

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОФИЗИКИ

Выпуск 6



АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ГЕОФИЗИКИ

Выпуск 6, часть 1

Сборник научных трудов

Под редакцией
М.М.Лаврентьева и А.С.Алексеева



Новосибирск 1975



1534

Редакционная коллегия

М.М.Лаврентьев (председатель), А.С.Алексеев (зам.председателя), О.К.Омельченко, В.Г.Романов, В.А.Цецохо.

А Н Н О Т А Ц И Я

Сборник содержит статьи, в которых разрабатываются математические вопросы интерпретации геофизических данных.

В первый раздел сборника вошли статьи преимущественно теоретического характера. Здесь рассматриваются вопросы единственности обратных задач для дифференциальных уравнений, задач интегральной геометрии, вопросы устойчивости решения интегральных уравнений первого рода, геометрические вопросы задачи определения оптической поверхности по ее фотоизображениям и ряд других вопросов.

Во втором разделе сборника излагается ряд конкретных вычислительных алгоритмов, опробованных на вычислительных машинах и предназначенных для решения прикладных задач. Приводятся методы расчета собственных функций и частот упругого радиально-неоднородного шара, численного решения задачи Ламба в трансверсально-изотропном неоднородном упругом пространстве, обработки сейсмологических данных с одновременным определением координат источника и параметров скоростного строения, обработки данных аэромагнитосъемки.

В третьем разделе сборника помещены две статьи, посвященные разработке алгоритмов гладкой аппроксимации таблично-заданных многомерных функций.

Сборник рассчитан на специалистов по прикладной математике и геофизике, а также на студентов старших курсов этих специальностей.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	7
Раздел I	
С.Ж.Азаматов. О корректности задачи Коши для линейного уравнения первого порядка со сдвинутым аргументом.....	9
Ю.Е.Аниконов. Формулы в многомерных кинематических задачах сейсмоки.....	17
С.П.Белинский. Об одной теореме единственности обратной задачи для волнового уравнения....	28
А.Л.Бухгейм. Нормальная разрешимость некоторых специальных операторных уравнений первого рода (достаточные условия)	42
В.Г.Васильев. О функционалах на решении интегрального уравнения I-го рода.....	55
А.С.Запreeв. Оценки устойчивости решения уравнения свертки в некоторых классах функций.....	62
В.Р.Кирейтов. О некоторых свойствах ($n - 1$)-мерных поверхностей в n -мерном пространстве....	73
М.В.Клибанов. Восстановление функции, заданной интегралами по одному семейству эллипсоидов вращения, и обратная задача для параболического уравнения.....	97
М.М.Лаврентьев, К.Г.Резницкая. О единственности решения одной обратной задачи теории теплопроводности.....	117
А.Г.Меграбов. Обратные задачи для уравнения смешанного типа.....	122

Х.Ниматов. Об одной задаче интегральной геометрии.	I45
К.Г.Резницкая. Теоремы единственности некоторых обратных задач для уравнения диффузии [3]	I54
А.Х.Хайдаров. О задаче выметания масс для плоских областей.....	I60
С.П.Шишатский. Об убывании нуль-решений локальной задачи Коши для параболического неравенства.....	I66

Раздел II

Ю.А.Адамчик. Метод расчета собственных частот и амплитуд крутильных колебаний в высокочастотной области.....	I75
Ю.Е.Аниконов, Н.Б.Пивоварова. Об одновременном определении параметров линейной скорости, координат очагов и времен начала землетрясений.....	204
О.К.Омельченко, А.Г.Фатьянов. Численное решение задачи Лэмба для трансверсально-изотропного неоднородного упругого полупространства. Источник типа центра вращения.....	213
В.В.Филатов. О некоторых вопросах интерпретации аэромагнитных данных.....	234
Ю.С.Чернышев. Определение элементов залегания и физических характеристик намагниченного вертикального пласта.....	247

Раздел III

Н.Б.Пивоварова, Т.П.Пухначева. Сглаживание экспериментальных данных локальными сплайн-функциями.....	281
М.Е.Ромаянов. О численном решении задачи интегральной геометрии.....	289
В.А.Цецохо, А.С.Белоносов, А.В.Белоносова. Об одном методе γ - гладкого приближения функций многих переменных.....	298
Аннотации статей, помещенных в сборнике.....	310

Предисловие

Как и в предыдущих выпусках, в сборник включены статьи теоретического и прикладного характера, связанные с математическими вопросами интерпретации геофизических данных. Почти все работы выполнены в Отделении геофизики Вычислительного центра СО АН СССР.

В первом разделе сборника содержатся статьи преимущественно теоретического характера. Рассмотрен ряд обратных задач для уравнений гиперболического, параболического и смешанного типов. Найдены условия, обеспечивающие единственность решения этих задач. Получено несколько формул, связывающих время и скорость передачи сигналов в многомерной неоднородной среде. Подобные формулы полезны для получения частных решений обратной кинематической задачи сейсмологии.

Успешное применение при исследовании обратных задач для дифференциальных уравнений нашли методы, разработанные для задач интегральной геометрии. Дальнейшему развитию теории этих задач посвящено несколько работ сборника. В них получены достаточные условия нормальной разрешимости задач интегральной геометрии и исследовано два новых класса задач.

Ряд обратных задач геофизики можно свести к исследованию уравнений в частных производных со сдвинутым аргументом. Математические вопросы корректности некоторых уравнений первого порядка со сдвинутым аргументом изучаются в одной из статей сборника.

Вопросы интерпретации геофизических данных часто связаны с решением интегрального уравнения первого рода. В одной из работ сборника рассмотрено уравнение типа свертки и для него получены оценки устойчивости в специальных классах. В другой работе найдены оценки отдельных функционалов от решения интегрального уравнения Фредгольма I рода.

Во втором разделе сборника предлагаются конкретные алгоритмы, разработанные для решения прикладных задач геофизики. Все алгоритмы опробованы на вычислительных машинах. Здесь излагаются метод расчета собственных частот и собственных функций крутильных колебаний для сферически-симметричной неоднородной упругой среды, метод численного решения задачи Лэмба

В трансверсально-изотропном неоднородном упругом полупространстве. Приводится методика обработки сейсмологических данных, позволяющая одновременно находить координаты очагов землетрясений и некоторые параметры скоростного строения данного района. В двух работах излагаются вопросы, связанные с обработкой данных аэромагнитной съемки и выделением определенных параметров намагниченных тел. Работы иллюстрированы примерами конкретных расчетов.

В третий раздел помещены статьи, относящиеся к теоретическим и алгоритмическим проблемам вычислительной математики, находящим широкое использование в задачах интерпретации геофизических наблюдений. В двух статьях этого раздела исследуются вопросы гладкой аппроксимации таблично-заданных многомерных функций. В третьей статье излагается эффективный численный метод решения ряда задач интегральной геометрии.

А.С.Алексеев

В.Г.Романов

РАЗДЕЛ I

С. Ж. Азаматов

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СДВИНУТЫМ АРГУМЕНТОМ

Исследование обратных двумерных кинематических задач сейсмологии приводит к уравнению следующего вида [I] :

$$\tau_y(\zeta, \eta, y) + \sqrt{\tau_\zeta^2(\zeta, \zeta, y) - \tau_\zeta^2(\zeta, \eta, y)} + \sqrt{\tau_\eta^2(\eta, \eta, y) - \tau_\eta^2(\zeta, \eta, y)} = 0, \quad (1)$$

где $\tau(\zeta, \eta, y)$ - время пробега волны в неоднородной среде между точками ζ и η на одной горизонтали $y = \text{const}$. Уравнение (I) относится к типу нелинейных уравнений первого порядка со сдвинутым аргументом.

Идея введения функции $\tau(\zeta, \eta, y)$ для описания кинематики волн в двумерной среде принадлежит М.М. Лаврентьеву.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (I) при условии

$$\tau(\zeta, \eta, 0) = \phi(\zeta, \eta). \quad (2)$$

По физическому смыслу задачи $\tau(\zeta, \eta, y)|_{\zeta=\eta} = 0$. (3)

Пусть среда слабо отличается от горизонтально однородной, в которой поле времен τ_0 известно и инвариантно к сдвигу

$$\tau_0(\zeta, \eta, y) = \tau_0(\zeta - \eta, y). \quad (4)$$

Тогда естественно рассматривать линейризованную обратную кинематическую задачу.

Мы будем линейризовать уравнение (I) и использовать теорию задачи Коши для соответствующего линейного уравнения.

Проведем линейризацию уравнения (I) в окрестности некоторого решения τ_0 . Представим для этого $\tau = \tau_0 + u$, где функция u — мала, и τ_0, u — достаточно гладкие в окрестности диагонали $\zeta = \eta$. При этом получим следующее уравнение:

$$u_y = \alpha u_\zeta - \alpha_1 u_\zeta^* + \beta u_\eta - \beta_1 u_\eta^*, \quad (5)$$

где

$$u_\zeta^* = - \lim_{\eta \rightarrow \zeta} u_\zeta(\zeta, \eta, y) = - u_\zeta(\zeta, \zeta, y), \quad (6)$$

$$u_\eta^* = \lim_{\zeta \rightarrow \eta} u_\eta(\zeta, \eta, y) = u_\eta(\eta, \eta, y),$$

$$\alpha = \frac{\tau_{0,\zeta}(\zeta, \eta, y)}{\sqrt{\tau_{0,\zeta}^2(\zeta, \zeta, y) - \tau_{0,\zeta}^2(\zeta, \eta, y)}}; \quad \alpha_1 = \frac{\tau_{0,\zeta}(\zeta, \zeta, y)}{\sqrt{\tau_{0,\zeta}^2(\zeta, \zeta, y) - \tau_{0,\zeta}^2(\zeta, \eta, y)}} \quad (7)$$

$$\beta = \frac{\tau_{0,\eta}(\zeta, \eta, y)}{\sqrt{\tau_{0,\eta}^2(\eta, \eta, y) - \tau_{0,\eta}^2(\zeta, \eta, y)}}; \quad \beta_1 = \frac{\tau_{0,\eta}(\eta, \eta, y)}{\sqrt{\tau_{0,\eta}^2(\eta, \eta, y) - \tau_{0,\eta}^2(\zeta, \eta, y)}}.$$

Полученная формально линейризация оправдывается даже при $\zeta \rightarrow \eta$ ($\eta \rightarrow \zeta$) в силу гладкости τ_0 и u на диагонали. Условие (2) переходит в

$$u(\zeta, \eta, 0) = \phi(\zeta, \eta) - \tau_0(\zeta, \eta, 0) \equiv \phi(\zeta, \eta). \quad (8)$$

Сделаем замену переменных в (5)

$$\frac{\zeta - \eta}{2} = r; \quad \frac{\zeta + \eta}{2} = x; \quad \eta = x - r, \quad \zeta = x + r. \quad (9)$$

Вычислим производные $u_\zeta, u_\eta, u_\zeta^*, u_\eta^*$, например:

$$u_\eta^* = u_\zeta|_{\zeta=\eta} = - \frac{1}{2} [u_r - u_x] \Big|_{\substack{r=0 \\ x=\eta}} = - \frac{1}{2} [u_r(0, x-r, y) - u_x(0, x-r, y)].$$

Учитывая (4) из (7) имеем:

$$\alpha = -\beta \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \beta_1. \quad (10)$$

Обозначим

$$\tau_{0,r}(r,y) = a(r,y), \quad (11)$$

$$\text{и} \quad \sqrt{(\tau_{0,r}|_{r=0})^2 - (\tau_{0,r})^2} = c(r,y).$$

Еще заметим, что

$$u_x(0, x+r, y) = u_x(r, x, y) \Big|_{\substack{r=0 \\ x=x+r}} = u_x(0, x, y) \Big|_{x=x+r} \equiv 0. \quad (12)$$

Так как $u(0, x, y) \equiv 0$, которое следует из (3).

Таким образом, уравнение (5) при учете (10-12) переписывается так:

$$c(r,y)u_y - a(r,y)u_r = -\frac{1}{2} a(0,y) [u_r(0, x+r, y) + u_r(0, x-r, y)] \quad (13)$$

и условие $u(r, x, 0) = \varphi(r, x)$. (14)

Применим преобразование Фурье к (13) по переменной x , тогда имеем:

$$c(r,y)w_y - a(r,y)w_r = -a(0,y) \cdot w_r \Big|_{r=0} \cdot \cos kr, \quad (15)$$

и для него условие Коши

$$w(r, k, 0) = \Phi(r, k), \quad (16)$$

где $w(r, k, y)$, $\Phi(r, k)$ - преобразование Фурье функции $u(r, x, y)$, $\varphi(r, x)$.

Следует помнить, что у нас есть (см. (3)) дополнительное условие

$$w(0, k, y) = 0. \quad (17)$$

Тем самым задача (14, 15) свелась к семейству двумерных задач (15-17). Для доказательства единственности решения уравнения (13) при условии (16, 17) применим метод характеристик [3] (опустим пока фиксированный параметр k).

Сначала рассмотрим уравнение

$$c(r,y)w_y - a(r,y)w_r = -a(0,y)f(y)\cos kr \quad (18)$$

и условие

$$w(r,0) = w_r(r), \quad (19)$$

где $f(y,k) = w_r|_{r=0}$. При заданной $f(y)$ задача (18, 19) имеет единственное решение, так как она равносильна задаче Коши:

$$y_s = c(r,y); \quad r_s = -a(r,y); \quad w_s = -a(0,y)f(y)\cos kr \quad (20)$$

при $s = 0$: $r = r_0$, $y = y_0$, $w = w_r(r_0) = w_0$.

Первые два уравнения совпадают с уравнениями характеристики в одномерно-неоднородной среде, относительно которой велась линейаризация [1,2]. Обозначим показатель преломления в ней через $n_0(y)$ и примем эту функцию монотонно убывающей. Каждая характеристика однозначно определяется параметром $p_0 = n_0(y_0)$, где $y_0 = y(r)|_{r=0}$. Здесь $y(r)$ - уравнение характеристики - интеграл первых двух уравнений (20).

Известно [1], что вдоль характеристик коэффициент

$$a(r,y) = \tau_{0,r} = p_0 = \text{const} \quad \text{и} \quad n_0(y) = \tau_{0,r} \Big|_{r=0}.$$

Теперь из (20), учитывая (II), получим

$$w_y = - \frac{p_0}{\sqrt{n_0^2(y) - p_0^2}} f(y)\cos kr(y), \quad (21)$$

$$r(y) = r_0 - p_0 \int_0^y \frac{dr_1}{\sqrt{n_0^2 - p_0^2}}. \quad (22)$$

Таким образом, находим w вдоль характеристики

$$w(r_0, y) = w_r(r_0) - p_0 \int_0^y \frac{f(r_1)}{\sqrt{n_0^2(r_1) - p_0^2}} \cos kr(r_1) dr_1. \quad (23)$$

Формула (23) дает решение задачи (I8, I9), но чтобы иметь его как уравнение поверхности $w(r, y)$ над плоскостью (r, y) надо по заданной точке (r, y) найти характеристику, проходящей через эту точку, то есть найти параметр r_0 , а значит, и параметры p_0 и y_0 характеристики. В силу однозначного соответствия между точкой плоскости (r, y) и характеристикой с параметром r_0 можно считать, что при фиксированном y, r_0 есть функция от r (корень уравнения (22)). Тогда формула (23) и есть искомое решение (I8, I9). В силу (I8), (I9) решение (23) удовлетворяет (I5, I6). Однако требуется еще выполнение (I7), что приводит к уравнению относительно $f(y)$, которую мы пока считали произвольной

$$w_r(r_0) = p_0 \int_0^{y_0} \frac{f(y)}{\sqrt{n_0^2(y) - p_0^2}} \cos kr(y) dy. \quad (24)$$

Поскольку между r_0, y_0, p_0 имеется однозначное соответствие, то уравнение (24) есть интегральное уравнение Вольterra I-рода с интегрируемой особенностью ядра:

$$n_0(y_0) = p_0. \quad (25)$$

Мы преобразуем (24) в более удобную форму, меняя переменную интегрирования $n = n_0(y)$. $dy = y'(n)dn$, где $y'(n)$ вполне определена. ($y(n_0)$ - обратная функция к $n_0(y)$, которая однозначна в силу условия монотонного убывания $n_0(y)$). Тогда из (24) будем иметь:

$$w_r(p_0) = -p_0 \int_{p_0}^P \frac{f(n)y'(n)}{\sqrt{n^2 - p_0^2}} \cos kr(n, p_0) dn, \quad (26)$$

где

$$r(P, p_0) = -p_0 \int_{p_0}^P \frac{y'(n) dn}{\sqrt{n^2 - p_0^2}}, \quad (27)$$

а $P = n(0)$.

Если (26) разрешимо, то зная $f(n) \equiv f(n_0)$ и $n_0(y)$, мы легко найдем $f(y)$ (при каждом k). Зависимость же $w_\Gamma(p_0)$ в левой части равенства (26) определяется через известную функцию $w_\Gamma(r_0)$ и связь $p_0 = p_0(r_0)$.

Доказательство разрешимости уравнения (26) проводим путем сведения его к уравнению П-рода.

Используя преобразования Абея [2], имеем:

$$z(p) - \frac{2}{\pi} \int_p^P z(n) T_1(n, p) dn = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dp} \int_p^P \frac{w_\Gamma(p_0) dp_0}{\sqrt{p^2 - p_0^2}}. \quad (28)$$

Здесь

$$z(n) = f(n) y'(n), \quad \theta = \arccos \sqrt{\frac{p_0^2 - p^2}{n^2 - p^2}}, \quad (29)$$

$$T_1(n, p) = -k \int_0^{\pi/2} \sin kr (n, \sqrt{n^2 \cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta}) r_p d\theta.$$

Полученное уравнение (28) П-рода типа Вольтерра и его решение $z(p)$ существует единственно и может быть найдено, например, методом последовательных приближений.

Напомним, что (28) является семейством интегральных уравнений, зависящим от параметра k , который входит в ядро и правую часть уравнения.

Формула (23) показывает, что существование решения рассматриваемой задачи (I3, I4) связано с существованием преобразования Фурье (по k) от решения семейства интегральных уравнений (28). Предполагая существование решения, можно получить оценку устойчивости задачи.

Именно, справедлива теорема. Пусть

$$g(p, x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z(p, k) e^{ikx} dk \quad (30)$$

существует и m -раз непрерывно-дифференцируемо по x . Тогда имеет место следующая оценка:

$$\|g\| \leq A \left(\ln \frac{D}{\|\varphi\|} \right)^{-\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)}, \quad (31)$$

где A, D — постоянные, а нормы уточняются ниже.

Доказательство. Перепишем уравнение (28), подчеркивая зависимость от k

$$z(p, k) - k \int_P^p z(t, k) T_2(t, p, k) dt = \Psi(p, k),$$

где $T_2(t, p, k) = \frac{2}{\pi k} T_1(t, p, k)$ квадратично-суммируема в области $0 < p_0 \leq p \leq t \leq P$ равномерно по k и пусть $\|T_2\| \leq T(\text{const})$. Норма правой части, очевидно, допускает оценку в $L_2(p_0, P)$

$$\|\Psi\| \leq c \|\Phi\|,$$

причем c — не зависит от k . Здесь Φ — данные Коши (14) нашей задачи. Известно [4], что резольвента ряда Неймана в случае L_2 — ядра мажорируется рядом $\sum \frac{(kT)^n}{\sqrt{n!}}$.

Используя оценки Стирлинга для $n!$ можно получить, что решение $z(p, k) \in L_2(p_0, P)$ и

$$\|z(p, k)\| \leq \|\Psi\| e^{k^2 T^2} \leq c \|\Phi\| e^{k^2 T^2}. \quad (32)$$

В силу допущения теоремы и известных свойств преобразования Фурье имеем:

$$\|z(p, k)\| \leq \frac{B}{k^m}. \quad (33)$$

Вычислим

$$\|g\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|z(p, k)\|^2 dk = \int_{|k| \leq \lambda} + \int_{|k| > \lambda},$$

где λ — некоторое число.

Первый интеграл оценивается по (32)

$$\int_{|k| \leq \lambda} \|z(p, k)\|^2 dk \leq 2c^2 \|\Phi\|^2 \int_0^\lambda e^{2k^2 T^2} dk,$$

а второй — по (33)

$$\int_{|k| > \lambda} \|z(p, k)\|^2 dk \leq 2B^2 \int_\lambda^\infty \frac{dk}{k^{2m}}.$$

Итак

$$\|\xi\|^2 \leq 2 \left\{ c^2 \|\varphi\|^2 \int_0^\lambda e^{2k^2 T^2} dk + B^2 \int \frac{dk}{k^{2m}} \right\}. \quad (34)$$

Число λ выберем из условия минимума правой части неравенства, то есть λ должно быть корнем уравнения

$$c \|\varphi\| e^{\lambda^2 T^2} = \frac{B}{\lambda^m}.$$

При малых $\|\varphi\|$ имеем

$$\lambda \approx \frac{1}{T} \sqrt{\ln \frac{B}{c \|\varphi\|}}$$

и приравнявая по порядку оба интеграла в (34), получим

$$\|\xi\| \leq \frac{2BT^{m-1/2}}{\sqrt{2m-1}} \left(\ln \frac{B}{c \|\varphi\|} \right)^{-\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)},$$

что и доказывает оценку (31).

Автор благодарит М.М.Лаврентьева за постановку задачи и полезное обсуждение.

Л и т е р а т у р а

1. АЛЕКСЕЕВ А.С., БЕЛОНОСОВА А.В. Об одной постановке обратной кинематической задачи сейсмологии для двумерной непрерывно-неоднородной среды. -Сб. Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных, М., "Наука", 1967.
2. РОМАНОВ В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений, Новосибирск, Изд.НГУ, 1973.
3. СМИРНОВ В.И. Курс высшей математики, т. IV, М., Гостехиздат, 1956.
4. ТРИКОМИ Ф. Интегральные уравнения. ИЛ, М., 1960.

1534

Ю.Е. Аниконов

ФОРМУЛЫ В МНОГОМЕРНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ
СЕЙСМИКИ

Пусть E^{n+1} $-(n+1)$ -мерное евклидово пространство переменных $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y)$, $n \geq 1$, $x \in E^n$, $-\infty < y < \infty$, и пусть $\gamma(p, q)$ геодезическая метрики

$$ds^2 = \lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2), \quad dx^2 = \sum_{i=1}^n dx_i^2, \quad (1)$$

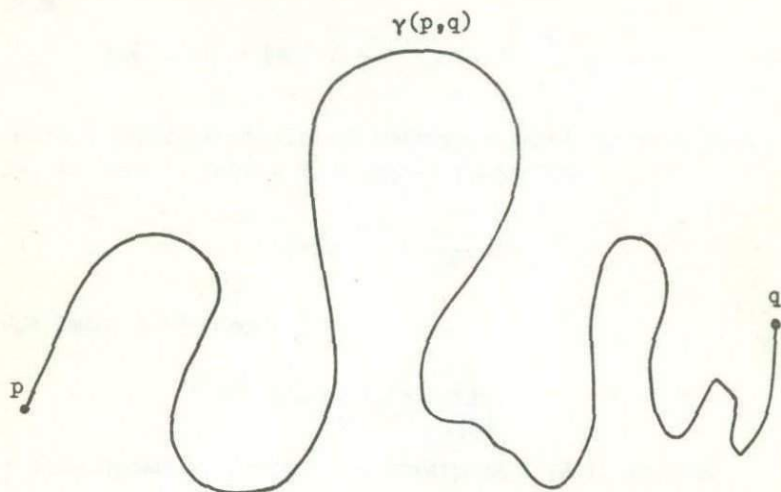
соединяющая точки p и q пространства E^{n+1} , (см. рис. I).

Рассмотрим функцию

$$w(p, q) = \int_{\gamma(p, q)} \lambda(x, y) \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

определенную для тех точек p и q для которых существует единственная геодезическая $\gamma(p, q)$.





$$Lw = \int_{\gamma(p, q)} \tilde{\lambda} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Рис. I.

При исследовании многомерных обратных кинематических задач сейсмоки весьма существенную роль играют интегро-дифференциальные формулы вида

$$Lw = \int_{\gamma(p, q)} \tilde{L}\lambda \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad (2)$$

где L и \tilde{L} - дифференциальные операторы. Например,

$$\frac{\partial w}{\partial q_i} + \frac{\partial w}{\partial p_i} = \int_{\gamma(p, q)} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Или более общая формула

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\partial w}{\partial q_i} + \frac{\partial w}{\partial p_i} \right) + \alpha_{n+1} \left(\frac{\partial w}{\partial q_{n+1}} + \frac{\partial w}{\partial p_{n+1}} \right) + \beta w =$$

$$= \int_{\gamma(p,q)} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \alpha_{n+1} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \beta \lambda \right] \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Здесь α_i и β постоянные. Основной целью данной статьи является способ получения общих формул типа (2) и некоторое их использование в обратных кинематических задачах сейсмоки.

В дальнейшем для сокращения записи вместо $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ будем писать просто $\frac{\partial u}{\partial x}$, а вместо суммы

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot x_i'$$

Пусть $u_k(x, y, x')$, $v_k(x, y, x')$, $x \in E^n$, $x' \in E^n$, $-\infty < y < \infty$ — однородные полиномы относительно переменной x' степени $2k+1$ и $2k$ соответственно, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_k}{\partial x} x' + \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_{k+1}}{\partial x'} \lambda_{x'} = 0, \\ \frac{\partial u_k}{\partial x} x' - \frac{\partial v_k}{\partial y} |x'|^2 + \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x'} \lambda_{x'} + v_{k+1} \lambda_y + \frac{\partial v_{k+1}}{\partial y} \lambda^2 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda_x = \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad \lambda_y = \frac{\partial \lambda}{\partial y}.$$

При $n=1$, если положить $u_k = \alpha_k(x, y)x'^{2k+1}$, $v_k = \beta_k(x, y)x'^{2k}$, система (3) превращается в такую

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta_k}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} + 2(k+1)\beta_{k+1}\lambda x = 0, \\ \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} - \frac{\partial \beta_k}{\partial y} + (2k+3)\alpha_{k+1}\lambda x + \beta_{k+1}\lambda y + \frac{\partial \beta_{k+1}}{\partial y} \lambda^2 = 0. \end{cases}$$

В частности отсюда при $\alpha_k=0, \beta_k=0, k \geq 1$ получается для функций $\alpha_0(x,y), \beta_0(x,y)$ система уравнений Коши-Римана.

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} - \frac{\partial \beta_0}{\partial y} = 0.$$

Итак, пусть $u_k(x,y,x'), v_k(x,y,x')$ - решение системы (3). Положим

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k, \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k, \quad R = u + y'v.$$

Обозначим через $(x(t), y(t))$ такую параметризацию геодезической γ , что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda \lambda_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda \lambda_y, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \lambda^2. \quad (4)$$

Как показано в работах [1],[2] такие уравнения геодезических появляются при специальном выборе параметра t в виде

$$t = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\lambda(x,y)}.$$

В дальнейшем понимаем именно такую параметризацию. Введем функцию $\tilde{R}(t) = R(x(t), y(t), \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$, где $(x(t), y(t))$ - решение системы уравнений (4). Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\frac{d\tilde{R}}{dt} = \lambda \left(\frac{\partial u_0}{\partial x'} \lambda_x + v_0 \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \lambda \right) \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t). \end{array} \right. \quad (5)$$

По определению u_k и v_k, u_0 — линейная функция от x' , а v_0 — не зависит от x' . Пусть $u_0 = \alpha(x, y)x'$, $v_0 = \beta(x, y)$. Имеем

$$\frac{d\tilde{R}}{dt} = \lambda [\alpha \lambda_x + \beta \lambda_y + \beta_y \lambda] \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t). \end{array} \right.$$

Так что равенство (5) можно переписать

$$\frac{d\tilde{R}}{dt} = \lambda \tilde{L} \lambda \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t), \end{array} \right. \quad (6)$$

где \tilde{L} — дифференциальный оператор с коэффициентами α и β , зависящими только от (x, y) . Заметим, что если $\tilde{L}\lambda = 0$, то функция R является первым интегралом системы (4); так как вдоль любой геодезической γ $\frac{d\tilde{R}}{dt} = 0$. Так что решение системы (3) тесно связано с первыми интегралами. Приступим теперь непосредственно к выводу соотношений (2).

Пусть, как и выше, $\gamma(p, q)$ — геодезическая метрики (I), соединяющая точки p и q пространства E^{n+1} . Мы считаем, что при выборе параметра t

$$t = \int_{\gamma(p, q)} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\lambda},$$

интегрирование здесь ведется от точки p до точки q . Хорошо известно, [3], что поверхности уровня функции $w(p, q)$ при фиксации одной из переменных p или q ортогональны геодезическим. Это обстоятельство, в силу выбора параметра

t , дает равенства

$$\frac{\partial w}{\partial q_i} = \frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{\partial w}{\partial q_{n+1}} = \frac{dy}{dt}, \quad (x, y) = q, \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial p_i} = -\frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{\partial w}{\partial p_{n+1}} = \frac{dy}{dt}, \quad (x, y) = p.$$

Кроме того, в силу выбора параметра t , имеем:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \lambda dt. \quad (8)$$

Так что

$$w(p, q) = \int \frac{\lambda^2 dt}{\gamma(p, q)}. \quad (9)$$

Из (6), (7), (8), (9) получаем равенства:

$$Lw = R(q, \frac{\partial w}{\partial q}) - R(p, -\frac{\partial w}{\partial p}) + \beta_0 w(p, q) =$$

$$= \int \frac{(\tilde{L}\lambda + \beta_0 \lambda) \lambda dt}{\gamma(p, q)} = \int \frac{(\tilde{L}\lambda + \beta_0 \lambda) \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\gamma(p, q)}.$$

Здесь β_0 - постоянная.

Обозначая также через $\tilde{L}\lambda$ подынтегральное выражение здесь, имеем результат, который мы хотели получить:

$$Lw = \int \frac{\tilde{L}\lambda \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\gamma(p, q)}. \quad (10)$$

Отсюда вытекает утверждение: для того, чтобы $Lw \geq 0$, ($Lw \leq 0$) необходимо и достаточно чтобы $\tilde{L}\lambda \geq 0$, ($\tilde{L}\lambda \leq 0$). Общие принципы использования соотношений (10) для исследования обратных кинематических задач сейсмоки приведены в работах [1], [2], [4], [5]. Они в конечном счете основываются на исследовании систем уравнений:

$$\begin{cases} Lw = 0, & \left| \frac{\partial w}{\partial q} \right|^2 = \lambda^2(q), & \left| \frac{\partial w}{\partial p} \right|^2 = \lambda^2(p), \\ \tilde{L}\lambda = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_k}{\partial x} x^i + \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_{k+1}}{\partial x^i} \lambda \lambda_x = 0, \\ \frac{\partial u_k}{\partial x} x^i - \frac{\partial v_k}{\partial y} |x^i|^2 + \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x^i} \lambda \lambda_x + v_{k+1} \lambda \lambda_y + \frac{\partial v_{k+1}}{\partial y} \lambda^2 = 0, \end{cases}$$

где последняя система есть система (3). На этом пути получаются, например, такие результаты.

I. Пусть \bar{l} - фиксированный единичный вектор пространства E^n , $\gamma(\xi)$ - геодезическая метрики (I), соединяющая начало координат пространства E^{n+1} и точку $(\xi \bar{l}, h)$, $h > 0$ - постоянная, $-\zeta_0 < \zeta < \zeta_0$, (см. рис.2).

Рассмотрим функцию

$$\tau(\xi) = w(0, \xi \bar{l}, h) = \int_{\gamma(\xi)} \sqrt{(\lambda^2(y) + A^2(x))(dx^2 + dy^2)}.$$

Наша задача здесь состоит в определении функции $\lambda(y)$ при условии, что заданы $\tau(\xi)$ и $A(x)$ причем $\tau''(\xi) > 0$, $A(0) = 0$.

Пусть $x(t; p)$ - решение задачи Коши

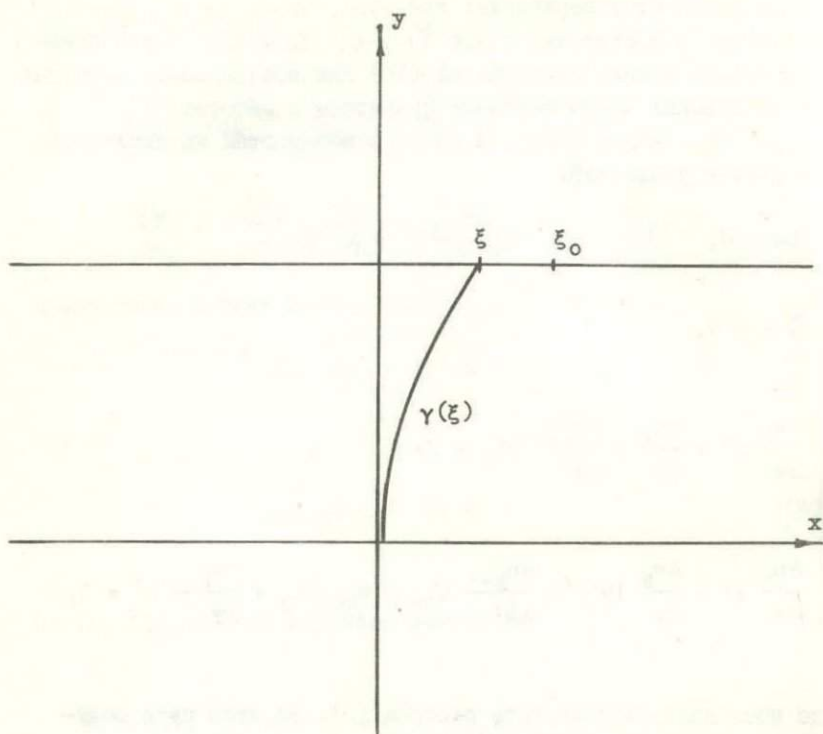


Рис.2.

$$\frac{d^2 x_v}{dt^2} = A \frac{\partial A}{\partial x_v}, \quad x(0; p) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = p.$$

Составим систему уравнений относительно p и t :

$$x(t; p) = \xi \bar{1}, \quad \left(\frac{dx}{dt}, \bar{1} \right) = \frac{d\tau}{d\xi}.$$

Можно доказать, что при весьма общих предположениях относительно функции $A(x)$ эта система уравнений имеет единственное решение $t(\xi)$ и $p(\xi)$, причем функция

$$s(\xi) = |p(\xi)| = \left| \frac{dx}{dt} \right|_{t=0}$$

является строго монотонной.

Обозначим через $\xi(s)$ функцию обратную к $s(\xi)$. Положим $\varphi(s) = t(\xi(s))$.

Теорема I. Если $\lambda'(y) < 0$, то имеют место равенства

$$\int_0^h \frac{dy}{\lambda^{2k+1}} = \frac{2^k}{(2k+1)!!} \left. \frac{d^k \varphi}{ds^k} \right|_{s=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

З а м е ч а н и е . Если дополнительно предполагать известной функцию $\tau(a, b) = w(a, 0, b, h)$, $a \in E^h$, $b \in E^n$, то для функции $\Lambda(b)$ имеет место формула

$$\Lambda^2(b) = \left(\left| \frac{\partial \tau}{\partial b} \right|^2 - \left| \frac{\partial \tau}{\partial a} \right|^2 \right) \Big|_{a=0}.$$

2. Пусть $n = 1$ и функция $\lambda(x, y)$ удовлетворяет в области $x \in E^1$, $0 \leq y \leq h$ уравнению

$$\Delta \lambda = \alpha \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \beta \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \beta_y \lambda + \beta_0 \lambda = 0,$$

где $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ — гармонические и сопряженные функции, β_0 — постоянная. Предположим, как и в пункте I, известной функцию

$$\tau(\xi) = \int_{\gamma(\xi)} \lambda \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Т е о р е м а 2. Имеет место формула

$$\lambda^2(\xi, h) = \left(\frac{d\tau}{d\xi} \right)^2 + \left[\frac{\alpha(\xi, h) \frac{d\tau}{d\xi} + \beta_0 \tau(\xi)}{\beta(\xi, h)} \right]^2. \quad (11)$$

В силу этой теоремы обратная кинематическая задача в этом случае сведена к исследованию уравнения $\tilde{L}\lambda = 0$ с граничным условием (II).

3. Здесь мы предположим, что функция $\lambda(x, y), x \in E^n$, удовлетворяет уравнению

$$\tilde{L}\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} y - \frac{\partial \lambda}{\partial y} x_n = 0,$$

то есть $\lambda = \lambda_0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^2 + y^2)$.

Пусть $\tau(b) = w(0, b, h), b \in E^n$.

Т е о р е м а 3. Имеет место формула

$$\lambda_0(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n^2 + h^2) = \left| \frac{\partial \tau}{\partial b} \right|^2 \left(1 + \frac{h^2}{b_n^2} \right).$$

З а м е ч а н и е. Интересно отметить, что если функции u_k, v_k удовлетворяют системе (3) и являются однородными и полиномами по x' степени $2k+2$ и $2k+1$ соответственно (наоборот чем ранее), то

$$\frac{d\tilde{R}}{dt} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x'} \lambda \lambda_{x'} + v_0 \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x'} \lambda \lambda_{x'} y' + \frac{\partial v_0}{\partial y} \lambda^2 \right) \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t). \end{array} \right.$$

Справа здесь стоит выражение вида

$$\lambda \left[\sum_{i=1}^n \tilde{L}_i \lambda \frac{dx_i}{dt} + \tilde{L}_{n+1} \lambda \frac{dy}{dt} \right].$$

На этом пути в плоском случае ($n=1$) легко получаются, например, такие соотношения

$$Lw = \frac{\partial w}{\partial q_1} \frac{\partial w}{\partial q_2} - \frac{\partial w}{\partial p_1} \frac{\partial w}{\partial p_2} = \int \lambda (\lambda_y dx + \lambda_x dy),$$

$$\gamma(p, q)$$

$$Lw = \operatorname{arctg} \frac{w_{q_2}}{w_{q_1}} - \operatorname{arctg} \frac{w_{p_2}}{w_{p_1}} = \int \frac{1}{\lambda} [\lambda_y dx - \lambda_x dy].$$

$$\gamma(p, q)$$

Л и т е р а т у р а

1. АНИКОНОВ Ю.Е. Об одной обратной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. "Матем. заметки", т.12, вып.2, 1972, с.163-167.
2. АНИКОНОВ Ю.Е. Несколько частных решений обратной кинематической задачи. - Сб. Математические проблемы геофизики, вып.4, Новосибирск, 1973, 30-60.
3. ГЕЛЬФАНД И.М., ФОМИН С.В. Курс вариационного исчисления. М., "Наука", 1965.
4. АНИКОНОВ Ю.Е. О геометрических методах исследования обратных задач. - Сб. Математич. проблемы геофизики, вып.П, Новосибирск, 1971, 7-53.
5. АНИКОНОВ Ю.Е. К задаче определения римановой метрики. "Матем. заметки", т.16, вып.4, 611-619.

С.П.Белинский

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Обозначим через D_0 трехмерное пространство (x_1, x_2, x_3) . Пусть в полупространстве $D: x_3 \geq 0$ пространства D_0 процесс распространения волн описывается уравнением

$$\Delta u + \delta(x-x')f(t) = 0 \quad (1)$$

при начальных и граничных условиях

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = 0. \quad (2)$$

Здесь Δ - оператор Лапласа по x ; $\delta(x-x')$ - дельта-функция, сосредоточенная в фиксированной точке $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ полупространства D . $f(t)$ - заданная функция, равная 0 при $t < 0$. Не останавливаясь на вопросах гладкости функции $f(t)$ будем, как и в [1], [2], считать, что:

$$f(t) = t \quad \text{при} \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Если же сигнал $f(t)$ имеет более сложную структуру, то его всегда можно пересчитать к виду (3). Пусть в каждой точке

плоскости $S: (x_3 = x'_3)$ известен режим колебаний во времени, то есть известна функция

$$\varphi(t, x_1, x_2) = u(x, t); \quad t > 0; \quad x \in S. \quad (4)$$

Требуется определить скорость передачи сигналов в среде, то есть найти функцию $n(x)$. Случай, когда $n(x)$ зависит от одной переменной: $n(x_1, x_2, x_3) = n(x_3)$ подробно рассмотрен в работе [1] и в [2]. Мы докажем теорему

Т е о р е м а. Пусть $n(x)$ известна вне некоторой ограниченной области $D' \subset D$; $h > x'_3, D' \subset \{x \in (x_1, x_2, x_3); x_3 \geq h\}, n_0 > 0$ и $n(x) = n_0 + n'(x)$, где $n'(x) = \sum_{i=1}^k a_i(x_1, x_2) \cdot b_i(x_3)$.

Пусть

$$n'(x) \in C^5(D), \text{ и } \|n'(x)\|_{C^3} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq 3} \max_{x \in D'} |S^\alpha n'(x)| \leq \epsilon_0, \quad (5)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \quad S^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{|\alpha_1|} x_1 \partial^{|\alpha_2|} x_2 \partial^{|\alpha_3|} x_3}.$$

Тогда можно подобрать такое $\epsilon_0 = \epsilon_0(n_0, D')$, что в классе указанных выше функций $n(x)$ решение обратной задачи отыскания коэффициента $n(x)$, при условиях (4), единственно.

Такая близость скорости к постоянной обусловлена методом доказательства, который требует, к сожалению, регулярности поля лучей и достаточной близости их к прямым линиям. Будем для определенности считать, что область $D' \subseteq \{(x_1, x_2, x_3): h \leq x_3 \leq H; -1 \leq x_1 \leq 1; -1 \leq x_2 \leq 1\}$. Предположим, что существуют, по крайней мере, две функции: $n_1(x), n_2(x) \in C^5(D)$, совпадающие между собой в области $D \setminus D'$ и различающиеся при $x \in D'$ такие, что решения задачи (1)-(2) $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ (при $n(x) = n_1(x)$ и $n(x) = n_2(x)$ соответственно) совпадают во всех точках плоскости S . Введем дополнительные обозначения. Пусть

$$\tilde{u}(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t), \quad (6)$$

$$\tilde{n}(x) = n_2^2(x) - n_1^2(x).$$

Как показано в работе [2], для $\tilde{h}(x)$ получается следующее интегральное уравнение:

$$\int_{\tilde{D}(x^1, x^2, t)} \int \int \tilde{h}(\xi) d\xi \int_{\tau_1(\xi, x^1)}^{t - \tau_2(x^2, \xi)} G_1(\xi, x^1, \tau) G_2(x, \xi, t - \tau) d\tau = 0. \quad (7)$$

Здесь $\tau_i(\xi_1, \xi_2)$; $i = 1, 2$ — есть время пробега сигнала от точки ξ_1 до точки ξ_2 в метрике $n_i(x)$; \tilde{D} есть область, ограниченная поверхностью:

$$\tilde{D}(x^1, x^2, t) : \{ \xi : \tau_1(\xi, x^1) + \tau_2(x^2, \xi) = t; \quad \xi_3 \geq h \} \quad (8)$$

и, наконец, через $G_1(x, \xi, \tau)$ и $G_2(x, \xi, t - \tau)$ обозначены функции Грина, отвечающие соответственно коэффициентам $n_1(x)$ и $n_2(x)$. Граница области \tilde{D} в уравнении (7) может быть устроена довольно сложным образом при произвольных $n_1(x)$ и $n_2(x)$, так как в общем случае поле лучей не обязательно регулярно и, кроме того, присутствует граница $x_3 = 0$, от которой волны отражаются. Мы в дальнейшем установим регулярность поля лучей при достаточно малых ϵ , а от действия границы $x_3 = 0$ можно избавиться приемом, описанным в [2], а именно: область D' разбить плоскостями

$$x_3 = x_3^i; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N; \quad (x_3^0 = h; \quad x_3^N = H) \quad (9)$$

на конечное число областей D_1^i одинаковой толщины δ таким образом, что для точек ξ , принадлежащих пересечению областей $\tilde{D}(x^1, x^2, t)$ с D_1^i (при условии, что вершина поверхности $\tilde{D}(x^1, x^2, t)$ принадлежит D_1^i), фронт отраженной волны еще не дошел. В этом случае функции Грина имеют структуру

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{4\pi} [\sigma(x, \xi) \delta(t - \tau(x, \xi)) + R(x, \xi, t)], \quad (10)$$

где $\sigma(x, \xi)$ (см. [3]) — положительная функция, дважды непрерывно-

дифференцируемая по ξ (за исключением точки $\xi = x$), являющаяся решением уравнения

$$2(\text{grad}_{\xi} \sigma(\xi, x), \text{grad}_{\xi} \tau(\xi, x)) + \sigma(\xi, x) \cdot \Delta_{\xi} \tau(\xi, x) = 0, \quad (11)$$

а $R(x, \xi, t)$ — регулярная часть функции Грина. Это позволяет исследовать уравнение (7) отдельно для каждой из областей D_1^i , решая задачу поэтапно: сначала для первого слоя D_1^1 , затем для второго и т.д. На каждом шаге мы получаем более простое, чем (7), уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\tilde{D}(x^1, x^2, t)} \tilde{n}(\xi) \sigma_1(x^1, \xi) \sigma_2(\xi, x^2) d\xi + \iint_{\tilde{D}(x^1, x^2, t)} \tilde{n}(\xi) T(\xi, x^1, x^2, t) d\xi = 0. \quad (12)$$

Здесь $T(\xi, x^2, x^1, t) = \sigma_2(\xi, x^2) R_1(x^1, \xi, t - \tau_2(\xi, x^2)) +$

$$+ \sigma_1(x^1, \xi) R_2(\xi, x^2, t - \tau_1(\xi, x^1)) + \int_{\tau_1(\xi, x^1)}^t \tau_2(\xi, x^2) R_2(\xi, x^2, t - \tau) \times \\ \times R_1(x^1, \xi, t - \tau) d\tau, \quad (13)$$

а $\sigma_i, R_i, i=1, 2$ — это функции σ и R для $n = n_i$, соответственно. Поскольку это сделано в [2], мы не будем на этом останавливаться подробнее. Для единственности обратной задачи достаточно теперь показать, что уравнение (12) имеет только тривиальное решение $\tilde{n}(x) \equiv 0$. Мы сведем интегральное уравнение (12) к однородному операторному уравнению Вольтерра первого рода

$$\int_{\tilde{h}}^t A(t, \tau) n(\tau) d\tau = 0$$

и покажем единственность решения этого уравнения для нашего случая. Для этого займемся изучением структуры поверхностей $\tilde{S}(x^1, x^2, t)$. Воспользуемся рядом утверждений, доказанных в работе [4]. Рассмотрим каноническую систему уравнений Эйлера для лучей (см. [5])

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{n^2(x)}; \quad \frac{dp}{dt} = \text{grad}_x \ln n(x) \quad (14)$$

и задачу Коши для этой системы:

$$x|_{t=0} = x^0; \quad p|_{t=0} = n(x^0) v^0, \quad (15)$$

где x^0 - произвольная точка полупространства $x_3 \geq 0$, а v^0 - произвольный единичный вектор.

Л е м м а I. Для любого $n_0 > 0$ существует такое $\epsilon_0 = \epsilon_0(n_0)$, что для любой функции $n(x) \in C^5(D)$ и удовлетворяющей неравенству (5) решение задачи (I4)-(I5) существует, единственно и продолжимо в обе стороны без самопересечений до границы D , причем функция $x(t)$ представима в виде

$$x(t) = x^0 + \frac{1}{n(x^0)} v^0 t + \epsilon t^2 \Phi(t, x^0, v^0), \quad (16)$$

где $\epsilon = \|n(x) - n_0\|_{C^3}$, а функция $\Phi(t, x^0, v^0)$ непрерывна и ограничена вместе с производными до 2-го порядка включительно константой K , зависящей только от n_0 и по совокупности переменных принадлежит классу C^4 .

Доказательство леммы дословно почти такое же, что и доказательство леммы 2 из [4] для плоского случая, и мы приводить его не будем. Из леммы следует, что при $\epsilon \rightarrow 0$ лучи в области D' , а также и в любой ограниченной области равномерно стремятся к отрезкам прямых линий. Покажем, что каждую точку $x \in \text{int } D$ можно соединить лучом с точкой x^0 . Соединим точки x и x^0 прямой линией и проведем сферу $S(x^0, R)$ с центром в точке x^0 и радиусом $R = |x - x^0|$. Будем предполагать, что сфера $S(x^0, R)$ полностью принадлежит D . Рассмотрим все лучи, проведенные из x^0 , которые в точке x^0 составляют с направлением $x^0 x$ определенный угол $0 < \varphi < \pi$. Для каждого такого φ мы получаем семейство лучей пересекающее сферу $S(x^0, R)$ по некоторой замкнутой кривой Γ_φ (в силу непрерывной зависимости точки пересечения луча с $S(x^0, R)$ от v). Пусть $K = K(\Phi, n_0)$ - константа из леммы I. Будем предполагать, что $\epsilon_0 < \frac{n_0}{R^2 K(\Phi, n_0)}$. Рассмотрим кривую $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$. Из выбора ϵ_0 следует, что $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$ делит сферу $S(x^0, R)$ на две области, в одной из которых находится

точка x , а в другой — диаметрально противоположная ей x^* . Будем уменьшать угол φ от $\frac{\pi}{2}$ до 0. При этом замкнутые кривые Γ_φ на сфере $S(x^0, R)$ стянутся в некоторую точку $x' \in S(x^0, R)$. Если x' совпадает с x , тогда искомым луч имеет направление в точке x^0 : x^0x . Если же x' не совпадает с x (x^* и x' совпадать не могут ввиду выбора ε_0), то, начиная с некоторого φ_0 , все кривые Γ_φ : $0 < \varphi < \varphi_0$ будут делить сферу $S(x^0, R)$ на две области, в одной из которых будут содержаться точки x и x^* . Это означает, что существует $\varphi' \in [\frac{\pi}{2}, \varphi_0]$, что $\Gamma_{\varphi'}$ содержит либо x , либо x^* . Но так как, ввиду выбора ε_0 , Γ_φ при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ вообще не может содержать точку x^* , то $x \in \Gamma_{\varphi'}$. Заметим, что это же доказательство, несколько модифицированное, проходит и в случае, когда $S(x^0, R)$ полностью не принадлежит D . При предположениях леммы I через каждую пару точек $x^0, x \in D$ проходит единственный луч, являющийся решением системы (I4). Доказательство этого факта так же можно найти в [4].

Таким образом, v и t можно считать криволинейными координатами точки $x \in D$ при фиксированном выборе x^0 и наоборот, каждой точке x можно однозначно поставить в соответствие направление выхода v из точки x^0 и значение $t \geq 0$, равное времени пробега сигнала от точки x^0 до точки x . Другими словами, для всех $x \in D$ определены однозначные функции:

$$v = v(x^0, x); \quad t = t(x^0, x). \quad (17)$$

Из равенств

$$t = \frac{n(x^0)|x-x^0|}{|v + \varepsilon \Phi_0(t, x^0, v)|}; \quad v = \frac{x - x^0}{|x - x^0|} \cdot |v^0 + \varepsilon \Phi_0(t, x^0, v)| - \varepsilon \Phi_0(t, x^0, v), \quad (18)$$

получаемых легко из формулы (I6), а так же из гладкости правых частей равенств (I8) (здесь $\Phi_0(t, x^0, v) = t \cdot \Phi(t, x^0, v) \times n(x^0)$) и теоремы о неявной функции легко вытекает

Л е м м а 2. При достаточно малых ε , параметры t, v ,

рассматриваемые как функции пары точек $x, x^0 \in D$, представимы в виде:

$$t = n(x^0) |x-x^0| + \varepsilon |x-x^0| \cdot F_1(x^0, \frac{x-x^0}{|x-x^0|}, |x-x^0|), \quad (19)$$

$$v = \frac{x-x^0}{|x-x^0|} + \varepsilon |x-x^0| \cdot F_2(x^0, \frac{x-x^0}{|x-x^0|}; |x-x^0|),$$

где функции $F_k \in C^h(D)$ непрерывны и ограничены вместе с производными до 2-го порядка включительно константой, зависящей только от n_0 .

С учетом (19) запишем уравнение поверхности $\tilde{S}(x^1, x^2, t)$

$$n_1(x^1) |\xi-x^1| + \varepsilon |\xi-x^1| \cdot F_1(x^1, \frac{\xi-x^1}{|\xi-x^1|}; |\xi-x^1|) + n_2(\xi) |x^2-\xi| + \varepsilon |x^2-\xi| \cdot F_1(\xi, \frac{x^2-\xi}{|x^2-\xi|}, |x^2-\xi|) = t \quad (20)$$

или

$$Q(\xi) = n_1(x^1) (|\xi-x^1| + |x^2-\xi|) + \varepsilon F(\xi, x^1, \frac{\xi-x^1}{|\xi-x^1|}; \frac{x^2-\xi}{|x^2-\xi|}; |\xi-x^1|, |x^2-\xi|) = t, \quad (21)$$

где $F \in C^h(D)$ обладает свойствами, аналогичными функции F_1 . При достаточно малых ε поверхность $Q(\xi) = t$ в определенном смысле близка к эллипсоиду

$$Q'(\xi) = n_1(x^1) (|\xi-x^1| + |x^2-\xi|) = t. \quad (22)$$

Пусть ξ^* — точка на поверхности, у которой третья координата достигает максимума. Если таких несколько, то возьмем одну из них. Будем в дальнейшем рассматривать только такие поверхности \tilde{S} , у которых вершины расположены в области D^* . Так как частные производные вплоть до второго порядка у обеих частей (21) и (22) отличаются на величину порядка ε ,

то на ε наложим ограничение: чтобы все поверхности \tilde{S} та-
кие, что $t \leq 2n_0 \sqrt{(h-x'_3)^2 + 2l^2}$, были бы строго выпуклы.
Очевидно, что это ε зависит лишь от n_0 , $h-x'_3$ и l . Яв-
ный вид ε нетрудно получить из равенства (21). Итак, каждая
поверхность (21), имеющая в D' вершину, строго выпукла и, в
частности, имеет не более одной вершины. В вершине поверхно-
сти (21) выполняется соотношение

$$\left. \frac{\partial Q(\xi^*)}{\partial \xi_1} \right|_{\xi=\xi^*} = \left. \frac{\partial Q}{\partial \xi_2} \right|_{\xi=\xi^*} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi_3} > p > 0. \quad (23)$$

В силу этого уравнение (21) может быть разрешено, по крайней
мере, в некоторой окрестности точки ξ^* относительно пере-
менной ξ_3 :

$$\xi_3 = W(\xi_1, \xi_2, t). \quad (24)$$

Из гладкости функции $Q(\xi)$ следует гладкость по всем перемен-
ным функции $w(\xi_1, \xi_2, t)$. В точке $(\xi'_1(t), \xi'_2(t))$ частные
производные от функции $w(\xi_1, \xi_2, t)$ по переменным ξ_1, ξ_2
обращаются в 0 и $w(\xi'_1(t), \xi'_2(t), t) = \xi'_3(t)$. Напишем
формулу Тейлора для функции $w(\xi_1, \xi_2, t)$, взяв в качестве
точки разложения точку $(\xi'_1(t), \xi'_2(t))$ и ограничившись диф-
ференциалами второго порядка. Уравнение (24) при этом примет
вид:

$$\xi_3 = \xi'_3(t) + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_j} (\xi_1 - \xi'_1(t)) (\xi_j - \xi'_j(t)). \quad (25)$$

В этой формуле вторые частные производные от функции $w(\xi_1,$
 $\xi_2, t)$ вычисляются в некоторой точке ξ^* , принадлежащей от-
резку прямой, соединяющей точки $(\xi'_1(t), \xi'_2(t))$ и (ξ_1, ξ_2) .
Из непрерывности частных производных следует, что имеет место
представление:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1 \partial \xi_j} \bigg|_{\substack{\xi_1 = \xi_1^* \\ \xi_j = \xi_j^*}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1 \partial \xi_j} \bigg|_{\substack{\xi_1 = \xi_1'(t) \\ \xi_j = \xi_j'(t)}} + \alpha_{1j}(\xi_1, \xi_2, t), \quad (26)$$

где $\alpha_{1j}(\xi_1, \xi_2, t)$ есть бесконечно малые при $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\xi_1'(t), \xi_2'(t))$. Так как

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \bigg|_{\substack{\xi_1 = \xi_1'(t) \\ \xi_j = \xi_j'(t)}} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \left[\frac{\partial Q}{\partial \xi_3} \right]^{-1} \bigg|_{\xi_3 = \xi_3'(t)},$$

и $\frac{\partial Q}{\partial \xi_3} \big|_{\xi_3 = \xi_3'} > p > 0$, то существует такая постоянная $m(t) \geq m > 0$ для всех поверхностей (24), имеющих вершину в D' , что

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \bigg|_{\substack{\xi_1 = \xi_1'(t) \\ \xi_j = \xi_j'(t)}} (\xi_1 - \xi_1'(t))(\xi_j - \xi_j'(t)) \geq m(t) \sum_{i=1}^2 (\xi_i - \xi_i'(t)). \quad (27)$$

Покажем теперь, что для каждой точки $(x_1, x_2, x_3) \in D'$ найдется такая точка x^2 и такое $t > 0$, что точка (x_1, x_2, x_3) будет вершиной поверхности $\tilde{S}(x^1, x^2, t)$.

Если соединить точку x^1 с любой точкой области D' отрезком прямой, то третья координата x_3^V каждого из направляющих векторов этих прямых, очевидно, удовлетворяет неравенству:

$$x_3^V \geq \frac{(h-x_3')(n_0 - \varepsilon)}{\sqrt{2l^2 + (h-x_3')^2}} = q > 0. \quad (28)$$

Наложим ограничение на ε так, чтобы все лучи при $\|n-n_0\|_0 \leq \varepsilon$, соединяющие точки x^1 и $x \in D'$, имели положительную третью

координату, удовлетворяющую неравенству $x_3^y \geq \frac{q}{2}$. Для этого ϵ достаточно выбрать из неравенства:

$$2(n_0 + \epsilon) \sqrt{2l^2 + (h-x_3^y)^2} \cdot \epsilon \leq \frac{h-x_3^y}{\sqrt{2l^2 + (h-x_3^y)^2}} (n_0 - \epsilon). \quad (29)$$

Если при этом считать, что $\epsilon < \frac{n_0}{3}$, то ϵ можно выбрать такое:

$$\epsilon \leq \frac{1}{4} \frac{h-x_3^y}{2l^2 + (h-x_3^y)^2}. \quad (30)$$

Соединим точку x^y с произвольной точкой $x \in D^y$ лучом. В точке x луч будет иметь координаты (y_1, y_2, y_3) , причем $y_3 \geq \frac{q}{2}$. Это значит, что $\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq n_1^2(x) - \frac{q^2}{4}$. В качестве нового направления возьмем такое:

$$\begin{aligned} (y_1 \frac{n_1(x)}{n_2(x)} ; y_2 \frac{n_1(x)}{n_2(x)} ; -\sqrt{n_2^2(x) - \frac{n_1^2(x)}{n_2^2(x)} (y_1^2 + y_2^2)}) = \\ = (y_1^y, y_2^y, y_3^y). \end{aligned} \quad (31)$$

Решим теперь систему (I4) с данными Коши:

$$\begin{aligned} x \Big|_{t=0} &= (x_1, x_2, x_3), \\ p \Big|_{t=0} &= (y_1^y, y_2^y, y_3^y). \end{aligned} \quad (32)$$

Благодаря выбору ϵ , луч с начальными данными (32) пересечет плоскость $x_3 = x_3^y$ в некоторой точке x^2 . Взяв теперь в качестве t величину $t = \tau_1(x^y, x) + \tau_2(x, x^2)$, мы получим поверхность $\tilde{S}(x^1, x^2, t)$, которая имеет в точке (x_1, x_2, x_3) нормаль, направленную по оси x_3 . Так как ϵ у нас выбрано так, что все поверхности $\tilde{S}(x^1, x^2, t)$ при $t \leq 2n_0 \sqrt{2l^2 + (h-x_3^y)^2}$ являются строго выпуклыми, а совокупность нормалей к гладкой,

строго-выпуклой поверхности, образует единичную сферу направлений, то точка x является вершиной поверхности $\tilde{S}(x', x^2, t)$.

Мы показали, что для каждой точки $x \in D'$ существует единственная поверхность $\tilde{S}(x', x^2, t)$, имеющая x своей вершиной. Причем, как следует из (25) и (27), в окрестности своих вершин $x'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t))$ поверхности $\tilde{S}(x', x^2, t)$ могут быть представлены в виде:

$$x_3 = x'_3(t) - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(t, x_1, x_2)(x_i - x'_i(t))(x_j - x'_j(t)), \quad (33)$$

где коэффициенты $a_{ij}(t, x_1, x_2)$ дважды непрерывно-дифференцируемы, а симметрическая матрица $\|a_{ij}\|$, составленная из этих коэффициентов, равномерно положительно определена для всех $x'(t) \in D'$. Другими словами, уравнение поверхности $\tilde{S}(x', x^2, t)$ в окрестности точки $x'(t)$ может быть представлено в виде:

$$r = f(\sqrt{x'_3(t) - x_3}, \varphi, t), \quad (33')$$

где $f(q, \varphi, t)$ — дважды непрерывно-дифференцируемая функция своих аргументов и, кроме того, для всех $x'(t) \in D'$

$$f(0, \varphi, t) = 0; \quad f_q(0, \varphi, t) \geq \alpha(t) \geq \alpha \geq 0. \quad (33'')$$

Будем рассматривать $\tilde{N}(\xi)$ как абстрактную функцию $u(\tau)$ параметра τ со значениями в банаховом пространстве $C(D)$ где $D((x_1, x_2): -1 \leq x_1 \leq 1; -1 \leq x_2 \leq 1)$. Тогда интегральное уравнение (12) можно переписать в виде:

$$\int_h^t A(t, \tau) u(\tau) d\tau = 0, \quad (34)$$

где семейство операторов определено для $(t, \tau) \in \Omega = \{(t, \tau): 0 \leq \tau \leq t \leq T; T > 0\}$, формулой:

$$A(t, \tau) u(\tau) = \int_{L(z, t)} \tilde{N}(\xi) \sigma_1(x', \xi) \sigma_2(\xi, x^2) r \cdot r_t d\varphi + \iint_{S(z, t)} \tilde{N}(\xi) T(\xi, x^2, x', t) d\xi_1 d\xi_2. \quad (35)$$

Здесь $S(z, t)$ - сечение области $\tilde{D}(x', x^2, t)$ плоскостью $x_3 = z$, а $L(z, t)$ - кривая, ограничивающая сечение $S(z, t)$. Очевидно, что когда контур $L(z, t)$ стягивается в точку, второе слагаемое в (35) стремится к нулю, а в целом весь интеграл при $z \rightarrow t$ стремится к выражению

$$\tilde{h}(\xi) \sigma_1(x', \xi(t)) \cdot \sigma_2(\xi(t), x^2) \cdot \frac{1}{2} [x'_3(t)]_t^2 \int_0^{2\pi} f_q^2(0, \varphi, t) d\varphi, \quad (36)$$

которое при любом $t > h$ положительно (мы воспользовались тем, что при $z \rightarrow t: r \cdot r_t \rightarrow f_q^2(0, \varphi, t) \cdot \frac{1}{2} [x'_3(t)]_t^2$). Более того при $h > x'_3$ это выражение ограничено снизу константой $k > 0$, зависящей только от D' . Для того чтобы избавиться от действия второго члена в формуле (35) на оператор $A(t, \tau)$, разбиение области D' на слои можно устроить достаточно мелким. При этих предположениях операторы $A(t, \tau)$ действуют из банахова пространства в банахово пространство, линейны и ограничены. Кроме того, ввиду равномерной ограниченности от нуля весовой функции $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot r \cdot z_t$ следует равномерная ограниченность $A^{-1}(t, t)$, ибо

$$A(t, t)u(t) = \left[\int_{L(z, t)} \sigma_1(x', \xi) \sigma_2(\xi, x^2) r \cdot r_t d\varphi + \iint_{S(z, t)} \times \right. \\ \left. \times T(\xi, x', x^2, t) d\xi_1 d\xi_2 \right] u(t). \quad (37)$$

Кроме того, $\frac{\partial}{\partial \tau} [A(t, \tau)]$, как показано в [1], непрерывна, за исключением точек $t = \tau$, где она имеет слабую полярность, и имеет место представление:

$$\frac{\partial}{\partial t} [A(t, \tau)] = (t - \tau) \int_{L(z, t)} \sum_{\alpha=0}^1 b_\alpha(\sqrt{t-\tau}, \varphi, \xi, t) S_\alpha n(\xi) d\varphi, \quad (38)$$

в котором функции b_α непрерывны и ограничены, а S_α - операторы $\frac{\partial}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial}{\partial x_2}$. Все это позволяет нам заключить, что интегральное уравнение (34) имеет единственное решение (см. [7] теорема I).

З а м е ч а н и е 1. В формулировке теоремы вместо предположения о том, что $n(x)$ известна вне области D' , можно было бы предположить, что $n'(x)$ финитна и ее носитель принадлежит D' или же, что функции $n(x)$ принадлежат некоторому классу $P(n_0, D')$, так, что для всех $n_1(x); n_2(x) \in P(n_0, D')$ функция $n_1^2(x) - n_2^2(x) = n'(x)$ представима в виде $\sum_{i=1}^K a_i \cdot x(x_1, x_2) \cdot b_i(x_3)$, и носитель $n'(x)$ принадлежит D' . На доказательстве теоремы, как видно из статьи, это никак бы не отразилось.

З а м е ч а н и е 2. От жесткого ограничения (5) на $n'(x)$ можно было бы, по-видимому, отказаться, изменив несколько постановку задачи, а именно, расставив источники по всей плоскости $x_3 = x_3'$, а так же потребовав регулярности поля $n(x)$ в достаточно малых окрестностях лучей, соединяющих точки плоскости $x_3 = x_3'$, с точками плоскости $x_3 = h; \forall h > x_3'$ и ортогональных к плоскости $x_3 = h$. В этом случае функции Грина так же будут иметь структуру (10) и доказательство, подобное нашему, будет иметь место.

Л и т е р а т у р а

1. РОМАНОВ В.Г. Теорема единственности одномерной обратной задачи для волнового уравнения. - Сб. Математические проблемы геофизики, вып. 2, Новосибирск, изд. ВЦ, с. 100-142.
2. РОМАНОВ В.Г. Задача об определении одномерной скорости распространения сигналов в полупространстве по режиму колебаний одной из точек этого полупространства. - Сб. Математические проблемы геофизики, Новосибирск, изд. ВЦ, вып. 3, с. 164-186.
3. СОБОЛЕВ С.Л. Волновое уравнение для неоднородной среды. - Труды сейсмологического ин-та, Л., 1930, № 6, с. 1-57.
4. РОМАНОВ В.Г. Об однозначности решения обратной кинематической задачи в классе скоростей, близких к постоянным. - Сб. Математические проблемы геофизики, Новосибирск, изд. ВЦ, вып. 5, ч. 2.

5. РОМАНОВ В.Г. Об одном классе единственности решения обратной кинематической задачи. -Сб. Математические проблемы геофизики, Новосибирск, изд.ВЦ, вып.4, с.147-164.
6. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода. - Международный конгресс математиков в Ницце. М., "Наука", 1972, с.130-136.
7. РОМАНОВ В.Г. О некоторых классах единственности решения операторных уравнений Вольтерра первого рода. - "Функциональный анализ и его приложения". № I, 1975.

А.Л. Бухгейм

НОРМАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА (ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ)

В работе приводятся достаточные условия нормальной разрешимости операторов, возникающих в теории многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений, а также в связи с задачами интегральной геометрии (см. [1], [2]). Исследование этих задач укладывается в следующую абстрактную схему.

Пусть X, Y — банаховы пространства, $A \in L(X, Y)$. Как известно, (см. [3]) оператор R с областью определения $D(R) \subset Y$ ($\overline{D(R)} = Y$) называется левым регуляризатором, если

$$RA = I + B, \quad (1)$$

где B — вполне непрерывный оператор в X . Обычно в этом определении требуют, чтобы оператор R был ограничен из Y в X (т.е. $D(R) = Y, R \in L(Y, X)$). В этом случае наличие у оператора A левого регуляризатора влечет за собой нормальную разрешимость. Однако часто бывает, что оператор R неограничен из Y в X . (Например, такая ситуация типична для интегральных уравнений первого рода). "Вернуть" оператору A нормальную разрешимость можно следующим образом. Введем банахово пространство Z плотно вложенное в Y ($Z \subset Y, \overline{Z} = Y$), которое определяется как замыкание $D(R)$ в норме

$$\|v\|_Z^2 = \|v\|_Y^2 + \|Rv\|_X^2, \quad v \in D(R). \quad (2)$$

Ясно, что R (точнее замыкание R в Z) уже будет ограниченным оператором из Z в X . Из (1)-(2) следует, что оператор A ограничен из X в Z и нормально разрешим в этой паре пространств. В общем случае пространство Z может быть устроено довольно скверно (например $\|\cdot\|_Z$ содержит бесконечное число дифференцирований). Однако для интегральных уравнений первого рода, исследованных в настоящей работе, всегда справедливы вложения типа $W_2^k \subset Z$ или $C^k \subset Z$, поэтому предложенный подход, по крайней мере, для этих уравнений является достаточно содержательным.

Так как эта статья является продолжением работ [4], [5], то те факты, которые доказываются также как в работе [5], приводятся без доказательств. Не существенные для нас постоянные обозначаются буквой c .

Мы пишем $u \in C_{X, \xi}^{k, 1}(\bar{G} \times \bar{\Omega})$ ($G \subset R^m$, $\Omega \subset R^n$),

если $D_X^\alpha D_\xi^\beta u \in C(\bar{G} \times \bar{\Omega})$, $|\alpha| \leq k$, $|\beta| \leq 1$.

Здесь $D_X^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m}$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$.

1. Построение регуляризатора для интегрального оператора со слабой особенностью в R^n

Этот раздел является вспомогательным. Доказываемая в нем теорема I, возможно, не является новой, но, так как найти ее в нужной нам форме не удалось, доказательство (по крайней мере для $n \geq 3$) приводится полностью.

Пусть Ω - ограниченное открытое множество в R^n ($n \geq 2$) с диаметром $d(\Omega)$; Ω_h - h -окрестность Ω , т.е. $\Omega_h = \{y \in R^n \mid |y-x| \leq h, x \in \Omega, h \geq 0\}$. Ясно, что $\Omega_h \supset \Omega$ при $h > 0$, $\Omega_0 = \Omega$.

Пусть $K(x, \xi)$ - матрица 1×1 , заданная в $\Omega_h \times \Omega$, такая, что

$$1^\circ \quad \|K^{-1}(\xi, \xi)\| \geq c_0 > 0 \quad \forall \xi \in \Omega. \quad (1)$$

$$2^\circ \quad K(x, \xi) \quad (\text{при } x \neq \xi \text{ } m \text{ раз дифференцируема по } x; \text{ при-}$$

чем существует число $\delta \in (0, 1]$ такое, что

$$\|D_x^p(K(x, \xi) - K(\xi, \xi))\| \leq c_p \cdot |x - \xi|^{\delta - |p|}, \quad 0 \leq |p| \leq m. \quad (2)$$

Для $\alpha \in (0, n)$ определим оператор $K_\alpha: L_{2,1}(\Omega) \rightarrow L_{2,1}(\Omega_h)$

$L_{2,1} = \underbrace{L_2 \times L_2 \times \dots \times L_2}_1$ по формуле

$$(K_\alpha u)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_\Omega \frac{K(x, \xi)}{|x - \xi|^{n-\alpha}} u(\xi) d\xi, \quad x \in \Omega_h, \quad (3)$$

$\gamma(\alpha)$ - нормирующий множитель,

$$\gamma(\alpha) = \frac{\pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2})}.$$

Известно, что $K_\alpha \in \mathcal{L}(L_{2,1}(\Omega), L_{2,1}(\Omega_h))$. Нашей задачей является построение левого регуляризатора R_h для оператора K_α . Эту задачу решает

Т е о р е м а I. Пусть функция $K(\cdot, \cdot): \Omega_h \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{1,2}$ удовлетворяет условиям Γ^0-2^0 при $m = 2 + 2[\frac{\alpha}{2}]$, $h > 0$. Тогда для любого $n \geq 2$ существует неограниченный оператор $R_h: L_{2,1} \times (\Omega_h) \rightarrow L_{2,1}(\Omega)$ такой, что $R_h K_\alpha = I + \tilde{K}$, где \tilde{K} - интегральный оператор со слабой особенностью, действующий в $L_{2,1}(\Omega)$. Если $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$, то можно взять $h=0$, $m = \alpha$.

С л е д с т в и е I. $\dim \text{Ker } K_\alpha < \infty$, т.е. уравнение $K_\alpha u = f$ имеет не более конечного числа линейно независимых решений.

С л е д с т в и е 2. Если область Ω достаточно мала, то

$$\|u\|_{L_{2,1}(\Omega)} \leq c \|R_h K_\alpha u\|_{L_{2,1}(\Omega)},$$

и, в частности $\text{Ker } K_\alpha = \{0\}$.

С л е д с т в и е 3. По пространствам $X = L_{2,1}(\Omega)$, $Y = L_{2,1}(\Omega_h)$ и оператору R_h построим пространство Z (см. введение (2)). Тогда $K_\alpha \in \mathcal{L}(L_{2,1}(\Omega), Z)$ и нормально разрешим в паре $L_{2,1}(\Omega), Z$.

З а м е ч а н и е I. При $n=2$, $\delta=1$, сформулированная теорема содержится в неявной форме в работе В.Г.Романова [6]. Приведенное там доказательство не переносится на слу-

чай $n \geq 3$. Поэтому мы докажем теорему I только для $n \geq 3$. Случай $n = 2$ $\delta \in (0, 1)$ мы разбирать не будем, так как в дальнейшем он нам не понадобится.

Доказательство теоремы I. В силу условия (I), не ограничивая общности, можно считать, что $K(\xi, \xi) = I$. Далее, достаточно рассмотреть только скалярный случай $l = 1$. При этих предположениях из (3) имеем

$$K_\alpha u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\Omega} r^{\alpha-n} \cdot u(\xi) d\xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\Omega} r^{\alpha-n} (K(x, \xi) - 1) u(\xi) d\xi = v(x),$$

$$r = |x - \xi|. \quad (4)$$

Если $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$, то хорошо известно, что

$$\Delta^{\alpha/2} r^{\alpha-n} = c \cdot \delta(x - \xi), \quad (5)$$

где Δ - оператор Лапласа.

Положим $R_h \equiv R_0 \equiv c \Delta^{\alpha/2} (h \geq 0)$. В силу условия (2) $R_h K_\alpha = I + \tilde{K}$, где \tilde{K} - интегральный оператор со слабой особенностью $\delta - n < n$. Докажем теперь, что в случае $\alpha \not\equiv 0 \pmod{2}$ оператор

$$R_h = c \Delta I_{\beta, h} \Delta^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]},$$

где $I_{\beta, h}: L_2(\Omega_h) \rightarrow L_2(\Omega)$,

$$(I_{\beta, h} v)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{|x-y| \leq h} |x-y|^{\beta-n} \cdot v(y) dy, \quad (6)$$

$$\beta = 2 + 2\left[\frac{\alpha}{2}\right] - \alpha$$

при $h > 0$ удовлетворяет условиям теоремы. Достаточно рассмотреть случай $\alpha \in (0, 2)$, так как общий случай сводится к этому применению оператора $\Delta^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]}$. Итак, у нас $\alpha \in (0, 2)$, $\beta = 2 - \alpha$,

$R_h = c \Delta I_{\beta, h}$. Из (4), (6) имеем

$$I_{\beta, h} K_\alpha u = \int_{\Omega} K_0(|x-\xi|) u(\xi) d\xi + \int_{\Omega} K_1(x, \xi) u(\xi) d\xi = K_0 u + K_1 u, \quad (7)$$

где

$$K_0(|x-\xi|) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{|y-x| \leq h} |x-y|^{\beta-n} \cdot |y-\xi|^{\alpha-n} dy, \quad (8)$$

$$K_1(x, \xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{|y-x| \leq h} |x-y|^{\beta-n} \cdot |y-\xi|^{\alpha-n} (K(y, \xi) - 1) dy. \quad (9)$$

Далее

$$K_0 = K_{0,1} + K_{0,2}, \quad (10)$$

где (см.(8))

$$K_{0,1}(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\beta-n} \cdot |y-\xi|^{\alpha-n} dy,$$

$$K_{0,2}(r) = \frac{-1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{|y-x| \geq h} |x-y|^{\beta-n} \cdot |y-\xi|^{\alpha-n} dy. \quad (11)$$

В силу известной формулы (см. например, [7], стр. I39)

$$K_{0,1}(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} r^{\alpha+\beta-n} = \frac{1}{\Gamma(2)} r^{2-n}, \quad (12)$$

так как $\alpha + \beta = 2$. Из (5), (12) имеем

$$\Delta x K_{0,1}(r) = c \delta(x - \xi)$$

и, следовательно, (см. (7), (10))

$$R_h K_\alpha = c \Delta (K_{0,1} + K_{0,2} + K_1) = I + c \Delta (K_{0,2} + K_1).$$

Осталось показать, что операторы $\Delta K_{0,2}$, ΔK_1 - интегральные операторы со слабой особенностью.

Оценим $\Delta K_{0,2}$. Делая в формуле (II) линейную замену

$$y = x + rUz, \quad U^* \frac{x-\xi}{|x-\xi|} = e_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad (13)$$

(U - ортогональная матрица), получим:

$$K_{0,2}(r) = \frac{r^{2-n}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{|z| > \frac{h}{r}} |z|^{\beta-n} \cdot |z + e_1|^{\alpha-n} dz.$$

Отсюда непосредственным дифференцированием находим оценку

$$|\Delta_x K_{0,2}(r)| \leq c \cdot r^{-2}.$$

Следовательно, $\Delta K_{0,2}$ - интегральный оператор со слабой особенностью $2 < n$.

Оценим $\Delta_x K_1(x, \xi)$. Так как $h > 0$, то найдется такое N , что $d(\Omega) < N \cdot h$. Интеграл (9) разложим на три части:

$$\begin{aligned} K_1(x, \xi) &= \int_{|y-x| \leq \frac{r}{N+1}} + \int_{\frac{r}{N+1} < |y-x| \leq \frac{r}{N}} + \int_{\frac{r}{N} < |y-x| \leq h} = \\ &= K_{1,1} + K_{1,2} + K_{1,3}. \end{aligned}$$

В таком представлении подынтегральные особенности "разделены". Используя неравенства (2) и замену (13), нетрудно получить оценки:

$$\begin{aligned} |\Delta_x K_{1,j}| &\leq c \cdot r^{\delta-n}, \quad j = 1, 2, \\ |\Delta_x K_{1,3}| &\leq \begin{cases} c \cdot r^{-2} \ln \frac{1}{r}, & \delta=1, n=3 \\ c \cdot r^{-2} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что оператор ΔK_1 имеет слабую особенность. Теорема доказана.

2. Задача интегральной геометрии для одного семейства кривых в R^n

Как и в разделе I, через Ω_h ($h \geq 0$) обозначим h -окрестность ограниченной области $\Omega \subset R^n$. S_{n-1} - единичная сфера в R^n .

Пусть $\Gamma = \{\Gamma(x, \nu), x \in \Omega_h, \nu \in S_{n-1}\}$ - заданное семейство гладких параметризованных кривых $\Gamma(x, \nu)$ в Ω_h :

$$\Gamma(x, \nu): s \rightarrow \xi(s, x, \nu), \quad s \in (-\infty, \infty),$$

$$\xi \Big|_{s=0} = x, \quad \frac{d\xi}{ds} \Big|_{s=0} = v, \quad \xi(-s, x, -v) = \xi(s, x, v),$$

где s — длина кривой $\Gamma(x, v)$, отсчитываемая от точки x в направлении вектора v (в противоположном направлении v берется отрицательной). Относительно семейства кривых $\Gamma(x, v)$ сделаем следующие предположения.

1^0 . Для каждой фиксированной точки $x \in \Omega_n$ систему кривых $\Gamma(x, v)$, $v \in S_{n-1}$ можно принять за криволинейную систему координат в Ω_n , точнее, для любой точки $\xi \in \Omega_n$, $\xi \neq x$ существует единственная кривая $\Gamma(x, \xi) = \Gamma(x, v(x, \xi)) \in \Gamma$, соединяющая точки x и ξ такие, что отображение $y: \xi \rightarrow y(x, \xi) = s(x, \xi)v(x, \xi)$,

$$s(x, \xi) = \int_x^\xi ds \quad \text{вдоль } \Gamma(x, \xi)$$

есть диффеоморфизм области Ω_n на некоторую область $\tilde{\Omega}_{n,x}$, и

$$y_j(x, \xi) \in C^{2,1}(\bar{\Omega}_n \times \bar{\Omega}_n), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

2^0 . Отображение $\xi \rightarrow y(x, \xi)$ "изотропно" в следующем смысле:

$$|D_x^\alpha (g(x, \xi) - g(\xi, \xi))| \leq c_\alpha |x - \xi|^{1-|\alpha|}, \quad |\alpha| \leq 2,$$

$$g(\xi, \xi) \geq c > 0,$$

где
$$g(x, \xi) = \frac{|x - \xi|}{|y(x, \xi)|}.$$

З а м е ч а н и е I. Нетрудно показать, что геодезические метрики $ds = a(x)|dx|$ ($a \in C^4$) локально удовлетворяют условиям 1^0-2^0 . (Для $n=2$ доказательство этого факта содержится в работе [6]).

Для $u \in C(\bar{\Omega})$ ($u \equiv 0$ вне $\bar{\Omega}$) рассмотрим уравнение

$$(Pu)(x, v) = \int_{\Gamma(x, v)} \rho(\xi, x, v) u(\xi) d\xi = v(x, v), \quad x \in \Omega_n, \quad v \in S_{n-1}, \quad (1)$$

где $\rho(\xi, x, v)$ — заданная весовая функция. Требуется по функции $v(x, v)$ восстановить функцию u . Имеет место

Т е о р е м а 2. Пусть $\rho \in C_{\xi, x, v}^{0, 3, 2}(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}_n \times S_{n-1})$, $\rho(\xi, \xi, v) = \rho(\xi, \xi)$ не зависит от v и $\rho(\xi, \xi) \geq \rho_0 > 0$; кривые $\Gamma(x, v)$ удовлетворяют условиям $\Gamma^0 - 2^0$ ($h > 0$).

Тогда существует оператор R такой, что $RP = I + \tilde{P}$, где \tilde{P} — интегральный оператор со слабой особенностью в Ω .

С л е д с т в и е 1. Уравнение $Pu = v$ имеет конечное число линейно независимых решений.

С л е д с т в и е 2. Если область Ω достаточно мала, то решение уравнения (5) единственно и имеет место оценка устойчивости

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c \cdot \|RPu\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Применим к обеим частям уравнения (I) оператор S :

$$(Sv)(x) = \int_{|v|=1} v(x, v) d\omega_v, \quad x \in \Omega_n,$$

$d\omega_v$ — элемент поверхности единичной сферы.

Пользуясь инвариантностью меры $d\omega_v$ относительно вращения и четностью $\xi(s, x, v)$ по s, v , получим

$$\int_0^\infty \int_{|v|=1} (\rho(\xi, x, v) + \rho(\xi, x, -v)) u(\xi) d\omega_v ds = (Sv)(x). \quad (2)$$

Из условия Γ^0 имеем

$$dy = s^{n-1} ds d\omega_v = D\left(\frac{y}{\xi}\right) d\xi,$$

откуда

$$ds d\omega_v = \frac{D\left(\frac{y}{\xi}\right) d\xi}{s^{n-1}(x, \xi)},$$

и, следовательно, уравнение (2) можно переписать так:

$$\int_{\Omega} \frac{K(x, \xi)}{|x - \xi|^{n-1}} u(\xi) d\xi = (Sv)(x), \quad x \in \Omega_n,$$

где (см. 2⁰)

$$K(x, \xi) = (\varepsilon(x, \xi))^{n-1} \cdot (\rho(\xi, x, v(x, \xi)) + \rho(\xi, x, -v(x, \xi))) D(\xi).$$

В силу наложенных ограничений на функции ε, ρ, v , легко проверить, что ядро $K(x, \xi)$ удовлетворяет условиям теоремы I ($\delta = I$), поэтому оператор $R = R_n S$ (R_n определен в разделе I) является левым регуляризатором нашей задачи. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Из теоремы 2 следует, что результат В.Г.Романова по однозначности решения обратной кинематической задачи сейсмоки (см. [6] стр. 109) дословно переносится на случай любого $n \geq 3$. Теорему 2 можно использовать также для доказательства единственности задачи восстановления младших коэффициентов общих гиперболических уравнений ($n = 3$) по "кинематическим" функционалам от решения прямой задачи.

3. Задачи интегральной геометрии для семейства гиперповерхностей и их возмущения

Пусть G - открытое множество в R^m , а Ω_n в R^n ($m \geq n$); $p: G \times \Omega_n \rightarrow R$ ($(x, \xi) \rightarrow p(x, \xi)$, $x \in G$, $\xi \in \Omega_n$) - гладкая функция переменных x, ξ . Положим

$$\Gamma(x) = \{ \xi \in \bar{\Omega}_n \mid p(x, \xi) = 0 \},$$

$$\Gamma^*(\xi) = \{ x \in \bar{G} \mid p(x, \xi) = 0 \}.$$

Предположим, что $\Gamma(x)$, $\Gamma^*(\xi)$ - гладкие невырожденные гиперповерхности в R^n и R^m соответственно. В силу невырожденности Γ и Γ^* имеем

$$|D_{\xi} p(x, \xi)| \neq 0, \quad x \in \bar{G}, \quad \xi \in \Gamma(x),$$

$$|D_x p(x, \xi)| \neq 0, \quad \xi \in \bar{\Omega}_n, \quad x \in \Gamma^*(\xi).$$

Определим оператор P формулой

$$(Pu)(x) = \int_{\Omega} \delta(p(x, \xi)) u(\xi) d\xi, \quad u \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad (1)$$

где $\delta(p)$ - функция Дирака, сосредоточенная на поверхности $p=0$. Известно (см. [8]), что формула (1) эквивалентна формуле

$$(Pu)(x) = \int_{\Gamma(x)} \frac{u(\xi) d\sigma}{|D_{\xi} p(x, \xi)|}, \quad (2)$$

$d\sigma$ - евклидов элемент поверхности $\Gamma(x)$. Из формул (1)-(2) и неравенства Коши-Буняковского легко следует

Предложение I. Пусть

$$\int_{\Gamma(x)} \frac{d\sigma}{|D_{\xi} p(x, \xi)|} \leq c, \quad \int_{\Gamma^*(\xi)} \frac{d\sigma}{|D_x p(x, \xi)|} \leq c^*.$$

Тогда $\|Pu\|_{L_2(G)} \leq \sqrt{c c^*} \|u\|_{L_2(Q)}$.

Другими словами, замыкание оператора P (которое будем обозначать той же буквой P) определяет ограниченный оператор, действующий из $L_2(Q)$ в $L_2(G)$.

Следующие условия являются достаточными для того, чтобы оператор P имел левый регуляризатор.

Γ^0 . Пусть существует отображение

$$\kappa: \Omega_n \times S_{n-1} \rightarrow G \quad ((\xi_0, \nu) \rightarrow x(\xi_0, \nu) = \kappa(\xi_0, \nu))$$

класса $C^k(\bar{\Omega}_n \times S_{n-1})$ такое, что

$$\text{рои} \Big|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \frac{D_{\xi}(\text{рои})}{|D_{\xi}(\text{рои})|} \Big|_{\xi=\xi_0} = \nu. \quad (3)$$

Здесь $\text{рои} \equiv p(\kappa(\xi_0, \nu), \xi)$, $p(x, \xi) \in C_{x, \xi}^{k, 2}(\bar{\Omega}_n \times G)$.

Из условий (3) и формулы Тейлора имеем

$$p_1(\xi, \xi_0, \nu) \equiv \frac{\text{рои}}{|D_{\xi}(\text{рои})|} = \langle \xi - \xi_0, \nu \rangle + \langle A(\xi, \xi_0, \nu)(\xi - \xi_0), (\xi - \xi_0) \rangle,$$

где A - матрица вторых производных функции p_1 . Введем следующие обозначения: $Q = \Omega \times \Omega_n \times S_{n-1}$,

$$\|A\|_{C(Q)} = \sup \|A(\xi, \xi_0, \nu)\|, \quad (\xi, \xi_0, \nu) \in Q;$$

$$\|D_\nu A\|_{C(Q)} = \left\{ \sum_{j=1}^n \|D_{\nu_j} A\|_{C(Q)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Теперь мы можем сформулировать условие 2⁰. Существует $\mu \in (0, 1)$ такое, что

$$\|A\|_{C(Q)} \cdot d(\Omega) < \mu,$$

$$\sqrt{2} \cdot \|D_\nu A\|_{C(Q)} \cdot d(\Omega) < \sqrt{1 - \mu^2}.$$

Определим операторы: $S: L_2(G) \rightarrow L_2(\Omega_h)$

$$(S\nu)(\xi_0) = \int_{|\nu|=1} (\nu \circ \xi) d\omega_\nu,$$

$$R = R_h S,$$

где R_h - оператор, построенный в разделе I.

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия 1⁰-2⁰. Тогда при $h > 0$ и $k = 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ имеем

$$RP = I + \tilde{P},$$

где \tilde{P} - вполне непрерывный оператор в $L_2(\Omega)$ (точнее, интегральный оператор со слабой особенностью). Если n - нечетное, то можно взять $h = 0$, $\Omega_h = \Omega$.

По пространствам $X = L_2(\Omega)$, $Y = L_2(G)$ и оператору R построим гильбертово пространство $Z \subset Y$ (см. введение (2)). Отметим очевидные следствия теоремы 3.

С л е д с т в и е 1. Для того чтобы уравнение $Pu = f$ имело решение $u \in L_2(\Omega)$, необходимо и достаточно чтобы $f \in Z$ и было ортогонально ядру оператора $(P_{X \rightarrow Z})^*$.

С л е д с т в и е 2. $\dim \text{Ker } P < \infty$.

С л е д с т в и е 3. Если $d(\Omega)$ достаточно мал, то $\text{Ker } P = \{0\}$, и имеет место оценка

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|RPu\|_{L_2(\Omega)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Применяя к уравнению $Pu = f$ оператор S , получим

$$\int_{\Omega} \frac{K(\xi_0, \xi)}{|\xi_0 - \xi|} u(\xi) d\xi = (Sf)(\xi_0), \quad \xi_0 \in \Omega_n,$$

$$K(\xi_0, \xi) = \int_{|\nu|=1} \delta\left(\frac{\text{рои}}{|\xi_0 - \xi|}\right) d\omega_{\nu}.$$

В силу предположений Γ^0-2^0 ядро $K(\xi_0, \xi)$ удовлетворяет условиям теоремы I. (Подробное доказательство аналогичного факта дано в работе [5]). Ссылка на теорему I завершает доказательство.

Пусть оператор P удовлетворяет условиям теоремы 3.

О п р е д е л е н и е. Оператор $Q: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(G)$ слабее оператора P , если RQ — вполне непрерывный оператор в $L_2(\Omega)$.

Ясно, что если Q слабее P , то теорема 3 автоматически справедлива для оператора $P + Q$.

П р и м е р 1.

$$(Qu)(x) = \int_{\Omega} q(x, \xi) u(\xi) d\xi, \quad x \in G.$$

П р и м е р 2.

$$(Qu)(x) = \int_{\Omega} q(x, \xi) \theta(p(x, \xi)) u(\xi) d\xi, \quad x \in G,$$

$\theta(p)$ — функция Хевисайда.

Если в этих примерах $q \in C_{x, \xi}^{k, 0}(\bar{G} \times \bar{\Omega})$, $k=2[\frac{n}{2}]$, то нетрудно проверить, что Q слабее P .

Л и т е р а т у р а

- I. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. Обратные задачи и специальные операторные уравнения первого рода. — В кн.: Международный конгресс математиков в Ницце. М., "Наука", 1972, с. 130-136.

2. РОМАНОВ В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд. НГУ, 1973, с.252.
3. ЗАБРЕЙКО П.П., КОШЕЛЕВ А.И., КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А. и др. Интегральные уравнения. М., "Наука", 1968, с.448.
4. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., БУХГЕЙМ А.Л. Об одном классе задач интегральной геометрии.-ДАН СССР, 1973, т.211, №1, с.38-39.
5. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., БУХГЕЙМ А.Л. Об одном классе операторных уравнений первого рода.-Функциональный анализ, 1973, т.7, вып.4, с.44-53.
6. РОМАНОВ В.Г. Об однозначности решения обратной кинематической задачи в круге в классе скоростей, близких к постоянным.-В сб.: Математические проблемы геофизики. Вып.5, часть 2, Новосибирск, 1974, с.108-142.
7. СТЕЙН И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., "Мир", 1973, с.342.
8. ГЕЛЬФАНД И.М., ШИЛОВ Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958, с.470.

В.Г.Васильев

О ФУНКЦИОНАЛАХ НА РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
I-го РОДА

Пусть $A\varphi = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$, A - действующий в $L_2(a, b)$ самосопряженный оператор Фредгольма с полным ядром.

Рассмотрим уравнение

$$A\varphi = f, \quad (1)$$

имеющее единственное решение.

Пусть требуется вычислить линейный функционал $(\varphi, g) = \int_a^b \varphi(s)g(s)ds$, где $\varphi(s)$ - решение уравнения (I), а g - заданный элемент $L_2(a, b)$. Если, кроме того, известен элемент $g_1 \in L_2(a, b)$ такой, что $g = Ag_1$, то $(\varphi, g) = (\varphi, Ag_1) = (A^*\varphi, g_1) = (A\varphi, g_1) = (f, g_1)$. Если правая часть уравнения (I) известна с погрешностью, то есть если вместо f известен элемент $\tilde{f} = f + \Delta f \in R(A)$, $R(A)$ - область значений оператора A , то $\tilde{\varphi} = \varphi + \Delta\varphi$, $A\tilde{\varphi} = \tilde{f}$.

Тогда

$$(\tilde{\varphi}, g) = (\tilde{\varphi}, Ag_1) = (\tilde{f}, g_1),$$

причем погрешность этой формулы с помощью неравенства Буняковского-Шварца можно оценить так:

$$|(\tilde{\Phi}, \varepsilon) - (\Phi, \varepsilon)| \leq \|\varepsilon_1\| \|\Delta f\|,$$

$$\frac{|(\tilde{\Phi}, \varepsilon) - (\Phi, \varepsilon)|}{\|\Delta \Phi\|} \leq \|\varepsilon_1\| \cdot \|A\|.$$

Существенным предположением здесь является то, что элемент ε представим в виде $\varepsilon = A\varepsilon_1$. Ниже мы получим оценки некоторых функционалов на решении интегрального уравнения первого рода, не используя равенства $\varepsilon = A\varepsilon_1$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (2)$$

имеющее единственное положительное и непрерывное решение $\varphi(s)$, причем $K(x, s)$ — положительная непрерывная функция.

Если $g(s)$ — непрерывная положительная функция, то из (2) следует

$$\int_a^b \frac{K(x, s)}{g(s)} g(s)\varphi(s)ds = f(x),$$

где $\frac{K(x, s)}{g(s)}$ — непрерывная функция, а $g(s)\varphi(s) > 0$. Следовательно, по теореме о среднем имеем

$$\frac{K(x, \eta(x))}{g(\eta(x))} \int_a^b g(s)\varphi(s)ds = f(x), \quad \eta(x) \in (a, b). \quad (3)$$

Если равенство (3) рассматривать при $x = x_1$, где $f(x_1) = \inf_{x \in (a, b)} f(x)$, то получим оценку сверху

$$\int_a^b g(s)\varphi(s)ds < f(x_1) \sup_{\eta_1 \in (a, b)} \frac{g(\eta_1)}{K(x_1, \eta_1)} = A.$$

Рассматривая равенство (3) при $x = x_2$, где $f(x_2) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$, получим оценку снизу

$$\int_a^b g(s)\varphi(s)ds > f(x_2) \inf_{\eta_2 \in (a,b)} \frac{g(\eta_2)}{K(x_2, \eta_2)} = B.$$

Если разность $A-B$ мала, то за приближенное значение рассматриваемого функционала естественно принять величину $C = \frac{1}{2}(A+B)$.

Получим оценки для функционала $J = \int_c^{c+\Delta c} \varphi(s)ds$, $c \geq a$, $c + \Delta c \leq b$, где $\varphi(s)$ — решение уравнения (2). Для этого рассмотрим новую неизвестную функцию $\psi(s) = K(x_0, s)\varphi(s)$, $x_0 \in [a, b]$, и уравнение (2) запишем в виде

$$\int_a^b \frac{K(x, s)}{\gamma_\alpha(s)K(x_0, s)} \gamma_\alpha(s)\psi(s)ds = f(x), \quad (4)$$

где $\gamma_\alpha(s)$ — непрерывная положительная функция, которую определим так:

$$\gamma_\alpha(s) = \begin{cases} \alpha, & s \in [a, c - \varepsilon) \\ \frac{1}{\varepsilon}(s - c + \varepsilon) + \alpha, & s \in [c - \varepsilon, c) \\ \alpha + 1, & s \in [c, c + \Delta c) \\ -\frac{1}{\varepsilon}(s - c - \Delta c - \varepsilon) + \alpha, & s \in [c + \Delta c, c + \Delta c + \varepsilon) \\ \alpha, & s \in [c + \Delta c + \varepsilon, b] \end{cases}$$

α, ε — положительные константы, причем ε предполагается достаточно малой.

По теореме о среднем из (4) следует, что

$$\frac{K(x, \xi)}{\gamma_\alpha(\xi)K(x_0, \xi)} \int_a^b \gamma_\alpha(s)\psi(s)ds = f(x), \quad \xi = \xi(x) \in (a, b). \quad (5)$$

Учитывая, что $\gamma_\alpha = \gamma_0 + \alpha$, где γ_0 есть γ_α при $\alpha = 0$, из (5) получим

$$\frac{f(x)\gamma_\alpha(\xi)K(x_0, \xi)}{K(x, \xi)} = \int_a^b \gamma_\alpha(s)\psi(s)ds =$$

$$= \alpha f(x_0) + \int_a^b \gamma_0(s)\psi(s)ds = \alpha f(x_0) +$$

$$+ \int_{c-\varepsilon}^c \gamma_0(s)\psi(s)ds + \int_c^{c+\Delta c} \psi(s)ds + \int_{c+\Delta c}^{c+\Delta c+\varepsilon} \gamma_0(s)\psi(s)ds.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \int_c^{c+\Delta c} \psi(s)ds &= \frac{f(x)\gamma_\alpha(\xi)K(x_0, \xi)}{K(x, \xi)} - \alpha f(x_0) - \\ &- \int_{c-\varepsilon}^c \gamma_0(s)\psi(s)ds - \int_{c+\Delta c}^{c+\Delta c+\varepsilon} \gamma_0(s)\psi(s)ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая в равенстве (6) $x = x_1$, где $f(x_1) = \inf_{x \in (a, b)} f(x)$, получим

$$\int_c^{c+\Delta c} \psi(s)ds < f(x_1) \sup_{\xi \in (a, b)} \frac{\gamma_\alpha(\xi)K(x_0, \xi)}{K(x_1, \xi)} - \alpha f(x_0). \quad (7)$$

Из теоремы о среднем также следует, что

$$\begin{aligned} \int_c^{c+\Delta c} \psi(s)ds &= \int_c^{c+\Delta c} K(x_0, s)\varphi(s)ds = K(x_0, \eta) \int_c^{c+\Delta c} \varphi(s)ds, \quad \eta \in (c, c+\Delta c), \\ \int_c^{c+\Delta c} \psi(s)ds &= \frac{1}{K(x_0, \eta)} \int_c^{c+\Delta c} \psi(s)ds < \frac{1}{\inf_{\eta \in (c, c+\Delta c)} K(x_0, \eta)} \int_c^{c+\Delta c} \psi(s)ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\int_c^{c+\Delta c} \psi(s)ds < \frac{1}{\inf_{\eta \in (c, c+\Delta c)} K(x_0, \eta)} (f(x_1) \sup_{\xi \in (a, b)} \frac{\gamma_\alpha(\xi)K(x_0, \xi)}{K(x_1, \xi)} - \alpha f(x_0)).$$

Полагая в (6) $x = x_2$, где $f(x_2) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$, получим

$$\int_c^{c+\Delta c} \psi(s) ds > f(x_2) \inf_{\xi \in (a, b)} \frac{\gamma_\alpha(\xi) K(x_0, \xi)}{K(x_2, \xi)} - \alpha f(x_0) -$$

$$- \int_{c-\varepsilon}^c \gamma_0(s) \psi(s) ds - \int_{c+\Delta c}^{c+\Delta c+\varepsilon} \gamma_0(s) \psi(s) ds. \quad (9)$$

Так как $\gamma_0 \leq 1$, то

$$\int_{c-\varepsilon}^c \gamma_0(s) \psi(s) ds < \int_{c-\varepsilon}^c \psi(s) ds, \quad \int_{c+\Delta c}^{c+\Delta c+\varepsilon} \gamma_0(s) \psi(s) ds < \int_{c+\Delta c}^{c+\Delta c+\varepsilon} \psi(s) ds.$$

Поэтому

$$\int_c^{c+\Delta c} \psi(s) ds > f(x_2) \inf_{\xi \in (a, b)} \frac{\gamma_\alpha(\xi) K(x_0, \xi)}{K(x_2, \xi)} -$$

$$- \alpha f(x_0) - \int_{c-\varepsilon}^c \psi(s) ds - \int_{c+\Delta c}^{c+\Delta c+\varepsilon} \psi(s) ds$$

или

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\Delta c+\varepsilon} \psi(s) ds > f(x_2) \inf_{\xi \in (a, b)} \frac{\gamma_\alpha(\xi) K(x_0, \xi)}{K(x_2, \xi)} - \alpha f(x_0). \quad (10)$$

Из теоремы о среднем имеем

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\Delta c+\varepsilon} \psi(s) ds = \int_{c-\varepsilon}^{c+\Delta c+\varepsilon} K(x_0, s) \psi(s) ds =$$

$$= K(x_0, \eta) \int_{c-\varepsilon}^{c+\Delta c+\varepsilon} \varphi(s) ds, \quad \eta \in (c-\varepsilon, c+\Delta c+\varepsilon), \quad (11)$$

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\Delta c+\varepsilon} \varphi(s) ds = \frac{1}{K(x_0, \eta)} \int_{c-\varepsilon}^{c+\Delta c+\varepsilon} \psi(s) ds > \frac{1}{\sup_{\eta \in (c-\varepsilon, c+\Delta c+\varepsilon)} K(x_0, \eta)} \int_{c-\varepsilon}^{c+\Delta c+\varepsilon} \psi(s) ds.$$

Из (10), (11) следует оценка

$$\int_{c-\varepsilon}^{c+\Delta c+\varepsilon} \varphi(s) ds > \frac{1}{\sup_{\eta \in (c-\varepsilon, c+\Delta c+\varepsilon)} K(x_0, \eta)} (f(x_2) \inf_{\xi \in (a, b)} \frac{\gamma_\alpha(\xi) K(x_0, \xi)}{K(x_2, \xi)} - \alpha f(x_0)).$$

Из равенства

$$\int_c^{c+\Delta c} \varphi(s) ds = \int_c^{c+\Delta c} K(x_0, s) \varphi(s) ds = \varphi(\eta) \int_c^{c+\Delta c} K(x_0, s) ds, \quad \eta \in (c, c+\Delta c)$$

и неравенства (7) следует, что

$$\varphi(\eta) < \frac{1}{\int_c^{c+\Delta c} K(x_0, s) ds} (f(x_1) \sup_{\xi \in (a, b)} \frac{\gamma_\alpha(\xi) K(x_0, \xi)}{K(x_1, \xi)} - \alpha f(x_0)).$$

Аналогично можно получить оценку снизу для $\varphi(\xi)$, $\xi \in (c-\varepsilon, c + \Delta c + \varepsilon)$.

Если правая часть интегрального уравнения (2) известна в конечном числе точек $x = x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$, $n \geq 1$, то

в вышеприведенных оценках следует положить $f(x_1) = \min_{1 \leq k \leq n} f(x^{(k)})$, $f(x_2) = \max_{1 \leq k \leq n} f(x^{(k)})$. При $n=1$ имеем $x_2 = x_1 = x_0$.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\int_1^2 \frac{s}{x+s} \varphi(s) ds = \ln \frac{x+2}{x+1}, \quad x \in [1, 2],$$

имеющее решение $\varphi(s) = \frac{1}{s}$. Если $g=1$, то $B=0,608$,
 $A=0,863$, $C = \frac{1}{2} (A+B) = 0,735$, $\int_1^2 \varphi(s) ds = \int_1^2 \frac{ds}{s} = 0,693$, аб-
 солютная погрешность $\Delta = C - \int_1^2 \varphi(s) ds = 0,042$, относи-
 тельная погрешность $\frac{\Delta}{C} \cdot 100\% = 6\%$.

А.С.Запреев

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ
В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

Большое количество задач геофизики, оптики, радиофизики, теории информации, теории линейных фильтров сводятся к исследованию решения одного из следующих уравнений.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) ds = h(t), \\ & \int_0^{\infty} f(t-s) g(s) ds = h(t), \\ & \int_0^t f(t-s) g(s) ds = h(t). \end{aligned} \quad (1)$$

В дальнейшем под уравнением (I) будем понимать одно из этих уравнений. Здесь функции $h(t)$ и $f(t)$ считаются известными, а $g(t)$ - искомой. Исследованиями уравнения (I), в частности построениями различных типов регуляризации его решения, много занимался А.Н.Тихонов, а также В.Н.Страхов (особенно в связи с задачами геофизики).

Отметим, что задача определения решения $g(t)$ уравнения (I) классически некорректна (см. [1]). Поэтому одним из методов исследования таких задач является метод выделения классов корректности, изложенный в книге М.М.Лаврентьева [2]. Основная проблема при таком подходе состоит в выделении клас-

сов корректности для функций, входящих в уравнения (I), для которых доказываются теоремы единственности и устойчивости.

Потребность в оценках устойчивости решения уравнения (I), типа рассмотренных ниже, возникла при решении обратной динамической задачи сейсмоки [1], а также отмечалась в книге Я.И.Хургина и В.П.Яковлева [3] в связи с рядом задач радиофизики, оптики и теории информации.

I. Пусть дано уравнение (I). В работе выделены некоторые достаточно широкие классы функций, в которых, при априорном предположении существования решения этого уравнения, доказывается теорема единственности и выводятся оценки устойчивости решения $g(t)$ при вариациях правой части $h(t)$ и ядра $f(t)$, не выводящих из рассматриваемых классов. Уравнение (I) будем рассматривать в классах функций из пространства L_2 .

Будем говорить, что функция $g(t)$ принадлежит классу G , если: 1) $g(t)$ удовлетворяет уравнению (I); 2) $g(t)$ - функция из пространства L_2 ; 3) преобразование Фурье $\tilde{g}(\omega)$ функции $g(t)$ принадлежит пространству L_1 . Будем говорить, что функция $f(t)$ принадлежит классу F , если: 1) $f(t)$ - ядро уравнения (I); 2) $f(t)$ принадлежит пространству L_2 ; 3) для ее преобразования Фурье $\tilde{f}(\omega)$ выполнено следующее неравенство:

$$|\tilde{f}(\omega)| \geq c e^{-\alpha|\omega|} \quad (2)$$

$-\infty \leq \omega \leq \infty$; c, α - положительные, действительные числа (свои для каждой функции $f(t)$). И, наконец, будем говорить, что функция $h(t)$ принадлежит классу H , если: 1) $h(t)$ - правая часть уравнения (I); 2) $h(t)$ - функция из пространства L_2 .

2. Покажем, что в рассматриваемых классах решение уравнения (I) единственно. Так как для функций из классов G, F, H преобразования Фурье существуют [2], то применяя к уравнению (I) преобразование Фурье, по теореме о свертке [2] имеем:

$$\tilde{f}(\omega) \cdot \tilde{g}(\omega) = \tilde{h}(\omega). \quad (3)$$

Из неравенства (2) следует, что $\tilde{f}(\omega)$ в нуль не обращается, поэтому можем разрешить уравнение (3) относительно $\tilde{g}(\omega)$. Далее, применяя обратное преобразование Фурье, найдем $g(t)$ в виде

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} e^{i\omega t} d\omega. \quad (4)$$

Из полученного равенства (4) и из единственности преобразования Фурье [2] теперь следует единственность решения $g(t)$ уравнения (1).

3. В дальнейшем нам понадобится следующая

Л е м м а. Пусть $g(t)$, $f(t)$, $h(t)$ — функции соответственно из классов G , F , H . Тогда для любого $0 \leq \theta \leq \infty$ имеет место неравенство

$$|g(t)| \leq \frac{e^{\Omega\theta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\tilde{h}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} \right| e^{-\theta|\omega|} d\omega, \quad (5)$$

где $\Omega > 0$ — число, в общем случае зависящее от θ и от функции $|\tilde{g}(\omega)|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$|g(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\omega)| d\omega, \quad (6)$$

а $\tilde{g}(\omega)$ принадлежит пространству $L_1(-\infty, \infty)$, то на основании теоремы о среднем можем написать

$$\frac{e^{-\theta\Omega}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\omega)| d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\omega)| e^{-\theta|\omega|} d\omega, \quad (7)$$

где $0 \leq \theta \leq \infty$. С другой стороны, из равенства (3) $\tilde{g}(\omega) = \tilde{h}(\omega)/\tilde{f}(\omega)$, поэтому из (7) находим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\omega)| d\omega = \frac{e^{\Omega\theta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\tilde{h}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} \right| e^{-\theta|\omega|} d\omega, \quad (8)$$

Из (6) и (8) получаем требуемое неравенство (5).

З а м е ч а н и е. В случае, если априори известно, что функция $\tilde{g}(\omega)$ финитна и носитель ее сосредоточен на конечном числе интервалов $[a_i, b_i]$, ($i = 1, \dots, k$), то Ω можно выбрать не зависящим ни от ϵ , ни от конкретного вида функции $|\tilde{g}(\omega)|$. В этом случае вместо соотношения (7) имеет место неравенство

$$\frac{e^{-\Omega\theta}}{2\pi} \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} |\tilde{g}(\omega)| d\omega \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} |\tilde{g}(\omega)| e^{-\theta|\omega|} d\omega,$$

где $\Omega = \max_{i=1, \dots, k} \{|a_i|, |b_i|\}$ для любого значения

$$\theta \geq 0.$$

4. Исследуем устойчивость решения уравнения (I) при вариациях правой части, не выводящих из рассматриваемых классов функций.

Т е о р е м а I. Пусть $g(t)$, $f(t)$, $h(t)$ — функции соответственно из классов G , F , H . Пусть $h_1(t)$ — такая функция, что: 1) $h_1(t)$ принадлежит классу H ; 2) $\|h_1(t) - h(t)\|_{L_2} \leq \delta$, где $\delta > 0$. Если $g_1(t)$ — решение уравнения (I) с правой частью $h_1(t)$, то имеет место неравенство

$$|g(t) - g_1(t)| \leq M\delta, \quad (9)$$

$$\text{где } M = \min_{\alpha < \theta \leq \infty} \left\{ \frac{e^{\Omega\theta} (\theta - \alpha)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi\epsilon} \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу линейности уравнения (I), очевидно, можно считать, что $h(t) \equiv 0$, и, следовательно, требуется оценить $|g_1(t)|$ при условии, что $\|h_1(t)\|_{L_2} \leq \delta$.

Используя неравенство (5), получаем

$$|g_1(t)| \leq \frac{e^{\Omega_1\theta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}_1(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} |e^{-\theta|\omega|} d\omega. \quad (11)$$

Оценим правую часть неравенства (II) с помощью неравенства Коши-Буняковского

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\tilde{h}_1(\omega)}{f(\omega)} \right| e^{-\theta|\omega|} d\omega \leq \|\tilde{h}_1(\omega)\|_{L_2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\theta|\omega|}}{|f(\omega)|^2} d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, применяя равенство Парсеваля $\|\tilde{h}_1(\omega)\|_{L_2} = \|h_1(t)\|_{L_2}$, неравенство (II) и условие $\|h_1(t)\|_{L_2} \leq \delta$, находим, что

$$|g_1(t)| \leq \frac{e^{\Omega_1 \theta}}{2\pi} \|h_1(t)\|_{L_2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\theta|\omega|}}{|f(\omega)|^2} d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\delta e^{\Omega_1 \theta}}{2\pi} \cdot I^2(\theta). \quad (12)$$

Исследуем зависимость интеграла в правой части (I2) от параметра θ . Исходя из условия (2), выводим

$$I(\theta) \leq \frac{2}{c^2} \int_0^{\infty} e^{-2\omega(\theta-\alpha)} d\omega = \frac{2}{c^2} \cdot \begin{cases} \infty, & \theta \leq \alpha \\ \frac{1}{2(\theta-\alpha)}, & \theta > \alpha \end{cases} = \begin{cases} \infty, & \theta \leq \alpha \\ [c^2(\theta-\alpha)]^{-1}, & \theta > \alpha. \end{cases} \quad (13)$$

Так как параметр $\theta \geq 0$ произволен, то, полагая $\theta > \alpha$, из (I2) и (I3) получаем оценку

$$|g_1(t)| \leq \delta \cdot \frac{e^{\Omega_1 \theta} (\theta-\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi c} \quad (14)$$

Неравенство (I4) выполнено для любого $\theta > \alpha$, поэтому если обозначить $\min_{\alpha < \theta \leq \infty} \{e^{\Omega_1 \theta} (\theta-\alpha)^{-\frac{1}{2}} / 2\pi c\}$ через M , то полу-

чим требуемое неравенство $|g_1(t)| \leq M\delta$. Понятно, что $0 < M < \infty$. Когда $h(t) \neq 0$, то вместо Ω_1 , в выражении типа (I4) будет некоторое Ω , зависящее от $|\tilde{h}(\omega) - \tilde{h}_1(\omega)|$.

5. Теперь исследуем устойчивость решения уравнения (I) при одновременном варьировании как правой части, так и ядра уравнения, соответственно в классах H и F .

Т е о р е м а 2. Пусть $g(t)$ и $g_1(t)$, $f(t)$ и $f_1(t)$,

$h(t)$ и $h_1(t)$ - функции соответственно из классов G, F, H.
 Пусть: 1) $\|h(t) - h_1(t)\|_{L_2} \leq \delta$, где $\delta > 0$; 2) $\|f(t) - f_1(t)\|_{L_2} \leq \epsilon$, где $\epsilon > 0$. Кроме того, пусть выполнено одно из условий

$$|\tilde{g}_1(\omega)| \leq K \quad (15)$$

или
$$|\tilde{h}_1(\omega)| \leq K. \quad (16)$$

Если $g_1(t)$ - решение уравнения (I) с правой частью $h_1(t)$ и ядром $f_1(t)$, тогда справедливо неравенство

$$|g(t) - g_1(t)| \leq M(\delta + K\epsilon), \quad (17)$$

где, в зависимости от того выполняется (15) или (16), M имеет значение

$$M = \min_{\alpha < \theta \leq \infty} \left\{ \frac{e^{\Omega\theta} (\theta - \alpha)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi c} \right\} \quad (18)$$

или значение $M = \min_{\alpha + \alpha_1 < \theta \leq \infty} \left\{ \frac{e^{\Omega\theta}}{2\pi} \cdot \max \left\{ \frac{(\theta - \alpha)^{-\frac{1}{2}}}{c}, \frac{[\theta - (\alpha + \alpha_1)]^{-\frac{1}{2}}}{c \cdot c_1} \right\} \right\}$.

$$(19)$$

Доказательство. Применяя к уравнениям с точными и варьированными данными преобразование Фурье, с помощью теоремы о свертке [2] и, воспользовавшись принадлежностью функций $f(t)$ и $f_1(t)$ классу F, получим, что справедливы выражения

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{\tilde{h}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)}, \quad (20)$$

$$\tilde{g}_1(\omega) = \frac{\tilde{h}_1(\omega)}{\tilde{f}_1(\omega)} \quad (21)$$

Вычитая почленно из (20) равенство (21) и применяя к разности обратное преобразование Фурье, находим, что

$$g(t) - g_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{g}(\omega) - \tilde{g}_1(\omega)] e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\tilde{h}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} - \frac{\tilde{h}_1(\omega)}{\tilde{f}_1(\omega)} \right] e^{i\omega t} d\omega \quad (22)$$

Воспользовавшись неравенством (5), получаем

$$|g(t) - g_1(t)| \leq \frac{e^{-2\theta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\tilde{h}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} - \frac{\tilde{h}_1(\omega)}{\tilde{f}_1(\omega)} \right| e^{-\theta|\omega|} d\omega \quad (23)$$

Перепишем интеграл, стоящий в правой части этого неравенства, следующим образом:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\tilde{h}(\omega) - \tilde{h}_1(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} + \frac{\tilde{f}_1(\omega) - \tilde{f}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} \cdot \frac{\tilde{h}_1(\omega)}{\tilde{f}_1(\omega)} \right| e^{-\theta|\omega|} d\omega \quad (24)$$

Пользуясь неравенством треугольника и неравенством Коши-Буняковского, выводим

$$I \leq \|\tilde{h}(\omega) - \tilde{h}_1(\omega)\|_{L_2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\theta|\omega|}}{|\tilde{f}(\omega)|^2} d\omega \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + \|\tilde{f}_1(\omega) - \tilde{f}(\omega)\|_{L_2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\theta|\omega|}}{|\tilde{f}(\omega)|^2} \cdot \left| \frac{\tilde{h}_1(\omega)}{\tilde{f}_1(\omega)} \right|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

Применяя здесь равенства Парсеваля $\|\tilde{h}(\omega) - \tilde{h}_1(\omega)\|_{L_2} = \|h(t) - h_1(t)\|_{L_2}$, $\|\tilde{f}_1(\omega) - \tilde{f}(\omega)\|_{L_2} = \|f_1(t) - f(t)\|_{L_2}$

и условия теоремы $\|h(t) - h_1(t)\|_{L_2} \leq \delta, \|f(t) - f_1(t)\|_{L_2} \leq \varepsilon$,
 получаем из последнего неравенства и неравенства (23), что

$$|g(t) - g_1(t)| \leq \frac{\delta}{2\pi} \cdot e^{\Omega\theta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\theta|\omega|}}{|\tilde{f}(\omega)|^2} d\omega \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot e^{\Omega\theta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\theta|\omega|}}{|\tilde{f}(\omega)|^2} \cdot \left| \frac{\tilde{h}_1(\omega)}{\tilde{f}_1(\omega)} \right|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

а) Пусть выполнено условие (I5). Тогда для второго интеграла в (24), используя равенство (2I), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\theta|\omega|}}{|\tilde{f}(\omega)|^2} \cdot \left| \frac{\tilde{h}_1(\omega)}{\tilde{f}_1(\omega)} \right|^2 d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\theta|\omega|}}{|\tilde{f}(\omega)|^2} \cdot |\tilde{g}_1(\omega)|^2 d\omega \leq$$

$$\leq K^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\theta|\omega|}}{|\tilde{f}(\omega)|^2} d\omega.$$

Отсюда и из (24) следует неравенство

$$|g(t) - g_1(t)| \leq (\delta + K\varepsilon) \cdot \frac{e^{\Omega\theta}}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\theta|\omega|}}{|\tilde{f}(\omega)|^2} d\omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

Правая часть (25) зависит от параметра θ так же, как и правая часть в выражении (I2). Поэтому, как и в предыдущем пункте, получаем оценку

$$|g(t) - g_1(t)| \leq M(\delta + K\varepsilon),$$

где M - величина, определяемая по формуле (I8).

в) Пусть выполнено условие (I6). Тогда для первого интеграла в выражении (24) имеется оценка (I3), а второй оцениваем следующим образом:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\theta|\omega|}}{|\tilde{f}(\omega)|^2} \cdot \left| \frac{\tilde{h}_1(\omega)}{\tilde{f}_1(\omega)} \right|^2 d\omega \leq K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\theta|\omega|}}{|\tilde{f}(\omega)|^2 \cdot |\tilde{f}_1(\omega)|^2} d\omega.$$

Используя условие (2), соответственно для $\tilde{f}(\omega)$ и $\tilde{f}_1(\omega)$, продолжим неравенство

$$I_1 \leq \frac{2K^2}{c^2 \cdot c_1^2} \int_0^{\infty} e^{-2\omega[\theta - (\alpha + \alpha_1)]} d\omega = \begin{cases} \infty, & \theta \leq \alpha + \alpha_1 \\ \frac{K^2}{c^2 \cdot c_1^2} \cdot [\theta - (\alpha + \alpha_1)]^{-1}, & \theta > \alpha + \alpha_1 \end{cases} \quad (26)$$

Так как $\theta \geq 0$ произвольно, то, полагая $\theta > \alpha + \alpha_1$, из (24), используя неравенства (13) и (26), получаем

$$|g(t) - g_1(t)| \leq \frac{e^{\Omega\theta}}{2\pi} \left\{ \frac{e \cdot (\theta - \alpha)^{-\frac{1}{2}}}{c} + \frac{\epsilon \cdot K \cdot [\theta - (\alpha + \alpha_1)]^{-\frac{1}{2}}}{c \cdot c_1} \right\}. \quad (27)$$

Отсюда, обозначая

$$M = \min_{\alpha + \alpha_1 < \theta \leq \infty} \left\{ \frac{e^{\Omega\theta}}{2\pi} \cdot \max \left\{ \frac{(\theta - \alpha)^{-\frac{1}{2}}}{c}, \frac{[\theta - (\alpha + \alpha_1)]^{-\frac{1}{2}}}{c \cdot c_1} \right\} \right\},$$

получим требуемую оценку (17).

З а м е ч а н и е. Оценки (9) и (17) были получены в предположении, что спектры функций $f(t)$ и $f_1(t)$ отличны от нуля на всей действительной оси. Такие же оценки, очевидно, получаются и в случае финитных спектров у функций, входящих в уравнения (1), если: 1) интервалы частот, где спектры функций $f(t)$ и $f_1(t)$ отличны от нуля, включают в себя интервалы частот, где отличны от нуля спектры соответствующих искомым функций $g(t)$ и $g_1(t)$. (В противном случае решение уравнения будет неединственным); 2) выполнены наложенные выше условия на классы функций.

З а м е ч а н и е 2. Классе рассматриваемых ядер F можно

существенно расширить, налагая более общее ограничение на спектры функций $f(t)$ из классов F . А именно: потребуем вместо неравенства (2) выполнения условия

$$|\tilde{f}(\omega)| \geq a(\omega, \alpha), \quad (28)$$

где α - число из нижеопределенного интервала J (свое для каждой функции), а функция $a(\omega, \alpha)$ удовлетворяет следующим требованиям: 1) $a(\omega, \alpha)$ - определена для всех $-\infty \leq \omega \leq \infty$ и для всех θ из интервала J , где J - конечный или бесконечный числовой интервал; 2) $a(\omega, \alpha) > 0$; 3) $a(\omega, \alpha)$ - непрерывная по ω функция для любого фиксированного θ из J ; 4) $a(\omega, \alpha)$ - ограниченная функция; 5) $a^2(\omega, \alpha)$ интегрируема по ω для любого фиксированного θ из J .

В этом случае вместо неравенства (5) в лемме пункта 3 будем иметь следующее неравенство:

$$|g(t)| \leq \frac{1}{2\pi a(\Omega, \theta)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{h}(\omega)|}{|\tilde{f}(\omega)|} \cdot a(\omega, \theta) d\omega, \quad (29)$$

где $\Omega > 0$ - число, зависящее в общем случае от θ и от $|\tilde{g}(\omega)|$. Доказательство неравенства (29) при этом в точности повторяет доказательство неравенства (5).

Теоремы 1 и 2 остаются справедливыми, меняется лишь вид константы M , которая в этом случае имеет вид

$$M = \min_{\theta \in J_\alpha} \left\{ \frac{1}{2\pi a(\Omega, \theta)} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2(\omega, \theta)}{a^2(\omega, \alpha)} d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (30)$$

где J_α - область изменения параметра θ , для которой интеграл в правой части выражения (30) имеет смысл. В доказательстве теорем 1 и 2 изменится лишь оценка интегралов типа (13). Для них будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2(\omega, \theta)}{|\tilde{f}(\omega)|^2} d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2(\omega, \theta)}{a^2(\omega, \alpha)} d\omega. \quad (31)$$

В частности, функцию $a(\omega, \theta)$ можем положить равной
 $a(\omega, \theta) = e^{-\theta|\omega|^n}$, где n - произвольно большое положительное действительное число.

Л и т е р а т у р а

1. АЛЕКСЕЕВ А.С. Обратные динамические задачи сейсмологии. -Сб. Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных . М., "Наука", 1967, с.9-84.
2. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Изд.СО АН СССР, 1962, с.92.
3. ХУРТИН Я.И., ЯКОВЛЕВ В.П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М., Физматгиз, 1962, с.220.
4. ТИТЧМАРШ Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л., Гостехиздат, 1948, с.479.

В.Р. Кирейтов

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ $(n-1)$ -МЕРНЫХ
ПОВЕРХНОСТЕЙ В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В в е д е н и е

Настоящая работа является продолжением и частичным обобщением работы [4]. Рассматриваемые здесь вопросы возникли, главным образом, в связи с задачей определения оптической поверхности по ее фотоизображениям (см. [1], [3]); указанная задача имела в виду и при решении этих вопросов.

В этом введении при описании содержания разделов статьи используются термины и обозначения соответствующих разделов этой статьи и разделов I-2 статьи [4]; основные определения статьи [4] используются во всех разделах настоящей работы.

В разделе I определяются множества $\alpha(V)$, $A(V)$, $\omega(U)$, $\Omega(U)$, $U \in M$, $V \in \sigma_1 M_+$ и устанавливаются некоторые их свойства. Указанные множества и некоторые операции над ними допускают

естественную оптическую интерпретацию. Именно, будем считать, что поверхность M отражает падающий на нее свет диффузным образом, т.е. луч света, попадающий в точку $p \in M$, отражается во внешнее пространство M_+ по всем направлениям. Тогда, если точечный источник света I поместить в точку $q \in s_1 M_+$, то множество $\alpha(q)$ совпадает с множеством всех точек поверхности, освещенных светом, исходящим от источника I ; множество $\Omega(\alpha(q))$ есть множество всех точек пространства, в которые приходит свет, исходящий от источника I после однократного отражения от какой-либо точки поверхности M ; $\Omega(M \cap \Omega(\alpha(q)))$ совпадает с множеством тех точек пространства, в которые свет от источника I попадает лишь после двухкратного отражения от точек поверхности M .

Если источник света I поместить в точку $p \in M$, то $\omega(p)$ будет областью пространства, освещенной светом, исходящим от самого источника I ; для подмножества $U \subseteq M$ множество $\Omega(U)$ является множеством всех точек пространства, в которые доходит свет, при условии, что весь участок U поверхности M излучает свет диффузным образом и т.д.

Теорема 1 раздела 1 устанавливает двойственность между классами множеств вида $\omega(U)$, $U \subseteq M$ и $\alpha(V)$, $V \subseteq s_1 M_+$.

Перейдем к содержанию раздела 2. Точку $p \in M$ назовем квазиосвещенной из точки q , если можно, устраняя части поверхности M , не пересекающиеся с некоторой малой окрестностью точки $p \in M$, добиться того, чтобы точка p была освещена светом от точечного источника, помещенного в точку q ; в частности, освещенная этим источником точка $p \in M$ является квазиосвещенной. Определяемое в разделе 2 множество $\alpha^1(q)$ совпадает с множеством точек из M , квазиосвещенных из точки q . В указанном разделе рассматриваются геометрические свойства подмножеств в M вида $\alpha^1(q)$; основными результатами здесь являются теоремы 2-4.

Из теорем 2-3, в частности, вытекает, что для почти всех точек $q \in s_1 M_+$ множества вида $\alpha^1(q)$ являются гладкими подмногообразиями поверхности M той же размерности, что и сама поверхность.

В части а) раздела 3 рассматриваются некоторые свойства $\omega(\alpha -)$ - допустимых точек, связанных с поверхностью M ,

причем ω -допустимые точки являются попросту опорными точками поверхности M , а α -допустимые точки являются двойственными (в смысле раздела I) к опорным точкам. Утверждение 3.1. показывает, что экватор α -допустимых точек устроен наиболее просто.

В части в) раздела 3 рассмотрена одна из возможностей получить оценку "снизу" для множеств вида $\alpha(V)$, $A(V)$, $\omega(U)$, $\Omega(U)$, $U \subseteq M$, $V \subseteq \text{cl } M_+$.

1.

Символом E^n всегда обозначается евклидово пространство размерности $n \geq 2$.

Пусть $M^{n-1} \subseteq E^n$ - замкнутая гиперповерхность, $p \in M^{n-1}$, $q \in M_+^{n-1}$.

Множества $\alpha_M(q)$ и $\omega_M(p)$ определим формулами:

$$\alpha_M(q) = \{r \in M \mid [p, q] \cap M_- = \emptyset\},$$

$$\omega_M(p) = \{q \in \text{cl } M_+ \mid [p, q] \cap M_- = \emptyset\}.$$

Если $U \subseteq M^{n-1}$, $V \subseteq \text{cl } M_+^{n-1}$ - непустые подмножества, то положим

$$\alpha_M(V) = \bigcap_{q \in V} \alpha_M(q), \quad A_M(V) = \bigcup_{q \in V} \alpha_M(q),$$

$$\omega_M(U) = \bigcap_{p \in U} \omega_M(p), \quad \Omega_M(U) = \bigcup_{p \in U} \omega_M(p).$$

Если $U = V = \emptyset$ - пустые множества, то определим

$$\alpha_M(\emptyset) = M, \quad \omega_M(\emptyset) = \text{cl } M_+, \quad A_M(\emptyset) = \Omega_M(\emptyset) = \emptyset.$$

Таким образом, для любых непустых подмножеств $U \subseteq M$ и $V \subseteq \text{cl } M_+$ имеют место включения:

$$\alpha_M(V) \subseteq A_M(V) \subseteq M, \quad \omega_M(U) \subseteq \Omega_M(U) \subseteq \text{cl } M_+.$$

В дальнейшем, если ясно о какой гиперповерхности идет речь,

символ M в обозначениях α_M , A_M , ω_M , Ω_M будет опускаться.

У т в е р ж д е н и е I.1. Для любых подмножеств $I \subseteq M$ и $V \subseteq \text{cl } M_+$ имеют место соотношения:

$$\alpha(V) = \{p \in M \mid V \subseteq \omega(p)\},$$

$$A(V) = \{p \in M \mid V \cap \omega(p) \neq \emptyset\},$$

$$\omega(U) = \{q \in \text{cl } M_+ \mid U \subseteq \alpha(q)\},$$

$$\Omega(U) = \{q \in \text{cl } M_+ \mid U \cap \alpha(q) \neq \emptyset\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Докажем, например, второе из этих соотношений. Предположим, что $V \subseteq \text{cl } M_+$ и $V \neq \emptyset$. Пусть $p \in A(V)$. Из определения множества $A(V)$ следует, что существует $q \in V$, для которой $p \in \alpha(q)$, т.е. $[p, q] \cap M_- = \emptyset$. Но тогда, по определению множества $\omega(p)$, $q \in \omega(p)$, и, следовательно, $q \in V \cap \omega(p)$, т.е. $V \cap \omega(p) \neq \emptyset$. Пусть теперь $V \cap \omega(p) \neq \emptyset$ и $q \in V \cap \omega(p)$. Это значит, что $q \in V$ и $[p, q] \cap M_- = \emptyset$, т.е., что $q \in V$ и $p \in \alpha(q)$. Так как $A(V) = \bigcup_{q \in V} \alpha(q)$, то $p \in A(V)$ и, в совокупности с высказанным, это доказывает соотношение $A(V) = \{p \in M \mid V \cap \omega(p) \neq \emptyset\}$ для непустого множества $V \subseteq \text{cl } M_+$. Если же $V = \emptyset$, то $V \cap \omega(p) = \emptyset$ для любой точки $p \in M$ и, следовательно, множество $\{p \in M \mid V \cap \omega(p) \neq \emptyset\}$ пусто, что согласуется с определением $A(\emptyset) = \emptyset$.

Остальные соотношения доказываются аналогично. Утверждение доказано.

Доказательство следующего утверждения проводится стандартными теоретико-множественными рассуждениями и потому опускается.

У т в е р ж д е н и е I.2. Если $\{U_i\}_{i \in I}$, $\{V_j\}_{j \in J}$ — произвольные семейства подмножества $U_i \subseteq M$ и $V_j \subseteq \text{cl } M_+$, то

$$\alpha\left(\bigcup_{j \in J} V_j\right) = \bigcap_{j \in J} \alpha(V_j), \quad \alpha\left(\bigcap_{j \in J} V_j\right) \supseteq \bigcup_{j \in J} \alpha(V_j),$$

$$\Lambda\left(\bigcup_{j \in J} V_j\right) = \bigcup_{j \in J} \Lambda(V_j), \quad \Lambda\left(\bigcap_{j \in J} V_j\right) \subseteq \bigcap_{j \in J} \Lambda(V_j),$$

$$\omega\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} \omega(U_i), \quad \omega\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) \supseteq \bigcup_{i \in I} \omega(U_i),$$

$$\Omega\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} \Omega(U_i), \quad \Omega\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega(U_i).$$

Если $U_1 \subseteq U_2 \subseteq M$, $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \text{cl } M_+$, то

$$\alpha(V_2) \subseteq \alpha(V_1), \quad \Lambda(V_1) \subseteq \Lambda(V_2),$$

$$\omega(U_2) \subseteq \omega(U_1), \quad \Omega(U_1) \subseteq \Omega(U_2).$$

У т в е р ж д е н и е 1.3. Для любых подмножеств $U \subseteq M$, $V \subseteq \text{cl } M_+$ имеют место включения

$$U \subseteq \alpha(\omega(U)) \subseteq \Lambda(\omega(U)) \subseteq \Lambda(\Omega(U)),$$

$$V \subseteq \omega(\alpha(V)) \subseteq \Omega(\alpha(V)) \subseteq \Omega(\Lambda(V)),$$

и равенства

$$\omega(\alpha(\omega(U))) = \omega(U),$$

$$\alpha(\omega(\alpha(V))) = \alpha(V).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Докажем включения первой строки. Если $U = \emptyset$, то все включения проверяются непосредственно. Пусть $U \neq \emptyset$. Из утверждения 1.1 при $V = \omega(U)$ получаем формулу

$$\alpha(V) = \alpha(\omega(U)) = \{p \in M \mid \omega(U) \subseteq \omega(p)\}.$$

Если $p \in U$ то, очевидно, $\omega(U) \subseteq \omega(p)$ и, следовательно, $p \in \alpha(\omega(U))$, т.е., в силу произвольности p , $U \subseteq \alpha(\omega(U))$. Включение $\alpha\omega(U) \subseteq A(\omega(U))$ верно, потому что вообще $\alpha(V) \subseteq A(V)$ при любом непустом V и $\omega(U) \neq \emptyset$, если $U \neq \emptyset$. Наконец, $A(\omega(U)) \subseteq A(\Omega(U))$ так как, согласно утверждению I.2, $A(V_1) \subseteq A(V_2)$, если $V_1 \subseteq V_2$, а $\omega(U) \subseteq \Omega(U)$ согласно определению. Таким образом, все включения первой строки верны. Аналогично доказывается истинность включений второй строки.

Докажем, что $\omega(\alpha(\omega(U))) = \omega(U)$ для любого подмножества $U \subseteq M$. Если $U = \emptyset$, то указанное равенство следует из принятых ранее соглашений. Пусть $U \neq \emptyset$. Как доказано, выше, имеет место включение $U \subseteq \alpha(\omega(U))$; поэтому $\omega(U) \supseteq \omega(\alpha(\omega(U)))$. С другой стороны, из включения $V \subseteq \omega(\alpha(V))$ при $V = \omega(U)$ получаем включение $\omega(U) \subseteq \omega(\alpha(\omega(U)))$. Отсюда $\omega(U) = \omega(\alpha(\omega(U)))$. Таким же образом доказывается и второе равенство утверждения. Утверждение доказано.

Символом $\beta(X)$ обозначим множество всех подмножеств множества X .

У т в е р ж д е н и е I.4. Образования $\rho : \beta(M) \rightarrow \beta(M)$ и $\pi : \beta(c1M_+) \rightarrow \beta(c1M_+)$, определенные формулами $\rho(U) = \alpha(\omega(U))$, $\pi(V) = \omega(\alpha(V))$, $U \subseteq M$, $V \subseteq c1M_+$, являются проекторами, т.е. $\rho^2 = \rho$, $\pi^2 = \pi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $U \in \beta(M)$. Тогда $\rho^2(U) = \rho(\rho(U)) = \alpha(\omega(\alpha(\omega(U)))) = \alpha(\omega(U)) = \rho(U)$, где промежуточные равенства следуют из определений и утверждения I.3. Для отображения π доказательство аналогично. Утверждение доказано.

Подмножество $U \subseteq M(V \subseteq c1M_+)$ назовем устойчивым, если $\rho(U) = U(\pi(V) = V)$. Если $U \subseteq M(V \subseteq c1M_+)$ — произвольное подмножество, то его устойчивой оболочкой назовем наименьшее устойчивое множество $\bar{U}(\bar{V})$, содержащее $U(V)$. Примерами устойчивых множеств служат множества \emptyset , M , $c1M_+$.

У т в е р ж д е н и е I.5. Подмножество $U \subseteq M(V \subseteq c1M_+)$ устойчиво тогда и только тогда, когда существует некоторое подмножество $V_1 \subseteq c1M_+(U_1 \subseteq M)$, для которого $U = \alpha(V_1)$ ($V = \omega(U_1)$).

Если $U \subseteq M$ ($V \subseteq \text{cl } M_+$) — произвольное подмножество, то $\bar{U} = \rho(U)$. ($\bar{V} = \pi(V)$) Пересечение любого семейства устойчивых множеств устойчиво. Устойчивые подмножества множества $M(\text{cl } M_+)$ замкнуты в топологии $M(\text{cl } M_+)$.

Доказательство. Пусть $U \subseteq M$ — устойчивое подмножество; тогда $U = \rho(U) = \alpha(\omega(U))$ и за множество V_1 можно принять множество $\omega(U)$. Предположим теперь, что $u = \alpha(V_1)$ для некоторого подмножества $V_1 \subseteq \text{cl } M_+$. Тогда $\rho(U) = \alpha(\omega(U)) = \alpha(\omega(\alpha(V_1))) = \alpha(V_1) = U$, где промежуточные равенства следуют из определений и утверждения I.4, т.е., U — устойчивое подмножество в M .

Для подмножеств $V \subseteq \text{cl } M_+$ доказательство этой части утверждения аналогично.

Пусть $U \subseteq M$ — произвольное подмножество в M . Докажем, что его устойчивая оболочка $\bar{U} = \rho(U)$. Действительно, $\rho(U)$ — устойчивое множество, потому что $\rho(\rho(U)) = \rho^2(U) = \rho(U)$. Если $U \subseteq V$ и V — произвольное устойчивое множество, то, согласно утверждению I.2, $\omega(U) \supseteq \omega(V)$ и $\rho(U) = \alpha(\omega(U)) \subseteq \alpha(\omega(V)) = \rho(V) = V$, т.е. множество $\rho(U)$ является наименьшим из всех устойчивых подмножеств в M , содержащих U . Следовательно $\bar{U} = \rho(U)$.

Равенство $\bar{V} = \pi(V)$ для $V \subseteq \text{cl } M_+$ доказывается таким же образом.

Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — произвольное семейство устойчивых подмножеств множества M . Согласно доказанной первой части настоящего утверждения, для каждого $i \in I$ существует множество $V_i \subseteq \text{cl } M_+$, для которого $U_i = \alpha(V_i)$. Потому $\bigcap_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \alpha(V_i) = \alpha(\bigcap_{i \in I} V_i)$, где последнее равенство следует из утверждения I.2; следовательно, множество $\bigcap_{i \in I} U_i$ устойчиво. Устойчивость пересечения семейства устойчивых подмножеств в $\text{cl } M_+$ доказывается аналогичным образом.

Докажем замкнутость устойчивых подмножеств. Пусть $U \subseteq M$ — устойчивое подмножество. Тогда $U = \alpha(V)$ для некоторого подмножества $V \subseteq \text{cl } M_+$. Предположим, что точка $p \in M$ является точкой прикосновения для множества U в топологии M и пусть $\{p_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность точек из U , сходящаяся к p . Для каждой точки $q \in V$ отрезок $[p_n, q]$

Не пересекается с множеством M_- при любом $n \geq 1$, потому что $p_n \in \alpha(V)$, $n \geq 1$. Но тогда очевидно, что отрезок $[p, q]$, являющийся пределом последовательности отрезков $[p_n, q]$ при $n \rightarrow \infty$, не может пересекаться с открытым множеством M_- и, следовательно, $p \in \alpha(q)$. В силу произвольности точки $q \in V$, точка $p \in \alpha(V) = U$. Значит, множество U содержит все свои точки прикосновения в топологии гиперповерхности M и, следовательно, замкнуто в M .

Для доказательства замкнутости произвольного устойчивого подмножества множества clM_+ достаточно доказать замкнутость в clM_+ любого множества вида $\omega(U)$, где $U \subseteq M$ — произвольное подмножество. Доказательство последнего утверждения дано в [4] (утверждение I.2).

Утверждение I.5. полностью доказано.

Пусть $\gamma(M)$, $\gamma(clM_+)$ — множества всех устойчивых подмножеств множеств M , clM_+ соответственно, упорядоченные отношением включения подмножеств.

Т е о р е м а I. Отображения $U \rightarrow \omega(U)$ и $V \rightarrow \alpha(V)$ являются взаимно обратными отображениями множеств $\gamma(M)$ и $\gamma(clM_+)$ друг на друга; каждое из отображений ω , α является антиизоморфизмом частично-упорядоченных множеств $\gamma(M)$ и $\gamma(clM_+)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Если $U \subseteq M$ — устойчивое подмножество, то множество $\omega(U) \subseteq clM_+$ является устойчивым подмножеством множества clM_+ что следует из утверждения I.5. Аналогично, если устойчиво подмножество $V \subseteq clM_+$, то подмножество $\alpha(V) \subseteq M$ устойчиво в M . Следовательно, имеют место отображения $\omega : \gamma(M) \rightarrow \gamma(clM_+)$ и $\alpha : \gamma(clM_+) \rightarrow \gamma(M)$, $U \xrightarrow{\omega} \omega(U)$, $V \xrightarrow{\alpha} \alpha(V)$, $U \in \gamma(M)$, $V \in \gamma(clM_+)$. Если $U \in \gamma(M)$, то $\omega(\alpha(U)) = \rho(U) = U$ и, если $V \in \gamma(clM_+)$, то $\alpha(\omega(V)) = \pi(V) = V$, т.е. отображения ω и α являются взаимно обратными.

Наконец, если $U_1, U_2 \in \gamma(M)$ и $U_1 \subseteq U_2$, то $\omega(U_2) \subseteq \omega(U_1)$, согласно утверждению I.2, для $V_1, V_2 \in \gamma(clM_+)$, $V_1 \subseteq V_2$, получаем $\alpha(V_2) \subseteq \alpha(V_1)$, т.е. отображения α и ω меняют порядок включения на противоположный и, с учетом вышедоказанного, осуществляют антиизоморфизмы множеств $\gamma(M)$ и $\gamma(clM_+)$.

II.

Если $M^{n-1} \subseteq E^n$ - замкнутая гиперповерхность, то, как следует из теоремы I предыдущего раздела, между множествами $\gamma(M^{n-1})$ и $\gamma(\text{cлM}_+^{n-1})$ существует некоторая двойственность.

В работе [4] в целях аналитического описания множества $\omega(U)$, $U \subseteq M^{n-1}$, для гладкой гиперповерхности M^{n-1} было определено множество $\omega^1(U)$, которое служит верхней оценкой для множества $\omega(U)$, т.е. $\omega(U) \subseteq \omega^1(U)$ для любого $U \subseteq M^{n-1}$ и в некоторых случаях (когда U - допустимое подмножество в M^{n-1}) $\omega(U) = \omega^1(U)$; кроме того, $\omega^1(U)$ допускает хорошее аналитическое описание, если только сама гиперповерхность M^{n-1} задана аналитическим образом, например, в параметрическом виде.

В этом разделе мы определим множество $\alpha^1(V)$ для любого $V \subseteq \gamma(\text{cлM}_+)$, играющее для множества $\alpha(V)$ ту же роль, что и множество $\omega^1(U)$ для $\omega(U)$; для совокупности множеств вида $\alpha^1(V)$ и $\omega^1(U)$ сохраняются двойственные соотношения, имеющие место для совокупностей $\gamma(M)$ $\gamma(\text{cлM}_+)$.

Напомним определение множества $\omega^1(p)$ для $p \in M^{n-1} \subset E^n$, данное в [4]:
 $\omega^1(p) = \{q \in \text{cлM}_+ \mid \text{существует открытая окрестность } U \text{ точки } p \text{ в } E^n, \text{ для которой } [p, q] \cap M_- \cap U = \emptyset\}$.

Пусть $q \in \text{cлM}_+$. Определим множество $\alpha^1(q)$ формулой

$$\alpha^1(q) = \{p \in M \mid q \in \omega^1(p)\}.$$

Отметим сходство указанной формулы с первой формулой утверждения I.1, взятой при $V = q$.

Далее определим

$$\alpha^1(V) = \bigcap_{q \in V} \alpha^1(q), \quad \Delta^1(V) = \bigcup_{q \in V} \alpha^1(q),$$

$$\omega^1(U) = \bigcap_{p \in U} \omega^1(p), \quad \Omega^1(U) = \bigcup_{p \in U} \omega^1(p),$$

$$\alpha^1(\emptyset) = M, \omega^1(\emptyset) = \text{cl}M_+, A^1(\emptyset) = \Omega^1(\emptyset) = \emptyset.$$

Очевидны включения $\alpha(V) \subseteq \alpha^1(V), \dots, \Omega(U) \subseteq \Omega^1(U)$ для любых $U \subseteq M, V \subseteq \text{cl}M_+$; кроме того, имеет место аналог утверждения I.I., получающийся заменой всех символов $\alpha, \omega, A, \Omega$ в формулах указанного утверждения символами $\alpha^1, \omega^1, A^1, \Omega^1$ соответственно.

Напомним, что в [4] гиперповерхность $M^{n-1} \subseteq E^n$ называлась гладкой в точке $p \in M$, если существовало хотя бы одно оснащение F гиперповерхности M , дифференцируемое в некоторой окрестности точки p и имеющее в p ненулевой дифференциал; назовем такое оснащение регулярным в точке $p \in M^{n-1}$. Если F и G — два произвольных в точке p оснащения гиперповерхности M , то из следствия 2 к утверждению 2.I работы [4] вытекает, что векторы $\frac{\text{grad } F(p)}{\|\text{grad } F(p)\|}$ и $\frac{\text{grad } G(p)}{\|\text{grad } G(p)\|}$ равны; вектор $v_p = \frac{\text{grad } F(p)}{\|\text{grad } F(p)\|}$, где F — любое регулярное в точке p оснащение гиперповерхности M назовем нормалью (внешней) к M в p .

Скажем, что гиперповерхность $M^{n-1} \subseteq E^n$ имеет в точке p гладкость класса C^k , если существует хотя бы одно регулярное в p оснащение, k раз непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки p . Если гиперповерхность M^{n-1} имеет гладкость класса C^k в каждой своей точке $p \in M^{n-1}$, то M^{n-1} назовем гладкой гиперповерхностью класса C^k ; гладкую гиперповерхность класса C^1 назовем просто гладкой.

Пусть M^{n-1} — гладкая гиперповерхность.

Для любых точек $p \in M^{n-1}, q \in \text{cl}M_+^{n-1}$ функцию $\zeta(p, q)$ определим формулой

$$\zeta(p, q) = \langle q - p, v_p \rangle.$$

Кроме того, положим

$$\tau_p^+ = \{q \in M_+ \mid \langle q - p, v_p \rangle > 0\},$$

$$S_q^+ = \{p \in M \mid \langle q - p, v_p \rangle > 0\}.$$

У т в е р ж д е н и е 2.1. Имеют место включения

$$T_p^+ \subseteq \omega^1(p) \subseteq \text{cl } T_p^+,$$

$$S_q^+ \subseteq \alpha^1(q) \subseteq \text{cl } S_q^+, \quad p \in M, \quad q \in M_+.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для множества $\omega^1(p)$ указанные включения доказаны в [4] (утверждение 2.1.).

Докажем утверждение для множества $\alpha^1(q)$. Для этого заметим, что отношения $p \in \alpha^1(q)$ и $q \in \omega^1(p)$ эквивалентны. Пусть теперь $p \in S_q^+$; тогда $\langle q - p, v_p \rangle > 0$, и, следовательно, $q \in T_p^+$; так как включение $T_p^+ \subseteq \omega^1(p)$ считается доказанным, то $q \in \omega^1(p)$ или, по предыдущему замечанию, $p \in \alpha^1(q)$. В силу произвольности точки $p \in S_q^+$ отсюда следует включение $S_q^+ \subseteq \alpha^1(q)$.

Если $p \in \alpha^1(q)$, то $q \in \omega^1(p) \subseteq \text{cl } T_p^+$ и, следовательно, $q \in \text{cl } T_p^+$; отсюда $\langle q - p, v_p \rangle \geq 0$. Последнее неравенство означает, что $p \in \text{cl } S_q^+$ и, в силу произвольности точки $p \in \alpha^1(q)$, включение $\alpha^1(q) \subseteq \text{cl } S_q^+$ доказано. Утверждение доказано.

Относительно функции $\zeta(p, q)$ заметим, что для гладкой гиперповерхности класса C^k она $k - 1$ раз непрерывно дифференцируема по переменной p ; по переменной q зависимость $\zeta(p, q)$ является линейной.

Напомним, что критической точкой дифференцируемой функции h на гладкой гиперповерхности M^{n-1} называется точка, в которой дифференциал функции h обращается в 0.

Точку $p \in M^{n-1} \subseteq E^n$ назовем критической для точки $q \in \text{cl } M_+^{n-1}$, если точка p является критической для функции $\zeta(p, q)$ от переменной $p \in M$ при фиксированном $q \in \text{cl } M_+.$

Имея целью изучить структуру множества критических для точки $q \in \text{cl } M_+$ точек $p \in M$, дадим некоторые определения.

C^k - параметризацией открытого связного подмножества $X \subseteq M^{n-1} \subseteq E^n$ назовем k раз дифференцируемый вместе со своим обратным гомеоморфизм $x: U \rightarrow X$, $x = x(u)$, некоторой

области $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ на множество X , для которого объем подвектора $\frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x}{\partial u_{n-1}}$ отличен от 0 при любом $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \in U$.

С помощью теоремы о неявных функциях легко показать, что если $M^{n-1} \subseteq \mathbb{E}^n$ — гладкая класса C^k в точке $p \in M^{n-1}$ гиперповерхность, то некоторая окрестность точки $p \in M$ допускает C^k — параметризацию.

Таким образом для гиперповерхности M , имеющей гладкость класса C^k в окрестности любой точки $p \in M$, можно пользоваться C^k — параметризациями.

Всюду далее в этом разделе предполагается, что рассматриваемая гиперповерхность $M^{n-1} \subseteq \mathbb{E}^n$ является гладкой класса C^2 , все параметризации тоже имеют класс C^2 .

Пусть $p \in M^{n-1}$, $x(u)$ — некоторая параметризация окрестности X точки p в M^{n-1} . Основными формами гиперповерхности M^{n-1} в окрестности точки p при заданной параметризации, называются симметрические матрицы размерности $(n-1) \times (n-1)$:

$$F_1 = \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle \right), \quad F_2 = \left(\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, \nu_x \right\rangle \right), \quad 1 \leq i, j \leq n-1,$$

ν_x — нормаль гиперповерхности M^{n-1} в точке $x = x(u)$ (см. [5], § 6).

Параметрической проекцией вектора $q-p$, $q \in s_1 M_+$, $p \in M$, на касательное многообразие $T_p(M)$ гиперповерхности M в точке p назовем вектор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, определяемый однозначно разложением

$$q - p = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\partial x}{\partial u_i} + \beta_n \nu_x, \quad x(u) = p.$$

Зависимость вектора β от параметризации $x(u)$ очевидна; при заданном $p \in M^{n-1}$ и фиксированной параметризации, зависимость β от точки $q \in s_1 M_+$ обозначим через $\beta(q)$. При заданной параметризации $x(u)$ вектор $\left(\frac{\partial \beta(p, q)}{\partial u_1}, \frac{\partial \beta(p, q)}{\partial u_2} \right)$,

..., $\frac{\partial \zeta(p, q)}{\partial u_{n-1}}$) обозначим кратко через $\frac{\partial \zeta(p, q)}{\partial u}$.

У т в е р ж д е н и е 2.2. $\frac{\partial \zeta(p, q)}{\partial u} = -F_2(p) \cdot \alpha(q)$, где правая часть представляет собой взятый с обратным знаком результат действия матрицы $F_2(p)$ на столбец-вектор $\alpha(q)$ по правилу "строка на столбец".

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для функции $\zeta(x(u), q) = \langle q - x(u), v_x(u) \rangle$ получаем:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u_1} = \langle -\frac{\partial x}{\partial u_1}, v_x(u) \rangle + \langle q-x, \frac{\partial v_x(u)}{\partial u_1} \rangle = \langle q-x, \frac{\partial v_x(u)}{\partial u_1} \rangle,$$

так как первое слагаемое равно 0 в силу ортогональности векторов $\frac{\partial x}{\partial u_1}$ и v_x .

Используя разложение $q-x = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \frac{\partial x}{\partial u_j} + \beta_n v_x$, можно записать

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u_1} = \langle q-x, \frac{\partial v_x(u)}{\partial u_1} \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \langle \frac{\partial x}{\partial u_j}, \frac{\partial v_x}{\partial u_i} \rangle + \beta_n \langle v_x, \frac{\partial v_x}{\partial u_1} \rangle.$$

Так как $\langle v_x, \frac{\partial v_x}{\partial u_1} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} \langle v_x, v_x \rangle = 0$, то

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u_1} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle \frac{\partial v_x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \rangle \alpha_j. \quad (2.1)$$

Дифференцируя тождество $\langle v_x, \frac{\partial x(u)}{\partial u_j} \rangle = 0$ по переменной u_1 , получаем

$$\langle v_x, \frac{\partial x}{\partial u_1 \partial u_j} \rangle + \langle \frac{\partial v_x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \rangle = 0.$$

Формулу (2.1) можно теперь записать в виде $\frac{\partial \zeta}{\partial u_1} = -$

$-\sum_{j=1}^{n-1} \langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_j}, v_x \rangle \beta_j$ и наше утверждение доказано.

Утверждение 2.3. Точка $p \in M^{n-1}$ является критической для точки $q \in \text{cl } M_+^{n-1}$ тогда и только тогда, когда параметрическая проекция $\beta(q)$ вектор $q-p$ удовлетворяет уравнению $F_2(p) \cdot \beta(q) = 0$

Доказательство. Следует из определений и утверждения 2.2.

Замечание. По переменной q функции $\zeta(p, q)$ критических точек на множестве $\text{cl } M_+$ не имеет.

Точку $p \in M^{n-1} \subseteq E^n$ назовем экваториальной для точки $q \in \text{cl } M_+^{n-1}$, если $\zeta(p, q) = 0$; экватором точки $q \in \text{cl } M_+$ назовем множество всех экваториальных для q точек $p \in M$; экватор точки q обозначим через $E(q)$; по определению $E(q) \subseteq M$.

Утверждение 2.4. Точка $p \in E(q)$, $p \neq q$, является критической для точки $q \in \text{cl } M_+$ тогда и только тогда, когда матрица $F_2(p)$ вырождена и $F_2(p) \cdot \beta(q) = 0$.

Доказательство. Покажем, что из условий $p \in E(q)$, $p \neq q$ следует, что $\beta(q) \neq 0$. Действительно, используя разложение $q-p = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\partial x}{\partial u_i} + \beta_n v_p$, для экваториальной точки $p \in E(q)$, получаем

$$\zeta(p, q) = \langle q-p, v_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, v_p \right\rangle + \beta_n \langle v_p, v_p \rangle = \beta_n = 0.$$

Поэтому, если $\beta(q) = 0$, то $q-p = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\partial x}{\partial u_i} = 0$, т.е. $q = p$, вопреки условию $p \neq q$. Значит, если $p \in E(q)$ и $p \neq q$, то $\beta(q) \neq 0$. С учетом этого факта, доказательство настоящего утверждения следует из утверждения 2.3.

Точку $q \in \text{cl } M_+^{n-1}$ назовем сингулярной для гиперповерхности $M^{n-1} \subseteq E^n$, если экватор $E(q)$ содержит хотя бы одну критическую для q точку $p \neq q$. Множество всех сингулярных для гиперповерхности M^{n-1} точек обозначим символом $\Sigma(M)$. Точку $q \in \text{cl } M_+^{n-1}$ назовем регулярной для M , если она не является для M сингулярной.

Теорема 2. Экватор $E(q)$ регулярной точки $q \in \text{cl } M_+$ для гиперповерхности M^{n-1} является гладким

замкнутым подмногообразием размерности $n-2$ гиперповерхности M^{n-1} .

Доказательство. Для регулярной точки $q \in \text{cl } M_+^{n-1}$ функция $\zeta(p, q)$ имеет множество $E(q)$ своей поверхностью нулевого уровня и не имеет на $E(q)$ критических точек. Из теоремы о неявных функциях следует, что $E(q)$ является гладким подмногообразием коразмерности 1 гиперповерхности M^{n-1} . Утверждение доказано.

Следствие. Для $n=3$ экватор $E(q)$ регулярной для поверхности $M^2 \subseteq E^3$ точки $q \in \text{cl } M_+^2$ представляется в виде объединения конечного числа непересекающихся гладких кривых, гомеоморфных окружности и лежащих на поверхности M^2 .

Теорема 3. Множество $\Sigma(M^{n-1})$ является множеством нулевой меры в E^n .

Доказательство. Согласно утверждению 2.4. достаточно доказать, что множество B всех векторов пространства E^n вида

$$p + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\partial x}{\partial u_i}, \quad x(u) = p, \quad F_2(p) \cdot \beta = 0$$

является множеством нулевой меры в E^n .

Множество всех пар вида (p, v) , где $p \in M^{n-1}$, а v — касательный вектор к гиперповерхности M^{n-1} в точке p , называется касательным расслоением гиперповерхности M^{n-1} и обозначается символом $\tau(M^{n-1})$. Известно, что $\tau(M^{n-1})$ является гладким многообразием размерности $2n-2$. Отображение $G: \tau(M^{n-1}) \rightarrow E^n$, определенное формулой $G(p, v) = p + v$ является гладким и аффинным по переменной v при фиксированном p .

Покажем, что множество B совпадает с множеством критических значений отображения G .

Рассмотрим отображение $\tilde{G}(u, \beta)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$, определенное формулой

$$\tilde{G}(u, \beta) = \tilde{G}(x(u), \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\partial x}{\partial u_i}) = x(u) + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\partial x}{\partial u_i}.$$

Ясно, что точка (p, v) - критическая для отображения G тогда и только тогда, когда точка (u, β) , $x(u) = p$, $v = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\partial x}{\partial u_i}$ является критической точкой для отображения \tilde{G} .

Матрица частных производных отображения $\tilde{G}(u, \beta)$ состоит из $2n - 2$ строк-векторов $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ размерности n , вычисляемых по формулам:

$$a_i = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_i},$$

$$b_j = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \beta_j} = \frac{\partial x}{\partial u_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Эта матрица эквивалентна матрице, строки которой состоят из векторов $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$, где

$$c_i = a_i - b_i = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_i}.$$

Ясно, что если $F_2(p) \cdot \beta = 0$, то $\langle c_i, v \rangle = 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n-1$ и, следовательно, каждый вектор c_i является линейной комбинацией векторов b_1, b_2, \dots, b_{n-1} ; обратно, если каждый вектор c_i линейно зависит от векторов b_1, b_2, \dots, b_{n-1} , то $F_2(p) \cdot \beta = 0$.

Значит, вектор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$ удовлетворяет уравнению $F_2(p) \cdot \beta = 0$, если и только если ранг матрицы, строки которой состоят из векторов $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$, равен $n-1$ т.е., если ранг дифференциала отображения $\tilde{G}(u, \beta)$ в точке (u, β) , $x(u) = p$ равен $n-1$. Отсюда следует, что точки вида $(p, \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\partial x}{\partial u_i}) \in \tau(M^{n-1})$, $x(u) = p$, $F_2(p) \cdot \beta = 0$ и только они являются критическими точками отображения G , а так же, что критическими значениями отображения G являются векторы из E^n вида $p + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\partial x}{\partial u_i}$, $x(u) = p$, $F_2(p) \cdot \beta = 0$ и только они, т.е. множество критических значений отображения совпадает с множеством V .

Теперь, применяя теорему Сарда (см. [6]) о структуре множества критических значений дифференцируемых отображений, заключаем, что множество B является в E^n множеством нулевой меры. Теорема доказана.

Экваторы $E(q_1), E(q_2)$ регулярных точек $q_1, q_2 \in \text{cl } M_+$ назовем L -эквивалентными в классе всех экваториальных подмножеств гиперповерхности M^{n-1} , если

α) существует гладкое подмногообразие $W \subseteq M^{n-1} \times I$, $I = [0, 1]$, граница ∂W которого является несвязной суммой подмногообразий $E(q_1)$ и $E(q_2)$;

β) каждое подмножество $W \cap M^{n-1} \times t \subseteq M^{n-1} \times t, t \in I$, является экватором некоторой точки $q \in \text{cl } M_+$;

γ) к краям $M^{n-1} \times 0$ и $M^{n-1} \times 1$ многообразию W примыкает трансверсально (см. [6]).

З а м е ч а н и е . Условия α, γ означают, что экваторы $E(q_1), E(q_2)$ L -эквивалентны в смысле [6].

Непрерывно-дифференцируемую кривую $\tau(t), t \in [0, 1]$, пространства E^n целиком лежащую в множестве $\text{cl } M_+$ назовем трансверсальной, если

а) концы кривой $q_1 = \tau(0), q_2 = \tau(1)$ являются регулярными точками для гиперповерхности M^{n-1} ;

в) векторы скорости $v_1 = \frac{d\tau}{dt}(0), v_2 = \frac{d\tau}{dt}(1)$ не являются касательными векторами к M^{n-1} ни в какой точке экваторов $E(q_1), E(q_2)$ соответственно.

с) если $q = \tau(t), 0 < t < 1$, - сингулярная точка для гиперповерхности M^{n-1} , то вектор скорости в точке q не является касательным вектором к M^{n-1} ни в какой критической точке $p \in E(q)$ для точки q .

Т е о р е м а 4. Если $\tau(t)$ - трансверсальная кривая, то экваторы $E(q_1), E(q_2), q_1 = \tau(0), q_2 = \tau(1)$, являются L -эквивалентными подмногообразиями гиперповерхности M^{n-1} в классе всех экваториальных подмножеств гиперповерхности M^{n-1} .

Д о к а з а т е л ь с т в о . На многообразии $M^{n-1} \times I, I = [0, 1]$ рассмотрим функцию $\xi(p, t) = \zeta(\tau(t), p) = \langle \tau(t) - p, v_p \rangle, p \in M^{n-1}, t \in I$. Через W обозначим множество всех нулей функции $\xi(p, t)$. Из определения функции $\xi(p, t)$ следует, что $(p, t) \in W$ если и только если $p \in E(\tau(t))$,

$t \in [0, 1]$, так что пересечение W с множеством вида $M^{n-1} \times t$ имеет вид $E(\tau(t)) \times t$, где $E(\tau(t))$ — экватор точки $\tau(t)$.

Пусть $x(u)$ — некоторая параметризация окрестности точки $p \in M^{n-1}$. Для частных производных функции $\xi(p, t)$ в точке $p = x(u)$ имеем выражения:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(p, t) = - \left\langle \frac{\partial \tau}{\partial t}, \nu_p \right\rangle,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_i}(p, t) = - F_2(p) \cdot \beta(\tau(t) - p), \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \frac{\partial \xi}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \xi}{\partial u_{n-1}} \right).$$

Если $0 < t < 1$ и $(p, t) \in W$, то из равенства $\frac{\partial \xi}{\partial u}(p, t) = 0$ следует, что точка p является сингулярной для точки $\tau(t) \in \text{cl } M_+$ и, в силу трансверсальности кривой $\tau(t)$, должно быть $\left\langle \frac{\partial \tau}{\partial t}, \nu_p \right\rangle = - \frac{\partial \xi}{\partial t}(p, t) \neq 0$. Если же $t = 0$ или $t = 1$, то, по причине трансверсальности $\tau(t)$, $\frac{\partial \xi}{\partial t}(p, t) \neq 0$ для любой точки p экваторов $E(q_1)$, $E(q_2)$ соответственно.

Таким образом, на множестве W $\text{grad } \xi$ не обращается нигде в 0 и, следовательно, W является гладким подмногообразием многообразия $M^{n-1} \times I$. Кроме того, граница многообразия W является суммой многообразий $E(q_1)$ и $E(q_2)$ и к краям $M^{n-1} \times 0$ и $M^{n-1} \times 1$ многообразие W примыкает трансверсально.

Наконец, на каждом уровне t многообразии $W \cap M^{n-1} \times t$ является экватором точки $\tau(t)$.

Следовательно, экваторы $E(q_1)$, $E(q_2)$ L — эквивалентны в M^{n-1} и эта L — эквивалентность осуществляется многообразием W в классе экваториальных подмножеств гиперповерхности M^{n-1} . Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если на трансверсальной кривой $\tau(t)$ нет сингулярных точек, соответствующих параметру $0 < t < 1$, то экваторы $E(\tau(0))$ и $E(\tau(1))$ L — эквивалентны в M^{n-1} .

З а м е ч а н и е. Для единичного вектора $e \in E^n$ функцию $\eta(e, p)$, $p \in M^{n-1}$, определим формулой

$$\eta(e, p) = \langle e, v_p \rangle.$$

Экватором направления e назовем множество $E^\infty(e) \subseteq M^{n-1}$ всех нулей функции $\eta(e, p)$ на M^{n-1} ; очевидно, что $E^\infty(e) = E^\infty(-e)$. Направление e назовем сингулярным для гиперповерхности M^{n-1} , если на экваторе $E^\infty(e)$ есть хотя бы одна критическая точка функции $\eta(e, p)$; в противном случае направление e назовем регулярным.

Имеет место утверждение, аналогичное теореме 3: множество всех сингулярных направлений для гиперповерхности M^{n-1} является множеством нулевой меры на единичной сфере всех возможных направлений.

III.

а) Подмножество $U \subseteq M(V \subseteq \text{cl}M_+)$ назовем ω -допустимым (α -допустимым), если $\omega^1(u) = \omega(u)$ ($\alpha^1(V) = \alpha(V)$); в частности, точка $p \in M$ ($q \in \text{cl}M_+$) ω -допустима (α -допустима), если $\omega^1(p) = \omega(p)$ ($\alpha^1(p) = \alpha(p)$).

ω -допустимые подмножества в $\text{cl}M_+$ являются допустимыми в смысле [4].

Пусть $q \in \text{cl}M_+$ - регулярная точка для гиперповерхности M^{n-1} и p - точка экватора $E(q)$. Вектор $p-q$ является касательным вектором к M в точке p и на нем определено значение $d\zeta(p, q)(p, p-q) = a(p)$ дифференциала функции $\zeta(p, q)$ в точке p . Число $a(p)$ отлично от 0, потому что точка p не является критической точкой для точки q .

Скажем, что точка $p \in E(q)$ имеет тип $+$, если $\text{sgn} a(p) = 1$; в случае, если $\text{sgn} a(p) = -1$ говорим, что точка p имеет тип $-$.

Функция $\text{sgn} a(p)$, как нетрудно проверить, является непрерывной функцией на множестве $E(q)$, принимающей значения ± 1 ; поэтому функция $\text{sgn} a(p)$ принимает одно и то же значение для всех точек, принадлежащих одной компоненте связности множества $E(q)$. Типом компоненты связности множества $E(q)$ называется тип какой-либо ее точки.

У т в е р ж д е н и е 3.I. Точка $p \in M$ является ω -допустимой для гиперповерхности M , если и только если она является опорной для M . Регулярная точка $q \in \text{cl}M_+$ является

α - допустимой для гиперповерхности M , если и только если все компоненты связности многообразия $E(q)$ имеют тип $+$.

Доказательство. Для ω - допустимых точек доказательство следует из определения опорной точки и следствия 3 к утверждению 2.1 работы [4].

Докажем вторую часть утверждения. Пусть регулярная точка $q \in s1M_+$ является α - допустимой для M и предположим, что существует точка $r \in E(q)$, имеющая тип $-$. Рассмотрим кривую τ на гиперповерхности M , получающуюся в результате пересечения двумерной плоскости, проходящей через точки q и r и параллельной вектору v_r , с M ; указанное пересечение является гладкой кривой на M по крайней мере в некоторой окрестности точки r . Положительным направлением на кривой τ назовем направление, определяемое касательным к τ вектором $q-r$. Из геометрических соображений следует, что для точки r , имеющей тип $-$, при переходе через точку r по кривой τ в положительном направлении функция $\zeta(r, q)$ меняет знак с $+$ на $-$; при этом можно выбрать на кривой τ достаточно близкую к точке r точку g , для которой $\zeta(g, q) > 0$, отрезок $[g, q]$ пересекает кривую τ в точке s и для точки s $\zeta(s, q) < 0$. Но отсюда следует, что $g \in \alpha^{-1}(q)$ и $g \notin \alpha(q)$, что несовместимо с выбором точки q . Следовательно, для допустимой точки $q \in s1M_+$ весь экватор $E(q)$ состоит из точек типа $+$.

Предположим, что для регулярной точки $q \in s1M_+$ все точки экватора имеют тип $+$. Докажем, что q - α - допустимая точка. Для этого заметим, что имеется определенное правило чередования знаков для функции $\zeta(r, q)$ вдоль луча $L_{p, q}$, выходящего из q и проходящего через точку $r \in M$. Предположим, для простоты, что гиперповерхность M допускает регулярное оснащение F , дифференцируемое внутри некоторого открытого шара, содержащего множество M и точку q . Рассмотрим функцию $\varphi(t) = F(q + t(q-p)) = F(q_t)$, $t \in [0, 1 + \varepsilon]$, где ε - некоторое положительное число. На всей области определения функция $\varphi(t)$ дифференцируема и $\frac{d\varphi}{dt} = \langle \text{grad } F(q_t), q-p \rangle$.

Если $q_t \in M$, то $\text{grad } F(q_t) \neq 0$ и $\frac{d\varphi}{dt} = \|\text{grad } F(q_t)\| \times$

$\times \frac{\text{grad } F(q_t)}{\|\text{grad } F(q_t)\|}$, $q-p) = \|\text{grad } F(q_t)\| \cdot \zeta(p, q_t)$. Значит, знак функции $\zeta(p, q_t)$ совпадает со знаком производной функции $\varphi(t)$ в

точках пересечения луча $L_{p,q}$ с гиперповерхностью M . Функция $\varphi(t)$ строго отрицательна, если $q_t \in M_-$, строго положительна, если $q_t \in M_+$ и равна 0, если $q_t \in M$. Рассматривая поведение производной функции $\varphi(t)$, получаем следующее правило знаков для функции $\zeta(p, q)$: если в точках p_1, p_2 пересечения луча $L_{p,q}$ с M функция $\zeta(p, q)$ отлична от 0 и между точками p_1, p_2 на луче нет точек, общих с M , в которых $\zeta(p, q) \neq 0$, то числа $\zeta(p_1, q)$ и $\zeta(p_2, q)$ имеют противоположные знаки; кроме того, если $p_0 \in L_{p,q} \cap M$ — ближайшая к q точка, в которой $\zeta(p_0, q) \neq 0$, то $\zeta(p_0, q) > 0$.

Теперь предположим, что для регулярной точки $q \in \text{cl } M_+$ все точки экватора $E(q)$ имеют тип $+$. Докажем, что $q - \alpha$ — допустимая точка. Предположим противное; тогда существует точка $p \in \alpha^1(q)$ и $p \notin \alpha(q)$. В точке p необходимо $\zeta(p, q) \geq 0$, согласно утверждению 2.1. Если $\zeta(p, q) > 0$, то точка p не может быть ближайшей к точке q точкой на луче $L_{p,q}$, в которой $\zeta(p, q) \neq 0$, потому что в этом случае выполнялось бы включение $p \in \alpha(q)$. Отсюда заключаем, что между точками p_0 и p на луче $L_{p,q}$ есть точка $p_1 \in M$, в которой $\zeta(p_1, q) < 0$.

Пусть $\tau(t)$, $t \in [0, 1]$ — кратчайшая на гиперповерхности M^{n-1} с концами $\tau(0) = p$, $\tau(1) = p_1$. На концах этой кривой функция $\zeta(p, q)$ принимает значения противоположные по знаку; отсюда, с использованием свойства регулярности точки q выводится, что существует точка p_2 на кривой τ , в которой $\zeta(p_2, q) = 0$ и точка p_2 имеет тип $-$. Поскольку последнее противоречит выбору точки q , то наше исходное предположение неверно и точка q должна быть α — допустимой точкой.

Если $p \in \alpha^1(q)$, $p \notin \alpha(q)$ и $\zeta(p, q) = 0$, то, в силу замкнутости множества $\alpha(q)$ в M^{n-1} , найдется точка $p_1 \in M$, достаточно близкая к p и обладающая свойствами: $\zeta(p_1, q) > 0$, $p \in \alpha^1(q)$ и $p \notin \alpha(q)$. Таким образом, этот случай сводится к разобранному выше. Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е. Имеют место легко доказуемые утвер-

ждения: гиперповерхность M^{n-1} является выпуклой если и только если каждая точка $p \in M^{n-1}$ является ω -допустимой; гиперповерхность M^{n-1} является выпуклой, если и только если каждая точка $q \in \text{Int} M^{n-1}$ является α -допустимой.

Пусть M^{n-1} - гиперповерхность класса C^2 .

У т в е р ж д е н и е 3.2. Множество $X \subseteq M^{n-1}$ всех ω -допустимых точек гиперповерхности M^{n-1} является множеством положительной меры в M^{n-1} .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для каждого единичного вектора $e \in E^n$ существует ω -допустимая точка $p \in M$, нормаль v_p в которой совпадает с e . Действительно, пусть V - $(n-1)$ -мерное линейное многообразие в E^n , ортогональное вектору e , для которого $\langle p-q, e \rangle \geq 0$, каковы бы ни были точки $p \in M, q \in V$. Нетрудно проверить, что точка $p_0 \in M$, в которой достигается верхняя грань функции $\phi(p) = \rho(p, V) = \max_{q \in V} \|p-q\|$, является ω -допустимой точкой и $v_{p_0} = e$.

Следовательно, при гауссовом отображении гиперповерхности M^{n-1} в единичную сферу $S^{n-1} \subseteq E^n$, сопоставляющем каждой точке $x \in M^{n-1}$ точку $v_x \in S^{n-1}$, образ множества X совпадает со всей сферой S^{n-1} . Поскольку для гиперповерхности класса C^2 гауссовское отображение непрерывно дифференцируемо, то множества нулевой меры на M^{n-1} оно переводит в множества нулевой же меры на S^{n-1} . Следовательно, множество X должно иметь меру отличную от 0. Доказательство закончено.

в) Пусть $X \subseteq E^n$ - произвольное непустое подмножество. Для каждой точки $x \in X$ подмножество $\theta_X(x)$ определим формулой

$$\theta_X(x) = \{y \in X \mid [x, y] \subseteq X\}.$$

Отношение частичного квазипорядка на X определим, полагая $y \leq z$ если и только если $\theta_X(y) \subseteq \theta_X(z)$, $y, z \in X$.

Подмножество $\sigma_X(x) \subseteq X$ определим для каждой точки $x \in X$ формулой

$$\sigma_X(x) = \{y \in X \mid x \leq y\}.$$

Ясно, что же $\sigma_X(x)$.

Нетрудно показать, что для любого замкнутого подмножества $X \subseteq E^n$ и любой точки $x \in X$ множество $\sigma(x)$ замкнуто и выпукло в E^n .

Подмножество $Y \subseteq X$ назовем σ_X -замкнутым (θ_X -замкнутым), если из условия $y \in X$ следует, что $\sigma_X(y) \subseteq Y$ ($\theta_X(y) \subseteq Y$). Из определения легко следует, что объединение и пересечение любого числа σ_X -замкнутых (θ_X -замкнутых) подмножеств в множестве X само σ_X -замкнуто (θ_X -замкнуто).

Пусть $M^{n-1} \subset E^n$ - замкнутая гиперповерхность; обозначим, для краткости, множество σM_+ через N . Имеют место очевидные соотношения

$$\theta_N(p) = \omega_M(p),$$

$$\nu_N(q) \cap M = \alpha_M(q)$$

для любых точек $p \in M$, $q \in N$.

У т в е р ж д е н и е 3.3. Всякое подмножество множества N вида $\omega(U)$, $\Omega(U)$, $U \subseteq M$, является σ_N -замкнутым в N . Если $V \subseteq \sigma M_+$ - α -допустимое подмножество, то множества $\alpha(V)$, $\Lambda(V)$ являются θ_M -замкнутыми в M .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Докажем, что для любой точки $p \in M$ подмножество $\omega(p) \subseteq N$ является σ_N -замкнутым в N . Как замечалось ранее, $\alpha_M(q) = \theta_N(q) \cap M$ для любой точки $q \in N$. Если $q \leq q'$ в N , то $\theta_N(q) \subseteq \theta_N(q')$ и, следовательно, $\alpha_M(q) = \theta_N(q) \cap M \subseteq \theta_N(q') \cap M = \alpha_M(q')$.

Пусть $q \in \omega_M(p)$ и $q \leq q'$. Так как условия $q \in \omega_M(p)$ и $p \in \alpha_M(q)$ эквивалентны и $\alpha_M(q) \subseteq \alpha_M(q')$, то $p \in \alpha_M(q')$, т.е., $q' \in \omega_M(p)$. В силу произвольности точки $q' \geq q$, отсюда следует, что $\sigma_N(q) \subseteq \omega_M(p)$, т.е., множество $\omega(p)$ вместе с каждой своей точкой q содержит множество $\sigma_N(q)$. Значит, множество $\omega_M(p)$ является σ_M -замкнутым в M . Так как множества вида $\omega(U)$, $\Omega(U)$, $U \subseteq M$, являются пересечением или объединением множеств вида $\omega_M(p)$, то они также являются σ_N -замкнутыми подмножествами в N . Первая часть утверждения доказана.

Пусть теперь q - α -допустимая точка в N . Выберем про-

извольную точку $r \in \alpha_M(q)$ и пусть $x \in \Theta_M(p)$. Рассмотрим треугольник Δ с вершинами в точках p, q, x . Отрезок $[p, x] \subseteq M$, так как $x \in \Theta_M(p)$. Если отношение $x \in \alpha_M(q)$ не выполняется, то множество $[x, q] \cap M$ непусто и, следовательно, внутри треугольника Δ лежат точки гиперповерхности M , пусть r — такая точка. Точку z пересечения прямой, проходящей через точки q и r не должно быть видно из точки q ; с другой стороны, очевидно, что $z \in \alpha_M^1(q)$ и, в силу α -допустимости точки q , должно быть выполнено включение $z \in \alpha_M(q)$, т.е. точку z должно быть видно из q . Полученное противоречие показывает ложность предположения $x \notin \alpha_M(q)$. Значит, для каждой точки $r \in \alpha_M(q)$ множество $\Theta_M(p) \subseteq \alpha_M(q)$, т.е. множество $\alpha_M(q)$ является Θ_M -замкнутым в M . Множества $\alpha_M(V)$, $\Theta_M(V)$ являются Θ_M -замкнутыми подмножествами в M для α -допустимого подмножества $V \subseteq N$, как пересечение и объединение подмножеств вида $\alpha_M(q)$. Утверждение доказано.

Л и т е р а т у р а

1. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., КИРЕЙТОВ В.Р. Об одном классе отображений биповерхностей трехмерного пространства. ДАН СССР, Т. 216, № 2, 1974.
2. ГУРВИЧ И.М. Введение в фотометрию. Л., "Энергия", 1968.
3. КИРЕЙТОВ В.Р. Об одном классе отображений биповерхностей трехмерного пространства. Математические проблемы геофизики, вып. 5, часть I, Новосибирск, 1974.
4. КИРЕЙТОВ В.Р. О некоторых свойствах $(n-1)$ -мерных поверхностей в n -мерном пространстве. Математические проблемы геофизики, вып. 5, часть 2, Новосибирск, 1974.
5. МИЛНОР Дж. Теория Морса. М., "Мир", 1965.
6. ТОМ Р. Некоторые свойства "в целом" дифференцируемых многообразий. Сб.: Расслоенные пространства и их приложения. М., ИЛ., 1953.

М.В.Клибанов

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ИНТЕГРАЛАМИ
ПО ОДНОМУ СЕМЕЙСТВУ ЭЛЛИпсоИДОВ ВРАЩЕНИЯ,
И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть Π и Π_0 — некоторые множества в пространстве R^3 . Рассмотрим следующую задачу интегральной геометрии: от функции $a(p) = a(x, y, z)$ известны интегралы с некоторой весовой функцией по семейству софокусных эллипсоидов вращения, у которых один фокус пробегает множество Π , а второй — множество Π_0 . Требуется по заданным интегралам определить функцию $a(p)$.

Сложность решения этой задачи в значительной степени зависит от вида множеств Π и Π_0 . В настоящей работе предполагается, что Π и Π_0 — некоторые плоские пересекающиеся кривые (точные формулировки приведены ниже).

Ранее подобная задача интегральной геометрии изучалась В.Г.Романовым (см., например, [1]) для случая, когда Π — плоскость, а Π_0 — фиксированная точка этой плоскости. Отметим также интересные результаты, полученные Г.И.Плаксиным [2, 3] и С.В.Успенским [4], которые рассматривали задачу восстановления функции, заданной интегралами по некоторым эллипсоидам, в несколько иных постановках.

Рассмотрим теперь обратную задачу для одного параболического уравнения, которая может быть сведена к сформулированной

выше задаче интегральной геометрии.

Пусть функция $u(p, t)$ является решением уравнения

$$u_t = \Delta u + \alpha \cdot a(p) \cdot u(p, t) \quad (1)$$

с начальными данными $u|_{t=0} = \delta(p-p_0)$.

Здесь $p=(x, y, z)$ - трехмерный вектор, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, α - малый параметр, $\delta(p - p_0)$ - дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Положим $v = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} v_t &= \Delta v + a(p) \cdot u_0(p, t) \\ v|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где функция $u_0(p, t)$ является решением уравнения

$$u_{0t} = \Delta u_0 \quad (3)$$

с начальными данными $u_0|_{t=0} = \delta(p-p_0)$.

Функции u_0 и v зависят от p_0 , как от параметра. Поэтому в дальнейшем будем писать $u_0(p, p_0, t)$, $v(p, p_0, t)$. Для уравнения (2) рассмотрим следующую обратную задачу.

Пусть функция $a(p)$ неизвестна, но для всех точек $p \in \Pi$, $p_0 \in \Pi_0$ и для всех $t \geq 0$ известна функция

$$v(p, p_0, t) \Big|_{p \in \Pi, p_0 \in \Pi_0, t \geq 0} = \varphi(p, p_0, t). \quad (4)$$

Требуется по функции φ восстановить функцию a .

Поставленную обратную задачу будем далее для краткости называть обратной задачей (2)-(4). Ранее обратные задачи, подобные (2)-(4), для уравнений различных типов рассматривались в [1, 5]. Сведем обратную задачу (2)-(4) к сформулированной выше задаче интегральной геометрии. Пусть функция $a(p)$ ограничена. Применим к обеим частям (2) преобразование Лапласа по переменной t с параметром λ^2 ($\lambda > 0$):

$$v^*(p, p_0, \lambda) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda^2 t) \cdot v(p, p_0, t) dt.$$

С учетом (3) находим [6]:

$$\Delta v^* - \lambda^2 v^* = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\exp(-\lambda |p-p_0|)}{|p-p_0|} \cdot a(p). \quad (5)$$

Здесь $|p-p_0|$ - расстояние между точками p и p_0 . Решая (5), получаем:

$$v^*(p, p_0, \lambda) = \frac{1}{16\pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda |p-q|) \cdot \exp(-\lambda |p_0-q|)}{|p-q| \cdot |p_0-q|} \cdot a(q) dq.$$

Здесь $q=(\xi, \eta, \mu)$ - переменная интегрирования. Пусть $p \in \Pi$, $p_0 \in \Pi_0$. Тогда с учетом (4) находим:

$$\varphi^*(p, p_0, \lambda) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda |p-q|) \cdot \exp(-\lambda |p_0-q|)}{|p-q| \cdot |p_0-q|} \cdot a(q) dq. \quad (6)$$

Здесь $\varphi^*(p, p_0, \lambda)$ - образ Лапласа функции $\varphi(p, p_0, t)$.

Рассмотрим в пространстве $q=(\xi, \eta, \mu)$ декартову систему координат q' , поместив ее начало в точку p_0 и проведя одну из осей через точку p , а две другие - ортогонально этой оси и друг к другу. Введем также сферическую систему координат, связанную с системой q' , выбрав за полярную ту ось системы, которая проходит через точки p_0 и p . Имеем:

$$|p_0 - q| = r,$$

$$|p - q| = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r \cdot \rho \cdot \cos \theta},$$

где $\rho = |p - p_0|$.

В результате получаем:

$$\varphi^*(p, p_0, \lambda) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \times \\ \times \frac{\exp[-\lambda(r + \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta})]}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}} \cdot r \cdot a(q).$$

В последнем интеграле перейдем от переменной интегрирования к переменной τ :

$$\tau = r + \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}. \quad (7)$$

Поверхность $\tau = \text{const}$ определяет в пространстве q эллипсоид вращения с фокусами в точках p и p_0 :

$$S(p, p_0, \tau) = \{q \mid |p-q| + |p_0-q| = \tau\}.$$

Его уравнение в полярной системе координат получим, найдя из (7) r как функцию угла θ :

$$r = \frac{\tau^2 - \rho^2}{2(\tau - \rho \cdot \cos \theta)}.$$

Имеем [7]:

$$\left[\frac{\frac{dr}{dt} \cdot r}{\tau - r} \right] = \frac{2 \cdot r^2}{\tau^2 - \rho^2}.$$

Поэтому находим:

$$\varphi^*(p, p_0, \lambda) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\rho \tau^2 - \rho^2} \cdot \iint_{S(p, p_0, \tau)} r^2 \cdot a(q) d\omega \right) \cdot \exp(-\lambda\tau) d\tau, \quad (8)$$

где $d\omega$ - элемент телесного угла с центром в точке P_0 .
Рассмотрим функцию

$$f(\tau, p, P_0) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi^2 (\tau^2 - \rho^2)} \cdot \iint_{S(p, P_0, \tau)} r^2 \cdot a(q) d\omega & \text{при } \tau \geq \rho \\ 0 & \text{при } \tau < \rho \end{cases} \quad (9)$$

В работе [7] показано, что в случае, если функция $a(q)$ непрерывна (что мы будем предполагать в дальнейшем), функция $f(\tau, p, P_0)$ непрерывна при $\tau > \rho$ и стремится к конечному пределу при $\tau \rightarrow \rho$. Согласно (9) равенство (8) можно переписать в виде

$$\varphi^*(p, P_0, \lambda) = \int_0^{\infty} f(\tau, p, P_0) \cdot \exp(-\lambda\tau) d\tau.$$

В силу взаимной однозначности преобразования Лапласа при $\lambda > 0$ [6] отсюда следует, что функция $f(\tau, p, P_0)$ определяется однозначно по функции $\varphi^*(p, P_0, \lambda)$.

Итак, нам известна функция

$$\iint_{S(p, P_0, \tau)} |q - P_0|^2 \cdot a(q) d\omega = b(p, P_0, \tau). \quad (10)$$

Таким образом, обратная задача (2)-(4) сведена к следующей задаче интегральной геометрии:

I. От функции $a(q)$ известны интегралы (10) по эллипсоидам вращения $S(p, P_0, \tau)$, у которых один фокус (p) пробегает множество Π , а второй фокус (P_0) пробегает множество Π_0 . Требуется по заданным интегралам (10) восстановить функцию $a(q)$.

Наряду с задачей рассмотрим также более общую задачу I'. От функции $\tilde{a}(q)$ известны интегралы

$$\iint_{S(p, P_0, \tau)} \frac{1}{|p-q|^{k_1}} \cdot \frac{1}{|P_0-q|^{k_2}} \cdot \tilde{a}(q) d\omega = \tilde{b}(p, P_0, \tau), \quad (10')$$

где k_1, k_2 - фиксированные целые числа, $k_1 \geq 0, k_2 \geq -2$. При тех же предположениях относительно фокусов p и p_0 , что и выше, требуется по интегралам (I0') восстановить функцию $\tilde{a}(q)$. Здесь все интегралы (I0') предполагаются существующими при $p \in \Pi, p_0 \in \Pi_0$. Задача I' отличается от задачи I весовой функцией. При $k_1 = 0, k_2 = -2$ обе задачи совпадают.

Пусть $0 < t \leq \infty$ - некоторое фиксированное число. Далее будем считать, что функции $b(p, p_0, \tau)$ и $\tilde{b}(p, p_0, \tau)$ заданы для всех $0 \leq \tau < t, p \in \Pi, p_0 \in \Pi_0$.

Т е о р е м а I. Пусть Π и Π_0 - две взаимно перпендикулярные прямые, лежащие в плоскости $z=0$, и A - точка пересечения этих прямых. Предположим, что функция $a(q)$ непрерывна, ограничена, равна нулю в некоторой малой окрестности точки A и такая, что

$$a(\xi, \eta, \mu) \equiv a(\xi, \eta, -\mu).$$

Тогда функция $a(q)$ однозначно восстанавливается по интегралам (I0) в шаре $|q-A| < \frac{T}{2}$.

Далее класс функций, описанный в этой теореме, будем обозначать $CA(R^3)$. Очевидно, $CA(R^3)$ - линейное многообразие в пространстве непрерывных функций $C(R^3)$.

Доказательству теоремы предположим лемму

Л е м м а. Пусть $R = (\xi^2 + \eta^2 + \mu^2)^{1/2}$, l - некоторое целое положительное число, β - любое число. Рассмотрим функцию $h_l(\xi, \eta, \mu) = \frac{\exp(\beta R)}{R^l}$. Тогда функция $\frac{\partial^n h_l}{\partial \xi^n}$ имеет вид

$$\frac{\partial^n h_l}{\partial \xi^n} = \xi^n \left[(-1)^n \frac{b_n^{(n)}}{R^{2n+1}} + (-1)^{n-1} \frac{n_{n-1}^{(n)} \cdot \beta}{R^{(2n-1)+1}} + \dots + (-1)^{n-k} \times \right. \\ \left. \times \frac{b_{n-k}^{(n)} \cdot \beta^k}{R^{(2n-k)+1}} + \dots + \frac{b_0^{(n)} \cdot \beta^n}{R^{n+1}} \right] \cdot \exp(\beta R) + \varphi_n(\xi, \beta, R) \cdot \exp(\beta R), \quad (12)$$

где $\varphi_n(\xi, \beta, R)$ - полином от $\xi, \beta, \frac{1}{R}$, причем его степень по ξ и β строго меньше n ; все числа $b_{n-k}^{(n)}$ ($0 \leq k \leq n$) положительны и $b_0^{(n)} = 1$. Доказательство леммы проводится индукцией по n непосредственным дифференцированием с использованием формулы $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R^m} \right) = (-1) \cdot m \cdot \frac{\xi}{R^{m+2}}$, справедливой для любого m .

Доказательство теоремы I. Не ограничивая общности, можно считать, что точка A совпадает с началом координат и прямые Π и Π_0 являются координатными:

$$\Pi = \{ (x, y, z) \mid y = z = 0 \},$$

$$\Pi_0 = \{ (x, y, z) \mid x = z = 0 \}.$$

Отсюда получаем, что если $p \in \Pi, p_0 \in \Pi_0$, то $p = (x, 0, 0)$, $p_0 = (0, y_0, 0)$. Пусть $\delta > 0$ таково, что $a(q) = 0$ при $|q| < \delta$. Далее считаем, что $|p| < \frac{\delta}{2}$, $|p_0| < \frac{\delta}{2}$.

При доказательстве теоремы будем различать случаи конечного и бесконечного T .

I. Предположим сначала, что $T = \infty$. Из предыдущего очевидно, что в этом случае задача интегральной геометрии I имеет единственное решение тогда и только тогда, когда решение уравнения I-го рода (6) единственно. Следовательно, достаточно показать, что при $\varphi \equiv 0, p = (x, 0, 0), p_0 = (0, y_0, 0)$ уравнение (6) имеет только нулевое решение в классе функций $a \in C^1(R^3)$. С учетом вышеназванных предположений интегральное уравнение I-го рода (6) перепишем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2 + \mu^2}) \cdot \exp(-\lambda \sqrt{\xi^2 + (y_0 - \eta)^2 + \mu^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2 + \mu^2} \cdot \sqrt{\xi^2 + (y_0 - \eta)^2 + \mu^2}} \times$$

(13)

$$\times a(\xi, \eta, \mu) d\xi d\eta d\mu = 0.$$

Положим в (I3) $x = y_0 = 0$ и перейдем к сферической системе координат. Тогда получим:

$$\int_0^{\infty} \exp(-2\lambda R) \cdot \left(\iint_{S(R)} a(q) d\omega \right) dR = 0, \quad (14)$$

где $S(R)$ - сфера радиуса R с центром в начале координат, $d\omega$ - элемент телесного угла с центром в начале координат. Из (I4) находим:

$$\iint_{S\left(\frac{R}{2}\right)} a(q) d\omega = 0. \quad (15)$$

Мы будем доказывать такие соотношения:

$$\iint_{S\left(\frac{R}{2}\right)} \xi^n \eta^m a(q) d\omega = 0 \quad (16)$$

для всех $0 \leq R < \infty; n, m = 0, 1, 2, \dots$. В силу того, что $a(\xi, \eta, \mu) \equiv a(\xi, \eta, -\mu)$, из (I6) будет следовать, что $a(q) \equiv 0$, так как соотношения (I6) означают, что все моменты функции $a(q)$ равны нулю [1, 10].

Равенства (I6) будем доказывать индукцией по суммарной степени $d = n + m$ полинома $\xi^n \cdot \eta^m$. В силу (I5) при $d = 0$ соотношение (I6) справедливо. Пусть (I6) уже доказано для $0 \leq d \leq d_1 - 1$. Покажем справедливость (I6) для $d = d_1$. Заметим прежде всего, что если $\phi(\lambda, R)$ - некоторый полином от $\lambda, \frac{1}{R}$, то из (I6) следует равенство

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\lambda R) \cdot \xi^n \cdot \eta^m \cdot \phi(\lambda, R) \cdot a(\xi, \eta, \mu) d\xi d\eta d\mu = 0, \quad (17)$$

где $\lambda > 0$ - некоторое число.

В самом деле, умножим обе части (I6) на функцию $\exp(-2\lambda R) \cdot \phi(\lambda, R) \cdot R^2$, проинтегрируем по R от нуля до бесконечности и перейдем от сферической системы координат к декартовой. Тогда, очевидно, получим (I7).

Пусть n и m некоторые неотрицательные целые числа, такие, что $d_1 = d = n+m$. Продифференцируем обе части (I3) n раз по x и m раз по y_0 , затем приравняем x и y_0 к нулю. Тогда, используя лемму, индукционное предположение и соотношение (I7), получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\lambda R) \cdot \xi^n \cdot \eta^m \left(\frac{b_n^{(n)}}{R^{2n+1}} + \lambda \cdot \frac{b_{n-1}^{(n)}}{R^{2n}} + \dots + \lambda^n \cdot \frac{b_0^{(n)}}{R^{n+1}} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{b_m^{(m)}}{R^{2m+1}} + \lambda \cdot \frac{b_{m-1}^{(m)}}{R^{2m}} + \dots + \lambda^m \cdot \frac{b_0^{(m)}}{R^{m+1}} \right) \cdot a(\xi, \eta, \mu) d\xi d\eta d\mu = 0.$$

Или, перемножая полиномы от λ , стоящие под знаком интеграла, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\lambda R) \cdot \xi^n \cdot \eta^m \cdot \sum_{k=0}^{m+n} \phi_k^{(mn)} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \lambda^k \cdot a(\xi, \eta, \mu) d\xi d\eta d\mu = 0. \quad (18)$$

Здесь $\phi_k^{(mn)} \left(\frac{1}{R} \right)$ — полиномы от $\frac{1}{R}$, причем в силу того, что все числа $b_i^{(n)}$, $b_j^{(m)}$ положительны ($i=0, \dots, n$; $j=0, \dots, m$), коэффициенты этих полиномов — неотрицательные числа; $\phi_{m+n}^{(mn)} = \frac{1}{R^{m+n+2}}$, так как $b_0^{(n)} = b_0^{(m)} = 1$. Далее, для сокращения записи будем писать $\phi_k \left(\frac{1}{R} \right)$ вместо $\phi_k^{(mn)} \left(\frac{1}{R} \right)$. Переходя в (18), как и ранее, к сферическим координатам, получаем

$$\sum_{k=0}^{m+n} \lambda^k \cdot \int_0^{\infty} \exp(-2\lambda R) \cdot \left[\phi_k \left(\frac{1}{R} \right) \cdot R^2 \cdot \int_{S(R)} \xi^n \cdot \eta^m \cdot a(q) d\omega \right] dR = 0. \quad (19)$$

Сделаем замену переменных в каждом из интегралов (I9), положив $R = \frac{R_1}{2}$ и разделим обе части (I9) на $\frac{\lambda^{m+n}}{2}$. Тогда получим

$$\sum_{k=0}^{m+n} \frac{1}{\lambda^{m+n-k}} \cdot \int_0^{\infty} \exp(-\lambda R_1) \cdot \left[\frac{R_1^2}{4} \cdot \phi_k\left(\frac{2}{R_1}\right) \cdot \iint_{S\left(\frac{R_1}{2}\right)} \xi^n \eta^m \cdot a(q) d\omega \right] dR_1 = 0 \quad (20)$$

Введем обозначения

$$\tilde{\phi}_k(R_1) = \frac{R_1^2}{4} \cdot \phi_k\left(\frac{2}{R_1}\right), \quad (21)$$

$$\mathcal{E}_{mn}(R_1) = \iint_{S\left(\frac{R_1}{2}\right)} \xi^n \eta^m \cdot a(q) d\omega.$$

И рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(R_1) &= \tilde{\psi}_{m+n}(R_1) \cdot q_{mn}(R_1) + \int_0^{R_1} (\tilde{\psi}_{m+n-1} \cdot \mathcal{E}_{mn})(R_2) dR_2 + \dots \\ &+ \dots + \int_0^{R_1} dR_2 \dots \int_0^{R_{m+n-k}} dR_{m+n-k+1} (\tilde{\psi}_k \cdot \mathcal{E}_{mn})(R_{m+n-k+1}) + \dots \\ &+ \dots + \int_0^{R_1} dR_2 \dots \int_0^{R_{n+m}} (\tilde{\psi}_0 \cdot \mathcal{E}_{mn})(R_{m+n+1}). \end{aligned} \quad (22)$$

Все интегралы в правой части (22) существуют в силу того, что $\mathcal{E}_{mn}(R_1) = 0$ при $0 \leq R_1 \leq 2\delta$.

Известно следующее свойство преобразования Лапласа [6]:

$$\int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) \cdot \left[\int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{k-1}} f(t_k) dt_k \right] = \frac{1}{\lambda^k} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) f(t) dt. \quad (23)$$

Используя последнее равенство, получаем

$$\int_0^{\infty} \exp(-\lambda R_1) \cdot \Phi_{mn}(R_1) dR_1 = \sum_{k=0}^{m+n} \frac{1}{\lambda^{m+n-k}} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda R_1) \times \\ \times [\tilde{\Phi}_k(R_1) \cdot \varphi_{mn}(R_1)] dR_1 .$$

Или, воспользовавшись (20)–(22) и взаимной однозначностью преобразования Лапласа, находим:

$$\Phi_{mn}(R_1) \equiv 0 . \quad (24)$$

Заметим, что по доказанному $\tilde{\Phi}_{m+n}(R_1) = \frac{2^{m+n}}{R_1^{m+n}} . \quad (25)$

Меняя в каждом из интегралов (22) порядок интегрирования и используя (24)–(25), приходим к интегральному уравнению Вольтерра II рода:

$$\varepsilon_{mn}(R_1) + \int_0^{R_1} K_{mn}(R_1, R_2) \cdot \varepsilon_{mn}(R_2) dR_2 = 0 ,$$

где $K_{mn}(R_1, R_2)$ – некоторая непрерывная в области $R_1 \geq 2\delta$, $R_2 \geq 2\delta$ функция. С учетом того, что $\varepsilon_{mn}(R_1) = 0$ для всех $0 \leq R_1 \leq 2\delta$, последнее равенство можно переписать так:

$$\varepsilon_{mn}(R_1) + \int_{2\delta}^{R_1} K_{mn}(R_1, R_2) \cdot \varepsilon_{mn}(R_2) dR_2 = 0 . \quad (26)$$

Как известно, интегральное уравнение Вольтерра II рода вида (26) имеет только нулевое решение в классе функций, непрерывных на отрезке $[2\delta, \infty)$ [8]. Следовательно, $\varepsilon_{mn}(R_1) \equiv 0$. Итак, в случае $t = \infty$ теорема доказана.

П. Разберем теперь случай конечного t .

Пусть V – некоторое неограниченное открытое подмножество евклидова пространства R^3 . Обозначим через $\mathcal{L}(V)$ – множество бесконечно дифференцируемых на V функций, убываю-

ших на бесконечности быстрее любой степени $\frac{1}{|z|}$ ($z \in V$). В дальнейшем нам понадобится аппарат обобщенных функций медленного роста. Соответствующие определения и обозначения можно найти в монографии В.С.Владимирова [9]. Единственное отличие нашего случая от случая, рассмотренного в [9], будет заключаться в том, что в качестве пространства основных функций вместо $\mathcal{L}(R^3)$ мы будем рассматривать $\mathcal{L}(R^3 + \delta)$, где

$$R^3_{+\delta} = \{z=(\tau, x, y_0) \mid 0 < \tau < \infty, |x| < \frac{\delta}{2}, |y_0| < \frac{\delta}{2}\}.$$

Сходимость в пространстве $\mathcal{L}(R^3_{+\delta})$ вводится так же, как и в $\mathcal{L}(R^3)$. Напомним, что каждая локально интегрируемая функция $\varphi(z)$, растущая на бесконечности не быстрее некоторой степени $|z|$ ($z \in R^3_{+\delta}$), отождествляется с порождаемой ей регулярной обобщенной функцией.

Не ограничивая общности, можно считать, что $b(r, p_0, \tau) = 0$ при $0 < \tau < T, r \in \Pi, p_0 \in \Pi_0$. Покажем, что в этом случае $a(q) = 0$ в шаре $|q-A| < \frac{T}{2}$. Рассмотрим функцию $f(\tau, r, p_0)$, определяемую формулой (9). Так как $r=(x, 0, 0), p_0=(0, y_0, 0)$, то далее будем писать $f(\tau, x, y_0)$. Функция $f(\tau, x, y_0)$ локально интегрируема, непрерывна в области $\tau > \sqrt{x^2 + y_0^2}$ и при $\tau \rightarrow \infty$ растет не быстрее некоторой степени τ . Поэтому ее можно рассматривать как обобщенную функцию, принадлежащую пространству $\mathcal{L}'(R^3_{+\delta})$. Очевидно, носитель обобщенной функции содержится в области $\tau > T$.

К функции f применим оператор преобразования Лапласа F_L по переменной τ . Тогда получим обобщенную функцию $F_L(f(\tau, x, y_0))(\lambda)$, где λ - переменная Лапласа. Здесь и далее λ - комплексное число, $\text{Re } \lambda > 0$.

Рассмотрим функцию

$$G(\lambda, x, y_0) = \frac{1}{16\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2 + \mu^2}) \cdot \exp(-\lambda \sqrt{\xi^2 + (y_0 - \eta)^2 + \mu^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2 + \mu^2} \cdot \sqrt{\xi^2 + (y_0 - \eta)^2 + \mu^2}} \times a(\xi, \eta, \mu) d\xi d\eta d\mu. \quad (27)$$

Из предыдущего очевидно, что

$$G(\lambda, x, y_0) = \mathbb{F}_\Pi(f(\tau, x, y_0))(\lambda). \quad (28)$$

Дифференцируя обе части (28) n раз по x и m раз по y_0 и деля обе части полученного равенства на λ^{n+m} , имеем:

$$\frac{1}{\lambda^{n+m}} \cdot \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y_0^m} G(\lambda, x, y_0) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y_0^m} \left[\frac{1}{\lambda^{n+m}} \mathbb{F}_\Pi(f(\tau, y, y_0))(\lambda) \right]$$

Но обобщенная функция $f(\tau, x, y_0)$ локально интегрируема и имеет рост на бесконечности не выше степенного. Поэтому с учетом (23) находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^{n+m}} \cdot \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y_0^m} G(\lambda, x, y_0) &= \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y_0^m} \mathbb{F}_\Pi \left(\int_0^\tau d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{m+n-1}} x \right. \\ &\quad \left. \times d\tau_{m+n} f(\tau, x, y_0) \right)(\lambda). \end{aligned} \quad (29)$$

Из результатов [9] следует, что для любой обобщенной функции $g(\tau, x, y_0) \in \mathcal{L}'(\mathbb{R}_{+\delta}^3)$ имеет место тождество

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y_0^m} \mathbb{F}_\Pi(g(\tau, x, y_0))(\lambda) \equiv \mathbb{F}_\Pi \left(\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y_0^m} g(\tau, x, y_0) \right)(\lambda) \quad (30)$$

В последнем равенстве производные понимаются в смысле производных обобщенных функций. С учетом (30) равенство (29) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^{n+m}} \cdot \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y_0^m} G(\lambda, x, y_0) &= \mathbb{F}_\Pi \left(\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y_0^m} \int_0^\tau d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{m+n-1}} x \right. \\ &\quad \left. \times d\tau_{m+n} f(\tau, x, y_0) \right)(\lambda). \end{aligned} \quad (31)$$

В правой части (31) производная также понимается в смысле производной обобщенной функции, так как функция f , вообще говоря, не дифференцируема в обычном смысле.

Используя равенство (31) уже нетрудно доказать теорему. Будем, как и ранее, доказывать соотношения

$$\iint_{S\left(\frac{R}{2}\right)} \xi^n \cdot \eta^m \cdot a(q) d\omega = 0 \quad (32)$$

для $0 \leq R < T$; $n, m = 0, 1, 2, \dots$. Доказательство будем вести индукцией по числу $d = n + m$. Положим в (27) $x = y_0 = 0$ и перейдем к сферическим координатам. Тогда получим

$$G(\lambda, 0, 0) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty \exp(-\lambda R_1) \cdot \left[\iint_{S\left(\frac{R_1}{2}\right)} a(q) d\omega \right] dR_1.$$

Отсюда с учетом (28) находим

$$\iint_{S\left(\frac{R}{2}\right)} a(q) d\omega = 32\pi^2 \cdot f(R_1, 0, 0).$$

Однако $f(\tau, 0, 0) = 0$ при $0 \leq \tau < T$. Отсюда получаем

$$\iint_{S\left(\frac{R}{2}\right)} a(q) d\omega = 0$$

при $0 \leq R_1 < T$.

Следовательно, при $d=0$ равенство (32) верно. Пусть (32) верно для $0 \leq d \leq d_1 - 1$. Покажем справедливость (32) для $d = d_1$. Пусть n и m — произвольные целые неотрицательные числа, такие, что $d = d_1 = n + m$. Продифференцируем обе части (27) n -раз по x и m -раз по y_0 . Пользуясь рассуждениями, проведенными при переходе от обратной задачи (2)-(4) к задаче интегральной геометрии I, нетрудно показать, что

$$\frac{1}{\lambda^{n+m}} \cdot \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y_0^m} \cdot G(\lambda, x, y_0) = \sum_{k=0}^{m+n} \frac{1}{\lambda^{m+n-k}} \left[\sum_{j_1, j_2, k_1, k_2} \int_0^\infty \exp(-\lambda R_1) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{C_{j_1, j_2, k_1, k_2}^{(k)}}{8\pi^2 (R_1^2 - (x^2 + y_0^2))} \cdot \iint S(p, p_0, R_1) \frac{(x-\xi)^{j_1} \cdot (y_0 - \eta)^{j_2} |p_0 - q|^2}{|p-q|^{k_1} |p_0 - q|^{k_2}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times a(q) d\omega \right) dR_1 \right].$$

Здесь сумма, стоящая в квадратных скобках, конечная; j_1, j_2
 k_1, k_2 - целые неотрицательные числа, причем $j_1 + j_2 \leq n + m$;
 $C_{j_1, j_2, k_1, k_2}^{(k)}$ - некоторые числа.

Рассмотрим функцию

$$\Phi_{mn}(R_1, x, y_0) = \sum_{k=0}^{m+n} \left[\sum_{j_1, j_2, k_1, k_2} \frac{1}{8\pi^2} \times \right. \\ \left. j_1 + j_2 \leq n+m \right]$$

$$\times \int_0^{R_1} dR_2 \dots \int_0^{R_{m+n-k}} dR_{m+n-k+1} \left(\frac{C_{j_1, j_2, k_1, k_2}^{(k)}}{R_{m+n-k+1}^2 - (x^2 + y_0^2)} \right) \times$$

$$\times \iint S(p, p_0, R_{m+n-k+1}) \frac{(x-\xi)^{j_1} (y_0 - \eta)^{j_2} |p_0 - q|^2}{|p-q|^{k_1} |p_0 - q|^{k_2}} \cdot a(q) d\omega \Big] +$$

$$+ \frac{1}{8\pi^2 (R_1^2 - (x^2 + y_0^2))} \cdot \iint S(p, p_0, R_1) \frac{(x-\xi)^n (y_0 - \eta)^m |p_0 - q|^2}{|p-q|^n |p_0 - q|^m} \cdot a(q) d\omega,$$

Так как $a(q) \approx 0$ при $|q| < \delta$ и $|p| < \frac{\delta}{2}$, $|p_0| < \frac{\delta}{2}$, то очевидно, что функция $\hat{\Phi}_{mn}(R_1, x, y_0)$ непрерывна в области $R_1 > \sqrt{x^2 + y_0^2}$ и ограничена при $R_1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y_0^2}$ [7]. Кроме того, эта функция локально интегрируема на множестве $R_{+\delta}^3$ и имеет на бесконечности (при $\tau \rightarrow \infty$) рост не выше степенного. Поэтому мы будем рассматривать ее и как обобщенную функцию, принадлежащую пространству $\mathcal{L}'(R_{+\delta}^3)$.

С учетом (23) находим

$$F_{\lambda}(\hat{\Phi}_{mn}(R_1, x, y_0))(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{n+m}} \cdot \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y_0^m} G(\lambda, x, y_0).$$

Отсюда, используя (31), получаем:

$$\hat{\Phi}_{mn}(R_1, x, y_0) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y_0^m} \int_0^{R_1} dR_2 \dots \int_0^{R_{m+n-1}} dR_{m+n} \times \\ \times f(R_{m+n}, x, y_0).$$

Однако носитель обобщенной функции, стоящей в правой части последнего равенства, сосредоточен в области $R_1 > T$. Отсюда с учетом леммы дю Буа-Реймонда [9], находим: $\hat{\Phi}_{mn}(R_1, x, y_0) = 0$ почти всюду при $0 \leq R_1 < T$. Но так как $\hat{\Phi}_{mn}(R_1, x, y_0)$ непрерывна при $R_1 > \sqrt{x^2 + y_0^2}$, то $\hat{\Phi}_{mn}(R_1, 0, 0) = 0$ для всех $0 \leq R_1 < T$. Отсюда, используя индукционное предположение, нетрудно получить: $(-1)^{m+n} 32\pi^2 \cdot \hat{\Phi}_{mn}(R_1, 0, 0) = \Phi_{mn}(R_1) = 0$ при $0 \leq R_1 \leq T$, где $\Phi_{mn}(R_1)$ — функция, определенная формулой (22). Следовательно, функция $g_{mn}(R_1) = \iint_{S(R_1, \frac{1}{2})} \xi^n \cdot \eta^m \cdot a(q) d\omega$ удовлетворяет интегральному уравнению (26) при всех $0 \leq R_1 \leq T$. Отсюда заключаем: $g_{mn}(R_1) = 0$ при $0 \leq R_1 \leq T$.

Теорема I доказана.

Т е о р е м а 2. Предыдущая теорема сохраняет свою силу и в том случае, когда Π и Π_0 — две произвольные пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости $z = 0$ ($\Pi \neq \Pi_0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности,

считаем, что прямая Π является координатной: $\Pi = \{(x, y, z) | y = z = 0\}$, а уравнение прямой Π_0 в плоскости $z = 0$ имеет вид $y_0 = (\operatorname{tg} \alpha) x + x_0$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ — угол пересечения прямых.

Предположим сначала, что $T = \infty$. В этом случае достаточно показать, что интегральное уравнение I рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2 + \mu^2}) \cdot \exp(-\lambda \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (x_0 \operatorname{tg} \alpha - \eta)^2 + \mu^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2 + \mu^2} \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (x_0 \operatorname{tg} \alpha - \eta)^2 + \mu^2}} x \cdot a(\xi, \eta, \mu) d\xi d\eta d\mu = 0. \quad (33)$$

Имеет только нулевое решение в классе функций $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$. Как и ранее, будем доказывать соотношения

$$\int_{S(\frac{R_1}{2})} \int \xi^n \cdot \eta^m \cdot a(q) d\omega = 0, \quad (34)$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Индукцией по $d = n + m$. При $d = 0$ это равенство устанавливается так же, как в теореме I. Пусть (34) справедливо для всех $0 \leq d \leq d_1 - 1$. Покажем его справедливость для $d = d_1$. Продифференцируем левую часть (33) d раз по x . Тогда так же как при доказательстве теоремы I получим для функции $\mathcal{E}_{0d} = \int_{S(\frac{R_1}{2})} \int \xi^d \cdot a(q) d\omega$ интегральное уравнение Вольтерра II рода вида (26). Отсюда заключаем, что $\mathcal{E}_{0d} \equiv 0$. Пусть равенство

$$\int_{S(\frac{R_1}{2})} \int \xi^{d-k} \cdot \eta^k \cdot a(q) d\omega = 0 \quad (35)$$

уже доказано для $0 \leq k \leq m - 1 \leq d - 1$. Докажем его для $k = m$. Продифференцируем для этого обе части (33) $(d - m)$ раз по x

и m раз — по x_0 и приравняем x и x_0 к нулю. Тогда для функции

$$\tilde{\xi}_{m(d-m)}(R_1) = \iint_{S(R_{1/2})} \xi^{d-m} \cdot (\xi + t g \alpha \cdot \eta)^m \cdot a(q) d\omega$$

тем же методом, что и выше, получим интегральное уравнение вида (26). Отсюда заключаем: $\tilde{\xi}_{m(d-m)}(R_1) \equiv 0$. Или, используя бином Ньютона и индукционное предположение, получаем:

$$\iint_{S(\frac{1}{2})} \xi^{d-m} \cdot \eta^m \cdot a(q) d\omega = 0.$$

Следовательно, соотношение (35) выполнено для всех $0 \leq k \leq d$. Таким образом, для случая $T = \infty$ теорема доказана. Переход к случаю конечного T осуществляется так же, как в предыдущей теореме.

Т е о р е м а 2 доказана.

Заметим, что, как следует из доказательства теоремы, для ее справедливости достаточно, чтобы фокусы p и p_0 эллипсоидов $S(p, p_0, \tau)$ пробегали множества $\Pi \cap D_\delta(A)$ и $\Pi_0 \cap D_\delta(A)$, соответственно, где $D_\delta(A) = \{q \mid |q-A| < \frac{\delta}{2}\}$, $\delta > 0$ — некоторое малое положительное число. Используя это соображение, нетрудно показать, что справедлива более общая

Т е о р е м а 3. Пусть Π и Π_0 — две кривые, лежащие в плоскости $z=0$, пересекающиеся в точке A , и такие, что в некоторой малой окрестности этой точки параметризации кривых Π и Π_0 бесконечно дифференцируемы. Предположим также, что в точке A кривые Π и Π_0 не имеют общей касательной, и пусть $a \in C^1(R^3)$. Тогда функция $a(q)$ однозначно восстанавливается по интегралам (10) в шаре $|q-A| < \frac{T}{2}$.

С л е д с т в и е. Пусть множества Π и Π_0 удовлетворяют условиям теоремы 3. Тогда обратная задача (2)-(4) имеет единственное решение в классе функции $a(q) \in C^1(R^3)$.

Т е о р е м а 4. Теоремы 1-3 сохраняют свою силу и для задачи интегральной геометрии Γ' .

Для доказательства этого факта достаточно заметить, что, если интегральное уравнение I рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda(p-q|\cdot)) \cdot \exp(-\lambda(p_0-q|\cdot))}{|p-q|^{k_1+1} \cdot |p_0-q|^{k_2+3}} \cdot a(q) dq = C(p, p_0, \lambda) \quad (36)$$

при $p \in \Pi \cap D_0(A)$, $p_0 \in \Pi_0 \cap D_0(A)$ имеет единственное решение в классе функций $a \in C\mathcal{A}(R^3)$, то и задача интегральной геометрии I' при $T = \infty$ имеет единственное решение в этом классе функций. Исследование интегрального уравнения (36) и переход в задаче I' к случаю конечного T осуществляется теми же методами, что были применены при доказательствах предыдущих теорем.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность член-корреспонденту АН СССР М.М.Лаврентьеву за постановку задачи и помощь в работе.

Л и т е р а т у р а

1. РОМАНОВ В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск, "Наука", 1972.
2. ПЛАКСИН Г.И. Об одной задаче И.М.Гельфанда. - ДАН СССР, 170, № 4, (1966), с.783-785.
3. ПЛАКСИН Г.И. О выражении функции через ее интегралы по эллипсоидам. - ДАН СССР, 166, № 3 (1966), с.548-550.
4. УСПЕНСКИЙ С.В. О восстановлении функции, заданной интегралами по одному семейству эллипсоидов, - Сибирский математический журнал XIII, № 6, (1972) с.1374-1382.
5. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., ВАСИЛЬЕВ В.Г., РОМАНОВ В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, "Наука", 1969.

6. ДИТКИН В.А., ПРУДНИКОВ А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. С.М.Б, М., Физматгиз, 1961.
7. РОМАНОВ В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Спецкурс для студентов НГУ, Новосибирск, 1973.
8. ПЕТРОВСКИЙ И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М., "Наука", 1965.
9. ВЛАДИМИРОВ В.С. Уравнения математической физики. М., "Наука", 1971.
10. АХИЕЗЕР Н.И. Классическая проблема моментов. М., Физматгиз, 1961.

М.М.Лаврентьев, К.Г.Резницкая
О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ
ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

I. Постановка задачи [1].

Пусть $U(x, y, t)$ - решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - q(y)U, \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным и краевым условиям

$$U(x, y, t) \Big|_{t=0} = \delta(x)\delta(y), \quad (2)$$

где $\delta(x)$ - функция Дирака,

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=\infty} = 0 \quad (3)$$

$$U \Big|_{\infty} = 0. \quad (4)$$

Предположим, что известно значение решения при всех $t > 0$ в некоторой точке $(x_0, 0)$, т.е. известна функция $U^*(x_0, 0, t)$ и запишем это так:

$$U(x, y, t) \Big|_{x=x_0, y=0, t>0} = U^*(x_0, 0, t), \quad (5)$$

где U^* - заданная функция.

Требуется определить функцию $q(y)$. Сформулированная таким образом задача есть обратная задаче теории теплопроводности. Если $q(y)$ известно, а ищется $U(x_0, 0, t)$ - это прямая задача. По заданной функции $q(y)$ можно определить $U(x, y, t)$ как решение задачи (1), (2), (3), (4), а затем найти $U(x_0, 0, t)$. Таким образом, $U(x_0, 0, t)$ определяется заданием функции $q(y)$.

Пусть L - нелинейное отображение, осуществляющее вышеописанные операции

$$U(x_0, 0, t) = L(q(y)).$$

Теперь обратная задача может быть сформулирована как задача решения уравнения

$$P(q(y)) \equiv L(q(y)) - U^*(x_0, 0, t), \quad (6)$$

где $q(y)$ - искомое, а $U^*(x_0, 0, t)$ - известное.

В настоящей работе устанавливается теорема единственности для обратной задачи.

З а м е ч а н и е. Если $q(y)$ - ограниченная непрерывная функция, $|q(y)| \leq a$, то уравнение (1) можно всегда брать в виде (1) и считать, что $q(y) > 0$.

Действительно, если в множителе при U прибавить и вычесть число a , то замена $U = e^{at}v$ преобразует уравнение

(1) к виду $\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - \lambda(y)v$, где $\lambda(y) = a + q(y) > 0$. Условия (2); (3), (4) для v останутся без изменения. Таким образом, мы будем считать, что $q(y) > 0$.

2. Расщепление оператора

Положим

$$U(x, y, t) = a(x, t)b(y, t) \quad (7)$$

и подставим (7) в уравнение (I)

$$b \frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial b}{\partial t} = b \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} - q(y)ab,$$

перегрупулируем его слагаемое

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} - q(y).$$

Так как левая часть есть функция от t и x а правая — от t и y , то мы обе части приравняем $f(t)$:

$$\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = f(t)a, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} - q(y)b = f(t)b. \quad (9)$$

Покажем, что можно принять $f(t) = 0$. Введем замену

$$a^* = ae^{\int f(\tau) d\tau}, \quad b^* = be^{-\int f(\tau) d\tau}.$$

Тогда $U(x, y, t) = a^*b^* = ab$ и

$$a^* \Big|_{t=0} = a \Big|_{t=0} = \delta(y), \quad a^* \Big|_{\infty} = a \Big|_{\infty} = 0$$

$$b^* \Big|_{t=0} = b \Big|_{t=0} = \delta(y), \quad \frac{\partial b^*}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial b}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

и уравнение для a^* примет вид $\frac{\partial a^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 a^*}{\partial x^2}$, то есть вид (8) при $f(t) = 0$, а уравнение для b^* примет вид (9) при $f(t) = 0$. Итак, задача для $U(x, y, t)$ распалась на две задачи:

I. Для $a(x, t)$, которая решается в явном виде

$$a(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad \text{и при} \quad x=x_0 \quad a(x_0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x_0^2}{4t}}$$

2. Для $b(y, t)$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} - q(y)b, \quad (10)$$

$$b \Big|_{t=0} = \delta(y), \quad \frac{\partial b}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (11)$$

Известным здесь мы считаем значения функции $b(y, t) \Big|_{y=0} = b(0, t)$, а искомая $q(y)$.

Пусть $\varphi(y, \lambda)$ — решение задачи:

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} - q(y)\varphi = \lambda \varphi, \quad (12)$$

$$\varphi'(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0, \quad (13)$$

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad (14)$$

λ — собственное значение оператора (12), (13) и $\varphi(y, \lambda)$ — собственная функция оператора (12), (13), нормированная условием (14).

Пусть $\sigma(\lambda)$ — спектральная функция:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda) \varphi(y, \lambda) d\sigma(\lambda) = \delta(x - y).$$

Легко видеть:

$$b(y, t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \varphi(y, \lambda) d\sigma(\lambda). \quad (15)$$

Справедливость (15) следует из единственности решения задачи (10), (11) и из того, что правая часть (15) соотношениям (10),

(II) удовлетворяет.

Полагая в (15) $y=0$, получим:

$$b(0, t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d\sigma(\lambda), \quad (16)$$

Из (16) следует, что функция $\sigma(\lambda)$ однозначно определяется по функции $b(0, t)$, и значит, в силу известных результатов спектральной теории уравнения Штурма-Лиувилля, однозначно определяется коэффициент $q(y)$ [1], [2], [3]

Л и т е р а т у р а

1. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., РЕЗНИЦКАЯ К.Г. Теоремы единственности некоторых нелинейных обратных задач математической физики. - ДАН, т.108, № 3, М., "Наука", 1973, с.531-533.
2. НАЙМАРК. Линейные дифференциальные операторы. Гостехиздат, М., 1954, гл.УШ, с.336.
3. ГЕЛЬФАНД И.М., ЛЕВИТАН Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. - "Изв. АН СССР, серия математическая", том 15, № 4, июль-август, М., 1951.

А.Г. Меграбов

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО
ТИПА

В последнее время в теории обратных задач для дифференциальных уравнений математической физики достигнуты важные результаты. Однако какие-либо обратные задачи для уравнений смешанного типа не рассматривались. В данной работе получены некоторые результаты в этом направлении.

Именно, дается формулировка, способ решения и доказательство теоремы единственности ряда задач об определении переменного коэффициента $K(z)$ в уравнении смешанного эллипτικο-гиперболического типа

$$K(z)u_{\xi\xi} + u_{zz} = 0, \quad (0)$$

заданном в полосе $0 < z < H, -\infty < \xi < \infty$, по некоторым данным о решении краевой прямой задачи для этого уравнения. (Предварительно корректно формулируется прямая задача). В качестве данных задается непосредственно решение прямой задачи на одной из границ полосы или на прямой $z=h$ ($0 < h < H$), при переходе через которую уравнение (0) меняет тип.

Метод решения и доказательства теорем единственности всех обратных задач заключается в приведении их к известной задаче определения регулярного оператора Штурма-Лиувилля по двум

спектрам [2,3,5] и существенно использует найденное представление решения прямой задачи. Эта методика аналогична применяемой в [7,8]. Функция $K(z)$ может быть немонотонной.

Как показано в [7], рассматриваемые задачи возникают в теории распространения волн в упругой среде *).

1. Формулировка и теорема единственности прямой задачи

Прямая задача 1. Пусть в интервале $0 \leq z \leq H$ задана вещественная функция $K(z)$, непрерывная в каждом из интервалов $[0, h], [h, H]$ ($h < H < \infty$), причем $K(z) < 0$ при $z \in [0, h]$ и $K(z) > 0$ при $z \in (h, H]$. Допускается любое из условий $K(h+0) \neq K(h-0)$, $K(h+0) = K(h-0) = 0$. Пусть $\mu(\xi)$ - заданная на прямой $-\infty < \xi < \infty$ вещественная непрерывная ограниченная функция, причем либо $\mu(\xi)$ сохраняет знак на всей прямой, либо $\mu(\xi) \equiv 0$. Заданы также вещественная функция $f(\xi)$ при $-\infty < \xi < \infty$ и числа h, H .

Требуется определить функцию $u(z, \xi)$, удовлетворяющую уравнению

$$K(z) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

в полосе $0 < z < h, -\infty < \xi < \infty$ и в полосе $h < z < H, -\infty < \xi < \infty$, граничным условиям и условиям склеивания (при $-\infty < \xi < \infty$)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=H} = 0, \quad (1.2)$$

$$\lim_{z \rightarrow h+0} u(z, \xi) = \lim_{z \rightarrow h-0} u(z, \xi), \quad (1.3)$$

* А.С.Благовещенский заметил, что постановки из [6,8] для "эллиптического случая" можно рассматривать как задачи для уравнений смешанного типа (поскольку при $z < 0$ уравнение в координатах z, ξ [6,8] остается гиперболическим), за что автор приносит свою благодарность. Однако из-за того, что при $z < 0$ коэффициент в гиперболическом уравнении постоянный, задачи из [6,8] легко редуцируются к задачам для эллиптического уравнения (каковыми они по существу и являются). Рассматриваемые ниже задачи соответствуют случаю, когда уравнение в редуцированной задаче [6,8] имеет смешанный тип в области, где среда неоднородна.

$$\lim_{z \rightarrow h+0} \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow h-0} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (1.4)$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\} \Big|_{z=0} = f(\xi) \quad (1.5)$$

и условиям гладкости и убывания:

производные $u_z, u_\xi, u_{zz}, u_{\xi\xi}, u_{z\xi}$ непрерывны в каждой из полос $0 \leq z \leq h$, $-\infty < \xi < \infty$ и $h \leq z \leq H$, $-\infty < \xi < \infty$ (условие (I.6));

при $\xi \rightarrow \pm \infty$ каждая из производных u_z, u_ξ стремится к нулю равномерно относительно z в интервале $[0, H]$ (условие (I.7));

при $\xi \rightarrow \infty$ или $\xi \rightarrow -\infty$ (или при $\xi \rightarrow \pm \infty$) и при некотором значении $z \in [0, H]$ функция $u(z, \xi)$ стремится к нулю (условие (I.8)).

Имеет место

Т е о р е м а I. Предположим, что существуют некоторые два решения прямой задачи (I.1)-(I.7). Тогда они могут отличаться только на произвольную постоянную. Следовательно, прямая задача I может иметь только одно решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всюду ниже в п. I условимся обозначать через $u(z, \xi)$ решение однородной (при $f(\xi) \equiv 0$) прямой задачи I.

Пусть D - область, ограниченная отрезками прямых $z = 0$, $z = H$ и $\xi = -a$, $\xi = a$ ($a > 0$). Обозначим через D^- часть D , где $0 < z < h$, а через D^+ - часть D , где $h < z < H$ (рис. I).

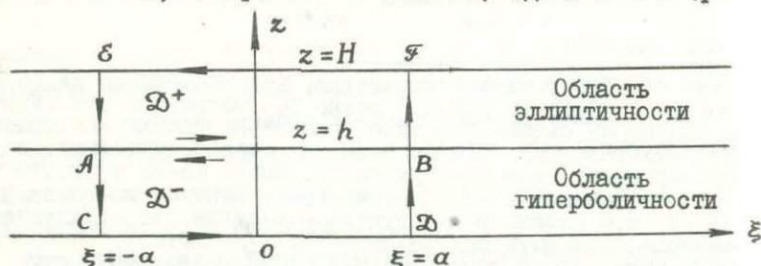


Рис. I
I24

Положим

$$P(z, \xi) = -2u_{\xi} u_z, \quad Q(z, \xi) = K(z)u_{\xi}^2 - u_z^2. \quad (1.9)$$

Из условия (I.6) следует, что в каждой из областей D^- и D^+ непрерывны функции $P(z, \xi), Q(z, \xi), \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial \xi}$; кроме того, в D^- и D^+ в силу уравнения (I.1) имеет место тождество $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$. Поэтому в силу известной теоремы [12, с.265] имеют место равенства;

$$\int_{S^+} P d\xi + Q dz = 0, \quad \int_{S^-} P d\xi + Q dz = 0,$$

где интегрирование ведется против часовой стрелки по замкнутому контуру S^+ (границе области D^+) и S^- (границе области D^-)*. Или

$$\int_{AB} P d\xi + \int_{EA+BF} Q dz + \int_{FE} P d\xi = 0, \quad (1.10)$$

$$\int_{BA} P d\xi + \int_{AC+DB} Q dz + \int_{CD} P d\xi = 0.$$

Складывая последние два равенства и учитывая условия (I.2)-(I.5), получим

$$\int_{-a}^a 2u_{\xi}^2(0, \xi) d\xi = \int_{EC+DF} (Ku_{\xi}^2 - u_z^2) dz.$$

Поэтому в силу условия (I.7) для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое значение $\xi = a$, что

$$\left| \int_{-a}^a 2u_{\xi}^2(0, \xi) d\xi \right| < \varepsilon.$$

* Упомянутая теорема и функции вида (I.9) используются в методе вспомогательных функций [9, с.14, 172].

Пусть $\kappa(\xi)$ не меняет знак при $-\infty < \xi < \infty$. Тогда из последнего неравенства следует, что при $z=0, -\infty < \xi < \infty$ $u_z = 0$. Следовательно, в силу условия (I.5) $u_z = 0$ при $z=0, -\infty < \xi < \infty$. (Заметим, что при $\kappa \equiv 0$ также $u_z(0, \xi) \equiv 0$). Поэтому равенства (I.10) принимают следующий вид:

$$\int_{AB} P d\xi + \int_{EA+BF} Q dz = 0, \quad \int_{BA} P d\xi + \int_{AC+DB} Q dz = 0. \quad (1.11)$$

Пусть в некоторой односвязной ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей σ определены и непрерывны вплоть до σ функция $K(z)$ и производные $b_z, b_\xi, v_z, v_\xi, v_{zz}, v_{z\xi}, v_{z\xi}$ произвольных функций $b(z, \xi)$ и $v(z, \xi)$. Тогда имеет место тождество

$$2 \iint_{\Omega} b v_{\xi} (K v_{\xi\xi} + v_{zz}) d\xi dz = \int_{\sigma} -2 b v_{\xi} v_z d\xi + b (K v_{\xi}^2 - v_z^2) dz + \\ + \iint_{\Omega} [v_{\xi}^2 (-K b_{\xi}) - 2 v_{\xi} v_z (b_z) + v_z^2 (b_{\xi})] d\xi dz. \quad *)$$

Применяя данную формулу к каждой из областей D^+ и D^- и полагая $b = \xi, v = u(z, \xi)$, найдем, что

$$\iint_{D^+} (-K u_{\xi}^2 + u_z^2) d\xi dz + \xi \int_{EA+BF} Q dz + \int_{AB} \xi P d\xi = 0,$$

$$\iint_{D^-} (-K u_{\xi}^2 + u_z^2) d\xi dz + \xi \int_{AC+DB} Q dz + \int_{BA} \xi P d\xi = 0.$$

Складывая эти два равенства и одновременно добавляя со знаком плюс и минус величину $\xi \int_{AB} P d\xi$, с учетом формул (I.11), получим:

$$\iint_{D^- + D^+} (-K u_{\xi}^2 + u_z^2) d\xi dz = 0. \quad (1.12)$$

*) Это частный вид формулы метода абе [9, с.177].

Пусть

$$Lw = K(z)w_{\xi\xi} + w_{zz}.$$

Положим $w = u^2(z, \xi)$, $v \equiv 1$ в формуле Грина

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (vLw - wLv) d\xi dz &= \int_{\sigma} [K(v \frac{\partial w}{\partial \xi} - w \frac{\partial v}{\partial \xi})] dz + \\ &+ [w \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial w}{\partial z}] d\xi \end{aligned}$$

для дифференциального оператора L (где интегрирование по границе σ области Ω ведется против часовой стрелки). Тогда, выбирая в качестве Ω области D^+ и D^- , придем к формулам:

$$\iint_{D^+} (Ku_{\xi}^2 + u_z^2) d\xi dz = \int_{AB} -uu_z d\xi + \int_{EA+BF} Ku_{\xi} dz, \quad (1.13)$$

$$\iint_{D^-} (Ku_{\xi}^2 + u_z^2) d\xi dz = \int_{BA} -uu_z d\xi + \int_{AC+DB} Ku_{\xi} dz.$$

Сложим два последние равенства:

$$\iint_{D^- + D^+} (Ku_{\xi}^2 + u_z^2) d\xi dz = \int_{EC+DF} Ku_{\xi} dz. \quad (1.14)$$

Складывая равенства (I.12) и (I.14), в итоге получим

$$\iint_{D^- + D^+} u_z^2 d\xi dz = \int_{EC+DF} Ku_{\xi} dz.$$

Отсюда, поскольку в силу условия (I.7) при достаточно большом a для любого $\varepsilon > 0$ интеграл справа по модулю меньше ε , следует, что $u_z \equiv 0$ при $0 \leq z \leq H$, $-\infty < \xi < \infty$.

Из формул (I.13) следует тогда, что

$$u_{\xi} \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq z \leq H, \quad -\infty < \xi < \infty.$$

Теорема доказана.

Если поменять области, где $K > 0$ и $K < 0$, то все утверждения и формулы п. I остаются справедливыми, надо только заменить всюду выше D^- на D^+ , D^+ на D^- .

2. Представление решения прямой задачи I

Т е о р е м а 2. Пусть в условиях прямой задачи I $u(\xi) \equiv \text{const} = m \in (-\infty, \infty)$, причем $m \neq 0$, и $K(h+0) \neq 0, K(h-0) \neq 0$ (тогда, очевидно, при переходе через точку $z=h$ функция $K(z)$ испытывает конечный скачок).

Введем положительные функции $\bar{V}(z)$ и $\bar{V}^{\dagger}(z)$ по формулам

$$K(z) = -\frac{1}{\bar{V}^2(z)}, \quad 0 \leq z \leq h; \quad K(z) = \frac{1}{\bar{V}^2(z)}, \quad h \leq z \leq H$$

и положим
$$f(\xi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \quad (\Phi(0) = 0).$$

Пусть выполнены условия:

(A) производная $\frac{d^2 K}{dz^2}$ непрерывна на каждом из отрезков $[0, h]$, $[h, H]$;

(B) функция $\Phi(\xi)$ и ее производные вплоть до четвертого порядка непрерывны и абсолютно интегрируемы на прямой $-\infty < \xi < \infty$;

(C) на прямой $-\infty < \xi < \infty$ абсолютно интегрируема функция $\xi \Phi(\xi)$.

Тогда решение $u(z, \xi)$ прямой задачи I существует, единственно и представимо в виде

$$u(z, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} U(z, k) e^{ik\xi} dk, \quad 0 \leq z \leq H, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad (2.1)$$

где интегрирование ведется по вещественной оси комплексной плоскости k ;

$$U(z, k) = \bar{V}^{\frac{1}{2}}(z) W_R(x, k), \quad x = \int_0^z \frac{dz}{\bar{V}(z)}, \quad 0 \leq z \leq h, \\ 0 \leq x \leq x_h = x(h), \quad (2.2)$$

$$U(z, k) = \bar{V}^{\frac{1}{2}}(z) W_3(x_1, k), \quad x_1 = \int_h^z \frac{dz}{\bar{V}(z)}, \quad h \leq z \leq H, \\ 0 \leq x_1 \leq x_H = x_1(H),$$

$$W_3(x_1, k) = \frac{\gamma ik \varphi(k) \{ \Phi_3(ik) \psi_3(x_1, ik) - \Psi_3(ik) \varphi_3(x_1, ik) \}}{A_1(k) + ik\beta A_2(k)}, \quad (2.3)$$

$$W_R(x, k) = \frac{\gamma ik \varphi(k) \{ A_1(k) \phi_R(x, k) - A_2(k) \varphi_R(x, k) \}}{A_1(k) + ik\beta A_2(k)},$$

$$0 \leq x_1 \leq x_H, \quad 0 \leq x \leq x_h, \quad -\infty < k < \infty,$$

где

$$A_1(k) = \delta_1 \Phi_3(ik) \varphi_R(x_h, k) + \delta_2 \Psi_3(ik) \Phi_R(k),$$

$$A_2(k) = \delta_1 \Phi_3(ik) \psi_R(x_h, k) + \delta_2 \Psi_3(ik) \Psi_R(k), \quad (2.4)$$

$$\Phi_3(s) = \varphi_3'(x_h, s) - \overset{+}{\alpha} \varphi_3(x_h, s), \quad \Psi_3(s) = \psi_3'(x_h, s) - \\ - \overset{+}{\alpha} \psi_3(x_h, s),$$

$$\Phi_R(k) = \varphi_R'(x_h, k) - \bar{\alpha} \varphi_R(x_h, k), \quad \Psi_R(k) = \psi_R'(x_h, k) - \\ - \bar{\alpha} \psi_R(x_h, k).$$

Здесь $\varphi_3(x_1, s)$ и $\psi_3(x_1, s)$ - решения уравнения

$$-y'' + q(x_1)y = s^2 y, \quad 0 \leq x_1 \leq x_H$$

с функцией

$${}^+q(x_1) = {}^+v^{\frac{1}{2}}(x_1) \{ {}^+v^{-\frac{1}{2}}(x_1) \}'' \quad ({}^+v(x_1) = {}^+v(z), x_1 = x_1(z)), \quad (2.5)$$

соответственно при начальных условиях

$$\varphi_3(0, s) = 1, \quad \varphi_3'(0, s) = {}^+\alpha_0, \quad (2.6)$$

$$\psi_3(0, s) = 0, \quad \psi_3'(0, s) = 1; \quad (2.7)$$

функции $\varphi_r(x, k)$ и $\psi_r(x, k)$ - решения уравнения

$$-y'' + \bar{q}(x)y = k^2y, \quad 0 \leq x \leq x_h$$

с функцией

$$\bar{q}(x) = \bar{v}^{\frac{1}{2}}(x) \{ \bar{v}^{-\frac{1}{2}}(x) \}'' \quad (\bar{v}(x) = \bar{v}(z), x = x(z)) \quad (2.8)$$

соответственно при начальных условиях

$$\varphi_r(0, k) = 1, \quad \varphi_r'(0, k) = \bar{\alpha}_0, \quad (2.9)$$

$$\psi_r(0, k) = 0, \quad \psi_r'(0, k) = 1; \quad (2.10)$$

функция $\varphi(k)$ - преобразование Фурье функции $\varphi(\xi)$:

$$\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{ik\xi} dk.$$

Числа ${}^+\alpha_0, {}^+\alpha, \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2$ выражаются по формулам:

$${}^+\alpha_0 = -\frac{1}{2} \frac{{}^+v'(0)}{{}^+v(0)}, \quad {}^+\alpha = -\frac{1}{2} \frac{{}^+v'(x_h)}{{}^+v(x_h)}, \quad \bar{\alpha}_0 = -\frac{1}{2} \frac{\bar{v}'(0)}{\bar{v}(0)}, \quad (2.11)$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{v}'(x_h)}{\bar{v}(x_h)}, \quad \beta = \kappa \bar{v}(0), \quad \gamma = \bar{v}^{\frac{1}{2}}(0), \quad \delta_1 = \bar{v}^{\frac{1}{2}}(x_h) {}^+v^{-\frac{1}{2}}(0),$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\delta_1}.$$

Штрих здесь и всюду ниже обозначает дифференцирование соответственно по x и по x_1 .

Доказательство. Прежде всего заметим, что функции $W_3(x_1, k)$ и $W_r(x, k)$, определенные формулами (2.3)-(2.II), удовлетворяют следующим уравнениям и условиям:

$$\frac{d^2 W_3}{dx_1^2} + \{s^2 - \overset{+}{q}(x_1)\} W_3 = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq x_H, \quad s = ik, \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2 W_r}{dx^2} + \{k^2 - \bar{q}(x)\} W_r = 0, \quad 0 \leq x \leq x_H, \quad (2.13)$$

$$\left\{ \frac{dW_3}{dx_1} - \alpha \overset{+}{W}_3 \right\} \Big|_{x_1 = x_H} = 0, \quad (2.14)$$

$$W_3(0, k) = \delta_1 W_r(x_H, k), \quad (2.15)$$

$$\left\{ \frac{dW_3}{dx_1} - \alpha_0 \overset{+}{W}_3 \right\} \Big|_{x_1 = 0} = \delta_2 \left\{ \frac{dW_r}{dx} - \bar{\alpha} W_r \right\} \Big|_{x = x_H}, \quad (2.16)$$

$$\left\{ \frac{dW_r}{dx} - (\bar{\alpha}_0 + ik\beta) W_r \right\} \Big|_{x=0} = \gamma ik\phi(k). \quad (2.17)$$

Уравнения (2.12), (2.13) и условия (2.14)-(2.17) заданы на вещественной оси $-\infty < k < \infty$ комплексной плоскости k (следовательно, уравнение (2.12) - на мнимой оси комплексной плоскости $s = ik$). Функции $\overset{+}{q}(x_1), \bar{q}(x)$ и числа $\overset{+}{\alpha}_0, \overset{+}{\alpha}, \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2$ вещественны и выражаются по формулам (2.5), (2.8), (2.II).

Действительно, в силу условия (A) функции $\overset{+}{q}(x_1)$ и $\bar{q}(x)$ непрерывны соответственно на отрезках $[0, x_H]$, $[0, x_H]$. Поэтому уравнение (2.12) имеет решения $\phi_3(x_1, s), \psi_3(x_1, s)$ соответственно при начальных условиях (2.6), (2.7), а уравнение (2.13) - решения $\phi_r(x, k), \psi_r(x, k)$ соответственно при начальных условиях (2.9), (2.10) со следующими свойствами [II; 4, с.14]. При любом фиксированном значении $x_1 \in [0, x_H]$ $\phi_3(x_1, s)$ и $\psi_3(x_1, s)$ являются целыми аналитическими функциями от s ; они непрерыв-

ны по (x_1, s) при $x_1 \in [0, x_H]$ и любом s и образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.12):

$$\psi'_3(x_1, s)\varphi_3(x_1, s) - \psi_3(x_1, s)\varphi'_3(x_1, s) \equiv 1. \quad (2.18)$$

Аналогичные свойства имеют решения $\varphi_\Gamma(x, k)$ и $\psi_\Gamma(x, k)$. Представляя решение $\{W_3(x_1, k), W_\Gamma(x, k)\}$ в виде

$$W_3(x_1, k) = C_1(k)\varphi_3(x_1, s) + C_2(k)\psi_3(x_1, s),$$

$$W_\Gamma(x, k) = D_1(k)\varphi_\Gamma(x, k) + D_2(k)\psi_\Gamma(x, k)$$

и определяя $C_1(k), C_2(k), D_1(k), D_2(k)$ из условий (2.14)–(2.17), получим для W_3, W_Γ формулы (2.3), (2.4).

Числа $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \delta_1, \delta_2$ вещественны. Функции $\varphi_3(x_1, s), \psi_3(x_1, s) (s = ik), \varphi_\Gamma(x, k), \psi_\Gamma(x, k)$ также вещественны при $-\infty < k < \infty$. Следовательно, функции $A_1(k)$ и $A_2(k)$ вещественны при $-\infty < k < \infty$; кроме того, можно показать, что функции $A_1(k)$ и $A_2(k)$ не обращаются одновременно в нуль при любом значении $k \in (-\infty, \infty)$. Поэтому функция

$$A_1(k) = A_1(k) + ik\beta A_2(k)$$

не обращается в нуль при $k \neq 0, -\infty < k < \infty, k \neq 0$. Из явных формул

$$\begin{aligned} \varphi_3(x_1, 0) &= v^{+\frac{1}{2}}(0) v^{-\frac{1}{2}}(x_1), \quad \psi_3(x_1, 0) = v^{-\frac{1}{2}}(0) v^{+\frac{1}{2}}(x_1) \times \\ &\quad \times \int_0^{x_1} v(x_1) dx_1, \\ \varphi_\Gamma(x, 0) &= \bar{v}^{+\frac{1}{2}}(0) \bar{v}^{-\frac{1}{2}}(x), \quad \psi_\Gamma(x, 0) = \bar{v}^{-\frac{1}{2}}(0) \bar{v}^{+\frac{1}{2}}(x) \times \\ &\quad \times \int_0^x \bar{v}(x) dx \end{aligned} \quad (2.19)$$

следует, что точка $k = 0$ есть нуль первого порядка функции $A(k)$. Поэтому функции $W_3(x_1, k)$ и $W_\Gamma(x, k)$ непрерывны при $-\infty < k < \infty$.

Более того, из условия (С) и аналитических свойств функций $\varphi_3(x_1, s)$, $\psi_3(x_1, s)$, $\varphi_\Gamma(x, k)$, $\psi_\Gamma(x, k)$ следует, что функции $w_3^{(n)}(x_1, k)$ и $w_\Gamma^{(n)}(x, k)$ ($n = 0, 1, 2$) дифференцируемы по k на оси $-\infty < k < \infty$ (за исключением, быть может, точки $k=0$) при любом фиксированном $x_1 \in [0, x_H]$, $x \in [0, x_H]$. Далее, используя известные [II; 4, с.16] асимптотические свойства функций $\varphi_3(x_1, s)$, $\psi_3(x_1, s)$, $\varphi_\Gamma(x, k)$, $\psi_\Gamma(x, k)$ и проводя некоторые дополнительные рассуждения, можно доказать, что существует такое число $k_0 > 0$, что при $|k| \geq k_0$, $n = 0, 1, 2$

$$|w_3^{(n)}(x_1, k)| < C_3 |k|^n |\varphi(k)|, \quad |w_\Gamma^{(n)}(x, k)| < C_\Gamma |k|^n |\varphi(k)|,$$

где постоянные C_3 , C_Γ не зависят от $x_1 \in [0, x_H]$, $x \in [0, x_H]$.

Отсюда в силу условия (В) и известной [I3, с.277] теоремы о связи между гладкостью функции $\varphi(\xi)$ и убыванием ее преобразования Фурье $\varphi(k)$ получаем, что существует такое $k_1 > 0$, что при $|k| \geq k_1$, $n = 0, 1, 2$

$$|k^n w_3(x_1, k), w_3^{(n)}(x_1, k)| < \frac{K_3}{k^4 - n},$$

(2.20)

$$|k^n w_\Gamma(x, k), w_\Gamma^{(n)}(x, k)| < \frac{K_\Gamma}{k^4 - n},$$

где постоянные K_3 , K_Γ не зависят от $x_1 \in [0, x_H]$, $x \in [0, x_H]$. Из этих оценок следует, что каждая из функций

$$k^n w_3(x_1, k), w_3^{(n)}(x_1, k), k^n w_\Gamma(x, k), w_\Gamma^{(n)}(x, k) \quad (n=0, 1, 2)$$

абсолютно интегрируема на прямой $-\infty < k < \infty$ и поэтому (см. [I0, с.58]) представима интегралом Фурье (как комплекснозначная функция вещественного переменного k) при любом $x_1 \in [0, x_H]$, $x \in [0, x_H]$, а интеграл в формуле (2.1) допускает дифферен-

пирование дважды по z и по ξ под знаком интеграла. Поскольку $u(z, \xi)$ есть преобразование Фурье функции $U(z, k)$, представимой интегралом Фурье, то интеграл в равенстве (2.I) является интегралом Фурье (как и интегралы для производных $u_z, u_\xi, u_{zz}, u_{\xi\xi}, u_{z\xi}$).

Наконец, имеют место соотношения

$$\bar{W}_3^{(n)}(x_1, -k) = \bar{W}_3^{(n)}(x_1, k), \quad \bar{W}_\Gamma^{(n)}(x, -k) = \bar{W}_\Gamma^{(n)}(x, k) \\ (n = 0, 1, 2),$$

так что все эти интегралы вещественные.

Из перечисленных свойств функций $\bar{W}_3(x_1, k)$ и $\bar{W}_\Gamma(x, k)$ следует, что функция $u(z, \xi)$, определенная формулами (2.I)-(2.II), удовлетворяет всем условиям прямой задачи I.

Мы доказали, что при условиях теоремы 2 решение прямой задачи I существует. Из оценок (2.20) и леммы Римана-Лебега следует, что при $\xi \rightarrow \pm \infty u(z, \xi) \rightarrow 0$ равномерно относительно z в интервале $[0, h]$. Отсюда в силу теоремы I получаем, что решение прямой задачи I при условиях теоремы 2 единственно и совпадает с построенным решением.

3. Обратная задача с данными на границе $z = h$

Обратная задача I. Пусть выполнены все условия теоремы 2 и пусть при $-\infty < \xi < \infty$ заданы функция $f(\xi)$ из условия (I.5) и значения $u(h, \xi)$ решения $u(z, \xi)$ прямой задачи I с неизвестными числами h, n и неизвестной в интервале $[h, h]$ функцией $K(z)(\bar{V}(z))$. Заданы также число h и функция $K(z)(\bar{V}(z))$ в интервале $[0, h]$. Требуется определить числа h, n и функцию $K(z)$ при $h \leq z \leq h$.

Решение обратной задачи I. Пусть $q(x)$ - некоторая вещественная функция, непрерывная в конечном интервале определения $0 \leq x \leq 1$, а $L(y) = -y'' + q(x)y$ - соответствующее ей дифференциальное выражение. Через $S\{q(x), 1, \varphi, \vartheta\}$ ($-\infty < \varphi, \vartheta < \infty$) обозначим множество собственных значений (спектр) классической (регулярной) краевой задачи Штурма-Лиувилля

$$L(y) = \lambda y, \quad \begin{aligned} \cos \varphi y(0) + \sin \varphi y'(0) &= 0, \\ \cos \vartheta y(1) + \sin \vartheta y'(1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Как известно, число 1 вполне определяется заданием ка-кого-либо спектра $S\{q(x), l, \varphi, \vartheta\} = \{\lambda_n\}_1^\infty$, поскольку (см. [3,5])

$$1^2 = \pi^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \{n^2 / \lambda_n\}.$$

Согласно теореме В.А.Марченко [2,5], спектры

$$S\{q(x), l, \varphi_1, \vartheta\} \text{ и } S\{q(x), l, \varphi_2, \vartheta\} \text{ (ctg } \varphi_1 \neq \text{ctg } \varphi_2)$$

двух краевых задач с одним и тем же граничным условием в точке $x=1$ и различными граничными условиями в точке $x=0$ однозначно определяют как функцию $q(x)$, так и числа $\text{ctg } \varphi_1$, $\text{ctg } \varphi_2$ и $\text{ctg } \vartheta$.

Оказывается, данные обратной задачи I позволяют узнать спектры следующих двух краевых задач типа (3.1) с одинаковы-ми условиями в точке $x_1 = x_H$ и различными условиями в точ-ке $x_1 = 0$:

$$-y'' + q(x_1) y = \lambda y, \quad 0 \leq x_1 \leq x_H, \quad -y'' + q(x_1) y = \lambda y, \quad 0 \leq x_1 \leq x_H,$$

$$\cos \varphi y(0) + \sin \varphi y'(0) = 0 \text{ (I),} \quad y(0) = 0 \text{ (II)}$$

$$\cos \vartheta y(x_H) + \sin \vartheta y'(x_H) = 0, \quad \cos \vartheta y(x_H) + \sin \vartheta y'(x_H) = 0,$$

$$(\text{ctg } \varphi = -\alpha_0^+, \text{ctg } \vartheta = -\alpha^+),$$

где функция $q(x_1)$ и числа x_H , α_0^+ , α^+ взяты из системы (2.12)-(2.17).

Действительно, в силу теоремы 2 и тождества (2.18) имеем:

$$U(n, k) = -\frac{1}{v} \frac{\gamma_{ik} \varphi(k)}{\lambda_1(k) + ik \beta_{A_2}(k)}.$$

Обращая интеграл (2.1) при $z=N$ и зная функцию $\varphi(\xi)$, определим функцию

$$cA(k) = cA_1(k) + iks\beta A_2(k), \quad c = \{\gamma v^{+\frac{1}{2}}(x_N)\}^{-1}$$

на некотором интервале $[a, b]$ вещественной оси $-\infty < k < \infty$.

Поскольку числа c, β (пока неизвестные) и функции $A_1(k), A_2(k)$ при $-\infty < k < \infty$ вещественны и $\beta \neq 0$, то, отделяя вещественную и мнимую части функции $cA(k)$, найдем функции $cA_1(k)$ и $c\beta A_2(k)$ в том же интервале $[a, b]$. Определив число κ по формуле

$$\kappa = c\beta A_2(0) \quad (A_2(0) = \bar{v}^{-\frac{1}{2}}(0) v^{+\frac{1}{2}}(x_N)),$$

вытекающей из равенств (2.19), вычислим затем число $\beta = \kappa \bar{v}(0)$ и функцию $cA_2(k)$ в интервале $[a, b]$ *).

Зная число h и функцию $K(z)$ при $z \in [0, h]$, мы можем определить числа $x_h, \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}$, функцию $\bar{q}(x)$ и построить функции $\varphi_r(x_h, k), \Phi_r(x_h, k), \Phi_r(k), \Psi_r(k)$ при $-\infty < k < \infty$. Поэтому далее с помощью тождеств

$$c\{A_1(k)\varphi_r(x_h, k) - A_2(k)\Phi_r(x_h, k)\} = -c\delta_2\Psi_3(s), \quad (3.2)$$

$$c\{A_1(k)\Psi_r(k) - A_2(k)\Phi_r(k)\} = c\delta_1\Phi_3(s)$$

можем найти функции $c\delta_2\Psi_3(s)$ и $c\delta_1\Phi_3(s)$ на некотором отрезке $[ia, ib]$ мнимой оси плоскости s . Продолжая аналитически (например, с помощью разложения в ряд Тейлора) целые функции $c\delta_2\Psi_3(s)$ и $c\delta_1\Phi_3(s)$ с этого отрезка на вещественную ось $-\infty < s < \infty$, найдем их значения при $-\infty < s < \infty$. Следовательно, мы определим все вещественные нули функций $\Phi_3(s)$ и $\Psi_3(s)$.

* Если точка $k=0 \in [a, b]$, то значение $c\beta A_2(0)$ можно определить, продолжая аналитически целую функцию $c\beta A_2(k)$ с отрезка $[a, b]$ в некоторую окрестность точки $k=0$.

Их остальные нули, как следует из свойств самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля [2; 4, с.13], могут быть только чисто мнимыми. Однако чисто мнимых нулей функции $\phi_3(s)$ и $\Psi_3(s)$ не имеют (что можно показать, следуя некоторым результатам работы [1]), поэтому найденные вещественные нули дают совокупность всех нулей этих функций.

Теперь заметим, что квадраты $\lambda = s^2$ всех нулей функций $\phi_3(s)$ и $\Psi_3(s)$ образуют спектры $s \{ \overset{+}{q}(x_1), x_H, \varphi, \vartheta \}$ и $s \{ \overset{+}{q}(x_1), x_H, 0, \vartheta \}$ краевых задач (I) и (II) соответственно. Это следует из теории классической задачи Штурма-Лиувилля [2; 4, с.18]. В силу упомянутой теоремы по найденным спектрам однозначно определяются числа $x_H, \overset{+}{\alpha}_0, \overset{+}{\alpha}$ и функция $\overset{+}{q}(x_1)$ при $0 \leq x_1 \leq x_H$. Для этого применим известные методы [2, 3, 5].

По восстановленным величинам $x_H, \overset{+}{\alpha}_0, \overset{+}{\alpha}, \overset{+}{q}(x_1)$ построим функции $\phi_3(s), \Psi_3(s)$ и определим, используя формулы (3.2), число $\delta_2 / \delta_1 = \delta_2^2$, а затем значение $\overset{+}{v}(0) = \delta_2^2 \bar{v}(x_H)$. Далее из формулы (2.19) для $\phi_3(x_1, 0)$ находим функцию $\overset{+}{v}(x_1)$ при $0 \leq x_1 \leq x_H$, а из соотношений

$$z = \int_0^{x_1} \overset{+}{v}(x_1) dx_1 + h, \quad \overset{+}{V}(z) = \overset{+}{v}(x_1) \quad \text{при} \quad z = z(x_1), \quad H = z(x_H)$$

определим число H и функцию $K(z)$ при $h \leq z \leq H$.

Из самого способа решения обратной задачи I следует

Т е о р е м а 3. Обратная задача I имеет единственное решение.

4. Обратные задачи с данными на границе $z = h$

Обратная задача 2. Пусть выполнены все условия теоремы 2 и пусть при $-\infty < \xi < \infty$ заданы функция $f(\xi)$ и одна из функций $u(h, \xi), \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h}$, где $u(z, \xi)$ - решение прямой задачи I с неизвестными числами H, μ и неизвестной в интервале $[h, H]$ функцией $K(z)$. Заданы также число h и функция $K(z)$ в интервале $[0, h]$. Требуется определить числа H, μ и функцию $K(z)$ при $h \leq z \leq H$.

Решение обратной задачи 2. Рассмотрим

рим случай, когда задана функция $u(h, \xi)$ (а производная $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h}$ неизвестна). В силу теоремы 2

$$U(h, k) = -\sqrt{\frac{1}{2}}(0) \frac{\gamma ik \varphi(k) \Psi_3(ik)}{A_1(k) + ik\beta A_2(k)}.$$

Обращая интеграл (2.1) при $z=h$, найдем сначала на некотором интервале вещественной оси $-\infty < k < \infty$ функцию

$$c_1 \frac{A_1(k) + ik\beta A_2(k)}{\Psi_3(ik)}, \quad (c_1 = \{\gamma \sqrt{\frac{1}{2}}(0)\}^{-1}),$$

а затем, отделяя ее вещественную и мнимую части, функцию

$$c_1 \frac{A_1(k)}{\Psi_3(ik)} = c_1 \{ \delta_1 \varphi_r(x_h, k) \frac{\Phi_3(ik)}{\Psi_3(ik)} + \delta_2 \Phi_r(k) \}$$

и число $\mu = \{ [c_1 \beta A_2(k)] / \Psi_3(ik) \} \Big|_{k=0}$. Зная число h и функцию $K(z)$ при $z \in [0, h]$, построим функции $\varphi_r(x_h, k)$ и $\Phi_r(k)$. Кроме того, число $c_1 \delta_2 = \{ \sqrt{v(0)} \bar{v}(x_h) \}^{-1/2}$ известно.

Поэтому далее можем найти функцию

$$c_1 \delta_1 m(s) = c_1 \delta_1 \frac{\Phi_3(s)}{\Psi_3(s)} \quad (4.1)$$

на некотором отрезке мнимой оси плоскости s . Используя метод аналитического продолжения, определим все нули функций $m(s)$ и $\{m(s)\}^{-1}$, квадраты которых образуют соответственно спектры задач (I) и (II). Далее следуем методике решения обратной задачи I, только значение $\bar{v}(0)$ находим по формуле $\bar{v}(0) = \{ c_1 \delta_1 \bar{v}^{-\frac{1}{2}}(0) \bar{v}^{-\frac{1}{2}}(x_h) \}^{-1}$ (предварительно определив число $c_1 \delta_1$ из равенства (4.1)).

Случай, когда задана производная $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h}$, рассматривается аналогично, с той лишь разницей, что число μ опреде-

дем по формуле

$$\mu = \tilde{c}_1 \nu_{\lambda_2}(0) \cdot \left\{ \nu^+(0) \nu^+(x_H) \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{где } \tilde{c}_1 = \gamma^{-1} \nu^{\frac{1}{2}}(0))$$

после восстановления функции $\nu^+(x_1)$. Из способа решения обратной задачи 2 следует

Т е о р е м а 4. Обратная задача 2 имеет единственное решение.

О б р а т н а я з а д а ч а 3. Пусть выполнены все условия теоремы 2 и пусть при $-\infty < \xi < \infty$ заданы значения $u(h, \xi)$ и $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h}$ решения $u(z, \xi)$ прямой задачи I с неизвестными числами h, μ , неизвестной в каждом из интервалов $[0, h], [h, H]$ функцией $K(z)$ и неизвестной при $-\infty < \xi < \infty$ функцией $f(\xi)$. Задано также число h . Требуется определить число H и функцию $K(z)$ в интервале $[h, H]$.

Решение этой задачи также основано на определении спектров задач (I) и (II), и справедлива

Т е о р е м а 5. Обратная задача 3 имеет единственное решение.

Если в обратной задаче 3 полагать число h также неизвестным, то вместо H и $K(z)$ в интервале $[h, H]$ определим однозначно число $H-h$ и функцию $\tilde{K}(\tilde{z})$ при $0 \leq \tilde{z} \leq H-h$, где $\tilde{z} = z-h, \tilde{K}(\tilde{z}) = K(z), z \in [h, H]$.

Если же в обратной задаче 3, помимо значения h , задать число μ и функцию $K(z)$ в интервале $[0, h]$, то дополнительно можно восстановить функцию $f(\xi)$ при $-\infty < \xi < \infty$. И, наоборот, зная $h, K(z)$ при $z \in [0, h], f(\xi)$ при $\xi \in (-\infty, \infty)$, можно определить μ .

5. Обратные задачи с данными на границе $z = 0$

О б р а т н а я з а д а ч а 4. Пусть выполнены все условия теоремы 2 и пусть при $-\infty < \xi < \infty$ заданы функция $f(\xi)$ и значения $u(0, \xi)$ решения $u(z, \xi)$ прямой задачи I с неизвестными числами h, μ и неизвестной в интервале $[h, H]$ функцией $K(z)$. Заданы также число h и функция $K(z)$ в интервале $[0, h]$. Требуется определить числа H, μ и функцию $K(z)$ при $h \leq z \leq H$.

Решение обратной задачи 4. В силу теоремы 2

$$U(0, k) = -\bar{v}(0) \frac{ik \varphi(k) A_2(k)}{A_1(k) + ik \beta A_2(k)}.$$

Обращая интеграл (2.1) при $z = 0$, найдем сначала функцию $\{A_1(k) + ik\beta A_2(k)\} / A_2(k)$, а затем функцию

$$R(k) = \frac{A_1(k)}{A_2(k)} = \frac{\delta_1 m(s) \varphi_\Gamma(x_h, k) + \delta_2 \Phi_\Gamma(k)}{\delta_1 m(s) \varphi_\Gamma(x_h, k) + \delta_2 \Psi_\Gamma(k)} \quad (m(s) = \frac{\Phi_3(s)}{\Psi_3(s)})$$

на некотором отрезке вещественной оси плоскости k и числа $\beta, \mu = \beta / \bar{v}(0)$. Построив функции $\varphi_\Gamma(x_h, k)$, $\Phi_\Gamma(k)$, $\Psi_\Gamma(k)$, определим по формуле

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} m(s) = - \frac{\Phi_\Gamma(k) - R(k) \Psi_\Gamma(k)}{\varphi_\Gamma(x_h, k) - R(k) \varphi_\Gamma(x_h, k)}$$

функцию $\delta_1^2 m(s)$ на некотором отрезке мнимой оси плоскости s . Далее следуем методике решения обратных задач 1 и 2 и доказываем, что справедлива

Т е о р е м а 6. Обратная задача 4 имеет единственное решение.

О б р а т н а я з а д а ч а 5. Пусть выполнены все условия теоремы 2 и пусть при $-\infty < \xi < \infty$ заданы значения $u(0, \xi)$ и $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}$ решения $u(z, \xi)$ прямой задачи I с неизвестными числами N, μ , неизвестной в интервале $[h, N]$ функцией $K(z)$ и неизвестной при $-\infty < \xi < \infty$ функцией $f(\xi)$. Задано также число h и функция $K(z)$ в интервале $[0, h]$. Требуется определить число N и функцию $K(z)$ при $h \leq z \leq N$.

Решая данную задачу аналогично обратной задаче 4, получаем, что имеет место

Т е о р е м а 7. Обратная задача 5 имеет единственное решение.

6. Другие задачи

Задачу, получаемую из прямой задачи I заменой условия (I.2) на условие

$$u(n, \xi) = 0, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad (1.2')$$

назовем прямой задачей 2. Аналогично теореме I имеет место

Т е о р е м а 8. Предположим, что существуют некоторые два решения прямой задачи (I.1), (I.2'), (I.3)-(I.7). Тогда они могут отличаться только на произвольную постоянную.

По методике п. 2 доказывается

Т е о р е м а 9. Пусть выполнены все условия теоремы 2 относительно прямой задачи 2. Тогда решение $u_0(z, \xi)$ прямой задачи 2 существует, единственно и допускает представление, получаемое из формул (2.I)-(2.II) заменой функций $\varphi_3(ik)$, $\psi_3(ik)$ на функции $\varphi_3(x_n, ik)$, $\psi_3(x_n, ik)$ соответственно.

О б р а т н а я з а д а ч а 1⁰. Пусть выполнены все условия теоремы 9 и пусть при $-\infty < \xi < \infty$ заданы функция $f(\xi)$ и значения $\left. \frac{\partial u_0}{\partial z} \right|_{z=n}$ решения $u_0(z, \xi)$ прямой задачи 2 с неизвестной в интервале $[h, n]$ функцией $K(z)$. Неизвестно также одно из чисел n, μ (а другое задано). Кроме того, заданы также число h и функция $K(z)$ в интервале $[0, h]$. Требуется определить одно из чисел n, μ (то, что неизвестно) и функцию $K(z)$ при $h \leq z \leq n$.

О б р а т н ы е з а д а ч и 2⁰, 3⁰, 4⁰, 5⁰. Заменяем в формулировках обратных задач 2, 3, 4, 5 слова "прямой задачи I" на слова "прямой задачи 2". Полученные таким образом задачи назовем, соответственно, обратными задачами 2⁰, 3⁰, 4⁰, 5⁰.

Т е о р е м а 10. Каждая из обратных задач 1⁰, 2⁰, 3⁰, 4⁰, 5⁰ имеет единственное решение.

Решение этих задач и доказательство теоремы 10 следует

методике п.3,4,5 и основано на определении спектров задач, получаемых из задач (I) и (II) заменой условия $\cos \vartheta y(x_n) + \sin \vartheta y'(x_n) = 0$ ($\text{ctg } \vartheta = -\bar{\alpha}$) на условие $y(x_n) = 0$.

Задавая совместно данные о решении прямых задач I и 2, можно сформулировать обратные задачи об определении коэффициента $K(z)$ всюду в интервале $[0, n]$. Рассмотрим, например, следующую постановку.

Обратная задача 6. Пусть выполнены все условия теоремы 2 относительно прямых задач I и 2, в которых числа n, h, k и функции $K(z)$ в каждом из интервалов $[0, h], [h, n]$ совпадают (одни и те же), а функции $f(\xi)$ могут и не совпадать. Пусть, кроме того, при $-\infty < \xi < \infty$ заданы значения $u(h, \xi)$, $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h}$ решения $u(z, \xi)$ прямой задачи I и значения $u_0(h, \xi)$ решения $u_0(z, \xi)$ прямой задачи 2 с неизвестными числами n, h, k и неизвестной в каждом из интервалов $[0, h], [h, n]$ функцией $K(z)$. Задана также при $-\infty < \xi < \infty$ функция $f(\xi)$ из прямых задач I и 2. Требуется определить числа n, h, k и функцию $K(z)$ в каждом из интервалов $[0, h], [h, n]$.

Сначала определяем спектры задач I и (II) и по ним — числа $x_n, n-h, k$ и функцию $\bar{v}(x_1)$ при $0 \leq x_1 \leq x_n$, затем — спектры задач:

$$-y'' + \bar{q}(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq x_n, \quad -y'' + \bar{q}(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq x_n,$$

$$\cos \varphi y(0) + \sin \varphi y'(0) = 0, \quad y(0) = 0,$$

$$\cos \vartheta y(x_n) + \sin \vartheta y'(x_n) = 0, \quad \cos \vartheta y(x_n) + \sin \vartheta y'(x_n) = 0,$$

$$(\text{ctg } \varphi = -\bar{\alpha}_0, \text{ctg } \vartheta = -\bar{\alpha})$$

(квадраты нулей функций $\Phi_r(k)$ и $\Psi_r(k)$) и все искомые величины и доказываем единственность решения обратной задачи 6.

Рассмотренные выше прямые и обратные задачи для уравнения смешанного типа не лишены физического содержания. Действительно, как показано в [7], прямые задачи I и 2 описывают процесс колебаний в неоднородном упругом слое толщины n со свободной или закрепленной границей $z=n$, возбуждаемом

плоской волной SH, в случае $\mu(z) \equiv \mu_0 = \text{const}$, когда

при $0 \leq z \leq h$ $v(z) < v_0 / \sin \vartheta_0$,

а при $h \leq z \leq H$ $v(z) > v_0 / \sin \vartheta_0$.

При этом $K(z) = [\sin^2 \vartheta_0 / v_0^2 - 1/v^2(z)]$ ($0 \leq z \leq H$), $u = \cos \vartheta_0 / v_0$,

$\varphi(\xi) = -2i\varphi_0(\xi)$. Здесь $v(z)$ и $\mu(z)$ - скорость распространения волны и модуль сдвига в неоднородном слое $0 \leq z \leq H$, v_0 и μ_0 - в однородном полупространстве $z < 0$, откуда падает под углом $\vartheta_0 \in (0, \pi/2)$ плоская волна формы $\varphi_0(\xi)$, $u(z, \xi) = u(x, z, t)$ ($\xi = t - x \sin \vartheta_0 / v_0$) - полное поле смещений в слое, причем $u(0, \xi) = \varphi_0(\xi) + \varphi_1(\xi)$, где $\varphi_1(\xi)$ - форма отраженной от слоя плоской волны. Выбор системы координат x, z, t (t - физическое время) понятен из рис.2.

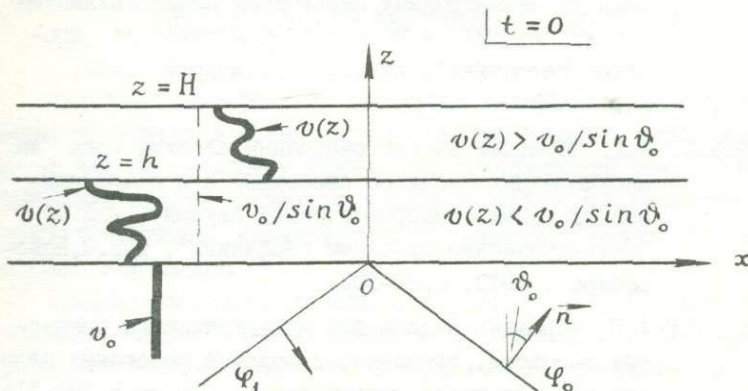


Рис.2

Поэтому обратные задачи соответствуют задачам определения характеристик неоднородного слоя по заданным колебаниям точки той или иной границы слоя. Функция $v(z)$ может быть при этом немонотонной.

Л и т е р а т у р а

1. АЛЕКСЕЕВ А.С. Некоторые обратные задачи теории распространения волн. I, II. - "Известия АН СССР, серия геофизическая", 1962, № II, с.1514-1531.

2. ГАСЬМОВ М.Г., ЛЕВИТАН Б.М. Определение дифференциального оператора по двум спектрам. - УМН, 1964, т.19, вып.2, с.3-63.
3. КРЕЙН М.Г. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля. - ДАН СССР, 1951, т.76, № I, с.21-24.
4. ЛЕВИТАН Б.М., САГСЯН И.С. Введение в спектральную теорию. М., "Наука", 1970, с.671.
5. МАРЧЕНКО В.А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. - Труды Московского математического общества, 1952, т.1, с.327-420.
6. МЕГРАБОВ А.Г. Прямая и обратная задачи рассеяния плоских волн на неоднородных переходных слоях (эллиптический случай). - В сб.: "Математические проблемы геофизики", вып.3, Новосибирск, 1972, с.113-123.
7. МЕГРАБОВ А.Г. Обратные задачи рассеяния плоских волн на неоднородных слоях со свободной или закрепленной границей (гиперболический случай). - В сб.: "Математические проблемы геофизики", вып.4, Новосибирск, 1973, с.84-102.
8. МЕГРАБОВ А.Г. Обратные задачи для эллиптического уравнения в полосе, связанные с задачей рассеяния плоских волн на неоднородных слоях. Там же, с.103-115.
9. СМИРНОВ М.М. Уравнения смешанного типа. М., "Наука", 1970, с.295.
10. ТИГЧМАРИШ Е.К. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л., Гостехиздат, 1948, с.479.
11. ФАДДЕЕВ Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. - УМН, 1959, т.19, вып.4, с.57-119.
12. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. Основы математического анализа. 5-е изд., М., "Наука", 1968, с.463.
13. ШИЛОВ Г.Е. Математический анализ. Часть 3, М., "Наука", 1970, с.352.

Х. Ниматов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Задачами интегральной геометрии называются задачи, в которых требуется восстановить некоторую функцию через интегралы от нее по семейству кривых или поверхностей (см. [1]). В настоящей работе изучается задача интегральной геометрии для семейства кривых, инвариантных относительно некоторых параллельных переносов.

Рассмотрим полуплоскость $\{ (x, \tau), \tau > 0 \}$, и в ней семейство окружностей произвольного радиуса r ($0 < r < \infty$), центр которых пробегает полупрямую $\tau > 0$. Тогда уравнение каждой окружности этого семейства можно записать так:

$$[\tau - (t - r)]^2 + x^2 = r^2. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь семейства кривых, которые "мало" отличаются от этих окружностей и инвариантны к сдвигу вдоль полупрямой $\tau > 0$, точнее каждая кривая семейства может быть представлена в виде

$$\Gamma(r, t): x = \varphi_1(t - \tau, r) = (-1)^i [\sqrt{r^2 - (t - \tau - r)^2} + \tilde{\varphi}_1(t - \tau, r)] \\ (i = 1, 2), \quad (2)$$

$$\tau \in [t-2r, t] \quad t \geq 2r > 0, \quad (2)$$

где $\tilde{\varphi}_i(t-\tau, r)$ - трижды непрерывно дифференцируемая функция по τ и

$$\tilde{\varphi}_i(t-\tau, r) \Big|_{\tau=t} = \tilde{\varphi}_i(t-\tau, r) \Big|_{\tau=t-2r} = \tilde{\varphi}_i(t-\tau, r) \Big|_{\tau=t-r} = 0, \quad (2')$$

$$\tilde{\varphi}_i(t-\tau, r) \equiv 0 \quad \text{если} \quad \tau \notin [t-2r, t]$$

(т.е. функция $\tilde{\varphi}_i(t-\tau, r)$ определена только при $\tau \in [t-2r, t]$). Кроме того

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1} \Big|_{t_1=r} = 0, \quad \Big| \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t_1^2} \Big|_{t_1=r} \neq 0 \quad (t-\tau = t_1). \quad (2'')$$

Будем для определенности считать, что $i=1$ отвечает значениям $x \leq 0$, а $i=2$ - значениям $x \geq 0$. Второе условие (2'') означает, что радиус кривизны каждой кривой семейства в точках $x = \pm r$ конечен и отличен от нуля. Кроме того, предположим, что каждая из кривых семейства представляет из себя непрерывную кривую, принадлежащую квадрату $t-2r \leq \tau \leq t, -r \leq x \leq r$, и пересекается прямыми параллельными координатным осям не более, чем в двух точках.

Покажем теперь, что уравнение (2) может быть представлено в виде

$$t_1 = r + (-1)^j \psi_j(\sqrt{r^2 - x^2}, r), \quad (3)$$

где $\psi_j(\sqrt{r^2 - x^2}, r)$ - дважды непрерывно дифференцируема по $q (q = \sqrt{r^2 - x^2})$ в области $0 \leq q \leq r$ и обладает свойствами

$$\psi_j(q, r) \Big|_{q=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial q} \Big|_{q=0} = \sqrt{\frac{R(r, r)}{r}} \neq 0, \quad (3')$$

где $R(r, r)$ - радиус кривизны кривой в точке $q=0$. Здесь тоже считаем, что $j=1$ отвечает часть кривой, лежащая ниже прямой $t_1 = r$ и $j=2$ верхней прямой $t_1 = r$.

Запишем для этого уравнения (2) в виде

$$F(\sqrt{r^2 - x^2}, t_1, r) \equiv \sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - \varphi_i^2(t, r)} = 0.$$

Видно, что для этого уравнения выполнимы условия теоремы существования функции, заданной неявно.

Поэтому, разрешая последнее уравнение относительно t_1 , получим равенство (3).

Возвратимся теперь к сформулированной выше задаче интегральной геометрии. Пусть от функции $u(x, \tau)$ известны интегралы по кривым $\Gamma(r, t)$

$$\int_{\Gamma(r, t)} u(x, \tau) ds = v(r, t), \quad (4)$$

где ds — элемент длины дуги. Тогда имеет место следующая

Т е о р е м а. Пусть семейства кривых $\Gamma(r, t)$ представлено в виде (2), (3), где функции $\tilde{\varphi}_i(t_1, r)$ и $\varphi_j(q, r)$ удовлетворяют условиям (2'), (3'). Функция $u(x, \tau)$ непрерывна и четна относительно переменной x , и удовлетворяет оценке $|u(x, \tau)| \leq M e^{S_0 \tau}$. Тогда функция $u(x, \tau)$ однозначно определяется функцией $v(r, t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу (2), перепишем равенство (4) в виде

$$\begin{aligned} v(r, t) &= \sum_{i=1}^{i=2} \int_{t-2r}^t \sqrt{1 + \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} [\sqrt{r^2 - (t-\tau-r)^2} + \tilde{\varphi}_i(t-\tau, r)] \right\}^2} \times \\ &\times u[(-1)^i (\sqrt{r^2 - (t-\tau-r)^2} + \tilde{\varphi}_i(t-\tau, r)), \tau] d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^{i=2} \int_{t-2r}^t \frac{r \cdot \tilde{\varphi}_i(t-\tau, r)}{\sqrt{r^2 - (t-\tau-r)^2}} \cdot u[(-1)^i (\sqrt{r^2 - (t-\tau-r)^2} + \\ &+ \tilde{\varphi}_i(t-\tau, r)), \tau] d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\Phi_1(t - \tau, t) =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{2(t-\tau-r)\sqrt{r^2-(t-\tau-r)^2}}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial t_1}\right) + \frac{r^2-(t-\tau-r)^2}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t_1}\right)^2} \quad (5)$$

Таким образом,

$$v(r, t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=2} \int_{t-2r}^t \frac{r \cdot \Phi_i(t-\tau, r)}{\sqrt{r^2-(t-\tau-r)^2}} \cdot u[(-1)^i(\sqrt{r^2-(t-\tau-r)^2} + \tilde{\Phi}_i(t-\tau, r)), \tau] dt \quad (6)$$

Применяя к обеим частям равенства (6) преобразование Лапласа по переменной t и меняя порядок интегрирования, получим

$$v_p(r) = \int_{2r}^{\infty} v(r, t) e^{-pt} dt = \int_{2r}^{\infty} e^{-pt} dt \int_{t-2r}^t \sum_{i=1}^{i=2} \frac{r \cdot \Phi_i(t-\tau, r)}{\sqrt{r^2-(t-\tau-r)^2}} \cdot u[(-1)^i(\sqrt{r^2-(t-\tau-r)^2} + \tilde{\Phi}_i(t-\tau, r)), \tau] dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-p\tau} d\tau \int_{\tau}^{\infty} \sum_{i=1}^{i=2} \frac{r \cdot \Phi_i(t-\tau, r) e^{-p(t-\tau)}}{\sqrt{r^2-(t-\tau-r)^2}} \cdot u[(-1)^i(\sqrt{r^2-(t-\tau-r)^2} + \tilde{\Phi}_i(t-\tau, r)), \tau] dt -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{2r} e^{-P\tau} d\tau \int_{\tau}^{i=2} \frac{r \cdot \Phi_1(t-\tau, r) \cdot e^{-P(t-\tau)}}{\sum_{i=1} \sqrt{r^2 - (t-\tau-r)^2}} \cdot u[(-1)^i (\sqrt{r^2 - (t-\tau-r)^2} + \\
 & \quad + \tilde{\Phi}_1(t-\tau, r)), \tau] d\tau = \\
 & = \sum_{i=1}^{i=2} \int_0^{2r} \frac{r \cdot \Phi_1(t_1, r) \cdot e^{-Pt_1}}{\sqrt{r^2 - (t_1-r)^2}} \cdot \left\{ \int_{2r-t_1}^{\infty} u[(-1)^i (\sqrt{r^2 - (t_1-r)^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \tilde{\Phi}_1(t_1, r)), \tau] e^{-P\tau} d\tau \right\} dt_1,
 \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{Re} p = a > s_0 \geq 0.$$

Здесь мы использовали условия (2'). Таким образом,

$$\begin{aligned}
 v_p(r) = \sum_{i=1}^{i=2} \int_0^{2r} \frac{r \cdot \Phi_1(t_1, r) e^{-Pt_1}}{\sqrt{r^2 - (t_1-r)^2}} \cdot \tilde{u}_p[(-1)^i (\sqrt{r^2 - (t_1-r)^2} + \\
 \quad + \tilde{\Phi}_1(t_1, r))] dt_1, \tag{7}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_p[(-1)^i (\sqrt{r^2 - (t_1-r)^2} + \tilde{\Phi}_1(t_1, r))] = \int_{2r-t_1}^{\infty} u[(-1)^i (\sqrt{r^2 - (t_1-r)^2} + \\
 \quad + \tilde{\Phi}_1(t_1, r)), \tau] e^{-P\tau} d\tau.
 \end{aligned}$$

Запишем теперь уравнения (7) в виде интегрального уравнения Вольтерра первого рода, используя существующую связь между x и t_1 в точках кривой. С помощью формулы (3) в уравнении (7) перейдем от переменной интегрирования t_1 к переменной x .

Тогда полученное соотношение можно записать в виде интегрального уравнения

$$\begin{aligned}
 v_p(r) &= \sum_{i=1}^{i=2} \int_0^r \frac{r \cdot \Phi_1(t_1, r) \cdot e^{-pt_1}}{\sqrt{r^2 - (t_1 - r)^2}} \tilde{u}_p [(-1)^i (\sqrt{r^2 - (t_1 - r)^2} + \\
 &+ \tilde{\Phi}_1(t_1, r))] dt_1 + \sum_{i=1}^{i=2} \int_r^{2r} \frac{r \cdot \Phi_1(t_1, r) e^{-pt_1}}{\sqrt{r^2 - (t_1 - r)^2}} \times \\
 &\times \tilde{u}_p [(-1)^i (\sqrt{r^2 - (t_1 - r)^2} + \tilde{\Phi}_1(t_1, r))] dt_1 = \\
 &= \int_{-r}^r \frac{r \cdot \tilde{K}_p(\sqrt{r^2 - x^2}, x, r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot \tilde{u}_p(x) dx.
 \end{aligned}$$

Используя четность функции $u(x, \tau)$ по переменной x получаем.

$$v_p(r) = \int_0^r \frac{2r \cdot \tilde{K}_p(\sqrt{r^2 - x^2}, x, r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot u_p(x) dx, \quad (8)$$

в котором ядро-функция $\tilde{K}_p(\sqrt{r^2 - x^2}, x, r)$ находится по формуле

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}_p(\sqrt{r^2 - x^2}, x, r) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{x^2}{x^2 - \tilde{\varphi}_1^2(r + (-1)^j \psi_j, z)} + \\
 &\times \Phi_1(r + (-1)^j \psi_j, r) e^{-p(r + (-1)^j \psi_j)} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial q}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\tilde{K}_p(0, r, r) = 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial q} \Big|_{q=0} \right) \Phi_1(r, r) e^{-pr} \neq 0. \quad (10)$$

Как видно из этой формулы, функция $\tilde{K}_p(q, x, r)$ непрерывна вместе с частными производными первого порядка по переменной q и x . Используя эти свойства, нетрудно формулу (8) пре-

образовать в уравнении Вольтерра второго рода. Действительно, применяя к равенству (8) оператор

$$Lv_p = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \frac{v_p(r) dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}, \quad (11)$$

получаем

$$\begin{aligned} Lv_p &= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} \int_0^r \frac{2r \cdot \tilde{\kappa}_p(\sqrt{r^2 - x^2}, x, r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} \tilde{u}_p(x) dx = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \tilde{u}_p(x) \left\{ \int_x^z \frac{2r \cdot \tilde{\kappa}_p(\sqrt{r^2 - x^2}, x, r)}{\sqrt{(z^2 - r^2)(r^2 - x^2)}} dr \right\} dx = \\ &= \tilde{\kappa}_p(0, z, z) \tilde{u}_p(z) + \\ &+ \int_0^z \tilde{u}_p(x) \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \frac{2r \cdot \tilde{\kappa}_p(\sqrt{r^2 - x^2}, x, r)}{\sqrt{(z^2 - r^2)(r^2 - x^2)}} dr \right\} dx. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (8) приводится к виду

$$\tilde{u}_p(z) + \int_0^z R_p(x, z) \tilde{u}_p(x) dx = \frac{1}{\tilde{\kappa}_p(0, z, z)} \cdot Lv_p, \quad (12)$$

в котором ядро находится по формуле

$$R_p(x, z) = \frac{1}{\tilde{\kappa}_p(0, z, z)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_x^z \frac{2r \cdot \tilde{\kappa}_p(\sqrt{r^2 - x^2}, x, r)}{\sqrt{(z^2 - r^2)(r^2 - x^2)}} dr. \quad (13)$$

Сделаем в интеграле замену переменной r на новую переменную

$$r^2 = \frac{1}{2} (z^2 + x^2) + \frac{1}{2} (z^2 - x^2) \cos \alpha.$$

Тогда выражение для ядра $R_p(x, z)$ преобразуется к виду

$$R_p(x, z) = \frac{1}{\pi \tilde{K}_p(0, z, z)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\pi \tilde{K}_p[\sqrt{\frac{1}{2}(z^2 - x^2)(1 + \cos \alpha)}, x, \\ \sqrt{\frac{1}{2}(z^2 + x^2) + \frac{1}{2}(z^2 - x^2) \cos \alpha}] d\alpha = \\ = \frac{1}{\pi \tilde{K}_p(0, z, z)} \cdot \int_0^\pi \left[\frac{\partial \tilde{K}_p(\lambda, x, r)}{\partial \lambda} \cdot \frac{z \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{z^2 - x^2}} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \tilde{K}_p(\lambda, x, r)}{\partial r} \cdot \frac{z \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{r} \right] d\alpha = \\ = \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}} \left\{ \frac{1}{\pi \tilde{K}_p(0, z, z)} \cdot \int_0^\pi \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{K}_p(\lambda, x, r) \cdot z \cos \frac{\alpha}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{z \sqrt{z^2 - x^2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \tilde{K}_p(\lambda, x, r) \right] d\alpha \right\}, \quad (14)$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}(z^2 + x^2) + \frac{1}{2}(z^2 - x^2) \cos \alpha}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{1}{2}(z^2 - x^2)(1 + \cos \alpha)}.$$

Из формулы (14) видно, что ядро уравнения (12) в точках $x = \pm r$ имеет интегрируемую особенность вида $(z^2 - r^2)^{-1/2}$. Из теории интегральных уравнений известно, что решение подобного рода уравнений единственно. Это решение может быть найдено, например, методом последовательных приближений. Отсюда следует, что функция $\tilde{v}_p(x)$ однозначно определяется функцией $v_p(r)$. Но в силу (7') функция $\tilde{v}_p(x)$ есть преоб-

разование Лапласа функцией $u(x, \tau)$ по переменной τ , следовательно, и функция $u(x, \tau)$ однозначно определяется функцией $v(\tau, t)$. Теорема доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность М.М.Лаврентьеву за постановку задачи и полезные советы и А.Л.Бухгейму - за помощь в работе.

Л и т е р а т у р а

1. ГЕЛЬФАНД И.М., ГРАЕВ М.И., ВИЛЕНКИН Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., Физматгиз, 1962, с.656.
2. РОМАНОВ В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск, "Наука", 1972, с.162.
3. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., ВАСИЛЬЕВ В.Г., РОМАНОВ В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, "Наука", 1969, с.67.

К.Г.Резницкая

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ
ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ [3]

В настоящей статье рассматриваются обратные задачи [2] для уравнений диффузии, когда решение считается известным на последовательности точек, имеющих предельную точку. Аналогичные задачи для уравнений гиперболического типа были рассмотрены в работах В.Г.Романова [3] и А.С.Благовещенского [4].

I. Постановка задачи

Пусть $U(x, y, t)$ - решение (обобщенное) уравнения

$$\mu(y) \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (1)$$

в области $x \in (-\infty, +\infty)$, $y > 0$, $t > 0$, удовлетворяющее начальным и краевым условиям

$$U \Big|_{t=0} = \delta(x)\delta(y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad U \Big|_{\infty} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=\infty} = 0, \quad (2)$$

где $\delta(x)$ - функция Дирака. Таким образом, $U(x, y, t)$ - действительная функция действительных переменных. Обратная задача состоит в определении функции $\mu(y)$, если известно значение решения $U(x, y, t)$ при всех $t > 0$ на последовательности точек, имеющих предельную точку, $x_k \rightarrow x_0 \neq 0$ и при $y = 0$. Пусть $U(x_k, 0, t) = f_k(t) \rightarrow f(t)$ при $x_k \rightarrow x_0 \neq 0$. Отображение L , переводящее $\mu(y)$ в $f_k(t)$, является нелинейным. Обратная задача состоит в определении $\mu(y)$ по известной последовательности $f_k(t)$.

Т е о р е м а I. Решение поставленной задачи единственно в классе непрерывных ограниченных функций, удовлетворяющих условиям

$$\mu(0) = 1, \quad \mu_1 \leq \mu(y) \leq \mu_0 > 0, \quad (3)$$

μ_0, μ_1 - постоянные. Следуя методу спектрального анализа, мы и докажем эту теорему.

П р е о б р а з о в а н и е Л а п л а с а .

$$V(x, y, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} U(x, y, t) dt. \quad (4)$$

Применяя (4) к задаче (I), (2), получаем

$$\mu(y)pV - \delta(x)\delta(y) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad V \Big|_{\infty} = 0, \quad V_y \Big|_{y=\infty} = 0. \quad (6)$$

Искомым в задаче (5), (6) является $\mu(y)$, известным $V(x_k, 0, p)$.

О п е р а т о р А .

Пусть $\phi(y, \lambda)$ - решение такой задачи

$$-\frac{d^2 \phi}{dy^2} + \mu(y)\phi = \lambda\phi, \quad (7)$$

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi(0, \lambda) = 1. \quad (8)$$

Дифференциальные выражения $-\frac{d^2 \phi}{dy^2} + \mu(y)\phi$ вместе с условиями (8) назовем оператором A . Тогда

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi. \quad (9)$$

Δ есть самосопряженный оператор, следовательно, точки спектра λ будут числа вещественные и так как $\mu(y) \geq \mu_0 > 0$, то и $\lambda > 0$.

Обобщенное преобразование Фурье, прямое.

$$W(x, \lambda) = \int_0^{\infty} V(x, y)\varphi(y, \lambda)dy, \quad (10)$$

где $\varphi(y, \lambda)$ есть решение задачи (8), (9) и $\sigma(\lambda)$ есть спектральная функция распределения [6]. В задаче (5), (6) положим $p=1$ и применим к ней преобразование (10), получим

$$\int_0^{\infty} \left[-\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \mu(y)\varphi \right] V(x, y)dy = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \delta(x).$$

Если в последнем равенстве учесть формулу (10), то получим

$$\lambda W = W''_{xx} + \delta(x), \quad (11)$$

$$W \Big|_{x=\infty} = 0. \quad (12)$$

Решение задачи (11), (12) имеет вид

$$W(x, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-|x|\sqrt{\lambda}}. \quad (13)$$

Обобщенное преобразование Фурье, обратное.

$$V(x, y) = \int_0^{\infty} W(x, \lambda)\varphi(y, \lambda)d\sigma(\lambda). \quad (14)$$

В формулу (14) подставим значение $W(x, \lambda)$, определенное формулой (13), и при $y=0$ получим

$$V(x, 0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-|x|\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{d\sigma(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}. \quad (15)$$

Из формулы (15) следует, что функция $V(x, 0)$ есть аналитич-

ческая функция по переменной x , при $|x| > 0$.

По условиям теоремы функцию $U(x, 0, t)$ мы знаем на последовательности точек, имеющих предельную точку. Следовательно, на этой последовательности $x_k \rightarrow x_0 \neq 0$ мы также знаем и $V(x, 0)$.

Таким образом, функцию $V(x, 0)$ можно вообще определить однозначно как функцию от x . Тогда формула (15) есть преобразование Лапласа по x от функции $\sigma(\lambda)$.

Формулы (10) и (14) есть в книге Наймарка [5]. Следовательно, $\sigma(\lambda)$ определяется функцией $V(x, 0)$ однозначно. Тогда по схеме Гельфанда и Левитана [6] по известной спектральной функции $\sigma(\lambda)$ мы однозначно определим искомую $\mu(\gamma)$. Теорема доказана.

II. Нелинейная обратная задача диффузии в цилиндрических координатах

Пусть $U(\rho, z, t)$ - решение уравнения

$$\mu(z) \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \quad (1)$$

в области $\rho \geq 0, z \geq 0, t \geq 0$, удовлетворяющее начальным и крайним условиям

$$U \Big|_{t=0} = \frac{1}{\pi \rho} \delta(z) \delta(\rho), \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad U \Big|_{\rho=\infty} = 0, \quad (3)$$

где $\delta(x)$ есть дельта-функция Дирака.

Обратная задача состоит в определении функции $\mu(z)$, если известно значение решения $U(\rho, z, t)$ при всех $t > 0$ на последовательности точек, имеющих предельную точку, $\rho_k \rightarrow \rho_0 \neq 0$ и при $z = 0$. Пусть $U(\rho_k, 0, t) = f_k(t) \rightarrow f(t)$ при $z = 0$. Отображение L , переводящее $\mu(z)$ в $f_k(t)$, является нелинейным. Обратная задача состоит в определении $\mu(z)$ по известной последовательности $f(t)$.

Т е о р е м а. Решение поставленной задачи единственно в классе непрерывных функций, удовлетворяющих условиям

$\mu(0)=1$, $\mu_1 \geq \mu(z) \geq \mu_0 > 0$, μ_0 и μ_1 постоянные. Доказательство этой теоремы использует преобразование Лапласа и Фурье, спектральную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и опирается на решение обратной задачи Штурма-Лиувилля. Этот же метод мы использовали и при доказательстве теоремы единственности в предыдущей задаче. Если записать уравнение (I) в прямоугольных координатах (в окончательном решении мы легко возвращаемся к цилиндрической), то схема решения этой задачи совпадает с предыдущей, поэтому можно опустить промежуточные выкладки и выписать окончательное решение. Итак,

$$V(\rho, 0, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K_0(\sqrt{\lambda} \rho) d\sigma(\lambda, p),$$

где

$$V(\rho, 0, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} U(\rho, 0, t) dt$$

и $U(\rho, 0, t)$ мы знаем на последовательности точек ρ_k , имеющих предельную точку ρ_0 , $\rho_k \rightarrow \rho_0 \neq 0$. Следовательно, на этой последовательности мы знаем и $V(\rho, 0, p) \cdot K_0(\sqrt{\lambda} \rho)$ есть функция Бесселя. Известно, что

$$K_0(\sqrt{\lambda} \rho) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xch\xi} d\xi. \quad (4)$$

Так что

$$V(\rho, 0, p) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda} \rho ch\xi} d\xi \right] d\sigma(\lambda, p). \quad (5)$$

Так же известна асимптотическая формула этой функции

$$K_0(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) следует, что $V(\rho, 0, p)$ есть аналитическая функция. Следовательно, ее можно однозначно определить при всех ρ . Зная же $V(\rho, 0, p)$, можно по известным форму-

дам обращения [7] однозначно определить $V(\rho, 0, \rho)$ и при $\rho = 1$ воспользоваться схемой Гельфанда и Ливитана [6] для восстановления функции $\mu(z)$.

Теорема доказана.

Примечание. В [1] была сформулирована теорема единственности решения обратной задачи для уравнения (I) пунктов 3 и 4, если $U(x, 0, t)$ известна при $x = x_0$. Однако в доказательстве теоремы была обнаружена погрешность.

Я благодарна В.Г. Романову, обратившему мое внимание на это обстоятельство. В настоящей работе приведены доказательства теоремы единственности при дополнительных ограничениях.

Л и т е р а т у р а

1. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., РЕЗНИЦКАЯ К.Г. Теоремы единственности некоторых нелинейных обратных задач математической физики.—ДАН, т.208, №3, М., "Наука", 1973, 531-533.
2. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. О некоторых задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
3. РОМАНОВ В.Г. Одномерная обратная задача для телеграфного уравнения. Дифференциальные уравнения. 4, №1, (1968), 87-101.
4. БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ А.С. Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн.—Сб.: Проблемы математической физики, вып. I. Изд. ЛГУ, Л., (1966), 68-81.
5. НАЙМАРК М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1954.
6. ГЕЛЬФАНД И.М., ЛЕВИТАН Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. "Известия АН, сер. матем.", 15, (1951), 309-360.

А. Х. Хайдаров

О ЗАДАЧЕ ВЫМЕТАНИЯ МАСС ДЛЯ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Рассмотрим области D и T с кусочно-гладкой границей Γ , $D \subset T$.

Пусть

$$V(x; \Gamma, \mu) = \int_{\Gamma} \mu(y) \ln \frac{1}{|x-y|} d\Gamma(y)$$

потенциал простого слоя на Γ с плотностью $\mu(y)$,

$$U(x; D, \mu_0) = \int_D \mu_0(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy$$

логарифмический потенциал области D с плотностью $\mu_0(y)$. Пусть $\mu_0(y)$ — непрерывная функция в замыкании \bar{D} области D . Задача выметания состоит в отыскании такой суммируемой функции μ на Γ , что

$$U(x; D, \mu_0) = V(x; \Gamma, \mu), \quad \text{для } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{T}. \quad (1)$$

Назовем функцию μ выметанием потенциала $U(x; D, \mu_0)$ на Γ . Ниже мы будем приводить свойства выметания μ на единичную окружность $\Gamma = \{|y| = 1\}$.

Вначале докажем один специальный случай известного соотношения ортогональности, который играет важную роль при изучении свойств выметания μ .

Л е м м а I. Пусть область T , со связным дополнением замыкания \bar{T} , конечна и имеет спрямляемую границу Γ , плотность μ суммируема на Γ , а область $D \subset T$. Равенство внешних потенциалов (I) эквивалентно соотношению ортогональности

$$\int_{\Gamma} h(y)\mu(y)d\Gamma(y) = \int_D h(y)\mu_0(y)dy \quad (2)$$

для любой функции h , гармонической в T и непрерывной в \bar{T} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что из (I) следует (2). Пусть функция \tilde{h} гармонична в конечной окрестности ω замыкания \bar{T} . Построим бесконечно дифференцируемую функцию f такую, что $f = 1$ в окрестности ω_1 :

$$\bar{T} \subset \omega_1 \subset \bar{\omega}_1 \subset \omega$$

и $f = 0$ вне окрестности ω_2 :

$$\bar{\omega}_1 \subset \omega_2 \subset \bar{\omega}_2 \subset \omega.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\omega} V \cdot \Delta(f(x)\tilde{h}(x))dx &= \int_{\omega_1} V \cdot \Delta(f(x)\tilde{h}(x))dx + \int_{\omega \setminus \omega_1} V \cdot \Delta(f(x)\tilde{h}(x))dx = \\ &= \int_{\omega \setminus \omega_1} V \Delta(f(x)\tilde{h}(x))dx = \int_{\omega \setminus \omega_1} U \Delta(f(x)\tilde{h}(x))dx, \end{aligned}$$

Так как на ω_1 $f = 1$, поэтому $\Delta(f \cdot \tilde{h}) = \Delta \tilde{h} = 0$, а на $\omega \setminus \omega_1$ $V = U$. Добавляя к последнему интегралу интеграл от $U\Delta(f\tilde{h})$ по ω_1 , равный нулю, получим

$$\int_{\omega \setminus \omega_1} U\Delta(f(x)\tilde{h}(x))dx + \int_{\omega_1} U\Delta(f(x)\tilde{h}(x))dx = \int_{\omega} U\Delta(f(x)\tilde{h}(x))dx.$$

Значит,

$$\int_{\omega} dx \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \ln \frac{1}{|x-y|} \Delta(f\tilde{h})d\Gamma(y) =$$

$$= \int_{\omega} dx \frac{1}{2\pi} \int_D \mu_0(y) \ln \frac{1}{|x-y|} \Delta(f\tilde{h})dy.$$

По теореме Фубини можно изменить порядок интегрирования по x и y , после чего получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mu(y) d\Gamma(y) \frac{1}{2\pi \omega} \int \ln \frac{1}{|x-y|} \Delta(f \cdot \tilde{h}) dx &= \\ &= \int_D \mu_0(y) dy \frac{1}{2\pi \omega} \int \ln \frac{1}{|x-y|} \Delta(f \cdot \tilde{h}) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

По определению фундаментального решения ($f\tilde{h} \in C_0^\infty$) интеграл по ω равен $f(y) \cdot \tilde{h}(y)$, так что из (3) получаем

$$\int_{\Gamma} \mu(y) f(y) \tilde{h}(y) d\Gamma(y) = \int_D \mu_0(y) f(y) \tilde{h}(y) dy. \quad (4)$$

Если учесть, что $f = 1$ на $T \supset D \cup \Gamma$, то из (4) получаем равенство

$$\int_{\Gamma} \mu(y) \tilde{h}(y) d\Gamma(y) = \int_D \mu_0(y) \tilde{h}(y) dy \quad (5)$$

для любой функции \tilde{h} , гармонической в окрестности \bar{T} . Пусть $h \in C(\bar{T})$ и гармонична в T . По теореме Мергеляна существует последовательность функций \tilde{h}_n , гармонических в окрестности \bar{T} и сходящихся к $h(y)$ в $C(\bar{T})$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла в (5) возможен предельный переход ($\tilde{h}_n \rightarrow h$) при $n \rightarrow \infty$. После предельного перехода получим равенство (2). Равенство (I) в более подробной записи имеет вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{|x-y|} \mu(y) d\Gamma(y) = \frac{1}{2\pi} \int_D \ln \frac{1}{|x-y|} \mu_0(y) dy, \quad x \notin \bar{T}.$$

Последнее равенство вытекает из (2), потому что при $x \notin \bar{T}$ функция $\ln \frac{1}{|x-y|}$ гармонична по y в окрестности \bar{T} , так что ее можно взять в качестве $h(y)$ в (2). Лемма доказана.

Т е о р е м а. Для любой области $D \subset T = \{|y| < L\}$ существует положительная плотность $\mu \in C^{(0, \lambda)}$ ($\Gamma = \{|y| = 1\}$), которая является выметанием потенциала $U(x; D, \mu_0)$ на Γ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что равенство (I)

эквивалентно следующему интегральному уравнению относительно μ :

$$-\mu(x) + \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \ln \frac{1}{|x-y|} d\Gamma(y) = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad (6)$$

где $f(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \frac{\partial}{\partial n} U(\tilde{x}; D, \mu_0)$ при $\tilde{x} \rightarrow x$ извне Γ по нормали $n(x)$ к Γ в точке x . В самом деле, из (I) следует (6). Действительно, из (I) дифференцированием получаем

$$\frac{\partial}{\partial n} U(\tilde{x}; D, \mu_0) = \frac{\partial}{\partial n} V(\tilde{x}; \Gamma, \mu), \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Gamma}. \quad (7)$$

Переходя к пределу извне в левой части (7) при $\tilde{x} \rightarrow x$ получим $f(x)$. Предельный переход возможен, так как потенциал $U(\tilde{x}; D, \mu_0)$ аналитичен в некоторой окрестности Γ . При переходе к пределу в правой части воспользуемся формулой скачка нормальной производной потенциала простого слоя [2], из которой получим правую часть уравнения (6). Обратно, из (6) следует (I). В самом деле, обозначая через $(\frac{\partial}{\partial n} v)_+$, $(\frac{\partial}{\partial n} u)_+$ правильные нормальные производные функции v и u пределы нормальной производной v и u извне Γ [2], из (I), получим

$$\left(\frac{\partial U(D, \mu_0)}{\partial n} \right)_+(x) = \left(\frac{\partial V(\Gamma, \mu)}{\partial n} \right)_+(x), \quad x \in \Gamma. \quad (8)$$

Так как $\ln |x-y| = \ln |x| + \ln |1 - \frac{y}{x}|$, $|x| > 1$, $y \in D \cup \Gamma$,

$$U(x; D, \mu_0) = M_1 \ln |x| + O_1\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad (9)$$

где

$$M_1 = \int_D \mu_0(y) dy, \quad O_1\left(\frac{1}{|x|}\right) = \int_D \mu_0(y) \ln |1 - \frac{y}{x}| dy.$$

Очевидно, $O_1\left(\frac{1}{|x|}\right) \leq c \frac{1}{|x|}$ при $|x| > 1$. Аналогично

этому получим

$$V(x; \Gamma, \mu) = M_2 \ln |x| + O_2\left(\frac{1}{|x|}\right). \quad (10)$$

В силу (9) и (10) имеем

$$\tilde{U}(x) = U(x; D, \mu_0) - V(x; \Gamma, \mu) = M \ln |x| + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad (11)$$

где $M = M_1 - M_2$, $O = O_1 - O_2$. Покажем, что $M=0$. Пусть $M > 0$. Тогда в силу (II)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \tilde{U}(x) = \infty.$$

Поэтому минимум функции $\tilde{U}(x)$ на $R^2 \setminus T$ достигается в некоторой точке $x_0 \in R^2 \setminus T$. В силу гармоничности $\tilde{U}(x) \neq \text{const}$ по принципу максимума $x_0 \in \Gamma$. По принципу Зарембы-Жиро [I]

$$\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial n}\right)_+(x_0) \neq 0, \quad x_0 \in \Gamma,$$

что противоречит (8). Поэтому эквивалентность (I) и (6) доказана.

Известно [2], что интегральное уравнение (6) разрешимо в $C(\Gamma)$. Поэтому существует $\mu \in C(\Gamma)$, удовлетворяющая (6). В силу оценок [3], интегралов типа потенциала первая производная объемного потенциала с ограниченной измеримой плотностью является гёльдеровской. Поэтому $f \in C^{(0, \lambda)}(\Gamma)$. В случае круга уравнение (6) имеет простой вид [2]

$$\mu(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) d\Gamma(y) = -\frac{f(x)}{\pi}.$$

Отсюда вытекает, что $\mu \in C^{(0, \lambda)}(\Gamma)$.

Теперь докажем неотрицательность μ . Предположим, что для некоторой точки y_0 $\mu(y_0) < 0$. Тогда по непрерывности $\mu(y) < 0$ на дуге $l \subset \Gamma$.

Пусть h - решение задачи Дирихле:

$$\Delta h = 0 \quad \text{внутри } T = \{|y| \leq 1\},$$

$$h = h_0 \quad \text{на } \Gamma = \{|y| = 1\},$$

где h_0 - некоторая непрерывная функция, такая что $h_0(y_0) > 0$, $h_0 \geq 0$ на Γ и $h_0 = 0$ на $\Gamma \setminus 1$. По доказанной лемме справедливо соотношение ортогональности

$$\int_{\Gamma} \mu(y) h(y) d\Gamma(y) = \int_D \mu(y) h(y) dy. \quad (12)$$

В силу выбора краевых данных h_0 левый интеграл в (12) меньше нуля. С другой стороны, $h \geq 0$ и $\mu_0 > 0$. Поэтому в силу принципа максимума гармонических функций правая часть (12) положительна. Полученное противоречие доказывает неотрицательность функции μ . Теорема доказана.

Л и т е р а т у р а

1. БИЦАДЗЕ А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., "Наука", 1966.
2. ВЛАДИМИРОВ В.С. Уравнения математической физики. М., "Наука", 1971.
3. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Л., Физматгиз, 1959.

С.П.Шихатский

ОБ УБЫВАНИИ НУЛЬ-РЕШЕНИЙ ЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА

Локальной задачей Коши для параболического неравенства мы называем следующую задачу: найти определенную на $P(X, T) = \{(x, t) : -X \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T\}$ функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$(u_{xx} - u_t)^2 \leq a(u_x^2 + u^2), \quad (x, t) \in P(X, T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [-X, X]. \quad (2)$$

Хорошо известно, что решение такой задачи, вообще говоря, не единственно. Нуль-решением мы называем нетривиальное ее решение, для которого $u(x, 0) = 0$ для $-X \leq x \leq X$. Представляет интерес вопрос о скорости убывания нуль-решений при $t \rightarrow 0$. Если нуль-решение представимо интегралом Пуассона, то есть $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению $u_{xx} - u_t = 0$, допускает продолжение на полосу $-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T$ и

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} u_0(\xi) d\xi, \quad (3)$$

где $\text{supp } u_0(x) \subset \{x : |x| \geq X\}$, то легко показать, что для любого $x_0 : -X < x_0 < X$ существуют положительные постоянные

b_1, b_2 такие, что

$$|u(x_0, t)| \leq b_1 e^{-b_2 \frac{\Lambda^2}{t}}, \quad (4)$$

где $\Lambda = \min(|-X - x_0|, |X - x_0|)$.

Данная работа посвящена доказательству этого утверждения для любого нуль-решения задачи (I)-(2).

Т е о р е м а I. Пусть:

- 1) функция $u(x, t)$ определена и имеет непрерывные производные u_x, u_t, u_{xx} на $P(X, T)$;
- 2) удовлетворяет неравенству (I) на $P(X, T)$;
- 3) $u(x, 0) = 0$ при $-X \leq x \leq X$.

Тогда для функции $u(x, t)$ для достаточно малых t и x , достаточно близких к x_0 ($-X \leq x_0 \leq X$), имеет место неравенство (4), где b_1 и b_2 зависят от a .

Теорема I позволяет построить некоторый класс единственности задачи Коши (I)-(2).

О п р е д е л е н и е. Множество U функций $u(x, t)$, определенных, имеющих непрерывные производные u_x, u_t, u_{xx} и удовлетворяющих неравенству (I) на $P(X, T)$, мы называем классом единственности задачи (I)-(2), если из условий $u \in U$, $u(x, 0) = 0$ ($-X \leq x \leq X$) следует $u(x, t) \equiv 0$.

Т е о р е м а 2. Пусть U - множество решений неравенства (I), удовлетворяющих указанным в определении условиям гладкости и таких, что для каждой функции $u \in U$ существуют:

- 1) число $x_0: -X < x_0 < X$;
 - 2) последовательность $t_n \downarrow 0$;
 - 3) функция $\varphi(t)$ с условиями $\varphi(t) \downarrow 0$, $\frac{1}{\varphi(t)} = o\left(\frac{1}{t}\right) (t \rightarrow 0)$
- (число x_0 , последовательность $\{t_n\}$ и функция $\varphi(t)$ могут зависеть от функции $u \in U$), такие, что

$$|u(x_0, t_n)| \geq e^{-\frac{1}{\varphi(t_n)}}.$$

Тогда, если X и T достаточно малы, то множество U является классом единственности задачи (I)-(2).

Т е о р е м а 2, очевидно, является простым следствием теоремы I.

Пример нуль-решений вида (3) показывает, что заменить в условии 3) теоремы 2 символ "о" на "0" с сохранением единственности нельзя.

Для доказательства теоремы I нам понадобятся несколько лемм.

Л е м м а I. Пусть:

- 1) $x < 1, t < 1$;
- 2) параметры λ, n удовлетворяют условиям $0 < \lambda < T^{-1}, 1 < n$;
- 3) функция $u(x, t)$ определена, имеет непрерывные производные u_x, u_t, u_{xx} на $P(X, T)$, причем

$$\max_P \{ |u|, |u_x|, |u_t| \} = M$$

$$u(x, t) = 0 \text{ на } P(X, \varepsilon), 0 < \varepsilon < T;$$

$$4) f = f(x, t) = x^2 + \lambda t.$$

Тогда для $n > 1$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & 4n \int_P f^{-2n-2} (x^2 - \lambda t) u_x^2 + \\ & + \int_P f^{-2n-4} [(32n^3 - 20n^2\lambda + n\lambda^2)x^4 + (32n^3\lambda - 16n^2\lambda^2 + 2n\lambda^3)x^2t + \\ & + (-16n^2\lambda^2 + 4n^2\lambda^3 + n\lambda^4)t^2] (1 + O(\frac{1}{n})) u^2 \leq \\ & \leq \int_P f^{-2n} (u_{xx} - u_t)^2 + C_1 M^2 [n\lambda(\lambda T)^{-2n-2} + (n^3 + n^2\lambda)x^{-4n-6}], \end{aligned}$$

где "0" равномерно по x, t, λ и C_1 - абсолютная константа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $f^{-n}u = v$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_P f^{-2n} (u_{xx} - u_t)^2 = \\ & = \int_P \{ v_{xx} + 2nf^{-1}f_x v_x + [n(n-1)f^{-2}f_x^2 + nf^{-1}f_{xx} - nf^{-1}f_t] v - v_t \}^2 = \\ & = \int_P \{ A + B + C + D \}^2 \geq 2 \int_P (AB + AD + BC + CD). \end{aligned}$$

К каждому из четырех интегралов справа применяем формулу

Грина так, чтобы получить интегральные формы, содержащие только v_x^2 и v^2 . Возвращаясь затем к функции u , получаем:

$$\begin{aligned}
 & - 2n \int_P f^{-2n-2} (f_{xx} f - f_x^2) u_x^2 + \\
 & + \int_P f^{-2n-4} [-4n^3 f_x^2 (f_{xx} f - f_x^2) + 20n^2 f f_x^2 f_{xx} - 12n^2 f_x^4 - 4n^2 f^2 f_{xx}^2 - \\
 & - 4n^2 f^2 f_x f_{xxx} + (-6n^2 + 2n) f f_x^2 f_t + (4n^2 - 2n) f^2 f_x f_{xt} + (2n^2 - n) f^2 f_{xx} f_t + \\
 & + n f^3 f_{xxt} + n f^2 f_t^2 - n f^3 f_{tt}] u^2 \leq \int_P f^{-2n} (u_{xx} - u_t)^2 + \\
 & + \int_{\partial P} f^{-2n} [-u_x^2 + 2n f^{-1} f_x u_x u - (n f^{-2} f_x^2 - n f^{-1} f_{xx} + n f^{-1} f_t) u^2] \cos vt + \\
 & + \int_{\partial P} f^{-2n} \{-2n f^{-1} f_x u_x^2 + 2u_x u_t + (4n^2 f^{-2} f_x^2 - 2n f^{-1} f_t) u_x u - 2n f^{-1} f_x u_t u - \\
 & - [(4n^3 - 4n^2) f^{-3} f_x^3 + 4n^2 f^{-2} f_x f_{xx} - 4n^2 f^{-2} f_x f_t] u^2\} \cos vx
 \end{aligned}$$

(v - внешняя нормаль к ∂P). Для окончания доказательства в полученном неравенстве следует положить $f = x^2 + \lambda t$ и оценить граничные интегралы, используя условие 3) леммы.

Лемма 2. В условиях леммы I имеет место неравенство

$$8n\lambda \int_P f^{-2n-2} t u_x^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_P f^{-2n-4} [-4n\lambda x^4 + (-128n^3\lambda + 8n^2\lambda^2)x^2 t + (16n^2\lambda^2 + 8n^2\lambda^3)t^2] (1 + \\
 & + O\left(\frac{1}{n}\right)) u^2 \leq -8n\lambda \int_P f^{2n-2} t (u_{xx} - u_t) u + C_2 M^2 [n\lambda(\lambda T)^{-2n-2} + n^2\lambda x^{-4n-6}].
 \end{aligned}$$

Доказательство. Достаточно к интегралу справа применить формулу Грина (дважды по x и однократно по t) и оценить возникающие при этом граничные интегралы.

Л е м м а 3. В условиях леммы I имеет место неравенство

$$4n \int_P f^{-2n-1} u_x^2 + \int_P f^{-2n-4} [(32n^3 - 20n^2\lambda + n\lambda^2)x^4 + (-160n^3\lambda - 8n^2\lambda^2 + 2n\lambda^3)x^2t + (12n^2\lambda^3 + n\lambda^4)t^2].$$

$$(1 + o(\frac{1}{n}))u^2 \leq$$

$$\leq \int_P f^{-2n}(u_{xx} - u_t)^2 - 8n\lambda \int_P f^{-2n-2}t(u_{xx} - u_t)u + C_3 M^2 [n\lambda(\lambda T)^{-2n-2} + n^2\lambda x^{-4n-6}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из лемм I, 2.

Л е м м а 4. Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы I и является решением неравенства (I). Тогда существуют абсолютная константа $\lambda_0 > 0$ и константы $n_0 > 0$, $X_0 > 0$, $T_0 > 0$, зависящие только от a и такие, что если

$$\lambda = \lambda_0 n, \quad n \geq n_0, \quad X \leq X_0, \quad T \leq T_0, \quad \lambda_0 n T < 1, \quad (5)$$

то справедливо неравенство

$$\int_P f^{-2n} u_x^2 + \int_P f^{-2n-2} u^2 \leq C_4 M^2 [n^2(\lambda_0 n T)^{-2n-2} + n^3 X^{-4n-6}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть λ_0 - наименьшее из тех чисел $\lambda > 0$, для которых выполнены неравенства

$$32 - 20\lambda + \lambda^2 \geq \frac{1}{2} \lambda^4, \quad 12\lambda + \lambda^2 \geq \frac{1}{2} \lambda^2, \quad -160 - 8\lambda + 2\lambda^2 \geq \lambda^2.$$

Очевидно, такое $\lambda_0 > 0$ существует. Положим $\lambda = \lambda_0 n$. Тогда

$$[(32n^3 - 20n^2\lambda + n\lambda^2)x^4 + (-160n^3\lambda - 8n^2\lambda^2 + 2n\lambda^3)x^2t +$$

$$\begin{aligned}
& + (12n^2\lambda^3 + n\lambda^4)t^2] (1 + o(\frac{1}{n})) = n^3[(32 - 20\lambda_0 + \lambda_0^2)x^4 + \\
& + (-160 - 8\lambda_0 + 2\lambda_0^2)\lambda x^2 t + (12\lambda_0 + \lambda_0^2)\lambda^2 t^2] (1 + o(\frac{1}{n})) \geq \\
& \geq \frac{1}{2} \lambda_0^2 n^3 (x^2 + \lambda t)^2 (1 + o(\frac{1}{n})) \geq \frac{1}{4} \lambda_0^2 n^3 f^2, \quad (6)
\end{aligned}$$

если $n \geq n_0$.

Далее

$$\begin{aligned}
& \int_{P(X,T)} f^{-2n} (u_{xx} - u_t)^2 - 8n\lambda \int_{P(X,T)} f^{-2n-2} t (u_{xx} - u_t) u \leq \\
& \leq \int_{P(X,T)} f^{-2n} (u_{xx} - u_t)^2 + 8n\lambda \int_{P(X,T)} f^{-2n-2} t |u_{xx} - u_t| |u| \leq \\
& \leq \int_{P(X,T)} f^{-2n} (u_{xx} - u_t)^2 + 8n \int_{P(X,T)} f^{-2n-1} |u_{xx} - u_t| |u| \leq \\
& \leq 5 \int_{P(X,T)} f^{-2n} (u_{xx} - u_t)^2 + 4n \int_{P(X,T)} f^{-2n-2} u^2
\end{aligned}$$

(для оценки второго интеграла мы использовали неравенство Коши). Учитывая теперь неравенство (I), получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{P(X,T)} f^{-2n} (u_{xx} - u_t)^2 - 8n\lambda \int_{P(X,T)} f^{-2n-2} t (u_{xx} - u_t) u \leq \\
& \leq 5a \int_{P(X,T)} f^{-2n} u_x^2 + \int_{P(X,T)} f^{-2n-2} (5af^2 + 4n^2) u^2.
\end{aligned}$$

Из неравенства леммы 3 и неравенств (6), (7) следует:

$$\begin{aligned}
& \int_P f^{-2n} (4nf^{-1} - 5a) u_x^2 + \int_P f^{-2n-2} (\frac{1}{4} \lambda_0^2 n^3 - 5af^2 - 4n^2) u^2 \leq \\
& \leq C_n M^2 [n^2 (\lambda_0 n T)^{-2n-2} + n^3 X^{-4n-6}].
\end{aligned}$$

Имеем:

$$4nf^{-1} - 5a = \frac{4n}{x^2 + \lambda_0 n T} - 5a \geq \frac{4n}{x^2 + \lambda_0 n T} - 5a = \frac{4}{\frac{x^2}{n} + \lambda_0 T} - 5a \geq \frac{4}{x^2 + \lambda_0 T} - 5a.$$

Выберем $0 < x_0 < 1$, $0 < T_0 < 1$ так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{4}{x^2 + \lambda_0 T} - 5a \geq 1.$$

Тогда

$$4nf^{-1} - 5a \geq 1.$$

Далее:

$$\frac{1}{4} \lambda_0^2 n^3 - 5af^2 - 4n^2 \geq \frac{1}{4} \lambda_0^2 n^3 - 5a(1 + \lambda_0 n)^2 - 4n^2 \geq 1,$$

если $n \geq n_0$.

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы I. Можно предполагать, что $x_0 = 0$. Пусть $T < T_0$, $X < X_0$. Для $0 < \varepsilon < T_0 - T$ положим

$$u_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} u(x, t - \varepsilon), & \text{если } \varepsilon \leq t \leq T + \varepsilon \\ 0, & \text{если } 0 \leq t \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Так как $u(x, t)$ непрерывна вместе со своими производными u_x , u_t , u_{xx} и $u(x, 0) = u_x(x, 0) = u_t(x, 0) = u_{xx}(x, 0) = 0$, то функция $u_\varepsilon(x, t)$ непрерывна вместе со своими производными $u_{\varepsilon x}$, $u_{\varepsilon t}$, $u_{\varepsilon xx}$. Очевидно, функция u_ε также удовлетворяет неравенству (I) - для функции u_ε выполнены все условия леммы 4.

Если

$$\max_{P(X, T)} \{|u|, |u_x|, |u_t|\} = M,$$

то

$$\max_{P(X, T + \varepsilon)} \{|u_\varepsilon|, |u_{\varepsilon x}|, |u_{\varepsilon t}|\} \leq M$$

и, следовательно,

$$\int_{P(X, T + \varepsilon)} f^{-2n} u_{\varepsilon x}^2 + \int_{P(X, T + \varepsilon)} f^{-2n-2} u_\varepsilon^2 \leq C_4 M^2 [n^2 (\lambda_0 n T)^{-2n-2} + n^3 x^{-4n-6}]$$

$$\text{или } \int_{-X}^X \int_{\varepsilon}^{T+\varepsilon} f^{-2n} u_x^2(x, t-\varepsilon) + \int_{-X}^X \int_{\varepsilon}^{T+\varepsilon} f^{-2n-2} u^2(x, t-\varepsilon) \leq \\ \leq C_4 M^2 [n^2 (\lambda_0 n T)^{-2n-2} + n^3 x^{-4n-6}],$$

откуда

$$\int_{-X}^X \int_0^T (x^2 + \lambda_0 n t + \lambda_0 n \varepsilon)^{-2n} u_x^2(x, t) + \int_{-X}^X \int_0^T (x^2 + \lambda_0 n t + \lambda_0 n \varepsilon)^{-2n-2} u^2(x, t) \leq \\ \leq C_4 M^2 [n^2 (\lambda_0 n T)^{-2n-2} + n^3 x^{-4n-6}].$$

Так как при $\varepsilon \downarrow 0$ функция $(x^2 + \lambda_0 n t + \lambda_0 n \varepsilon)^{-k}$ ($k > 0$) возрастает, а правая часть неравенства от ε не зависит, то, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

(8)

$$\int_{-X}^X \int_0^T f^{-2n} u_x^2 + \int_{-X}^X \int_0^T f^{-2n-2} u^2 \leq C_4 M^2 [n^2 (\lambda_0 n T)^{-2n-2} + n^3 x^{-4n-6}].$$

Заметим, что из (8) следует, что $u(x, t)$, как функция двух переменных, имеет нуль бесконечного порядка в любой точке интервала $-X < x < X$, $t = 0$.

Выберем X и T настолько малыми, чтобы выполнялись неравенства

$$2x^2 < 1, \quad \frac{4X^2}{2\lambda_0 T} \geq n_0, \quad X < X_0, \quad T < T_0$$

и положим

$$\tau = \frac{T}{4}, \quad n = \frac{X^2}{2\lambda_0 \tau}, \quad x_\tau = \sqrt{\lambda_0 n \tau} = \frac{X}{\sqrt{2}}.$$

Легко проверить, что так определенные величины X , T и параметры λ, n удовлетворяют условиям (5) леммы 4 и, следовательно, для такого набора параметров имеет место неравенство (8). Отсюда:

$$\iint_{P(X_\tau, \tau)} f^{-2n} u_x^2 + \iint_{P(X_\tau, \tau)} f^{-2n-2} u^2 \leq C_4 M^2 [n^2 (\lambda_0 n T)^{-2n-2} + n^3 X^{-4n-6}],$$

откуда

$$\iint_{P(X_\tau, \tau)} (u_x^2 + u^2) \leq C_4 M^2 f^{-2n}(X_\tau, \tau) [n^2 (\lambda_0 n T)^{-2n-2} + n^3 X^{-4n-6}],$$

Имеем:

$$\begin{aligned} n^2 (\lambda_0 n T)^{-2n-2} f^{2n}(X_\tau, \tau) &= n^2 (\lambda_0 n T)^{-2n-2} (2\lambda_0 n \tau)^{2n} \leq C_5 \tau^{-2} 2^{-2n} = \\ &= C_5 \tau^{-2} 2^{-\frac{X^2}{\lambda_0 \tau}}. \end{aligned}$$

Далее

$$n^3 X^{-4n-6} f^{2n}(X_\tau, \tau) = n^3 X^{-4n-6} (2X_\tau^2)^{2n} = n^3 X^{-6} 2^{-2n} \leq C_6 \tau^{-3} 2^{-\frac{X^2}{\lambda_0 T}}.$$

Из трех последних неравенств, наконец, получаем

$$\iint_{P(X_\tau, \tau)} (u_x^2 + u^2) \leq C_7 \tau^{-3} e^{-\frac{1n2}{\lambda_0} \frac{X^2}{\tau}} \leq C_8 e^{-C_9 \frac{X^2}{\tau}}. \quad (9)$$

Интегральную оценку (9) известными методами легко переработать в равномерную оценку вида (4).

Теорема доказана.

РАЗДЕЛ II

Ю.А.Адамчик

МЕТОД РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И АМПЛИТУД КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Одним из важных направлений в численном решении задач теории упругости является развитие асимптотических методов, позволяющих получать решение задачи в случае высоких частот при произвольном законе изменения скорости распространения упругих возмущений и плотности среды. В настоящей работе описаны постановка и метод решения задачи определения собственных частот и амплитуд крутильных колебаний для жесткого сферического кольца с одномерным законом изменения физических параметров. Подобные задачи возникают в геофизике при исследовании крутильных колебаний сферически однородной модели Земли, обладающей жидким ядром. Приводятся расчетные формулы, позволяющие находить решение дифференциального уравнения второго порядка, описывающего колебания среды. Показано, как описываемый способ отыскания решения уравнения связан с общим методом решения задачи. В конце статьи приводятся некоторые результаты численного эксперимента, носящие иллюстративный характер и

показывающие существенное преимущество предлагаемого метода по сравнению с известным методом Рунге-Кутты при выполнении расчетов для больших значений частоты.

I. Постановка задачи

Рассмотрим сферу S радиуса R , заполненную упругой средой, модуль сдвига $\mu = \mu(r)$ и плотность $\rho = \rho(r)$ которой являются кусочно-гладкими функциями расстояния r от центра сферы, допускающими разрывы первого рода на поверхностях $r = r_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Будем также считать, что $\mu(r) \equiv 0$ при $r < r_1$. С физической точки зрения это означает, что ядро сферы предполагается жидким.

Пусть $\vec{U}(r, \vartheta, \varphi, \omega)$ - преобразование Фурье вектора смещений $\vec{u}(r, \vartheta, \varphi, t)$ относительно времени t . В случае чисто крутильных колебаний $\text{div } \vec{U} = 0$. Относительно компонент u, v, w вектора \vec{U} , соответствующих ортам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ сферической системы координат r, ϑ, φ с началом в центре сферы, это указывает, что $u = 0$, а v и w можно представить следующим образом:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=-n}^n \frac{V_{nm}(r, \omega)}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{nm}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi},$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=-n}^n V_{nm}(r, \omega) \frac{\partial Y_{nm}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta}, \quad (1.1)$$

где $N = \sqrt{n(n+1)}$, V_{nm} - радиальная функция, Y_{nm} - сферическая функция порядка n степени m . После подстановки (1.1) в уравнения движения (см., например, [1]) находим, что каждая функция V_{nm} должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 V_n}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} + \frac{d}{dr} \ln \mu \right) \frac{dV_n}{dr} + \left[\omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \ln \mu - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] V_n = 0. \quad (1.2)$$

Индекс m у функций в дальнейшем будем опускать, если это не влечет потери смысла.

Полагая, что напряжения, появляющиеся на границе $r = r_1$ и обусловленные вязкостью ядра, малы, а упругие напряжения в отсутствие источников на этой границе не возникают, записываем граничное условие $\vec{T}_1(r_1) = 0$ или, если использовать представления (I.I) для v, w и подставить их в граничное условие, имеем:

$$\mu \left[\frac{dv_n}{dr} - \frac{v_n}{r} \right] \Big|_{r=r_1} = 0. \quad (1.3)$$

Аналогичное условие записывается на границе $r = R$, которое для k -слойной модели принимает вид $\vec{T}_k(R) = 0$, или, соответственно,

$$\mu \left[\frac{dv_n}{dr} - \frac{v_n}{r} \right] \Big|_{r=R} = 0. \quad (1.4)$$

Индекс i у напряжений $\vec{T}_i(r)$ обозначает номер слоя, в котором рассматриваются напряжения. Номера слоев возрастает в сторону увеличения радиуса r .

Рассмотрим источник напряжений $\vec{F}(\vartheta, \varphi, t)$ при радиусе $r = r_{i+1}$. Пусть $\vec{\Phi}(\vartheta, \varphi, \omega)$ - преобразование Фурье источника $\vec{F}(\vartheta, \varphi, t)$. Тогда

$$\vec{T}_i(r_{i+1}) - \vec{T}_{i+1}(r_{i+1}) = \vec{\Phi}(\vartheta, \varphi, \omega). \quad (1.5)$$

Относительно источника \vec{F} предполагается, что у него отсутствует компонента F_r и зависимость от времени дает функция Дирака $\delta(t)$.

Образум коэффициенты $f_{nm}(r_{i+1})$ по формуле

$$f_{nm} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (F, \vec{A}_{nm}) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dt, \quad (1.6)$$

где функция $\vec{A}_{nm}(\vartheta, \varphi)$ имеет такой же смысл, как и в работе [2]. Условие (I.5) теперь можно представить в следующем виде:

$$\left[\mu(r) \left(\frac{dV_n}{dr} - \frac{V_n}{r} \right) \right] \Big|_{r=r_{i+1}-0} - \left[\mu(r) \left(\frac{dV_n}{dr} - \frac{V_n}{r} \right) \right] \Big|_{r=r_{i+1}+0} = f_{nm}. \quad (1.7)$$

Таким образом, нам необходимо решить задачу (I.2) - (I.4) с дополнительным условием (I.7). Полученное решение этой задачи позволяет найти вектор $\vec{u}(r, \vartheta, \varphi, t)$ по формуле

$$\vec{u} = \frac{1}{2\pi} v. \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \vec{U}(r, \vartheta, \varphi, \omega) d\omega. \quad (1.8)$$

2. Метод решения задачи

Для вектора \vec{U} справедливо представление

$$\vec{U} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \vec{A}_{nm}(\vartheta, \varphi) [C_{nm} X_n(r, \omega) + D_{nm} Z_n(r, \omega)], \quad (2.1)$$

где X_n и Z_n - линейно независимые решения уравнения (I.2), а коэффициенты C_{nm} и D_{nm} определяются из граничных условий. Напряжение T также запишем с использованием X_n и Z_n .

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \vec{A}_{nm}(\vartheta, \varphi) \left[C_{nm} \mu \left(\frac{dX_n}{dr} - \frac{X_n}{r} \right) + D_{nm} \mu \left(\frac{dZ_n}{dr} - \frac{Z_n}{r} \right) \right]. \quad (2.2)$$

Обозначим выражения в скобках в формулах (2.1), (2.2) соответственно через V и T . Тогда, следуя работе [3], получаем

$$\begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_n & Z_n \\ \mu \left(\frac{dX_n}{dr} - \frac{X_n}{r} \right) & \mu \left(\frac{dZ_n}{dr} - \frac{Z_n}{r} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{nm} \\ D_{nm} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Используя подстрочный индекс i , обозначающий номер сферического слоя с внутренним радиусом r_i , запишем уравнение (2.3) в виде

$$\begin{bmatrix} V_i(r) \\ T_i(r) \end{bmatrix} = B_i(r) \begin{bmatrix} C_i \\ D_i \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где $B_i(r)$ - матрица размерности 2×2 , а C_i, D_i соответствуют C_{nm}, D_{nm} в i -м слое.

Из формулы (2.4) при условии, что матрица $B_i(r)$ невырожденная, вытекает следующее равенство:

$$\begin{bmatrix} C_i \\ D_i \end{bmatrix} = B_i^{-1}(r) \begin{bmatrix} V_i(r) \\ T_i(r) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Полагая, далее,

$$\beta_i = B_i(r_i) B_i^{-1}(r_{i+1}), \quad \kappa_i = \prod_{l=1}^i \beta_l \quad (2.6)$$

и учитывая, что смещения и напряжения непрерывны при переходе через границы $r = r_i$, из формул (2.4), (2.5) получаем многослойное соотношение

$$\begin{bmatrix} V_1(r_1) \\ T_1(r_1) \end{bmatrix} = \kappa_i \begin{bmatrix} V_i(r_{i+1}) \\ T_i(r_{i+1}) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Из формулы (I.7) следует, что

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1(r_1) \\ T_1(r_1) \end{bmatrix} &= \kappa_i \begin{bmatrix} V_i(r_{i+1}) \\ T_i(r_{i+1}) \end{bmatrix} = \kappa_i \begin{bmatrix} V_{i+1}(r_{i+1}) \\ T_{i+1}(r_{i+1}) + f_n(r_{i+1}) \end{bmatrix} = \\ &= \kappa_i \begin{bmatrix} V_{i+1}(r_{i+1}) \\ T_{i+1}(r_{i+1}) \end{bmatrix} + \kappa_i \begin{bmatrix} 0 \\ f_n \end{bmatrix} = \kappa_k \begin{bmatrix} V_k(R) \\ T_k(R) \end{bmatrix} + \kappa_i \begin{bmatrix} 0 \\ f_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Граничные условия (I.3), (I.4) приводят (2.8) к виду

$$\begin{bmatrix} V_1(r_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \kappa_k \begin{bmatrix} V_k(R) \\ 0 \end{bmatrix} + \kappa_i \begin{bmatrix} 0 \\ f_n \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

откуда немедленно получаем смещения на поверхности

$$V_k(R) = - \frac{\kappa_{22}^i}{\kappa_{21}^k} f_n. \quad (2.10)$$

В этой формуле смещения являются функцией частоты. Проводя обратное преобразование Фурье и учитывая, что зависимость источника от времени мы представили δ -функцией Дирака, имеем

$$\tilde{V}_n(R, t) = - \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\kappa_{22}^i(\omega_{nl})}{\kappa_{21}^k(\omega_{nl})} f_n \sin(\omega_{nl} t), \quad (2.11)$$

предполагая, что заполняющая сферу среда находилась в покое при $t < 0$. Частоты ω_{nl} соответствуют нулям $\kappa_{21}^k(\omega)$, то есть собственным частотам модели. Индекс l является порядковым номером собственного значения ω для данного n в ряде векторных сферических функций. В настоящей работе не

рассматривается сходимость ряда (2.II), так как это является предметом самостоятельного исследования.

Итак, прежде чем воспользоваться формулой (2.II) нам необходимо вычислить собственные частоты ω_{nl} и амплитудный множитель $\frac{k_{22}^i}{k_{21}^i} f_n$, располагая численно заданной функцией $V_k(R)$.

3. Построение функций X_n и Z_n

В этом пункте мы остановимся на вопросах, связанных с получением линейно независимых решений уравнения (I.2). С этой целью предположим, что среда, заполняющая сферу S , может содержать слои, в которых μ и ρ равны некоторым постоянным μ_i и ρ_i , соответственно. В этом случае уравнение (I.2) упрощается и принимает вид

$$\frac{d^2 v_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv_n}{dr} + \left[\left(\frac{\omega}{v_i} \right)^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] v_n = 0, \quad (3.1)$$

где $v_i = \sqrt{\mu_i/\rho_i}$, i - номер слоя. Линейно независимыми решениями уравнения (3.I) являются функции

$$X_n(k_i r) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_i r)}{\sqrt{k_i r}}, \quad Z_n(k_i r) = \frac{N_{n+\frac{1}{2}}(k_i r)}{\sqrt{k_i r}}. \quad (3.2)$$

В этих формулах $k_i = \omega/v_i$, $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ - функция Бесселя первого рода полуцелого порядка, а функция $N_m(x)$ определяется с помощью равенства

$$N_m(x) = \frac{1}{\sin m\pi} [J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)],$$

где $x = k_i r$ и m не равно целому числу. В нашем случае $m = n + \frac{1}{2}$ и для $N_{n+\frac{1}{2}}(x)$ имеем формулу

$$N_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n J_{-n-\frac{1}{2}}(x),$$

откуда и из (3.2) следует, что

$$Z_n(k_1 r) = (-1)^n \frac{J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r)}{\sqrt{k_1 r}}. \quad (3.3)$$

Формулы (3.2) и (3.3) позволяют записать смещения \vec{U} (2.1) и напряжения \vec{T} (2.2) в более конкретном виде:

$$\vec{U}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \vec{A}_{nm}(\theta, \varphi) \left[C_{nm} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}} + D_{nm} \frac{J_{-n-\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}} \right], \quad (3.4)$$

$$\vec{T}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \vec{A}_{nm}(\theta, \varphi) \left\{ C_{nm} \frac{\mu_i k_i}{\sqrt{x}} \left[-\frac{dJ_{n+\frac{1}{2}}(x)}{dx} - \frac{3}{2} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{x} \right] + D_{nm} \frac{\mu_i k_i}{\sqrt{x}} \left[\frac{dJ_{-n-\frac{1}{2}}(x)}{dx} - \frac{3}{2} \frac{J_{-n-\frac{1}{2}}(x)}{x} \right] \right\}.$$

Множитель $(-1)^n$, фигурирующий в формуле (3.3), мы внесли в коэффициент D_{nm} . Что касается функций Бесселя $J_m(x)$, $m = n + \frac{1}{2}$ и их производных, то формулы, пригодные для применения в области больших x и любых $m > 0$, имеются в работах [4], [5]. Выражения для $J_{-m}(x)$ и $J'_{-m}(x)$ можно получить, используя результаты этих двух работ.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда μ и ρ яв-

ляются функциями координаты r на отрезке $[r_i, r_{i+1}]$. В данной ситуации не удастся получить явное решение уравнения (I.2). Поэтому здесь необходимо применять численные методы интегрирования, задаваясь некоторыми начальными значениями \bar{X}_n, \bar{Z}_n функций X_n, Z_n и их производных \bar{X}'_n, \bar{Z}'_n в точке $r = r_i$. При этом начальные значения функций и производных необходимо выбирать таким образом, чтобы матрица $V_i(r)$ из (2.4) не была вырожденной.

Запишем на границе $r = r_i$ формулу (2.4) в виде

$$\begin{bmatrix} V_i(r_i) \\ T_i(r_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i \\ D_i \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Отсюда получаем выражение для $\bar{X}_n, \bar{Z}_n, \bar{X}'_n, \bar{Z}'_n$:

$$\bar{X}_n = 1, \bar{Z}_n = 0, \bar{X}'_n = \frac{1}{r_i}, \bar{Z}'_n = \frac{1}{\mu(r_i)}, \quad (3.6)$$

Не рассматривая в данном пункте численного метода интегрирования уравнения (I.2) предположим, что на границе $r = r_{i+1}$ мы получили значения функций $X_n(r_{i+1}), Z_n(r_{i+1})$ и их производных. Это позволяет найти связь между значениями $V_i(r_i), T_i(r_i)$ и $V_i(r_{i+1}), T_i(r_{i+1})$ по формуле (2.7), в которой $V_1(r_1), T_1(r_1)$ заменяются на $V_i(r_i), T_i(r_i)$ и вместо n_i ставится β_i . Матрица β_i в этом случае имеет простой вид, а именно:

$$\beta_i = V_i^{-1}(r_{i+1}). \quad (3.7)$$

4. Интегрирование уравнения (I.2) при больших значениях параметра ω

Численное решение уравнений вида (I.2) при высоких частотах представляет известную трудность даже в том случае, когда параметры среды μ и ρ постоянны. В настоящей работе предлагается метод, который позволяет резко снизить количество

вычислений, необходимых для отыскания решения уравнения (1.2) в области больших значений параметра ω .

Пусть дано уравнение

$$\frac{d^2 v_n}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{2}{v} \frac{dv}{dr} \right) \frac{dv_n}{dr} + \left[\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{2}{v} \frac{dv}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] v_n = 0 \quad (4.1)$$

Здесь $v(r) = \sqrt{\mu(r)/\rho(r)}$, $r \in [r_1, r_{i+1}]$. Положим

$$v_n = zu, \quad (4.2)$$

где $u = \frac{r_1}{r} \sqrt{\frac{\rho(r_1)}{\rho(r)} \frac{v(r_1)}{v(r)}}$. Тогда для функции z получаем уравнение

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + g(r)z = 0, \quad (4.3)$$

причем $g(r)$ имеет вид:

$$g(r) = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{n(n+1)}{r^2} + \frac{1}{4\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 - \frac{1}{\rho v} \frac{d\rho}{dr} \frac{dv}{dr} - \frac{1}{2\rho} \frac{d^2 \rho}{dr^2} - \frac{1}{v} \frac{d^2 v}{dr^2} - \frac{2}{r\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{4}{rv} \frac{dv}{dr}. \quad (4.4)$$

Выберем частоту ω такой, чтобы выполнялось условие $g(r) > 0$ равномерно по r . Тогда возможна замена [6] вида

$$z \sqrt{g} = P(r) \sin \vartheta(r), \quad (4.5)$$

$$\frac{dz}{dr} = P(r) \cos \vartheta(r).$$

Для функций $\vartheta(r)$ и $P(r)$ в результате такой замены имеем уравнения

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \sqrt{g(r)} + \frac{1}{4} \frac{dg}{dr} \frac{\sin 2\vartheta(r)}{g(r)}, \quad (4.6)$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{P(r)}{2} \frac{dg}{dr} \frac{\sin^2 \vartheta(r)}{g(r)}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение функций $\sqrt{g(r)}$ и $\frac{1}{g} \frac{dg}{dr}$ при возрастании ω . Функция \sqrt{g} приближается к $\frac{\omega}{v(r)}$, а отношение $\frac{1}{g} \frac{dg}{dr}$ становится близким к $\frac{2}{v} \frac{dv}{dr}$, если только $\frac{dv}{dr} \neq 0$. Таким образом, переменный множитель перед $\frac{dr}{dr} \sin 2\vartheta(r)$ в правой части первого из уравнений системы (4.6) имеет при больших ω тот же порядок, что и $\frac{1}{2v} \frac{dv}{dr}$.

Остановимся теперь на способе численного решения системы (4.6). Полагая $\vartheta(r) = 2\vartheta(r)$, первое из уравнений запишем в виде

$$\frac{d\vartheta}{dr} = 2 \sqrt{g} + \frac{1}{2g} \frac{dg}{dr} \sin \vartheta(r). \quad (4.7)$$

Одновременно с уравнением (4.7) рассмотрим более простое обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vartheta_0}{dr} = 2 \sqrt{g(r)}. \quad (4.8)$$

Трудности, возникающие при численном интегрировании этого уравнения в области больших значений параметра ω , целиком определяются поведением функции $v(r)$. В качестве начального данного $\vartheta_0(r_1)$ используем значение $\vartheta(r_1) = 2\vartheta(r_1)$. Вопрос получения $\vartheta(r_1)$ рассмотрен ниже.

Представим теперь решение $\vartheta(r)$ в виде

$$\vartheta(r) = \vartheta_0(r) + \alpha(r). \quad (4.9)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $\alpha(r_1) = 0$. Подставляя выражение (4.9) в уравнение (4.7), имеем:

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{1}{2g} \frac{dg}{dr} \sin(\vartheta_0 + \alpha). \quad (4.10)$$

Рассмотрим поведение решения $\theta(r)$ при высоких частотах. Для этой цели обратимся к уравнению (4.7), которое определяет производную $\frac{d\theta}{dr}$. Вспоминая наши рассуждения относительно поведения функций $\sqrt{g(r)}$ и $\frac{1}{g} \frac{dg}{dr}$ при возрастании частоты, видим, что при больших значениях ω производная $\frac{d\theta}{dr} > 0$ для всех $r \in [r_i, r_{i+1}]$, то есть функция $\theta(r)$ монотонно возрастает с увеличением r . Это обстоятельство позволяет переписать соотношение (4.9) в виде

$$\theta = \theta_0(\theta) + \alpha(\theta) \quad (4.11)$$

и сделать замену переменной интегрирования в уравнении (4.10), в результате чего получаем

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{1}{2g} \frac{dg}{d\theta} \sin \theta, \quad (4.12)$$

причем r в этом уравнении рассматривается как функция θ , то есть $r=r(\theta)$. Проинтегрируем уравнение (4.12) в пределах от $\theta(r_i)$ до некоторого значения θ . Тогда

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\theta(r_i)}^{\theta} \frac{d}{d\theta} \ln(g/g_0) \sin p d\theta, \quad (4.13)$$

поскольку $\alpha(\theta(r_i)) = 0$. В этой формуле $g_0 = g(r_i)$ — постоянное значение, а переменная интегрирования p имеет тот же смысл, что и θ в уравнении (4.12).

Применяя интегрирование по частям к интегралу в правой части уравнения (4.13), получаем следующее соотношение:

$$\alpha(\theta) = -\frac{1}{2} \frac{df}{dp} \cos p \Big|_{\theta(r_i)}^{\theta} + \frac{1}{2} \int_{\theta(r_i)}^{\theta} \frac{d^2 f}{dp^2} \cos p d\theta, \quad (4.14)$$

где $f(r(p)) = \ln[g(r(p))/g_0]$. Производные $\frac{d^k f}{dp^k}$ ($k=1,2$)

можно выразить через производные по r от функций f и θ . В частности,

$$\frac{df}{dp} = \frac{df}{dr} \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^{-1},$$

$$\frac{d^2 f}{dp^2} = \left[\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{df}{dr} \frac{d^2 \theta}{dr^2} \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^{-1} \right] \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^{-2}. \quad (4.15)$$

Что же касается производных $\frac{d^k \theta}{dr^k}$, то их можно найти, дифференцируя по r уравнение (4.7). Применяя обозначение $v_k = \frac{d^k \theta}{dr^k}$, имеем:

$$v_1 = 2\sqrt{g} + \frac{1}{2} \frac{df}{dr} \sin \theta, \quad (4.16)$$

$$v_2 = \sqrt{g} \frac{df}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dr^2} \sin \theta + \frac{v_1}{2} \frac{df}{dr} \cos \theta.$$

В этих терминах формулы (4.15) можно записать в более наглядном виде:

$$\frac{df}{dp} = \frac{1}{v_1} \frac{df}{dr}, \quad \frac{d^2 f}{dp^2} = \left[v_1 \frac{d^2 f}{dr^2} - v_2 \frac{df}{dr} \right] \frac{1}{v_1^3}. \quad (4.17)$$

Запишем также производные $\eta_k = \frac{d^k f}{dr^k}$ функции $f = \ln[g(r)/g_0]$

до третьего порядка включительно. Производная $\frac{d^3 f}{dr^3}$ понадо-

бится нам в дальнейшем.

$$\eta_1 = \frac{1}{g} \frac{dg}{dr}, \quad \eta_2 = \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dr^2} - \eta_1^2,$$

$$\eta_3 = \frac{1}{g} \frac{d^3 g}{dr^3} - \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dr^2} \eta_1 - 2\eta_2 \eta_1. \quad (4.18)$$

Вернемся теперь к рассмотрению уравнения (4.14). Используя формулы (4.16) и (4.17), его можно записать более подробно, а именно:

$$\begin{aligned} \alpha(\theta) = & -\frac{1}{2v_1} \eta_1 \cos p \left| \theta \right. + \frac{1}{2} \int_{\theta(r_i)}^{\theta} \frac{\eta_2}{v_1^2} \cos p dr - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\theta(r_i)}^{\theta} \frac{\sqrt{g} \eta_1^2}{v_1^3} \cos p dr - \frac{1}{4} \int_{\theta(r_i)}^{\theta} \frac{\eta_2 \eta_1}{v_1^3} \sin p \cos p dr - \\ & - \frac{1}{4} \int_{\theta(r_i)}^{\theta} \frac{\eta_1^2}{v_1^2} \cos^2 p dr, \end{aligned} \quad (4.19)$$

причем переменная θ в формулах, определяющих v_k , заменяется на p . Производные по переменной r функций f и θ , фигурирующие в подынтегральных выражениях формулы (4.19), содержат параметр ω , который, по предположению, принимает большие значения. В то же время нетрудно видеть, что ω содержится в знаменателях подынтегральных выражений. Поэтому представляется естественным вычисление интегралов проводить таким образом, чтобы в результате получить их главные части, содержащие величины $(1/\omega)^k$ до некоторого порядка k включительно, плюс остаток, имеющий порядок $k+1$ отношения $1/\omega$. Не останавливаясь на довольно громоздких, но не представляющих принципиальных трудностей выкладках, запишем окончательное выражение для функции $\alpha(\theta)$, содержащее члены третьего порядка малости относительно величины $1/\omega$:

$$\alpha(\theta) = -\frac{1}{16} \int_{r_i}^{r(\theta)} \frac{\eta_1^2}{\sqrt{g}} dr + \frac{3}{1024} \int_{r_i}^{r(\theta)} \frac{\eta_1^4}{g^{3/2}} dr - \frac{1}{64} \int_{r_i}^{r(\theta)} \frac{\eta_2^2}{g^{3/2}} dr +$$

$$\alpha = \Psi(r) + \varphi(\theta).$$

Условия, при которых возможно исключение членов четвертого порядка малости, рассмотрены ниже. Заметим теперь, что $\theta = \theta_0 + \alpha$ и, следовательно, предыдущее уравнение можно представить в следующей форме:

$$\alpha = \Psi(r) + \varphi(\theta_0 + \alpha). \quad (4.21)$$

Последнее соотношение имеет смысл рассматривать при постоянном значении r в качестве уравнения для определения α . Полагая $r = r_{i+1}$ можно, таким образом, отыскать корень $\alpha(r_{i+1})$, используя для этой цели итерационный метод Ньютона. Итерации проводятся по схеме

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{\alpha_j - \Psi(r_{i+1}) - \varphi(\theta_0 + \alpha_j)}{1 - \varphi'(\theta_0 + \alpha_j)}. \quad (4.22)$$

Начальное приближение α_0 полагается равным нулю. Легко видеть, что в вещественной области корень α всегда существует и он единственный. После того как корень уравнения (4.21) определен с требуемой точностью, приближенное значение $\theta(r_{i+1})$ уравнения (4.7) найдем по формуле (4.9), а затем вычислим $\vartheta = \theta/2$.

Обратимся теперь ко второму уравнению системы (4.6). Выбирая, как и в предыдущем случае, в качестве переменной интегрирования $q = \vartheta$, имеем:

$$\begin{aligned} P &= \bar{P} \exp \left[\frac{1}{2} \int_{\vartheta(r_i)}^{\vartheta} \frac{df}{\vartheta(r_i)} \sin^2 q \, dq \right] = \\ &= \bar{P} \exp \left\{ \frac{1}{4} \left[f(p) - \frac{df}{dp} \sin p \right] \right\} \Bigg|_{\vartheta(r_i)}^{\vartheta} + \frac{1}{4} \int_{\vartheta(r_i)}^{\vartheta} \frac{d^2 f}{dp^2} \sin p \, dp, \end{aligned}$$

$$\alpha = \Psi(r) + \varphi(\theta).$$

Условия, при которых возможно исключение членов четвертого порядка малости, рассмотрены ниже. Заметим теперь, что $\theta = \theta_0 + \alpha$ и, следовательно, предыдущее уравнение можно представить в следующей форме:

$$\alpha = \Psi(r) + \varphi(\theta_0 + \alpha). \quad (4.21)$$

Последнее соотношение имеет смысл рассматривать при постоянном значении r в качестве уравнения для определения α . Полагая $r = r_{i+1}$ можно, таким образом, отыскать корень $\alpha(r_{i+1})$, используя для этой цели итерационный метод Ньютона. Итерации проводятся по схеме

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{\alpha_j - \Psi(r_{i+1}) - \varphi(\theta_0 + \alpha_j)}{1 - \varphi'(\theta_0 + \alpha_j)}. \quad (4.22)$$

Начальное приближение α_0 полагается равным нулю. Легко видеть, что в вещественной области корень α всегда существует и он единственный. После того как корень уравнения (4.21) определен с требуемой точностью, приближенное значение $\theta(r_{i+1})$ уравнения (4.7) найдем по формуле (4.9), а затем вычислим $\theta = \theta/2$.

Обратимся теперь ко второму уравнению системы (4.6). Выбирая, как и в предыдущем случае, в качестве переменной интегрирования $q = \theta$, имеем:

$$P = \bar{P} \exp \left[\frac{1}{2} \int_{\theta(r_i)}^{\theta} \frac{df}{\vartheta(r_i)} \sin^2 q \, dq \right] =$$

$$= \bar{P} \exp \left\{ \frac{1}{4} \left[f(p) - \frac{df}{dp} \sin p \right] \right\} \Bigg|_{\theta(r_i)}^{\theta} + \frac{1}{4} \int_{\theta(r_i)}^{\theta} \frac{d^2 f}{dp^2} \sin p \, dp,$$

где $\bar{P} = P(r_i)$. Рассмотрим интеграл, фигурирующий во второй части предыдущей формулы. Обозначая его через $N(\theta)$ и используя представление $\frac{d^2 f}{dp^2}$, определяемое формулами (4.16) и (4.17), получаем:

$$N(\theta) = \int_{\theta(r_i)}^{\theta} \frac{\sqrt{g} \eta_1^2}{v_1^3} \sin p dp - \int_{\theta(r_i)}^{\theta} \frac{\eta_2}{v_1^2} \sin p dp + \quad (4.23)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\theta(r_i)}^{\theta} \frac{\eta_2 \eta_1}{v_1^3} \sin^2 p dp + \frac{1}{2} \int_{\theta(r_i)}^{\theta} \frac{\eta_1^2}{v_1^2} \sin p \cos p dp.$$

Принимая во внимание приведенные выше рассуждения относительно интегралов формулы (4.19), видим, что они справедливы и в данном случае. Поэтому для $N(\theta)$ можно применить тот же способ вычисления и получить следующее выражение:

$$N(\theta) = \left[\frac{\eta_2}{v_1^2} \cos p + \frac{2}{32} \frac{\eta_1^2}{g} - \frac{\sqrt{g} \eta_1^2}{v_1^3} \cos p - \frac{1}{8} \frac{\eta_1^2}{v_1^2} \cos 2p - \right. \\ \left. - \frac{\eta_2}{v_1^3} \sin p + 2 \frac{\eta_2 \eta_1}{v_1^3} \sin p + \frac{1}{4} \frac{\eta_2 \eta_1}{v_1^3} \sin 2p - \frac{2}{8} \frac{\eta_1^3}{v_1^3} \sin p - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{\eta_1^3}{v_1^3} \sin 2p + \frac{1}{12} \frac{\eta_1^3}{v_1^3} \sin^3 p \right] \Big|_{\theta(r_i)}^{\theta} + o\left(\frac{1}{\omega^4}\right).$$

Отбрасывая члены четвертого порядка малости, окончательно для P имеем формулу

$$P = \bar{P} \exp \left\{ \frac{1}{4} \left[f(p) - \frac{\eta_1}{v_1} \sin p \right] \right\} \Bigg|_{\theta(r_1)}^{\theta} + \frac{1}{4} N(\theta). \quad (4.24)$$

Остановимся теперь на вопросе, касающемся области применимости формул (4.20) и (4.24). Точную оценку погрешности этих формул можно получить, если применить описанный выше способ вычисления интегралов, фигурирующих в формулах (4.19), (4.23), и продолжить вычисления с тем, чтобы выделить члены четвертого порядка малости относительно величины $1/\omega$. Однако такая оценка мало пригодна для практического использования, поскольку она представляет собой довольно громоздкую комбинацию функции g , производных функции f и тригонометрических функций. Заметим, здесь же, что дифференцирование по r функции f влечет за собой дифференцирование по этой же переменной функций $v(r)$ и $\rho(r)$. Более точно можно сказать, что дифференцируя k раз функцию f , мы тем самым $k+2$ раза дифференцируем $v(r)$ и $\rho(r)$. Получение точной оценки потребует вычисления четвертой производной функции f . Отсюда вытекает, что необходимо потребовать непрерывности шестых производных v и ρ .

Рассмотрим формулы (4.20) и (4.24) со следующей точки зрения. Нетрудно видеть, что множители, стоящие перед тригонометрическими функциями в правых частях формул (4.20) и (4.24), а также остальные слагаемые этих разложений сами могут быть разложены в ряды по целым степеням $1/\omega$. Поскольку в общем разложении учтены члены лишь третьего порядка малости относительно величины $1/\omega$, то мы вправе в получаемых рядах не рассматривать члены с оценкой $O\left(\frac{1}{\omega^4}\right)$. Правомерность такого подхода к анализу формул (4.20) и (4.24) заключается еще и в том, что как и в общем разложении, так и в рядах, представляющих отдельные слагаемые этого разложения, производные $v^{(k)}$ и $\rho^{(k)}$ функций v и ρ впервые появляются в коэффициентах перед степенями отношения $1/\omega$ только тогда, когда показатель степени равен порядку производной. Это озна-

зает, что из формул (4.20) и (4.24) можно исключить фигурирующие в η_2 и η_3 четвертые и пятые производные функций v и ρ , поскольку они входят в числители слагаемых, убывающих при фиксированном r как в четвертая и пятая степени величины $1/\omega$ с увеличением ω , соответственно. В настоящей работе этого не сделано лишь по той причине, чтобы не удлинять формулы (4.20) и (4.24) и сохранить их общий вид. Однако при проведении практических вычислений по вышеуказанным формулам нет необходимости вычислять η_2 и η_3 полностью. Достаточно ограничиться лишь теми слагаемыми этих величин, которые не содержат $1/\omega$, то есть главными членами, и подставить их вместо η_2 и η_3 .

Если учесть все сказанное выше относительно структуры формул (4.20), (4.24) и потребовать малости тех членов, которые допускают оценку $O(\frac{1}{\omega^3})$, то можно убедиться, что для ω должно выполняться условие

$$\omega \gg \sqrt[3]{\gamma},$$

$$\gamma = \max \{ C_1 [v_{\max}^{(1)}]^4 t_i, C_2 [v_{\max}^{(2)}]^2 v_{\max} (r_{i+1} - r_i), C_3 v_{\max}^{(3)} v_{\max}^2 \},$$

$$C_4 \frac{v_{\max}^3}{\rho_{\min}^3} [\rho_{\max}^{(1)}]^3, C_5 \frac{v_{\max}^3}{\rho_{\min}^2} \rho_{\max}^{(2)} \rho_{\max}^{(1)},$$

$$C_6 \frac{v_{\max}^3}{\rho_{\min}} \rho_{\max}^{(3)},$$

где C_m , $m = 1, 2, \dots, 6$ - положительные константы, не превосходящие единицы, $v_{\max}^{(k)}$, $\rho_{\max}^{(k)}$, $k=1, \dots, 3$, - максимальные значения скорости и абсолютных величин производных скорости и плотности на отрезке $[r_i, r_{i+1}]$, ρ_{\min} - мини-

мальное значение плотности на этом же отрезке, t_i — время, за которое волна распространяется вдоль радиуса сферы от нижней границы $r = r_i$ до верхней границы $r = r_{i+1}$ слоя с номером i . Недостатком полученной оценки является то, что она не учитывает особенностей поведения старших производных v и ρ , содержащихся в отбрасываемых членах формул (4.20) и (4.24). Однако для большинства моделей Земли, используемых, например, в задачах геофизики, справедлив тот факт, что поведение физических характеристик v и ρ конкретной модели описывается полиномами невысоких степеней. При этом, как правило, коэффициенты полиномов, представляющих v и ρ , убывают по абсолютной величине. В этом случае условие, полученное выше, справедливо.

Рассмотрим теперь вопрос о задании начальных значений, необходимых для интегрирования системы (4.6). Нам следует задать две пары начальных данных для функций ϑ_1 и P_1 ($1=1,2$) на внутренней границе $r = r_i$ слоя с номером i , выбираемых таким образом, чтобы получить два линейно независимых решения X_n и Z_n . Обозначим посредством $\bar{\vartheta}_1, \bar{P}_1$ пары чисел, являющиеся начальными значениями решений ϑ_1, P_1 системы (4.6). Пусть z_1, z_2 — линейно независимые решения уравнения (4.3). Тогда

$$X_n = z_1 u, \quad Z_n = z_2 u, \quad (4.25)$$

где функция u определяется равенством (4.2). В соответствии с первой формулой (4.5) и с учетом (4.2) имеем

$$X_n = P_1(r) \cdot \frac{\sin \vartheta_1(r)}{\sqrt{g(r)}} \frac{r_i}{r} \sqrt{\frac{\rho(r_i)}{\rho(r)}} \frac{v(r_i)}{v(r)}, \quad (4.26)$$

$$Z_n = P_2(r) \frac{\sin \vartheta_2(r)}{\sqrt{g(r)}} \frac{r_i}{r} \sqrt{\frac{\rho(r_i)}{\rho(r)}} \frac{v(r_i)}{v(r)}.$$

Применяя обозначение T_1, T_2 для элементов второй строки матрицы $V_1(r)$ из формул (2.3), (2.4) и используя (4.5), аналогично получаем

$$T_1 = \mu P_1(r) \frac{r_i}{r} \sqrt{\frac{\rho(r_i)}{\rho(r)} \frac{v(r_i)}{v(r)}} \left[\cos \vartheta_1(r) - \frac{\frac{2}{r} + \frac{1}{2\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dr}}{\sqrt{g(r)}} \sin \vartheta_1(r) \right]. \quad (4.27)$$

Положим теперь в (4.26) и (4.27) $r = r_i$ и воспользуемся соотношением (3.5). Тогда

$$\bar{\vartheta}_1 = \operatorname{arccctg} \left[\frac{\frac{2}{r_i} + \frac{1}{2} \frac{\rho'(r_i)}{\rho(r_i)} + \frac{v'(r_i)}{v(r_i)}}{\sqrt{g(r_i)}} \right], \quad \bar{P}_1 = \frac{\sqrt{g(r_i)}}{\sin \bar{\vartheta}_1}, \quad (4.28)$$

$$\bar{\vartheta}_2 = 0,$$

$$\bar{P}_2 = \frac{1}{\mu(r_i)}.$$

В заключение этого пункта рассмотрим алгоритм построения X_n и Z_n . По формулам (4.28) находим начальные значения $\bar{\vartheta}_1$ на границе $r=r_i$. Полагая $\vartheta_0^{(1)}(r_i) = 2\bar{\vartheta}_1$ и интегрируя уравнение (4.8) методом Рунге-Кутты, находим решения $\vartheta_0^{(1)}(r_{i+1})$. Затем по схеме (4.22) производим M итерационных уточнений, результатом которых являются добавки $\alpha^{(1)}(r_{i+1}) \approx \alpha_M^{(1)}(r_{i+1})$, где M - число итераций, определяемое требуемой нам точностью получения решений $\vartheta^{(1)}(r) = \vartheta_0^{(1)}(r) + \alpha^{(1)}(r)$ при $r = r_{i+1}$. Используя решения $\vartheta^{(1)}(r_{i+1})$, вычисляем значения функций $P_1(r_{i+1})$ по формуле (4.24) с начальными данными

(4.28). На следующем этапе определяем $X_n(r_{i+1})$, $Z_n(r_{i+1})$ и $T_1(r_{i+1})$, $T_2(r_{i+1})$ используя, соответственно, соотношения (4.26) и (4.27). Это позволяет построить матрицу $B_i(r_{i+1})$ из (2.4), а следовательно, и матрицу перехода β_i , которая, как и в разделе 3, определяется формулой (3.7).

5. Определение частот и амплитуд собственных колебаний

Смещения на поверхности $r = R$ в зависимости от частоты ω определяются формулой (2.10). Рельеф функции V_k приводится на рисунке I.

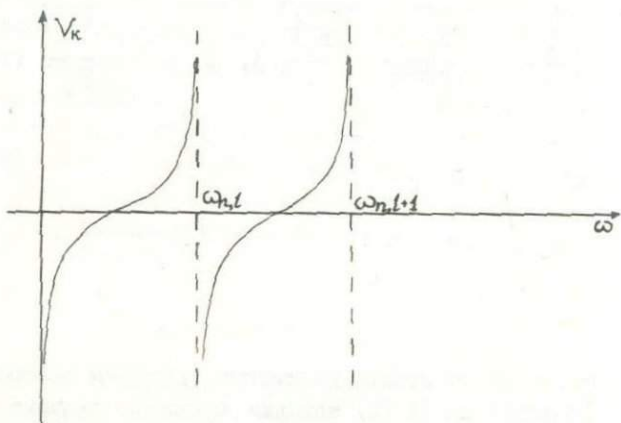


Рис. I

Из этого рисунка видно, что нули функции V_k чередуются с полюсами в точках ω_{n1} . Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы определить значения ω_{n1} , зная заданную дискретно с некоторым шагом $\delta\omega$ функцию V_k .

Пусть в точках ω_j ($j=0, 1, \dots, K$) известны значения $V_k(\omega_j)$. Прежде всего необходимо определить точки ω_p и ω_{p+1} , такие (рисунок 2), что между ними находится полюс функции V_k . Случай, когда полюс попадает в одну из точек ω_j , мы здесь не рассматриваем, так как для этого достаточно

убедиться, что знаменатель $n_{21}^k(\omega_j)$ из формулы (2.10) равен нулю.

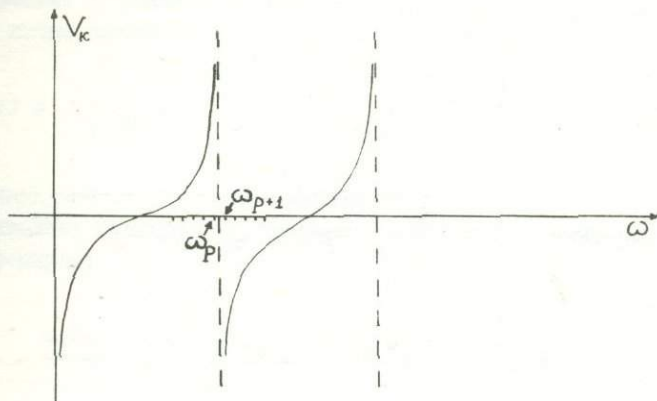


Рис.2

Точки ω_p и ω_{p+1} определяем по следующему алгоритму. Вначале делается проверка совпадения знаков $V_k(\omega_p)$ и $V_k(\omega_{p+1})$. Если

$$\text{sign } V_k(\omega_p) \neq \text{sign } V_k(\omega_{p+1}), \quad (5.1)$$

то проверяется выполнение еще двух условий вида

$$|V_k(\omega_{p-1})| < |V_k(\omega_p)|, |V_k(\omega_{p+1})| > |V_k(\omega_{p+2})|. \quad (5.2)$$

При одновременном выполнении неравенств (5.1) и (5.2) считаем, что между ω_p и ω_{p+1} находится полюс функции $V_k(\omega)$. Введем новую функцию $\tau_k(\omega)$ по формуле

$$\tau_k(\omega) = \frac{1}{V_k(\omega)}. \quad (5.3)$$

Функция $\tau_k(\omega)$ обладает тем свойством, что ее нули (рисунок 3) находятся в полюсах функции $V_k(\omega)$.

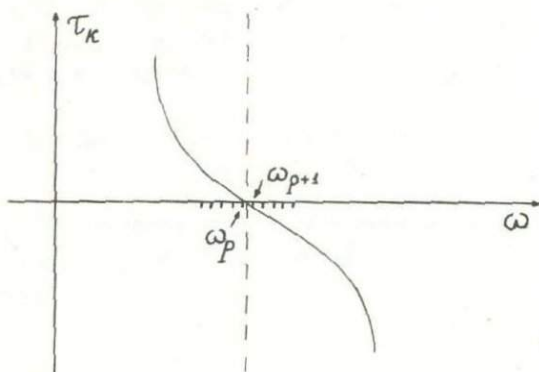


Рис. 3

Это обстоятельство позволяет искать вместо полюса функции V_k нуль функции τ_k . Для этой цели воспользуемся сплайнами [7]. Аппроксимируя функцию τ_k сплайнами на отрезке $[\omega_{p-1}, \omega_{p+2}]$, находим затем корень полинома

$$f_p(\omega) = \sum_{l=0}^3 a_{pl}(\omega - \omega_p)^l, \quad \omega \in [\omega_p, \omega_{p+1}], \quad (5.4)$$

который по условию находится между точками ω_p и ω_{p+1} .

Первые производные функции τ_k , являющиеся крайними условиями, которые необходимы для получения коэффициентов a_{pl} ($l = 0, 1, \dots, 3$), вычисляются в точках $\omega_{p-1}, \omega_{p+2}$ с использованием конечно-разностных формул

$$\tau_k'(\omega_{p-1}) = \frac{\tau_k(\omega_p) - \tau_k(\omega_{p-2})}{2\delta\omega} + O(\delta\omega^2), \quad (5.5)$$

$$\tau_k'(\omega_{p+2}) = \frac{\tau_k(\omega_{p+3}) - \tau_k(\omega_{p+1})}{2\delta\omega} + O(\delta\omega^2).$$

Можно считать, что приближенно корень полинома $f_p(\omega)$ является корнем ω_{nl} функции $\tau_k(\omega)$. Зададим теперь в качестве краевых условий $\tau_k'(\omega)$ в точках ω_{p-1} , ω_{p+2} и построим новые полиномы

$$F_p(\omega) = \sum_{l=0}^3 b_{pl}(\omega - \omega_p)^l, \quad \omega \in [\omega_p, \omega_{p+1}], \quad (5.6)$$

аппроксимирующие $\tau_k(\omega)$ на отрезке $[\omega_{p-1}, \omega_{p+2}]$. Вторые производные функции τ_k задаем, используя конечно-разностные формулы:

$$\tau_k''(\omega_{p-1}) = \frac{\tau_k(\omega_{p-2}) - 2\tau_k(\omega_{p-1}) + \tau_k(\omega_p)}{\delta\omega^2} + O(\delta\omega^2),$$

$$\tau_k''(\omega_{p+2}) = \frac{\tau_k(\omega_{p+1}) - 2\tau_k(\omega_{p+2}) + \tau_k(\omega_{p+3})}{\delta\omega^2} + O(\delta\omega^2). \quad (5.7)$$

Обозначим посредством $A_{kl}(\omega_{nl})$ отношение $\frac{\kappa_{22}^1(\omega_{nl})}{\kappa_{21}^k(\omega_{nl})}$,

входящее в формулу (2.11). Тогда для вычисления амплитуды можно использовать формулу

$$A_{ki}(\omega_{nl}) = \frac{1}{F_p'(\omega_{nl})}. \quad (5.8)$$

6. Результаты численного эксперимента

В этом разделе приводятся сравнительные таблицы амплитуд и собственных частот крутильных колебаний, вычисленные двумя различными методами. Расчеты проведены для двух значений

$n = 1,6$ из ряда сферических функций. Параметр ω изменялся от 1 до 1.1 с шагом $\delta\omega = 0.0001$. В качестве исследуемой модели было рассмотрено двухслойное сферическое кольцо. В первом слое скорость v и плотность ρ постоянны, а во втором изменяются по линейному закону. Данные о модели приведены в таблице I.

Т а б л и ц а I

Радиус, км	Скорость, км/сек	Плотность г/см ³
3000	6,0	6,0
5900	6,0	6,0
5900	5,0	5,0
6000	4,0	4,0

Из таблицы I видно, что мощности слоев сильно различаются. Это сделано из тех соображений, что в слое с постоянными v и ρ решение отыскивается более просто, и поэтому его мощность значительно больше мощности неоднородного слоя. Расчет методом Рунге-Кутты требует значительного количества времени на получение решения и существенное увеличение мощности второго слоя сделало бы практически невозможным сравнение результатов. Исходя из этих же соображений мы рассматриваем довольно низкие частоты. Однако метод, предлагаемый в данной статье, дает удовлетворительное решение уже при $\omega \approx 1$ для рассматриваемых градиентов v и ρ .

Таблицы 2,3 содержат результаты численного эксперимента. Множитель f_n , $n = 1,6$, фигурирующий в формуле (2.10), положен равным единице. Источник напряжений располагался при радиусе $r = R$. Таблицы 2,3 отвечают, соответственно, $n = 1,6$.

Заметим, что для того чтобы получить истинные значения амплитуды, соответствующие $f_n = 1$, необходимо числа, стоящие в четных столбцах таблиц 2 и 3, разделить на 1000. Шаг интегрирования h уравнения (4.8) при вычислении таблиц полагался равным 10 км. При интегрировании же уравнения (4.1) $h = 0.125$ км.

Т а б л и ц а 2

Метод Рунге-Кутта		Асимптотический метод	
Частота ω	Амплитуда	Частота ω	Амплитуда
I.000495920	-0.09I3369	I.000495922	-0.09I3360
I.006778274	-0.0956729	I.006778278	-0.0956725
I.0I3046854	-0.I0I9346	I.0I3046857	-0.I0I9347
I.0I9296883	-0.II0I770	I.0I9296886	-0.II0I753
I.025523528	-0.I203002	I.025523529	-0.I203004
I.03I722435	-0.I3I8937	I.03I722436	-0.I3I8940
I.03789079I	-0.I440008	I.037890795	-0.I440000
I.044028875	-0.I549865	I.044028875	-0.I549868
I.050I4I6II	-0.I627296	I.050I4I6II	-0.I62730I
I.056239I83	-0.I652898	I.056239I83	-0.I652895
I.062335528	-0.I6I8366	I.062335526	-0.I6I837I
I.068444903	-0.I53I349	I.06844490I	-0.I53I353
I.074578280	-0.I4II203	I.074578279	-0.I4II207
I.08074I478	-0.I279688	I.08074I473	-0.I279690
I.086935435	-0.II53682	I.086935429	-0.II53683
I.093I57733	-0.I042999	I.093I57730	-0.I043000
I.099404I98	-0.095I7I8	I.099404I96	-0.095I706

Т а б л и ц а 3

Метод Рунге-Кутта		Асимптотический метод	
Частота ω	Амплитуда	Частота ω	Амплитуда
I.000535622	-0.091348I	I.000535622	-0.0913479
I.006817678	-0.0956926	I.006817678	-0.0956926
I.013085936	-0.1019638	I.013085940	-0.101963I
I.019335634	-0.1102117	I.019335636	-0.1102117
I.025561925	-0.1203439	I.025561930	-0.1203439
I.031760473	-0.1319413	I.031760478	-0.1319414
I.037928475	-0.1440453	I.037928476	-0.1440455
I.044066209	-0.1550220	I.044066213	-0.1550223
I.050178640	-0.1627459	I.050178642	-0.1627463
I.056275964	-0.1652809	I.056275966	-0.1652805
I.062372126	-0.1618030	I.062372127	-0.1618034
I.068481375	-0.1530834	I.068481375	-0.1530839
I.074614667	-0.1410614	I.074614663	-0.1410611
I.080777780	-0.1279094	I.080777779	-0.1279097
I.086971654	-0.1153146	I.086971653	-0.1153148
I.093193858	-0.1042540	I.093193856	-0.1042547
I.099440208	-0.0951342	I.099440204	-0.0951342

Суммарное время счета, потраченное на расчет таблиц 2,3 методом Рунге-Кутта на ЭВМ БЭСМ-6, составляет 20 минут, тогда как асимптотический метод требует примерно в 40 раз меньше времени. Здесь же укажем, что при отыскании корня уравнения (4.21) требуемая точность достигалась уже после двух итераций по схеме (4.22).

Из сравнения результатов, приведенных в таблицах, видно, что собственные частоты определяются точнее амплитуд. Этот факт не является неожиданным, так как при аппроксимации сплайнами функции $\tau_k(\omega)$, определяемой формулой (5.3), сама функция приближается точнее, чем ее производная, которая фигурирует в соотношении (5.8), определяющем амплитуду.

В заключение автор выражает благодарность А.С.Алексееву, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд замечаний, а также В.Г.Романову за полезное обсуждение работы.

Л и т е р а т у р а

1. ЛЯВ А. Математическая теория упругости. М.-Л., ОНТИ, НКТП, 1935.
2. ЛЕВШИН А.Л., ЯНСОН Э.А. Поверхностные волны в вертикально и радиально неоднородных средах. - В сб.: Алгоритмы интерпретации сейсмических данных. М., "Наука", 1971, с.147-177.
3. ГИЛЬБЕРТ Ф., МАК-ДОНАЛД Г. Собственные колебания Земли. I. Крутильные колебания. - В сб.: Собственные колебания. М., "Мир", 1964, с.178-221.
4. АДАМЧИК Ю.А. Расчет собственных частот крутильных колебаний для одного класса моделей Земли. - В сб.: Математические проблемы геофизики. Вып.3, Новосибирск, 1972, с.229-249.
5. ВАТСОН Г.Н. Теория Бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
6. КАМКЕ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 4-ое изд. М., "Наука", 1971.
7. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование функций одной и двух переменных кусочно-полиномиальными функциями. - В сб.: Математические проблемы геофизики. Вып. I, Новосибирск, 1969, с.125-141.

Ю.Е.Аниконов, Н.Б.Пивоварова

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ СКОРОСТИ,
КООРДИНАТ ОЧАГОВ И ВРЕМЕН НАЧАЛА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Целью нижеприведенного численного исследования является выяснение возможности одновременного определения координат очагов землетрясений, времени их начала и скорости распространения сейсмических волн по сейсмическим данным - временам регистрации землетрясений на сеймостанциях.

Ввиду сложности задачи численный эксперимент был проведен в рамках простой модели среды, а именно, предполагалось, что скорость является линейной функцией от глубины. Такое представление скорости, по нашему мнению, представляется целесообразным, так как при этом хорошо выявляются основные особенности алгоритма; они могут служить наводящими соображениями в более общем случае.

Алгоритм основан на минимизации некоторой функции координат очага и времени начала возмущения при фиксированной линейной модели среды. Затем производится перебор по параметрам среды с таким расчетом, чтобы невязка была наименьшей.

I. Сначала приведем некоторые формулы, нужные нам в дальнейшем. Пусть (x, y, z) - декартовы координаты и $v = v_0 + v_1 \cdot (z - z_0)$ - линейная функция, которую мы интерпретируем как скорость.

Обозначим через γ луч, соединяющий пару точек $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$. Положим

$$\hat{t}(v_0, v_1, x_0, y_0, z_0, x, y, z) = \int_{\gamma} \frac{ds}{v},$$

где ds — элемент длины γ , а интегрирование ведется от точки M_0 до точки M . Так как функция v линейная, то \hat{t} вычисляется в явном виде:

$$\hat{t} = \begin{cases} \frac{1}{v_1} \ln \frac{(1 + \sqrt{1-p^2 \cdot v_0^2}) \cdot (1 + \sqrt{1-p^2 \cdot v^2})}{v_0 \cdot p^2 \cdot v}, & \text{если } v_1 \neq 0 \\ & z > \bar{z}, \\ \frac{1}{v_1} \ln \frac{v \cdot (1 + \sqrt{1-p^2 \cdot v^2})}{v_0 \cdot (1 + \sqrt{1-p^2 \cdot v_0^2})}, & \text{если } v_1 \neq 0 \\ & z_0 \leq z < \bar{z}, \\ \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}{v_0}, & \text{если } v_1 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $v = v_0 + v_1 \cdot (z - z_0)$, $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$,

$$\bar{z} = z_0 + \frac{\sqrt{v_0^2 + v_1^2 \cdot r^2} - v_0}{v_1},$$

$$p^2 = \frac{4}{(v_1 \cdot r + \frac{z - z_0}{r} (v + v_0))^2 + 4 \cdot v_0^2}.$$

2. Приведем описание алгоритма решения задачи.

Алгоритм численного решения задачи определяется следующим: искомые параметры должны обеспечивать наилучшее приближение экспериментального материала, а это, в свою очередь, приводит к минимуму функции невязки.

Итак, рассматривается функция невязки:

$$\Phi_3(x_3, y_3, z_3, t_{03}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_j} (\hat{t}_{i3}(x_3, y_3, z_3) - t_{i3} + t_{03})^2}{N_j}}, \quad (2)$$

где $\hat{t}_{ij}(x_j, y_j, z_j) = \hat{t}(v_0, v_1, x_0^i, y_0^i, z_0^i, x_j, y_j, z_j) -$

теоретические времена, вычисленные по формуле (I), параметры $v_0, v_1, x_0^i, y_0^i, z_0^i, t_{ij}$ заданы.

Физический смысл входящих в функцию Φ_j величин следующий: (x_j, y_j, z_j) - координаты j - очага, \hat{t}_{ij} - время распространения возмущения от очага $M_j(x_j, y_j, z_j)$ до станции $M_0^i(x_0^i, y_0^i, z_0^i)$ в среде со скоростью распространения возмущения $v = v_0 + v_1 \cdot z$, t_{ij} - абсолютное время прихода возмущения, регистрируемое в точке M_0^i , соответствующей сейсмостанции, t_{0j} - время начала j -го возмущения, $i = 1, 2, \dots, N_j$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Задача минимизации функции Φ_j осуществляется по модификации метода Ньютона [I]. Точка минимума находится как решение нелинейной системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N_j} (\hat{t}_{ij} + t_{0j} - t_{ij}) \cdot \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N_j} (\hat{t}_{ij} + t_{0j} - t_{ij}) \cdot \frac{\partial t_{ij}}{\partial y_j} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N_j} (\hat{t}_{ij} + t_{0j} - t_{ij}) \cdot \frac{\partial t_{ij}}{\partial z_j} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N_j} (\hat{t}_{ij} + t_{0j} - t_{ij}) = 0.$$

Таким путем по заданному экспериментальному материалу t_{ij} - времени регистрации прихода возмущения от j -го землетрясения на i -станцию, $i = 1, 2, \dots, N_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ определяется множество точек $M_j(x_j, y_j, z_j)$ и величины t_{0j} , которые соответствуют координатам j -го гипоцентра и времени начала возмущения. Как мы уже подчеркивали эти параметры находятся из условия минимума функции Φ_j .

Далее задается конечная таблица параметров v_0 и v_1 , определяющих линейную скорость:

$$v = v_0 + v_1 \cdot z.$$

Составляется функция Φ

$$\Phi(v_0, v_1) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \min_{x_j, y_j, z_j, t_{0j}} \Phi_j.$$

Путем перебора находят параметры v_0^0 и v_1^0 так, чтобы $\Phi(v_0^0, v_1^0) = \min_{v_0, v_1} \Phi(v_0, v_1)$.

3. Численные исследования проводились на основе материалов, соответствующих сейсмическому району, прилегающему к г.Пржевальску, эти материалы были предоставлены нам экспедицией Института Физики Земли. В данном районе регистрировались землетрясения, глубина очагов которых составляет 5-25 км, площадь эпицентров - 25 км x 25 км. Сейсмические станции расположены на площади 80 км x 60 км, число землетрясений - 120, число станций - 11.

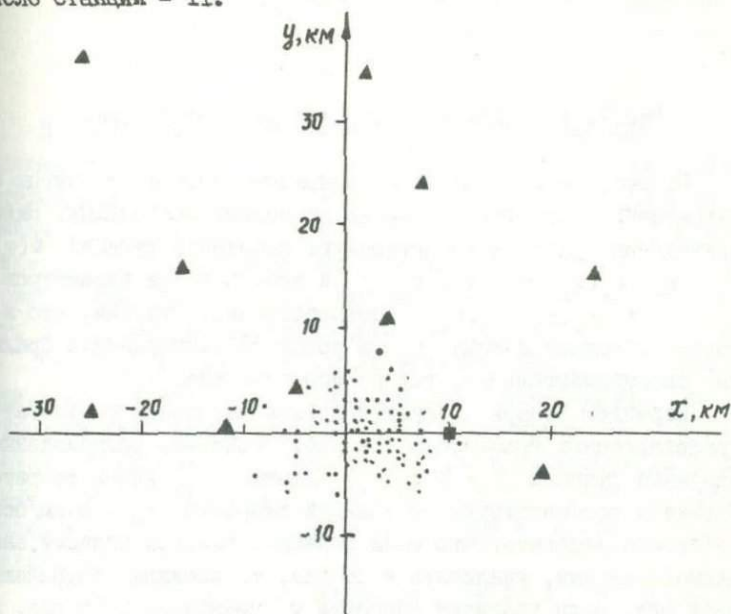


Рис. I. Расположение очагов в плоскости xy .
 ▲ - положение станции

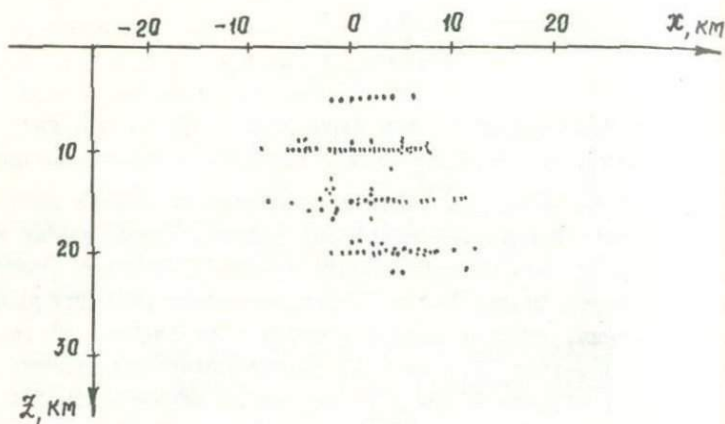


Рис.2. Расположение очагов в плоскости xoz .

На рис.1 и 2 показано расположение станций и очагов землетрясений исследуемого района по данным экспедиции. Ниже приведенные рисунки характеризуют поведение функций $\Phi(v_0, v_1)$ и $\Phi_j(x_j, y_j, z_j, t_{0j})$ в пространстве параметров v_0, v_1 и x_j, y_j, z_j, t_{0j} , соответственно. Отметим, что в качестве исходных данных t_{ij} в процессе эксперимента брались как экспериментальные, так и теоретические.

Перейдем теперь к характеристике численных результатов, представленных графически. На рис.3 показано расположение изолиний функций $\Phi = \Phi(v_0, v_1)$. Данные t_{ij} здесь теоретические и соответствуют постоянной скорости $v_0 = 6$ км/сек. Интересно отметить, что если линейные размеры области, занимаемой очагами, увеличить в 10 раз, то изолинии сохраняют свой вид, если градиент скорости v_1 уменьшить в 10 раз, а значение функции Φ увеличить в 10 раз.

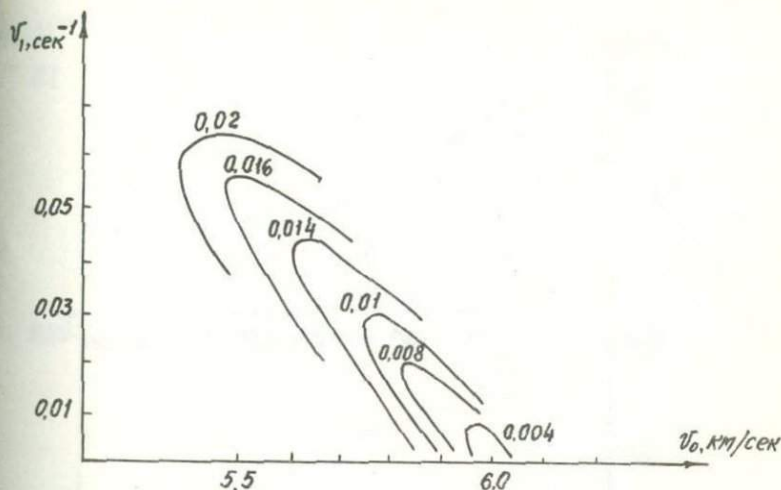


Рис.3. Изолинии функции Φ в плоскости параметров скорости v_0 и v_1 (данные - модельные, вычислены в среде $v = 6,0$ км/сек).

На рис.3 видно, что выделяется направление наименьшего изменения функции $\Phi(v_0, v_1)$. Это направление соответствует условию: $v_0 + 10 \cdot v_1 = 6$, т.е. скорость на глубине 10 км. равна 6,0 км/сек. На рис.4 приведено изменение функции $\Phi(v_0, v_1)$ вдоль этого направления. Как ясно из рис.3 и 4, поиск минимума приводит к значению скорости $v_0 = 6$ км/сек, что соответствует данным задачи.

На рис.5 показаны изолинии функции $\Phi(v_0, v_1)$ в том случае, когда данные t_{1j} являются реальными данными. При построении этих линий предполагалось, что время t_{0j} (время начала возмущения) известно и выбрано в соответствии с данными экспедиции. Здесь, аналогично рис.3, выделяется направление $v_0 + 11,5 \cdot v_1 = 6,3$, где функция Φ меняется наименее медленно.

На рис.6 показаны изолинии функции Φ в том случае, когда t_{0j} является искомой. Точка минимума соответствует скорости $v = 6,1 + 0,07 \cdot z$.

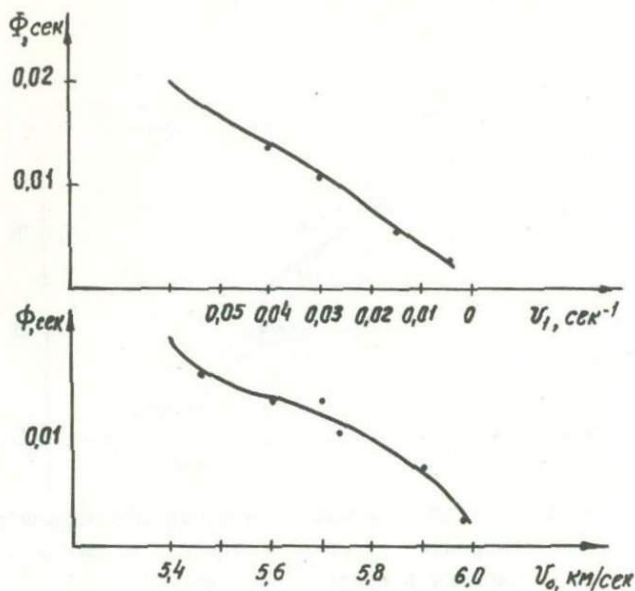


Рис. 4. Зависимость функции Φ от параметров скорости v_0 и v_1 при условии $v_0 + 10 \cdot v_1 = 6,0$ (данные модельные).

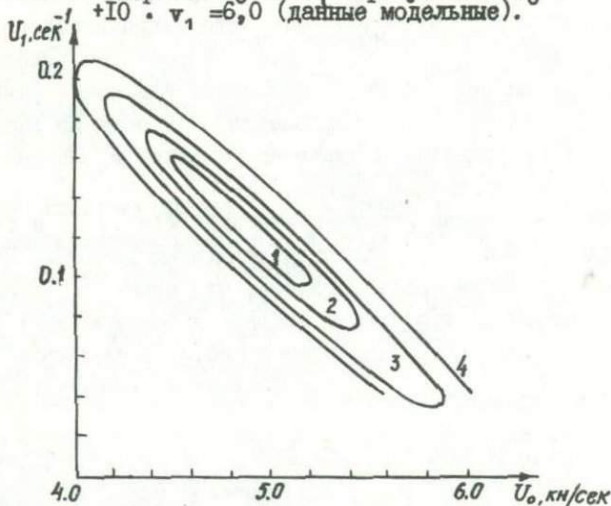


Рис. 5. Изолинии функции Φ в плоскости параметров скорости v_0 , v_1 . Данные реальные. t_{0j} фиксировано.
 1 - $\Phi = 0,274$ сек. 2 - $\Phi = 0,279$ сек. 3 - $\Phi = 0,285$ сек.
 4 - $\Phi = 0,297$ сек.

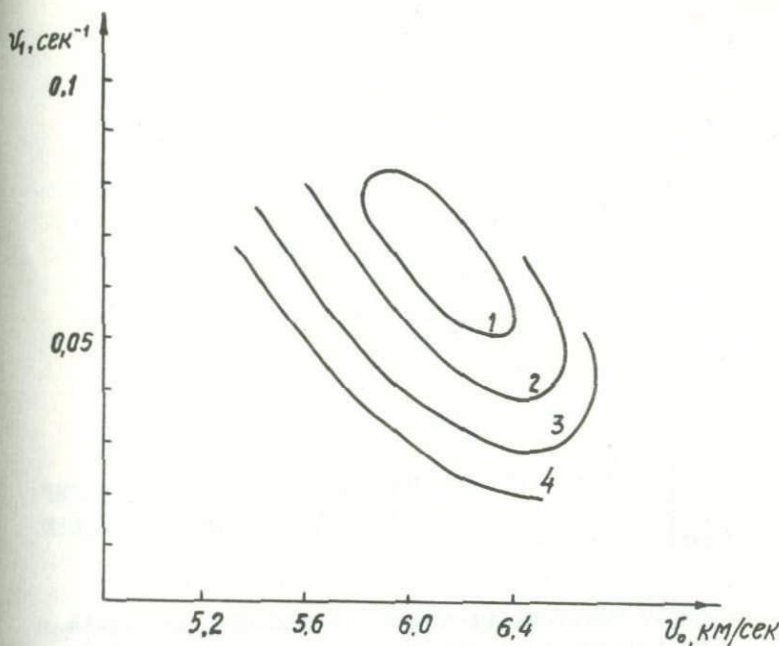


Рис.6. Изолинии функции Φ в плоскости параметров v_0, v_1 . Данные реальные

- 1 - $\Phi = 0,242$ сек.
- 2 - $\Phi = 0,250$ сек.
- 3 - $\Phi = 0,255$ сек.
- 4 - $\Phi = 0,265$ сек.

На рис.7 показано расположение очагов после переопределения их координат, причем это переопределение было проведено в среде $v = 6,1 + 0,07 \cdot z$, которая соответствует минимуму функции Φ . Сравнение рис.2 и рис.7 показывает, что очаги землетрясений после переопределения их координат стали занимать меньшую область. Это обстоятельство, по-видимому, связано с существом явления: рассматриваемые очаги - авторшоки одного землетрясения. Следует также подчеркнуть, что сравнение рис. 5 и 6 показывает, что положение минимума функции $\Phi(v_0, v_1)$ существенно изменилось, возможно, что это связано с точностью определения координат очага.

Численные эксперименты позволяют сделать следующие выводы:

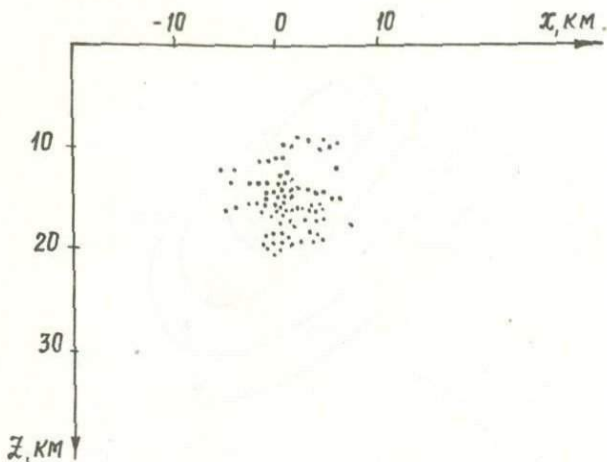


Рис. 7. Расположение очагов в плоскости xoz после переопределения координат в среде $v = 6,1 + 0,07 \cdot z$.

1. Для функции $\Phi(v_0, v_1)$ выделяются направления, вдоль которого эта функция меняется слабо.
2. Поиск минимума функции Φ становится более устойчивым при введении одного дополнительного условия: фиксирована глубина очагов, фиксирована скорость на некоторой глубине, фиксировано время начала возмущений.
3. Переопределение координат очагов для данного экспериментального материала приводит к уменьшению области, занимаемой очагами.

Л и т е р а т у р а

1. BIGGS.M.C. Minimisation algorithms making use of non-quadratic properties of objective functions. - J. of the Inst. Maths. Applies., v. 8, N3, 1971, p.315-328.

О.К.Омельченко, А.Г.Фатьянов

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛЭМБА ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-
ИЗОТРОПНОГО НЕОДНОРОДНОГО УПРУТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА.
ИСТОЧНИК ТИПА ЦЕНТРА ВРАЩЕНИЯ

Изучение природы анизотропии горных пород представляет большой интерес в связи с появившимися в последнее время работами, говорящими об обнаружении анизотропии больших участков земной коры и верхней мантии земли при сейсмических исследованиях [3, 4].

В работах, посвященных решению задачи Лэмба для анизотропного полупространства, рассматривались как двумерные, так и трехмерные постановки и применялись либо метод функционально-инвариантных решений Смирнова-Соболева [7], либо интегральные преобразования [6, 8, 15, 16]. Эти методы позволяют изучать динамику волн лишь в однородных анизотропных средах.

А.С.Алексеевым [4] предложен метод численного решения задачи Лэмба, состоящий в понижении размерности задачи по пространству неполным разделением переменных и решении полученной одномерной задачи разностными методами. Его реализации для изотропных сред посвящены работы [4, 5].

Как и следовало ожидать, по аналогии с методикой для однородных сред [6], постановка задач и основные этапы решения переносятся и на случай анизотропных сред.

Однако на этапах решения разностной задачи и вычисления интегралов Фурье-Бесселя нами использованы методики, отличные от методик, предложенных в [4, 5]. Поэтому в настоящей статье даются не только основные уравнения и постановка задачи, но и на примере источника типа центра вращения, для которого уравнения максимально упрощаются, описывается метод решения задачи.

I. В качестве модели среды рассмотрим трансверсально-изотропную неоднородную по глубине (по оси oz) упругую среду. Как известно [1], упругий потенциал в этом случае имеет вид

$$2W = c_{11}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2) + c_{33}e_{zz}^2 + 2c_{13}(e_{xx} + e_{yy})e_{zz} + 2c_{12}e_{xx}e_{yy} + c_{44}(e_{yz}^2 + e_{zx}^2) + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})e_{xy}^2. \quad (1)$$

Поскольку среда неоднородна по оси oz , упругие постоянные $c_{11}(z)$, $c_{12}(z)$, $c_{13}(z)$, $c_{33}(z)$, $c_{44}(z)$, и плотность $\rho(z)$ в этом случае являются функциями переменной z .

Предположения относительно гладкости этих функций будут сделаны в дальнейшем. В связи с тем, что в случае трансверсальной изотропии ось oz является осью упругой симметрии, выгодно перейти к цилиндрическим координатам. Обозначим составляющие упругого перемещения в радиальном, тангенциальном и в направлении оси oz соответственно через u_r , u_φ и u_z . Тогда компоненты деформации выразятся по формулам [1]

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r},$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (2)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad e_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}.$$

Связь между компонентами напряженного состояния $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{\varphi z}, \tau_{zr}, \tau_{r\varphi}$ и компонентами деформации дается обобщенным законом Гука

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c_{11} e_{rr} + c_{12} e_{\varphi\varphi} + c_{13} e_{zz}, \\ \sigma_\varphi &= c_{12} e_{rr} + c_{11} e_{\varphi\varphi} + c_{13} e_{zz}, \\ \sigma_z &= c_{13} e_{rr} + c_{13} e_{\varphi\varphi} + c_{33} e_{zz}, \\ \tau_{\varphi z} &= c_{44} e_{\varphi z}, \\ \tau_{zr} &= c_{44} e_{zr}, \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})e_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя теперь в (3) (2), получим выражения компонент напряжения через компоненты перемещения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_\varphi &= c_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_z &= c_{13} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \tau_{\varphi z} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \\ \tau_{zr} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения движения в напряжениях в случае трансверсальной изотропии имеют вид [1]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.$$

Подставив в (5) выражения для напряжений из (4) и проделав несложные преобразования, получим уравнения движения в цилиндрических координатах для трансверсально-изотропной неоднородной среды в перемещениях

$$c_{11} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{c_{11} + c_{12}}{2r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + c_{13} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} +$$

$$\frac{c_{11} - c_{12}}{2r^2} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (c_{44} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)) = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) + \frac{c_{11} + c_{12}}{2r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \quad (6)$$

$$+ \frac{c_{11}}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) + \frac{c_{13}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} (c_{44} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right)) = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2},$$

$$c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (c_{13} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right)) + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.$$

Как известно [6], формулы (2), (4), (6) для некоторых источников существенно упрощаются. Так для источников типа нормальной силы и центра сжатия, когда волновая картина не зависит от угла φ и частицы среды смещаются лишь в плоскостях, проходящих через ось oz , в этих формулах равны нулю слагаемые, содержащие u_φ и производные по φ . В случае источника типа центра вращения около оси oz равны нулю u_r , u_z и производные по φ .

Прежде чем формулировать задачу Лэмба следует заметить, что на практике в большинстве случаев измеряют скорости объемных волн в зависимости от направления. В то же время, упругие постоянные в анизотропном случае не выражаются в виде аналитических формул через скорости объемных волн, как это имеет место в изотропном случае. Этим объясняется тот факт, что коэффициенты уравнений движения (6) не выражены через скорости объемных волн. Однако этот недостаток восполняется тем, что в настоящее время существуют работы [17], в которых предлагаются эффективные алгоритмы определения упругих постоянных из измеренных скоростей объемных волн для анизотропной среды. Сформулируем теперь задачу Лэмба для сосредоточенного источника, заданного на границе полупространства $z \geq 0$, описываемого уравнениями (6).

Найти вектор смещений \bar{u} , удовлетворяющий при $z > 0$ уравнениям (6), начальным условиям

$$\bar{u} \Big|_{t=0} = \bar{u}_t \Big|_{t=0} = 0 \quad (7)$$

и граничным условиям

$$\sigma_z \Big|_{z=0} = \left[c_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{13} \frac{u_r}{r} \right]_{z=0} = F_1(r, t),$$

$$\tau_{rz} \Big|_{z=0} = c_{44} \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]_{z=0} = F_2(r, t), \quad (8)$$

$$\tau_{\varphi z} \Big|_{z=0} = c_{44} \left[\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right]_{z=0} = F_3(r, t).$$

В настоящей заметке мы рассмотрим только источник типа центра вращения [3]. Источникам других типов будет посвящена последующая публикация.

Как уже подчеркивалось, в этом случае в формулах (6)–(8) равны нулю u_r , u_z и производные по φ . Заметим также, что такой источник порождает только волны типа SH. [3]. Задача определения вектора \vec{u} сводится в этом случае к нахождению компоненты u_{φ} из уравнения

$$\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \frac{\partial^2 u_{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial z} (c_{44} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial z}) + \frac{c_{11} - c_{12}}{2r} \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi}}{r} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_{\varphi}}{\partial t^2} \quad (9)$$

с начальными

$$u_{\varphi} \Big|_{t=0} = \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (10)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \frac{1}{4\pi c_{44}(0)} \frac{d}{dr} \left[\frac{\delta(r)}{r} \right] f(t). \quad (11)$$

(II) является математической записью поверхностного момента вращения, сосредоточенного в точке $r=0$, $z=0$, с интенсивностью $f(t)$.

В дальнейшем мы будем пользоваться общепринятыми обозначениями упругих параметров $c_{11} = A$, $c_{13} = G$, $c_{44} = L$, $c_{33} = C$,

$\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) = N$, которые несколько облегчают запись уравнений (6).

П. Будем искать решение задачи (9)–(II) в виде преобразования Бесселя некоторой функции $R(z, t, k)$

$$u_{\varphi} = \int_0^{\infty} R(z, t, k) J_1(kr) dk. \quad (12)$$

Используя единственность такого разложения, формулы дифференцирования функции Бесселя J_1 , а также формулу

$$\int_0^{\infty} k^2 J_1(kr) dk = - \frac{d}{dr} \left[\frac{\delta(r)}{r} \right] \quad (13)$$

для определения функции $R(z, t, k)$ получим следующую граничную задачу

$$\frac{\partial}{\partial z} (L \frac{\partial R}{\partial z}) - Nk^2 R = \rho \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad (14)$$

$$R \Big|_{t=0} = \frac{\partial R}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi L_0} k^2 f(t) \quad (16)$$

в области $(0 \leq z < \infty, 0 \leq t < \infty)$.

Относительно коэффициентов $L(z)$, $N(z)$ и $\rho(z)$ предположим, что они могут иметь разрывы первого рода в конечном числе точек. В этих точках должны выполняться условия сопряжения, то есть непрерывность функций R и $L \frac{\partial R}{\partial z}$. Решение задачи (I4)-(I6) осуществим конечно-разностным методом. При этом воспользуемся стандартными обозначениями из [9]. Пусть в первом квадранте фазовой плоскости zt задана равномерная по z и t сетка ω_{ht} с шагами h и τ соответственно.

Построим однородную консервативную симметричную разностную схему с весом. Заменяем дифференциальные операторы в (I4) разностными

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(L \frac{\partial R}{\partial z} \right) - k^2 NR \sim \Delta(t_j) R^{(\sigma)} + cR^{(\sigma)}, \quad \rho \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \sim \rho R_{tt}$$

где $R^{(\sigma)} = \hat{\sigma}R + (1 - 2\sigma)R + \sigma R$, $\Delta(t_j)R = (a(z)R)_{zz}$.
 $c = -k^2 N$.

Получим трехслойную схему

$$\Delta(t_j)v^{(\sigma)} + cv^{(\sigma)} = \rho v_{tt} \quad (17)$$

Коэффициент a будем вычислять по формуле

$$a_i = 0,5(L_i + L_{i-1}). \quad (18)$$

Схему (17) можно записать также в виде

$$(\rho - \sigma \tau^2 \Delta)v_{tt} = \Delta v + cv^{(\sigma)}, \quad 0 < t = j\tau. \quad (19)$$

Первое начальное условие (15) аппроксимируется точно

$$v(z, 0) = 0. \quad (20.1)$$

Что же касается второго начального условия (15), то в силу однородности уравнения (14) и того, что условия (15) нулевые следует аппроксимация его разностным начальным условием:

$$v_t(z, 0) = 0 \quad (20.2)$$

со вторым порядком по τ .

Построим разностную аппроксимацию второго порядка по h для краевого условия (16), воспользовавшись для этого стандартным приемом повышения порядка аппроксимации краевых и начальных условий [9]. Получим разностное краевое условие при $z = 0$, имеющее аппроксимацию $O(h^2)$ на решении задачи (14)-(16).

$$v_z(0, t) = \left\{ \frac{1}{2L} \left[h(\rho R_{tt} - \frac{1}{4\pi L} k^2 f \frac{\partial L}{\partial z} + k^2 NR) + \frac{1}{2\pi} k^2 f \right] \right\}_{z=0}. \quad (21.1)$$

Для того, чтобы сделать систему уравнений (19) при фиксированном t конечной, зададим некоторую начальную глубину z_N , которая выделит из рассматриваемой области полубесконечную полосу. На правой стороне полосы (рис. I) при $z = z_N$ введем дополнительное граничное условие

$$v(z_N, t) = 0, \quad (21.2)$$

означающее отсутствие перемещений в точках среды, куда волна еще не пришла.

Пусть сетка ω_{ht} разобьет полосу вдоль оси oz на N интервалов (рис. I). В этой полосе и начнем решать сформулированную разностную задачу (19)-(21).

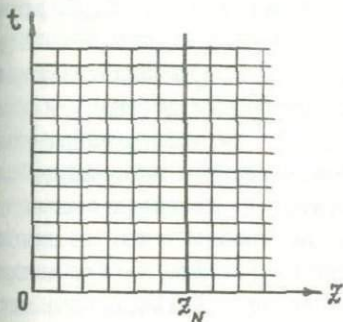


Рис. I

Воспользуемся схемой (19) при $\sigma = 0$ (явная схема) и $\sigma = 0,25$ (неявная схема). Применяя спектральный признак устойчивости Неймана и принцип замораживания коэффициентов, получим необходимое условие устойчивости явной схемы

$$\max_z \left(\frac{L}{\rho} \frac{\tau^2}{h^2} + \frac{N}{4\rho} k^2 \tau^2 \right) \leq 1$$

из которого следует, что при увеличении k для сохранения устойчивости схемы приходится уменьшать шаг по времени τ . Это приводит при $k > \bar{k}$ к сильному возрастанию времени счета по явной схеме. Поэтому при $k > \bar{k}$ целесообразно использовать неявную схему.

Следует заметить, что при решении сформулированной разностной задачи приходится проверять на каждом слое отсутствие возмущения на правом его конце и, если волна достигла правого конца слоя, сдвигать правую границу полосы на несколько интервалов h вдоль оси oz до тех пор, когда возмущение не будет затрагивать конца слоя. Таким образом, сформулированная разностная задача, фактически, является задачей с подвижной правой границей. После решения разностной задачи,

то есть нахождения приближенных значений функции $R(z, t, k)$, для определения искомой функции u_ϕ нужно вычислить значения интеграла (I2). Известно, что для источников с гладкой функцией $f(t)$ функция $R(z, t, k)$ экспоненциально убывает с ростом k . Поэтому интеграл (I2) с бесконечным верхним пределом при вычислении может быть заменен интегралом по конечному промежутку. Кроме того, интеграл (I2) является интегралом от сильноосциллирующей функции. Для его вычисления мы воспользуемся идеей Филона [10] о рассмотрении функции $J_1(kr)$ в качестве весовой и замене $R(z, t, k)$ интерполяционным многочленом. При выборе этого интерполяционного многочлена следует исходить из того, что $R(z, t, k)$ является осциллирующей функцией, а многочлен должен достаточно точно ее приближать. В качестве интерполяционного многочлена авторы взяли кубический сплайн натянутый на значения $R(z, t, k)$ в достаточно густой сети узлов k_n , $n = 0, 1, 2, \dots, M$ [I2]

$$R(z, t, k) \approx \sum_{n=1}^M \sum_{\alpha=0}^3 a_n^{(\alpha)} (k - k_{n-1})^\alpha.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} R(z, t, k) J_1(kr) dk \approx \int_0^{k_M} R(z, t, k) J_1(kr) dk \approx$$

$$\int_0^{k_M} \sum_{n=1}^M \sum_{\alpha=0}^3 a_n^{(\alpha)} (k - k_{n-1})^\alpha J_1(kr) dk = \quad (24)$$

$$= \sum_{n=1}^M \sum_{\alpha=0}^3 a_n^{(\alpha)} \int_{k_{n-1}}^{k_n} (k - k_{n-1})^\alpha J_1(kr) dk = \sum_{n=1}^M \sum_{\alpha=0}^3 a_n^{(\alpha)} \Phi_\alpha^n(r).$$

Вычисление интегралов $\Phi_\alpha^n(r)$ интегрированием по частям сведем к вычислению функций Бесселя первого рода J_0 , J_1 и интегральной функции Бесселя $J_{1/2}(x) = \int_x^{\infty} \frac{J_1(u)}{u} du$. Для вычисления J_0 и J_1 использованы стандартные процедуры, а для вычисления интегральной функции Бесселя $J_{1/2}$ - аналити-

ческие аппроксимации, данные в [II].

Итак, алгоритм решения задачи (9)-(II) состоит из следующих этапов:

1) решение разностной задачи (I9)-(2I), аппроксимирующей дифференциальную задачу (I4)-(I6), $M+1$ раз для значений $k=k_n$, $n = 0, 1, 2, \dots, M$;

2) вычисление значений интеграла (I2) по формуле (24) в заданных узлах z_m и для заданного выбора значений r .

Изложенный алгоритм был реализован авторами на языке $\alpha-6$ для ЭВМ БЭСМ-6.

III. Проверка алгоритма и программы осуществлялась прежде всего путем расчета тестовых примеров для однородной изотропной среды ($N = L = \mu = \mu_0$), $h=0,025$ и гладких $f(t)$ и сравнения полученных результатов с точным решением задачи, приведенном в [5],

$$u_\varphi = -\frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{\sin\theta}{R^2} f\left(t - \frac{R}{v_s}\right) + \frac{\sin\theta}{Rv_s} f'\left(t - \frac{R}{v_s}\right) \right], \quad (25)$$

где $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $\sin\theta = \frac{z}{R}$.

Это сравнение при достаточно большой амплитуде входного сигнала $f(t)$ говорит о том, что относительная погрешность результатов не превосходит 1-3%.

Были рассчитаны также теоретические сейсмограммы для некоторых моделей неоднородных сред и интенсивности входного сигнала

$$f(t) = \begin{cases} c(\sin 2\pi t - 0,5 \sin 4\pi t), & t \in [0, 1] \\ 0, & t \notin [0, 1] \end{cases}, \quad (26)$$

приведенных в [5]. Сравнение построенных сейсмограмм с приведенными в [5] показало, в основном, их хорошее совпадение.

В заключение приведены примеры теоретических сейсмограмм, рассчитанных по описанному алгоритму для двух трансверсально-изотропных сред, и входного сигнала (26). На рисунке 2 даны сейсмограммы для льда, который является трансверсально-изотропной средой и предполагается нами однородным. Упругие кон-

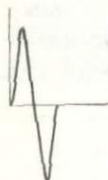
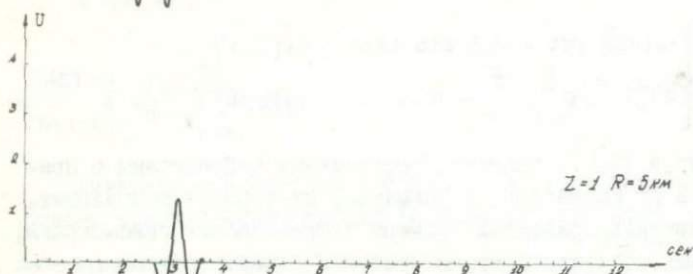
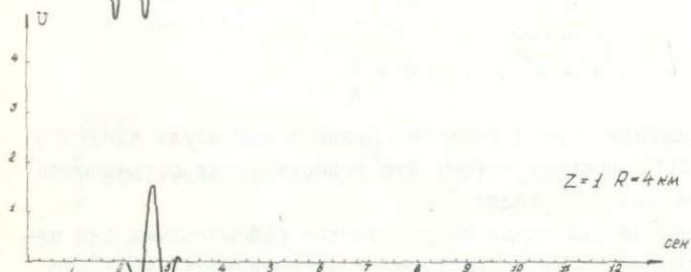
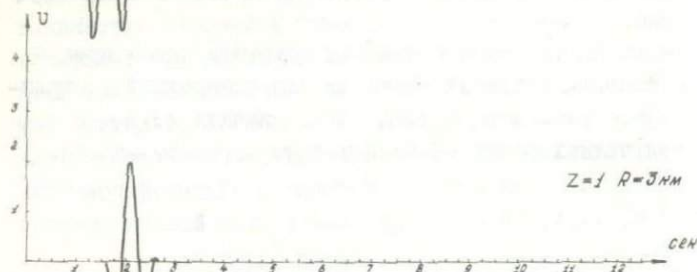
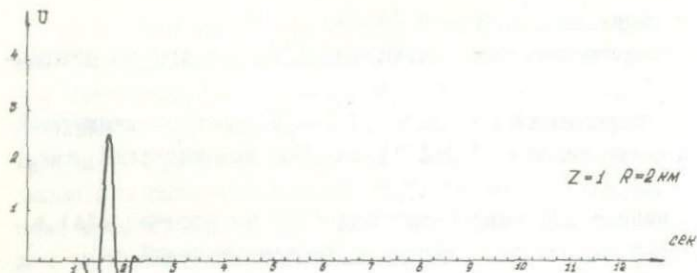


Рис.2

$P = 0.9168 \quad L = 3.04 \quad N = 3.04$

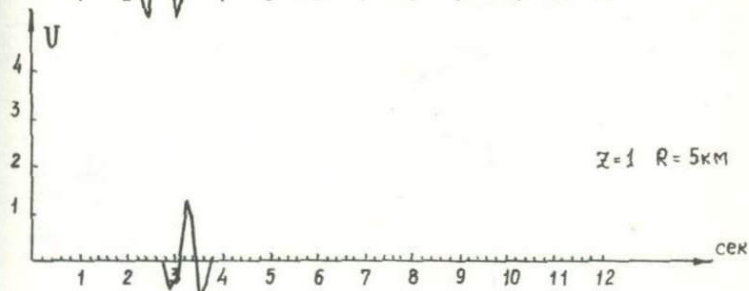
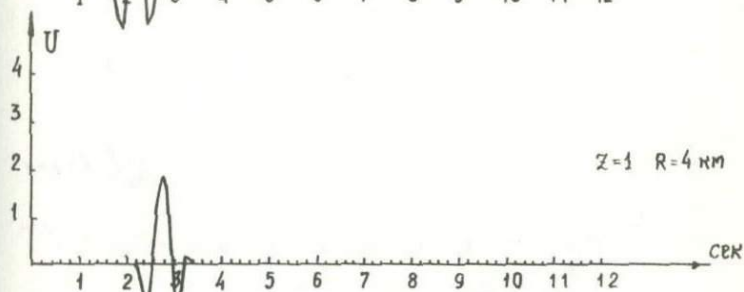
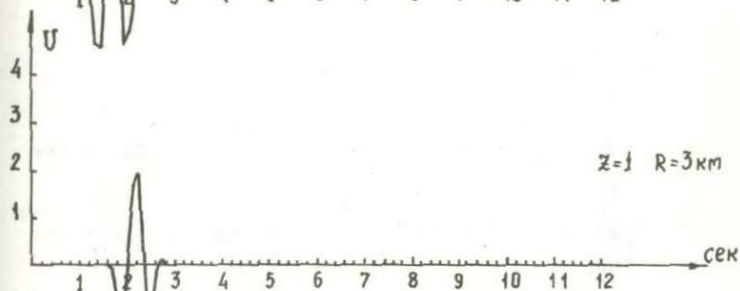
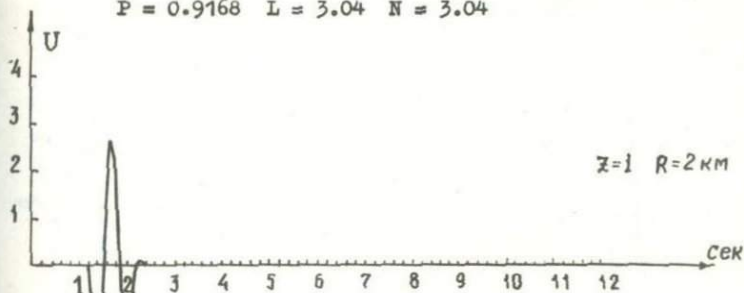


Рис. 3
225

$P=0.9168$ $L=3.68$ $N=3.68$

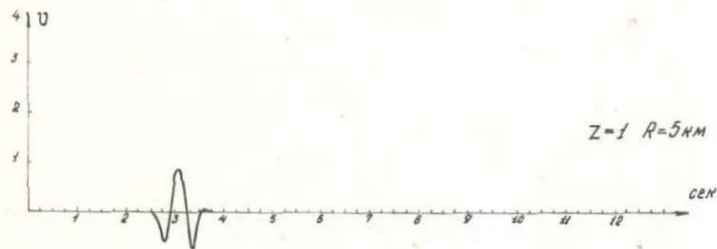
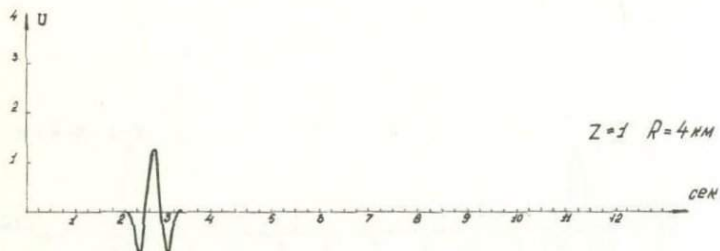
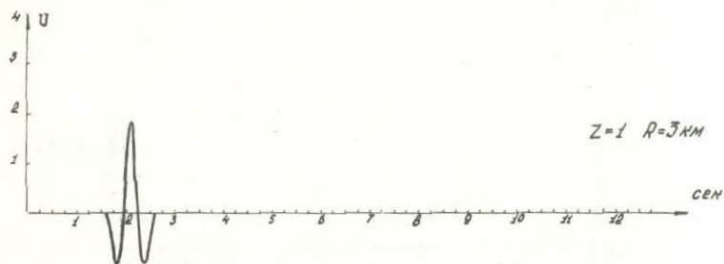
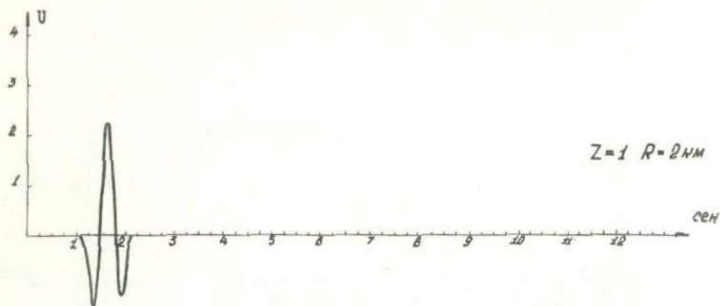


Рис. 4

226

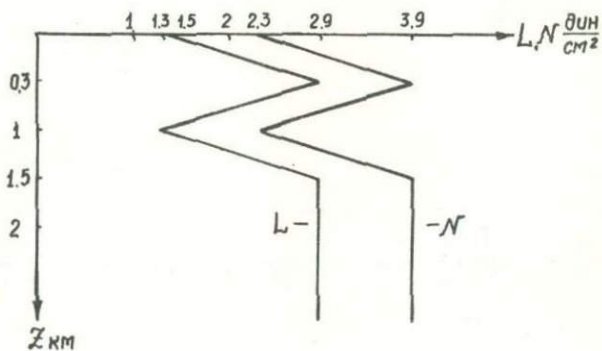
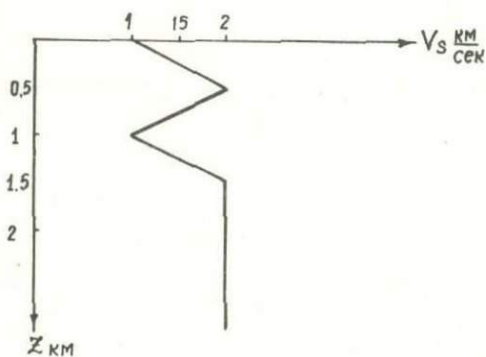
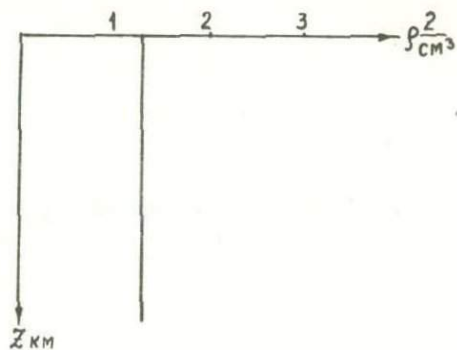


Рис. 5

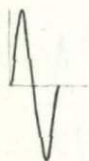
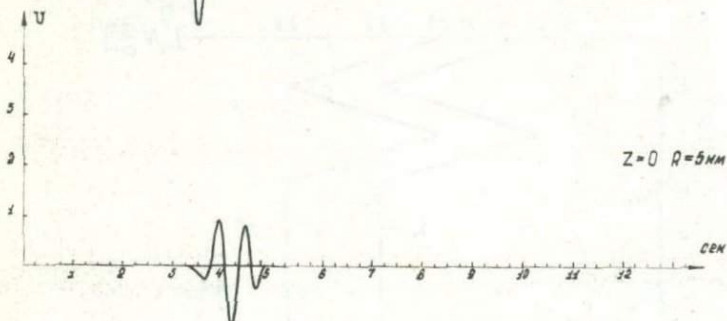
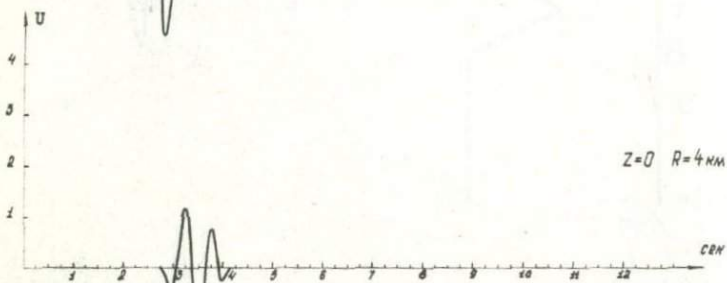
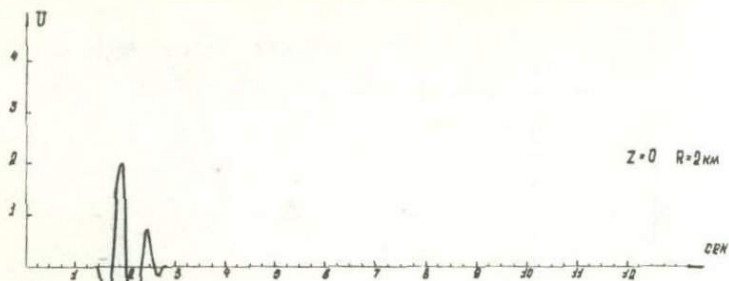


Рис.6

228

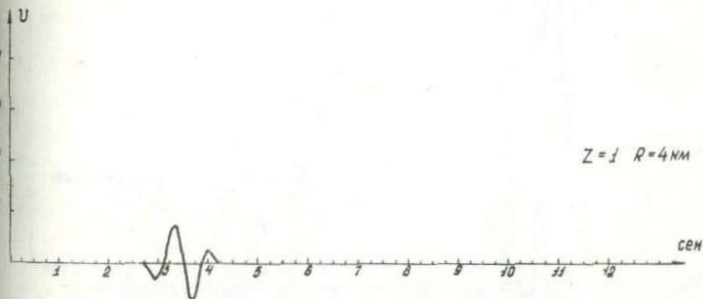
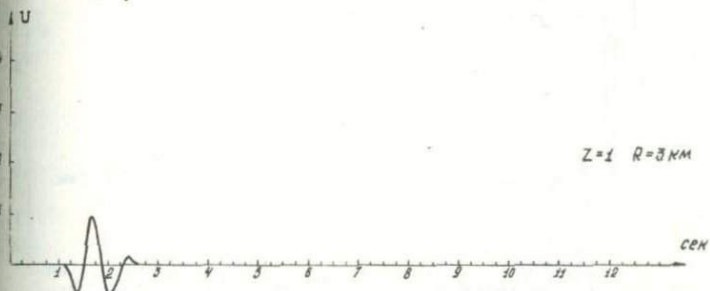
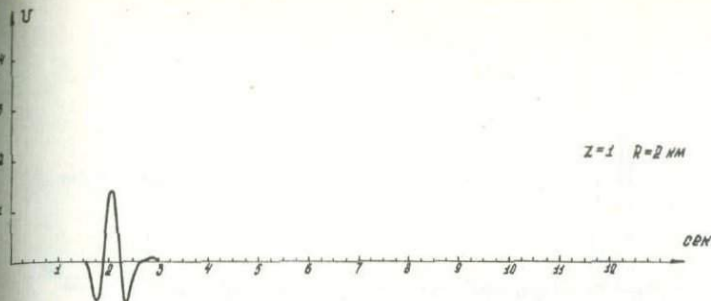


Рис. 7

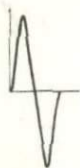
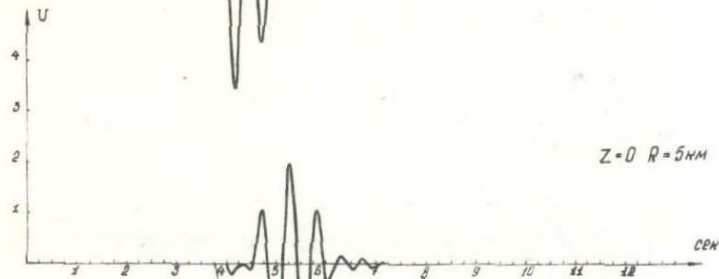
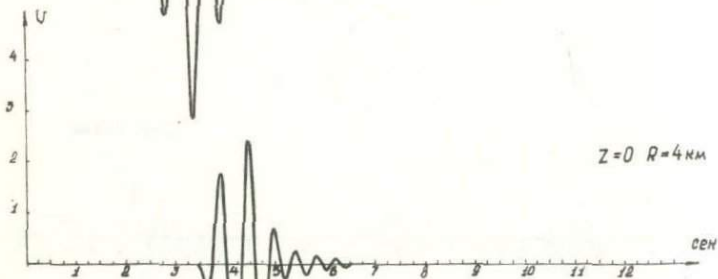
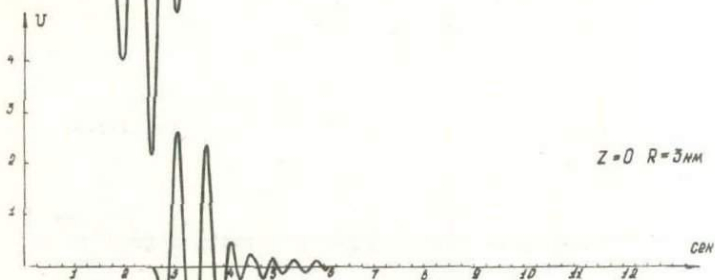
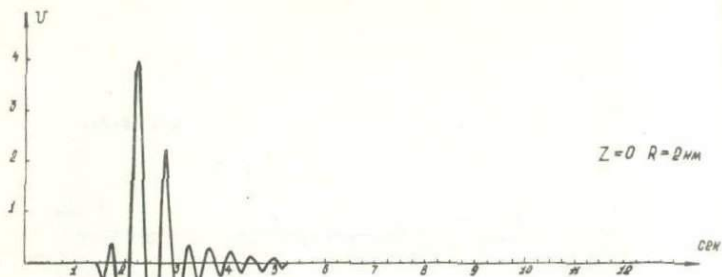


Рис. 8

230

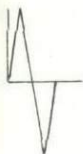
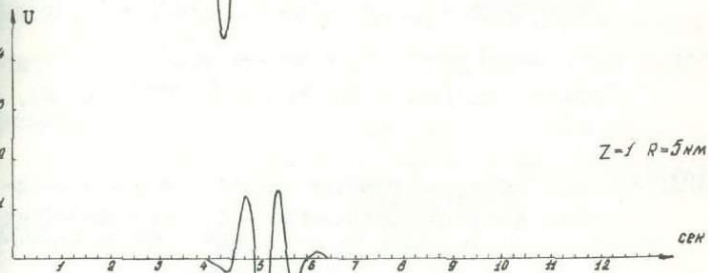
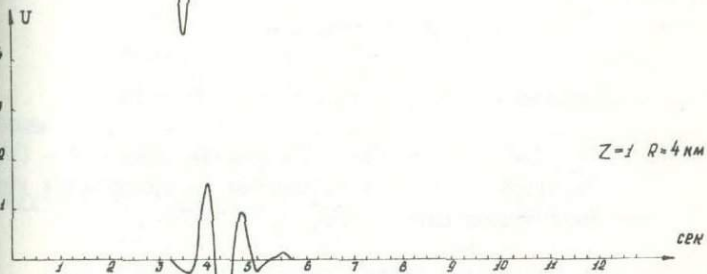
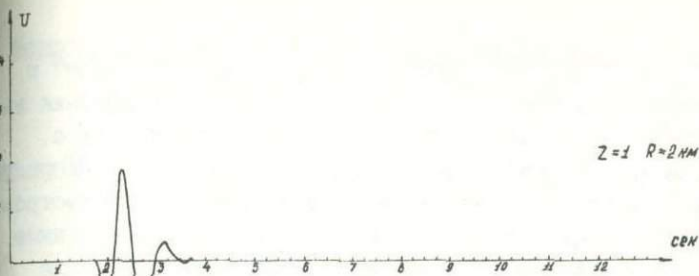


Рис. 9

231

станты $L = 3,04 \times 10^{10}$ дин/см², $N = 3,68 \times 10^{10}$ дин/см² и плотность $\rho = 0,9168$ г/см³ взяты из [16]. Для сравнения на рисунках 3 и 4 даны сейсмограммы для изотропного льда с $\mu = 3,04 \times 10^{10}$ дин/см² и $\mu = 3,68 \times 10^{10}$ дин/см². На рисунках 6 и 7 построены сейсмограммы для неоднородной анизотропной среды с ρ , $L(z)$ и $N(z)$ изображенными на рис. 5 (данные здесь L и N отличаются от истинных множителем 10^{10}). Для сравнения на рисунках 8 и 9 показаны сейсмограммы для неоднородной изотропной среды с той же плотностью ρ , $\mu(z) = L(z)$ и $v_s = \sqrt{\mu/\rho}$, изображенных на рис. 5.

Следует заметить, что целью настоящей статьи не являлся анализ сейсмограмм для анизотропных сред и приведенные примеры лишь иллюстрируют возможности метода.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность А.С.Алексееву за предложение задачи и ценные указания.

Л и т е р а т у р а

1. ЛЯВ А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
2. АЛЕКСЕЕВ А.С. Обратные динамические задачи сейсмологии. — Сб. Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М., "Наука", 1967.
3. АЛЕКСЕЕВ А.С. Некоторые законы распространения волн в неоднородной среде. — ДАН СССР, 103, №6, 1955.
4. АЛЕКСЕЕВ А.С., МИХАЙЛЕНКО Б.Г. О задаче Ламба для неоднородного полупространства. — ДАН СССР, 214, №1, 1974.
5. МИХАЙЛЕНКО Б.Г. Численное решение задачи Ламба для неоднородного полупространства. — Сб. Математические проблемы геофизики, вып. 4, изд. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1973, с. 273-297.
6. УСПЕНСКИЙ И.Н., ОГУРЦОВ К.И. Сосредоточенные источники в трансверсально-изотропной среде. — Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, изд. ЛГУ, 1962, вып. 6, 75-83.

7. ОСИПОВ И.О. К методу функционально-инвариантных решений задач динамической теории упругости анизотропных сред.- "Изв. АН СССР, сер.геофиз.", 1963, №3.
8. САРАЙКИН В.А. Плоская задача Лэмба для анизотропного полупространства. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, №3. Новосибирск, "Наука", 1974.
9. САМАРСКИЙ А.А. Введение в теорию разностных схем., М., "Наука", 1971.
10. БАХВАЛОВ Н.С. Численные методы. М., "Наука", 1973.
- II. ОМЕЛЬЧЕНКО О.К. "Стандартная программа вычисления интегральной функции Бесселя J_1 , Изд. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1964.
12. МИХАЛЕВИЧ Ю.И., ОМЕЛЬЧЕНКО О.К. Процедуры кусочно-полиномиальной интерполяции функций одной и двух переменных. Стандартные программы и процедуры. Вып. II, Изд. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1970.
13. HESS H.H., Seismic Anisotropy of the Uppermost Mantle under the Oceans, Nature, 203 (1964), 629.
14. RAITT R.W., SHOR G.G., FRANCIS T.J.G., MORRIS G.B., Anisotropy of the Pacific Upper Mantle, J.Geophys. Res., 74 (1969), 3095.
15. KRAUT E.A., Advances in the Theory of Anisotropic Elastic Wave Propagation, Reviews of Geophysics, 1963, vol 1, N3, 401-448.
16. ABUBAKAR I., Motion of the Surface of a Transversely Isotropic Half-space Excited by a Buried Line Source, Geophys.J., vols, N1, 1962, 87-101.
17. КЛИМА К., The Computation of the Elastic Constants of an Anisotropic Medium from the Velocities of Body Waves, Studia Geoph. et Geod, 17 (1973), 115.

В.В.Филатов

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ИНТЕРПОЛЯЦИИ АЭРОМАГНИТНЫХ
ДАНЫХ

Одной из проблем, возникающих при обработке данных аэромагнитной съемки, является задача аппроксимации снятых значений поля. Вопросам аппроксимации измеренных геолого-геофизических характеристик посвящено значительное количество работ. Однако, в этих работах, как например [1,2], приводятся оценки точности интерполяции функций с равномерной сети при условии точного задания значений функций в узлах этой сети.

В данной заметке предлагаются некоторые оценки точности восстановления функций, заданных приближенно на дискретных множествах определенного вида, специфического для аэромагнитных съемок. Кроме того, даются оценки устойчивости задачи вычисления произвольных для таких функций.

I.

Рассмотрим задачу аналитического продолжения гармонической функции $u(x, y, z)$, заданной на множестве \mathbb{R}^2 , расположенном на плоскости $z = z_0$. В предположении ограниченности $u(x, y, z)$ в полупространстве $z \geq z_1$, где $z_1 < z_0$, задача становится условно-корректной и допускает возможность решения определенными методами.

Будем предполагать, что функция $u(x, y, z)$ принадлежит классу $U_p(N)$, введенному Страховым [5]. Тогда задача формулируется следующим образом

$$|u(x, y, z_0)| \leq \varepsilon \quad (x, y, z_0) \in \mathcal{M}, \quad (1)$$

$$|u(x, y, z_1)| \leq M \quad -H < z_1 < z_0.$$

Требуется оценить величину

$$|u(x, y, z_0)|.$$

Будем рассматривать следующие типы множества \mathcal{M} :

ж) Множество N прямых параллельных оси абсцисс и расположенных на расстоянии h друг от друга.

жж) Множество точек равномерно расположенных на N ломаных таких, что плоскость $x = \text{const}$ пересекает каждую ломаную только в одной точке.

жжж) Множество точек на N кривых таких, что плоскость $x = \text{const}$ пересекает каждую кривую только в одной точке.

Рассмотрим отдельно все эти случаи.

I. \mathcal{M} - множество типа ж). Для удобства будем считать, что прямые образованы пересечением плоскости $z = z_0$ с набором плоскостей $y = y_i$ ($i = 1, \dots, N$). Обозначим $y_1 \equiv a$, $y_N \equiv b$. Тогда имеет место

Т е о р е м а I. Если

$$|u(x, y, z_0)| \leq \varepsilon \quad (x, y, z_0) \in \mathcal{M},$$

$$|u(x, y, z_1)| \leq M \quad -H < z_1 < z_0,$$

то

$$|u(x, y, z_0)| \leq \frac{2M}{\sqrt{3}} e^{-nq}, \quad (2)$$

где n определяется из условий

$$\left[\frac{\text{th} \left(\frac{\pi(b-a)}{2(z_0 - z_1)} \right) - \text{th} \left(\frac{\pi(y_{n+1} - a)}{2(z_0 - z_1)} \right)}{P} \right]^{n+1} \leq \varepsilon < \quad (3)$$

$$< \frac{\operatorname{th} \left(\frac{\pi(b-a)}{2(z_0-z_1)} \right) - \operatorname{th} \left(\frac{\pi(y_n-a)}{2(z_0-z_1)} \right)}{P} \}^n, \quad (3)$$

где p, q - константы, не зависящие от ϵ, M и множества \mathcal{M} .

Доказательство. Функцию $u(x, y, z)$ на плоскости $z = z_0$ можно представить с помощью интеграла Пуассона

$$u(x, y, z_0) = \frac{(z_0 - z_1)^{\infty \infty}}{2\pi} \int_{-\infty - \infty}^{\infty \infty} \int \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z_0 - z_1)^2]^{3/2}}, \quad (4)$$

где $f(\xi, \eta) \equiv u(\xi, \eta, z_1)$.

Чтобы оценить значение (4) в произвольной точке (x', y', z_0) , проведем плоскость $x = x'$ и обозначим

$$\varphi(y) \equiv u(x', y, z_0), \quad (5)$$

$\varphi(y)$ - является регулярной функцией, заданной в точках пересечения плоскости $x = x'$ с множеством \mathcal{M} . Продолжим $\varphi(y)$ на комплексную плоскость, положив

$$\varphi(y+iy_1) = \frac{z_0 - z_1}{2\pi} \int_{-\infty - \infty}^{\infty \infty} \int \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y+iy_1 - \eta)^2 + (z_0 - z_1)^2]^{3/2}}. \quad (6)$$

Преобразуя знаменатель в подинтегральном выражении, получим

$$\varphi(y+iy_1) = \frac{z_0 - z_1}{2\pi} \int_{-\infty - \infty}^{\infty \infty} \int \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + ((z_0 - z_1)^2 - y_1^2) + 2iy_1 \times \sqrt{(y-\eta)^2}]^{3/2}}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что функция $\varphi(y)$ сохраняет аналитичность при продолжении в полосу

$$y_1^2 \leq (z_0 - z_1)^2 - \delta^2, \quad (8)$$

где δ — произвольная величина $0 < \delta < (z_0 - z_1)$. Из условия (I) и гармоничности функции $u(x, y, z)$ мы знаем, что

$$|\varphi(y + iy_1)| \leq M \quad \text{при} \quad y_1 = 0.$$

Оценку $\varphi(y + iy_1)$ в полосе (8) можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned} |\varphi(y + iy_1)| &\leq \frac{(z_0 - z_1)M}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\xi \, d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + ((z_0 - z_1)^2 - y_1^2) - 2iy_1(y-\eta)^2]^{3/2}} \right| \leq \\ &\leq \frac{(z_0 - z_1)M}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + ((z_0 - z_1)^2 - y_1^2)] + 4y_1^2(y-\eta)^2\}^{3/4}} \times \\ &\quad \times d\xi \, d\eta \leq \\ &\leq \frac{(z_0 - z_1)M}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(\theta^2 + w^2 + \delta^2)^2 + 4y_1^2 w^2]^{3/4}} d\theta \, dw \leq \\ &\leq \frac{(z_0 - z_1)M}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\theta^2 + w^2 + \delta^2]^{3/2}} d\theta \, dw = \\ &= \frac{(z_0 - z_1)M}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\delta}, \end{aligned}$$

то есть имеем

$$|\varphi(Y)| \equiv |\varphi(y + iy_1)| \leq \frac{(z_0 - z_1)M}{\delta} . \quad (9)$$

Преобразуем полосу (8) с помощью конформного отображения

$$W = \frac{\exp\left(\frac{\pi(Y-a)}{z_0 - z_1}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\pi(Y-a)}{z_0 - z_1}\right) + 1} , \quad (10)$$

предполагая, что δ выбрано так, что ширина полосы (8) равна $z_0 - z_1$. Будем считать, что a, b — ординаты крайних точек множества \mathcal{M}' , получающегося при пересечении множества \mathcal{M} с плоскостью $x=x'$. Очевидно, они постоянны для любого сечения. Это отображение переводит полосу (8) в единичный круг с центром в начале координат (на комплексной плоскости). При этом множество \mathcal{M}' перейдет в множество точек, расположенное на отрезке

$$\left[0, \frac{\exp\left(\frac{\pi(b-a)}{z_0 - z_1}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\pi(b-a)}{z_0 - z_1}\right) + 1} \right] . \quad (11)$$

Как нетрудно показать, расстояние между соседними точками этого множества образует убывающую последовательность

$$|x_{i+1} - x_i| < |x_i - x_{i-1}| \quad i = 2, \dots, N-1. \quad (12)$$

Напомним определение n -меры точечного множества, введенное М.М.Лаврентьевым [3]. n -мерной $\mu_n(A)$ точечного множества A , расположенного по прямой, называется нижняя грань суммы длин n интервалов, содержащих множество A . Для полученного множества, учитывая (12) получим

$$\mu_n(A) = \operatorname{th} \left(\frac{\pi(b-a)}{2(z_0 - z_1)} \right) - \operatorname{th} \left(\frac{\pi(y_n - a)}{2(z_0 - z_1)} \right) \quad n < N, \quad (13)$$

$$\mu_n(A) = 0 \quad n \geq N.$$

В работах [3, 4] получены оценки для продолжения аналитической функции, заданной на дискретном множестве, лежащем в единичном круге

$$|f(w)| \leq \exp \left\{ - \frac{\ln \varepsilon}{\ln \mu_n(A)} \omega(w) \right\}, \quad (14)$$

где n определяется из условия

$$\left(\frac{\mu_n(A)}{p} \right)^n \leq \varepsilon^r < \left(\frac{\mu_n(A)}{p} \right)^{n-1}, \quad (15)$$

где $\omega(w)$ — непрерывная функция $0 < \omega(w) < 1$ внутри единичного круга p ; q — некоторые константы. Оценка эта не совсем удобна для конечного множества A , как в нашем случае. Отметим также, что нам, вообще говоря, не нужна оценка во всем, единичном круге, а вполне достаточно оценки в круге меньшего радиуса, включающем в себя исходное множество. Исходя из этого, с помощью очевидных изменений в выводе оценок (14), (15) можно получить

$$|f(w)| \leq e^{-nq} \quad w \in D_0, \quad (16)$$

где n — определяется из условия

$$\left(\frac{\mu_{n+1}(A)}{p} \right)^{n+1} \leq \varepsilon < \left(\frac{\mu_n(A)}{p} \right)^n, \quad (17)$$

где p, q — некоторые постоянные, D_0 — круг радиуса $r < 1$.

Учитывая, что эти оценки действительны при $|f(w)| \leq 1$, проведя очевидные преобразования и подстановки, получим требуемые оценки (2), (3).

2. \mathcal{M} - множество типа жж). Под равномерным расположением точек на ломаной будем понимать, что на каждом прямолинейном участке ломаной точки расположены с шагом h . Обозначим через l - длину наименьшего звена всех ломаных. Тогда имеет место

Т е о р е м а 2. Если выполнены условия (I), то

$$u(x, y, z_0) \leq \frac{2M}{\sqrt{3}} e^{-nq}, \quad (17)$$

где n определяется из условий

$$\left(\frac{\mu_{n+1}(A_x)}{p} \right)^{n+1} \leq \Delta(\varepsilon) < \left(\frac{\mu_n(A_x)}{p} \right)^n, \quad (18)$$

p, q - константы. A_x - некоторое множество из N точек

$$\Delta(\varepsilon) = \frac{2M}{\sqrt{3}} e^{-n_1 q}, \quad (19)$$

где n_1 определяется из условий

$$\left(\frac{\mu_{n_1+1}(\bar{A})}{p} \right)^{n_1+1} \leq \varepsilon < \left(\frac{\mu_{n_1}(\bar{A})}{p} \right)^{n_1}. \quad (20)$$

\bar{A} - множество, состоящее из $\left[\frac{1}{h} \right]$ точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в теореме I, проведем плоскость $x = \text{const}$. В отличие от предыдущего случая на пересечении этой плоскости с ломанными может не оказаться ни одной точки из \mathcal{M} . Поэтому предварительно мы должны оценить величину $u(x, y, z_0)$ на множестве точек пересечения \mathcal{M} . Эти точки лежат на прямолинейных участках заданных ломаных. Величина оценки на каждом из этих участков находится в прямой зависимости от количества точек из \mathcal{M} , которые попадают на участок. Для того, чтобы оценить функцию на всех прямолинейных отрезках, очевидно, достаточно оценить ее на наименьшем из них, то есть участке с длиной 1, на нем находится

$N_1 = \left[\frac{1}{h} \right]$ точек. Рассуждая так же, как в теореме I придем к оценке на ломаных

$$|u(x, y, z_0)| \leq \frac{2M}{\sqrt{3}} e^{-n_1 q}, \quad (21)$$

где n_1 определяется из условия

$$\left(\frac{\mu_{n_1+1}(\bar{A})}{p} \right)^{n_1+1} \leq \varepsilon < \left(\frac{\mu_{n_1}(\bar{A})}{p} \right)^{n_1}. \quad (22)$$

Здесь \bar{A} — множество на комплексной плоскости, которое соответствует множеству точек из \mathcal{M} , лежащих на минимальном участке. Выражение для n — меры этого множества можно получить точно так же, как в теореме I. Мы не будем этого делать, заметим только, что для достаточно малых ε будем иметь на ломаных

$$|u(x, y, z_0)| \leq \frac{2M}{\sqrt{3}} e^{-N_1 q}. \quad (23)$$

Обозначая оценку (21) через $\Delta(\varepsilon)$, мы можем решить поставленную задачу, заменив условия (I) условиями

$$|u(x, y, z_0)| \leq \Delta(\varepsilon) \quad (x, y, z_0) \in \mathcal{M},$$

$$|u(x, y, z_1)| \leq M. \quad (24)$$

Очевидно, что применяя еще раз рассуждение теоремы I получим требуемые соотношения (17), (18).

3. \mathcal{M} — множество типа ~~жжж~~. Дополнительно будем предполагать, что \mathcal{M} состоит из точек пересечения кривых с набором плоскостей $x=x_i$ ($i = 1, \dots, N_0$), причем ψ_i

$$|x_{i+1} - x_i| = |x_i - x_{i-1}|.$$

Тогда имеет место

Т е о р е м а 3. Если выполнены условия (I), то

$$u(x, y, z_0) \leq \frac{2M}{\sqrt{3}} e^{-nq}, \quad (25)$$

где n определяется из условий

$$\left[\frac{\operatorname{th} \left(\frac{\pi(x_{N_0} - x_1)}{2(z_0 - z_1)} \right) - \operatorname{th} \left(\frac{\pi(x_{n+1} - x_1)}{2(z_0 - z_1)} \right)}{p} \right]^{n+1} \leq \tilde{\Delta}(\varepsilon) <$$

$$\left[\frac{\operatorname{th} \left(\frac{\pi(x_{N_0} - x_1)}{2(z_0 - z_1)} \right) - \operatorname{th} \left(\frac{\pi(x_N - x_1)}{2(z_0 - z_1)} \right)}{p} \right]^n . \quad (26)$$

Здесь

$$\tilde{\Delta}(\varepsilon) = \max \{ \tilde{\Delta}(x_1, \varepsilon), \dots, \tilde{\Delta}(x_{N_0}, \varepsilon) \}, \text{ а}$$

$$\tilde{\Delta}(x_i, \varepsilon) = \frac{2M}{\sqrt{3}} e^{-n_i q}, \quad (27)$$

где n_i определяется из условий

$$\left(\frac{\mu_{n_i+1}(\tilde{A}_{x_i})}{p} \right)^{n_i+1} \leq \varepsilon < \left(\frac{\mu_{n_i}(\tilde{A}_{x_i})}{p} \right)^{n_i}, \quad (28)$$

где \tilde{A}_{x_i} - некоторое множество на комплексной плоскости состоящее из N точек.

Доказательство. Сначала оценим функцию $u(x, y, z_0)$ на прямых, получающихся при пересечении плоскостей $z = z_0$ и $x = x_i^*$ ($i = 1, \dots, N_0$). На каждой из этих прямых имеется N точек из \mathcal{M} и оценку можно получить, как и раньше, в виде

$$|u(x_1, y, z_0)| \leq \frac{2M}{\sqrt{3}} e^{-n_1 q}, \quad (29)$$

где

$$\left(\frac{\mu_{n_1+1}(\tilde{A}_{x_1})}{p} \right)^{n_1+1} \leq \varepsilon < \left(\frac{\mu_{n_1}(\tilde{A}_{x_1})}{p} \right)^{n_1}. \quad (30)$$

A_{x_1} - образ множества точек из \mathcal{M} , лежащих на i -той прямой. В силу произвольного расположения точек этого множества для него нельзя записать явное выражение n -меры. Можно заметить, что для достаточно малых ε , оценка (29) примет вид

$$|u(x_1, y, z_0)| \leq \frac{2M}{\sqrt{3}} e^{-Nq}. \quad (31)$$

Обозначая оценки (29) через $\tilde{\Delta}(x_1, \varepsilon)$, а $\Delta(\varepsilon) = \max_x \{ \tilde{\Delta}(x_1, \varepsilon), \dots, \tilde{\Delta}(x_{N_0}, \varepsilon) \}$ и оценивая $|u(x, y, z_0)|$ при условиях

$$|u(x_1, y, z_0)| \leq \tilde{\Delta}(x_1, \varepsilon) \quad i=1, \dots, N_0, \quad (32)$$

$$|u(x, y, z_1)| \leq M$$

получим оценки (25), (26).

2.

Используя полученные в п. I оценки можно дать оценки устойчивости задачи вычисления производной гармонической функции, заданной на дискретном множестве.

Мы будем рассматривать функции из класса $U_p(N)$, удовлетворяющие условиям (I) для дискретных множеств, описанных в п. I. Каждое из этих множеств может быть заключено в полосу L некоторой ширины l . Пусть K - квадрат со стороной l полностью принадлежащий полосе L . Тогда имеет место

Теорема 4. Если функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет условиям (I), то

$$\left| \frac{\partial u(x, y, z_0)}{\partial x} \right| \leq \frac{8}{3\pi(z_0 - z_1)} \sqrt{2\omega(M, \varepsilon)M} \quad (33)$$

$$(x, y, z_0) \in K,$$

где $\omega(M, \epsilon)$ — одна из функций оценки для u , полученных в п. I.

Доказательство. Разобьем задачу нахождения производной на два этапа и оценим результаты каждого из них в отдельности.

1. Восстановление функции по ее значениям на \mathcal{M} .

2. Вычисление производной, полученной функции.

Первый этап представляет собой содержание п. I. Для каждого из рассматриваемых типов множества \mathcal{M} там получена некоторая оценка функции $u(x, y, z)$

$$u(x, y, z) \leq \omega(\epsilon, M). \quad (34)$$

Кроме того мы можем получить оценку для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z_0)$. Действительно, из интеграла Пуассона имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z_0) \right| &\leq \frac{2(z_0 - z_1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(\xi, \eta, z_1)(\xi - x)|}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (z_0 - z_2)^2]^{5/2}} \times \\ &\quad \times d\xi d\eta \leq \\ &\leq \frac{2M(z_0 - z_1)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^{\infty} \frac{t dt}{[t^2 + (\eta - y)^2 + (z_1 - z_0)^2]^{5/2}} = \quad (35) \\ &= \frac{M(z_0 - z_1)}{3\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{[(\eta - y)^2 + (z_0 - z_1)^2]^{3/2}} = \frac{2M}{3\pi(z_0 - z_1)}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что вторая производная оценивается как

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z_0) \right| \leq \left[\frac{4}{3\pi(z_0 - z_1)} \right]^2 M. \quad (36)$$

Для того, чтобы получить оценку устойчивости задачи дифференцирования функции, удовлетворяющей условиям (34), (36) на K , рассмотрим $u(x, y, z_0)$ при фиксированном $y = y_0$ таким, что для некоторых x точки $(x, y_0, z_0) \in K$. Тогда

Для функции одной переменной $q(x) \equiv u(x, y_0, z_0)$ имеем следующую задачу. Оценить $\left| \frac{dq(x)}{dx} \right|$ при условиях $|g(x)| \leq \omega(M, \epsilon)$, $\left| \frac{d^2 g}{dx^2} \right| \leq M_1$, на некотором отрезке длины 1. Тогда для этой функции имеет место оценка [4]

$$\left| \frac{dg(x)}{dx} \right| \leq 2 \sqrt{2\omega(M, \epsilon)M_1} \quad (37)$$

или, переходя к функции $u(x, y, z)$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z_0) \leq \frac{8}{3\pi(z_0 - z_1)} \sqrt{2\omega(M, \epsilon)M} \quad (38)$$

$(x, y, z_0) \in K$.

Очевидно, что такая же оценка действительна для $\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$. Учитывая, что решение задачи о восстановлении функции по ее значениям на конечном множестве не единственно и, в силу этого погрешность этого восстановления, характеризуемая функцией ω , при $\epsilon \rightarrow 0$ стремится к некоторому пределу $s > 0$, указанное неравенство имеет место при

$$s \leq \frac{21^2 M}{9\pi^2 (z_0 - z_1)^2} \quad (39)$$

Л и т е р а т у р а

1. АРОНОВ В.И., ГОРДИН В.Н., ШИРГИНОВА Л.И. К вопросу о построении графиков и карт изолиний в геологии и геофизике с помощью ЭЦВМ. - В кн.: "Математические методы и ЭЦВМ в геологии", М., 1971 (Труды ВНИГНИ, вып.103), с.71-124.
2. ГОРДИН В.М. К теории интерполирования измеренных геолого-геофизических характеристик. - В кн. "Математические методы и ЭВМ в геологии", М., 1973 (Труды ВНИГНИ, вып.135), с.3-34.

3. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. "О некоторых некорректных задачах математической физики", Новосибирск, 1962, с.91.
4. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. "Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений", Новосибирск, 1973, с.71.
5. СТРАХОВ В.Н. К вопросу о построении наилучших вычислительных схем для трансформаций потенциальных полей. "Известия АН СССР, серия геофизическая," №12, 1963, с.1780-1797.

Ю.С.Чернышев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЗАЛЕГАНИЯ И ФИЗИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК НАМАГНИЧЕННОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО
ПЛАСТА

I. Сведение к задаче оптимизации

1. Задача определения элементов залегания и физических характеристик намагниченного вертикального пласта — это одна из обратных геофизических задач. Искомый пласт предполагается изолированным и имеющим бесконечное простираие вдоль оси y прямоугольной системы координат (см.рис.1).

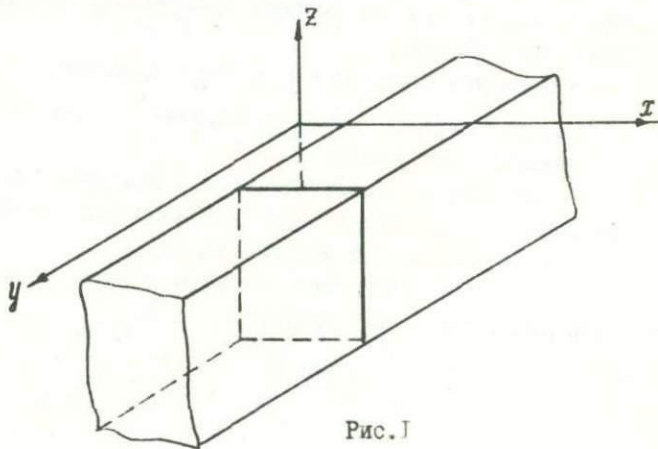


Рис. 1

Не ограничивая общности, можно считать, что ось пласта, идущая в направлении его простирания, лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось y , то есть в плоскости (y, z) . Так что поперечное сечение пласта, например, плоскостью (x, z) , имеет вид, показанный на рис.2.

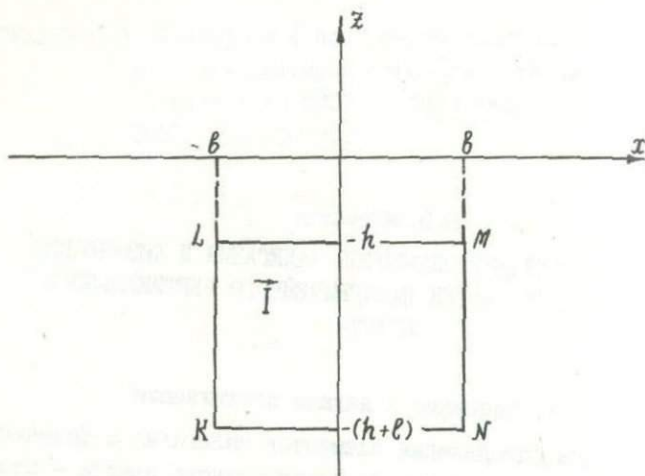


Рис.2

Определению подлежат следующие величины:

глубина залегания пласта h , то есть удаление верхней кромки пласта LM от дневной поверхности, принимаемой за плоскость (x, y) ;

полуширина поперечного сечения b , равная $\frac{1}{2} LM$;

распространение пласта в глубину l , равное MN ;

намагниченность пласта \vec{I} .

В качестве исходных данных используются лишь значения вертикальной составляющей магнитной аномалии (на дневной поверхности), обусловленной искомым телом.

2. Начнем с того, что запишем полную систему уравнений магнитного поля (см., например, [1]):

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{I}, \quad (3)$$

$$\text{Rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{i}, \quad (4)$$

$$\text{Div } \vec{B} = 0, \quad (5)$$

в которой последние два уравнения суть граничные условия, имеющие место на поверхности искомого пласта. Введем следующие обозначения:

\vec{H}_e - внешнее макроскопическое магнитное поле,

\vec{H}_i - макроскопическое магнитное поле, обусловленное искомым телом (магнитная аномалия). Тогда полное макроскопическое магнитное поле \vec{H} можно представить в виде

$$\vec{H} = \vec{H}_e + \vec{H}_i. \quad (6)$$

Если внешнее поле отсутствует, что мы и будем в дальнейшем предполагать, то плотность токов проводимости (как объемных, так и поверхностных) во всем рассматриваемом полупространстве $z \leq 0$, очевидно, равна нулю. Так что на самом деле исходная система уравнений (1)-(5) выглядит проще:

$$\text{rot } \vec{H}_i = 0, \quad (7)$$

$$\text{div } \vec{B}_i = 0, \quad (8)$$

$$\vec{B}_i = \vec{H}_i + 4\pi \vec{I}, \quad (9)$$

$$\text{Rot } \vec{H}_i = 0, \quad (10)$$

$$\text{Div } \vec{B}_i = 0. \quad (11)$$

Из (7) и (10) следует, что поле вектора \vec{H}_i , будучи безвихревым, обладает, подобно электрическому полю \vec{E} свободных электрических зарядов, однозначным скалярным потенциалом Ψ :

$$\vec{H}_i = - \text{grad } \Psi. \quad (12)$$

3. Сделаем следующее предположение: искомое тело представляет собой так называемый "идеализированный ферромагнетик". Намагничивание \vec{I} таких магнетиков складывается из суммы индуцированного намагничивания $\vec{I}_{\text{инд}}$, являющегося функцией напряженности поля, и постоянного намагничивания \vec{I}_0 , от напряженности поля вовсе не зависящего:

$$\vec{I} = \vec{I}_{\text{инд}} + \vec{I}_0. \quad (13)$$

При этом индуцированное намагничивание полагается равным

$$\vec{I}_{\text{инд}} = \frac{\kappa}{\mu} \vec{B}, \quad (14)$$

где под κ и μ понимаются магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость такого пара - или диамагнетика, который при том же микроскопическом поле \vec{B} внутри него имеет такое же индуцированное намагничивание, как и у искомого ферромагнетика. Так что κ и μ связаны между собой известным соотношением

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa. \quad (15)$$

Тела, удовлетворяющие условиям (13)-(14), называются также постоянными магнитами. Для искомого постоянного магнита, приняв во внимание отсутствие внешнего поля, из этих условий окончательно получим:

$$\vec{I} = \frac{\kappa}{\mu} \vec{B}_1 + \vec{I}_0. \quad (16)$$

4. Подставляя (16) в (9) и учитывая (15), будем иметь

$$\vec{B}_1 = \mu \vec{H}_1 + 4\pi\mu \vec{I}_0. \quad (17)$$

Сделаем новое предположение: магнитная проницаемость μ имеет одинаковое значение во всех точках полупространства $z \leq 0$. Тогда с помощью (17) уравнения (8) и (II) примут вид

$$\operatorname{div} \vec{H}_1 = -4\pi \operatorname{div} \vec{I}_0, \quad (18)$$

$$\operatorname{Div} \vec{H}_1 = -4\pi \operatorname{Div} \vec{I}_0. \quad (19)$$

Как известно (см. [1]), напряженность \vec{E} поля свободных электрических зарядов, полностью описываемого уравнениями

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (20)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (21)$$

$$\operatorname{Div} \vec{E} = 4\pi\sigma, \quad (22)$$

равна

$$\vec{E} = \iiint \frac{\vec{R}}{R^3} \rho dV + \iint \frac{\vec{R}}{R^3} \sigma dS, \quad (23)$$

где \vec{R} обозначает вектор, проведенный из элемента объема или поверхности в рассматриваемую точку поля. В силу очевидного соответствия системы (12), (18)–(19) системе (20)–(22) напряженность \vec{H}_1 поля искомого постоянного магнита по аналогии с (23) равна

$$\vec{H}_1 = \iiint \frac{\vec{R}}{R^3} (-\operatorname{div} \vec{I}_0) dV + \iint \frac{\vec{R}}{R^3} (-\operatorname{Div} \vec{I}_0) dS, \quad (24)$$

причем в двойном интеграле интегрирование ведется по всей поверхности пласта.

5. Сделаем еще одно предположение: вектор постоянного намагничения вертикален и его проекция на ось z имеет одинаковое значение во всех точках искомого пласта. Так что

$$\vec{I}_0 = J \vec{k}, \quad (25)$$

где $J = \text{const}$, а \vec{k} - единичный вектор, направленный, как и ось z , вертикально вверх. При этом предположении формула (24) принимает такой окончательный вид:

$$\vec{H}_1 = J \left(\iint_{S_1} \frac{\vec{R}}{R^3} ds - \iint_{S_2} \frac{\vec{R}}{R^3} ds \right), \quad (26)$$

где S_1 и S_2 суть верхнее и нижнее основания искомого пласта.

6. Программа, составленная автором для численного решения рассматриваемой обратной задачи (см. пункт I настоящего раздела), использует в качестве исходных данных значения вертикальной составляющей вектора \vec{H}_1 в точках оси x . Пусть $P(x_p, 0, 0)$ - произвольная точка на этой оси. Введем обозначение

$$Z(x_p) = H_{1z}(P). \quad (27)$$

Тогда проекция равенства (26) на ось z в точке P такова:

$$Z(x_p) = J \left\{ \int_{-b}^b dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{[\sqrt{(x-x_p)^2 + y^2 + h^2}]^3} dy - \right. \\ \left. - \int_{-b}^b dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h+1}{[\sqrt{(x-x_p)^2 + y^2 + (h+1)^2}]^3} dy \right\}. \quad (28)$$

7. Внутренние интегралы в формуле (28) легко берутся. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим определенный интеграл

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(\sqrt{y^2 + a^2})^3} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(\sqrt{y^2 + a^2})^3}. \quad (29)$$

Подстановкой

$$y = \operatorname{atg} \alpha \quad (30)$$

интеграл (29) приводится к виду

$$A = \begin{cases} \frac{2}{a^2} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha, & \text{если } a > 0, \\ -\frac{2}{a^2} \int_0^{-\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha, & \text{если } a < 0. \end{cases} \quad (31)$$

Так что в любом случае окончательно будем иметь

$$A = \frac{2}{a^2}. \quad (32)$$

8. С учетом (32) формула (28) принимает вид

$$Z(x_p) = 2J \left[\int_{-b}^b \frac{h}{(x-x_p)^2 + h^2} dx - \int_{-b}^b \frac{h+1}{(x-x_p)^2 + (h+1)^2} dx \right]. \quad (33)$$

После того, как будут взяты оставшиеся табличные интегралы и, следовательно, отпадет необходимость отличать x_p от x , значок p у аргумента x_p можно опустить, и формула (28) примет такой окончательный вид:

$$Z(x) = 2J \left(\operatorname{arctg} \frac{x+b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x-b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x+b}{h+1} + \operatorname{arctg} \frac{x-b}{h+1} \right). \quad (34)$$

Заметим, что при сделанных нами выше предположениях функция $Z(x)$ задается формулой (34), какую бы точку оси y мы ни приняли за начало прямоугольной системы координат и какое бы из двух взаимно противоположных направлений оси y мы

ни приняли за положительное.

9. Программа, о которой уже упоминалось в пункте 6, требует для своей работы задания n значений функции $Z(x)$ в каких-нибудь n точках положительной полуоси x , причем число указанных значений не должно быть меньше четырех. Располагая такой исходной информацией, получаемой обычно с помощью специальной измерительной аппаратуры, и привлекая формулу (34), мы приходим к следующей системе n трансцендентных уравнений:

$$2J \left(\operatorname{arctg} \frac{x_k+b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x_k-b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x_k+b}{h+1} + \operatorname{arctg} \frac{x_k-b}{h+1} \right) = Z_k, \\ k = 1, 2, \dots, n,$$
(35)

с четырьмя неизвестными h, b, l, J . Введем обозначение:

$$f_k = 2J \left(\operatorname{arctg} \frac{x_k+b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x_k-b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x_k+b}{h+1} + \operatorname{arctg} \frac{x_k-b}{h+1} \right) - Z_k.$$
(36)

Тогда стоящая перед нами задача — найти решение системы уравнений (35) — сводится к такой задаче оптимизации: найти абсолютный минимум функции четырех переменных $F(h, b, l, J)$, которая имеет вид

$$F(h, b, l, J) = \sum_{k=1}^n [f_k(h, b, l, J)]^2.$$
(37)

II. Поиск абсолютного минимума функции F

1. Точку абсолютного минимума функции (37) обозначим через $Q_a(h_a, b_a, l_a, J_a)$. Поиск точки Q_a , реализованный в составленной автором программе, делится на два этапа.

На первом этапе по определенной стратегии, которую в дальнейшем будем называть стратегией I, находится какая-нибудь точка условного минимума — $Q_u(h_u, b_u, l_u, J_u)$.

На втором этапе выясняется, можно ли эту точку принять за искомую точку Q_a . С этой целью также по определенной страте-

гии, которую в дальнейшем будем называть стратегией П, находится ряд новых точек условного минимума. С их помощью дается ответ на поставленный вопрос. В случае отрицательного ответа тот же вопрос ставится для одной из новых точек условного минимума и т.д.

2. Перейдем к описанию вычислительного процесса на первом этапе поиска точки Q_{α} . Вначале рассмотрим, что собой представляет так называемый "i-й спуск". Для выполнения "i-го спуска" необходимо задать его нулевое приближение $h_i^0, b_i^0, l_i^0, J_i^0$. Если предположить, что это сделано, то можно говорить и о результате h_i, b_i, l_i, J_i . Так что "i-й спуск" изображается в виде перехода

$$(h_i^0, b_i^0, l_i^0, J_i^0) \rightarrow (h_i, b_i, l_i, J_i). \quad (38)$$

Сам процесс рассматриваемого спуска делится на отдельные шаги, число которых заранее не известно. Так что s -й шаг "i-го спуска" изображается в виде промежуточного перехода

$$(h_i^{s-1}, b_i^{s-1}, l_i^{s-1}, J_i^{s-1}) \rightarrow (h_i^s, b_i^s, l_i^s, J_i^s). \quad (39)$$

Вычислительный процесс s -го шага, в свою очередь, является итерационным, что позволяет изобразить s -й шаг по аналогии с (38) еще и в виде

$$(h_{is}^0, b_{is}^0, l_{is}^0, J_{is}^0) \rightarrow (h_{is}, b_{is}, l_{is}, J_{is}). \quad (40)$$

Сравнивая между собой (39) и (40), получаем

$$(h_{is}^0, b_{is}^0, l_{is}^0, J_{is}^0) = (h_i^{s-1}, b_i^{s-1}, l_i^{s-1}, J_i^{s-1}), \quad (41)$$

$$(h_{is}, b_{is}, l_{is}, J_{is}) = (h_i^s, b_i^s, l_i^s, J_i^s). \quad (42)$$

Переход (40) совершается последовательно: сначала - при фиксированном J

$$(h_{is}^0, b_{is}^0, l_{is}^0, J_{is}^0) \rightarrow (h_{is}, b_{is}, l_{is}, J_{is}^0), \quad (43)$$

а затем - при фиксированных h, b, l :

$$(h_{is}, b_{is}, l_{is}, J_{is}^0) \rightarrow (h_{is}, b_{is}, l_{is}, J_{is}). \quad (44)$$

Таким образом, s -й шаг "1-го спуска" состоит из двух частей. Именно его первая часть - переход (43) - делится на отдельные итерации, число которых заранее не известно. Так что q -я итерация s -го шага изображается в виде промежуточного перехода

$$(h_{is}^{q-1}, b_{is}^{q-1}, l_{is}^{q-1}, J_{is}^0) \rightarrow (h_{is}^q, b_{is}^q, l_{is}^q, J_{is}^0). \quad (45)$$

Вторая часть s -го шага, как мы увидим ниже, весьма проста. Так что переход (44), изображающий эту часть, дальнейшему делению не подлежит.

3. Такова структура "1-го спуска". Рассмотрим подробно, в чем состоит q -я итерация его s -го шага. При этом левую часть перехода (45) будем, конечно, считать известной. Прежде всего в точке $(h_{is}^{q-1}, b_{is}^{q-1}, l_{is}^{q-1}, J_{is}^0)$ вычисляются значения следующих частных производных функции F :

$$\frac{\partial F}{\partial h} = 4J \sum_{k=1}^n f_k \left[-\frac{x_k+b}{h^2+(x_k+b)^2} + \frac{x_k-b}{h^2+(x_k-b)^2} + \frac{x_k+b}{(h+1)^2+(x_k+b)^2} - \frac{x_k-b}{(h+1)^2+(x_k-b)^2} \right], \quad (46)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 4J \sum_{k=1}^n f_k \left[\frac{h}{h^2+(x_k+b)^2} + \frac{h}{h^2+(x_k-b)^2} - \frac{h+1}{(h+1)^2+(x_k+b)^2} - \frac{h+1}{(h+1)^2+(x_k-b)^2} \right], \quad (47)$$

$$\frac{\partial F}{\partial l} = 4J \sum_{k=1}^n f_k \left[\frac{x_k + b}{(h+1)^2 + (x_k + b)^2} - \frac{x_k - b}{(h+1)^2 + (x_k - b)^2} \right]. \quad (48)$$

Иначе говоря, q -я итерация начинается с того, что по формулам (46)-(48) вычисляются величины:

$$g_h^{q-1} = \frac{\partial F(h_{is}^{q-1}, b_{is}^{q-1}, l_{is}^{q-1}, J_{is}^0)}{\partial h}, \quad (49)$$

$$g_b^{q-1} = \frac{\partial F(h_{is}^{q-1}, b_{is}^{q-1}, l_{is}^{q-1}, J_{is}^0)}{\partial b}, \quad (50)$$

$$g_l^{q-1} = \frac{\partial F(h_{is}^{q-1}, b_{is}^{q-1}, l_{is}^{q-1}, J_{is}^0)}{\partial l}. \quad (51)$$

Затем мы вычисляем модуль вектора $\vec{g}_{q-1} \{g_h^{q-1}, g_b^{q-1}, g_l^{q-1}\}$:

$$g_{q-1} = \sqrt{(g_h^{q-1})^2 + (g_b^{q-1})^2 + (g_l^{q-1})^2}. \quad (52)$$

4. После этого мы переходим к выбору величины λ_q , определяющей длину перехода (45). При этом сначала выясняем, какое из трех логических условий

$$\omega_1^{q-1} : g_{q-1} < \delta, \quad (53)$$

$$\omega_2^{q-1} : \delta \leq g_{q-1} < \Delta, \quad (54)$$

$$\omega_3^{q-1} : g_{q-1} \geq \Delta, \quad (55)$$

имеет место для вычисленного модуля g_{q-1} ^{*)}. Далее проверяем, выполняется ли равенство $q = 1$. (56)

^{*)} Здесь δ и Δ - заранее подобранные константы. Их выбор основан на интуиции вычислителя. В упомянутой выше программе $\delta = 5 \cdot 10^{-2}$, $\Delta = 5 \cdot 10^{-1}$.

Если да, то полагаем

$$\lambda_q = \begin{cases} \delta & \text{при } \omega_1^{q-1}, \\ \varepsilon_{q-1} & \text{при } \omega_2^{q-1}, \\ \Delta & \text{при } \omega_3^{q-1}. \end{cases} \quad (57)$$

Если нет, то вычисляем скалярное произведение векторов $\vec{\varepsilon}_{q-2}$ и $\vec{\varepsilon}_{q-1}$:

$$R = \varepsilon_h^{q-2} \varepsilon_h^{q-1} + \varepsilon_b^{q-2} \varepsilon_b^{q-1} + \varepsilon_1^{q-2} \varepsilon_1^{q-1}, \quad (58)$$

а затем выясняем, какое из двух логических условий

$$\Gamma_1 : R > 0, \quad (59)$$

$$\Gamma_2 : R \leq 0, \quad (60)$$

для него имеет место.

5. Далее проверяем, выполняется ли неравенство

$$\varepsilon_{q-1} < \varepsilon_{q-2}. \quad (61)$$

Если да, то в случае Γ_1 полагаем

$$\lambda_q = \begin{cases} 2\lambda_{q-1} & \text{при } \omega_1^{q-2}, \\ \lambda_{q-1} & \text{при } \omega_2^{q-2} \wedge \omega_1^{q-1}, \\ \frac{1}{2} \lambda_{q-1} & \text{при } \omega_3^{q-2} \wedge \omega_1^{q-1}, \\ 2\lambda_{q-1} & \text{при } \omega_2^{q-2} \wedge \omega_2^{q-1}, \\ \lambda_{q-1} & \text{при } \omega_3^{q-2} \wedge \omega_2^{q-1}, \\ 2\lambda_{q-1} & \text{при } \omega_3^{q-1}. \end{cases} \quad (62)$$

а в случае Γ_2 сперва вычисляем косинус угла между векторами $\vec{\xi}_{q-2}$ и $\vec{\xi}_{q-1}$

$$r = \frac{R}{\xi_{q-2} \xi_{q-1}}, \quad (63)$$

затем выясняем, какое из двух логических условий

$$\gamma_1: r \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (64)$$

$$\gamma_2: r < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (65)$$

имеет место для этого косинуса, после чего полагаем

$$\lambda_q = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \lambda_{q-1} \quad \text{при } \gamma_1 \wedge \omega_1^{q-2}, \\ \frac{1}{8} \lambda_{q-1} \quad \text{при } \gamma_1 \wedge \omega_2^{q-2} \wedge \omega_1^{q-1}, \\ \frac{1}{16} \lambda_{q-1} \quad \text{при } \gamma_1 \wedge \omega_3^{q-2} \wedge \omega_1^{q-1}, \\ \frac{1}{4} \lambda_{q-1} \quad \text{при } \gamma_1 \wedge \omega_2^{q-2} \wedge \omega_2^{q-1}, \\ \frac{1}{8} \lambda_{q-1} \quad \text{при } \gamma_1 \wedge \omega_3^{q-2} \wedge \omega_2^{q-1}, \\ \frac{1}{4} \lambda_{q-1} \quad \text{при } \gamma_1 \wedge \omega_3^{q-1}, \end{array} \right. \quad (66)$$

или

$$\lambda_q = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8} \lambda_{q-1} \quad \text{при} \quad \gamma_2 \wedge \omega_1^{q-2}, \\ \frac{1}{16} \lambda_{q-1} \quad \text{при} \quad \gamma_2 \wedge \omega_2^{q-2} \wedge \omega_1^{q-1}, \\ \frac{1}{32} \lambda_{q-1} \quad \text{при} \quad \gamma_2 \wedge \omega_3^{q-2} \wedge \omega_1^{q-1}, \\ \frac{1}{8} \lambda_{q-1} \quad \text{при} \quad \gamma_2 \wedge \omega_2^{q-2} \wedge \omega_2^{q-1}, \\ \frac{1}{16} \lambda_{q-1} \quad \text{при} \quad \gamma_2 \wedge \omega_3^{q-2} \wedge \omega_2^{q-1}, \\ \frac{1}{8} \lambda_{q-1} \quad \text{при} \quad \gamma_2 \wedge \omega_3^{q-1}. \end{array} \right. \quad (67)$$

6. Если нет, то полагаем в случае Γ_1

$$\lambda_q = \left\{ \begin{array}{l} 2 \lambda_{q-1} \quad \text{при} \quad \omega_1^{q-1}, \\ 4 \lambda_{q-1} \quad \text{при} \quad \omega_1^{q-2} \wedge \omega_2^{q-1}, \\ 2 \lambda_{q-1} \quad \text{при} \quad \omega_2^{q-2} \wedge \omega_2^{q-1}, \\ 8 \lambda_{q-1} \quad \text{при} \quad \omega_1^{q-2} \wedge \omega_3^{q-1}, \\ 2 \lambda_{q-1} \quad \text{при} \quad \omega_2^{q-2} \wedge \omega_3^{q-1}, \\ 2 \lambda_{q-1} \quad \text{при} \quad \omega_3^{q-2}. \end{array} \right. \quad (68)$$

а в случае Γ_2

$$\lambda_q = \begin{cases} \frac{1}{4} \lambda_{q-1} & \text{при } \omega_1^{q-1}, \\ \frac{1}{4} \lambda_{q-1} & \text{при } \omega_1^{q-2} \wedge \omega_2^{q-1}, \\ \frac{1}{8} \lambda_{q-1} & \text{при } \omega_2^{q-2} \wedge \omega_2^{q-1}, \\ \frac{1}{4} \lambda_{q-1} & \text{при } \omega_1^{q-2} \wedge \omega_3^{q-1}, \\ \frac{1}{8} \lambda_{q-1} & \text{при } \omega_2^{q-2} \wedge \omega_3^{q-1}, \\ \frac{1}{16} \lambda_{q-1} & \text{при } \omega_3^{q-2}. \end{cases} \quad (69)$$

Выбор величины λ_q на этом заканчивается.

7. После этого осуществляется сам переход (45). Формулы перехода имеют вид:

$$h_{is}^q = h_{is}^{q-1} - \lambda_q \frac{g_h^{q-1}}{g_{q-1}}, \quad (70)$$

$$b_{is}^q = b_{is}^{q-1} - C_b \lambda_q \frac{g_b^{q-1}}{g_{q-1}}, \quad (71)$$

$$l_{is}^q = l_{is}^{q-1} - C_l \lambda_q \frac{g_l^{q-1}}{g_{q-1}}, \quad (72)$$

где C_b и C_l — положительные константы, предназначенные для выравнивания порядков всех трех стоящих здесь вычитаемых *). Рассмотрение q -й итерации закончено.

*) Выбор констант C_b и C_l основан на интуиции вычислителя. В упомянутой выше программе $C_b = 1$, $C_l = 10$. Однако в некоторых ситуациях мы полагаем $C_l = 1$.

8. Перейдем теперь к описанию вычислительного процесса на ε -м шаге "1-го спуска". При этом левую часть перехода (39) или, что то же, перехода (40) будем, конечно, считать известной. Наше описание начнем с рассмотрения первой части ε -го шага - с перехода (43), левая часть которого тогда тоже известна. Сравнивая (43) и (45), мы видим, что для выполнения первой итерации перехода (43) все готово. Но это значит, что мы можем выполнить любое конечное число таких итераций, поскольку, согласно (45), за левую часть каждой итерации, начиная со второй, принимается правая часть предыдущей. Проверка на конец перехода (43) ставится сразу после вычисления величины g_{q-1} по формуле (52) и состоит в следующем. Выясняется, имеет ли место неравенство

$$g_{q-1} \leq \varepsilon, \quad (73)$$

где $\varepsilon > 0$ выбирается достаточно малым ^ж). Если да, то принимается

$$(h_{is}, b_{is}, l_{is}, J_{is}^0) = (h_{is}^{q-1}, b_{is}^{q-1}, l_{is}^{q-1}, J_{is}^0). \quad (74)$$

Если нет, то далее выясняется, была ли предыдущая итерация сороковой по счету на рассматриваемом шаге "1-го спуска", то есть проверяем справедливость равенства

$$q - 1 = 40. \quad (75)$$

Если это равенство справедливо, то принимаем (74), если же оно не выполняется, то идем на проверку условий (53)-(55), то есть на продолжение рассматриваемого итерационного процесса. Описание первой части ε -го шага на этом завершается.

9. Рассмотрим подробно, что собой представляет вторая часть ε -го шага, то есть переход (44). Из сказанного в предыдущем пункте ясно, что мы непременно будем знать левую часть этого перехода перед его выполнением. В правой части (44) неизвестной является лишь одна величина J_{is} . За эту ве-

ж) В упомянутой выше программе $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$.

личину мы принимаем решение линейного алгебраического уравнения, получаемого приравнением к нулю частной производной функции F по J

$$\frac{\partial F}{\partial J} = 4 \sum_{k=1}^n f_k \left(\operatorname{arctg} \frac{x_k+b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x_k-b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x_k+b}{h+1} + \operatorname{arctg} \frac{x_k-b}{h+1} \right), \quad (76)$$

взятой при тех значениях h, b, l , с которыми надлежит выполнить переход (44). Таким образом, вторая часть s -го шага представляет собой вычисление J_{is} по формуле

$$J_{is} = \frac{\sum_{k=1}^n Z_k \left(\operatorname{arctg} \frac{x_k+b_{is}}{h_{is}} - \operatorname{arctg} \frac{x_k-b_{is}}{h_{is}} - \operatorname{arctg} \frac{x_k+b_{is}}{h_{is}+l_{is}} + \right.}{2 \sum_{k=1}^n \left(\operatorname{arctg} \frac{x_k+b_{is}}{h_{is}} - \operatorname{arctg} \frac{x_k-b_{is}}{h_{is}} - \operatorname{arctg} \frac{x_k+b_{is}}{h_{is}+l_{is}} + \right.} + \operatorname{arctg} \frac{x_k-b_{is}}{h_{is}+l_{is}} \left. \right) + \operatorname{arctg} \frac{x_k-b_{is}}{h_{is}+l_{is}})^2} \quad (77)$$

Описание вычислительного процесса на s -м шаге " i -го спуска" закончено.

10. Вернемся к рассмотрению, но уже более подробному, всего " i -го спуска" в целом. Иначе говоря, нас интересует сейчас переход (38), левая часть которого по предположению известна. Сравнивая (38) и (39), мы видим, что для выполнения первого шага рассматриваемого спуска все готово. Но это значит, что мы можем выполнить любое конечное число таких шагов, поскольку, согласно (39), за левую часть каждого шага, начиная со второго, принимается правая часть предыдущего. Проверка на конец перехода (38) ставится сразу после выяснения вопроса с неравенством (73) и заключается в следующем. Если указанное неравенство имеет место, то мы выясняем, является ли текущая итерация первой по счету на текущем шаге " i -го спуска", то есть проверяем справедливость равенства

$$q = 1. \quad (78)$$

Если это равенство справедливо, то далее мы выясняем, является ли текущий шаг первым на рассматриваемом спуске, то есть имеет ли место равенство

$$s = 1. \quad (79)$$

Если да, то принимаем (74) и идем на вторую часть текущего шага, то есть на продолжение "i-го спуска". Если нет, то принимаем

$$(h_i, b_i, l_i, J_i) = (h_{is}^{q-1}, b_{is}^{q-1}, l_{is}^{q-1}, J_{is}^0), \quad (80)$$

что в силу (78) и (4I) может быть записано еще и так:

$$(h_i, b_i, l_i, J_i) = (h_i^{s-1}, b_i^{s-1}, l_i^{s-1}, J_i^{s-1}). \quad (81)$$

Если равенство (78) не выполняется, то принимаем (74) и идем на вторую часть текущего шага, то есть на продолжение "i-го спуска". Если, наконец, неравенство (73) места не имеет, то выясняем, была ли предыдущая итерация сотой по счету на рассматриваемом спуске, то есть проверяем справедливость равенства

$$p - 1 = 100, \quad (82)$$

где p - номер текущей итерации, считая от начала "i-го спуска". Если это равенство справедливо, то принимаем (80), если же оно не выполняется, то идем на проверку равенства (75), то есть на продолжение рассматриваемого спуска. Описание "i-го спуска" закончено.

II. Продолжая описание вычислительного процесса на первом этапе поиска точки Q_a , перейдем к вопросу о стратегии I (см. пункт I, раздел II) поиска точки Q_u . При этом признаком конца поиска точки Q_u является выполнение в ней следующего неравенства:

$$|\text{grad } F(Q_u)| \leq \varepsilon, \quad (83)$$

поскольку "i-й спуск", используемый при упомянутом поиске, привести в точку условного максимума не может. Первый этап поиска точки Q_a , начинается с выполнения "первого спуска"

$$(h_1^0, b_1^0, l_1^0, J_1^0) \rightarrow (h_1, b_1, l_1, J_1), \quad (84)$$

причем в качестве его нулевого приближения берутся, естественно, предполагаемые (вероятные) координаты точки Q_a . Если "первый спуск" закончился без нашего вмешательства, то есть не вследствие выполнения равенства (82), то мы можем, очевидно, принять

$$(h_u, b_u, l_u, J_u) = (h_1, b_1, l_1, J_1), \quad (85)$$

что означает конец первого этапа. Если же "первый спуск" закончился именно вследствие выполнения упомянутого равенства, то результат этого спуска в качестве точки Q_u принят быть не может. Далее первый этап продолжается следующим образом. Проверяем, выполняется ли неравенство

$$J_1^0 \geq 6 \cdot \Delta J, \quad (86)$$

где ΔJ - заранее подобранный минимальный постоянный шаг по переменной J *). Если данное неравенство не выполняется, то в нулевое приближение "первого спуска" вносится изменение

$$J_1^0 = 6 \cdot \Delta J, \quad (87)$$

после чего этот спуск производится заново. Так что не ограничивая общности, можно считать неравенство (86) выполненным с самого начала. Следующие десять спусков делаются уже в этом предположении, причем их нулевые приближения имеют вид

*) Выбор шага ΔJ основан на интуиции вычислителя. В упомянутой выше программе $\Delta J = 2 \cdot 10^{-1}$.

$$(h_1^0, b_1^0, l_1^0, J_1^0) = (h_1^0, b_1^0, l_1^0, J_1^0),$$

$$i = 2, 3, \dots, 11, \quad (88)$$

где

$$\begin{cases} J_{2j}^0 = J_1^0 + j \cdot m \cdot \Delta J, \\ J_{2j+1}^0 = J_1^0 - j \cdot m \cdot \Delta J, \end{cases} \quad (89)$$

$$j = 1, 2, 3, 4, 5,$$

а $m \cdot \Delta J$ — оптимальный шаг по J (среди кратных шагу ΔJ), то есть не позволяющий увеличить его кратность, не нарушая при этом неравенства (86), в которое он подразумевается подставленным вместо ΔJ , так что

$$6 \cdot m \cdot \Delta J \leq J_1^0 < 6 \cdot (m+1) \cdot \Delta J. \quad (90)$$

Ввиду того, что на "первом спуске" рассматриваемого этапа ста итераций для достижения точки Q_{11} оказалось (по предположению) не достаточно, перед выполнением "второго спуска" равенство (82) заменяется на

$$p - 1 = 200, \quad (91)$$

а константа $c_1 = 10$ в формуле (72) — на $c_1 = 1$. Указание замены остаются в силе в течение всего первого этапа. Если ни один из спусков, описанных выше, не приведет нас к точке Q_{11} , то поиск точки Q_a прекращается как безрезультатный. Описание вычислительного процесса на первом этапе закончено.

12. Приступим к описанию второго этапа, то есть перейдем к вопросу о стратегии II (см. пункт I, раздел II) поиска точки Q_a . При этом, разумеется, мы должны предположить, что один из спусков первого этапа закончился, наконец, без нашего вмешательства, так что точкой Q_{11} , удовлетворяющей неравенству (83), мы располагаем. Спуск, доставивший нам эту точку, принимается за "первый спуск" второго этапа. Для выявления точки

Q_a предусматривается выполнение не более десяти новых спусков. Нулевое приближение для каждого из них выбирается, в отличие от приближений (88)–(89), в зависимости от результатов предшествовавших спусков. Заметим, кроме того, что в ходе второго этапа возможны перенумерация сделанных спусков и отбрасывание некоторых из них. Дальнейшее изложение этого этапа ведется с учетом указанных возможностей. Так что, начиная с этого момента, "1-й спуск" второго этапа понимается в более широком смысле. После того, как "1-й спуск" завершен, по мере возможности выясняется, имеют ли место следующие два логических условия:

$$\Omega_1^1 : J_a \geq J_1, \quad (92)$$

$$\Omega_2^1 : J_a \leq J_1. \quad (93)$$

Возвращаясь теперь к "первому спуску", мы можем сказать, что по его окончании имеет место один из следующих четырех случаев: или выполнены одновременно оба условия: Ω_1^1 и Ω_2^1 , или выполнено Ω_1^1 (про Ω_2^1 ничего не известно), или выполнено Ω_2^1 (про Ω_1^1 ничего не известно), или, наконец, про оба условия: Ω_1^1 и Ω_2^1 ничего не известно. В первом случае мы принимаем

$$(h_a, b_a, l_a, J_a) = (h_1, b_1, l_1, J_1), \quad (94)$$

что означает конец второго этапа. Во втором случае мы выполняем "второй спуск" с таким нулевым приближением:

$$(h_2^0, b_2^0, l_2^0, J_2^0) = (h_1, b_1, l_1, J_1 + \Delta J). \quad (95)$$

В третьем случае сперва проверяем, справедливо ли неравенство

$$J_1 \geq 2 \cdot \Delta J. \quad (96)$$

Если да, то выполняем "второй спуск" со следующим нулевым приближением:

$$(h_2^0, b_2^0, l_2^0, J_2^0) = (h_1, b_1, l_1, J_1 - \Delta J). \quad (97)$$

Если нет, то накладываем условие Ω_1^1 *) и далее поступаем так же, как в первом случае. Наконец, в четвертом случае сначала проверяем, справедливо ли неравенство

$$J_1 \geq J_1^0. \quad (98)$$

Если да, то выполняем "второй спуск" с тем же нулевым приближением, что и во втором случае. Если нет, то при выполнении (96) "второй спуск" делается с нулевым приближением (97), а при нарушении (96) мы накладываем условие Ω_1^1 *) и далее поступаем так же, как во втором случае.

13. Теперь остановимся на анализе, который проводится по окончании "второго спуска" рассматриваемого этапа. Предположим вначале, что упомянутый спуск завершился вследствие выполнения равенства (82). Тогда, если за нулевое приближение этого спуска была принята точка (97), накладывается условие Ω_1^1 и далее поступаем так же, как в первом и во втором случаях (см. пункт 12). Если же за нулевое приближение "второго спуска" была принята точка (95), то накладывается условие Ω_2^1 и далее поступаем так же, как в первом и третьем случаях (см. пункт 12). Предположим теперь, что "второй спуск" закончился без нашего вмешательства и, следовательно, дал нам еще одну точку условного минимума. Очевидно, мы можем занумеровать сделанные удачно спуски таким образом, чтобы имело место неравенство.

$$J_1 < J_2, \quad (99)$$

после чего, как и в предыдущем пункте, возможны следующие четыре случая. Или выполнены одновременно два условия: Ω_1^1 и

*) Так как нарушение этого условия в виду малости J_1 становится маловероятным.

Ω_2^2 или выполнено Ω_1^1 (про Ω_2^2 ничего не известно), или выполнено Ω_2^2 (про Ω_1^1 ничего не известно), или, наконец, про оба условия: Ω_1^1 и Ω_2^2 ничего не известно. В первом случае мы принимаем

$$(h_a, b_a, l_a, J_a) = \begin{cases} (h_1, b_1, l_1, J_1), & \text{если } F_1 < F_2, \\ (h_2, b_2, l_2, J_2), & \text{если } F_1 > F_2, \end{cases} \quad (100)$$

где введено обозначение

$$F_1 = F(Q_1) = F(h_1, b_1, l_1, J_1), \quad (101)$$

что означает конец второго этапа. Во втором случае мы выполняем "третий спуск" с таким нулевым приближением:

$$(h_3^0, b_3^0, l_3^0, J_3^0) = (h_2, b_2, l_2, J_2 + \Delta J). \quad (102)$$

В третьем случае сперва проверяем, справедливо ли неравенство (96). Если да, то "третий спуск" выполняется со следующим нулевым приближением:

$$(h_3^0, b_3^0, l_3^0, J_3^0) = (h_1, b_1, l_1, J_1 - \Delta J). \quad (103)$$

Если нет, то накладываем условие Ω_1^1 и далее поступаем так же, как в первом случае (см. настоящий пункт). Наконец, в четвертом случае, если $F_1 > F_2$, то выполняем "третий спуск" с тем же нулевым приближением, что и во втором случае (см. настоящий пункт); если же $F_1 < F_2$, то сначала проверяем, справедливо ли неравенство (96). Если да, то "третий спуск" делается с нулевым приближением (103), а если нет, то накладываем условие Ω_1^1 и далее поступаем так же, как во втором случае (см. настоящий пункт).

14. Перейдем к анализу, который проводится по окончании "третьего спуска" рассматриваемого этапа. Вначале будем предполагать, что упомянутый спуск завершился вследствие выполне-

ния равенства (82). Тогда, если за нулевое приближение этого спуска была принята точка (I03), накладывается условие Ω_1^1 и далее поступаем так же, как в первом и втором случаях (см. пункт I3). Если же за нулевое приближение "третьего спуска" была принята точка (I02), то накладывается условие Ω_2^2 и далее поступаем так же, как в первом и третьем случаях (см. пункт I3). Предположим теперь, что "третий спуск" закончился, как и первые два, без нашего вмешательства и, следовательно, дал нам еще одну (третью) точку условного минимума. Очевидно, мы можем занумеровать сделанные удачно спуски таким образом, чтобы выполнялась цепочка неравенств

$$J_1 < J_2 < J_3, \quad (104)$$

после чего, как и в двух предыдущих пунктах, возможны следующие четыре случая. Или выполнены одновременно два условия:

Ω_1^1 и Ω_2^3 , или выполнено Ω_1^1 (про Ω_2^3 ничего не известно), или выполнено Ω_2^3 (про Ω_1^1 ничего не известно), или, наконец, про оба условия: Ω_1^1 и Ω_2^3 ничего не известно.

В первом случае, если $F_1 < F_2 > F_3$, мы принимаем

$$(h_a, b_a, l_a, J_a) = \begin{cases} (h_1, b_1, l_1, J_1), & \text{если } F_1 < F_3, \\ (h_3, b_3, l_3, J_3), & \text{если } F_1 > F_3; \end{cases} \quad (105)$$

если $F_1 > F_2 < F_3$, то вначале делаем дополнительный спуск с таким нулевым приближением:

$$(h_{\text{доп}}^0, b_{\text{доп}}^0, l_{\text{доп}}^0, J_{\text{доп}}^0) = (h_2, b_2, l_2, J_{\text{пар}}), \quad (106)$$

где $J_{\text{пар}}$ - абсцисса вершины параболы

$$F = e_1 J^2 + e_2 J + e_3, \quad (107)$$

проходящей через точки с координатами $(J_1, F_1), (J_2, F_2), (J_3, F_3)$, так что

$$J_{\text{пар}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} F_2 - F_1 & F_3 - F_2 \\ J_2^2 - J_1^2 & J_3^2 - J_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_2 - F_1 & F_3 - F_2 \\ J_2 - J_1 & J_3 - J_2 \end{vmatrix}}, \quad (108)$$

после чего принимаем

$$(h_a, b_a, l_a, J_a) = \begin{cases} (h_{\text{доп}}, b_{\text{доп}}, l_{\text{доп}}, J_{\text{доп}}), & \text{если } F_{\text{доп}} < F_2, \\ (h_2, b_2, l_2, J_2), & \text{если } F_{\text{доп}} > F_2; \end{cases} \quad (109)$$

если $F_1 > F_2 > F_3$, то сперва выясняем, будет ли парабола (107) выпуклой книзу, то есть имеет ли место неравенство

$$F_2 < F_1 + \frac{F_3 - F_1}{J_3 - J_1} (J_2 - J_1), \quad (110)$$

если да, то делаем дополнительный спуск с таким нулевым приближением:

$$(h_{\text{доп}}^0, b_{\text{доп}}^0, l_{\text{доп}}^0, J_{\text{доп}}^0) = (h_3, b_3, l_3, J_{\text{пар}}), \quad (111)$$

после чего принимаем

$$(h_a, b_a, l_a, J_a) = \begin{cases} (h_{\text{доп}}, b_{\text{доп}}, l_{\text{доп}}, J_{\text{доп}}), & \text{если } F_{\text{доп}} < F_3, \\ (h_3, b_3, l_3, J_3), & \text{если } F_{\text{доп}} > F_3, \end{cases} \quad (112)$$

если нет, то сразу принимаем

$$(h_a, b_a, l_a, J_a) = (h_3, b_3, l_3, J_3); \quad (113)$$

если, наконец, $F_1 < F_2 < F_3$, то и здесь выясняем, будет ли парабола (107) выпуклой книзу, если да, то делаем дополнительный спуск с таким нулевым приближением:

$$(h_{\text{доп}}^0, b_{\text{доп}}^0, l_{\text{доп}}^0, J_{\text{доп}}^0) = (h_1, b_1, l_1, J_{\text{пар}}), \quad (114)$$

после чего принимаем

$$(h_a, b_a, l_a, J_a) = \begin{cases} (h_{\text{доп}}^0, b_{\text{доп}}^0, l_{\text{доп}}^0, J_{\text{доп}}^0), & \text{если } F_{\text{доп}} < F_1, \\ (h_1, b_1, l_1, J_1), & \text{если } F_{\text{доп}} > F_1, \end{cases} \quad (115)$$

если нет, то принимаем

$$(h_a, b_a, l_a, J_a) = (h_1, b_1, l_1, J_1). \quad (116)$$

Рассмотренный случай означает, таким образом, конец второго этапа.

Во втором случае, если $F_1 < F_2 > F_3$, "первый спуск" от дальнейшего участия в анализе отстраняем, а номера двух других уменьшаем на единицу, сохраняя при этом условие Ω_1^1 , после чего поступаем так же, как во втором случае (см. пункт 13); если $F_1 > F_2 < F_3$, то вначале делаем дополнительный спуск с нулевым приближением (106), а затем выполняем "четвертый спуск" со следующими нулевым приближением:

$$(h_4^0, b_4^0, l_4^0, J_4^0) = (h_3, b_3, l_3, J_3 + \Delta J); \quad (117)$$

если $F_1 > F_2 > F_3$, то вначале выясняем, будет ли парабола (107) выпуклой книзу, если да, то делаем дополнительный спуск с нулевым приближением (111), если нет, то не делаем, затем "первый спуск" от дальнейшего участия в анализе отстраняем, а номера двух других уменьшаем на единицу, сохраняя при этом условие Ω_1^1 , после чего поступаем так же, как во втором

случае (см. пункт I3); если, наконец, $F_1 < F_2 < F_3$, то накладываем условие Ω_2^3 и далее поступаем так же, как в первом случае (см. настоящий пункт).

В третьем случае, если $F_1 < F_2 > F_3$, "третий спуск" от дальнейшего участия в анализе отстраняем, а условие Ω_2^3 заменяем условием Ω_2^2 , после чего поступаем так же, как в третьем случае (см. пункт I3); если $F_1 > F_2 < F_3$, то вначале делаем дополнительный спуск с нулевым приближением (I06), после чего проверяем, справедливо ли неравенство (96), если справедливо, то выполняем "четвертый спуск" со следующим нулевым приближением:

$$(h_4^0, b_4^0, l_4^0, J_4^0) = (h_1, b_1, l_1, J_1 - \Delta J), \quad (118)$$

если не справедливо, то накладываем условие Ω_1^1 и принимаем (I09); если $F_1 > F_2 > F_3$, то накладываем условие Ω_1^1 и далее поступаем так же, как в первом случае (см. настоящий пункт); если, наконец, $F_1 < F_2 < F_3$, то сначала выясняем, будет ли парабола (I07) выпуклой книзу, если да, то делаем дополнительный спуск с нулевым приближением (II4), если нет, то не делаем, затем "третий спуск" от дальнейшего участия в анализе отстраняем, а условие Ω_2^3 заменяем условием Ω_2^2 , после чего поступаем так же, как в третьем случае (см. пункт I3).

В четвертом случае, если $F_1 > F_2 < F_3$ *) вначале делаем дополнительный спуск с нулевым приближением (I06), затем проверяем, имеет ли место неравенство $F_1 > F_3$, если да, то выполняем "четвертый спуск" с нулевым приближением (II7), если нет, то далее проверяем, справедливо ли неравенство (96), если справедливо, то выполняем "четвертый спуск" с нулевым приближением (II8), если же не справедливо, то накладываем условие Ω_1^1 и выполняем "четвертый спуск" с нулевым приближением (II7); если $F_1 > F_2 > F_3$, то накладываем условие Ω_1^1 и далее поступаем так же, как во втором случае (см. настоящий пункт); если, наконец, $F_1 < F_2 < F_3$, то накладываем условие Ω_2^3 и далее поступаем так же, как в третьем случае (см.

*) Ситуация $F_1 < F_2 > F_3$ в этом случае, очевидно, невозможна.

настоящий пункт).

15. Следующий анализ проводится по окончании "четвертого спуска" и является последним. Предположим сначала, что упомянутый спуск оказался неудачным, то есть завершился вследствие выполнения равенства (82). Тогда, если за нулевое приближение этого спуска была принята точка (II8), накладываем условие Ω_1^1 и далее поступаем так же, как в первом и втором случаях (см. пункт I4). Если же за нулевое приближение "четвертого спуска" была принята точка (II7), то накладываем условие Ω_2^3 и далее поступаем так же, как в первом и третьем случаях (см. пункт I4). Предположим теперь, что "четвертый спуск" оказался удачным, и мы получили в результате очередную (четвертую) точку условного минимума. Запишем все удачные спуски таким образом, чтобы выполнялась цепочка неравенств

$$J_1 < J_2 < J_3 < J_4. \quad (119)$$

Формально и здесь, как в трех предыдущих пунктах, можно назвать следующие четыре случая. Или выполнены одновременно два условия: Ω_1^1 и Ω_2^4 , или выполнено Ω_1^1 (про Ω_2^4 ничего не известно), или выполнено Ω_2^4 (про Ω_1^1 ничего не известно), или, наконец, про оба условия: Ω_1^1 и Ω_2^4 ничего не известно. Фактически же, как будет видно из дальнейшего изложения, имеет место один из трех последних случаев. Так что первый случай мы рассматривать не будем. Заметим, кроме того, следующее: какой бы случай ни имел место, при этом обязательно окажется одна из двух ситуаций. Либо $F_1 > F_2 < F_3$, то есть прежний "четвертый спуск" выполнялся с нулевым приближением (II7), либо $F_2 > F_3 < F_4$, то есть прежний "четвертый спуск" выполнялся с нулевым приближением (II8).

Во втором случае, если $F_1 > F_2 < F_3$ и $F_3 > F_4$, первые два спуска от дальнейшего участия в анализе отстраняем, а номера двух других уменьшаем на два, сохраняя при этом условие Ω_1^1 , после чего поступаем так же, как во втором случае (см. пункт I3); если $F_1 > F_2 < F_3$ и $F_3 < F_4$, то накладываем условие Ω_2^4 и принимаем (I09) ^{ж)}.

ж) Ситуация $F_2 > F_3 < F_4$ в этом случае, очевидно, невозможна.

В третьем случае, если $F_2 > F_3 < F_4 \wedge F_1 > F_2$, накладываем условие Ω_1^1 и принимаем (II2); если $F_2 > F_3 < F_4 \wedge F_1 < F_2$, то последние два спуска от дальнейшего участия в анализе отстраняем, а условие Ω_2^4 заменяем условием Ω_2^2 , после чего поступаем так же, как в третьем случае (см. пункт I3) *).

В четвертом случае, если $F_1 > F_2 < F_3 \wedge F_3 > F_4$, накладываем условие Ω_1^1 и далее поступаем так же, как во втором случае (см. настоящий пункт); если $F_1 > F_2 < F_3 \wedge F_3 < F_4$, то "четвертый спуск" от дальнейшего участия в анализе отстраняем и накладываем условие Ω_2^3 , после чего поступаем так же, как в третьем случае (см. пункт I4); если $F_2 > F_3 < F_4 \wedge F_1 > F_2$, то "первый спуск" от дальнейшего участия в анализе отстраняем, а номера трех других уменьшаем на единицу, затем накладываем условие Ω_1^1 и далее поступаем так же, как во втором случае (см. пункт I4); если, наконец, $F_2 > F_3 < F_4 \wedge F_1 < F_2$, то накладываем условие Ω_2^4 и далее поступаем так же, как в третьем случае (см. настоящий пункт). Описание вычислительного процесса на втором этапе закончено.

16. В заключение сделаем одно замечание, касающееся обоих этапов поиска. Если среди координат результата какого-то спуска окажутся отрицательные (или равные нулю), то равенство (82) заменяется на (9I), а константа $C_1=10$ в формуле (72) - на $C_1=1$, после чего упомянутый спуск повторяется. Указанные замены остаются в силе до окончания повторного спуска.

III. Иллюстрация работы и проверка эффективности алгоритма

1. По обратной задаче, рассмотренной в данной работе автором была проведена серия методических расчетов на ЭВМ "Минск-22". Исходные данные брались не из практических измерений, а получались вычислением по формуле (34) с заданными наперед значениями величин h, b, l, J . Иначе говоря, вначале решалась прямая задача, так что ответ обратной задачи был заранее известен. Сравнение с ним результатов, полученных по описанному выше алгоритму, явилось надежной проверкой эффективности последнего.

* Ситуация $F_1 > F_2 < F_3$ в этом случае, очевидно, невозможна.

2. Проиллюстрируем работу проверяемого алгоритма на примере одного расчета из упомянутой выше серии. В качестве искомого был взят пласт с такими параметрами:

$$(h, b, l, J) = (1; 0,5; 2; 1). \quad (120)$$

Исходные данные - значения функции $z(x)$ - были вычислены по формуле (34) в десяти точках положительной полуоси x , причем вычисленные значения затем умышленно округлялись таким образом, чтобы относительная погрешность округления ϵ_1 оказалась примерно равной

$$\epsilon_1 \approx 1\%. \quad (121)$$

При наложении на исходные данные условия (I21) мы исходили из того, что практические измерения функции $z(x)$ с большей точностью пока вряд ли возможны как из-за несовершенства измерительных приборов, так и из-за всевозможных помех.

На первом этапе поиска в качестве нулевого приближения "первого спуска" была взята точка

$$(h_1^0, b_1^0, l_1^0, J_1^0) = (0,9; 0,5; 2,5; 0,75). \quad (122)$$

На рисунке 3 поперечное сечение пласта (I20) обозначается сплошными, а пласта (I22) пунктирными линиями.

В результате "первого спуска" была получена точка условного минимума с координатами:

$$(h_1, b_1, l_1, J_1) = (0,9027; 0,5804; 2,3411; 0,7504). \quad (123)$$

При этом оказалось

$$F_1 = 0,00054, \quad (124)$$

$$F_{1-1} = 42, \quad (125)$$

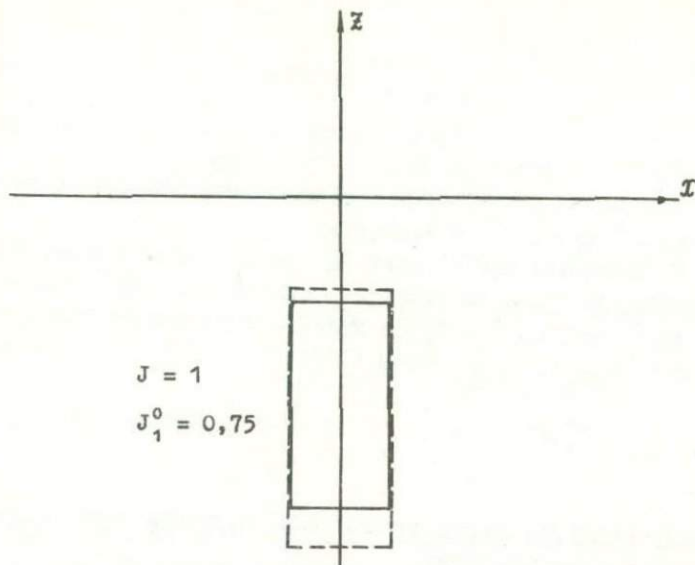


Рис.3

где P_1 - номер итерации, во время которой закончился "первый спуск". Таким образом, уже после "первого спуска" цель первого этапа была достигнута.

3. Сделанный спуск был принят за "первый спуск" второго этапа. Поскольку про условия Ω_1^1 и Ω_2^1 ничего пока не было известно, то далее мы вышли на четвертый случай (см. пункт I2). Неравенство (98) оказалось справедливым, поэтому нулевое приближение "второго спуска" было взято с учетом (95):

$$(h_2^0, b_2^0, l_2^0, J_2^0) = (0,9027; 0,5804; 2,3411; 0,9504). \quad (126)$$

В результате "второго спуска" была получена точка условного минимума с координатами:

$$(h_2, b_2, l_2, J_2) = (0,9930; 0,5212; 2,0107; 0,9505). \quad (127)$$

При этом оказалось

$$F_2 = 0,00045, \quad (128)$$

$$F_2 - 1 = 30. \quad (129)$$

Выполнение неравенства (99) позволило нам нумерацию сделанных спусков пока не изменять.

4. Поскольку про условия Ω_1^1 и Ω_2^2 ничего пока не было известно, то далее мы вышли на четвертый случай (см. пункт I3). Так как оказалось $F_1 > F_2$, то нулевое приближение "третьего спуска" было взято с учетом (I02):

$$(h_3^0, b_3^0, l_3^0, J_3^0) = (0,9930; 0,5212; 2,0107; 1,1505). \quad (130)$$

В результате "третьего спуска" была получена точка условного минимума с координатами:

$$(h_3, b_3, l_3, J_3) = (1,0545; 0,4722; 1,8020; 1,1525). \quad (131)$$

При этом оказалось

$$F_3 = 0,00047, \quad (132)$$

$$F_3 - 1 = 69. \quad (133)$$

Выполнение неравенства (I04) позволило нам нумерацию сделанных спусков пока не изменять.

5. Поскольку про условия Ω_1^1 и Ω_2^3 ничего пока не было известно, то далее мы вышли на четвертый случай (см. пункт I4). Так как оказалось $F_1 > F_2 < F_3$, то вначале сделали дополнительный спуск, нулевое приближение которого было взято с учетом (I06). В результате дополнительного спуска была получена точка условного минимума с координатами:

$$(h_{\text{доп}}, b_{\text{доп}}, l_{\text{доп}}, J_{\text{доп}}) = (1,0175; 0,5081; 1,9091; 1,0167). \quad (134)$$

При этом оказалось

$$F_{\text{доп}} = 0,00047, \quad (135)$$

$$P_{\text{доп}} - 1 = 58. \quad (136)$$

Затем проверили, имеет ли место неравенство $F_1 > F_3$. Так как оказалось, что имеет, то нулевое приближение "четвертого спуска" было взято с учетом (II7):

$$(h_4^0, b_4^0, l_4^0, J_4^0) = (1,0545; 0,4722; 1,8020; 1,3525). \quad (137)$$

В результате "четвертого спуска" была получена точка условного минимума с координатами:

$$(h_4, b_4, l_4, J_4) = (1,1085; 0,4375; 1,6300; 1,3615). \quad (138)$$

При этом оказалось

$$F_4 = 0,00054, \quad (139)$$

$$P_4 - 1 = 76. \quad (140)$$

Выполнение неравенства (II9) позволило нам нумерацию следящих спусков пока не изменять.

6. Поскольку про условия Ω_1^1 и Ω_2^4 ничего пока не было известно, то далее мы вышли на четвертый случай (см. пункт I5). Так как оказалось $F_1 > F_2 < F_3$ и $F_3 < F_4$, то "четвертый спуск" мы от дальнейшего участия отстранили и наложили условие Ω_2^3 , после чего вышли на третий случай анализа трех спусков (см. пункт I4). Ввиду того, что дополнительный спуск с нулевым приближением (I06) был сделан ранее, мы сразу перешли к проверке справедливости неравенства (96). Оно оказалось справедливым, поэтому нулевое приближение нового "четвертого спуска" (а фактически - пятого) было взято с учетом (II8):

$$(h_4^0, b_4^0, l_4^0, J_4^0) = (0,9027; 0,5804; 2,3411; 0,5504). \quad (141)$$

В результате нового "четвертого спуска" была получена точка с координатами:

$$(h_4, b_4, l_4, J_4) = (0,7738; 0,6684; 2,8642; 0,5527). \quad (142)$$

При этом оказалось

$$F_4 = 0,00122, \quad (143)$$

$$P_4 - 1 = 100, \quad (144)$$

то есть новый "четвертый спуск" завершился вследствие выполнения равенства (82). Так как нулевое приближение этого спуска бралось с учетом (II8), то далее мы наложили условие Ω_1^1 и вышли на первый случай анализа трех спусков (новый "четвертый спуск" мы исключили из рассмотрения как неудачный). Ввиду того, что дополнительный спуск с нулевым приближением (I06) был сделан ранее, мы сразу перешли к проверке, имеет ли место неравенство $F_{\text{доп}} < F_2$. Так как оказалось, что не имеет, то с учетом (I09) было принято

$$(h_a, b_a, l_a, J_a) = (0,9930; 0,5212; 2,0107; 0,9505). \quad (145)$$

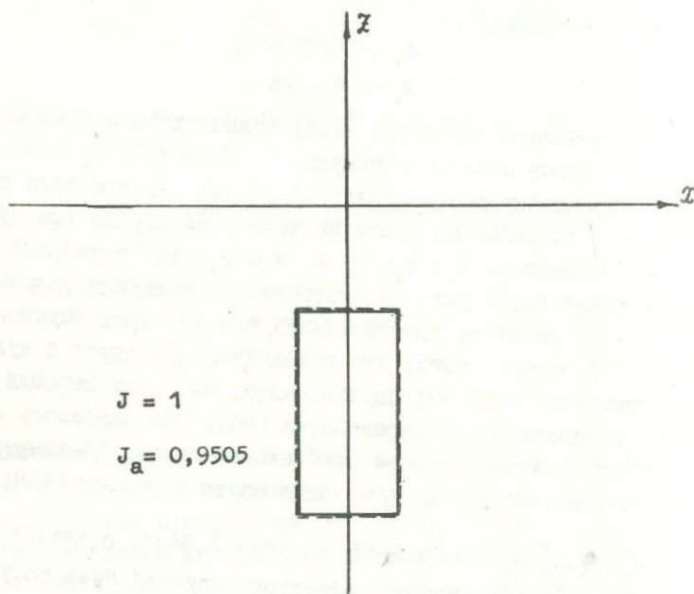


Рис. 4

На рисунке 4 поперечное сечение пласта (I20) обозначается сплошными, а пласта (I45) пунктирными линиями.

Л и т е р а т у р а

И. ТАММ И.Е. Основы теории электричества. М., "Наука", 1966.

РАЗДЕЛ III

Н.Б.Пивоварова, Т.П.Пухначева

СГЛАЖИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ЛОКАЛЬНЫМИ СПЛАЙН-ФУНКЦИЯМИ

Задача, сглаживания функции, значения которой известны с некоторой ошибкой в случайно расположенных точках области измерений, возникла при решении обратной кинематической задачи сейсмологии. Остановимся кратко на особенностях ее постановки в этом случае.

Решая обратную кинематическую задачу, вычисляют значения скорости распространения сейсмической волны в произвольно расположенных точках двумерной области Ω . Значения функции скорости $f(x, y)$ в некоторой точке $(x_i, y_i) \in \Omega$ получают с ошибкой d_i .

Алгоритм вычисления скорости обычно позволяет оценить величины d_i различные для каждой точки (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, r$. Известно, что функция $f(x, y)$ должна быть непрерывной и иметь непрерывную первую производную.

Подробно задачи интерполяции и сглаживания рассмотрены в работах [1] - [4]. Нами для решения одной из таких задач предлагается применять аппарат локальных сплайнов Рябенского.

Вначале рассмотрим задачу интерполяции функции, заданной в узлах равномерной сетки. Для простоты возьмем функцию одной переменной $f(x)$ на интервале $[0, N]$ (N - натуральное

число), обозначим этот интервал Ω . Зададим на Ω модельную сетку с единичным шагом по x , узлы сетки $x_j = j$, $j = 0, \dots, N$. Сетку с произвольным шагом можно свести к модельной линейным преобразованием координат.

Обозначим через $H_1(\Omega)$ линейное пространство всех функций $\varphi(x)$ таких, что:

1. В каждой ячейке $[j, j + 1]$ модельной сетки функция $\varphi(x)$ — кубический многочлен

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^3 a_j^k (x - j)^k;$$

$$2. \varphi(x) \in C_1(\Omega);$$

$$3. \varphi'(j) = \varphi(j + 1) - \varphi(j), \quad j = 0, \dots, N-1;$$

$$\varphi'(N) = \varphi(N) - \varphi(N-1), \quad \text{где} \quad \varphi'(x) \equiv \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Эти условия однозначно определяют функцию $\varphi(x)$ на Ω . Пространство $H_1(\Omega)$ имеет конечную размерность $N + 1$. Введем в нем базис из функций $\eta_m(x)$ (локальных сплайнов):

$$\eta_m(x) = \begin{cases} (x-m+2)^3 - (x-m+2)^2 & m-2 \leq x \leq m-1 \\ (x-m+1) - 2(x-m+1)^3 + 2(x-m+1)^2 & m-1 < x < m \\ 1 - (x-m) + (x-m)^3 - (x-m)^2 & m \leq x \leq m+1 \\ 0 & \text{в остальных точках; при } m = 0, \dots, N. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\eta_m(j) = 0$ при $j \neq m$, $\eta_m(m) = 1$, $\eta_m'(m) = -1$, $\eta_m'(m-1) = 1$, $\eta_m'(j) = 0$ при $j = 0, \dots, m-2, m+1, \dots, N$.

Тем самым функции $\eta_m(x)$ действительно принадлежат $H_1(\Omega)$ и являются линейно независимыми. Все функции $\eta_0(x), \dots, \eta_N(x)$ имеют конечный носитель, $\eta_m''(x)$ существует и интегрируема с квадратом на Ω . Обозначим через Ω_2 интервал $[-2, N + 2]$. Ясно, что Ω_2 есть объединение носителей всех функций $\eta_0(x), \dots, \eta_N(x)$. Заметим, что на границе Ω_2 функции из $H_1(\Omega)$ обращаются в нуль вместе с первой производной.

Пусть в узлах модельной сетки известны значения $f(x_k) = f_k$, $k = 0, \dots, N$. Тогда можно построить единственную функцию $\varphi(x) \in H_1(\Omega)$, $\varphi(x) = \sum_{k=0}^N f_k \eta_k(x)$. Подобная ло-

кальная интерполяция функций впервые рассмотрена В.С.Рябенки-
 м [5] (см. также [6]). Им установлено, что если $f(x) \in W_2^2(\Omega)$
 и $\Phi_h = \sum_{k=0}^N f_k \eta_k^h(x)$, где $\eta_k^h(x)$ базисные функции для
 сетки с шагом h , то справедливо асимптотическое равенство
 при $h \rightarrow 0$

$$\|f - \Phi_h\|_{C(\Omega)} = o(h).$$

Пусть теперь Ω уже двумерная область, лежащая внутри
 квадрата $[0, N] \times [0, N]$ с нанесенной на него модельной сет-
 кой с единичными шагами по x и y . В двумерном случае в каче-
 стве базисных функций возьмем функции $\eta_{mk}(x, y) = \eta_m(x) \times$
 $\times \eta_k(y)$. В этом случае Ω_2 есть квадрат $[-2, N+2] \times [-2,$
 $N+2]$. Применим построенные выше локальные сплайны к зада-
 че сглаживания. Предположим, что значения функции в узлах
 модельной сетки нами не известны. Пусть, помимо сетки в Ω
 выделены произвольным образом точки (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, r$, в
 которых заданы значения $f(x_i, y_i) = f_i$ с некоторой ошиб-
 кой d_i . Построим функцию $\varphi(x, y) \in H_1(\Omega)$, такую, что

$$\int_{\Omega_2} (\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2) d\Omega$$

имеет минимум, при условии

$$\sum_{i=1}^r \frac{(\varphi(x_i, y_i) - f_i)^2}{d_i^2} \leq S,$$

где S - заданная константа.

Эта задача эквивалентна следующей: найти минимум функцио-
 нала

$$\int_{\Omega_2} (\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2) d\Omega + \rho \left(\sum_{i=1}^r \frac{(\varphi(x_i, y_i) - f_i)^2}{d_i^2} - S \right), \quad (1)$$

где ρ - множитель Лагранжа.

Если существует более четырех точек (x_i, y_i) не лежа-
 щих на одной прямой, то, при фиксированном $\rho > 0$, решение

задачи (I) существует и единственно (см. [7]).

Подставив в (I) разложение $\varphi(x, y) = \sum_{m, k} \varphi_{mk} \eta_{mk}(x, y)$ и записав условие минимума по всем переменным получим систему уравнений

$$\sum_{m, k} \varphi_{mk} D_{\rho}(m, n; k, l) = \rho \sum_{i=1}^r \frac{f_i}{d_i^2} \eta_{n1}(x_i, y_i) \quad n, l=0, \dots, N \quad (2)$$

$$\psi(\varphi_{00}, \dots, \varphi_{NN}) \equiv \sum_{i=1}^r \frac{\sum_{m, k} \varphi_{mk} \eta_{mk}(x_i, y_i) - f_i}{d_i^2} = S. \quad (3)$$

Здесь

$$D_{\rho}(m, n; k, l) \equiv \iint_{\Omega_2} [(\eta_{mk})_{xx}(\eta_{n1})_{xx} + (\eta_{mk})_{yy}(\eta_{n1})_{yy}] d\Omega + \\ + \rho \sum_{i=1}^r \frac{\eta_{mk}(x_i, y_i) \eta_{n1}(x_i, y_i)}{d_i^2}$$

элемент матрицы размерности $(N+1)^2 \times (N+1)^2$. Полученная система состоит из линейной части (2), и нелинейного уравнения (3) в которое ρ входит неявно. Матрица линейной части (2) симметрична и в каждой ее строке стоит всего 25 ненулевых элементов на местах, которые легко вычисляются. Так как при фиксированном $\rho > 0$ решение задачи (I) существует и единственно, то в этих условиях указанная матрица будет невырождена.

Определим при данном $\rho > 0$ решение системы (2) и подставим результаты в (3). Мы приходим к уравнению относительно ρ вида

$$\psi(\varphi_{00}(\rho), \dots, \varphi_{NN}(\rho)) \equiv \Psi(\rho) = S.$$

Подобные задачи в общей постановке исследовались В.А. Морозовым (см. [8], а также цитированную там литературу). Им показано, что при $0 < \rho < \infty$ функция $\Psi(\rho)$ является выпуклой по

ρ и строго убывающей. Для нахождения ρ можно применять метод Ньютона. Там же указывается, что целесообразней применять метод Ньютона к уравнению $1/\Psi(\rho) = S^{-1}$.

Если начальное приближение $\rho_0 > 0$, то и все последующие приближения $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p, \dots$ также положительны. Таким образом на каждом шаге итерационного процесса можно с помощью решения системы (2), матрица которой будет невырождена, исключать из (3) неизвестные $\varphi_{00}, \dots, \varphi_{NN}$. По известному ρ_p следующее приближение ρ_{p+1} определяется из уравнения

$$\rho_{p+1} = \rho_p - \frac{[S - \Psi(\rho_p)]}{S} \cdot \frac{\Psi(\rho)}{d\Psi/d\rho} \Big|_{\rho=\rho_p},$$

$$\frac{d\Psi}{d\rho} = \sum_{m,k} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{mk}} \frac{d\varphi_{mk}}{d\rho}.$$

В свою очередь $d\varphi_{mk}/d\rho$ при $\rho = \rho_p$ можно определить из линейной системы

$$\sum_{m,k} \frac{d\varphi_{mk}}{d\rho} D_{\rho}(m,n;k,l) = \sum_{i=1}^r \frac{\varphi_i - f_i}{d_i^2} \eta_{ni}(x_i, y_i) \quad (4)$$

$$n, l = 0, \dots, N,$$

где элементы матрицы $D_{\rho}(m,n;k,l)$ вычисляются при $\rho = \rho_p$ и принято обозначение

$$\varphi_i \equiv \sum_{m,k} \varphi_{mk}(\rho_p) \cdot \eta_{mk}(x_i, y_i).$$

Заметим, что матрицы систем (2) и (4) совпадают.

По описанному алгоритму составлен комплекс программ для БЭСМ-6 на языке АЛГОЛ. Комплекс состоит из 4-х программ: вычисление коэффициентов $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ и $\varphi_{00}, \dots, \varphi_{NN}$ для функции одной и двух переменных, определение значения функции в произвольной точке одномерной или двумерной области соответственно.

Составленные программы оформлены в виде стандартных процедур. По ним просчитан ряд тестов, а также реальные примеры.

Т а б л и ц а

Функция	Число заданных точек	Ошибка (абсолютная)	Ошибка после счета	Число точек сетки	Вычисленное значение ρ	Число итераций	Время счета
$ \cos 2x , 0 \leq x \leq 1.8$	10	0,1	0,05	22	0,037	15	84 "
- " -	10	0,1	0,05	44	0,005	10	30 "
- " -	10	0,1	0,05	11	0,241	16	46 "
$\begin{cases} \cos x & 0 \leq x \leq 0.8 \\ x & 0.8 < x \leq 1.8 \end{cases}$	10	0,1	0,07	100	0,001	1	35 "
$\sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) + x^2 + 1$ $0 \leq x, y \leq 1$	400	0,2	0,02	6x6	0,5	2	5'
$\cos \pi x \cdot \cos \pi y, 0 \leq x, y \leq 1$	18	0,1	0,071	7x7	0,008	1	1'27"
1) реальный пример функции одной переменной	34	0,5	-	15	0,0019	4	24 "
- " -	34	0,35	-	15	0,105	10	30 "
- " -	34	0,25	-	15	0,405	15	30 "
2) реальный пример функций двух переменных.	80-100	0,3	-	6x7	0,75	2	1'30"-3'

При этом обнаружено, что величина параметра ρ сильно меняется. Замечена зависимость ρ от функции, от сетки и от величины ошибок в заданных значениях функции. В тестовых примерах в значения точно известной функции вносилась случайная ошибка, распределенная по нормальному закону с заданными параметрами. После сглаживания точность определения функции была в 2-3 раза выше, чем точность задания. Программы использовались в практических расчетах при построении скорости распространения возмущения в верхней мантии земли в районе Камчатки. Все полученные характеристики приведены в таблице.

В заключение выражаем благодарность В.А.Василенко и В.С.Рябенькому за неоднократные полезные обсуждения данной задачи.

Л и т е р а т у р а

1. АЛЬБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.
2. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, "Наука", 1972.
3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Экстремальное свойство бикубических многозвенников и задача сглаживания. - В сб.: "Вычислительные системы". Вып. 42, Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1970, 109-158.
4. ВАСИЛЕНКО В.А., ПЕРЕЛОМОВ Е.М. Сплайн-интерполяция в прямоугольной области с хаотически расположенными узлами. - В сб.: "Машинная графика и ее применение". Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973, 96-103.
5. РЯБЕНЬКИЙ В.С., ФИЛИПОВ А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
6. РЯБЕНЬКИЙ В.С. Локальные формулы гладкого восполнения и гладкой интерполяции функций по их значениям в узлах неравномерной прямоугольной сетки. Препринт №21, ИПМ АН СССР, 1974.

7. ANSELONE P.M. and LAURENT P.J. A General Method for the Construction of Interpolating or Smoothing Spline-Functions. Numer.Math., 12(1), 1968, 66-82.
8. МОРОЗОВ В.А. О принципе невязки при решении несовместных систем уравнений методом регуляризации. Ж.вн-числит.математ. и математич. физ., 1973, 13, №5, 1099-1111.

М.Е.Романов

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ

В работе [1] для численного решения обратной кинематической задачи сейсмоки в двумерно-неоднородной полуплоскости был предложен метод характеристик решения обобщенной задачи Коши для нелинейного уравнения первого порядка со сдвинутыми аргументами. Предложенный метод оказался эффективным при решении ряда модельных и практических задач.

В настоящей статье показывается, что этот метод с несущественными видоизменениями может быть использован для численного решения задач интегральной геометрии в полуплоскости.

Γ^0 . В прямоугольной системе координат (ξ, η) рассмотрим в полуплоскости $\eta \geq 0$ двухпараметрическое семейство гладких кривых $\Gamma(x^0, y^0)$ конечной длины, опирающихся концами на ось $O\xi$ в точках с координатами $(x^0, 0), (y^0, 0)$, $a \leq x^0 < y^0 \leq b$. Пусть на кривой $\Gamma(x^0, y^0)$ точка, наиболее удаленная от прямой $\eta=0$, имеет координаты (ξ_m, η_m) , а кривую $\Gamma(x^0, y^0)$ можно определить в отрезках $[x^0, \xi_m], [\xi_m, y^0]$ при $\eta \in [0, \eta_m]$ соответственно уравнениями $\xi = x(\eta)$, $\xi = y(\eta)$, где $x(\eta), y(\eta)$ однозначные непрерывно дифференцируемые функции и в окрестности точки (ξ_m, η_m) на $\Gamma(x^0, y^0)$ справедливы для некоторого положительного числа Δ неравенства $x''(\eta) > \Delta$, $y''(\eta) > \Delta$. Кроме того, пусть семейство кривых $\Gamma(x^0, y^0)$ дополнительно

удовлетворяет условию: если $a \leq x^1 < x^0 < y^0 < y^1 \leq b$, то часть полушлости $\eta \geq 0$, ограниченная кривой $\Gamma(x^0, y^0)$, лежит строго внутри части полушлости, ограниченной кривой $\Gamma(x^1, y^1)$. Задача определения непрерывной функции $u(\xi, \eta)$ в области D - части полушлости $\eta \geq 0$, ограниченной кривой $\Gamma(a, b)$ по заданной в квадрате $a \leq x^0 \leq b, a \leq y^0 \leq b$ функции

$$\Phi(x^0, y^0) = \int_{\Gamma(x^0, y^0)} u(\xi, \eta) ds$$

называется задачей интегральной геометрии. Вопросы единственности определения $u(\xi, \eta)$ рассматривались в работах [2-5].

К сформулированной задаче интегральной геометрии сводится ряд обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, задача продолжения поля колебаний (определяемого волновым уравнением), заданного на прямолинейной границе, в однородную среду и так далее. Поэтому разработка численных методов решения задачи интегральной геометрии имеет важное значение.

Рассмотрим вопрос о возможности использования для этой цели метода характеристик из работы [1]. Условия на семейство кривых $\Gamma(x^0, y^0)$ и ограничение на функцию $u(\xi, \eta)$, которое будет введено ниже, сформулированы исходя из численной реализуемости алгоритма.

2^o. На некоторой кривой $\Gamma(x^0, y^0)$ семейства выберем две точки с координатами (x, η_1) , (y, η_2) , $x < y$ (рис. I).

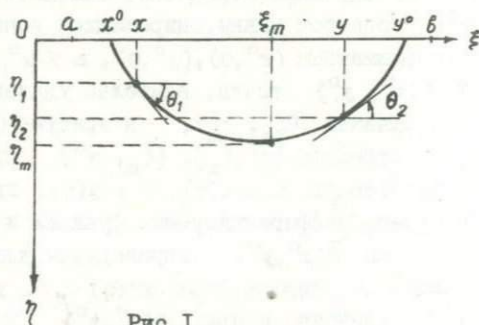


Рис. I

Обозначим: через γ часть кривой $\Gamma(x^0, y^0)$, лежащую между этими точками, через θ угол, образованный касательной к кривой в точке (ξ, η) и осью $O\xi$ (при этом угол θ отсчитывается от оси $O\xi$ и положительное направление отсчета соответствует направлению часовой стрелки). Рассмотрим функцию (далее при выводе уравнения (8) используем рассуждения из работы [6]).

$$\Psi(x, \eta_1, y, \eta_2) = \int_{\gamma} u(\xi, \eta) ds = \int_{s_1}^{s_2} u(\xi, \eta) ds, \quad (1)$$

где длина дуги s отсчитывается от точки $(x^0, 0)$. Дифференцируя (1) по s в точке (x, η_1) при фиксированной точке (y, η_2) , получим

$$\left. \frac{d\Psi}{ds} \right|_{s=s_1} = -u(x, \eta_1), \quad (2)$$

дифференцируя в точке (y, η_2) при фиксированной точке (x, η_1) , получим

$$\left. \frac{d\Psi}{ds} \right|_{s=s_2} = u(y, \eta_2). \quad (3)$$

С другой стороны

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \cos \theta + \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \sin \theta,$$

поэтому в точках (x, η_1) и (y, η_2) соответственно имеем равенства

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial \eta_1} \sin \theta_1 = -u(x, \eta_1), \quad (4)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} \cos \theta_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial \eta_2} \sin \theta_2 = u(y, \eta_2).$$

Далее, возьмем за точки (x, η_1) , (y, η_2) точки пересечения кривой $\Gamma(x^0, y^0)$ с некоторой прямой $\eta = z$, $z \in [0, \eta_m]$, то есть так, чтобы $\eta_1 = \eta_2 = \eta(z) = z$ (рис.2).

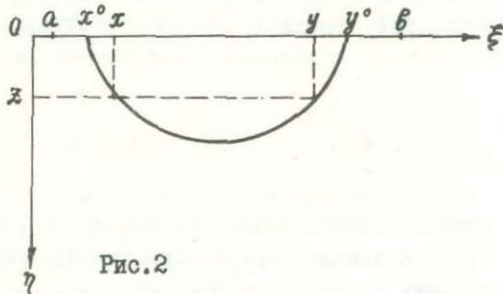


Рис.2

Рассмотрим теперь функцию трех переменных

$$\varphi(x, y, z) = \Psi(x, \eta(z), y, \eta(z)).$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (5)$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_2}. \quad (6)$$

Из соотношений (4), учитывая выбор точек (x, η_1) и (y, η_2) , имеем равенства (углы θ_1, θ_2 обращаются в нуль лишь в точке (ξ_m, η_m)):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta_1} = \frac{1}{\sin \theta_1} (-u(x, z) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos \theta_1), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta_2} = \frac{1}{\sin \theta_2} (u(y, z) - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos \theta_2).$$

Теперь, подставляя (7) в (6) с учетом соотношений (5), получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка со сдвинутыми аргументами, которому удовлетворяет функция $\varphi(x, y, z)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \operatorname{ctg} \theta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \operatorname{ctg} \theta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\varphi_x}{\sin \theta_1} - \frac{\varphi_y}{\sin \theta_2} = 0, \quad (8)$$

где $\varphi_x = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -u(x, z)$, $\varphi_y = \lim_{x \rightarrow y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = u(y, z)$. Таким образом, задачу интегральной геометрии можно рассматривать как задачу Коши для уравнения (8) с начальным условием $\Phi(x, y, 0) = \Phi(x, y)$. Заметим, что если семейство кривых $\Gamma(x^0, y^0)$ является семейством экстремалей функционала

$$J = \int_{\Gamma(x^0, y^0)} u(\xi, \eta) ds,$$

то есть функция $\Phi(x^0, y^0)$ приобретает смысл времени пробега возмущения в неоднородной изотропной среде с распределением скорости $v(\xi, \eta) = 1/u(\xi, \eta)$ от точки $(x^0, 0)$ до точки $(y^0, 0)$, то приходим к нелинейной (поскольку в этом случае кривые $\Gamma(x^0, y^0)$ не заданы) обратной кинематической задаче сейсмологии. В данном случае, исключая углы θ_1, θ_2 из (8), пользуясь соотношениями

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{\varphi_x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \cos \theta_2 = \frac{1}{\varphi_y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

являющимися следствием закона преломления Снеллиуса, получим нелинейное уравнение типа Гамильтона-Якоби [1, 6]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \sqrt{\varphi_x^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2} + \sqrt{\varphi_y^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} = 0, \quad (9)$$

которому удовлетворяет функция $\Phi(x, y, z)$, имеющая смысл времени пробега между точками с координатами (x, z) , (y, z) в среде с известным распределением скорости $v(\xi, \eta) = 1/u(\xi, \eta)$. Итак, для численного решения задачи интегральной геометрии можно использовать алгоритм, описанный в работе [1], с тем отличием, что в случае задачи интегральной геометрии кривые $\Gamma(x^0, y^0)$ заданы, а в случае обратной кинематической задачи, лучи, играющие роль $\Gamma(x^0, y^0)$, подлежат определению наряду с функцией $u(\xi, \eta)$. Поэтому следует ожидать, что численное решение задачи интегральной геометрии будет не менее устойчивым, чем решение обратной кинематической задачи [1], для которой проверка устойчивости проводилась с помощью численного моделирования.

3°. Здесь изложим лишь те части метода характеристик [1], которые естественно видоизменяются в случае задачи интегральной геометрии. Уравнение (8) (при известных функциях $u(x, z)$, и $u(y, z)$) является уравнением типа Гамильтона-Якоби, поэтому его каноническую систему дифференциальных уравнений можно записать (см. [5]) в виде

$$\frac{dx}{dz} = \operatorname{ctg} \theta_1, \quad \frac{dy}{dz} = \operatorname{ctg} \theta_2, \quad (10)$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{1}{\sin \theta_1} \cdot \frac{\partial u(x, z)}{\partial x}, \quad \frac{dq}{dz} = \frac{1}{\sin \theta_2} \cdot \frac{\partial u(y, z)}{\partial y} \quad (11)$$

и, кроме того, вдоль кривой $\Gamma(x^0, y^0)$ справедливы соотношения

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{u(y, z)}{\sin \theta_2} - \frac{u(x, z)}{\sin \theta_1}, \quad (12)$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial u(y, z)}{\partial z} - \frac{1}{\sin \theta_1} \frac{\partial u(x, z)}{\partial z}, \quad (13)$$

где $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $r = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Если функции $x(z)$, $y(z)$, $p(z)$, $q(z)$ являются решениями системы (10)-(11), то $\varphi(z)$, $r(z)$ получаются из (12), (13) простым интегрированием. Как известно, интегрирование уравнения (8) с начальным условием

$$\varphi(x, y, 0) = \Phi(x, y) \quad (14)$$

эквивалентно интегрированию канонической системы (10)-(11) с начальными данными при $z = 0$:

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad p(0) = \frac{\partial \Phi(x^0, y^0)}{\partial x}, \quad q(0) = \frac{\partial \Phi(x^0, y^0)}{\partial y} \quad (15)$$

А уравнения (12), (13) интегрируются соответственно при начальных данных

$$\varphi(0) = \Phi(x^0, y^0), \quad (I6)$$

$$r(0) = \frac{u(y^0, 0)}{\sin \theta_2^0} - \frac{u(x^0, 0)}{\sin \theta_1^0} - \operatorname{ctg} \theta_1^0 \cdot p(0) - \operatorname{ctg} \theta_2^0 \cdot q(0), \quad (I7)$$

где θ_1^0, θ_2^0 - углы соответственно в точках $(x^0, 0), (y^0, 0)$.

Задача Коши (8), (I4) решается численным интегрированием канонической системы (I0), (II) и дополнительных уравнений (I2), (I3) при начальных условиях (I5)-(I7). При этом для определения неизвестных значений функций $u(x, z), u(y, z)$ и их производных используется алгоритм, приведенный в работе [I].

Не описывая полностью алгоритм, реализующий метод характеристик, здесь отметим лишь два его основных момента.

(А). Вершины (ξ_m, η_m) кривых $\Gamma(x^0, y^0)$ заполняют некоторую область D^* с D при непрерывном изменении параметров x^0, y^0 в квадрате $a \leq x^0 \leq b, a \leq y^0 \leq b$. Будем предполагать, что если $\delta = |y(\eta_0) - x(\eta_0)|, 0 \leq \eta_0 < \eta_m$ и $\bar{u}(\xi, \eta) = u_0 + u_1 \xi + u_2 \eta$, то найдутся такие постоянные u_0, u_1, u_2 чтобы было $|u(\xi, \eta) - \bar{u}(\xi, \eta)| < M\delta$ при всех $\xi \in [x(\eta_0), y(\eta_0)]$ и $\eta \in [\eta_0, \eta_m]$, где M - постоянная, зависящая от $u(\xi, \eta)$ и Δ . Тогда в δ -окрестности вершины (ξ_m, η_m) (т.е. в области $\{(\xi, \eta): x(\eta_0) \leq \xi \leq y(\eta_0), \eta_0 \leq \eta < \eta_m\}$) постоянные u_0, u_1, u_2 определяются заданием значений $\varphi(\eta_0), p(\eta_0), q(\eta_0), r(\eta_0)$ на концах части кривой $\Gamma(x^0, y^0)$ лежащей в этой окрестности. Таким образом, рассматривая те кривые $\Gamma(x^0, y^0)$, вершины которых лежат в некоторой полосе $\Pi^* = [\eta_0, \eta_0 + h] \cap D^*, h > 0$ по заданным на их концах значениям $\varphi(\eta_0), p(\eta_0), q(\eta_0), r(\eta_0)$ получим локальные линейные приближения функции $u(\xi, \eta)$ в полосе Π^* . Для "сшивания" полученных приближений в алгоритме используется сплайн-аппроксимация со сглаживанием.

(Б). Теперь, зная $u(\xi, \eta)$ в полосе Π^* , найдем значения $u(\xi, \eta)$ в области $\Pi = [\eta_0, \eta_0 + h] \cap (D \setminus D^*)$. На кривой $\Gamma(x^0, y^0)$ при некотором $\eta = z$ справедливо соотношение

$$r(z) = \frac{u(y, z)}{\sin \theta_2} - \frac{u(x, z)}{\sin \theta_1} - \operatorname{ctg} \theta_1 p(z) - \operatorname{ctg} \theta_2 \cdot q(z). \quad (I8)$$

Тогда при известных значениях $r(z)$ значения функции $u(\xi, \eta)$ в Π определяем следующим образом:

(а). Если $(y, z) \in \Pi^*$, а $(x, z) \in \Pi$, то значение $u(x, z)$ определяется из соотношения (I8); если $(x, z) \in \Pi^*$, а $(y, z) \in \Pi$ то значение $u(y, z)$ определяется также из соотношения (I8)

(б). Если же $(x, z) \in \Pi$ и $(y, z) \in \Pi$, то найдется конечная последовательность точек $(x^k, z), (y^k, z), k=1, \dots, m$ таких, что $u(x^k, z), u(y^k, z)$ определяются из соотношения (I8) и $x^m = x, y^m = y$. Таким образом, определив функцию $u(\xi, \eta)$ в области $D_1 = [\eta_0, \eta_0 + h] \cap D$ проинтегрируем систему уравнений (II)-(I3) (напомним, что в задаче интегральной геометрии кривые $\Gamma(x^0, y^0)$ заданы и в интегрировании уравнений (I0) нет надобности) с начальными условиями вида (I5)-(I7) при $\eta = \eta_0$ на отрезке $[\eta_0, \eta_0 + h]$ и тем самым определим все необходимые данные на прямой $\eta = \eta_0 + h$ для определения функции $u(\xi, \eta)$ в области $D_2 = [\eta_0 + h, \eta_0 + 2h] \cap D$, аналогично, как и в предыдущей области D_1 . Начиная этот рекуррентный процесс от значения $\eta_0 = 0$, продолжая определять $u(\xi, \eta)$ последовательно в областях $D_k = [(k-1)h, kh] \cap D$, найдем $u(\xi, \eta)$ во всей области D .

Таким образом, можно подвести итоги:

1. Выведено линейное дифференциальное уравнение (8) в частных производных первого порядка со сдвинутыми аргументами, задача Коши (8), (I4) для которого эквивалентна задаче интегральной геометрии в полуплоскости.

2. Для численного решения этой задачи Коши (8), (I4) предлагается использовать метод характеристик, разработанный в [I] для решения задачи Коши (9), (I4).

3. Вопрос об устойчивости алгоритма, реализующего метод характеристик [I], в случае более сложной нелинейной задачи (9), (I4) рассмотрен с помощью численного моделирования, а в случае задачи интегральной геометрии пока остается открытым. Однако следует ожидать, что численное решение задачи интегральной геометрии будет не менее устойчивым, чем в случае обратной кинематической задачи.

В заключение выражаю глубокую благодарность член-корреспонденту АН СССР А.С.Алексееву за постановку задачи, полезные и добрые советы и В.Р.Кирейтову за ряд ценных замечаний.

Л и т е р а т у р а

1. РОМАНОВ М.Е. Метод характеристик численного решения обратной кинематической задачи сейсмоки.-В сб.: Математические проблемы геофизики, Новосибирск, вып.3, 1972, с.328-346.
2. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., АНИКОНОВ Ю.Е. Об одном классе задач интегральной геометрии. ДАН СССР, т.176, № 5, с.1002-1003, 1967.
3. РОМАНОВ В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск, "Наука", 1972.
4. АНИКОНОВ Ю.Е. О квазимонотонных операторах.-В сб.: Математические проблемы геофизики, Новосибирск, вып.3, 1972, с.86-99.
5. КУРАНТ Р. Уравнения с частными производными. М., "Мир", 1964.
6. БЕЛОНОСОВА А.В., АЛЕКСЕЕВ А.С. Об одной постановке обратной кинематической задачи сейсмоки для двухмерной неоднородной среды.-В сб.: Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных .М., "Наука", 1967.

В.А.Цецохо, А.С.Белоносков, А.В.Белоносова

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ r - ГЛАДКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ
ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Одной из основных задач в прикладной математике является задача r - гладкого приближения функций, значения которых известны на конечном множестве точек. Особенно трудной она является в случае, когда требуется приблизить функцию m переменных в области со сложной границей и имеющей разрывы на некоторых $(m - 1)$ - мерных многообразиях.

Предлагаемый ниже метод представляется наиболее естественным по крайней мере для задач указанного типа. В основе метода лежит широко применяющееся в анализе понятие разбиения единицы.

Γ^0 . Говорят, что последовательность (φ_i) функций класса $C^r(V)$, $V \subset \mathbb{R}^m$ - открытое, образует разбиение единицы на

множестве $\Omega \subset V$, если $0 \leq \varphi_1(x) \leq 1$ и $\sum_1 \varphi_1(x) = 1$ для всех $x \in \Omega$.

Обычно требуется, чтобы функция φ_1 обращалась в нуль вне заданного открытого множества $V_1 \subset V$. Последовательность (V_i) , очевидно, покрывает множество Ω , и разбиение единицы (φ_i) называют подчиненным этому покрытию.

Для прикладных целей естественно строить локально-конечные покрытия стандартными множествами: m -мерными интервалами или шарами. Центры и диаметры этих множеств должны выбираться в соответствии со свойствами приближаемой функции $f: \Omega \rightarrow R$. В дальнейшем мы будем рассматривать покрытие m -мерными кубами.

Опишем алгоритм построения функции \tilde{f} класса $C^r(V)$, "близкой" к функции $f: \Omega \rightarrow R$. Пусть (V_i) - локально-конечное покрытие множества Ω m -мерными кубами с центрами в точках $\xi^{(i)}$ и ребрами длины $\delta^{(i)}$ (если Ω - ограниченное множество, то строим конечное покрытие). Пусть $\Phi: R^m \rightarrow R$ - функция (будем называть ее стандартной) класса $C^r(R^m)$ такая, что $\Phi(x) > 0$, если $x \in V_0$, где

$$V_0 = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times \dots \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (1)$$

и $\Phi(x) = 0$ вне V_0 . Можно, например, положить

$$\Phi(x) = \prod_{i=1}^m \cos^{r+1}(\pi \cdot x_i) \quad (2)$$

(если $x = (x_1, \dots, x_m)$), либо

$$\Phi(x) = \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{4} - x_i^2 \right)^{r+1} \quad (3)$$

и т.п. Положим теперь

$$\Phi_j(x) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{x - \xi^{(j)}}{\delta^{(j)}}\right), & x \in V_j \\ 0, & x \notin V_j \end{cases}$$

($j = 1, 2, \dots$) . Очевидно, что функции

$$\varphi_j : \varphi_j(x) = \frac{\Phi_j(x)}{\sum_i \Phi_i(x)} \quad (5)$$

являются функциями класса $C^r(\cup V_j)$ и образуют разбиение единицы на Ω , подчиненное покрытию (V_j) .

Если теперь функции $f_i: \Omega \rightarrow R$ "близки" к f на V_i , то функция

$$\tilde{f}(x) = \sum_i f_i(x) \varphi_i(x) \quad (6)$$

будет "близка" к f на Ω . Способы локального приближения функции f могут быть самыми разнообразными. Если, к примеру, функция $f(x)$ известна в последовательности узлов $(x^{(i)})$, то в качестве $f_i(x)$ можно взять алгебраический многочлен, построенный по некоторой совокупности узлов $(x^{(j)})$, близких к центру $\xi^{(i)}$ интервала V_i .

2⁰. Оставляя сейчас в стороне вопрос об исследовании различных способов локального приближения функций, остановимся на простейшем способе применения метода разбиения единицы с использованием локального приближения константами. Здесь естественно взять узлы $x^{(i)}$ в качестве центров $\xi^{(i)}$ интервалов V_i и положить в (6)

$$f_i(x) = f(x^{(i)}). \quad (7)$$

Проведем оценку погрешности приближения для одного частного случая:

$$f(x) = x, \quad x \in R$$

сетка - равномерная и бесконечная с узлами в точках $x_k = kh$, $\pm k = 0, 1, \dots, \delta^{(i)} = (2N + 1)h$.

Понятно, что остаток

$$\sigma(x) = x - \sum_k x_k \varphi_k(x)$$

обращается в нуль в целых и полужелтых узлах нашей сетки. Далее, очевидно, что $\sigma(x)$ периодична с периодом h . Поэтому достаточно рассмотреть случаи:

$$1). 0 \leq x \leq \frac{h}{4}, \quad 2), \frac{h}{4} \leq x \leq \frac{h}{2}.$$

Рассмотрим первый случай. Ввиду того, что $\sum_k \varphi_k(x) \equiv 1$, имеем:

$$\sigma(x) = x - \sum_k x_k \varphi_k(x) = \sum_k (x - x_k) \varphi_k(x)$$

или, так как $\varphi_k(x) = \varphi_0(x - x_k) = \varphi_0(x_k - x)$,

$$\sigma(x) = \sum_k (x - x_k) \varphi_0(x - x_k) = x - \sum_k x_k \varphi_0(x - x_k). \quad (8)$$

Рассмотрим второе слагаемое $\sigma_2(x)$ в (8). Имеем:

$$\sigma_2(x) = \sum_k x_k \varphi_0(x_k - x) = \sum_k x_k [\varphi_0(x_k - x) - \varphi_0(x_k)] = \quad (9)$$

$$= -x \sum_k x_k \varphi_0'(x_k) + \frac{x^2}{2} \sum_k x_k \varphi_0''(x_k) + \frac{x^3}{6} \sum_k x_k \varphi_0'''(x_k - \theta_k x).$$

Второе слагаемое в правой части (9), очевидно, равно нулю, поэтому

$$\sigma_2(x) = -x \sum_k x_k \varphi_0'(x_k) + \frac{x^3}{6} \sum_k x_k \varphi_0'''(x_k - \theta_k x). \quad (10)$$

Далее, применим к сумме $\sigma_3(x) \stackrel{df}{=} -x \sum_k x_k \varphi_0'(x_k)$ преобразование Абеля. Тогда получим:

$$\sigma_3(x) = x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h \sum_{r=-\infty}^k \varphi_0'(r \cdot h) = x \sum_{k=-N}^N h \sum_{r=-N}^k \varphi_0'(r \cdot h),$$

НО

$$\sum_{r=-N}^k h \varphi_0'(r \cdot h) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0'(x) dx + \sigma_4(k),$$

где

$$|\sigma_4(k)| \leq (\max |\varphi_0'''|) \cdot (k+N+1) \frac{h^3}{12}.$$

Таким образом,

$$\sigma_3(x) = x \sum_k \varphi_0(x_k + \frac{h}{2}) + x \sum_k \sigma_4(k) = x + x \sum_{k=-N}^N \sigma_4(k). \quad (II)$$

Собирая (8)-(II), получаем

$$|\sigma(x)| \leq \frac{x^3}{6} (\sum_k |x_k|) \max |\varphi_0'''| + x \frac{h^3}{6} N^2 \max |\varphi_0'''| \cong$$

$$\cong N^2 \cdot (\max |\varphi_0'''|) \cdot \left(\frac{x^3}{6} h + \frac{xh^3}{6} \right) \leq$$

$$\leq N^2 (\max |\varphi_0'''|) h^4 \left(\frac{1}{4^3 \cdot 6} + \frac{1}{24} \right) \leq \frac{N^2 h^4}{24(2N+1)^3 h^3} \cdot C \leq$$

$$\leq C \frac{h}{192 \cdot N}.$$

Здесь C — максимальное значение модуля третьей производной "стандартной" (т.е. приведенной к носителю, равному единице) функции. Константа C зависит от N и убывает с ростом N .

Случай 2) можно не рассматривать, так как результат в точности такой же.

Значение полученной оценки состоит в том, что она дает один из возможных критериев выбора "стандартной" функции φ_0 , а именно: надо стремиться к тому, чтобы ее третья производная была по возможности меньшей.

Аналогичные оценки можно получить для линейной функции и в случае нескольких переменных.

3⁰. Поставим теперь следующую задачу: пусть функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ известна на конечной последовательности точек $(x^{(i)})_{i=1, \dots, n}$ с некоторой точностью ε . Требуется найти функцию \tilde{f} класса C^r такую, что выполняется условие аппроксимации

$$\|f - \tilde{f}\| = \max_{i=1, \dots, n} |f(x^{(i)}) - \tilde{f}(x^{(i)})| \leq \varepsilon, \quad (I2)$$

а также условие сглаживания (в том смысле, что вариации производных высших порядков функции \tilde{f} должны быть по возможности меньшими).

В данном пункте предлагается один численный метод, дающий решение поставленной задачи. Этот метод основан на многократном применении способа r -гладкого приближения, описанного в пункте 2⁰, с использованием некоторой последовательности разбиений единицы. Этот метод является легко алгоритмизуемым и особенно удобен в применении к задачам в указанной постановке для многомерного случая, когда $(x^{(i)})$ представляет собой произвольную (нерегулярную) сетку большого порядка.

Рассмотренный в пункте 2⁰ способ r -гладкого приближения можно описать с помощью линейного оператора L_0 (сглаживающего приближения), действующего из пространства сеточных функций $f(x^{(i)}): x^{(i)} \rightarrow \mathbb{R}$ в пространство дифференцируемых функций $C^r(V)$ по формуле

$$L_0[f](x) = \sum_{i=1}^n f(x^{(i)}) \varphi_i(x). \quad (I3)$$

Оценим норму отклонения f от $L_0[f]$ Имеем

$$\begin{aligned} \|f - L_0[f]\| &= \max_{j=1, \dots, n} |f(x^{(j)}) - \sum_{i=1}^n f(x^{(i)}) \varphi_i(x^{(j)})| = \\ &= \max_{j=1, \dots, n} |f(x^{(j)}) (1 - \varphi_j(x^{(j)})) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n f(x^{(i)}) \varphi_i(x^{(j)})| \leq \\ &\leq 2 \|f\| [1 - \min_{j=1, \dots, n} \varphi_j(x^{(j)})]. \end{aligned} \quad (I4)$$

Таким образом, условие аппроксимации в общем случае может быть удовлетворено за счет выбора такого разбиения единицы (φ_j) , что величина

$$\min_{j=1, \dots, n} \varphi_j(x^{(j)}) \quad (I5)$$

достаточно близка к единице. Однако при этом не будет выполнено условие сглаживания, так как степень "сглаживания" оператора L_0 уменьшается при возрастании величины (I5).

Эти соображения указывают на то, что при однократном применении оператора L_0 невозможно, вообще говоря, получить решение поставленной задачи. Поэтому мы поступаем следующим образом.

Пусть $(\varphi_i^{(k)})_{k=1, 2, \dots}$ - последовательность разбиений единицы, подчиненных, для определенности, одному и тому же покрытию множества Ω , а $(L_0^{(k)})$ - соответствующая последовательность операторов сглаживающего приближения, определяемых для каждого $(\varphi_i^{(k)})$ по формуле (I3). Будем искать \tilde{f} в виде

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^{k_0} L_0^{(k)} [f^{(k-1)}] \quad (I6)$$

с некоторым k_0 , где $(f^{(k)})$ - последовательность сеточных функций, определяемая следующим образом:

$$f^{(k)}(x^{(j)}) = \begin{cases} f(x^{(j)}), & k=0, j=1,2,\dots,n \\ f^{(k-1)}(x^{(j)}) - L_0^{(k)} [f^{(k-1)}](x^{(j)}), & k>0, j=1,2,\dots,n \end{cases} \quad (I7)$$

Просуммировав равенства (I7) для $k = 0, 1, \dots, k_0$, получим

$$f = \tilde{f} + f^{(k_0)},$$

так что для выполнения условия аппроксимации необходимо, чтобы величина $\|f^{(k_0)}\|$ не превосходила величины ϵ . Это условие всегда может быть удовлетворено за счет специального выбора последовательности разбиений единицы $((\varphi_j^{(k)}))$. Действительно, если, к примеру, начиная с некоторого k_1 , выполняется условие $\min_{j=1,\dots,n} \varphi_j^{(k)}(x^{(j)}) \geq \frac{1}{2}$ для всех $k \geq k_1$, то в силу (I4), $\|E - L_0^{(k)}\| \leq 2(1 - \sigma) < 1$, и следовательно, $\|f^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Выбирая последовательность разбиений единицы $((\varphi_j^{(k)}))$ таким образом, чтобы величины $\min_{j=1,\dots,n} \varphi_j^{(k)}(x^{(j)})$ были по возможности меньшими при условии монотонного убывания последовательности $(\|f^{(k)}\|)$ с некоторой заранее фиксированной скоростью ν (т.е. $\|f^{(k)}\| / \|f^{(k+1)}\| \geq \nu$) можно добиться выполнения также и условия сглаживания (поскольку при этом "негладкий" вклад в сумму (I6) будет вноситься уже малыми по норме $f^{(k)}$).

Для практических целей последовательность разбиений еди-

ницы $((\varphi_1^{(k)}))$ естественно строить по формулам (4), (5), исходя из "стандартной" функции $\Phi(x) = G(x) \cdot \psi(x)$, где $G(x)$ — функция класса $C^r(\mathbb{R}^m)$ с носителем V_0 вида (1) (ее можно взять в форме (2), (3) и т.п.), а множитель $\psi(x)$ можно взять в форме

$$\psi(x) = \exp \{-\lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)\}, \lambda \geq 0,$$

либо в форме

$$\psi(x) = [1 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)]^{-1}, \lambda \geq 0,$$

и т.п. Далее будем действовать следующим образом. Если в ходе вычисления \tilde{f} скорость убывания последовательности $(\|f^{(k)}\|)$ для очередного k окажется недостаточной, мы изменим $\psi(x)$, увеличив тем или иным способом параметр λ (при этом увеличится величина $\min_{j=1, \dots, j} \varphi_j^{(k)}(x^{(j)})$, а следовательно, увеличится также и скорость убывания $(\|f^{(k)}\|)$. В противном случае будем оставлять $\psi(x)$ неизменным.

З а м е ч а н и е . Если взять последовательность $((\varphi_1^{(k)}))$ разбиений единицы из одинаковых разбиений (φ_1) , то в силу (13), (14), получим

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{k_0} f^{(k-1)}(x^{(i)}) \right) \varphi_1(x).$$

Может возникнуть мысль — ограничиться одним набором разбиения единицы (φ_1) и искать решение \tilde{f} поставленной в начале этого пункта задачи в виде

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_1(x), \quad (18)$$

пытаясь определить коэффициенты (c_i) из условия

$$\|f - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_1(x)\| \leq \epsilon \quad (19)$$

в предположении, что выполнено условие сглаживания.

На самом деле эта постановка не отвечает существу дела, так как данные $(f(x^{(i)}))$ заданы с ошибкой.

Действительно, теоретически, если

$$\det \| \varphi_i(x^{(j)}) \| \neq 0, \quad (20)$$

условию (19) можно удовлетворить с $\epsilon = 0$, но тогда ошибки в "измеренных" $(f(x^{(i)}))$ распространятся и на полученное продолжение (18). Поэтому желательно стремиться к тому, чтобы оценка (19), по возможности, "достигалась", а для этого естественно поставить условие

$$\max_{i=1, \dots, n} |f(x^{(i)}) - c_i| \leq E, \quad E > 0, \quad (21)$$

которое бы ограничивало норму $\|f - c\|$. Но у нас нет пока никаких критериев выбора величины E , а задаваясь этой величиной произвольно (естественно задавать E "малой"), мы приходим к задаче, в общем неразрешимой (не говоря уже о том, что и условие (20) не всегда выполняется).

Из указанной противоречивости требований аппроксимации, сглаживания и условия (21) и возник описанный выше алгоритм.

Согласно описанному алгоритму для двумерного случая составлена программа на языке АЛФА-6 для ЭВМ БЭСМ-6, которые при максимальном значении $n = 3000$ числа узлов $(x^{(i)})$ исходной неравномерной сетки вычисляет \tilde{f} в любой регулярной сетке.

На рисунке I представлен результат следующего численного эксперимента. В прямоугольнике $\Delta = [-8, 8] \times [-8, 8]$, используя датчик случайных чисел, была построена такая "случайная" сетка $(x^{(i)})$, что в каждую элементарную ячейку $(k, k+1) \times (l, l+1)$ (где $-8 \leq k < 8$; $-8 \leq l < 8$; k, l - целые) прямоугольника Δ попадает ровно одна точка сетки $(x^{(i)})$ (всего - 256 точек). В узлах $(x^{(i)})$ насчитывались значения функции f , которая была взята в виде

$$f(x, y) = 1 - \left(\frac{x}{8}\right)^2 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right)$$

(таким образом, на один полупериод синуса приходилось в среднем по 4 точки). Далее вычислялась функция \tilde{f} для значения $\epsilon = 0.01$ в условии (12). Затем в сетке (см. рис. I., а.), сдвинутой на $1/3$ по отношению к целой сетке в сторону отрицательных координат насчитывались значения \tilde{f} , первые $\Delta_y \tilde{f}$ и вторые $\Delta_y^2 \tilde{f}$ центральные разности функции \tilde{f} по переменной y . На рис. I., б), изображен рельеф вторых разностей функции \tilde{f} , построенной по узлам указанной сетки. Относительные среднеквадратичные отклонения от точных значений таковы: априорно задаваемое - 1.25%;

$$\frac{\|f - \tilde{f}\|}{\|f\|} \cong 1.3\% ; \quad \frac{\|\Delta_y f - \Delta_y \tilde{f}\|}{\|\Delta_y f\|} \cong 6\% ; \quad \frac{\|\Delta_y^2 f - \Delta_y^2 \tilde{f}\|}{\|\Delta_y^2 f\|} \cong 10\% .$$

Соответствующие величины в случае, когда $(x^{(i)})$ - целая сетка, равны: 1,25%; 0,4%; 2,2%; 5,2%.

Отметим, что все эти расчеты заняли полторы минуты машинного времени на ЭСМ-6. Вообще, если n - число узлов исходной неравномерной сетки, а m - число узлов регулярной сетки, в которых вычисляется \tilde{f} , то скорость счета по составленной программе возрастает прямо пропорционально величине $(n + \sqrt{m})$.

4⁰. Остановимся теперь на других способах локального приближения функции f . Для иллюстрации рассмотрим один из возможных способов применения метода разбиения единицы, относящейся к случаю $m = 1$, когда локальное приближение f_1 всегда можно получить, используя интерполяционный многочлен Лагранжа.

Для простоты будем считать, что функция f известна в $(n + 1)$ точках равномерной сетки на интервале $[0, 1]$ с узлами в точках $x_k = k \cdot h$, $k = 0, 1, \dots, n$; $h = \frac{1}{n}$. Построим покрытие интервала $[0, 1]$ открытыми интервалами V_i одинаковой длины s с центрами в точках $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Разбиение единицы (φ_i) построим по формулам (4), (5), исходя из "стандартной" функции $\phi(x)$ в форме (2) или (3) с некоторым γ . В качестве локального приближения f_i функции f на каждом из интервалов V_i возьмем полином третьей степени, проходящий через узлы $[x_{i-2}, \dots, x_{i+1}]$ для $i = 2, 3, \dots, n-1$ и $[x_0, \dots, x_3], [x_{n-3}, \dots, x_n]$ для $i = 1$ и n соответственно. После этого значение функции \tilde{f} можно вычислять по формуле (6) в любой точке $x \in [0, 1]$.

Было проделано несколько численных экспериментов по описанной схеме, в которых приближалась аналитическая функция f по ее значениям, округлявшимся до некоторого десятичного знака. Результаты экспериментов оказались лучшими в смысле отклонения $\|f - \tilde{f}\|$ в равномерной норме по сравнению с кубическими сплайнами, которые минимизируют интеграл от второй производной при условии, что сплайны проходят в некоторой ϵ -окрестности (в квадратичной норме) заданной сеточной функции.

Отметим, что если в этом примере взять длину s интервалов V_i такой, что $0 \leq s \leq 5h$, то сумма (6) будет представлять собой интерполяционный многочлен по системе функций (φ_i).

Аналогичные алгоритмы можно использовать в случае двух и более переменных.

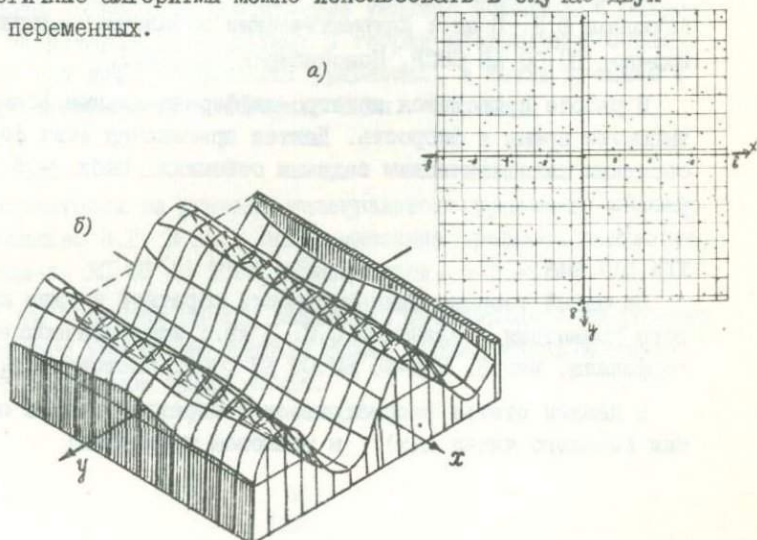


Рис. I.
309

А Н Н О Т А Ц И И

статей помещенных в сборнике

Раздел I

УДК 517.946

О корректности задачи Коши для линейного уравнения первого порядка со сдвинутым аргументом. Азаматов С.Ж. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.9-16.

В работе рассматривается задача Коши для уравнения первого порядка со сдвинутым аргументом. Доказывается теорема единственности. Приводится оценка условной устойчивости. Библ. - 4 назв.

УДК 517.9.

Формулы в многомерных кинематических задачах сейсмологии. Аниконов Ю.Е. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.17-27.

В работе приводятся интегро-дифференциальные формулы, связывающие время и скорость. Даются применения этих формул к обратным кинематическим задачам сейсмологии. Библ. - 5 назв., рис.2.

УДК 517.946.

Об одной теореме единственности обратной задачи для волнового уравнения. Белинский С.П. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.28-41.

В данной статье рассматривается обратная задача об отыскании главного члена $n(x)$ в волновом уравнении:

$$\Delta^2(x)u_{tt} = \Delta u + \delta(x - x^1)f(t); \quad x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1).$$

В ранее сделанных работах по этой задаче, в частности в [1] и [2] предполагается, что $n(x)$ зависит лишь от одной координаты: $n(x_1, x_2, x_3) = n(x_3)$. В нашей работе мы установим единственность решения обратной задачи при следующих предположениях: 1) в каждой точке плоскости $S: (x_3 = x_3^1)$ известен режим колебаний во времени: $\varphi(t, x_1, x_2) = u(x, t)$; $t > 0$; $x \in S$ (нам приходится решать трехмерную задачу, поэтому и информация требуется не в точке, как в случае $n(x) = n(x_3)$, а на плоскости); 2) $n(x)$ — достаточно близка к постоянной в метрике G^3 и сама принадлежит C^5 ; $n(x)$ представима в виде конечной суммы: $n(x) = \sum_{i=1}^k a_i(x_1, x_2) \cdot b_i(x_3)$. Такая близость скорости к постоянной обусловлена методом доказательства, который требует, к сожалению, регулярности поля лучей и достаточной близости их к прямым линиям. Библиография — 7 назв.

УДК 517.946.

Нормальная разрешимость некоторых специальных операторных уравнений первого рода (достаточные условия). Бухгейм А. Л. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с. 42-54.

В работе приводятся достаточные условия нормальной разрешимости операторов, возникающих в теории многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений, а также в связи с задачами интегральной геометрии. Библиография — 8 назв.

УДК 517.948.

О функционалах на решении интегрального уравнения первого рода. Васильев В. Г. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с. 55-61.

В работе получены оценки некоторых функционалов на решении интегрального уравнения первого рода, правая часть которого известна в конечном числе точек.

Оценки устойчивости решения уравнения свертки в некоторых классах функций. Запreeв А.С. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.62-72.

Рассмотрено уравнение свертки. Для функций из пространства L_2 , удовлетворяющих этому уравнению, выделены классы корректности, в которых имеет место теорема единственности и получены оценки устойчивости решения уравнения при одновременных вариациях как правой части так и ядра уравнения, не выводимых из рассматриваемых классов. Библиография — 4 назв.

О некоторых свойствах $(n-1)$ -мерных поверхностей в n -мерном пространстве. Кирейтов В.Р. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.73-96.

В статье рассматриваются некоторые геометрические вопросы; связанные с задачей определения оптической поверхности по ее фотоизображениям.

Основные рассуждения касаются строения множеств двух типов. К одному относятся подмножества поверхности, расположенной в пространстве, которые являются областями наблюдения для точек или подмножеств окружающего пространства. Множества второго типа являются подмножествами пространства и совпадают с областями наблюдения в пространстве для точек или подмножеств поверхности. В р.1 (теорема I) между множествами обоих типов устанавливается некоторая двойственность.

В р.2 показано, что, так называемые квазиосвещенные из заданной точки пространства подмножества поверхности являются для почти всех точек пространства подмножествами этой поверхности.

В р.3 рассматриваются свойства точек пространства, двойственных в смысле р.1 опорным точкам поверхности, а также некоторый способ построения "оценок снизу" для множеств указанного выше типа. Библиография — 6 назв.

УДК 517.946.

Восстановление функции, заданной интегралами по одному семейству эллипсоидов вращения, и обратная задача для параболического уравнения. Клибанов М.В. В кн.: Математические методы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.97-116.

В работе рассмотрена следующая задача интегральной геометрии: от функции $a(x, y, z)$ известны интегралы с некоторой весовой функцией по семейству эллипсоидов вращения в трехмерном пространстве, два фокуса которых пробегают множества точек двух плоских пересекающихся кривых. Требуется по заданным интегралам восстановить функцию $a(x, y, z)$. Показано, что к сформулированной задаче интегральной геометрии сводится одна обратная задача для параболического уравнения. Установлены теоремы единственности решения поставленных задач. Библиограф. - 10 назв.

УДК 517.946.

Теорема существования и единственности одной нелинейной обратной задачи теории теплопроводности. Метод спектральной теории. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.117-121.

В статье формулируется и доказывается теорема единственности одной нелинейной обратной задачи теории теплопроводности. В этой задаче требуется определить коэффициент уравнения по некоторому данному о значении решения. Библиограф. - 3 назв.

УДК 517.550.3

Обратные задачи для уравнения смешанного типа. Меграбов А.Г. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.122-144.

В последнее время в теории обратных задач для дифференциальных уравнений математической физики достигнуты важные результаты. Однако какие-либо обратные задачи для уравнений смешанного типа не рассматривались.

В данной работе дается формулировка, способ решения и доказательство теоремы единственности ряда задач об определении переменного коэффициента $K(z)$ в уравнении смешанного эллипτικο-гиперболического типа

$$K(z)u_{\xi\xi} + u_{zz} = 0,$$

заданном в полосе, по некоторым данным о решении краевой прямой задачи для этого уравнения. (Предварительно корректно формулируется прямая задача). Применяемая методика заключается в приведении всех рассматриваемых обратных задач к известной задаче определения регулярного оператора Штурма-Лиувилля по двум спектрам и существенно использует найденное представление решения прямой задачи. Данные задачи возникают в теории распространения волн. Библиография - 13 назв., рис. 2.

УДК 517.946.

Об одной задаче интегральной геометрии. Ниматов Х. В кн.: Математические проблемы геофизики. вып. 6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с. 145-153.

На плоскости (x, τ) рассматривается задача интегральной геометрии для некоторого семейства кривых инвариантных к сдвигу вдоль полупрямой $\tau > 0$. Доказана теорема единственности. Библиография - 3 назв.

УДК 517.946.

Теоремы единственности некоторых обратных задач для уравнения диффузии. Резницкая К. Г. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с. 154-159.

В статье формулируются и доказываются теоремы единственности двух обратных задач для уравнений диффузии. В этих задачах требуется определить коэффициенты уравнений диффузии, если заданы решения во все моменты времени в фиксированных точках пространства. Библиография - 6 назв.

УДК 517.946.

О задаче выметания масс для плоских областей. Хайдаров А.Х. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.160-165.

В работе доказывается следующая теорема. Для любой области D , лежащей в круге, существует положительная плотность μ класса $c^{(0,\lambda)}(\Gamma)$ (Γ - граница круга), которая является выметанием логарифмического потенциала области D с плотностью $\mu_0 \in c(\bar{D})$. Библ. - 3 назв.

УДК 517.945.

Об убывании нуль-решений локальной задачи Коши для параболического неравенства. Шишатский Л.П. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с. 166-174.

Показано, что любое нуль-решение локальной задачи Коши для параболического неравенства с одной пространственной переменной удовлетворяет неравенству

$$|u(x_0, t)| \leq b_1 \exp(-b_2 A^2 t^{-1}),$$

где A - расстояние от точки x_0 до границы области определенности решения. Доказанное неравенство позволяет построить некоторый класс единственности указанной задачи.

Раздел II

УДК 550.34.013.

Метод расчета собственных частот и амплитуд крутильных колебаний в высокочастотной области. Адамчик Ю.А. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.175-203.

В работе описаны постановка и метод решения задачи определения собственных частот и амплитуд крутильных колебаний для жесткого сферического кольца. Рассматривается случай, когда параметр ω (круговая частота) принимает большие значения. Предлагается асимптотический метод решения обыкновен-

ного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего колебания неоднородной среды, основанный на сведении этого уравнения к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Приводится алгоритм решения задачи и даются результаты численного эксперимента, иллюстрирующие существенное преимущество предлагаемого метода по сравнению с известным методом Рунге-Кутты. Библ. - 7 назв., рис. - 3, табл. - 3.

УДК 518.550.347.

Об одновременном определении параметров линейной скорости, координат очагов и времен начала землетрясений. Аниконов Ю.Е., Пивоварова Н.Б. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.204-212.

Приводится способ одновременного определения координат очагов землетрясений, времен их начала и параметров скорости линейной одномерной среды по временам, регистрируемым на сейсмостанциях. Библ. - 1 назв., рис. - 7.

УДК 518.61.550.344.

Численное решение задачи Лэмба для трансверсально-изотропного неоднородного упругого полупространства. Источник типа центра вращения. Омельченко О.К., Фатьянов А.Г. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.213-233.

В работе приводятся уравнения движения в перемещениях для трансверсально-изотропной неоднородной по глубине среды. Для случая источника типа центра вращения, когда эти уравнения и граничные условия предельно упрощаются, излагается алгоритм численного решения задачи Лэмба. Суть метода в понижении размерности задачи по пространству неполным разделением переменных и решений полученной задачи разностными методами. Приводятся примеры теоретических сейсмограмм, рассчитанных по описанному алгоритму. Библ. - 17 назв., рис.-9.

УДК 550.3

О некоторых вопросах интерпретации аэромагнитных данных. Филатов В.В. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с. 234-246.

Предлагается ряд оценок точности восстановления функций, заданных приближенно на дискретных множествах определенного вида, специфического для аэромагнитных съемок, а также некоторые оценки устойчивости задачи вычисления производных для таких функций. Библ. - 5 назв.

УДК 550.838.

Определение элементов залегания и физических характеристик намагниченного вертикального пласта. Чернышев Ю.С. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.247-280.

В данной работе излагается алгоритм численного решения обратной задачи для намагниченных тел указанного вида. Автор сводит исходную задачу к задаче нахождения минимума функции четырех переменных и предлагает оригинальный метод решения последней. Основным достоинством этого метода является то, что он позволяет преодолевать "овраги" на пути к искомому решению. Библ. - I назв., рис. - 4.

Раздел III

УДК 512.5:518.5.

Сглаживание экспериментальных данных локальными сплайн-функциями. Пивоварова Н.Б., Пухначева Т.П. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с. 281-288.

Рассматривается аппроксимация функции одной и двух переменных, заданной в произвольных точках области Ω с определенной ошибкой.

Математическая формулировка следующая: найти функцию

$\varphi(x, y)$ такую, что $\varphi(x, y) \in C_1(\Omega)$,

$\iint_{\Omega} (\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2) d\Omega$ имеет минимум, при условии

$$\sum_{i=1}^r \frac{(\varphi(x_i, y_i) - f_i)^2}{d_i^2} \leq \varepsilon,$$

где ε — заданная константа, $(x_i, y_i) \in \Omega$, $i=1, \dots, r$ — точки, в которых известны значения функции f_i с заданной ошибкой d_i . Для решения задачи применяются локальные сплайны, т.е. кусочно-кубические многочлены Рябенского с непрерывной первой производной. Предложен вычислительный алгоритм и разработан комплекс программ. Библиография — 8 назв., табл. — 1.

УДК 517.945+518.12.

О численном решении задачи интегральной геометрии. Романов М.В. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.289-297.

Автором ранее был предложен метод характеристик численного решения обратной кинематической задачи сейсмологии. В настоящей статье показывается, что упомянутый метод с несущественными видоизменениями может быть использован для численного решения задачи интегральной геометрии — задачи восстановления функции через интегралы по известному семейству кривых, на которое наложены условия общего характера. Выведено линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка со сдвинутыми аргументами, задача Коши для которого эквивалентна рассматриваемой задаче интегральной геометрии. Библиография — 6 назв. рис.—2.

УДК 518.12.

Об одном методе r — гладкого приближения функций многих переменных. Цедохо В.А., Белоносов А.С., Белоносова А.В. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6. Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, с.298-309.

В работе предлагается один метод r — гладкого приближения функций многих переменных, основанный на применении понятия разбиения единицы. Дается алгоритм, реализующий один из возможных способов применения этого метода для прикладных задач. Приводятся результаты численного эксперимента, сделанного по программе, составленной согласно этому алгоритму. На одном конкретном примере иллюстрируются другие возможные способы применения идеи этого метода. Рис. — 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОФИЗИКИ

Под редакцией

Михаила Михайловича Лаврентьева
и Анатолия Семеновича Алексеева

Корректоры: В.А.Краснова

Н.С.Хенкина

Л.И.Черная

Технический редактор Т.А.Шандарова

Подписано в печать 25/1У-1975г. МН 07258

Формат бумаги 60 x 84 1/16 П.л.20. Уч.-изд.л.20,1

Тираж 600 экз. Заказ №874 Цена - 1руб.40коп.

Отпечатано на ротапринтере Вычислительного центра
СО АН СССР, Новосибирск-90.

Цена 1 руб.40 коп.

1534