

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

ВОПРОСЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ
СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН
ВИБРАЦИОННЫМ ИСТОЧНИКОМ

НОВОСИБИРСК—1976

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

ВОПРОСЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ
СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН
ВИБРАЦИОННЫМ ИСТОЧНИКОМ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

НОВОСИБИРСК -1976

2048

Сборник посвящён проблеме вибрационного возбуждения сейсмических волн — проблеме, которая разрабатывается сравнительно недавно в связи с появлением и развитием нового (вибрационного) метода сейсморазведки.

В сборнике представлены некоторые теоретические и экспериментальные достижения последних лет, полученные в этой области. В частности, даётся изложение сравнительно нетрадиционного подхода к исследованию динамических задач о колебании упругого полупространства с широким использованием спектральных представлений. Приводятся результаты теоретических расчётов волнового поля в ближней и дальней зоне, излагаются результаты некоторых экспериментальных исследований волнового поля.

Ряд статей посвящён проблеме создания вибрационных источников возбуждения сейсмических волн. Рассматривается теория электрогидравлических, электромеханических, электромашинных источников.

Сборник адресован геофизикам, занимающимся освоением и внедрением вибрационного метода, инженерам-проектировщикам вибросейсмической техники, студентам-геофизикам для знакомства с новым направлением развития отечественной сейсморазведки.

Ответственные редакторы
член-корреспондент АН СССР Н.Н. Пузырёв
кандидат технических наук И.С. Чичини

Печатается по решению
геофизической секции Учёного совета
Института геологии и геофизики
СО АН СССР

© Институт
геологии и геофизики
СО АН СССР
1976

И. С. ЧИЧИН

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ
ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИИ УПРУТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе рассмотрены наиболее важные для теории вибрационных источников продольных и поперечных волн задачи о колебании упругого полупространства под действием распределённой стационарной силы, ориентированной вертикально и горизонтально. Дан вывод формул для расчёта волнового поля и описаны общие свойства возбуждаемых волн. Решение всех приводимых задач строится с использованием преобразования Фурье.

Одномерное преобразование Фурье в настоящее время настолько вошло в обиход инженерной практики геофизиков, что во многих случаях для объяснения сути исследуемого процесса его спектр Фурье оказывается более предпочтительным, чем знание самого процесса во временном представлении. Широкое использование спектральных представлений для решения стационарных динамических задач возбуждения сейсмических волн и исследования результатов решения привлекательно также в том отношении, что решение уравнений в частных производных в этом случае сводится к решению алгебраических уравнений, по которым значительно легче проследить физический смысл исследуемых явлений, не вычисляя интегралы, определяющие волновое поле. Работа написана с использованием терминологии, привычной для практиков-сейсморазведчиков. Это сделано не только для лучшего понимания динамических задач экспериментаторами, занятыми разработкой невзрывных источников сейсмических сигналов, но и потому, что при этом оказывается, что не-

которые сложные связи динамики волн объясняются понятиями, которые хорошо разработаны и стали давно привычными в инженерной практике геофизиков. Так, например, показано, что распределённая на поверхности $z=0$ сила создаёт поле волн, полностью эквивалентное площадному группированию, в котором компоненты тензора напряжения играют роль распределения чувствительностей элементов группы. Или другой пример. Затухание волн по оси x, y легко объясняется изломами пространственного спектра этих волн, так как в теории фильтров хорошо известно, что если частотная характеристика фильтра имеет крутой излом на некоторой частоте, то его собственный процесс будет иметь длительный хвост, заполненный колебаниями той частоты, на которой имеется излом спектра, причём крутизна этого излома однозначно определяет степень затухания собственного процесса этого фильтра.

І. О б о з н а ч е н и я

В работе мы будем по возможности использовать обозначения, которые стали обычными в сейсморазведочной аппаратуре.

$V_p; V_s$ - скорости распределения продольных (P) и поперечных (S) волн.

λ, μ - коэффициенты Ламе. $V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

ρ - плотность среды.

$\omega = 2\pi f$ - круговая частота.

$$P_o = \frac{\omega}{V_p}; \quad S_o = \frac{\omega}{V_s}.$$

$$\vec{K} = \begin{cases} K_x \vec{l}_x + K_y \vec{l}_y + P_z \vec{l}_z = K_z \vec{l}_z + K_\varphi \vec{l}_\varphi + P_z \vec{l}_z. \\ K_x \vec{l}_x + K_y \vec{l}_y + S_z \vec{l}_z = K_z \vec{l}_z + K_\varphi \vec{l}_\varphi + S_z \vec{l}_z. \end{cases}$$

$$K_z = K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}, \quad P_z = \sqrt{P_o^2 - K_z^2}, \quad S_z = \sqrt{S_o^2 - K_z^2}.$$

Φ - скалярный потенциал упругих волн,

$\psi = \psi_x \vec{l}_x + \psi_y \vec{l}_y + \psi_z \vec{l}_z$ - векторный потенциал,

$$\vec{U}_p = U_{px} \vec{e}_x + U_{py} \vec{e}_y + U_{pz} \vec{e}_z = U_{pz} \vec{e}_z + U_{py} \vec{e}_y + U_{px} \vec{e}_x$$

- смещение среды, определяемое скалярным потенциалом,

$$\vec{U}_s = U_{sx} \vec{e}_x + U_{sy} \vec{e}_y + U_{sz} \vec{e}_z = U_{sz} \vec{e}_z + U_{sy} \vec{e}_y + U_{sx} \vec{e}_x$$

- смещение среды, определяемое векторным потенциалом,

$\vec{U}_{pm}, \vec{U}_{sm}$ - двумерные спектры функций $U_{pm}(x, y), U_{sm}(x, y)$,
где $m = x, y$.

$$\vec{J}_p = \frac{d\vec{U}_p}{dt} = J_{px} \vec{e}_x + J_{py} \vec{e}_y + J_{pz} \vec{e}_z = J_{pz} \vec{e}_z + J_{py} \vec{e}_y + J_{px} \vec{e}_x$$

- скорость смещения \vec{U}_p волн

$$\vec{J}_s = \frac{d\vec{U}_s}{dt} = J_{sx} \vec{e}_x + J_{sy} \vec{e}_y + J_{sz} \vec{e}_z = J_{sz} \vec{e}_z + J_{sy} \vec{e}_y + J_{sx} \vec{e}_x$$

$\vec{J}_{pm}, \vec{J}_{sm}$ - двумерные спектры функций $J_{pm}(x, y)$ и $J_{sm}(x, y)$

$\tau_{zx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ - компоненты тензора напряжения,

$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_z \vec{e}_z$ - распределение (или плотность) силы источника
на поверхности $z = 0$,

T_x, T_z - двумерные спектры Фурье функций $F_x(x, y)$ и $F_z(x, y)$

$D = (s_0^2 - 2\kappa^2)^2 + 4\kappa^2 s_2 p_z$ - знаменатель Релея.

$$b = \frac{s_0}{\rho V_s}$$

Другие, менее употребительные обозначения даны непосредственно в формулах.

2. Пространственные спектры Фурье волнового поля.

Пусть на поверхности $z = 0$ задана сила источника, распределенная по закону

$$\vec{F}(x, y, t) = [F_x(x, y) \vec{e}_x + F_z(x, y) \vec{e}_z] \cos \omega t. \quad (1)$$

Поле смещений, создаваемое этим источником, будет описываться выражением

$$\vec{U} = \text{grad} \Phi(x, y, z, t) + \text{rot} \vec{\psi}(x, y, z, t), \quad (2)$$

где Φ и $\vec{\psi}$ - скалярный и векторный потенциалы, удовлетворяющие граничным условиям и волновым уравнениям:

$$\Delta \Phi = -\left(\frac{\omega}{V_p}\right)^2 \Phi, \quad \Delta \psi_z = -\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2 \psi_z, \quad \Delta \psi_y = -\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2 \psi_y. \quad (3)$$

В работе [6] Е.И.Шемякина показано, что в случае, когда составляющая F_y силы \vec{F} отсутствует, компонента ψ_x вектора $\vec{\psi}$ равна нулю.

На поверхности полупространства внутренние силы, возникающие за счёт деформации среды, находятся в равновесии с внешней силой (I), и поэтому граничные условия при $z = 0$ будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = -F_x(x, y) \cos \omega t \\ \tau_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \vec{U} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} = -F_z(x, y) \cos \omega t.\end{aligned}\quad (4)$$

Все остальные компоненты тензора напряжений считаем равными нулю на всей поверхности $z = 0$ и, в частности

$$\tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0.$$

В дальнейшем нам будет удобно перейти к комплексным величинам. Граничные условия (4) будем писать в виде

$$\begin{aligned}\tau_{zx} / z=0 &= -F_x(x, y) e^{-j\omega t} \\ \tau_{zz} / z=0 &= -F_z(x, y) e^{-j\omega t}\end{aligned}\quad (4I)$$

В этом случае полученное поле смещений $U(x, y, z, t)$ тоже будет комплексным. Но в окончательных формулах можно будет перейти к действительной части, при этом эта действительная часть будет соответствовать волновому полю, заданному по формулам (4)...

Потенциалы волнового поля в полупространстве $z > 0$ будем искать в виде двумерного преобразования Фурье:

$$\Phi(x, y, z, t) = e^{-j\omega t} \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}(K_x, K_y) e^{j(K_x x + K_y y + P_z z)} dK_x dK_y.\quad (5)$$

$$\Psi_{y,z}(x, y, z, t) = e^{-j\omega t} \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}_{y,z}(K_x, K_y) e^{j(K_x x + K_y y + S_z z)} dK_x dK_y$$

Подстановка этих выражений в волновые уравнения (3) даёт:

$$K_x^2 + K_y^2 + P_z^2 = P_0^2 \quad K_x^2 + K_y^2 + S_z^2 = S_0^2,\quad (6)$$

Компоненты функции воздействия $F(x, y, t)$ будем также представлять в виде двумерного преобразования Фурье:

$$F_{x,z}(x, y, t) = e^{-j\omega t} \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{T}_{x,z}(K_x, K_y) e^{j(K_x x + K_y y)} dK_x dK_y.\quad (7)$$

Подставляя (5) и (7) в граничные условия (4), получим для \mathcal{U}_{xz}

$$(S_0^2 - 2K_z^2)\bar{\Phi} + 2K_x S_z \bar{\Psi}_y = \frac{1}{\mu} T_z(K_x, K_y), \quad (8)$$

для \mathcal{U}_{xz} :

$$2K_y P_z \bar{\Phi} + (K_x^2 - S_z^2)\bar{\Psi}_y + K_y S_z \bar{\Psi}_z = \frac{1}{\mu} T_x(K_x, K_y)$$

и для \mathcal{U}_{yz} :

$$2K_y P_z \bar{\Phi} + K_x K_y \bar{\Psi}_y - K_x S_z \bar{\Psi}_z = 0.$$

Из этой системы определим функции $\bar{\Phi}$ и $\bar{\Psi}_{y,z}$;

$$\bar{\Phi} = 2 \frac{T_x}{\mu} \frac{K_x S_z}{D_0} + \frac{T_z}{\mu} \frac{S_0^2 - 2K_z^2}{D_0}, \quad (9)$$

$$\bar{\Psi}_y = -\frac{T_x}{\mu} \frac{S_0^2 - 2K_z^2}{D_0} + 2 \frac{T_z}{\mu} \frac{P_z K_z^2}{K_x D_0}, \quad (10)$$

$$\bar{\Psi}_z = -\frac{T_x}{\mu} \frac{(S_0^2 - 2K_z^2 - 4S_z P_z) K_y}{S_z D_0} + 2 \frac{T_z}{\mu} \frac{K_y \cdot P_z \cdot S_z}{K_x D_0}. \quad (11)$$

В формулы (II) входят функции $T_x(K_x, K_y)$ и $T_z(K_z, K_y)$ являющиеся двумерными спектрами функции воздействия:

$$T_{x,z}(K_x, K_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_{x,y}(x, y) e^{-j(K_x x + K_y y)} dx dy. \quad (12)$$

Теперь двумерные спектры потенциалов (9-11) полностью определены, и поэтому определены поле смещений и поле напряжений во всём полупространстве. Полученное решение удовлетворяет волновым уравнениям и граничным условиям, и если при расчётах мы ещё учтём так называемый "принцип излучения", то найденное решение будет единственным [1]. Учёт этого "принципа" сводётся к выбору знака в радикалах $P_z = \sqrt{P_0^2 - K_z^2}$ и $S_z = \sqrt{P_0^2 - K_z^2}$ так, чтобы волна на бесконечности затухала. Кроме того, если в интегралах типа (5) знаменатель подинтегрального выражения имеет простой корень на вещественной оси, то к этим интегралам следует добавить половину вычета относительно полюса на вещественной оси [1, 2, 7]. Необходимость добавления этого члена мы покажем с точки зрения физических представлений при анализе конкретных примеров.

Когда спектры (9-11) подставим в (5), упругие потенциалы волнового поля будут определены; подставив эти потенциалы в (3), по-

лучим поле смещения продольных и поперечных волн в виде:

$$\begin{aligned}
 U_{\rho i}(x, y, z, t) &= \frac{e^{-j\omega t}}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_{\rho i}(K_x, K_y) e^{j(K_x x + K_y y + P_z z)} dK_x dK_y, \\
 U_{s i}(x, y, z, t) &= \frac{e^{-j\omega t}}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_{s i}(K_x, K_y) e^{j(K_x x + K_y y + S_z z)} dK_x dK_y.
 \end{aligned} \quad (I3)$$

где $i = x, y, z$.

Спектры смещений будут равны:

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_{\rho x}(K_x, K_y) &= jK_x \bar{\Phi}(K_x, K_y), & \bar{U}_{s x} &= jK_y \bar{\Psi}_z - jS_z \bar{\Psi}_y, \\
 \bar{U}_{\rho y}(K_x, K_y) &= jK_y \bar{\Phi}, & \bar{U}_{s y} &= -jK_x \bar{\Psi}_z, \\
 \bar{U}_{\rho z}(K_x, K_y) &= jP_z \bar{\Phi}, & \bar{U}_{s z} &= jK_x \bar{\Psi}_y.
 \end{aligned} \quad (I4)$$

Электродинамические сейсмоприёмники на выходе дают сигнал, по форме близкий к скорости смещения грунта под действием сейсмических колебаний. Кроме того, через скорость смещения определяется волновая мощность. Поэтому для наших целей будет удобнее оперировать не смещениями, а их скоростью.

$$\dot{U}_{\rho m} = \frac{\partial}{\partial t} U_{\rho m}(x, y, z, t), \quad \dot{U}_{s m} = \frac{\partial}{\partial t} U_{s m}(x, y, z, t), \quad (I5)$$

где $m = x, y, z$.

Двухмерные спектры скорости смещений соответственно будут

$$\dot{\bar{U}}_{\rho m}(K_x, K_y) = -j\omega \bar{U}_{\rho m}(K_x, K_y), \quad \dot{\bar{U}}_{s m} = -j\omega \bar{U}_{s m}(K_x, K_y), \quad (I6)$$

а сами скорости:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{\rho m}(x, y, z, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \dot{\bar{U}}_{\rho m}(K_x, K_y) e^{-j\omega t + j(K_x x + K_y y + P_z z)} dK_x dK_y, \\
 \dot{U}_{s m}(x, y, z, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \dot{\bar{U}}_{s m}(K_x, K_y) e^{-j\omega t + j(K_x x + K_y y + S_z z)} dK_x dK_y,
 \end{aligned} \quad (I7)$$

где $m = x, y, z$.

В случае вертикального воздействия, когда $T_x(K_x, K_y) = 0$, $T_z(K_x, K_y) \neq 0$, из формул (I6), (I4) и (II), получим двухмерные

спектры скорости смещений в виде

$$\bar{J}_{px} = \beta T_z \frac{S_0^2 - 2K_z^2}{D_0} \cdot K_x, \quad \bar{J}_{sx} = -2\beta T_z \frac{P_z \cdot S_z}{D_0} K_x, \quad (18)$$

$$\bar{J}_{py} = \beta T_z \frac{S_0^2 - 2K_z^2}{D_0} \cdot K_y, \quad \bar{J}_{sy} = -2\beta T_z \frac{P_z \cdot S_z}{D_0} K_y,$$

$$\bar{J}_{pz} = \beta T_z \frac{S_0^2 - 2K_z^2}{D_0} \cdot P_z, \quad \bar{J}_{sz} = 2\beta T_z \frac{P_z K_z^2}{D_0} K_z.$$

В случае горизонтального воздействия ($T_z = 0$, $T_x \neq 0$) двумерные спектры скорости смещений будут равны:

$$\bar{J}_{px}(K_x, K_y) = \omega K_x \bar{\Phi} = 2\beta T_x \frac{S_z K_x^2}{D_0},$$

$$\bar{J}_{py} = \omega K_y \bar{\Phi} = 2\beta T_x \frac{S_z K_x K_y}{D_0}, \quad (19)$$

$$\bar{J}_{pz} = \omega P_z \bar{\Phi} = 2\beta T_x \frac{S_z P_z K_x}{D_0},$$

$$\bar{J}_{sx} = -\beta \frac{T_x}{S_z D_0} [K_y^2 (S_0^2 - 2K_z^2 - 4P_z S_z) - S_z^2 (S_0^2 - 2K_z^2)],$$

$$\bar{J}_{sy} = \beta \frac{T_x}{S_z D_0} (S_0^2 + 2K_z^2 - 4P_z S_z) K_x K_y,$$

$$\bar{J}_{sz} = -\beta \frac{T_x}{D_0} (S_0^2 - 2K_z^2) K_x. \quad (20)$$

Из формул (18–20) видно, что двумерный спектр $T_{x,z}(K_x, K_y)$ функции воздействия входит везде в виде множителя в спектры, определяющие волновое поле скорости смещений. Функция $T_{x,z}(K_x, K_y)$, как видно из (12), совпадает с частотной характеристикой площадной группы, в которой распределение чувствительностей элементов группы задано по закону $F_{x,z}(x, y)$. Отсюда можно сделать очень важный для практики вывод, заключающийся в том, что распределённый на поверхности источник силы эквивалентен площадному группированию, в котором роль чувствительности элементов группы играет распределение напряжения в точках воздействия источника на среду.

В выражении для частотной характеристики такой группы пространственные частоты K_x и K_y имеют смысл: $K_x = \omega/V_x$ и $K_y = \omega/V_y$, где V_x и V_y — кажущиеся скорости волн по направлениям x и y .

Определению закона распределения напряжений (т.е. функции $F_{x,z}(x,y)$) при тех или иных воздействиях на упругое полупространство посвящено много теоретических работ. Как известно, эта задача не из простых. Так, например, научная дискуссия, которая идёт последние 30–50 лет, о распределении динамического напряжения под жёстким штампом, действующим на поверхность полупространства в вертикальном направлении, ещё, по видимому, не кончилась. В этой дискуссии участвуют не только математики-упругисты, но и геофизики. Приведённое выше утверждение о том, что распределение напряжения под источником можно рассматривать как распределение чувствительностей элементов площадной группы, может в корне изменить отношение геофизиков к вышеупомянутой дискуссии и, кроме того, значительно облегчить нам исследование влияния параметров источника на характер волнового поля. В самом деле, единый вибрационный источник практически нельзя сделать больших размеров, его размеры с точки зрения транспортабельности не могут быть больше 3–4 м. Но любой сейсмо-разведчик знает, что площадная группа размерами 3–4 метра не может заметно повлиять на характеристики глубинных сейсмических волн в среднечастотном и низкочастотном диапазоне независимо от того, каков был закон распределения чувствительностей однополярной группы. Поэтому для исследования механизма формирования сейсмических волн мы можем выбрать простейший закон распределения напряжений источника и при этом мы можем утверждать, что получаемые закономерности будут достаточно общими и для других видов распределения напряжений. На практике поверхностные источники сейсмических волн используются обычно в группе. Если каждый одиночный источник этой группы может генерировать одну и ту же силу $F_{x,y}(x,y)$ независимо от того, работают соседние источники или нет (т.е. источники независимы), то согласно вышеприведённому утверждению можем считать, что волновое поле n — источников равно полю, получаемому при двойном группировании. При двойном группировании частотные характеристики групп, как известно [3, 5], перемножаются. Поэтому волновое поле n — источников можем также вычислять по формуле (18–20), только вместо частот-

ной характеристики одиночного источника $T_{x,z}(K_x, K_y)$ надо в эти формулы подставлять произведение частотных характеристик

$$T_{x,z}(K_x \cdot K_y)_z = T_{x,z}(K_x, K_y) T_{x,z}(K_x, K_y)_n,$$

где $T_{x,z}(K_x, K_y)_n$ - частотная характеристика дискретной группы из n - элементов. Независимость одиночного источника от соседних источников зависит, конечно, от конструктивных особенностей этих источников. Для этого в каждом конкретном случае достаточно выяснить вопрос о том, может ли данный источник генерировать неизменную силу $F_{x,z}(x, y)$, когда его излучающая платформа колеблется под действием соседнего источника. Этот вопрос, касающийся конструкции источников, рассмотрим в другой работе, а здесь займёмся рассмотрением формул (18-20) для частных случаев. Сначала рассмотрим двумерные задачи. Они помогут нам лучше понять физический смысл формул, получаемых в более сложных трёхмерных задачах.

3. Двумерные задачи.

Пусть источник силы $F_z(x, y)$ задан в бесконечной полосе, протянутой вдоль оси y , т.е. $F_z(x, y) = F_z(y)$, $F_x(x, y) = 0$. В этом случае кажущиеся скорости V_y всех волн по профилям, параллельным оси y будут бесконечными, или $K_y = \omega/V_y = 0$. Подставляя $K_y = 0$ в формулы (18), получим пространственные спектры скорости смещений в виде

$$\bar{J}_{P_x} = \beta \frac{T_z}{D_0} (S_0^2 - 2K_x^2) K_x, \quad \bar{J}_{P_z} = \beta \frac{T_z}{D_0} (S_0^2 - 2K_x^2) P_z, \quad (21)$$

$$\bar{J}_{S_x} = -2\beta \frac{T_z}{D_0} P_z S_z K_x,$$

$$\bar{J}_{S_z} = 2\beta \frac{T_z}{D_0} P_z K_x^2. \quad (22)$$

В соответствии с общими формулами (17) скорости смещения продольных и поперечных волн будут определяться по формулам

$$j_{\rho m}(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{j}_{\rho m}(K_x) e^{-j\omega t + j(K_x x + P_z z)} dK_x \quad (23)$$

и

$$j_{sm}(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{j}_{sm}(K_x) e^{-j\omega t + j(K_x x + S_z z)} dK_x. \quad (24)$$

Частотная характеристика $T_z(K_x)$ источника, входящая в формулы (21-24), будет в соответствии с общей формулой (12) определяться следующим образом

$$T_z(K_x) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_z(x) e^{-jK_x x} dx dy. \quad (25)$$

Интеграл по y естественно даёт бесконечность, т.к. источник силы по y имеет бесконечную протяжённость. Если же под $T_z(K_x)$ будем понимать плотность распределения силы по оси y , то интеграл (25) будет конечным и

$$T_z(K_x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_z(x) e^{-jK_x x} dx. \quad (26)$$

По этой формуле можно определить $T_z(K_x)$ при любом распределении силы $F_z(x)$. Так, например, если $F_z(x)$ по оси x задана в виде прямоугольника с основанием $2x_0$ и высотой F_z то $T_z(K_x)$ будет иметь вид

$$T_z(K_x) = 2x_0 F_z \cdot \frac{\sin K_x x}{K_x x}, \quad (27)$$

т.е. получаем хорошо знакомую частотную характеристику непрерывной прямоугольной группы.

По внешнему виду спектров (см. формулы 21-22) можем сделать следующее заключение.

Спектры $\bar{j}_{\rho z}(K_x)$ и $\bar{j}_{sz}(K_x)$ являются чётными функциями. Следовательно компоненты $j_{\rho z}(x, z, t)$ и $j_{sz}(x, z, t)$ тоже будут чётными относительно переменной x . Спектр $\bar{j}_{\rho z}(K_x)$ при $K_x = 0$ не равен нулю. Это означает, что общая площадь функции $j_{\rho z}(x, z, t)$ при постоянных значениях z и t не будет равна нулю, т.е. если мы волновые

поле будем регистрировать группой сейсмоприёмников с очень большой базой по оси x , то на выходе этой группы сигнал не будет равен нулю. Если учесть, что при $K_x = 0$ спектр $\overline{J}_{py}(K_x)$ близок к максимуму (без учёта области вблизи корня Релея, о которой будет сказано ниже), сигнал на выходе вышеуказанной группы будет иметь весьма большую амплитуду. Соответствующая площадь для компоненты поперечной волны $J_{sz}(x, z, t)$ всегда должна быть равна нулю т. к. спектр её $\overline{J}_{px}(K_x)$ при $K_x = 0$ равен нулю.

Спектры $\overline{J}_{px}(K_x)$ и $\overline{J}_{sx}(K_x)$ являются нечётными функциями. Это означает, что компоненты $J_{px}(x, z, t)$ и $J_{sx}(x, z, t)$ всегда будут нечётными функциями по переменной x , т.е. если эти волны будем регистрировать x - приборами, ориентированными одинаково по всему профилю $-\infty \leq x \leq \infty$, то волна при $x < 0$ будет противофазна относительно волны, регистрируемой при $x > 0$. Из нечётности функций $J_{px}(x, z, t)$ и $J_{sx}(x, z, t)$ автоматически вытекает, что эти компоненты при $x = 0$ по всей оси z должны равняться нулю.

Обратим внимание на функцию $D_0(K_x)$, которая в литературе обычно называется знаменателем Релея. Эта функция на полуоси $K_x \geq 0$ имеет один единственный вещественный корень при $|K_x| > S_0$. В литературе этот корень обычно называют корнем Релея. Спектры $\overline{J}_{pm}(K)$ и $\overline{J}_{sm}(K)$ вблизи "частоты" K_R имеют большие значения и при пересечении этой "частоты" меняют знак с $+\infty$ на $-\infty$. Как известно из радиотехники, если спектр $S(\omega)$ функции $f(t)$ имеет крутой излом на некоторой частоте ω_0 , то функция $f(t)$ будет иметь слабо затухающий "хвост", промодулированный функцией $\sin \omega_0 t$, причём затухание этого "хвоста" будет определяться крутизной излома спектра $S(\omega)$. Отсюда ясно, что крутой излом спектра $\overline{J}_m(K)$ на частоте породит слабо затухающий процесс $J_m(x) \sim \cos K_R x = \cos \frac{\omega}{V_R} x$, имеющий длину волны $\lambda = 2\pi V_R / \omega$, который называется волной Релея. Из-за наличия полюса K_R интегрирование в формулах (23-24) можно производить только в смысле "главного значения". Кроме того, поскольку контур интегрирования пересекает полюс K_R к величинам интегралов (23) и (24), понимаемых в смысле "главного значения", надо добавлять половину вычета подинтегральной функции относительно полюса K_R .

Физический смысл требования математики о необходимости добавления половины вычета мы рассмотрим при решении трёхмерных задач. Здесь же попытаемся разобраться в следующем вопросе.

Если в интегралах (23-24) вырезать симметричные участки спектра шириной dK_x в окрестности некоторой "частоты" $K_x = \pm K_1$, то элементарная волна, соответствующая спектру этого участка, будет стоячей волной по оси

$$dJ_m(x, z, t) = \frac{dK_x}{2\mathcal{T}} J_m(K_1) e^{jP_z z - j\omega t} \cos K_1 x.$$

(При нечётном $J_m(K)$ вместо $\cos K_1 x$ будет $\sin K_1 x$). Эта волна "стоит", поскольку имеет узловые точки x_i , $K_1 x_i = 2\mathcal{T}n + \frac{1}{2}\mathcal{T}$, где её амплитуда всегда равна нулю. Спрашивается каким же образом суммирование (интегрирование) элементарных стоящих волн даёт бегущую волну? Покажем, что это новое качество операция интегрирования даёт благодаря наличию иррациональных функций $P_z = \sqrt{\rho_0^2 - K_x^2}$ и $S_z = \sqrt{S_0^2 - K_x^2}$. Чтобы в "чистом" виде выделить роль этих функций, рассмотрим двухмерный случай горизонтального воздействия на полупространство.

Пусть так же как в предыдущем случае σ та распределена в бесконечной полосе, но только она направлена теперь горизонтально, причём вдоль полосы. Поскольку исходные формулы нами выведены для случаев задания F_z и F_x , то будем считать, что бесконечная полоса расположена вдоль оси x . Тогда кажущиеся скорости V_x всех волн по профилям, параллельным оси x , будут бесконечными, т.е. $K_x = \omega/V_x = 0$ и спектры скорости смещения излучаемых волн получим из формул (19) и (20), подставляя туда $K_x = 0$. Как видно из этих формул, во все компоненты, за исключением $\bar{J}_{sx}(K_y)$ "частота" K_x входит в качестве множителя, поэтому при подстановке $K_x = 0$ все указанные компоненты будут равны нулю и всё волновое поле во всём полупространстве будет состоять из одной единственной компоненты поперечной волны, спектр которой равен

$$\bar{J}_{sx}(K_y) = \beta T_x(K_y) \cdot \frac{1}{S_z}. \quad (28)$$

Такое простое выражение получается из-за того, что при подстановке $K_x = 0$ в (20) формула для $\bar{J}_{sx}(K)$ упрощается и, в частности, знаменатель Релея $D_0(K)$ сокращается.

Волновое поле согласно (24) может быть теперь вычислено по формуле

$$J_{sx}(y, z, t) = \frac{\beta}{2\mathcal{T}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_x(K_y)}{\sqrt{S_0^2 - K_y^2}} \cdot e^{j(K_y y + S_z z) - j\omega t} dk_y. \quad (29)$$

Чтобы взять этот интеграл не прибегая к численным методам интегрирования, положим $z = 0$ и $T_x(K_y) = T_x = \text{const}$. Этот пример будет соответствовать случаю, когда плотность силы источника $F_x(y)$ задана в виде $\delta(y)$.

Меня переменную интегрирования $K_y = S_0 \theta$ можем написать

$$J_{Sx}(y, t) = \frac{b}{\pi} T_x \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \cos S_0 y \theta d\theta e^{-j\omega t} \quad (29a)$$

$$= \frac{b}{\pi} T_x \left(\int_0^1 \frac{\cos S_0 y \theta}{\sqrt{1-\theta^2}} d\theta - j \int_1^{\infty} \frac{\cos S_0 y \theta}{\sqrt{\theta^2-1}} d\theta \right) e^{-j\omega t} \quad (29б)$$

Используя табличные интегралы формулы № 3.753.2-4 из 4, получим

$$J_{Sx}(y, t) = \frac{b}{2} T_x [J_0(S_0 y) + j N_0(S_0 y)] e^{-j\omega t}, \quad (29в)$$

где J_0 и N_0 - функции Бесселя и Неймана нулевого порядка. В центре источника ($y = z = 0$) амплитуда $J_{Sx}(y, t)$ бесконечна, т.к. функция Неймана при нуле равна бесконечности. Такой результат получился из-за того, что распределение силы $F_x(y)$ нами задано в виде δ -функции.

Вдали от источника ($S_0 y \gg 1$) можно воспользоваться асимптотическими формулами

$$J_0(S_0 y) \approx \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi S_0 y}}; \quad N_0(S_0 y) \approx \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi S_0 y}}, \quad (29г)$$

где $\varphi = S_0 y - \pi/4$.

Подставляя эти формулы в (29в), получим

$$J_{Sx}(y, t) \approx \frac{-j f^{1/2}}{\rho V_s^{3/2} y^{1/2}} T_x e^{-j\omega(t - \frac{y}{V_s})}, \quad (29д)$$

где $f = \frac{\omega}{2\pi}$ - частота колебаний.

Таким образом, интегрирование в $|k| \leq S_0$ даёт $\cos S_0 y$, интеграл по $|k| \geq S_0$ даёт $j \sin S_0 y$ и при суммировании этих членов получается волна, которая не стоит, а распространяется от источника с фазовой скоростью V_s . Наличие иррациональных функций P_2 и S_2 в пространственных спектрах является основным их отличием от остальных, которые обычно рассматриваются в теории сигналов. Как

видим, именно эти функции обеспечивают пространственным спектрам быть образом волновых процессов.

4. Частотные характеристики некоторых источников, имеющих круговую симметрию

В случаях, когда распределение силы на $z = 0$ имеет круговую симметрию, интеграл (I2) для частотной характеристики источника можно несколько упростить, переходя к цилиндрическим координатам. Возьмём этот интеграл для нескольких примеров задания $F_{z,x}(x,y)$.

I. Сила $\vec{F}_{x,z}(x,y)$ на плоскости $z = 0$ равномерно распределена внутри круга с радиусом τ_0

$$F_{x,z}(x,y) = \begin{cases} F_{x,z}^0 & \text{при } \tau \leq \tau_0 \\ 0 & \text{при } \tau > \tau_0, \end{cases}$$

где $F_{x,y}^0$ — некоторая постоянная.

Произведём в (I2) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} x &= \tau \cos \varphi, & y &= \tau \sin \varphi, & \tau^2 &= x^2 + y^2, & dx dy &= \tau d\tau d\varphi, \\ K_x &= K \cos \varphi, & K_y &= K \sin \varphi, & K_z^2 &= K_x^2 + K_y^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда интеграл (I2) будет выглядеть

$$T_{x,z}(K_x, K_y) = F_{x,z}^0 \int_0^{\tau_0} \int_0^{2\pi} e^{jK_z \tau \cos(\varphi - \psi)} \tau d\tau d\varphi.$$

Используя табличные интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{jK_z \tau \cos \alpha} d\alpha = 2\pi J_0(K_z \tau) \quad \text{и} \quad \int_0^{\tau_0} \tau J_0(\tau) d\tau = \tau_0 J_1(\tau_0)$$

получим

$$T_{x,z}(K_x, K_y) = F_{x,z}^0 \cdot \frac{\tau_0}{K_z} \cdot J_1(K_z \tau_0) \cdot 2\pi. \quad (31)$$

Заметим, что при $K_x = K_y = 0$ или $K_z = 0$ интеграл (12) равен общей силе источника, которую обозначим через \mathcal{J}_Σ .

Поэтому, учитывая, что $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{J_1(kz_0)}{k} = \frac{z_0}{2}$, формулу (31) можем представить в виде

$$T_{x,z}(K_x, K_y) = 2\mathcal{J}_\Sigma \cdot \frac{J_1(kz_0)}{kz_0}. \quad (31)$$

2. Сила $\vec{F}(x, y)$ распределена на поверхности $z = 0$ по закону

$$F_{x,z}(x, y) = F_{x,z}^0 e^{-\beta^2(x^2 + y^2)} \quad (32)$$

Подставляя эту формулу в (12) и используя табличный интеграл № 6.631,4 из [4], получим

$$T_{x,z} = \mathcal{J}_\Sigma e^{-\frac{k^2}{4\beta^2}}. \quad (32)$$

3. Распределение силы на поверхности задано формулой

$$F_{x,z}(z) = \begin{cases} F_{x,z}^0 \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} & \text{при } z \leq z_0 \\ 0 & \text{при } z > z_0 \end{cases} \quad (33)$$

Этот пример интересен тем, что напряжение на основании круглого жёсткого штампа при вертикальном воздействии может быть описано формулой (32). Подставив (33) в (12) и используя табличный интеграл № 6.554.2 из [4], получим

$$T_{x,z}(k) = \mathcal{J}_\Sigma \frac{\sin k z_0}{k z_0}. \quad (33)$$

Сравнивая эту формулу с (27), можно видеть, что частотная характеристика круглого штампа совпадает по форме с частотной характеристикой прямоугольной непрерывной группы для плоского случая. Следует заметить, что графики частотных характеристик (31) и (33) по форме также очень близки друг к другу. Поэтому поля излучения жёсткого штампа и источника с равномерным распределением силы внутри круга будут малоотличимы друг от друга.

5. Вертикальное воздействие на полупространство.
Трёхмерный случай. Источник с круговой симметрией.

При использовании источника с круговой симметрией $F_z(x, y) = F_z(r)$ двукратные интегралы (17) можно преобразовать в однократные, переходя к цилиндрическим координатам. Выполним эту операцию для случая вертикального воздействия.

Компоненты вектора скорости смещения в цилиндрических координатах будут определяться по формулам

$$\mathcal{U}_{pz}(r, z, t) = \mathcal{U}_{px} \cos \varphi + \mathcal{U}_{py} \sin \varphi, \quad \mathcal{U}_{p\varphi} = -\mathcal{U}_{px} \sin \varphi + \mathcal{U}_{py} \cos \varphi.$$

Подставляя сюда выражения (17) и меняя переменные интегрирования по формулам (30), получим:

$$\mathcal{U}_{pz} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\infty} (\bar{\mathcal{U}}_{px} \cos \varphi + \bar{\mathcal{U}}_{py} \sin \varphi) e^{jkz \cos(\psi - \varphi) + j(P_z z - \omega t)} k dk.$$

Вместо $\bar{\mathcal{U}}_{px}$ и $\bar{\mathcal{U}}_{py}$ подставим их выражения по (18). Тогда

$$\mathcal{U}_{pz} = \int_0^{\infty} A_p \cdot B_1 e^{j(P_z z - \omega t)} dk, \quad (34)$$

где

$$A_p \equiv \frac{b T_z(k)}{2\pi D_0} (S_0^2 - 2k) k^2,$$

$$B_1(k, z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\psi - \varphi) e^{jkz \cos(\psi - \varphi)} d\psi. \quad (35)$$

Таким же образом находим:

$$\mathcal{U}_{s\varphi}(r, z, t) = \int_0^{\infty} A_s(k) B_1(k, z) e^{j(S_z z - \omega t)} dk. \quad (34^I)$$

Составляющие $\mathcal{U}_{p\varphi} = \mathcal{U}_{s\varphi} = 0$ в виду того, что интеграл

$$\int_{\theta}^{2\pi + \theta} e^{j\theta \cos(\psi - \varphi)} \sin(\psi - \varphi) d\psi = 0$$

при любом φ и θ .

Интеграл (35) напишем в более общем виде, так как в дальнейшем это будет нам полезно

$$B_n(kz) = \frac{1}{2\pi} \int_{0+\alpha}^{2\pi+\alpha} \cos n(\varphi - \psi) e^{jkz \cos(\varphi - \psi)} d\psi,$$

где n - любое число (целое).

$$\begin{aligned} B_n(q) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi}^{2\pi+\xi} \cos n\theta e^{jq \cos \theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi}^{2\pi+\xi} \cos n\theta [\cos(q \cos \theta) + j \sin(q \cos \theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (36)$$

Воспользуемся известным разложением по функциям Бесселя:

$$\cos(q \cos \theta) = J_0(q) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(q) \cos 2m\theta$$

$$\sin(q \cos \theta) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m-1}(q) \cos(2m-1)\theta.$$

Когда подставим эти ряды (36), нам встретятся интегралы, которые

$$\int_{\xi}^{2\pi+\xi} \cos n\theta \cos l\theta d\theta = \begin{cases} \pi & \text{при } n=l \\ 0 & \text{при } n \neq l \end{cases}$$

Поэтому

$$B_n(kz) = (j)^n J_n(kz) \quad (37)$$

Используя последнюю формулу, выражения (34) и (34^I) можем представить для продольной волны в виде

$$\bar{y}_{pz}(z, z, t) = j \int_0^{\infty} \bar{y}_{pz}(k) e^{j(P_z z - \omega t)} J_1(kz) k dk, \quad (38)$$

где

$$\bar{y}_{pz} = \frac{b}{2\pi} \frac{T_z(k)}{D_0} (S_0^2 - 2k^2) k.$$

и для поперечной волны

$$\bar{y}_{sz}(z, z, t) = -j \int_0^{\infty} \bar{y}_{sz}(k) e^{j(S_z z - \omega t)} J_1(kz) k dk, \quad (39)$$

где

$$\bar{J}_{S_z}(K) = \frac{b}{\pi} \frac{T_z(K)}{D_0} \rho_z S_z K.$$

Вертикальные составляющие скорости смещения определяем аналогично, используя также равенство (37), только в этом случае будет $n = 0$

$$J_{P_z}(z, z, t) = \int_0^{\infty} \bar{J}_{P_z}(K) e^{j(P_z z - \omega t)} J_0(Kz) K dK, \quad (40)$$

где

$$\bar{J}_{P_z}(K) = \frac{b}{2\pi} \frac{T_z}{D_0} (S_0^2 - 2K^2) \rho_z,$$

$$J_{S_z}(z, z, t) = \int_0^{\infty} \bar{J}_{S_z}(K) e^{j(S_z z - \omega t)} J_0(Kz) K dK, \quad (41)$$

где

$$\bar{J}_{S_z}(K) = \frac{b}{\pi} \frac{T_z}{D_0} \rho_z K^2.$$

Интегралы (38–41) могут быть вычислены методом численного интегрирования с использованием ЭВМ. О методике таких вычислений см. [2], а здесь остановимся на самых общих свойствах волнового поля и рассмотрим некоторые частотные случаи.

Как известно, интегралы типа

$$\int_0^{\infty} L(K) J_0(Kz) K dK \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} L(K) J_1(Kz) K dK$$

по своим свойствам близки к косинус- и синус-преобразованиям Фурье соответственно. Поэтому, сравнивая формулы (38–41) с соответствующими формулами (см. 21–24) для плоского случая, можем заметить, что между ними есть много общего. Так, например, спектры вертикальных компонент $J_{P_z}(y, z, t)$ и $J_{S_z}(y, z, t)$ в плоском случае были чётными функциями, поэтому интегралы для этих компонент представляли собой косинус-преобразование Фурье. Горизонтальные компоненты $J_{P_y}(y, z, t)$ и $J_{S_y}(y, z, t)$ определялись через синус-преобразование Фурье. Из формул (38–41) видим, в трёхмерном случае вертикальные компоненты определяются через $J_0(Kz)$ - преобразование, а горизонтальные компоненты -

через $\mathcal{J}_1(kz)$ преобразование. И в частности, поскольку $\mathcal{J}_1(0) = 0$, горизонтальные компоненты по оси z при $z = 0$ будут равны нулю.

В пространственных спектрах $\overline{\mathcal{J}}_p(k)$ и $\overline{\mathcal{J}}_s(k)$ переменную k можно понимать как $k_z = \omega/V_z$, где V_z — кажущаяся скорость элементарной волны. Очевидно, глубинные волны, направленные по оси z и поэтому имеющие большие кажущиеся скорости, формируются при интегрировании из элементарных волн с $k \approx 0$. Как видно из формулы (40), спектр $\overline{\mathcal{J}}_{pz}(k)$ при $k = 0$ не равен нулю и если не учитывать область спектра, где имеется полюс $k = k_R$, величина $\overline{\mathcal{J}}_{pz}(k)|_{k=0}$ близка к максимуму функции $\overline{\mathcal{J}}_{pz}(k)$. Поэтому волна $\mathcal{J}_{pz}(z, z, t)$ будет иметь значительную амплитуду по оси z .

По сравнению с ней волна $\mathcal{J}_{sz}(z, z, t)$ будет быстро затухать по оси z , так как спектр её $\overline{\mathcal{J}}_{sz}(k) \sim k_z^2$ и при $k = 0$ спектр $\overline{\mathcal{J}}_{sz}(k) = 0$, т.е. в спектре $\overline{\mathcal{J}}_{sz}(k)$ элементарные волны с большими кажущимися скоростями практически отсутствуют.

При вертикальном воздействии на полупространство наибольший интерес представляет свойства продольной волны по оси z при $z = 0$, а также поверхностная волна (т.е. поле по оси z при $z = 0$), которые будут выступать в роли помех. Рассмотрим эти волны в частных случаях. Сначала займёмся компонентой $\mathcal{J}_{pz}(z, z, t)$.

Выберем источник $F_z(z)$ таким, чтобы его частотная характеристика выражалась формулой

$$F_z(k) = \begin{cases} T_0 & \text{при } k \leq P_0 \\ 0 & \text{при } k > P_0 \end{cases} \quad (42)$$

Тогда точки ветвления и полюс, обусловленный корнем Релея, подинтегрального выражения (40), окажутся за пределами частотной характеристики источника и интеграл (40) будет иметь пределы от 0 до P_0 .

Это означает, что все волны, которые имеют волновое число $k = \omega/V_z > P_0$, будут подавлены, т.е. они просто не будут возбуждаться данным источником.

Рассмотрим продольную волну (40), распространяющуюся по оси z по центру источника ($z = 0$).

В этом случае в выражении (40) функция Бесселя $\mathcal{J}_0(kz) = 1$, а функция $\mathcal{A}(k) \equiv \frac{S_0^2 - 2k^2}{D_0}$, входящая множителем в спектр $\overline{\mathcal{J}}_{pz}(k)$ в интервале $0 \leq k \leq P_0$, близка к постоянной величине $1/S_0^2$ и по-

этому для упрощения интеграла (40) можем считать $A(\kappa) = 1/S_0^2$. При сделанных предположениях интеграл (40) будет выглядеть следующим образом

$$y_{pz}(z, z, t)|_{z=0} = \frac{T_0}{2\pi\rho V_s S_0} \int_0^{P_0} P_z \kappa e^{j(P_z z - \omega t)} d\kappa,$$

где $P_z \equiv \sqrt{\rho_0^2 - \kappa^2}$.

Отсюда вещественная часть поля, соответствующая стационарному источнику, зависящему от времени как $\cos \omega t$ будет равна

$$y_{pz}(z, t) = \frac{T_0}{2\pi\rho V_s S_0} \int_0^{P_0} \kappa \sqrt{\rho_0^2 - \kappa^2} \cos(\sqrt{\rho_0^2 - \kappa^2} z - \omega t) d\kappa.$$

Сделаем замену переменной интегрирования по $\Omega = \sqrt{\rho_0^2 - \kappa^2}$.

Тогда

$$y_{pz}(z, t) = a \int_0^{P_0} \Omega^2 \cos(\omega t - \Omega z) d\Omega =$$

$$= 3y_{pz}^0 \left[-\frac{\sin(\omega t - P_0 z)}{P_0 z} + \frac{z \cos(\omega t - P_0 z)}{P_0^2 z^2} + \frac{z \sin(\omega t - P_0 z)}{P_0^2 z^3} - \frac{z \sin \omega t}{P_0^3 z^3} \right], \quad (43)$$

где $y_{pz}^0 = \frac{P_0^2 T_0}{2\pi\rho V_p}$ — амплитуда скорости смещения в центре источника (т.е. при $z = z = 0$).

По внешнему виду формулы (43) кажется, что при $z \rightarrow 0$ выражение в квадратной скобке должно стремиться к бесконечности. Однако, это не так, при $z \rightarrow 0$ члены, стремящиеся к бесконечности уничтожают друг друга, а указанное выражение стремится к $\frac{1}{3} \cos \omega t$.

Как видно из формулы (43), в продольной волне, распространяющейся вдоль z по центру источника существуют компоненты, затухающие с глубиной в 1, 2 и 3 степени от z . Последнее, четвертое, слагаемое не является волной. Смещение элементов среды, обусловленное этим слагаемым, подобно смещению элементов пружины. В са-

мом деле, если на один конец идеальной (лишённой массы) пружины приложить знакопеременную силу, то все элементы этой пружины, расположенные на различных расстояниях ℓ от точки приложения силы, будут смещаться в фазе с приложенной силой, амплитуда смещения будет уменьшаться с ростом ℓ по некоторому закону, определяемому распределением жёсткости пружины вдоль ℓ , а скорость смещения соответственно будет сдвинута по фазе на $\frac{\pi}{2}$ относительно приложенной силы. В нашем случае сила меняется во времени как $\cos \omega t$. Если смещение среды находится в фазе с силой, то скорость смещения будет пропорциональна $(-i) \sin \omega t$, что и видно в (43). В дальней зоне слагаемые, затухающие как $1/z^2$ и $1/z^3$ можно не учитывать и поэтому

$$y_{pz}(z, t) \cong - \frac{3 \omega T_0}{4 \pi \rho V_p^2} \frac{\sin(\omega t - \rho_0 z)}{z}, \quad (44)$$

Заметим, что формулы типа

$$\int_0^{\beta} \kappa^3 e^{jz\sqrt{\beta^2 - \kappa^2}} d\kappa, \quad \int_0^{\beta} \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} \kappa^3 e^{jz\sqrt{\beta^2 - \kappa^2}} d\kappa$$

дают волны, затухающие по оси z как z^{-n} , где $n \geq 2$; основной член, затухающий как z^{-1} эти формулы не содержат, что легко можно показать непосредственным интегрированием аналогично (43). Следовательно, компонента $y_{sz}(z, z, t)$, определяющаяся формулой (41), при больших z будет значительно мала по сравнению с $y_{pz}(z, z, t)$ как и указывалось выше по виду её спектра.

Определим закон распределения силы источника, частотная характеристика которого задана в виде (42).

Из формулы (7), переходя к цилиндрическим координатам, имеем

$$F_z(x, y) = F_z(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\rho_0} \kappa d\kappa \int_0^{2\pi} e^{j\kappa z \cos(\varphi - \psi)} d\varphi.$$

Используя формулы (31), получим

$$F_z(z) = \frac{T_0}{2\pi} \cdot \frac{\omega}{V_p} \cdot \frac{1}{z} y_1\left(\frac{\omega}{V_p} z\right). \quad (45)$$

Как видим, закон распределения силы по ζ при заданной V_p зависит от частоты. Такое распределение силы при вибрационном способе возбуждения в принципе можно осуществить, т.к. колебания на различных частотах возбуждения во времени не одновременно, хотя практически реализовать такое распределение не просто. Следует заметить, в системах интерференционного приёма сейсмических колебаний подобная операция уже используется, обычно, при обработке. Эта операция в литературе известна под названием "верная фильтрация".

Теперь перейдём к рассмотрению волны Релея. Для исследования основных свойств волны Релея целесообразно пределы интегрирования в интегралах (38-41) разделить на три интервала и рассмотреть эти члены по отдельности. Сделаем эту процедуру, взяв в качестве примера интеграл (40)

$$\begin{aligned} \bar{J}_{p_{z_1}}(z, z, t) = & \int_0^{p_0} k \bar{J}_{p_{z_1}}(k) e^{j(\sqrt{p_0^2 - k^2} z - \omega t)} J_0(kz) dk + \\ & + \int_{p_0}^{s_0} k \bar{J}_{p_{z_2}}(k) e^{-\sqrt{k^2 - p_0^2} z - j\omega t} J_0(kz) dk + \end{aligned} \quad (46)$$

$$+ \int_{s_0}^{\infty} k \bar{J}_{p_{z_3}}(k) e^{-\sqrt{k^2 - p_0^2} z - j\omega t} J_0(kz) dk = \bar{J}_{p_{z_1}} + \bar{J}_{p_{z_2}} + \bar{J}_{p_{z_3}},$$

где $\bar{J}_{p_{z_m}}(k) = \frac{b}{\eta} k^2 T_z(k) \frac{p_{z_m}}{D_m}$, $m = 1, 2, 3$.

$$p_{z_1} = \sqrt{p_0^2 - k^2}, \quad p_{z_2} = p_{z_3} = j\sqrt{k^2 - p_0^2}.$$

$$D_1 = (s_0^2 - 2k^2) + 4k^2 \sqrt{(s_0^2 - k^2)(p_0^2 - k^2)}, \quad 0 \leq |k| \leq p_0;$$

$$D_2 = [(s_0^2 - 2k^2)^4 + 16k^4 (s_0^2 - k^2)(k^2 - p_0^2)]^{1/2} e^{j\varphi_D}, \quad p_0 \leq |k| \leq s_0;$$

$$D_3 = (s_0^2 - 2k^2)^2 - 4k^2 \sqrt{(k^2 - s_0^2)(k^2 - p_0^2)}, \quad |k| \geq s_0;$$

$$\sin \varphi_D = \frac{4k \sqrt{(s_0^2 - k^2)(k^2 - p_0^2)}}{|D_2|}, \quad \cos \varphi_D = \frac{(s_0^2 - 2k^2)^2}{|D_2|}.$$

Из формул (46) видно, что второй и третий интегралы дают поверхностные волны, которые с глубиной затухают по экспоненте. Знаменатели D_1 и D_2 в интервалах их определения корней не имеют и представляют собой весьма плавные функции, которые на поведении подинтегрального выражения особого влияния не оказывают. Знаменатель D_3 имеет один вещественный корень K_R — корень Релея. Из-за этого корня спектр $\bar{J}_{PZ3}(K)$ имеет значения $\pm \infty$ и поэтому третий интеграл надо понимать в "смысле главного значения", т.е. интеграл вычисляется с равномерным шагом с левой и правой сторон переменной K к значению K_R . За счёт резких скачков спектра, обусловленных наличием полюса K_R , волна $J_{PZ}(\gamma, z, t)$ будет иметь по оси z слабозатухающую компоненту с длиной волны $\lambda_R = \frac{2\pi}{K_R} = 2\pi \frac{V_R}{\omega}$. Обратим внимание на то, что D_3 служит знаменателем как продольных $J_P(z, z, t)$, так и поперечных $J_S(z, z, t)$ волн. Следовательно, волна, обусловленная корнем K_R порождается продольными и поперечными волнами независимо друг от друга, т.е. нельзя считать, что релеевская волна возникает за счёт интерференции продольных и поперечных волн. Исходя из этих соображений, можно написать формулу для вертикальной компоненты волны Релея на поверхности $z = 0$ в виде:

$$J_{RZ} = J_{PZ3} + J_{SZ3} = \frac{j S_0^2}{2 \pi \rho V_S} \int_{S_0}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 - P_0^2}}{D_3} T_Z(k) J_0(kz) k dk e^{-j\omega t} \quad (47)$$

где J_{SZ3} представляет собой часть интеграла (41), соответствующая интервалу интегрирования от S_0 до ∞ . Этот интеграл для дальней зоны $S_0 \gamma \gg 1$ можно взять приближённо следующим образом.

Выберем источник таким, чтобы его частотная характеристика $T_Z(k)$ в окрестности $k = K_R$ была пологой (гладкой) функцией. Знаменатель D_3 представим в виде

$$D_3(k) = (k - K_R) D_R(k) = S_0^4 (\theta - \theta_R) D_R(\theta),$$

где $K_R = \theta_R S_0$; $k = \theta S_0$.

Функция $D_R(\theta)$ не имеет полюсов и является весьма пологой функцией. Функцию Бесселя $J_0(kz)$ заменим её асимптотическим приближением. Тогда, имея ввиду, что величина интеграла (47) на больших удалениях γ зависит в основном от поведения подинтегральной функции в окрестности $k = K_R$, можем написать

$$J_{Rz}(z, t) \cong \int_{2\sqrt{\rho V_s D_R}(\theta_R)}^{\sqrt{\theta_R^2 - \gamma^2} T(s_0 \theta_R)} \sqrt{\frac{\theta_R}{\frac{1}{2} \sqrt{s_0} z}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \frac{\cos(s_0 z \theta - \frac{\pi}{4})}{\theta - \theta_R} d\theta.$$

Используя табличный интеграл № 3.722.5,7 из [4], получим

$$J_{Rz}(z, t) \cong -j \sqrt{\pi} \alpha A \frac{\sin(\frac{\omega}{V_R} z - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{z}} e^{-j\omega t}, \quad (48)$$

где

$$A \equiv \frac{T_z(K_R)}{\sqrt{\rho V_s}} \sqrt{\frac{\omega}{2 \sqrt{\pi} V_s}},$$

$$\alpha \equiv \frac{\sqrt{\theta_R(\theta_R^2 - \gamma^2)}}{D_R(\theta_R)} - \text{безмерная величина,}$$

$V_R = \frac{V_s}{\theta_R}$ — скорость распространения релейской волны.

Коэффициент θ_R , например, для среды Пуассона ($\gamma^2 = \frac{1}{3}$) равен 1,08, а $D_R(\theta_R) = 9$.

Аналогично можно определить горизонтальную компоненту волны Релея

$$J_{Rz} = J_{pz_3} + J_{sz_3} \cong -j \sqrt{\pi} \beta A \frac{\sin(\frac{\omega}{V_R} z - \frac{3}{4} \pi)}{\sqrt{z}} e^{-j\omega t}, \quad (49)$$

где

$$\beta \equiv \frac{1}{\sqrt{\theta_R} D_R(\theta_R)} [1 - 2\theta_R^2 - 2\sqrt{(\theta_R^2 - 1)(\theta_R^2 - \gamma^2)}].$$

Из формул (48) и (49) можно видеть, что волна Релея затухает пропорционально \sqrt{z} . Горизонтальная и вертикальная составляющие сдвинуты относительно друг к другу на 90° , т.е. вектор смещения (или скорости смещения) как бы вращается. Амплитуды J_{Rz} и J_{Rz} неодинаковы, т.к. величины " α " и " β " не равны друг другу. Поэтому вышеуказанный вектор вращается по эллипсу. В случае, когда влияние частотной характеристики $T_z(\frac{\omega}{V_R})$ не существенно (например, база группирования меньше $1/2$ длины релейской волны), а сила источника не зависит от частоты, спектр волны Релея зависит от частоты как $\sqrt{\omega}$.

Теперь займёмся выяснением физического смысла упоминавшегося ранее требования математики о необходимости добавления к интегралам типа (38-4I) половины вычета относительно полюса κ_R . Обратим внимание на то, что если в формулах (48) и (49) перейдём к реальной составляющей, то мы получим стоячую волну

$$\sin\left(\frac{\omega}{V_p} z - \frac{\eta}{4}\right) \sin \omega t = \frac{1}{2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{V_R}\right) + \frac{\eta}{4}\right] - \frac{1}{2} \cos\left[\omega\left(t + \frac{z}{V_R}\right) - \frac{\eta}{4}\right],$$

т.е. первый член убегает от источника, а второй член бежит к источнику. Задачу будем ставить так: нам надо добавить к формулам (38-4I) какую-то функцию, чтобы полученная сумма представляла собой не стоячую волну, а волну, распространяющуюся от источника. Причём эта добавка должна быть такой, чтобы она не изменила граничные условия (в нашем случае условия, определяемые формулами 4). Ответ на поставленный вопрос можно найти путём следующих рассуждений.

Если волновое поле, определённое формулами (38-4I), подставим в формулы для напряжения при $z = 0$

$$\tau_{zz} = \lambda \operatorname{div} \vec{U} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad \text{и}$$

$$\tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \quad \text{то мы получим } \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0 \quad \text{и}$$

$$\tau_{zz}(z, t) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega t} \int_0^{\infty} T_z(\kappa) J_0(\kappa z) \kappa d\kappa = -F_z(z) e^{-j\omega t}, \quad (50)$$

т.е. убедимся, что поле, определённое формулами (38-4I) удовлетворяет граничным условиям (4). Обратим внимание на то, что в подинтегральном выражении (50) знаменатель $D(\kappa)$ отсутствует, хотя в формулу для τ_{zz} мы подставляли выражения (38-4I), каждое из которых имело знаменателем $D(\kappa)$. Такой результат получился из-за того, что при подстановке в τ_{zz} выражений (38-4I) в числителе подинтегральной функции появляется сомножитель, равный $D(\kappa)$, который сокращается со знаменателем.

Рассмотрим некоторые функции $J_z^0(z, z, t) = J_{pz}^0 + J_{sz}^0$ и $J_z^0(z, z, t) = J_{pz}^0 + J_{sz}^0$, которые во всём совпадают с подинтегральными выражениями (38-4I), но только знаменателем их

служит не $D(k)$, а некоторая другая, произвольная функция $Q(k)$ которая при $k = k_R$ не обращается в нуль. Если поле $\mathcal{U}_z^0(z, z, t)$ и $\mathcal{J}_z^0(z, z, t)$ подставим в

$$\mathcal{U}_{zz} = \lambda \operatorname{div} \vec{U} + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} U_z,$$

то в числителе подынтегрального выражения появится сомножитель $D(k)$, для которого k_R является корнем и поэтому \mathcal{U}_{zz} при $k = k_R$ будет равна нулю. Таким образом, волна, заданная формулой

$$\mathcal{J}_z^0(z, z, t) = \frac{M(k_R)}{Q(k_R)} e^{-j\omega t} \left[(s_0^2 - 2k_R^2) e^{-\sqrt{k_R^2 - p_0^2} z} - \sqrt{(k_R^2 - p_0^2)(k_R^2 - s_0^2)} e^{-\sqrt{k_R^2 - s_0^2} z} \right] \cdot j k_R^2 \mathcal{J}_1(k_R z);$$

$$\mathcal{J}_z^0(z, z, t) = \frac{M(k_R)}{Q(k_R)} e^{-j\omega t} \left[(s_0^2 - 2k_R^2) e^{-\sqrt{k_R^2 - p_0^2} z} + 2k_R^2 e^{-\sqrt{k_R^2 - s_0^2} z} \right] \cdot j k_R \sqrt{k_R^2 - p_0^2} \mathcal{J}_1(k_R z), \quad (51)$$

где $M(k_R)$ и $Q(k_R)$ — произвольные, отличные от нуля, функции, на поверхности $z = 0$ дают напряжение $\mathcal{U}_{zx} = \mathcal{U}_{zy} = \mathcal{U}_{zz} = 0$. Поэтому добавление этой волны к волновому полю (38–41) не может нарушить граничные условия нашей задачи. Функцию, определяемую формулой (51), называют иногда "свободной волной" [7]. Как видно из (48) и (49), для того, чтобы функцию $j \sin(\frac{\omega}{v_R} z - \frac{\pi}{4}) e^{-j\omega t}$ превратить в $\exp\{-j\omega(t - \frac{z}{v_R}) - \varphi_0\}$, т.е. заставить волну (48) "бежать", необходимо к (48) добавить функцию

$$\mathcal{J}_z^0(z, t) = -\pi \alpha A \frac{\cos(\frac{\omega}{v_R} z - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{\gamma}} e^{-j\omega t},$$

а к (49) добавить

$$\mathcal{J}_z^0(z, t) = -\pi \beta A \frac{\cos(\frac{\omega}{v_R} z - \frac{3\pi}{4})}{\sqrt{\gamma}} e^{-j\omega t}.$$

Такие слагаемые мы получим из (51), если выберем

$$Q(k_R) = D_R(k_R), \quad \mu(k_R) = j \frac{\delta}{2} T_z(k_R),$$

где $D_R(k) \equiv \frac{\partial}{\partial k} D(k)$.

Легко видеть, что при таком выборе функций $Q(\kappa_R)$ и $M(\kappa_R)$ формулы (5I) представляют собой вычеты интегралов (38-4I) относительно полюса κ_R , умноженные на $1/2$.

В дальнейшем во всех случаях, когда в знаменателе подинтегрального выражения стоит $D(\kappa)$, будем предполагать, что при расчётах волнового поля к этим интегралам следует добавить "свободную волну" или, что тоже самое, полвычета относительно полюса κ_R .

6. Горизонтальное воздействие на полупространство в случае источника с круговой симметрией.

Пусть $F_x(x, y) = F_x(z) \neq 0$; $F_z = 0$. В этом случае общие формулы, приведённые в 2, тоже можно несколько упростить, переходя к цилиндрическим координатам. Однако, при горизонтальном воздействии, в отличие от случая, рассмотренного в предыдущем параграфе появляются зависимости от угла φ , и формулы для волнового поля становятся более сложными. Поэтому для удобства их обозрения все основные и промежуточные и окончательные формулы приведены в таблице I. Здесь дадим краткие пояснения к этим формулам.

В графе (52) таблицы приведены обозначения, используемые при переходе от декартовых координат к цилиндрическим. Когда эти обозначения подставим в двумерные спектры (I9) и (20) волнового поля, данные в декартовых координатах, получим соответствующие спектры в координатах τ , φ , z . Эти спектры приведены в графах (53, 54) таблицы I. Когда полученные спектры подставим в двухкратные интегралы (I6) и (I7), дальше произведём замену переменных интегрирования κ_x , κ_y на κ , ψ по формулам графы (52), тогда двухкратные интегралы (I6) и (I7) преобразуются в интегралы, приведённые в графе (55) таблицы. Во внутреннем интеграле (55) интегрирование производится по переменной ψ . Для всех функций $A(\psi)$, входящих в спектры $\tilde{J}_{5z, \varphi z}(\kappa_z, \psi)$ и $\tilde{J}_{\rho z, \varphi z}(\kappa_z, \psi)$ в виде множителя, внутренний интеграл (55) берётся. В графе (56) этот интеграл обозначен через $B(q)$, где $q = \kappa_z \tau$. В этой же графе приведены формулы для $B(q)$ при заданных подинтегральных функциях $A(\psi)$. Подставляя соответствующее значение $B(q)$ в интегралы (55), получим окончатель-

52	$x = z \cos \varphi, y = z \sin \varphi, z^2 = x^2 + y^2, dx dy = z dz d\varphi$ $K_x = K_z \cos \varphi, K_y = K_z \sin \varphi, K_z^2 = K_x^2 + K_y^2, dK_x dK_y = K_z dK_z d\varphi$	$\bar{J}_z(K_z) = \bar{J}_x \cos \varphi + \bar{J}_y \sin \varphi$ $\bar{J}_\varphi(K_z) = -\bar{J}_x \sin \varphi + \bar{J}_y \cos \varphi$
53	$\bar{J}_{pz}(K) = NK^2 [\cos \varphi + \cos(2\psi - \varphi)];$ $\bar{J}_{pz}(K) = 2NK \cdot P_2 \cos \varphi,$	$\bar{J}_{p\varphi}(K_z) = NK_z^2 [-\sin \varphi + \sin(2\psi - \varphi)];$ $N \equiv -\frac{S_0}{\rho V_s} \cdot \frac{S_z}{D_0} T_x(K).$
54	$\bar{J}_{sz}(K) = \frac{M}{2} [(2B - Q) \cos \varphi + Q \cos(2\psi - \varphi)];$ $\bar{J}_{sz}(K) = -M \cdot C \cdot \cos \varphi,$	$\bar{J}_{s\varphi}(K) = \frac{M}{2} [(Q - 2B) \sin \varphi + Q \sin(2\psi - \varphi)];$ $M \equiv -\frac{S_0}{\rho V_s} \cdot \frac{T_x}{S_z D_0}; B \equiv S_z^2 (S_0^2 - 2K^2);$ $Q \equiv (S_0^2 - 2K^2 - 4P_2 S_z) K_z^2; C \equiv (S_0^2 - 2K^2) K \cdot S_z.$
55	$J_{pm}(z, \varphi, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{j(P_2 z - \omega t)} k dk \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{J}_{pm}(K, \psi) e^{jKz \cos(\psi - \varphi)} d\psi, m = z, \varphi, z.$ $J_{sm}(z, \varphi, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{j(S_2 z - \omega t)} k dk \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{J}_{sm}(K, \psi) e^{jKz \cos(\psi - \varphi)} d\psi, m = z, \varphi, z.$	

56	$B(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\psi) e^{j\varphi \cos(\psi - \varphi)} d\psi$	<table border="1"> <tr> <td>$A(\psi)$</td> <td>1</td> <td>$\cos \psi$</td> <td>$\cos(2\psi - \varphi)$</td> <td>$\sin(2\psi - \varphi)$</td> <td>$\cos 2\psi$</td> <td>$\sin 2\psi$</td> </tr> <tr> <td>$B(\varphi)$</td> <td>$J_0(\varphi)$</td> <td>$J_1(\varphi) \cos \varphi$</td> <td>$-J_2(\varphi) \cos \varphi$</td> <td>$-J_2(\varphi) \cos \varphi$</td> <td>$-J_2(\varphi) \cos 2\varphi$</td> <td>$-J_2(\varphi) \sin 2\varphi$</td> </tr> </table>	$A(\psi)$	1	$\cos \psi$	$\cos(2\psi - \varphi)$	$\sin(2\psi - \varphi)$	$\cos 2\psi$	$\sin 2\psi$	$B(\varphi)$	$J_0(\varphi)$	$J_1(\varphi) \cos \varphi$	$-J_2(\varphi) \cos \varphi$	$-J_2(\varphi) \cos \varphi$	$-J_2(\varphi) \cos 2\varphi$	$-J_2(\varphi) \sin 2\varphi$
$A(\psi)$	1	$\cos \psi$	$\cos(2\psi - \varphi)$	$\sin(2\psi - \varphi)$	$\cos 2\psi$	$\sin 2\psi$										
$B(\varphi)$	$J_0(\varphi)$	$J_1(\varphi) \cos \varphi$	$-J_2(\varphi) \cos \varphi$	$-J_2(\varphi) \cos \varphi$	$-J_2(\varphi) \cos 2\varphi$	$-J_2(\varphi) \sin 2\varphi$										
57	$J_{pm}(z, \varphi, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty N y_{pm} e^{j(P_2 z - \omega t)} k dk; m = z, \varphi, z;$ $y_{pz} \equiv -[J_0(Kz) + J_2(Kz)] K^2 \cos \varphi;$ $y_{p\varphi} \equiv -[J_0(Kz) - J_2(Kz)] K^2 \sin \varphi;$ $y_{pz} \equiv j 2K P_2 \cdot J_1(Kz) \cos \varphi$															
58	$J_{sm}(z, \varphi, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty M y_{sm} e^{j(S_2 z - \omega t)} k dk;$ $y_{sz} \equiv \frac{1}{2} [(2B - Q) J_0(Kz) - Q J_2(Kz)] \cos \varphi;$ $y_{s\varphi} \equiv \frac{1}{2} [(Q - 2B) J_0(Kz) - Q J_2(Kz)] \sin \varphi;$ $y_{sz} \equiv -j C \cdot J_1(Kz) \cos \varphi.$															
59	$J_x = J_z \cos \varphi - J_\varphi \sin \varphi;$ $J_y = J_z \sin \varphi + J_\varphi \cos \varphi,$ $J_z = J_z$															
60	$J_{pm}(z, \varphi, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty N L_{pm} e^{j(P_2 z - \omega t)} k dk; m = x, y, z;$ $L_{px} \equiv K^2 [J_0(Kz) - J_2(Kz) \cos 2\varphi];$ $L_{py} \equiv -K^2 J_2(Kz) \sin 2\varphi;$ $L_{pz} \equiv j 2K P_2 J_1(Kz) \cos \varphi.$															
61	$J_{sm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{2} M L_{sm} e^{j(S_2 z - \omega t)} k dk, m = x, y, z;$ $L_{sx} \equiv (2B - Q) J_0(Kz) - Q J_2(Kz) \cos 2\varphi,$ $L_{sy} \equiv -Q J_2(Kz) \sin 2\varphi,$ $L_{sz} \equiv -j 2C J_1(Kz) \cos \varphi.$															

ные формулы для волнового поля, приведённые в (57), (58) графах таблицы I. Во многих случаях волновое поле удобно рассматривать в прямоугольной системе координат. Поэтому в графе (60) и (61) приведены формулы для расчёта волнового поля в декартовой системе координат, которые получены из (57) и (58) при помощи преобразования (59).

Как видно из этих формул, вертикальные компоненты $\mathcal{J}_{pz}(\alpha, \varphi, z, t)$ и $\mathcal{J}_{st}(\alpha, z, \varphi, t)$ излучаемых волн определяются через $\mathcal{J}_i(\kappa z)$ преобразование. Поскольку $\mathcal{J}_i(\kappa z)|_{z=0} = 0$, вертикальные компоненты по оси z будут равны нулю.

Волны $\mathcal{J}_{pz}(\alpha, \varphi, z, t)$ и $\mathcal{J}_{py}(\alpha, \varphi, z, t)$ определяются через $\mathcal{J}_o(\kappa z)$ преобразование. Тем не менее они будут быстро затухать с глубиной, т.к. в их спектры в качестве сомножителя входит κ^2 и в области $\kappa \approx 0$, которая определяет интенсивность волн с большими кажущимися скоростями, компоненты $\bar{\mathcal{J}}_{pz}(\kappa)$ и $\bar{\mathcal{J}}_{py}(\kappa)$ будут незначительными.

7. Источник давления, действующий на поверхности жидкостного полупространства.

Покажем, что вышеприведённые формулы с некоторыми изменениями могут быть использованы для расчёта волнового поля так же и в жидкостном полупространстве. Этот случай может представлять интерес при теоретических исследованиях поля излучения поверхностного источника для морской сейсморазведки.

Пусть на поверхности жидкостного полупространства действует сила, распределённая по закону

$$\vec{\mathcal{F}}(x, y, t) = \mathcal{F}(x, y) e^{-j\omega t} \ell_z.$$

Поле смещений будет определяться по формуле (2)

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \text{grad } \Phi(x, y, z, t)$$

векторный потенциал $\vec{\psi} = 0$.

Решение должно удовлетворять волновому уравнению

$$\Delta \Phi = \frac{1}{V_p^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi \quad (62)$$

и граничным условиям

$$\tau_{zz}|_{z=0} = \lambda \overrightarrow{\text{div}} = -\bar{T}(x, y), \quad \tau_z = \tau_{zy} = 0, \quad (63)$$

где $\lambda \equiv \rho V_p^2$.

Решение ищем в форме (5), т.е. путём двумерного преобразования Фурье. В такой же форме (см. формулу 7) представляем граничные условия (63).

При этом волновое уравнение (62) превращается в уравнение

$$K_x^2 + K_y^2 + P_z^2 = P_0^2; \quad P_0 \equiv \frac{\omega}{V_p},$$

а граничные условия (63) - в уравнение

$$\bar{\Phi}(K_x, K_y) = \frac{1}{\rho \omega^2} \bar{T}_z(K_x, K_y). \quad (64)$$

Отсюда, согласно формуле (5), решение нашей задачи можно написать в виде

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{\rho \omega^2} e^{-j\omega t} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{T}_z(K_x, K_y) e^{j(K_x x + K_y y + P_z z)} dK_x dK_y. \quad (65)$$

Поле смещений будем представлять в форме (15), спектры компонент смещения будут определяться формулами (14). Скорость смещения можно найти по формуле

$$\bar{T}(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{U}(x, y, z, t) = \text{grad} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, y, z, t) \right\}.$$

Отсюда спектры компонент скорости смещения будут равны

$$\bar{T}_x(K_x, K_y) = \frac{K_x}{\rho \omega} \bar{T}_z(K_x, K_y), \quad \bar{T}_y(K_x, K_y) = \frac{K_y}{\rho \omega} \bar{T}_z(K_x, K_y),$$

$$\bar{T}_z(K_x, K_y) = \frac{P_z}{\rho \omega} \bar{T}_z(K_x, K_y).$$

В жидкостной среде волновое поле измеряется обычно датчиками давления. Для идеальной невязкой жидкости поле давления связано с потенциалом $\Phi_y(x, y, z, t)$ скорости смещения по формуле

$$P(x, y, z, t) = \rho \frac{\partial \Phi_y}{\partial t}.$$

Поскольку мы решение построили, используя потенциал смещения, то

$$\Phi_{,j}(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, y, z, t).$$

Следовательно, поле давления будет определяться формулой

$$\begin{aligned} P(x, y, z, t) &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x, y, z, t) = \\ &= e^{-j\omega t} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} T_z(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y + p_z z)} dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (66)$$

В случае, когда распределение источника имеет осевую симметрию $\mathcal{T}(x, y) = \mathcal{T}(r)$, переходя к цилиндрическим координатам по формулам (32), получим

$$P(r, z, t) = -e^{-j\omega t} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} T_z(k_x) e^{j p_z z} \mathcal{J}_0(k_x r) k_x dk_x. \quad (67)$$

По формулам (66) и (67) можно видеть, что при $z = 0$ давление $P(x, y, z, t)$ равно заданному распределению силы $\mathcal{F}(x, y, z, t)$ со знаком минус, т.е. давление жидкости на поверхности полупространства находится в равновесии с внешней силой. В подинтегральных выражениях знаменатель $D(k)$ отсутствует. Это означает, что волны Релея на поверхности жидкостного полупространства не возникают. При $k > p_0$ волновое число $p_z = j\sqrt{k^2 - p_0^2}$ поэтому в выражениях (66) и (67) присутствуют компоненты, затухающие вдоль по экспоненте.

8. 0 сходимости интегралов.

Выше мы видели, что волновое поле описывается при помощи однотипных интегралов вида

$$\mathcal{J}_{im}(r, \varphi, z, t) = \int_0^{\infty} T(k) \frac{E(k)}{D_0(k)} e^{j\sqrt{\theta_i^2 - k^2} z} \mathcal{J}_n(kr) dk e^{-j\omega t}, \quad (68)$$

где $\theta_i = p_z, s_z$; $i = p, s$.

При $z > 0$ сходимость этих интегралов обеспечивается экспонентой $\exp\{-z\sqrt{\kappa^2 - \rho_0^2}\}$. Поэтому вопрос о сходимости следует рассмотреть при $z = 0$.

Функция $E(\kappa)$ в интегралах, которые нам встречались, при больших κ растёт как κ^4 .

Рассмотрим знаменатель $D_0(\kappa)$. При $\kappa > S_0$

$$D_0(\kappa) = (S_0^2 - 2\kappa^2)^2 - 4\kappa^4(1 - \gamma^2 \frac{S_0^2}{\kappa^2})^{1/2} (1 - \frac{S_0^2}{\kappa^2})^{1/2}.$$

При $\kappa \gg S_0$ квадратные корни можем разложить в степенной ряд и получим

$$D_0(\kappa) \approx -2\kappa^2 S_0^2 (1 - \gamma^2) + \frac{1}{2} S_0^4 (1 - \gamma^2). \quad (69)$$

Таким образом, $D_0(\kappa)$ растёт как κ^2 . Заметим, что интеграл типа $\int_0^\infty \kappa^{\nu} J_n(\kappa z) d\kappa$ при $\nu > \frac{1}{2}$ расходится (или не существует). Частотная характеристика $T(\kappa)$ наиболее интересных источников (см. формулы 31 и 33) снижает степень подинтегральной функции (68) только на единицу. Следовательно, интеграл (68) при $z = 0$ оказывается расходящимся. Вспомним, однако, что общее волновое поле $\vec{T}(z, \varphi, z, t)$ мы разделили на продольную \vec{T}_p и поперечную волну, исходя из того, что первая из-за наличия в (68) экспоненты $\exp\{j\sqrt{\rho_0^2 - \kappa^2} z\}$ в полупространстве $z > 0$ распространяется со скоростью продольной волны V_p , т.к. $\rho_0 \equiv \frac{\omega}{V_p}$, а вторая — со скоростью поперечной волны V_s . Из-за разности скоростей эти волны в полупространстве $z > 0$ разделяются между собой во времени и их правомерно рассматривать отдельно друг от друга. На плоскости $z = 0$ вышеуказанные экспоненты исчезают. Поэтому, строго говоря, мы не вправе общее поле $\vec{T}(z, \varphi, z, t)$ делить на продольные и поперечные волны. Если при $z = 0$, z, φ — компоненты вектора $\vec{T}(z, \varphi, t)$ будем рассматривать в виде $J_m(z, \varphi, t) = J_{pm} + J_{sm}$, то путём непосредственной подстановки формулы (38-41) для вертикального воздействия и формул (57-61) для горизонтального воздействия можем легко убедиться, что степень числителя $E(\alpha)$ снизится на два и дробь $E(\kappa)/D(\kappa)$ при больших κ будет стремиться к единице. В этом случае интегралы типа (68) будут конечными при любой z , т.к. несобственные интегралы от $T(\kappa)$ и от функции Бесселя сходятся.

9. Поле смещения под действием распределённой статической силы.

Поле смещения точек полупространства под действием силы, постоянной во времени, представляет интерес при исследовании низкочастотных вибрационных источников сейсмических колебаний как предельный случай. Вектор смещения $\vec{U}(x, y, z)$ под действием вертикальной силы, распределённой на плоскости $z = 0$, широко используется в строительной механике. Формулы для расчёта $\vec{U}(x, y, z)$ выводятся там при помощи математического аппарата теории упругости. Для случая горизонтальной силы расчётные формулы для компонент вектора $\vec{U}(x, y, z)$ в литературе не встречаются (автору неизвестны), хотя их тоже, по видимому, можно вывести на основе теории упругости. Описание исходных положений этой теории заняло бы здесь много места в то время, как необходимые формулы для статики можем получить путём несложных преобразований готовых формул данной работы.

Волновые уравнения (3) при использовании двумерного преобразования Фурье превращаются в уравнения (6), в которых двукратное производное по времени учтено параметрами $P_0 \equiv \frac{\omega}{V_p}$ и $S_0 \equiv \frac{\omega}{V_s}$. В статическом случае $P_0 = S_0 = 0$ и волновые уравнения (3) и (6) превращаются в уравнения Лапласа и вместо (6) будем иметь

$$K_x^2 + K_y^2 + P_z^2 = 0, \quad K_x^2 + K_y^2 + S_z^2 = 0.$$

Поэтому, чтобы получить поле смещения, в формулах (38-4I) и (57-6I) от скорости смещения следует перейти к смещению

$$U(x, y, z, t) = -\frac{1}{j\omega} \mathcal{J}(x, y, z, t),$$

а затем выполнить предельный переход $S_0 \rightarrow 0$, $P_0 = \gamma S_0 \rightarrow 0$

Сделаем это сначала для вертикального источника. В случае статики делить поле смещения на продольные и поперечные волны, очевидно, лишено смысла и поэтому мы должны рассматривать сумму $\vec{U} = \vec{U}_p + \vec{U}_s$. Из формул (40) и (4I) имеем

$$U_z = -\frac{1}{j\omega} (\mathcal{J}_{pz} + \mathcal{J}_{sz}) = j \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{T_z(k)}{D_0(k)} \xi(k) P_z k J_0(kz) dk, \quad (70)$$

где $\xi(\kappa) \equiv (s_0^2 - 2\kappa^2) e^{jP_z z} + 2\kappa^2 e^{jS_z z}$

Найден предел $\lim_{s_0 \rightarrow 0} \xi(\kappa) \frac{1}{D_0(\kappa)}$. Для этого экспоненты, входящие в $\xi(\kappa)$ преобразуем следующим образом

$$e^{jP_z z} = e^{-\sqrt{\kappa^2 - \gamma^2 s_0^2} z} = e^{-\kappa z \sqrt{1 - \gamma^2 \frac{s_0^2}{\kappa^2}}} \cong$$

$$e^{-\kappa z (1 - \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{s_0^2}{\kappa^2})} \approx e^{-\kappa z (1 + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{s_0^2}{\kappa^2})}.$$

Произведение $P_z S_z$, входящие в $D_0(\kappa)$, преобразуем к виду

$$P_z S_z = -(\kappa^2 - \gamma^2 s_0^2)^{1/2} (\kappa^2 - s_0^2)^{1/2} = -\kappa^2 (1 - \gamma^2 \frac{s_0^2}{\kappa^2})^{1/2} (1 - \frac{s_0^2}{\kappa^2})^{1/2} \approx$$

$$\approx -\kappa^2 (1 - \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{s_0^2}{\kappa^2}) (1 - \frac{1}{2} \frac{s_0^2}{\kappa^2}) \approx -\kappa^2 [1 - \frac{1}{2} \frac{s_0^2}{\kappa^2} (1 + \gamma^2)].$$

Используя эти преобразования, получим

$$\lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{\xi(\kappa)}{D_0(\kappa)} = (-1) \frac{1 + (1 - \gamma^2) \kappa z}{2(1 - \gamma^2) \kappa^2} e^{-\kappa z}.$$

Имея в виду, что $\lim_{s_0 \rightarrow 0} P_z = j\kappa$, из формулы (70) получаем

$$U_z = \frac{1}{4\pi(1 - \gamma^2)} \int_0^\infty T_z(\kappa) [1 - (1 - \gamma^2) \kappa z] e^{-\kappa z} J_0(\kappa r) d\kappa. \quad (71)$$

Этот интеграл для многих видов задания функции $T_z(\kappa)$ берётся. В качестве примера возьмём источник, сила которого равномерно распределена внутри круга с радиусом γ_0 . Частотная характеристика такого источника дана формулой (31). В этом случае интеграл выражается через двойной ряд (см., например, табличный интеграл № 6.626 из 4), что не очень удобно для применения. Поэтому приведём здесь формулу для U_z по наиболее интересным направлениям. Смещение по оси z при $\gamma = 0$ найдём из (71), имея в виду $J_0(\kappa r)|_{z=0} = 1$. Тогда, используя табличные интегралы № 6.623.3 и № 6.611.1 из [4], получим:

$$U_z(z) = U_z^0 \left[1 + (1 - \gamma^2) \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}} \right] (\sqrt{1 + \theta^2} - \theta), \quad (72)$$

где $\theta \equiv \frac{z}{\gamma_0}$.

$U_z^0 = \frac{J_z}{2\pi\mu z_0(1-\gamma^2)}$ - смещение среды в точке $\gamma = z = 0$.
 Вдали от источника ($\theta \gg 1$) величину смещения получим, разлагая (72) в степенной ряд:

$$U_z(z) = \frac{2-\gamma^2}{2} U_z^0 \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4\theta^3} + \dots \right). \quad (72^I)$$

Смещение точек поверхности полупространства будет также определяться формулой (71) при $z = 0$. Используя интегралы № 6.573.1, 2, 3 из [4] и, удерживая первые два члена ряда, получим

$$U_z(z) = U_z^0 \cdot a(\rho), \quad a(\rho) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}\rho^2 + \dots, & 0 \leq \rho < 1 \\ \frac{2}{\rho}, & \rho = 1 \\ \frac{1}{2\rho} \left(1 + \frac{1}{8\rho^2} + \dots \right), & \rho > 1, \end{cases} \quad (73)$$

где $\rho = \frac{z}{z_0}$.

Из формул (72^I) и (73) видно, что основная компонента $U_z(z, z)$ поля смещения при вертикальной силе затухает с расстоянием R как $1/R$, т.е. вдали от источника она должна чувствоваться так же, как сейсмическая волна. Другое дело, что приборов для измерения статического смещения таких же чувствительных, как сейсмоприёмник, не существует.

Приведём формулы для компоненты U_x статического смещения при горизонтальном воздействии по направлению x . Формула для U_x как функция трёх переменных x, y, z или γ, φ, z получается довольно громоздкой и неудобной для практических расчётов. Поэтому здесь дадим формулы по наиболее интересным направлениям для источника с равномерным распределением силы внутри круга (см. формулу 3I).

Используя формулы (60) и (6I) смещения точек, расположенных по оси z при $\gamma = 0$, получим

$$U_x(z) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{j\omega} (\gamma_{px} + \gamma_{sx}) \right] = U_x^0 \left[(\sqrt{\theta^2 - 1} - \theta) \left(1 + \frac{1+\gamma^2}{3-2\gamma^2} \cdot \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 - 1}} \right) \right], \quad (74)$$

где $\theta \equiv \frac{z}{z_0}$, $U_x^0 \equiv \frac{(3-2\delta^2) \mathcal{F}_x}{4\sqrt{\mu} z_0 (1-\delta^2)}$ - смещение среды в точке $z = z_0 = 0$.

В точках, расположенных по оси $z = \varphi = 0$, x - смещение среды будет равно

$$U_x(z) = U_x^0 \left[a_1(\rho) + \frac{1-2\delta^2}{3-2\delta^2} a_2(\rho) \right], \quad \rho \equiv \frac{z}{z_0}, \quad (75)$$

$$a_1(\rho) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}\rho^2 & 0 < \rho < 1; \\ \frac{2}{3\rho} & \rho = 1; \\ \frac{1}{2\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right); & \rho > 1; \end{cases} \quad a_2(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{8}\rho^2 \left(1 + \frac{1}{4}\rho^2 \right), & 0 < \rho < 1; \\ \frac{2}{3\rho}, & \rho = 1; \\ \frac{1}{2\rho} \left(1 - \frac{3}{8\rho^2} \right), & \rho > 1; \end{cases}$$

Формула для смещения $U_x(z)$ точек, расположенных по линии $z = 0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ совпадает с (75) с тем лишь отличием, что перед второй слагаемой (функцией $a_2(\rho)$) стоит знак минус. При выводе этих формул процедура предельного перехода такая же. Другие компоненты вектора смещения при необходимости могут быть определены аналогичным образом.

Л и т е р а т у р а.

1. Бабешко В.А., Чичинин И.С. Вопросы единственности в стационарных задачах о колебании упругого полупространства. - В сб.: Вопросы вибрационного просвечивания Земли. "Наука", М., 1977, в печати.
2. Бабешко В.А. К теории динамических контактных задач. - "ДАН СССР", 1971, т.201, №3, с.556-558.
3. Гольцман Ф.М. Частотная теория интерференционных систем. - "Изв. АН СССР, серия геофизика", 1960, № I, с.7-23.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений. М., Физматгиз, 1962.
5. Чичинин И.С., Рудаков А.Г. Экспериментальные исследования группы приёмников и источников на основе частотной теории

группирования. - В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. т.4, Л., 1962, с.63-70.

6. Шемякин Е.И., Файншмидт В.Л. Распространение волны в упругом пространстве, возбуждённом поверхностной касательной силой.- "Учёные записки ЛГУ", № 177, сер.математика, 1954, с.71-93.
7. Rosemann H. Der Einflub der Ankopplung des Seismometers an den Untergrund auf die Energieübertragung. Fraiberger Forschungshefte. Geophysik, 1959, s. 64.

Н.В. Глушкова, В.В. Калинин, М.Г. Селезнёв,
А.В. Смирнова, И.С. Чичинин, Л.Я. Шамовская

МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ
ВИБРАЦИОННОГО ИСТОЧНИКА, РАСПРЕДЕЛЁННОГО НА ПОВЕРХНО-
СТИ ОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В данной работе описаны основные результаты исследований по разработке методики расчёта на ЭВМ поля смещения вблизи источника, распределённого на плоскости $z = 0$. Приведены также первые результаты расчётов, выполненных по разработанной методике для некоторых примеров, представляющих интерес для осмысливания экспериментальных данных, получаемых при использовании вибрационных источников продольных и поперечных волн.

В стационарных задачах, когда вектор напряжений (или распределение силы источника) задан на поверхности $z = 0$ в виде

$$\vec{F}(x, y, t) = (F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z) e^{-j\omega t} \quad (I)$$

решение легко строится путём использования двумерного преобразования Фурье по переменным x и y [1,2]. При этом поле смещений и поле напряжений в среде выражаются через двухкратные интегралы Фурье. Когда компоненты $F_m(x, y)$ заданы в виде осесимметричных функций, можно перейти к цилиндрическим координатам ρ, φ, z и двухкратные интегралы Фурье трансформируются в однократные преобразования Бесселя, тогда поле смещения представляется суммой нескольких интегралов типа

$$U_{in} = f_{in}(\varphi) e^{-j\omega t} \int_0^{\infty} T(\kappa) \frac{f_{in}}{D(\kappa)} e^{j\beta_i z} J_n(\kappa z) \kappa d\kappa, \quad (2)$$

где $i = 1, 2$ $z \geq 0$, $\beta_1 = \sqrt{P_0^2 - \kappa^2}$; $\beta_2 = \sqrt{S_0^2 - \kappa^2}$;

$P_0 \equiv \frac{\omega}{V_p}$, $S_0 \equiv \frac{\omega}{V_s}$ - в среде без трения,

$P_0 \equiv \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} (1 + j\xi(\beta))}$, $S_0 \equiv \omega \sqrt{\frac{\rho}{2\mu} (1 + j\xi(\beta))}$ - в среде с трением

$$D(\kappa) \equiv (S_0 - 2\kappa^2)^2 + 4\kappa^2 \beta_1 \beta_2 \quad \text{"знаменатель Релея"} \quad (3)$$

f_{in} - целое рациональное выражение по переменным κ , β_1 и β_2 ,

$$T(\kappa) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(x, y) e^{j\kappa_x x - j\kappa_y y} dx dy = 2\pi \int_0^{\infty} F(z) J_0(\kappa z) z dz \quad (4)$$

- эту функцию в соответствии с [2] будем называть "частотной характеристикой" источника.

$J_n(\kappa z)$ - функция Бесселя первого рода n -го порядка.

$f_{in}(\varphi)$ - некоторая функция от угла φ .

Развёрнутые формулы для полей смещения продольных и поперечных волн для различных частных случаев задания функции $F(z)$ приведены в [2]. Они весьма громоздки и выписывать их здесь не будем.

Интегралы типа (2), через которые выражаются поля смещений, несмотря на кажущуюся простоту, не поддаются аналитическому исследованию. Воспользоваться асимптотическими методами вычисления этого интеграла не представляется возможным, т.к. для целей разработки вибрационных источников сейсмических колебаний целесообразно исследовать поле смещения вблизи источника, а также в точках контакта источника со средой. Поиск и опробование различных методов и программ расчёта на ЭВМ заняли у авторов много времени и поэтому остановимся на этих вопросах более подробно.

Аппарат преобразований Фурье для тел с границами, уходящими на бесконечность, может быть эффективно использован при учёте принципа предельного поглощения. Принцип предельного поглощения

состоит в искусственном введении внутреннего трения в среду без поглощения. Он обеспечивает экспоненциальное затухание перемещений в среде, что является основанием для использования интегральных преобразований. Принцип реализуется путём нагружения дифференциальных уравнений, описывающих движение среды членами, пропорциональными первым степеням скорости с малым коэффициентом пропорциональности β . После получения решения в среде с трением можно произвести предельный переход к среде без трения при $\beta \rightarrow 0$. При этом необходимо взять равномерный предел. Принцип поглощения обладает тем автоматизмом, что обеспечивает излучение волн на бесконечность и позволяет изучать корректное решение задач колебания в неограниченных областях [1].

В случае среды с внутренним трением подинтегральная функция в правой части (2) не имеет полюсов и точек ветвления на действительной оси и расчёт интеграла можно производить численно (например, методом Симпсона), учитывая, что параметры β_i — комплексные. Выбор ветви β_i в этом случае будет описан ниже.

В случае среды без трения получим решение из (2), беря равномерный предел при $\beta \rightarrow 0$ ($\xi(\beta) \rightarrow 0$). При этом полюс и точки ветвления подинтегральной функции сместятся с полуплоскости $\mathcal{J}_m(\kappa) > 0$ на ось $\mathcal{J}_m(\kappa) = 0$.

В силу того, что берётся равномерный предел, контур интегрирования не может коснуться полюса или точек ветвления и должен быть деформирован в комплексную плоскость $\mathcal{J}_m(\kappa) < 0$ так, чтобы обходить полюс и точки ветвления подинтегральной функции снизу (на остальной части он может совпадать с действительной осью).

При вычислении интеграла можно деформировать контур интегрирования вновь на действительную ось, учитывая вычеты в точках полюсов, и считать интеграл, имеющий разрывы. Но, как показал практический опыт авторов, при расчётах по различным численным методам получить удовлетворительные результаты в этом случае не удаётся: результаты счёта оказываются зависимыми от выбранного шага дискретизации, от метода приближения к полюсам подинтегральной функции. Наиболее рациональным оказался метод численного интегрирования непосредственно по комплексному контуру Γ , показанному на рис. 1. Параметры этого контура $c > 0$, $\gamma > \kappa_R$, где κ_R — полюс подинтегральной функции. По этому контуру можно производить расчёт с помощью любого численного метода, так как при этом

особенностей подынтегральной функции на контуре интегрирования нет. Выход из программы осуществляется при выполнении условия

$$\frac{|I_2|}{|I_1|} < \delta,$$

где I_1 — значение интеграла в случае, когда контур Γ конечен и его конец лежит в точке $A_1 (A_2 > \nu)$, а I_2 — значение интеграла по отрезку вещественной оси A_1, A_2 , причём A_1 и A_2 ($A_1 < A_2$) — два последовательно лежащих нуля подынтегральной функции (2); δ — заданная точность счёта интеграла. В этом случае, так как подынтегральная функция убывает на действительной оси при $k \rightarrow \infty$, модуль интеграла по отброшенной части и подавно меньше δ .

При применении данного подхода единственной сложностью является необходимость вычисления подынтегральной функции в комплексной плоскости (k — комплексно) и выбор ветвей σ_1 и σ_2 . Ветви при данном выборе контура Γ фиксируем следующим образом

$$\sigma_i = \sqrt{S_i^2 - k^2} = \begin{cases} j\sqrt{k^2 - S_i^2} & k \geq S_i \\ \sqrt{S_i^2 - k^2} & k < S_i \end{cases}$$

если k лежит на вещественной оси, если же k — комплексно, то при вычислении корня берётся то его значение, для которого

$$\Im \sqrt{k^2 - S_i^2} > 0,$$

т.е. чтобы экспонента $\exp\{j\sigma_i z\}$ в рассматриваемом полупространстве $z > 0$ была затухающей функцией от z .

В качестве примеров для расчётов были выбраны случаи, когда сила $F(z)$, ориентированная вертикально и горизонтально, равномерно распределена внутри круга с радиусом r_0 , т.е.

$$F(x, y, t) = \begin{cases} F_0 e^{-j\omega t} & \text{при } r \leq r_0 \quad F_{\Sigma} = n r_0^2 F_0 \\ 0 & \text{при } r > r_0 \end{cases} \quad (5)$$



Рис. I.

Комплексный контур интегрирования.

Расчёты комплексной амплитуды смещения U_z при вертикальном воздействии и U_x при горизонтальной силе выполнялись в точках $z = 0$ при $z = 0, \tau_0, 2\tau_0, 4\tau_0$. В случае вертикальной силы расчёт амплитуды U_z был сделан при $\gamma = \frac{U_k}{U_p} = 0,3; 0,5$ и $0,55$. На рис.2 приведены графики функций

$$\operatorname{Re} U_z^0 = \frac{1}{U_z(0)} \operatorname{Re} \{U_z(h)\} \quad \text{и} \quad \mathcal{J}_m U_z^0 = \frac{\mathcal{J}_m \{U_z(h)\}}{U_z(0)}, \quad (6)$$

где $U_z(0) = \frac{z_0 F_0}{2(1-\gamma^2)\mu} = \frac{F_z}{2\pi z_0(1-\gamma^2)\mu}$ - статическая осадка центра источника (5) при вертикальной силе (т.е. смещение среды при $z = 0, z = 0, \omega = 0$). расчёты показали, что значения $U_z(z)$ при $h = 0$ совпадают со смещением точек внутри среды, рассчитанным по формулам из [2] для статического случая.

Как видно из рисунка, нормированные указанным способом графики слабо зависят от γ . Функция $\operatorname{Re} \{U_z(h)\}$ является амплитудой компоненты смещения, которая совершает колебания в фазе с приложенной силой, а $\mathcal{J}_m \{U_z(h)\}$ - компонентой смещения, фаза которой сдвинута на 90° относительно приложенной силы.

Из рисунка видно, что при $h \approx 0$ смещение среды во всех точках $z = 0, \tau_0, 2\tau_0$ и $4\tau_0$ происходит в фазе с приложенной силой. Это означает, что фаза скорости $\mathcal{J}_z(t)$ смещения будет сдвинута относительно фазы силы на 90° . Средняя за период мощность излучаемой волны, определяемая по формуле

$$W = \frac{1}{2} |F_z \mathcal{J}_z| \cos(\varphi_F - \varphi_\gamma) \quad (7)$$

будет равна нулю. Следовательно, при $h \approx 0$ по оси z наблюдается не волновой процесс, а осадка точек среды под действием приложенной на поверхности силы. Осадку среды, очевидно, не отрывается от источника как волна. Графики, приведённые на рис.2 любопытны тем, что осадка точек среды на глубине оказывается больше, чем амплитуда смещения среды в этих точках при $h > 1$, когда в среде имеют волновой характер. Значит, если бы существовали приборы, измеряющие величину осадки точек среды с меньшей точностью, чем измеряют амплитуду смещения сейсмоприёмники в волновых процессах, то в принципе, геофизические исследования этой среды по статической осадке можно было бы выполнять без затраты энергии, т.к. энергия, которая потребовалась для создания силы F_z , вернулась бы к источнику при снятии этой силы, если только эта сила создавалась обратимым генератором.

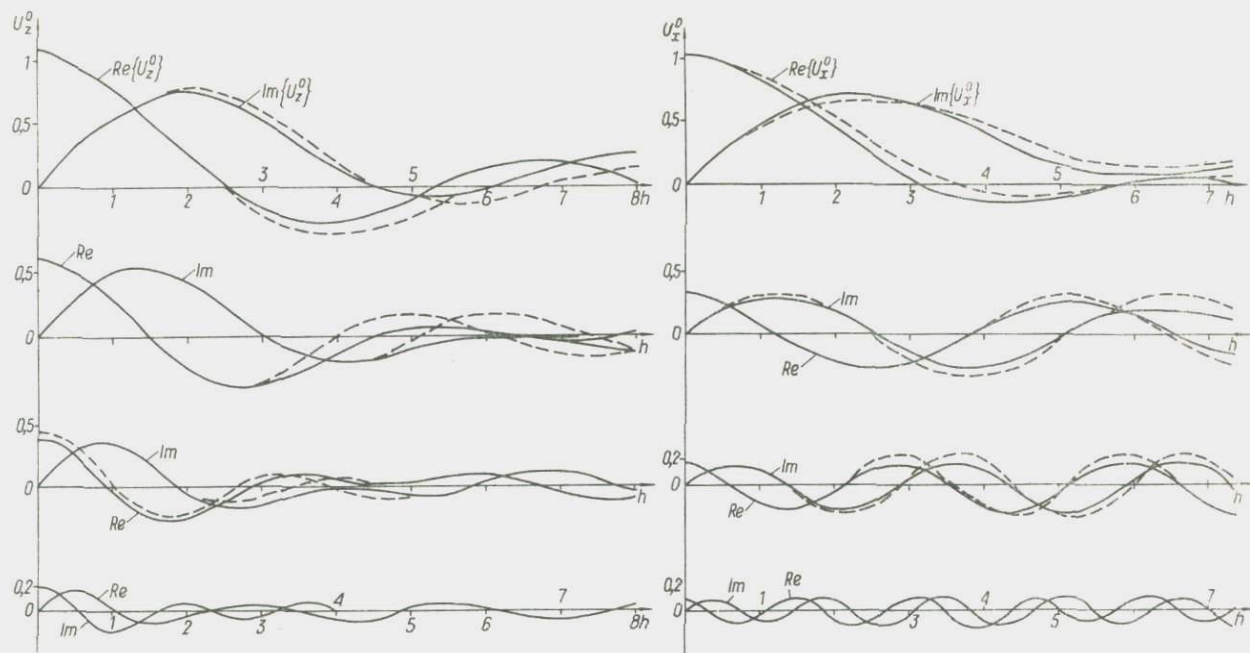


Рис.2. Графики зависимости реактивной и активной составляющих смещения грунта от обобщённой частоты при горизонтальном и вертикальном воздействиях на глубинах $z = 0, \gamma_0, 2\gamma_0, 4\gamma_0$. Сплошная линия соответствует $\gamma = 0,5$, а пунктирная - $\gamma = 0,55$.

Обратим внимание на то, что при $z = 0$, $2,5$ функция $Re\{u_z\}$ равна нулю, а $J_m\{u_z\}$ достигает максимального значения. Значит при $h \approx 2,5$ среда сопротивляется источнику как чистое трение, разность фаз, фигурирующая в (7) равна нулю и мощность источника наилучшим образом должна преобразовываться в мощность, излучаемой им в виде волны. Однако, в графиках $Re\{u_z\}$ и $J_m\{u_z\}$ при $z = 4z_0$, характеризующих амплитуду волны внутри среды, не видно особых разрастаний в области $h \approx 2,5$.

В интервале $h \approx 5 + 6$, как видно из рис. 2, функция $J_m\{u_z\}$ при $z = 0$ отрицательна. Фаза скорости смещения в центре источника, очевидно совпадает с фазой функции $J_m\{u_z\}$, следовательно, мощность (см. формулу 7), потребляемая средой от источника, будет отрицательной, что не может быть. Объяснить это можно тем, что смещение в точке по центру источника является результатом сложения колебаний, возбуждаемых всем источником. На малых частотах длина волны настолько велика по сравнению с размерами источника (например, для $h = 0,4$; $\lambda_s = 15,675z_0$), что все точки $z \leq z_0$ колеблются синфазно между собой. По мере увеличения частоты длина волны уменьшается и, когда λ становится одного порядка с размером источника, колебания поверхности $z = 0$ возбуждаемые периферийной частью источника, приходят к центру в противофазе по отношению к колебаниям точки $z = 0$, $z = 0$ и поэтому суммарная амплитуда колебания в центре источника уменьшается и может даже измениться знак. Поэтому мощность, излучаемую источником в виде упругих волн, следует определять по более общей формуле.

$$W = \frac{1}{2} \iint_s F(x, y) J(x, y) \cos(\varphi_F - \varphi_J) dx dy, \quad (8)$$

где $F(x, y)$ — амплитуда силы, действующей на элементарную площадку ds с координатами x и y ;

$J(x, y)$ — амплитуда скорости смещения точек x, y ;

φ_F, φ_J — фазы колебаний $F(x, y)$ и $J(x, y)$.

В рассматриваемом нами случае распределение силы задано по формуле (5) и поэтому

$$W = \frac{1}{z_0^2} F_s \int_0^{z_0} J_z(z) \cos \varphi_J(z) z dz. \quad (9)$$

Эта формула совпадает с (7) только тогда, когда $J_2(z)$ внутри круга $z \leq z_0$ постоянна, что имеет место лишь при малых значениях h .

Перейдём к рассмотрению других графиков. На рис.3 приведены графики затухания функции $|U_z(z, h)|$ в зависимости от z для ряда "частот" $h = \frac{\omega z_0}{V_s}$. Графики нормированы на амплитуду смещения среды в центре источника

$z = z = 0$ на данной частоте. Как видим, для частот до $h \approx 1$ смещение в среде практически совпадает с величиной смещения под действием постоянной во времени силы ($h = 0$). При больших частотах кривые затухания ведут себя более сложным образом. Это, повидимому, объясняется тем, что амплитуда смещения, определённая в центре источника, при больших частотах становится мало представительной и использовать её для характеристики источника не следует. Более представительной характеристикой источника при $h > 1$, повидимому, является смещение под источником, осреднённое по площади источника (такие расчёты пока отсутствуют). На рис.4 приведены кривые затухания на различных частотах, нормированные на величину смещения в точке $z = z_0$,

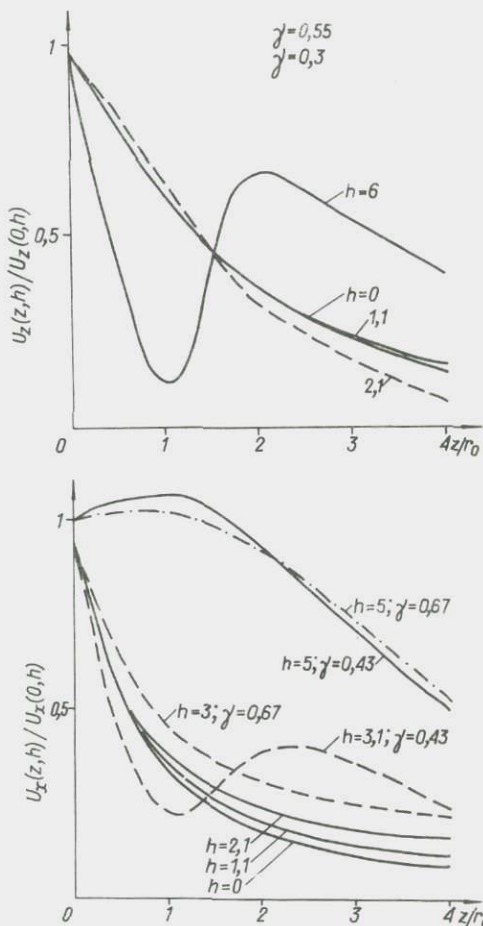


Рис. 3. Графики затухания амплитуды смещения с глубиной для различных h в случае вертикального и горизонтального воздействий.

$\tau = 0$. Как видим, при таком определении закономерности затухания стабилизируются, причём характер изменения амплитуды смещения практически не зависит от γ и мало зависит от частоты h .

Поэтому при экспериментах амплитуда смещения, определённая на глубине, будет являться более надёжной характеристикой источника.

Поскольку вышеописанные графики построены по переменной $\frac{z}{z_0}$, то очевидно, что при $U_z = \text{const}$ на заданной

глубине z амплитуда волн будет пропорциональна радиусу источника z_0 .

Когда сила F_z задана, вследствие того, что осадка $U_z(0)$ обратно пропорциональна радиусу z_0 , амплитуда смещения $U_z(z)$ при $z_0 \leq \frac{1}{4} \lambda_s$ ($h \leq 1,57$) не будет зависеть от z_0 . Тем не менее на практике использовать источники с очень малым размером будет невыгодно, т.к. деформация вблизи источника, пропорциональная величине $U_z(0)/z_0$, может превысить допустимый предел (порядка 10^{-3}) при небольшой силе воздействия F_z .

Теперь попытаемся объяснить физический смысл весьма сложного поведения функций $\text{Re } U_z^o(h)$ и $\mathcal{I}_m U_z^o(h)$, показанных на рис.2, при $z \neq 0$ в интервале $0 \leq h \leq 8$. Для лучшего обозрения на рис.5 функция $\mathcal{I}_m U_z^o(h)$ для $c = 4z_0$ представлена в большем масштабе.

Если бы мы имели одиночную плоскую волну, которую можно записать как

$$U_z(\omega, z, t) = A e^{-j\omega(t - \frac{z}{v})} = A e^{-j\omega t + jh_1 \frac{z}{z_0}}, \quad h_1 = \frac{\omega z_0}{v_1}$$

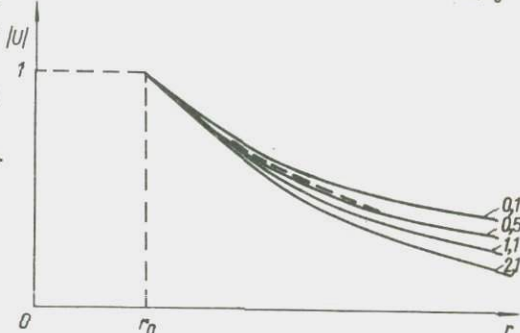
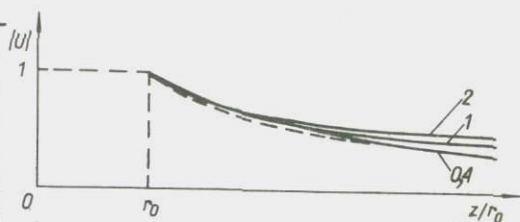


Рис.4. Графики затухания амплитуды смещения, нормированные на величину смещения в точке $z = z_0$.

то функция $Re U_z(h, z, t)$ или $\mathcal{J}_m U_z(h, z, t)$ при фиксированных значениях z и t представляла бы собой чистую синусоиду по переменной h . Период этой синусоиды был бы равен $H_1 = 2\pi \frac{z_0}{z}$. Если будем иметь две плоские волны со скоростями V_1 и V_2 , то при фиксированных значениях z и t сумма этих волн по переменной h будет наложением двух синусоид с периодами $H_1 = 2\pi \frac{z_0}{z}$ и $H_2 = \alpha 2\pi \frac{z_0}{z}$, где $\alpha = \frac{V_2}{V_1}$.

По рис.5 видно, что $\mathcal{J}_m U_z(h)$ является наложением двух процессов, в начальной стадии преобладает процесс с меньшим периодом, в конце — процесс, имеющий относительно больший период. Причём, отношение периодов H_2/H_1 приблизительно совпадает с величиной $\frac{V_p}{V_s}$,

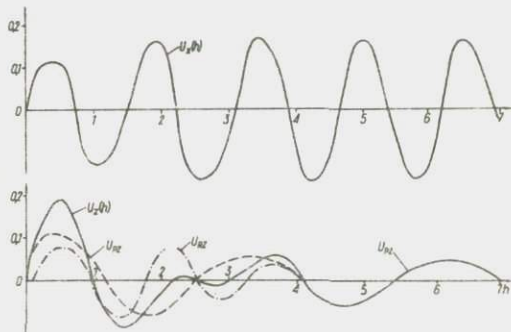


Рис.5. Графики зависимости $\mathcal{J}_m \{U\}$ от h на глубине $4z_0$, при горизонтальном и вертикальном воздействиях. U_{RZ} — волна Релея, $U_Z = U_{RZ} + U_{ZP}$ — продольная волна, $U_Z = U_{RZ} + U_{ZP}$

представляет собой сумму продольной волны $U_{ZP}^0(h)$ с волной Релея $U_{RZ}^0(h)$. Используя графики $\mathcal{J}_m U_z^0(h)$ и $Re U_z^0(h)$, можно приблизительно разделить эти волны так как это показано на рис.5. Как видно из этого рисунка, амплитуда смещения продольной волны, наблюдаемой на глубине $z/z_0 = 4$ от "частоты" $h = \frac{\omega z_0}{V_s}$ практически не зависит. Волна Релея, преобладающая во многих частотах h , при $h \geq 3,5$ падает на порядок, и на высоких частотах преобладающей становится продольная волна. На основании этих графиков можем заключить, что волна Релея на глубинах $z \geq 2\lambda_s$ практически не будет влиять на общую волновую картину.

Рассмотрим графики, аналогичные вышеописанным, рассчитанные для случая горизонтальной ориентации силы источника.

На рис.2б приведены реальные и мнимые компоненты смещения $U_x(h)$ в точках $z = 0$; $z = z_0$; $2z_0$; $4z_0$ для горизонтальной силы, заданной по формуле (5) и ориентированной по оси x . Графики нормированы на величину смещения $U_x(0)$ в точке $z = z = 0$, под

воздействием постоянной силы, распределённой на поверхности $z=0$ по формуле (5). Это смещение согласно [2] равно

$$U_x(0) = \frac{3 - 2\gamma^2}{4\gamma z_0 (1 - \gamma^2)^{1/4}} F_z. \quad (10)$$

Как видно из рисунка, смещение U_x при горизонтальном воздействии отличается от U_z вертикального воздействия тем, что на глубинах $z \geq z_0$ амплитуда $|U_x|$ не уменьшается от "частоты" h , как $U_z(h)$.

Выше мы видели, большие значения $U_z(h)$ при малых h обусловлены присутствием в $U_z(h)$ волны Релея. Если из $U_z(h)$ отделить волну Релея, то оставшаяся продольная волна тоже не уменьшается с ростом h . Поэтому рассматриваемые графики не говорят о высокочастотности спектра поперечных волн по сравнению с продольными. Поскольку скорости V_s и V_R близки друг к другу, то разделить поперечную волну от волны Релея так, как это сделано в случае вертикального воздействия, по видимому, невозможно. На рис. 5б приведена $\mathcal{J}_m\{U_x(h)\}$ при $z=4z_0$ в большем масштабе, чем на рис. 2б. Как видно из рис. 5б, функция $\mathcal{J}_m\{U_x(h)\}$ представляет собой малоискажённую синусоиду, говорящую об однотипности волны. Спад амплитуды этой синусоиды на частотах $h < 1,5$, по видимому, обусловлен наличием слабой волны Релея, которая рождается в противофазе по отношению к поперечной волне.

На рис. 3б приведены графики затухания амплитуды смещения $U_x(z, h)$ в зависимости от z для ряда фиксированных частот h . Графики нормированы на величину амплитуды смещения в центре источника $z=0$. $z=0$ для данной частоты. Как видно из этого рисунка, смещение среды при частотах до $h=1,1$ мало отличается от сдвига точек среды в статическом случае. Причём в интервале $0 \leq h \leq 2$ соответствующие графики для различных γ практически сливаются. (Расчёты выполнялись для $\gamma = 0,43 + 0,67$ или постоянная Пуассона среды $\nu = 0,1 + 0,3$). Следует заметить, что сдвиг точек среды $U_x(z, 0)$ совпадает величинами, определяемыми асимптотическими формулами из [2]. На частотах $h > 2$ закон затухания $U_x(z, h)$ осложняется. Это означает, что амплитуда смещения среды в центре источника и на глубинах $z < z_0$ при $h > 2$ будет сильно зависеть от параметров грунта и использовать её в качестве характеристики источника будет трудно. Графики затухания стабилизируются и становятся мало зависимыми от γ и частоты h на глубинах $z \geq z_0$ (см. рис. 4а).

Л и т е р а т у р а.

1. Бабешко В.А. К теории динамических контактных задач. - "ДАН СССР", 1971, т.201, №13, с.556-558.
2. Чичинин И.С. Использование спектральных представлений для решения и исследования динамических задач о колебании упругого полупространства. См. настоящий сборник.

Сагайдачная О.М., Чичинин И.С.

ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ ВДАЛИ ОТ ВИБРАЦИОННОГО ИСТОЧНИКА,
РАСПРЕДЕЛЁННОГО НА ПОВЕРХНОСТИ ОДНОРОДНОГО УП-
РУТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе дан вывод асимптотических формул, описывающих волновое поле в дальней зоне и описаны общие свойства волны, возбуждаемых стационарным источником, распределённым на поверхности однородного упругого полупространства.

Рассматриваются источники горизонтального и вертикального воздействия, обладающие круговой симметрией. Подобное предположение не уменьшает общности поставленной задачи, поскольку нам важно выделить общие характеристики сейсмических волн в дальней зоне, при этом исходные формулы для построения асимптотического решения в случае круговой симметрии более просты.

В работе было использовано решение динамической задачи о колебании упругого полупространства, построенное с помощью двумерных преобразований Фурье [5].

§1. Вывод асимптотических формул для компонент вектора смещения.

Решение для вектора смещения выражается через интегралы вида

$$U_{p,s} i(r, \varphi, z, t) = \int_0^{\infty} F_n(k) J_n(k \cdot r) \cdot k e^{jz\sqrt{\beta_p^2 - k^2} - j\omega t} dk, \quad (I)$$

где $\beta_p = \rho_p = \frac{\omega}{V_p}$, $\beta_s = s_o = \frac{\omega}{V_s}$, $i = r, z$, $z \geq 0$,
при $k > \beta$ $\sqrt{\beta^2 - k^2} = j \cdot \sqrt{k^2 - \beta^2}$

Функция $F_n(k) \exp\{jz\sqrt{\rho_s^2 - k^2}\}$ регулярна в комплексной плоскости $k = \alpha + j\beta$, но имеет точки ветвления $k = \pm \rho_0, \pm S_0$ и особые точки $k = \pm K_R$ типа простого полюса. Чтобы исключить эти особенности, интегрировать (I) будем не по вещественной оси, а по контуру Γ_I , соединяющему точки $k=0$ и $k=\infty$ и обходящего особенности $k = +\rho_0, +S_0, K_R$ снизу.

Вследствии осевой симметрии распределения силы на плоскости $z=0$ частотная характеристика $T_{x,z}(k)$ источника будет чётной функцией [5]. При чётности $T_{x,z}(k)$ функция $kF_n(k)$ обладает следующим свойством [5]:

$$-kF_n(-k) = e^{j(n+1)\frac{\pi}{2}} kF_n(k). \quad (2)$$

Используя известные отношения:

$$J_n(k) = \frac{1}{2} H_n^{(1)}(k) + H_n^{(2)}(k),$$

$$H_n^{(2)}(-k) = -e^{jn\frac{\pi}{2}} H_n^{(1)}(k),$$

где $H_n^{(1)}$, $H_n^{(2)}$ — функция Ханкеля n -ного порядка I и II рода, и свойство функции $F_n(k)$, отмеченное выше (2), преобразуем интеграл (I) к виду:

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} k F_n(k) e^{jz\sqrt{\rho^2 - k^2}} H_n^{(1)}(kr) dk e^{-j\omega t} \quad (3)$$

Здесь контур Γ_2 есть контур Γ_I плюс симметричное относительно начала координат продолжение его в левую полуплоскость. Контур Γ_2 всюду лежит на вещественной оси, обходя лишь точки ветвления $+\rho_0, +S_0$ и полюс K_R снизу, а точки $-\rho_0, -S_0, -K_R$ — сверху.

Исследуем поведение интеграла (3), положив $z = R \cos \theta$, $r = \sin \theta$ при $R \rightarrow \infty$.

Так как в окрестности $k=0$ функция мала, то этот участок при интегрировании можно не учитывать и при достаточно больших значениях r вычисления будут производиться при $|kr| \gg 1$ и функцию Ханкеля в (3) можно заменить её асимптотическим приближением

$$H_n^{(1)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{j(kr - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})} \quad (4)$$

Подставляя эту формулу в (3), получим:

$$J = \int_{\Gamma_2} \varphi(\kappa) e^{jRf(\kappa)} d\kappa, \quad (5)$$

где:

$$\varphi \equiv \sqrt{\frac{\kappa}{2\beta}} F_n(\kappa) e^{-j(\omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})},$$

$$f(\kappa) \equiv \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} \cos\theta + \kappa \sin\theta,$$

$$z = R \cos\theta, \quad r = R \sin\theta.$$

Величина интеграла (5) зависит в основном от двух факторов: поведения подинтегральной функции в окрестности полюса $\kappa = \kappa_R$ и характера осцилляции подинтегральной функции, определяемым экспонентой $\exp\{jRf(\kappa)\}$. Этим двум факторам соответствуют разные типы волн: величина интеграла, обусловленная наличием полюса $\kappa = \kappa_R$, будет давать волну Релея; а глубинные (продольные и поперечные) волны будут определяться вторым фактором. Волны Релея рассмотрим отдельно, а пока, игнорируя наличие полюса κ_R , попытаемся получить асимптотические формулы для глубинных волн.

Функция $\varphi(\kappa)$, фигурирующая в (5), является довольно гладкой функцией от κ (если не смотреть в область $\kappa = \kappa_R$). Поэтому основной вклад в величину интеграла внесёт та область, где экспонента $\exp\{jRf(\kappa)\}$ осциллирует медленно, т.е. та область, где функция $f(\kappa)$ минимальна. Для определения седловых точек [3] достаточно найти корни функции $\frac{df(\kappa)}{d\kappa} = 0$, или

$$f'(\kappa) = -\frac{\kappa \cos\theta}{\sqrt{\beta^2 - \kappa^2}} + \sin\theta = 0. \quad (6)$$

Из этого уравнения получим точки перевала, которые обозначим как:

$$\pm \kappa_0 = \pm \beta \sin\theta. \quad (7)$$

Подставляя (7) в выражение для второй производной $\frac{d^2 f(\kappa)}{d\kappa^2}$ получаем:

$$|f''(\pm \kappa_0)| = \frac{1}{\beta \cos^2\theta}.$$

В силу того, что $f'' \neq 0$, интеграл (3) можно асимптотически пред-

ставить в виде [3]

$$j \sim \frac{\varphi(k_0) \sqrt{2\pi} e^{jRf(k_0)}}{|Rf''(+k_0)|^{1/2}} - \frac{\varphi(-k_0) \sqrt{2\pi} e^{jRf(-k_0)}}{|Rf''(-k_0)|^{1/2}} \quad (8)$$

Подставляя в (8) функции $\varphi(k)$, $f(k)$ при $k = \pm k_0$, получаем:

$$j \sim \frac{\cos \theta}{R} F_n(k_0) e^{j(\beta R - \omega t + \alpha)} + \frac{\cos \theta}{R} F_n(-k_0) e^{-j(\beta R + \omega t + \alpha)}$$

Второе слагаемое даёт решение для волны, бегущей к источнику, поэтому, отбрасывая этот член, приходим к окончательному решению:

$$j \sim \frac{\cos \theta}{R} F_n(\beta \sin \theta) e^{j(\beta R - \omega t + \alpha)} \quad (9)$$

§2. Поле смещения в дальней зоне при вертикальном воздействии.

Подставляя в полученное решение (9) значение функции $F_n(k)$ из [5] и учитывая, что для продольной волны седловая точка равна $k_0 = p_0 \sin \theta = k_p$, а для поперечной — $k_0 = s_0 \sin \theta = k_s$, приходим к следующему выражению для компонент вектора смещения

$$\bar{U}(r, \varphi, z, t) = \bar{U}_p + \bar{U}_s; \quad (10)$$

$$U_{pi} \sim \frac{1}{R} L_{pi}(\theta) T_z\left(\frac{\omega}{V_p} \sin \theta\right) e^{-j\omega(t - \frac{R}{V_p}) + j\frac{\pi}{4}};$$

$$U_{si} \sim \frac{1}{R} L_{si}(\theta) T_z\left(\frac{\omega}{V_s} \sin \theta\right) e^{-j\omega(t - \frac{R}{V_s}) + j\frac{\pi}{4}};$$

где $i = r, z, \varphi$;

$$L_{pr} \equiv \frac{\gamma^2 (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta}{2\pi M D_p};$$

$$L_{sr} \equiv \frac{\sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \theta} \sin \theta \cos^2 \theta}{\pi M D_s};$$

$$L_{pz} \equiv \frac{\gamma^2(1-2\sin^2\theta)\cos\theta}{2\pi\mu D_p}; \quad L_{sz} \equiv \frac{\sqrt{\gamma^2-\sin^2\theta}\sin^2\theta\cos\theta}{\pi\mu D_s};$$

$$L_{p\varphi} \equiv 0; \quad L_{s\varphi} \equiv 0;$$

$$D_p \equiv (1-2\gamma^2\sin^2\theta)^2 + 4\gamma^3\sin^2\theta\sqrt{(\gamma^2-\sin^2\theta)(1-\gamma^2\sin^2\theta)};$$

$$D_s \equiv (1-2\sin^2\theta)^2 + 4\sin^2\theta\sqrt{(\gamma^2-\sin^2\theta)(1-\sin^2\theta)};$$

$$\gamma \equiv \frac{V_s}{V_p}.$$

В сферической системе координат R, φ, θ эти формулы выглядят более компактно:

$$U_r \sim \frac{1}{R} L_p(\theta) T_z \left(\frac{\omega}{V_p} \sin\theta \right) e^{-j\omega(t - \frac{R}{V_p}) + j\frac{\pi}{4}};$$

$$U_\theta \sim \frac{1}{R} L_{sv}(\theta) T_z \left(\frac{\omega}{V_s} \sin\theta \right) e^{-j\omega(t - \frac{R}{V_s}) + j\frac{\pi}{4}}; \quad (\text{II})$$

$$L_p \equiv \gamma^2 \frac{(1-2\gamma^2\sin^2\theta)\cos\theta}{2\pi\mu D_p}; \quad L_{sv} \equiv \frac{-\sqrt{\gamma^2-\sin^2\theta}\sin^2\theta}{2\pi\mu D_s}.$$

Как видно из формул (I0) и (II), поле смещения вертикального источника на плоскости $z = 0$, совпадает с формулами, данными Г.С.Подъяпольским [4], с точностью до множителя T_z , являющегося частотной характеристикой источника, в котором роль элементов группы играет распределение силы источника. Этот результат является вполне естественным, если вспомнить, что в [4] формулы даны для точечного источника, заданного в виде функции $\delta(r)$, для которого в соответствии с [5] функция T_z является константой.

§3. Поле смещения в дальней зоне в случае горизонтальной ориентации силы источника.

В общих формулах, приведённых в [5] для горизонтального источника в цилиндрической системе координат r, z, φ , в подынтегральных выражениях встречаются множители вида $J_0(kr) \pm J_2(kr)$. При $kr \gg 1$ легко показать, что:

$$J_0(kr) + J_2(kr) \approx 0, \quad J_0(kr) - J_2(kr) \approx 2J_0(kr). \quad (I2)$$

Учитывая это обстоятельство, формулы из [5] для компонент вектора смещения $\vec{U}(r, z, \varphi) = \vec{U}_p + \vec{U}_s$ при горизонтальном воздействии можно привести к виду:

$$U_{pr} \sim j \frac{\cos \varphi}{\pi \mu_0} \int_0^{\infty} T_x(k) \frac{s_z k^3}{D_0} e^{j(P_z z - \omega t)} J_0(kr) dk;$$

$$U_{sr} \sim j \frac{\cos \varphi}{2\pi \mu_0} \int_0^{\infty} T_x(k) \frac{\kappa s_z (s_0^2 - 2\kappa^2)}{D_0} e^{j(s_z z - \omega t)} J_0(kr) dk;$$

$$U_{pz} \sim -\frac{\cos \varphi}{\pi \mu_0} \int_0^{\infty} T_x(k) \frac{\kappa^2 s_z P_z}{D_0} J_1(kr) e^{j(P_z z - \omega t)} dk, \quad (I3)$$

$$U_{p\varphi} \sim 0;$$

$$U_{s\varphi} \sim j \frac{\sin \varphi}{2\pi \mu_0} \int_0^{\infty} T_x(k) \frac{\kappa}{s_z} J_0(kr) e^{j(s_z z - \omega t)} dk. \quad (I4)$$

Интегралы (I3) по виду ничем не отличаются от общей формулы (I) и поэтому асимптотические выражения для этих интегралов можем получить вышеописанным способом. Интеграл (I4) отличается от других тем, что знаменатель $D_0(k)$ отсутствует, подынтегральная функция имеет особенность типа $(s_0^2 - \kappa^2)^{-1/2}$. Таким образом, величина интеграла (I4) будет в основном определяться поведением

подинтегральной функции в точке перевала, где частота осцилляции функции $J_0(kr) \exp\{j s_2 z\}$ минимальна, и в точке $k = s_0$, где имеется вышеуказанная особенность. Волны, порождаемые этими двумя факторами попытаемся рассмотреть раздельно.

По направлениям $\theta < 90^\circ$ седловая точка, определяемая по формулам (6-7), равна $k_0 = s_0 \sin \theta$. Используя формулы (8-9), получим:

$$U_{s\varphi} \sim \frac{1}{R} L_{s\varphi} T_x \left(\frac{\omega}{V_s} \sin \theta \right) e^{-j\omega \left(t - \frac{R}{V_s} \right) + j \frac{\pi}{4}} \quad (I5)$$

где: $L_{s\varphi} \equiv \frac{-\sin \varphi}{2\pi \mu}$.

На поверхности $z = 0$ седловая точка совпадает с точкой $k = s_0$, где имеется особенность $(s_0^2 - k^2)^{-1/2}$. Поэтому интеграл (I4) приближённо возьмём из следующих соображений.

Подинтегральная функция (I4) имеет преобладающие значения в окрестности $k = s_0$. Поэтому интеграл по небольшому отрезку Δk , охватывающему точку $k = s_0$, будет близок к величине интеграла (I4). В окрестности $k = s_0$ частотная характеристика $T_x(k)$ при реальных размерах источника ($r_0 \leq 1 - 2M$) представляет собой довольно плавную функцию, которая в пределах отрезка Δk практически не изменит своего значения и поэтому её можно вынести за знак интеграла. После этого, чтобы интеграл (I4) свести к табличным интегралам № 6.5I7 и № 6.596 из [2], пределы интегрирования распространяем от 0 до ∞ . В результате получим:

$$U_{s\varphi_{z=0}} \sim \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{2\pi \mu} T_x \left(\frac{\omega}{V_s} \right) e^{-j\omega \left(t - \frac{r}{V_s} \right)} \quad (I6)$$

Сравнивая (I6) с (I5), видим, что они отличаются друг от друга только тем, что в (I5) частотная характеристика T_x является функцией кажущейся скорости $V^* = V_s / \sin \theta$, а в (I6) — скорости V_s , что вполне естественно, т.к. на поверхности $z = 0$ кажущаяся скорость поперечной волны совпадает со скоростью распространения этой волны.

Теперь можем написать асимптотические формулы, полученные из (I3) и (I4) вышеописанными способами для поля смещения продольных и поперечных волн, возбуждаемых горизонтальным источником, в сферической системе координат R, φ, θ .

$$U_R \sim \frac{1}{R} L_p(\varphi, \theta) T_x \left(\frac{\omega}{V_p} \sin \theta \right) e^{-j\omega \left(t - \frac{R}{V_p} \right)},$$

$$U_\theta \sim \frac{1}{R} L_{SV}(\varphi, \theta) T_x \left(\frac{\omega}{V_s} \sin \theta \right) e^{-j\omega \left(t - \frac{R}{V_s} \right)},$$

$$U_\varphi \sim \frac{1}{R} L_{SH}(\varphi, \theta) T_x \left(\frac{\omega}{V_s} \sin \theta \right) e^{-j\omega \left(t - \frac{R}{V_s} \right)}, \quad (I7)$$

где

$$L_p \equiv \frac{\gamma^3 \sin 2\theta \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta}}{2\pi \mu D_p} \cos \varphi,$$

$$L_{SV} \equiv \frac{\cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{2\pi \mu D_s} \cos \varphi, \quad L_{SH} \equiv \frac{-\sin \varphi}{2\pi \mu}.$$

В этих формулах D_p и D_s такие же, как в формулах (I0), фазовый множитель $\exp \{ j \frac{\pi}{4} \}$ опущен. Из формул (I7) видно, что формулы для поля смещения распределённого горизонтального источника также совпадают с точностью до множителя $T_x \left(\frac{\omega}{V_{p,s}} \sin \theta \right)$ с формулами Г.С.Подъяпольского [4]. Обратим внимание на то, что продольные волны, возбуждаемые горизонтальным источником, пропорциональны γ^3 . Это означает, что в обводнённой среде, где $\gamma \approx 0.1-0.2$ продольные волны на сейсмограммах должны практически отсутствовать. Это подтверждается экспериментальными данными [I], полученными при испытаниях горизонтального вибрационного источника.

В о л н а Р е л е я в д а л ь н е й з о н е

Волна Релея, как указывалось выше, обусловлена вещественным корнем $\kappa = \kappa_R$ знаменателя

$$D_o \equiv (s_o^2 - 2\kappa^2) + 4\kappa^2 \sqrt{(p_o^2 - \kappa^2)(s_o^2 - \kappa^2)}, \quad (I8)$$

входящего в подинтегральную функцию (I)

Формулы для расчёта волны Релея можно получить, минуя процесс вычисления интегралов из общих формул волнового поля, приведённых в [5], путём следующих рассуждений. В работе [5] показано при непосредственном вычислении интегралов, описывающих волновое поле, волна Релея получается в виде стоящей волны. Чтобы получить бегущую от источника волну, надо к результатам расчёта добавить полвычета подинтегральной функции. С точки зрения математика это требование обусловлено тем, что контур интегрирования пересекает полюс $K = K_R$. С точки зрения физика необходимость добавления полвычета вытекает из очевидного соображения, что волна в безгранично однородном полупространстве может только "убегать" от источника, а это условие можно единственным образом удовлетворить, добавляя к результатам расчёта "свободную волну", которая не меняет граничных условий. Подобранная таким образом "свободная волна", оказывается, совпадает с вычетом подинтегральной функции, умноженным на $1/2$, причём, если результаты расчёта интеграла (I) дают $A \cos kr$, то половина вычета даёт $j A \cos(k_R r + \frac{\pi}{2})$, а сумма $-A \exp\{j k_R r\}$, которая с множителем $\exp\{-j \omega t\}$ даёт убегающую волну $A \exp\{-j \omega (t - \frac{r}{V_R})\}$, где $K_R = \frac{\omega}{V_R}$, V_R - скорость распространения волны Релея.

Таким образом, нам достаточно определить неосциллирующую часть вычета подинтегральной функции и найденная функция, умноженная на $1/2$, будет являться амплитудой волны Релея.

Вычет в полюсе первого порядка подинтегральной функции (I) можно определить следующим образом:

$$A_{-1} = \lim_{K \rightarrow K_R} \{ (K - K_R) F_n(K) J_n(KR) K e^{jz \cdot \sqrt{b_{p,s}^2 - K^2}} \}. \quad (19)$$

Представим функцию $F_n(K) \cdot K$, как $\Phi(K)/D_0(K)$. Тогда, учитывая $K_R > b_{p,s}$, получим

$$A_{-1} = \Phi(K_R) e^{-z \sqrt{K_R^2 - b_{p,s}^2}}. \quad (19^I)$$

Неопределённость вида $0/0$ в последней формуле разрешим по правилу Лопиталья:

$$\lim_{K \rightarrow K_R} \frac{K - K_R}{D_0(K)} = \frac{1}{D'_0(K_R)}, \quad (20)$$

где $D'_0(K_R) = \frac{d}{dK} D_0(K) = -S_0^3 D'(\xi)$, $\xi = \frac{K_R}{S_0}$,

$$D'(\xi) = 4\xi \left[2(1-2\xi^2) + 2(\xi^2 - \gamma^2)(\xi^2 - 1) + \xi^2 \left(\sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \gamma^2}} + \sqrt{\frac{\xi^2 - \gamma^2}{\xi^2 - 1}} \right) \right]$$

Подставляя эту формулу в (20), получим амплитуду искомой компоненты волны Релея как огибающую функции

$$f(r) = j\pi A_{-1} = j\pi \frac{\Phi(K_R)}{S_0^3 D'(\xi)} e^{-z\sqrt{K_R^2 - \beta_{P,S}^2}} J_n(K_R r). \quad (21)$$

Вдали от источника функцию Бесселя выражаем асимптотическим приближением

$$J_n(K_R r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi K_R r}} \cos(K_R r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$$

и, опуская косинусоиду, получаем

$$f(r) \sim j\pi \frac{\Phi(K_R)}{S_0^3 D'(\xi)} e^{-z\sqrt{K_R^2 - \beta_{P,S}^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi K_R r}} \times \quad (22)$$

$$\times \cos(K_R r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}).$$

Функции $\Phi(K)$ для различных компонент волнового поля можно найти из [5], переходя от скорости смещения к смещению.

В данной работе волновое поле определяем через смещение, чтобы полученные формулы удобно было сравнивать с формулами из [4]. Для случая вертикального воздействия в соответствии с вышеописанным компоненты волны Релея будут

$$U_r(z, r, t) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot T_z \left(\frac{\omega}{V_R} \right) \sqrt{\frac{\omega}{V_S}} L_{rR}(\xi, z) e^{-j\omega(t - \frac{r}{V_R}) - j\frac{\pi}{4}},$$

$$U_z(z, r, t) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot T_z \left(\frac{\omega}{V_R} \right) L_{zR}(\xi, z) e^{-j\omega(t - \frac{r}{V_R}) + j\frac{\pi}{4}}, \quad U_\varphi(z, r, t) = 0,$$

$$L_{rR} \equiv \frac{\xi^{3/2}}{\mu\sqrt{2\pi} D'(\xi)} \left[(1-2\xi^2) e^{-zS_0\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} + 2\sqrt{(\xi^2 - 1)(\xi^2 - \gamma^2)} e^{-z\sqrt{\xi^2 - 1}} \right], \quad (23)$$

$$L_{zR} \equiv \frac{\sqrt{\xi(\xi^2 - \gamma^2)}}{\mu\sqrt{2\pi} D'(\xi)} \left[(1-2\xi^2) e^{-zS_0\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} + 2\xi e^{-zS_0\sqrt{\xi^2 - 1}} \right],$$

$$\xi \equiv K_R/S_0 = V_S/V_R.$$

При горизонтальной ориентации силы источника компонента U_φ не содержит знаменатель $D_0(K)$ и поэтому эта компонента волны Релея отсутствует. Компоненты по r и z волны Релея имеют вид

$$U_r(z, r, t) \sim \frac{\cos \varphi}{\sqrt{r}} T_x\left(\frac{\omega}{V_R}\right) \sqrt{\frac{\omega}{V_S}} M_{Rr}(\xi, z) e^{-j\omega\left(t - \frac{r}{V_R}\right) + j\frac{\pi}{4}},$$

$$U_z(z, r, t) \sim \frac{\cos \varphi}{\sqrt{r}} T_x\left(\frac{\omega}{V_R}\right) \sqrt{\frac{\omega}{V_S}} M_{Rz}(\xi, z) e^{-j\omega\left(t - \frac{r}{V_R}\right) + j\frac{3\pi}{4}},$$

$$M_{Rr} = \frac{\sqrt{\xi(\xi^2 - 1)}}{\mu\sqrt{2\pi} D'(\xi)} \left[2\xi^2 e^{-z s_0 \sqrt{\xi^2 - \delta^2}} + (1 - 2\xi^2) e^{-s_0 z \sqrt{\xi^2 - 1}} \right], \quad (24)$$

$$M_{Rz} = \frac{\xi^{3/2}}{\mu\sqrt{2\pi} D'(\xi)} \left[2\sqrt{(\xi^2 - 1)(\xi^2 - \delta^2)} e^{-z s_0 \sqrt{\xi^2 - \delta^2}} + (1 - 2\xi^2) e^{-z s_0 \sqrt{\xi^2 - 1}} \right],$$

$$U_i = U_{pi} + U_{si},$$

где $i = r, z$.

Сравнивая формулы (23) и (24) с формулами (I0), (II) и (I7) для продольных и поперечных волн, прежде всего обратим внимание на то, что если не учитывать влияния частотной характеристики источника $T(\omega)$, то амплитуда волны Релея пропорциональна $\omega^{1/2}$, в то время, как амплитуда продольных и поперечных волн от частоты не зависит, т.е. получается так, что спектр волны Релея должен быть более высокочастотным, чем спектр глубинных волн. На практике же наоборот, поверхностные волны, как правило, более низкочастотны по сравнению с другими типами волн. Повидимому в формировании поверхностных волн, наблюдаемых на практике, существенную роль играет слоистость и большой перепад скоростей в самой верхней части разреза, т.е. на сейсмограммах волны Релея в чистом виде мы не видим. Другие особенности волны Релея, которые можно видеть по формулам (23) и (24), хорошо известны: это то, что волна Релея по оси r затухает как $r^{-1/2}$, с глубиной затухает по экспоненте; поскольку компоненты U_r и U_z сдвинуты относительно друг друга на 90° , вектор смещения \vec{U} не сохраняет постоянное направление, а как бы вращается. Обратим внимание ещё на следующее обстоятельство. Волну Релея в формулах (23) и (24) мы определили как сумму функций $\vec{U}_p + \vec{U}_s$, которые в глубине полупространства распространяются как продольная и поперечная вол-

ны. При этом функция \bar{U}_p в формулах (23) и (24) даёт слагаемое с экспонентой $\exp\{-zS_0\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}\}$, а функция \bar{U}_s - слагаемое с экспонентой $\exp\{-zS_0\sqrt{\xi^2 - 1}\}$. Это означает, что волна Релея по своей природе не является результатом взаимодействия на поверхности $z = 0$ продольных и поперечных волн, как иногда принято говорить, а порождается функциями \bar{U}_p, \bar{U}_s независимо друг от друга.

В заключении авторы благодарят В.А. Бабешко, оказавшего помощь в обосновании возможности применения метода перевала для асимптотической оценки интегралов.

Л и т е р а т у р а .

1. Васильев В.И., Евчатов Г.П., Окунева В.Ф., Сидоров В.Н., Шамовская Л.Я., Чичинин И.С. Экспериментальные исследования процесса возбуждения сейсмических волн вибрационным источником. См. настоящий сборник.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов, произведений. М., Физматгиз, 1962, II00 с.
3. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М., Физматгиз, 1962, 200 с.
4. Справочник геофизика. т. IV, Л., "Недра", 1966, 749 с.
5. Чичинин И.С. Использование спектральных представлений для решения и исследования динамических задач о колебании упругого полупространства. См. настоящий сборник.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА ВОЗБУЖДЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН ВИБРАЦИОННЫМ ИСТОЧНИКОМ

В 1972-74 гг. параллельно с основными работами по испытанию макетов аппаратуры и оборудования вибрационной сейсморазведки проводились эксперименты по исследованию процесса формирования сейсмических волн. Идеиные основы методики таких исследований в общем виде изложены в [1]. В данной статье описаны некоторые результаты этих экспериментов, которые могут представлять интерес для дальнейших работ по созданию и усовершенствованию вибрационных источников поперечных волн.

В опытах в качестве источника сейсмических волн использовался маломощный экспериментальный гидравлический вибратор, описанный в [3]. Способ сцепления этого вибратора с грунтом схематически показан на рис.1. Утяжелённый гидравлический цилиндр I весом I тонна, играющий роль инертной массы M , подвешен внутри оболочки 3 при помощи воздушных подушек, общую жёсткость которых обозначим через $K = I/C_T$. Оболочка 3 прикреплена к излучающей платформе, которая при помощи треугольных полос (зубьев) сцеплена с грунтом. В некоторых опытах для лучшего сцепления зубьев излучающей платформы 2 с грунтом платформа прижималась к грунту массой $M_{пр}$, которая развязывалась от вибраций при помощи пружины $C_{пр}$. Механическая схема элементов установки, касающаяся вопросов взаимодействия описываемой установки с грунтом показана на рис. 2а и 2б, а её электрическая аналогия - на рис.2в. В этой схеме через $M_{пл}$ обозначена суммарная масса всех элементов установки, жёстко (сварными соединениями) связанных с излучающей платформой т.е. в схеме предполагается, что эти элементы колеблются при ви-

брани как одно целое с платформой. В действительности, несмотря на то, что все соединения были сварными, указанная жёсткость была обеспечена только в диапазоне сейсмических частот (до Герц 80-ти). На более высоких частотах датчики, укрепленные в разных точках указанных элементов, давали разные показания. Это обстоятельство для нас не имеет существенного значения, если только нами не будет оговорено, что последующие выводы касаются лишь сейсмического диапазона частот. В схеме на рис.2 через Z_L обозначено внутреннее сопротивление источника силы. Это сопротивление в диапазоне сейсмических частот имело, в основном, активный характер. Данные, определяющие величину R_L , были следующими. В режиме "короткого замыкания", т.е., когда поршень силовой камеры освобождался от всех внешних конструкций, амплитуда скорости смещения поршня равнялась приблизительно $\dot{I}_{кз} = 12 \cdot 10^{-2}$ м/сек. В режиме "холостого хода", т.е. когда оболочка 3 силовой камеры была приварена к инертной массе (или в схе-

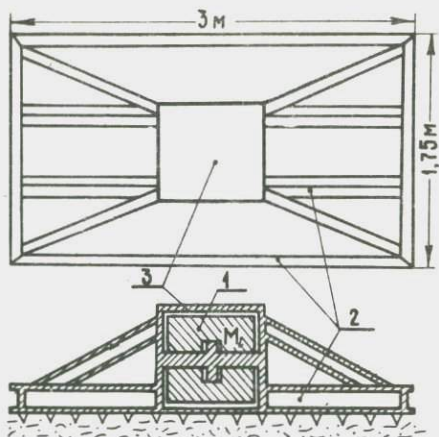


Рис.1. Схема вибрационного источника поперечных волн. 1—утяжелённый цилиндр вибратора, 2—излучающая платформа (на рис.показаны швелеры каркаса платформы), 3 — оболочка вибратора.

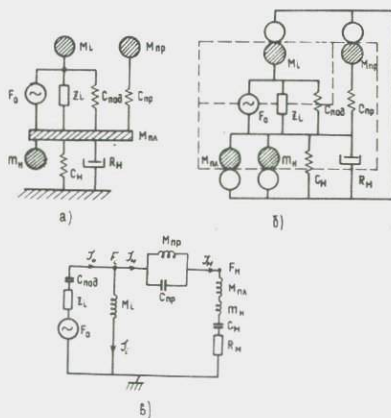


Рис.2.

ме на рис.2в цепочка между элементами Z_i и $C_{\text{под}}$ оборвана) амплитуда силы, развиваемая внутри цилиндра, равнялась приблизительно $F_o = 2 \cdot 10^4$ Ньютонам (≈ 2 тонна силам). Поэтому

$$R_i = \frac{F_o}{J_{\text{кз}}} = 1.66 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{сек}}.$$

Отсюда легко можно определить максимальную мощность W_{max} , которую данный источник может отдать внешней нагрузке. Как известно, сопротивление нагрузки R_H , на которое источник отдаёт максимальную мощность, равно $R_H = R_i$. Следовательно

$$W_{\text{max}} = \frac{1}{2} F_H \cdot J_H = \frac{1}{8} \cdot \frac{F_o^2}{R_i} \approx 300 \text{ вт.}$$

В этом оптимальном режиме амплитуда скорости смещения J_H излучающей платформы должна быть равна $6 \cdot 10^{-2}$ м/сек, а амплитуда силы F_H , с которой источник действует на нагрузку (на грунт), будет равняться $F \approx 10^4$ Н (или 1 тонне). Следует отметить, что насос, питающий вибратор, потреблял около 50 кВт. Значит КПД цепи "вход насоса - грунт" при оптимальной нагрузке составлял всего лишь 0,6%. По этой причине данная установка использовалась только для исследовательских работ и не могла быть рекомендована для широкого внедрения.

В схеме, показанной на рис.2а, грунт как потребитель энергии источника в соответствии с рекомендацией из [1] изображён в виде параллельной механической цепочки, состоящей из "присоединённой" массы m_H , упругости C_H и демпфера (активного сопротивления) R_H . Следует заметить, что сама эта рекомендация укрепилась во взглядах авторов только после выполнения нижеописываемых исследований. Поэтому при планировании работ первой задачей являлось выяснение вопроса: насколько вышеуказанная модель грунта может использоваться как основная рабочая модель, объясняющая все основные явления, встречающиеся при экспериментах.

Эксперименты по определению сопротивления излучения и мощности, отдаваемой вибратором в грунт.

Сопротивление излучения (т.е. величины m_H, C_H, R_H) определялось по методике, описанной в [2]. Первые пробные измерения были проведены в 1972 году в Краснодарском крае (вблизи станции Калужской), в 1973 году такие измерения проводились в Уральской

области (вблизи г. Чапаева) и в 1974 году - в Новосибирской области (вблизи г. Барабинска). Грунты в этих районах неодинаковы, параметры экспериментальной установки тоже менялись, поэтому эти эксперименты лучше описывать отдельно.

В первых экспериментах (1972 г.) силовая камера вместе с оболочкой 3 (см. рис. 1) могла ориентироваться вертикально и горизонтально. Колебания элементов вибрационной установки измерялись при помощи сейсмоприёмников, резонансная частота которых была повышена до 270-300 Гц путём установки более жёстких пружин. Об особенностях работы с такими датчиками см. в [1]. Вибратор работал от 15 Гц до 80 Гц, показания датчиков регистрировались через 5 Гц. Волновое поле, излучаемое вибратором, контролировалось в "дальней" зоне (400-500 м) при помощи вибрационной сеймостанции.

Сопротивление излучения, как можно видеть из формул [1], должно зависеть от площади излучающей платформы. Изменять площадь платформы трудно, поэтому в описываемых экспериментах площадь сцепления платформы с грунтом была подобрана путём подкопа грунта под зубьями так, чтобы колебания, регистрируемые в "дальней зоне" при вертикальной ориентации вибратора имели максимальную величину на частоте около 30 Гц.

При вертикальной ориентации вибратора наблюдалась следующая картина.

На частотах ниже 20 Гц излучающая платформа (и, соответственно, грунт) практически не колебалась, хотя сила, действующая на платформу, в области низких частот возрастала (см. графики на рис. 3). И только начиная с 20-22 Гц возникала ощутимая вибрация грунта. Сейсмограмма, полученная в "дальней зоне", где прослеживались оси синфазности отражённых волн до 2,5 сек. (глубины до 2,2 км) была довольно высокочастотной (с видимыми периодами на частоте около 50 Гц). Это явление можно объяснить, рассматривая графики на рис. 3. Как видно из этих графиков, резонанс системы "пружина C_H и масса $m_H + M_{пл}$ " имеет место на частоте около 50 Гц, т.е. на этой частоте реактивное сопротивление $jx_H = j\omega(m_H + M_{пл}) + \frac{1}{j\omega C_H}$ равно нулю. Ниже этой частоты сопротивление имеет ёмкостный характер, т.е. грунт сопротивляется внешнему воздействию как пружина. На низких частотах ёмкостное сопротивление настолько возрастает, что вибратор не может "продавить" грунт, хотя амплитуда силы F , действующей на платформу со стороны силовой камеры возрастает. Снижение амплитуды силы F в области указанного резонанса вполне понятно,

т.к. в этой области общее сопротивление нагрузки $Z_H = R_H + jX_H$ по абсолютной величине уменьшается, а силовая камера представляет собой генератор с довольно большим внутренним сопротивлением. Менее понятно то, что активное сопротивление излучения R_H в области высоких частот уменьшается, хотя теоретически [1] оно должно быть постоянным. В результате вышеописанного поведения сопротивления Z_H мощность, отдаваемая грунту, имеет резонансный характер (см. рис. 3). Если бы в этих же условиях использовалась силовая камера с малым внутренним сопротивлением, то кривая мощности была бы ещё более узкорезонансной, т.к. отсутствовал бы эффект возрастания силы в стороне от резонансной частоты.

Горизонтальная ориентация силовой камеры вибратора была произведена после вышеописанных экспериментов, причём положение самой платформы оставалось неизменным. Работа вибратора по прежнему начиналась с 15 Гц. При этом было обнаружено, что уже с 15 Гц наблюдается значительная вибрация платформы и грунта. На высоких частотах амплитуда скорости смещения платформы оставалась практически постоянной (см. графики на рис. 4). Однако, выше 35–40 Гц излучения практически не было, т.е. на сейсмоприёмниках "дальней зоны" сигналы практически отсутствовали. При помощи вибрационной сейсмостанции в "дальней зоне" были получены сейсмограммы поперечных волн с видимым периодом на частоте около 20 Гц. Из графиков на рис. 4 видно, что резонанс системы "пружина C_H и масса $m_H + M_{пл}$ " имел место на частоте приблизительно равной 22 Гц. На резонансной частоте величина силы F падает до 0,6 тонны. Активное сопротивление R_H которое теоретически должно быть постоянным, выше 50 Гц падает практически до нуля. Следует заметить, что вооб-

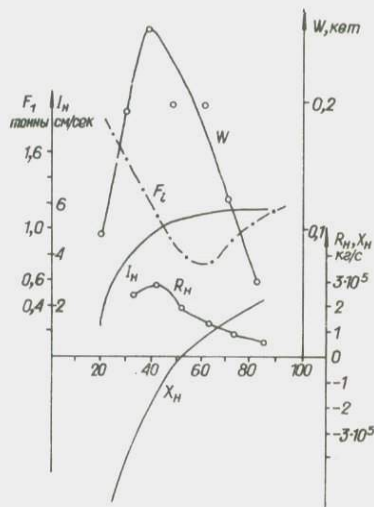


Рис. 3. Характеристики излучения вибратора при вертикальной ориентации силы. F_i — сила, действующая на виброплатформу; V_H — скорость смещения; W — мощность, отдаваемая в грунт; $Z_H = R_H + jX_H$ — сопротивление излучения.

ще на частотах выше 50 Гц характер колебаний инертной массы и платформы был таков, как будто последняя не касалась грунта, хотя вес груза (см. масса M_{np} на рис. 2), предназначенный для прижима платформы к грунту был доведен до 3 тонн. То, что платформа на высоких частотах работала так, как будто она висит в воздухе, проявлялось не только тем, что R_H на этих частотах была близка к нулю, но и соотношением амплитуд смещения инертной массы M_i и массы платформы $M_{пл}$. В самом деле, если платформа не касается грунта, то амплитуда смещения платформы ($S_{пл}$) и инертной массы (S_i) должны быть связаны соотношением

$$\frac{S_{пл}}{S_i} = \frac{M_i}{M_{пл}}$$

В описываемых экспериментах было $M_i = 1000$ кг, $M_{пл} = 500$ кг, т.е. отношение $\frac{S_{пл}}{S_i}$ равно 2, что и наблюдалось на частотах выше 50 Гц. В поисках причины столь странного поведения сопротивления R_H в конце работ 1972 года была снята зависимость амплитуды сигнала в "дальней зоне" от изменения амплитуды силы на фиксированной частоте. Зависимость оказалась линейной, но только эта прямая не направлена к началу ординат. По-видимому, в описываемых работах платформа действовала в упруго-пластической зоне деформаций грунта. Контактные шины этой платформы, имеющие треугольную форму, были приварены через 0,7 метра и внедрялись в грунт не более 3 см, т.к. грунт был очень твердый. При этом общая площадь контакта платформы с грунтом составляла 2400 см^2 , при амплитуде силы вибратора 1000 кг среднее давление на грунт было около $0,4 \text{ кг/см}^2$. По-видимому такое давление было слишком большим. Исходя из этих соображений к экспериментам 1973 года была подготовлена новая виброплатформа с более густым расположением зубьев, чтобы увеличить реальную площадь сцепления платформы с грунтом.

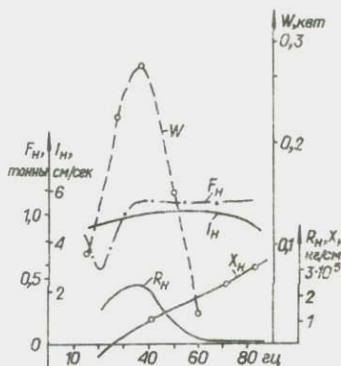


Рис. 4. Характеристики излучения вибратора при горизонтальной ориентации силы.

К сожалению, с новой платформой не удалось поставить эксперименты на прежней площадке, т.к. работы выполнялись в другом месте (Уральской области).

По экспериментам 1972 года можно добавить следующее. Вышеописанные измерения повторялись на одном и том же месте много раз. Повторяемость процессов была очень высокая. При смене площадки общий характер наблюдаемой картины оставался одним и тем же. Болтовые соединения оболочки силовой камеры с платформой оказались неудобными, т.к. они при вибрации ослабляются. Поэтому было решено дальше наглухо приварить оболочку к платформе при горизонтальной ориентации силы вибратора. Таким образом, вышеописанные эксперименты оказались единственными, когда при неизменных внешних условиях измерялись характеристики излучения при вертикальной и горизонтальной ориентации силы источника. Хотя на высоких частотах встретились странные явления, тем не менее можно сделать однозначный вывод о том, что резонансная частота при вертикальной ориентации источника приблизительно в два раза выше резонанса при горизонтальной ориентации источника.

В 1973 году измерения, подобно вышеописанным, были проведены, когда предварительно убедились, что виброплатформа работает в линейной зоне упругих деформаций грунта, т.е. график зависимости амплитуды волны в "дальней зоне" от амплитуды силы вибратора представляет собой прямую, пересекающую начало ординат. Для этого, как указывалось, зубья платформы были приварены с более мелким шагом (через 0,35 метра), причём погружались они в грунт до 7 см, т.е. среднее давление на грунт было 0,1-0,2 кг/см². Поскольку вибратор был ориентирован горизонтально для возбуждения поперечных волн, начальная частота работы вибратора была снижена до 7,0 Гц, т.к. низкочастотный диапазон для поперечных волн представляет наибольший интерес.

На рис.5 приведены графики, аналогичные предыдущим, но полученные после указанных подготовительных мероприятий. Как видно из этого рисунка, резонанс системы $M_{пл} \div m_H$ с "пружиной" C_H имеет место на частоте около 27 Гц. Активное сопротивление R_H меняется незначительно. На частотах ниже 15 Гц скорость смещения платформы \dot{U}_H резко падает, т.к. значительно возрастает реактивное сопротивление нагрузки X_H . Кроме того, на частотах ниже 15 Гц сопротивление $j\omega M_i$, шунтирующее цепь нагрузки (см.рис.2), становится недостаточно большим по сравнению с внутренним сопротивлением R_i силовой камеры и за счёт этого сила, действующая на

платформу, снижается. Это предположение было проверено экспериментально: к инертной массе $M_i = 1000$ кг был временно прикреплён дополнительный груз 500 кг и как следовало ожидать, максимум силы сместился в сторону низких частот (см. графики сил $F_{1,0}$ и $F_{1,5}$). Таким образом, когда соблюдается линейная связь между деформацией грунта и приложенной силой, все основные процессы, наблюдаемые при возбуждении сейсмических волн, хорошо объясняются в рамках модели, в которой грунт представляется в виде параллельной механической цепочки, состоящей из пружины C_H , демпфера R_H и присоединённой массы m_H . Следует заметить, что теоретические формулы для расчёта C_H , m_H , R_H в [1] приведены для идеализированных случаев. Их непосредственно нельзя применять для расчёта конкретных величин C_H , m_H , R_H в реальном эксперименте, тем более, когда контакт с грунтом осуществляется ребристой поверхностью. Важно то, что экспериментально подтверждается само предположение о том, что грунт как потребитель энергии источника можно рассматривать в виде вышеуказанной цепочки с некоторыми, пусть заранее неизвестными, параметрами.

Обратим внимание на то, что на графиках рис.3,4,5 амплитуда скорости смещения платформы \dot{Y}_H (или "ток" \mathcal{I}_H в цепи нагрузки на схеме рис.2) падает в областях низких частот очень круто. Если бы C_H согласно формулам из [1] была бы величина, независящая от частоты, то "ток" \mathcal{I}_H уменьшается примерно на 6 децибел на октаву, как в RC -цепочке. Большую крутизну графика \dot{Y}_H , обнаруженную в экспериментах, можно объяснить следующими соображениями. Из формул, приведённых в [1] вытекает, что величина C_H для однородного полупространства должна зависеть от скорости распространения волны в среде как V_s^2 . Реальное полупространство представляет собой "слоёный пирог", где скорость V_s очень быстро растёт с глубиной. Задача о том, как должна себя вести величина C_H

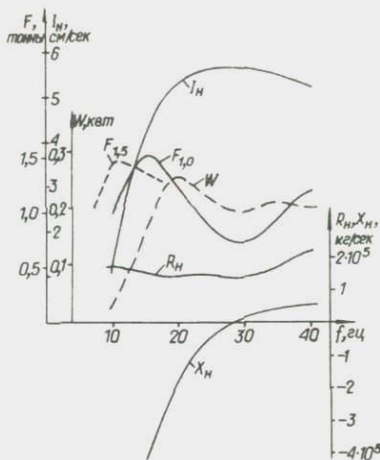


Рис.5.

в случае слоистого полупространства в настоящее время ещё не решена, но из физических соображений вполне можно допустить, что при работе на высоких частотах, когда длина волны λ невелика, в качестве параметра V_s в выражении для C_H надо использовать скорость распространения упругих волн V_s , соответствующую самой верхней толще, а когда длина волны возрастает, в качестве параметра V_s надо брать скорость распространения волн в более глубоких слоях. Следовательно, C_H должна быть величиной частотнозависимой и при уменьшении частоты величина "конденсатора" C_H должна уменьшаться, (т.е. кажущаяся жёсткость грунта возрастает). Поэтому величина "тока" J_H должна уменьшаться более круто в области низких частот, чем 6 дБ на октаву в случае постоянства величины C_H .

Измерения, аналогичные вышеописанным, были повторены в 1974 г. на мягком болотистом грунте в Новосибирской области (вблизи г. Барабинска). Эти измерения показали, что общий характер колебаний виброплатформы и инертной массы совпадает с тем, что наблюдалось в предыдущих опытах, но поскольку грунт был очень мягкий (влажная глина), сопротивление R_H было всего лишь около $0,9 \cdot 10^5$ кг/сек, в то время как в районах экспериментов 1972–73 гг. оно было около $(2+2,5) \cdot 10^5$ кг/сек. Конечно, грунт следовало бы характеризовать более объективными физическими параметрами, чем выражения "твёрдый" и "мягкий". Что же касается сейсмических характеристик грунтов, то они следующие. Путём возбуждения сейсмических волн вибрационным источником, а также вертикальными и горизонтальными ударами молота, на площадке экспериментов 1973 года (вблизи г. Чапаева) было определено, что в интервале глубин от 0 до 3 метров средняя скорость распространения продольных волн $V_p = 300+315$ м/сек, поперечных волн $V_s = 130+140$ м/сек. В интервале глубин от 3-х до 84 метров $V_p = 1640+1680$ м/сек, $V_s = 320+330$ м/сек. Уровень грунтовых вод находился на глубине около 5 метров. В экспериментах 1974 года на опытной площадке средняя скорость распространения продольных волн в интервале глубин от 0 до 3 метров была $V_p \approx 300$ м/сек, $V_s = 70+100$ м/сек, и в интервале глубин от 3-х метров до 73 метров $V_p \approx 1600$ м/сек, $V_s = 250$ м/сек. Уровень грунтовых вод находился на глубине около 1,5 метров.

Измерение мощности, излучаемой вибрационным
источником в виде сейсмических волн.

Вышеописанные измерения дают мощность, отдаваемую источником грунту на различных частотах. Этого, однако, недостаточно, надо ещё ответить на вопрос, какая часть этой мощности излучается в виде сейсмических волн. Так, например, при взрывном возбуждении сейсмических волн всегда известна общая энергия, выделяющаяся при взрыве, т.е. энергия, отдаваемая грунту, но в вопросе, какая часть этой энергии излучается в виде упругих волн, имеются значительные расхождения. Мощность, излучаемую источником в виде сейсмических волн, можно оценить, вычисляя поток энергии через замкнутую поверхность, охватывающую вибрационный источник. Известно [4], что вектор плотности потока энергии, называемый вектором Умова-Пойтинга, в общем виде записывается так:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \iiint (W_{кин} + W_{ном}) dV = - \frac{1}{2} \iiint \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial (\sigma_{ik} \cdot u_{ik})}{\partial t} \right] dV.$$

Прделав несложные преобразования и вычисления, получаем формулу, справедливую для любого общего случая

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \iint \frac{\partial u}{\partial t} \sigma_{ik} \partial s = \iint (\Phi_x l_x + \Phi_y l_y + \Phi_z l_z) \partial s,$$

где

- l_x, l_y, l_z — косинусы углов внешней нормали к поверхности S ,
- Φ_x, Φ_y, Φ_z — компоненты вектора плотности потока энергии,
- u — вектор смещения,
- u_{ik} — тензор деформации,
- σ_{ik} — тензор напряжений.

Используя известные соотношения между тензором напряжения и тензором деформации, распишем подробнее формулу для x — компоненты вектора

$$\begin{aligned} \Phi_x &= - \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \sigma_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial t} + \sigma_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) = \\ &= - \left[(\lambda + 2\mu) u_{xx} + \mu (u_{yy} + u_{zz}) \right] \frac{\partial u_x}{\partial t} - 2\mu (u_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial t}) = \end{aligned}$$

$$= -\left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial t} + \lambda \left(\frac{\partial u_y}{\partial u} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \cdot \frac{\partial u_x}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial u_y}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial u_z}{\partial t}.$$

В случае, когда источник генерирует синусоидальные колебания, смещение в любой точке среды тоже будет иметь синусоидальную форму

$$u_i = U_{oi}(x, y, z) \cdot \cos[\omega t + \psi_i(x, y, z)], \quad i = x, y, z.$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу, получим мгновенное значение потока Φ_x . Средняя это значение по периоду, получим среднюю мощность, проходящую через единичную поверхность ∂S_x в виде

$$\begin{aligned} \Phi_x = & -(\lambda + 2\mu) \frac{\omega U_{ox}^2}{2} \cdot \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\lambda \omega U_{ox}}{2} \left[\frac{\partial U_{oy}}{\partial y} \cos(\psi_x - \psi_y + \frac{\pi}{2}) + \right. \\ & + U_{oy} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \cdot \cos(\psi_x - \psi_y) + \frac{\partial U_{oz}}{\partial z} \cos(\psi_x - \psi_z + \frac{\pi}{2}) + U_{oz} \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \cos(\psi_x - \psi_z) \left. \right] - \\ & - \frac{\mu \omega U_{oy}}{2} \left[\frac{\partial U_{ox}}{\partial y} \cdot \cos(\psi_x - \psi_y - \frac{\pi}{2}) + U_{ox} \cdot \cos(\psi_x - \psi_y) \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + U_{oy} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right] - \\ & - \frac{\mu \omega U_{oz}}{2} \left[\frac{\partial U_{ox}}{\partial z} \cdot \cos(\psi_x - \psi_z - \frac{\pi}{2}) + U_{ox} \cdot \cos(\psi_x - \psi_z) \frac{\partial \psi_x}{\partial z} + U_{oz} \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (I)$$

Формулы для Φ_y и Φ_z выводятся аналогично. Для определения полной мощности нужно проинтегрировать полученные выражения по замкнутой поверхности. Из формулы (I) следует, что мощность, проходящую через стенки некоторой замкнутой поверхности S , можно вычислить, зная амплитуду смещения $U_{oi}(x, y, z)$ и $\psi_i(x, y, z)$, производные этих функций во всех точках поверхности, а также коэффициенты λ и μ среды. Если амплитуду смещения $U_{oi}(x, y, z)$ и фазу $\psi_i(x, y, z)$ измерить в дискретных точках x_k, y_k, z_k по достаточно густой сетке, то, очевидно, производные этих функций можно приближённо определить как разность значений этих функций в соседних точках, делённую на расстояние между ними. Коэффициенты λ и μ можно считать известными, если известны V_p, V_s и ρ , т.к. $\lambda + 2\mu = \rho V_p^2$ и $\mu = \rho V_s^2$.

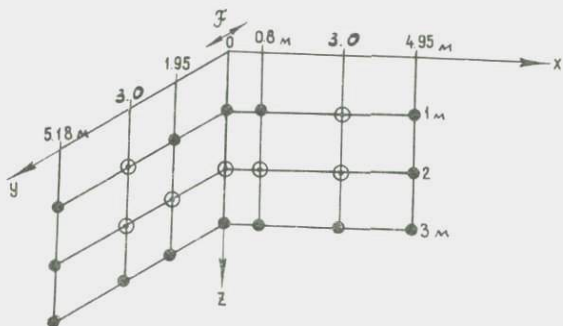


Рис.6. Схема экспериментов по определению мощности, излучаемой вибратором в виде сейсмических волн.

Измерения проводились в 1973 году по схеме, изображённой на рис.6, на той же площадке, где были получены графики, приведённые на рис.5. В центральной скважине ($x = y = 0$) были установлены 4 снаряда на глубинах 0, 1, 2 и 3 метра. В каждом снаряде были размещены по три сейсмоприёмника, ориентированные по x , y , z направлениям. Над центральной скважиной была поставлена виброплатформа, вектор силы вибратора был ориентирован по оси "y". Пятый снаряд использовался в качестве "щупа". Он поочерёдно устанавливался в скважинах в точках, указанных на рис.6. В каждой точке снималась осциллограмма с записями на параллельных каналах от сейсмоприёмников "щупа", снарядов центральной скважины и датчиков, установленных на инертной массе M и платформе. Осциллограммы снимались на частотах от 10 до 40 Гц через 5 Гц. Повторяемость сеансов была хорошая (записи различных сеансов от одних и тех же датчиков были неотличимы). Кроме скважин, указанных на рис.6, записи также были получены в скважинах, расположенных под 45° к направлению силы. Сами эксперименты заняли очень мало времени (около 10 часов), однако, обработка полученных сейсмограмм оказалась очень трудоёмкой. Поэтому мощность вычислялась только на одной частоте, равной 25 Гц.

На полученных записях оказалось, что компоненты U_x и U_z в скважинах, расположенных по оси "X", пренебрежимо малы по сравнению с U_y . В скважинах по направлению оси "Y" компоненту U_x также можно не учитывать. Поэтому расчётные формулы потока вектора Умова-Пойнтинга несколько упрощаются:

$$\Phi_x = -\frac{\mu\omega}{2} \cdot U_{oy}^2 \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \quad \text{— плотность потока мощности через боковую поверхность в направлении оси "y".}$$

$$\Phi_y = -(\lambda + 2\mu) \frac{\omega U_{oy}^2}{2} \cdot \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\lambda \omega U_{oz}}{2} \left[\frac{\partial U_z}{\partial z} \cdot \sin(\psi_y - \psi_z) + U_z \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \cdot \cos(\psi_y - \psi_z) \right] - \frac{\mu \omega U_{oz}}{2} \left[\frac{\partial U_{oy}}{\partial z} \cdot \sin(\psi_y - \psi_z) + U_y \cdot \cos(\psi_y - \psi_z) \frac{\partial \psi_y}{\partial z} + U_z \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right]$$

— через боковую поверхность в направлении оси "y".

$$\Phi_z = -\frac{\mu \omega U_{oy}^2}{2} \cdot \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \quad \text{— через основание цилиндра в точках, расположенных по направлению оси "x"}$$

$$\Phi_z = -(\lambda + 2\mu) \frac{\omega U_{oz}^2}{2} \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial z} - \frac{\lambda \omega U_{oz}}{2} \left[\frac{\partial U_{oy}}{\partial y} \sin(\psi_y - \psi_z) + U_{oy} \cdot \cos(\psi_y - \psi_z) \cdot \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right] - \frac{\mu \omega U_{oy}}{2} \left[U_{oy} \frac{\partial \psi_y}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial y} \cdot \sin(\psi_y - \psi_z) + U_{oz} \cdot \cos(\psi_y - \psi_z) \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right]$$

— через основание цилиндра в точках, расположенных по направлению оси "y".

Для определения полной мощности поверхность интегрирования была выбрана в виде цилиндра с радиусом основания $R = 3$ м и высотой $H = 2$ м. Величина потока вектора Умова-Пойнтинга вычислялась для точек, обведённых на рис. 6 кружочками. Значения, полученные в этих точках аппроксимировались на всю поверхность указанного цилиндра из соображения симметричности поля и вычислялся интеграл по поверхности этого цилиндра, т.е. полная мощность, которая выходила из цилиндра. Полученная величина оказалась равной 130 Вт. Ошибки возможны за счёт неточного определения разности фаз, за счёт условий установки снарядов, неточности определения скоростей V_p , V_s , плотности ρ и т.д. Но суммарная ошибка не должна превышать 20+30%. Мощность, отдаваемая вибратором грунту на частоте

25 Гц, как видно из рис.5, равнялась около 200 Вт. Таким образом, полученные величины мощности являются величинами одного порядка.

Теперь попытаемся косвенно оценить так называемый "тротиловый эквивалент" взрывного источника поперечных волн.

Во время описываемых экспериментов волновое поле в "дальней зоне" контролировалось при помощи вибрационной сейсмостанции в интервале 600–900 метров по профилю "X" сейсмоприёмниками, ориентированными по оси "у" (направление силы вибратора тоже по оси "у") Восстановленные в импульсную форму вибрационные сейсмограммы поперечных волн оказались по интенсивности не меньше, чем интенсивность поперечных волн на разностной сейсмограмме, полученной взрывом в траншеях по следующей методике.

Рядом с площадкой, где выполнялись вышеописанные эксперименты, была выкопана траншея глубиной 2 метра, ориентированная по направлению профиля. Сначала осуществляется взрыв весом 2 кг на одной стенке траншеи и регистрировалась сейсмограмма "+у", а затем осуществлялся такой же взрыв на противоположной стенке и регистрировалась сейсмограмма "-у". Результирующая сейсмограмма представляет собой разность указанных сейсмограмм. На разностной сейсмограмме необращаемые (продольные) волны должны быть уничтожены, а обращаемые (поперечные) волны должны быть усилены. Имея в виду, что при взрыве одного килограмма тротила выделяется 970 ккал (или $4 \cdot 10^6$ джоулей) энергии, можем утверждать, что при получении разностной сейсмограммы в грунте было отдано $1,6 \cdot 10^7$ Джоулей.

При получении вибрационной сейсмограммы вибратор отрабатывал полосу от 10 до 40 Гц в течении 300 сек. Считая, что на этой полосе мощность, излучаемая вибратором в виде сейсмических волн была постоянной и равной 130 Вт, получим энергию сейсмических волн $130 \text{ Вт} \cdot 300 \text{ сек} = 3,9 \cdot 10^4$ Джоулей. Выше указывалось, что вибрационная сейсмограмма по интенсивности (и длительности записи) была не меньше, чем разностная сейсмограмма взрывная. Следовательно, при взрывах на образование поперечных волн пошло не более $3,9 \cdot 10^4$ Джоулей, т.е. около 0,25% от энергии, отдаваемой взрывчаткой грунту.

Эксперимент, аналогичный вышеописанному был повторен в 1974 году в Новосибирской области. В этом эксперименте также было получено, что мощность, излучаемая вибрационным источником в виде сейсмических волн, и мощность, отдаваемая вибратором в грунт, отличаются незначительно. На основании этих результатов можно утверждать, что, когда обеспечена линейная зависимость между ампли-

тудой волны в "дальней зоне" и амплитудой силы, действующей на виброплатформу, мощность, отдаваемая вибрационным источником грунту, без значительных потерь преобразуется в мощность сейсмических волн.

Скважинные наблюдения волнового поля
вблизи вибрационного источника
поперечных волн

Для выяснения характера затухания сейсмических волн на глубине на опытной площадке 1973 года, где были проведены вышеописанные эксперименты, была пробурена скважина под вибрационным источником, в которую на глубину 84 метра был опущен снаряд с x , y , z - сейсмоприёмниками. Для обеспечения надёжного контакта снаряда с грунтом скважина после погружения снаряда была засыпана песком и наблюдения были начаты спустя несколько дней. Уровень грунтовых вод во время экспериментов находился на глубине 5 метров, скважина была необсаженной. Сейсмическое поле вблизи источника контролировалось другими трёхкомпонентными снарядами, которые были установлены в этой скважине на глубинах 1, 2 и 3 метра и ориентированы по азимуту при помощи штанги.

На рис.7 представлены амплитуды скорости смещения на U -приборах (сила вибратора тоже направлена по "у"). Амплитуды колебаний на выходах x и z -приборов, установленных на глубинах 1, 2 и 3 метра, были пренебрежимо малы. Графики $\mathcal{U}_{\text{пл}}$ на платформе и на глубине 0,2 метра по центру виброплатформы измерены при помощи вибродатчиков "ВИП-А". Снаряд, опущенный на глубину 84 метра, по азимуту не ориентировался, поэтому на рисунке нанесена горизонтальная составляющая $\mathcal{U}_z = \sqrt{\mathcal{U}_x^2 + \mathcal{U}_y^2}$. Амплитуда колебаний на z -приборе этого снаряда также была пренебрежимо мала. Приведённые графики характеризуют амплитуду скорости смещения поперечной волны. Это можно установить по изменению фазы колебаний в зависимости от частоты, т.к. скорость пробега поперечных волн от устья скважины до указанных снарядов была определена при помощи горизонтальных и вертикальных ударов молотом.

Как видно из приведённых графиков, амплитуда поперечных волн, зарегистрированных в скважине ($z = 84$ м), почти не уменьшается на высоких частотах, т.е. поперечные волны на высоких частотах возбуждаются не хуже, чем на низких и средних частотах. Некоторое уменьшение амплитуды этих волн на частотах выше 60 Гц легко объяс-

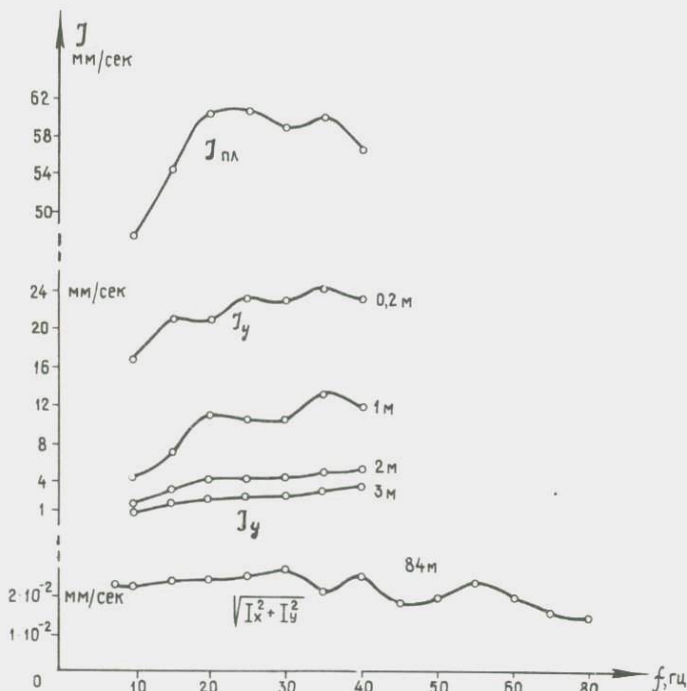


Рис.7. Графики, характеризующие затухание амплитуды скорости смещения грунта в интервале глубин до 84 метров по центру вибратора. Сила вибратора направлена по "у".

няется тем, что на этих частотах вес виброплатформы велик. При необходимости работы на S -волнах в высокочастотной области это уменьшение амплитуды легко устранить путём соответствующего согласования виброплатформы с грунтом.

Из этого эксперимента можно сделать предположение, что наблюдаемая на практике низкочастотность S -волн является не свойством этих волн, а обусловлена лишь существующей технологией их возбуждения. Это предположение настолько важно для последующего развития сейсморазведки на S -волнах, что эксперименты вышеописанного типа следует провести в разных грунтовых условиях.

Графики на рис.7 показывают, что колебания на глубине 0,2 метра относительно платформы затухают приблизительно в три раза. Далее в интервале 0,2 до 1 метра амплитуда колебаний ещё уменьшается в

2-3 раза. Сильное затухание колебаний вблизи источника, вообще говоря, является нормальным явлением, что подтверждается теоретическими расчётами. Эта область является критической в смысле обеспечения линейности деформации в грунте. Например, в описываемых экспериментах основной компонентой тензора деформации являлось

$$e_{zy} = \frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \approx \frac{\partial U_y}{\partial z} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mathcal{U}_y}{\partial z} \approx \frac{1}{\omega} \frac{\Delta \mathcal{U}_y}{\Delta z}.$$

Подставляя сюда значения из графика при $f = 20$ Гц, будем иметь

$$\Delta \mathcal{U}_y = \mathcal{U}_{n1} - \mathcal{U}_y(0,2\text{м}) = 19 \cdot 10^{-3} \text{м/сек}, \quad \Delta z = 0,2 \text{ м}$$

отсюда $e_{zy} \approx 0,75 \cdot 10^{-3}$.

В руководствах по сопротивлению материалов считается деформации 10^{-3} предельными для линейной зоны, где закон Гука ещё справедлив. Из приведённых цифр следует, что в описываемых экспериментах линейность деформаций обеспечивалась на пределе, если бы вибратор имел не такую малую амплитуду силы (всего лишь 1 тонна), а был бы помощнее (например, 10 тонн), то надо было бы что-то предпринять, чтобы обеспечить линейность деформаций.

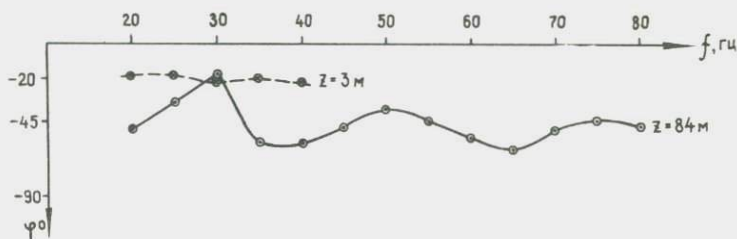


Рис. 8. Направление вектора $\vec{\mathcal{U}}_y$ — скорости смещения поперечной волны на глубинах 3 и 84 метра. Сила вибратора направлена по $\varphi = 0$.

При проведении описываемых экспериментов встретилось следующее непредвиденное и очень любопытное явление, состоящее в том, что на записях горизонтальных x, y -приборов снаряда, установленного на глубине 84 метра под вибратором, отношения амплитуд \mathcal{U}_x и \mathcal{U}_y на различных частотах оказалось непостоянным. Это означало, что вектор $\vec{\mathcal{U}}_z = \mathcal{U}_x \cdot \vec{e}_x + \mathcal{U}_y \cdot \vec{e}_y$ меняет своё направление в горизонтальной плоскости (составляющая \mathcal{U}_z на всех частотах остаётся малой). На рис. 8 показана зависимость этого угла φ от частоты.

Как видно из этого рисунка, угол φ меняется в пределах $\pm 15^\circ$ относительно среднего положения, т.е. вектор меняет своё направление не до 30° .

Говорить о том, что меняется направление силы вибратора не приходится, т.к. на этом же рисунке видно, что направление вектора скорости смещения $\vec{I}(\omega)$, опеределённое на глубине 3 метра, на разных частотах остаётся практически неизменным.

Следует заметить, что поворот вектора \vec{I} в горизонтальной плоскости в зависимости от частоты наблюдался не только в глубине, но и на поверхности. На рис.9 приведены графики $I_y(\omega)$ и $I_x(\omega)$ зарегистрированные x и y -приборами, установленными на расстоянии 70 метров от вибратора по профилю "x" от вибратора (сила вибратора направлена по "y"). Как видно из этого рисунка, в диапазоне частот от 25 Гц и выше амплитуда колебания на "y"-приборах значительно преобладает (т.е. можно сказать, что вектор \vec{I} направлен по оси "y"). Но на узкой полосе вблизи 20 Гц вектор меняет своё направление почти на 90° .

Ошибка при работе исключена, т.к. на 20 Гц на осциллограмме запись

I_x -канала имеет размах амплитуды 12 мм, а I_y -канала - всего лишь 6 мм. А на частоте 25 Гц и выше запись I_y -канала составляет всего лишь около 2 мм в размахе, а в I_x -канале размах амплитуды - 17 мм. Направление вектора \vec{I}_z на глубине 3 метра по центру вибратора оставалось неизменным.

Для сравнения интенсивности колебаний на поверхности и в глубине на одинаковых расстояниях от источника на рис.9 графики I_x и I_y поверхностных каналов и скважинного контейнера приведены в абсолютных единицах (графики I_z -каналов не приводятся ввиду их малой интенсивности). Из этих графиков видно, что амплитуда коле-

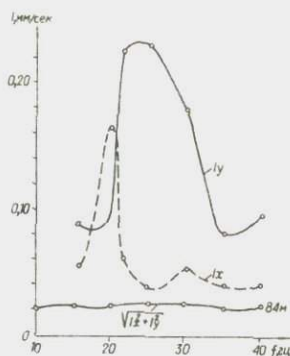


Рис.9. I_x и I_y - амплитуды скорости смещения на дневной поверхности на расстоянии 70м от вибратора по профилю x. $\sqrt{I_x^2 - I_y^2}$ - модуль вектора $\vec{I}_s = I_x \vec{e}_x + I_y \vec{e}_y$ на глубине 74 метра по центру вибратора.

баний на дневной поверхности на порядок больше, чем в скважине. Вышеуказанные повороты вектора \vec{J} требуют дальнейшего изучения, т.к. если они окажутся типичными для различных грунтовых условий, то потребуется принять какие-то меры учёта этого явления при интерпретации данных сейсморазведки на поперечных волнах.

Опробование различных способов возбуждения поперечных волн вибрационным источником

В статье [2] рассмотрено поле излучения осциллирующего шара в безграничной упругой среде для случаев, когда шар сцеплен со средой со всех сторон и когда шар имеет жёсткий контакт со средой только по боковой поверхности ("источник с мягким лбом"). В этой статье показано, что "источник с мягким лбом" при $\frac{\omega r_0}{V_p} \gg 1$ (r_0 - радиус шара) излучает преимущественно поперечные волны. Последующие теоретические исследования показали, что осциллирующий шар, имеющий жёсткий контакт лишь в лобовой зоне ("источник с твёрдым лбом") преимущественно излучает продольные волны, которые имеют максимум интенсивности по направлению, совпадающему с направлением перемещения шара. Поперечные волны, наблюдаемые по профилю, перпендикулярному к направлению оси силы, при $\frac{\omega r_0}{V_p} \gg 1$ имеют слабую интенсивность.

Во время полевых работ 1973 года была сделана попытка реализовать указанные типы источников экспериментально. На рис. 10 показаны схемы экспериментов.

При реализации "источника с мягким лбом" напряжения, возникающие в лобовых частях горизонтального источника, были устранены при помощи траншей ($h = 2,5$ м), показанных на рис. 10а. При реализации "источника с твёрдым лбом" для обеспечения надёжного контакта со средой в лобовой части источника использовались листы площадью $0,8$ м² и толщиной $2,5$ мм, которые устанавливались к стенкам траншеи, имеющим небольшой угол откоса; виброплатформа заклинивалась между этими листами.

Регистрация колебаний осуществлялась в дальней зоне J -приборами с помощью вис. вибростанции по профилю X (т.е. по профилю, перпендикулярному к направлению силы).

Проведённые наблюдения показали, что общая интенсивность сейсмограммы при использовании источника с "мягким лбом" в 1,5 раза больше, чем для бестраншейного источника. При использовании источника с "твёрдым лбом" общая интенсивность колебаний снижается по сравнению с бестраншейным источником приблизительно в 1,5 раза, при этом сейсмограмма оказалась более низкочастотной. Следовало бы, конечно, оценку этих источников производить по прямой волне, наблюдаемой в скважине, однако в момент постановки этих опытов скважинные наблюдения ещё не были налажены. Таким образом, первые пробные эксперименты свидетельствуют о том, что источник с "мягким лбом" не на много лучше бестраншейного источника, но поскольку последний не требует земляных работ, он является более перспективным для широкого внедрения. Теоретически этот источник в своих лобовых частях должен возбудить поперечные SV-волны и продольные вол-

ны. Для оценки интенсивности продольных волн в 1974 году был поставлен эксперимент по схеме, показанной на рис.11. В центральной скважине были установлены 6 шт. трёхкомпонентных снарядов на глубинах 1, 2, 3, 10, 30 и 73 метра. На расстоянии 73 метра от устья скважины при помощи горизонтальных и вертикальных ударов было выяснено, что продольные волны указанными снарядами регистрируются на временах 0,07 - 0,1 сек, а поперечные волны на временах 0,35 - 0,5 сек. Когда такие удары производятся у устья скважины, вступления продольных волн регистрируются снарядом, установленным на глубине 73 метра на времени 0,055 сек, а поперечные - на времени 0,3 сек. Затем по профилю "X" на расстоянии 73 метра от скважины был дан сеанс вибрации с силой, ориентированной перпендикулярно оси X. Следующий сеанс был дан тоже на расстоянии 73 метра, но только по профилю "У", сила вибратора попрежнему была направлена по "У". Так было сделано для того, чтобы

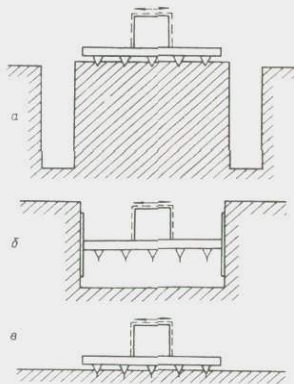


Рис.10. Схема эксперимента для источника с "мягким лбом" (а), "твёрдым лбом" (б), поверхностного бестраншейного источника (в).

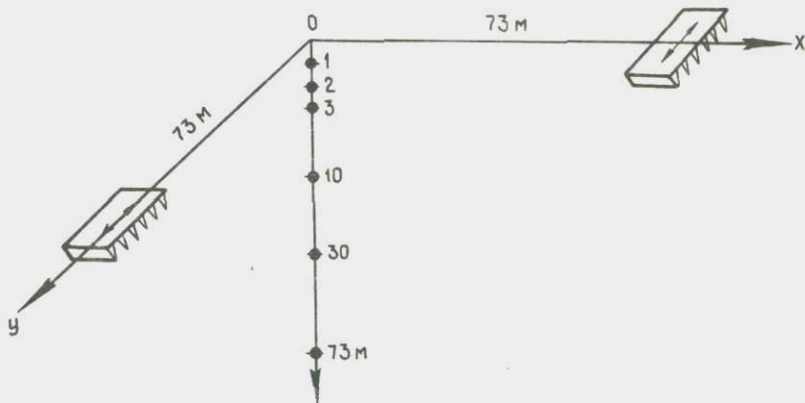


Рис. II.

SV и SH волны регистрировались одними и теми же датчиками. Запись осуществлялась при помощи вибрационной сейсмостанции. Далее при помощи полевой спец.ЭВМ по полученным вибрационным колебаниям восстанавливалась импульсная сейсмограмма. На полученных сейсмограммах поперечные волны, как и ожидалось, на временах 0,35–0,5 сек, но на временах регистрации продольных волн они отсутствовали. Во всяком случае, поперечные волны на сейсмограммах имели размах 1,5–2 см, а на временах прихода продольных волн каких-либо видимых следов P-волны не было. При этом для одних и тех же снарядов величина вектора скорости смещения, определённая по показаниям трёх взаимноперпендикулярных приборов снаряда, была одинаковой с разбросом не более 15%. Таким образом интенсивности поперечных SH и SY-волн оказались одинаковыми. То, что по профилю, перпендикулярному к направлению силы, продольные волны отсутствуют, наблюдалось во всех экспериментах 1972–74 гг. по испытанию вибрационного источника с горизонтальной ориентацией силы. Отсутствие продольных волн по направлению силы источника было для авторов неожиданным явлением (теоретически эти волны должны быть). Возможно, здесь большую роль играет свойство грунта. Как указывалось выше, эксперимент проводился на мягком болотистом грунте, уровень грунтовых вод находился на глубине около 1,5 метра. Желательно такого рода эксперименты провести на твёрдых грунтах и после чего можно будет подобрать физическую модель для обоснования этого явления.

Л и т е р а т у р а .

1. Чичинин И.С. О методике испытаний невзрывных источников сейсмических сигналов. - В кн.: Вибрационная сейморазведка на продольных и поперечных волнах. Новосибирск, 1975 (труды СНИИГГиМС вып.219), с.118-133.
2. Чичинин И.С. Исследование механизма формирования продольных и поперечных волн источником, заданным в виде осциллирующего шара. - В кн.: Измерительная аппаратура для разведочной геофизики. Новосибирск, 1973, с.45-78.
3. Юлин В.И., Сперанский Н.Ф. К теории гидравлического сейсмического вибратора. - В кн.: Измерительная аппаратура для разведочной геофизики. Новосибирск, 1973, с.88-101.
4. Справочник геофизика. т.IV, "Недра", М., 1966, 749 с.

Некрасов С.А., Седин А.М., Шагинян А.С.

РЕЗУЛЬТАТЫ ОПРОБОВАНИЯ НЕВЗРЫВНЫХ ИСТОЧНИКОВ

В 1974 году было проведено опробование трёх макетных образцов источников сейсмических сигналов типа ГСК-4А и сейсмического вибратора типа VSH-8С (США). Их основные технические характеристики приведены в таблице I.

Таблица I.

Основные характеристики источников ГСК-4А и VSH-8С

Тип источника Техниче- ские характе- рис.	ГСК-4А	VSH-8С
Характеристика воздействия на грунт	Энергия, передаваемая в грунт до 4000 кгс м	Амплитуда силы до 8600 кгс
Активная полоса частот возбуждаемых колебаний	15 - 90 Гц	4 - 100 Гц
Характеристика расходуемой энергии или мощности	Объём смеси 8, 12 и 16 л	Мощность двигателя 30 л.с.
Транспортное средство	Автомобиль Урал - 375Д	Автомобиль 6Х6 фирмы "International"
Общий вес установки	13200 кгс	18000

Испытания проводились в достаточно сложных сейсмогеологических условиях Припятской впадины на территории Наровлянского района Гомельской области БССР. Они включали как скважинные, так и наземные наблюдения по сейсмическому профилю. Целью испытания было определение реальных для условий испытаний характеристик источников по спектрам волн, синхронности и сейсмической эффективности.

С помощью приёмников, расположенных в специальной скважине, регистрировались сигналы проходящих волн, возбуждавшихся источниками. По этим сигналам оценивалась синхронность запуска источников, спектры и энергия проходящих волн. Работы методом ОГТ на сейсмическом профиле, ранее изученном с помощью взрывных источников, позволили сопоставить сейсмическую эффективность разных способов возбуждения, а также дать оценку возможной производительности полевых работ с поверхностными источниками. В течение всех полевых работ регистрировались отказы источников с указанием деталей и узлов, вышедших из строя. Эти данные использовались для оценки надёжности в разные периоды испытаний.

Расположение источников и приёмников во время скважинных наблюдений схематично показано на рис. I. На расстоянии $x=11$ м от устья скважины устанавливали поочередно источники и производили воздействия на грунт. В скважине на глубинах $h_1 = 60$ м и $h_2 = 100$ м были помещены сейсмоприёмники типа СИ-20, воспринимавшие колебания источников. В первых вступлениях наблюдалась проходящая волна, распространявшаяся со скоростью 1800 м/с, вычисленной по формуле:

$$v_p = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1},$$

где t_1 и t_2 — времена вступлений на нижних и верхних приёмниках соответственно. Породы верхней части представлены песками. Для энергетических расчётов их плотность была

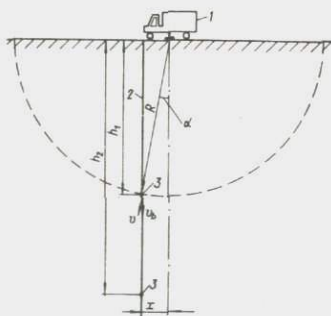


Рис. I. Схема расположения источника сейсмических сигналов и приёмников: 1—источник сигналов, 2—скважина, 3—сейсмоприёмники, x — расстояние от устья скважины до пункта воздействия, α — угол между вертикалью и направлением от источника к приёмнику, R — радиус полусферы.

принята равной $\rho = 2,1 \text{ г/см}^3$, а их акустическое сопротивление $\beta = \rho V_p = 3,8 \cdot 10^6 \text{ кг/м}^2\text{с}$.

На скважине было выполнено по 50 наблюдений с каждым источником. Поскольку условия как для разных источников, так и для повторных наблюдений не изменялись, то вариации времён вступлений проходящей волны характеризовали синхронизацию запуска источников. Наибольший разброс вступлений составил от среднего $\pm 1,5 \text{ мс}$. Для вибратора эти замеры производились по коррелограммам, и разброс не превышал $\pm 1 \text{ мс}$.

Визуально различий формы сигналов повторных воздействий замечено не было. Регистрация сигналов производилась на цифровой сейсмостанции типа DES-1V (США) при выключенных автоматических и программных регуляторах усиления. Коэффициенты усиления фиксировались. Регистрирующий тракт был прокалиброван по сигналу звукового генератора при эффективном напряжении на входе $U_{\text{вх}} = 64 \cdot 10^{-3} \text{ В}$, коэффициенте усиления $K_{yc} = 18 \text{ дБ}$ и амплитуде записи $A = 6,2 \text{ мм}$.

Спектральным анализом сигналов, зарегистрированных от источников, получены их частотные характеристики, показанные на рис.2. Управляющий сигнал вибратора при этом был представлен развёрткой частоты от 20 до 60 Гц. В этой полосе лежит вся активная часть характеристики проходящей волны вибратора. На характеристике волны ГСК-4А отмечаются три области повышенных амплитуд спектральных составляющих: 20–30 Гц, 40–57 Гц и 70–90 Гц с максимумами на частотах 25, 50 и 80 Гц. Методика расчёта энергии проходящей волны заключалась в следующем. В качестве исходных данных использовались результаты скважинных наблюдений. По ним были получены амплитудные спектры колебаний корпуса сейсмоприёмника, расположенного на глубине $h_1 = 60 \text{ м}$. По спектрам и параметрам пород был определён поток E_1 энергии проходящей волны через единичную поверхность, расположенную на по-

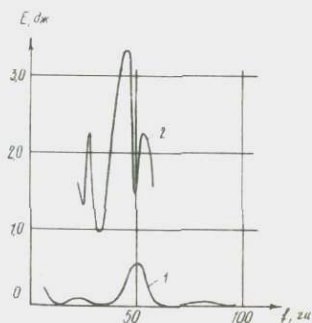


Рис.2. Частотные характеристики проходящей волны источников сейсмических сигналов: 1-ГСК-4А, 2- VSH-8С.

полусфере с радиусом $R = \sqrt{x^2 + h_1^2}$ и центром в середине контакта источника и грунта. Эта единичная поверхность взята в окрестностях оружности, полученной сечением полусферы R горизонтальной плоскостью.

Считая установки ГСК-4А и VSH-8С источниками сосредоточенной силы с диаграммой направленности в виде окружности, касательной к плоскости контакта, были определены полные потоки энергии через всю полусферу, окружающую место возбуждения волн [Гурвич И.И.]

Обозначив через α угол между вертикалью, проходящей через середину поверхности контакта источника с грунтом, и сейсмическим лучом, выходящим из этой середины, запишем зависимость единичной поверхности кольца ds от этого угла в виде (см.рис.1)

$$ds = 2\pi R^2 \sin\alpha d\alpha.$$

Для выбранной расстановки источника и приёмников амплитуда скорости перемещения корпуса сейсмоприёмника \overline{v} примерно равна вертикальной компоненте v_z . Поэтому поток энергии для одной спектральной составляющей через единичную поверхность, расположенную на вертикали от источника, можно записать в виде

$$dE_i = \frac{1}{2} v_z^2 \beta T \cos^2 \alpha ds,$$

где $\frac{1}{2} v_z^2$ - квадрат эффективного значения скорости для i -той спектральной составляющей, полученной спектральным анализом сигнала проходящей волны; T - длительность сигнала. С учётом диаграммы направленности поток энергии этой спектральной составляющей через всю полусферу равен

$$E_i = \int \frac{1}{2} v_z^2 \beta T \cos^2 \alpha ds = \frac{\pi}{3} v_z^2 \beta R^2 T.$$

Полная энергия для всех N спектральных составляющих равна сумме

$$E = \sum_{i=1}^N E_i.$$

Вычисления, произведённые по этим формулам, показывают, что в условиях рассмотренных выше опытов, а именно

- объём газовой смеси в каждом номере ГСК-4А - 12 литров,
- диапазон частот развертки колебаний у вибратора - 20-60 Гц,
- средняя амплитуда силы вибраций - 8000 кгс,
- длительность развертки $T = 8$ с,
- акустическое сопротивление пород $\beta = 3,8 \cdot 10^6$ кг/м²с,

получена энергия, проходящая через полусферу с радиусом $R = 61$ м при одном воздействии ГСК-4А, равная 1 Дж, а при одной развёртке вибратора - 60 Дж*.

Методика полевых работ с каждым источником обеспечивала минимальными средствами получение лучших (в условиях эксперимента) материалов, которые затем сопоставлялись.

Работы взрывным методом были проведены в 1973 году. Начиная опыты с источниками ГСК-4А и VSN-8С, сначала были экспериментально, по минимуму интенсивности поверхностных волн на записях, подобраны параметры группирования и вынос источников от расстановки приёмников. Затем подбирали мощность источников и минимальное число воздействий, при которых на сейсмограммах намечаются оси синфазности, соответствующие самой глубокой отражающей границе в осадочной толще. Полученные параметры систем возбуждения и приёма трёх видов источников приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Параметры систем возбуждения и приёма при сравнительных испытаниях источников.

П а р а м е т р	И с т о ч н и к и		
	в з р ы в	ГСК-4А	
1	2	3	4
База группирования источников	продольная 40м по 20м между скважинами	продольная 30м по 15м между скважинами	
Количество источников в группе	3	3	1
Перемещения источников у одного пикета	-	на 12м по линии профиля, через 3м	на 45м по линии профиля через 3м
Частотный диапазон воздействий	широкополосный	15+90 Гц	20+60 Гц

* Очень малый сейсмический КПД вибратора (менее 0,02%), получившийся в этих экспериментах, является весьма странным. При дальнейших экспериментах подобного рода следует, повидимому, особое внимание обратить на вопрос, куда уходит основная мощность источника. Прим.ред.

I	2	3	4
Время одного воздействия	-	-	8 с
Амплитуда силы воздействия	-	-	8,5 тс
Характеристика расходуемой энергии	тротила 15кг	взрывной смеси 12 л	мощность двигателя 90 л.с.
Число воздействий, накапливаемых на пикете	I групповое воздействие	5 раз по 10 групповых воздействий на каждой стоянке	16 раз по I воздействию на каждой стоянке
База группирования сейсмоприёмников	продольная 55 м	продольная 55 м	продольная 55 м
Количество приёмников в группе	12	12	12
Расстояние между приёмниками	5 м	5 м	5 м
Расстояние от источника (центра группы) до ближайшей группы приёмников	0	800 м	800 м

С параметрами, приведёнными в таблице 2, был отработан участок профиля на Восточно-Ельской площади. Записи взрывного метода обработаны на ЭЦВМ М-222 вычислительного центра треста "Беларусьнефтегеофизика". Записи невзрывных источников обработаны на машине "Комманд" Центральной геофизической экспедиции. Во всех случаях выполнялось суммирование по методу ОИТ с 12-ти кратным перекрытием.

По разрезу взрывного метода проведена привязка к данным каротажа скважины Ельской площади.

Отражение на времени от 2,6 до 2,8 с принадлежит границе кристаллического фундамента. Следующая граница на времени 2,3-2,5 с - кровля подсолевых отложений. Потом идёт пачка межсолевых отложений, наиболее интенсивное из которых - 2,05-2,25 с. Сравнительная характеристика временных разрезов показывает, что они практически идентичны.

Сравнение невзрывных источников по энергии часто производят, определяя их тротиловые эквиваленты. Тротиловым эквивалентом называют массу заряда тротила, при взрыве которого в оптимальных условиях интенсивность полезных волн получается такой же как при одиночном воздействии невзрывного источника. Наиболее просто этот параметр определяют подбором заряда тротила, взрываемого в скважине, до получения примерно одинаковых сейсмограмм полезных волн одиночного воздействия источника и взрыва заряда. Однако такая методика связана с использованием нестандартных навесок тротила и даёт результат для частного случая оценки в одном месте. При анализе профильных наблюдений была предпринята попытка определить тротиловые эквиваленты источников на основе сопоставления параметров возбуждения.

Если предположить, что на результирующих временных разрезах отношение сигнал/помеха испытываемого и взрывного источников помехи обусловлены случайными микросейсмическими колебаниями, то воспользовавшись соотношением между амплитудой полезного сейсмического сигнала и величиной заряда (Гурвич И.И.), можно прийти к заключению, что тротильный эквивалент ГСК-4А равен 0,038 кг, вибратора VSH-8С - 1 кг.

Данные об отказах, собранные в ходе испытаний, характеризуют надёжность источников. Они приведены в таблице 3.

Таблица 3.

Данные об отказах источников ГСК-4А и VSH-8С

Тип источника	Период испытаний	Продолжительность периода (часов)	Число отказов
ГСК-4А	обкатка	120	145
	работа	120	20
VSH-8С	обкатка	8	12
	работа	29	2

Из данных таблицы 3 видно, что надёжность источников существенно повысилась после их обкатки и обучения обслуживающего персонала

Таким образом, опробованием источников газовой детонации типа ГСК-4А и сейсмического вибратора VSH-8С доказано, что в условиях проведения испытаний с ними получены материалы по глубинности и разрешённости не уступающие материалам традиционного взрывного метода. Поэтому такие работы целесообразно продолжить, расширив районы испытаний.

Работы выполнены тремя организациями Министерства нефтяной промышленности: СКБ сейсмотехники, ЦЭ, трест Беларусьнефтегеофизика в Гомельской области БССР.

Н.Г.Бутирин, В.Н. Рыбаков

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКИХ ВИБРАТОРОВ ДЛЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Опыт применения вибраторов в сейсморазведке даёт необходимое представление о путях разработки вибраторов так же и для сейсмологии. Такой вибратор может быть построен на различных принципах действия.

Один из способов создания вынужденных колебаний объекта состоит в воздействии на него поршневой гидравлической системой, возбуждаемой переменным давлением жидкости. Вибраторы, действие которых основано на этом принципе, называются гидравлическими. Величина вибротяговой силы в таких вибраторах зависит от давления, которое можно создать в гидроцилиндрах.

Для управления потоком жидкости в поршневой системе обычно используются золотниковые, струйные или клапанные распределители. В свою очередь, управление этими устройствами может осуществляться с помощью механических, гидравлических, пневматических или электрических систем. Гидровибраторы, в которых управление движением распределительного устройства обеспечивается электрическим путём, называются электрогидравлическими.

Принципиальная схема такого вибратора показана на рис.1. Электрогидравлический вибратор работает следующим образом. Генератор-9 вырабатывает управляющие сигналы, они усиливаются в электронном усилителе мощности-3 и поступают в электрогидравлический преобразователь - 2, который управляет силовым исполнительным механизмом - 5. Для улучшения характеристик вибратора вводятся обратные связи -4 и -6. Индикатор -8 позволяет сле-

дить за значением выходного параметра, с помощью блоков -IО и -II можно управлять исходными параметрами системы.

Несмотря на различие принципиальных схем и разнообразие конструктивных форм исполнения электрогидравлических вибраторов, можно отметить характерные особенности, присущие всему классу. Прежде всего это разделение функций. Задание программы, функции регулирования и контроля параметров осуществляются электрической схемой, а реализация мощностей - гидравлической.

Собственно вибратор состоит обычно из силового исполнительного механизма, к корпусу или в корпусе которого крепятся гидравлический усилитель и электромеханический преобразователь. Блок гидравлического питания, включающий в себя насосы с приводом от электродвигателя или двигателя внутреннего сгорания, теплообменник, деаэратор, фильтры, масляный резервуар, контрольную и регулируемую аппаратуру; блоки электронного управления и электропитания соединяются с вибратором трубопроводами и кабелем и могут, вообще говоря, находиться от него на значительном расстоянии.

Остановимся коротко на основных блоках электрогидравлического вибратора.

К системе управления предъявляются следующие основные требования: во-первых, она должна обеспечить работоспособность вибратора и стабильность параметров выходного сигнала при воздействии внешних возмущающих сигналов; во-вторых, система управления должна обеспечить управляемость этими параметрами вручную, автоматически или по программе; в-третьих, она должна устранять нежелательные связи параметров выходного сигнала, такие как например, связь между амплитудой выходного сигнала и установленной частотой; в-четвертых, система должна компенсировать не-

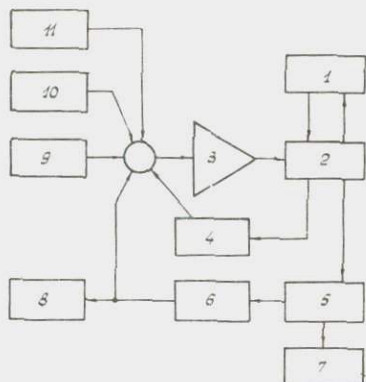


Рис. I. Блок-схема вибратора. I-блок питания; 2-электропреобразователь; 3-усилитель мощности; 4,6-преобразователь обратной связи; 5-исполнительный механизм; 7-нагрузка, 8-индикатор; 9-генератор сигналов; 10-регулировка поршня; II-дифференциальный генератор.

линейные искажения, вносимые работой гидроусилителей. Наконец, система должна обеспечить контроль параметров и, при необходимости, их регистрацию.

Перечисленные требования могут меняться в зависимости от типа гидроусилителя гидравлического исполнительного механизма, от вида входного воздействия, от диапазона изменения выходных параметров сигнала.

Основными параметрами выходного сигнала вибратора считаются следующие: частота гармонического колебания или спектр колебаний сложной формы, амплитуда колебаний, вибротяговая сила, развиваемая поршневым исполнительным механизмом. Производными параметрами являются скорость или ускорение, развиваемые исполнительным механизмом.

При работе вибратора на нагрузки различного вида могут возникать требования стабилизации одного из выходных параметров, таких как амплитуда, при заданной форме колебаний и частоте, ускорение или усилие, причём система управления должна допускать работу в любом из перечисленных режимов.

При всём многообразии технических решений в настоящее время существуют два основных типа систем управления электрогидравлическими вибраторами, обусловленных двумя видами вибрационных испытаний: испытаниями на широкополосное случайное воздействие и испытаниями на гармоническое воздействие. Наиболее жёсткие требования предъявляются к системе управления при испытаниях первого вида, к которым также относятся испытания с произвольной формой входного воздействия.

Система управления для этого вида испытаний должна обеспечить равномерность частотной характеристики по любому из выбранных параметров: амплитуде перемещения, ускорению или усилию в диапазоне частот, определяемым спектром заданного выходного воздействия.

Передаточная функция электрогидравлического вибратора имеет достаточно сложный вид даже при анализе с существенными допущениями. Коррекция частотной характеристики путём введения отрицательных обратных связей, охватывающих звенья электровибратора, практически не представляется возможной ввиду значительных фазовых искажений, вносимых каскадами гидравлического усиления и обычно ограничиваются коррекцией только электромеханического преобразователя, управляющего движением золотника гидроусилителя.

Реально осуществимый в таких условиях способ коррекции частотной характеристики заключается в формировании специальными устройствами характеристики, обратной характеристике электрогидравлического вибратора. Результирующая частотная характеристика такой системы от входа корректора до выхода вибратора будет при этом практически линейной.

Эта задача может быть решена двумя способами. Первый из них заключается в синтезе частотнозависимой цепи общими методами теории синтеза электрических цепей по известной передаточной функции вибратора. Этот метод имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что исходная для данного метода передаточная функция, заданная в аналитическом виде, составлена на основе ряда упрощений, даже если она получена на основе частотных испытаний вибратора. При этом даже после введения корректора не будут скорректированы участки частотной характеристики, реальные искажения которых не вошли в описание передаточной функцией.

Второй способ заключается в формировании частотной характеристики корректора большим количеством узкополосных фильтров, у каждого из которых может меняться коэффициент передачи при неизменной средней частоте настройки фильтра. Этот способ имеет то преимущество, что позволяет производить коррекцию частотной характеристики системы экспериментально без использования и анализа передаточной функции электрогидравлического вибратора. Недостатком метода является достаточно большая сложность и стоимость аппаратуры, что особенно существенно при коррекции широкополосных систем, в которых число фильтров блока коррекции доходит до 64 и более.

Система управления при испытаниях на гармоническое воздействие имеет более простую структуру даже тогда, когда частота входного сигнала меняется в достаточно широком диапазоне. Основной задачей при построении системы управления в этом случае является стабилизация одного из выходных параметров вибрации. В большинстве случаев эта задача решается методом автоматического регулирования уровня APV выходного сигнала за счёт изменения коэффициента передачи специального регулируемого усилителя в зависимости от текущего значения выходного параметра. Коэффициент передачи управляемого усилителя обычно линейно зависит от управляющего напряжения, причём коэффициент падает при увеличении управляющего напряжения. Важным свойством системы с АРУ является

то, что она реагирует и на произвольные изменения коэффициента передачи нерегулируемых каскадов, поддерживая с заданной точностью постоянным произведение коэффициентов усиления нерегулируемых каскадов и регулируемого усилителя.

Системы с использованием АРУ относятся к параметрическим системам автоматического регулирования, т.к. цепь обратной связи оказывает влияние на параметр прямой цепи (коэффициент усиления). Кроме того и обратная связь осуществляется по одному из параметров выходного сигнала, чаще всего по амплитуде перемещения или ускорения.

Анализ устойчивости систем с АРУ следует проводить с позиций теории нелинейных систем, т.к. линейаризация уравнений, описывающих систему с параметрической обратной связью переводит её в обычную — с аддитивной обратной связью. При этом теряются основные свойства систем с АРУ, из-за которых последние и применяются.

С целью уменьшений нелинейных искажений, вносимых гидроусилителями, теоретически наиболее просто охватить каждое звено гидроусиления местной отрицательной обратной связью, и весь гидровибратор общей обратной связью с соответствующей коррекцией для обеспечения устойчивости. Реализация первого способа невозможна без существенного усложнения конструкции каждого каскада гидравлического усилителя. О трудности использования общей обратной связи по выходному параметру говорилось выше.

Существует способ компенсации нелинейных искажений, основанный на введении в управляющий сигнал специальных сигналов с частотами, кратными частоте управляющего сигнала и с регулируемыми вручную или автоматически их фазами и амплитудами. Фаза этих дополнительных сигналов должны быть противоположны фазам гармоник выходного сигнала, искажающих его форму, а амплитуды такими, чтобы компенсировать эти искажения.

Компенсирующий сигнал можно получить двумя путями: выделением гармоник с датчика выходного параметра или формированием в автономном генераторе. Первый способ позволяет создать вибрационную установку с автоматической компенсацией нелинейных искажений. Такая установка должна быть оснащена самонастраивающимися фильтрами и системой, обеспечивающей фазовые сдвиги в цепи обратной связи. Второй способ достаточно прост, он требует лишь наличия генератора сложных напряжений, но позволяет производить только ручную компенсацию нелинейных искажений.

В качестве гидравлических усилителей электрогидравлических вибраторов, как правило, используются золотниковые усилители или усилители типа сопло-заслонка. Первые обычно применяются в сочетании с электромеханическими преобразователями электродинамического типа, вторые - с электромагнитными преобразователями.

Конструкции золотниковых усилителей-преобразователей сложнее чем в случае с сопло-заслонкой, но эффективность их выше, прежде всего, из-за гораздо меньшей чувствительности к загрязнению рабочей жидкости и вибрациям.

Следует ещё раз подчеркнуть, что лобные гидравлические усилители существенно нелинейны. Движение золотника гидроусилителя регулирует открытие отверстий между входными и выходными каналами. Уравнение расхода жидкости через отверстие имеет вид

$$Q = K x \sqrt{\Delta p},$$

где Q - расход через отверстие,
 x - открытие,
 Δp - перепад давления на золотнике,
 K - конструктивный коэффициент.

Кроме того, существует опасность внесения нелинейных искажений из-за "залипания" золотника во втулке при попадании между ними твёрдых частиц. Чтобы избежать этого, со стороны электромеханического преобразователя к золотникам приходится прилагать значительные усилия. Другой способ уменьшения трения и зоны нечувствительности в золотниковых парах - осцилляция, т.е. подача на золотник сигнала высокой частоты порядка 2-х кГц и малой амплитуды, с тем, чтобы он находился в постоянном движении.

Фактором, вносящим большие нелинейные искажения, является действие гидродинамических сил в гидравлической схеме вибратора. Чтобы снизить влияние этих сил, проточные части золотников приходится профилировать специальным образом.

Большим разнообразием конструктивных решений отличаются силовые исполнительные механизмы электрогидравлических вибраторов. Объясняется это различием требований, предъявляемых потребителями (величина вибротяговой силы, частотный диапазон, собственные размеры, условия применения и т.д.)

Отметим отношение тенденции в проектировании силовых механиз-

мов. Ход поршня в общем случае должен быть минимальным, чтобы уменьшить объём масла, вводимого в цилиндр, в то время как высокие ускорения на низких частотах требуют больших амплитуд хода.

Для уменьшения трения поршня в цилиндре применяются специальные прокладки, обладающие антифрикционными свойствами.

Если ожидается действие больших боковых нагрузок, в цилиндр вставляются специальные гидростатические подшипники. Это, конечно, усложняет конструкцию, но обеспечивает жёсткое самоцентрирование поршня.

Для предохранения механизма от разрушения при нарушениях режима эксплуатации на концах поршня ставят гидравлические амортизаторы.

Многие конструкции вибраторов предусматривают возможность использования их как в вертикальном, так и в горизонтальном положениях.

Особенностью гидравлического исполнительного механизма как звена системы автоматического регулирования заключается в том, что скорость поршня пропорциональна выходному потоку гидроусилителя. То же относится и к первому каскаду гидроусилителя, следовательно, усилитель первой ступени и управляемый им поршневой исполнительный механизм представляют собой систему из двух последовательно соединённых астатических звеньев. Для обеспечения устойчивости такой системы требуется введение специальных обратных связей по положению управляющего золотника и поршня исполнительного механизма, причём петля обратной связи по среднему положению поршня или золотника нормально замкнута на частоте, лежащей значительно ниже диапазона рабочих частот вибратора.

В целях коррекции частотной характеристики электромеханического преобразователя часто используется обратная связь по перемещению или скорости управляющего золотника.

На рис.2 представлена блок-схема системы управления электрогидравлического вибратора.

Сигнал с задающего генератора-1 поступает на регулируемый усилитель-2 и далее через предварительный усилитель-корректор-3, на усилитель мощности-4. После усиления сигнал поступает на обмотку управления электромеханического преобразователя-5, жёстко связанную с золотником первого каскада гидроусилителя-6. Петля стабилизирующей обратной связи-9 обеспечивает устойчивую работу первого каскада, петля обратной связи-10 - второго каскада гид-

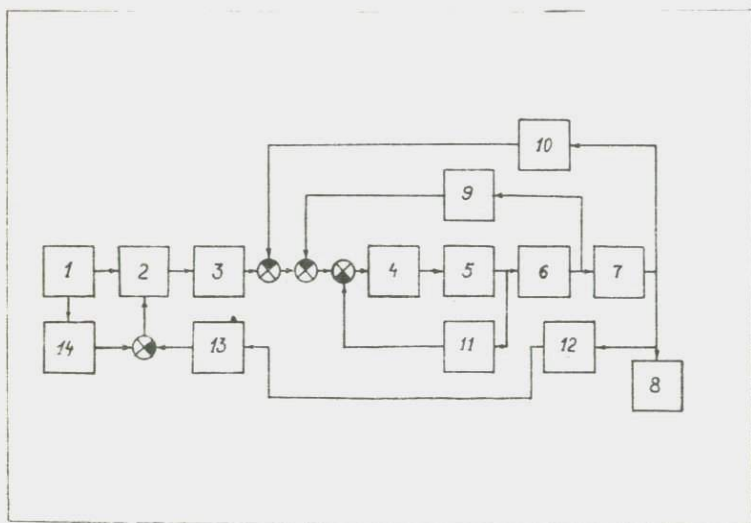


Рис.2. Блок-схема системы управления вибратором. 1—задающий генератор, 2—регулируемый усилитель, 3—предусилитель-корректор, 4—усилитель мощности, 5—электромеханический преобразователь.

роусилителя—7. На выходном штоке вибратора, соединённом с объектом—8 расположен датчик стабилизируемого параметра—12. Им может быть акселерометр, датчик силы, датчик перемещения. Сигнал с датчика поступает на измеритель амплитуды параметра—13, после чего происходит сравнение напряжения, пропорционального амплитуде выходного параметра с заданным напряжением от источника сигнала задания—14. Задающий генератор и источник сигнала задания в общем случае могут получать управление от программного устройства, при этом частота и амплитуда вибраций могут меняться как в функции времени, так и синхронно с подобным (однотипным) вибратором.

Основные особенности, отличающие электрогидравлические вибраторы от вибраторов других типов, можно свести к следующему:

Возможность работы в области низких частот. Рабочий диапазон электрогидравлических вибраторов от 0 до 500 Гц. (Известны случаи, когда рабочая частота достигала 850 Гц).

Электродинамические вибраторы позволяют получить очень высокие вибротяговые усилия во всём рабочем диапазоне частот. Существуют машины с усилениями до 50 т.

Амплитуда колебаний поршня может быть обеспечена от тысячных долей мм до сотен мм.

Области применения существующих вибровозбудителей различных типов показаны на рис.3.

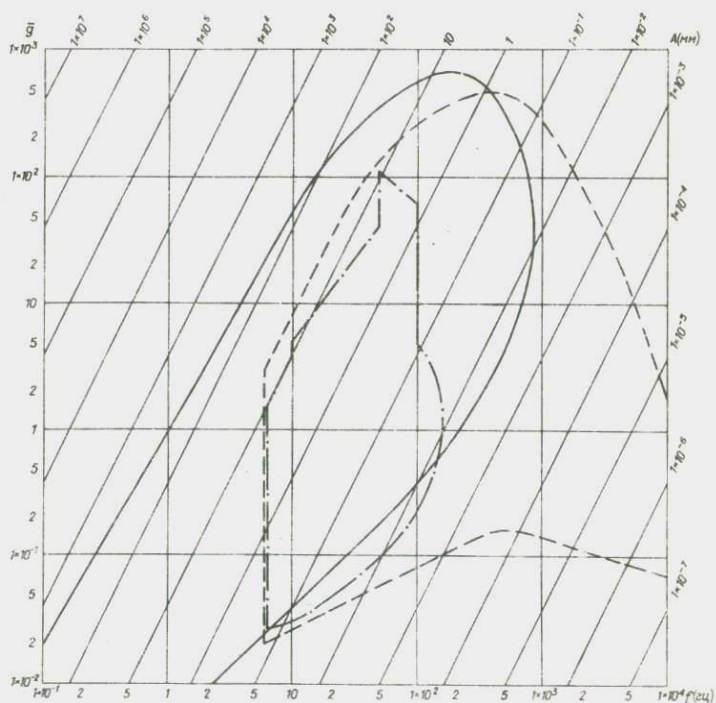


Рис.3. Области оптимальных рабочих режимов вибраторов.

- электрогидравлические вибраторы,
- - - электродинамические вибраторы,
- .-.- механические и электромеханические вибраторы.

Как известно, для целей сейсморазведки необходимы вибровозбудители, которые работали бы в диапазоне частот от 0 до 100 Гц с максимальной вибротяговой силой до 20 т. Сейсмология требует создания вибромодулей, работающих на частотах 1 – 10 Гц и развивающих усилия до 50 т и выше. При этом максимальные потребные амплитуды перемещения достигают 200 мм.

Сравнение существующих типов вибровозбудителей показывает, что поставленные задачи наиболее близки к тем, которые решают электрогидравлические вибраторы.

Известны работы американских фирм " Dresser " и " Continental Oil Company ", которые используют электрогидравлические вибраторы для геофизической разведки, причём, достаточно компактные и мощные установки монтируются на обычных транспортных средствах, что позволяет вести разведку в разнообразных топографических условиях.

Основным рабочим режимом сейсмического вибратора является режим гармонических колебаний поршня с постоянной либо меняющейся по определённому, заранее заданному закону, частотой. При работе вибратора в зависимости от характера грунта могут возникать задачи стабилизации различных выходных параметров: перемещения, ускорения или усилия. Структура системы управления должна обеспечить работу вибратора на любом из указанных режимов. Как уже отмечалось, для этих целей наиболее рациональным является использование принципа автоматического регулирования уровня. При этом следует иметь ввиду существенное отличие частотных характеристик электрогидравлического вибратора по перемещению и ускорению.

Измерение и стабилизация выходных параметров может производиться не только непосредственно на поршне, но и на грунте в непосредственной близости от возбудителя, что позволяет частично компенсировать искажения сейсмосигнала, связанные с нерациональным контактом возбудителя и нагрузки.

Л и т е р а т у р а .

1. Баранов В.Н., Захаров Ю.Е. Электрогидравлические и гидравлические вибрационные механизмы. М., "Машиностроение", 1966, 243 с.
2. Тимофеев В.Ф., Шварцман Г.И. Современные гидравлические вибрационные установки. - "Стандарты и качество" № 1,2, 1966, с.68-72, с.61-68.

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЁТА ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ДЛЯ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ

Перспективы применения электромеханических преобразователей для "невзрывной" импульсной сейсморазведки на суше обусловлены такими их достоинствами, как возможность управления величиной и длительностью воздействующего на дневную поверхность силового импульса, автономность и безопасность в работе, простота обслуживания и т.д. Особо следует отметить высокую повторяемость силовых импульсов, если преобразователь работает в пределах упругих деформаций грунта, что позволяет применять метод накапливания.

Электромеханический преобразователь обеспечивает высокую эффективность энергопреобразования при перемещениях его подвижной части (якоря) относительно индуктора на расстояние $(10 \pm 25) \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Перемещение же излучающей плиты, возбуждающей упругие колебания грунта в зависимости от параметров грунта, находится в пределах $(1 \pm 5) \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Отсюда следует, что для обеспечения наиболее выгодных условий работы электромеханического преобразователя его параметры, в том числе — перемещение подвижной части, должны быть согласованы с параметрами грунта под излучающей плитой.

Для согласования преобразователя и грунта может быть применён трансформатор усилий, например, гидравлический или механический /1/.

Ниже выводятся основные расчётные соотношения, устанавливающие связь между параметрами преобразователя и грунта для сейсмического преобразователя, работающего совместно с повышающим

трансформатором усилий. Этот случай, в частности, имеет место при использовании преобразователей индукционно-динамического типа.

Механическая схема замещения такого преобразователя совместно с грунтом может быть изображена на основе идеального рычага с податливыми опорами (рис.1). При составлении схемы учитывалось, что индуктор преобразователя обычно подгружается дополнительной инертной массой для компенсации реакции грунта, и кроме того принимались допущения:

1. Грунт можно представить сосредоточенными жёсткостью, массой и сопротивлением трения, что согласуется с работами /2,3/
2. Весом P инертной массы можно пренебречь ввиду того, что рассматриваются импульсные процессы, а вес — статическая нагрузка, которая при необходимости может быть учтена по методу наложения. Кроме того, электромагнитная сила в импульсных преобразователях, как правило, много больше инертной массы.

На рисунке обозначено:

f — электромагнитная сила, т.е. сила, действующая на якорь;

m_1 — масса якоря;

m_2 — суммарная масса индуктора и "подгруза";

s_3, m_3, k_3 — сосредоточенные параметры грунта;

ac — идеальный рычаг с отношением плеч $K = \frac{ac}{bc}$.

Здесь K — коэффициент трансформации усиления на грунт.

Для решения задачи движения отдельных элементов системы воспользуемся методом электромеханических аналогий. Электрическая схема-аналог также изображена на рис.1.

В этой схеме напряжения эквиваленты силам, токи — скоростям движения элементов;

L_3, R_3, C_3 — величины, эквивалентные параметрам грунта;

L_1, L_2 — индуктивности, эквивалентные массам якоря и индуктора (с подгрузом), соответственно;

i_1, i_2, i_3 — токи, эквивалентные скоростям движения якоря, индуктора, грунта (излучающей плиты);

f — напряжение, эквивалентное электромагнитной силе;

ac — идеальный автотрансформатор с коэффициентом трансформации $K = \frac{U_{ac}}{U_{bc}}$

При расчёте электрической схемы-аналога приняты допущения:

1. Активное сопротивление $R_3 = 0$.

В импульсных системах такое допущение оправдано.

2. Электромагнитная сила $f = \text{const}$

В импульсных электромеханических преобразователях электромагнитная сила существует практически только до тех пор, пока в результате встречного движения якоря и индуктора не выберется начальный воздушный зазор δ_0 . Поэтому для расчёта конечных величин движения (скоростей, энергий и т.п.)

можно заменить действительную силу на интервале δ_0 её средним значением. Таким образом, в схеме по рис.1 f — средняя электромагнитная сила.

Система уравнений, описывающих схему по рис.2, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (f - L_1 \frac{di_1}{dt})K = L_2 \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt}, \\ (f - L_1 \frac{di_1}{dt})K = L_3 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt, \\ i_1 + i_2 = K(i_2 + i_3) \end{array} \right. \quad (I)$$

Решение системы сильно упрощается, если принять, что $L_2 \rightarrow \infty$ т.е. $i_2 \rightarrow 0$ (индуктор неподвижен).

Необходимость размещения генератора на транспортной базе накладывает ограничение на величину "подгруза" $m_2 (L_2)$. Однако, анализ крайнего и нереального случая $L_2 \rightarrow \infty$ позволяет показать общий подход к решению поставленной задачи.

Если $L_2 \rightarrow \infty$, то для интеграла действия силы:

$$i_1 = I_{m1} \sin \omega t, \quad (2)$$

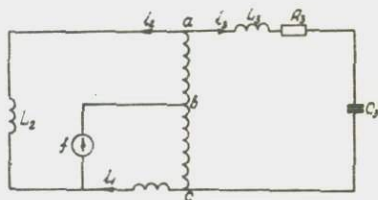
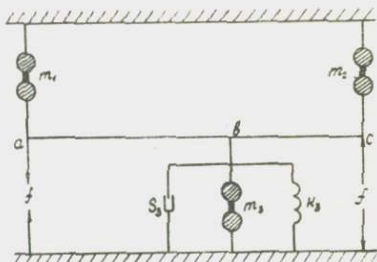


Рис.1. Механическая и электрическая схемы-аналоги преобразователя.

$$U_c = U_m (1 - \cos \omega t), \quad (3)$$

$$i_3 = \frac{\mathcal{I}_{m1}}{K} \sin \omega t = \mathcal{I}_{m3} \sin \omega t. \quad (4)$$

Здесь:

$$\mathcal{I}_{m1} = \frac{f}{\omega L_2}; \quad U_m = f; \quad \omega^2 = \frac{1}{L_2 \cdot C_2};$$

$$\mathcal{I}_{m3} = \frac{\mathcal{I}_{m1}}{K}; \quad L_2 = L_1 + \frac{L_2}{K^2}; \quad C_2 = K^2 C_1.$$

Выражения (2) и (3) показывают, что при $L_2 \rightarrow \infty$ ($m_2 \rightarrow \infty$) анализ системы (I) сводится к анализу переходного процесса в электрическом контуре L_1 и C_1 при его включении на постоянное напряжение.

Положим, что к моменту выбора начального воздушного зазора $\omega t = \omega \tau_0 = \alpha$ где τ_0 - время действия силы. Тогда конечные значения величин

$$i_{10} = \mathcal{I}_{m1} \sin \alpha; \quad U_{c0} = U_m (1 - \cos \alpha); \quad i_{30} = \mathcal{I}_{m3} \sin \alpha. \quad (5)$$

С момента τ_0 $f = 0$ и эквивалентная расчётная схема описывается уравнениями:

$$\begin{cases} L_2 \frac{di_1}{dt} + U_c = 0, \\ i_1 = C_2 \frac{dU_c}{dt}. \end{cases} \quad (6)$$

Решение, если принять момент τ_0 за начало отсчёта, имеет вид:

$$U_c = 2U_m \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin(\omega t + \frac{\alpha}{2}), \quad (I0)$$

$$i_1 = 2\mathcal{I}_{m1} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos(\omega t + \frac{\alpha}{2}), \quad (I1)$$

$$i_3 = 2\mathcal{I}_{m3} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos(\omega t + \frac{\alpha}{2}). \quad (I2)$$

Токи i_1 и i_3 проходят через нуль, а напряжение на ёмкости достигает максимального значения при:

$$\omega t = \omega \tau_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}. \quad (I3)$$

Общая длительность движения якоря в одну сторону и равная ей длительность первой положительной полуволны виброскорости составляют

$$\omega \tau_u = \omega \tau_o + \omega \tau_1 = \frac{\mathcal{H}}{2} + \frac{\alpha}{2}. \quad (I4)$$

Поскольку при сейсморазведке имеет значение именно первый положительный импульс виброскорости, то длительность действия электромагнитной силы α не должна превышать π т.е. $\alpha \leq \pi$
 При $\alpha = \pi$ $\omega \tau_u = \pi$.

Определим перемещения якоря δ_1 и излучающей плиты δ_3 за время $\omega \tau_u$:

$$\delta_1 = \int_0^{\tau_u} i_1 dt = \frac{2 \mathcal{I}_{m1}}{\omega} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (I5)$$

$$\delta_3 = \frac{\delta_1}{K} = \frac{2 \mathcal{I}_{m3}}{\omega} \sin \frac{\alpha}{2} = 2c_3 F \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (I6)$$

Здесь $F = \kappa f$.

При этом:

$$\delta_o = \int_0^{\tau_o} i_1 dt = c_3 f (1 - \cos \alpha) \quad (I7)$$

Из (I4)

$$\frac{\alpha}{2} = \omega \tau_u - \frac{\mathcal{H}}{2} \quad (I8)$$

Подставив (I8) в (I6) и (I7), получим:

$$\delta_o = 2c_3 f \cos^2 \omega \tau_u. \quad (I9)$$

$$\delta_3 = 2c_3 F \cos \omega \tau_u. \quad (I20)$$

Умножим (I9) на f :

$$A = \delta_o f = 2c_3 f^2 \cos^2 \omega \tau_u. \quad (I21)$$

Здесь $A = \delta_0 f$ энергия магнитного поля. Нетрудно убедиться, что к моменту $t = \tau_u$ вся энергия магнитного поля переходит в ёмкость C_3 независимо от величины α . Действительно, в этот момент напряжение на ёмкости равно:

$$U_{cm} = 2U_m \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

и энергия

$$A_c = \frac{C_3 U_{cm}^2}{2} = C_3 f^2 (1 - \cos \alpha) = f \cdot \delta_0$$

С другой стороны, энергия в ёмкости может быть выражена через максимальное перемещение излучающей плиты δ_3 .

$$A_c = \delta_3 F \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

или с учётом (18)

$$A_c = \delta_3 F \cdot \cos \omega \tau_u. \quad (22)$$

Выражения (19), (20), (21), (22) устанавливают связь между основными параметрами грунта (C_3, L_3, δ_3) и преобразователя (δ_0, f, κ). Они, в принципе, дают возможность при известных параметрах $C_3, L_3, \delta_3, \omega \tau_u$ и A определить среднюю величину электромагнитной силы и начальный воздушный зазор, необходимые для работы преобразователя в пределах упругих деформаций грунта.

С учётом реальной массы m_2 решения системы (I) для $\omega t = \omega \tau_0 = \alpha$ т.е. для момента выбора начального зазора δ_0 , имеют вид:

$$i_3 = \gamma_{m_3}^* \cdot \sin \alpha, \quad (23)$$

$$i_1 = \frac{F}{a} \cdot \frac{\alpha}{\omega} + \frac{b}{a} \cdot \gamma_{m_3}^* \cdot \sin \alpha, \quad (24)$$

$$U_c = U_m^* (1 - \cos \alpha), \quad (25)$$

$$i_2 = \frac{i_1}{\kappa - 1} - \frac{\kappa i_3}{\kappa - 1} \quad (26)$$

Где:

$$F = \kappa f; \quad \gamma_{m_3}^* = \frac{F}{\omega L_a}; \quad \omega^2 = \frac{1}{C_3 L_B};$$

$$U_m = \frac{F}{\omega^2 c_3 L_a} = F \left(1 - \frac{c}{a}\right); \quad L_a = \frac{aL_3 + \beta c}{a - c};$$

$$L_g = \frac{aL_3 + \beta c}{a}; \quad a = L_1(\kappa - 1) + \frac{L_2}{\kappa - 1}; \quad \beta = \frac{\kappa L_2}{\kappa - 1}$$

$$c = \kappa L_1.$$

Начальный воздушный зазор δ_0 выбирается за счёт встречного перемещения якоря и индуктора, поэтому:

$$\delta_0 = x_1 + x_2 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{F}{\omega^2} \left[\frac{\alpha^2}{2a} + \frac{1}{L_a} \left(\frac{\beta}{a} - 1 \right) (1 - \cos \alpha) \right], \quad (27)$$

где x_1, x_2 — абсолютные перемещения якоря и индуктора.

Энергия магнитного поля, переходящая в механическую энергию элементов системы, равна:

$$A = f \delta_0 \quad (28)$$

С момента $t = \tau_0 f = 0$. Если подставить это значение в систему уравнений (I), то её решения для токов и напряжений имеют вид:

$$U_c = 2U_m^* \sin \frac{\alpha}{2} \sin(\omega t + \frac{\alpha}{2}), \quad (29)$$

$$i_3 = 2J_{m3}^* \sin \frac{\alpha}{2} \cos(\omega t + \frac{\alpha}{2}), \quad (30)$$

$$i_1 = \frac{F}{a} \frac{\alpha}{\omega} + \frac{\beta}{a} i_3 \quad (31)$$

Ток определяется выражением (26). Так как общий вид выражений для i_3 и U_c как в интервале силы, так и при $f = 0$, не зависит от L_2 , то для реальной массы индуктора можно сразу записать: длительность первой полувоины виброскорости по аналогии с (I4):

$$\omega \tau_u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\alpha}{2}; \quad (32)$$

максимальное перемещение излучающей плиты по аналогии с (I6)

$$\delta_3 = \frac{2 J_{m3}^*}{\omega} \sin \frac{\alpha}{2},$$

или после преобразований,

$$\delta_3 = 2c_3 F \left(1 - \frac{c}{a}\right) \cos \omega \tau_u \quad (33)$$

Энергия ёмкости при $\omega \tau_u$:

$$A_c = \frac{c_3 U_{cm}^{*2}}{2}, \text{ где } U_{cm}^* = 2U_m^* \sin \frac{\alpha}{2}$$

После преобразований:

$$A_c = F \delta_3 \left(1 - \frac{a}{c}\right) \cos \omega \tau_u. \quad (34)$$

Закон движения якоря при реальной массе m_2 существенно отличается от закона движения грунта. При принятых допущениях i_1 (скорость якоря) проходит через нуль только при определённых сочетаниях параметров системы и, в частности, при прочих равных условиях, только при определённой величине инертной массы.

По конструктивным соображениям общая величина хода якоря в одну сторону должна быть ограничена, для чего преобразователь снабжается ограничителем хода якоря.

Соприкосновение якоря с ограничителем либо не должно происходить, либо должно происходить при скорости якоря близкой к нулю. При этом критический ход якоря до ограничителя имеет значение при разработке конструкции.

Приведённые выше соотношения позволяют определить критическую величину L_{2KP} , при которой ток i_1 проходит через нуль, и максимально возможное перемещение якоря δ_{1KP} . Согласно (31) $i_1 = 0$, если

$$-\frac{b}{a} i_3 = \frac{F}{a} \frac{\alpha}{\omega}; \quad (35)$$

ток i_3 достигает отрицательного максимума при:

$$\omega \tau_2 + \frac{\alpha}{2} = \pi.$$

Поэтому (35) преобразуется к виду:

$$b - \frac{\alpha}{2 \sin \alpha/2} \cdot L_a = 0. \quad (36)$$

Из (36) L_{2KP} определяется вполне однозначно.

Можно показать, что минимальная величина имеет место при $\alpha \rightarrow 0$ $L_3 \rightarrow 0$ и составляет величину:

$$L_{2KP}^* = L_1 (K^2 - 1). \quad (37)$$

Выражение (37) показывает, что L_{2KP} сильно зависит от выбранного коэффициента трансформации. При этом следует иметь в виду, что формула (37), как и все приведённые выше, имеет силу лишь при $K > 1$ т.к. для этого условия составлены схема-аналог и её уравнения.

Если $L_2 = L_{2KP}$, то относительное перемещение якоря имеет максимально возможную величину, равную:

$$\delta_{1KP} = \frac{K}{K-1} \cdot \frac{F}{\omega^2} \cdot \frac{\alpha \pi}{a} \quad (38)$$

Формула (38) может использоваться для определения расположения ограничителя хода.

Если $L_2 > L_{2KP}$, то $\delta_1 < \delta_{1KP}$ и для определения времени τ_2 движения якоря от момента окончания действия силы τ_0 и до $i_1 = 0$ можно воспользоваться выражением, полученным из (35):

$$\cos(\omega\tau_2 + \frac{\alpha}{2}) = -\frac{\alpha}{2B \sin \alpha/2} \cdot L_a, \quad (39)$$

из которого при известных прочих параметрах можно найти τ_2 .

Затем можно определить относительное перемещение якоря за полное время его движения:

$$\delta = \int_0^{\tau_2} (i_1 + i_2) dt.$$

Окончательное выражение ввиду его сложности опущено.

Зависимости (27), (28), (32), (33), (34), (36) связывают между собой параметры грунта (C_3, L_3, A_c, δ) и преобразователя ($A, \delta_0, f, k, L_1, L_2$) и позволяют, как и при $L_2 \rightarrow \infty$, определить среднюю электромагнитную силу и начальный воздушный зазор, величину инерной массы и энергию, идущую на излучение, а также и другие величины, необходимые для проектирования преобразователя, если заданы основные параметры грунта C_3 и L_3 .

Для графической иллюстрации полученных результатов была решена обратная задача: для значений $\alpha = \pi$ и $\alpha = \pi/4$ задавались одинаковые значения δ_0, f, k, L_1, L_3 , а затем определялись величины C_3 и ω , при которых начальный зазор выбирается как раз при заданной величине α . Величина L_2 в каждом случае принималась равной критической. Графики i_1 и i_3 для $\alpha = \pi$ и $\alpha = \pi/4$ приведены на рис. 3а и 3б соответственно. При этом за единицу тока принята положительная амплитуда тока i_3 для $\alpha = \pi$

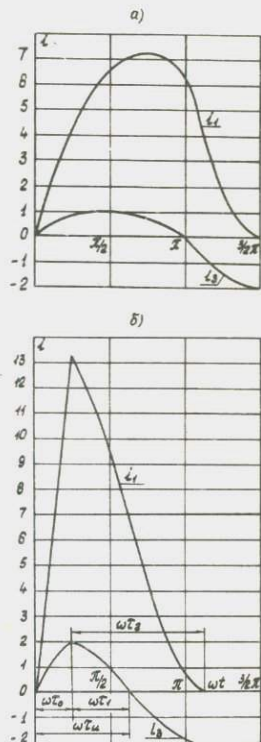


Рис. 2. Скорости якоря и статора: а) при $\alpha = \pi$ б) при $\alpha = \pi/4$

Ряд других расчётных данных в относительных единицах приведён в таблице:

α	A_c	$\delta_{1кр}$	δ_3	$L_{2кр}$	ω	τ_u
$T/4$	1,28	3,5	3,9	0,7	0,303	2,06
π	I	I	I	I	I	I

Данные таблицы показывают, что при увеличении C_3 , т.е. при уменьшении жёсткости грунта, при прочих равных условиях увеличиваются перемещения якоря и излучающей плиты, возрастает длительность первого импульса виброскорости, но уменьшается критическая масса подгруза. Всё это хорошо согласуется с опытом.

Таким образом, полученные расчётные соотношения позволяют произвести первоначальную приблизительную оценку работы преобразователя совместно с нагрузкой или определить параметры преобразователя при известных параметрах грунта.

Л и т е р а т у р а .

1. Патент США, кл. 310-23, № 3.122.664.
2. Чичинин И.С. Исследование механизма формирования продольных и поперечных волн источником, заданным в виде осциллирующего шара. — В кн.: Измерительная аппаратура для разведочной геофизики. Новосибирск, 1973, с.45-78.
3. Хархута Н.Я. Машины для уплотнения грунтов. Л., Машиностроение, 1973, 240 с.

А.В.Игнатъев, В.Ф.Кулаков, Г.А.Сипайлов

ЭЛЕКТРОМАШИННЫЕ ВИБРАТОРЫ ДЛЯ СЕЙСМИЧЕСКОЙ РАЗВЕДКИ

В качестве сейсмического источника для вибрационной сейсмо-разведки можно использовать вибраторы с центробежными вибровозбудителями и электромашинным синхронным приводом. Высокий энергетический к.п.д., гибкость электрического управления, обеспечивающего регулирование фазы, величины и ориентации силы, простота выполнения вибрационного источника на основе стандартного электрооборудования определяют перспективность электромашинной системы. При вращательном движении дебалансных масс осуществляется свободный обмен кинетической и потенциальной энергией в механическом контуре в отличие от вибраторов с линейным движением реактивной массы, где при работе не в резонансе необходима дополнительная мощность источника питания на ускорение и торможение поршня [1].

Схема поверхностного сейсмического источника с центробежными вибраторами представлена на рис.10. Вектор результирующей силы таких вибраторов может быть ориентирован горизонтально для возбуждения поперечных сейсмических волн или вертикально при возбуждении продольных волн. Для распределения силы по площади излучающей платформы устанавливается несколько пар вибраторов. Полагая, что прижим платформы к грунту производится через достаточно мягкие амортизаторы с жёсткостью K_{np} , так что собственная частота колебаний платформы $M_{пл}$ лежит ниже полосы рабочих частот

$$\omega_{пл} = \sqrt{\frac{K_{np}}{M_{пл}}} < \omega$$

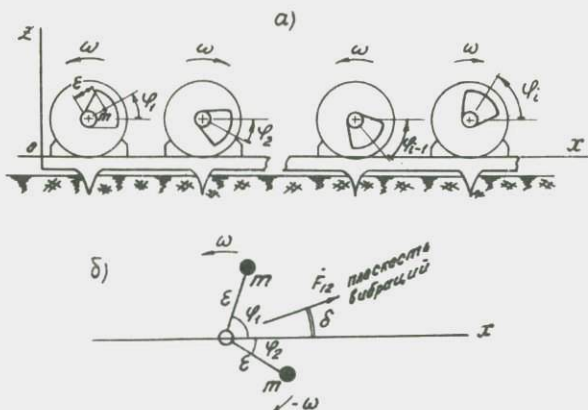


Рис. I. а) Схема поверхностного сейсмического источника с центробежными вибровозбудителями.
б) Возбуждение направленных колебаний.

Можно пренебречь крутильными колебаниями в виброплатформе, ограничившись рассмотрением линейно связанной системы вращательных осцилляторов. Тогда для каждого из вибраторов дифференциальное уравнение движения относительно линейной, например, x и вращательной φ координат будет

$$M_i \frac{d^2 x}{dt^2} + R_i \frac{dx}{dt} + K_i x = (m\epsilon) \left[\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sin \varphi + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cos \varphi \right] \quad (I)$$

здесь x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2 x}{dt^2}$ — смещение, виброскорость и ускорение основания (платформы) i -го вибратора;
где M_{ni} — масса i -той платформы вибратора;

m_{ni} — "присоединённая" к платформе масса грунта;

$R_i, K_i = \frac{1}{c_i}$ — коэффициент трения и жёсткость, проявляющиеся при перемещении основания i -го вибратора;

$(m\epsilon)$ — статический момент дебаланса;
 $\varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ — угловые координаты поворота, скорости и ускорения дебалансных роторов.

Центробежная сила дебалансов $(m\epsilon)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cos\varphi = (m\epsilon)\omega^2 \cos\varphi$ уравновешена составляющими сил на ускорение масс платформы и "присоединённого к ней грунта $M_i \frac{d^2x}{dt^2}$ и сил, преодолевающих активное сопротивление и упругость $R_i \frac{dx}{dt} + \frac{1}{c_i}x$.

Периодическая составляющая $(m\epsilon)d^2\varphi/dt^2 \sin\varphi$ учитывает неравномерность вращения ($d^2\varphi/dt^2 \neq 0$) вибратора ограниченной мощности.

Моменты сил, действующих на роторы вибраторов зависят от углов поворота φ и их производных, от ускорения колебаний d^2x/dt^2 оси вращения роторов.

Уравнение моментов вибраторов с жёсткой связью дебалансных масс и ротора двигателя

$$J_i \frac{d^2\varphi}{dt^2} = (m\epsilon)_i \left(\frac{d^2x}{dt^2} \sin\varphi + q \cos\varphi \right) + N_c (\varphi - \mu_i - \theta_i) + N_o + b \frac{d\varphi}{dt} \quad (2)$$

В этом уравнении J — момент инерции дебалансного ротора,

q — ускорение силы тяжести,

$N_c (\varphi - \mu_i - \theta_i)$ — момент синхронного двигателя,

μ — установочный угол синхронного вибратора двигателя,

$N_o + b\omega$ — момент сухого и скоростного трения.

Пульсирующий момент $(m\epsilon) \frac{d^2x}{dt^2} \sin\varphi$ отражает обратное влияние колебаний платформы на движение ротора. Момент силы тяжести $(m\epsilon)q \cos\varphi$ в среднем за оборот равен нулю и оказывает влияние только на равномерность вращения.

В вибровозбудителях с переменным статическим моментом связь дебалансных масс с валом двигателя осуществляется через нелинейное передаточное звено. Динамические составляющие моментов на ротор двигателя при этом могут быть снижены.

Виброплатформа представляет распределённую систему из упругих c , инерционных m и активных R сопротивлений с некоторыми связями и граничными условиями, на которую работает n -ое количество вибраторов — генераторов колебаний. Генераторы колебаний могут взаимодействовать один с другим через нагрузку — механическую колебательную систему, при этом вибросмещения и мощности двигателей могут быть различными. Подобным же образом можно представить взаимодействие отдельных сейсмических источников через грунт по функции запаздывания $f(t-\tau)$. Простейшей связью между вибраторами будет идеально жёсткая платформа, на которой

вибросмещения, скорости и ускорения одинаковы

$$x_1 = x_2 = \dots = x,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \dots = \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2x_2}{dt^2} = \dots = \frac{d^2x}{dt^2}.$$
(3)

В этом предположении, справедливом для низких частот и хорошей конструкционной жёсткости платформы, уравнения связей исключаются и тогда дифференциальные уравнения движения будут:

$$M_{nn} \frac{d^2x}{dt^2} + R_n \frac{dx}{dt} + \frac{1}{C_n} x = \sum_i^i (m\epsilon)_i \left[\frac{d^2\varphi_i}{dt^2} \sin\varphi_i + \left(\frac{d\varphi_i}{dt} \right)^2 \cos\varphi_i \right]$$

$$J_i \frac{d^2\varphi}{dt^2} = (m\epsilon)_i \left(\frac{d^2x}{dt^2} \sin\varphi_i + q \cos\varphi_i \right) + N_c (\varphi_i - \mu_i - \theta_i) + N_o + \beta \frac{d\varphi}{dt}.$$
(4)

здесь: M_{nn} - масса платформы; предполагаем, что в M_{nn} входит и "присоединённая" к платформе масса грунта m_n и масса дебалансов;

$R_n, \frac{1}{C_n}$ - компоненты сопротивления излучения.

В задаче синтеза из возможных решений системы уравнений (4) нас интересовали бы устойчивые синхронные движения вида:

$$x = X e^{j\omega t + \beta} + \Delta x(\omega t)$$

$$\varphi = \omega t + \varphi_s + \psi(\omega t)$$
(5)

причём, параметры устройства должны быть такими, чтобы искажения Δx и малые качания роторов $\psi(\omega t)$ относительно синхронной скорости ω не превосходили допустимого уровня. Анализ показывает, что при практически используемых соотношениях $M_{nn}/\sum m$ и $J/m\epsilon$ искажения на средних и высоких частотах сейсмического диапазона сравнительно невелики. Ограничимся приближённо моногармоническими решениями, считая вращение дебалансных роторов равномерным с некоторыми фазами φ . При этом, для получения линейных колебаний скорости вращения ω_i и статические моменты $(m\epsilon)$ встречновращающихся пар дебалансов должны быть равны.

Центробежные силы дебалансных вибраторов выразим вращающимися со скоростью $\pm \omega$ векторами, представленными в комплексной плоскости. Вращение против часовой стрелки считаем положительным. Каждая пара встречно- и синхронновращающихся дебалансов с началь-

ными фазами φ_1 и φ_2 возбуждает направленные гармонические колебания, рис.1б. Ориентация колебаний и фаза результирующей силы находится сложением векторов – эксцентриситетов дебалансов.

$$F_{1,2} e^{j\delta} = (m\varepsilon)\omega^2 \left[e^{j(\omega t + \varphi_1)} + e^{-j(\omega t - \varphi_2)} \right] = \\ = 2(m\varepsilon)\omega^2 e^{j\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}} \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \quad (6)$$

Амплитуда центробежной силы равна $F_{1,2} = 2(m\varepsilon)\omega^2$, плоскость колебаний ориентирована к оси x под углом $\delta = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, а временная фаза колебаний равна полуразности фаз дебалансов. Для возбуждения горизонтальных колебаний $\delta = 0$, должно быть соблюдено равенство фаз $\varphi_1 = -\varphi_2$ в парах встречновращающихся дебалансов, при $\varphi_1 + \varphi_2 = \pm \pi$ возбуждаются вертикальные колебания. Дебалансная пара эквивалентна вибровозбудителю с линейным колебанием массы $2m$ с амплитудой ε . В отличие от линейного вибратора центробежные не имеют существенных ограничений по окружной скорости и способны развивать значительные силы с небольшой массой дебалансов.

Для n – пар дебалансов, вращающихся с произвольными фазами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, суммарная вибрационная сила

$$F e^{j\delta} = \omega^2 \left[e^{j\omega t} \sum_{i=1,3,\dots} (m\varepsilon)_i e^{j\varphi_i} + e^{-j\omega t} \sum_{i=2,4,\dots} (m\varepsilon)_i e^{-j\varphi_i} \right]. \quad (7)$$

Обозначим геометрическую сумму вектор-эксцентриситетов правовращающиеся и левовращающейся группы дебалансов как приведённые статические моменты

$$\sum_{i=1,3,\dots} (m\varepsilon)_i e^{j\varphi_i} = (m\varepsilon)' e^{j\varphi'} \quad (8) \\ \sum_{i=2,4,\dots} (m\varepsilon)_i e^{-j\varphi_i} = (m\varepsilon)'' e^{j\varphi''}$$

При получении поступательных колебаний необходимо равенство модулей $(m\varepsilon)' = (m\varepsilon)'' = n(m\varepsilon)$. Тогда выражение силы подобно (6)

$$F = 2n(m\varepsilon)\omega^2 e^{j\frac{\varphi' + \varphi''}{2}} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\varphi' - \varphi''}{2}\right). \quad (9)$$

В вибрационных источниках с двумя и более парами дебалансов величину приведённого статистического момента $(m\epsilon)$ и, следовательно, возмущающую силу, возможно регулировать разворотом вращающихся в одинаковые стороны дебалансов. Максимальная сила будет при синфазной ориентации дебалансов $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_5 = \dots$;

$$\varphi_2 = \varphi_4 = \dots$$

На рис.2а показано положение согласовывающихся дебалансов первого и третьего вибраторов из рис.1а. Подобной же схемой может быть изображён вибровозбудитель с переменным статическим моментом у которого дебаланс состоит из двух масс с изменяющимся углом 2ψ между ними. Очевидно, такие согласовывающиеся дебалансы можно представить как один с некоторым приведённым статическим моментом:

$$(m\epsilon) = [(m\epsilon)_1 e^{j(\varphi_1 - \delta)} + (m\epsilon)_3 e^{j(\varphi_3 - \delta)}] = (IO) = (m\epsilon) e^{j\theta}$$

При равенстве $(m\epsilon)_1 = (m\epsilon)_2 = \dots = (m\epsilon)$ и симметричном фазировании встречно вращающихся дебалансов плоскость \vec{F} ориентирована по середине $-(\varphi_1 - \delta) = \varphi_3 - \delta$ и полная сила вибраторов равна

$$F = 4(m\epsilon)\omega^2 \cos\psi e^{j(0 + \omega t)}$$

(II)

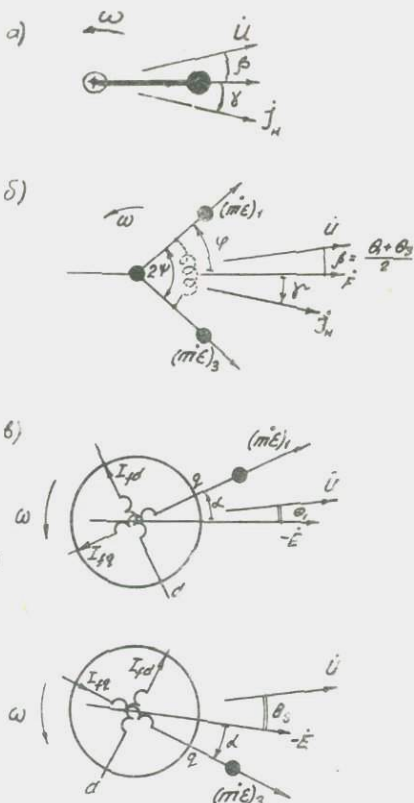


Рис.2. а) мгновенное положение векторов \vec{F} , \vec{j}_n , \vec{u} ; б) мгновенное положение вектор-эксцентриситетов дебалансов $(m\epsilon)_1$, $(m\epsilon)_3$; в) мгновенное положение дебалансных роторов. I_{fd} , I_{fg} — постоянные токи обмоток возбуждения, \vec{E} — э.д.с. вращения, I_f — полный ток возбуждения.

Таким образом, в паре вибраторов с переменным статическим моментом частотная характеристика возмущающей силы $F(\omega)$ корректируется настройкой кинематической связи, изменяющей угловое положение ψ дебалансных масс.

В вибрационном источнике с независимым приводом, по крайней мере двух пар вибраторов, возможно оперативно изменять силу путём регулирования фаз вращения дебалансных роторов с помощью синхронных двигателей, т.е. углом ψ можно управлять электрическим способом.

Благодаря симметричному расположению начальных фаз вращения исходные уравнения могут быть упрощены. В частности, уравнение сил для стационарного гармонического режима относительно переменной скорости смещения $\frac{dx}{dt} = \dot{y}_H$ записывается следующим образом

$$(j\omega M_{nл} + R_H + \frac{1}{j\omega c_H}) \dot{y}_H = 2\omega^2 \sum (m\epsilon)_i \cos\psi_i, \quad (I2)$$

где $F = 2\omega^2 \sum (m\epsilon)_i \cos\psi_i$ — суммарная сила,
 $Z_H(\omega) = j\omega M_{nл} + R_H + \frac{1}{j\omega c_H}$ — механическое сопротивление [2].

В зависимости от отношения индуктивной ($j\omega M_{nл}$) и емкостной ($-j\frac{1}{\omega c_H}$) составляющих механического сопротивления виброскорость \dot{y}_H может изменяться в фазе с силой $\delta^* = 0$, опережать $\delta^* > 0$ или отставать $\delta^* < 0$ от F (рис.2а6).

Виброскорость излучающей платформы

$$\dot{y}_H = |\dot{y}_H| \cdot e^{j\delta^*} = \frac{F}{Z_H} \quad (I3)$$

определяется механическим сопротивлением Z_H и в значительной мере может быть изменена регулированием $F(\omega)$ возмущающей силы. Например, в полосе резонансных частот ($\delta^* \approx 0$) для ограничения чрезмерных вибраций и разрушения грунта под платформой можно снижать возмущающую силу. Суммарный статический момент n — пар дебалансов — $2n(m\epsilon)\cos\psi$, обеспечивающий наперёдзаданную амплитуду скорости перемещения платформы \dot{y}_H , может быть определён по формуле

$$2n(m\epsilon)\cos\psi = \frac{|\dot{y}_H|}{\omega^2} \sqrt{R_H + (\omega M_{nл} - \frac{1}{\omega c_H})^2}. \quad (I4)$$

Колебания платформы создают нагрузочные моменты на валы дебалансных вибраторов. Величины этих моментов определяются по

известным силам i -го вибратора F_i и виброскорости \dot{J}_i платформы.

Комплексная мощность вибратора

$$\tilde{S}_i = \dot{F}_i \dot{J}_i^* = \operatorname{Re}(F_i \dot{J}_i^*) + j \mathcal{I}_m(F_i \dot{J}_i^*),$$

где $P = \operatorname{Re}(F_i \dot{J}_i^*) = F_i \dot{J}_i \cos \delta$ — активная мощность.

Известно, что постоянная составляющая вибрационного момента равна

$$N_{\theta i} = \int p_i dt.$$

Подставляя сюда предыдущее выражение, получим момент, действующий на вал дебалансного вибратора

$$N_{\theta i} = \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re}[\omega^2(m\varepsilon)e^{j\psi_i} \dot{J}_i^*] = \frac{1}{2}\omega(m\varepsilon) \dot{J}_i \cos(\psi_i + \delta). \quad (15)$$

Таким образом, момент будет больше на тот вибратор, где меньше рассогласование фаз между векторами \dot{J}_i и $(m\varepsilon)$. Момент механических потерь приближённо может быть определён выражением

$$N_T = N_0 + b\omega. \quad (16)$$

Если дебалансные вибровозбудители одинаковы, то подставив \dot{J}_i из (12) найдём момент нагрузки на каждый двигатель или дебаланс вибровозбудителя с переменным статическим моментом.

$$N_{hi} = n(m\varepsilon)^2 \omega^3 \frac{1}{Z_H} \cos \psi_i \cos(\psi_i + \delta) + N_0 + b\omega. \quad (17)$$

В области резонанса $\delta=0$ двигатели при фазовом рассогласовании нагружены поровну $N_{H1} = N_{H3}$ (рис.2в), на нижних частотах $\delta > 0$ перегружается двигатель первого вибратора, в полосе частот выше резонанса ($\delta < 0$) перегружается отстающий 3-й вибратор и здесь, чтобы сохранить устойчивость, необходима определённая жёсткость характеристики синхронизирующего момента $dN/d\varphi$ двигателя. Из условия допустимой N_{max} нагрузки на двигатель при синфазной $\psi=0$ работе максимальная величина статического момента дебалансов определяется как

$$(m\varepsilon)_{max} \leq \sqrt{(N_{max} - N_0 - b\omega) \frac{Z_H}{n\omega^3 \cos \delta}}. \quad (18)$$

Для иллюстрации возможностей электромашинных вибраторов рассмотрим следующий пример.

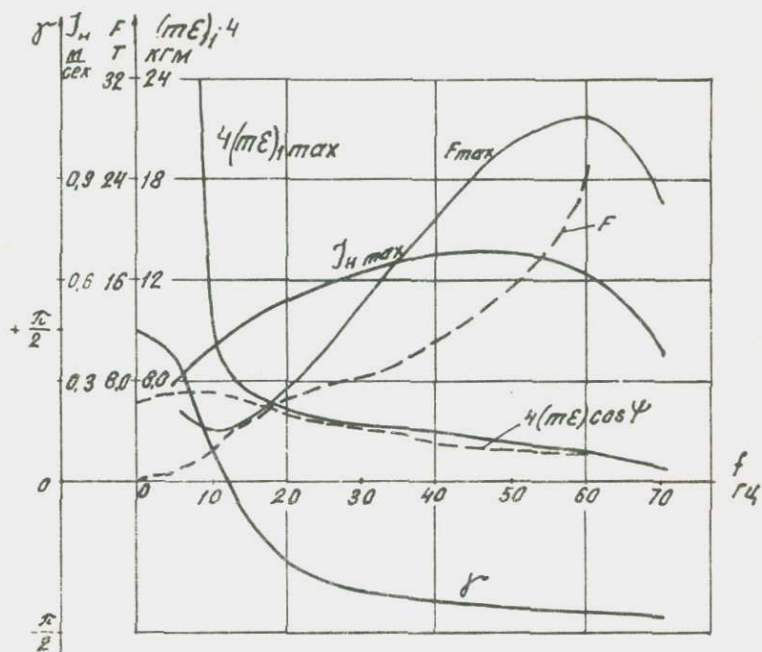


Рис.3. Пример частотных характеристик электромашинного сейсмического источника поперечных волн.

Пусть вибрационная установка состоит из 4-х вибродвигателей ($n=2$) с типовой мощностью по $P = 9$ кВт на частоте 50 Гц. Следовательно,

$$N_{max} = \frac{P_{max}}{\omega} = \frac{9 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 50} = 28.6 \text{ Н}_m.$$

Сила $F_{max} = 2n(mE)_{max} \cdot \omega^2$, которая достигается при допустимой нагрузке всех $n = 4$ -х двигателей может быть определена с помощью (18), если задано механическое сопротивление грунта $Z_n(\omega)$. Пусть параметры этого сопротивления равны $M_{пл} = 1200$ кг,

$$\frac{1}{C_n} = 6,83 \cdot 10^6 \text{ кг/сек}^2, \quad R_n = 90 \cdot 10^3 \text{ кг/сек.}$$

Фазовая характеристика $\delta(\omega)$ этого сопротивления показана на рис.3, резонанс её, где $j(\omega) = 0$, происходит на частоте 12 Гц. Подставляя исходные данные в формулу (18), получим функцию F_{max} показанную на рис.3. Под действием этой силы платформа будет колебаться с амплитудой скорости смещения $I_{n, max}$ показанной на

этом же рисунке. Для обеспечения описываемого режима работы виброустановки суммарный статический момент дебалансов должен меняться по закону, определяемому графиком $4(m\varepsilon)_{1max}$.

Как видно из рис.3, на частотах выше резонансной сила F_{max} растёт линейно, а виброскорость излучающей платформы \dot{y}_{nmax} почти не изменяется.

Мощность, излучаемая данной установкой [2] $P = \frac{1}{2}(\dot{y}_n)^2 R_n$, будет также весьма широкополосной функцией от частоты.

В целом в средней и высокочастотной областях синхронные двигатели при естественном регулировании обеспечивают достаточно большой резерв по возмущающей силе. Поэтому максимальная величина момента двигателей, мощности агрегата питания должны выбираться по величине допустимой силы на резонансной частоте.

Заданное изменение силы по скорости вращения ω

$$F = 2n(m\varepsilon)_1 \omega^2 \cos\psi$$

может быть реализовано несколькими способами:

1. Использованием вибровозбудителей с автоматически изменяющимся угловым положением между дебалансными массами;
2. Рассогласованием фаз вращения дебалансных вибровозбудителей с помощью управляемых синхронных двигателей;
3. Комбинированным способом.

Удовлетворительная характеристика $F(\omega)$ достигается с помощью вибровозбудителей с двухмассовой конструкцией подпружиненных дебалансов, рис. 2б, угловое положение которых автоматически устанавливается либо за счёт фазочастотных свойств вибросистемы, либо в функции ω .

Эффект самосинхронизации, проявляющийся до резонанса, стремится уменьшить рассогласование между дебалансными массами. При частотах выше ω_0 разность моментов $N_p = N_1 - N_3$ положительна и стремится увеличить угол $2\psi_0$ между дебалансами вибровозбудителя. Корректирующая пружина с угловой жёсткостью C_ψ и установочным углом $2\psi_0$ создаёт противодействующий момент $2C_\psi \cdot (\psi - \psi_0)$. Моментом трения при развороте дебалансов пренебрегаем. Приравняв раздвигающий и противодействующий моменты, получим уравнение характеристики вибровозбудителя.

$$N_p = -n\left(\frac{1}{2}m\varepsilon\right)^2 \frac{\omega^3}{z_n} \sin\delta \sin 2\psi = 2C_\psi(\psi - \psi_0), \quad (19)$$

из которого определяются частотные зависимости $\psi(\omega)$ и расхождения дебалансов. По найденному углу ψ находим приведённый статический момент $4(m\varepsilon)\cos\psi$ и действительную характеристику силы $F(\omega)$, которые изображены пунктиром на рис.4.

Ещё одно устройство, формирующее угловое расхождение дебалансов в зависимости от ω , может быть осуществлено путём эксцентричной посадки дебалансных масс на вал [4]. Величину момента, стремящегося развернуть дебалансы

$$N_{p\sigma} \cong (m\varepsilon)\omega^2 b \sin(\psi_\sigma - \psi), \quad (20)$$

где b — эксцентриситет,

ψ_σ — угол установки эксцентриситета;

возможно сделать существенно больше, чем N_p . Дополняя (19) составляющей момента (20), определяем характеристики $\psi(\omega)$ и $F(\omega)$ вибровозбудителя.

Настройкой механического дебалансного вибровозбудителя может быть задана достаточно стабильная силовая характеристика, регулирование которой в процессе сеанса невозможно. Управляемые синхронные двигатели при автономном вращении дебалансного вибровозбудителя позволяют в пределах допустимой нагрузки привода производить оперативное управление $F(\omega)$ в широкой полосе частот.

Поясним теперь вкратце принцип управления фазами вращения, реализуемый синхронными двигателями.

Синхронное вращение дебалансных роторов осуществляется в двигателях через упругую магнитную связь между электромагнитным полем статора и намагниченным ротором. Скорость вращения поля статора задаётся частотой $\omega = 2\pi f/p$, а фаза зависит от пространственного положения обмоток статора и фазы β питающего напряжения U (p — число пар полюсов двигателя). При одинаковой пространственной установке обмоток статоров и однотипной фиксации дебалансов относительно обмоток возбуждения роторов обеспечивается синхронное синфазное $\psi=0$ вращение с наибольшим приведённым статическим моментом дебалансов.

Управление фазой дебалансных роторов с целью изменения величины результирующей силы F или её ориентации осуществимо регулированием фазы U или регулированием тока в цепях возбуждения двигателей. Изменяя соотношения токов I_{fd} , I_{fq} в обмотках роторов, смещаем положение магнитных осей относительно дебалансов.

На рис. 2в условно представлено взаимное расположение электрических и механических вращающихся векторов двух двигателей. Дебалансы ориентированы вдоль оси q ротора, ток возбуждения $\dot{I}_f = I_{fd} + jI_{fq}$ индуцирует в статоре ЭДС вращения $E = j\omega L_e \dot{I}_f$, которая будет смещена от q на угол регулирования $\alpha = \arctg I_{fq}/I_{fd}$. С возрастанием нагрузочного момента вектор \dot{E} , неподвижный относительно ротора, отстаёт от напряжения статора \dot{U} на угол нагрузки θ и зависимость электромагнитного момента, действующего на ротор имеет следующий вид

$$N_H = \frac{U E}{\omega x_d} \sin \theta \quad (21)$$

причём, угловая жёсткость электромагнитной связи $\frac{dN}{d\theta}$ нелинейна и может быть изменена величиной напряжения статора и возбуждения.

Пренебрегая динамическими составляющими, запишем уравнение моментов стационарного режима

$$\frac{1}{2} (m\epsilon)_c \omega I_H \cos(\psi_c - \delta) + N_o + b\omega = \frac{U E}{\omega x_d} \sin \theta. \quad (22)$$

С возрастанием моментов нагрузки увеличиваются углы θ_1 и θ_2 двигателей. Как следует из рис. 3, сдвиг фаз между напряжением \dot{U} и вектором \dot{F} результирующей силы равен

$$\beta = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2).$$

Если на резонансе нагрузки двигателей одинаковы и рассогласование дебалансов равно углу регулирования $\psi = \alpha$, то при $\delta \neq 0$ $\psi = \alpha + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$. Поэтому частотные зависимости нагрузки двигателей в функции угла регулирования могут быть найдены из совместного решения системы уравнений

$$n \left[m\epsilon(\omega) \right]^2 \frac{\omega^3}{Z_H} \cos \psi \cos(\psi + \delta) + N_o + b\omega = N_m \sin \theta_1, \quad (23)$$

$$n \left[m\epsilon(\omega) \right]^2 \frac{\omega^3}{Z_H} \cos \psi \cos(-\psi + \delta) + N_o + b\omega = N_m \sin \theta_2,$$

где $N_m = \frac{U E}{\omega x_d}$ — максимальный электромагнитный момент двигателя

x_d — синхронное индуктивное сопротивление двигателя.

Анализ решения показывает, что фазовое регулирование при малых значениях $\cos \delta$ сопровождается неравномерной нагрузкой синхронных двигателей. Однако, при достаточном запасе двигателей по моменту можно регулировать силу вниз от F_{max} в пределах всего частотного диапазона.

Из решения системы уравнений (23) при известном $Z_n(\omega)$ можно определить также функцию силы

$\psi = \frac{F}{m \varepsilon \omega^2}$ в зависимости от соотношения токов в обмотках ротора $\alpha = \arctg \frac{I_{f\phi}}{I_{fd}}$. На рис.4 представлены графики регулирования силы для нескольких параметров δ , рассчитанные на основе приведённого выше примера. Как видно из рис.5, в полосе резонанса ($\delta = 0$) регулирование происходит пропорционально $\cos \alpha$, при $\delta \neq 0$ закон регулирования несколько изменяется.

Таким образом, на основе анализа дифференциальных уравнений электромашинного виброисточника получены расчётные формулы, позволяющие произвести выбор синхронных двигателей в соответствии с требуемыми частотными характеристиками $F(\omega)$ и $J(\omega)$ сейсмического источника. Выведенные соотношения могут быть рекомендованы при проектировании механических вибровозбудителей с необходимой силовой характеристикой.

Показаны достаточные резервы и широкие возможности использования управляемых синхронных двигателей в виброприводе.

Л и т е р а т у р а .

1. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М., "Наука", 1971, 894 с.
2. Чичинин И.С. О методике испытаний неврывных источников сейсмических сигналов. - В кн.: Вибрационная сейсморазведка на продольных и поперечных волнах. Новосибирск, 1975, (Труды СНИИТГМС, вып.219), с.118-133.
3. Сипайлов Г.А., Дмитриев В.Н., Кулаков В.Ф. Анализ работы синхронных двигателей на вибрационную нагрузку. - "Известия ТПИ" т.200, Т., 1974, с.24-32.

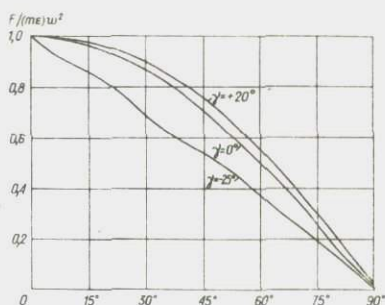


Рис.4. Пример регулировочных характеристик.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Чичинин И.С. Использование спектральных представлений для решения и исследования динамических задач о колебании упругого полупространства.....с.3-40.
2. Глушкова Н.В., Калижчук В.В., Селезнёв М.Г., Смирнова А.В., Чичинин И.С., Шамовская Л.Я. Методика и результаты расчётов волнового поля вблизи вибративного источника, распределённого на поверхности однородного полупространства.....с.41-52.
3. Сагайдачная О.М., Чичинин И.С. Волновое поле вдали от вибративного источника, распределённого на поверхности однородного полупространства.....с.53-64.
4. Васильев В.И., Евчатов Г.П., Окунева В.Ф., Сидоров В.Н., Шамовская Л.Я., Чичинин И.С. Экспериментальные исследования процесса возбуждения сейсмических волн вибративным источником.....с.65-86.
5. Некрасов С.А., Седин А.Н., Шагинян А.С. Результаты опробования невзрывных источников.....с.87-94.
6. Бутырин Н.Г., Рыбаков В.Н. К вопросу о применении электрогидравлических вибраторов для сейсмических исследований.с.95-104.
7. Бахарев Н.П., Ивашин В.В., Милорадов И.А. Особенности расчёта импульсных электромеханических преобразователей для сейсморазведки.....с.105-114.
8. Игнатъев А.В., Кулаков В.Ф., Сипайлов Г.А. Электромашинные вибраторы для сейсмической разведки.....с.115-128.

Ответственный за выпуск Русскова И.С.

Технический редактор Л. А. Панина

Подписано к печати 20.XII.1976 г. МН 03073

Бумага 60×84/16. Печ.л. 8,0. Уч.-изд. л. 7,5.

Тираж 500, Заказ 170. Цена 52 коп.

Институт геологии и геофизики СО АН СССР

Новосибирск, 90. Ротапонт.

Цена 52 коп.

2048