

# НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОФИЗИКЕ


$$:\alpha_{и} + \bar{A}^* \bar{A}_{и} = \bar{A}^* f ::$$

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР  
Вычислительный центр

550.83.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОФИЗИКЕ  
(Материалы Всесоюзной школы)

Под редакцией  
М.М.Лаврентьева

2175



Новосибирск 1977



© ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР СО АН СССР

## А Н Н О Т А Ц И Я

С 31 мая по 12 июня 1976 года Вычислительный центр СО АН СССР проводил Всесоюзную школу по неклассическим методам в геофизике с участием иностранных ученых.

В первую половину работы Школы ведущие ученые А.Н.Тихонов, М.М.Лаврентьев, В.Я.Арсенин, В.Г.Романов и другие прочли учебные курсы лекций по теории условно-корректных и обратных задач математической физики. Вторая половина работы Школы была отведена под часовые доклады и краткие сообщения по неклассическим методам математики и их приложения к физике. Тексты этих докладов и сообщений публикуются в настоящем сборнике.

В целом работа Школы способствовала знакомству геофизиков и прикладных математиков с теорией так называемых некорректных и обратных задач, а также взаимной информации о работе ученых разных стран народной демократии и разных районов Советского Союза.

Сборник представляет интерес для специалистов по прикладной математике и геофизике, а также для студентов старших курсов этих специальностей.

# СО Д Е Р Ж А Н И Е

## Р а з д е л I. Статьи

АНИКОНОВ Ю.Е. Формулы в многомерных обратных кинематических задачах сейсмоки.....	7
БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ А.С. Некоторые обратные задачи теории гиперболических уравнений.....	17
✓ БУДЯНСКИЙ Ю.А., ВОРОНИН Ю.А. Матричные модели интерпретации в геофизике.....	27
ГАСЫМОВ М.Г. Прямые и обратные задачи спектрального анализа для одного класса уравнений с разрывными коэффициентами.....	37
ИВАНОВ В.К. Некоторые вопросы оценок устойчивости при решении некорректных задач.....	45
ИСКЕНДЕРОВ А.Д. Некоторые обратные задачи для определения фильтрационных и теплофизических характеристик.....	54
КАНТОР С.А., КОЖЕВНИКОВ Д.А. Теоретическое исследование полей излучений при нейтронметрии скважин...	64
КИРЕЙТОВ В.Р. Об одной задаче волновой оптики.....	72
✓ МАРКУШЕВИЧ В.М., РЕЗНИКОВ Е.Л. Определение плотности и модуля сдвига среды по стоячим SH - волнам на ее поверхности.....	77
ПОЛЯЧЕНКО А.Л. Численные методы решения задач интерпретации и оптимизации в ядерной геофизике.....	81
ХИСАМУТДИНОВ А.И. Методы Монте-Карло в некоторых задачах ядерно-геофизических методов.....	88
ЦЕЦОХО В.А., БЕЛОНОСОВ А.С. Об одном методе гладкого выполнения сеточных функций, заданных на нерегулярных сетках в $R^n$ . ....	96
✓ ФИШМАН В.М. Интерпретация дискретных годографов объемных волн (tau-метод).....	105
ГЛАСКО В.Г. Метод регуляризации Тихонова в обратных задачах геофизики.....	109

Р а з д е л П . Краткие сообщения.

АЛЕКСЕЕВ А.С., ДОБРИНСКИЙ В.И. Об одном вопросе практической реализации решений условно-коррктных задач.....	I22
АЛЕКСЕЕВ А.С., РОМАНОВ М.Е. Численное решение обратной кинематической задачи для горизонтально-неоднородных сред.....	I25
АУРАСС Г., ГРЕССЕЛ С. Оценки взаимного спектра случайных процессов.....	I28
АУРАСС Г., ГРЕССЕЛ С. Коротко-временной спектральный анализ по методу максимальной энтропии.....	I29
БЕЛИШЕВ М.И. Явление полного внутреннего отражения в задаче о падении наклонной волны.....	I30
БУРДА М. К решению нелинейных уравнений первого рода.....	I32
БУХГЕЙМ А.Л., ЯХНО В.Г. О задаче идентификации гиперболических уравнений.....	I34
ВАСИЛЬЕВ А.Н. Коррктная задача для ультрагиперболического уравнения и ее связь с задачей интегральной геометрии.....	I35
ИВАНОВА П.К. Решение обратной задачи гравиметрии с помощью симплекс-метода.....	I37
ЛАВРЕНТЬЕВ К.К. Обратные задачи распространения волн с неизвестным граничным условием.....	I39
МУХОМЕТОВ Р.Г. О единственности обратной кинематической задачи сейсмологии.....	I41
ЯН Х. Повышение разрешающей способности спектрометра Фурье методом деконволюции.....	I42
КОВАЛЕ Г. Проблемы моделирования внутреннего строения Земли.....	I43
БЕЛИНСКИЙ С.П. Обратные задачи для симметрических $t$ -гиперболических систем.....	I44
ВИЗНЕР Я. Решение обратной задачи теории рассеяния путем введения параметра.....	I45

ЗАПРЕЕВ А.С. О единственности решений одной внешней обратной задачи и одной обратной задачи дифракции для уравнения колебаний.....	I48
ИСАКОВ В.М. Нестационарные обратные задачи теории потенциала.....	I50
ПИКАЛОВ В.В., ПРЕОБРАЖЕНСКИЙ Н.Г. Методы регуляризации в проблеме бесконтактной диагностики неоднородных сред.....	I51
ТАНАНА В.П., ТИМОНОВ А.А. Решение некоторых обратных задач скважинной геофизики.....	I52
ВАСИН В.В. Конечномерная аппроксимация приближенных решений в вариационных методах регуляризации неустойчивых задач.....	I54
КЛИБАНОВ М.В. Обратные задачи и интегральные уравнения первого рода с ядрами специального вида.....	I55
АТАХОДЖАЕВ М.А., СЕРИКБАЕВ А.У. Об одной обратной смешанной задаче логарифмического потенциала.....	I55
АБУТАЛИЕВ Ф.Б., АЛИЕВ Д.М. Об одном способе регуляризации для идентификации параметров в дифференциальном уравнении.....	I57
АЗАМАТОВ С.Ж. О корректности задачи Коши для некоторых уравнений со сдвинутым аргументом.....	I58
ЧЕРЕДНИЧЕНКО В.Г. Решение двумерной обратной задачи гравиметрии методом последовательных приближений.....	I59
КАРДАКОВ В.Б. Некоторые обратные задачи для гиперболических уравнений с данными на времениподобных многообразиях.....	I60
ШИШКО Н.П. О некоторых обратных задачах для уравнений параболического типа.....	I61

## Раздел I

### СТАТЬИ

Ю. Е. Аниконов

#### ФОРМУЛЫ В МНОГОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ СЕЙСМИКИ

В теории обратных задач видное место принадлежит многомерным обратным кинематическим задачам сейсмологии, суть которых заключается в определении скорости распространения возмущения по времени его движения. Характер такого рода задач может быть весьма разнообразен, что связано, например, с распределением источников сейсмических возмущений и приемников, регистрирующих времена прихода этого возмущения и другими причинами. Главной особенностью многомерных обратных кинематических задач является их сложность, в частности, нелинейность и некорректность. В виду больших применений эти задачи нуждаются в более детальном исследовании, в частности, значительный интерес представляют конструктивные методы. В течение ряда лет автор создавал и развивал конструктивные способы исследования многомерных обратных кинематических задач сейсмологии, на основе которых в ряде случаев были получены формулы обращения. Здесь приводится лишь часть результатов этого направления.

# I. Обобщение формулы Герглотца

Пусть  $E^{n+1}$  -  $(n+1)$ -мерное евклидово пространство переменных  $(x, y)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $-\infty < y < \infty$ . Обозначим через  $\{\lambda\}$  множество дважды непрерывно дифференцируемых функций  $\lambda(y)$ , заданных в области  $y \geq 0$  и удовлетворяющих условиям:

$$\lambda(y) > 0, \quad \lambda'(y) < 0, \quad \lambda(0) = 1,$$

а через  $\{u\}$  - множество трижды непрерывно дифференцируемых функций  $u(x)$ ,  $x \in E^n$  таких, что

$$u(x) \geq 0, \quad u(0) = 0.$$

В полупространстве  $y \geq 0$  определим множество метрик  $ds$  вида

$$ds^2 = (\lambda^2(y) + u^2(x))(dx^2 + dy^2), \quad \lambda \in \{\lambda\}, \quad u \in \{u\}. \quad (1)$$

Хорошо известно, что, в частности для каждой метрики (I), существуют числа  $r > 0$ ,  $R > 0$ ,  $r \leq R$  такие, что любые две точки  $\xi$  и  $\eta$  гиперплоскости  $y = 0$ ,  $|\xi| < r$ ,  $|\eta| < R$  соединяются единственной геодезической  $\gamma(\xi, \eta)$  метрики (I).

Рассмотрим задачу: в области  $|\xi| < r$ ,  $|\eta| < R$  задана функция

$$\tau(\xi, \eta) = \int_{\gamma(\xi, \eta)} \sqrt{(\lambda^2 + u^2)(dx^2 + dy^2)},$$

требуется найти функции  $\lambda(y) \in \{\lambda\}$ ,  $u(x) \in \{u\}$ .

Прежде чем точно формулировать результат, приведем вспомогательный материал.

Пусть  $x^0$  - фиксированный вектор единичной длины, принадлежащий пространству  $E^n$ .

Введем функции  $f(\alpha)$  и  $\tilde{u}(x)$ , полагая

$$f(\alpha) = \tau(0, \alpha x^0), \quad 0 \leq \alpha \leq R,$$

$$\tilde{u}(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial \tau}{\partial \eta_i} \right)^2 - \left( \frac{\partial \tau}{\partial \xi_i} \right)^2 \right]} \Bigg|_{\eta=x, \xi=0}, \quad |x| < R.$$

Пусть  $\tilde{x}(t;p)$  - решение задачи Коши

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} = \tilde{u} \operatorname{grad} \tilde{u}, \quad \tilde{x}|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{d\tilde{x}}{dt} \right|_{t=0} = p.$$

Составим систему уравнений относительно параметра  $t$  и вектора  $p$ :

$$\tilde{x}(t;p) = \alpha x^0, \quad \left( \frac{d\tilde{x}}{dt}, x^0 \right) = f^1(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq R. \quad (2)$$

Скобки здесь в левой части второго равенства означают скалярное произведение.

**Т е о р е м а I.** Пусть  $(\lambda(y), u(x))$ ,  $\lambda \in \{\lambda\}$ ,  $u \in \{u\}$  - решение задачи, тогда

1. Функция  $\tau(\xi, \eta)$  удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial \tau}{\partial \eta_i} \right)^2 - \left( \frac{\partial \tau}{\partial \xi_i} \right)^2 \right] = u^2(\eta) - u^2(\xi),$$

2.  $u(x) = \tilde{u}(x)$ .

3. Система уравнений (2) имеет единственное решение  $t(\alpha)$ ,  $p(\alpha)$ , определенное на некотором промежутке  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ ,  $\alpha_0 > 0$ , причем функция  $h(\alpha) = |p(\alpha)|$  строго монотонно убывает и  $h(0) = 1$ ,

4. Имеют место формулы:

$$\lambda^{-1}(q) = \frac{1}{\pi} \int_q^1 \frac{a(h) dh}{\sqrt{h^2 - q^2}},$$

$$a(q) = qt(h^{-1}(q)), \quad h(\alpha_0) \leq q \leq 1,$$

Формула Герглотца [I], следует из теоремы I при  $u(x) = 0$ .

II. Несколько результатов, полученных способом доказательства теоремы I

I) Определение метрики Лиувилля.

Рассматривается такая же задача, как и при обобщении формулы Герглотца при дополнительном условии, что функция  $u(x)$  имеет вид

$$u^2(x) = \sum_{i=1}^n u_i^2(x_i), \quad u_i(0) = 0.$$

В этом случае пункты 1 и 2 теоремы I изменяются следующим образом:

I<sup>ж</sup> Функция  $\tau(\xi, \eta)$  удовлетворяет уравнениям

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial \eta_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial \xi_i}\right)^2 = u_i^2(\eta_i) - u_i^2(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$2^{\text{ж}} \quad u_i(x_i) = \sqrt{\left(\frac{\partial \tau}{\partial \eta_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial \xi_i}\right)^2} \Big|_{\xi=0, \eta=x}.$$

2) Определение однородной функции  $\lambda(x, y)$ .

Пусть  $\lambda(x, y)$ ,  $x \in \mathbb{E}^n$ ,  $-\infty < y < \infty$  трижды непрерывно дифференцируемая в области  $x \neq 0$ ,  $y \geq 0$  функция и однородная  $m$ -степени, то есть

$$(tx, ty) = t^m \lambda(x, y), \quad t > 0,$$

Имеют место следующие утверждения:

I) функция  $\tau(\xi, \eta) = \int_{\gamma(\xi, \eta)} \lambda(x, y) \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ,

$$|\xi - \xi_0| < r, \quad |\eta - \eta_0| < R, \quad \xi \in \mathbb{E}^n, \quad \eta \in \mathbb{E}^n$$

удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i \frac{\partial \tau}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial \tau}{\partial \eta_i}) + [\sqrt{\lambda_0^2(\xi) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \tau}{\partial \xi_i}\right)^2} -$$

$$-\sqrt{\lambda_0^2(\eta) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \eta}{\partial \eta_i}\right)^2} = (m+1)\tau(\xi, \eta), \quad \lambda_0(x) = \lambda(x, 0),$$

2) в случае  $\lambda = \frac{\tilde{\lambda}(\frac{y}{x})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $x \in E^1$ , имеет место формула

$$\varphi(p) = \frac{1}{\pi p} \int_1^p \frac{\ln \frac{\alpha(q)}{\alpha_0}}{\sqrt{q^2 - p^2}} dq,$$

где  $\alpha(q)$  - обратная функция к  $q(\alpha) = \alpha f'(\alpha)$ ;  $f(\alpha) =$

$$= \int_{\gamma(\alpha, \alpha_0)} \frac{\tilde{\lambda}(\frac{y}{x})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sqrt{dx^2 + dy^2}, \varphi(p) - \text{функция, обратная к}$$

$$\tilde{\lambda}(\text{tg } \varphi) \sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}.$$

3) Определение метрики вида

$$ds^2 = \lambda^2(y) dx^2 + a^2(\lambda^2) dx dy + b^2(\lambda^2) dy^2.$$

Пусть известна функция  $f(\alpha) = \int_{\gamma(\alpha)} ds$ ,  $0 \leq \alpha \leq R$ ,  $\gamma(\alpha)$  - геодезическая метрики  $ds$ , а и  $b$  - фиксированные функции, а  $\lambda(y)$  - искомая.

Имеют место формулы:

$$\lambda^{-1}(q) = - \int_p^q \frac{B'(p) dp}{s(p^2)},$$

$$s(p) = \sqrt{\frac{p^2 b(p^2) - a(p^2)}{p^2}}, \quad B'(p) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dp} \int_p^1 \frac{\alpha(q) dq}{\sqrt{q^2 - p^2}}$$

$$f'(\alpha(q)) = q, \quad R - \text{постоянная}, \quad 0 \leq \alpha \leq R.$$

4) Обратная задача для обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассматривается обратная задача для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка: в области  $y \geq 0$  требуется найти непрерывно дифференцируемую функцию  $\mu(y) < 0$ , если

1) при любом  $k$ ,  $0 \leq k \leq k_0$  существует единственное решение  $y(t, k)$  задачи

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = k\mu(y), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0, k) = y(1, k) = 0,$$

2)  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \varphi(k)$ ,  $0 \leq k \leq k_0$  и функция  $\varphi(k)$  известна. К этой задаче, кроме обратной кинематической задачи сейсмоки приводят обратные задачи для уравнений с частными производными. Например, такая: найти функцию  $\mu(u)$ , входящую в уравнение

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} = k\mu(u),$$

если

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \varphi(k), \quad |y| \leq 1,$$

где  $\Gamma$  - сфера,  $|y| = 1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  - производная функции по нормали  $\Gamma$ ,  $\varphi(k)$  - известная функция. Имеет место формула  $\mu(y) = \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \lambda^2(y)$ , где  $\lambda(y)$  является обратной к

$$y(p) = \frac{1}{\pi} \int_p^1 \frac{qx(q) dq}{\sqrt{q^2 - p^2}},$$

а  $x(p)$  - обратная функции к  $f(x) = 1 - \frac{\varphi^2(x^2)}{x^2}$ .

### III. Теоремы редукции и их применение

Здесь излагается способ редукции плоской обратной кинематической задачи к исследованию систем дифференциальных уравнений и неравенств. Наши результаты можно сформулировать следующим образом: если годограф как функция двух переменных удовлетворяет дифференциальному уравнению (или неравенству); то на-

ходятся дифференциальное уравнение (или неравенство) и для искомой скорости и обратной. Такие результаты позволяют, например, исследовать структуру линий уровня скорости, находить различные формулы для скорости и так далее. Здесь мы ограничимся одним результатом, связанным с уравнениями I-го порядка. Пусть  $\{\lambda\}$  - множество вещественных аналитических функций  $\lambda(x, y)$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $y \geq 0$  и таких, что  $\lambda > 0$ ,  $\frac{\partial \lambda}{\partial y} < 0$ . Для любой функции  $\lambda \in \{\lambda\}$  существует число  $\alpha > 0$  такое, что каковы бы ни были числа  $a$  и  $b$ ,  $-\alpha < a \leq b < \alpha$  существует единственная геодезическая  $\gamma(a, b)$  метрики

$$ds^2 = \lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2),$$

соединяющая точки  $a$  и  $b$  прямой  $y = 0$ .

Рассматриваются функции

$$1) \lambda_0(x) = \lim_{a+b=x} \frac{\partial \tau}{\partial b} = \lambda(x, 0), \quad \lambda(x, y) \in \{\lambda\},$$

$$2) \tau(a, b) = \int_{\gamma(a, b)} \lambda(x, y) \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad -\alpha \leq a \leq b \leq \alpha,$$

3)  $u_k(x, y)$ ,  $v_k(x, y)$  - решение системы уравнений:

$$M(u, v, \lambda) \equiv \begin{cases} \frac{\partial u_k}{\partial y} = -\frac{\partial v_k}{\partial x} - 2(k+1)\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y} u_{k+1} \\ \frac{\partial v_k}{\partial y} = \frac{\partial u_k}{\partial x} - u_{k+1} \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x} \lambda^2 - (2k+3)v_{k+1} \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y} \end{cases} \quad (3)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda(x, y) \in \{\lambda\},$$

$$4) R(x, y, x', y') = x' \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, y) y'^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, y) y'^{2k+1},$$

где  $u_k(x, y)$ ,  $v_k(x, y)$  - решение (3).

5) Определяются дифференциальные операторы  $L\tau$  и  $\tilde{L}\lambda$ ,

$$L\tau = R(b, 0, \frac{\partial \tau}{\partial b}, -\sqrt{\lambda_0^2(b) - (\frac{\partial \tau}{\partial b})^2}) - R(a, 0, -\frac{\partial \tau}{\partial a}, \sqrt{\lambda_0^2(a) - (\frac{\partial \tau}{\partial a})^2}),$$

$$\tilde{L}\lambda = u_0(x, y) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + v_0(x, y) \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \lambda, \quad u_0 = u_k \text{ при } k = 0,$$

$$v_0 = v_k \text{ при } k = 0.$$

Т е о р е м а 2.

а) Какова бы ни была функция  $\lambda(x, y) \in \{\lambda\}$  и каково бы ни было число  $v$ , существует аналитическое решение  $u_k(x, y)$ ,  $v_k(x, y)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  системы уравнений (3) такое, что

$$L\tau = v\tau, \quad \tilde{L}\lambda = v\lambda;$$

б) Для того, чтобы  $L\tau = v\tau$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\tilde{L}\lambda = v\lambda$ ;

в) Существует полукруг  $\omega = \{(x - x_0)^2 + y^2 \leq r^2, y > 0, |x - x_0| < \alpha\}$  такой, что если  $L\tau \leq v\tau$ , ( $L\tau \geq v\tau$ ), то  $\tilde{L}\lambda \leq v\lambda$ , ( $\tilde{L}\lambda \geq v\lambda$ ) и, наоборот, если  $\tilde{L}\lambda \leq v\lambda$ , ( $\tilde{L}\lambda \geq v\lambda$ ), то  $L\tau \leq v\tau$ , ( $L\tau \geq v\tau$ ).

Приведенная теорема 2 редуцирует, в частности, обратную кинематическую задачу к исследованию системы уравнений

$$\tilde{L}\lambda = v\lambda, \quad M(u, v, \lambda) = 0,$$

с краевыми условиями

$$L\tau = v\tau, \quad \lambda(x, 0) = \lambda_0(x).$$

В частности, если оказывается, что

$$u_k = 0, \quad v_k = 0 \text{ при } k = 1, 2, \dots,$$

то система (3) превращается в систему уравнений Коши-Римана

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

Уже этот частный случай приводит к обилию формул для  $\lambda(x, y)$  как решения уравнения  $\tilde{L}\lambda = u_0 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \lambda = 0$  с данны-

ми  $\lambda(x,0) = \lambda_0(x)$ ,  $u_0(x,0) = u^0(x)$ ,  $v_0(x,0) = v^0(x)$ .

Другие подобные результаты и их применение можно найти в работах автора [2-II].

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. HERGLOTZ G. Uber die Elastizitat der Erde bei Bvrrucksichtigung ihrer variablen Dichte. - Z. für. Math. und Phys, 1905, 52, n 3.
2. АНИКОНОВ Ю.Е. О некоторых задачах вариационного исчисления и интегральной геометрии. -Препринт ВЦ СО АН СССР, 1968.
3. АНИКОНОВ Ю.Е. О единственном решении обратных задач. - В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. I, 1969, с.21-41.
4. АНИКОНОВ Ю.Е. Формулы обращения для задач кинематической и интегральной геометрии. -В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. I, 1969, с.41-48.
5. АНИКОНОВ Ю.Е. Теорема единственности для одной вариационной задачи. -"Сиб.мат.ж.", 1970, т. II, № 2.
6. АНИКОНОВ Ю.Е. О геометрических методах исследования обратных задач. - В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. 2, 1971, с.7-53.
7. АНИКОНОВ Ю.Е., ШАНШЕВА Н.Б. Формулы для обратной кинематической задачи сейсмоки.- В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. 2, 1971, с.57-67.
8. АНИКОНОВ Ю.Е. Об одной обратной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. -"Математические заметки", 1972, т. I2, № 2, с.163-167.
9. АНИКОНОВ Ю.Е. Несколько частных решений обратной кинематической задачи. - В сб.: Математические проблемы

геофизики, вып.4, 1973, с.30-59.

Ю. АНИКОНОВ Ю.Е., ПИВОВАРОВА Н.Б. Формула для луча, времени и амплитуды для одного простейшего класса скорости.  
- В сб.: Математические проблемы геофизики, вып.4, 1973, с.193-199.

II АНИКОНОВ Ю.Е. Определение метрики поверхности Лиувилля.  
-"Сиб.мат.ж.", 1973, т.14, № 6, с.1338-1340.



НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ  
ТЕОРИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Речь пойдет о двух задачах.

В пп. 1<sup>0</sup>-5<sup>0</sup> обсуждается многомерная обратная задача для телеграфного уравнения в полупространстве.

Пп. 6<sup>0</sup>-7<sup>0</sup> посвящены обратной задаче об отражении плоских волн от слоисто-неоднородного анизотропного полупространства.

1<sup>0</sup>. Задача А: найти коэффициент  $q(x, z)$  в уравнении

$$u_{tt}^+ = \Delta_x u^+ + u_{zz}^+ - qu^+, \quad z > 0, \quad x = (x_1, x_2) \in R^2, \quad (1)$$

если известно, что

$$u^+|_{t=0} = 0, \quad u_z^+|_{z=0} = \delta(x - x_0, t), \quad u^+|_{z=0} = f^+(x, t, x_0). \quad (2)$$

Здесь  $\delta(x, t)$  - дельта-функция Дирака,  $f^+$  - заданная функция,

$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ,  $q(x, z)$  - непрерывна и  $q = 0$  при  $|x| >$

$> a > 0$ ,  $z > b > 0$ ,  $|q| \leq C_{ab}$  где  $C_{ab}$  - постоянная, зависящая от  $a, b$ . На  $u^+$ , как и на все встречающиеся ниже ре-



шения уравнения (I), наложено требование  $u^+ \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Доказывается, что существует функция  $w(x, z, t, y_0)$ , зависящая от параметра  $y_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $|y_0| < 1$ , и обладающая свойствами:

I. Функция  $w$  непрерывна всюду, кроме плоскостей  $h^\pm = 0$ , где  $h^\pm = t + (x, y_0) \pm z \sqrt{1 - |y_0|^2}$ . При  $h^\pm = 0$   $w$  разрывна:

$$w = \frac{1}{16 \pi^2} \frac{1}{\sqrt{1 - |y_0|^2}} \left\{ \varepsilon(-h^+) \int_0^z q\left(x + \frac{\zeta - z}{\sqrt{1 - |y_0|^2}} y_0, \zeta\right) d\zeta + \right. \\ \left. + \varepsilon(h^-) \int_0^z q\left(x - \frac{\zeta - z}{\sqrt{1 - |y_0|^2}} y_0, \zeta\right) d\zeta \right\} + w_1. \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon(h^\pm)$  - функция Хевисайда,  $w_1$  - непрерывная функция. Из свойства I, в частности, следует, что функция  $q(x, z)$  может быть однозначно восстановлена по  $w$ .

II. Функция  $w$  удовлетворяет линейному уравнению вида

$$|y|^2 < 1 \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{f}(y, t-s, x_0) w(x, z, s, y) + g(x, z, t, x_0) = 0. \quad (4)$$

при  $t^2 < |x - x_0|^2 + z^2$ . Здесь  $\check{f}(y, p, x_0)$  и  $g(x, z, t, x_0)$  - функции, явно выражающиеся через заданную функцию  $f^+(x, t, x_0)$ . Из сказанного следует, что для решения обратной задачи достаточно решить уравнение (4), а затем восстановить  $q$ , используя (3).

2°. Уравнение (4) является обобщением известного уравнения Гельфанда-Левитана [1] для одномерной обратной задачи. Приведём краткий вывод этого уравнения (такой вывод использован в работе Б.С.Парийского [2]). Уравнение (4) возникает при попытке распространить указанный вывод на многомерный случай. Итак, пусть  $u^+(z, t)$  - решение задачи:

(A')

$$u_{tt}^+ = u_{zz}^+ - q(z)u^+ \quad z > 0, \quad u^+|_{z=0} = \delta(t), \quad u^+|_{z=0} = f^+(t).$$

Построим  $u(z, t)$  - нечётное продолжение функции  $u^+(z, t)$ , то есть  $u(z, t) = u^+(z, t)$  при  $t > 0$ ,  $u(z, t) = -u^+(z, -t)$  при  $t < 0$ . Функция  $u(z, t)$  является решением задачи

$$u_{tt} = u_{zz} - qu \quad z > 0, \quad u|_{z=0} = f(t), \quad u_z|_{z=0} = 0, \quad (B')$$

где  $f(t)$  - нечётное продолжение функции  $f^+$ . Задача  $B'$  - корректная задача математической физики, её решение имеет вид

$$u(z, t) = \int f(t-s)W(z, s)ds, \quad (5)$$

где  $W(z, t)$  - решение задачи

$$W_{tt} = W_{zz} - qW \quad z > 0, \quad W|_{z=0} = \delta(t), \quad W_z|_{z=0} = 0. \quad (C')$$

Заметим, что  $u = 0$  при  $|t| < z$ , поэтому (5) приобретает вид

$$\int f(t-s)W(z, s)ds = 0, \quad |t| < z. \quad (6)$$

Наконец, если продифференцировать уравнение (6) по  $t$  и учесть, что  $W(z, s) = \frac{1}{2} [\delta(s-z) + \delta(s+z)] + w(z, s)$ , где  $w = 0$  при  $|s| > z$ , то уравнение (6) превращается в линейное неоднородное фредгольмово уравнение II рода относительно  $w$  (точнее, в семейство таких уравнений, зависящее от параметра  $z$ ).

З<sup>0</sup>. Попытка распространить приведенный выше вывод на многомерный случай наталкивается на следующее препятствие: естественный аналог задачи  $B'$ , задача

$$u_{tt} = \Delta_x u + u_{zz} - qu \quad z > 0, \quad u|_{z=0} = f(x, t, x_0), \quad u_z|_{z=0} = 0,$$

где  $u$  и  $f$  - чётные продолжения соответственно  $u^+$  и  $f^+$  - типичный пример некорректной задачи. Сейчас мы покажем, как можно обойти это препятствие. Пусть  $\varphi(x, t)$  - функция от  $x, t \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  ( $\varphi$  может зависеть от других переменных как от пара-

метров). Обозначим через  $\check{\varphi}$  функцию от  $y \in R^2$ ,  $p \in R$ :

$$\check{\varphi}(y, p) = \int \varphi(x, p - (x, y)) dx. \quad (7)$$

Заметим, что  $\check{\varphi}(y, p)$  есть ни что иное, как преобразование Радона от  $\varphi(x, t)$ , то есть интеграл от  $\varphi(x, t)$  вдоль плоскости, зависящей от выбора  $y, p$ , причём при  $|y| < 1$  плоскость пространственно ориентирована, при  $|y| = 1$  — плоскость характеристическая. Наиболее важен для дальнейшего следующий результат. При любой функции  $\check{f}(y, p)$  существует и единственно решение уравнения (I) в полупространстве  $z > 0$ , если заданы

$$u_z|_{z=0} = 0, \quad \check{u}(y, p, z)|_{z=0, |y|<1} = \check{f}(y, p).$$

Решение  $u$  допускает представление

$$u(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{|y_0|<1} dy_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{f}(y_0, t-s) W(x, z, s, y_0). \quad (8)$$

Здесь  $W(x, z, t, y_0)$  — решение задачи С, то есть задачи В, если вместо  $\check{f}(y, p)$ , задаётся функция специального вида:

$$\check{W}|_{z=0, |y|<1} = \frac{1}{2} |p| \delta(y - y_0), \quad \text{где } |y_0| < 1. \text{ Справедливость}$$

представления (8) легко проверяется, если доказано существование  $W$ . Пусть  $\check{f}$  в задаче В — преобразование Радона от  $f$  — нечётного продолжения  $f^+$  из задачи А. Тогда решение задачи В обладает свойством:  $u(x, z, t, x_0) = 0$  при  $t^2 < |x - x_0|^2 + z^2$ , откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{|y_0|<1} dy_0 \check{f}_{tt}(y_0, t-s, x_0) W(x, z, s, y_0) = 0, \quad t^2 < |x - x_0|^2 + z^2. \quad (9)$$

Из соотношения (9) легко следует уравнение (4).

4<sup>0</sup>. Наметим вкратце доказательство утверждений пункта 3<sup>0</sup>. Пусть сначала  $q \equiv 0$ . Найдём решение задачи

$$v_{tt} = \Delta_x v + v_{zz} \quad z > 0, \quad v_z|_{z=0} = 0, \quad \check{v}|_{z=0, |y|<1} = \check{f}(y, p).$$

Перейдя к преобразованию Радона, найдём, что  $\check{v}$  удовлетворяет уравнению

$$(1 - |y|^2)\check{v}_{pp} = \check{v}_{zz}. \quad (10)$$

Уравнение (10) при  $|y| < 1$  есть уравнение струны, его решение при условиях:  $\check{v}_z|_{z=0} = 0$ ,  $\check{v}|_{z=0} = f(y, p)$ :

$$\check{v}|_{|y|<1} = \frac{1}{2} [\check{f}(y, p - z\sqrt{1-|y|^2}) + \check{f}(y, p + z\sqrt{1-|y|^2})].$$

При  $|y| < 1$  уравнение (10) совпадает, с точностью замены переменных, с уравнением Лапласа. При условиях  $\check{v}_z|_{z=0} = 0$ ,

$\check{v} \rightarrow 0$  оно имеет только тривиальное решение. Тем самым по-

строено преобразование Радона от  $v$ , а значит, и само  $v$ . Для нахождения  $v$  надо использовать формулу обращения преобразования Радона [3]. Приведем результат в случае, когда  $\check{f}(y, p) = \frac{1}{2} |p| \delta(y - y_0)$  (в этом случае  $v$  обозначаем символом  $R(x, z, t, y_0)$ ):

$$R(x, z, t, y_0) = -\frac{1}{8\pi^2} [\delta(t + (x, y_0) + z\sqrt{1-|y_0|^2}) + \delta(t + (x, y_0) - z\sqrt{1-|y_0|^2})].$$

Аналогично находится функция  $T(x, z, t, \zeta)$  - решение задачи

$$T_{tt} = \Delta_x T + T_{zz} + \delta(z - \zeta, x, t) \quad z > 0, \quad T_z|_{z=0} = 0, \quad T|_{z=0, |y|<1} = 0.$$

Оказывается, что

$$T = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(z - \zeta) \delta(|x|^2 + (z - \zeta)^2 - t^2) + \\ + \frac{1}{8\pi^2} (|x|^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{|x|^2 + (z + \zeta)^2 - t^2}{|x|^2 + (z - \zeta)^2 - t^2}.$$

Используя функции  $R$  и  $T$ , нетрудно проверить, что решение задачи  $S$ , если оно существует, имеет вид  $W = R + w$ , где  $w$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$w(x, z, t, y_0) = -\iiint T(x+\xi, z, t-\tau, \zeta) q(\xi, \zeta) w(\xi, \zeta, \tau, y_0) d\xi d\zeta d\tau - \\ -\iiint T(x-\xi, z, t-\tau, \zeta) q(\xi, \zeta) R(\xi, \zeta, \tau, y_0) d\xi d\zeta d\tau, \quad (11)$$

или, в символической записи  $w = -T_q w - T_q R$ .

Исследование уравнения (II) показывает, что:

1) Основываясь на фйнитности потенциала  $q$ , достаточно рассматривать уравнение (II) для функции  $w(x, z, t, y_0)$ , определенной лишь на цилиндре  $Z_{ab} = \{(x, z, t): |x| < a, z < b, t \in \mathbb{R}^1\}$ ; если  $w$  найдена на  $Z_{ab}$ , то её легко построить при всех  $(x, z, t)$ .

2) Пусть  $M_{ab}^Y$  — банахово пространство ограниченных почти всюду в  $Z_{ab}$  функций с нормой  $\|v\| = \text{vrai max}_{x, z, t \in Z_{ab}} e^{\gamma|t|} v(x, z, t)$ ,

$\gamma > 0$ . При любом  $\gamma > 0$   $T_q R \in M_{ab}^Y$ . Оператор  $T_q$  ограничен в  $M_{ab}^Y$  и

$$\|T_q\| \leq \exp \gamma(4a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (4ab + \frac{a^2}{\pi} \ln \frac{a^2 + 4b^2}{a^2}) \max |q|.$$

Поэтому, если  $\max |q| < (4ab + \frac{a^2}{\pi} \ln \frac{a^2 + 4b^2}{a^2})^{-1}$ , то при не-

котором  $\gamma > 0$ ,  $\|T_q\| < 1$ , и решение уравнения (II) существует и единственно в  $M_{ab}^Y$ .

3) Оператор  $T_q$  сглаживает функции. Поэтому особенности функции  $w(x, z, t, y_0)$  совпадают (в главных членах) с особенностями  $-T_q R$ . Доказывается, что  $-T_q R$  — кусочно-непрерывная функция, имеющая особенности типа скачка только на плоскостях

$t + (x, y_0) \pm z\sqrt{1 - |y_0|^2} = 0$ , вычисление этих особенностей приводит к формуле (3). В заключение этого пункта отметим, что постановка задачи В похожа на исследованную в [4, 5].

5<sup>0</sup> Рассмотрим соотношение (9). Подставив в него представление  $W = R + w$ , мы получим уравнение (4), где

$$g(x, z, t, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{|y_0| < 1} dy_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{f}(y_0, t-s, x_0) R(x, z, s, y_0).$$

Изучим подробнее структуру уравнения (4). Заметим, что функцию  $f^+$ , входящую в постановку задачи А, нельзя выбирать произвольно. Она должна удовлетворять требованиям, необходимым для разрешимости задачи:  $f^+ = 0$  при  $t < |x - x_0|$ ,  $f^+ = \frac{1}{\kappa} \varepsilon(t) \delta(t^2 - |x - x_0|^2) + f_1^+$ , где  $f_1^+$  - классическая ограниченная кусочно-непрерывная функция. Отсюда нетрудно доказать, что

$$\check{f}(y, p, x_0) = \text{sgn} [p - (x_0, y)] \cdot (1 - |y|^2)^{-\frac{1}{2}} + \check{f}_1,$$

где  $\check{f}_1$  - непрерывная функция. Поэтому ядро в уравнении (4) есть обобщённая функция вида

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{f}(y, t-s, x_0) = 2\delta'(t - s - (x_0, y)) \cdot (1 - |y|^2)^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

Отметим в заключение, что так же, как в одномерном случае, (4) точнее назвать не уравнением, а семейством уравнений, зависящим от параметров  $x, z$ ; уравнение (4) можно записать в виде  $F_{x,z} w + g_{x,z} = 0$ , где при фиксированных  $x, z$  оператор  $F_{x,z}$  сопоставляет функции, заданной в цилиндре  $|y| < 1$ ,  $p \in R^1$ , функцию от  $x_0, t$ , определённую между полами двухполостного гиперboloида  $t^2 = |x - x_0|^2 + z^2$ . Краткое изложение результатов в пп. I<sup>0</sup>-5<sup>0</sup> содержится в работе [6].

6<sup>0</sup>. Приведем вкратце результаты, касающиеся следующей задачи. Пусть в  $(n+1)$ -мерном пространстве с координатами  $x \in R^n, z \in R^1$  происходит распространение волн, описываемое уравнением

$$u_{tt} = Lu, \quad (12)$$

где  $L$  - эллиптический оператор второго порядка произвольного вида с коэффициентами - гладкими функциями, зависящими только от  $z$ , причём в полупространстве  $z < 0$   $L$  есть оператор Лапласа (среда однородна и изотропна). Покоящаяся вначале среда возбуждается плоской волной вида  $u_{\text{пад}} = \delta(t - (x, \omega) - z \sqrt{1 - |\omega|^2})$ , падающей из однородного пространства.

Здесь  $\omega$  - вектор из  $\mathbb{R}^n$ , достаточно близкий к нулевому (угол падения достаточно мал) - настолько, что в неоднородной среде не возникает явление полного внутреннего отражения.

Пусть  $u|_{z < 0} = \delta(t - (x, \omega) - z\sqrt{1 - |\omega|^2}) + f(\omega; t - (x, \omega) + z\sqrt{1 - |\omega|^2})$ , где  $f(\omega; \tau)$  - заданная функция (отраженная волна). Требуется по  $f$  восстановить все  $\frac{(n+3)(n+2)}{2}$  не-

известных при  $z > 0$  коэффициентов оператора  $L$ . Выясняется, что эта задача невыполнима по следующей причине: функция  $f(\omega; \tau)$  оказывается зависящей лишь от некоторых комбинаций из коэффициентов, причём сами коэффициенты можно изменять, оставляя неизменными упомянутые комбинации. По  $f(\omega; \tau)$  может

быть найдено  $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$  таких комбинаций - функций от

одной и той же координаты  $z$ , где  $z$  - неизвестная монотонная функция от  $\tau$ . Укажем точно, какую именно информацию о коэффициентах можно получить в двумерном случае ( $n = 1$ ). При  $n = 1$   $L$  имеет вид:

$$L = a_{00} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2a_{01} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_0 \frac{\partial}{\partial z} + b_1 \frac{\partial}{\partial x} + c;$$

$a_{ik}, b_i, c$  - функции от  $z$ , при  $z < 0$   $a_{01} = b_0 = b_1 = c = 0$ ,  $a_{00} = a_{11} = 1$ ;  $\omega = \sin \alpha$ , где  $\alpha$  - угол падения волны. По

$f(\omega; \tau)$  могут быть найдены:  $\lambda_1 = \frac{a_{00} a_{11} - a_{01}^2}{a_{00}}$ ,  $\lambda_2 =$

$$= a_{00} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{a_{01}}{a_{00}} \right) - b_1 + \frac{b_0 a_{01}}{a_{00}}, \quad \lambda_3 = c - \frac{b_0^2}{4a_{00}} - \frac{a_{00}}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{b_0}{a_{00}} \right) +$$

$$+ a_{00}^{3/4} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (a_{00}^{1/4}) \text{ как функции переменной } y = \int_0^z (a_{00})^{-1/2} dz.$$

Интересно, что та же информация (при любом  $n$ ) о коэф-

коэффициентах уравнения может быть получена в обратной задаче для уравнения (12) в полупространстве  $z > 0$ , если среда возбуждается точечным источником, расположенным на границе, и известно волновое поле на границе (см. [7]).

7<sup>0</sup> Для нахождения всей возможной информации о коэффициентах уравнения (12) достаточно знать пары функций  $f(\omega_k; \tau)$  и  $f(-\omega_k; \tau)$  для некоторого конечного множества значений  $\omega_k$ . Для каждой такой пары после подходящей замены переменных мы приходим к следующей одномерной обратной задаче: найти коэффициенты  $\mu(y), \Gamma(y) \mid \mu = \Gamma = 0$  при  $y < 0$  (в уравнении  $u_{ss} - u_{yy} = \mu u_s + \Gamma u$ , если два решения  $u^\pm$  этого уравнения таких, что  $u^\pm|_{\pm s < 0} = \delta(s \mp y)$  известны при  $y < 0$ :  $u^\pm|_{y < 0} =$

$= \delta(s \mp y) + f^\pm(s \pm y)$ , где функции  $f^\pm(s)$  заданы ( $f^\pm(s) = 0$  при  $\pm s < 0$ ). Эта последняя задача исследуется локальными методами, сходными с методом работы [8] (см. также п. 2<sup>0</sup> настоящей работы). Доказывается единственность решения задачи и необходимое и достаточное условие её разрешимости. Последнее условие формулируется в терминах свойств интегрального оператора  $K_y$ , порожденного функциями  $f^\pm(s)$ . Пусть  $L_{2,y}$  — пространство двухкомпонентных квадратично суммируемых на  $(-y, y)$  вектор-функций  $\vec{\vartheta} = (\vartheta_1(s), \vartheta_2(s))$ . Тогда  $K_y \vec{\vartheta} = (\int_{-y}^s f^+(s-s_1) \vartheta_2(s_1) ds_1, \int_s^y f^-(s-s_1) \times \vartheta_1(s_1) ds_1)$ ,  $E$  — единичный оператор. Мы сформулируем здесь отдельно 1) достаточное условие разрешимости: оператор  $E + K_y$  обратим при всех  $y$ ; 2) необходимое условие разрешимости: не более, чем при локально конечном числе значений  $y = y_i, i = 1, 2, 3, \dots$  нуль является собственным числом оператора  $E + K_y$ , причём  $\dim \text{Ker} (E + K_{y_i}) = 1$ . Необходимое и достаточное условие мы не приводим из-за недостатка места. Оно получается, если в дополнение к условию 2) наложить некоторые требования на поведение оператора  $(E + K_y)^{-1}$  при  $y$ , близких к  $y_i$ . Процедура нахождения решения обратной задачи в существенном сводится к решению интегральных уравнений вида  $(E + K_y) \vec{\varphi} = \vec{F}_y$ , где  $\vec{F}_y$  явно выражается через  $f^\pm(s)$ . Отметим, в заключение, что обсуждаемая в пп. 6<sup>0</sup>, 7<sup>0</sup> задача близка к изучаемым в цикле работ А.С.Алексеева и А.Г.Меграбова ([9] и др.). Результаты

пп. 6<sup>0</sup>, 7<sup>0</sup> получены автором совместно с К.Э.Воеводским.

### Л и т е р а т у р а

1. ГЕЛЬФАНД И.М., ЛЕВИТАН Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. ИАН СССР, серия матем., 15, 1951, с.309-360.
2. ПАРИЙСКИЙ Б.С. Обратная задача для волнового уравнения с воздействием на глубине.- В сб.: Вычислительная сейсмология. Вып.2, М., "Наука", 1969.
3. ГЕЛЬФАНД И.М., ГРАЕВ М.И., ВИЛЕНКИН Н.Я. Обобщенные функции. Вып.5. "Интегральная геометрия и теория представлений", М., Физматгиз, 1962.
4. ДИКОПОЛОВ Г.В., ШИЛОВ Г.Е. О корректных задачах для уравнений в частных производных в полупространстве. ИАН СССР, сер. матем., т.24, № 3, 1960, с.369-380.
5. ПАЛАМОДОВ В.П. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, ИАН СССР, сер. матем., т.24, № 3, 1960, с.381-386.
6. БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ А.С. Уравнение Гельфанда-Левитана для многомерной обратной задачи, тезисы докладов VI Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. Кн. I, Ереван, 1973, с.34-36.
7. БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ А.С. Одномерная обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка. Записки научных семинаров ЛОМИ, 15, 1960, с.85-99.
8. БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ А.С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны. Труды МИАН, СХУ, 1971, с.28-38.
9. АЛЕКСЕЕВ А.С., МЕГРАБОВ А.Г. Прямая и обратная задачи рассеяния плоских волн на неоднородных переходных слоях.- В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. 3, Новосибирск, 1972, с. 8-36.

## МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ В ГЕОФИЗИКЕ

Обзор работ по геофизическим исследованиям теоретического, прикладного и экспериментального характера показывает, что достигнуты значительные успехи в развитии отдельных геофизических методов как их экспериментальных возможностей, так и теоретического обоснования. Разработки в области практических приложений не так эффективны в силу сложной природы геологических объектов и плохих условий эксперимента. Частные вопросы, способы проведения интерпретации, обоснование способов интерпретации и их практической применимости успешно рассматриваются с точки зрения конкретных экспериментальных данных и существующих представлений в геофизике и геологии. Неприятным моментом является тенденция к разобщению геофизических методов, особенно в эксперименте и теории, призванных исследовать один и тот же объект. С этих позиций рассмотрение вопросов интерпретации комплексных геофизических данных, без сомнения, является сейчас актуальным и необходимым.

В данной работе проводится анализ методологических и теоретических вопросов задачи интерпретации комплексных геофи-

зических данных.

I. Начнем с того, что определим само понятие интерпретации комплексных геофизических данных. Единого определения нам выделить не удалось, а существующие толкования можно обобщить таким образом [1-4,6].

С позиций геофизиков. Под интерпретацией понимают построение альтернативного набора конкретных физических моделей исследуемого объекта на основе правдоподобного истолкования некоторых особенностей комплексных геофизических данных.

С позиций геологов. Под интерпретацией понимают описание геологических моделей исследуемого объекта на основе истолкования особенностей комплексных геофизических данных.

Если понимать интерпретацию комплексных геофизических данных как решение геологических задач, то оба толкования имеют смысл, но связаны с не конкретной геологической задачей, а с накоплением геофизических и геологических моделей. Вполне возможно, что при решении некоторых геологических задач отдельные модели и будут использованы.

Будем связывать с построением модели целевую геологическую функцию. Тогда под интерпретацией следует понимать решение конкретной геологической задачи (определение параметров геологической функции), связанной с объектом исследований, на основе закономерностей комплексных геофизических данных.

С этих позиций обсудим современное состояние интерпретации комплексных геофизических данных, считая, что для успешного проведения интерпретации необходимо, но еще недостаточно:

- 1) поставить геологическую задачу;
- 2) выбрать рациональный комплекс геофизических методов;
- 3) выбрать оптимальную последовательность геофизических методов в комплексе (для проведения интерпретации);
- 4) провести интерпретацию данных отдельных геофизических методов (предварительная обработка данных, схематизация данных, выбор физической модели, оценка параметров этой модели, исследование этой модели, перебор других возможных моделей, выбор наилучшей физической модели в смысле целевой эффективности, теоретического оправдания, согласия с экспериментальными данными, эксплуатация наилучшей физической модели);
- 5) представить геологическую задачу в виде графа извест-

ных математических задач, получить ее решение и оценить его;

6) указать способы изменения рационального комплекса геофизических методов с целью экономической оптимизации решения геологических задач.

Вообще говоря, на практике каждый специалист имеет свой явно неформулированный перечень, поэтому будем говорить о частной схеме интерпретации комплексных геофизических данных. Легко видеть, что только некоторые элементы, связанные с интерпретацией, проводятся сейчас достаточно строго, часть элементов формализована и некоторые элементы выполняются на уровне суждений и мнений. Следует заметить, что формализация на уровне подражания опытным геофизикам и геологам не улучшает качества обработки. В настоящее время мы тратим огромные усилия и средства для получения дорогих точных исходных данных внутри отдельных методов, а затем используем их комплексно на основе очень грубых и, во многих случаях, сомнительных методик.

В заключение следует признать, что состояние интерпретации комплексных геофизических данных неудовлетворительно. Очевидно, нужно найти некий формальный подход, связанный с известной по структуре формальной задачей и учитывающий практику геофизических исследований.

2. Если считать частную схему интерпретации комплексных геофизических данных преемственной общей схеме поиска полезных ископаемых [12], то ее можно интерпретировать семью типами формальных задач: измерение, описание, сопоставление, выделение, разделение, упорядочение и оценивание. Эти задачи, в свою очередь, могут быть интерпретированы через математические задачи классификаций, построения функций по экспериментальным данным, в частности, задачи распознавания, задачи группирования и задачи эвристического программирования [11].

Поясним формальную постановку задачи интерпретации комплексных геофизических данных. Пусть нам задана область  $q$  и речь идет о построении в ней функции  $f(x, y, z)$ , которую нам далее предстоит фиксированным образом использовать. Предположим, что функция  $f(x, y, z)$  может быть измерена в любой

точке области  $q$ , однако такие измерения связаны с очень большими затратами. Будем считать, что у нас нет возможности указать вид  $\varphi(x, y, z)$  для области  $q$ . Для построения такой "дорогой" и "плохой" функции мы можем привлечь другие "дешевые" и "хорошие" функции  $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), \dots, f_n(x, y, z)$ , которые тоже могут быть измерены в любой точке области  $q$ , причем такие измерения связаны с малыми затратами и у нас имеется возможность разумно указать вид  $f_i(x, y, z), i = 1, 2, \dots, n$  для области  $q$ . Тогда область  $q$  можно разбить на две части  $q_1$  и  $q_2$  (не обязательно односвязные). В первой части  $q_1$  можно произвести измерения в нужной нам детальной сети функций  $\varphi(x, y, z), f_1(x, y, z), \dots, f_n(x, y, z)$ . Во второй же части  $q_2$  можно произвести измерения в детальной сети только функций  $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), \dots, f_n(x, y, z)$ , функцию же  $\varphi(x, y, z)$  измерить только в некоторых точках этой сети. Для получения значений функций  $\varphi(x, y, z)$  в нужной нам сети во второй части  $q_2$  можно использовать имеющиеся экспериментальные данные в первой части  $q_1$ . В таком простейшем варианте интерпретации комплексных геофизических данных ее эффективность можно определить через соотношение затрат при прямом и косвенном измерениях функции  $\varphi(x, y, z)$  в области  $q$ , при этом следует, конечно, учитывать и степень риска. Заметим, что функции  $f_1(x, y, z), \dots, f_n(x, y, z)$  можно использовать для разбиения области  $q_2$  на однородные части  $q_{1i}$ , где  $\varphi(x, y, z)$  ведет себя просто, для определения вида  $\varphi(x, y, z)$  в  $q_{1i}$  и интервальной оценки ее параметров, для предсказаний значений  $\varphi(x, y, z)$  через значения  $f_1(x, y, z), \dots, f_n(x, y, z)$ , для эффективного выбора точек измерений функции  $\varphi(x, y, z)$  в  $q_{1i}$ . Важно отметить, что оценка эффективности интерпретации геофизических данных возможна только в рамках математически поставленной задачи с учетом затраты средств и времени на прямые и косвенные измерения на полигонах [13].

3. При определении понятия модели будем пользоваться аксиоматическим определением математической модели с помощью ее свойств.

Модели — есть непротиворечивый набор эвристических правил, вводящих операции над дискретными объектами, и устанавли-

ливающих общие отношения между их результатами.

Прежде чем рассматривать содержание матричных моделей очень кратко остановимся на существующих моделях теории интерпретации. Анализ обзора работ позволил выделить три типа моделей:

1) Индуктивно-эмпирические модели интерпретации, обоснованные практикой основоположниками геофизических методов (например, [1]). Они содержательно сколь угодно точны, хорошо используют априорную информацию, но зависят от опыта и интуиции человека. Нельзя построить эффективные оценки качества результатов.

2) Теоретико-функциональные модели введены на основе теории математической физики (например, [2,4]). Они используют развитый математический аппарат, позволяют строить оценки эффективности формализованных фрагментов интерпретации, но не учитывают качество эмпирических данных, в силу аналитической аппроксимации физических процессов, содержательно грубы и приближенны, плохо используют априорную информацию.

3) Функционально-вероятностные модели (например, [3]) введены чисто формально и предполагают известные законы распределения эмпирических данных, а также воспроизводимость экспериментов. Они формально сколь угодно точны, имеют возможности использовать априорную информацию, но на всю область решения дают только неосуществимые переборные методы, а методы оптимизации не имеют содержательного смысла.

В смысле (1-3) матричная модель обладает всеми хорошими качествами и избавлена от большей части плохих. Общий вид матричных моделей определяется свойством дискретности эмпирических данных и интервальными оценками параметров геологических объектов. Частный вид матричных моделей определяется за счет материала обучения (полигонных данных).

Поясним структуру и содержание матричных моделей. Пусть задано множество объектов  $A$ . Эмпирическое представление геолого-геофизических объектов из  $A$  в самом общем виде можно задать таблицами типа "объекты-свойства" [7]

$$B_i = (i | x_i, y_i, z_i | \hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i2}, \dots, \hat{x}_{ik} | f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ip}), \quad (I)$$

где  $\vec{x}$  - вектор координат,  $\vec{f}$  - вектор физических величин в точке  $\xi$ ,  $f$  - вектор отношений в точке  $\vec{x}$ .

Что значит описать объект геологических задач? Это означает такое преобразование исходных таблиц (I), на котором можно проводить операции сопоставления. Пусть такое преобразование задано оператором  $S$ :  $SB = Y$ , где  $Y$  - таблица целевых признаков описания. Пусть для описания таблицы в целом задан оператор  $S_0$ , а для описания подтаблиц - операторы  $\{S_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Если известна подходящая процедура выделения подтаблиц, то описание последовательностей подтаблиц будет иметь вид (например, [9]):

$$S_0, \{S_0, S_1\}, \{S_0, S_1, S_2\}, \dots, \{S_0, S_1, \dots, S_p\}. \quad (2)$$

Будем говорить, что операторы  $\{S_i\}$  порождают допустимые описания, если они позволяют ввести функции сопоставления на таблицах (I) и восстанавливают их с заданной точностью.

Все операции сопоставления предполагают заданные в явном виде функции сопоставления. В настоящее время нет систематического подхода к заданию функций сопоставления, поэтому будем выбирать их по цели с учетом разумных требований (аксиоматический подход) (например, [10]). Будем задавать функции сопоставления на объектах для решения задач сопоставления - меры сходства - в виде матриц типа "объекты-объекты":

$$\Lambda = \|\lambda_{ij}\| \quad (3)$$

и функции сопоставления на признаках описания (2) для минимизации признакового пространства - меры связи - в виде матриц типа "свойства-свойства":

$$\sigma = \|\sigma_{ij}\|. \quad (4)$$

Считается, что задан альтернативный набор операторов прямых задач геофизики

$$L_1, L_2, \dots, L_p. \quad (5)$$

На основе (I-5), цели условий конкретной задачи сопоставления

и обучающего материала  $A_0 \subset A$  зададим решающее правило

$$R(A, X, S, \Lambda, L, A_0, \lambda_0), \quad (6)$$

где  $\lambda_0$  - пороговый критерий операции сопоставления [10]. В работах [5, 6, 8] на основе матричной модели показана возможность проведения некоторых этапов интерпретации (схематизации данных, выбор функциональной модели, эксплуатация модели).

4. Здесь на основе матричной модели поясним постановку обратной задачи геофизики в широком смысле [6]: в заданной сети  $x_1, x_2, \dots, x_k$  в области  $q$  проведены наблюдения  $\{f_1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  геофизического поля  $B$  и в очень редкой сети прямые измерения  $\{\phi_1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m \ll k$  геологической функции  $\phi$ , в подобласти  $q_2 \subset q$  в более подробной сети проведены наблюдения  $\{f_1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, l > k$  геофизического поля  $B$  и прямые измерения  $\{\phi_1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, l > k$  геологической функции  $\phi$ .

С учетом априорных сведений требуется: а) выбрать вид функциональной модели; б) выбрать тип функциональной модели; в) оценить интервальные значения параметров физической модели. Оценки следует провести так, чтобы поверхность решения  $\phi(x, y, z)$  проходила через точки  $\{\phi_1\}$  в смысле метода наименьших квадратов.

Пусть перечислением задано множество  $A$  объектов  $A_1, A_2, \dots, A_m$  так, что каждому  $A_i \in A$  поставлен в соответствие вектор прямых признаков  $A_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{in})$ ,  $z_{ij} \in F$ , а процедура описания (2) каждому  $A_i \in A$  поставлен в соответствие вектор косвенных признаков  $A_i^* = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im})$ ,  $y_{ij} \in \Phi$ . Считается, что обучающий материал  $A_0$  можно задать двумя способами: эмпирически (постановкой специальных исследований на полигонах) и теоретически. Таким образом мы можем построить классификацию-перечисление  $J(z)$  геологических объектов по прямым признакам  $\{z_{ij}\} \in F$  и классификацию-перечисления  $J(y)$  геологических объектов по косвенным признакам  $\{y_{ij}\} \in \Phi$ .

Теперь прямая и обратная задачи геофизики в широком смысле сводятся к задаче перехода

$$J(z) \Rightarrow J(y) \quad (7)$$

и задаче выбора

$$J(y) \Rightarrow J(z). \quad (8)$$

Задача перехода соответствует прямой задаче геофизики и состоит в определении класса (образа)  $k_i^j \in J(y)$ , заданного описанием (2), если  $k_i^j \in J(z)$  задан перечислением по прямым признакам  $\{z_{1j}\} \in F$ . Зафиксируем некоторый уровень  $\{z_k\} \in J(z)$

$$\langle z_1^i, z_1^{ii} \rangle, \langle z_2^i, z_2^{ii} \rangle, \dots, \langle z_n^i, z_n^{ii} \rangle$$

такой, что

$$\langle z_1^i, z_1^{ii} \rangle \cap \langle z_j^i, z_j^{ii} \rangle = \emptyset \quad \forall (z_1, z_j \in \{z_k\}). \quad (9)$$

Здесь  $\{z_1^i, z_1^{ii}\}$  — упорядоченные пары минимальных и максимальных значений признака  $z_1$  класса  $k_i$ . Также зафиксируем некоторый уровень

$$\{y_k\} \in J(y) : \langle y_1^i, y_1^{ii} \rangle, \langle y_2^i, y_2^{ii} \rangle, \dots, \langle y_m^i, y_m^{ii} \rangle.$$

Пусть уровням  $\{z_k\}$  и  $\{y_k\}$  гомоморфны эмпирические представления объектов. Кроме того на основании (2) и (5) должны выполняться преобразования

$$LZ = B, \quad SB = Y. \quad (10)$$

При этом будем считать, что среди заданных  $\{L_i\}$ ,  $\{Z_j\}$ ,  $\{S_k\}$ ,  $\{B_e\}$  нет запрещенных сочетаний  $(L_i, Z_j)$  и  $(S_k, B_e)$ . Тогда справедлива

**Т е о р е м а I.** Если выполнены условия:

$$\langle z_1, z_1 \rangle \cap \langle z_j, z_j \rangle = \emptyset, \quad \forall z_1, z_j \in \{z_k\}, \quad (11)$$

$$L \{z_1\} = B \quad SB = Y, \quad \forall z_1 \in J(z),$$

то задача перехода (7) имеет единственное решение. Теорема доказывается от противного.

**С л е д с т в и е.** Из условий (II) и гомоморфизма уровней  $\{z_k\} \in J(z)$  и  $\{y_k\} \in J(y)$  эмпирическим представлениям объекта следует, что

$$N(\{z_k\}) \geq N(\{y_k\}), \quad (12)$$

где  $N(\{z_k\})$  — число классов уровня  $\{z_k\} \in J(z)$ ,  $N(\{y_k\})$  — число классов уровня  $\{y_k\} \in J(y)$ . Под обратной задачей геофизики будем понимать задачу выбора (8), которая состоит в определении класса (образа)  $K_i \in J(z)$ , заданного перечислением по прямым признакам  $\{z_{ij}\} \in F$ , если описанием (2) заданы классы  $K_j \in J(y)$ . Понятно, что понятие неоднозначности задачи выбора адекватно понятию неоднозначности обратных задач геофизики.

Классификация–перечисление  $J(z)$  есть ничто иное как  $[A:F]$  (например,  $[II]$ ) и представляет набор классов  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , а  $J(y) - [A:\Phi]$  представляет другой набор  $A'_1, A'_2, \dots, A'_m$ . Введем показатель неопределенности и упорядочения классов  $\{K_j \in [A:F]\}$  с точки зрения  $[A:\Phi]$ . Если учесть следствие из теоремы I, то и определим следующим образом:

$$\chi = \frac{1}{N(\{z_1\}) - 1} [N(\{z_1\}) - N(\{y_1\})] \quad (13)$$

с пределами изменений

$$0 \leq \chi \leq 1. \quad (14)$$

Тогда для степени неоднозначности задачи выбора справедлива

**Т е о р е м а 2.** Неоднозначность задачи выбора полностью определяется степенью неопределенности упорядочения классов  $\{K_j \in J(y)\}$  и оценивается показателем  $\chi$ .

Доказательство теоремы конструктивно на основе третьей теоремы классификаций [I2]

#### Л и т е р а т у р а

1. ГАМБУРЦЕВ Г.А. Избранные труды АН СССР. М., 1960.
2. ТИХОНОВ А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач.— ДАН СССР, т.153, № I, 1963.
3. ГОЛЫЦМАН Ф.М. Статистические модели интерпретации. М., "Наука", 1971.

4. БУДЯНСКИЙ Ю.А., КУДРЯ А.В., ОГУРЦОВ Н.И. и др. О построении сейсмического разреза методом отраженных волн.- ЖВМиМФ., т.15, № I, 1975.
5. БУДЯНСКИЙ Ю.А. Формально-логический анализ корреляции сейсмических волн. Тр.САХНИИ, в.37, 1975.
6. ВОРОНИН Ю.А., АМЕЛЬКИН В.А. Об использовании распознавательного подхода к решению обратных кинематических задач сейсмологии.- Сб. Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых. ВЦ СО АН СССР, 1971.
7. ВОРОНИН Ю.А., АЛАБИН Б.К. О постановке и решении задач группирования.- Сб. Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, ВЦ СО АН СССР, 1972.
8. ВОРОНИН Ю.А., ЦИВИНСКАЯ Ю.В. О решении на ЭВМ задач качественной интерпретации сейсмических данных.- Сб. Применение математических методов и ЭВМ при поиске полезных ископаемых, 1972.
9. ВОРОНИН Ю.А., ЕГАНОВ Э.А. Универсальная схема аналитического описания сложных геологических тел.- Тр. СНИИПТИМС. Новосибирск, 1968.
10. ВОРОНИН Ю.А. Введение мер сходства и связи для решения геолого-геофизических задач.- ДАН СССР, т.199, №5, 1971.
11. ВОРОНИН Ю.А., АЛАБИН Б.К., ГОЛЬДИН С.В. и др. Геология и математика. ч.1,2. М., "Наука", 1969.
12. ВОРОНИН Ю.А. Теория поисков полезных ископаемых.Алма-Ата, 1975.
13. ВОРОНИН Ю.А., БУДЯНСКИЙ Ю.А. Теоретико-множественный подход к интерпретации геофизических данных.- Труды Общесмоковского семинара "Перспективы развития методов геологической интерпретации гравитационных аномалий", ВИНТИ, № 3053, 1976.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА  
 ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ  
 С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В данной работе решаются прямые и обратные задачи по спектральной мере и по данным рассеяния для граничной задачи вида (1)-(2) в предположении, что  $\rho(x)$  — кусочно-постоянная положительная функция и имеет конечное число точек разрыва.

Здесь мы ограничимся самосопряженным случаем. Другие случаи, например, когда  $\rho(x)$  меняет знак или же принимает комплексные значения, более привлекательны, но могут представить меньший физический интерес. Поэтому результаты для указанных направлений будут изложены в другой работе.

I. Прямые задачи спектрального анализа

Пусть  $p(x)$  и  $\rho(x)$  являются вещественными локально-суммируемыми функциями на  $[0, \infty)$ , и  $\rho(x) \geq \alpha > 0$ .

Рассмотрим граничную задачу:

$$-y'' + p(x)y = \lambda \rho(x)y, \quad 0 \leq x < \infty \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \quad (2)$$

в пространстве  $L_2(0, \infty; \rho(x))$  функций  $f(x)$ , для которых

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty.$$

Обозначим через  $\varphi(x, \lambda)$  решение уравнения (I) с начальными условиями:

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1, \quad (3)$$

и для любой функции  $f(x)$  из  $L_2(0, \infty; \rho)$  определим интеграл

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f(x) \varphi(x, \lambda) \rho(x) dx. \quad (4)$$

В наших обозначениях и предположениях имеет место (см. например, [I]).

**Т е о р е м а 1.** Существует неубывающая функция  $\sigma(\lambda)$ , определённая на  $(-\infty, \infty)$  такая, что верно равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} f^2(x) \rho(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_n^2(\lambda) d\sigma(\lambda). \quad (5)$$

Функцию  $\sigma(\lambda)$  назовем спектральной мерой задачи (I)-(2).

Можно доказать следующие предложения

**Т е о р е м а 2.** Пусть функции  $p(x)$  и  $\rho(x)$  дополнительно удовлетворяют следующим условиям:

$$\int_0^{\infty} (1+x) |p(x)| dx < \infty, \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} (1+x) |1-p(x)| dx < \infty. \quad (7)$$

Тогда, если  $k = \sqrt{\lambda}$ , где  $\text{Im } k > 0$  при  $\lambda \in \bar{(0, \infty)}$ , то при каждом фиксированном  $\lambda$  уравнение (I) имеет единственное решение вида

$$f(x, k) = e^{ikx} [1 + o(1)]. \quad (8)$$

при  $x \rightarrow \infty$ ; при этом при каждом фиксированном  $x$  функции  $f(x, k)$  и  $f'_x(x, k)$  являются голоморфными по  $k$  в верхней полуплоскости и имеют непрерывные граничные значения на вещественной оси.

**Т е о р е м а 3.** В условиях теоремы 2 граничная задача (I)-(2) имеет лишь конечное число отрицательных собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , а полуось  $[0, \infty)$  составляет её абсолютно-непрерывный спектр.

В этом случае разложение (5) принимает следующий вид:

$$\int_0^{\infty} f^2(x) \rho(x) dx = \sum_{j=1}^m F_n^2(\lambda_j) \alpha_j^2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2 F^2(k^2)}{|f(0, k)|^2} dk. \quad (9)$$

Это равенство показывает, что для нормированных собственных функций граничной задачи (I)-(2) при  $x \rightarrow +\infty$  имеют место асимптотические формулы:

$$u_j(x) \approx \beta_j e^{i \sqrt{\lambda_j} x} = \beta_j e^{-\sqrt{-\lambda_j} x}, \quad (10)$$

$$u(x, k) = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \{ e^{ikx} S(k) - e^{-ikx} \}, \quad k \in (-\infty, \infty) \quad (11)$$

$$\text{где } S(k) = \frac{f(0, -k)}{f(0, +k)}. \quad (12)$$

совокупность величин  $\{\lambda_j, \beta_j, j = \overline{1, m}; S(k), -\infty < k < \infty\}$  называется данными рассеяния граничной задачи (I)-(2) в условиях (6)-(7).

Приведем следующие классические постановки обратных задач:

а) когда монотонно растущая функция  $\sigma(\lambda)$  будет спектральной граничной задачи типа (I)-(2) и можно ли по ней определить  $p(x)$  и  $\rho(x)$ ?

б) когда совокупность величин  $\{\lambda_j, \beta_j, j = \overline{1, m}; S(k)\}$  будет данными рассеяния граничной задачи типа (I)-(2) и можно ли по ним определить  $p(x)$  и  $\rho(x)$ , обладающих свойствами (6)-(7)?

Известно, что в случае  $\rho(x) \equiv 1$  обе приведенные выше задачи полностью решены в известных работах И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и В.А. Марченко (обзоры имеются в [2], [3]). Первая задача также решена в работах М.Г. Крейна в случае  $\rho(x) \equiv 0$  (см. дополнения к книге [1]).

Мы решаем обе задачи а) и б) в предположении, что

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha_j^2, & a_{j-1} < x < a_j, \quad j = \overline{1, n}, \\ 1, & a_n < x, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\alpha_j > 0$ ,  $a_0 = 0$ ,  $\alpha_j \neq \alpha_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ ,  $\alpha_n \neq 1$ . Множество таких функций обозначим через  $G_n$ .

Оказывается, что в этом случае по спектральной мере или по данным рассеяния обе функции  $r(x)$  и  $\rho(x)$  определяются однозначно. При этом можно также указать алгоритм для восстановления по спектральным данным  $r(x)$  и  $\{\alpha_j, a_j\}$ . В дальнейшем часто, для простоты изложения, полагаем, что  $n = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = a > 0$ . Следовательно,  $\rho(x)$  имеет одну ступеньку.

Надо заметить, что если  $r(x)$  и  $\rho(x)$  — гладкие функции, то по одной спектральной мере или по данным рассеяниям они однозначно не определяются. С этой точки зрения теоремы единственности (см. теоремы 4 и 5) представляют особый интерес.

## 2. Случай $\rho(x) \equiv 0$ .

Пусть  $\rho(x) \equiv 0$ , а  $r(x) \in G_1$ . Тогда решение уравнения  $y'' = -\lambda y$  с начальными данными (3) равно

$$\varphi_0(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \alpha x}{\sqrt{\lambda} \alpha}, & x < a, \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} \alpha a}{\alpha \sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda} (x-a) + \frac{\sin \sqrt{\lambda} (x-a)}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda} \alpha a, & x > a. \end{cases} \quad (14)$$

а решение типа Йоста имеет вид

$$f_0(x, k) = \begin{cases} e^{ikx}, & x < a \\ e^{ika} \left\{ \cos kx(x-a) + \frac{1}{\alpha} \sin k\alpha(x-a) \right\}, & x > a. \end{cases} \quad (15)$$

С помощью этих решений удается доказать, что спектральная мера граничной задачи (1<sup>0</sup>)-(2) равна

$$\sigma_0(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \leq 0 \\ \frac{1}{\pi} \lambda \int_0^\lambda \frac{\sqrt{s} ds}{\cos^2 \alpha a \sqrt{s} + \frac{1}{\alpha^2} \sin^2 \alpha a \sqrt{s}}, & \lambda > 0. \end{cases} \quad (16)$$

а её нормированные собственные функции имеют вид

$$u_0(x, \lambda) = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ e^{ikx} S_0(k, \alpha, a) - e^{-ikx} \right\} \quad x > a, \quad (17)$$

где

$$S_0(k, \alpha_0, a) = \frac{e^{-2ika} \left[ \cos k\alpha + \frac{1}{\alpha} \sin k\alpha \right]}{\cos k\alpha a - \frac{1}{\alpha} \sin k\alpha} \quad (18)$$

Очевидно, что если  $a \neq a_0$  (или  $\alpha_1 \neq \alpha_0$ ,  $a \neq a_0$ ,  $\alpha \neq \alpha_0$ ), то функция

$$S_0(k, \alpha^0, a^0) S_0^{-1}(k, \alpha, a) \quad (19)$$

не имеет предела в бесконечности. Следовательно, по асимптотическому поведению функции  $S_0(k, \alpha, a)$  при  $k \rightarrow \infty$  определяются однозначно числа  $\alpha$  и  $a$ .

Таким же образом можно убедиться, что по асимптотическому

поведению функции  $\sigma_0(\lambda, \alpha, a)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  однозначно определяются числа  $\alpha$  и  $a$ . Такая же ситуация имеет место в случае  $\rho(x) \in G_n$ .

### 3. Теоремы единственности

Имеют место следующие предложения.

**Т е о р е м а 4.** Пусть  $p(x) \in L_{1,loc}(0, \infty)$  и  $\rho(x) \in G_n$ . Тогда по спектральной мере  $\sigma(\lambda)$  граничной задачи типа (I)-(2) функции  $p(x)$  и  $\rho(x)$  определяются однозначно.

**Т е о р е м а 5.** Пусть  $(1+x)p(x) \in L_1(0, \infty)$  и  $\rho(x) \in G_n$ . Тогда по данным рассеяния  $\{\lambda_j, \beta_j, j = 1, m; S(\lambda), -\infty < \lambda < \infty\}$  граничной задачи типа (I)-(2) функции  $p(x)$  и  $\rho(x)$  определяются однозначно.

Укажем метод восстановления  $p(x)$  и  $\rho(x)$  по данным рассеяния  $\{S(\lambda); \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m; \beta_1, \dots, \beta_m\}$  при условии  $p(x) \in G_1$ . В этом случае по  $S(\lambda)$  можно найти единственную функцию  $S_0$  вида (I8) такую, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S(\lambda) \cdot S_0^{-1}(\lambda; \alpha, a) = 1. \quad (20)$$

Следовательно, по  $S(\lambda)$  числа  $\alpha$  и  $a$  определяются однозначно. Далее можно доказать, что интегральное уравнение

$$F(x+t) + K(x,t) + \int_x^\infty K(x,\xi)F(\xi+t)d\xi = 0, \quad (21)$$

где

$$F(x+t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x+t)} \{S_0(k) - S(k)\} dk + \sum_{s=1}^m \beta_s^2 e^{-\sqrt{-\lambda_s}(x+t)} \quad (22)$$

имеет единственное решение при  $x \geq a$  и

$$p(x) = -\frac{d}{dx} K(x,x) \quad \text{при} \quad x \geq a. \quad (23)$$

Остаётся восстановить  $p(x)$  при  $x < a$ . Для этого по данным рассеяния можно построить спектральную меру граничной задачи (I)-(2) и в отрезке  $[0, a]$  функцию  $p(x)$  восстановить по спектральной мере [4].

#### 4. Частные случаи потенциала $p(x)$ .

Предположим, что  $p(x) \equiv 0$  при  $x > a$ . В этом случае можно сформулировать более глубокие результаты об определении  $p(x)$  по спектральным данным.

**Т е о р е м а 6.** Пусть граничная задача типа (I)-(2) не имеет отрицательных собственных значений. Тогда для того чтобы  $S(k)$ , определенная на  $(-\infty, \infty)$ , была  $S$ -функцией граничной задачи типа (I)-(2) с  $\rho(x) \in G_1$  и  $p(x) \equiv 0$  при  $x > a$  и  $p(x) \in L_2(0, a)$ , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1) S(-k) = \overline{S(+k)} = S^{-1}(k) \text{ при } k \in (-\infty, \infty); \quad (24)$$

2)  $S(k)$  является голоморфной в верхней полуплоскости функцией и существуют числа  $\alpha$  и  $a$  такие, что

$$|S(k) - S_0(k, \alpha, a)| \leq \frac{e^2 |J_m k| a}{1 + |k|} \text{ при } J_m k \geq 0; \quad (25)$$

3)  $S(k)$  в верхней полуплоскости имеет бесконечное число нулей  $K_n$ ,  $n = 0, +1, +2, \dots$  с асимптотикой

$$K_n \alpha = \pi n + \arctg \frac{1}{\alpha} + \frac{c}{\pi n} + \frac{c_n}{\pi n}, \quad (26)$$

где  $c$  и  $c_n$  — постоянные числа и сходится ряд

$$\sum |c_n|^2 < \infty. \quad (27)$$

Заметим, что отсутствие отрицательных собственных значений облегчает формулировку теоремы. Если существуют отрицательные собственные значения, то также имеет место аналог теоремы 6, но формулировка её становится более сложной.

Из формулы (22) и из оценки (25) очевидно, что при  $x$

$t > a$ -функция перехода  $F(x + t) \equiv 0$ , и поэтому  $P(x) \equiv 0$  при  $x > a$ . Теперь по  $k_n$  построим целую функцию

$$F(k) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{k_n}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=-N}^N \left(1 - \frac{k}{k_n}\right)$$

и определим

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} \frac{\sqrt{\lambda} d\lambda}{|F(\sqrt{\lambda})|^2} & \text{при } \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

С помощью условий 3) удается доказать, что  $\sigma(\lambda)$  является спектральной мерой граничной задачи типа (I)-(2) и поэтому можно восстановить  $p(x)$  при  $x < a$  по  $\sigma(\lambda)$ .

**З а м е ч а н и е.** Можно также указать достаточные условия, чтобы  $p(x) \equiv 0$  при  $x < a$  и имело бы место неравенство

$$\int_a^{\infty} x |p(x)| dx < \infty.$$

#### Л и т е р а т у р а

1. АТКИНСОН Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М. "Мир". 1968.
2. ГЕЛЬФАНД И.М., ЛЕВИТАН Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Изв. АН СССР, сер.матем., 15 (1951), с. 309-360.
3. ГАСЫМОВ М.Г., ЛЕВИТАН М.Б. Определение дифференциального оператора по двум спектрам УМН, XIX в.2, (1964) с. 3-64.
4. LEVINSON N. Certain explicit relationships between phase shift and scattering potential. Phys. Rev, (2), 89 (1953), 755-757.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОЦЕНОК УСТОЙЧИВОСТИ  
ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

1. В качестве примера некорректной задачи будем рассматривать уравнение

$$Au = f, \quad u \in U, \quad f \in F, \quad (1)$$

где  $U$  и  $F$  — банаховы или гильбертовы пространства,  $A:U \rightarrow F$  — линейный ограниченный оператор, осуществляющий взаимно-однозначное отображение, с плотной в  $F$  областью значений  $R(A)$ , причем обратный оператор  $A^{-1}:R(A) \rightarrow U$  предполагается неограниченным. Близкой является задача вычисления значений неограниченного оператора  $T: D(T) \rightarrow U$  с плотной в  $F$  областью определения  $D(T)$ .

В статье дается обзор результатов по оценкам устойчивости, преимущественно в задаче (1), полученным членами семинара в Уральском государственном университете (Свердловск).

2. Будем считать, что оператор в уравнении (1) известен точно, а правая часть задана с некоторой погрешностью  $\delta f$ .

Таким образом, вместо  $f$  мы знаем лишь  $f_{\delta} = f + \delta f$ . Формально (считая, что  $f \in R(A)$ ), мы можем написать

$$u = A^{-1}f$$

и если  $f$  изменится на  $\delta f$ , не выходя из  $R(A)$ , решение изменится на

$$\delta u = A^{-1}\delta f \quad (2)$$

и, благодаря неограниченности  $A^{-1}$ , вариация  $\delta u$  может оказаться сколь угодно большой. Если же окажется, что  $\delta f \notin R(A)$ , то выражение (2) не будет иметь смысла.

Различные методы решения задачи (I) имеют своей целью, используя некоторую дополнительную информацию о задаче, либо ограничить возможности изменения  $f$ , либо заменить неограниченный оператор  $A^{-1}$  ограниченным так, чтобы

$$\delta u \rightarrow 0 \text{ при } \delta f \rightarrow 0, \quad (3)$$

такие зависимости  $\delta u$  от  $\delta f$ , при которых имеет место (3), или их мажоранты мы будем называть оценками устойчивости.

Подходы к решению некорректных задач в пятидесятых годах ([1][2][3] и др.) основывались на оценках устойчивости. Из таких оценок непосредственно выводилась справедливость соотношения (3). Заметим, что еще в 1943 году А.Н.Тихоновым был предложен способ решения уравнения (I) [4], не требующий применения оценок устойчивости, правда, за счет ограничений, налагаемых на решение  $u$ . В шестидесятых годах были даны способы [5][6][7], которые гарантировали стремление  $\delta u \rightarrow 0$ , не используя оценок устойчивости.

Но и после этого оценки устойчивости не потеряли своего значения. Они важны при сравнении различных методов решения некорректных задач. Кроме того иногда бывает необходимо дать приближенное решение задачи с гарантированной точностью.

#### Метод квазирешений

3. О п р е д е л е н и е . Пусть  $M$  — замкнутое множество в пространстве  $U$ . Квазирешением уравнения (I) на множестве

$M$  называется элемент  $\bar{u} \in M$ , минимизирующий отклонение  $\|Au - f\|$ .

Пусть  $N = AM$ - образ множества  $M$  в пространстве  $F$  при отображении  $A$  и  $q = Pf$  - метрическая проекция элемента  $f$  на множество  $N$ . Тогда

$$\bar{u} = A^{-1} P(f).$$

Существование и единственность квазирешения связаны, помимо  $M$ , с геометрическими свойствами пространства  $F$ . Непрерывная зависимость  $\bar{u}$  от  $f$  имеет место, если  $P$  и  $A^{-1}$  непрерывны. Ниже мы будем предполагать существование и единственность метрической проекции  $P(f)$  для любой точки  $f \in F$ , а также непрерывность  $P$ .

Задача нахождения оценок устойчивости в методе квазирешений ставится следующим образом. Дано множество  $M$  и значения правых частей  $f_1$  и  $f_2$  уравнения (I) так, что  $\|f_1 - f_2\| \leq \delta$ . Требуется найти  $\sup \|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|$  для соответствующих квазирешений на множестве  $M$ . Обычно предполагается, что  $\rho(f_i, N) \leq \delta$   $i=1,2$ . Это связано с тем, что часто  $\bar{u}_1$  есть, принадлежащее  $M$ , точное решение при точной правой части  $f$ , а  $\bar{u}_2$  - приближенное решение, найденное по приближенной правой части  $f_\delta = f$ . В этом случае  $f_1 \in N$  и  $\rho(f_1, N) = 0$   $\rho(f_2, N) \leq \rho(f_2, f_1) \leq \delta$  При сделанном предположении  $\|q_1 - q_2\| \leq 3\delta$ , а когда  $F$  - гильбертово, то  $\|q_1 - q_2\| \leq \delta$  (см. [8]).

Оценка отклонения двух квазирешений  $\bar{u}_1$  и  $\bar{u}_2$  определяется модулем непрерывности обратного оператора

$$\Omega(M, \tau) = \sup \{ \|u_1 - u_2\| : u_1, u_2 \in M, \|Au_1 - Au_2\| \leq \tau \}.$$

Множество  $M$  удобно брать как образ шара  $S_r = \{v \in V : \|v\| \leq r\}$ , где  $V$  - некоторое третье банахово пространство при непрерывном линейном отображении  $B: V \rightarrow U$  так, что  $M = BS_r$ . В этом случае множество  $M$  определяется величиной радиуса  $r$ . Вводя оператор  $C = BA(C: V \rightarrow F)$ , модуль непрерывности можно записать следующим образом:

$$\Omega(r, \tau) = \sup \{ \|Bv_1 - Bv_2\| : \|v_1\| \leq r, \|v_2\| \leq r, \|Cv_1 - Cv_2\| \leq \tau \}.$$

4. Вместо  $\Omega(r, \tau)$  удобно ввести функцию

$$\omega(r, \tau) = \sup \{ \|Bv\| : \|v\| \leq r, \|Cv\| \leq \tau \},$$

которая связана с  $\Omega(r, \tau)$  соотношением (см. [9])

$$\Omega(r, \tau) = \omega(2r, \tau).$$

Целый ряд оценок для модуля непрерывности на компактах был дан М.М.Лаврентьевым [10]. Наиболее полные результаты получаются, когда пространства  $V, U, F$  - гильбертовы, а действующие в пространстве  $V$  операторы  $C_1 = C^*C$  и  $B_1 = B^*B$  - перестановочны.

Первые оценки в этом направлении были получены в [11] и [12] в предположении, что  $M$  - компакт (оператор  $B$  - вполне непрерывен). В работах [13][14] и [15] было показано, что оператор  $A^{-1}$  может быть непрерывным и на некоторых некомпактных множествах.

В [13] для  $\omega(r, \tau)$  даны двусторонние оценки. Из того, что операторы  $C_1$  и  $B_1$  коммутируют, следует, что они являются функциями некоторого самосопряженного оператора  $D$ :  $B_1 = \varphi(D)$ ,  $C_1 = \psi(D)$ . Методом К.Миллера [16] доказано, что

$$\frac{1}{2} (L + H) \leq \omega(r, \tau) \leq L + H, \quad (4)$$

$$H^2 = \left\{ r^2 \sup \varphi(\lambda) : \psi(\lambda) \leq \frac{\tau^2}{r^2} \right\},$$

$$L^2 = \left\{ \tau^2 \sup \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} : \psi(\lambda) > \frac{\tau^2}{r^2} \right\}.$$

Аналогичные оценки даны и в задаче вычисления значений неограниченного оператора [17].

В [15] предполагается, что коммутирующие операторы  $B_1$  и  $C_1$  связаны зависимостью  $B_1 = g(C_1)$ , где  $g(\gamma)$  - возрастающая вогнутая функция, определенная на спектре оператора  $C_1$ , удовлетворяющая условию  $g(0) = 0$ . Доказано, что

$$\omega(r, \tau) = r \sqrt{g\left(\frac{\tau^2}{r^2}\right)} \quad \tau \leq r\|C\|,$$

$$\omega(r, \tau) = r \sqrt{g(\|C_1\|)} \quad \tau > r\|C\|.$$

Как показал В.М. Берликов, можно отказаться от требования вогнутости  $g(\gamma)$ , введя вогнутую мажоранту  $\text{Consg}(\gamma)$ . Это наименьшая вогнутая функция, мажорирующая  $g(\gamma)$ . Тогда

$$\omega(\tau, r) = r \sqrt{\text{Consg}\left(\frac{\tau^2}{r^2}\right)}. \quad (5)$$

5. В приведенных примерах множество  $M$  было эллипсоидом. Можно рассматривать более сложные случаи, когда  $M$  есть пересечение  $n$  эллипсоидов. В этом направлении Л.Ф. Коркиной [18] получены оценки типа (4), В.М. Берликовым типа (5).

Изложим один из результатов [21]. Пространства  $U$  и  $F$ , как и ранее, гильбертовы, а вместо  $V$  рассматривается  $n$  гильбертовых пространств  $V_1, \dots, V_n$  (которые могут и совпадать) и  $n$  соответствующих линейных операторов  $B_1, \dots, B_n$  из  $V_i$  в  $U$ . Операторы  $A$  и  $B_i$  считаются замкнутыми с плотными областями определения в соответствующих пространствах, причем предполагается, что пересечение областей значений  $R(B_i)$  операторов  $B_i$  и области определения  $D(A)$  оператора  $A$  плотно в  $U$ . Множество  $M$  здесь имеет вид

$$M = \{u \in U: \|B_i^{-1} u\| \leq r_i\}.$$

Модуль непрерывности

$$\omega(r_1, \dots, r_n, \tau) = \sup \{ \|u\| : \|B_i^{-1} u\| \leq r_i, \|Au\| \leq \tau \}.$$

Предполагается, что действующие в  $U$  операторы  $A^*A$  и  $(B_i^{-1})^*B_i^{-1}$  — попарно перестановочны,  $A^*A = \Phi_0(D)$ ,  $(B_i^{-1})^*B_i^{-1} = \Phi_i(D)$ ,  $D$  — самосопряженный оператор. Оценка имеет вид

$$\max_{i=0,1,\dots,n} L_i \leq \omega(r_1, \dots, r_n, \tau) \leq \sum_{i=0}^n L_i,$$

где  $L_i$  определяются аналогично тому, как это сделано в формуле (4).

Во всех предыдущих оценках существенно использовалась перестановочность операторов  $B_i$  и  $C_i$ . В.М. Берликов получил оценки модуля непрерывности для некоторых случаев, когда эти операторы имеют системы собственных векторов, асимптотически близкие, и когда  $U = L_2$ ,  $V = W_2^m$ , а  $B: W_2^m \rightarrow L_2$  есть оператор вложения.

## Метод регуляризации

6. Чтобы избежать гипотезы о существовании точного решения, можно поступить следующим образом. Введем в  $U$  множество

$$C_1 = \{u \in U: u = Bv, \|v\| \leq r, \|Au - f_\delta\| \leq \delta\}, \quad (6)$$

где  $f_\delta$  — приближенное значение правой части уравнения (I). Пусть  $R^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  — регуляризатор задачи [19]. Будем искать уклонение

$$\Delta(r, \delta, \alpha) = \sup \{\|u - R^\alpha f_\delta\|: u \in M\},$$

предполагая, что точным решением  $u$  может быть любой элемент  $u \in M$ .

Оценки для  $\Delta(r, \delta, \alpha)$  были получены в [20]. Рассмотрим величины:

$$\Delta_1(r, \alpha) = \sup \{\|u - R^\alpha Au\|: u \in M\},$$

$$\Delta_2(\delta, \alpha) = \sup \{\|R^\alpha Au - R^\alpha f_\delta\|: u \in M\}.$$

Способом, аналогичным изложенному в [21], где рассматривалась задача вычисления значений неограниченного оператора на приближенно заданном элементе, выводится неравенство

$$\frac{1}{2} [\Delta_1(r, \alpha) + \Delta_2(\delta, \alpha)] \leq \Delta(r, \delta, \alpha) \leq \Delta_1(r, \alpha) + \Delta_2(\delta, \alpha). \quad (7)$$

Доказывается, что  $\Delta_1(r, \alpha) = \|B - R^\alpha AB\|r$ ,  $\Delta_2(\delta, \alpha) = \|R^\alpha\|\delta$ , значение  $\alpha$  выбирается из условия минимума правой части (7). Если этот минимум обозначить через  $\Delta(r, \delta)$ , то на основании (6),

$$\frac{1}{2} \Delta(r, \alpha) \leq (r, \delta, \alpha) \leq \Delta(r, \alpha).$$

Будем считать в вариационном методе А.Н. Тихонова [22]  $V, U, F$  гильбертовыми. Регуляризатор А.Н. Тихонова возьмем в виде

$$R^\alpha = (A^*A + \alpha L^*L)^{-1}A^*, \quad L = B^{-1}. \quad (8)$$

При  $B = A$  получилось  $\Delta(r, \alpha) = 1,11 r^{1/2} \delta^{1/2}$ . Для квази-решений на множестве  $M = \{u \in U: u = Bv, \|v\| \leq r\}$  оказалось, что  $\omega(r, \delta) = \delta^{1/2} r^{1/2}$  и  $\Omega(r, \delta) = 1,41 r^{1/2} \delta^{1/2}$ . Верхняя граница уклонений квазирешения  $\bar{u}$  на множестве  $M$  есть

$$\sup_{u \in M} \|u_0 - \bar{u}\| = \frac{1}{2} \Omega(r, \delta) = 0,72 r^{1/2} \delta^{1/2}.$$

При выводе этих оценок предполагалось, что  $\|f_\delta\| > \delta$ , но это ограничение не учитывалось, как показал А.М.Штейнберг, учет этого ограничения не оказывает влияния на  $\Omega(r, \delta)$ . Именно, если положить

$$\rho(r, \delta) = \{ \sup \|u_1 - u_2\| : u_1, u_2 \in M, \|Au_1 - Au_2\| \leq \delta, \delta \leq \|f_1\|, \delta \leq \|f_2\| \},$$

то

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\rho(r, \delta)}{\Omega(r, \delta)} = 1.$$

В [23] показано, что если для регуляризатора, определяемого (8), взять  $\alpha = \frac{4\delta^2}{r^2}$ , а регуляризованное решение в виде

$$u_\delta^\alpha = R^\alpha f_\delta, \text{ то будет } \|Au_\delta^\alpha - f_\delta\| \leq 3\delta.$$

#### Л и т е р а т у р а

1. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа.- Докл.АН СССР, 102, № 2, 1955, с.205-206.
2. JOHN F. Numerical solution of the equation of heat conduction for preceeding tims Ann. mat pura ed appl., 1955, 40, 129-142.
3. PUCSI C. Sui problem Cauchy non ben posti Alti. Acad. Naz. Zincei. Rend. Ch. Sci. fis. mat. e natur. 1955. 18, N 5, 473-477.
4. ТИХОНОВ А.Н. Об устойчивости обратных задач.- Докл.АН СССР, 1943, 39, № 5, с.195-198.
5. ИВАНОВ В.К. О линейных некорректных задачах.- Докл.АН СССР, 1962, 145, № 2, с.270-272.

6. ТИХОНОВ А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.- Докл. АН СССР, 1963, 151, №3, с.501-504.
7. PHILLIPS D.N. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. J.Assoc. Comput. Math. 1962, 2, N 1, 84-97.
8. ИВАНОВ В.К. Об одном типе некорректных линейных уравнений в векторных топологических пространствах. Сиб.мат.ж., 1965, 6, № 4, с.832-939.
9. ИВАНОВ В.К. Об оценке погрешностей при решении операторных уравнений первого рода. - В сб.: Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов, Тр. симпозиума, т.2, Киев, 1969.
10. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Сиб.отд. АН СССР, 1962.
11. ДЕНЧЕВ Р. Об устойчивости уравнений на компакте. Ж.вычисл. матем. и мат. физ., 1967, 7, №6, с. 1367-1369.
12. ИВАНОВ В.К., КОРОЛЮК Т.И., Об оценке погрешностей при решении линейных некорректных задач. Ж.вычисл.мат. и мат.физ., 1969, 9, № 1, с.30-41.
13. КОРКИНА Л.Ф. Оценка модуля непрерывности обратного оператора. Мат.зап., Уральский ун-т, 1969, 7, № 2, с.76-87.
14. МОРОЗОВ В.А. Об оценках погрешности решения некорректно поставленных задач с линейными неограниченными операторами. Ж.вычисл.мат. и мат.физ., 1970, 10, № 5, с.1081-1091.
15. ИВАНОВ В.К. Об оценке устойчивости квазирешений на некомпактных множествах. Изв.высш.учебн.завед."Математика", 1974, № 5, с.97-103.
16. MILLER K. Three circle theorems in partial differential equations and applications to improperly posed problems. Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1964, 16, N 2, 126-154.

17. КОРКИНА Л.Ф. Равномерная регуляризация в задачах вычисления значений неограниченного оператора. Мат. зап. Уральский ун-т, 1972, 8, №2, с.60-71.
18. КОРКИНА Л.Ф. Об оценке погрешности при решении некорректно поставленных задач. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1974, 14, №3, с.584-597.
19. ТИХОНОВ А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач.- Докл. АН СССР, 1963, № 1, 1963, с.49-52.
20. БУШМАНОВА М.В., ИВАНОВ В.К. Оценка устойчивости при решении операторных уравнений первого рода методом регуляризации. Изв. высш. учебн. заведений, "Математика", 1976, № 1.
21. СТРАХОВ В.Н. О решении некорректных линейных задач в гильбертовом пространстве. Дифференц. уравнения, 1970, 6, № 8, с.1490-1495.
22. ИВАНОВ В.В. Об оптимальных по точности алгоритмах решения операторных уравнений первого рода. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1975, № 1, 1975, с.3-11.
23. ИВАНОВ В.К. О величине параметра  $\alpha$  при решении условно корректных задач методом регуляризации.- В сб.: Методы решения условно-корректных задач, Свердловск, АН СССР, Уральский научный центр, вып. 17, с.3-13.

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ФИЛЬТРАЦИОННЫХ И ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Необходимость определения фильтрационных и теплофизических характеристик сред часто возникает в различных областях геофизики. Эти характеристики являются исходными данными для проектирования и прогноза при решении различных научно-технических вопросов в гидрогеологии, нефтепромысловом деле, огневом бурении горных пород, мелиорации и т. д.

Ниже указывается способ определения переменных (в зависимости от пространственных переменных, времени и других факторов) фильтрационных и теплофизических характеристик различных пород. Дополнительная информация для определения неизвестных характеристик выбирается так, чтобы она удобно была наблюдаема в полевых и лабораторных условиях. Предлагаемый способ кроме того, имеет высокую точность расчета, он дает возможность изучить некоторые сложные случаи и обработать геофизические наблюдения в этих случаях. Вопрос математически сводится к решению обратной задачи для уравнения параболического типа.

Пусть процесс наблюдается в ограниченной области  $D$  плос-

кости. Указанные ниже факты аналогичным образом излагаются для случая трехмерного пространства и неограниченных областей. Для простоты изложения предположим, что  $D$  — односвязная область. Пусть  $\Gamma$  — граница,  $(x, y)$  — произвольная точка области  $D$  и  $x \in D_0$  при  $(x, y) \in D$ , где  $D_0$  — некоторый отрезок.

Рассмотрим процесс, описываемый следующим дифференциальным уравнением параболического типа:

$$u_t - a(x, t)\Delta u = h(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega \equiv D \times (0, T]. \quad (1)$$

Пусть требуется найти функции  $\{a(x, t), u(x, y, t)\}$ , удовлетворяющие уравнению (1) и следующим дополнительным условиям:

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), (x, y) \in \bar{D}; \quad u|_{\Gamma} = f(\xi, \eta, t), (\xi, \eta, t) \in S \equiv \Gamma \times [0, T], \quad (2)$$

$$a(x, t) \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = g(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S, \quad (3)$$

где  $h(x, y, t)$ ,  $(x, y)$ ,  $f(\xi, \eta, t)$ ,  $g(\xi, \eta, t)$  — заданные функции,  $f(\xi, \eta, 0) = \varphi(x, y)|_{\Gamma}$ ,  $\nu$  — направление внутренней нормали границы  $\Gamma$ . В случае фильтрации (теплопроводности)  $a(x, t)$  и  $u(x, y, t)$  — являются коэффициентом проницаемости и распределения давления в порах (коэффициентом теплопроводности и распределения температуры) соответственно. Условие (2) является выражением начального и граничного распределений, а функция  $g(\xi, \eta, t)$  — в случае фильтрации (теплопроводности) является выражением дебита (теплового потока) через границу  $\Gamma$ .

В задаче (1)–(3)  $a(x, t)$  ищется в классе строго положительных и непрерывных функций,  $u(x, y, t)$  — ищется в классе дважды по  $x, y$  и один раз по  $t$  непрерывно-дифференцируемых функций.

Задача (1)–(3) является некорректно поставленной в классическом смысле. На примерах нетрудно убедиться, что решение задачи (1)–(3) не всегда существует, а если даже существует, то может быть неединственным. Кроме того, задача (1)–(3) от-

носится к классу "условно-устойчивых" задач [1,2]. В работе [4] исследованы вопросы корректности задачи (1)-(3). Существование решения доказывается методом последовательных приближений, который в случае неустойчивости задачи (1)-(3) может быть использован для построения регуляризующего алгоритма. Последовательные приближения находятся по схеме

$$u_t^{(s+1)} - a^{(s)}(x, t) u^{(s+1)} = h(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega, (4)$$

$$u^{(s+1)}|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}; \quad u^{(s+1)}|_{\Gamma} = f(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S, (5)$$

$$a^{(s+1)}(x, t) \frac{\partial u^{(s+1)}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = g(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S. \quad (6)$$

Очевидно, что для продолжения итерационного процесса необходимо обеспечить справедливость оценки

$$0 < g(\xi, \eta, t) \left[ \frac{\partial u^{(s+1)}}{\partial \nu} (\xi, \eta, t) \right]^{-1} < \infty, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (\xi, \eta, t) \in S_0. \quad (7)$$

Можно указать различные достаточные условия на данные задачи (1)-(3), обеспечивающие справедливость оценки (7). Каждый шаг итерации по схеме (4)-(6) может быть осуществлен приближенно, например, методом конечных разностей. Для этого система (4)-(5) пишется в разностях по какой-либо экономичной схеме [6, 7]. Оптимальное число итераций в случае неустойчивости задачи может быть определено по невязке подобно тому, как в [1] выбирается параметр регуляризации.

Теперь рассмотрим вопрос об определении фильтрационных и теплофизических характеристик, когда они зависят от распределения давления и температуры соответственно. Этот вопрос сводится к решению обратной задачи для квазилинейных параболических уравнений, где отыскиваемые коэффициенты зависят от решения уравнения. Для простоты изложения предположим, что  $D_0 \equiv [0, 1]$ . Рассмотрим обратную задачу об определении  $\{a(u), u(x, t)\}$  из условий:

$$u_t - a(u)u_{xx} = h(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \equiv D_0 \times (0,T], \quad (8)$$

$$u(0,t) = f_0(t), \quad u(1,t) = f_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \varphi(0) = f_0(0), \quad (10)$$

$$\varphi(1) = f_1(0), \quad x \in \bar{D}_0, \quad (11)$$

где  $h, f_0, f_1, \varphi, g$  - заданные функции, удовлетворяющие некоторым условиям гладкости,  $a(u)$  - находится в классе строго положительных и непрерывных на отрезке  $[r, R]$  функций,  $u(x, t)$  - находится в классе дважды по  $x$ , один раз по  $t$  непрерывно-дифференцируемых функций таких, что  $r \leq u(x, t) \leq R$ , где  $r, R$  - некоторые заданные числа. При довольно общих предположениях числа  $r, R$  могут быть оценены по принципу максимума через данные задачи. Пусть  $r_0 = \min_{0 \leq t \leq T} f_0(t)$ ,  $R = \max_{0 \leq t \leq T} f_0(t)$

и коэффициент  $a(u)$  в области  $[r, R] \setminus [r_0, R_0]$  является заданной функцией. Если  $r_0 = r$ ,  $R_0 = R$ , то отпадает необходимость принятия последнего предположения. Здесь, не останавливаясь на обсуждении вопросов корректности задачи (8)-(II), (см. [4,5]), укажем разностный алгоритм для нахождения ее решения.

Области  $(0,1), (0,T]$  покроем сетками  $\omega_h, \omega_\tau$  с шагами  $h > 0, \tau > 0$  соответственно:  $\omega_h = \{x: x = x_i = ih, h > 0, i = 1, 2, \dots, i_0 - 1, i_0 h = 1\}$ ,  $\omega_\tau = \{t: t = t_j = j\tau, j = 1, 2, \dots, j_0, j_0 \tau = T\}$ . Задаче (9)-(12) ставим в соответствие следующую разностную обратную задачу об определении  $\{\tilde{a}(\tilde{u}), \tilde{u}(x,t)\}$  из условий:

$$\tilde{u}_t - \tilde{a}(\tilde{u})\tilde{u}_{xx} = \tilde{h}(x,t), \quad (x,t) \in \omega_{h\tau} \equiv \omega_h \times \omega_\tau, \quad (12)$$

$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{f}_0(t), \quad \tilde{u}(1,t) = \tilde{f}_1(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (13)$$

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{\varphi}(0) = f_0(0), \quad \tilde{\varphi}(1) = \tilde{f}_1(0), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (14)$$

$$\tilde{a}(\tilde{f}_0)\tilde{u}_x(0,t) = \tilde{g}(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (15)$$

где  $\tilde{h}, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{\varphi}, \tilde{g}$  - есть разностная аппроксимация функций  $h, f_0, f_1, \varphi, g$ , коэффициент  $\tilde{a}(\tilde{u})$  ищется в классе строго положи-

тельных сеточных функций, определённых на  $[\tilde{x}, \tilde{R}]$ , где  $\tilde{x}$  и  $\tilde{R}$  - некоторые заданные числа,  $\tilde{u}_\tau$ ,  $\tilde{u}_{xx}$  - первые и вторые разностные отношения функций  $\tilde{u}(x, t)$ . Скажем, что решение задачи (I2)-(I5) принадлежит множеству  $M$ , если  $\tilde{a}(\tilde{u})$  удовлетворяет условию Липшица, при  $\tilde{u} \in [\tilde{x}_0(\tau), \tilde{R}_0(\tau)]$  выполняется оценка  $\tilde{x}_0(t) \leq \tilde{u}(x, \theta) \leq \tilde{R}_0(t)$ , где  $x \in \bar{\omega}_h$ ,  $0 \leq \theta \leq t$ ,  $\tilde{x}_0(t) = \min_{0 \leq \tau \leq t} \tilde{f}_0(\tau)$ ,  $\tilde{R}_0(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} \tilde{F}_0(\tau)$  и в области  $[\tilde{x}, \tilde{R}] \setminus \cup [\tilde{x}_0(\tau), \tilde{R}_0(\tau)]$  функция  $\tilde{a}(\tilde{u})$  является заданной.

Доказывается, что если  $\tilde{g}(t) \neq 0$ , тогда решение задачи (I2)-(I5) на множестве  $M$  единственно. Следовательно, если  $M$ -компактное множество, то решение задачи (I2)-(I5) будет устойчиво по отношению к возмущениям её данных, не выводящих решения из этого множества. Разностная схема является нелинейной, её можно решить методом последовательных приближений. При этом предполагается, что функция  $f_0(t)$  имеет обратную  $\Phi_0(f_0)$ , удовлетворяющую условию Липшица.

Пусть  $\alpha > 0$  некоторая внутренняя точка сетки  $\bar{\omega}_h$ . Условие (II) аппроксимируем следующим образом:

$$\tilde{a}(\tilde{f}_0)[\tilde{u}(\alpha, t) - \tilde{f}_0(t)] = \alpha \tilde{g}(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau. \quad (16)$$

При  $\alpha = h$  аппроксимации (I5), (I6) совпадают. Решение разностной задачи (I2)-(I4), (I6) обозначим через  $\{\tilde{a}^\alpha(\tilde{u}^\alpha), \tilde{u}^\alpha(x, t)\}$ . Пусть  $\{\bar{a}^\alpha(\bar{u}^\alpha), \bar{u}^\alpha(x, t)\}$  является решением задачи (I2)-(I4), (I6) с данными  $\bar{h}$ ,  $\bar{f}_0$ ,  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{\Phi}$ ,  $\bar{g}$ . Тогда верна оценка

$$\begin{aligned} & \|\tilde{a}^\alpha(\tilde{u}) - \bar{a}^\alpha(\tilde{u})\|_{C[\tilde{x}, \tilde{R}]} + \|\tilde{u}^\alpha - \bar{u}^\alpha\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} \leq \\ & \leq \frac{N}{\alpha} \left( 1 + \frac{N\tau}{2} \right)^{j_0-1} [\|\bar{h} - \tilde{h}\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} + \\ & + \|\bar{\Phi} - \tilde{\Phi}\|_{C(\bar{\omega}_h)} + \sum_{i=0}^1 \|\tilde{F}_i - \bar{F}_i\|_{C(\bar{\omega}_\tau)} + \alpha \|\tilde{g} - \bar{g}\|_{C(\bar{\omega}_\tau)}], \quad j_0 = \frac{T}{\tau}, \quad (17) \end{aligned}$$

где  $N > 0$  зависит от данных задачи и множества решений. Аналог оценки (I7) верен также для разностной аппроксимации с параметром  $\alpha > 0$  задачи (I)-(3). Если задачу (8)-(II) рассматривать в многомерной области, то для нахождения решения можно использовать локально-одномерный разностный метод [6]. В многомерном случае условие (II) задается в фиксированной точке границы  $\Gamma$ .

Указанные выше алгоритмы нахождения решения обратных задач были испытаны на методических примерах, показавших их эффективность. Результаты численных экспериментов проанализированы в совместной работе автора с М.М. Багир-заде.

Наконец, рассмотрим аналог задачи (8)-(II) для уравнения дивергентного вида в многомерной области. Пусть требуется найти  $\{a(u) > 0, u(x, y, t)\}$  из условий:

$$u_t - \nabla a(u) \nabla u = h(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega, \quad (18)$$

$$u|_{\Gamma} = f(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S, \quad (19)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad \varphi(x, y)|_{\Gamma} = f(\xi, \eta, 0), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma, \quad (20)$$

$$u(x, y_0, T) = \psi(x), \quad x \in \bar{D}_0,$$

где  $h, \varphi, f, \psi$  - заданные функции, удовлетворяющие некоторым условиям гладкости,  $y_0$  - заданное число, такое что  $(x, y_0) \in \bar{D}$  при  $x \in \bar{D}_0$ . Решение понимается в смысле, аналогичном случаю задачи (8)-(II). Рассмотрим два случая:

I) После замены  $v = \int_0^u a(\tau) d\tau$ ,  $b(v) = [a(u)]^{-1}$  при условиях  $\varphi(x, y) \equiv 0$ ,  $f(\xi, \eta, t) \equiv 0$  система (18)-(21) преобразуется к виду

$$b(v)v_t - \Delta v = h(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega, \quad (22)$$

$$v(x, y, 0) = v(x, y, t)|_{\Gamma} = 0, \quad (23)$$

$$b(\phi)v_x(x, y_0, T) = \phi_x(x), \quad x \in \bar{D}_0. \quad (24)$$

Таким образом, обеспечивая эквивалентность задач (22)-(24) и (18)-(19) для нахождения решения, можно применить метод решения задачи (8)-(11).

2) Пусть изучаемое поле имеет некоторую симметрию (например, сферическую или цилиндрическую), процесс наблюдается в полупространстве и  $\phi(x, y) \equiv 0$ ,  $f(\xi, \eta, t) = f_0 = \text{const} > 0$ ,  $h(x, y, t) \equiv 0$ . Тогда задачу (18)-(21) можно записать в виде

$$u_t(x, t) - x^{-k} [x^k a(u) u_x(x, t)]_x = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t \leq T, \quad k = \text{const} \geq 0, \quad (25)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = f_0 \quad (26)$$

$$u(x, T) = \phi(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad \phi(0) = f_0, \quad \phi(\infty) = 0. \quad (27)$$

Коэффициент  $a(u)$  находится в классе строго положительных и непрерывных при  $0 \leq u \leq f_0$  функций,  $u(x, t)$  - находится в классе дважды по  $x$  и один раз по  $t$  непрерывно-дифференцируемых и стремящихся к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ , функций.

Пусть а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k \phi(x) = 0$ , б)  $[\phi_x(x) x^k]^{-1} \int_x^\infty \xi^{k+1} \phi_\xi(\xi) d\xi =$

для любого  $x \in [0, \infty)$  является непрерывной, положительной и ограниченной функцией, в)  $\phi(x)$  имеет непрерывно-дифференцируемую обратную  $\Phi(\phi)$ , тогда для функции  $a(u)$  справедливо выражение

$$a(u) = -\Phi_u(u) [2T\Phi^k(u)]^{-1} \int_0^u \Phi^{k+1}(\tau) d\tau, \quad 0 \leq u \leq f_0.$$

При этом  $a(0)$  понимается в смысле предела правой части при  $u \rightarrow +0$ .

При  $k = 0$  задача (25)-(27) описывает известный эксперимент Х.А.Рахматулина. Вопросы корректности задачи (25)-(27) изучены в совместной работе автора с А.Я.Ахундовым.

Отметим, что метод работы [3] и др. также может быть положен в основу способов определения переменных фильтрацион-

ных и теплофизических характеристик сред.

Метод решения задачи (I)-(3) дает возможность рассматривать вопрос об определении разрывных характеристик сред.

Пусть известно, что функция  $a(x, y, t)$  на внутренней замкнутой линии  $\Gamma_1$  области  $D$  терпит разрыв первого рода и в областях  $D_1, D_2 \equiv D \setminus D_1$  не зависит от  $y$ , где  $D_1$  - часть области  $D$ , содержащаяся внутри  $\Gamma_1$ . Рассмотрим задачу об определении  $\{a(x, y, t), u(x, y, t)\}$  из условий:

$$u_t - a(x, y, t)\Delta u = h(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega \setminus \Gamma_1 \times (0, T], \quad (28)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}; \quad u|_{\Gamma} = f(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S, \quad (29)$$

$$u|_{\Gamma_1+0} = u|_{\Gamma_1-0} = f_1(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S_1 \equiv \Gamma_1 \times [0, T], \quad (30)$$

$$a(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_0+0} = a(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1-0}, \quad (31)$$

$$a(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_0+0} = g(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S_0 \equiv \Gamma_0 \times [0, T], \quad (32)$$

где  $h, \varphi, f, f_1, g$  - заданные функции, знаки  $+0, -0$  означают соответствующие пределы справа и слева относительно внутренней нормали,  $\varphi(x, y)|_{\Gamma} = f(\xi, \eta, 0), \varphi(x, y)|_{\Gamma_1} = f_1(\xi, \eta, 0), \Gamma_0$  - часть границы  $\Gamma$  проекция, которой на ось  $Ox$  покрывает  $\bar{D}_0$ .

Через  $v_i(x, y, t)$  обозначим значения функции  $v(x, y, t)$  определенной в  $\Omega_i \equiv D_i \times (0, T]$  подобласти  $\Omega$ . Пусть  $x \in D_{0i}$  при  $(x, y) \in D_i$  и функция  $\hat{f}(x, y, t)$  при  $t = 0$  совпадает с функцией  $\varphi(x, y)$ , а на поверхностях  $\Gamma, \Gamma_1$  с функциями  $f(\xi, \eta, t), f_1(\xi, \eta, t)$  соответственно. Предположим, что  $h_i(x, y, t) \in C_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}_i), f_i(x, y, t) \in C_{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\Omega_i), i=1, 2, g(\xi, \eta, t) \in C_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(S_0)$ .

Функции  $\{a(x, y, t) u(x, y, t)\}$  назовем решением задачи (28)-(32) если  $0 < a^i(x, y, t) \equiv a^i(x, t) \in C(\bar{D}_{0i} \times [0, T],$

$u(x, y, t) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $u^i(x, y, t) \in C_{1,2}(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$  и удовлетворяются соотношения (28)–(32). Скажем, что решение задачи (28)–(32) принадлежит множеству  $M_1$  если  $u(x, y, t)$  имеет ограниченные в областях  $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$  производные по  $x, y$  до второго порядка, по  $t$  первого порядка и  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_{1+0}} \neq 0$ ,

Доказывается, что если  $g(\xi, \eta, t) \neq 0$ , то решение задачи (28)–(32) единственно и верна оценка

$$\sum_{i=1}^2 \|a_i - \bar{a}_i\|_{C(D_{0i} \times [0, T])} + \|u - \bar{u}\|_{C(\bar{\Omega})} \leq N \{ \|g - \bar{g}\|_{C(S_0)} + \sum_{i=1}^2 [\|b_i - \bar{b}_i\|_{C(\bar{\Omega}_i)}],$$

где  $N > 0$  зависит от данных задачи и множества  $M_1$ .

Для нахождения решения задачи (28)–(32) можно применить метод последовательных приближений по схеме аналогичной (4)–(6).

#### Л и т е р а т у р а

1. ТИХОНОВ А.Н., АРСЕНИН В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва., 1974.
2. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. Условно-корректные задачи. Новосибирск, изд. НГУ, 1973.
3. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., РЕЗНИЦКАЯ К.Г. Теоремы единственности некоторых нелинейных обратных задач уравнений параболического типа. – ДАН СССР 208:3 (1973), с. 531–532.
4. ИСКЕНДЕРОВ А.Д. Многомерные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений. – ДАН СССР 225:5 (1975), с. 1005–1008.
5. ИСКЕНДЕРОВ А.Д. Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений. ДУ 10:5 (1974), 890–898.

6. САМАРСКИЙ А.А. Введение в теории разностных схем М., "Наука", 1971.
7. ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов, Новосибирск, "Наука", 1967.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЙ  
ПРИ НЕЙТРОНОМЕТРИИ СКВАЖИН

В статье подытоживается накопленный опыт применения аналитических и численных методов для решения задач теории скважинной ядерной геофизики (особенно нейтронной).

В разработке нейтронных методов ядерной геофизики можно указать три аспекта:

1) изучение нейтронных характеристик горных пород и теоретическое изучение распределения нейтронов и гамма-квантов в горных породах с целью обоснования способов изменений и принципов интерпретации результатов;

2) разработка измерительной аппаратуры, изучение закономерностей распределения нейтронов и  $\gamma$  - квантов в горных породах при реальных скважинных условиях измерений с помощью математического и физического моделирования;

3) создание алгоритмов количественного определения нейтронных характеристик горных пород по результатам скважинных измерений и переход от них непосредственно к петрофизическим характеристикам или количественному содержанию того или иного элемента.

Решение прямых задач ядерной геофизики сводится к расчету пространственно-энергетического, углового и временного распределения нейтронов и гамма-квантов в системе скважина-пласт, при заданной геометрии и свойствах сред.

Геофизические задачи отличаются от реакторных рядом специфических условий:

1) геофизические исследования проводятся с одним, практически точечным источником излучения; в реакторе источники нейтронов и гамма-квантов распределены в значительном макроскопическом объеме;

2) энергетический спектр применяемых в геофизике нейтронных источников простирается в область высоких энергий, как правило, значительно дальше, чем спектр деления;

3) в условия скважинных исследований границы сред с различными физическими свойствами находятся на расстояниях от источника излучения, соизмеримых с длиной свободного пробега нейтронов и гамма-квантов;

4) горные породы представляют собою среды сложного изотопного состава с широким диапазоном изменения водородосодержания, а также концентраций элементов, сильно поглощающих тепловые нейтроны.

Система скважина-пласт представляет собою совокупность сред, окружающих глубинный прибор с источником и детектором излучения. Такими средами являются: буровой раствор, стальная колонна, цементный камень, глинистая корка, зона внутренней глинизации, зона проникновения фильтра бурового раствора, неизменная часть пласта. Поле излучения в системе скважина-пласт отличается исключительной сложностью.

Решение обратных задач, оптимизация параметров глубинного прибора с учетом влияния условий измерений требует многопараметрического анализа показаний детектора.

Классические методы расчета полей излучений основаны на аналитических решениях линеаризованного уравнения переноса Больцмана (или его приближенных форм):

$$[\hat{L}(u, \bar{\omega}) - \hat{K}] \psi(\bar{x}_0 | \bar{x}) = \delta(\bar{x} - \bar{x}_0),$$

Где  $\bar{x}$  - вектор фазового пространства,  $\bar{x} \equiv \{\bar{\xi}, u, \bar{\omega}\}$ ,  $\bar{\xi} = (\bar{v}, t)$ ,  $\psi(\bar{x}_0, \bar{x})$  - плотность столкновений;  $\hat{L}(u, \bar{\omega})$  - дифференциальный

оператор переноса, являющийся элементом параметрического семейства операторов, действующих на функции переменных  $\vec{x}$ :

$$\hat{L}(u, \bar{\omega})\phi(\vec{x}) = [\tau(u) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda(u)\bar{\omega}v + 1]\phi(\vec{x});$$

$\tau(u)$  — время свободного пробега,  $\lambda(u)$  — длина свободного пробега,  $u$  — летаргия (энергия) частиц. Оператор столкновений  $\hat{K}$  определен правилом

$$[\hat{K}f](u, \omega) \equiv \int d\bar{\omega}' \int du' h(u') W(u', \bar{\omega}' | u, \bar{\omega}) f(u', \bar{\omega}')$$

для любой функции  $f = f(u, \bar{\omega})$  переменных  $u \in [u^+, \infty)$ ,  $\bar{\omega} \in \Omega$ , для которой это выражение имеет смысл. Здесь  $W(u', \bar{\omega}' | u, \bar{\omega})$  — индикатриса рассеяния;  $h(u)$  — полная вероятность рассеяния в соударении,  $g(u) = 1 - h(u)$  — полная вероятность поглощения.

Решение точного уравнения переноса представляют сложную математическую проблему даже для неограниченной однородной среды. Использование приближенных форм этого уравнения (диффузионное и возрастное приближения) при известной идеализации реальных скважинных условий приводит к наглядным формулам, чрезвычайно полезным для анализа основных физических закономерностей переноса излучений в системе "скважина-пласт". Однако при необходимости учета всех существенных факторов влияющих на показания детектора излучений, значительно большими возможностями обладают неклассические численные методы (метод Монте-Карло и многогрупповые конечно-разностные схемы). Использование этих методов по существу есть математическое моделирование, результатом которого является численное решение ряда частных задач. Заметим, что построение какого-либо раздела физико-теоретических основ нейтрометрии скважин на базе только одних численных результатов возможно лишь в том случае, когда эти данные получены для достаточно обширного набора условий (свойств и геометрии сред, расстояний от источника нейтронов, времен задержки и т.п.).

Результаты расчетов методом Монте-Карло [5] и многогрупповой конечно-разностной методикой [6] позволяют получить пространственное распределение плотности замедления  $q$  надтепловых нейтронов в системе "скважина-пласт". При этом, в частности, было показано, что величина  $q$  имеет максимумы в средах с высоким водородосодержанием (скважинная жидкость, цементный

камень), скачки на границах сред с разными свойствами. С увеличением размера зонда  $z$  максимум плотности надтепловых нейтронов  $N_0$  перемещается по радиусу от оси скважин к ее стенке и далее в пласт. Благодаря этому при малых зондах поток надтепловых нейтронов направлен из скважины в пласт, а при больших — из пласта в скважину. Этим, в частности, объясняется повышение чувствительности показаний детектора к изменению свойств пласта с увеличением размера зонда.

При измерениях в заполненной жидкостью скважине на кривых зависимости  $N_0(z)$  можно выделить три участка. При малых  $z$  ход кривых близок к их ходу в воде. Затем с ростом  $z$  начинается переходная зона (до  $z = 60 + 80$  см), а дальше зависимость  $N_0(z)$  в скважине с точностью до слабо зависящего от  $z$  множителя повторяет аналогичную зависимость для пласта без скважин. По этой причине величина отношения плотностей надтепловых нейтронов при разных  $z$  сравнительно слабо зависит от характеристик скважинной среды и определяется главным образом свойствами пласта. Плотность надтепловых нейтронов в скважине растет с приближением к стенке скважины. Одновременно растет дифференциация плотности надтепловых нейтронов по водородосодержанию горных пород.

Теоретическое исследование распределения надтепловых нейтронов в сухой скважине (цилиндрической плотности) с диаметром  $d_0$  показало следующее:

а) при источнике, расположенном на оси плотности, плотность в ней надтепловых нейтронов убывает с расстоянием от источника медленней, чем в однородном пласте без полости, то есть при  $d_0 = 0$ ;

б) это убывание тем медленней, чем больше  $d_0$ ;

в) при фиксированной координате  $z$  радиальное распределение  $N_0(\rho)$  в плотности практически постоянно и смещение индикатора относительно оси полости не влияет на его показания.

Выравнивание распределения плотности надтепловых нейтронов вдоль полости связано с интенсивным оттоком по ней нейтронов от источника в область, где их плотность сравнительно низка.

Распределение источников тепловых нейтронов описывается плотностью замедления, которая скачкообразно меняется при пе-

реходе из одной среды в другую и имеет максимумы в средах с высоким содержанием водорода и минимумы там, где содержание водорода невелико (или его нет совсем). Диффузия тепловых нейтронов сглаживает их распределение по сравнению с распределением плотности замедления. Индикатор измерительного прибора регистрирует тепловые нейтроны, которые замедлились в окружающем его объеме с эффективным размером несколько сантиметров. Поэтому плотность тепловых нейтронов  $N_0$  около оси скважины определяется в основном плотностью замедления и слабо зависит от среднего времени жизни  $\tau$  тепловых нейтронов в пласте. Еще меньше влияют изменения  $\tau$  пласта на отношения плотности тепловых нейтронов при двух разных  $z$ .

Теоретические исследования стационарного поля гамма-излучения радиационного захвата (ГИРЗ) тепловых нейтронов в скважине показали, в частности, что регистрируемая прибором плотность ГИРЗ:

- 1) в основном обязана захвату нейтронов в измерительном приборе и колонне;
- 2) ее зависимость от влагонасыщенности пласта подобна аналогичной зависимости для плотности нейтронов, но при тех же размерах зонда слабее;
- 3) существенно меньше зависит от изменений свойств скважинной среды (обсадки, солености, скважинной жидкости), смещения прибора относительно оси скважины, чем плотность тепловых нейтронов;
- 4) сложным образом меняется при осолонении пластовой воды (в зависимости от величины пористости пласта и от энергетического порога регистрации гамма-квантов).

Теоретическое рассмотрение нестационарных распределения тепловых нейтронов и ГИРЗ показало, что если  $\tau$  пласта больше эффективного значения  $\tau$  скважины (случай, типичный для нефтяных и газовых месторождений), то асимптотический по времени ход этих распределений такой же, как и в однородном пласте без скважины. Это обстоятельство позволяет по данным измерений нестационарных полей в скважине оценивать нейтронные диффузионные параметры горных пород.

Численные методы и методы математического моделирования обычно не дают наглядных зависимостей измеряемого эффекта от

свойств различных областей среды. Эти трудности можно преодолеть следующим образом. Используя метод функций ценности [3], можно записать показание глубинного прибора  $J(z)$  в следующем общем виде:

$$J(z) = Q \exp \left\{ - \sum_{x=1}^n [\alpha_x \int_0^z G_k(\zeta) d\zeta - p_k] \right\},$$

где  $Q$  – размерная константа,  $z$  – размер зонда,  $\alpha_k$  – декремент пространственного изменения плотности потока излучения в  $k$ -й среде, окружающей глубинный прибор,  $G_k(z)$  – "ценность"  $k$ -й среды, определяющая относительный вклад в показания детектора излучения, пришедшего из  $k$ -й среды через промежуточные среды, но не испытывавшего взаимодействия в  $(k+1)$ -й среде. Величины  $p_k$  характеризуют относительные вклады излучения, обратного рассеянного в скважину  $k$ -й среды на нулевом зонде (в однократном рассеянии).

Для нейтронов фактор  $p_k$  определяется макроскопическими сечениями рассеяния и поглощения, и является растущей функцией разности  $\Delta \Sigma_k = (\Sigma_s - \Sigma_a)_k$ . Для гамма-излучения  $p_k$  определяется комптоновским рассеянием (плотность) среды и фотоэлектрическим поглощением. Используя накопленную экспериментальную информацию, а также результаты численного решения прямых задач ядерной геофизики неклассическими методами, мы имеем возможность по отдельным частным результатам выявить закономерности, определяющие зависимости факторов  $p_k$ , а также ценностей исследуемых сред от условий измерений.

Декременты  $\alpha_k$  вычисляются теоретически (3), ценности промежуточных сред вычисляются по уравнению глубинности,

$$G(r) = 1 - \exp \left[ -k(z) \int_0^r \alpha(\rho) d\rho \right],$$

в котором зависимость  $k(z)$  установлена по результатам расчетов методом Монте-Карло.

При фиксированных условиях измерений, когда изменение показаний детектора обусловлено только изменением петрофизических характеристик горной породы, влияние промежуточных сред ( $1 \leq k \leq n-1$ ) на показания удобно описать предэкспоненциальным фактором  $J_{\Delta}(z)$ .

Тогда  $J(z) = J_{\Delta}(z) \exp \left[ -\alpha_n \int_0^z G_n(\zeta) d\zeta + p_n \right]$ .

Существует размер зонда  $z_0$ , удовлетворяющий условию

$$\alpha_n \int_0^{z_0} G_n(\zeta) d\zeta = p_n,$$

поэтому

$$J(z) = J_{\Delta}(z) \exp \left[ -\alpha_n \int_{z_0}^z G(\zeta) d\zeta \right].$$

Если рассматривается метод рассеянного гамма-излучения (ГГМ), то  $\alpha \sim L_Y^{-1}$ , где  $L_Y$  — длина диффузии  $\gamma$ -излучения. Если Комптоновское рассеяние — основной механизм взаимодействия, то  $\alpha_k = \alpha \rho_k$ , где  $\rho_k$  — плотность  $k$ -й среды. Поскольку в диапазоне изменения плотности горных пород (обусловленного изменением их пористости) ценность пласта  $G_n$  (а также  $z_0$ ) не зависит от плотности, чувствительность показаний  $S$  равна

$$S(\rho, z) = - \frac{1}{J(z)} \frac{\partial J}{\partial \rho} = \alpha_n \int_{z_0}^z G_n(\zeta) d\zeta \equiv S(z),$$

и, следовательно,

$$J_{\gamma Y}(\rho, z) = J_{\Delta}(z) e^{-\rho S(z)}.$$

Анализ ценности пласта как функции размера зонда для соответствующих условий коллимации и экранирования излучения позволяет количественно оценить уменьшение влияния промежуточных сред с увеличением размера зонда.

Аналогично исследуется зависимость чувствительности показаний нейтронных методов к водородосодержанию. Ценность пласта ННМТ меняется с размером зонда по закону

$$G(z) = 1 - e^{-\beta z}.$$

Поэтому чувствительность к изменению водородосодержания растет с размером зонда по закону, близкому к линейному. Выявленный характер зависимости  $G_k$  от размера зонда позволил объяснить величину эффекта дифференциации по хлоросодержанию в нейтронном методе по тепловым нейтронам и зависимость этого эффекта от размера зонда. Таким образом, современное состояние теории методов ядерной геофизики характеризуется успешным применением классических методов и неклассических методов математической физики. Это позволило решить ряд важных прямых задач

и создало предпосылки разработки методов решения обратных. Уже накоплен столь большой экспериментальный и расчетный материал, что его анализ и обобщение стали весьма актуальны. В связи с этим самостоятельное значение приобретает разработка методов наглядного, компактного и удобного для практического использования описания результатов измерений и расчетной информации о полях излучений в системе скважина пласт.

### Л и т е р а т у р а

1. КАНТОР С.А. Теоретическое исследование стационарного распределения нейтронов в скважине на больших расстояниях от источника - сб. Ядерно-геофизические исследования в обсаженных скважинах, Труды ВНИИЯГТ, вып.23, изд. ОНТИ, ВНИИЯГТ, М., 1975, с.47-58.
2. КОЖЕВНИКОВ Д.А. Нейтронные характеристики горных пород и их использование в нефтегазопромысловый геологии. М., "Недра", 1974.
3. КОЖЕВНИКОВ Д.А. Использование функций ценности в теории и интерпретации методов ядерной геофизики. "Атомная энергия", том 38, вып.2, 1975, с.103-104.
4. ИВАНКИН В.П., КАНТОР С.А., МИЛЛЕР В.В. и др. Современное состояние вопроса о количественном определении нейтронных параметров горных пород импульсным нейтронным методом. - Тр.ВНИИЯГТ, вып.5, М., "Недра", 1969, с.28-56.
5. Методы Монте-Карло в физике и геофизике. Сборник статей под ред. И.Г.Дядькина. Изд. Башгосуниверситет, Уфа, 1973.
6. ПОЛЯЧЕНКО А.Л. Разностные методы решения прямых задач нейтронметрии в условиях обсаженных скважин и неоднородных пластов. В кн.: Ядерно-геофизические и геоакустические исследования обсаженных скважин при до разведке нефтяных и газовых месторождений. М, "Недра", 1973, с.65-86.

В. Р. Кирейтов

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВОЛНОВОЙ ОПТИКИ

В работе рассматривается задача определения параметров протяженного источника монохроматического волнового поля по заданному семейству изображений этого источника, сделанных с помощью простейшего оптического прибора (типа фотоаппарата) различным образом расположенного в окружающем пространстве; под изображением источника понимается полное поле (т.е. амплитуда и фаза) измеренное в приближении Фраунгофера на ограниченном участке задней фокальной плоскости прибора.

Указанная постановка возникла в связи с попыткой формализации стереоскопического метода (метода дешифровок) определения элементов рельефа по его фотоизображениям, применяемого в аэрофотографии.

Элементарная О.С.  $\mathcal{F} = \{\Sigma, \mathcal{E}, W, \kappa\}$  определяется в пространстве  $E^3$  заданием следующих объектов:

- а) ограниченной области  $\Sigma$  на некоторой плоскости  $\mathcal{L}$ , область  $\Sigma$  называем диафрагмой;
- в) плоскости  $\mathcal{E}$ , называемой экраном;
- с) ограниченной области  $W$ , называемой эффективной областью;

д) комплекснозначной функции  $\kappa(q)$ , определенной для всех  $q \in \Sigma$ ; функцию  $\kappa$  будем называть функцией пропускания.

Для указанных объектов должны быть выполнены условия:

1) плоскости  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{E}$  параллельны и не совпадают;

2) прямая, проходящая через центры тяжести областей  $\Sigma$  и  $W$  ортогональна к  $\mathcal{E}$ .

Если обозначить через  $q_0$  центр тяжести диафрагмы  $\Sigma$ , то набор  $\{q_0, \mathcal{E}, W\}$  определит проекционную схему (П.С.) в смысле работы [1]. Мы используем понятия центра экрана, геометрического изображения с помощью О.С. и т.д. по отношению к О.С.

$\mathcal{F}$  в том смысле, в котором эти понятия определены для соответствующей П.С.  $\{q_0, \mathcal{E}, W\}$  в [1].

Примем обозначения:  $n_{\mathcal{F}}$  - нормаль О.С.  $\mathcal{F}$ ;  $w_0$  - центр экрана;  $a_1$  - прицельный параметр (расстояние от  $q_0$  до  $\mathcal{E}$ );  $\mathcal{F}_+$  - допустимая область;  $\mathcal{F}(x)$  - геометрическое изображение подмножества  $X \subseteq \mathcal{F}_+$ . Кроме того, положим

$$\mathcal{F}_W = \{x \in \mathcal{F}_+ \mid \mathcal{F}(x) \in W\}.$$

При изучении механизма формирования изображения точечного или протяженного источника электромагнитного излучения в оптических приборах в первую очередь рассматривают упрощенную схему, в которой кроме самого источника света присутствуют:

а) непроницаемая для света перегородка с вырезанным в ней отверстием  $\Sigma$ ;

в) прозрачный или полупрозрачный для света предмет  $V$ , закрывающий отверстие  $\Sigma$  и характеризуемый функцией пропускания  $\kappa(q)$ ,  $q \in \Sigma$ ;

с) плоскость фиксации света от источника, прошедшего через отверстие  $\Sigma$  и предмет  $V$ .

Понятие элементарной О.С. можно рассматривать как формализацию такого рода простейшего оптического прибора, в котором присутствуют все элементы последнего, а закрывающий отверстие  $\Sigma$  предмет представлен своей функцией пропускания  $\kappa(q)$ . Если круглое отверстие  $\Sigma$  закрыто тонкой сферической прозрачной линзой, то, как показано, например, в [3], с точностью до постоянного множителя,

$$\kappa(q) = e^{-i \frac{k}{2f} |q_0 - q|^2},$$

где  $k$  - волновое число излучения,  $f$  - фокусное расстояние линзы. Ниже мы ограничиваемся рассмотрением О.С. с указанным видом функции  $\mu(q)$ .

Потенциальным телом будем называть пару  $(V, \mu)$ , состоящую из замкнутого ограниченного множества  $V \subseteq E^3$  и, вообще говоря, обобщенной комплекснозначной функции  $\mu$  на  $E^3$ , носитель которой  $\text{supp } \mu$  содержится в множестве  $V$ ; при этом множество  $V$  назовем носителем, а функцию  $\mu$  плотностью потенциального тела.

Скалярное поле  $u(q)$ , порожденное парой  $(V, \mu)$  вне множества  $V$ , определим формулой

$$U(q) = k \iiint_{E^3} \mu(p) G(p, q) dV_p, \text{ где } k - \text{ волновое число,}$$

$$G(p, q) = \frac{\exp ik|p - q|}{|p - q|}; \quad p, q \in E^3.$$

Приведенное линеаризованное изображение  $\frac{\partial u}{\partial \mathcal{F}}(w)$  потенциального тела  $(V, \mu)$  с помощью О.С.  $\mathcal{F} = \{\Sigma, \xi, w, \mu\}$  определим формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{F}}(w) = \iiint_{E^3} \mu(p) D(w, p) dV_p,$$

$$D(w, p) = \frac{ik^2}{2\pi} G(p, q_0) \iint_{\Sigma} \exp - ikT(p, q, w) d\Sigma_q,$$

$$T(p, q, w) = \frac{1}{d_1} \langle q - q_0, w - q_0 + d_1 \frac{p - q_0}{\langle p - q_0, n \rangle} \rangle.$$

Понятием линеаризованного изображения пользуются в оптике для описания распределения на экране света, прошедшего через диафрагму и линзу О.С. при условии, что линейные размеры элементов О.С. и источников излучения много больше длины волны излучения и, кроме того, геометрическое изображение совокупности источников излучения покрывает небольшую площадку вблизи центра экрана (т.е. при условии, что выполнены так называемые условия дифракции Фраунгофера).

Поставим следующий вопрос: какие параметры потенциального тела  $(V, \mu)$  можно определить, если известно семейство

$\{ \mathcal{J}_{\mathcal{F}^j}^j(w) \}_{j \in J}$  линеаризованных изображений тела  $(V, \mu)$  с помощью семейства О.С.  $\{ \mathcal{F}^j \}_{j \in J}$ ? Предполагается, что  $V \subseteq \mathcal{F}_+$  и функция  $\mathcal{J}_{\mathcal{F}^j}^j(w)$  задана на эффективной области  $w^j$  для каждого  $j \in J$ .

Скажем, что множество  $V$  не имеет относительно О.С.  $\mathcal{F}$  двойных точек, если из условия  $\mathcal{F}(p_1) = \mathcal{F}(p_2)$  следует  $p_1 = p_2$  для любых точек  $p_1, p_2 \in V$ .

Рассмотрим случай, когда плотность  $\mu$  сосредоточена на замкнутой гладкой кривой  $V$  и соответствующая линейная плотность не обращается нигде в 0 на  $V$ .

Кривую  $V$  назовем простой относительно О.С.  $\mathcal{F}$ , если:

- а)  $V$  не содержит двойных точек относительно  $\mathcal{F}$ ,
- в) плоская кривая  $\mathcal{F}(V) \subseteq \mathcal{E}$  не имеет самопересечений

и допускает регулярную параметризацию.

Пусть  $\mathcal{F}^j = \{ \Sigma^j, \mathcal{E}^j, w^j, \kappa^j \}_{j=1,2,3}$  три О.С.,  $(V, \mu)$  — потенциальная кривая простая относительно каждой О.С.  $\mathcal{F}^j$ ,  $j = 1, 2, 3$  и пусть выполнены условия:

$$1) \quad V \subseteq \bigcap_{j=1}^3 \mathcal{F}^j_{w^j},$$

2) векторы  $q_0^1 - p$ ,  $q_0^2 - p$ ,  $q_0^3 - p$  линейно-независимы для каждой точки  $p \in V$ .

**У т в е р ж д е н и е** I. Потенциальная кривая  $(V, \mu)$  однозначно определяется заданием трех своих изображений

$\{ \mathcal{J}_{\mathcal{F}^j}^j(w) \}_{j=1,2,3}$  и некоторой точки  $p_0 \in V$ .

Предположим, что плотность  $\mu$  сосредоточена на гладкой замкнутой поверхности  $V$  и обозначим через  $S(\mu)$  множество всех точек поверхности  $V$ , в которых соответствующая  $\mu$  поверхностная плотность отлична от 0; будем считать, что  $S(\mu)$  — связное множество.

Пусть  $\mathcal{F}^j = \{\Sigma^j, \xi^j, w^j, \kappa^j\}$ ,  $j = -$  три О.С. и пусть выполнены условия:

$$а) S(\mu) \subseteq \bigcap_{j=1}^3 \mathcal{F}^j,$$

в) тройка векторов  $q_0^1$ -р,  $q_0^2$ -р,  $q_0^3$ -р линейно-независима для любой точки  $p \in S(\mu)$ ;

с) множество  $S(\mu)$  не содержит двойных точек относительно каждой из О.С.  $\mathcal{F}^j$ .

У т в е р ж д е н и е 2. По заданным изображениям  $j(w)$ ,  $j=1, 2, 3$  часть  $S(\mu)$  потенциальной поверхности  $(V, \mu)$  и плотность  $\mu$  на  $S(\mu)$  определяются однозначно, лишь только фиксированное положение хотя бы одной точки  $p_0 \in S(\mu)$ .

### Л и т е р а т у р а

1. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., КИРЕЙТОВ В.Р. О точках ветвления оптических гиперповерхностей. — ДАН СССР, т.221, № 5, 1975.
2. БОРН М., ВОЛЬФ Э. Основы оптики. М., "Наука", 1973.
3. ГУДМЕН Д. Введение в Фурье-оптику. М., "Мир", 1970.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ И МОДУЛЯ СДВИГА  
СРЕДЫ ПО СТОЯЧИМ  $SH$  - ВОЛНАМ НА ЕЁ  
ПОВЕРХНОСТИ

1. Пусть в упругом полупространстве модуль сдвига  $\mu$  и плотность  $\rho$  зависят только от глубины  $x$ . Для такой среды рассмотрим уравнение:

$$\mu(x) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \mu'(x) \frac{\partial u}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Это уравнение описывает крутильные колебания полупространства, которые симметричны относительно оси  $x$ .

Будем считать, что источник колебаний расположен на поверхности. Его действие описывается краевым условием

$$\mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} = F(r) e^{i\omega t}$$

на поверхности  $x = 0$ . Из этой формулы видно, что источник считается гармоническим.

2. Задача, которую мы решаем, состоит в следующем: пусть на поверхности  $x = 0$  мы знаем всё - колебания  $u(r, 0) e^{i\omega t}$ , источник  $F(r) e^{i\omega t}$ , модуль сдвига  $\mu(0)$  и его производную  $\mu'(0)$ . По этим данным мы хотим найти параметры среды  $\rho(x)$  и  $\mu(x)$ .

Функция  $V_-(x, y) = 0$  при положительных  $x$  и определяет  $q(x)$ , так как  $V_-(x, 0) = -\int_0^x q(t) dt$ . Введём функцию  $R(t)$ , связанную с  $S(\lambda)$  соотношением  $S(\lambda) = \int_0^{\infty} R(t) e^{-2\lambda t} dt$ .

Иначе говоря,  $R(t)$  можно получить из  $S(\lambda)$  с помощью обратного преобразования Лапласа.

Оказывается, что  $R(t)$  и  $V_-(x, y)$  связаны друг с другом интегральным соотношением

$$R(x+y) + \int_{-(x+y)}^0 R(x+y+t) V_-(x, t) dt + V_-(x, y) = 0,$$

где  $0 \leq y \leq x$ .

Теперь задача свелась к определению  $V_-(x, y)$  по  $R(t)$  из этого уравнения.

4 шаг. Решение интегрального уравнения.

Это уравнение нелинейно, но можно доказать, что его можно решить методом итераций, по крайней мере, для некоторого интервала  $[0, x_0]$ . Таким образом, на этом интервале можно найти  $q(x)$ .

Единственность определения  $q(x)$  при произвольном  $x$  можно доказать, определив  $w(x_0, \lambda)$  и  $w'_x(x_0, \lambda)$  и повторив предшествующие рассуждения со второго шага.

5. Итак, изложен способ определения плотности и модуля сдвига горизонтально однородной среды по гармоническим колебаниям её поверхности на двух частотах при известных источниках, вызывающих эти колебания.

Эта задача решалась несколько лет назад как чисто теоретическая. Но сейчас проводятся опыты по зондированию среды с помощью источников гармонических крутильных колебаний. Поэтому изложенный алгоритм может оказаться полезным при решении практической задачи.

Однако для обоснованного применения этого алгоритма необходимо исследовать его вычислительные возможности: точность, практическую устойчивость, разрешающую способность, время работы программы на ЭВМ.

Дополнительные трудности как теоретического, так и прак-

3. Оказывается, что по гармоническим колебаниям на фиксированной частоте эти параметры определить нельзя. Определяется

$$\text{лишь функция } q_{\omega}(x) = \omega^2 \frac{\rho(x)}{\mu(x)} - \frac{(\sqrt{\mu(x)})''}{\sqrt{\mu(x)}}.$$

Если же известны колебания среды на двух частотах, то ясно, что можно определить по отдельности  $\rho(x)$  и  $\mu(x)$ .

4. Опишем, в основных чертах, алгоритм решения этой задачи.

1 шаг. Сведение уравнения в частных производных к уравнению вида

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + (q(x) - \lambda^2)w = 0.$$

При этом сведении учитывается гармоничность колебаний (исключается время), функция  $u(r, x)$  заменяется на новую функцию  $v(r, x)$  (пропадает член с первой производной) и производится преобразование Бесселя из  $r$  в  $\lambda$ .

2 шаг. Введение функции  $S(\lambda)$ . По колебаниям поверхности  $u(r, 0)$  и по источнику  $F(r)$  теми же преобразованиями, которые использовались на I-м шаге, определяются  $w(0, \lambda)$  и  $w'_x(0, \lambda)$ .

Построим по ним функцию

$$S(\lambda) = \frac{\lambda w(0, \lambda) + w'_x(0, \lambda)}{\lambda w(0, \lambda) - w'_x(0, \lambda)}.$$

Теперь задача сведена к задаче построения  $q(x)$  по  $S(\lambda)$ .

3 шаг. Основное интегральное уравнение.

Рассмотрим решение  $y_-(x, \lambda)$  уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\tilde{q}(x) - \lambda^2)y = 0, \quad \text{где } \tilde{q}(x) = \begin{cases} q(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

такое, что  $y_-(x, \lambda) = e^{\lambda x}$  на отрицательной полуоси. Оно представимо в виде

$$y_-(x, \lambda) = e^{\lambda x} \left( 1 + \int_0^{\infty} B_-(x, y) e^{2\lambda y} dy \right).$$

тического характера возникают, если отказаться от ограничений, наложенных на параметры среды. Так, например, мы вынуждены были предположить, что модуль сдвига  $\mu(x)$  — непрерывная, кусочно-гладкая функция. Интересно было бы решить задачу для среды с разрывной функцией  $\mu(x)$ .

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИНТЕРПРЕТАЦИИ  
И ОПТИМИЗАЦИИ В ЯДЕРНОЙ ГЕОФИЗИКЕ

Интерпретация данных методов скважинной ядерной геофизики и обоснование оптимальных условий измерений и параметров аппаратуры в настоящее время базируется преимущественно на результатах многолетних экспериментальных исследований на моделях пластов. Этот эмпирический подход, как известно, встречается со значительными трудностями, связанными со сложностью построения моделей, особенно гетерогенных; практической невозможностью обеспечить достаточно большое число точек по пористости, газонасыщенности, плотности, структуре и химическому составу скелета пласта; изменчивостью параметров моделей во времени и трудностью их контроля; плохой сопоставимостью результатов, полученных на разных моделях, либо в разное время, либо разными приборами (и авторами!). С другой стороны, в последнее десятилетие значительно расширилось число объектов и круг задач, изучаемых методами ядерного каротажа; резко возросли требования к точности и массовости интерпретации, а также к параметрам аппаратуры; появились новые модификации методов каротажа. В этих условиях для решения интерпретационных методических, аппаратурных задач с необходимой быстротой, точностью и полнотой метод физического моделирования, как основной, стал неэффективен и должен быть полностью или частично

заменен теоретическим моделированием. Вероятнее всего, основная масса и характер зависимостей должны быть получены теоретически и нормированы (привязаны) к экспериментальным данным в небольшом числе точек пространства параметров задачи каротажа.

В настоящей работе рассматриваются методы и результаты численного решения задач теории, интерпретации и оптимизации в области нейтронного каротажа (НК) нефтяных и газовых скважин. Систематическая разработка этого направления проводится в Институте ядерной геофизики и геохимии (Москва) с 1968г. и включает решение следующих задач.

I. Создание физико-математического и вычислительного аппарата теории НК, удовлетворяющего одновременно требованиям точности, быстродействия и универсальности;

II. Получение с его помощью достаточно полной системы решений прямых задач НК ("расчетных палеток"), в том числе для неоднородных пластов;

III. Решение обратных задач НК, т.е. построение алгоритмов определения нейтронных параметров пласта;

IV. Машинный анализ всей совокупности полученных расчетных данных и решение методических вопросов оптимизации, информативности и точности методов НК.

Одна из особенностей задач теории НК состоит в том, что, исключая наиболее идеализированные постановки (однородная и двухслойная цилиндрическая среда) их решение невозможно либо слишком сложно получить классическими методами математической физики. Кратко рассмотрим методы и результаты решения задач I-IV.

I. Вычислительный аппарат. Создан комплекс многогрупповых конечно-разностных программ РУМ расчета показаний всех основных методов нейтронного каротажа (НК-нт, НК-т, НК, НК<sup>х</sup>, ИННК, ИНГК, МНК, КК<sup>х</sup>) в обсаженных и необсаженных скважинах в условиях однородных и слоисто-неоднородных пластов [1]. Геометрия в общем случае представляет произвольное пересечение системы вложенных цилиндрических поверхностей и системы нормальных к ним плоскопараллельных поверхностей, обладает осевой симметрией, число зон не ограничено. Перенос и замедление быстрых нейтронов рассматривается в модели "выведение-диффузия" в рамках

х) МНК - Многозондовый нейтронный каротаж; КК - кислородный каротаж,

многогруппового транспортного приближения. Нейтронные групповые константы горных пород и конструктивных материалов рассчитываются специальной программой КОИГ на основе советской 26-групповой системы АББН [2]. Перенос захватного гамма-излучения рассчитывается методом фактора накопления по способу, описанному в "защитной" программе SAVINE [3].

Разностная аппроксимация краевых задач НК получена применением интегро-интерполяционного метода в формулировке Марчука [4]. Точные граничные условия на внешних границах сеточной модели оказываются нелинейными и неустойчивыми, они приближаются граничными условиями 3-го рода. Стационарные разностные уравнения НК решаются методом "оптимальной последовательной верхней релаксации" (ОПВР) Янга-Франкела с оценкой минимального собственного значения по норме невязки в процессе счета

Нестационарные уравнения интегрируются с помощью "шахматной" схемы Саульева-Гарлея со специальным режимом измерения временного шага. Программы записаны в кодах для БЭСМ-4 и на Фортране для БЭСМ-6. Физические и счётные характеристики алгоритмов оптимизировались с помощью машинных экспериментов. Время счета стационарных НК на БЭСМ-6 составляет 20-30сек/вар, импульсных НК 50-60сек/вар. Счетная погрешность, определенная по правилу Рунге, равна  $C_1 h^2 - C_2 \tau^a$ ;  $C_1 > 0$ ;  $1,5 \leq a \leq 2$ , что дает на сетке с  $\sim 10^3$  узлами 0,2-3%. Она падает с ростом расстояния от источника  $z$  или времени после импульса  $t$ . Комплекс РУМ успешно апробирован путём сопоставления с данными Монте-Карло и экспериментов на моделях пластов десятков зависимостей показаний НК от пористости, нефти и газонасыщенности пласта, параметров скважины, длины зонда  $z$  и времени задержки  $t$ .

**П. П р я м ы е з а д а ч и .** С помощью комплекса РУМ исследованы пространственные  $\phi(\vec{r})$  и пространственно-временные  $\phi(\vec{r}, t)$  распределения полей частиц в разнообразных пластовых и скважинных условиях, позволившие лучше разобраться в физике НК. На основе РУМ получена система расчётных палеток для интерпретации данных НК в нефтяных и газовых скважинах в виде зависимостей показаний  $\phi$  или измеряемых функционалов  $F[\phi]$  от  $K_{п}$ ,  $K_{г}$ ,  $K_{н}$ ,  $\Sigma_a$  и т.д. Всего было промоделировано 4800 условий измерения: по литологии (песчаник, известняк, доломит); по

пористости ( $K_{\Pi} = 0, 1, 2, 5, 10, 20, 40\%$ ); по нефтенасыщенности или минерализации пластовой воды; по газонасыщенности; по типу скважин (обсаженная, необсаженная); по диаметру, конструкции и заполнению скважины; по методам НК (7 методов). Производится дальнейшее накопление и систематизация материала с целью создания на его основе полного "Альбома расчётных палеток НК", а также использования его для решения обратных и оптимизационных задач НК (п.п. III и IV).

Изучено поведение диаграмм НК в слоисто-неоднородных пластах следующей структуры: граница пластов, пропласток, тонкопереслаивающийся пласт. Рассмотрены зависимости показаний от размеров неоднородностей, их водородосодержания, насыщенности и нейтронной контрастности сред. Найдены условия, при которых измерения дают максимум информации о структуре и параметрах неоднородного пласта.

III. О б р а т н ы е з а д а ч и. Они состоят в определении коэффициентов  $D$  и  $\Sigma_a$  дифференциальных уравнений диффузии нейтронов тепловой группы для пласта (реже - для одной из зон скважины), а также асимптотической длины релаксации замедлившихся нейтронов  $l_{as}$ . Для решения обратных задач НК нами разработан и применяется методический подход, названный методом квазиодномерных функционалов (КОФ) [5]. Методика КОФ сводится к решению определенной последовательности более простых задач:

а) выбирается "минимальная" модель НК, то есть упрощённая физико-геометрическая постановка, которая сохраняет правильную зависимость решения от искомым нейтронных характеристик пласта (обозначим их  $\omega_1$ ) и допускает нахождение решения аналитическими методами. Краевая задача НК для "минимальной" модели решается методами интегральных преобразований;

б) найденные распределения частиц для "минимальной" модели  $\Phi(\vec{r}, t | \omega_1)$  в определённых областях (как правило, на пространственной или временной асимптотике) аппроксимируются явными и простыми выражениями. Последние обращаются относительно искомым параметров  $\omega_1$ . Выбор закона обращения фиксирует функционалы от измеряемых показаний, которые определяют значения искомым коэффициентов с точностью до многомерной аддитивной поправки:

$$F_1[\varphi^*(\vec{r}, t)] = \omega_1 + \Delta_1^*(\vec{r}, t | \omega_1);$$

в) возвращение к точной постановке задачи: проверяем правильность квазиодномерного представления найденных функционалов на решениях  $\varphi(\vec{r}, t)$  и численными методами (с помощью программ РУМ) рассчитываем семейство точных поправок  $\Delta_1$ ;

г) искомые коэффициенты  $\omega_1$  находятся из решения системы уравнений, связывающих теоретические и экспериментальные значения функционалов:  $\omega_1 + \Delta_1(\vec{r}, t | \omega_1) = F_1[\varphi_{\text{эксп}}]$ . Решение получается, в зависимости от условий измерений, либо в явном виде по теории возмущений, либо в виде итерационной процедуры на ЭВМ.

Таким образом, решение обратных задач НК сводится к применению найденных функционалов в качестве алгоритмов обработки данных измерений и внесению в экспериментальные значения функционалов априори рассчитанных теоретических поправок.

Метод КОФ успешно применен для определения ряда нейтронных параметров пласта: сечения захвата тепловых нейтронов  $\Sigma_a$  по данным ИННК и ИНГК, коэффициента диффузии тепловых нейтронов  $D$  по данным ИННК, величины  $l_{as}$  по данным МНК. Подробно исследована точность, помехоустойчивость и условия применимости полученных решений обратных задач. С их помощью были определены параметры  $\Sigma_a$  и  $D$  многих моделей природных пластов в СССР, которые в пределах ошибок совпали с результатами оценок  $\Sigma_a$  и  $D$  по данным химического анализа; всего было проведено свыше 40 сопоставлений. Погрешность алгоритма определения  $\Sigma_a$  без учета статистической ошибки измерений равна 1-3%, для  $D$  - 5-10%. Алгоритмы определения  $\Sigma_a, D$  и  $l_{as}$  реализованы в аппаратуре НК и опробованы на нескольких нефтяных месторождениях.

Решена одна обратная задача для неоднородных пластов - определение  $\Sigma_a$  для пропластков мощностью  $\alpha > 15-20$  см по измерениям ИННК.

**Методические задачи.** Для обработки и анализа всей совокупности геофизических зависимостей, полученных теоретически и дополненных недостающими экспериментальными данными, разработан комплекс анализирующих программ ДЕЛЬТА. Он вычисляет полные и парциальные погрешности определения параметров пласта отдельными методами НК. Если  $m$  - параметр, оп-

ределяемый путем измерения функционала  $F[\varphi]$ , а  $p_1$  - те входные параметры задачи, которые известны с неточностями  $\delta p_1$ , то полная ошибка вычисляется по формуле  $\Delta m = \left( \frac{\partial F}{\partial m} \right)^{-1} \cdot (\delta_{ст}^2 + \delta_{ан}^2 F + \int_1 \left( \frac{\partial F}{\partial p_1} \right)^2 (\delta p_1)^2)^{1/2}$ , где  $\delta_{ст} F$ ,  $\delta_{ан} F$  - статистическая и аппаратурная компоненты погрешности. Чувствительности к помехам  $\frac{\partial F}{\partial p_1}$  и к полезной информации  $\frac{\partial F}{\partial m}$  рассчитываются исходя из решений прямых задач  $\varphi(m, p_1)$ , которые получены по программам РУМ и вводятся как исходные данные в ДЕЛЬТУ. Зависимости показаний от эксцентриситета колонны учитываются по экспериментальным данным. Расчет значений  $\Delta m$  для разных методов НК позволяет оценить границы их информативности и сравнительную эффективность, а минимизация функции  $\Delta m(z, t)$  позволяет найти оптимальные параметры аппаратуры НК и режим измерений. Обе эти группы задач полностью решены для методов ИННК и ИНГК, где  $m = \Sigma_a$  [6].

#### Л и т е р а т у р а

1. ПОЛЯЧЕНКО А.Л. Разностные методы решения прямых задач нейтронотрии в условиях обсаженных скважин и неоднородных пластов. Тр. ВНИИЯГТ, вып. I4, М., ОНТИ ВНИИЯГТ, 1973, с.65-86.
2. АБАГЯН Л.Л., БАЗАЗЯН Н.О., БОНДАРЕНКО И.И., НИКОЛАЕВ М.Н. Групповые константы для расчёта ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1964.
3. НИКС П., ПЕРЛИНИ Г., ПОНТИ К. SAVINE - программа расчёта одномерной защиты с использованием экспериментальных сечений выведения. -Сб. Физические проблемы защиты реакторов. М., Атомиздат, 1971, с.5-23.
4. МАРЧУК Г.И. Методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат 1961.
5. ПОЛЯЧЕНКО А.Л. Метод квазиодномерных функционалов решения обратной задачи для уравнения переноса в неоднородной среде. ТР. IV Все-союз. конф. по тепло- и массопереносу, Минск, изд. ИТМО, 1972, т.8, с.377-386.

6. ПОЛЯЧЕНКО А.Л., ЦЕЙТЛИН В.Г. Оптимизация режимов измерения и параметров аппаратуры импульсного нейтронного каротажа.—Сб. Ядерно-геофизические и геоакустические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых М., ОНТИ ВНИИЯГГ, 1975, с. 143-160.

МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ  
ЯДЕРНОГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

I. Введение

Реалистические задачи переноса нейтронов и  $\gamma$  - квантов в условиях ядерногеофизических методов (я.г.м.) трудны для численного решения из-за сложного вида интегральных и дифференциальных сечений различных взаимодействий, сложной "геометрии" и многоэлементного состава сред. Основным численным способом решения этих задач являются сейчас методы Монте-Карло. Хотя, в принципе, каким-либо из методов Монте-Карло можно решить любую задачу, в практическом плане с учетом затрат выбор подходящего (об оптимальности не приходится и говорить) метода представляет большие трудности. В ВЦ СО АН СССР по инициативе академика Г.И.Марчука и профессора Е.М.Филиппова, начиная с 1965 г., ведутся расчеты методами Монте-Карло задач нескольких я.г.м.: ГТК, ГН и ИНК ([1], [2], [3], [4]). Мы стремились изложить в статье некоторый опыт и взгляды на данный вопрос.

Будем использовать обозначения:

$x \equiv (\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  - точка пространства В координат, направлений и энергий,  $\Phi(x)$  - дифференциальный поток частиц,  $f(x)$  - плотность столкновений,

$$f(x) = Kf(x) + f_1(x), \quad \Phi(x) = \bar{K}\Phi(x) + \Phi_1(x)$$

- интегральные уравнения для  $f(\cdot)$  и сопряженное для функции "ценности"  $\Phi(\cdot)$ ,  $K$  - интегральный оператор с ядром

$$k(x', x), \quad Kf(x) \equiv \int_{(R)} k(x', x)f(x')dx', \quad \int_{(R)} f_1(x)dx = 1,$$

$P$  - цепь Маркова с переходной плотностью  $p(x', x)$  и плотностью начальных состояний  $p_1(x)$ ,  $\omega = x_1, \dots, x_n$  - траектория цепи  $P$ ,  $n$  - случайная длина цепи,  $q_1(x_1, \dots, x_n)$  - "веса",  $\xi_1(\omega) = \sum_{l=1}^n q_l(x_1, \dots, x_l)\Phi_1(x_l)$  - оценка "по столкновениям",

$$I = \int_{(R)} f(x)\Phi_1(x)dx = \int_{(R)} f_1(x)\Phi_1(x)dx + \sum_{l=1}^{\infty} \int_{(R)} K^l f_1(x)\Phi_1(x)dx \quad (1.1)$$

- вычисляемый функционал и его запись в виде суммы ряда.

В данной работе не приводятся конкретные численные результаты, ее цель - описать особенности методов Монте-Карло при их получении. Тем не менее для определенности заметим, что вычисляемая величина представляет собой функцию многих переменных: характеристик пласта, скважины, источника частиц, условий измерения и геометрических параметров.

## 2. Причина трудностей простого метода и априорная информация

Обозначим через  $P_0$  цепь Маркова  $P$  с  $p(x', x) = k(x', x)$  и  $p_1(x) = f_1(x)$ , то есть цепь, имитирующую физическое распространение частиц, и будем называть простым методом пару  $(P_0, \xi_1)$ . Простой метод является естественным "начальным" методом при вычислениях. Во многих случаях оказывается, что он обладает большой дисперсией, что не позволяет за приемлемое время получить необходимую точность. Причина в том, что в трудных для простого метода задачах основной вклад в сумму  $I$  привносит определенный тип "цепочек"  $[x_1, \dots, x_n]$  (то есть область интегрирования в  $l$ -м члене  $I, I$  в определенной  $(L_1 < l < L_2)$  группе членов ряда  $(I, I)$  и в то же время вероятность траекторий, содержащих эти "цепочки", мала.

Если имеется какое-либо достаточно хорошее приближение  $\bar{f}(x)$  к функции ценности  $f(x)$  задачи, то в общем плане известно, как строить более эффективные, нежели простой, методы. Можно считать, что простой метод осуществляет "выборку по важности", если положено  $\bar{f}(x) = \text{const}$  на  $(R + \bar{a})$ , где  $\bar{a}$  - состояние, в котором оказываются частицы после обрыва цепи.

Достижение определенного, хотя бы и грубого, понимания возможностей простого (или "близкого" ему) метода для основных задач я.г.м. является, на наш взгляд, необходимой и важной проблемой.

### 3. Зависимые испытания

Исключительно полезным приемом в рассматриваемых задачах для получения кривых от плотности и влажности горной породы оказались "зависимые испытания". Этот способ имеет два варианта: либо для построения траекторий для различных значений параметра используются одни и те же последовательности псевдослучайных чисел, либо для различных значений параметра используются одни и те же траектории. Оба варианта имеют и достоинства и недостатки; 1-й - более простой и универсальный, 2-й позволяет в некоторых задачах получить больший выигрыш в грузоемкости; наконец, возможно одновременное применение обоих, когда части кривой вычисляются по 2-му варианту, а корреляция частей достигается 1-м.

Известный стандартный момент в 1-м варианте - использование 2-х различных датчиков псевдослучайных чисел; мы используем один датчик (метод Лемера, или метод вычетов), но каждую новую траекторию начинаем с числа с фиксированным номером  $\gamma \times h$ , где  $\gamma$  - номер траектории,  $h$  - "шаг" (в [3] выбиралось, например,  $h = 100$ ). Полезное усиление "Зависимых испытаний" предложил И.Г.Дядькин ([5]): коррелировать каждое столкновение траекторий для различных значений параметра.

2-й вариант способа зависимых испытаний для случая, когда вычисляется вероятность, исследовался в [6], [7], но подмеченная тенденция справедлива, по-видимому, и в общем случае. Пусть  $I = I(\rho)$  - вычисляемая вероятность, зависящая от параметра  $\rho$  и пусть траектории моделируются при значении  $\rho_0$  параметра; пусть  $D(\rho/\rho_0)$  - дисперсия вычисления  $I(\rho)$  по траекториям, построенным при значении  $\rho_0$ . Доказано, для того чтобы

$D(\rho/\rho_0) < D(\rho/\rho)$ , необходимо  $I(\rho_0) > I(\rho)$ . Если  $\rho$ ,  $\rho_0$  - плотности, то изучение свойств  $D(\rho/\rho_0)$  как кривой от  $\rho_0$  эквивалентно изучению поведения дисперсии при изменении распределения длины пробега. Установлено: существует интервал значений  $\rho_0$ , при значениях из которого  $D(\rho/\rho_0) < D(\rho/\rho)$ ; вне этого интервала  $D(\rho/\rho_0) \geq D(\rho/\rho)$ . Эти результаты находятся в полном соответствии с "Выборкой по важности". В [7] приводятся численные примеры отношения  $d = D(\rho/\rho_0)/D(\rho/\rho)$  как функции  $\rho/\rho_0$ ; в этих примерах отношение  $d$  достигало 0.1.

В [1] все плотности в интервале ( $1,5 \text{ г/см}^3 - 3 \text{ г/см}^3$ ) моделировались по плотности  $2.1 \text{ г/см}^3$ . Перенос нейтронов характеризуется значительно большим числом соударений в траектории; вследствие этого веса испытывают сильные флуктуации. Возможны как "машинный" ноль, так и переполнение разрядной сетки вычислительной машины. Интервал значений параметра  $\rho_0$  (плотности и влажности), в котором  $D(\rho/\rho_0) < D(\rho/\rho)$ , в случае нейтронов относительно уже случая  $\gamma$  - квантов. Поэтому 2-й вариант "зависимых испытаний" применим в случае нейтронов для относительно узкого интервала значений  $\rho$ . Так, в [3] траектории для влажности  $m = 1\%$  использовались лишь для вычислений с  $m = 0\%$ ,  $1\%$ , с  $m = 9\%$  для вычислений с  $m = 7,5\% - 10\%$ , с  $m = 18\%$  для вычисления с  $m = 15 - 20\%$ .

#### 4. Малые объемы и поток в точке

В настоящее время еще не существуют универсальные практически отработанные методы с конечной дисперсией для вычисления интегрального потока  $\Phi(\vec{r})$  частиц в точке;  $\Phi(\vec{r}) = \iint_{E_1}^{E_2} d\vec{\Omega} \int dE$ .  $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$ . Для приближения к  $\Phi(\vec{r})$  можно вычислять средний интегральный поток по области (D) с достаточно малым объемом V. Задача вычисления

$$\iiint_{(D)} d\vec{r} \Phi(\vec{r}) \equiv V \cdot \bar{\Phi}, \quad (4.1)$$

по достаточно малой области имеет и самостоятельный интерес. Применение способа "математических ожиданий" освобождает вычисление (4.1) от трудностей, связанных с малым объемом V ([8]). Для областей (D) в форме сферы и цилиндра и даже для нестационарных задач конкретные способы выборки в (D) разработаны в [4].

Способ "математических ожиданий" требует большого числа операций на I испытание нежели способ непосредственного подсчета числа столкновений в (D); значительная часть времени идет на вычисление экспоненты. Можно проводить "рулетку" с тем, чтобы не всегда вычислять экспоненты; при этом  $\ln(\cdot)$  равномерно распределенного на (0, I) случайного числа можно использовать тот же, что и для розыгрыша последующей длины свободного пробега. Некоторые данные для ИННК, позволяющие уяснить, с каких объемов V способ "математических ожиданий" становится эффективнее, приводится [4]; для вычисления среднего потока тепловых нейтронов во временном окне шириной 100 мксек это имеет место уже при  $V = \frac{2}{3} \pi \cdot 2^3 \cdot \text{см}^3$ .

### 5. Моделирование "вдали" от области источник-детектор

В задачах я.г.м. можно выделить "дальнюю" зону вдали от области "источник-детектор". Функция ценности частиц в дальней зоне мала. Стандартный прием уменьшения трудоемкости в подобных ситуациях [9] - "рулетка", а именно, она проводится в дальней зоне при пересечении заранее фиксированной поверхности или поверхностей. Этот прием использовался в [1]. Но в [2] - [4] выигрыш времени за счет "неинтересных" частиц проводился просто увеличением вероятности поглощения в дальней зоне; по существу, это - также "рулетка". Насколько выбор параметров "рулетки" влияет на эффективность? В расчетах в [4] уменьшение трудоемкости за счет некоторого подбора параметров достигло 1,5 раз.

6. Ставшая уже привычной - трудность для Монте-Карло в переносе - прохождении частиц через большие толщины. Причина, выявленная еще в начале 50 г.г. ([10]) - экспоненциальный спад поля частиц с расстоянием. Предлагались (см., например, обзор [11]) различные способы преодоления трудности - "экспоненциальное преобразование", увеличение длин пробегов, расщепление и их комбинации, являющиеся, по существу, разными вариантами осуществления "выборки по важности" с различными функциями  $\bar{\varphi}(\cdot)$  экспоненциального типа. В [2], [3] при вычислении выхода нейтронов из глубоких слоев горной породы в некоторой полосе, отделенной от поверхности раздела, использовалось эксп. цепич-

альное преобразование. В [12], [13] рассчитывалось глубокое проникновение  $\gamma$  - квантов в условиях ГТК.

7. Помимо трудностей с "малыми объемами" и "большими толщинами" характерными для задач переноса вообще, в задачах я.г.м. появляются трудности еще 2-х типов: при расчетах потоков нейтронов низкой энергии при малых пористостях и при расчетах потоков нейтронов в ИННК при временах  $\geq 700$  мксек. Способы преодоления последних еще не описаны.

#### 8. Стандартные блоки и стандартные программы.

Привлекательной была идея иметь набор элементарных блоков, из которых можно было бы компоновать любую программу переноса частиц. Однако эта идея не воплотилась и постепенно трансформировалось и трансформируется в накопление алгоритмов (в узком смысле как последовательности действий) и алгоритмов на языке высокого уровня ("Алгол", "Фортран", "Альфа") для описания типичных элементов, например, акта рассеяния, розыгрыша длины пробега в системе коаксиальных цилиндров и т.д. В ВЦ СО АН ряд типичных "элементов" описан на языке "Альфа". Алгоритмы, а именно, стандартные алгоритмы для типичных "элементов" являются своего рода полуфабрикатами, требующими достаточной квалификации для обращения с ними. Они не заменяют стандартных программ, когда пользователь знает лишь входные и выходные характеристики программ. На данный момент, насколько нам известно, в ГФАП имеется лишь одна стандартная программа [1а] по методам Монте-Карло в я.г.м..

#### 9. Точность вычислений

В силу природы методов Монте-Карло, даже не касаясь неточностей ядерных данных, вряд ли имеет смысл добиваться сверхвысоких точностей вычислений. Опыт показывает, что на данный момент вычисления с 10% стандартной погрешностью можно считать хорошими. Но в задачах, которые можно назвать базовыми, или эталонными, для того или иного я.г.м., следует, на наш взгляд, иметь точности более высокие, скажем, 5%. К необходимости "назначения" базовых задач приводят потребности развития и сравнения методов, отладки и сравнения различных, в том числе и стандартных, программ.

Автор благодарен коллегам, и в особенности, А.А.Морозову,

И.Г.Дядькину и В.Н.Старикову за неоднократные обсуждения затронутых в работе вопросов.

### Л и т е р а т у р а

1. ХИСАМУТДИНОВ А.И. Программа "ГТК" и ее применение для исследования возможностей двухлучевого  $\gamma$ - $\gamma$ -каротажа плотности.- Сб. Методы Монте-Карло в физике и ядерной геофизике, Изд. БГУ, УФА, 1973.
- 1а. Программа "ГТК". Инф. бюлл. "Алгоритмы и программы", вып.2, № 65, 1974.
2. МОРОЗОВ А.А., ХИСАМУТДИНОВ А.И. Расчет методом Монте-Карло распределения фотонейтронов. "Атомная энергия", 29, вып.6, 1970.
3. МОРОЗОВ А.А., ХИСАМУТДИНОВ А.И. Численное исследование зависимости распределения фотонейтронов от параметров горной породы. "Геология, геофизика", № 5, 1975.
- 3а. О глубинности и радиальной зависимости фотонейтронного опробования бериллиевых руд.- Сб. Математические проблемы геофизики, вып.5, ч.1, Изд-во ВЦ СО АН, 1974.
4. МОРОЗОВ А.А., ХИСАМУТДИНОВ А.И. Способ математических ожиданий для сферических и цилиндрических областей в задачах переноса нейтронов.- Сб. Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений, изд-во ВЦ СО АН, 1976 (в печати).
5. ДЯДЬКИН И.Г. Методы Монте-Карло в физике и геофизике.- Сб. Методы Монте-Карло в физике и ядерной геофизике, Изд-во БГУ, УФА, 1973.
6. ХИСАМУТДИНОВ А.А. К уменьшению дисперсии оценки вероятности методом Монте-Карло. ЖВМ и МФ, 10, № 6, 1970.

7. ХИСАМУТДИНОВ А.И. Поведение дисперсии при изменении распределения длины пробега. ЖВМ и МФ, 12, № 1, 1972.
8. ХИСАМУТДИНОВ А.И. Об эффективности метода математических ожиданий. ЖВМ и МФ, 7, № 4, 1967.
9. КАНН Н. Use of different Monte Carlo sampling techniques. Monte Carlo methods (Proc. of a Symposium held in 1954). New York, J. Wiley and Sons, Inc., 1956, 146-191.
10. КАНН Н. "Nucleonics", 6, N 5 - N 6, 1950.
11. ЗОЛОТУХИН В.Г. Решение задач переноса излучения методом Монте-Карло. Препринт ФЭИ, № 91, Обнинск, 1967.
12. ГУЛИН Ю.А., ВЕЛИЖАНИН В.А., ДЯДЬКИН И.Г. Расчет методом Монте-Карло зависимости показаний гамма- гамма-каротажа от плотности породы и толщины глинистой корки для зондов до 1 метра.- Сб. Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1974.
13. ХАМАТДИНОВ Р.Т. Возможность решения задач ГТК методом Монте-Карло для больших расстояний от источника. "Атомная энергия", 40, № 3, 1976.

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ГЛАДКОГО ВОСПОЛНЕНИЯ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАНЫХ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ В $R^n$

В этом сообщении мы опишем один метод гладкого восполнения сеточных функций, заданных на многомерных нерегулярных сетках, при этом значения функций известны с ошибкой, а области, в которых требуется осуществить восполнение, могут иметь "сложную" границу. Изложение следует работе В.А.Цецохо, А.С.Белоносова, А.В.Белоносовой [1].

В основе метода лежит хорошо известное в анализе понятие разбиения единицы.

Говорят, что последовательность  $(\varphi_i)$  функций класса  $C^r(V)$ ,  $V \subset R^m$  - открытое, образует разбиение единицы на множестве  $\Omega \subset V$ , если  $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$  и  $\sum_i \varphi_i(x) = 1$  для всех  $x \in \Omega$ .

Обычно требуется, чтобы функция  $\varphi_i$  обращалась в нуль вне заданного открытого множества  $V_i \subset V$ . Последовательность  $(V_i)$ , очевидно, покрывает множество  $\Omega$  и разбиение единицы  $(\varphi_i)$  называют подчиненным этому покрытию.

Для прикладных целей естественно строить локально-конечные покрытия стандартными множествами:  $m$  - мерными интервалами или шарами. Центры и диаметры этих множеств должны выби-

ратся в соответствии со свойствами приближаемой функции  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . В дальнейшем мы будем рассматривать покрытия  $m$ -мерными кубами, а подчиненные им разбиения единицы строить следующим образом.

Обозначим через  $\xi^{(i)}$  центр куба  $V_i$ , а через  $\delta^{(i)}$  - длину его ребра. Зададимся (стандартной) функцией  $\psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  класса  $C^r(\mathbb{R}^m)$  такой, что

$$\psi(x) > 0, \text{ если } x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \dots \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = V_0,$$

$$\psi(x) = 0, \text{ если } x \notin V_0.$$

Можно, например, положить (при  $x = (x_1, \dots, x_m) \in V_0$ )

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^m \cos^{r+1}(\pi \cdot x_i) \text{ или } \psi(x) = \prod_{i=1}^m \frac{(1 - x_i)^{r+1}}{4},$$

Положим теперь для каждого значения индекса  $i$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \psi\left(\frac{x - \xi^{(i)}}{\delta^{(i)}}\right), & x \in V_i, \\ 0, & x \notin V_i. \end{cases}$$

Понятно, что функции

$$\varphi_i: \varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\sum_i \psi_i(x)}$$

являются функциями класса  $C^r(V)$  ( $V = \bigcup_i V_i$ ) и образуют разбиение единицы на  $\Omega$ , подчиненное покрытию  $(V_i)$ .

Предположим теперь, что для функции  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  известна последовательность  $(f_i: V \rightarrow \mathbb{R})$  функций класса  $C^r(V)$  такая, что каждая из функций  $f_i$  "близка" к  $f$  на  $V_i$ . Пусть, например, в чебышевской норме для любого  $i$   $\|(f - f_i)|_{V_i}\| \leq \epsilon$ . Тогда

функция  $\tilde{f}$ , определяемая равенством

$$\tilde{f}(x) = \sum_i f_i(x) \varphi_i(x), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

будет "близка" к  $f$  на  $\Omega$ . Действительно, в силу тождества

$$f(x) = \sum_i f(x)\varphi_i(x), \quad x \in \Omega$$

получаем для любого  $x \in \Omega$

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| = \left| \sum_i (f(x) - f_i(x))\varphi_i(x) \right| \leq \max_i \sup_{x \in V_i} |f(x) - f_i(x)| \sum_i \varphi_i(x) \leq \varepsilon,$$

то есть

$$|f - \tilde{f}| \leq \varepsilon.$$

Теперь понятно, как использовать разбиение единицы для восполнения функции  $f$ , если она задана в узлах некоторой сетки  $(x^{(j)} \in \Omega)$ : для каждого  $i$  нужно построить по некоторой совокупности узлов  $(x^{(j)})$ , близких к центру  $\xi^{(i)}$  куба  $V_i$ , ее локальное приближение  $f_i$ , а затем эти приближения "склеить" по формуле (I).

В дальнейшем мы будем считать, что узлы  $x^{(i)}$  совпадают с центрами  $\xi^{(i)}$  кубов  $V_i$ , а локальные приближения являются постоянными функциями, равными  $f(x^{(i)})$ .

Проведем оценку погрешности приближения для одного частного случая:

$$f(x) = x, \quad x \in R,$$

сетка  $(x_k)$  — равномерная и бесконечная:  $x_k = k \cdot h$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $\delta^{(k)} = (2 \cdot N + 1) \cdot h$ ; разбиение единицы  $(\varphi_k)$  принадлежит классу  $C^r(R)$ ,  $r \geq 3$ ; функция  $\varphi_0(x)$  четна.

В этом случае остаток

$$\sigma(x) = x - \sum_k x_k \varphi_k(x)$$

представляет собой нечетную, периодическую с периодом  $h$  функцию, равную нулю в целых и полуцелых узлах нашей сетки. Поэтому достаточно рассмотреть случаи:

$$1) 0 \leq x \leq \frac{h}{4}, \quad 2) \frac{h}{4} \leq x \leq \frac{h}{2}.$$

Рассмотрим первый случай. Так как  $\varphi_k(x) = \varphi_0(x - x_k)$  и функция  $\varphi_0$  четна, то

$$\tilde{x} = \sum_k x_k \varphi_k(x) = \sum_k x_k \varphi_0(x - x_k) = \sum_k x_k [\varphi_0(x_k - x) - \varphi_0(x_k)].$$

Отсюда по формуле Тейлора имеем

$$\tilde{x} = -x \sum_k x_k \varphi_0'(x_k) + \frac{x^2}{2} \sum_k x_k \varphi_0''(x_k) - \frac{x^3}{6} \sum_k x_k \varphi_0'''(x_k - \theta_k x).$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства, очевидно, равно нулю, поэтому

$$\tilde{x} = -x \sum_k x_k \varphi_0'(x_k) - \frac{x^3}{6} \sum_k x_k \varphi_0'''(x_k - \theta_k x). \quad (2)$$

Далее, применим к сумме  $\bar{x} = -x \sum_k x_k \varphi_0'(x_k)$  преобразование

Абеля. Тогда получим:

$$\bar{x} = x \cdot h \sum_{k=-N}^N \sum_{r=-N}^k \varphi_0'(r \cdot h) + x \cdot x_N \sum_{r=-N}^N \varphi_0'(r \cdot h) = x \cdot h \sum_{k=-N}^{N-1} \sum_{r=-N}^k \varphi_0'(r \cdot h).$$

Но

$$h \cdot \sum_{r=-N}^k \varphi_0'(r \cdot h) = \frac{(k+1/2)h}{-(N+1/2)h} \int_{-(N+1/2)h}^{(k+1/2)h} \varphi_0'(x) dx + \sigma_1(x) = \varphi_0(x_k + \frac{h}{2}) + \sigma_1(k),$$

где

$$|\sigma_1(k)| \leq (\max_x |\varphi_0'''(x)|) \cdot \frac{h^3}{24} (k + N + 1). \quad (3)$$

Таким образом,

$$\bar{x} = x \sum_k \varphi_0(x_k + \frac{h}{2}) + x \sum_{k=-N}^{N-1} \sigma_1(x) = x + x \sum_{k=-N}^{N-1} \sigma_1(k). \quad (4)$$

Собирая (2) - (4), получаем

$$|\sigma(x)| \leq (\max_x |\varphi_0'''(x)|) \left( \frac{x^3 \cdot h}{6} \sum_{k=-N}^N k + \frac{xh^3}{24} \sum_{k=-N}^{N-1} (k + N + 1) \right) \leq$$

$$\leq (\max_x |\varphi_0'''(x)|) \cdot h^4 \cdot \frac{3}{2^7} N(N + \frac{5}{9}) = C \cdot \frac{h^4 \cdot 3 \cdot (N + \frac{5}{9}) \cdot N}{2^7 \cdot (2N + 1)^3 \cdot N^3} \leq$$

$$\leq C \cdot \frac{h}{288 N} . \quad (5)$$

Здесь  $C$  - максимальное значение модуля третьей производной функции  $x(y) = \varphi_0(y \cdot (2N + 1) \cdot h)$ . Константа  $C$  зависит от  $N$  и убывает с ростом  $N$ .

Случай 2) можно не рассматривать, так как результат в точности такой же.

Значение полученной оценки состоит в том, что она дает один из возможных критериев выбора исходной функции  $\varphi$ , по которой строится разбиение единицы.

Аналогичные оценки можно получить для линейной функции и в случае нескольких переменных.

Поставим теперь основную задачу настоящего раздела.

Пусть функция  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  известна на нерегулярной сетке  $(x^{(i)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  с некоторой точностью  $\epsilon$  (в равномерной норме). Требуется найти функцию  $\tilde{f}$  класса  $C^r$  такую, что выполняется условие аппроксимации

$$\|f - \tilde{f}\| = \max_{i=1, \dots, n} |f(x^{(i)}) - \tilde{f}(x^{(i)})| \leq \epsilon, \quad (6)$$

а также условие сглаживания, которое мы сформулируем здесь эвристически, как требование "неосциллируемости" производных функции  $\tilde{f}$  некоторого порядка.

Для решения этой задачи мы предлагаем метод, основанный на многократном применении описанного выше способа восполнения с использованием некоторой последовательности разбиений единицы. При описании алгоритма будут указаны соотношения, которые, по нашему мнению, обеспечивают, по крайней мере в ука-

занном выше эвристическом смысле, выполнение условия сглаживания.

Обозначим через  $L_0$  оператор (сглаживающего приближения), действующий из пространства сеточных функций  $f(x^{(i)})$  :  $x^{(i)} \rightarrow R$  в пространство дифференцируемых функций  $C^r(V)$  по формуле

$$L_0(f)(x) = \sum_{i=1}^n f(x^{(i)})\varphi_i(x), \quad (7)$$

где  $(\varphi_i)$  - разбиение единицы на  $\Omega$  описанного ранее вида, центры носителей функций  $\varphi_i$  являются узлами  $x^{(i)}$  сетки  $(x^{(i)})$ .

Оценим норму отклонения  $f$  от  $L_0(f)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \|f - L_0(f)\| &= \max_{j=1, \dots, n} |f(x^{(j)}) - \sum_{i=1}^n f(x^{(i)})\varphi_i(x^{(j)})| = \\ &= \max_{j=1, \dots, n} |f(x^{(j)})(1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \varphi_i(x^{(j)})) - \sum_{i=1}^n f(x^{(i)})\varphi_i(x^{(j)})| \leq \\ &2\|f\| [1 - \min_{j=1, \dots, n} \varphi_j(x^{(j)})]. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда следует, что при однократном применении формулы (7) можно удовлетворить условию аппроксимации за счет выбора такого разбиения единицы, что величина

$$\lambda = \min_{j=1, \dots, n} \varphi_j(x^{(j)}) \quad (9)$$

достаточно близка к единице. Но величина  $\lambda$  близка к единице, если либо число узлов, попадающих в множества  $V_i$ , мало, либо функции  $\varphi_j$  "слишком дельтаобразны", а это, как показывает уже оценка (5), ухудшает сглаживающие свойства оператора  $L_0$ .

Эти соображения указывают на то, что при однократном применении оператора  $L_0$  невозможно, вообще говоря, получить решение поставленной задачи. Поэтому мы поступаем следующим образом.

Пусть  $((\varphi_i^{(k)}))_{k=1,2,\dots}$  - последовательность разбиений единицы, подчиненных, для определенности, одному и тому же покрытию множества  $\Omega$ , а  $(L_0^{(k)})$  - соответствующая последовательность операторов сглаживающего приближения, определяемых для каждого  $(\varphi_i^{(k)})$  по формуле (7). Будем искать  $\tilde{f}$  в виде

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^{k_0} L_0^{(k)}(f^{(k-1)}), \quad (10)$$

с некоторым  $k_0$ , где  $(f^{(k)})$  - последовательность сеточных функций, определяемая следующим образом:

$$f^{(k)}(x^{(j)}) = \begin{cases} f(x^{(j)}), & k=0, j=1,2,\dots,n \\ f^{(k-1)}(x^{(j)}) - L_0^{(k)}(f^{(k-1)})(x^{(j)}), & k > 0, j=1,2,\dots,n. \end{cases} \quad (11)$$

Просуммировав эти равенства для  $k=0,1,\dots,k_0$ , получим:

$$f = \tilde{f} + f^{(k_0)},$$

так что для выполнения условия аппроксимации необходимо, чтобы величина  $\|f^{(k_0)}\|$  не превосходила величины  $\epsilon$ . Это условие всегда может быть удовлетворено за счет специального выбора последовательности разбиений единицы  $((\varphi_i^{(k)}))$ . Действительно, если, к примеру, начиная с некоторого  $k_1$ , выполняется условие  $\lambda^{(k)} = \min_{j=1,\dots,n} \varphi_j^{(k)}(x^{(j)}) \geq \sigma > \frac{1}{2}$  для всех  $k \geq k_1$ ,

то в силу (8),  $\|E - L_0^{(k)}\| \leq 2(1 - \sigma) < 1$ , и следовательно,  $\|f^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

Выбирая последовательность разбиений единицы  $((\varphi_i^{(k)}))$  таким образом, чтобы величины  $\lambda^{(k)}$  были по возможности меньшими при условии монотонного убывания последовательности  $(\|f^{(k)}\|)$  с некоторой заранее фиксированной скоростью  $\nu > 1$  (то есть  $\|f^{(k)}\| / \|f^{(k+1)}\| \geq \nu$ ) можно добиться выполнения также и условия сглаживания (поскольку при этом "негладкий" вклад в сумму (10) будет вноситься уже малыми по норме  $f^{(k)}$ ).

Для практических целей последовательность разбиений единицы  $((\varphi_i^{(k)}))$  естественно строить следующим образом. Если  $\psi^{(k)}(x)$  - стандартная функция для разбиения  $(\varphi_i^{(k)})$ , то стан-

дартную функцию  $\psi^{(k+1)}(x)$  для разбиения  $(\varphi_i^{(k+1)})$  выбираем в виде

$$\psi^{(k+1)}(x) = \psi^{(k)}(x) \cdot \varepsilon^{(k)}(x),$$

где множитель  $\varepsilon^{(k)}(x)$  можно взять в форме

$$\varepsilon^{(k)}(x) = \exp[-\mu_k(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)], \quad \mu_k \geq 0,$$

либо

$$\varepsilon^{(k)}(x) = [1 + \mu_k(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)]^{-1}, \quad \mu_k \geq 0,$$

и т.п.

Вычисления организуются так, что если  $\|f^{(k-1)}\|/\|f^{(k)}\| \geq \vartheta$ , то  $\mu_k = 0$  и  $\mu_k = \mu > 0$  - в противном случае.

Таким образом, описанный алгоритм содержит три регулирующих параметра:

- 1 величину  $\lambda^{(0)} = \lambda$ , определяемую по (9);
- 2 скорость  $\vartheta > 1$  уменьшения невязки  $\|f^{(k)}\|$ ;
- 3 параметр  $\mu$ , регулирующий скорость увеличения "дельтаобразности" разбиений единицы.

Понятно, что оптимизацией по этим параметрам можно минимизировать функционалы, значения которых определяют то или иное понятие "неосциллируемости" производных функций  $\tilde{f}$ .

**З а м е ч а н и е.** Если взять последовательность разбиений единицы из одинаковых разбиений  $(\varphi_i)$ , то в силу (I0), (II) получим:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^{k_0} f^{(k-1)}(x^{(i)}) \varphi_i(x) \right).$$

Может возникнуть мысль - ограничиться одним набором разбиения единицы  $(\varphi_i)$  и искать решение  $\tilde{f}$  поставленной в начале этого пункта задачи в виде

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad (12)$$

пытаясь определить коэффициенты  $(c_i)$  из условия

$$\|f - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)\| \leq \epsilon \quad (13)$$

в предположении, что выполнено условие сглаживания.

На самом деле эта постановка не отвечает существу дела, так как данные ( $f(x^{(i)})$ ) заданы с ошибкой.

Действительно, теоретически, если

$$\det \|\varphi_i(x^{(j)})\| \neq 0, \quad (14)$$

условию (13) можно удовлетворить с  $\epsilon = 0$ , но тогда ошибки в "измеренных" ( $f(x^{(i)})$ ) распространяется и на полученное продолжение (12). Поэтому желательно стремиться к тому, чтобы оценка (13), по возможности, "достигалась", а для этого естественно поставить условие

$$\max_{i=1, \dots, n} |f(x^{(i)}) - c_i| \leq E, \quad E > 0, \quad (15)$$

которое бы ограничивало норму  $\|f - c\|$ . Но у нас нет никаких критериев выбора величины  $E$ , а задаваясь этой величиной произвольно (естественно задавать  $E$  "малой"), мы приходим к задаче, в общем неразрешимой (не говоря уже о том, что и условие (14) не всегда выполняется).

Из указанной противоречивости требований аппроксимации, сглаживания и условия (15) и возник описанный выше алгоритм.

#### Л и т е р а т у р а

1. ЦЕЦОХО В.А., БЕЛОНОСОВ А.В., БЕЛОНОСОВА А.В. Об одном методе  $\pi$ -гладкого приближения функций многих переменных. — Математические проблемы геофизики, выпуск 6, часть I, Новосибирск, 1975.

## ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ГОДОГРАФОВ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН

(Тау - метод)

Мы рассматриваем обратную задачу сейсмологии в предположении, что скорость волн зависит от глубины и что распространение волн подчиняется законам геометрической сейсмологии. Исходными данными служит дискретный набор времен пробега отраженных и рефрагированных объемных волн. Наша цель - построить пределы для скоростного разреза при некоторых дополнительных, довольно слабых предположениях.

С помощью несложного преобразования сведем рассматриваемую задачу к обратной задаче на плоскости  $Y \geq 0$  для среды со скоростью распространения волны  $V(Y)$ . Тогда годограф может быть записан в параметрической форме

$$X(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{p dy}{\sqrt{u^2(y) - p^2}}, \quad (1)$$

$$T(p) = \int_0^{Y(p)} \frac{u^2(y) dy}{\sqrt{u^2(y) - p^2}}, \quad (1)$$

Здесь  $u(y) = V^{-1}(y)$  – обратная скорость;  $2X(p)$  – эпицентральное расстояние;  $2T(p)$  – время движения по лучу с параметром  $p$ . Предположим, что функция  $V(y)$  кусочно дважды гладкая и что имеется конечное число волноводов.

Центральное место в нашем методе решения обратной задачи занимает вспомогательная функция  $\tau(p)$ . Функция  $\tau(p)$  связана с годографом соотношением

$$\tau(p) = T(p) - pX(p) \quad (2)$$

и со скоростным разрезом формулой

$$\tau(p) = \int_0^{Y(p)} \sqrt{u^2(y) - p^2} dy. \quad (3)$$

Функция  $\tau(p)$  допускает простую геометрическую интерпретацию: касательная к годографу в точке с координатами  $X(p)$ ,  $T(p)$  составляет с осью  $X$  угол, тангенс которого равен  $p$ , и отсекает на оси  $T$  отрезок, равный  $\tau(p)$ .

Обратная задача будет нами решаться в два этапа. Сначала мы по заданным  $T_i(X_i)$  строим верхнюю и нижнюю оценки на функцию  $\tau(p)$ , а затем трансформируем их в оценки на функцию  $Y(p)$ . Построение оценок на функцию  $\tau(p)$  сводится, с точностью до пренебрежимо малых величин, к задаче определения доверительного интервала с заданным порогом вероятности для величины, имеющей распределение Стьюдента с известным числом степеней свободы.

Переход от оценок на  $\tau(p)$  к оценкам на  $Y(p)$  может быть осуществлен либо с помощью подходящего усреднения формулы Герглотца-Вихерта, либо с помощью формулы обращения для уравнения (3), которая имеет следующий вид:

$$Y(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau(p)} \frac{d\tau}{\sqrt{v^2(\tau) - p^2}}, \quad (4)$$

где  $v(\tau)$  – функция, обратная к  $\tau(p)$ .

В качестве примера применения Тау-метода к интерпретации данных, укажем обработку данных о временах пробега  $p$  волн от 264 землетрясений, зарегистрированных на сейсмической группе в Центральной Аризоне (США), для эпицентральных расстояний в

диапазоне от  $3^{\circ}$  до  $99^{\circ}$ . Так как условие сферической однородности на протяжении района расположения эпицентра землетрясений может нарушаться, то полученные результаты следует относить к некоторой осредненной мантии Земли. Построена достоверная область с достоверной вероятностью 0.98 для скорости распространения волн в верхней и нижней мантии. Для верхней мантии неопределенность в распределении скоростей довольно большая, для уточнения поведения скоростного разреза необходимо обработать существенно больший объем данных. Для нижней мантии построенная область позволяет с хорошей точностью определить значение скорости на заданной глубине, однако для определения градиента скорости волн в нижней мантии рассмотренной совокупности данных недостаточно. Приведен пример скоростного разреза, хорошо согласующегося с заданными временами пробега объемных волн.

Экспериментальные данные содержат значения лучевого параметра, которые использовались в ранее проделанных интерпретациях. Проведенное исследование показывает, что можно получить надежный и довольно точный результат, не используя измерений лучевого параметра, что позволяет интерпретировать предложенным методом данные о временах пробега объемных волн, полученные на обычных сейсмостанциях.

### Л и т е р а т у р а

1. Бессонова Э.Н., РЯБОЙ В.З., СИТНИКОВА Г.А., ФИШМАН В.М. Решение обратной кинематической задачи ГСЗ методом  $\tau$ . Вычислительная сейсмология, № 6, М., "Наука", 1973.
2. БЕССОНОВА Э.Н., ДЖОНСОН Л.Р., СИТНИКОВА Г.А., ФИШМАН В.М. Решение обратной задачи сейсмологии методом  $\tau$ . Вычислительная сейсмология, № 6, М., "Наука", 1974.
3. БЕССОНОВА Э.Н., СИТНИКОВА Г.А., ТОКСОЗ М.Н., ФИШМАН В.М. Определение пределов для скоростного разреза верхних слоев Луны Тау-методом. Письма в АЖ, т. I, № 8, 1975.

4. BESSONOVA E.N., FISHMAN V.M., RYABOYI V.Z., SITNIKOVA G.A.  
The Tau method for inversion of travel times. - I.  
Deep seismic sounding data. Geophys. J.R.astr.Soc.,  
36, p.377-398, 1974.
  
5. BESSONOVA E.N., FISHMAN V.M., JOHNSON L.R., SHNIRMAN M.G.,  
SITNIKOVA G.A. The Tau method for inversion of tra-  
vel times. - II. Earthquake data. Geophys.J.R.astr.  
Soc., in press.

## МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИКИ

I. В задачах интерпретации геофизических данных предметом изучения являются определенные характеристики  $z$ -структур недр земли, предметом же наблюдений – результаты влияния этих структур на поля различной геофизической природы и на поверхности земли. Таким образом, мы имеем здесь дело с типичными обратными задачами.

Известно, что развитие практики геофизических наблюдений ставит проблему автоматизации обработки и интерпретации данных в различных областях геофизики на базе ЭЕМ.

Однако наблюдаемый на земной поверхности эффект носит интегральный характер и, как правило, слабо чувствителен к деталям структур земных недр. Соответственно, даже при наличии взаимно-однозначного соответствия  $z \leftrightarrow u$  обратные задачи геофизики некорректны в их классической постановке. Поэтому разработка корректных постановок задач этого рода и устойчивых алгоритмов построения приближений к их решению приобретает принципиальное значение.

Возможность корректной постановки обратных задач геофизики была указана в работе [1], и развитие соответствующих идей приводит к представлению о постановке задачи на множестве

ве корректности и концепции квазирешения [2]. В практике интерпретации множество корректности  $\bar{Z}$  ( $z \in \bar{Z}$ ) определяется обычно совокупностью априорных количественных ограничений на  $z$ ; соответствующая теория может служить обоснованием метода подбора, если только задача подбора состоятельна [3]. при заданном уровне погрешности входных данных.

Эффективные алгоритмы поиска приближения  $z_\delta$  следуют из концепции регуляризации А.Н.Тихонова [4] - [5]. Оказывается, что для получения устойчивого приближения может быть достаточной самая общая априорная качественная информация об искомой характеристике  $z$ . Разумеется, соответствующие регуляризирующие алгоритмы (РА) допускают учет и количественной информации об искомом решении, если таковая имеется.

В дальнейшем мы рассмотрим на ряде конкретных примеров некоторые принципиальные вопросы, связанные с применением РА в задачах геофизической интерпретации. Предварительно отметим, что идеи включения информации о погрешности входных данных и дополнительной информации (любого рода) о решении в постановку приводят, вообще говоря, к вариационным задачам. Этим определяются достаточно общие РА, для использования которых в системах машинной автоматизации достаточно уметь рассчитывать прямые эффекты:  $u = Az$ ; при этом алгоритмы минимизации функционалов играют подчиненную роль в качестве элемента РА. Алгоритмы минимизации хорошо известны, и на них мы подробно останавливаться не будем.

2. Рассмотрим известную [6] кинематическую задачу сейсмике в рамках сферически-симметричной модели среды. Искомой характеристикой структуры является величина скорости сейсмических волн  $v = v(r)$ , принадлежащая пространству кусочно-непрерывных функций  $\bar{C}$ . Наблюдаемой величиной служат пары значений  $\{\hat{T}_k, \hat{X}_k\}$ ,  $k = 1, \dots, N$  - времена прихода  $\hat{T}_k$  сейсмического сигнала в точку с эпицентральной расстоянием  $\hat{X}_k$ , иначе - экспериментальный годограф  $\hat{T}$  рефрагированной сейсмической волны, заведомо определенный с некоторой погрешностью  $\|\hat{T} - \tilde{T}\|_{\hat{T}}^2 \equiv \sum_{k=1}^N \{a_1(\hat{T}_k - \tilde{T}_k)^2 + a_2(\hat{X}_k - \tilde{X}_k)^2\} \leq \delta^2$ ,  $a_i \geq 0$ .

Элементарная связь искомой величины с наблюдаемой (при точном задании последней) легко устанавливается уравнением

сейсмического луча и определяет гипотетический при некоторой  $v(r)$  годограф  $T[v]$ . Сопоставление годографа с экспериментальными данными в указанной норме приводит к следующему соотношению эквивалентности относительно  $v(r)$ :  $\|T[v] - \tilde{T}\|^2 \leq \delta^2$ ,  $v = v(r) \in \bar{C}$ . Однако соответствие  $v \rightarrow T$  не является взаимно-однозначным [7], а в силу неустойчивости обратной задачи диаметр множества эквивалентности бесконечен в пространстве  $\bar{C}$ . Следовательно, в качестве приближения к искомому скоростному разрезу  $v(r)$  не может быть указан произвольный элемент множества эквивалентности, и тем более бессмысленна задача об изучении всего этого множества.

Пусть теперь имеется информация о том, что в изучаемом районе скорость монотонно возрастает с глубиной (в пределах зондируемых глубин) и двухсторонне ограничена известными значениями. Пусть  $\bar{V}$  – множество разрезов  $v(r)$ , удовлетворяющих указанным условиям. Тогда можно рассматривать задачу "квазиминимизации" функционала

$$\|T[v] - \tilde{T}\|^2 \leq \delta^2, \quad v = v(r) \in \bar{V}. \quad (1)$$

Согласно [7] условие монотонности скоростного разреза обеспечивает взаимно-однозначность соответствия:  $T \leftrightarrow v$ , а дополнительное условие ограниченности делает  $\bar{V}$  множеством корректности [2]. Теперь в качестве приближения к искомому скоростному разрезу  $\hat{v} = \hat{v}(r)$ , отвечающему точному годографу, можно принять любой элемент  $v_\delta$ , удовлетворяющий условиям (1). Любой такой элемент удовлетворяет принципу регуляризации [3]  $v_\delta \rightarrow \hat{v}$  при  $\delta \rightarrow 0$ , и, следовательно, любой алгоритм решения задачи (1) является регуляризирующим.

Более подробно кинематическая задача сейсмоки в предлагаемой постановке рассмотрена в [8]. На рис. I приведены некоторые результаты интерпретации на ЭВМ годографов, заданных с погрешностью  $\sim 3\%$  от максимального значения<sup>\*</sup>.

---

\* При моделировании погрешности использовался нормальный закон распределения.

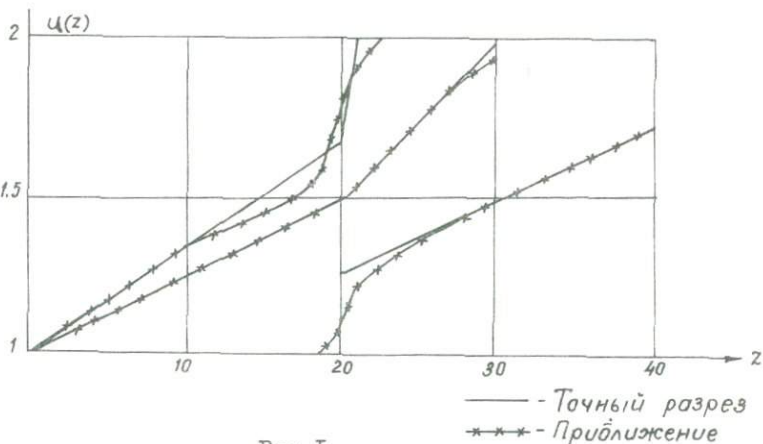


Рис. I

По осям координат отложены величины

$$u(z) = \frac{R}{r} \frac{v(r)}{v(R)}, \quad z = \frac{R}{v(R)} \ln \frac{R}{r}$$

Скоростной разрез определялся в 2I-й точке, годографы задавались в 4I-й точке. В рассматриваемой задаче устанавливается выпуклость функционала (I) относительно меры множества значений  $v(r)$ , вследствие чего, при достаточно мелком шаге аппроксимации, оказывается эффективным градиентный метод минимизации функционала.

3. Рассмотрим задачу интерпретации дисперсионных данных с поверхностных сейсмических волнах, для определенности - волнах Лява. Ограничимся моделью горизонтально-слоистой среды, и в качестве искомой характеристики структуры примем совокупность параметров  $(n, \vec{p})$

$$\vec{p} = \{b_i, i = 1, \dots, n+1, v_j, d_j, j = 1, \dots, n\},$$

где  $n$  - число слоев структуры,  $b_i$  - скорости волн сдвига в слоях,  $v_j = \mu_j / \mu_{j+1}$  - отношения жесткостей,  $d_j$  - толщины

слоев. Данными "наблюдений" будем считать набор значений фазовой скорости поверхностной волны, отвечающих различным частотам  $\{\omega_k, c_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  и заданных с известной по-

грешностью

$$\|\hat{c} - \tilde{c}\|^2 \equiv \sum_{k=1}^N \{\hat{c}(\omega_k) - \tilde{c}_k\}^2 \leq \delta^2.$$

Для класса структур, удовлетворяющих условию  $b_1 < b_i$ ,  $2 \leq i \leq n+1$  (монотонность не требуется), установлено (см. [9]) взаимно-однозначное соответствие  $(n, \vec{p}) \leftrightarrow \hat{c}(\omega)$ , где  $\hat{c}(\omega)$  отвечает основной моде колебаний. Следовательно, для реальных структур интерпретация дисперсионных данных основного тона несет весьма детальную информацию о структуре.

Эффект влияния структуры, сопоставимый с данными наблюдений, определяется алгоритмически следующей задачей

$c(\omega, \vec{p}) = \lambda^{-1/2}$ ,  $\lambda$  - наибольший корень уравнения

$$v_1'(z, \lambda, \omega)|_{z=0} = 0, \quad (b_1^{-2} > \lambda > b_{n+1}^{-2}),$$

где для  $v(z, \lambda, \omega)$  имеем задачу Коши

$$v_1''(z) + \omega^2 (b_1^{-2} - \lambda) v_1(z) = 0, \quad z_{i-1} > z > z_i, \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad z_0 = 0, \quad z_i = \sum_{s=1}^i d_s,$$

$$v_j(z_j) = v_{j+1}(z_j), \quad v_j v_j'(z_j) = v_{j+1}'(z_j) \quad (j=1, 2, \dots, n-2), \quad (2)$$

$$v_n(z_n) = 1, \quad v_n'(z_n) = -\omega k_n / v_n \quad (k_n = \sqrt{\lambda - b_{n+1}^{-2}}).$$

В качестве "априорной информации" о структуре всегда могут быть использованы сведения об уже изученном районе, сходном с данным в геологическом отношении  $(m, p_0)$ ,  $m \geq n$ . Тогда сопоставление гипотетического эффекта  $c(\omega, m, \vec{p})$  с данными наблюдений при условии минимального уклонения  $\vec{p}$  от  $\vec{p}_0$  приводит к задаче о минимизации сглаживающего функционала Тихонова:

$$\inf F_{\alpha}[\vec{p}], \quad F_{\alpha}[\vec{p}] \equiv M[\vec{p}] + \alpha \Omega[\vec{p}],$$

$$M[\vec{p}] \equiv \|c(\omega, \mathfrak{m}, \vec{p}) - \tilde{c}(\omega)\|^2, \quad \Omega[\vec{p}] = \sum_{k=1}^{r_m} (P_k - P_{k0})^2, \quad * (3)$$

где  $r_m$  - полное число определяемых компонент вектора  $\vec{p}$ , и  $\alpha$  может быть определено условием

$$M[\vec{p}^{\alpha}] = \delta^2,$$

если  $\vec{p}^{\alpha}$  - экстремаль  $F_{\alpha}[\vec{p}]$ .

Экстремаль функционала (3)  $\vec{p}^{\alpha}(\delta)$  при указанном условии выбора приближения удовлетворяет принципу регуляризации

$$\vec{p}^{\alpha}(\delta) \rightarrow \hat{\vec{p}}$$

при  $\delta \rightarrow 0$ , так что задача (3) определяет регуляризирующий алгоритм.

Примером, свидетельствующим о его эффективности, может служить машинная интерпретация экспериментальных данных о волнах Релея в районе Нью-Йорка (Пенсильвания) [10] - [1], на предмет уточнения некоторых параметров структуры. В [10] задача интерпретации решалась в постановке

$$\inf M[\vec{p}], \quad \vec{p} \equiv \{b_1, \rho_1, b_2, d_2\},$$

при погрешностях входных данных на уровне до 5%. При некотором начальном приближении в качестве результата машинной интерпретации были получены значения

$$p \equiv \{b_1 = 3.70 \text{ км/сек}, b_2 = 4,29, \rho_1 = 1.34 \text{ г/см}^3, d_1 = 46,5 \text{ км.}\}.$$

Значение плотности здесь заведомо противоречит геологической информации, и, таким образом, этот результат скорее

\* ) Задача интерпретации для волн Релея формулируется аналогично с точностью до определения оператора прямого соответствия  $s = \Delta \vec{p}$  [4].

свидетельствует о некорректности постановки задачи, что и отмечалось авторами [10]. Результат, полученный на ЭВМ с помощью РА (3) при том же начальном приближении, что и в [10], и при сходном алгоритме минимизации функционала, дается следующим вектором:  $\vec{p} \equiv \{b_1 = 3.61 \text{ км/сек}, b_2 = 4.68, \rho_1 = 3.07 \text{ г/см}^3, d_1 = 36.03 \text{ км}\}$ , он совпадает с данными ГСЗ по тем параметрам, для которых такие данные имеются.

В постановке (3) число слоев  $m$  является параметром задачи. Если выбрать  $m$  заведомо превосходящим истинное, то, согласно единственности соответствия  $s(\omega) \rightarrow (n, \vec{p})$ , истинное значение  $n$  автоматически определяется в соответствии с точностью входных данных. В самом деле, рассмотрим однослойную структуру, характеризуемую следующим набором параметров:  $\vec{p} \equiv \{b_1 = 3.55 \text{ км/сек}, b_2 = 4.65, \rho_1 = 2.74 \text{ г/см}^3\}$ . Дисперсионные данные [11], отвечающие ей по (2) примем в качестве исходных. Будем искать приближение в классе двухслойных структур, приняв за начальное вектор  $\vec{p}_0 \equiv \{b_1' = 2 \text{ км/сек}, b_2' = 4, b_3' = 5.5, \rho_1' = 3.5, \text{ г/см}^3, \rho_2' = 3.5, d_1' = 10 \text{ км}^{\ast}\}$ . В этом случае РА (3) при достаточно высокой точности дисперсионных данных (0.001%) приводит к следующему результату:  $\vec{p}'_0 \equiv \{b_1' = 3.550, b_2' = 3.549, b_3' = 4.50, \rho_1' = 2.739, \rho_2' = 2.740, d_1' = 9.999\}$ .

Обратим внимание на следующие особенности рассматриваемого РА, иллюстрируемые в частности рассмотренным примером. Во-первых, в условиях формальной неоднозначности точного решения (здесь  $d_1'$  определено неоднозначно) РА отбирает единственное ("главное") в соответствии с заложенной дополнительной информацией. Это дает, например, возможность рассматривать кинематическую задачу сейсмоки (п.2) в более широком классе структур в постановке (3), если имеется дополнительная информация о некоторых параметрах глубинных волноводов.<sup>жж</sup> Во-вторых, при достаточно больших  $\alpha$  экстремаль  $F_\alpha$  близка к экстремали  $\Omega$ , что определяет выбор исходного приближения к экстремали. Отсюда следует алгоритм спуска по параметру  $\alpha$ , существенный для задач с нелинейным оператором соответствия

ж) Выбор начальных значений скорости намеренно не учитывает существующую геологическую информацию о верхних слоях земной коры.

жж) В качестве достаточного условия отбора главного решения предполагается выпуклость множества формальных решений [14].

$u = Az$  [I2]; практически, на некоторой сетке значений  $\{\alpha_p\} \rightarrow 0$ , в качестве начального приближения к экстремали  $\rho^{\alpha_{p+1}}$  можно выбрать  $\vec{p}^{\alpha_p}$ . Это делает РА в форме (3) эффективным и для приближенного решения корректно поставленных задач с нелинейным оператором.

4. Рассмотрим теперь задачу об интерпретации гравиметрических данных для определения формы тел, порождающих аномалии гравитационного поля, для простоты – в рамках двумерной плоской модели среды.

Искомой величиной здесь является совокупность функций

$$\vec{z}(\xi) = \{z_1(\xi), z_2(\xi)\}, \quad \xi \in [a, b],$$

определяющих уравнения границ. "Наблюдаемой" величиной служит вертикальная компонента аномального гравитационного поля  $\hat{u} = \tilde{u}(x)$ ,  $x \in [c, d]$ , погрешность которой определим в норме

$$\|\hat{u} - \tilde{u}\|^2 \equiv \int_c^d \{\tilde{u}(x) - \hat{u}(x)\}^2 dx, \quad \|\hat{u} - \tilde{u}\| \leq \delta.$$

Достаточным условием взаимно-однозначного соответствия  $u(x) \leftrightarrow \vec{z}(\xi)$ , наряду с практически несущественными ограничениями на форму границ [I3] служит предположение о том, что плотность масс тела постоянна и известна, которое мы и принимаем.

Эффект влияния источника

$$u[x, \vec{z}] = \frac{\partial v}{\partial z}(x, z) \Big|_{z=0}$$

определяется следующей задачей

$$\Delta v = -\rho(M), \quad \rho \equiv \rho_0 \text{ при } M \in G, \quad G\{x \in [a, b],$$

$$z \in [z_1(x), z_2(x)]\}, \quad \rho \equiv 0 \text{ при } M \notin G,$$

и без труда может быть записано явное интегральное выражение  $u[x, \vec{z}]$ , нелинейное относительно  $\vec{z}(\xi)$ .

В качестве самой общей дополнительной информации о решении примем предположение о гладкости границ; что не исключает наличия их тонкой структуры [15]. Среди всех функций  $\vec{z}(\xi)$ , удовлетворяющих соотношению эквивалентности при заданном уровне погрешности входных данных (п.2), будем искать максимально гладкую. Соответственно, приходим к задаче о минимизации сглаживающего функционала

$$\inf \{ \|u[\vec{z}] - \tilde{u}\|^2 + \alpha \Omega[\vec{z}] \},$$

где регуляризатор  $\Omega[z] \equiv \sum_{s=1}^2 \int_a^b z_s'^2(\xi) d\xi$  и  $\alpha$  может быть определено прежним условием  $\|u[\vec{z}^\alpha] - \tilde{u}\|^2 = \delta^2$ . ж)

При конечно-разностной аппроксимации задачи, где наличие регуляризатора не ограничивает числа компонент сеточных функций, для реализации РА можно пользоваться любым алгоритмом минимизации функционала на сетке  $\{\alpha_p\}$  в рамках процедуры спуска по параметру. Один из эффективных алгоритмов рассмотрен в [16].

В качестве примера приведем результат интерпретации аномального гравитационного поля в одном из районов СССР, где структура недр близка к двумерной. Здесь в рамках принятой модели восстанавливается глубина и форма контактной поверхности (рис.2). Соответственно,  $z_2(\xi) \equiv H$ ,  $\Omega[z] = \int_a^b z_1'^2(\xi) d\xi + p(H - H_0)^2$ , где  $H_0$  отвечает априорной, возможно далеко неточной информации о структуре. На рис.2 найденный результат сравнивается с данными бурений и начальным приближением.

В рассмотренном примере мы использовали информацию двоякого рода об искомой структуре: общую качественную (гладкость решения) и конкретную количественную (значения плот-

---

ж) Заметим, что здесь, как и в предшествующих задачах, вместо этого можно использовать условие, не связанное с заданием величины  $\delta$ , а косвенно учитывающее влияние погрешности

ти  $\inf \|\alpha \frac{dz}{d\alpha}\|$  [15].

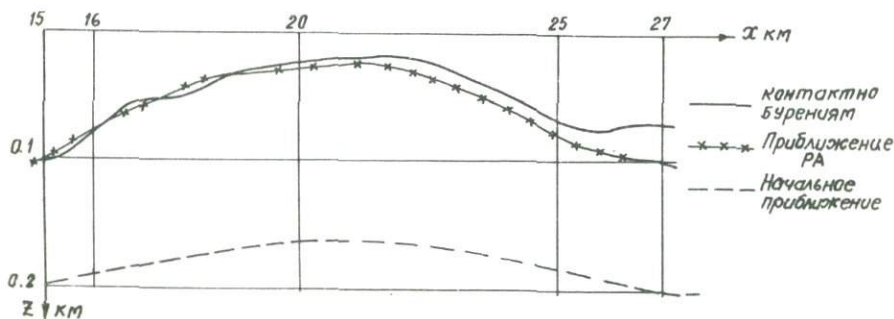


Рис.2

ности<sup>\*)</sup>. Эти сведения имеют геологическую природу. Наряду с этим можно использовать в рамках РА данные прямого зондирования [14], и это приводит к задаче о минимизации сглаживающего функционала (4) на множестве с ограничениями  $\vec{z}(\xi) \in Z^*$ , имеющим непустое пересечение с компактом, определенным введением регуляризатора. Такая постановка может быть эффективной в случае существенного отклонения принятой модели от реальной структуры (например, отклонения от двумерности). "Погрешность модели" легко обнаруживается с помощью РА, поскольку в этом случае  $\|u[\vec{z}^{\alpha}] - \tilde{u}\|^2 < \delta^2$  при всех  $\alpha$  ( $\delta$  - объявленный уровень погрешности входных данных). Тогда использование некоторых результатов прямого зондирования позволяет повысить точность интерпретации.

Примером может служить восстановление формы трехмерного граничного массива в одном из районов Средней Азии в рамках двумерной модели по различным сечениям.

На рис.3. приведены результаты восстановления в сечении, отвечающем наибольшему (судя по выходу массива на земную поверхность) отклонению структуры от модели. В рамках постановки (4) результат существенно отклоняется от данных бурений. Использование в качестве дополнительных данных результатов измерения участка выхода массива на поверхность (так что значение  $z_1(\xi)$  известно и равно нулю на континуальном мно-

\*) Заметим, что параметры "а", "в" определяются автоматически и специальной информации не требуют.

жестве) заметно улучшает результат.

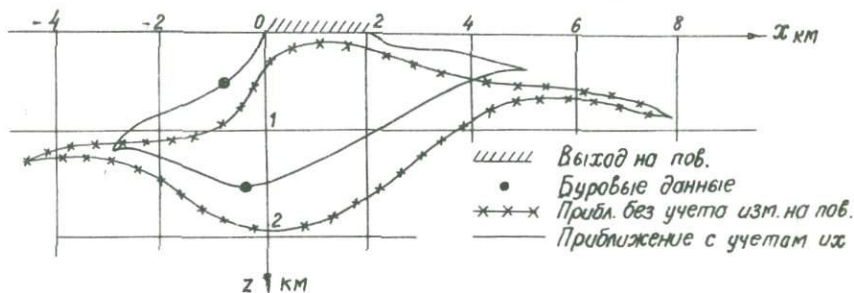


Рис.3

5. Из рассмотренных примеров следует, что РА являются необходимыми элементами систем сплошной автоматизации обработки и интерпретации экспериментальных данных. С другой стороны, они не исчерпывают проблемы разработки таких систем, существенным элементом которых является первичная обработка данных собственно эксперимента, с оценкой суммарной погрешности  $\delta$  при переходе от данных эксперимента к входным данным задачи интерпретации. Очевидна относительность понятия "входные данные", поскольку модель соответствия  $Az = u$  можно усложнять до уровня экспериментальных измерений.

В этой связи проблема разработки РА является в значительной мере геофизической, связанной с пониманием условий эксперимента и рациональным использованием дополнительной геофизической информации об изучаемых объектах.

#### Л и т е р а т у р а

1. ТИХОНОВ А.Н. Об устойчивости обратных задач. - ДАН СССР, 1943, т.39, № 5, с.195-198,
2. ТИХОНОВ А.Н., ИВАНОВ В.К., ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. Некорректно поставленные задачи. Труды симпозиума, посвященного 60-летию акад. С.Л.Соболева. М., "Наука", 1970, с.224-238. 119

3. ТИХОНОВ А.Н. Некорректно поставленные задачи и методы их решения. Труды всесоюзной школы молодых ученых. Сб.: "Методы решения некорректных задач и их применения" М., МГУ, 1974, с.6-10.
4. ТИХОНОВ А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. - ДАН СССР, т.153, № I, с.49-52.
5. ТИХОНОВ А.Н., АРСЕНИН В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. М., "Наука", 1974, с.7-100.
6. АЛЕКСЕЕВ А.С., ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., МУХОМЕТОВ Р.Г., РОМАНОВ В.Г. Сб.: "Математические проблемы геофизики". Новосибирск, 1969, с.179-201.
7. ГЕРВЕР М.А., МАРКУШЕВИЧ В.М. Определение по годографу скорости распространения сейсмической волны. - "Вычислительная сейсмология". 1967, 3, с.3-51.
8. БАЕВ А.В., ГЛАСКО В.Б. О решении обратной кинематической задачи сейсмоки с помощью регуляризирующего алгоритма. - ЖВМиМФ, 1976, 16, № 6, с.924-931.
9. ГЛАСКО В.Б. К вопросу о единственности восстановления структуры земной коры по дисперсионному спектру волн Релея. - ДАН СССР, 1972, т.206, № 6, с 1345-1348.
10. DORMAN J., EWING M. Numerical inversion of surface wave dispersion data and crustmantle structure in New York-Pensilvania area. -J.Geophys.Res.1952,v.67, pp.5227-5247.
- X II. ГЛАСКО В.Б., ГРАНИТ Я.А., САВАРЕНСКИЙ Е.Ф. Некоторые возможности регуляризирующих алгоритмов в задачах о восстановлении структуры земной коры по поверхностным волнам.: Сб.: "Прикладная геофизика", "Недра", 1973, вып.72, с.99-108.
12. ТИХОНОВ А.Н., ГЛАСКО В.Б., КУЛИК Н.И. Регуляризирующие алгоритмы нелинейных задач и задача магнито-теллурического зондирования. Сб.: "Вычислительные

методы и программирование", М., МГУ, 1973, вып.20, с. 158-174.

13. СРЕТЕНСКИЙ Л.Н. О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала. - ДАН СССР, 1954, т.99, № I, с.21-22.
14. ГЛАСКО В.Б., ГУШИН Г.В., СТАРОСТЕНКО В.И. Метод регуляризации Тихонова при решении систем нелинейных уравнений. - ДАН Укр. ССР, сер.Б, 1975, № 3, с.203-206.
15. ГЛАСКО В.Б., ВОЛОДИН Б.А. МУДРЕЦОВА Е.А., НЕФЕДОВА Н.Ю. О решении обратной задачи гравиметрии для контактной поверхности на основе метода регуляризации. - Изв. АН СССР, Физика земли, 1973, № 2, с.30-41.
16. ТИХОНОВ А.Н., ГЛАСКО В.Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах. - ЖВМиФ, 1965, т.5, № 3, с.463-473.

Раздел II  
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А.С.Алексеев, В.И.Добринский

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ  
УСЛОВНО-КОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

При решении условно-корректных задач существенным моментом является задание множества корректности  $M$ . Выбор множества  $M$  в основном определяется физическим содержанием рассматриваемой задачи, а также требованием не допустить большого роста погрешностей в результате обработки данных. В итоге может возникнуть ситуация, когда "истинное" решение уже не принадлежит множеству  $M$  и вместо него находится, вообще говоря, квазирешение  $[I]$ . Исследователь всегда должен знать как взаимоотносятся "истинное" решение и квазирешение. Это расхождение следует учитывать особенно тогда, когда результат применения алгоритма подвергается в дальнейшем достаточно сложной обработке. В ряде случаев множество  $M$  может оказаться недостаточно широким для удовлетворительного решения практической задачи и тогда возникает проблема расширения границ  $M$ . Простое повторение эксперимента не всегда приведет к успеху из-за его принципиальных особенностей. Разнообразие геофизических методов предлагает одно из возможных решений данной проблемы, ос-

нованное на идее комплексирования [2].

Продемонстрируем это на следующем примере. Рассматривается возникающая при разведке морских осадков одномерная обратная динамическая задача сейсмоки [2]:

$$\frac{\partial \Psi_1(x, t)}{\partial x} - A(x)\Psi_2(x, t) = \frac{\partial \Psi_1(x, t)}{\partial t}, \quad (A(x) \equiv 0 \text{ при } x < 0),$$

$$- \frac{\partial \Psi_2(x, t)}{\partial x} + A(x)\Psi_1(x, t) = \frac{\partial \Psi_2(x, t)}{\partial t}, \quad \Psi_1(x, t) \Big|_{t=0} = 0,$$

$$\Psi_2(x, t) \Big|_{t=0} = g(-x), \Psi_1(x, t) \Big|_{\substack{t>0 \\ x<0}} = \varphi(t+x), (\varphi(t) = g(t) \equiv 0 \text{ при } t < 0).$$

Здесь требуется по заданным формам падающей  $g(t)$  и отраженной  $\varphi(t)$  волн определить акустическую жесткость среды  $\sigma(x) = \sigma(0) \exp(2 \int_0^x A(x) dx) = \rho(x) c(x)$  ( $\rho(x)$  – плотность среды,  $c(x)$  – скорость волны).

На первом этапе решается интегральное уравнение  $g(t) * v(t) = \varphi(t)$  относительно переходной характеристики среды  $v(t)$ , а на втором рассматривается та же обратная задача, но с данными:  $g(t) = \delta(t)$ ,  $\varphi(t) = v(t)$ . Регуляризованное решение интегрального уравнения находится по формуле:

$$v_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_H \leq |\omega| \leq \omega_B} \frac{F(\omega)G^*(\omega)}{|G(\omega)|^2 + \lambda^2} e^{-i\omega t} d\omega,$$

( $F(\omega)$  и  $G(\omega)$  – преобразования Фурье, соответственно, функций  $\varphi(t)$  и  $g(t)$ ), откуда вытекает, что  $v_1(t)$  можно рассматривать как результат полосовой фильтрации истинного решения  $V(t)$ . Проведенное исследование показало, что фильтрация нижних частот приводит к простому выглаживанию структурной функции  $\sigma(x)$ , а потеря низких частот в импульсной сейсмограмме ведет к недопустимому искажению искомого разреза  $\sigma(x)$ . (на рис. I: кривая I – задаваемая среда, кривая 2 – построенная при  $\omega_H = 4\pi$ ). В практическом эксперименте величина  $\omega_H$  всегда заведомо больше нуля в силу ряда труднопреодолимых причин. Для восстановления низких частот предлагается использовать кинематические

методы обработки данных профильных наблюдений, достаточно точно определяющие осредненные характеристики изучаемой толщи. Кривая 3 на рис. 1 соответствует случаю комплексирования с методом отраженных волн. В расчетах принималось;  $\rho = \text{const}$ ,  $c(z) = 1.5(1+z) + 0.5 \sin 14\pi z$ , ( $x = \int_0^z \frac{dz}{c(z)}$ ). На глубине  $z_0 = 0.8$  км задавалась отражающая граница. По голографу отраженных волн были определены градиент скорости и глубина до отражающей границы, после чего был рассчитан спектр импульсной сейсмограммы для полученной градиентной среды. Этим спектром доопределялся на низких частотах ( $\omega < 4\pi$ ) спектр импульсной сейсмограммы для исходной среды (кривая 1), а затем находился разрез среды (кривая 3).

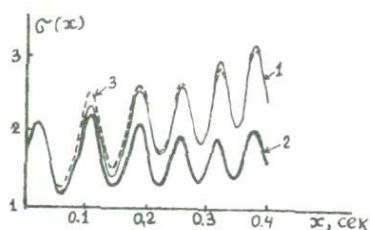


Рис. 1.

### Л и т е р а т у р а

1. ИВАНОВ В.К. О некорректно поставленных задачах. - Математический сборник, 61, вып. 2, 1963.
2. АЛЕКСЕЕВ А.С., ДОБРИНСКИЙ В.И. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмологии. - Сб. Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть 2, Новосибирск, 1975.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ  
 ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Пусть двумерная непрерывно-неоднородная среда со скоростью пробега сейсмических волн  $v(\xi, \eta)$  заполняет полуплоскость  $-\infty \leq \xi \leq +\infty, \eta \geq 0$ . Рассмотрим функцию

$$\tau(x, y, z) = \int_{\Gamma(x, y)} \frac{ds}{v(\xi, \eta)}, \quad (1)$$

где  $\Gamma$  - экстремаль, соединяющая точки среды с координатами  $(x, z)$  и  $(y, z)$ . Задачу определения функции  $v(\xi, \eta)$  по функции  $\varphi(x, y) = \tau(x, y, 0)$ ,  $0 \leq x \leq y \leq L < \infty$  в области  $D$ , ограниченной отрезком  $[0, L]$  границы  $\eta = 0$  и экстремалью, соединяющей точки  $(0, 0)$  и  $(0, L)$  можно свести [1, 2] к обратной задаче для уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} + \sqrt{f_1^2(x, z) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2} + \sqrt{f_2^2(y, z) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2} = 0 \quad (2)$$

типа Гамильтона-Якоби. Здесь функции  $f_1, f_2$ , связанные с  $v(\xi, \eta)$  соотношениями  $f_1(x, z) = -1/v(x, z)$ ,  $f_2(y, z) = 1/v(y, z)$  подлежат определению при условии

$$\tau(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad 0 \leq x \leq y \leq L. \quad (3)$$

В случае скоростной функции  $v(\xi, \eta)$ , монотонно возрастающей по переменной  $\eta$ , в работе [2] для численного решения обратной задачи применен метод характеристик.

В работе [3] такой же метод предложен для решения задачи интегральной геометрии на части полуплоскости, которая является линейной задачей, тогда как обратная кинематическая является нелинейной, так как кривые  $\Gamma$  в (1) подлежат определению, а в задаче интегральной геометрии задаются. Соответственно, аналог уравнения (2) является линейным уравнением Гамильтона-Якоби.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \operatorname{ctg} \theta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \operatorname{ctg} \theta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{f_1}{\sin \theta_1} - \frac{f_2}{\sin \theta_2} = 0, \quad (4)$$

где  $\varphi(x, y, z) = \int_{\Gamma(x, y)} u(\xi, \eta) ds$ ,  $\theta_1, \theta_2$  - углы, образованные

осью  $Oz$  и касательными соответственно в точках  $(x, z)$  и  $(y, z)$ , лежащих на кривой  $\Gamma$  из заданного семейства,

$$f_1 = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -u(x, z), \quad f_2 = \lim_{x \rightarrow y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u(y, z),$$

$u(\xi, \eta)$  - непрерывная функция, подлежащая определению по заданной функции

$$\Phi(x^0, y^0) = \int_{\Gamma(x^0, y^0)} u(\xi, \eta) ds = \Phi(x^0, y^0, 0) \quad (5)$$

на заданном семействе кривых  $\Gamma(x^0, y^0)$ ,  $0 \leq x^0 \leq y^0 \leq L < \infty$ .

Если семейство кривых  $\Gamma(x^0, y^0)$  является семейством экстремалей функционала  $J = \int_{\Gamma(x^0, y^0)} u(\xi, \eta) ds$ , то есть функция  $\Phi(x^0, y^0)$

приобретает смысл времени пробега возмущения в неоднородной среде с распределением скорости  $v(\xi, \eta) = \sqrt{u(\xi, \eta)}$  от точки  $(x^0, 0)$  до точки  $(y^0, 0)$ , то приходим к обратной кинематической задаче сейсмоки, где углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  исключаются соотношениями  $\cos \theta_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} / f_1$ ,  $\cos \theta_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} / f_2$ , являющимися следствием закона преломления Снеллиуса. Поэтому применение метода характеристик для численного решения задачи интегральной геометрии аналогично применению в обратной кинематической задаче. Более того, теперь представляется возможным решить обратную кинематическую задачу методом последовательных приближений.

А именно, пусть имеется наблюдаемый годограф  $\varphi(x, y)$ ,  $0 \leq x \leq y \leq L < \infty$  от среды со скоростью  $v(\xi, \eta)$ , а  $\varphi_0(x, y)$  - приближенное представление годографа  $\varphi(x, y)$ , обладающее дифференциальными свойствами, позволяющими применить вышеупомянутый метод характеристик. Для определения поправки  $\Delta v_1(\xi, \eta) = v(\xi, \eta) - v_0(\xi, \eta)$  приходим к линеаризованной [4] обратной кинематической задаче, сводящейся к рассмотренной выше задаче интегральной геометрии: по невязке

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi_0(x, y) = \int_{\Gamma(x, y)} \Delta n_1(\xi, \eta) ds$$

определить функцию  $\Delta n_1(\xi, \eta) = -\frac{\Delta v_1}{v_0(v_0 + \Delta v_1)}$  при заданном се-

месте кривых  $\Gamma$ , которое является семейством лучей в среде со скоростью  $v_0(\xi, \eta)$ , известной после применения метода характеристик. В случае необходимости можно определить новую поправку  $\Delta v_2(\xi, \eta)$  и т.д.

В заключение заметим, что подход к решению обратной математической задачи, основанный на уравнении (I), легко распространить на случай трехмерных неоднородных сред. Уравнением (I) также описывается кинематика в разрывных средах, кинематика отраженных волн. При этом, если  $v(\xi, \eta) = P(a_1, \dots, a_m; \xi, \eta)$  — известная функция параметров  $a_1, \dots, a_m$  и обратная задача заключается в определении этих параметров, то можно сформулировать эквивалентную задачу оптимального управления с параметрами [5], основываясь на описании кинематики уравнением (I) типа Гамильтона-Якоби. Однако описанная методика наталкивается на значительные трудности, связанные с численной реализацией и присущие для любого метода характеристик.

#### Л и т е р а т у р а

1. БЕЛОНОСОВА А.В., АЛЕКСЕЕВ А.С. Об одной постановке обратной кинематической задачи сейсмики для двумерной непрерывно-неоднородной среды.—Сб. Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных, М., "Наука", 1968.
2. РОМАНОВ М.Е. Метод характеристик численного решения обратной кинематической задачи сейсмики.— Сб. Математические проблемы геофизики, вып. 3, Новосибирск, 1972
3. РОМАНОВ М.Е. О численном решении задачи интегральной геометрии.— Сб. Математические проблемы геофизики, вып.6, ч. I, Новосибирск, 1975.
4. РОМАНОВ В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Спецкурс для студентов НГУ, Новосибирск, 1973.
5. БОЛТЯНСКИЙ В.Г. Математические методы оптимального управления. М., "Наука", 1969.

ОЦЕНКИ ВЗАИМНОГО СПЕКТРА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для многих геофизических задач представляет интерес оценка спектров мощности стационарных случайных процессов. В этой заметке мы даем обобщение метода для оценки одномерного спектра авторегрессии на двумерный и многомерный случаи.

1. Пусть даны две конечные реализации двух стационарных случайных процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Априори известно, что между ними существуют некоторые корреляционные связи. Принцип описываемой методики состоит в том, что экспериментальные данные выступают как реализации двумерного процесса авторегрессии порядка  $M$ :

$$x(t) = - \sum_{j=1}^M a_j x(t-j) + \theta(t), \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad (1)$$

где  $a_j$  — матрицы порядка  $2 \times 2$  из коэффициентов авторегрессии, а  $\theta(t)$  — белый шум. При помощи процесса авторегрессии (1) можно построить линейную систему уравнений для искомым коэффициентов  $a_j$ . Эта система подобна системе Кал-Уокера для одномерного случая, только вместо скалярных коэффициентов стоят матрицы.

2. На основе этого алгоритма были проведены тестовые расчеты.

Нами показано, что метод авторегрессии эффективен, если экспериментальные данные действительно можно описать процессом авторегрессии малого порядка. Если это описание невозможно, то качество оценки сильно зависит от структуры экспериментальных данных. С другой стороны, наши опыты показывают, что большое отличие между практическими и истинными порядками процесса, вероятно, не существенно. Имеется принципиальная возможность применять смешанные модельные процессы для повышения эффективности оценок.

КОРОТКО-ВРЕМЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ  
ПО МЕТОДУ МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

Интерпретация геофизических данных реализаций некоторых случайных процессов – важный подход при обработке этих данных с целью получения интересующих физиков параметров.

В качестве примера такого подхода рассматривается представление регистраций радиоизлучения солнца с помощью своих спектров мощности. Эти спектры дают физическую информацию о турбулентных процессах в плазме солнечной атмосферы и, вероятно, о размерах структур магнитных полей солнца. Для вычисления спектров необходимо предполагать стационарность временных рядов. Но в нашем случае эта стационарность не имеет места, особенно для дискретной части спектров. Поэтому мы вначале производим разделение регистрации на коротко-временные интервалы, а затем проводим спектральный анализ, по методу максимальной энтропии, который обладает рядом преимуществ по сравнению с классическим методом Блэкмана-Тьюки.

Для изучения качества метода была исследована смесь из трех синусоид различной амплитуды и шума различной интенсивности. На примере этой модели можно сделать вывод: метод позволяет относительно точно определять развитие во времени самой сильной линии в спектре и показывает независимость от амплитуды шума в исследованных пределах.

Этот метод был применен для обработки данных радиоизлучения солнца. Как и ожидалось, поведение самой сильной линии спектра в плоскости частоты-времени определяется хорошо, но мы не можем делать никаких выводов о поведении во времени дискретных линий, амплитуда которых на порядок ниже.

ЯВЛЕНИЕ ПОЛНОГО ВНУТРЕННЕГО ОТРАЖЕНИЯ  
В ЗАДАЧЕ О ПАДЕНИИ НАКЛОННОЙ ВОЛНЫ

Изучается задача о падении наклонной волны на слоисто-неоднородное полупространство. Из однородного полупространства  $z < 0$  на границу раздела  $z = 0$  под углом  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  падает плоская волна  $\varphi_0(z, x, t) = \varphi_0(t - \frac{x \sin \alpha + z \cos \alpha}{c_0})$ , имеющая передний фронт:  $\varphi_0(\xi) \Big|_{\xi < 0} \equiv 0$ . Волновое уравнение имеет вид  $u_{tt}(z, x, t) = c^2(z) \Delta_{x,z} u(z, x, t)$ , где  $c(z) = c_0 = \text{const}$ , при  $z < 0$ . При  $z = 0$  предполагаются выполненными условия непрерывности  $u(z, x, t)$  и  $u_z(z, x, t)$ . В прямой задаче  $c_0$ ,  $c(z)$ ,  $\varphi_0(\xi)$  считаются заданными. Как известно, задача о нахождении  $u(z, x, t)$  в терминах переменных  $z, \xi (\xi = t - \frac{x \sin \alpha}{c_0})$  сводится к граничной задаче

$$\begin{cases} u_{\xi\xi} = Q^{-1}(z) u_{zz}; & z > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} (u_z - u_{\xi}) \Big|_{z=0} = -2\varphi_0'(\xi); & \xi \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $Q(z) = \frac{1}{c^2(z)} - \frac{\sin^2 \alpha}{c_0^2}$ , а масштаб скорости выбран так, что  $\frac{\cos \alpha}{c_0} = 1$ . В такой постановке решение задачи (1.1), (1.2) не единственно. Дополнительные условия, обеспечивающие единственность в "гиперболическом" ( $0 < Q_{\min} \leq Q(z) \leq Q_{\max}$ ) и "эллиптическом" ( $0 < Q_{\min} \leq -Q(z) \leq Q_{\max}$ ;  $Q(z) < 0$ ) случаях поставлены в работах [1], [2].

Нами рассмотрена модельная задача, в которой  $Q(z)$  может менять знак скачком не более четырех раз, нигде не обращаясь в ноль. В промежутках знакоопределенности  $Q(z) \in C_{loc}^2$  (допускается конечное число разрывов  $Q(z)$ ; при  $z \rightarrow \infty Q(z) \rightarrow Q(\infty) \neq 0$ ). При некоторых специальных ограничениях на поведение  $Q(z)$  наш подход позволяет рассмотреть случаи, когда  $Q(z)$  меняет знак скачком любое конечное число раз. Для корректной постановки и решения задачи (1.1), (1.2) используется принцип предельного поглощения по следующей схеме: в полупространстве  $z > 0$  вводится поглощение  $\sigma > 0$ ; при этом волновое уравнение имеет вид  $u_{tt}(z, x, t|\sigma) + \sigma u_t(z, x, t|\sigma) = c^2(z) \Delta_{x,z} u(z, x, t|\sigma)$ . Соответственно, граничная задача с поглощением принимает вид

$$\begin{cases} u_{\xi\xi} + \frac{\sigma}{c^2(z)Q(z)} u_{\xi} = Q^{-1}(z)u_{zz}; & z > 0 \quad (1.3) \\ (u_z - u_{\xi}) \Big|_{z=0} = -2\Phi'_0(\xi); & \xi \in (-\infty, +\infty). \quad (1.4) \end{cases}$$

С использованием метода Фурье доказывается, что последняя задача имеет единственное решение, если принять условие убывания  $u(z, \xi | \sigma) \rightarrow 0$  равномерно по  $\xi$ . Затем описывается предельный переход  $u(z, \xi | \sigma) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} u(z, \xi)$  и показывается, что предел  $u(z, \xi)$  является решением задачи (I.1), (I.2). Преобразование Фурье  $w(z, \omega | \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\xi} u(z, \xi | \sigma) d\xi$  ( $\sigma \geq 0$ ) эффективно строится с использованием фундаментальных систем решений соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения. Для них известны квазиклассические представления, что позволяет исследовать поведение  $w(z, \omega | \sigma)$  при  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Если в среде есть слои с  $Q(z) > 0$ , заключенные между слоями с  $Q(z) < 0$ , то при некоторых  $\omega$  имеют место резонансные явления (аналогичные эффекту четвертьволнового слоя), осложняющие исследование в случаях, когда таких слоев больше одного.

В обратной задаче, в случае, когда  $Q(z) > 0$   $z \in (0, h_1)$ ;  $Q(z) < 0$   $z \in (h_1, h_2)$ ; ... при дополнительном условии  $Q(z) = \text{const} < 0$  при  $z \in (h_1, h_2 + \delta)$  ( $\delta$  сколь угодно мало) удается выделить из заданной отраженной волны слагаемое, по которому  $Q(z)$  (и  $c(z)$ ) восстанавливается в промежутке  $(0, h_1)$  локальным методом.

### Л и т е р а т у р а

1. АЛЕРСЕЕВ А.С., МЕТРАБОВ А.Г. Прямая и обратная задачи рассеяния плоских волн на неоднородных переходных слоях. - Сб. Математические проблемы геофизики, вып.3. Новосибирск, 1972, с.8-36.
2. МЕТРАБОВ А.Г. Прямая и обратная задачи рассеяния плоских волн на неоднородных переходных слоях. (Эллиптический случай). - Сб. Математические проблемы геофизики, вып.3. Новосибирск, 1972, с.113-123.

К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \quad (1)$$

где нелинейный оператор  $A$  отображает гильбертово пространство  $U$  в гильбертово пространство  $F$ ;  $f \in F$  известна с какой-то точностью; существует производная Фреше  $A'(u)$  оператора  $A$ , и задача принадлежит к классу некорректных. Применим метод регуляризации, основанный на вариационном принципе: уравнение (1) линеаризируем на предшествующей точке и стабилизатор положим равным  $\|u - u^*\|_U^2$ ,  $u^* \in U$  — любая точка. Тогда уравнение Эйлера сглаживающего функционала имеет вид [1]

$$u_{n+1} = u_n - \{[A'^*(u_n)A'(u_n) + \alpha E]^{-1}A'^*(u_n)[Au_n - f] + \\ + \alpha[A'^*(u_n)A'(u_n) + \alpha E]^{-1}(u - u^*)\}. \quad (2)$$

Для любого  $\alpha$  получим итерационный процесс и должны определить подходящий параметр  $\alpha$  (звездочка означает сопряжение).

В [2] был разработан метод для решения нелинейной системы алгебраических уравнений. Метод можно обобщить и для уравнения (1). Тогда получим итерационный процесс.

$$u_{n+1} = u_n - [A'^*(u_n)A'(u_n) + \alpha E]^{-1}A'^*(u_n)[Au_n - f]. \quad (3)$$

который при выборе  $u^* = u_n$  на каждом шаге совпадает с (2). Обозначим  $\delta_{n+1} = u_{n+1} - u_n$  и (3) перепишем в виде

$$[A'^*(u_n)A'(u_n) + \alpha E]\delta_{n+1} = -A'^*(u_n)[Au_n - f]. \quad (4)$$

Обобщим теоремы из [2].

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $\alpha > 0$ -любое число и пусть  $\delta_{n+1}$  — решение (4). Тогда  $\delta_{n+1}$  минимизирует функционал  $\Phi[\delta, f] = \|Au_n + A'(u_n)\delta - f\|^2$  на сфере  $\|\delta\|^2 = \|\delta_{n+1}\|^2$ .

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $\delta(\alpha)$  для  $\alpha > 0$  является решением (4) для данного  $\alpha$ . Тогда  $\|\delta(\alpha)\|^2$  — непрерывная, невозрастающая

функция от  $\alpha$  и  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\delta(\alpha)\|^2 = 0$ . В [2] был далее разработан алгоритм выбора параметра  $\alpha$ . Алгоритм оказывается в некоторых случаях неустойчивым, так как  $\alpha$  практически выбирается по минимуму невязки. Здесь приведем модифицированный алгоритм, который сперва работает по алгоритму Марквардта, но в конце будет выбирать квазиоптимальное значение параметра  $\alpha$ . Алгоритм применим к обоим случаям; в первом  $\Phi(u) = \|Au - f\|^2$  и во втором  $\Phi(u) = \|Au - f\|^2 + \alpha \|u - u^*\|^2$ .

Зададим параметры алгоритма:  $\nu > 1$ ,  $\mu < 1$  — знаменатели геометрического ряда,  $\beta_1$  — число пренебрежимое с  $I$ , но больше чем оценка квазиоптимального значения параметра  $\alpha$  (его нужно выбирать по характеру задачи),  $\beta_2$  — число порядка  $10^3$  и  $\varepsilon$  — параметр для нормы разницы двух последовательностей итеративных функций. Начальные значения  $\alpha^{(0)}$  и  $u^{(0)}$  можно выбрать любым способом,  $\beta_1 < \alpha^{(0)} < \beta_2$ . На  $r$ -м шаге можно, решая (2) или (3) (в зависимости от функционала  $\Phi$ ), найти  $u(\alpha^{(r-1)})$  и  $u(\alpha^{(r-1)}/\nu)$  и вычислить  $\Phi(u^{(r-1)})$ ,  $\Phi(u(\alpha^{(r-1)}))$  и  $\Phi(u(\alpha^{(r-1)}/\nu))$ .

Алгоритм решения:

- 1) если  $\alpha^{(r-1)}/\nu < \beta_1$ , то  $\alpha^{(r)} = \alpha^{(r-1)}$  и на 3),
- 2) если  $\Phi(u(\alpha^{(r-1)}/\nu)) \leq \Phi(u^{(r-1)})$ , то  $\alpha^{(r)} = \alpha^{(r-1)}/\nu$  и  $u^{(r)} = u(\alpha^{(r-1)}/\nu)$  и на 1),
- 3) если  $\Phi(u(\alpha^{(r-1)}/\nu)) > \Phi(u^{(r-1)})$  и  $\Phi(u(\alpha^{(r-1)})) \leq \Phi(u^{(r-1)})$ , то  $\alpha^{(r)} = \alpha^{(r-1)}$ ,  $u^{(r)} = u(\alpha^{(r-1)})$  и на 1),
- 4) если  $\Phi(u(\alpha^{(r-1)}/\nu)) > \Phi(u^{(r-1)})$  и  $\Phi(u(\alpha^{(r-1)})) > \Phi(u^{(r-1)})$ , то  $\alpha^{(r-1)}$  умножить на  $\nu$  до случая  $\Phi(u(\alpha^{(r-1)}\nu^\omega)) \leq \Phi(u^{(r-1)})$  или  $\alpha^{(r-1)}\nu^\omega > \beta_2$  и затем положить  $\alpha^{(r)} = \alpha^{(r-1)}\nu^\omega$ ,  $u^{(r)} = u(\alpha^{(r-1)}\nu^\omega)$  и на 1) или продолжать,
- 5) для последовательности  $\alpha_r = \alpha^{(r-1)}\mu^p$  вычислять несколько раз (2) или (3); для данного  $\alpha_p$  получается последовательность  $\{u_p^{(\alpha_p)}\}$  и процесс оканчивается при условии  $\|u_{n+1}^{(\alpha_p)} - u_n^{(\alpha_p)}\| \leq \varepsilon$ . Тогда  $u^{(\alpha_p)} = u_{n+1}^{(\alpha_p)}$ ,

6) подходящее  $\alpha$  выбрать из условия  $\min \|u^{(\alpha)_P} - u^{(\alpha-1)_P}\|$ .

Приведенный модифицированный алгоритм Марквардта практически соединяет преимущества нескольких методов: метода Ньютона, градиентного метода и регуляризации.

### Л и т е р а т у р а

1. ТИХОНОВ А.Н., ГЛАСКО В.Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах. ЖВМ, 1965, т.5, № 3, с.463-473
2. MARQUARDT D.W. An Algorithm for Least-squares Estimation of Nonlinear parameters). Soc. Indust. Appl. Math., vol.11, No 2, 1963, p.431-441.

А.Л.Бухгейм, В.Г.Яхно

### О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим в  $R^3$  дифференциальное уравнение

$$[D_t^2 - P(x, D)]u = f(x, t) \quad (1)$$

с данными Коши

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad D_t u(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

где  $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha$  - равномерно эллиптический оператор в  $R^3$ ,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

$$\alpha \in A = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid |\alpha| \leq 2, \alpha_i \geq 0, \alpha_i - \text{целое}\}.$$

Пусть  $A_1, A_2$  - разбиение множества  $A$  на два непересекающихся подмножества  $A = A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 = \emptyset$ . Коэффициенты  $a_\alpha(x)$ , входящие в оператор  $P(x, D)$ , считаются известными в  $R^3$ , если  $\alpha \in A_1$  и известными вне некоторой области  $\Omega$ , если  $\alpha \in A_2$ . По-

этому оператор  $P(x, D)$  известен вне области  $\Omega$ . Пусть  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  – заданные вектор-функции размерности  $|A_2|$ , а  $u(x, t)$  – вектор-функция (размерности  $|A_2|$ ), являющаяся решением задачи Коши (1), (2) ( $|A_2|$  – мощность множества  $A_2$ ).

**З а д а ч а.** Определить  $P(x, D)$  в области  $\Omega$ , если вектор-функция  $D_t u(x, t)$  известна на множестве  $\mathcal{M} = S \times (0, T)$ . Здесь  $S$  – замкнутая поверхность в  $R^3$  класса  $C^2$ , окружающая область  $\Omega$  и звездная относительно  $\bar{\Omega}$ ,  $S \cap \bar{\Omega} = \emptyset$ ;  $T$  – некоторое достаточно большое положительное число. Если область  $\Omega$  достаточно мала, то при некоторых условиях на функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $f$  в классе функций  $a_\alpha(x) \in C^6(R^3) \cap \{a | \|a\|_{C^6(R^3)} \leq M\}$  доказана теорема единственности и устойчивости задачи определения коэффициентов при  $|\alpha| \leq 1$  и теорема амбарцумяновского типа для  $|\alpha| = 2$ . Точные формулировки теорем приведены в работе [1].

#### Л и т е р а т у р а

1. БУХГЕЙМ А.Л., ЯХНО В.Г. О двух обратных задачах для дифференциальных уравнений, – ДАН СССР, 229, № 4, 1976, с.785–786.

А.Н.Васильев

#### КОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ЕЕ СВЯЗЬ С ЗАДАЧЕЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В.Г.Романов [1] обратил внимание на то, что задача об определении неизвестного коэффициента  $f(z)$  в уравнении

$$u_{tt} = \Delta_z u + f(z)u + 4\pi b(z - \bar{z}, t), \quad z = (z_1, z_2, z_3) \in R^3,$$

при некоторой постановке сводится к задаче восстановления функции  $f$  по  $v$  – известным интегралам от нее по прямым. Функция от прямой  $v(p, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p_1 t + x_1, p_2 t + x_2, t) dt$  удовлетворяет уравнению ультрагиперболического типа  $v_{p_1 x_2} = v_{x_1 p_2}$ . Как показал Ф.Йон [2], верно и обратное: гладкие решения ультрагиперболического уравнения, подчиняющегося некоторым требо-

ваниям убывания на бесконечности, даются интегралами по прямым линиям от функции точки.

В данном сообщении задача о восстановлении функции  $f(z)$  по заданным интегралам от нее вдоль прямых, касающихся однополостного гиперboloида  $H: z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 1$ , сводится к изучению корректности краевых задач  $I, 2, 3$  для ультрагиперболического уравнения:  $\Delta_x u_i(x, y) = \Delta_y u_i(x, y), (x, y) \in \Omega_i; u_i|_{\partial\Omega_i} = \varphi_i(x, y), i = 1, 2, 3$ , здесь  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  для  $x = (x_1, x_2), \Delta_x = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ , области  $\Omega_1: |x| + |y| < 2; \Omega_2: ||x| - |y|| > 2; \Omega_3: |x| + |y| > 2, ||x| - |y|| < 2$ . При этом прямыми, не пересекающим  $H$  и расположенным внутри (вне)  $H$ , отвечают точки связанного множества  $\Omega_1(\Omega_2)$ . Точкам границ  $\partial\Omega_1(\partial\Omega_2)$  соответствуют прямые, касающиеся  $H$  изнутри (извне). Точки  $\Omega_3$  — прямые, пересекающие  $H$ .

Граничные данные  $\varphi_i$  не могут быть заданы произвольно, но должны удовлетворять некоторому набору соотношений. Это связано с тем, что имеется четырехпараметрическое семейство однополостных гиперboloидов, касающихся  $H$ , для каждого из которых справедлива теорема Асгейрссона, утверждающая равенство усреднений решения по двум семействам образующих каждого из этих гиперboloидов.

Справедливы следующие утверждения.

1. Задачи  $I$  и  $2$  эквивалентны; они переходят друг в друга при инверсии координат:  $(x, y) \rightarrow (\frac{4x}{|x|^2 - |y|^2}, \frac{4y}{|x|^2 - |y|^2})$ , при этом возникают естественные условия на поведение  $u_2, \varphi_2$  на бесконечности.

2. Если решение задачи  $I$  существует, то оно единственно в классе непрерывных функций и строится в явном виде.

3. Решение задачи  $3$ , вообще говоря, не единственно, указываются нетривиальные решения однородной задачи.

4. Имеется весьма богатая группа  $G$  нелинейных преобразований координат  $(x, y)$ , оставляющих инвариантной постановку задач. Удобно описание  $G$  в терминах однородных координат  $(\xi, \eta)$ , связанных с  $(x, y)$  по формулам  $\xi = (\tau(1 + \frac{|x|^2 - |y|^2}{4}), \tau x)$ ,  $\eta = (\tau(1 - \frac{|x|^2 - |y|^2}{4}), \tau y): g \in G$ , если  $g: (\xi, \eta) \rightarrow (L_1 \xi, L_2 \eta)$

или  $(\xi, \eta) \rightarrow (L_1 \eta, L_2 \xi)$ , где  $L_i$  — преобразование Лоренца (ортохронное в случае задач 1 и 2).

5. Если на множестве граничных данных  $\varphi_1$  ввести структуру гильбертова пространства  $H$ , задав скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \varphi(x, y) \overline{\psi(x, y)} \delta(2 - |x| - |y|) \frac{dx dy}{|x| |y|},$$

то операторы представления  $G$  левыми сдвигами унитарны в  $H$ , при этом критерий разрешимости может быть сформулирован так: 1)

$H$  раскладывается в ортогональную сумму подпространств  $H^+$  и  $H^-$ :  $H = H^+ + H^-$ , 2) имеется изометрический оператор  $V$ :  $H^+ \xrightarrow{Va} H^\infty$ , тогда класс разрешимости есть  $(I + V)H^+$ . Условия разрешимости задач 2 и 3 формулируется аналогично.

Таким образом, задание интегралов по прямым, касающимся изнутри и снаружи гиперболоида  $H$ , позволяет построить решение ультрагиперболического уравнения во всем пространстве и, в предположении специального убывания его на бесконечности, восстановить путем обращения Радона функцию точки  $f(z)$ ,  $z \in R^3$ .

Часть результатов получена мною совместно с А.С.Благовещенским.

## Л и т е р а т у р а

1. РОМАНОВ В.Г. Сб. Обратные задачи для дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1972.

2. JOHN F. Duke Math J., 4(1938), p.300-322.

П.К.Иванова  
(Болгария)

## РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ С ПОМОЩЬЮ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Пусть дано некоторое гравитационное поле  $G_i(x, y, z)$ ,  $i = 1, \dots, N$  в  $N$  наблюдательных точках. Для нахождения аномальных масс используется точечная модель  $M_k(\xi, \eta, \zeta, m)$ ,  $k=1, \dots, K$  — число гравитирующих масс, а  $R_{ik}^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$ .

Рассматривается функционал

$$U = \sum_{i=1}^N (G_i - \sum_{k=1}^K \frac{m_k \zeta_k}{R_{ik}^3})^2.$$

Находится  $\min_{\xi, \eta, \zeta, m} U$ , а потом увеличивается  $K$  и ищется  $\min_m U$ .

Для этого применяется симплекс-метод [1]. Его сущность состоит в том, что рассматриваемый  $k + 1$ -мерный симплекс подвергается трем изменениям:

1. Отражение -  $P^* = (1+\alpha)\bar{P} - \alpha P_h$ , где  $P_k$  - вершины симплекса,  $U_h = \max \{U_k\}$  для  $P_h$ , а  $U_l = \min \{U_k\}$  для  $P_l$ ,  $\alpha$  - коэффициент отражения.

2. Сжатие -  $P^{**} = \beta P - (1-\beta)\bar{P}$ ,  $\beta$  - коэффициент сжатия.

3. Растяжение -  $P^{**} = \gamma P^* + (1-\gamma)\bar{P}$ ,  $\gamma$  - коэффициент растяжения,  $\bar{P}$  - центр тяжести симплекса для  $k = h$ .

Эти три операции приводят симплекс в минимум рассматриваемого функционала  $U$ , где его вершины сжимаются в одну точку, которая дает значения оптимальных параметров.

Ниже приводятся два примера его применения.

**Пример 1.** Источник поля -  $M_k = (2, 2, 2, 8)$

Начальный симплекс -  $P_1(6, 4, I, I)$ ,  $P_2(7, 4, I, I)$ ,  $P_3(6, 5, I, I)$ ,  $P_4(6, 4, 2, I)$ ,  $P_5(6, 4, I, 2)$

Конечный симплекс -  $P_1(2, I, 9, I, 9, 7, 5)$ ,  $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5$

**Пример 2.** Источник поля -  $M_1(4, 2, I, 3)$ ,  $M_2(2, 2, 2, I, 2)$ .

Модель в начале минимизации:  $M_1(I, 2, I, I)$ ,  $M_2(2, 2, I, I)$ ,

$M_3(3, 2, I, I)$ ,  $M_4(4, 2, I, I)$ ,  $M_5(5, 2, I, I)$ ,  $M_6(I, 2, 2, I)$ ,

$M_7(2, 2, 2, I)$ ,  $M_8(3, 2, 2, I)$ ,  $M_9(4, 2, 2, I)$ ,  $M_{10}(5, 2, 2, I)$ ,

$M_{11}(I, 2, 3, I)$ ,  $M_{12}(2, 2, 3, I)$ ,  $M_{13}(3, 2, 3, I)$ ,  $M_{14}(4, 2, 3, I)$ ,

$M_{15}(5, 2, 3, I)$ .

Промежуточные значения масс: 0.20, 0.37, -0.07, 3.10, 0.20,

-0.05, 5.70, 2.70, -3.00, -1.00, 0.25, 5.40, 2.20, 1.00, 6.40

Конечные значения:  $M_4(4, 2, I, 3.10)$ ,  $M_7(2, 2, 2, I, 2)$ .

Эти два примера показывают, что аномальные массы найдены этим очень простым методом. Пример 2 решается за 50 сек и  $\min U = 0,9 \cdot 10^{-3}$ .

**м** Аномальное тело может быть получено и методом выметания оптимальных масс, полученных при нахождении  $\min U$ . Он за-  
 $\xi, \eta, \zeta, m$

ние скорости  $S$  – волн в верхней мантии не отражает полностью действительность. Вычисленные поправки на глубину очага на основе модели В1 были применены при обработке записей волн СКР на сейсмологической станции Коллм (ГДР). Получена очень хорошая согласованность между теоретическими годографами и годографом построенным для неглубоких землетрясений. Времена пробега от глубоких землетрясений показали систематическое отклонение порядка 5–6 сек от теоретической кривой. Объяснить это можно тем, что в верхней мантии модели В1 на небольших глубинах скорость волн  $S$  повышенная, а на глубинах от 420 до 671 км в модели В1 распределение скорости  $S$  – волн имеет отрицательный градиент. Этот факт исследуется и дальше на основе записей других станций.

Важным выводом этой работы является то, что для решения обратной задачи сейсмологии и построения моделей Земли необходимо применение данных, о которых мы знаем, каким путем они получены и какова их точность. Чтобы улучшить достоверность моделей, необходимо включать в процесс решения обратной задачи как можно больше независимых критерий, и тестов, то есть времена пробега различных волн, ограничения на плотность и другие физические параметры.

К.К. Лаврентьев

#### ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН С НЕИЗВЕСТНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

В статье рассматриваются задачи о нахождении неизвестного коэффициента в граничном условии третьего рода по некоторым сведениям о поведении функции Грина, а также прямые и обратные задачи для трехмерного волнового уравнения с граничным условием на оси.

I. Пусть  $U(x, z, t)$  является решением следующей задачи:

$$U_{tt} = U_{xx} + U_{zz},$$

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial z} + h(x)U \right] \Big|_{z=0} = \delta(x, t), \quad U|_{t < 0} \equiv 0, \quad z \geq 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

и ставится вопрос о восстановлении функции  $h(x)$  по функции  $\theta(t) = TU$ , где  $T$  — некоторый необратимый оператор. Конкретные постановки обратных задач определяются выбором оператора  $T$  и классами искомых и заданных функций. Приведем формулировку одной из них.  $h(x)$  ищется в классе непрерывных функций, удовлетворяющих требованию  $|h(x)| < M$ , где  $M$  достаточно велико, при  $x_0 < x < \frac{t^*}{2}$ .  $h(x)$  предполагается известной и  $|h(x)| < M_0$  при  $x < x_0$  ( $x_0 > 0$ ). Заданная функция  $\theta(t) = TU = 2\pi t \frac{d}{dt} [u(0, 0, t) - \frac{1}{\pi t}]$  непрерывна и  $|\theta(t)| < M_0$  при  $t < t^*$ .  $\theta(t)$  задается произвольно при  $t > 2x_0$ , а при  $t < 2x_0$  однозначно определяется по известной  $h(x)$  ( $x < x_0$ ).

Для всех рассмотренных обратных задач доказаны теоремы единственности на любую глубину и теоремы существования в малом. Доказательство состояло в том, что для  $h$  и  $\omega = 2\pi\sqrt{t^2 - x^2} \times \frac{\partial}{\partial t} [U(x, 0, t) - \frac{1}{\pi\sqrt{t^2 - x^2}}]$  была выведена нелинейная система вида  $X = AX$ , где  $A$  — оператор сжатия в некотором шаре подходящим образом выбранного банахова пространства, элементами которого являются пары функций

$$X = \begin{pmatrix} h(x) \\ \omega(x, t) \end{pmatrix}.$$

2. Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz},$$

$$U|_{t=0} = 0, \quad U_t|_{t=0} = \delta(x - x_0)\delta(z),$$

$$U|_{\rho=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} \sim a(z, t) \ln \rho + h(z)a(z, t) + o(1),$$

где  $h(z)$  — известная функция. Можно показать, что решение этой задачи существует и единственно при некоторых условиях на  $h(z)$  и имеет место конечная скорость распространения, то есть

$U(x, z, y, t)$  отлична от 0 только внутри конуса  $t > \sqrt{(x-x_0)^2 + z^2 + (y-y_0)^2}$ . Этот факт дает возможность рассмотреть обратную задачу нахождения  $n(z)$  по некоторым сведениям о функции  $a(z, t)$ , аналогичную задачам пункта I.

Р.Г.Мухометов

### О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ

В двухмерном пространстве  $x$  и  $y$  рассматриваются ограниченная область  $D$ , имеющая кусочно-гладкую границу  $\Gamma$ , и риманова метрика с элементом длины

$$dt = n(x, y)ds, \quad ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}, \quad (x, y) \in D. \quad (1)$$

Пусть известны расстояния

$$\tau(\gamma, z) = \int_{K(\gamma, z)} n ds, \quad (2)$$

между любыми двумя граничными точками  $\gamma$  и  $z$ , которые соединяет геодезическая  $K(\gamma, z)$  в метрике (I). По функции  $\tau(\gamma, z)$  требуется определить  $n(x, y)$ .

Приведенная задача находит применение в геофизике в связи с изучением распределения внутри земного шара скоростей распространения упругих волн и носит название обратной кинематической задачи сейсмологии.

При доказательстве теоремы единственности используется следующая

**Л е м м а .** Если  $n(x, y) \in C^k(\bar{D})$ ,  $n(x, y) > 0$ , то уравнение геодезической, выходящей из точки  $(x_0, y_0)$  под углом  $\theta$  будет:  
 $x = \varphi(x_0, y_0, \tau p, \tau q), \quad y = \psi(x_0, y_0, \tau p, \tau q), \quad (x_0, y_0) \in \bar{D},$

где  $p = 2n(x_0, y_0)\cos \theta$ ,  $q = 2n(x_0, y_0)\sin \theta$ , параметр  $\tau$  геодезической есть расстояние между точками  $(x, y)$  и  $(x_0, y_0)$  в метрике (I). Функции  $\varphi$  и  $\psi$  относительно своих аргументов  $x_0, y_0, \tau p, \tau q$  принадлежат  $C^2$ .

Этот результат получен в работе [1].

Пусть функция  $n(x, y)$  будет такова, что определяемые с помощью метрики (1) ее геодезические будут удовлетворять следующим условиям:

а) любые две точки в  $\bar{D}$  соединяются единственной геодезической, каждая геодезическая  $K(\gamma, z)$  должна пересекать  $\Gamma$  в некоторых точках  $\gamma$  и  $z$ ;

$$\text{б) } \frac{1}{\tau} \frac{D(\Phi, \Phi)}{D(\tau, \theta)} \geq c > 0, \quad c = \text{const.}$$

**Т е о р е м а .** Если ограниченная область  $D$  имеет кусочно-гладкую границу  $\Gamma$ , искомая функция  $n(x, y) \in C^4(\bar{D})$ ,  $n(x, y) > 0$  и удовлетворяет условиям а) и б), то задача (2) может иметь не более одного решения и справедлива оценка устойчивости:

$$\iint_D [n_1(x, y) - n_2(x, y)]^2 dx dy \leq (2\pi)^{-1} \int_0^L \int_0^L \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\tau_1(\gamma, z) - \tau_2(\gamma, z)) \right]^2 d\gamma dz,$$

где  $L$  — длина границы  $\Gamma$ ,  $n_i(x, y)$  — решение задачи (2) с соответственными данными  $\tau_i(\gamma, z)$ ,  $i = 1, 2$ .

## Л и т е р а т у р а

Г. СОБОЛЕВ С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

Х.Ян  
(ГДР)

## ПОВЫШЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СПЕКТРОМЕТРА ФУРЬЕ МЕТОДОМ ДЕКОНВОЛЮЦИИ

Задача нахождения спектра инфракрасного излучения  $S(\sigma)$  системы земля-атмосфера по его интерферонограмме  $i(x)$  сводится, как известно, к обращению преобразованию Фурье. Однако на практике мы знаем функцию  $i(x)$  лишь в конечном числе точек

ключается в перераспределении этих масс (по II лемме Пуанкаре) в кубической сетке циклически до получения однородного тела с заранее заданной плотностью [2].

### Л и т е р а т у р а

1. NELDER J.A., MEAD R. Computer J. 7, 308, 1964.
2. ZIDAROV D., ZHELEEV. Geophys.Prosp., v.18, 1970, 1, (14),.

Г.Ковалле  
(ГДР)

#### ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ ЗЕМЛИ

В сообщении обсуждаются различные подходы к решению одномерной обратной кинематической задачи сейсмологии. Основное внимание уделено методу Монте-Карло (подбора). Прямая задача (основной шаг в методе Монте-Карло) решалась для слоистой сферически симметричной модели Земли радиуса 6371,0 км с линейными законами изменения скорости в слоях. Для различных моделей строения Земли были рассчитаны годографы и поправки на глубину очага от 0 до 700 км.

Были получены годографы и поправки на глубину очага для прямых волн P и S, волн проходящих через ядро PKP, SKS, SKP, отраженных от ядра PcP и ScS, а также отраженных от внутреннего ядра PKiKP и SKiKS. Во всех случаях проводилось сравнение полученных результатов с соответствующими годографами Джеффриса, Буллена.

Так, например, отклонение времен пробега волн PKP, рассчитанных для модели В1 - Йордана, Андерсона, достигли не больше 1,5 сек; для волн SKS - около 4 сек. Хотя отклонения времен пробега для волн SKP модели В1 от таблиц Джеффриса Буллена лежали между 2,5 и 4,5 сек, мы пришли к выводу, что распределе-

$x_m = m/2\sigma_1$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$ , поэтому для устойчивого решения нашей задачи приходится применять дополнительные сведения о функциях  $S(\sigma)$  и  $i(x)$ . Мы считаем, что  $S(\sigma) \equiv 0$  при  $\sigma \notin [-\sigma_0, \sigma_0]$ , а значения  $i(n/2\sigma_0)$  для  $|n| > M$  очень малы ( $\sigma_1 > \sigma_0$ ,  $n$  - целое). В этом случае, решая систему уравнений

$$i\left(\frac{m}{2\sigma_1}\right) = \sum_{n=-M}^M i\left(\frac{n}{2\sigma_0}\right) \frac{\sin 2\pi\sigma_0\left(\frac{m}{2\sigma_1} - \frac{n}{2\sigma_0}\right)}{2\pi\sigma_0\left(\frac{m}{2\sigma_1} - \frac{n}{2\sigma_0}\right)} \quad (1)$$

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm M,$$

можно найти приближенные значения  $i(x)$  на более "широком" (чем исходное) множестве точек  $\hat{x}_n = n/2\sigma_0$  и затем, пользуясь теоремой Котельникова, восстановить спектр  $S(\sigma)$  по формуле

$$S(\sigma) \approx \frac{1}{2\sigma_0} \sum_{n=-M}^M i(\hat{x}_n) \exp\{i2\pi\sigma \hat{x}_n\}, \quad \sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0].$$

Система (I) плохо обусловлена, поэтому для ее решения мы применили известные методы регуляризации, которые дают хорошие результаты для узкополосных спектров, у которых  $M \leq 20$ .

С.П.Белинский

#### ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ t - ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается симметрическая  $t$  - гиперболическая по Фридрихсу система первого порядка:

$$u_t = \sum_{i=1}^m A_i u_{x_i} + Du + f. \quad (1)$$

$A_i$ ;  $i = 1, \dots, m$ ;  $D$  - квадратные матрицы размера  $n \times n$ .  
 $u$ ,  $f$  - вектор-функции.

Обратная задача для системы состоит в следующем: неизвестна одна из матриц  $A_i$ ;  $i = 1, \dots, m$  или  $D$  при  $t \geq 0$ . Предполагается, что элементы  $c^{ij}$  искомой матрицы предста -

визны в виде конечных сумм:  $\sum_{k=1}^N a_k^{ij}(x_1, \dots, x_{n-1}) b_k^{ij}(t)$ , где  $a_k^{ij} \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ , а  $b_k^{ij}(t)$  - непрерывны по  $t$ . Для отыскания искомой матрицы задается информация о решении  $n$  задач Коши системы (I) на многообразии  $x_n = 0$ ;  $t > 0$ :

$$U \Big|_{t=0} = U_0; \quad U \Big|_{\substack{t>0 \\ x_n=0}} = G.$$

Здесь  $U_0$ ;  $G$  - матрицы размера  $n \times n$ . При этом матрица  $D$  определяется однозначно при выполнении условия  $\det G \neq 0$  (для всех конечных  $x_1, \dots, x_{n-1}, t > 0$ ), а матрица  $A_i$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) - при выполнении условия  $\det G_{x_i} \neq 0$  (для всех конечных  $x_1, \dots, x_{n-1}, t > 0$ ).

Доказательство этих фактов основано на применении энергетических неравенств и теоремы вложения Соболева и проведено в работах [1], [2] автора.

#### Л и т е р а т у р а

1. БЕЛИНСКИЙ С.П. Об одной обратной задаче для линейных симметрических  $t$  - гиперболических систем с  $n + 1$  независимыми переменными. - Дифференциальные уравнения. Минск, т.12, №1, 1976, с.15-23.
2. БЕЛИНСКИЙ С.П. Об обратной задаче для линейных симметрических  $t$  - гиперболических систем уравнений первого порядка. - Математические проблемы геофизики. изд. ВЦ, вып.6, ч.2, 1975, с.100-109.

Я. Визнер

(Чехословакия)

РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ПУТЕМ  
ВВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРА

Рассматривается радикальное уравнение Шредингера

$$u_1'' + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] u_1(x) = v(x)u_1(x), \quad (1)$$

которое описывает рассеяние бесспиновой частицы с определенными значениями энергии  $k^2$  и орбитального момента  $l$  на сферически-симметрическом потенциале  $v(x)$ .

Решение (I) при начальном условии

$$u_1(0, k) = 0 \quad (2)$$

и предположении на потенциал

$$\int_0^{\infty} x |v(x)| dx < +\infty \quad (3)$$

имеет для больших значений  $x$  и вещественных  $k$  следующее асимптотическое поведение:

$$u_1(x, k) \sim A(k) \sin(kx - \frac{\pi l}{2} + \delta_1(k)) \quad x \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где  $\delta_1(k)$  — предельная фаза, которая считается известной из эксперимента.

Рассматриваемая обратная задача заключается в восстановлении потенциала  $v(x)$  в уравнении (I) по заданной предельной фазе  $\delta_1(k)$ . При условии, что нет точечного спектра (отсутствие его вытекает из физических экспериментов), можно показать (см. [1]), что задача однозначно разрешима. Задачу (I) — (4) можно преобразовать к виду (см. [2])

$$y_1'(x) = - \frac{v(x)}{k} [j_l(kx) \cos y_1(x) - n_l(kx) \sin y_1(x)]^2, \quad (5)$$

$$y_1(0, k) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (5) с начальным условием (6) задает некоторое преобразование  $\phi$ , которое каждому потенциалу  $v(x)$  из класса (3) ставит в соответствии фазу  $\delta_1(k)$ . Тем самым наша задача свелась к решению функционального уравнения

$$\Phi(v) = 0, \quad (7)$$

где  $\Phi(v) \equiv \phi(v) - \delta_1$ . Это нелинейное уравнение в пространстве Банаха, которое можно решать непрерывным аналогом метода

Ньютона [3]. Будем предполагать, что исконый потенциал  $v$  зависит от параметра  $t: v = v(x, t)$ . Тогда, решая дифференциальное уравнение

$$v_t = - [\Phi'(v)]^{-1} \Phi(v) \quad (8)$$

с подходящим начальным условием

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad (9)$$

можно показать, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = v^*(x)$ , где  $v^*$  — решение уравнения (?).

Приведем алгоритм численного расчета для  $l = 0$ . Уравнение (5) принимает вид

$$y''(x) = - \frac{v(x)}{k} \sin^2(kx + y). \quad (9a)$$

Имеют место равенства

(10)

$$\begin{cases} \Phi'(v)h = - \frac{1}{k} \int_0^{\infty} h(x, t) \sin^2(kx + y) e^{-\frac{1}{k} \int_0^{\infty} v(\xi, t) \sin^2(k\xi + y) d\xi} dx \\ v_t'(x, t) = h(x, t) \end{cases}$$

Разобьем полуось  $0 \leq t < \infty$  прямыми параллельными оси  $x$ ,  $t = t_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ), отстоящими одна от другой на расстоянии  $\Delta t_i$ . Второе уравнение системы (10) заменим разностным уравнением

$$v(x, t_{i+1}) - v(x, t_i) = h(x, t_i) \Delta t_i. \quad (11)$$

На слое  $t = t_i$  решаем интегральное уравнение

$$\Phi'(v)h = - \Phi(v) \quad (12)$$

относительно функции  $h(x, t)$ , ядро которого задается посредством решения дифференциального уравнения (5a) при заданном начальном значении  $v_0(x)$ . Из уравнения (12) найдем  $v(t, x)$ , соответствующее новому значению  $t$  и процесс

повторяется до тех пор, пока расчетный потенциал не стабилизируется. Интегральное уравнение (12) есть уравнение первого рода; его решаем методом регуляризации [ 4 ] .

### Л и т е р а т у р а

- 1 АГРАНОВИЧ З.С., МАРЧЕНКО В.А. Обратная задача теории рассеяния. Изд. Харьковского ин-та, 1960.
2. БАБИКОВ В.В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М., "Наука", 1968.
- 3 ЖИДКОВ Е.П., МАКАРЕНКО Г.И., ПУЗЫНИН И.В. Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики. Физика элементарных частиц и атомного ядра, т.4, Дубна, 1973.
- 4 ТИХОНОВ А.Н. О решении нелинейных интегральных уравнений. ДАН СССР, 156, 6 1964.

А.С.Запреев

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ И ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрена следующая обратная задача.

Для решения уравнения Гельмгольца на плоскости  $OxU$

$$\Delta u(M) + k^2 u(M) = \varphi(k)h(M), \quad k \neq 0 \quad (1)$$

полагаются выполненными условия излучения на бесконечности. Здесь  $k$  - действительное или комплексное число, функция  $h(M)$  финитна, измерима и ограничена, носителем ее полагается ограниченное измеримое множество  $\Omega$ , расположенное в верхней полуплоскости и отграниченное от прямой  $\{y = 0\}$ . Функция  $\varphi(k)$  отлична от нуля на множестве  $\Lambda$  волновых чисел  $k$ .

Тогда по известным на прямой  $\{y = 0\}$  решениям семейства уравнений (I)

$$u_k(x, 0) = \Phi_k(x), \quad (2)$$

где  $k$  пробегает множество  $A$ , требуется определить функцию  $h(M)$ .

Физически задачу можно интерпретировать таким образом: по известному на прямой полю колебаний для набора частот  $A$  требуется найти форму множества когерентно излучающих источников и плотность излучения в каждой точке этого множества.

Получены теоремы единственности решения этой обратной задачи.

**Т е о р е м а 1.** Если  $A$  является множеством чисел  $k$  таких, что  $k^2$  — действительное или мнимое число и  $A$  имеет точку сгущения в бесконечности, то имеет место единственность решения рассматриваемой задачи.

**Т е о р е м а 2.** Если  $A$  является множеством комплексных волновых чисел, имеющих точку сгущения в конечной части комплексной плоскости, то решение сформулированной обратной задачи также единственно.

Для обратной задачи в трехмерном пространстве  $OXYZ$ , то есть когда известны решения семейства уравнений (I) на плоскости  $\{z = 0\}$

$$u_k(x, y, 0) = \Phi_k(x, y), \quad k \in A,$$

получены теоремы единственности такого же типа, как и в плоском случае.

Кроме того теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2, имеют место для обратной задачи дифракции (I), (2) в плоскости, когда уравнение (I) выполняется в нижней полуплоскости с волновым числом  $k_0$  и в верхней полуплоскости с волновым числом  $k_1$ , а на прямой  $\{y = 0\}$  непрерывны решения уравнений и их нормальные производные.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ  
ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Пусть  $\square u = u_{tt} - \Delta u$ , где  $\Delta$  - оператор Лапласа в  $E_3$ .  
Пусть  $\mu \in C^2(E_4)$ ,  $\mu > 0$ . Введем класс  $\mathcal{M}$  областей.

$$D_q = \{(t, x) \in E_4 : |x| < d_q(t, \frac{x}{|x|}), x \neq 0 \text{ или } x = 0, t > 0\},$$

$$d_q \in C^3(E_1 \setminus \{|x| = 1\}), 0 < d_q < R, |(d_q)_t| < 1.$$

Обозначим через  $\chi_D$  характеристическую функцию  $D$ .

**Т е о р е м а** . Если  $\square u_q = \mu \chi_{D_q}$  ( $q = 1, 2$ ) в  $E_4$ ,  $u_q = 0$  при  $t < 0$ , то из равенства  $u_1 = u_2$  на  $\{R < |x| < R + \delta, 0 < t < T\}$  вытекает, что  $(D_1 \setminus D_2) \cap \{t - |x| < T - R\} = \emptyset$ .

Более общие теоремы единственности и оценка устойчивости для оператора  $\square$  в  $E_2$  имеются в работе (1). Аналогичные результаты для общих параболических уравнений получены в (2). Заметка (3) посвящена формулировке теорем единственности для случая уравнения Гельмгольца и их применениям к обратным задачам дифракции волн.

Рассмотренный естественный аналог обратной задачи теории ньютонова потенциала относится к условно-корректным задачам математической физики.

Л и т е р а т у р а

1. ИСАКОВ В.М. Обратная задача теории потенциала для уравнения струны. - "Дифференциальные уравнения", 9, № 1, 1973, с.74-83.
2. ИСАКОВ В.М. Теоремы единственности для обратных задач тепловых потенциалов. Сиб. матем. журнал, 17, №2, 1976, с.259-272,
3. ИСАКОВ В.М. О восстановлении области по данным рассеяния, Доклады АН СССР, 230, №3, 1976, с.520-522.

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ПРОБЛЕМЕ БЕСКОНТАКТНОЙ  
ДИАГНОСТИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Как известно, математическая формулировка проблемы восстановления локальных характеристик неоднородных сред приводит к уравнениям первого рода. На примере ряда задач интерферметрии точечного взрыва, эмиссионной и абсорбционной спектроскопии рассмотрены различные численные реализации методов решения интегрального уравнения Абеля.

Сравнение методов проведено по коэффициентам усиления ошибок  $\gamma$ , определяемым как отношение ошибки восстановления к ошибке измерений. Алгоритмы решения уравнения Абеля, обычно применяемые в задачах локальной диагностики плазмы, нагретых газовых потоков и ударных волн (методы Пирса, Боккастена, Лохте-Хольтгрёвена и др.), характеризуются большими значениями  $\gamma$  ( $\sim 10-50$ ), тогда как регуляризующие алгоритмы дают существенно меньшее усиление ошибок,  $\gamma \sim 2-4$ . Рассматривались: статистическая регуляризация, метод Тихонова (критерий невязки), а также итерационные методы Беллмана, Вемури и Крынева. Обсуждаются последствия введения в алгоритмы регуляризации различных априорных ограничений (неотрицательность, симметрия, монотонность и т.п.). В частности, информация о близости искомой функции к некоторой пробной позволяет в ряде случаев повысить устойчивость задачи. Указанные приемы помогают бороться с "заглаживанием" решения, обычно присущим методам регуляризации при большом уровне шумов. Рассмотрена также задача локальной диагностики в более сложном случае, когда объект не обладает осевой симметрией.

Применение несколько модифицированных методов регуляризации позволяет также успешно решать задачи с ограниченной исходной информацией, задачи переноса излучения в оптически плотных объектах и т.п.

## РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ СКВАЖИННОЙ ГЕОФИЗИКИ

Общая обратная задача скважинной геофизики заключается в определении вещественного состава и строения горных пород и является практической целью скважинных геофизических исследований. Решение общей обратной задачи скважинной геофизики сводится к решению операторного уравнения I рода:

$$Ax = y; \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad (1)$$

где  $X, Y$  - некоторые функциональные пространства,  $A$  - вообще говоря, нелинейный, неявный и возмущений оператор, отображающий пространство  $X$  в  $Y$ .

Рассмотрим уравнение (I) в предположении о том, что  $X$  - линейное нормированное пространство,  $Y$  - рефлексивное банахово пространство и  $A$  - линейный ограниченный оператор, действующий из  $X$  в  $Y$ . Предположим, что при  $y = y_0$  существует точное решение  $x_0$  уравнения (I) такое, что  $x_0 \in R_B$ , где  $R_B$  - область значений линейного взаимно однозначного вполне непрерывного оператора  $B$ , отображающего рефлексивное банахово пространство  $Z$  в  $X$ , но точное значение  $y_0$  и оператора  $A$  неизвестны. Вместо них даны приближения  $y_\delta$  и  $A_h$ , где  $A_h$  - линейный взаимно однозначный ограниченный оператор, действующий из  $X$  в  $Y$  такие, что  $\|y_0 - y_\delta\| \leq \delta$ ;  $\|A - A_h\| \leq h$ . Требуется по  $y_\delta$  и  $A_h$  найти приближенное решение уравнения (I), в каком-то смысле близкое к  $x_0$ .

Рассмотрим решение обратных задач скважинной геофизики подобного типа на примере обратной задачи гамма-каротажа. Физическая постановка ее следующая: на оси буровой скважины задана интенсивность естественного гамма-излучения  $J(z)$ . Требуется по ней определить содержание  $q(z')$  радиоактивных элементов в горных породах, слагающих стенки скважины. Математическая формулировка процесса гамма-каротажа дается в "лучевом" приближении [I] интегральным уравнением Фредгольма I рода:

$$A_h[q, J_\delta] \equiv k \int_{-\infty}^{\infty} K(z, z') q(z') dz' = J_\delta(z); \quad -\infty < z < \infty,$$

(2)

где  $k$  - пересчетный коэффициент, а функция  $K(z, z')$  - ядро интегрального уравнения (2). Физическая природа погрешности оператора  $A_h$  заключается в аппроксимации точного оператора Больцмана приближенным и введении эффективного коэффициента поглощения гамма-излучения.

Применяя метод интегральных преобразований Фурье к уравнению (2) можно доказать единственность его решения.

Для приближенного решения уравнения (2) применялся метод регуляризации А.Н. Тихонова [2], который в данном случае будет являться оптимальным по порядку [3] методом тогда и только тогда, когда параметр регуляризации  $\alpha$  выбран из следующего соотношения:

$$\alpha = C(\delta + h)^2, \quad (3)$$

где  $C$  - некоторая постоянная. Константа  $C$  выбирается методом статистических испытаний с использованием априорной информации об искомом решении.

Результаты численного решения обратной задачи гамма-каротажа для ограниченного уединенного  $\gamma$  - излучающего пласта показывают, что метод регуляризации с выбором параметра  $\alpha$  из условия (3) для решения обратной задачи гамма-каротажа (и других подобных задач) высокoeffективен и его можно рекомендовать для количественной интерпретации данных каротажа естественного  $\gamma$  - излучения.

#### Л и т е р а т у р а

1. ЛЕЙПУНСКИЙ О.И., НОВОЖИЛОВ Б.В., САХАРОВ В.Н. Распределение  $\gamma$  - квантов в веществе. М., Физматгиз, 1960.
2. ТИХОНОВ А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации, ДАН СССР, 6, 151, № 3, 1963 с.501-504.
3. ТАНАНА В.П. Об оптимальности методов решения нелинейных неустойчивых задач. ДАН СССР, 220, №5, 1975, с.1035-1037.

КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ В  
ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ

При решении неустойчивой (некорректно поставленной) задачи, описываемой линейным операторным уравнением I-го рода

$$Au = f \quad (1)$$

с приближенными данными  $\{A_n; f_\delta\}$  ( $\|A_n - A\| \leq h$ ,  $\|f_0 - f_\delta\| \leq \delta$ ) условно можно выделить два этапа: 1) построение регуляризующего оператора (алгоритма)  $R_\alpha$ ; 2) аппроксимация его некоторым конечномерным  $R_n^\alpha$  с целью численного нахождения приближенных решений. В качестве  $R_\alpha$  рассмотрим регуляризатор Тихонова  $R_{\alpha, h} = (A_n^* A + \alpha E)^{-1} A_n^*$  ( $u_\Delta^\alpha = R_{\alpha, h} f_\delta$ ), а конечномерную аппроксимацию осуществим на основе проекционного метода. Пусть в гильбертовом пространстве  $U(F)$  задана последовательность конечномерных подпространств  $U_n \subseteq U_{n+1}$  ( $F_n \subseteq F_{n+1}$ ), удовлетворяющая в  $A_n$ -норме  $\|u\| + \|A_n u\|$  условию предельной плотности  $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n} = D(A_n)$  (\*), где  $D(A_n)$  - область определения оператора  $A_n$ .

**Т е о р е м а .** Если  $A$  - обратимый замкнутый оператор, то для того чтобы вариационная задача

$$\inf \{ \|A_n u_n - f_\delta\|^2 + \alpha \|u_n\|^2 : u_n \in U_n \} \quad (2)$$

была разрешима для любых  $\alpha > 0$ ,  $n \geq 1$ ,  $f_\delta \in F$  и последовательность экстремальных элементов  $u_\Delta^{\alpha, n} \rightarrow u_\Delta^\alpha$ ,  $n \rightarrow \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы было выполнено соотношение (\*).

Возможна также другая схема проекционного метода, в которой конечномерные аппроксимации находятся из решения вариационной задачи

$$\inf \{ \|Q_n A_n u_n - Q_n f_\delta\|^2 + \alpha \|u_n\|^2 : u_n \in U_n \}, \quad (3)$$

где  $Q_n$  — проектор  $F$  на  $F_n$ . Кроме того, результаты обобщаются на более общие классы пространств и операторов. Для линейных операторов  $A_n$  в гильбертовых пространствах  $U, F$  нахождение экстремальных элементов в задачах (2), (3) сводится к решению системы линейных уравнений.

М.В. Клибанов

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО  
РОДА С ЯДРАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Линеаризованные постановки обратных задач для параболических уравнений исследуются с помощью специальных интегральных уравнений первого рода [1,2]. Получены теоремы единственности некоторых классов таких уравнений. С помощью этих результатов устанавливаются теоремы единственности ряда обратных задач и задач интегральной геометрии. Результаты работы представляют собой обобщение известных ранее результатов М.М.Лаврентьева и В.Г.Романова.

Л и т е р а т у р а

1. КЛИБАНОВ М.В. Об одной задаче интегральной геометрии и обратной задаче для параболического уравнения. Сиб. матем. журнал, 17, № 1, (1976), с.76-84.
2. КЛИБАНОВ М.В. Обратная задача для параболического уравнения и одна задача интегральной геометрии. Сиб.матем. журнал, 17, № 3, (1976), с.564-569.

М.А.Атаходжаев, А.У.Серикбаев

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ЛОГАРИФИЧЕСКОГО  
ПОТЕНЦИАЛА

Здесь под обратной смешанной задачей понимается нахождение

области (G) и плотности  $\mu$  по внешним значениям на интервале (a, b) оси  $x_2 = 0$  следующего логарифмического потенциала:

$$U(x) = \iint_{(G)} \mu(y) \ln \Delta d\sigma. \quad (1)$$

Известно, что эта задача некорректна в классическом смысле. Справедлива следующая теорема.

**Т е о р е м а .** (Существование и единственность решения)  
 Пусть: 1) уравнение границы области (G) имеет вид

$$r = A(1 + \zeta(\varphi))$$

и плотность  $\mu = \gamma + \epsilon(\varphi)$ , где  $\epsilon(\varphi)$ ,  $\zeta(\varphi)$  — некоторые неизвестные функции на  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $A$  — радиус круга,  $\gamma = \text{const}$ ;  
 2) заданы

$$U(x)|_{x_2=0} = [\kappa A^2 \gamma \ln r']|_{x_2=0} + \alpha f_1(\rho),$$

$$V(x)|_{x_2=0} = \left[ \frac{\kappa A^4}{2} \ln r' \gamma \right]|_{x_2=0} + \alpha f_2(\rho),$$

где  $\rho = h \frac{\cos \varphi'}{\sin \varphi'}$ ,  $\alpha$  — малый параметр

$$f_i(\varphi') = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^i \cos m\varphi' + \beta_m^i \sin m\varphi'),$$

$$\left| \begin{matrix} \alpha_m^i \\ \beta_m^i \end{matrix} \right| < N_i q^m, \quad N_i = \text{const}, \quad q < 1, \quad 0 \leq \varphi' \leq \pi \quad (i = 1, 2).$$

Тогда существует единственное решение  $(\epsilon, \zeta)$  обратной смешанной задачи в классе периодических непрерывных функций.

Для неизвестных  $\zeta$  и  $\epsilon$  получаем систему нелинейных интегральных уравнений I-го рода вида

$$A_i(\zeta, \epsilon) = \lambda f_i(\varphi'), \quad (i = 1, 2),$$

где  $\lambda = \frac{\alpha}{A}$ .

Существование решений этих уравнений доказывается методом работы [1], а единственность решений следует из результатов работы [2].

### Л и т е р а т у р а

1. СРЕТЕНСКИЙ Л.Н. Известия АН СССР, серия матем. № 5-6 (551-576), 1938.
2. АТАХОДЖАЕВ М.А. Известия АН УзССР, серия физ. - мат. наук, № 3, (3-6), 1975.

Ф.Б.Абуталиев, Д.М.Алиев

#### ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

В работе на примере определения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $k$ , входящих в дифференциальное уравнение

$$y''(\tau) + (k + \frac{1}{\tau})y'(\tau) = 0 \quad (1)$$

и начальные условия

$$\left. \begin{aligned} y(\tau_0) &= \alpha, \\ y'(\tau_0) &= \beta, \quad 0 < \tau_0 \leq \tau < \infty \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

дается один способ регуляризации решения обратной задачи. Искомые параметры определяются из условия

$$\sum_{i=1}^N [y(\alpha, \beta, k, \tau_i) - y_a(\tau_i)] = \min, \quad (3)$$

где  $y(\alpha, \beta, k, \tau_i)$  - решение задачи (1)-(2), а  $y_a(\tau_i)$  -

функция, аппроксимирующая экспериментальные данные. При аппроксимации экспериментальных данных в качестве базисных функций берется последовательность подходящим образом подобранных линейно-независимых функций. Число потребных функций определяется с помощью критерия Фишера.

Количественной оценкой меры тесноты экспериментальных данных и аппроксимирующей функции служат коэффициенты корреляции  $\theta$ . На большом экспериментальном материале было установлено, что при  $\theta \geq 0,7$  функционал (3) становится регулярным.

С.Ж.Азаматов

#### О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ СО СДВИНУТЫМ АРГУМЕНТОМ

В настоящей работе исследуется задача Коши для уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned}
 Lu + b \left\{ \frac{\partial^{\nu} u}{\partial x_1^{\nu}} (0, x_2, \dots, x_n, z + x_1, t) + \right. \\
 \left. + \frac{\partial^{\nu} u}{\partial x_1^{\nu}} (0, x_2, \dots, x_n, z - x_1, t) \right\} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $L$  - линейное дифференциальное выражение по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ , причем  $Lu = 0$  является всегда "классическим" уравнением, для которого задача Коши с данными при  $t = 0$  корректна и хорошо исследована. Коэффициент  $b = b(x_1, x_2, \dots, x_n, z, t)$ ;  $z$  - является параметром сдвига.

Выражение внутри фигурной скобки следует понимать так: после  $\nu$  - кратного дифференцирования функции  $u$  по переменной  $x_1$ , подставляем  $x_1 = 0$ , а переменная  $z$  заменяется на  $z + x_1$  или  $z - x_1$ , соответственно.

В основе метода, применяемого нами для доказательства теорем единственности решения задачи Коши, лежит следующий путь рассуждения.

Обозначим

$$f_v(x_2, \dots, x_n, z, t) = \frac{\partial^v u}{\partial x_1^v}(0, x_2, \dots, x_n, z, t)$$

и будем временно считать эту функцию известной. Тогда уравнение (I) рассматривается как неоднородное с известной правой частью  $F_v$ , выражаемой через  $f_v$ . Поскольку задача  $\Delta u = F_v$  с условием Коши допускает явное решение, в которое  $f_v$  входит линейно под знаком интеграла, то дифференцируя его  $v$ -раз по переменной  $x_1$  и полагая  $x_1 = 0$ , мы приходим к функциональному уравнению, содержащему  $f_v$ . Единственность решения исходной задачи Коши обеспечивается единственностью решения полученного функционального уравнения.

В.Т.Чердниченко

#### РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

На основании работы [1] строится алгоритм решения обратной задачи гравиметрии, т.е. задачи о нахождении области по ее внешнему гравитационному потенциалу. Искомая область определяется методом последовательных приближений, причем приближения вычисляются явно.

Так как плотность  $\mu = \text{const}$  также часто бывает неизвестна, то представляет интерес построение семейства областей - решений обратной задачи гравиметрии в зависимости от плотности. Справедливо следующее утверждение. Если  $D^+$  - область с регулярной аналитической границей, то существует число  $\epsilon_0 > 0$ , что для любого  $\epsilon$ ,  $|\epsilon| < \epsilon_0$ , найдется область  $D_\epsilon^+$ , внешний потенциал которой с плотностью  $\mu + \epsilon$  равен потенциалу  $D^+$  с плотностью  $\mu$ . Область  $D_\epsilon^+$  строится указанным методом последовательных приближений.

## Л и т е р а т у р а

И. ЧЕРЕДНИЧЕНКО В.Г. О разрешимости "в малом" обратной задачи логарифмического потенциала. Дифференциальные уравнения, XI, № I, 1975.

В.Б. Кардаков

### НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДАННЫМИ НА ВРЕМЕНИПОДОБНЫХ МНОГООБРАЗЯХ

**З а д а ч а 1.** Пусть обобщенная функция  $u(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ;  $u \in S^*$  есть решение уравнения

$$P(D)u \equiv D_t^m u - \sum_{|\alpha| \leq m} a^\alpha D^\alpha u = 0, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (1)$$

в области  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Оператор  $P$  гиперболический по Петровскому с постоянными вещественными коэффициентами  $a^\alpha$ , причем  $a^{(0, \dots, m)} \neq 0$ . Далее

$$D_t^{\alpha_0} u(0, x) = \varphi_{\alpha_0}(x), \quad 0 \leq \alpha_0 \leq m-1; \quad \text{supp } \varphi_{\alpha_0}(x) \subset \{ |x-a| \leq 1 \} \setminus \{ x_n = 0 \}. \quad (2)$$

На гиперплоскости

$$D^{\alpha_m} u(t, x) = \varepsilon_{\alpha_m}(t, x'), \quad 0 \leq \alpha_m \leq m-1, \quad (3)$$

где функции  $\varepsilon_{\alpha_m}(t, x')$  определены на  $\Pi: \{t, x'\} / 0 < t, x' = (x, \dots, x_{n-1}), |x'| < r$ .

**Т е о р е м а 1.** Если выполнены условия (1)-(3), то  $\varphi_{\alpha_0}(x)$  определяются однозначно по  $\varepsilon_{\alpha_m}(t, x')$ .

**З а д а ч а 2.** Вектор-функция  $u(t, x) = (u^1, u^2, u^3), x \in \mathbb{R}^3$  есть решение задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \operatorname{grad} (\operatorname{div} u) + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} (\operatorname{rot} u) = \alpha(t)f(x), \quad u|_{t < 0} \equiv 0. \quad (4)$$

Здесь  $\alpha$  - известная скалярная функция ( $\alpha = 0$  при  $t < 0$ ),  $\lambda, \mu$  - константы Ляме,  $\rho$  - постоянная плотность. Далее

$$u(t, x', 0) = a(t, x'), \quad x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0. \quad (5)$$

На границе  $x_3 = 0$  выполнено

$$\lambda \operatorname{div} u + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$\mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = 0.$$

Требуется по известной функции  $a(t, x')$  определить  $f(x)$ , при выполнении условий (4)-(6). Задача 2 решается в явном виде. В случае, когда  $\alpha(t)$  - неизвестна, легко построить пример неединственности. Рассмотренные нами задачи возникают в сейсмологии [1].

#### Л и т е р а т у р а

1. ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., "Наука", 1973.

Н. П. Шишко

#### О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

З а д а ч а I. Определить функцию  $c(y)$  ( $-k \leq y \leq k$ )

удовлетворяющую условиям.

I. Существует единственное решение  $u(x, y)$  задачи Коши

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p} + b(y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(y)u = 0, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right|_{x=0} = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, p-1, \\ f(y), & k = p-1, \end{cases} \quad (2)$$

2. При  $x \geq 0$  задана функция

$$h(x) = u(x, 0). \quad (3)$$

Пусть  $|b(y)| \geq b_0 > 0$ , обозначим через  $\psi_1(u)$  функцию,

обратную к  $\psi(y) = \int_0^y \frac{d\xi}{b(\xi)}$  и положим

$$D(y) = \exp\left(\int_0^y c(\psi_1(u)) du\right) f(\psi_1(y)).$$

Т е о р е м а I. Если функция  $D(y)$  аналитична, то

$$D(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} h^{(np+p-1)}(0),$$

если  $-\infty < y < +\infty$  и интеграл  $\int_0^{\infty} |h(t)| e^{-\sigma_0 t} dt$  сходится, отсюда следует

$$D(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{-sy} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{s}t} h(t) dt ds \quad (\sigma_1 > \sigma_0).$$

З а д а ч а 2: на отрезке  $[0, 1]$  найти непрерывную функцию  $r(x)$ , если

I. существует единственное решение  $u(x, y)$  задачи Коши

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p} + \sum_{k=0}^{p-1} a_k(y) \frac{\partial^k u}{\partial x^k} + b(y) \frac{\partial u}{\partial y} = r(x)h(y) + q(y) \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right|_{x=0} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, p-1). \quad (5)$$

Здесь функции  $a_k(y)$ ,  $b(y)$ ,  $h(y)$ ,  $q(y)$  аналитичны,  $|b(y)| \geq b_0 > 0$ .

2. на отрезке  $[0, 1]$  задана функция

$$\tau(x) = u(x, 0). \quad (6)$$

Т е о р е м а 2. Существует единственное решение задачи 2.

# НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОФИЗИКЕ

(Материалы Всесоюзной школы)

Под редакцией

Михаила Михайловича Лаврентьева

J

Ответственный за выпуск А.Л.Бухгейм

Технический редактор В.С.Сергеев

Художник-оформитель И.Г.Бархатова

---

Подписано в печать 27/X - 1977 г. МНО3040

Формат бумаги 60x90 1/16 Объем 10 п.л.Уч.-из.л.10,7

Тираж - 500 экз. Заказ № 265 Цена 70 коп.

---

Ротапринт ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 90

Цена 70 коп.

2175

]