s\right)$;

$\hat{P}_i\left(s_i - \frac{1}{2}\Delta s \leqslant s \leqslant s_i + \frac{1}{2}\Delta s\right)$ — оценка отношения $\frac{N_{0i}'}{N_0}$ числа тел с площадями поверхностей, попадающими в интервал $\left(s_i - \frac{1}{2}\Delta s,\ s_i + \frac{1}{2}\Delta s\right)$, к числу всех тел системы M;

m — число подынтервалов, на которые разбивается весь интервал изменения оценок площади поверхности.

Распределение средних площадей проекций тел системы M определяется по случайным прямолинейным сечениям системы по формуле

$$\hat{P}_i\left(g_i - \frac{1}{2}\Delta g \leqslant g \leqslant g_i + \frac{1}{2}\Delta g\right) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_i''} \frac{n_{ij}}{\hat{g}_{ij}}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{N_i''} \frac{n_{ij}}{\hat{g}_{ij}}},$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.20}$$

где N_i'' — число тел, пересеченных одной и больше прямых, оценки средних площадей проекций которых попадают и в интервал $\left(g_i - \frac{1}{2}\Delta g,\ g_i + \frac{1}{2}\Delta g\right)$;

$\hat{P}_i\left(g_i - \frac{1}{2}\Delta g \leqslant g \leqslant g_i + \frac{1}{2}\Delta g\right)$ — оценка отношения числа тел со средними площадями проекций, попадающими в интервал $\left(g_i - \frac{1}{2}\Delta g,\ g_i + \frac{1}{2}\Delta g\right)$, к числу всех тел системы M;

m — число подынтервалов, на которые разбивается весь интервал изменения оценок средних площадей проекций тел системы.

В формулах (4.19) и (4.20) n_{ij} и $\hat{g}_{ij}$ имеют тот же смысл, что и для формулы (4.16) (т. е. число случайных прямых, пересекающих тело A_{ij}, и оценка средней площади проекции тела A_{ij}).

§ 5. Определение геометрических характеристик системы тел по случайным плоским ее сечениям

Рассмотрим задачу определения распределения геометрических характеристик системы тел M произвольных форм по данным пересечений ее случайными плоскостями. Например, задачу определения распределения геометрических характеристик зерен в образце породы по пересечению его плоскостью среза или геологических тел некоторого района по их пересечениям поверхностью рельефа (если можно пренебречь отклонением этой поверхности от плоскости).

Допустим, что область D трехмерного евклидового пространства, включающая все тела системы M, пересекается n $(n=1, 2, \ldots)$ случайно проведенными плоскостями $E_1, E_2, \ldots E_m$. Пересечение системы тел M и случайно проведенной плоскости E образует систему плоских фигур на плоскости E, которую мы далее называем случайным плоским сечением системы тел M. Задача состоит в том, чтобы по данным n $(n= 1, 2, \ldots)$, случайных плоских сечений системы тел оценить характеристики распределения объемов, площадей поверхностей и средней толщины тел системы M.

Для удобства записи тела системы M занумерованы так, что $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ — есть совокупность тел, пересеченных одной и более плоскостями, а $\{A_{N+1}, A_{N+2}, \dots, A_{N_0}\}$ — не пересеченных ни одной плоскостью. Пусть D — некоторая область, включающая все тела системы M. Вероятность того, что плоскость, случайно выбранная из множества всех плоскостей, секущих область D, пересечет тело A_k, равна отношению $\frac{\mu_E(A_k)}{\mu_E(D)}$ мер множеств плоскостей, секущих тело A_k и область D. Отсюда с учетом равенства (3.3) следует, что эта вероятность прямо пропорциональна средней толщине тела A_k. Поэтому при оценке среднего объема тел системы M по выборке тел, пересеченных случайно проведенной плоскостью E, объемы пересеченных тел нужно усреднить с весом обратно пропорциональным средней толщине тела

$$\widetilde{V} = \sum_{k=1}^{N} c \frac{1}{h_k} v_k, \tag{5.1}$$

где c — константа. Для случая, когда средний объем тел оценивается по n случайным плоским сечениям системы тел M, в соответствии с (5.1) можем написать

$$\widetilde{V} = \sum_{k=1}^{N} c \frac{n_k}{\hat{h}_k} \hat{v}_k; \tag{5.2}$$

здесь N — число тел, пересеченных одной или более плоскостями;

n_k — число плоскостей, пересекающих k-ое тело;

$\hat{v}_k$ — оценка объема k-ого тела, полученная по формуле (3.20)

$$\hat{v}_k = \frac{1}{6} \frac{\sum\limits_{l=1}^{n_k} F''_{kl}}{\sum\limits_{l=1}^{n_k} p_{kl}}, \tag{5.3}$$

где F''_{kl} — величина, определенная выше выражением (3.11), записанная здесь для k-ого тела и l-ой плоскости;

$\hat{h}_k$ — оценка средней толщины k-ого тела, полученная по формуле (3.21)

$$\hat{h}_k = \frac{1}{6} \frac{n \sum\limits_{l=1}^{n_k} F''_{kl}}{\left(\sum\limits_{l=1}^{n_k} p_{kl} \right)^2}; \tag{5.4}$$

p_{kl} — площадь сечения тела A_k l-ой плоскостью (суммарная площадь всех плоских фигур, образованных при пересечении тела A_k плоскостью E_l).

Константу c в формуле (5.2) найдем из условия нормировки и подставим в (5.2):

$$\sum_{k=1}^{N} c \frac{n_k}{\hat{h}_k} = 1$$

$$\widetilde{V} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{n_k}{\hat{h}_k} \cdot \hat{v}_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{n_k}{\hat{h}_k}}. \tag{5.5}$$

Обобщением формулы (5.5) является следующее выражение для оценки начального момента порядка α распределения объемов тел системы M:

$$\nu_\alpha(V) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{n_k}{\hat{h}_k} \left(\hat{v}_k\right)^\alpha}{\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{n_k}{\hat{h}_k}}. \tag{5.6}$$

Разобьем весь интервал значений оценок объемов тел на m подынтервалов $\left(v_i - \frac{1}{2}\Delta v \geqslant v \geqslant v_i + \frac{1}{2}\Delta v\right)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ и перейдем к отдельной нумерации совокупности тел, оценки которых попали в i-ый интервал, так что $\left\{A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ij}, \ldots, A_{iN_i}\right\}$ — есть совокупность тел, оценки объемов которых попали в i-ый интервал.

Используя новую нумерацию вместо равенства (5.5), можно написать

$$\widetilde{V} = \sum_{i=1}^{m} \hat{P}_i \left(v_i - \frac{1}{2}\Delta v \leqslant v \leqslant v_i + \frac{1}{2}\Delta v\right) v_i, \tag{5.7}$$

где

$$\hat{P}_i \left(v_i - \frac{1}{2}\Delta v \leqslant v \leqslant v_i + \frac{1}{2}\Delta v\right) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_i} \frac{n_{ij}}{\hat{h}_{ij}}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{N_i} \frac{n_{ij}}{\hat{h}_{ij}}}; \tag{5.8}$$

здесь N_i — число тел, оценки объемов которых попадают в интервал $\left(v_i - \frac{1}{2}\Delta v \leq v \leq v_i + \frac{1}{2}\Delta v\right)$;

n_{ij} — число плоскостей, секущих тело A_{ij};

$\hat{h}_{ij}$ — оценка средней толщины тела A_{ij}.

Из (5.7) видно, что выражение (5.8) — оценка отношения $\frac{N_{0i}}{N_0}$ числа тел, с объемами, попадающими в интервал $\left(v_i - \frac{1}{2}\Delta v,\ v_i + \frac{1}{2}\Delta v\right)$, к числу всех тел системы.

Способом, аналогичным использованному для случая прямолинейных сечений в предыдущем параграфе, можно показать, что выражения (5.6) и (5.8) — состоятельные оценки соответствующих величин. Однако эти оценки также смещенные.

В том случае, когда оценивание производится по одному случайному плоскому сечению системы тел в формулах (5.1)—(5.8), нужно положить $n_k = 1$ и $n_{ij} = 1$.

Вывод формул для определения распределения площадей поверхностей и средней толщины тел по случайным плоским сечениям системы тел производится аналогично изложенному выше выводу соответствующих формул для объема. Приведем конечные результаты.

Оценка отношения числа тел, площади поверхности которых находятся в интервале $\left(s_i - \frac{1}{2}\Delta s,\ s_i + \frac{1}{2}\Delta s\right)$, к числу всех тел системы

$$P_i\left(s_i - \frac{1}{2}\Delta s \leq s \leq s_i + \frac{1}{2}\Delta s\right) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_i'} \frac{n_{ij}}{\hat{h}_{ij}}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{N_i'} \frac{n_{ij}}{\hat{h}_{ij}}}; \qquad (5.9)$$

здесь N_i' — число тел, пересеченных одной или больше плоскостями, с оценками площадей поверхностей, вычисляемыми по формуле (3.22), попадающими в интервал $\left(s_i - \frac{1}{2}\Delta s,\ s_i + \frac{1}{2}\Delta s\right)$.

Оценка отношения числа тел, средняя толщина которых находится в интервале $\left(h_i - \frac{1}{2}\Delta h,\ h_i + \frac{1}{2}\Delta h\right)$, к числу всех тел системы

$$\hat{P}_i\left(h_i-\frac{1}{2}\Delta h\leqslant h\leqslant h_i+\frac{1}{2}\Delta h\right)=\frac{\sum\limits_{j=1}^{N_i''}\frac{n_{ij}}{\hat{h}_{ij}}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{N_i''}\frac{n_{ij}}{\hat{h}_{ij}}},\qquad(5.10)$$

где N_i'' — число тел, оценки средней толщины которых попадают в интервал $\left(h_i-\frac{1}{2}\Delta h,\ h_i+\frac{1}{2}\Delta h\right)$.

В формулах (5.9) и (5.10) n_{ij} и $\hat{h}_{ij}$ означают число плоскостей, секущих тело A_{ij}, и оценку средней толщины тела A_{ij}. Оценки (5.9) и (5.10) также являются состоятельными и смещенными.

§ 6. Определение отношений суммарных объемов, суммарных площадей поверхностей и отношений количеств тел различных подсистем системы тел по данным ее случайных прямолинейных и плоских сечений

В предыдущих параграфах мы рассматривали величины, исчисляемые в абсолютных единицах измерения (*мм, см, мм*^{2}, *см*^{3} и т. п.). В ряде геологических задач достаточно знание некоторых отношений между характеристиками тел и систем тел, представляющих собой безразмерные, относительные величины (отношения площадей, объемов и т. п.). Для оценки этих величин по случайным прямолинейным и плоским сечениям, очевидно, можно использовать формулы, предложенные в предыдущих параграфах. Ниже мы исследуем задачи определения некоторых важнейших относительных характеристик систем тел по случайным прямолинейным и плоским их сечениям.

Отношения суммарных площадей контактов (общих границ) между геологическими телами, входящими в различные системы (подсистемы), имеют большое значение для вывода мер пространственной связи между этими системами и могут быть использованы для решения на количественной основе разнообразных задач формационного, парагенетического и металлогенического анализов (см. гл. 4). Отношения суммарных площадей поверхностей зерен и контактов между зернами разных минералов можно использовать для решения ряда задач петрографии и петрофизики.

Рассмотрим задачу определения отношений суммарных площадей поверхностей тел (или общих границ между телами) различных подсистем системы тел по случайным плоским и прямолинейным ее сечениям. Сначала разберем случай плоских сечений. Пусть M — множество поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве (система поверхностей), $M_1, M_2, \ldots, M_m$ — некоторые подмножества множества M (подсистемы), D — замкнутая область трехмерного евклидового пространства, включающая все поверхности множества M. Поверхности имеют произвольную конфигурацию. Область D пересекается случайно плоскостями $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Пересечение системы поверхностей M плоскостью E_l образует некоторую систему линий на плоскости. По заданным пересечениям подсистем поверхностей n плоскостями нужно определить отношения $\frac{S_k}{S}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ суммарных площадей поверхностей подсистем к суммарной площади поверхностей системы M.

Введем следующие величины: $\overline{h}$ — средняя толщина области D, определяемая формулой (3.2); U — длина пересечения системы поверхностей M плоскостью E (суммарная длина всех линий на плоскости E, образованных при пересечении этой плоскостью системы поверхностей M), U_k — длина пересечения подсистемы поверхностей M_k плоскостью E (если плоскость E не пересекает ни одну поверхность системы M или подсистемы M_k, то считается, что $U = 0$ и $U_k = 0$); $\overline{U}$ — среднее значение величины U, полученное усреднением по всем плоскостям, секущим область D; $\overline{U}_k$ — среднее значение величины U_k, полученное усреднением по всем плоскостям, секущим область D.

Для определения S и S_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ через введенные величины может быть использована формула (3.8)

$$S = \frac{4\overline{h}\,\overline{U}}{\pi}, \tag{6.1}$$

$$S_k = \frac{4\overline{h}\,\overline{U}_k}{\pi}. \tag{6.2}$$

Заметим, что в (6.2) $\overline{h}$ не зависит от номера k подсистемы поверхностей. Поэтому отношение $\frac{S_k}{S}$ не зависит от $\overline{h}$:

$$\frac{S_k}{S} = \frac{\overline{U}_k}{U}, \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{6.3}$$

При написании равенства (6.3) использованы (6.1) и (6.2).

Оценки отношения (6.3) можно получить по случайным плоским сечениям системы поверхностей M. Оценкой отношения $\frac{S_k}{S}$, полученной по n, случайным плоским сечениям M согласно (6.3) будет выражение

$$\hat{b}_k = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} U_{kl}}{\sum\limits_{l=1}^{n} U_l}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{6.4}$$

где U_l и U_{kl} — суммарные длины линий пересечения системы поверхностей M и подсистемы поверхностей M_k, l-ой плоскостью.

Так как средние арифметические $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} U_{kl}$ и $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} U_l$ являются состоятельными оценками величин $\overline{U}_k$ и $\overline{U}$, то (6.4) есть состоятельная оценка отношения $\frac{S_k}{S}$. Однако $\hat{b}_k$ — смещенная.

Рассмотрим задачу оценивания отношения $\frac{S_k}{S}$ по случайным прямолинейным сечениям системы поверхностей M.

Введем следующие обозначения: $\overline{g}$ — средняя площадь проекции области D, определяемая формулой (2.10); q' — число точек пересечений поверхностей системы M прямой L; q_k' — число точек пересечений поверхностей подсистемы M_k прямой L (если прямая L не пересекает поверхности системы M или подсистемы M_k, то считается, что для данной прямой $q'=0$ и $q_k'=0$); $\overline{q}'$ — среднее значение величины q', полученное усреднением по всем прямым, секущим область D; $\overline{q_k'}$ — среднее значение величины q_k', полученное усреднением по всем прямым, секущим область D.

Используя эти величины, для системы поверхностей M и подсистемы поверхностей M_k можно написать соотношения, аналогичные (2.14):

$$S = 2\overline{g}\,\overline{q}', \tag{6.5}$$

$$S_k = 2\overline{g}\,\overline{q_k'}. \tag{6.6}$$

Из равенств (6.5) и (6.6) получим

$$b_k = \frac{S_k}{S} = \frac{\overline{q_k'}}{\overline{q}'}. \tag{6.7}$$

Пусть система поверхностей M пересечена n случайно проведенными прямыми, q_l и q_{kl} — количества точек пересечения поверхностей системы M и подсистемы M_k l-ой прямой. Тогда согласно (6.7) оценкой отношения $\frac{S_k}{S}$ будет

$$\hat{b}_k = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} q_{kl}}{\sum\limits_{l=1}^{n} q_l}. \tag{6.8}$$

Поскольку средние арифметические $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} q_{kl}$ и $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} q_l$ — состоятельные оценки величин $\overline{q'}$ и $\overline{q'_k}$, то (6.8) есть состоятельная оценка отношения $\frac{S_k}{S}$. Однако оценка (6.8) также является смещенной.

Рассмотрим теперь задачу количественно-минералогического анализа для случая, когда система зерен породы произвольных форм пересекается случайно проведенными плоскостями. Математически эту задачу можно сформулировать так.

Пусть M — множество тел в трехмерном евклидовом пространстве (система тел); $M_1, M_2, \ldots M_m$ — некоторые подмножества множества тел M (подсистемы); D — область трехмерного пространства, включающая все тела системы M. Область D пересекается n случайно проведенными плоскостями $E_1, E_2, \ldots, E_n$. По данным случайных плоских сечений системы тел M нужно оценить отношения $\frac{V_k}{V}$, $k=1, 2,\ldots, m$, где V — суммарный объем всех тел системы M, V_k — суммарный объем тел подсистемы M_k.

Определим следующие величины: P — площадь пересечения системы тел M плоскостью E (общая площадь всех плоских фигур, полученных при пересечении системы тел M плоскостью E); P_k — площадь пересечения подсистемы тел M_k плоскостью E (если плоскость E не пересекает тела системы M или подсистемы M_k, то считается, что для данной плоскости $P=0$ и $P_k=0$); $\overline{P}$ — среднее значение величины P, полученное усреднением по всем плоскостям, секущим область D; $\overline{P}_k$ — среднее значение величины P_k, полученное усреднением по всем плоскостям, секущим область D.

Используя эти величины и формулу (3.6), можно получить равенства

$$V=\overline{h}\,\overline{P}, \tag{6.9}$$

$$V_k=\overline{h}\,\overline{P}_k, \tag{6.10}$$

где $\overline{h}$ — средняя толщина области D.

Из (6.9) и (6.10) получим

$$a_k=\frac{V_k}{V}=\frac{\overline{P}_k}{\overline{P}}. \tag{6.11}$$

Отсюда видно, что состоятельной оценкой $\hat{a}_k$ отношения $\frac{V_k}{V}$ является выражение

$$\hat{a}_k = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} P_{kl}}{\sum\limits_{l=1}^{n} P_l}, \tag{6.12}$$

где P_l и P_{kl} — суммарные площади плоских фигур, полученных при пересечении тел системы M и подсистемы M_k l-ой плоскостью.

Аналогично выводится выражение для оценки отношения $\frac{V_k}{V}$ по случайным прямолинейным сечениям тел системы M.

Пусть t — суммарная длина отрезков, отсекаемых на прямой L телами системы M; t_k — то же для подсистемы тел M_k (если прямая L не пересекает тела системы M или подсистемы M_k, то для данной прямой $t=0$ и $t_k=0$); $\overline{t}$ и $\overline{t}_k$ — средние значения величин t и t_k, полученные усреднением по всем прямым, секущим область D.

Используя равенство (2.19), можно написать соотношения

$$V = \overline{g}\,\overline{t}, \tag{6.13}$$

$$V_k = \overline{g}\,\overline{t}_k, \tag{6.14}$$

где $\overline{g}$ — средняя площадь проекции области D.

Из равенств (6.13) и (6.14)

$$a_k = \frac{V_k}{V} = \frac{\overline{t}_k}{\overline{t}}. \tag{6.15}$$

Согласно (6.15) в качестве состоятельной оценки $\hat{a}_k$ отношения $\frac{V_k}{V}$, полученной по n случайным прямолинейным сечениям, можно использовать выражение

$$\hat{a}_k = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} t_{kl}}{\sum\limits_{l=1}^{n} t_l}, \tag{6.16}$$

где t_l и t_{kl} — суммарные длины отрезков, отсекаемых телами системы M и телами подсистемы M_k на l-ой прямой.

Соотношения (6.12) и (6.16) являются решением задачи количественно-минералогического анализа для наиболее общего и типичного случая, когда системы зерен произвольных форм пересекаются случайно проведенными прямыми или плоскостями.

Используя некоторые из выведенных выше формул, можно найти оценки отношения числа тел подсистемы M_k к числу тел системы M.

Отношение $\frac{V_k}{V}$ суммарного объема тел подсистемы M_k к суммарному объему тел системы M можно выразить через средние объемы $\overline{V}$, $\overline{V}_k$ и количества тел N, N_k системы M и подсистемы M_k:

$$a_k = \frac{V_k}{V} = \frac{\overline{V}_k N_k}{\overline{V} N}. \tag{6.17}$$

Используя (6.17) для оценки $\hat{\omega}_k$ отношения $\omega_k = \frac{N_k}{N}$ числа тел подсистемы M_k к числу тел системы M, можно получить формулу

$$\hat{\omega}_k = \frac{\tilde{V}\,\hat{a}_k}{\tilde{V}_k}. \tag{6.18}$$

Оценки $\tilde{V}$, $\tilde{V}_k$ и $\hat{a}_k$ величин $\overline{V}$, $\overline{V}_k$ и a_k нужные для определения $\hat{\omega}_k$ по формуле (6.18), можно найти как по прямолинейным, так и по плоским случайным сечениям по выведенным выше формулам.

§ 7. Исследование оценок пространственных характеристик структур геологических объектов по случайным прямолинейным их сечениям методом моделирования на ЭВМ.

Выведенные в предыдущих параграфах соотношения между различными характеристиками тел представляют собой выражения, содержащие интегралы от функций обычных пространственных и угловых координат. Поэтому оценка геометрических характеристик тел сводится к оценке одним из известных способов интегралов, входящих в выражения для этих характеристик.

Для оценивания этих интегралов, в частности, можно использовать соответствующие аппроксимирующие суммы. Оценки ими, как известно, обладают меньшей дисперсией по сравнению с оценками, полученными методом Монте-Карло. Однако, как было показано в начале данной главы, в геологии мы обычно располагаем случайными сечениями тел и систем тел. Поэтому выше мы ограничились приведением оценок интегралов случайным проведением секущих полупрямых, прямых и плоскостей. Эти методы в общем сходны с известным методом Монте-Карло для оценки интегралов путем «разыгрывания» случайных точек и отличаются от них геометрически тем, что «разыгрываются» случайные полупрямые, прямые и плоскости.

Здесь мы рассмотрим вопрос о точности предложенных выше оценок — их дисперсии, свойства смещенности и т. п.

Большинство рассмотренных характеристик представляет собой сложную функцию от математических ожиданий многих случайных величин, дисперсии которых неизвестны. В этих условиях точность предлагаемых оценок можно проверить на опыте, применив их к телам и системам тел, точное значение оцениваемых характеристик которых известно. Такие эксперименты можно проводить на материальных телах и системах тел с известными характеристиками. В литературе описан подобный эксперимент для оценки точности определения содержаний отдельных компонентов в искусственно созданных смесях, по их срезам (Чейз, 1963). Однако физическое моделирование (эксперименты на материальных телах) очень трудоемкое и, главное, в этом способе свободное варьирование свойств исследуемых тел весьма затруднительно. Поэтому мы выбрали путь моделирования (экспериментирования) на ЭВМ, который избавлен от указанных недостатков физического моделирования.

Кратко опишем некоторые из полученных результатов моделирования на ЭВМ, осуществленного с целью исследования предложенных выше оценок.

Моделирование выполнялось на ЭВМ М-222 по программам, составленным И. И. Шифриным на языке «ФОРТРАН». Общая схема моделирования сводилась к следующему.

В машине генерировались случайные числа, соответствующие параметрам случайных полупрямых (лучей), прямых и некоторых плоских фигур. Отдельное испытание состояло в пересечении выбранной плоской фигуры случайно проведенными прямой или лучом с началом в этой фигуре. По отрезкам, отсекаемым на них фигурой, оценивались площади плоских фигур и различные функции от этих площадей, совпадающие по виду с выражениями для приведенных в § 4 оценок среднего объема системы тел. Оценки сравнивались с истинными значениями оцениваемых величин и вычислялись относительные средние квадратические ошибки оценок как функции от объема выборки.

Выбор плоских фигур вместо трехмерных тел был вызван стремлением упростить эксперименты. Как было показано в конце § 3, выражения для оценок соответствующих характеристик в трехмерном и двумерном случаях имеют общую структуру. На этом основании полученные из опытов выводы для двумерного случая можно распространить, с некоторым приближением, и на соответствующий трехмерный случай. Например, характер зависимости дисперсии соответствующих оценок от степени вытянутости (или изометричности) плоской фигуры и тела в трехмерном пространстве будут примерно одинаковыми.

Для исследования зависимости ошибки оценок площади плоских фигур по их пересечениям со случайными прямыми от формы фигуры и числа испытаний на ЭВМ моделировалось случайное пересечение различных фигур случайной прямой. В результате установлено, что объем выборки (число пересечений) n, необходимый для получения оценки площади фигуры по формуле (3.36) с относительной ошибкой 5%, для круга равен 20, для квадрата — 37, для прямоугольников с соотношением сторон 1:3 и 1:5 — >60. При увеличении длины одной стороны прямоугольника по отношению к длине другой стороны в три и пять раза относительная ошибка при объеме выборки, равном 30, увеличивается соответственно в три и четыре раза. Исследованная формула (3.36) для оценки площади фигур в трехмерном случае аналогична формуле (2.45).

Для исследования формулы, для оценки средней площади прямоугольников, образующих систему, по пересечениям данной системы случайными прямыми проводилась серия опытов на ЭВМ. Эту формулу в трехмерном случае можно сопоставить с формулой (4.12) для оценки среднего объема тел, образующих систему. Длина одной стороны прямоугольников выбиралась как значение случайной величины, распределенной равномерно в интервале (1,5), а другой равнялась 1. Установлено, что относительная средняя квадратическая ошибка оценки средней площади при одном и том же числе N прямоугольников существенно зависит от числа пересечений n каждого прямоугольника.

Причина этой зависимости — смещенность оценки. Величина смещения с увеличением числа n пересечений каждого прямоугольника быстро уменьшается. Например, для $N=10$ и $N=100$ при увеличении числа n от 1 до 10 величина смещения уменьшается примерно в четыре и пять раз. Увеличение числа прямоугольников очень слабо влияет на ошибку средней их площади, вносимую оценками площади отдельных прямоугольников. Так, для $n=10$ увеличение числа прямоугольников от 5 до 100 уменьшает указанную ошибку от 19 до 15%.

В другой серии экспериментов моделировался процесс «случайного бросания» на систему прямоугольников, систему из двух перпендикулярных прямых. Так же как и в предыдущих опытах, длина одной из сторон прямоугольников выбиралась как значение случайной величины, распределенной равномерно в интервале (1,5), другой оставалась равной 1. Средняя площадь прямоугольников оценивалась по расстояниям от точки пересечения прямых до точек пересечения ими границ прямоугольника. Относительная средняя квадратическая погрешность этой оценки при увеличении числа прямоугольников от 5 до 60 уменьшается с 24 до 14%.

Для исследования различных оценок, кроме описанных выше, на ЭВМ моделировались процессы «случайного бросания» на прямоугольник и на систему прямоугольников полупрямой.

Основной вывод экспериментов состоит в том, что они подтверждают правильность теоретических выкладок, изложенных в данной главе. Из-за ограниченности объема настоящей работы мы здесь не могли достаточно подробно описать машинные эксперименты и полученные результаты.

Пространственные геометрические свойства геологических объектов (в частности, горных пород и руд) в большинстве случаев можно изучать только по их сечениям некоторой поверхностью (поверхность рельефа, горной выработки, плоскость шлифа и т. п.) и линией (линия сканирования шлифа, осевая линия скважины, линия профиля и т. п.). Положение секущей поверхности или линии по отношению к пересекаемым геологическим объектам, как правило, носит элементы случайности. Поэтому стереологические задачи, связанные с определением геометрических свойств тел и систем тел, в геологии (петрография, региональная геология, структурная геология, учение о разведке месторождений полезных ископаемых и т. п.) — широко распространенные типовые задачи. К ним относятся, в частности, задачи количественно-минералогического и морфо-гранулометрического анализа пород в шлифах. Известные математические решения этих задач получены при жестких ограничениях на формы тел (сферическая, эллипсоидальная и т. п.), обычно не выполняемых для реальных геологических объектов.

С использованием некоторых достижений интегральной геометрии и теории геометрических вероятностей получены решения этих задач для тел произвольных и, в частности, геометрически неправильных форм.

Основные результаты — математическое решение следующих стереологических задач геологии.

1. Определение объема, площади поверхности и средней площади проекции тела произвольной формы по его случайным прямолинейным сечениям — формулы (2.31), (2.32), (2.33), (2.40), (2.41) и (2.42).

2. Определение объема, площади поверхности и средней толщины тела произвольной формы по его случайным плоским сечениям — (3.14), (3.15), (3.16), (3.20), (3.21) и (3.22).

3. Определение распределения объемов, площадей поверхностей и средних площадей проекций тел произвольных форм, образующих систему тел, по случайным прямолинейным сечениям системы — (4.13), (4.16), (4.19) и (4.20).

4. Определение распределения объемов, площадей поверхностей и средней толщины тел произвольных форм, образующих систему тел, по случайным плоским сечениям системы — (5.6), (5.8), (5.9) и (5.10).

5. Определение объема тела и среднего объема тел произвольных форм, образующих систему тел, по их пересечениям со случайными полупрямыми (2.5), (2.7) и (4.3).

6. Определение отношений суммарных объемов, суммарных площадей поверхностей и относительных количеств тел различных подсистем системы тел по ее случайным плоским и прямолиней-

ным сечениям (6.3), 6.4), (6.7), (6.8), (6.11), (6.12), (6.15), (6.16) и (6.18).

Перечисленные задачи составляют группу основных стереологических задач геологии.

Методом моделирования на ЭВМ исследованы свойства наиболее важных, выведенных теоретически, оценок (зависимость дисперсии и величины смещенности от объема выборки, формы тел и др.). Машинные эксперименты подтверждают правильность теоретических выкладок.

Полученные результаты математически обосновывают морфогранулометрический и количественно-минералогический анализы для наиболее общего и типичного случая, когда порода, состоящая из зерен произвольных форм, пересекается случайно проведенными плоскостями и прямыми. Использование их в качестве математического обеспечения автоматических систем, включающих сканирующие микроскопы и ЭВМ, позволяет получить быстрое и точное количественное описание основных свойств строения горных пород и руд. Они могут быть использованы также в решении некоторых геологических задач (разведка месторождений полезных ископаемых, структурная геология, региональная геология и др.).

Глава 4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ СОВОКУПНОСТЯМИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

§ 1. Общая постановка задачи определения меры пространственной связи между совокупностями геологических объектов

В предыдущих главах мы обсуждали теоретические и методические вопросы исследования свойств структур геологических объектов, обусловленных размерами и формой их составных частей и геометрическими отношениями между ними. В этой главе рассматриваются свойства строения геологических объектов, определяемые пространственным взаиморасположением их составных частей.

При разработке этих вопросов выяснилось, что большинство задач, возникающих при исследовании пространственной связи между совокупностями геологических объектов сводится к определению меры пространственной связи между системами геологических тел или между подсистемами системы геологических тел, выделенными по тем или иным признакам. Это обстоятельство позволяет разработать общие математические методы изучения пространственной связи между геологическими телами, одинаково применимые как к зернам минералов в породах, так и к геологическим телам, состоящим из пород, формаций и т. п. Поэтому основные результаты мы сформулируем для систем геологических тел.

Задачи изучения пространственной связи между совокупностями геологических объектов относятся к наиболее распространенным типовым геологическим задачам. Решение многих вопросов парагенетического, формационного, металлогенического и структурного анализов математически сводится к установлению пространственной связи между совокупностями геологических объектов и определению меры этой связи. Сами понятия геологической формации и парагенезиса в значительной мере основаны на представлениях о пространственных связях между геологическими объектами.

Учитывая вышеизложенное, несомненно важно разработать количественные методы исследования пространственных связей между множествами геологических объектов. Разработка этих методов необходима, в частности, для создания математических теорий металлогенического, формационного и парагенетического анализов для расширения области применения математических методов и ЭВМ в геологических исследованиях (Васильев и др., 1972; Вистелиус, 1963; Воронин, Еганов, 1972).

Для пояснения сути этих задач приведем несколько примеров.

Допустим, что на некоторой карте полезных ископаемых нанесена совокупность точек, каждая из которых соответствует одному рудопроявлению. Все точки разбиваются на k подсовокупностей, соответствующих типам рудопроявлений. Координаты точек каждой подсовокупности можно рассматривать как значения некоторой случайной величины. Нужно установить, существует ли связь в пространственном взаиморасположении подсовокупностей точек, соответствующих рудопроявлениям l-ого и m-ого типов. Если точки этих подсовокупностей пространственно ассоциируют, или, наоборот, «избегают» друг друга, то какова сила связи? Один из подходов к решению этой задачи сводится к следующему. Подсчитывается доля (частность, относительное число) $P_{l/m}(t_1, t_2)$ рудопроявлений l-ого типа среди рудопроявлений, расположенных на расстоянии в пределах t_1 и t_2 от рудопроявлений m-ого типа. Полученное число сопоставляется с долей P_l рудопроявлений l-ого типа среди всех рудопроявлений, представленных на карте. Если $P_{l/m}(t_1, t_2) > P_l$, то из этого можно заключить следующее: имеющиеся эмпирические данные не противоречат предположению о наличии пространственной связи между рудопроявлениями l-го и m-ого типов. Известны некоторые способы решения этой задачи и конкретные примеры их использования (Воронич, Усманов, 1968).

Другой пример рассматриваемых задач. На геологическую карту нанесены точки, соответствующие рудопроявлениям данного типа. Необходимо определить, существуют ли пространственная связь между этими точками и совокупностью плоских фигур (контуров), соответствующих выходам тел определенных пород. Такая задача возникла при попытке решения некоторых вопросов металлогении количественными методами (Воронич, Усманов и др., 1971).

Приведем пример более сложной задачи. Допустим, что множество плоских фигур на геологической карте разбивается на k подмножеств, соответствующих выходам тел k типов пород. Исходя из условия, что характеристики пространственного положения, ориентации, размеров и формы плоских фигур каждого подмножества можно рассматривать как значения некоторых случайных величин, нужно определить существует ли пространственная связь между l-ым и m-ым типами плоских фигур, соответствующими l-ому и m-ому типам пород, и какова сила этой связи. Формально аналогичная задача возникает при исследовании взаиморасположения срезов, зерен разных минералов в шлифах пород.

В более общем случае рассматриваются пространственные связи между системами тел в трехмерном пространстве. Эта задача, очевидно, намного сложнее, чем приведенная выше задача о связи между системами точек: если характеристиками точек являются только их пространственные координаты и приписываемые им признаки (в приведенном примере — типы рудопроявлений), то тела в трехмерном пространстве характеризуются рядом разнообразных свойств (размеры, ориентация, форма и т. п.). В случае систем тел само понятие о пространственной связи становится более расплывчатым и нуждается в уточнении. Возникают, в частности, вопросы: в каком смысле можно говорить о пространственной связи между системами тел в трехмерном пространстве (или между системами фигур на плоскости)? Какие существуют критерии для установления этой связи? Как можно определить меру (силу) этой связи?

Из имеющихся публикаций вопросы, наиболее близкие к перечисленным, рассматриваются в работах по применению теории марковских цепей для построения стохастической модели процессов кристаллизации магмы на основании наблюдений взаиморасположения зерен минералов в кристаллических породах и процессов осадконакопления на основании данных разрезов осадочных толщ (Вистелиус, 1966_1, 1966_2, 1972; Вистелиус, Романова, 1972; Иванов, 1963, 1968; Krumbein, 1967). Примеры статистического анализа пространственного положения рудопроявлений и месторождений, кроме приведенных выше, можно найти в работах Н. Н. Боровко (Боровко, 1971; Боровко, Мишин, 1971). Имеются попытки использования статистических методов при изучении взаимного расположения тел различных типов пород отдельных районов (Wickman, 1961), обсуждаются общие вопросы применения математических методов исследования пространственного взаиморасположения геологических тел (Боровко, 1971; Воронин, Еганов, 1968_1, 1972; Воронин, Сергеев, 1976; Воронин и др., 1967, 1970; Гольдин и др., 1970, Готтшильд, 1973; Миллер, Кан, 1965; Усманов, 1975).

Математические постановки задач определения меры пространственной связи между совокупностями геологических объектов можно отнести к задачам, рассматриваемым в разделе геометрических вероятностей теории вероятностей (Кендалл, Моран, 1972), теории случайных функций (Кокс, Льюис, 1969; Крамер, Лидбеттер, 1969; Розанов, 1971; Свешников, 1968 и др.), и в интегральной геометрии (Бляшке, 1938; Сантало, 1956). Следует отметить, что задачи, подобные рассматриваемым, в математике исследованы мало.

Формальное сходство всех перечисленных геологических задач позволяет сформулировать одну общую их математическую постановку. Для этой цели можно использовать понятие системы геологических тел. Мы будем рассматривать системы геологических тел, разбивающиеся по тем или иным признакам на k подсистем, каждая из которых состоит из достаточно большого числа тел. Будем исходить из условия, что системы геологических тел можно рассматривать как реализацию некоторых случайных процессов (случайных функций, полей). Системы геологических тел, удовлетворяющие указанным условиям, назовем статистическими. Существует обширный класс геологических объектов, которые можно отнести к таким системам. В процессах, приводящих к формированию систем геологических тел, участвует, как правило, большое число факторов, не поддающихся точному учету. Поэтому эти системы естественно рассматривать как реализацию случайных процессов. Примерами статистических систем геологических тел могут быть система зерен в образце некоторой породы с подсистемами зерен отдельных минералов, системы геологических тел некоторого района с подсистемами тел различных типов пород, система рудных тел некоторого рудного поля с подсистемами тел руд различных типов и т. п.

В общем случае исследование статистическими методами пространственных связей между подсистемами $L_1, L_2, L_3, \dots, L_k$ произвольной системы L геологических тел сводится к замерам или подсчетам значений некоторых величин $W_1, W_2, \dots, W_k$ в определенных частях физического пространства и дальнейшей математической обработке результатов замеров. Поэтому все статистические методы исследования пространственных связей между подсистемами произвольной системы тел классифицируются по геометрическим свойствам тех частей пространства, где измеряются или подсчитываются значения величин $W_1, W_2, \dots, W_k$, по положениям этих частей пространства относительно тел системы и по свойствам измеряемых величин. Значения величин $W_1, W_2, \dots, W_k$ могут наблюдаться в точках или в конечных областях пространства, положения которых выбираются в зависимости или независимо от положения тел системы. Рассмотрим некоторые способы рандомизации, осуществляемой в целях исследования пространственных связей между подсистемами произвольной системы тел.

Один из этих способов сводится к следующему. Из области пространства, в которой находится данная система тел L с подсистемами $L_1, L_2, \dots, L_k$, случайным образом выбирается точка, соблюдая условия, при которых координаты точки есть значения равномерно распределенных независимых случайных величин. Внутри сферы R радиуса r с центром в выбранной точке измеряются значения $w_1, w_2, \dots, w_k$ величин $W_1, W_2, \dots, W_k$, определенных таким образом, что статистические связи между ними можно интерпретировать как пространственные связи между подсистемами $L_1, L_2, \dots, L_k$. Такими величинами, в частности являются количество тел N_l подсистемы L_l $(l = 1, 2, \dots, k)$, расположенных частично или целиком внутри сферы R; суммарный объем v_l тел и частей тел подсистемы L_l $(l = 1, 2, \dots, k)$, расположенных внутри сферы R и т. п. В более общем случае вместо сферы R может быть взята область пространства некоторой формы и вместо величин $W_1, W_2, \dots, W_k$ — качественные признаки.

По другой схеме рандомизации значения $w_1, w_2, \dots, w_k$ величин $W_1, W_2, \dots, W_k$ измеряются в точке или области пространства, занимающей определенное положение по отношению к телу, случайно выбранному из системы.. Величины $W_1, W_2, \ldots, W_k$, как и в первом случае, определяются таким образом, чтобы их значения зависели от пространственных связей между подсистемами $L_1, L_2, \ldots, L_k$, содержали информацию об этих связях. Например, в качестве W_l можно взять суммарный объем V_l тел или частей тел подсистемы L_l расположенных в полосе шириной h, примыкающей к границе тела, случайно выбранного из системы L, или число тел N_l подсистемы L_l, контактирующих с телом, случайно выбранным из системы L и т. п. При этом можно исходить из следующего условия: если тела подсистемы L_l не влияют на пространственное положение тел других подсистем, то условное распределение величин $W_1, W_2, \ldots, \ldots, W_{l-1}, W_{l+1}, \ldots, W_k$ при условии, что их значения измеряются в некоторой окрестности тел подсистемы L_l, будет совпадать с их распределением без этого условия.

В первой, из указанных выше схем рандомизации, область пространства, в которой измеряются значения величин $W_1, W_2, \ldots, W_{l-1}, W_l, \ldots W_k$ выбирается независимо от тел системы, а во второй такая зависимость существует.

Стохастические связи между всеми перечисленными выше, в качестве примеров величинами могут быть рассмотрены как некоторые экспликации понятия пространственной связи между системами (подсистемами) геологических тел. Однако, очевидно, вывод о существовании связи и ее меры зависит от того, какие именно из перечисленных величин выбраны, а также от размеров областей, в которых измеряются их значения. Таким образом, существует много критериев для определения того, имеется ли пространственная связь между системами геологических тел. Поэтому нельзя говорить о такой связи безотносительно критерия, не указав, какой именно критерий использован для ее установления. По этой причине очень часто встречаемые в геологической литературе утверждения вида «рудные тела пространственно ассоциируют с...», «зерна данного минерала пространственно связаны с зернами минерала...», «месторождения данного типа локализованы в...» и т. п. всегда нуждаются в уточнении того смысла, в котором употребляется термин «пространственная связь между геологическими объектами».

Предлагаем два статистических метода для исследования пространственной связи между совокупностями геологических объектов. В первом, названном методом случайных полей, используются представления о случайных функциях и оценки вероятности совместной встречи признаков в точках пространства как функции от расстояния между этими точками, во втором, названном методом контактов,— оценки суммарной площади поверхностей контактов (суммарной длины общих границ в двумерном случае) между телами разных подсистем данной системы. Второй метод применим для систем, тела различных подсистем которых контактируют друг с другом и, следовательно, вместе образуют некоторую связную область. Первый метод более общий и выполнение этого условия для их использования необязательно. Он может быть применен, в частности, и для систем изолированных тел.

§ 2. Определение меры пространственной связи между системами геологических тел методом случайных полей

Поясним на примерах общую идею излагаемого ниже метода. Пусть имеется образец (или шлиф) породы, состоящей из некоторого числа минералов. Известно, что точка A находится в зерне первого минерала. Какой минерал будет встречен в точке B, расположенной на расстоянии t от точки A в некотором фиксированном направлении?

Если расстояние t намного порядков меньше среднего размера зерен первого минерала, то с большей вероятностью можно предсказать, что точка B находится в том же зерне, что и точка A.

Если расстояние t между точками A и B намного порядков больше среднего размера зерен данной породы, то известие о том, что точка A находится в зерне первого минерала не несет информацию о том, в зерне какого минерала находится точка B. Поэтому в этом случае вероятности встречи в точке B тех или иных минералов будут совпадать с относительными объемами этих минералов в породе.

Если же растояние t между точками A и B такого же порядка, что и средний размер зерен породы, то ответ на поставленный вопрос зависит от относительных объемов минералов, распределений размеров их зерен, а также от пространственных связей между зернами разных минералов. Например, если известно, что зерна первого минерала содержатся в зернах второго минерала, то при определенных соотношениях расстояния между точками A и B и среднего размера зерен с большой вероятностью можно предсказать, что точка B будет находиться во втором минерале (при условии, что точка A находится в первом минерале).

В случае, когда вместо образца породы рассматривается участок земной коры, сложенный породами некоторых типов, мы можем рассуждать аналогичным образом.

В общем случае вероятность того, что в одной из двух точек случайно выбранных на расстоянии t друг от друга в некотором геологическом объекте будет наблюдаться признак u_1, а во второй точке признак u_2 зависит от расстояния t, относительных количеств и распределения размеров тел с признаками u_1, u_2, а также от пространственных связей между телами с этими признаками. Поэтому, оценив эту вероятность как функцию от расстояния между точками из наблюдений и зная другие указанные выше характеристики системы тел, мы можем судить о пространственной связи между телами с данными признаками.

Пусть L — система геологических тел с подсистемами L_1, $L_2, \ldots, L_k$, выделенными по системе признаков в соответствии с процедурой, описанной в § 4 гл. 2; D — область трехмерного пространства, включающая систему тел L; $x_l\left(\vec{t}\right)$ — характеристическая функция тел подсистемы L_l, т. е. $x_l\left(\vec{t}\right)=1$, если точка $0\left(\vec{t}\right)$ с радиус-вектором $\vec{t}=\langle t_1,\ t_2,\ t_3\rangle$ принадлежит любому телу подсистемы L_l и $x_l\left(\vec{t}\right)=0$, если точка $0\left(\vec{t}\right)$ не принадлежит телу этой подсистемы. Содержательно функция $x_l\left(\vec{t}\right)$ соответствует некоторому свойству (признаку). Если $x_l\left(\vec{t}\right)=1$ $\left[x_l\left(\vec{t}\right)=0\right]$, то в точке $0\left(\vec{t}\right)$ присутствует (соответственно, отсутствует) l-ое свойство.

В соответствии с указанным выше условием функцию $x_l\left(\vec{t}\right)$ $(l=1, 2, \ldots, k)$ мы будем рассматривать как реализацию некоторой случайной функции $X_l\left(\vec{t}\right)$. В этом случае система геологических тел L будет реализацией $f\left(\vec{t}\right)$ некоторой системы случайных функций или вектор-функции $F\left(\vec{t}\right)=\langle X_1\left(\vec{t}\right), X_2\left(\vec{t}\right), \ldots, \ldots, X_k\left(\vec{t}\right)\rangle$, учитывая, что аргументы t_1, t_2 и t_3 непрерывные, а значения функций $X_l\left(\vec{t}\right)$ $l=1, 2, \ldots, k$ — дискретные, систему случайных функций $F\left(\vec{t}\right)$ можно назвать случайным дискретным полем.

Если систему геологических тел L можно рассматривать как реализацию $f\ (\vec{t})$ некоторого случайного поля $F\ (\vec{t})$, то для исследования этой системы (для компактного описания ее главнейших свойств, изучения пространственной связи между подсистемами и т. п.) можно использовать хорошо разработанные методы общей теории случайных функций (Кокс, Льюис, 1969; Крамер, Лидбеттер, 1969; Розанов, 1971; Свешников, 1968; Абезгауз и др. 1970).

При разработке методов исследования систем геологических тел как реализаций случайных функций необходимо учитывать следующие два обстоятельства, вызванные особенностями этих систем: 1) пространственные (объемные) свойства $f\ (\vec{t})$ в большинстве случаев недоступны непосредственному наблюдению и, следовательно, необходимо разрабатывать такие методы, которые позволяли бы исследовать случайное поле $F\ (\vec{t})$ по сечениям его реализации $f\ (\vec{t})$ поверхностью (плоскостью), прямой и т. п.; 2) для исследования $F(\vec{t})$ имеется только одна единственная реализация $f(\vec{t})$ (геологические процессы в отличие от физических лабораторных экспериментов нельзя повторить). Поэтому для получения характеристик поля мы вынуждены предположить, что $F(\vec{t})$ обладает свойствами однородности и эргодичности. Если $F(\vec{t})$ неоднородное, то область значений аргументов t_1, t_2, t_3, можно разбить на подобласти таким образом, чтобы в пределах каждый подобласти $F(\vec{t})$ было однородным, использовав для этого, например, методы, предложенные Д. А. Родионовым (1968).

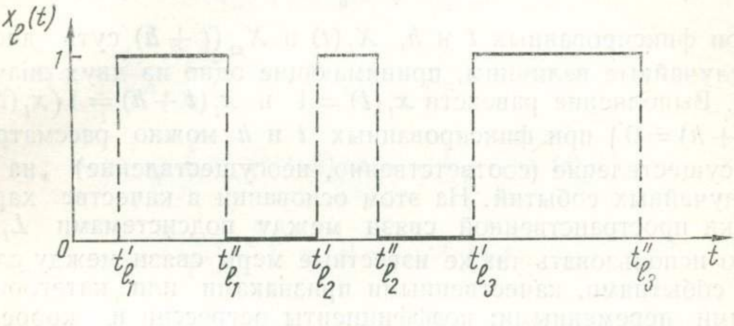

Рис. 5. График, иллюстрирующий свойства реализации $x_l(t)$ случайной функции $X_l(t)$.

Сечение $f(\vec{t})$ некоторой прямой, которое обозначим через $f(t)$, можно рассматривать как реализацию случайной вектор-функции (системы случайных функций) $F(t) = \langle X_1(t), X_2(t), \ldots, \ldots, X_k(t) \rangle$ от одного непрерывного аргумента t. На графике функции $x_l(t)$ интервалы, в точках которых $x_l(t) = 1$ чередуются с интервалами, в точках которых $x_l(t) = 0$ (рис. 5)*.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $F(t)$ — стационарный и эргодический процесс. Эргодичность означает, что все характеристики случайной вектор-функции $F(t)$ могут быть получены из ее одной достаточно длинной реализации $f(t)$. Если система тел L удовлетворяет указанным условиям, то для характеристики пространственных связей между ее подсистемами можно использовать оценку центрированной корреляционной матрицы $\|k_{l,m}(h)\|$, где $k_{l,m}(h)$ — оценка центрированной корреляционной функции, вычисляемая в нашем случае по формуле (2.1)

---

* Поясним это на примере. Если $x_l(t)$ построена для пересечения шлифа некоторой породы прямой, то отрезкам, в точках которых присутствует l-ый признак, т. е. $x_l(t) = 1$, соответствуют отрезки секущей прямой, лежащие внутри зерен l-ого минерала. Если $x_l(t)$ построена для типов пород, пересеченных некоторой скважиной, то отрезкам, в точках которых $x_l(t) = 1$, соответствуют отрезки оси скважины, расположенные в породе l-ого типа.

$$k_{l,m}(h)=\frac{1}{T-h}\int_0^{T-h} x_l(t)\,x_m(t+h)\,dt-$$

$$-\frac{\overline{x}_m}{T-h}\int_0^{T-h} x_l(t)\,dt-\frac{\overline{x}_l}{T-h}\int_0^{T-h} x_m(t+h)\,dt+\overline{x}_l\overline{x}_m, \qquad (2.1)$$

где 0 и T — координаты граничных точек интервала $(0, T)$, в котором задана реализация $x_l(t)$ случайной функции $X_l(t)$,

$$\overline{x}_l(t)=\frac{1}{T}\int_0^T x_l(t)\,dt$$

При фиксированных t и h, $X_l(t)$ и $X_m(t+h)$ суть дискретные случайные величины, принимающие одно из двух значений: 0 и 1. Выполнение равенств $x_l(t)=1$ и $x_l(t+h)=1$ $\big(x_l(t)=0,$ $x_m(t+h)=0\big)$ при фиксированных t и h можно рассматривать как осуществление (соответственно, неосуществление) „на опыте" случайных событий. На этом основании в качестве характеристики пространственной связи между подсистемами L_l и L_m можно использовать также известные меры связи между случайными событиями, качественными признаками или категоризированными переменными: коэффициенты регрессии и корреляции для случайных событий (Абезгауз и др., 1970), коэффициенты связи (по Юлу) и коллигации (Кендалл, Стюарт, 1973; Юл, Кендалл, 1960) и т. п. Однако в этом случае выражения для этих коэффициентов будут функциями от аргумента h. В частности, можно определить следующие функции.

$$r_{m/l}(h)=\frac{P_{lm}(h)-P_lP_m}{P_l(1-P_l)}, \qquad (2.2)$$

$$r_{l/m}(h)=\frac{P_{ml}(h)-P_lP_m}{P_m(1-P_m)}, \qquad (2.3)$$

$$r_{lm}(h)=\sqrt{r_{m/l}(h)\cdot r_{l/m}(h)}, \qquad (2.4)$$

где $P_l\,(l=1, 2,\ldots, k)$ — вероятность выполнения равенства $X_l(t)=1$ при фиксированном t; эта вероятность согласно условиям однородности и эргодичности $X_l(t)$ не является функцией от t и для любого t при достаточно большом T приблизительно равна

$$P_l\approx\frac{1}{T}\int_0^T x_l(t)\,dt, \ (l=1, 2,\ldots, k)$$

$P_{lm}(h)$ $(l=1, 2, \ldots, k)$ — вероятность выполнения равенства $X_l(t)=1$ при фиксированном t и одновременного выполнения в точке с координатой $t+h$ равенства $X_m(t+h)=1$;

для любых t и h

$$P_{lm}(h) \approx \frac{1}{T-h} \int_0^{T-h} x_l(t) \cdot x_m(t+h)\, dt \quad (l, m = 1, 2, \ldots, k);$$

значения функций $r_{m/l}(h)$ и $r_{lm}(h)$ при фиксированных h и t соответствуют коэффициенту регрессии события $X_l(t) = 1$ относительно события $X_m(t+h) = 1$ и коэффициенту корреляции для этих событий;

$$q_{lm}(h) = \frac{P_{lm}(h) \cdot P_{\bar{l}\,\bar{m}}(h) - P_{l\bar{m}}(h) \cdot P_{\bar{l}m}(h)}{P_{lm}(h) \cdot P_{\bar{l}\,\bar{m}}(h) + P_{l\bar{m}}(h)\, P_{\bar{l}m}(h)}, \tag{2.5}$$

$$P_{\bar{l}\,\bar{m}}(h) \approx \frac{1}{T-h} \int_0^{T-h} [1 - x_l(t)]\,[1 - x_m(t+h)]\, dt = T - h -$$

$$- \frac{1}{T-h} \int_0^{T-h} x_m(t+h)\, dt - \frac{1}{T-h} \int_0^{T-h} x_l(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{T-h} \int_0^{T-h} x_l(t)\, x_m(t+h)\, dt,$$

$$P_{l\bar{m}}(h) \approx \frac{1}{T-h} \int_0^{T-h} x_l(t)\,[1 - x_m(t+h)]\, dt =$$

$$= \frac{1}{T-h} \int_0^{T-h} x_l(t)\, dt - \frac{1}{T-h} \int_0^{T-h} x_l(t)\, x_m(t+h)\, dt,$$

$$P_{\bar{l}m}(h) \approx \frac{1}{T-h} \int_0^{T-h} [1 - x_l(t)]\, x_m(t+h)\, dt =$$

$$= \frac{1}{T-h} \int_0^{T-h} x_m(t+h)\, dt - \frac{1}{T-h} \int_0^{T-h} x_l(t)\, x_m(t+h)\, dt.$$

Значение функции $q_{lm}(h)$ при фиксированном h соответствует коэффициенту связи Юла (Юл, Кендалл, (1960).

Аналогичным образом могут быть получены функции от h, совпадающие по форме с коэффициентами коллигации, «четырехклеточной» корреляции (Кендалл, Стюарт, 1973; Юл, Кендалл, 1960) и т. п.

Можно дать следующую геометрическую интерпретацию введенных выше мер связи. Из интервала $[0, T]$ прямой, секущей систему тел L, случайно выбирается точка $O(t)$, при соблюдении условия, чтобы координата t этой точки была реализацией равномерно распределенной случайной величины. Если выбранная точка $O(t)$ принадлежит телу подсистемы L_l, то считается, что осуществилось событие $X_l(t)=1$. Затем на расстоянии h от этой точки по прямой в фиксированном направлении извлекается вторая точка $0(t+h)$. Если эта точка принадлежит телу подсистемы L_m, то считается, что осуществилось событие $X_m(t+h)=1$. По заданным координатам пересечения границ тел системы L прямой можно подсчитать вероятности осуществления этих событий и различные меры стохастической связи между ними. Формулы (2.2)—(2.5) выражают эти меры как функции от расстояния h.

Придадим формулам (2.1)—(2.5) более удобный для расчетов вид. Как было выше отмечено, из способа построения функции $x_l(t)$ $(l=1, 2,..., k)$ следует, что интервалы, в точках которых $x_l(t)=1$ чередуются с интервалами, в точках которых $x_l(t)=0$. Поэтому функцию $x_l(t)$ можно задавать перечислением координат граничных точек отрезков, в пределах которых $x_l(t)=1$ (эти точки, за исключением быть может двух крайних, совпадают с точками разрыва данной функции $x_l(t)$). Пусть $\left[t'_{l1}, t''_{l1}\right]$, $\left[t'_{l2}, t''_{l2}\right],...,\left[t'_{li}, t''_{li}\right],...,\left[t'_{ln_l} t''_{ln_l}\right]$—отрезки прямой, в точках которых $x_l(t)=1$, $(l=1, 2,... k)$, в пределах интервала (0, T) задания функции $x_l(t)$.

В силу указанных свойств функции $x_l(t)$ будет выполнено

$$x_l(t)=\begin{cases} 1, \text{ если } t'_{li}\leqslant t\leqslant t''_{li}, \ i=1, 2,..., n_l \\ 0, \text{ если } t''_{li}\leqslant t\leqslant t'_{l(i+1)}, i=1, 2,..., n_l-1\,. \end{cases}$$

Введем характеристическую функцию $y_{li}(t)$ i-ого отрезка $\left[t'_{li}, t''_{li}\right]$, в точках которого $x_l(t)=1$,

$$y_{li}(t)=\begin{cases} 1, \text{ если } t'_{li}\leqslant t< t''_{li} \\ 0, \text{ если } t<t'_{li}, \ t>t''_{li}. \end{cases}$$

Функцию $x_l(t)$ можно выразить через характеристические функции $y_{li}(t)$, $i=1, 2,..., n_l$:

$$x_l(t)=\sum_{i=1}^{n_l} y_{li}(t) \tag{2.6}$$

Используя (2.6), введенные выше формулы (2.1)—(2.5), можно представить через координаты граничных точек интервалов $\left[t'_{li}, t''_{li}\right]$, $i=1, 2,..., n_l$; $\left[t'_{mj} t''_{mj}\right]$, $j=1, 2,..., n_m$, в пределах которых значения функций $x_l(t)$ и $x_m(t)$ равны 1. Для этого достаточно выразить через эти координаты интегралы

$$\int_0^a x_l(t)\,dt, \quad \int_0^{T-h} x_l(t)\,x_m(t+h)\,dt$$

(где a равна либо T, либо $T-h$), так как в перечисленные формулы входят интегралы только этих двух видов.

Интеграл $\int_0^a x_l(t)\,dt$ равен сумме длин отрезков $\left[t'_{li}, t''_{li}\right]$ $i=1, 2,\ldots, \mu_l$, где через μ_l обозначено число отрезков $\left[t'_{li}\, t''_{li}\right]$ в интервале $(0, a)$ (при $a=T, \mu_l=n_l$):

$$\int_0^a x_i(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\mu_l}\left(t''_{li}-t'_{li}\right).$$

Интеграл $\int_0^{T-h} x_l(t)\,x_m(t+h)\,dt$, $(l, m=1, 2,\ldots, k)$, использовав (2.6), можно представить как сумму интегралов:

$$\int_0^{T-h} x_l(t)\,x_m(t+h)\,dt = \sum_{i=1}^{n_m}\sum_{i=1}^{n_l}\int_0^{T-h} y_{li}(t)\,y_{mj}(t+h)\,dt, \tag{2.7}$$

где

$$y_{mj}(t+h) = \begin{cases} 1, \text{ если } t'_{mj} \leqslant t+h \leqslant t''_{mj} \\ 0, \text{ если } t+h < t'_{mj},\ t+h > t''_{mj},\ (j=1, 2,\ldots, n_m). \end{cases}$$

Произведение функций $y_{li}(t)$ и $y_{mj}(t+h)$ в правой части (2.7) при фиксированном h равно единице только для значений t, при которых точка $0(t+h)$ с координатой $t+h$ принадлежит пересечению $\Delta_{li}\cap\Delta_{mj}$ отрезков $\Delta_{li}=\left[t'_{li}+h, t''_{li}+h\right]$ и $\Delta_{mj}=\left[t'_{mj}, t''_{mj}\right]$. Поэтому интеграл в правой части (2.7) равен длине пересечения $\Delta_{li}\cap\Delta_{mj}$, которую обозначим через $z_{li,mj}(h)$

$$\int_0^{T-h} y_{li}(t)\,y_{mj}(t+h)\,dt = z_{li,mj}(h)$$

(явное выражение для функции $z_{li,mj}(h)$ через $h, t'_{li}, t''_{li}, t'_{mj}, t''_{mj}$ содержится в работе автора, 1975)).

Приведенные выше формулы написаны в такой форме, что выбор начала системы отсчета не влияет на результат вычислений, так как в них входят только разности координат точек. Используя эти формулы по заданным $t'_{li}, t''_{li}, t'_{mj}, t''_{mj}$, для любых l, i, m, j, h можно найти значение $z_{li,\, mj}(h)$ и затем вычислить (2.7). Таким образом, по формулам (2.1)—(2.7) и заданным координатам граничных точек интервалов $\left[t'_{li},\ t''_{li}\right]$, $l = 1, 2, \ldots,$ $\ldots, k$; $i = 1, 2, \ldots, n_l$, можно вычислить значения введенных выше функций $\left(k_{lm}(h),\ r_{lm}(h)\right.$ и др.$\left.\right)$ для сечения реализации $f\left(\vec{t}\right)$ поля $F\left(\vec{t}\right)$ произвольной прямой в фиксированном направлении. Вычислив эти функции для разных пространственных положений и ориентаций секущей прямой, можно получить их усредненные оценки для всего случайного поля $F\left(\vec{t}\right)$.

Исходя из свойств систем геологических тел, можно установить некоторые общие свойства введенных выше функций $k_{lm}(h)$, $r_{lm}(h)$ и $q_{lm}(h)$, характеризующих зависимость силы связи между признаками в двух точках от расстояния h между этими точками. Из изложенной выше основной предпосылки, согласно которой системы геологических тел рассматриваются как реализации эргодических случайных полей, следует, что значения этих функций (сила связи) для всех l и m с увеличением расстояния h должна стремиться к нулю, что естественно и с геологической точки зрения. Если система геологических тел выделена по системе признаков (по процедуре, описанной в § 4 гл. 2), то при стремлении расстояния h к нулю значения функций будут приближаться к —1 в случае $l \neq m$, и к 1 в случае $l = m$.

По приведенным выше алгоритмам И. И. Шифриным составлены программы для ЭВМ на языке „ФОРТРАН", позволяющие вычислить значения функций $k_{lm}(h)$, $r_{lm}(h)$ и $q_{lm}(h)$.

§ 3. Определение меры пространственной связи между системами геологических тел методом контактов

В предлагаемом ниже методе для определения меры пространственной связи между подсистемами системы геологических тел используется величина площади поверхности контактов между телами. Эта величина существенно зависит от взаиморасположения тел различных подсистем, от пространственной связи между ними. В иллюстративных целях рассмотрим некоторые простейшие примеры.

Пусть имеется образец породы, состоящей из трех минералов. Можно представить себе такой случай, когда зерна первого минерала содержатся в зернах второго. В этом простейшем случае, исходя из интуитивных соображений, можно сказать, что зерна первого минерала пространственно не ассоциируют с зернами третьего. С этими соображениями согласуются и величины площадей поверхностей контактов между зернами минералов: так как все зерна первого минерала включены в зернах второго, то площадь поверхности контакта между зернами первого и третьего равна нулю. Допустим теперь, что относительные объемы всех трех минералов в породе равны, формы и размеры их зерен одинаковы и расположение зерен относительно друг друга случайное и не зависящее от того, зерна какого минерала находятся рядом с данными зернами. Тогда площади контакта между зернами любых двух минералов будут приблизительно равны.

В более общем случае можно допустить, что если в расположении зерен первого и второго минералов отсутствует пространственная связь (положительная или отрицательная), то доля площади поверхности контакта зерен первого с зернами второго в общей площади поверхности контакта зерен второго минерала должна равняться доле площади поверхности контакта зерен первого в общей площади поверхности контакта всех зерен породы. Невыполнение этого условия можно рассматривать как признак того, что зерна первого и второго минералов пространственно ассоциируют или, наоборот, «избегают» друг друга.

Изложенные соображения, очевидно, справедливы и в случае, когда вместо минералов, слагающих породу, рассматривается участок земной коры, сложенный телами некоторых типов пород.

Рассмотрим общий случай. Пусть система геологических тел L с подсистемами L_1. $L_2,\ldots,$ L_k может быть названа множеством контактирующих тел по определению 2.5 гл. 2.

Введем следующие обозначения: $i_m = 1, 2, 3,\ldots, n_m$ — номера тел подсистемы L_m (n_m — число тел подсистемы L_m); $S_{l,\, i_m}$ — площадь поверхности контакта i_m-го тела подсистемы L_m с телами подсистемы L_l (l, $m = 1, 2,\ldots, k$).

Определим величины S_{lm}, S_l и S выражениями

$$S_{lm} = \sum_{i_m=1}^{n_m} S_{l,\, i_m};\ S_l = \sum_{m=1}^{k} S_{lm};\ S = \sum_{l=1}^{k} S_l. \tag{3.1}$$

Величина S_{lm} при $l \neq m$ совпадает с суммарной площадью поверхностей контактов тел подсистемы L_m с телами подсистемы L_l, при $l = m$ S_l равна площади поверхности контакта между телами подсистемы L_l, умноженному на 2 (допускается случай, когда тела одной и той же подсистемы имеют общую границу).

В соответствии с изложенными выше представлениями условие отсутствия пространственной связи между подсистемами L_m и L_l выражается равенством.

$$\frac{S_{lm}}{S_l} = \frac{S_m}{S} \tag{3.2}$$

или, в другой форме —

$$SS_{lm} - S_l \cdot S_m = 0.$$

Если $S_{lm} > \frac{S_l S_m}{S}$ (или $SS_{lm} - S_l S_m > 0$), то тела подсистем L_m и L_l пространственно связаны положительно, если $S_{lm} < \frac{S_l S_m}{S}$ (или $SS_{lm} - S_l S_m < 0$), то они пространственно связаны отрицательно. В качестве меры связи можно использовать степень отклонения S_{lm} от $\frac{S_l S_m}{S}$ или величину разности $SS_{lm} - S_l S_m$.

Можно ввести также различные меры пространственной связи. Ситуация здесь аналогична той, которая возникает при определении различных мер связи между случайными величинами. Поэтому желательно использовать известные, хорошо исследованные меры связи между качественными признаками или случайными событиями. Для этого задачу установления меры пространственной связи между телами подсистем L_l и L_m нужно свести к установлению связи между некоторыми случайными событиями E_l' и E_m''. Эти случайные события должны быть определены таким образом, чтобы связи между ними можно было бы интерпретировать как пространственные связи между соответствующими им подсистемами. Ниже попытаемся решить рассматриваемую задачу указанным способом.

Случайные события E_l', E_m'', удовлетворяющие отмеченным выше условиям, должны быть определены таким образом, чтобы условие отсутствия связи между ними выражалось тем же равенством (3.2). Это возможно в том случае, если события E_l' и E_m'' определены так, что вероятности $P(E_l')$ и $P(E_m'')$ осуществления каждого из них и вероятность $P(E_l', E_m'')$ совместного их осуществления равны:

$$P(E_l') = \frac{S_l}{S};\ P(E_m'') = \frac{S_m}{S};\ P(E_l', E_m'') = \frac{S_{lm}}{S}. \tag{3.3}$$

Действительно, условие независимости, определенных таким образом событий E_l' и E_m'', выражается равенством

$$P(E_l', E_m'') = P(E_l')\, P(E_m'')$$

или с учетом (3.3)

$$\frac{S_{lm}}{S} = \frac{S_l}{S} \cdot \frac{S_m}{S},$$

что совпадает с (3.2).

Реализации случайных событий, удовлетворяющих условию (3.2), можно получать разными способами. Один из способов состоит в следующем. Производятся испытания, в каждом из которых осуществляется одно из событий $E_1^{'}, E_2^{'}, \ldots, E_k^{'}$ и одно из событий $E_1^{''}, E_2^{''}, \ldots, E_k^{''}$. Отдельное испытание сводится к осуществлению следующей процедуры. Из совокупности точек поверхностей контакта между телами системы случайно выбирается одна точка (для всех точек поверхностей контакта вероятность выбора одинакова). Отобранная точка, очевидно, находится на границе между какими-нибудь двумя телами системы L. Выберем случайно одно из этих двух тел $\left(\text{вероятность выбора для каждого из них равна } \frac{1}{2}\right)$. Если выбранное тело относится к подсистеме $L_l (l = 1, 2, \ldots, k)$, то считается, что осуществилось событие $E_l^{'}$. Если второе тело относится к подсистеме L_m, то считается, что осуществлялось событие $E_m^{''}$. Из описанного способа получения реализаций случайных событий $E_l^{''}$ и $E_m^{''}$ видно, что вероятности осуществления каждого из них в отдельности и вероятность их совместного осуществления определяются равенствами (3.3).

Таким образом, в качестве меры пространственной связи между подсистемами L_l и $L_m (l, m = 1, 2, \ldots, k)$ можно взять меры связи между случайными событиями $E_l^{'}$ и $E_m^{''} (l, m=1, 2, \ldots, k)$. Для примера приводим некоторые из них.

Коэффициент корреляции r_{lm} между случайными событиями $E_l^{'}$ и $E_m^{''}$ равен (Абезгауз и др., 1970, стр. 9 формула (1.14)):

$$r_{lm} = \sqrt{\rho_{l/m} \cdot \rho_{m/l}}, \tag{3.4}$$

где $\rho_{l/m}$ и $\rho_{m/l}$ — коэффициенты регрессий события $E_l^{'}$ относительно события $E_m^{''}$ и события $E_m^{''}$ относительно события $E_l^{'}$:

$$\rho_{l/m} = P\left(E_l^{'} / E_m^{''}\right) - P\left(E_l^{'} / \overline{E}_m^{''}\right), \tag{3.5}$$

$$\rho_{m/l} = P\left(E_m^{''} / E_l^{'}\right) - P\left(E_m^{''} / \overline{E}_l^{'}\right); \tag{3.6}$$

здесь через $\overline{E}_l^{'}$ и $\overline{E}_m^{''}$ обозначены события, противоположные соответственно для событий $E_l^{'}$ и $E_m^{''}$, а через $P\left(E_l^{'} / E_m^{''}\right)$ — вероятность осуществления события $E_l^{'}$ при условии, что произошло событие $E_m^{''}$.

$P\left(E_l^{'} / \overline{E}_m^{''}\right)$ — вероятность осуществления события $E_l^{'}$, при условии, что событие $E_m^{''}$ не произошло. Условные вероятности, входящие в (3.5) и (3.6), можно выразить через величины S_{km}, S_k, S_m и S, используя равенства (3.3).

$$P\left(E_l' / E_m''\right) = \frac{P\left(E_l', E_m''\right)}{P\left(E_m''\right)} = \frac{S_{lm}}{S_m}, \tag{3.7}$$

$$P\left(E_l' / \bar{E}_m''\right) = \frac{S_l - S_{lm}}{S - S_m}, \tag{3.8}$$

$$P\left(E_m'' / E_l'\right) = \frac{S_{lm}}{S_l}, \tag{3.9}$$

$$P\left(E_m'' / \bar{E}_l'\right) = \frac{S_m - S_{lm}}{S - S_l}. \tag{3.10}$$

Подставив (3.7)—(3.10) в (3.5) и (3.6) и затем полученные выражения для $\rho_{l/m}$ и $\rho_{m/l}$ в (3.4), после преобразований получим

$$\rho_{l/m} = \frac{S \cdot S_{lm} - S_l S_m}{S_m (S - S_m)}. \tag{3.11}$$

$$\rho_{m/l} = \frac{S \cdot S_{lm} - S_l \cdot S_m}{S_l (S - S_l)}, \tag{3.12}$$

$$r_{lm} = \frac{S \cdot S_{lm} - S_l S_m}{\sqrt{S_l S_m (S - S_l)(S - S_m)}}. \tag{3.13}$$

В качестве меры связи между подсистемами L_l и L_k системы тел можно использовать, кроме коэффициента корреляции r_{lm}, коэффициенты регрессии $\rho_{l/m}$ и $\rho_{m/l}$, определяемые выражениями (3.11), (3.12), а также среднее арифметическое коэффициентов регрессии:

$$\bar{\rho}_{lm} = \frac{\rho_{l/m} + \rho_{m/l}}{2} = \frac{S \cdot S_{lm} - S_l S_m}{2S_m (S - S_m)} + \frac{SS_{lm} - S_l S_m}{2S_l (S - S_l)}. \tag{3.14}$$

В качестве меры связи между подсистемами можно использовать также известные коэффициенты связи между качественными признаками*. Приведем для примера меру пространственной связи между подсистемами, получаемую из формулы коэффициента связи Юла (Кендалл, Стьюарт, 1973, формула (33.9), стр. 723). Эта формула выше была приведена в качестве меры связи между качественными признаками, определяемыми в точках пространства с заданными расстояниями между ними (формула (2.5)). В введенных в данном параграфе обозначениях она имеет следующий вид:

---

* Из определенной выше совокупности случайных событий можно перейти к системе качественных признаков следующим образом: каждому случайному событию ставится в соответствие один признак такой, что он выполняется тогда и только тогда, когда осуществляется соответствующее событие.

$$q_{lm} = \frac{P\left(E'_l, E''_m\right) P\left(\overline{E}'_l, \overline{E}''_m\right) - P\left(E'_l, \overline{E}''_m\right) P\left(\overline{E}'_l, E''_m\right)}{P\left(E'_l, E''_m\right) P\left(\overline{E}'_l, \overline{E}''_m\right) + P\left(E'_l, \overline{E}''_m\right) P\left(\overline{E}'_l, E''_m\right)}; \quad (3.15)$$

здесь символы вида $P(x, y)$, $\left(x,\ y = E'_l,\ E''_m,\ \overline{E}'_l,\ \overline{E}''_m\right)$ означают вероятность совместного осуществления событий, указанных в скобках. Эти вероятности в соответствии с приведенным выше определением событий E'_l и E''_m равны:

$$P\left(E'_l,\ E''_m\right) = \frac{S_{lm}}{S}, \quad (3.16)$$

$$P\left(E'_l,\ \overline{E}''_m\right) = \frac{S_l - S_{lm}}{S}, \quad (3.17)$$

$$P\left(\overline{E}'_l,\ E''_m\right) = \frac{S_m - S_{lm}}{S}, \quad (3.18)$$

$$P\left(\overline{E}'_l,\ \overline{E}''_m\right) = \frac{S - S_l - S_m + S_{lm}}{S}, \quad (3.19)$$

Подставив эти выражения в (3.15), получим

$$q_{lm} = \frac{S \cdot S_{lm} - S_l \cdot S_m}{S_{lm}\left(S - S_l - S_m + S_{lm}\right) + \left(S_l - S_{lm}\right)\left(S_m - S_{lm}\right)}. \quad (3.20)$$

Во всех приведенных выше формулах (3.13), (3.14), (3.20) — мера пространственной связи равна нулю, когда разность $SS_{lm} - S_lS_m$ равняется нулю и возрастает с увеличением этой разности. Таким образом все эти меры отвечают исходному условию (3.2).

Определенные выше случайные события E'_l, $E''_m(l, m = 1, 2, \ldots, k)$ позволяют применить для исследования пространственных связей между подсистемами тел понятия и методы теории информации. В частности, для этой цели можно использовать следующие формулы теории информации (Вентцель, 1964; Кульбак, 1967; Яглом А., Яглом И., 1973).

Частная информация о событии E'_l, содержащаяся в сообщении о событии E''_m (формула (18.6.12), Вентцель, 1964, стр. 492)

$$I_{l/m} = \log \frac{P\left(E'_l / E''_m\right)}{P\left(E'_l\right)}.$$

Подставив в эту формулу значения для $P\left(E'_l / E''_m\right)$ и $P\left(E'_l\right)$ из (3.3) и (3.7), получим

$$I_{l/m} = \log \frac{S_{lm} \cdot S}{S_m \cdot S_l}. \quad (3.21)$$

Величина $I_{l/m}$, определяемая выражением (3.21), есть количество информации о том, находится ли данная точка на границе тел подсистем L_l и L_m, полученной из сообщения о том, что через эту точку проходит поверхность тела подсистемы L_m. Величина $I_{l/m}$ зависит от силы пространственной связи между телами подсистем L_l и L_m.

Частная информация о системе (формула 18.6.3, Вентцель, 1964, стр. 489) представлена в наших обозначениях:

$$I_m = \sum_{l=1}^{k} P\left(E_l^{'} / E_m^{''}\right) I_{l/m}.$$

В данном случае с учетом равенств (3.7) и (3.21) эту формулу можно представить в виде

$$I_m = \sum_{l=1}^{k} \frac{S_{lm}}{S_m} \log \frac{S_{lm} \cdot S}{S_m S_l}. \tag{3.22}$$

Величина I_m, определяемая формулой (3.22), есть количество информации о том, на границе между телами каких подсистем находится данная точка, полученная из сообщения, о том, что через эту точку проходит поверхность тела подсистемы L_m. Величина I_m зависит от силы пространственной связи тел подсистемы L_m с телами других подсистем.

Полная взаимная информация (формула (18.16.2), Вентцель. 1964, стр. 489) определяется выражением

$$I = \sum_{m=1}^{k} P\left(E_m^{''}\right) I_m.$$

В рассматриваемом случае, учитывая равенства (3.3) и (3.22), эту формулу можно представить в виде

$$I = \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \frac{S_{lm}}{S} \log \frac{S_{lm} \cdot S}{S_m \cdot S_l}. \tag{3.23}$$

Информационный коэффициент корреляции:

$$\rho = \sqrt{1 - e^{-2I}}. \tag{3.24}$$

Величины I и ρ характеризуют в среднем степень зависимости в пространственном расположении тел различных подсистем системы L.

Аналогично могут быть вычислены величины энтропии.

Используя введенные выше случайные события, в качестве меры связи между телами всех подсистем данной системы тел можно использовать также коэффициент средней квадратической сопряженности К. Пирсона и коэффициент взаимной сопряженности

А. А. Чупрова (Юл, Кендалл, 1960, стр. 746, 747). В этом случае вместо матрицы сопряженности признаков (определение см. в работе Юла, Кендалла, 1960, стр. 745) рассматривается матрица с элементами $P\left(E'_l,\ E''_m\right) = \frac{S_{lm}}{S}$.

Поскольку система тел L есть реализация случайного поля, введенные выше коэффициенты, вычесленные для L, будут значениями случайных величин. Стандартные отклонения этих величин можно оценить, вычислив их значения для различных подобластей области D, в которой расположена система тел L*.

В приведенных выше формулах метода контактов не учитывается возможное влияние на пространственную связь между телами подсистем L_l и L_m их пространственных связей с телами других подсистем. Учет этих связей особенно при большом числе подсистем сильно усложняет статистический анализ системы тел.

Значение всех величин, введенных в данном параграфе, можно оценить по случайным плоским и прямолинейным сечениям системы тел.

Пусть система тел L с подсистемами $L_1, L_2, \ldots, L_k$ пересечена случайно проведенной плоскостью Q. Введем обозначения.

$i_m = 1, 2, \ldots, n'_m$ — номера тел подсистемы L_m, пересеченных плоскостью Q $\left(n'_m\right.$ — число тел подсистемы L_m, пересеченных плоскостью $\left.Q\right)$;

$U_{l,\, i_m}$ — длина общей границы плоского сечения i-ого тела подсистемы L_m с плоскими сечениями тел подсистемы $L_l (l = 1, 2, \ldots, k)$;

$$U_{lm} = \sum_{i_m=1}^{n'_m} U_{l,\, i_m},\quad U_l = \sum_{m=1}^{k} U_{lm},\quad U = \sum_{l=1}^{k} U_l.$$

В соответствии с формулой (6.4) гл. 3 и равенствами (3.3) и (3.7) оценками вероятностей $P\left(E'_l\right)$, $P\left(E'_l / E''_m\right)$ и $P\left(E'_l,\ E''_m\right)$ соответственно будут

$$\hat{P}\left(E'_l\right) = \frac{U_l}{U}, \tag{3.25}$$

$$\hat{P}\left(E'_l / E''_m\right) = \frac{U_{lm}}{U_m}, \tag{3.26}$$

---

* Недостатком такого способа является то, что оценки стандартных отклонений зависят также и от способа разбиения области D на подобласти, в частности от формы подобластей. Попытки разработки метода, не обладающего этим недостатком, привели к очень громоздким формулам для оценки стандартных отклонений введенных коэффициентов. Решение этого вопроса связано с тем, что теория случайных полей рассматриваемого вида развита очень слабо.

$$\hat{P}\left(E_l', E_m''\right) = \frac{U_{lm}}{U}. \tag{3.27}$$

На основании соотношений (3.25), (3.26) и (3,27) для вычисления оценок величин r_{lm}, $\bar{\rho}$, q_{lm}, $I_{l/m}$, I_l, I и ρ можно использовать формулы, полученные из (3.13)—(3.15) и (3.21)—(3.23) заменой в них S_{lm}, S_l, S_m и S соответственно на U_{lm}, U_l, U_m и S.

В частности, для оценки r_{lm} и q_{lm} можно использовать формулы

$$\hat{r}_{lm} = \frac{U U_{lm} - U_l U_m}{\sqrt{U_l U_m (U-U_l)(U-U_m)}}, \tag{3.28}$$

$$\hat{q}_{lm} = \frac{U U_{lm} - U_l U_m}{U_{lm}(U + U_{lm} - U_l - U_m) + (U_l - U_{lm})(U_m - U_{lm})}, \tag{3.29}$$

Пусть теперь система геологических тел L с подсистемами $L_1, L_2, \ldots, L_k$ пересечена случайной прямой. Введем обозначения

$i_m = 1, 2, \ldots, n_m''$ — номера тел подсистемы L_m, пересеченных случайной прямой.

W_{l, i_m} — число точек пересечения случайной прямой границы i-ого тела подсистемы L_m с телами подсистемы L_l $(l, m = 1.\ 2, \ldots, k)$

$$W_{lm} = \sum_{i_m=1}^{n_m''} W_{l, i_m};\ W_l = \sum_{m=1}^{k} W_{lm};\ W = \sum_{l=1}^{k} W_l.$$

Согласно формуле (6.8) гл. 3 и равенствам (3.3) и (3.7) оценками вероятностей $P\left(E_l'\right)$, $P\left(E_l'/E_m''\right)$ и $P\left(E_l', E_m''\right)$ являются

$$\hat{P}\left(E_l'\right) = \frac{W_l}{W}, \tag{3.30}$$

$$\hat{P}\left(E_l'/E_m''\right) = \frac{W_{lm}}{W_m}, \tag{3.31}$$

$$\hat{P}\left(E_l', E_m''\right) = \frac{W_{lm}}{W}. \tag{3.32}$$

На основании равенств (3.30), (3.31) и (3.32) для вычисления оценок величин r_{lm}, q_{lm}, $I_{l/m}$, I_m и I по случайному прямолинейному сечению системы тел L можно использовать формулы

$$\hat{r}_{lm} = \frac{W W_{lm} - W_l W_m}{\sqrt{W_l W_m (W - W_l)(W - W_m)}}, \tag{3.33}$$

$$\hat{q}_{lm} = \frac{W W_{lm} - W_l W_m}{W_{lm}(W + W_{lm} - W_l - W_m) + (W_l - W_{lm})(W_m - W_{lm})}, \tag{3.34}$$

$$\hat{I}_{l/m} = \log \frac{W_{lm} W}{W_m \cdot W_l}, \tag{3.35}$$

$$\hat{I}_m = \sum_{l=1}^{k} \frac{W_{lm}}{W_m} \log \frac{W_{lm} W}{W_m W_l}, \tag{3.36}$$

$$\hat{I} = \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} \frac{W_{lm}}{W} \cdot \log \frac{W_{lm} W}{W_m W_l}. \tag{3.37}$$

Равенства (3.30), (3.31) и (3.32) позволяют наглядно интерпретировать введенное выше условие (3.2) отсутствия пространственной связи между телами различных подсистем системы тел: если в расположении тел подсистем L_m и L_l отсутствует пространственная связь, то при движении по случайной прямой, секущей систему тел L, вероятность $P_{l/m}$ встречи тела подсистемы L_l при условии, что предыдущее тело относится к подсистеме L_m, будет равна вероятности встречи тела подсистемы L_l без этого условия. С некоторыми оговорками, касающимися выбора секущей прямой можно сказать, что указанная условная вероятность $P_{l/m}$ совпадает с переходной вероятностью, понимаемой как и в работах А. Б. Вистелиуса и М. А. Романовой (Вистелиус, Романова, 1972) и Крамбейна (Krumbein, 1967).

Разработанные методы и алгоритмы применены к решению различных конкретных геологических задач. Из-за ограниченности объема данной книги нет возможности изложить полученные результаты. Ниже ограничимся только перечнем выполненных исследований. Это необходимо, чтобы показать, на каких задачах и фактических материалах проверялась эффективность предлагаемых методов.

По указанному в § 1 способу исследования пространственной связи между рудопроявлениями были обработаны на ЭВМ данные около 600 рудопроявлений эндогенных рудных формаций Чаткало-Кураминских гор (Западный Тянь-Шань), разделенных на 8 минеральных типов и 15 типов по главным металлам. В результате были установлены статистические закономерности взаимного пространственного расположения рудопроявлений, выражающиеся в зависимости силы и знака пространственной связи от расстояния между рудопроявлениями, особенностей геологического строения районов и типов рудопроявлений (Воронич, Усманов, 1968).

Упомянутая в § 1 задача определения меры пространственной связи рудопроявлений с выходами различных типов пород была также рассмотрена на примере рудопроявлений Чаткало-Кураминских гор и более детально для Юго-Западных отрогов Чаткальского хребта. В результате статистической обработки на ЭВМ данных около 1400 эндогенных рудопроявлений установлены меры пространственной связи рудопроявлений 15 минеральных типов и 10 типов по главным металлам с выходами пород 44 генетических и петрографических разновидностей (Воронич, Усманов и др., 1971).

Упомянутый в § 1 способ исследования пространственной связи между геологическими объектами путем установления совокупности качественных признаков совместно наблюдаемых в выбранных областях пространства был применен для статистического исследования парагенезисов минералов в магматических породах. В качестве исходного материала использованы данные по минеральному составу 1195 образцов магматических пород по основным районам их распространения в СССР, содержащиеся в сборнике «Химические анализы изверженных горных пород и породообразующих минералов» (Морковкина, 1964). В результате обработки этих данных на ЭВМ для 22 основных первичных породообразующих и акцессорных минералов изверженных пород установлены меры связи, характеризующие их совместную встречаемость в породах, статистически выявлены группы ассоциирующих минералов.

Метод контактов был применен для исследования текстурно-структурных свойств пород гранитоидных массивов Чаткальских гор. Для этой цели была составлена специальная программа для ЭВМ, позволяющая вычислить оценки коэффициента пространственной связи по заданной последовательности пересечения зерен минералов по линиям сканирования в шлифах. На статистическом материале большого объема (около 16 тыс. пересечений контактов зерен) были выявлены закономерности пространственного взаиморасположения зерен породообразующих минералов в основных типах пород указанных массивов. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что количественные характеристики строения пород, вычисленные методом контактов, можно использовать для строгого описания, сопоставления, расчленения и классификации пород.

Указанная выше программа на ЭВМ была использована также для статистического анализа последовательности слоев различных типов пород в большом количестве (113) разрезов осадочно-вулканогенных толщ верхнего палеозоя Чаткало-Кураминских гор. Были составлены две последовательности. Одна из них характеризует чередование пород 5-ти типов, выделенных по составу, и включает 1200 элементов, другая, состоящая из 2800 элементов, соответствует последовательности расположения слоев пород 12 генетических и структурных разновидностей. В результате были выявлены статистические закономерности чередования пород в осадочно-вулканогенных толщах указанного региона и установлена возможность применения алгоритмов метода контактов при статистическом анализе строения осадочно-вулканогенных толщ (Усманов, Юдин, 1972).

Методы контактов и случайных полей были применены для статистического анализа геологического строения Кураминского хребта и гор Моголтау (Западный Тяньшань). По этим методам на ЭВМ была обработана информация, извлеченная из геологической карты среднего масштаба специальными способами, позволяющими отбирать более достоверные сведения. Геологическая интерпретация полученных результатов приводит к выводу о возможности использования методов случайных полей и контактов для решения на количественной основе ряда геологических задач: выделения пространственно ассоциирующих групп пород и структурных этажей, определения влияния состава вмещающих пород на состав интрузий, выявления некоторых особенностей геологического строения районов скоплений рудопроявлений и т. п.

Перечисленные выше исследования позволяют сделать вывод о том, что разработанные методы изучения пространственных связей между совокупностями геологических объектов могут быть использованы для решения на количественной основе задач из различных областей геологии.

Описанный выше в методе контактов подход был использован также при выводе формул для вычисления величин электропроводности, теплопроводности, диэлектрической и магнитной проницаемости гетерогенных систем (горных пород, сплавов и т. п.) по характеристикам их структуры и фазового состава (Тян, Усманов, 1972). Установлено, что эти формулы соответствуют известным экспериментальным данным по породам и могут найти применение в петрофизике.

Выводы

1. Задачи изучения пространственной связи между геологическими объектами относятся к наиболее распространенным типовым геологическим задачам. Решение многих вопросов парагенетического, формационного, металлогенического и структурного анализов математически сводится к установлению пространственной связи между совокупностями геологических объектов и определению меры этой связи. Большинство задач, возникающих при исследовании пространственной связи между геологическими объектами, формулируется как определение меры пространственной связи между системами геологических тел или между подсистемами системы геологических тел, выделенными по тем или иным признакам в геологическом объекте. Это обстоятельство позволяет разработать общие математические методы изучения пространственной связи между геологическими телами, одинаково применимые как к зернам минералов в породах, так и к более крупным геологическим телам, состоящим из пород, формаций и т. п.

В общем случае исследование математическими методами пространственных связей между подсистемами $L_1, L_2,..., L_k$ произвольной системы L геологических тел проводится путем определения некоторых величин $W_1, W_2,..., W_k$, выбранных таким образом, что связи между ними можно интерпретировать как пространственные связи между соответствующими их подсистемами. Такими величинами, в частности, являются: количество тел N_l ($l=1,2,..., к$) подсистемы L_l ($l=1,2,..., к$), расположенных частично или целиком внутри сферы R с центром в случайно выбранной точке, суммарный объем V_l ($l=1, 2,..., к$) тел или частей тел подсистемы L_l ($l=1,2,..., к$), расположенных внутри сферы R или в зоне толщиной h, примыкающей к границе тела, случайно выбранного из системы L; число тел Q_l подсистемы L_l контактирующих с телом, случайно выбранным из системы L и т. п. Исследования показывают, что существует большое число критериев для определения того, имеется ли пространственная связь между системами геологических тел. Поэтому утверждения о наличии пространственной связи между совокупностями геологических объектов без указания критерия, по которому эта связь установлена, лишены точного смысла.

Разработаны два статистических метода для исследования пространственных связей между системами геологических тел, названные методом контактов и случайных полей.

2. В методе случайных полей используются представления о случайных функциях и оценки вероятности встречи признаков в двух точках как функции от расстояния между этими точками. В процессах, приводящих к образованию геологических объектов, участвует, как правило, большое число факторов, не поддающихся точному учету. Поэтому совокупность геологических тел, выделенных в некотором геологическом объекте, естественно рассматривать как реализацию случайного процесса (функции, поля). Случайные функции, реализациям которых соответствуют системы геологических тел, обладают рядом особенностей. Значение этих функций — качественные признаки, а аргументы — количественные непрерывные величины — координаты точек пространства. Если система геологических тел L с подсистемами $L_1, L_2,..., L_k$ выделена по системе признаков (в соответствии с процедурой, изложенной в § 4 гл. 2), то такую систему тел можно рассматривать как реализацию системы случайных функций или векторфункции $F(\vec{t}) = < X_1(\vec{t}), X_2(\vec{t}),..., X_k(\vec{t})>$, состоящей из функций, принимающих в каждой точке пространства случайно одно из двух значений—0 или 1.

Поскольку заданная система геологических тел — единственная реализация случайного поля, то для ее исследования приходится предполагать стационарность и эргодичность этого поля. Представление систем геологических тел как реализаций случайных функций позволяет использовать для их исследования хорошо разработанные методы теории случайных функций. В частности, для изучения пространственных связей между системами геологических тел можно использовать корреляционную теорию случайных функций.

Исходя из этих предпосылок, выведен ряд формул, который можно использовать для статистического анализа строения геологических объектов, в том числе горных пород и руд.

3. В методе контактов для определения меры пространственной связи между подсистемами системы геологических тел использована величина площади поверхности контактов между телами. Вводятся случайные события, связи между которыми можно интерпретировать как пространственные связи между подсистемами тел. Вероятности осуществления этих событий вычисляются через площади поверхности контактов между телами. Это позволило использовать для исследования пространственой связи между подсистемами известные коэффициенты, характеризующие зависимость между случайными событиями, качественными признаками или категоризированными переменными, а также формулы теории информации — коэффициент корреляции для случайных событий, коэффициент связи Юла, коэффициент коллигации, «четырехклеточной корреляции», коэффициент средней квадратической сопряженности Пирсона, коэффициент взаимной сопряженности Чупрова, информационный коэффициент корреляции и т. п. Выведены формулы, позволяющие вычислить эти коэффициенты по заданным величинам площади контакта между телами, а также по данным плоского и прямолинейного сечений системы тел. Результаты обработки на ЭМВ большого объема статистических материалов показывают, что предлагаемые методы и алгоритмы можно применять для решения конкретных задач из различных областей геологии— петрографии, региональной геологии и металлогении.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ СИМВОЛИКА

Часть I (главы 1 и 2).

Символ	Название	Пример употребления	Читается
$\in$	Принадлежность элемента множеству	$x \in A$	Элемент x принадлежит множеству A
$\subseteq$	Включение	$A \subseteq B$	A есть подмножество множества В
$\subset$	Включение	$A \subset B$	A есть подмножество B и A не равно B.
$\not\subseteq$	Отрицание включения	$A \not\subseteq B$	A не есть подмножество B
$\cup$	Объединение множеств или отношений	$A \cup B$	Объединение множеств A и B
		$\varphi_1 \cup \varphi_2$	Объединение отношений φ_1 и φ_2
		$\bigcup_{i=1}^{m} A_i$	Объединение множеств $A_1, A_2, ..., A_m$
		$\bigcup_{i=1}^{m} \varphi_i$	Объединение отношений $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$
$\cap$	Пересечение множеств или отношений	$A \cap B$	Пересечение множеств A и B
		$\varphi_1 \cap \varphi_2$	Пересечение отношений φ_1 и φ_2
		$\bigcap_{i=1}^{m} A_i$	Пересечение множеств $A_1, A_2, ..., A_m$
		$\bigcap_{i=1}^{m} \varphi_i$	Пересечение отношений $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$
$\setminus$	Разность множеств или отношений	$A \setminus B$	Разность множеств A и B
		$\varphi_1 \setminus \varphi_2$	Разность отношений φ_1 и φ_2
$\varnothing$	Пустое множество		
R^n	n-мерное евклидово пространство	R^1, R^2, R^3.	Одномерное, двумерное и трехмерное евклидовы пространства.
$<x_1, x_2, ..., x_n>$	Упорядоченный набор (кортеж, вектор) элементов	$<A_i, A_j>$	Упорядоченная пара тел
$v(A)$	Объем множества точек A в трехмерном евклидовом пространстве R^3		
$M = \{A_i\}$	Множество геометрических тел		
$L = \{G_i\}$	Множество геологических тел		
$\neg$	Логическое отрицание	$\neg A$	Не A (логическое отрицание высказывания A)
		$\neg (x \varphi y)$	x не находится в отношении φ к y
$\wedge$	Коньюнкция	$A \wedge B$	A и B (коньюнкция высказываний A и B)
$\vee$	Дизъюнкция в неисключающем смысле	$A \vee B$	A или B

Символ	Название	Пример употребления	Читается
$\vee\vee$	Дизъюнкция в исключающем смысле	$A\vee\vee B$	Либо A, либо B
$\rightarrow$	Импликация	$A\rightarrow B$	Если A, то B, или из А следует B или A влечет B.
$\rightleftarrows$	Импликация двойная (эквиваленция)	$A\rightleftarrows B$	A равнозначно B или A тогда и только тогда, когда B
$\overset{Df}{\rightleftarrows}$	Равнозначность по определению	$A\overset{Df}{\rightleftarrows}B$	A и B равнозначны по определению.
$\forall x$	Квантор общности	$\forall x\in M\cdot A(x)$	Для любого элемента x множества M истинно высказывание $A(x)$
$\exists x$	Квантор существования	$\exists x\in MA(x)$	Существует хотя бы один элемент множества M, что истинно высказывание $A(x)$.
$\exists! x$	Ограниченный квантор существования	$\exists! x\in MA(x)$	Существует единственный элемент множества M, что высказывание $A(x)$ истинно.
φ	Произвольное бинарное отношение	$x\varphi y$	Для x и y выполнено отношение φ или x находится в отношении φ к y
$\varphi_{\text{м}}$	Отношение φ на множестве M	$x\varphi_{\text{м}} y$	Для элементов x и y множества M выполнено отношение φ.
$\hat{\varphi}$	Транзитивизация или транзитивное замыкание отношения	$x\hat{\varphi}y$	Для x и y выполнена транзитивизация отношения φ
$\varphi_1{}^{o}\varphi_2{}^{ooo}\varphi_n$	Произведение (композиция) отношений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$	$x\ \varphi_1{}^{o}\ \varphi_2{}^{ooo}\ {}^{ooo}\ \varphi_n\ y$	Для x и y выполнена композиция отношений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$
$\overline{\varphi}$	Дополнение к отношению φ	$x\overline{\varphi}y$	x не находится в отношении φ к y
φ^{-1}	Инверсия (обращение) отношения φ	$x\ \varphi^{-1}y$	y находится в отношении φ к x.
$O_{\text{м}}$	Пустое отношение на множестве M	$\varphi_{\text{м}}=O_{\text{м}}$	Отношение $\varphi_{\text{м}}$ не выполнено ни для какой пары элементов из множества M
$\Theta_{\text{м}}$	Полное отношение на множестве M	$\varphi_{\text{м}}=\Theta_{\text{м}}$	Отношение $\varphi_{\text{м}}$ выполнено для всех пар элементов из множества M
$E_{\text{м}}$	Отношение равенства на множестве M	$\varphi_{\text{м}}=E_{\text{м}}$	Отношение $\varphi_{\text{м}}$ выполнено только для пар элементов из M вида $<x, x>$
α	Отношение изолированности между телами	$A_i\ \alpha\ A_j$	Тела A_i и A_j в R^3 не имеют общих точек, или тело A_i изолировано от тела A_j
β	Отношение соприкосновения между телами	$A_i\ \beta\ A_j$	Тела A_i и A_j соприкасаются
σ	Отношение контактирования между телами	$A_i\ \sigma\ A_j$	Тела A_i и A_j контактируют
σ_1	Отношение вмещаемого контактирования между телами	$A_i\sigma_1\ A_j$	Тела A_i и A_j контактируют по замкнутой поверхности, во внутреннюю сторону от которой расположено тело A_j

Символ	Название	Пример употребления	Читается
σ_2	Отношение связывающего контактирования между телами	$A_i\ \sigma_2\ A_j$	Тело A_i находится в отношении связывающего контактирования к телу A_j
σ_3	Отношение простого контактирования между телами	$A_i\ \sigma_3\ A_j$	Тела A_i и A_j находятся в отношении простого контактирования
ω_1	Отношение идиоморфизма между телами	$A_i\ \omega_1\ A_j$	По заданному оператору ψ тело A_i идиоморфно относительно тела A_j, тело A_j ксеноморфно относительно тела A_i
ω_2	Отношение панидиоморфизма между телами	$A_i\ \omega_2\ A_j$	Тела A_i и A_j идиоморфны по заданному оператору ψ
ω_3	Отношение панксеноморфизма между телами	$A_i\ \omega_3\ A_j$	Тела A_i и A_j ксеноморфны по заданному оператору ψ
γ	Отношение совместимости между телами	$A_i\ \gamma\ A_j$	Тела A_i и A_j имеют общую часть
γ_1	Отношение частичной совместимости между телами	$A_i\ \gamma_1\ A_j$	Тела A_i и A_j имеют общую часть, не совпадающую полностью ни с одним из них
γ_2	Отношение включения между телами	$A_i\ \lambda_2\ A_j$	Тело A_i включает тело A_j
η	Отношение вмещения между телами	$A_i\ \eta\ A_j$	Тело A_i вмещает тело A_j
μ	Отношение уплотнения между телами	$A_i\ \mu\ A_j$	Тело A_i уплотняется телом A_j
ν	Отношение связывания между телами	$A_i\ \nu\ A_j$	Тело A_i связывается телом A_j
λ_L	Отношение следования между телами	$A_i\ \lambda_L\ A_j$	При движении по заданной линии L, в фиксированном направлении тело A_j будет пересечено после тела A_i
$\varkappa$	Отношение совмещения преобразованием между телами	$A_i\ \varkappa\ A_j$	Тела A_i и A_j можно совместить друг с другом преобразованием $\varkappa$.
ρ_0	Отношение упорядоченности по характеристикам между телами	$A_i\ \rho_0\ A_j$	Значение заданной функции в A_i меньше чем в A_j
ε_0	Отношение эквивалентности по характеристикам между телами	$A_i\ \varepsilon_0\ A_j$	Значения заданной функции в A_i и A_j равны
τ_1	Отношение „моложе" между геологическими телами	$G_i\ \tau_1\ G_j$	Геологическое тело G_i моложе геологического тела G_j.
τ_2	Отношение „одновозрастные" между геологическими телами	$G_i\ \tau_2\ G_j$	Геологические тела G_i и G_j одновозрастные
ψ	Отношение сечения между геологическими телами	$G_i\ \psi\ G_j$	Геологическое тело G_i сечет геологическое тело G_j

Часть II (главы 3, 4).

Символ	Математический объект, обозначаемый данным символом
v	Объем тела A
s	Площадь поверхности тела A (глава 3)
$K_{x,\ y,\ z,\ \theta,\varphi}$	Луч (полупрямая) с началом в точке $(x,\ y,\ z)$ и направлением $(\theta,\ \varphi)$
$\mu_k(A)$	Мера множества лучей с началами в теле A
$L_{\theta',\ \varphi',\ x',\ y'}$	Прямая с направлением $(\theta',\ \varphi')$, секущая заданную плоскость в точке $(x',\ y')$
$\mu_L(A)$	Мера множества прямых, секущих тело A
$g(\theta',\ \varphi')$	Площадь ортогональной проекции тела A на плоскость, нормаль к которой имеет направление $(\theta',\ \varphi')$
$\overline{g}$	Средняя площадь проекции тела—среднее значение величины $g(\theta',\ \varphi')$, полученное усреднением по всем θ' и φ'
$q(\theta',\ \varphi',\ x',\ y')$	Число отрезков, отсеченных телом A на прямой $L_{\theta',\ \varphi',\ x',\ y'}$.
$\overline{q}$	Среднее число отрезков прямолинейного сечения тела A, полученное усреднением по всем прямым секущим тело A
$t(\theta',\ \varphi',\ x',\ y')$	Длина пересечения тела A и прямой $L_{\theta',\ \varphi',\ x',\ y'}$
$\overline{t}$	Средняя длина прямолинейного сечения тела, A, полученная усреднением по всем прямым секущим тело A.
$E_{\theta'',\ \varphi'',\ \rho''}$	Плоскость, положение которой определяется сферическими координатами θ'', φ'' и ρ'' точки ее пересечения перпендикуляром, опущенным к ней от начала системы координат.
$\mu_E(A)$	Мера множества всех плоскостей секущих тело A
$h(\theta'',\ \varphi'')$	Толщина тела A в направлении $(\theta'',\ \varphi'')$
$\overline{h}$	Средняя толщина тела, полученная усреднением $h(\theta'',\ \varphi'')$ по всем направлениям
$p(\theta'',\ \varphi'',\ \rho'')$	Площадь пересечения тела A и плоскости $E_{\theta'',\ \varphi'',\ \rho''}$
$\overline{p}$	Средняя площадь плоского сечения тела A, полученная усреднением по всем плоскостям, секущим тело A
$u(\theta'',\ \varphi'',\ \rho'')$	Длина пересечения поверхности тела A и плоскости $E_{\theta'',\ \varphi'',\ \rho''}$
$\overline{u}$	Средняя длина пересечения поверхности тела A плоскостью, полученная усреднением по всем плоскостям, секущим тело A
$P(E')$	Вероятность осуществления события E'.
$P\left(E_l',\ E_m''\right)$	Вероятность совместного осуществления событий E_l' и E_m'
$\rho_{l/m}$	Коэффициент регрессии события E_l', относительно события E_m''
r_{lm}	Коэффициент корреляции между случайными событиями E_l' и E_m''

Символ	Математический объект, обозначаемый данным символом
q_{lm}	Коэффициент связи Юла
$I_{l\|m}$	Частная информация о событии E'_l, содержащая в сообщении о событии E''_m
ρ	Информационный коэффициент корреляции.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛИТЕРАТУРА

Абезгауз Г. Г. [и др.]. Справочник по вероятностным расчетам, М., Изд-во МО СССР, 1970.

Абрамович И. И., Груза, В. В., Романовский С. И. Математизация геологии. В кн. «Математизация и автоматизация в геологических исследованиях», Ленинград, ВСЕГЕИ, 1972.

Абрамович И. И. Математические методы в геологических исследованиях ВСЕГЕИ. «Тр. Всес. н.-и. геол. ин-та», 1975.

Акчурин И. А. Единство естественнонаучного знания. М., «Наука», 1974.

Александров П. С., Ефремович В. А. О простейших понятиях современной топологии. ОНТИ, М.—Л., 1935.

Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия II изд. «Просвещение», М., 1975.

Белов А. Н. О возможности статистического изучения последовательности минералообразования в изверженных горных породах. ДАН СССР, т. 151, № 6, 1963.

Белоусов В. В. Основы геотектоники, М., «Недра», 1975.

Бернс К. Теория графов и ее применение, М., ИЛ, 1962.

Бляшке В. Лекции по интегральной геометрии. В сб. «Успехи математических наук», вып. 5, 1938.

Богацкий В. В., Дмитриев А. Ф. Мера неопределенности как оценка достоверности геометрических моделей объектов, недоступных непосредственному измерению (на примере анализа сечений геологических тел). Труды Сиб. НИИ геол., геофиз. и минерального сырья, вып. 144, Красноярск, 1974.

Богданов К. М. Метод количественного анализа морфологических структур на основе их статистических характеристик. В кн. «Машинный анализ микроскопических объектов», М., «Наука», 1968.

Богданов К. М. [и др.] Установка для анализа микроструктур по их статистическим характеристикам. В кн. «Машинный анализ микроскопических объектов», М., «Наука», 1968.

Богомолова А. Ф., Коф В. Е. Применение автоматического анализатора микрообъектов для изучения структуры пористых сред. В кн. «Машинный анализ микроскопических объектов», М., «Наука», 1968.

Бойцов Ю. И., Литинская Л. Л., Морозов М. А. Сканирующий оптический микроскоп СОМ—1. В кн. «Методы и техника машинного анализа биологических структур», М., «Наука», 1972.

Боровиков А. М. [и др.] О программе работ по созданию основ для развития теоретической геологии. В сб. «Применение математических методов и ЭВМ при решении типовых геологических задач», Новосибирск, СО АН СССР, ВЦ, 1976.

Боровко Н. Н. Статистический анализ пространственных геологических закономерностей. Л., «Недра», 1971.

Борукаев Ч. Б. [и др.] Математическое описание структуры сложных геологических тел. В сб. «Применение математических методов в геологии», Алма-Ата, Изд-во «Наука» КазССР, 1968.

Бродская Р. Л. Геометрический анализ структуры горных пород. Труды ВСЕГЕИ, Л., 1973.

Бродская Р. Л. Количественный минералогический анализ горных пород с помощью автоматической установки «Контраст». Методические указания. Всес. научн.-исслед. геол. ин-т, Л., 1972.

Бродская Р. Л., Гельтман Л. С. Линейный поиск при гранулометрическом анализе минеральных зерен, В сб. «Математизация и автоматизация в геологических исследованиях», Л., 1972.

Бродская Р. Л., Семенова О. Г., Купман В. А. Расчет эффективной аналитической сети для геометрического анализа горных пород. В сб. «Математизация и автоматизация в геологических исследованиях», Л., 1972.

Бугаец А. Н. Математические методы при решении некоторых задач локального прогнозирования в рудных районах. В сб. «Геол. и разведка месторожд. тверд. полезн. ископаемых Казахстана», вып. 2, Алма-Ата, 1973.

Бугаец А. Н., Дорофеюк А. А., Мацак А. П. К вопросу о некоторых формальных методах в задаче классификации и разграничения геологических объектов. В сб. «Геологические формации», Л., 1968.

Бухарцев В. П., Мирчинк М. Ф. К методике геолого-статистического анализа локальных структур. В сб. «Опыт применения математической статистики при изучении локальных структур Волго-Уральской нефтегазоносной области», Изд. ЦНИИ ИТЭИ Нефтегаз, 1962.

Василевский Я. — П. Л. Об одной конструкции слабого замыкания. В сб. «Математическая лингвистика», М., «Наука», 1973.

Васильев В. И. Детерминизм и некоторые принципы синхронизации геологических объектов. В сб. «Математизация и автоматизация в геологических исследованиях», Л., 1972.

Васильев В. И., Драгунов В. И., Рундквист Д. В. «Парагенезис минералов» и «формация» в ряду образований различных уровней организации. «Записки ВМО», ч. CI, вып. 3, 1972.

Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.

Вистелиус А. Б. Структурные диаграммы. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1958.

Вистелиус А. Б. Проблемы математической геологии. Модели процессов и парагенетический анализ, «Геол. и геофиз.», 1963, № 7.

Вистелиус А. Б. Красноцветные отложения полуострова Челекен. Литология. Опыт стохастического моделирования процессов слоеобразования. М.—Л., «Наука», 1966_1.

Вистелиус А. Б. Стохастическая модель кристаллизации аляскитов и отвечающие ей переходные вероятности. ДАН СССР, т. 170, № 3, 1966_2.

Вистелиус А. Б. Об образовании гранодиоритов г. Белой на Камчатке (опыт стохастического моделирования). ДАН СССР, т. 167, № 5, 1966_3.

Вистелиус А. Б. О кристаллизации аляскитов с р. Каракульджур (Центральный Тянь-Шань). ДАН СССР, т. 172, № 1, 1967_1.

Вистелиус А. Б. О стохастической матрице квазиэвтектических гранитов (на примере гранитов из района города Дарвар в Северной Хорватии). ДАН СССР, т. 175, № 6, 1967_2.

Вистелиус А. Б. О путях кристаллизации и вторичных минералах в некоторых гранитах Приханкайского района (Приморье). ДАН СССР, т. 177, № 6, 1967_3.

Вистелиус А. Б. Математическая геология. В реф. сист. указателе «Математическая геология», Л., 1969.

Вистелиус А. Б. Идеальный гранит и его свойства: вероятностная модель, статистическая идентификация, естественные породы. В сб. «Математические методы в геологии и геологическая информация». Доклады советских геологов на МГК, XXIV сессия, М., «Наука», 1972.

Вистелиус А. Б., Романова М. А. Концепция идеальных гранитов и ее использование при съемочных, петрографических и поисковых работах. В кн. «Идеальные граниты», вып. 1, Л., «Наука», 1972.

Воронин Ю. А. О формальном описании геологических тел. В сб. «Опыт анализа и построения геологических классификаций на основе представлений конечной математики», Новосибирск, СО АН СССР, 1964.
Воронин Ю. А., Еганов Э. А. Универсальная схема аналитического описания сложных геологических тел. В кн. «Математические методы в геологии и геофизике», Труды СНИИГГиМС, вып. 79, Новосибирск, 1968_1.
Воронин Ю. А., Еганов Э. А. О процедурах сопоставления сложных геологических тел на основе их аналитического описания. В кн. «Математические методы в геологии и геофизике», Труды СНИИГГиМС, вып. 79, Новосибирск, 1968_2.
Воронин Ю. А., Еганов Э. А. О формальном описании сложных геологических тел. Алма-Ата, Изд-во «Наука», 1968_3.
Воронин Ю. А., Еганов Э. А. Фации и формации. Парагенезис. Новосибирск, «Наука», 1972.
Воронин Ю. А., Еганов Э. А. Методологические вопросы применения математических методов в геологии. Новосибирск, 1974.
Воронин Ю. А., Еганова И. А., Еганов Э. А. К проблеме упорядочения объектов в геологии. В сб. «Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1974.
Воронин Ю. А. [и др.] Геология и математика, Новосибирск, «Наука», 1967.
Воронин Ю. А. [и др.] Геология и математика. Задачи диагноза и распознавания в геологии, геохимии и геофизике. Новосибирск, «Наука», 1970.
Воронич Т. М. [и др.] Эндогенные рудные формации и их положение в тектонических структурах. Некоторые результаты статистической обработки. В сб. «Глубинное строение земной коры территории Узбекистана», Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1971.
Воронич Т. М., Усманов Ф. А. Опыт изучения некоторых вопросов металлогении Чаткало-Кураминских гор методами математической статистики. В сб. «Металлогения Тянь-Шаня», Фрунзе, «Илим», 1968.
Гартштейн В. П., Иваницкий Г. Р., Литинская Л. Л. Исследование влияния границ растра сканирующей системы на точность автоматического измерения геометрических характеристик объектов. В кн. «Методы и техника машинного анализа биологических структур», М., «Наука», 1972.
Гельфанд И. М. [и др.] Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., Физматгиз, 1962.
Гзовский М. В. Математика в геотектонике. М., «Недра», 1971.
Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. Гос. изд. технико-теоретич. лит., М., Л., 1951.
Глаголев А. А. О геометрических методах количественного минералогического анализа горных пород. Труды Ин-та прикладной минералогии, № 1, 1933.
Глаголев А. А. Геометрические методы количественного анализа агрегатов под микроскопом. М., Госгеолтехиздат, 1941.
Глаголев А. А. Морфо-гранулометрический анализ массивных агрегатов (горные породы, сплавы, керамика), Алма-Ата, Изд. АН КазССР, 1950.
Глаголев А. А. Новый метод морфо-гранулометрического анализа горных пород. В кн. «Новые методы в минералогии и петрографии и результаты их применения», М., Госгеолтехиздат, 1963.
Гольдин С. В. Применение теории выпуклых тел и фигур для морфологической классификации геологических тел неправильной формы. «Геология и геофизика», 1965, № 8.
Гольдин С. В., Волков А. М., Гольдина Н. А. Аксиоматическая классификация залежей нефти и газа и ее применение для описания месторождений Тюменской области. Труды ЗапСибНИГНИ, вып. 29, М., «Недра», 1970.
Готтшильд А. Методы выявления закономерностей в строении слоев. В сб. «Применение современных математических методов и ЭВМ в области геологии в странах — членах СЭВ», Алма-Ата, ОНТИ КазИМС, 1973.
Григорьев Д. П. Онтогения минералов. Львов, Изд-во Львовск. ун-та, 1961.
Григорьев Д. П., Лушников В. Г. Некоторые соотношения растущих кри-

сталлов кварца с препятствиями, «Минерал. сб. Львовск. ун-та», № 21, вып. 1, 1967.

Гячяускас Э. О статистических квадратурах. «Теория вероятностей и ее применение», т. IX, вып. 4, М., 1964.

Девдариани А. С. Борьба с помехами, искажающими сигналы из геологического прошлого. «Геология и геофизика», 1973, № 7.

Девдариани А. С. Сигналы из глубин Земли и ее геологического прошлого, М., «Недра», 1974.

Дементьева Г. И. Индукционные грани на кристаллах. Автореф. канд. дисс., Изд. ЛГИ, 1964.

Драгунов В. И. Геологические формации, Л., «Недра», 1973.

Драгунов В. И., Айнемер А. И., Васильев В. И. Основы анализа осадочных формаций. Л., «Недра», 1974.

Дринфельд Г. И. О некоторых основных формулах интегральной геометрии (I). «Записки НИИ математики и механики Харьковского ГУ и Харьковского мат. об-ва», т. XXII, сер. 4, 1950.

Дриндфельд Г. И. О некоторых основных формулах интегральной геометрии (II). «Записки математического отделения физ.-мат. фак. Харьковского ГУ и Харьковского мат. общ-ва», т. XXIII, сер. 4, 1952.

Еганов Э. А. О выделении объектов исследования в геологии. В кн. «Пути познания Земли», М., «Наука», 1971.

Ержанов Ж. С. [и др.] Теория складкообразования в Земной коре. М., «Наука», 1975.

Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М., «Наука», 1971.

Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., «Наука», 1970.

Жариков В. А. Вопросы общей теории диаграмм состояния мультисистем. В кн. «Физико-химические проблемы формирования горных пород и руд», М., «Наука», 1961.

Жариков В. А. Скарновые месторождения. В кн. «Генезис эндогенных рудных месторождений», М., «Недра», 1968.

Заварицкий А. Н. Изверженные горные породы. М., Изд. АН СССР, 1956.

Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск, «Наука», 1969.

Иваницкий Г. Р., Литинская Л. Л., Орловский Г. Н. Основные принципы построения системы для автоматизации микроскопических исследований. В кн. «Машинный анализ микроскопических объектов», М., «Наука», 1968.

Иваницкий Г. Р., Литинская Л. Л., Шихматова В. Л. Автоматический анализ микрообъектов. М.—Л., «Энергия», 1967.

Иваницкий Г. Р., Шмаков А. К. Методы статистического анализа однородных многослойных биологических структур. В кн. «Методы и техника машинного анализа биологических структур», М., «Наука», 1972.

Иванков Л. И. Об одной оценке коэффициента рудоносности. Труды Сев. Кавказ. горно-металлург. ин-та, вып. 37, 1974.

Иванов Д. Н. К изучению последовательности минеральных зерен в двуполевошпатовых гранитах как реализаций процессов кристаллизации гранитной магмы. В кн. «Математические методы в геологии», М., «Наука», 1963.

Иванов Д. Н. Анализ последовательностей минеральных зерен в гранитах массива Кызылтас (Центральный Казахстан) как реализаций марковского процесса. В кн. «Вопросы математической геологии», Л., «Наука», 1968.

Иванов Д. Н. и Фаас А. В. Об оценке содержания акцессорных минералов в шлифах линейным методом подсчета. «Сов. геология», 1964, № 12.

Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру. М., «Наука», 1973.

Каратаев Г. И. [и др.] Алгоритм группирования геологогеофизических объектов по критерию удельной связности. В сб. «Мат. методы решения геолого-геофиз. задач Белоруссии», Минск, 1974.

Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику, М., ИЛ., 1963.

Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности, М., «Наука», 1972.

Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М., «Наука», 1973.
Клини С. Математическая логика, М., «Мир», 1973.
Кокс Д., Льюис П. Статистический анализ последовательностей событий., М., «Мир», 1969.
Колмогоров А. Н. Решение одной задачи из теории вероятностей, связанной с вопросом о механизме слоеобразования, ДАН СССР, т. 65, № 6, 1949.
Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.
Конторович А. Э. Опыт формального анализа структуры геологических генетических теорий. В кн. «Математические методы в геологии и геофизике». Труды СНИИГГиМС, вып. 79, Новосибирск, 1968.
Коржинский Д. С. Физико-химические основы анализа парагенезисов минералов, М., Изд-во АН СССР, 1957.
Коржинский Д. С. Теоретические основы анализа парагенезисов минералов. М., «Наука», 1973.
Корнеева Л. Г. Генетика и математика. В сб. «Математика и естествознание», М., «Просвещение», 1969.
Косыгин Ю. А. Слоистая геологическая структура и соотношения структурно-вещественных генетических и хроностратиграфических характеристик осадочной области Земли. «Геология и геофизика», 1964, № 10.
Косыгин Ю. А. Методологические вопросы системных исследований в геологии. «Геотектоника», 1970: № 2.
Косыгин Ю. А. Основы тектоники, М., «Недра», 1974_1.
Косыгин Ю. А. Основные направления тектонических исследований. В сб. «Тектоника и геофизика», Хабаровск, ДВНЦ АН СССР, 1974_2.
Косыгин Ю. А., Воронин Ю. А. Геологическое пространство как основа структурных построений. Ст. 1, 2 и 3. «Геология и геофизика», 1965, № 9—11.
Косыгин Ю. А., Вотах О. А., Соловьев В. А., Черкасов Р. Ф. Иерархия геологических объектов и тектоника. ДАН СССР, т. 207, № 2, 1972.
Косыгин Ю. А. [и др.] Формы геологических тел. Хабаровск, 1974.
Косыгин Ю. А., Салин Ю. С., Соловьев В. А. Философские проблемы геологического времени. «Вопросы философии», 1974, № 2.
Косыгин Ю. А., Соловьев В. А., Статические, динамические и ретроспективные системы в геологических исследованиях. «Изв. АН СССР», сер. геол., 1969, № 6.
Косыгин Ю. А., Соловьев В. А. Принцип историзма и тектоника. «Геология и геофизика», 1974, № 5.
Крамбейн У. [и др.] Модели геологических процессов. Введение в математическую геологию. М., «Мир», 1973.
Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969.
Кренделев Ф. П., Кренделев С. Ф. Сопоставление структур геологии и математики. В сб. «Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых», Новосибирск, 1973.
Круть И. В. Исследование оснований теоретической геологии. М.,« Наука», 1973.
Кулындышев В. А. Пликативные формы и дискретная математика. Хабаровское книжное изд-во, 1973.
Кульбак С. Теория информации и статистика. М., «Наука», 1967.
Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М., «Мир», 1970.
Лакин Г. Ф. Биометрия, М., «Высшая школа», 1973.
Лариков Л. Н., Гуревич М. Е., Барановский В. М. Автоматические методы в количественной металлографии. Металлофизика, 22, Киев, «Наукова думка», 1968.
Маракушев А. А. Проблемы минеральных фаций метаморфических и метасоматических горных пород, М., «Наука», 1965.

Маракушев А. А. Термодинамика метаморфической гидратации минералов. М., «Наука», 1968.
Маркус С. Теоретико-множественные модели языков, М., «Наука», 1970.
Миллер Р. Л., Кан Дж. С. Статистический анализ в геологических науках. М., «Мир», 1965.
Миронов Ю. П. Лингвистический вариант математического моделирования геологического процесса. В сб. «Проблемы эндоген. рудообразования», М., «Наука», 1974.
Миронов Ю. П. Теоретико-множественные модели гранитоидов. М., «Наука», 1975.
Мокиевский В. А., Шафрановский И. И. Симметрия, антисимметрия и псевдосимметрия индукционных поверхностей. В кн. «Кристаллография», т. 2, вып. 1, 1957.
Нееф Э. Теоретические основы ландшафтоведения. М., «Прогресс», 1974.
Новиков А. Распознавание образов с помощью интегральной геометрии. В кн. «Принципы самоорганизации», М., «Мир», 1966.
Новиков П. С. Элементы математической логики, М., «Наука», 1973.
Новые идеи в географии, 1, Изд. «Прогресс», М., 1976.
Панич И. М., Киршин А. В. Об оптимальном разбиении линейно упорядоченных геологических объектов по комплексу признаков. ДАН УзССР, 1974, № 8.
Пензов Ю. Е. Элементы математической логики и теории множеств. Изд. Саратовского унив., 1968.
Перчук Л. Л. Равновесия породообразующих минералов. М., «Наука», 1970.
Половинкина Ю. И., Структуры и текстуры изверженных и метаморфических горных пород. М., «Недра», 1966.
Постников М. М. Аналитическая геометрия. М., «Наука», 1973.
Рац М. В. Структурные модели в инженерной геологии, М., «Недра», 1973.
Родионов Д. А. Статистическая теория и методы разграничения геологических объектов. Автореф. докт. дисс., М., 1967.
Родионов Д. А. Статистические методы разграничения геологических объектов по комплексу признаков. М., «Недра», 1968.
Родионов Д. А. Общие принципы решения задач разграничения геологических объектов по комплексу признаков. В сб. «Математические методы в геологии и геологическая информация», М., «Наука», 1972.
Родионов Д. А. [и др.] О случайных погрешностях количественно-минералогического анализа. Труды ИМГРЭ, вып. 4, 1960.
Розанов Ю. А. Случайные процессы. М., «Наука», 1971.
Романова М. А. О влиянии начальных стадий грейзенизации на строение последовательностей зерен в магматических гранитах. В кн. «Математические методы в геологии и геологическая информация». Докл. сов. геологов на XXIV сессии МГК, М. «Наука», 1972.
Романовский Ю. М. [и др.]. Математическое моделирование в биофизике, М., «Наука», 1975.
Рундквист Д. В. Учение о симметрии в применении к структурам минеральных образований. В сб. «Симметрия в природе», Л., 1971_1.
Рундквист Д. В. О принципах выделения и прогнозирования рудных формаций. В кн. «Основы научного прогноза месторождений рудных и нерудных полезных ископаемых» Л., 1971_2.
Салин Ю. С. Анализ методов стратиграфической синхронизации. «Геология и геофизика», 1974, № 4.
Салин Ю. С., Соловьев В. А. Стратиграфические отношения. В сб. «Стратиграфия и математика», Хабаровск, 1974.
Салтыков С. А. Стереометрическая металлография. М., Металлургиздат, 1958.
Салтыков С. А. Стереометрическая металлография, М., «Металлургия», 1970.
Сантало Л. А. Введение в интегральную геометрию. М., ИЛ, 1956.
Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.

Семянистый В. И. Однородные функции и некоторые задачи интегральной геометрии в пространствах постоянной кривизны. ДАН СССР, 1961, т. 136, № 2.
Семянистый В. И. Интегральная геометрия в эвклидовом пространстве и ее связь с краевыми задачами. ДАН СССР, 1967, т. 176, № 2.
Симаков К. В., Оноприенко В. И. Проблема построения метрики времени в геологии. Материалы конференции «Применение математических методов и ЭВМ при решении типовых геологических задач», препринт, Новосибирск, 1975_1.
Симаков К. В., Оноприенко В. И. Стратиграфия и геохронометрия. Определение задачи, структура познавательного процесса. «Геол. журнал», т. XXXV, вып. I: Киев, 1975_2.
Сметанич Я. С. [и др.]. Автоматический анализ плоской фигуры по ее контуру. В кн. «Методы и техника машинного анализа биологических структур», М., «Наука», 1972.
Соболь И. М. Численные методы Монте-Карло. М., «Наука», 1973.
Соловьев В. А. Тектоника континентов. Хабаровское книжное издательство, Хабаровск, 1975.
Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории, М., «Просвещение», 1968.
Тян А., Усманов Ф. А. Вычисление обобщенной проводимости гетерогенных систем по характеристикам их структуры и фазового состава. «Журнал технической физики», т. XLII, вып. 9, 1972.
Углов В. А. Формализация выделения относительно однородных районов на основе алгоритмов многомерного статистического анализа. В сб. «Природное и сельскохозяйственное районирование СССР», Изд-е Моск. ун-та, 1974.
Урбах В.Ю. Идея электронного прибора для непосредственного нахождения обобщенных характеристик распределения частиц по размерам. «Биофизика», т. 7, вып. 1, 1962.
Усманов Ф. А. Статистические закономерности пространственного взаимного расположения зерен породообразующих минералов в гранитоидах Чаткальских гор. В сб. «Материалы II Среднеазиатского регионального петрографического совещания», Душанбе, «Дониш», 1971.
Усманов Ф. А. Отношения между геологическими телами и их математические свойства. В сб. «Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых», Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1974_1.
Усманов Ф. А. Типизация задач геологии на основе систематики геологических пространств. Препринт., Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1974_2.
Усманов Ф. А. Статистические методы исследования пространственной связи между совокупностями геологических объектов. «Советская геология», 1975, № 9.
Усманов Ф. А. Об одном аксиоматическом подходе к экспликации геологических понятий. В сб. «Вопросы методологии в геологических науках», Изд. «Наукова думка», Киев, 1977.
Усманов Ф. А. Об одном подходе к математизации структурной геологии. В сб. «Применение математических методов и ЭВМ при решении типовых геологических задач», Новосибирск, СО АН СССР, ВЦ, 1976_1.
Усманов Ф. А. О связи отношений между геологическими телами и последовательностью их образования. «Геология и геофизика», № 8, 1976_2.
Усманов Ф. А., Юдин В. Т. Некоторые статистические закономерности в чередовании пород в вулканогенных толщах Чаткало-Кураминских гор. В сб. «Некоторые итоги петрометаллогенических исследований в Узбекистане», Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1972.
Харари Ф. Теория графов., М., «Мир», 1973.
Харвей Д. Научное объяснение в географии, М., «Прогресс», 1974.
Химические анализы изверженных горных пород и породообразующих минералов. Составитель В. Ф. Морковкина, М., «Наука», 1964.
Чейз Ф. Количественно-минералогический анализ шлифов под микроскопом. М., ИЛ, 1963.

Чесноков Б. В. Относительный возраст минеральных агрегатов, М., «Недра», 1974.
Четвериков Л. И. Теоретические основы моделирования тел твердых полезных ископаемых. Изд-е Воронежского ун-та, 1968.
Шарапов И. П. К истории математической геологии. В сб. «Математические методы в геологии», Вестник Львовского Гос. ун-та, Изд-е Львовского ун-та, 1973.
Шафрановский И. И., Григорьев Д. П. О поверхностях соприкосновения минеральных индивидов. «Записки ВМО», ч. 77, 1948.
Шафрановский И. И., Плотников Л. М. Симметрия в геологии. М.—Л., «Недра», 1975.
Шиханович Ю. А. Введение в современную математику. М., «Наука», 1965.
Шрейдер Ю. А. Алгебра бинарных отношений. Приложение к работе С. Маркуса. «Теоретико-множественные модели языка», М., 1970.,
Шрейдер Ю. А. Равенство. Сходство. Порядок, М., «Наука», 1971.
Шрейдер Ю. А. Модели в лингвистике и математике. В сб. «Математическая лингвистика», М., «Наука», 1973.
Юл Дж. Э., Кендалл М. Дж. Теория статистики, М., Госстатиздат, 1960.
Яглом И. М. Введение в интегральную геометрию. М., Физматгиз, 1956.
Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. М.—Л., Изд-во технико-теоретической лит., 1951.
Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация, М., «Наука», 1973.

Agterberg F. P. The use of multivariate Markov schemes in petrology, J. geol., v. 74, N. 5, pt. 2, 1966.
Bailey A. I. A method of analyzing polymodal distributions in orientation data «J. Inst. Assoc. Math. Geol.», 1975, 7 N. 4.
Bodziony J. On certain indices characterizing the geometric structure of rocks «Bull. Acad Polon. Sci, Ser. Techn.», 13, N. 9, 1965_1.
Bodziony J. On the possibility of application of integral geomotry methods in certain problems of liberation of mineral grains «Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Techn.», 13, N. 9, 1965_2.
Bodziony J., Kraj W. Note on the average number of grains per volume unit of a grained medium «Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Techn.», 18, N. 8, 1970.
De Hoff R. T., Rhinea F. N. Determination of number of particles per unit volume from measurements made on random plane sections: the general cylinder and the ellipsoid — Trans. Metallurg. Soc. AIME, 1961.
Demirmen F. Counting error in petrographic point — count analysis: a theoretical and experimental study «J. Ent. Assos. Math. Geol.», 3, N 1, 1971.
Elias H., Lazarowitz A., Sokol A. Contributions to the geometry of sectioning. IV. Bands, discs, plates and shells. Z. wiss. Mikrosk., 62, 1955.
Elias H., Sokol A., Lazarowitz A. Contributions to the geometry of sectioning. II. Circular cylinders. Z. wiss. Mikrosk., 62, 1954.
Goldsmith P. L. The calculation of true particle size distributions from the sizes observed in a thin slise. Br. I. Appl. Phys. 18, 1967.
Greenman N. N. On the bias of grain size measurements mede in thin section: a discussion. J. Geology, 59, 1951_1.
Greenman N. N. The mechanical analysis of sediments from thin section data. J. Geology, 59, 1951_2.
Hasofer A. M. On the reliability of the point-counter method in petrography. Aust. I. Appl., Sci., 14, 1963.
Johannsen A. A planimeter method for the determination of the percentage composition of rocks. J. Geol., 27, 1919.
Krumbein W. C. Thin section mechanical analysis of indurated sediments. J. Geology, 43, 1935.
Krumbein W. C. Fortran V—computer programm for Markov chain experiments in geology. Washington, 1967 (U. S. office of Naval research. Geography branch. ONR Task. N. 388—078, Techn. report N 6).

Krumbein W. C., Pettijohn F. J. Manual of sedimentary petrography. New—York, 1938.
Nicholson W. L. Estimation of linear properties of particle size distributions. «Biometrics», 57, N 2, 1970.
Packham G. H. Volume, weight and number frequency analysis of sediments from thin section data. J. Geology, 63, 1955.
Rorers I. W., Bogy D. B. A study of grain contacts in granitic rocks Science, 28, 2, 1958, vol. 127.
Rosenfeld M. A., Jacobson L. and Ferm J. C. A comparison of sieve and thin section tection technique for size analysis, J. Geology, 61, 1953.
Tallis G. M., Estimating the distribution of spherical and elliptical bodies in conglomerates from plene sections «Biometrics», 26, N 1, 1970.
Welbel E. R., Elias H. Introduction to stereology and morphometry. «Quantitative Methods in Morphology». Springer—Verlag, 1967.
Whitten E. H. T. Trends in computer applications in structural geology. Comut. Appl. Earth. Sci. Int. Symp. Proc. Conf. Lawrence, 1969, New York—London, 1969.
Wickman F. E. On the distribution of different kinds of geological deposits in glaciated region. Ark. Miner. Geol., Bd. 3, Hft., 2. 2, N 5, 1961.
Wicksell S. D. The corpuscle problem. Part 1, «Biometrika», vol. 17, 1925; part II, vol. 18, 1926.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Усманов Ф. А.
Основы математического анализа геологических структур. Отв. ред. В. Г. Винокуров. Т., «Фан», 1977.
202с. (АН УзССР. Ин-т геол. и геоф. им. Х. М. Абдуллаева). Лит.: с. 193—201.
51

Файзулла Асадуллаевич Усманов

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Утверждено к печати
Ученым советом Института геологии и геофизики им. Х. М. Абдуллаева и Отделением наук о Земле АН УзССР

Редактор *Р. Р. Булатова*
Художник *Е. И. Владимиров*
Технический редактор *Т. П. Шалюк*
Корректор *Е. А. Грачева*

ИБ №130

Р08236. Сдано в набор 23/II-72 г. Подписано к печати 6/IV-77 г. Формат 60×90 1/16. Бум. тип. № 1. Бум. л. 6,5. Печ. л. 13,0. Уч.-изд. л. 13,5. Изд. № 156. Тираж 1000. Цена 2 р. 17 к.

Типография издательства «Фан» УзССР, г. Ташкент, проспект М. Горького, 79. Заказ 48.
Адрес издательства: Ташкент, ул Гоголя, 70.

В 1977 г. В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «ФАН» УзССР

ВЫШЛА В СВЕТ МОНОГРАФИЯ И. В. Рубанова

«Озерно-почвенное соленакопление в Узбекистане».

В работе приводятся результаты исследований послепалеогеновых соляных образований Узбекистана и обобщается имеющийся по этому вопросу материал. Дается классификация галогенных осадков с выделением озерных, солончаковых (шоровых) и почвенных соленосных пород. Особое внимание уделяется минералогической характеристике главнейших участков соленакопления. Излагаются представления о четвертичном галогенезе республики (от Арала до предгорий Тянь-Шаня); рассматриваются физико-географические, морфологические и геологические условия соленакопления, имеющие важное значение для понимания процессов почвенного засоления орошаемых и неорошаемых земель. Приводятся новые данные о соленакоплении в Аральском море.

Книга предназначена для геологов, лимнологов, химиков, гидрогеологов, мелиораторов, почвоведов и других специалистов, занимающихся вопросами соленакопления в современных и четвертичных осадках.

В 1977 г. В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «ФАН» УзССР
ВЫЙДЕТ В СВЕТ КОЛЛЕКТИВНАЯ МОНОГРАФИЯ

«Магматические формации и фации Узбекистана».

В работе даются принципы фациального анализа магматических образований Узбекистана, в соответствии с которыми расчленяются и подробно описываются вулканические, гипабиссальные и плутонические семейства фаций. Формационный анализ используется для выявления связей между магматизмом и геотектоникой, магматизмом и глубинным строением земной коры и верхней мантии. В связи с этим выделяемые магматические формации и их ряды ограничиваются по вертикали (во времени) эталонами развития соответствующих региональных геоструктур, а по латерали (в пространстве) — структурно-формационными зонами и подзонами. Устанавливается связь между спецификой магматизма и глубинным строением земной коры.

Книга рассчитана на широкий круг специалистов в области петрологии, геохимии и формационного анализа.

Цена 2 р. 17 к.