

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОФИЗИКИ

Выпуск 6



СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
Вычислительный центр

549+550.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОФИЗИКИ

(Сборник научных трудов)

Выпуск 6, часть 2

Под редакцией
М.М.Лаврентьева и А.С.Алексеева

1535



Новосибирск 1975

Редакционная коллегия

М.М.Лаврентьев (председатель), А.С.Алексеев (зам.председателя), О.К.Омельченко, В.Г.Романов, В.А.Цецохо.

219+220.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ

(Общая теория групп)

Выпуск 2, часть 2

Под редакцией
М.М.Лаврентьева и А.С.Алексеева

А н н о т а ц и я

В сборнике обсуждаются теоретические и прикладные аспекты математических методов исследования геофизических полей. Излагаются результаты по прямой и обратным задачам дифракции, обратной динамической задаче сейсмического зондирования осадков в океане, ряду обратных коэффициентных задач для гиперболических уравнений и систем, обратной кинематической задаче сейсмике на плоскости.

Сборник рассчитан на специалистов по прикладной математике и геофизике, а также на студентов старших курсов этих специальностей.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	6
А.С.Алексеев, В.И.Добринский. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмологии.....	7
Ю.Е.Аниконов, А.Г.Марчук. К обратной задаче дифракции..	54
М.А.Атаходжаев. Обратная задача ньютоновского потенциала объемных масс для тела, близкого к данному.....	63
С.П.Белинский. Об обратной задаче для линейных симметрических t - гиперболических систем уравнений первого порядка.....	100
А.Л.Бухгейм. Об аналитичности решений специальных интегральных уравнений I рода.....	110
В.В.Воронин. Решение двумерной задачи дифракции акустической волны на упругом теле методом потенциалов.....	120
Е.С.Глушкова. Об единственности некоторых обратных задач для телеграфного уравнения.....	130
С.Елубаев, О.Ш. Турсынбеков. Об одной теореме единственности обратной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка.....	145
В.Б.Кардаков. Оценка устойчивости решения негиперболической краевой задачи для волнового уравнения.	157
В.Р.Кирейтов. О некоторых обратных задачах волновой оптики.....	167
Р.Г.Мухометов. О задаче интегральной геометрии.....	212
Р.Г.Мухометов. Обратная кинематическая задача сейсмологии на плоскости.....	243
В.И.Рудерфер. Априорные оценки в задаче о продолжении волнового поля с времениподобной поверхности в окрестности точки уплощения.....	255

С.И.Темирбулатов. Некоторые некорректные задачи для уравнения составного типа.....	264
О.Ш.Турсынбеков. Теоремы существования и единственнос- ти обратной задачи для гиперболических уравнений n -го порядка.....	274
Аннотации статей, помещенных в сборнике.....	289

Предисловие

В настоящем выпуске сборника "Математические проблемы геофизики" помещены работы главным образом сотрудников ВЦ СО АН СССР, в которых изучаются теоретические и прикладные аспекты математических методов исследования геофизических полей.

В ряде работ изучаются коэффициентные обратные задачи для гиперболических уравнений и систем, а также некоторые условно-корректные задачи для волнового уравнения и для уравнения составного типа.

Получены новые результаты по исследованию единственности и устойчивости в плоской задаче интегральной геометрии и обратной кинематической задаче сейсмоки на плоскости.

Важным классом задач математической физики, имеющим большое прикладное значение в геофизике, являются прямые и обратные задачи дифракции. В сборнике имеется ряд работ по этой тематике. Исследована разрешимость плоской задачи дифракции стационарной акустической волны на упругом теле методом потенциалов простого слоя. Доказана однозначная определяемость выпуклой поверхности по полному отраженному полю плоской стационарной волны. Установлен ряд теорем единственности восстановления "излучающего" объекта по некоторым наборам его "оптических" изображений.

Методы численного решения прикладных задач геофизики представлены большой работой, посвященной численному решению одномерной обратной динамической задачи сейсмоки, позволяющей исследовать скоростные разрезы осадков в океане по сейсмограммам падающей и отраженных волн. Алгоритм решения адаптирован к реальным динамическим измерениям.

1.1. А. Г. Куропятин. О задаче интегральной геометрии.....	11
1.2. А. Г. Куропятин. Обратная кинематическая задача сейсмоки на плоскости.....	11
1.3. И. М. Гудергер. Обратные задачи в задаче о приращении магнитного поля с трансформацией вектора скорости в окрестности точки удара.....	22

Редколлегия

А.С.Алексеев, В.И.Добринский

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ
ОБРАТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СЕЙСМИКИ

Ограниченность экспериментальной информации о процессах колебания геологических сред, используемой в кинематических методах сейсмики, давно выдвинула как наиболее актуальную в сейсмических методах исследования проблему практического использования информации о полном поле колебания точек среды на поверхностях наблюдения.

За последние 15 лет в теории обратных динамических задач сейсмики в серии работ [1-4, 17] выполнено исследование вопросов математической постановки ряда таких задач (проблемы единственности решения, его существования и численного определения). Наиболее полно исследованы простейшие обратные задачи об определении механических характеристик сред с одномерными законами изменения свойств по глубине.

Предложенные в работах [1, 2, 5, 6, 7] численные методы решения одномерных обратных динамических задач, проявившие себя положительно в тестовых примерах, до последнего времени не удавалось использовать при обработке реальных динамических

наблюдений [2, 18, 5] .

Причина этого состоит в слабой устойчивости имеющихся алгоритмов по отношению к классу помех, возникающих в реальных условиях, а также в отсутствии специальных методов проведения точных и достаточно широкополосных динамических измерений.

В данной работе предпринимается попытка усовершенствовать численные алгоритмы решения обратных динамических задач за счет корректировки погрешностей реальных измерений с помощью условий существования решения обратной динамической задачи, а также с помощью некоторых теоретических закономерностей, характеризующих поведение спектров колебаний в областях высоких и низких частот.

В первом разделе данной работы находятся необходимые и достаточные условия существования и единственности решения одномерной обратной динамической задачи сейсмоки в постановке, где информация задается в виде записей падающей и отраженной волн. Эта постановка соответствует схеме реально осуществляемых экспериментов, но в теоретическом плане еще недостаточно хорошо исследована. Наиболее существенным следствием данного рассмотрения следует считать формулировку условий устойчивости численного алгоритма решения обратной задачи (см. раздел 2), а также достаточно эффективную регуляризацию [10] этого алгоритма, основанную на идее погружения экспериментальных данных в класс допустимых в смысле разрешимости обратной задачи (см. разделы 3 и 4).

Во втором разделе рассматривается роль фильтрации экспериментальных данных в процессе построения истинной структуры изучаемой среды методом обратных динамических задач сейсмоки. Необходимость в таком исследовании вызвана наличием неблагоприятных для численного решения обратной задачи особенностей спектральных характеристик регистрирующих каналов аппаратуры. В третьем разделе работы приводятся результаты обработки данных физического моделирования. Отметим, что в литературе отсутствует описание подобных попыток. Здесь же анализируется характер искажений, возникающих при решении обратной динамической задачи из-за неучета поглощения энергии сейсмических волн реальными средами.

Четвертый раздел посвящен анализу и обработке экспериментально-

го материала, полученного в центральной части Черного моря экспедицией ИОАН СССР.

I. Постановка задачи и ее корректность

I. Пусть пространство R^3 заполнено идеальной упругой изотропной средой, механические параметры которой являются функциями лишь глубины z , то есть $c_p(x, y, z) = c_p(z)$, $c_s(x, y, z) = c_s(z)$, $\rho(x, y, z) = \rho(z)$, где c_p , c_s - скорости распространения, соответственно, продольных и поперечных волн, а ρ - плотность среды. Допустим, что под воздействием распространяющейся из $-\infty$ нормальной плоской продольной волны в R^3 возбуждается волновой процесс, который в переменных $x = \int_0^z dz / c_p(z)$ и t будет описываться системой уравнений [2, 8]

$$\frac{\partial \psi_1(x, t)}{\partial x} - A(x) \psi_2(x, t) = \frac{\partial \psi_1(x, t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial \psi_2(x, t)}{\partial x} + A(x) \psi_1(x, t) = \frac{\partial \psi_2(x, t)}{\partial t}, \quad (I)$$

где $A(x) = d \ln \sigma(x) / dx$, $\sigma(x) = \rho(x)c_p(x)$, а $\psi_1(x, t)$ и $\psi_2(x, t)$ описывают волны, распространяющиеся в отрицательном и положительном направлении оси x , соответственно. Предположим далее, что $A(x) \equiv 0$ при $x < 0$ и нам известны функции $g(t)$ и $\varphi(t)$, описывающие формы падающей и отраженной от полупространства $x > 0$ волн, то есть заданы данные Коши [2]

$$\psi_1(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \psi_2(x, t) \Big|_{t=0} = g(-x), \quad [g(t) \equiv 0 \quad (2)$$

при $t < 0]$

и дополнительная информация

$$\psi_1(x, t) \Big|_{\substack{t > 0 \\ x < 0}} = \varphi(t + x). \quad (3)$$

Обратная задача заключается в определении акустической жесткости среды $\sigma(x) = \sigma(0) \exp(2 \int_0^x A(x) dx)$.

2. С целью удобства как теоретического анализа, так и разработки численного алгоритма, решение задачи (I)-(3) принято разбивать на два этапа [I-7]. На первом этапе относительно функции $v(t)$ решается интегральное уравнение Вольтерра I-го рода типа свертки:

$$g(t) * v(t) = \int_0^t g(t-\tau) v(\tau) d\tau = \varphi(t), \quad (4)$$

а на втором по функции $v(t)$, являющейся формой отраженной волны на падающий импульс типа $\delta(t)$ ($\delta(t)$ - δ -функция Дирака) и называемой часто в литературе [2-7] импульсной переходной функцией среды, откликом среды или импульсной сейсмограммой, восстанавливается функция $\sigma(x)$, то есть на втором этапе решается обратная задача (I)-(3) при следующих данных:

$$g(t) = \delta(t), \quad \varphi(t) = v(t). \quad (5)$$

3. Докажем следующее утверждение.

Пусть функция $\tilde{v}(\omega) = \int_0^\infty v(t) e^{i\omega t} dt$ удовлетворяет условиям:

$$1) |\tilde{v}(\omega)| \leq 1 \quad \text{и} \quad 2) \frac{||\tilde{v}(\omega)|^2 - \operatorname{Re} \tilde{v}(\omega)|}{|1 - \tilde{v}(\omega)|^2} \leq \frac{c_1}{\omega^2 + \varepsilon_1}$$

при $\omega \rightarrow \infty$.

Тогда для $v(t)$ существует и притом единственное решение задачи (I)-(3), (5), принадлежащее классу дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Доказательство основывается на эквивалентности задачи (I)-(3) следующей обратной задаче [I, 2].

Пусть на границе полупространства $x > 0$, заполненного идеально упругой изотропной средой, механические параметры которой зависят лишь от глубины x , в момент времени $t = 0$ начинает действовать источник нормальных плоских продольных волн, то есть выполнено граничное условие

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{\sigma(0)} f(t), [f(t) \equiv 0 \text{ при } t < 0]. \quad (6)$$

Волновой процесс в полупространстве $x > 0$ будет описываться уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d \ln \sigma(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (7)$$

где $u(x, t)$ - вертикальная компонента вектора смещений частиц среды.

Предположим, что при $t < 0$ полупространство $x > 0$ находилось в покое, то есть заданы данные Коши

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Требуется определить функцию $\sigma(x)$, если нам известен режим колебания поверхности $x = 0$

$$u(0, t) = \lim_{x \rightarrow 0} u(x, t). \quad (9)$$

Связь между постановками (I)-(3) и (6)-(9) вытекает из того, что уравнение (7) эквивалентно системе (I) [2,8], а функции $f(t)$ и $u(0,t)$ однозначно определяют пару функций $g(t)$ и $\varphi(t)$, которые в данном случае имеют смысл падающей от поверхности $x=0$ и возвращающейся к этой же поверхности волн, соответственно. Учитывая, что $u(x,t) = \sqrt{\frac{\sigma(0)}{\sigma(x)}} (\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t))$, [2,8], и предполагая однородность среды в тонком слое, прилегающем к поверхности $x=0$, где будет $\psi_1(x,t) = \varphi(x,t)$ и $\psi_2(x,t) = g(t-x)$, из соотношений (6) и (9) получим искомую связь

$$\frac{1}{\sigma(0)} f(t) = \varphi'(t) - g'(t), \quad (10)$$

$$u(0,t) = \varphi(t) + g(t).$$

Постановка (6)-(9) достаточно хорошо исследована в работах [1,2,9], где выяснены вопросы ее корректности и построены конструктивные методы отыскания $\sigma(x)$. Это обстоятельство дает возможность исследовать задачу (I)-(3), основываясь на результатах для краевой обратной задачи (6)-(9). Так, взаимно-однозначный характер связи (10) позволяет сделать вывод о единственности решения обратной задачи (I)-(3). Однако не при любых $\varphi(t)$ и $g(t)$ решение существует. Для формулировки необходимых и достаточных условий мы используем соответствующие условия для задачи (6)-(9). Пусть $f(t) = \delta(t)$. Согласно работам [1,2,9] решение прямой задачи (6)-(8) может быть представлено в виде

$$u_6(0,t) = -\frac{1}{\sigma(0)} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\rho(\omega^2), \quad (11)$$

где $\rho(\omega^2)$ - спектральная функция некоторой дифференциальной системы. Из тех же работ следует, что для существования решения $\sigma(x)$ обратной задачи (6)-(9) в классе дважды непре-

ривно дифференцируемых функций необходимо и достаточно, чтобы
 А) существовала неубывающая функция $\rho(\lambda)$, обращающая
 (II) в тождество и В) было выполнено неравенство

$$\frac{1}{\sigma(0)} \left| \pi \rho'(\omega^2) - \frac{1}{\omega} \right| \leq \frac{c_2}{\omega^{4+\varepsilon_1}} \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty$$

для каких-то $\varepsilon_1 > 0$ и $c_2 > 0$. Здесь $\rho'(\omega^2) = d\rho(\lambda)/d\lambda$,
 ($\lambda = \omega^2$). Очевидно, эти требования накладывают определенные
 условия, которым должен удовлетворять спектр функции
 $u_g(0, t)$. Действительно, формулу (II) можно переписать и
 так

$$u_g(0, t) = -\frac{2}{\sigma(0)} \int_0^{\infty} \sin \omega t \rho'(\omega^2) d\omega. \quad (17)$$

Используя представление для $u_g(0, t)$ через ее синус-
 преобразование Фурье и пользуясь однозначностью данного
 представления легко можно показать справедливость равенства

$$\text{Im } \tilde{u}_g(0, \omega) = -\frac{\pi}{\sigma(0)} \rho'(\omega^2).$$

Так как в силу А) $\rho'(\lambda) \geq 0$, то $\text{Im } \tilde{u}_g(0, \omega) \leq 0$.
 Условие В) приводит к требованию

$$\left| \text{Im } \tilde{u}_g(0, \omega) - \frac{1}{\omega \sigma(0)} \right| \leq \frac{c_2}{\omega^{4+\varepsilon_1}} \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty. \quad (18)$$

А теперь, воспользовавшись связью (10), найдем те условия, ко-
 торым должна удовлетворять функция $\tilde{v}(\omega)$, чтобы существо-
 вало решение обратной задачи (I)-(3), (5). Полагая $g(t) = \delta(t)$,
 $\varphi(t) = v(t)$ и переходя в (10) к преобразованиям Фурье, полу-
 чим

$$\tilde{f}(\omega) = i\omega\sigma(0)(1 - \tilde{V}(\omega)),$$

$$\tilde{u}(0, \omega) = 1 + \tilde{V}(\omega).$$

Отсюда

$$\tilde{u}_\delta(0, \omega) = \frac{\tilde{u}(0, \omega)}{\tilde{f}(\omega)} = \frac{1}{i\omega\sigma(0)} \frac{1 + \tilde{V}(\omega)}{1 - \tilde{V}(\omega)} \quad (I3)$$

или, окончательно,

$$\tilde{u}_\delta(0, \omega) = -\frac{i}{\omega\sigma(0)} \frac{1 - |\tilde{V}(\omega)|^2 + 2i\text{Im} \tilde{V}(\omega)}{|1 - \tilde{V}(\omega)|^2}.$$

Следовательно, требование А) эквивалентно выполнению неравенства

$$|\tilde{V}(\omega)| \leq 1, \quad (I4)$$

а В), что легко доказывается после ряда простых преобразований, налагает условие

$$\frac{||\tilde{V}(\omega)|^2 - \text{Re} \tilde{V}(\omega)|}{|1 - \tilde{V}(\omega)|^2} \leq \frac{c_2}{\omega^{2+\epsilon_1}} \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (I5)$$

Итак, условия (I4), (I5) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы некоторая функция $v(t)$ ($v(t) \equiv 0$ при $t < 0$) являлась импульсной сейсмограммой для какой-то среды $\sigma(x)$ ($\sigma''(x)$ непрерывна), что и требовалось доказать.

4. Приведем теперь алгоритм построения $\sigma(x)$ по $v(t)$. Для этого домножим левую и правую части формулы (I3) на $i\omega\sigma(0)(1 - \tilde{V}(\omega))$ и вычислим обратное преобразование Фурье от обеих частей получающегося равенства. Получим

$$\sigma(0) (v(t) * u_0'(0,t) - u_0'(0,t)) = \delta(t) + v(t). \quad (I6)$$

Из работ [1,2] следует, что $u_0'(0, t)$ может быть представлена в виде

$$u_0'(0, t) = -\frac{1}{\sigma(0)} (2H(t) + \delta(t)),$$

где $H(t)$ - регулярная часть, имеющая непрерывную производную, если $\sigma''(x)$ непрерывна.

Подставляя последнее выражение в формулу (I6) получим связь между $H(t)$ и $v(t)$:

$$H(t) - v(t) * H(t) = v(t), \quad (I7)$$

которая позволяет привести алгоритм решения обратной задачи (I)-(3), (5). Итак, для определения $\sigma(x)$ необходимо:

- 1) решить относительно $H(t)$ интегральное уравнение (I7),
- 2) разрешить однопараметрическое семейство интегральных уравнений [1,2]

$$\tau(t, 2x) + \int_0^{2x} H(|t-s|) \tau(s, 2x) ds = 1, \quad (I8)$$

а затем найти $\sigma(x)$ по формуле

$$\sigma(x) = \sigma(0) \tau^2(2x, 2x). \quad (I9)$$

Из работ [1,2] следует, что непрерывно дифференцируемая функция $H(t)$ должна удовлетворять неравенству

$$\int_{-a/2}^{a/2} \psi^2(s) ds + \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} H(|t-s|) \psi(s) \psi(t) ds dt \geq 0, \quad (20)$$

где $\psi(s)$ — любая непрерывная функция, $a < \infty$, чтобы существовала $\sigma(x)$ такая, что $\sigma''(x)$ непрерывна. Последнее позволяет сформулировать необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи (1)–(3), (5) и в таком случае, когда $v(t)$ задана на конечном промежутке $[0, a]$. Очевидно, эти условия сводятся к требованию разрешимости уравнения (17) в классе непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих неравенству (20).

5. Сделаем несколько выводов из сформулированных выше результатов.

Перейдем в (4) к преобразованиям Фурье. Получим равенство

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \tilde{g}(\omega) \tilde{v}(\omega), \quad \text{а отсюда и из (14) следует, что } |\tilde{\varphi}(\omega)| \leq |\tilde{g}(\omega)|,$$

то есть модуль спектра отраженной волны на всех частотах меньше либо равен модулю спектра падающей волны.

Отсюда, в частности, получается физически очевидное неравенство $\|\varphi(t)\|_{L_2} \leq \|g(t)\|_{L_2}$, то есть энергия отраженной

волны меньше либо равна энергии падающей волны. Неравенство (14) выражает тот факт, что коэффициент отражения от неоднородного полупространства не может превосходить единицы. Поэтому, несмотря на то, что неравенство (14) получено в предположении непрерывности $\sigma''(x)$, оно должно оставаться справедливым и для любой $\sigma(x) > 0$, которая, к примеру, может иметь разрывы первого рода, что следует предполагать при обработке экспериментальных данных. Покажем это на примере среды $\sigma(x)$, разрывной лишь в одной точке $x = 0$, а при $x > 0$ пусть $\sigma''(x)$ непрерывна.

Обозначим: $\sigma(x) = \sigma_0$ при $x < 0$ и $\sigma(+0) = \sigma_1 (\sigma_1 \neq \sigma_0)$.

Предположим, что в слое $0 < x < \varepsilon$, $\sigma(x) = \sigma_1$, и обозначим через ε_1 и φ_1 , соответственно, формы распространяющихся в положительном и отрицательном направлении оси x волн. При

$x = 0$ будут выполняться условия сопряжения, выражающие непрерывность смещений и напряжений

$$\sigma_0 \frac{\partial u_-}{\partial x} = \sigma_1 \frac{\partial u_+}{\partial x}, \quad u_- = u_+,$$

где

$$u_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} u(x, t), \quad \frac{\partial u_{\pm}}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

Отсюда получаем

$$\sigma_0 (\varphi'(t) - g'(t)) = \sigma_1 (\varphi_1'(t) - g_1'(t)),$$

$$\varphi(t) + g(t) = \varphi_1(t) + g_1(t).$$

Подставляя в данную систему $\varphi(t) = v(t)$, $g(t) = \delta(t)$ и переходя к преобразованиям Фурье, получим

$$\sigma_0 (\tilde{v}(\omega) - 1) = \sigma_1 (\tilde{\varphi}_1(\omega) - \tilde{g}_1(\omega)),$$

$$\tilde{v}(\omega) + 1 = \tilde{\varphi}_1(\omega) + \tilde{g}_1(\omega).$$

Выразим отсюда $\tilde{\varphi}_1(\omega)$ и $\tilde{g}_1(\omega)$:

$$\tilde{\varphi}_1(\omega) = a(\tilde{v}(\omega) + b), \quad \tilde{g}_1(\omega) = a(b\tilde{v}(\omega) + 1),$$

где $a = (\sigma_0 + \sigma_1) / 2\sigma_1$, $b = (\sigma_1 - \sigma_0) / (\sigma_1 + \sigma_0)$.



1535

В силу доказанного выше неравенства $|\tilde{\varphi}_1(\omega)| \leq |\tilde{\xi}_1(\omega)|$ имеем

$$|\tilde{v}(\omega) + b| \leq |b\tilde{v}(\omega) + 1|.$$

Принимая во внимание очевидное неравенство $|b| < 1$ из последнего неравенства получаем $|\tilde{v}(\omega)| \leq 1$, что и требовалось доказать.

2. Исследование влияния фильтрации данных на процесс восстановления среды

1. В силу классической некорректности обратной задачи (I)-(3) присутствие погрешностей в экспериментальных данных может приводить либо к неустойчивости используемого алгоритма обработки, либо к потере информации; если алгоритм регуляризован. Проиллюстрируем это на таком простом примере. Допустим, что $\sigma_p(z) = a(1+bz)$, $\rho(z) = p(1+bz)$, ($z > 0$, $b > 0$).

Тогда $\sigma(x) = pa \exp(2abx)$ и, как это можно показать,

$v(t) = -J_1(abt)/t$, где $J_1(y)$ - функция Бесселя первого порядка. Используем теперь то, что при $y < 1$, $J_1(y) \approx y/2$ [14]. Следовательно, при $t < (ab)^{-1}$ $v(t) \approx -ab/2$.

Пусть $g(t) = \sin 2\pi ft$, тогда в силу (4) $\varphi(t) \approx -ab(1 - \cos 2\pi ft) / 4\pi f$ при $t < (ab)^{-1}$. Итак, если абсолютная погрешность в отраженной волне = ϵ , то при $f > |ab| / 2\pi\epsilon$ информация о градиенте скорости и плотности будет потеряна. Потеря информации при обработке данных происходит на первом этапе решения обратной задачи. Действительно, будем искать решение уравнения (4) методом преобразования Фурье. Получим

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\omega)}{\tilde{\xi}(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (21)$$

Функция $g(t)$, как и $\varphi(t)$, всегда представляет результат фильтрации распространяющейся от источника сейсмической

волны, то есть $\tilde{g}(\omega)$ является произведением спектра волны на спектр переходной характеристики регистрирующего прибора. Но так как любая сейсморазведочная аппаратура не пропускает очень низкие и высокие частоты [11], то $|\tilde{g}(\omega)| \rightarrow 0$ при $|\omega| \rightarrow 0$ и $|\omega| \rightarrow \infty$. Кроме того и в некоторых промежуточных точках $\tilde{g}(\omega)$ может принимать близкие к нулю значения. Все это приводит к тому, что при численной реализации формулы (21) может иметь место неустойчивость. Для получения устойчивого решения Кнэтцем [20] предложен следующий способ регуляризации формулы (21):

$$v_{\lambda}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}_{\lambda}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\varphi}(\omega) \tilde{g}^*(\omega)}{|\tilde{g}(\omega)|^2 + \lambda^2} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (22)$$

Покажем, что данный алгоритм действительно регуляризирующий [10]. Пусть: 1) правая часть уравнения (4) задана с погрешностью, причем $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\omega) - \tilde{\varphi}_{\epsilon}(\omega)| d\omega < \epsilon$; 2) $|\tilde{g}(\omega)| \leq c_1$; 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{v}(\omega)| d\omega < \infty$.

Оценим модуль разности между точным и построенным для приближенной $\varphi_{\epsilon}(t)$ решениями уравнения (4)

$$\begin{aligned} |v(t) - v_{\lambda, \epsilon}(t)| &\leq |v(t) - v_{\lambda}(t)| + |v_{\lambda}(t) - v_{\lambda, \epsilon}(t)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\tilde{\varphi}(\omega)}{\tilde{g}(\omega)} \right| \frac{\lambda^2 d\omega}{|\tilde{g}(\omega)|^2 + \lambda^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\varphi}(\omega) - \tilde{\varphi}_{\epsilon}(\omega)|}{|\tilde{g}(\omega)|^2 + \lambda^2} |\tilde{g}(\omega)| d\omega < \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}(\omega) \frac{\lambda^2 d\omega}{|\tilde{g}(\omega)|^2 + \lambda^2} + c_1 \frac{\epsilon}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Полученная выше оценка точности приближенного решения имеет характерный для всех регуляризирующих алгоритмов вид, а именно, при стремлении параметра регуляризации λ к нулю одно из слагаемых убывает до нуля, а второе беспредельно растет

(при $\varepsilon = \text{const}$). Однако, если выбрать λ так, чтобы $\varepsilon/\lambda^2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то оценка убывает до нуля, то есть приближенное решение сходится к точному. Поэтому оператор, определенный формулой (22), является регуляризирующим для уравнения (4).

2. При практическом использовании формулы (22) интегрирование всегда осуществляется в конечных пределах, то есть $|\omega| \in [\omega_H, \omega_B]$. Это обусловлено тем, что вне данного диапазона частот $\tilde{v}(\omega)$ принимает соизмеримые с уровнем шумов значения.

Таким образом, построенную функцию $v_\lambda(t)$ можно считать результатом полосовой фильтрации искомого решения $v(t)$ от которого, очевидно, она может как угодно сильно отличаться по норме в пространствах C и L_2 , если основная энергия $v(t)$ лежит вне рабочего диапазона частот. В связи с тем, что при практической реализации решения обратной задачи такая фильтрация неизбежна, встает проблема оценки ее влияния на получаемый разрез среды. Для этого достаточно подставить в алгоритм решения обратной задачи (1)-(3), (5) вместо функции $v(t)$ результат ее фильтрации

$$v_\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_H}^{\omega_B} \tilde{v}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (23)$$

и исследовать взаимосвязь между задаваемой средой $\sigma(x)$ и получаемой при решении функцией $\sigma_\beta(x)$. Однако из-за сложности связи (17)-(19) между $v(t)$ и $\sigma(x)$ анализ данного вопроса аналитическими средствами весьма затруднен. Так, в работе [12] исследуется асимптотика фундаментального решения для бесконечной струны с периодически меняющейся плотностью. Зависимость плотности предполагается кусочно-постоянной, а каждый участок постоянства пробегается импульсом за одно и то же время Δt . Показывается, что при стремлении $\Delta t \rightarrow 0$ фундаментальное решение $u(x, t)$ имеет предел, не зависящий от x и равный $\sqrt{1/\rho_0}$ при $t > x$, где ρ_0 - средняя плотность струны. В работе [13] рассмотрена подобная же

задача для струны, плотность которой имеет различные средние значения при $0 < x < x_0$ и $x > x_0$, а на каждом из этих участков она устроена так же, как и в работе [12]. Показано, что асимптотикой в таком случае является фундаментальное решение для струны, состоящей из двух однородных кусков, плотности которых равны средним плотностям соответствующих участков рассмотренной струны. Из теоретических результатов, имеющих отношение к фильтрации высоких частот, следует отметить лишь соотношение:

$$\tilde{v}(0) = - \frac{\sigma_{\infty} - \sigma(0)}{\sigma_{\infty} + \sigma(0)}, \quad (\sigma_{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x)),$$

полученное в работе [8]. Отсюда следует весьма важный вывод, что, если при решении обратной задачи (I)-(3) нижняя граница

ω_n рабочего диапазона частот будет больше нуля, то $\sigma_{\beta}(x) \rightarrow \sigma(0)$ при $x \rightarrow \infty$.

Однако асимптотический характер приведенных выше результатов не позволяет получить всех практически удобных выводов относительно фильтрации импульсной сейсмограммы. Последнее может быть достигнуто лишь численным экспериментированием, заключающимся в численном решении прямой и обратной задачи (I)-(3), (5) для задаваемых по какому-то принципу разрезов среды и последующем анализе получающихся при этом результатов. Именно такой путь и был выбран нами при исследовании проблемы влияния фильтрации.

3. Для численного решения прямой и обратной задач был использован алгоритм, описанный в работах [2,8]. Кратко охарактеризуем его. Исходная задача (I)-(3) заменяется некоторым ее дискретным аналогом, где вместо гладких функций присутствуют векторы их значений в конечном числе точек. Этот переход осуществляется путем замены дифференциальных операторов их конечно-разностными аппроксимациями. В результате система (I) дифференциальных уравнений редуцируется к системе алгебраических уравнений [2,8]

$$\psi_1(n, k+1) = \psi_1(n+1, k)(1 + q_n) - q_n \psi_2(n, k),$$

$$\psi_2(n, k+1) = \psi_2(n-1, k)(1 - q_{n-1}) + q_{n-1} \psi_1(n, k), \quad (24)$$

$$n = 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad q_n = \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\sigma_{n+1} + \sigma_n},$$

где $\sigma_n = \sigma((n-1)\Delta x)$, $\psi_i(n, k) = \psi_i((n-1)\Delta x, k\Delta t)$, $\Delta x = \Delta t$, $i=1, 2$.

Прямая разностная задача для системы (24) заключается в определении $\varphi(k\Delta t) = \varphi_1(0, k)$ по заданным последовательностям

$$\{\sigma_n\} \text{ и } \{\psi_2(0, k) = g(k\Delta t)\}.$$

В обратной разностной задаче требуется построить последовательность $\{\sigma_n\}$ по известным $\{\varphi_1(0, k)\}$ и $\{\psi_2(0, k)\}$

Разностная схема (24) обладает устойчивостью, аппроксимацией (порядка Δt) и сходимостью [8], вследствие чего она пригодна для решения прямой задачи.

Использование схемы (24) для решения обратной задачи требует дополнительного исследования из-за некорректности постановки (I)-(3) в классическом смысле. Показано [2], что только при выборе в качестве $g(t)$ δ -функция Дирака, разностная аппроксимация которой имеет вид:

$$g(0) = 1/\Delta t, \quad g(k\Delta t) = 0 \quad \text{при } k > 0,$$

алгоритм обращения схемы (24) обладает устойчивостью. Однако, как это следует из условий разрешимости обратной задачи (I)-(3), не для всякой функции $v(t)$ найдется разрез среды, импульсной сейсмограммой которого она является. Отсюда вытекает, что алгоритм обращения схемы (24) при невыполнении условий (I4), (I5) не всегда будет давать физически осмысленный результат ($0 < \sigma(x) < +\infty$).

Докажем, что неравенство (I4) является условием разрешимости и критерием устойчивости решения разностной обратной задачи.

Для этого мы используем результаты для краевой разностной обратной задачи, непрерывным аналогом которой является постановка (6)-(9). Приведенная выше разностная схема совпадает с известным алгоритмом Бранова-Кветца [5, 21], получившим его из некоторых физических соображений. В работе [3] этот алгоритм проанализирован в предположении, что полупространство $x > 0$ ограничено идеально отражающей границей, и было показано, что

$$q_n = -\frac{N_n}{D_n}, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где определители

$$D_n = \begin{vmatrix} T_0 & T_1 & T_2 & \dots & T_{n-1} \\ T_1 & T_0 & T_1 & \dots & T_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n-1} & T_{n-2} & T_{n-3} & \dots & T_0 \end{vmatrix}, \quad N_n = \begin{vmatrix} T_0 & T_1 & T_2 & \dots & T_{n-2} T_1 \\ T_1 & T_0 & T_1 & \dots & T_{n-3} T_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n-1} & T_{n-2} & T_{n-3} & \dots & T_1 T_n \end{vmatrix}.$$

Здесь T_0 - это амплитуда начального падающего импульса, возбужденного распределенным по поверхности источником плоской волны, а $T_k = \frac{1}{2} u(0, 2k \Delta t)$, $k = 1, 2, \dots$. Ввиду того, что

$$D_n = T_0^n (1 - q_1^2)^{n-1} \cdot (1 - q_2^2)^{n-2} \dots (1 - q_{n-1}^2),$$

то для разрешимости и устойчивости краевой разностной обратной задачи необходимо и достаточно, чтобы $D_n > 0$ при всех $n \leq 1$. Взаимосвязь между двумя обслуживаемыми разностными обратными задачами можно получить, если рассмотреть каждый акт отражения от свободной поверхности $x = 0$ возникающих в неоднородном полупространстве $x > 0$ волн.

Обозначим через v_k , $k = 1, 2, \dots$, значения импульсной сей-

смограммы для разностной задачи. Тогда искомая связь запишется в виде

$$T_1 = v_1 T_0, T_2 = v_1 T_1 + v_2 T_0, \dots, T_n = \sum_{k=1}^n T_{n-k} v_k, \dots,$$

а она уже позволяет найти ограничение на последовательность $\{v_k\}$, гарантирующее положительность определителей D_n . Положим $T_0 = I$ и введем функции

$$\tilde{T}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k z^k, \quad \tilde{V}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k,$$

имеющие смысл z -преобразований последовательностей $\{T_k\}$ и $\{v_k\}$. Функции $\tilde{T}(z)$ и $\tilde{V}(z)$ аналитичны в круге $|z| < 1$, если определяющие их ряды сходятся при $|z| = 1$, что мы и будем предполагать.

Так как

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} T_{n-k} v_k + v_n,$$

то
$$\tilde{T}(z) = \tilde{V}(z) + \tilde{T}(z) \tilde{V}(z).$$

Отсюда
$$\tilde{T}(z) = \frac{\tilde{V}(z)}{1 - \tilde{V}(z)}.$$

В работе [3] показано, что для положительности D_n , ($n > 1$) необходимо и достаточно, чтобы последовательность

$$\dots, T_2, T_1, T_0, T_1, T_2, \dots \quad (\text{X})$$

была представима в виде

$$T_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p a_{p+n},$$

что равносильно неотрицательности дискретного преобразования Фурье последовательности (X) .

Найдем z - преобразование этой последовательности.

z - преобразование $\tilde{t}(z)$ последовательности

$$\dots, T_3, T_2, T_1,$$

очевидно, аналитично при $|z| \geq 1$ и определяется формулой

$$\tilde{t}(z) = \tilde{T}(z^{-1}) = \frac{\tilde{V}(z^{-1})}{1 - \tilde{V}(z^{-1})}.$$

Неотрицательность преобразования Фурье последовательности (X) эквивалентна неравенству

$$[\tilde{t}(z) + 1 + \tilde{T}(z)]|_{|z|=1} \geq 0.$$

Так как при $|z| = 1$ справедливы соотношения: $z^{-1} = z^*$,

$\tilde{V}(z^{-1}) = \tilde{V}^*(z)$, то последнее неравенство после ряда простых преобразований переписывается так:

$$\frac{\tilde{V}(z)}{1 - \tilde{V}(z)} + \frac{\tilde{V}^*(z)}{1 - \tilde{V}^*(z)} + 1 = \frac{1 - |\tilde{V}(z)|^2}{|1 - \tilde{V}(z)|^2} \geq 0.$$

Следовательно, $D_n > 0$ тогда и только тогда, когда

$|\tilde{V}(z)| \leq 1$, что и требовалось доказать. Серия численных экспериментов по решению обратной задачи подтвердила справедливость вышеприведенного утверждения и показала практическую

эффективность сформулированного критерия устойчивости алгоритма построения разреза среды. Отметим, что в силу данного критерия рассматриваемая в этом разделе работы фильтрация импульсной сейсмограммы не должна приводить к вычислительной неустойчивости алгоритма решения обратной задачи.

4. В тестовых расчетах среда задавалась функцией

$$\sigma(x) = 1.5 + px + q(\sin 2\pi f_1 x + \sin 2\pi f_2 x), \quad (25)$$

$$(0 < x < 1),$$

обладающей достаточно большой общностью и заключающей основные особенности реальных разрезов, которые в наибольшей степени связаны с проблемой фильтрации. Кроме того, любая функция $\sigma(x)$ на отрезке $[0, 1]$ может быть представлена в виде ряда Фурье по синусам и поэтому анализ модели (25) позволяет сделать некоторые общие выводы и относительно произвольно усстроенной среды. Ряд существенных выводов может быть получен при выяснении влияния различных компонент в среде $\sigma(x)$ на спектр $\tilde{V}(f)$ ($f = \frac{\omega}{2\pi}$ — частота в герцах) импульсной сейсмограммы. С этой целью при различных значениях параметров p , q , f_1 и f_2 были рассчитаны спектры $\tilde{V}(f) = R(f) + iM(f)$, которые представлены на рис. 1-4. (Значения параметров в каждом случае указаны на рисунках). На этих рисунках функции $\tilde{V}(f)$ приведены с противоположным знаком, что было обусловлено приспособлением программы к обработке данных модельного эксперимента и гидроакустического зондирования морских осадков. Первая группа расчетов проясняет роль параметров q и f_1 при $p = 0$ и $f_2 = 0$ (рис. 1 и 2). Легко заметить, что основная энергия $\tilde{V}(f)$ сосредоточена в окрестности точки $f = f_1/2$, а изменение параметра f_1 в достаточно широких пределах оставляет почти без изменений форму $R(f)$ и $M(f)$. Увеличение q вызывает не только возрастание $\max_f |\tilde{V}(f)|$, но и существенное усложнение вида $R(f)$ и $M(f)$. Значительный интерес представляет выяснение совместного влияния параметров f_1 и f_2 на $\tilde{V}(f)$. Сопоставляя приведенные

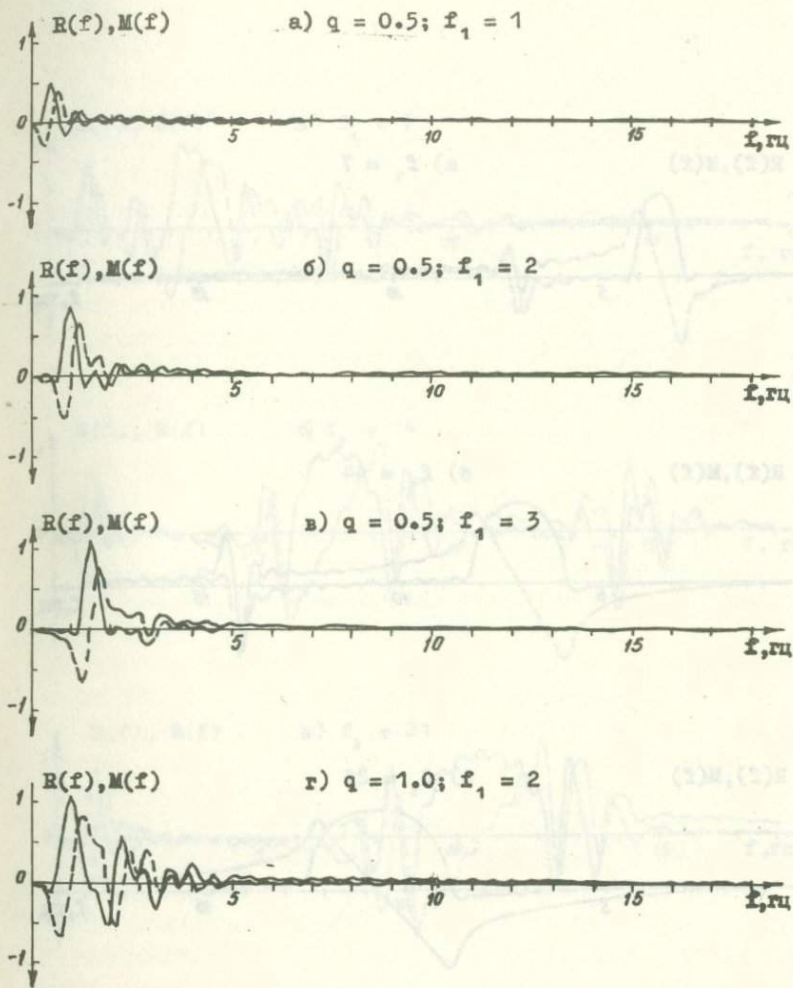


Рис. I. Спектры $\tilde{V}(f) = R(f) + iM(f)$ импульсной сейсмограммы $V(t)$ для среды $\sigma(x) = 1.5 + q \sin 2\pi f_1 x$ — $-R(f)$, — $M(f)$.

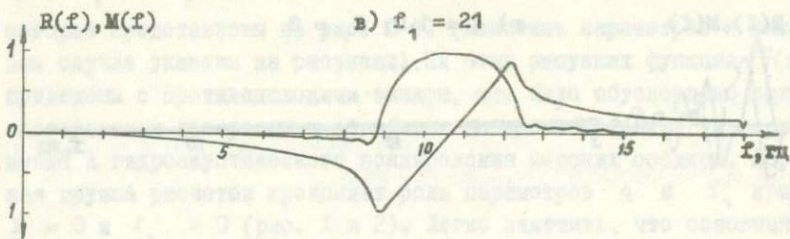
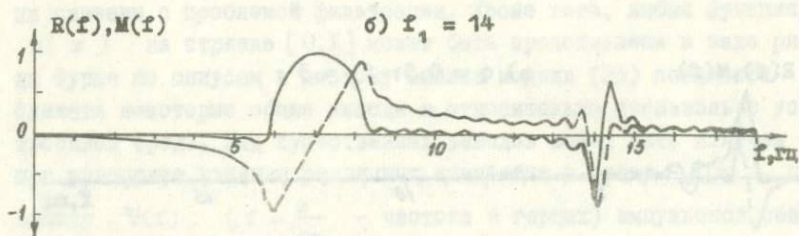
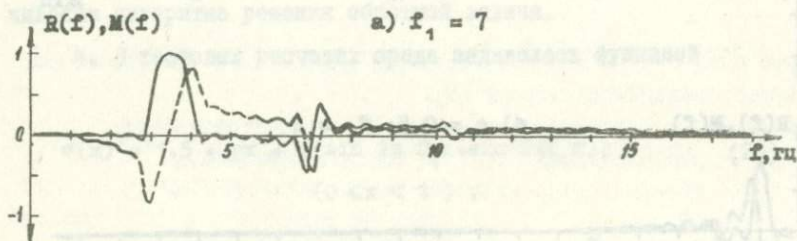


Рис.2. Спектры $\tilde{V}(f) = R(f) + iM(f)$ импульсной сейсмограммы $V(t)$ для среды $\sigma(x) = 1.5 + 0.5 \cdot \sin 2\pi f_1 x$ — $R(f)$,
 ---- $-M(f)$.

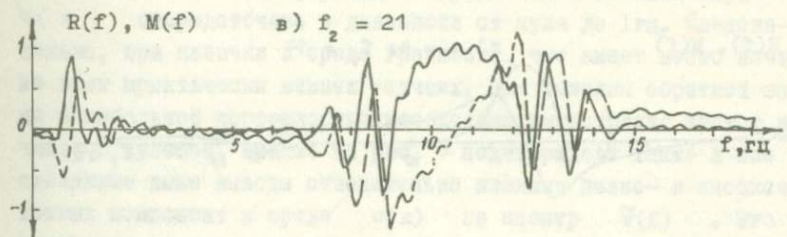
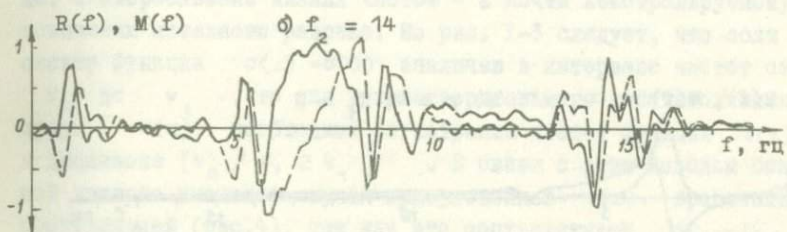
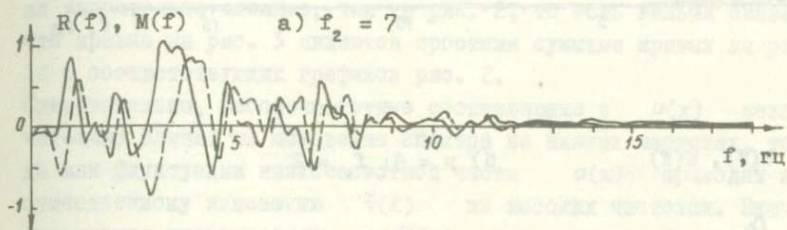


Рис.3. Спектры $\tilde{V}(f) = R(f) + iM(f)$ импульсной сейсмограммы $V(t)$ для среды $\sigma(x) = 1.5 + 0.5(\sin 4\pi x + \sin 2\pi f_2 x)$
 — $-R(f)$, - - $-M(f)$.

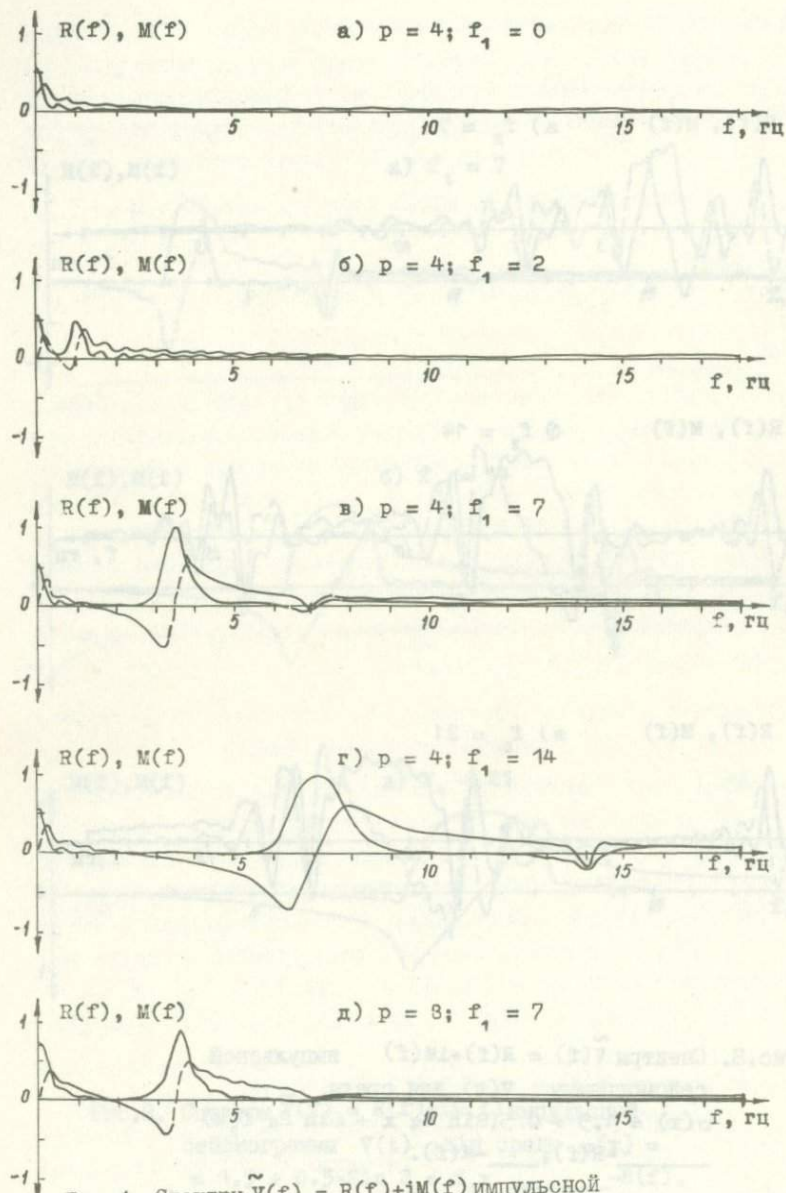


Рис. 4. Спектры $\tilde{V}(f) = R(f) + iM(f)$ импульсной сейсмограммы $V(t)$ для среды $\sigma(x) = 1.5 + px + 0.5 \sin 2\pi f_1 x$, $\text{---} R(f)$, $\text{- - -} M(f)$.

на рис. 3 кривые с соответствующими графиками рис. 1 и 2, можно заметить, что графики $\tilde{v}(f)$ на рис. 3 в интервале $[0, 2\text{гц}]$ практически повторяю рис. 1б, а при $f > 2\text{гц}$ картина значительно сложнее, чем на рис. 2, то есть нельзя сказать, что кривые на рис. 3 являются простыми суммами кривых на рис. 1б и соответствующих графиков рис. 2.

Следовательно, высокочастотные составляющие в $\sigma(x)$ незначительно влияют на поведение спектра на низких частотах, тогда как флуктуации низкочастотной части $\sigma(x)$ приводят к существенному изменению $\tilde{v}(f)$ на высоких частотах. Значит, фильтрация низких частот в $\tilde{v}(f)$ при решении обратной задачи должна приводить лишь к сглаживанию реального разреза среды, а отбрасывание низких частот - к почти неконтролируемому искажению истинного разреза. Из рис. 1-3 следует, что если спектр функции $\sigma(x) - \sigma(0)$ заключен в интервале частот от ν_0 до ν_1 , то для удовлетворительного восстановления среды $\sigma(x)$ необходима регистрация частот функции $v(t)$ в диапазоне $[\nu_0 / 4, 2\nu_1]$. В связи с этим выводом большой интерес вызывает случай присутствия в $\sigma(x)$ градиентной составляющей (рис. 4), так как это соответствует $\nu_0 = 0$. Действительно, теперь $R(0) = 0$ и, что особенно важно, почти вся основная информация о градиентной составляющей $\sigma(x)$ сосредоточена в диапазоне от нуля до 1гц. Следовательно, при наличии в среде градиента, что имеет место почти во всех практически важных случаях, для решения обратной задачи с небольшой погрешностью необходима регистрация частот начиная с нулевой. Кривые на рис. 4 подтверждают также и все сделанные выше выводы относительно влияния низко- и высокочастотных компонент в среде $\sigma(x)$ на спектр $\tilde{v}(f)$. Это легко заметить, сопоставляя рис. 4 с рис. 1 и 2. Следует, видимо, отметить совпадение полученных значений $R(0)$ с вычисленными по формуле $R(0) = (\sigma_\infty - \sigma(0)) / (\sigma_\infty + \sigma(0))$, [8], если в ней положить $\sigma_\infty = \sigma(1)$.

5. Для подтверждения сформулированных выше выводов был просчитан один тестовый пример, в котором для заданной среды $\sigma(x)$ рассчитывалась импульсная сейсмограмма $v(t)$, находился спектр $\tilde{v}(f)$ (он приведен на рис. 4в), а затем при разных значениях параметров f_H и f_B по функции

$$v_{\beta}(t) = \int_{f_H < |f| < f_B} \tilde{v}(f) e^{-i2\pi f t} df$$

определялся разрез $\sigma_{\beta}(x)$. На рис. 5а-5б, 5г сопоставлены истинный разрез (непрерывные кривые) и результаты решения тестовых обратных задач (пунктирные кривые). Итак, отбрасывание высокочастотной части спектра не приводит к существенным погрешностям при решении обратной задачи, тогда как даже весьма незначительная потеря низких частот в $v(t)$ ведет к большим расхождениям построенного разреза с истинным (рис. 5в). Отметим, что в случае $f_H = 1/4$ гц, $f_B = 10$ гц даже простая экстраполяция в интервале $[0, 1/4$ гц] $R(f)$ константой, а $M(f)$ линейной функцией в начало координат, приводила к несущественным расхождениям задаваемой и получаемой при решении среды. Характер искажений, происходящих со средой при потере низких частот в $v(t)$, можно проследить по рис. 5д, где пунктирная кривая - это полученный при $f_H = 1.5$, $f_B = 10$ гц разрез среды, а непрерывная кривая - функция $1.5 + 0.5 \sin 14 \pi x$ ($0 \leq x \leq 1$), т.е. это истинная среда, из которой вычтена градиентная составляющая. Отсюда можно сделать тот же вывод, к которому мы пришли при рассмотрении спектров решений прямых задач, а именно: фильтрация высоких частот в $v(t)$ не эквивалентна высокочастотной же фильтрации функции $\sigma(x) - \sigma(0)$, так как при этом происходит значительное искажение и высокочастотных составляющих разреза среды.

6. Сформулируем основные выводы приведенных тестовых расчетов.

1) При практической реализации решения обратной задачи допустима произвольная фильтрация низких частот.

2) При обработке экспериментальных сейсмограмм длительностью k секунд требуется восстановление спектра $\tilde{v}(f)$ начиная с частоты $\approx 1/2 \cdot k$; так как при $f < 1/2 \cdot k$ для

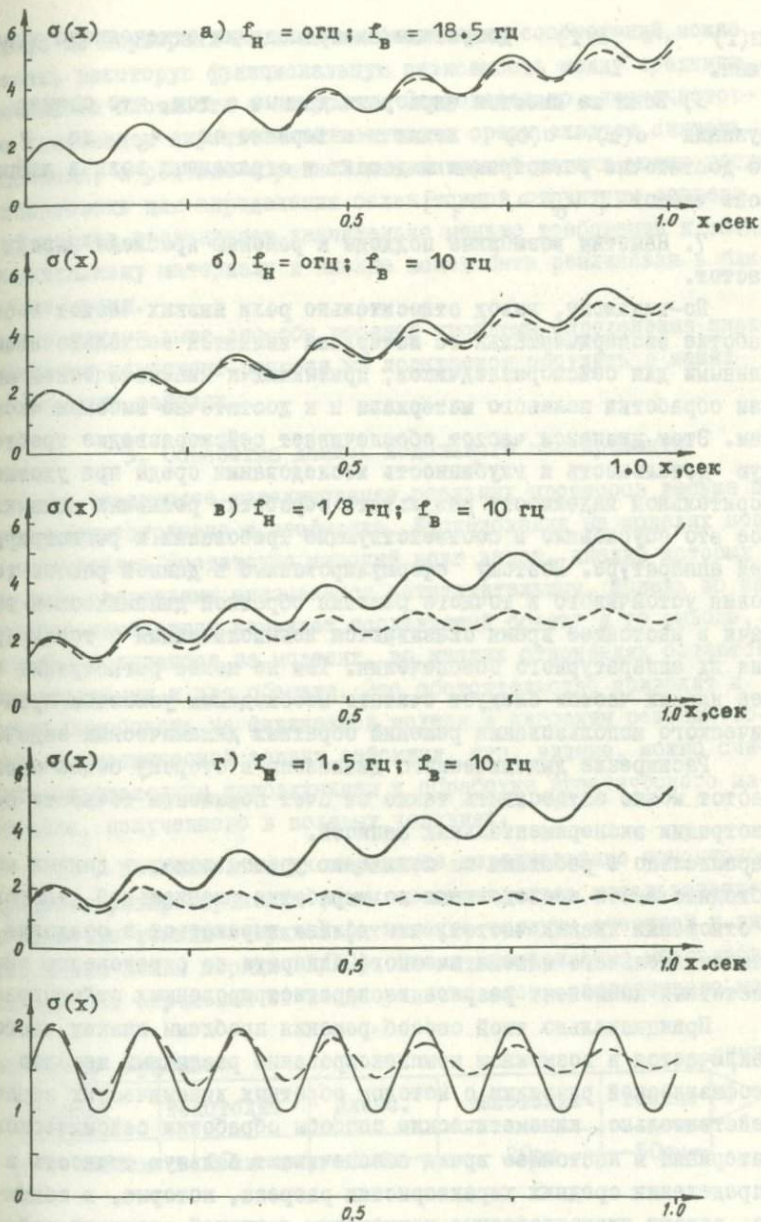


Рис. 5. Восстановление среды $\sigma(x)$ при разных уровнях фильтрации низких (f_H) и высоких (f_B) частот в $V(t)$.

$R(f)$ и $M(f)$ допустимы экстраполяции отмеченного выше типа.

3) Если же имеются априорные данные о том, что спектр функции $\sigma(x) - \sigma(0)$ лежит в интервале от ν_0 до ν_1 , то достаточна регистрация падающих и отраженных волн в диапазоне частот $[\nu_0/4, 2\nu_1]$.

7. Наметим возможные подходы к решению проблемы низких частот.

По-видимому, вывод относительно роли низких частот в обработке экспериментального материала является несколько неожиданными для сейсморазведчиков, привыкших к кинематическим методам обработки полевого материала и к достаточно высоким частотам. Этот диапазон частот обеспечивает сейсморазведке требуемую детальность и глубинность исследования среды при удовлетворительной надежности результата обработки реальных данных. Все это обусловило и соответствующие требования к регистрирующей аппаратуре. Поэтому сформулированные в данной работе условия устойчивого и точного решения обратной динамической задачи в настоящее время оказываются невыполненными с точки зрения их аппаратурного обеспечения. Тем не менее регистрацию более низких частот следует считать необходимым условием практического использования решений обратных динамических задач.

Расширение динамического диапазона в сторону более низких частот можно осуществить также за счет повышения точности регистрации экспериментальных записей.

Параллельно с работами по понижению уровня помех в данных необходимо вести исследования по выработке специальной стратегии в отношении низких частот, что должно выражаться в создании самостоятельного математического аппарата по определению низкочастотных компонент разреза из зарегистрированных сейсмограмм.

Принципиально иной способ решения проблемы низких частот заключается в возможном комплексировании различных методов геофизической разведки с методом обратных динамических задач. Действительно, кинематические способы обработки сейсмического материала в настоящее время обеспечивают большую точность в определении средних характеристик разреза, которые, в общем-то, задают низкочастотные компоненты истинной скорости сейсмических волн. Кроме того, для каждого района исследования

исходя из априорных геолого-геофизических соображений, можно указать некоторую функциональную зависимость между средними значениями плотности и скорости. Следовательно, низкочастотные компоненты акустической жесткости среды следует считать заданными, а решение обратной динамической задачи можно тогда использовать для определения более тонкой структуры разреза. Этот подход предъявляет значительно меньше требований к экспериментальному материалу и вполне может быть реализован в ближайшее время.

Перечисленные выше способы решения проблемы определения низкочастотных компонент разреза мы попытаемся обсудить в наших последующих работах.

3. Обработка данных модельного эксперимента

1. Физическое моделирование реальных процессов весьма широко распространено в геофизике. Исследования на моделях позволяют решать достаточно широкий круг задач, анализ которых другими средствами оказывается затруднительным. Модель по некоторым параметрам заменяет исследуемый объект и те выводы, которые получаются на моделях, во многих отношениях остаются справедливыми и для объекта. Это обстоятельство приводит к мысли опробовать на физической модели и алгоритм решения обратной динамической задачи сейсмоки, что, видимо, можно считать определенным приближением к обработке практического материала, полученного в полевых условиях.

2. В поставленном эксперименте моделирование одномерности процесса распространения волны обеспечивалось использованием достаточно тонких стержней (отношение толщины стержней к видимой длине волны порядка $1/10$). Схема эксперимента моделировала процесс отражения от неоднородного слоя, заключенного между

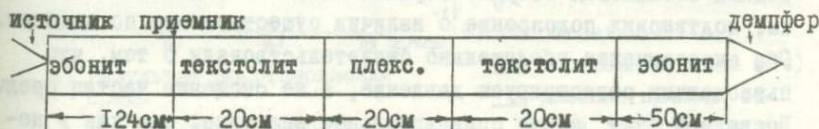


Рис. 6

двумя однородными полупространствами, падающей из верхнего полупространства плоской продольной волны. Благодаря демпфированию правого конца всей конструкции последний эбонитовый стержень моделировал бесконечное однородное полупространство. В качестве приемника был использован стандартный пьезодатчик, вклеенный в контакт между двумя эбонитовыми стержнями. Все стержни склеивались между собой, так что на контакте можно было считать выполненными условия непрерывности смещений и напряжений, амалость зоны перехода позволяла не принимать ее во внимание.

Расстояние между приемником и первой отражающей границей было выбрано таким, чтобы не перекрывались записи падающей и отраженной волн. Сигнал от приемника подавался на экран осциллографа. Источник стабильно работал в непрерывном режиме с частотой 50гц, что позволяло получать на экране осциллографа одну и ту же картину волн, повторяющуюся с частотой 50гц. Следовательно, для человеческого глаза и при фотографировании с большой выдержкой данная картина будет казаться неподвижной, если подобрать соответствующим образом развертку луча осциллографа. С целью оцифровки записей волн полученные таким образом фотографии проектировались на координатную систему. Суммарная погрешность данных $\approx 10-15\%$ и складывается из погрешностей, обусловленных схемой эксперимента и способом оцифровки.

3. Полученные в результате проведенного эксперимента записи падающей $g(t)$ и отраженной $\varphi(t)$ волн приведены на рис. 7а (Здесь масштаб функции $\varphi(t)$ увеличен в 5 раз). Анализ частотного состава $\varphi(t)$ и $g(t)$, а также амплитуд их первых вступлений, привел к выводу о присутствии достаточно интенсивной диссипации энергии волнового процесса. Поставленный дополнительно эксперимент по регистрации в однородном эбонитовом стержне отраженной от свободного конца волны, подтвердил подозрение о наличии существенного поглощения. Оба эксперимента убедительно свидетельствовали о том, что пьезодатчик регистрирует давление, а не смещение частиц среды. Последний факт имеет принципиальное значение, так как в постановке (1)-(3) фигурируют волны смещения, что требует дополнительного исследования. Исходя из связи между волнами смещения и давления [15] и замечая инвариантность постановки (1)-

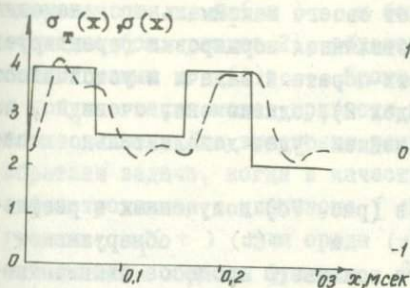
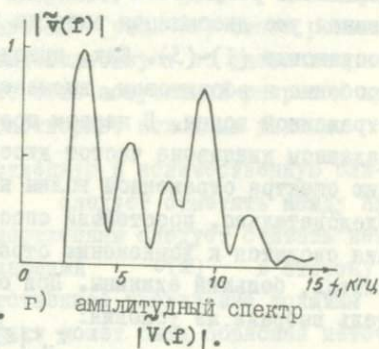
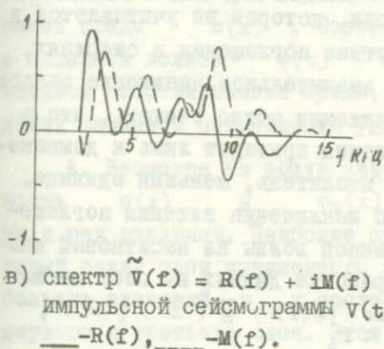
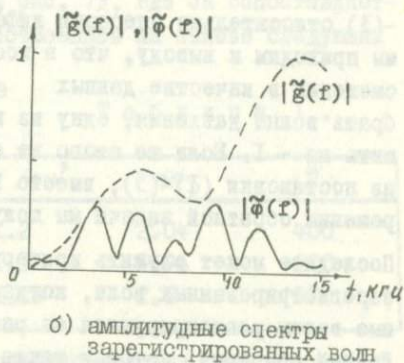
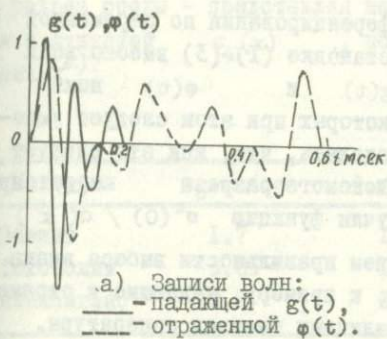


Рис.7. Результаты обработки данных модельного эксперимента

-(3) относительно операции дифференцирования по переменной t , мы приходим к выводу, что в постановке (I)-(3) вместо волн смещения в качестве данных $g(t)$ и $\varphi(t)$ можно брать волны давления, одну из которых при этом следует умножить на $-I$. Если же этого не сделать, что, как это следует из постановки (I)-(3), вместо искомого разреза $\sigma(x)$ при решении обратной задачи мы получим функцию $\sigma^2(0) / \sigma(x)$.

Последнее может служить критерием правильности выбора знака зарегистрированных волн, когда, к примеру, падающие и отраженные волны регистрируются на различных каналах аппаратуры.

Другой причиной, которая также может привести к существенному искажению результата решения обратной задачи, является отмеченная уже диссипация энергии волн, которая не учитывается в постановке (I)-(3). Так, присутствие поглощения в стержнях, особенно в эбонитовом, вызывает значительное занижение энергии отраженной волны. В первом приближении можно считать, что в заданном диапазоне частот диссипация приводит лишь к домножению спектра отраженной волны на множитель, меньший единицы. Следовательно, простейший способ исключения влияния поглощения сводится к домножению отраженной волны на масштабный множитель, больший единицы. При обработке данных мы этот множитель выбрали из условия:

$$\max_{f_H < |f| < f_B} |\tilde{\varphi}(f) / \tilde{g}(f)| = 1,$$

($f_H = 2,5$ кгц, $f_B = 15$ кгц), то есть в данном диапазоне частот функция $\tilde{v}(f)$ достигает своего максимального значения $= I$ (см. раздел I). Так осуществленная нормировка гарантирует выполнение условий разрешимости обратной задачи и устойчивость численного алгоритма (см. раздел 2), однако она, очевидно, заведомо завышенная, что в дальнейшем будет дополнительно исследовано.

Сравнение амплитудных спектров (рис. 7б) полученных в результате нормировки функций $g(t)$ и $\varphi(t)$ обнаруживает характерное для диссипирующего волнового процесса взаимоотношение $|\tilde{g}(f)|$ и $|\tilde{\varphi}(f)|$ на больших частотах. Построенный в диапазоне частот $[f_H, f_B]$ спектр импульсной сейсмограммы приведен на рис. 7б. Амплитудный спектр импульсной сейсмограммы при $f > 13$ кгц весьма сильно убывает (рис. 7г), что обусловлено поглощением. Окончательный результат обработки

- разрез среды - представлен на рис. 7д, где он сопоставляется с функцией $\sigma_T(x)$, построенной на основе следующих данных^{ж)}:

Т а б л и ц а I .

Материал	c_p , км/сек	ρ , г / см ³	$\sigma = \rho c_p$	θ
Эбонит	1.7	1.2	2.04	400
Текстолит	3.05	1.3	3.96	200
Плексиглас	2.2	1.18	2.6	300

Для проверки качества решения обратной задачи была рассчитана отраженная волна для падающего импульса $g(t)$ и построенной среды $\sigma(x)$. Сопоставление (рис. 7е) этого решения с заданной волной $\varphi(t)$ свидетельствует об удовлетворительном восстановлении среды, то есть полученный разрез в пределах заданной погрешности удовлетворяет исходным данным.

4. Несмотря на общую качественную и количественную близость $\sigma(x)$ и $\sigma_T(x)$ следует отметить между ними и ряд различий. Наиболее существенным следует считать некоторый сдвиг слоя пониженного значения $\sigma(x)$ в сторону больших значений x и соответственное увеличение толщины первого и третьего слоя. Этот факт может быть объяснен неточностью задания скорости в текстолите. Построенный разрез отличается от $\sigma_T(x)$ и большей степенью гладкости, что, очевидно (см. раздел 2), обусловлено фильтрацией импульсной сейсмограммы $v(t)$. Кроме того, потеря низких частот $f < f_H$ также может привести к искажению результата обработки данных. Для выяснения роли этих факторов была решена обратная задача, когда в качестве данных задавалась $\hat{v}_T(t)$ отфильтрованная в диапазоне $[f_H, f_B]$ импульсная сейсмограмма $v_T(t)$ для среды $\sigma_T(x)$ (рис. 8а). Построенная таким образом функция $\hat{\sigma}_T$ указывает не только на

ж) Значения скоростей и плотностей рекомендованы сотрудниками лаборатории физического моделирования ИГиГ СО АН СССР.

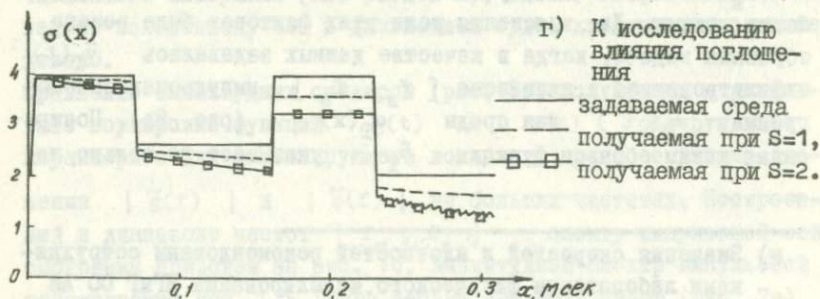
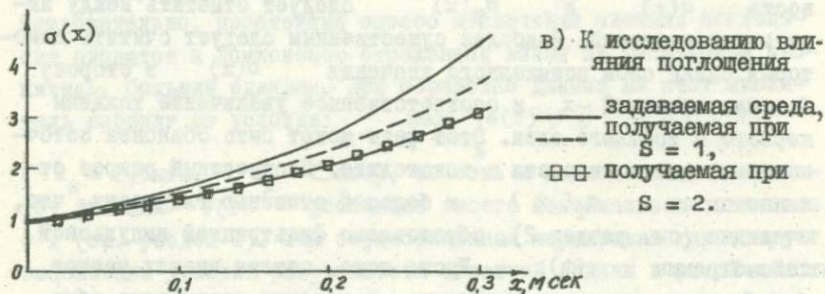
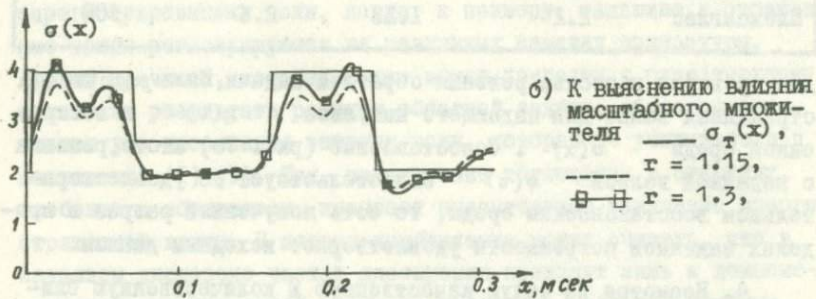
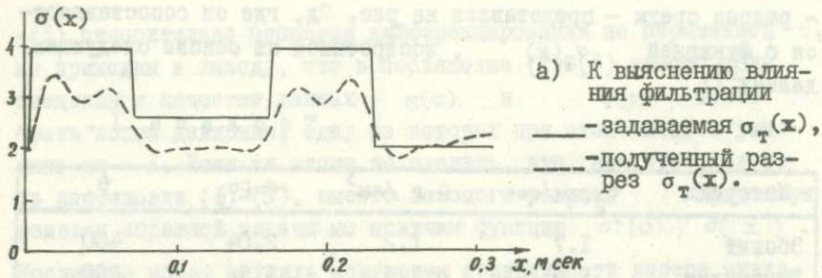


Рис. 8. Исследование роли некоторых факторов в решении обратной задачи

важную роль фильтрации, но и на существенное завышение масштабного множителя отраженной волны. Рис. 8б, где приведены результаты решения обратной задачи для импульсной сейсмограммы

$r \cdot \hat{v}_T(t)$, $r = 1.15, 1.3$, иллюстрирует влияние масштабирующего множителя. Построенный в случае $r = 1.3$ разрез близок в среднем $\sigma(x)$, полученной при обработке экспериментально зарегистрированных волн $g(t)$ и $\varphi(t)$

5. Чтобы выяснить роль поглощения, мы рассмотрели прямую задачу для неидеально-упругой среды. Учет поглощения осуществлялся в рамках модели Больцмана, которая является наиболее общей среди моделей линейно-неупругих сред [16]. При получении уравнений, описывающих модель Больцмана, входящие в уравнение динамической теории упругости параметры Ламе заменяются интегральными операторами вида $G_t f = (aE - a_1 H_t) f = af - a_1 \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau$, где $a = a(x, y, z)$, $a_1 = a_1(x, y, z)$ и $a_1 \int_0^\infty h(t) dt < a$ [16]. Несложно показать, что в одномерном случае вместо уравнения (7) получится интегродифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d \ln \sigma(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} - \theta(x) H_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d \ln (\sigma(x) \theta(x))}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (26)$$

где функция $\theta(x)$ характеризует уровень поглощаемой энергии и для продольных волн представляется в виде $\theta(x) = \lambda_1 + 2\mu_1 / (\lambda_1 + 2\mu_1)$, где $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ - параметры Ламе. Граничное условие (6) перейдет в следующее:

$$(E - \theta(x) H_t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\sigma(0)} f(t) \quad (27)$$

а данные Коши (8) останутся без изменения.

Для численного решения прямой задачи, то есть определения функции $u(0, t)$, был использован разностный метод, аналогичный предложенному в работе [6] для задачи (6)-(8).

В расчетах функция $h(t)$ задавалась в виде $h(t) = e^{-\gamma t}$ ($\gamma = 1.25 \cdot 10^4 \text{сек}^{-1}$). В таком случае коэффициент поглощения

$$d(\omega, x) = \omega \sqrt{\frac{\sqrt{v^4 + [2(1-J) + J^2]v^2 + (1-J)^2} - (1-J)v^2}{2[(1-J)^2 + v^2]}}, \quad (28)$$

где $v = \omega / \gamma$, $J = \theta(x) / \gamma$, является монотонно возрастающей от нуля до $\theta(x) / 2$ функцией. В диапазоне $|\omega| \in [0, 10 \gamma]$ выражение (28) может аппроксимировать часто наблюдаемую на практике линейную зависимость $\alpha(\omega)$.

При исследовании влияния поглощения для заданных $\theta(x)$ и $\sigma(x)$ решалась прямая задача (26), (27), (8), после чего результат подставлялся в алгоритм решения обратной задачи (6)-(9), описанный в работе [6]. В первом случае (рис. 8в)

$\theta(x) = 250s \cdot (1 + \sin 14 \cdot 10^4 x)$, $s = 1, 2$, а во втором

(рис. 8г) $\theta(x)$ задавалась исходя из таблицы I. В последнем случае исследование проводилось также и при увеличенных вдвое значениях $\theta(x)$ из таблицы I (кривая $s = 2$).

Итак, учет поглощения при решении обратной задачи приводит к систематическому занижению величины акустической жесткости по сравнению с реальной на участках монотонного поведения среды, а на интервалах резкого изменения $\sigma(x)$ вносимая поглощением погрешность имеет тенденцию к сглаживанию неоднородностей. Эти выводы хорошо согласуются с простыми физическими рассуждениями. Действительно, присутствие поглощения вызывает понижение энергии элементарного отражения от неоднородности, что эквивалентно упругому отражению от менее резкой неоднородности, то есть при решении обратной задачи среда должна получаться менее контрастной.

6. Выше мы проанализировали ряд возможных причин расхождения результата обработки данных эксперимента с истинным разрезом. К тем факторам, которые не удается исследовать доступными нам средствами и которые, видимо, ответственны за оставшиеся расхождения, следует отнести несоответствие наших модельных представлений реальному процессу распространения волн в стержнях, а также возможное искажение данных во время их регистрации и оцифровки. В целом же, описанную в работе попытку обработки данных физического эксперимента следует считать удовлетворительной.

4. Обработка данных гидроакустического зондирования морских осадков

I. Рассматриваемая в работе обратная задача может найти широкое применение в исследованиях по определению вещественной структуры осадков морей и океанов в районах с незначительной латеральной изменчивостью пород. По сравнению с общепринятыми способами интерпретации волнового поля метод обратной динамической задачи позволит с большей степенью детальности и при меньших затратах средств находить распределение неоднородностей среды, что существенно повысит эффективность морских исследований. Данная физическая постановка ввиду объемности процесса распространения возбужденной сейсмической волны сводится к задаче (I)-(3) лишь при определенных, но вполне осуществимых требованиях к схеме эксперимента (см. рис. 9).

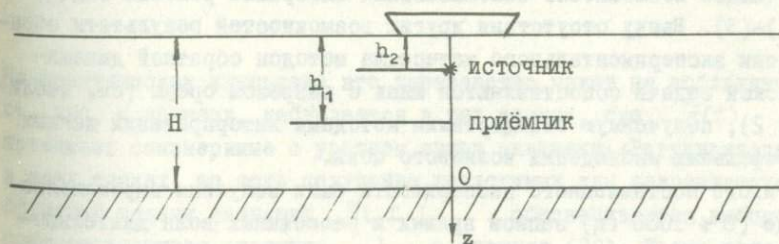


Рис. 9

Действительно, при достаточно большой разности $H - h_1$ исходящая из источника волна давления $p_+(t)$ будет иметь почти плоский фронт вблизи дна в окрестности оси z , вследствие чего зарегистрированная приемником отраженная от осадков волна давления $p_-(t)$ может рассматриваться как результат рассеяния на одномерно неоднородном упругом полупространстве нормально падающей плоской волны. Окончательное сведение к постановке (I)-(3) осуществляется пересчетом волновой картины к поверхности $z = 0$ по формулам

$$g(t) = \frac{2H - h_1 - h_2}{H - h_1} p_+(t), \quad \varphi(t) = \frac{h_2 - h_1}{H - h_1} p_-(t), \quad (29)$$

исключающим геометрическое расхождение волн в водной толще и легко получающимся из простых геометрических соображений.

2. Во время черноморской экспедиции ИО АН СССР летом 1973г. были поставлены экспериментальные работы в соответствии со схемой, изображенной на рис. 9. В качестве источников волн использовались заряды взрывчатого вещества тротила весом I-5 кг, опускавшиеся на глубину $h_1 \approx 150$ м. Глубина моря $H \approx 2200$ м и величина погружения гидрофона $h_2 \approx 900$ м позволяли получить неперекрывающиеся записи падающих и отраженных волн.

Имевшиеся представления относительно структуры осадков в районе работ свидетельствовали о незначительных горизонтальных вариациях физических параметров изучаемой толщи, что при выборе вышеуказанной методики регистрации волнового процесса обеспечивало возможность использования алгоритма решения задачи (I)-(3). Ввиду отсутствия других возможностей результаты обработки экспериментального материала методом обратной динамической задачи сопоставляются лишь с разрезом среды (см. таблицу 2), полученную стандартными методами интерпретации данных профильных наблюдений волнового поля.

В итоге поставленного эксперимента были получены широкополосные (0 + 1000 гц) записи прямых и рассеянных волн длительностью порядка 0.3-0.6 сек. Исходящие из источника волны представляет собой суперпозицию простых сигналов от следующих друг

Т а б л и ц а 2 .

H, км	c, км/сек	$\rho, \text{г/см}^3$	$\sigma = \rho c$	x, сек
Вода	1.5	1.0	1.5	0
0 (дно)	1.56	1.4	2.18	0
0.01	1.70	1.6	2.72	0.0056
0.10-0.15	1.80	1.8	3.24	0.056-0.084
0.30	ж	1.8	ж	0.168
0.40	ж	1.8	ж	0.224
0.50	ж	1.8	ж	0.280
1.00	2.0-2.5	2.2	4.4-5.5	0.56

(Звездочка заменяет неизвестные значения параметров. Время пробега волны по вертикали определялось по формуле $x = z/c_{\text{ср}}$, $c_{\text{ср}} = 1.8 \text{ км/сек}$).

за другом 3-4-х пульсаций образующего при взрыве газового пузыря. Отраженные волны имеют значительно более сложную структуру, что свидетельствует о тонкой слоистости осадков и об отсутствии больших скачков акустической жесткости среды.

Из серии взрывов были отобраны записи волн для 6-ти из них, которые подверглись в дальнейшем подробному анализу с точки зрения возможности их обработки методом обратной динамической задачи. Такой предварительный анализ необходим в силу условной устойчивости рассматриваемого выше алгоритма (см. раздел 2), сводящейся к требованию

$$|\tilde{\varphi}(f)| \leq |\tilde{g}(f)| \quad (30)$$

На практическом материале это неравенство может не соблюдаться, что, к примеру, наблюдается в тех точках, где $\tilde{g}(f)$ принимает соизмеримые с уровнем шумов значения. Регуляризация в этих точках, то есть получение допустимых для разрешимости обратной задачи значений $\tilde{v}(f)$, обеспечивается выбором соответствующего значения λ в формуле (22). Кроме того, данные могут содержать и систематическую погрешность, существ-

венно превосходящую уровень шумов, вследствие чего одна лишь регуляризация типа (22) не позволяет добиться устойчивости процесса решения обратной задачи [2-5]. Все возможные виды систематических погрешностей в сейсмограммах можно объединить в две группы. К первой следует отнести те, которые возникают в процессе регистрации волн и оцифровки записей. Как показал анализ, наиболее часто встречающиеся здесь помехи обусловлены ошибками в определении масштабных множителей у функции $g(t)$ и $\varphi(t)$, а также неточностями в проведении нулевой линии сейсмограмм. Ошибки подобного типа часто оказываются неустраняемыми и поэтому данные приходится считать непригодными для их обработки.

Вторая группа погрешностей обусловлена неполным соответствием принимаемых нами модельных представлений реальному процессу распространения волн в среде. Здесь следует отметить возрастающее с частотой влияние имеющихся на самом деле горизонтальных неоднородностей физических свойств осадков, поглощения и объемный характер волнового процесса, идеализацией которого является постановка (1)-(3).

Однако из теоретических соображений следует, что решение одномерной прямой задачи (1), (2) для среды, близкой к реальной, будет лежать в окрестности экспериментальных данных. Поэтому в качестве метода получения устойчивого решения обратной задачи в присутствии погрешностей второй группы, а также в некоторых случаях (см. ниже требования а) и б) и первой, может использоваться идея погружения данных в класс допустимых в смысле разрешимости обратной задачи (1)-(3). Это преобразование K , очевидно, не может быть произвольным, а должно удовлетворять следующим требованиям:

а) исходные данные преобразуются минимально по норме в L_2 или C ,

б) в пределах того произвола, который возникает при применении процедуры K , имеется незначительная зависимость результата обработки данных.

Удовлетворяющее этим условиям преобразование может рассматриваться как дополнительная регуляризация алгоритма решения обратной задачи, обусловленная классом помех, характерных лишь для экспериментальных данных.

По-видимому, данный подход к регуляризации может быть использован и при решении более общих обратных задач. Действительно, экспериментальный материал почти всегда не будет принадлежать множеству допустимых в смысле существования и устойчивости решения данных (хотя бы в силу модельных несоответствий). Тогда для получения физически осмысленного решения достаточно будет подвергнуть данные действию процедуры K , удовлетворяющей требованиям а) и б).

Заметим, что эта идея погружения, обсуждавшаяся также ранее в работах [2,5] применительно к задаче (6)-(9), близка к идее В.К.Иванова построения квазирешения [19].

Возможность построения оператора K во многом зависит от свойств экспериментального материала, то есть и на данные необходимо накладывать некоторое ограничение. К примеру, если очень неточно определены масштабные множители сейсмограммы, то удовлетворить требованиям а) и б) невозможно. Качественной характеристикой экспериментального материала является степень выполнения им неравенства (30) (при условии, что нет значительных погрешностей, не нарушающих это неравенство). Существенное невыполнение (30) следует считать признаком допущенных где-то ошибок (в оцифровке, в определении коэффициентов усиления каналов аппаратуры, в принятой гипотезе относительно модели и схемы эксперимента и т.д.). Ввиду особой важности низкочастотного диапазона (см. раздел 2) от данных следует требовать выполнения неравенства (30) на самых низких частотах, так как в противном случае процедура погружения не будет удовлетворять требованию б).

4. Рассматривая с этих позиций полученный экспериментальный материал, мы признали пригодными записи волн лишь для двух взрывов, о качестве которых можно судить по рис. 10а,б, где сопоставлены модули спектров падающих и отраженных волн. Регуляризирующая процедура K сводилась к сглаживанию в точках невыполнения неравенства (30) функции, получаемой путем формального использования формулы (22) при $\lambda \approx 0.02 \cdot \max_{\tilde{f}} |\tilde{f}|$. Изменения, которые произошли со спектром отраженной волны, можно проследить по рис. 10в,г, где сравниваются амплитудные спектры отраженной волны (непрерывные кривые) и ее модификации с помощью описанной выше процедуры сглаживания (пунктир-

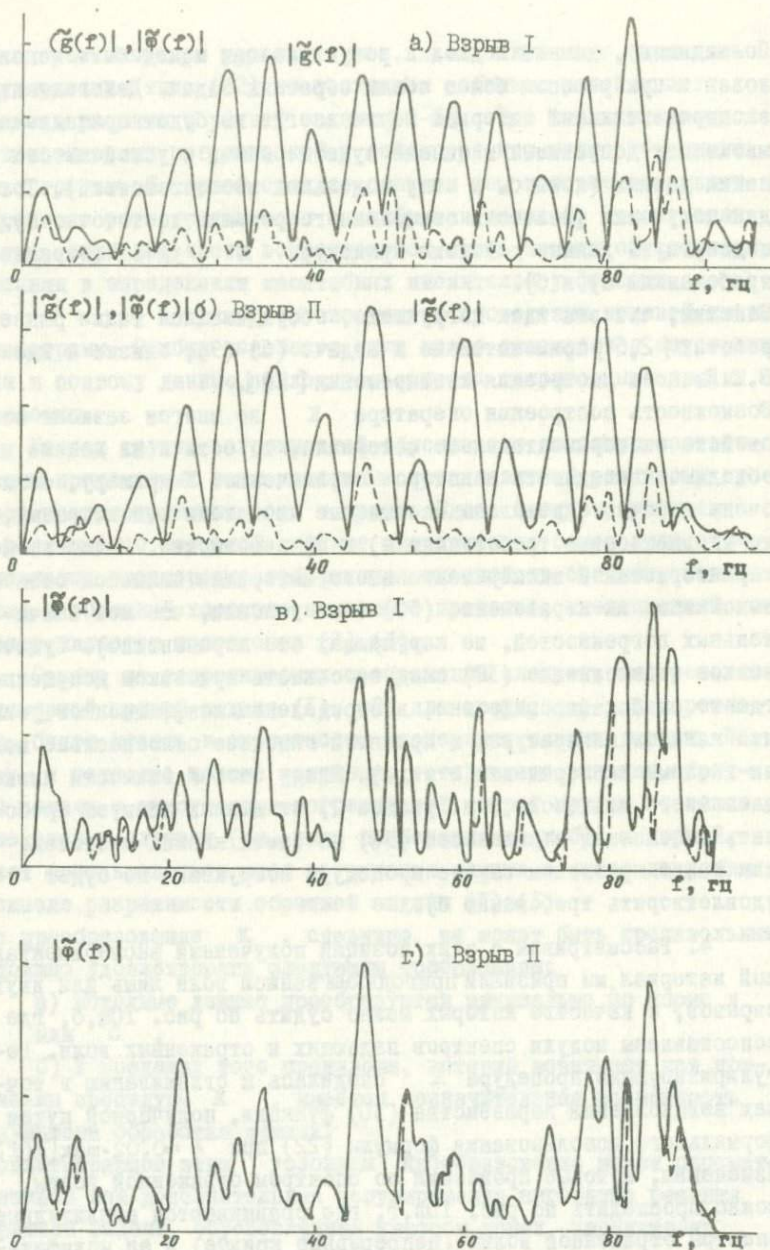


Рис. 10 а, б - спектры зарегистрированных волн от взрывов I и II
 в, г - иллюстрируется роль дополнительной регуляризации алгоритма обработки данных.

ные кривые). Эти изменения незначительны в смысле нормы в I_2 следовательно требование а) следует считать выполненным. По построенным вышеописанным способом сглаженным $\tilde{v}_\lambda(f)$ при разных уровнях фильтрации низких и высоких частот находились импульсные сейсмограммы, которые затем подставлялись в алгоритм обращения разностной схемы (24). Так как из заданных сейсмограмм не удается определить $\tilde{v}(0)$, то в окрестности нулевой частоты мы использовали экстраполяцию (см. раздел 2). Отбрасывание низких частот (меньше 5 гц), как и следовало ожидать, приводит к разрезу без низкочастотных компонент (см. рис. 11а). Восстановление же импульсной сейсмограммы в диапазоне от нуля до f_B задает эти низкочастотные составляющие акустической жесткости среды (рис. 11а,б). Построенные с учетом низких частот разрезы качественно согласуются между собой и с данными табл. 2. Имеющиеся расхождения обусловлены, видимо, присутствием достаточно ощутимой погрешности на низких частотах, поэтому можно надеяться, что более качественные в смысле регистрации низких частот экспериментальные работы позволят получить значительно лучший результат.

Основные выводы и результаты работы

1. Сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости одномерной обратной динамической задачи сейсмологии в постановке с заданными падающей и отраженной волнами.
2. Показано, что выполнение этих условий обеспечивает устойчивость численного алгоритма решения обратной задачи.
3. Проанализировано влияние фильтрации на свойства получаемого при обработке реальных данных разреза среды и установлено, что отбрасывание низких частот недопустимо, если априорные представления о структуре среды свидетельствуют о наличии низкочастотных компонент в зависимостях скорости волны и плотности среды как функций от глубины.
4. Предлагаются два подхода к решению проблемы восстановления низкочастотных составляющих разреза среды. Первый подход заключается в повышении точности регистрации волновой картины и в создании специального математического аппарата, а второй сводится к комплексированию широко используемых на практике методов геофизической разведки с методом обратных



Рис. II. Разрезы среды, полученные при обработке экспериментальных данных (Центральная часть Черного моря).

динамических задач.

5. Обработаны данные физического моделирования и получено достаточно хорошее соответствие задаваемой структуры среды результату обработки.

6. Оценено влияние неучета поглощения при решении обратной динамической задачи сейсмоки.

7. Предложены принципы анализа экспериментальных данных для обратной задачи, на основе которых был проанализирован материал, полученный на Черном море.

8. Рассмотрена дополнительная регуляризация алгоритма решения обратной динамической задачи, основанная на сформулированных в данной работе условиях разрешимости рассматриваемой задачи. Эта регуляризация обусловлена наличием систематических погрешностей, свойственных лишь экспериментальному материалу. По-видимому, обсуждаемый в работе подход к получению устойчивого решения на экспериментальных данных может быть использован и в других обратных задачах.

9. С использованием предложенной процедуры преобразования данных, реализующей дополнительную регуляризацию алгоритма, обработан материал двух экспериментов, поставленных в центральной части Черного моря.

Результаты обработки сопоставлены с имевшимися представлениями о разрезе среды.

В заключение авторы выражают благодарность сотрудникам ИО АН СССР Непрочнову Ю.П. и Семенову Г.А., предоставившим материал экспериментов, поставленных на Черном море и всемерно способствовавшим его получению. Авторы также признательны студенту НГУ Окольскому А.В., выполнившему все экспериментальные работы на физической модели.

Л и т е р а т у р а .

1. Алексеев А.С. Некоторые обратные задачи теории распространения волн. I, П. - "Изв. АН СССР, серия геофиз.", 1962, № II.
2. Алексеев А.С. Обратные динамические задачи сейсмоки. - В кн.: Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных, М., "Наука",

1967, с. 9-84.

3. G.Kunetz. Sur certains proprietes d'une onde acoustique plane de compression dans un milieu stratifie- "Ann. de geophys", 1962, 18, N 4.
4. G.Kunetz. Quelques exemples d'analyse d'enregistrements sismiques. - "Geophys.Prosp"., 1963, 11, N 4.
5. Михайлова Н.Г., Парицкий Б.С. Обратная задача для волнового уравнения при поверхностном источнике. - В сб.: Вычислительная сейсмология, М., "Наука", 1968, вып. 4, с. 95-138.
6. Антоненко О.Ф. Обращение одной разностной схемы для решения одномерной динамической задачи сейсмологии. - В кн.: Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных, М., "Наука", 1967, с. 92-98.
7. Бородаева Н.М. О численном решении одномерной обратной динамической задачи сейсмологии. - В кн.: Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных, М., "Наука", 1967, с. 85-91.
8. Никольский Э.В. Отражение плоских упругих волн от произвольного неоднородного слоя в случае нормального падения. "Прикладная матем. и теор. физика", 1964, № 4, с. 66-74.
9. Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. - ДАН СССР, 94, № 6, 1954, с. 13-16.
10. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. - Труды советско-американского симпозиума. Новосибирск, 1963.
11. Гурвич И.И. Сейсмическая разведка. М., "Наука", 1970.
12. Гервер М.Л. Обратная задача для одномерного волнового уравнения с неизвестным источником колебания. М., "Наука", 1974.
13. Благоевденский А.С., Буздин А.А. К вопросу о постановке краевой обратной задачи для уравнения стру-

ны в предположении, что свойства струны описываются быстро колеблющимися функциями. - Сборник трудов Всесоюзного симпозиума. Новосибирск, 1972, с. 31-36.

14. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., "Наука", 1973, с.642-664.
15. Толстой И., Клей К.С. Акустика океана. М., "Мир", 1969.
16. Шемякин Е.И. Динамические задачи теории упругости и пластичности. - Курс лекций для студентов, НГУ, 1968.
17. Благовещенский А.С. Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн. - Сб.: Проблемы математической физики, вып. I, изд. Ленинградского ун-та, 1966, с. 68-81.
18. Бородаева Н.М. К вопросу о численном решении одномерной обратной динамической задачи в схеме разведки морских осадков. В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. I, Новосибирск, 1969, с. 225-235.
19. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах. Матем. сб. 61, вып. 2, 1963.
20. G.Kunetz. Essai d'analyse des traces sismiques. "Geophys. Prosp.", 9, N., 1961, с 317-341.
21. Баранов В., Кунетц Г. Синтетические сейсмограммы с многократными отражениями. - В сб.: Проблемы сейсмической разведки, Гостоптехиздат, 1962.

Ю.Е.Аниконов, А.Г.Марчук

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ

Под обратной задачей дифракции понимается задача определения формы тела по значениям отраженного от него поля, измеренного в дальней зоне при различных направлениях и на разных частотах, [1]. В работе [1] приведена теория этой задачи, позволяющая, в частности, находить в некоторых случаях форму отражающего тела. В данной статье мы, существенно используя соображения цитированной выше работы [1], связанные с постановкой задачи, предлагаем для центрально симметричных тел другой путь ее исследования. При этом мы используем информацию только амплитудного характера, что, как представляется, более соответствует реальной ситуации. Основным результатом этой статьи являются теорема об однозначной определенности центрально симметричной выпуклой поверхности.

Пусть E^3 - трехмерное евклидово пространство переменных $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, Q - сфера,

$$Q = \{x : |\bar{x}| = 1\},$$

В - замкнутая строго выпуклая поверхность класса C^2 , имеющая центр симметрии, который для удобства расположен в начале координат. Обозначим также через $\bar{p}_0 \in Q$ - фиксированный вектор, а через P_0 - плоскость $(\bar{x}, \bar{p}_0) = R_0$, R_0 - некоторое число, см. рис. 1.

Вместе с автором работы [1] рассмотрим падающую гармонически изменяющуюся плоскую волну

$$\bar{E}(\bar{x}, t) = \bar{E}_0 e^{i\omega \left[\frac{\bar{p}\bar{x} + R}{c} - t \right]}, \quad i^2 = -1.$$

Здесь ω обозначает частоту, $R = \frac{R_0}{\bar{p}\bar{p}_0}$ - дальность, $\bar{p} \in Q$ - единичный вектор в направлении, противоположном падению волны, \bar{E}_0 - постоянный вектор, ортогональный вектору \bar{p} , $\bar{p}\bar{x}$, $\bar{p}\bar{p}_0$ - скалярные произведения. Согласно работе [1] отраженное от поверхности В поле в точке $\bar{x} = R\bar{p}$ равно

$$\bar{E}_s = \frac{ic e^{i\omega \left[\frac{2R}{c} - t \right]}}{2\pi R \omega} \rho(\omega, \bar{p}) \bar{E}_0,$$

где
$$\rho(\omega, \bar{p}) = \int_{V(\bar{p})} \bar{p} \bar{n}(s) e^{\frac{i\omega 2\bar{p}\bar{x}(s)}{c}} ds,$$

$V(\bar{p})$ - освещенная часть поверхности В в направлении $-\bar{p}$, $\bar{n}(s)$ - единичный вектор нормали поверхности В в точке s , ds - элемент площади В.

1. Мы вводим вместо $\rho(\omega, \bar{p})$ функцию

$$f(\omega, \bar{p}) = \int_{V(\bar{p})} b(\bar{n}(s)) \bar{p} \bar{n}(s) e^{i2\omega \frac{\bar{p}\bar{x}(s)}{c}} ds, \quad (I)$$

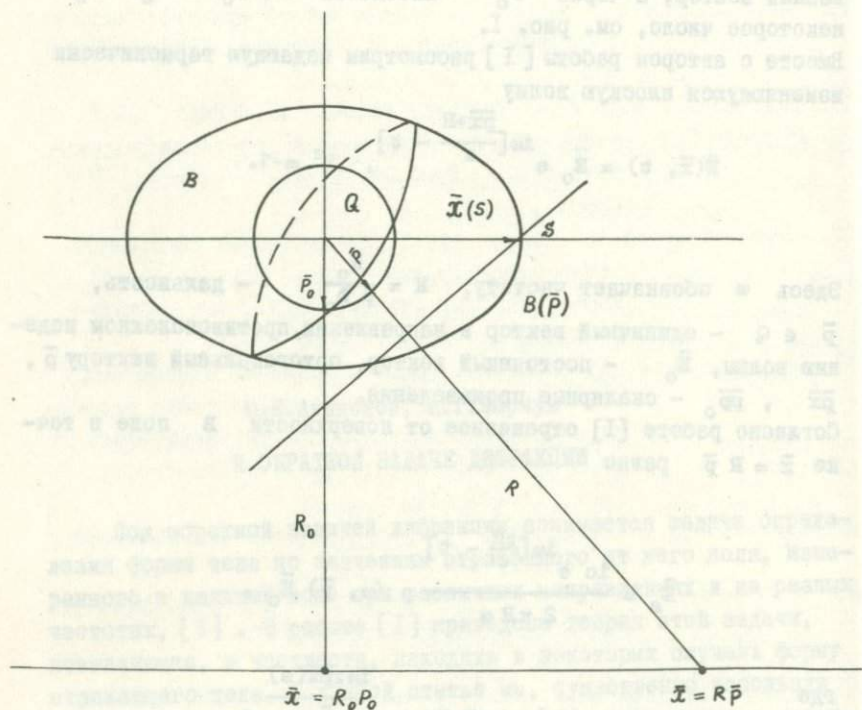


Рис. I

где $b(\bar{n}) > 0$ - известная четная функция, которая, в частности, может равняться 1. Она характеризует неоднородность отражающей поверхности V .

Информацией, по которой мы будем определять поверхность V , является функция (амплитуда) $A(\omega, \bar{p}) = |f(\omega, \bar{p})|^2$, определенная в области $\omega_0 - \epsilon < \omega < \omega_0 + \epsilon$, $\bar{p} \in Q$, $\bar{p} \cdot \bar{p}_0 > 0$, где $\omega_0 > 0$, $\epsilon > 0$ - некоторые фиксированные числа.

Т е о р е м а . Поверхность V однозначно определяется функцией $A(\omega, p)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из определения функции $A(\omega, \bar{p})$ ясно, что при каждом фиксированном \bar{p} она является аналитической по переменной ω и единственным образом аналитически продолжается для всех ω , $-\infty < \omega < \infty$. Пусть $\tilde{A}(\omega, \bar{p})$ - аналитическое продолжение функции $A(\omega, \bar{p})$. Положим

$$F(\bar{p}) = \sqrt{\tilde{A}(0, \bar{p})}. \quad (2)$$

Из равенства (1) в силу того, что $\bar{p} \cdot \bar{n} \geq 0$, $b(\bar{n}) > 0$, имеем

$$F(\bar{p}) = \sqrt{\tilde{A}(0, \bar{p})} = \left| \int_{V(\bar{p})} b \bar{p} \bar{n} ds \right| = \int_{V(\bar{p})} b \bar{p} \bar{n} ds.$$

Так как по условию задачи $b(\bar{n}) = b(-\bar{n})$ и поверхность V - центрально-симметрическая, то отсюда получаем равенство

$$F(\bar{p}) = \frac{1}{2} \int_V b(\bar{n}) |\bar{p} \bar{n}| ds. \quad (3)$$

Здесь $|\bar{p} \bar{n}|$ - модуль скалярного произведения, а интегрирование ведется по всей поверхности V . Пусть $R_1(\bar{n})$ и $R_2(\bar{n})$ - радиусы кривизны поверхности V как функции вектора нормали \bar{n} . Используя хорошо известное равенство

$$ds = R_1 R_2 d\bar{n},$$

где $d\bar{n}$ - элемент площади единичной сферы Q , перепишем соотношение (3) в виде

$$F(\bar{p}) = \frac{1}{2} \int_Q b(\bar{n}) R_1 R_2 |\bar{p} \bar{n}| d\bar{n}.$$

Здесь интегрирование производится по сфере Q . В силу строгой выпуклости и дифференцируемости поверхности V такой переход корректно определен.

Пусть $\frac{1}{2} b R_1 R_2 = Z(\bar{n})$, имеем

$$F(\bar{p}) = \int_Q Z(\bar{n}) |\bar{p} \bar{n}| d\bar{n}. \quad (4)$$

Равенство (4) рассматриваем как интегральное уравнение I-го рода относительно $Z(\bar{n})$. Хорошо известно, см., например, [2], [3], что такое уравнение решается в явном виде. Здесь мы воспользуемся формулой, приведенной в [4]. С этой целью рассмотрим функцию

$$\Phi(\bar{x}) = F\left(\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}\right), \quad \bar{x} \in E^3, |\bar{x}| \neq 0.$$

Положим $\Delta F(\bar{p}) = \Delta \Phi \Big|_{\bar{x}=\bar{p}}$, где Δ - оператор Лапласа по переменным $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Следуя [4], имеем формулу

$$z(\bar{n}) = \frac{1}{\pi^2} \frac{d}{dr^2} \int_{(\bar{p}\bar{n})^2 > r^2} \frac{\Delta F(\bar{p}) |\bar{p}\bar{n}| d\bar{p}}{\sqrt{(\bar{p}\bar{n})^2 - r^2}} \Big|_{r^2=0}. \quad (5)$$

Таким образом однозначно и конструктивно находится функция

$$z(\bar{n}) = \frac{1}{2} b(\bar{n}) R_1(\bar{n}) R_2(\bar{n}).$$

Вместе с ней единственным образом определяется и функция

$$\varphi(\bar{n}) = \frac{2 z(\bar{n})}{b(\bar{n})} = R_1 R_2.$$

(По условию задачи $b(\bar{n}) > 0$ и известна).

Задача определения выпуклой поверхности V по функции

$$\varphi(\bar{n}) = R_1 R_2,$$

носит название проблемы Минковского, [5]. Результаты по этой проблеме, которые содержатся, например, в книге [5], следующие: если

$$\int_Q \bar{n} \varphi(\bar{n}) d\bar{n} = 0,$$

то существует и притом единственная поверхность V , определенная с точностью до параллельного переноса и имеет место оценка устойчивости.

В нашем случае искомая поверхность V центрально симметричная и ее центр совмещен с началом координат. Поэтому из результатов по проблеме Минковского вытекает, в частности, одно-

значная определенность искомой поверхности B . Теорема доказана.

Подводя итоги, подчеркнем, что обратная задача дифракции в данном случае сводится поочередно к следующим вопросам:

1. аналитическому продолжению $A(\omega, \bar{p})$ по переменной ω ;
2. обращению интегрального уравнения (4);
3. проблеме Минковского.

Некорректность задачи проявляется при реализации пункта 1.

З а м е ч а н и е 1. В случае $b(\bar{n}) \equiv 1$ равенство (3) приобретает вид:

$$F(\bar{p}) = \frac{1}{2} \int_B |(\bar{n}, \bar{p})| ds$$

Функция $F(\bar{p})$ здесь имеет следующий геометрический смысл: она равна площади ортогональной проекции поверхности B на плоскость, ортогональную вектору \bar{p} , другими словами $F(\bar{p})$ — это площадь тени, отбрасываемой поверхностью B на плоскость, ортогональную \bar{p} . Исследования геометрических задач такого типа можно найти в работах [2, 6, 7, 8, 9, 10]. Там же приведена более подробная библиография.

З а м е ч а н и е 2. Как было отмечено выше, для определения поверхности B необходимо осуществить аналитическое продолжение по ω . Используя приведенные выше результаты, можно взамен этого получать иногда уравнения 2-го рода относительно функции $Z(\bar{n}) = R_1 R_2$, при фиксированной частоте ω .

Рассмотрим, например, функцию

$$h(\bar{p}) = \int_Q \cos \frac{\omega \bar{p} \bar{x}(\bar{n})}{c} Z(\bar{n}) |\bar{n}\bar{p}| d\bar{n} \quad (6)$$

и будем считать ее известной, $\bar{p} \in Q$, (ω — фиксирована). В силу результатов по проблеме Минковского можно считать, что

радиус вектор $\vec{x}(\vec{n})$ поверхности В является образом $z(\vec{n}) = R_1 R_2$, т.е. $\vec{x} = \bar{M}z$, где \bar{M} - ограниченный известный оператор.

Поэтому равенство (6) можно переписать

$$h(\vec{p}) = \int_Q \cos \frac{\omega \vec{p} \cdot \bar{M}z}{c} z(\vec{n}) |\bar{np}| d\vec{n}. \quad (7)$$

Рассмотрим его как уравнение I-го рода относительно $z(\vec{n})$.

Добавляя и отнимая в правой части (7) интеграл

$$\int_Q z(\vec{n}) |\bar{np}| d\vec{n}$$

и применяя формулу обращения (5), получим уравнение 2-го рода относительно $z(\vec{p})$:

$$z(\vec{p}) = Az + \tilde{h}(\vec{p}),$$

где A известный оператор, ($A \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$), $\tilde{h}(\vec{p})$ - результат преобразования $h(\vec{p})$ по формуле (5).

Способы исследования последнего уравнения могут быть основаны, например, (во всяком случае для достаточно малых ω) на принципе неподвижной точки.

В заключение выражаем благодарность Лаврентьеву М.М. и Романову В.Г. за обсуждение задачи и полезные советы.

Л и т е р а т у р а .

1. Левис Р.М. Обратная задача дифракции. Зарубежная радиоэлектроника, 2, 1970, 100-113.
2. Бляшке В. Круг и шар, М., 1967.
3. Бляшке В. Дифференциальная геометрия, т. I, М-Л, ОНТИ, 1935.

4. Погорелов А.В. Четвертая проблема Гильберта, "Наука", Москва, 1974.
5. Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.
6. Боннезен Т. и Фенхель В. Theorie der Konvexen Körperer, Chelsea publishing Company, New York, 1948.
7. Аниконов Ю.Е. Замечания о выпуклых поверхностях. Сиб. мат. журнал, т. IX, № 6, 1968, 1413-1415.
8. Аниконов Ю.Е. Теорема единственности для выпуклых поверхностей. Матем. заметки, т.6, вып.1, 1969, 115-117.
9. Аниконов Ю.Е. О задаче, связанной с просвечиванием. Сб.: Математические проблемы геофизики, вып.3, Новосибирск, 1972, 77-85.
10. Аниконов Ю.Е. Об однозначной определенности выпуклой поверхности и функции, заданной на этой поверхности. Матем. заметки, т. 12, вып. 4, 1972, 421-424.

М.А. Атаходжаев

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НЬУТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ОБЪЕМНЫХ
МАСС ДЛЯ ТЕЛА, БЛИЗКОГО К ДАННОМУ

На плоскости $x_3 = 0$ трехмерного евклидова пространства даны значения $u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, ньютоновского потенциала некоторого неизвестного тела T плотности единица, находящегося под плоскостью $x_3 = 0$.

Задача заключается в определении по этим данным формы неизвестного тела T . Это является типичной некорректной задачей в классическом смысле. Корректность была показана методом мажорантных рядов А.Н.Сретенским [1] в предположении, что рассматриваемое тело близко и симметрично относительно вертикали центра некоторого шара. Заметим, что подобная задача исследовалась методом Лихтенштейна (метод последовательных приближений для нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго рода) В.К.Ивановым [2] в предположении, что T близко к некоторому звездному телу, а А.И.Прилепко [3] к произвольному односвязному телу переменной плотности.

В настоящей работе рассматриваемая задача изучается первым методом в постановке работы [1] и показывается справедли-

вость полученных результатов в [I] для несимметричного тела T , близкого к некоторому известному шару.

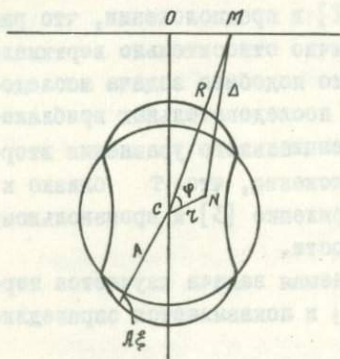
Работа состоит из семи разделов: разделы I - 3 посвящены соответственно постановке, выводу выражения потенциала искомого тела и основной системе интегральных уравнений первого рода задачи; в 4 разделе изучены аналитические свойства потенциала, выведенного во втором разделе. В пятом разделе решаются системы уравнений, полученных в разделе 3; в разделе 6 рассматриваются вопросы возведения в степень регулярных рядов сферических функций; а в последнем, седьмом разделе, доказывается сходимость ряда, изображающего искомую функцию.

I. Постановка задачи.

Пусть значения $u(x)$ мало отличаются от значений потенциала некоторого шара, имеющего вполне определенный радиус и положение к отношению к взятой плоскости $x_3 = 0$. По этим замечаниям мы отыскиваем тело, мало отличающееся от взятого шара.

2. Выражение потенциала искомого тела.

Рассмотрим некоторую сферу радиуса A , центр которой лежит на оси ox_3 под плоскостью $x_3 = 0$ на расстоянии h . Обозначим через $A\xi$ - неизвестное нам радиальное отклонение некоторой точки поверхности искомого тела от поверхности рассматриваемого шара. Тогда уравнение искомой поверхности в полярных координатах, имеющих полюс в центре шара будет задаваться в виде: $r = A(1 + \xi)$, где $\xi = \xi(\phi, \theta)$ ϕ - долготы, θ - дополнение широты. Найдем потенциал искомого тела в некоторой внешней точке M , выражая его через функцию, зависящую от ξ .



$$r = a(1 + \xi), \quad 0 < a \leq A$$

Для этого рассмотрим семейство подобных поверхностей

$$r = a(1 + \xi), \quad 0 < a \leq A$$

или внутренность искомого тела.

Обозначим через $d\sigma$ - элемент поверхности шара единичного радиуса. Подсчитывая элемент объема $d\tau$ получим:

$$d\tau = a^2(1 + \xi)^3 da d\sigma. \quad (I)$$

Обозначим через Δ - расстояние между точками M и N , где M - притягиваемая точка, а N - любая точка притягивающего тела.

По теореме косинусов из ΔMNC находим, что

$$\Delta = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi}. \quad (2)$$

Подставляя (I) и (2) в выражение для ньютоновского потенциала, получим, что

$$u = \int_0^A a^2 da \int_{s_1} \frac{(1 + \xi)^3}{\Delta} d\sigma, \quad \text{где } s_1 - \text{сфе-}$$

ра единичного радиуса.

Заметим, что плотность тела считается постоянной и равной единице.

Подставляя значение r в (2), приходим к следующему выражению:

$$\Delta = \sqrt{(a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi) - 2a(R \cos \varphi - a) \xi + a^2 \xi^2}.$$

Сделаем следующие обозначения:

$$(1) \quad \begin{cases} D^2 = a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi, \\ w = \frac{R \cos \varphi - a}{D}, \\ \eta = \frac{aR}{D}. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{D \sqrt{1 - 2w\eta + \eta^2}}.$$

Раскладывая $\frac{1}{\sqrt{1 - 2w\eta + \eta^2}}$ в ряд Тейлора по степеням η , получим, что

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{D} [\chi_0(w) + \eta \chi_1(w) + \dots + \eta^n \chi_n(w) + \dots], \quad (3)$$

где $\chi_n(w) = \frac{1}{2^{n-1} n!} \frac{d^n (w^2 - 1)^n}{dw^n}$ - полином Лежандра.

Ряд (3) сходится, если

$$|\eta| \leq |w \pm \sqrt{w^2 - 1}|, \quad \text{но}$$

$$w^2 - 1 = \frac{(R \cos \varphi - a)^2}{D^2} - 1 = -\frac{R^2 \sin^2 \varphi}{D^2}, \text{ следовательно,}$$

$$|w \pm \sqrt{w^2 - 1}| = \sqrt{\left(\frac{R \cos \varphi - a}{D}\right)^2 + \left(\frac{R \sin \varphi}{D}\right)^2} = 1.$$

Таким образом, ряд (3) сходится при $|\eta| < 1$, но так как $\eta = \frac{a\xi}{D}$, то ряд (3) сходится при $|\xi| < \frac{D}{a}$, для того, чтобы можно было интегрировать, нам необходимо потребовать, чтобы

$$|\xi| < \left(\frac{D}{a}\right) \min, \text{ т.е. } |\xi| < \frac{R-A}{A}$$

Таким образом ряд, полученный подстановкой (3) в выражение для потенциала будет сходиться для тех точек пространства, для которых $R > A(1 + \xi \max)$.

В частности, рассматриваемый ряд будет сходиться во всех точках плоскости $x_3 = 0$, если

$$\xi \max < \frac{h - A}{A}. \quad (4)$$

Пусть (4) выполняется

$$u = \iiint \frac{a^2(1 + \xi)^3}{\Delta} da d\sigma. \quad (5)$$

Рассмотрим подынтегральную функцию:

$$\frac{a^2(1+\xi)^3}{\Delta} = \frac{a^2}{D} (1 + 3\xi + 3\xi^2 + \xi^3) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a\xi}{D}\right)^n \chi_n$$

или

$$\frac{a^2(1+\xi)^3}{\Delta} = \frac{a^2}{D} \chi_0 + \frac{a^2}{D} (3\chi_0 + \frac{a}{D} \chi_1) \xi +$$

$$+ \frac{a^2}{D} (3\chi_0 + \frac{3a}{D} \chi_1 + \frac{a^2}{D^2} \chi_2) \xi^2 + \dots + \frac{a^2}{D} \left(\frac{a^{n-3}}{D^{n-3}} \chi_{n-3} +$$

$$+ 3 \frac{a^{n-2}}{D^{n-2}} \chi_{n-2} + 3 \frac{a^{n-1}}{D^{n-1}} \chi_{n-1} + \frac{a^n}{D^n} \chi_n\right) \xi^n + \dots$$

Т.к. $\chi_n(w) = \frac{D^{n+1}}{n!} \cdot \frac{\partial^n 1}{\partial a^n}$, то общий член этого бес-

конечного ряда можно представить следующим образом:

$$\frac{a^{n-3}}{D^{n-3}} \chi_{n-3} + 3 \frac{a^{n-2}}{D^{n-2}} \chi_{n-2} + 3 \frac{a^{n-1}}{D^{n-1}} \chi_{n-1} + \frac{a^n}{D^n} \chi_n = \frac{D}{n!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^3}{\partial a^3} \left(a^n \frac{\partial^{n-3} 1}{\partial a^{n-3}} \right), \quad , \text{ то есть}$$

$$a^2 \frac{(1 + \xi)^3}{\Delta} = \frac{a^2}{D} \chi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} a^2 \frac{\partial^3}{\partial a^3} \left(a^n \frac{\partial^{n-3}}{\partial a^{n-3}} \frac{1}{D} \right).$$

Значит потенциал (его выражение) можно записать так:

$$u = \int_0^A da \int_{s_1} \left\{ \frac{a^2}{D} \chi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} a^2 \frac{\partial^3}{\partial a^3} \left(a^n \frac{\partial^{n-3}}{\partial a^{n-3}} \frac{1}{D} \right) \right\} d\sigma.$$

Но $\int_0^A da \int_{s_1} \frac{a^2}{D} \chi_0 d\sigma$ - это потенциал шара радиуса A , то есть

$$\int_0^A da \int_{s_1} \frac{a^2}{D} \chi_0 d\sigma = \frac{4}{3} \pi A^3 \frac{1}{R}.$$

Поэтому в той части пространства, где $R > A(1 + \xi_{\max})$ имеет место следующее разложение потенциала:

$$u = \frac{4}{3} \pi A^3 \frac{1}{R} + \int_0^A da \int_{s_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} a^2 \frac{\partial^3}{\partial a^3} \left(a^n \frac{\partial^{n-3}}{\partial a^{n-3}} \frac{1}{D} \right) d\sigma \quad (6)$$

и этот ряд сходится.

Несколько упростим это разложение:

$$u = \frac{4}{3} \pi A^3 \frac{1}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s_1} \frac{\xi^n}{n!} d\sigma \int_0^A a^2 \frac{\partial^3}{\partial a^3} \left(a^n \frac{\partial^{n-3}}{\partial a^{n-3}} \frac{1}{D} \right) da = \quad (7)$$

$$= \frac{4}{3} \pi A^3 \frac{1}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^3}{n!} \int \xi^n \frac{\partial^2}{\partial A^2} \cdot \left(\frac{\partial^{n-3}}{\partial A^{n-3}} \right) d\sigma,$$

где

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{1}{D} \right)_{a=A} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + R^2 - 2AR \cos \varphi}}.$$

Подробнее рассмотрим функцию $\frac{1}{T}$; запишем ее в виде следующего ряда:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{R \sqrt{1 + \left(\frac{A}{R}\right)^2 - 2 \frac{A}{R} \cos \varphi}} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{R}\right)^n \chi_n(\cos \varphi),$$

но

$$\chi_n(\cos \varphi) = \sum_{k=0}^n \frac{(1-\mu^2)^{k/2} (1-\mu'^2)^{k/2} \cos k(\varphi - \varphi')}{(n-k+1) \dots (n+k)} \times$$

$$\times \frac{d^k \chi_n(\mu)}{d\mu^k} \cdot \frac{d^k \chi_n(\mu')}{d\mu'^k},$$

где $\cos \theta = \mu$, $\cos \theta' = \mu'$

$$\cos \varphi = \mu \mu' = \sqrt{1-\mu^2} \cdot \sqrt{1-\mu'^2} \cos k(\varphi - \varphi').$$

Таким образом

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{R^n} \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{2}{\delta_k} P_n^k(\mu) P_n^k(\mu') \cos k(\varphi - \varphi'),$$

где

$$P_n^k(\mu') = (1 - \mu'^2)^{k/2} \frac{d^k \chi_n(\mu')}{d\mu'^k},$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 2, & k > 0. \end{cases}$$

3. Основные уравнения задачи.

Пусть на плоскости x_1, x_2 известны значения потенциала u искомого тела. Мы предполагаем, что эти значения мало отличаются от значений потенциала однородного шара радиуса A с центром в точке $(0, -h)$.

Обозначая через ρ - расстояние от начала координат до точки плоскости, мы задаем $u(x_1, x_2, 0)$ в следующем виде:

$$u(x_1, x_2, 0) = \left[\frac{4}{3} \pi A^3 \frac{1}{R} \right]_{x_3=0} + \alpha f(\rho, \varphi),$$

где $f(\rho, \varphi)$ - заданная функция от ρ и φ , а число α - малый параметр.

Но $\rho = h \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}$ и кроме того, $\frac{1}{R} = \frac{\mu}{h}$, то есть

$$u(x_1, x_2, 0) = \frac{4}{3} \pi A^3 \frac{\mu}{h} + \alpha F(\rho, \phi). \quad (8)$$

Теперь рассмотрим функцию $\frac{1}{T}$ на плоскости $x_3 = 0$:

$$\frac{1}{T} \Big|_{x_3=0} = \frac{\mu}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{h} \mu\right)^n \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \cdot \frac{2}{\delta k} x$$

$$x P_n^k(\mu) P_n^k(\mu') \cos k(\phi - \phi').$$

Обозначаем через $\frac{1}{\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{h} \mu\right)^n \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{2}{\delta k} x$

$$x P_n^k(\mu) \cdot P_n^k(\mu') \cos k(\phi - \phi'), \quad \text{тогда}$$

$$\frac{1}{T} \Big|_{x_3=0} = \frac{\mu}{h} \delta^{-1} = \frac{\mu}{h\delta}.$$

Подставляя значение $\frac{1}{T} \Big|_{x_3=0}$ в (7), приходим к следующему выражению:

$$u(x_1, x_2, 0) = \frac{4}{3} \pi A^3 \frac{\mu}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^3}{n!} \frac{\mu}{h} \int \xi^n \frac{\partial^2}{\partial A^2} x$$

$$\times (A^{n-1} \frac{\partial^{n-3}}{\partial A^{n-3}} \frac{1}{\delta}) d\sigma.$$

Сравнивая последнее выражение с (8), получим следующее равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{S_1} \xi^n \frac{\partial^2}{\partial A^2} (A^{n-1} \frac{\partial^{n-3}}{\partial A^{n-3}} \frac{1}{\delta}) d\sigma = \lambda \Phi(\mu, \phi).$$

Здесь $\lambda = \frac{\alpha}{A^3}$,

$$\Phi(\mu, \phi) = \frac{h}{\mu} F(\mu, \phi).$$

4. Аналитические свойства потенциала.

Рассмотрим однородное тело с плотностью, равной единице; выражение потенциала для него будет выглядеть следующим образом:

$$u = \iiint \frac{d\tau}{\Delta}.$$

Теперь выведем свойства функции, изображающей значения потенциала на плоскости. Сначала заметим, что

$$\cos k(\phi - \phi') = \cos k\phi \cos k\phi' + \sin k\phi \sin k\phi'.$$

Потенциал тела может быть представлен следующим образом:

$$u = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+3}}{n+3} \frac{1}{R^n} \sum_{k=0}^n \frac{2}{\delta k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \times$$

$$\times P_n^k(\mu) \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} (1+\xi)^{3+n} P_n^k(\mu') \cos k(\psi-\psi') d\psi',$$

или

$$u = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_n^k}{R^n} P_n^k(\mu) \cos k\psi + \frac{b_n^k}{R^n} P_n^k(\mu) \sin k\psi \right), \quad (9)$$

где

$$a_n^k = \frac{A^{n+3}}{n+3} \frac{2}{\delta k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} (1+\xi)^{3+n} P_n^k(\mu') \cos k\psi' d\psi',$$

$$b_n^k = \frac{A^{n+3}}{n+3} \frac{2}{\delta k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} (1+\xi)^{3+n} P_n^k(\mu') \sin k\psi' d\psi'.$$

Если соблюдается (4), то ряд (9) будет сходиться во всех точках плоскости $x_3 = 0$, а мы предполагаем выполнение условия (4). Выразим (4) в более определенной форме:

$$\xi_{\max} \neq \frac{h-A}{A}, \quad \text{но } \xi_{\max} = \gamma \quad \text{такому, что}$$

$$\gamma < \frac{h - A}{A}.$$

Теперь рассмотрим ряд (9) в точках плоскости $x_3 = 0$:

$$u = \frac{\mu}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a}{h} \right)^k \mu^n P_n^k(\mu) \cos k \phi +$$

$$+ \frac{b}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a}{h} \right)^k \mu^n P_n^k(\mu) \sin k \phi.$$

И поставим задачу об изучении свойств функций, определяемых разложениями вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (A_n^k P_n^k(\mu) \cos k \phi + B_n^k P_n^k(\mu) \sin k \phi) \mu^n. \quad (10)$$

Для изучения свойств таких функций необходимо сначала получить оценку для присоединенных функций Лежандра.

Как известно [4], что имеет место следующая интегральная формула для присоединенной функции Лежандра

$$P_n^k(\mu) = (-i)^n \frac{(n+k)!}{n!} \int_0^{\pi} (\mu+i \sqrt{1-\mu^2} \cos t)^n \cos kt \, dt.$$

Отсюда получаем следующую оценку:

$$|P_n^k(\mu)| \leq \frac{(n+k)!}{n!} \quad \text{для всех } k = 0, 1, \dots$$

Теперь мы можем получить оценки для a_n^k и b_n^k :

$$|a_n^k|, |b_n^k| \leq \frac{A^{n+3}}{n+3} \frac{8\pi}{\delta k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{(n+k)!}{n!} (1+\gamma)^{n+3} =$$

$$= \frac{A^{n+3}}{n+3} \frac{8\pi}{\delta k} \frac{(n-k)!}{n!} (1+\gamma)^{n+3}.$$

А, следовательно, и для A_n^k и B_n^k :

$$|A_n^k|, |B_n^k| \leq \frac{8\pi h^3}{(n+3)\delta k} \frac{(n-k)!}{n!} (1+\gamma)^{n+3} \frac{A^{n+3}}{h^{n+3}} \leq$$

$$\leq \frac{8\pi h^3}{(n+3)\delta k} (1+\gamma)^{n+3} \frac{A^{(n+3)}}{h^{n+3}}, \text{ так как } \frac{(n-k)!}{n!} \leq 1.$$

В силу (4) можно найти такое число $\gamma < \frac{h-A}{A}$ и $q_1 < 1$, что позволило бы вместо предыдущего неравенства взять такое:

$$|A_n^k|, |B_n^k| < Nq_1^n, \quad (\text{II})$$

где N - некоторое постоянное число.

Будем рассматривать ряды (10), коэффициенты которых удовлетворяют условию (II), такие ряды будем называть регулярными. Найдем область сходимости регулярных рядов. Для этого найдем сначала рекуррентное соотношение между тремя последовательными присоединенными функциями Лежандра.

Так как верно тождество:

$$\frac{(2k-1)!! \alpha^k (1-\mu^2)^{k/2}}{(1+\alpha^2-2\mu\alpha)^{\frac{2k+1}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^n P_n^k(\mu),$$

то дифференцируя его по α , получим:

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{(2k-1)!! \alpha^k (1-\mu^2)^{k/2}}{(1+\alpha^2-2\mu\alpha)^{\frac{2k+1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n^k(\mu).$$

или

$$\frac{(2k-1)!! (1-\mu^2)^{k/2}}{(1+\alpha^2-2\mu\alpha)^{\frac{2k+1}{2}}} \frac{k+\mu\alpha-(k+1)\alpha^2}{\alpha(1+\alpha^2-2\mu\alpha)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n^k(\mu),$$

$$(k+\mu\alpha-(k+1)\alpha^2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n^k(\mu) = (\alpha+\alpha^3-2\mu\alpha^2) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n^k(\mu).$$

Затем, приравнявая коэффициенты при α^n , придем к следующему:

$$kP_n^k + \mu P_{n-1}^k - (k+1)P_{n-2}^k = nP_n^k + (n-2)P_{n-2}^k -$$

$$- 2\mu(n-1)P_{n-1}^k, \quad \text{или}$$

$$P_n^k(n-k) - \mu(2n-1)P_{n-1}^k + (n+k-1)P_{n-2}^k = 0.$$

Заменим в последнем равенстве n на $n+1$:

$$P_{n+1}^k(n-k+1) - \mu(2n+1)P_n^k + (n+k)P_{n-1}^k = 0.$$

Отсюда следует, что многочлены $y_n^k = \mu^n P_n^k(\mu)$ будут удовлетворять соотношению:

$$(n+1-k)y_{n+1}^k - (2n+1)\mu^2 y_n^k + (n+k)\mu^2 y_{n-1}^k = 0.$$

Найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}^k}{y_n^k}.$$

Искомый предел будет равен тому корню α уравнения

$$\alpha - \mu^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1-k} + \frac{1}{\alpha} \mu^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+k}{n-k+1} = 0, \quad (11)$$

модуль которого наибольший.

Это уравнение можно представить и так:

$$\alpha - \mu^2 \left(2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2k-1}{n+1-k} \right) + \frac{\mu^2}{\alpha} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2k-1}{n+1-k} + 1 \right) = 0$$

отсюда

$$\alpha^2 - 2\mu^2\alpha + \mu^2 = 0 \quad \text{или}$$

$$\alpha = \mu^2 \pm \sqrt{\mu^4 - \mu^2}.$$

Для исследования полагаем

$$\mu = \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right). \quad (\text{a})$$

Тогда

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} (1 + Z^2), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{1 + Z^2}{Z^2}.$$

Равенство (а) ставит в соответствие плоскости комплексного переменного μ , разрезанной вдоль прямой $-I, +I$, внешнюю часть круга $|Z| = 1$.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{2} (1 + Z^2).$$

Повторяя общие рассуждения Пуанкаре, относящиеся к сходимости рядов многочленов, связанных рекуррентными соотношениями, мы приходим к тому заключению, что область абсолютной и равномерной сходимости ряда (10) ограничена прямой

$$\frac{1}{2} |1 + Z^2| = R, \quad |Z| \geq 1,$$

где R — радиус круга сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n [A_n^k P_n^k(\mu) \cos k\phi + B_n^k P_n^k(\mu) \sin k\phi].$$

Так как ряд (10) - регулярный ряд, то имеет место (II) и отсюда

$$R \geq \frac{1}{q} > 1.$$

Таким образом, (10) сходится во всяком случае внутри области:

$$\frac{1}{2} |1 + z^2| < \frac{1}{q}, \quad |z| \geq 1.$$

Кривая линия $\frac{1}{2} |1 + z^2| = R$ - овал кассини, переходит на плоскости μ в некоторую замкнутую кривую, симметричную относительно двух координатных осей и содержащую внутри себя отрезок $-1, +1$. Внутри всей этой кривой ряд (10) сходится и изображает некоторую голоморфную функцию переменного μ . Горизонтальный диаметр этой кривой больше вертикального. Величины горизонтального и вертикального диаметров суть

$\frac{2R}{\sqrt{2R-1}}$, $\frac{2R}{\sqrt{2R+1}}$. С увеличением R от единицы длины этих диаметров увеличиваются. При $R = 1$ горизонтальный диаметр равен 2, а вертикальный $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Число R в нашем исследовании больше 1, следовательно, область сходимости ряда (10) охватывает кривую с диаметром 2 и $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Отсюда следует, что ряд (10) не может изображать произвольную аналитическую функцию. Область голоморфизма функции, изображаемой рядом (10) содержит всегда внутри себя кривую, полученную из кривой $\frac{1}{2} |1 + z^2| = 1$ преобразованием (а).

На основании этого факта можно утверждать, что всякая функция, голоморфная внутри кривой сходимости ряда вида (10), может быть представлена внутри области, ограниченной этой кривой, равномерно сходящимся рядом (10).

5. Решение основного уравнения.

В разделе 3, мы пришли к следующему уравнению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{s_1} \xi^n \frac{\partial}{\partial A^2} (A^{n-1} \frac{\partial^{n-3}}{\partial A^{n-3}} \delta) d\sigma = \lambda \Phi(\mu, \phi). \quad (I2)$$

С одной стороны $\Phi(\mu, \phi) = \frac{h}{\mu} F(\mu, \phi)$, но с другой

$$\begin{aligned} \Phi(\mu, \phi) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n [A_n^k \mu^n P_n^k(\mu) \cos k \phi + \\ & + B_n^k \mu^n P_n^k(\mu) \sin k \phi], \end{aligned} \quad (I3)$$

где $|A_n^k|, |B_n^k| < N q_1^n$.

Подставляя (I3) в (I2) получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{s_1} \xi^n \frac{\partial^2}{\partial A^2} (A^{n-1} \frac{\partial^{n-3}}{\partial A^{n-3}} \delta) d\sigma = \quad (I2')$$

$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n [A_n^k \mu^n P_n^k(\mu) \cos k \phi + B_n^k \mu^n P_n^k(\mu) \sin k \phi].$$

Будем искать решение этого уравнения в виде бесконечного ряда:

$$\xi + \xi_1 \lambda + \xi_2 \lambda^2 + \xi_3 \lambda^3 + \dots + \xi_n \lambda^n + \dots \quad (I4)$$

Снова подставляем (I4) в (I2') и, приравнявая коэффициенты при λ^n , придем к такой системе:

$$\int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} \frac{\xi_1(\mu', \phi')}{\delta} d\phi' = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n [A_n^k \mu^n P_n^k \cos k \phi + B_n^k \mu^n P_n^k \sin k \phi],$$

$$\int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} \frac{\xi_2}{\delta} d\phi' = -\frac{1}{2A} \int_{s_1} \xi_1^2 \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{A^2}{\delta} \right) d\sigma,$$

$$\int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} \frac{\xi_3}{\delta} d\phi' = -\frac{1}{2A} \int_{s_1} 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{A^2}{\delta} \right) d\sigma - \int_{s_1} \frac{\xi_1^3}{3!} \frac{\partial^2}{\partial A^2} \left(\frac{A^2}{\delta} \right) d\sigma,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} \frac{\xi_r}{\delta} d\phi' = -\frac{\partial^r}{r! \partial \lambda^r} \left\{ \frac{1}{2A} \int_{s_1} \xi^r \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{A^2}{\delta} \right) d\sigma + \right.$$

$$\left. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{s_1} \xi^n \frac{\partial^2}{\partial A^2} \left(A^{n-1} \frac{\delta}{\partial A^{n-3}} \right) d\sigma \right\}_{\lambda=0},$$

$$\dots \dots \dots$$

Таким образом, определение функции ξ свелось к решению линейных интегральных уравнений первого рода. Подставляя значение $\frac{1}{\delta}$ в первое уравнение нашей системы, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{n}\right)^n \mu^n \sum_{k=0}^n \frac{2}{\delta k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\mu) [\cos k \phi \times$$

$$\times \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} \cos k \phi' P_n^k(\mu') \xi_1 d\phi' + \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} P_n^k(\mu') \xi_1 \sin k \phi' d\phi' \times$$

$$\times \sin k \phi] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n [\mu^n A_n^k P_n^k \cos k \phi + B_n^k \mu^n P_n^k \sin k \phi].$$

Приравнявая коэффициенты при $\mu^n P_n^k(\mu) \cos k \phi$ и $\mu^n P_n^k(\mu) \sin k \phi$, приходим к следующим тождествам:

$$\int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} P_0(\mu') \xi_1(\mu', \phi') d\phi' = 0,$$

$$\int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} P_n^k(\mu') \cos k \phi' \xi_1 d\phi' = A_n^k \left(\frac{h}{A}\right)^n \frac{\delta k}{2} \frac{(n+k)!}{(n-k)!},$$

$$\int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} P_n^k(\mu') \sin k \phi' \xi_1 d\phi' = B_n^k \left(\frac{h}{A}\right)^n \frac{\delta k}{2} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \xi_1(\mu, \phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h}{A}\right)^n \sum_{k=0}^n [A_n^k \frac{\delta k(n+k)!}{2(n-k)!}] \times \\ &\times \frac{2n+1}{2\pi\delta k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\mu) \cos k\phi + B_n^k \frac{\delta k}{2} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \times \\ &\times \frac{2n+1}{2\pi\delta k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\mu) \sin k\phi, \end{aligned}$$

таким образом, отсюда получаем, что

$$\xi_1(\mu, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h}{A}\right)^n \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{k=0}^n [A_n^k P_n^k \cos k\phi + \quad (15)$$

$$+ B_n^k P_n^k \sin k\phi], \quad \text{здесь } q_1 < 1,$$

пусть $q_1 < \frac{A}{h}$, тогда ряд (15) есть сходящейся ряд, т.е. он изображает функцию непрерывную по μ и по ϕ . В силу выбора q_1 ряд (15) является регулярным рядом с показателем регулярности q' :

$$\frac{h}{A} q_1 < q' < 1, \quad \text{следовательно,}$$

$$\left| \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{h}{A}\right)^n A_n^k P_n^k \cos k\phi, \right| < N'q'^n,$$

ТО ЕСТЬ

$$\left| \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{h}{A}\right)^n B_n^k P_n^k \sin k\phi \right| < N'q'^n,$$

$$|\xi_1| < \frac{N'q'}{1-q'}.$$

Возьмем теперь уравнение для определения функции ξ_2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{h}\right)^n \mu^n \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{2}{\delta k'} [P_n^k(\mu) \cos k\phi \iint_{S_1} P_n^k(\mu') \times$$

$$\times \cos k\phi \xi_2 d\sigma + P_n^k(\mu) \sin k\phi \iint_{S_1} P_n^k(\mu') \sin k\phi \xi_2 d\sigma] =$$

$$= -\frac{1}{2A} \iint_{S_1} \xi_1^2 \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{A^2}{\delta}\right) d\sigma,$$

НО

$$\iint_{S_1} \xi_1^2 \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{A^2}{\delta}\right) d\sigma = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \left(\frac{A}{h}\right)^n \mu^n \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \times$$

$$\times \frac{2}{\delta k} [P_n^k(\mu) \cos k \phi \iint_{S_1} P_n^k(\mu') \cos k \phi' \xi_1^2 d\sigma +$$

$$+ P_n^k(\mu) \sin k \phi \iint_{S_1} P_n^k(\mu') \sin k \phi' \xi_1^2 d\sigma].$$

Приравнявая члены при $\mu^n P_n^k(\mu) \cos k \phi$ и при

$$\mu^n P_n^k(\mu) \sin k \phi :$$

получим

$$\iint_{S_1} P_n^k(\mu') \cos k \phi' \xi_2^2 d\sigma = \iint_{S_1} \left(-\frac{n+2}{2}\right) P_n^k(\mu') \cos k \phi' \xi_1^2 d\sigma,$$

$$\iint_{S_1} P_n^k(\mu') \sin k \phi' \xi_2^2 d\sigma = \iint_{S_1} \frac{n+2}{2} P_n^k(\mu') \sin k \phi' \xi_1^2 d\sigma,$$

$$\xi_2 = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2n+1)(n+2)}{2\pi\delta k} [P_n^k(\mu) \cos k \phi \iint_{S_1} \xi_1^2 P_n^k(\mu') \times$$

$$\times \cos k \phi' d\sigma + P_n^k(\mu) \sin k \phi \iint_{S_1} \xi_1^2 P_n^k(\mu') \sin k \phi' d\sigma].$$

Аналогичным образом находятся $\xi_3, \dots, \xi_r,$ и т.д., т.е. находятся коэффициенты разложения этих функций в ряды по сферическим функциям (присоединенным функциям Лежандра), а затем

составляются сами ряды.

Указав таким образом способ вычисления коэффициентов ряда (15) мы должны теперь доказать сходимости этого ряда, установив сначала сходимости рядов, определяющих сами коэффициенты.

6. 0 регулярных рядах сферических функций

Рассмотрим регулярный ряд сферических функций

$$Y_{mk}(\mu, \phi) = P_m^k(\mu) \begin{cases} \cos k \phi \\ \sin k \phi \end{cases} :$$

(16)

$$f(\mu, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2m} C_{mk} Y_{mk}(\mu, \phi), |C_{mk}| \leq M q_1^m,$$

$\alpha q_1 < 1$ и оценим коэффициенты разложения n -й степени функции $f(\mu, \phi)$ в ряд по присоединенным функциям Лежандра, которые определяются следующей формулой:

$$l_{mk} = \frac{2m+1}{2\pi\delta k} \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \int_{S_1} \int [f(\mu, \phi)]^n Y_{mk} d\sigma.$$

Для оценки этого коэффициента применим рассуждения Ляпунова. Для вычисления l_{mk} достаточно при возведении $f(\mu, \phi)$ в степень n учесть лишь те слагаемые, которые содержат многочлены по μ степени не ниже m . Каждый из таких многочленов (состоящий из произведений, присоединенных функций Лежандра) будет иметь впереди себя коэффициентом произведения чисел C_{mk} и сумма индексов этих чисел будет равна P степени многочлена, так как (16) — регулярный ряд, то это произведение будет меньше, чем $M^n q_1^P$,

$$q = q_1 \left(\sum_{k=0}^{2m} \frac{(m+k)!}{m!} \right) \frac{1}{m}.$$

При исследуемом возведении в степень мы будем иметь столько отдельных многочленов степени P , каков коэффициент при q^0 в разложении $(1 + q + q^2 + \dots)^n$ по степеням q . Обозначим этот коэффициент через γ_p , тогда

$$\sum_{p=0}^{\infty} \gamma_p q^p = (1 + q + q^2 + \dots)^n = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(m+k)! q^m}{m!} \right)^n.$$

В силу этих соображений, мы получим следующую оценку для l_{mk} .

$$|l_{mk}| < (2m+1)M^n \sum_{p=m}^{\infty} \gamma_p q^p. \quad (\text{ж})$$

Здесь $\sum_{p=m}^{\infty} \gamma_p q^p$ является остаточным членом R_{m-1} разложения $\frac{1}{(1-q)^n}$ в ряд Маклорена. Рассмотрим R_{m-1} в форме, данной Коши:

$$R_{m-1} = \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{(m-1)!} q^m \frac{(1-\theta)^{m-1}}{1-\theta q} \frac{1}{(1-\theta q)^{n+1}},$$

где $0 < \theta < 1$. Отсюда

$$|l_{mk}| \leq (2m+1)M^n \frac{(n+m-1)!}{(m-1)!(n-1)!} \frac{(1-\theta)^{m-1}}{1-\theta q} \frac{q^m}{(1-\theta q)^{n+1}}. \quad (\text{жж})$$

7. Доказательство сходимости ряда, изображающего искомую функцию ξ .

Рассмотрим последнее уравнение в (А), решаем его относительно ξ_2 :

$$\xi_r = -\frac{1}{r!} \frac{\partial^r}{\partial \lambda^r} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m [P_m^k(\mu) \cos k \phi] \sum_{n=2}^{m+3} \frac{2m+1}{2\pi \delta k} \times \right.$$

$$\times \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \frac{(m+2) \dots (m-n+4)}{n!} \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} \xi_n^r P_n^k(\mu') \cos k \phi' d\phi' +$$

$$+ P_m^k(\mu) \sin k \phi \sum_{n=2}^{m+3} \frac{2m+1}{2\pi \delta k} \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \frac{(m+2) \dots (m-n+4)}{n!} \times$$

$$\times \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} \xi_n^r P_n^k(\mu') \sin k \phi' d\phi' \Big\}_{\lambda=0}.$$

Каждый коэффициент (14) является регулярным рядом, т.к. он составляется с помощью умножения регулярных рядов, изображающих предыдущие коэффициенты. Пусть q - показатель регулярности - общий всем этим рядам.

Из теоремы Ляпунова об умножении регулярных рядов следует, что такой показатель действительно может быть найден. Этот показатель q может произвольно мало отличаться от q_1^r , таким образом

$$\xi_r = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n a_n^r P_n^k(\mu) \cos k \phi + \sum_{k=0}^n b_n^r P_n^k(\mu) \sin k \phi \right],$$

$$\text{где } |a_n^r| < M_r q^n \quad \text{и} \quad |b_n^r| < M_r q^n.$$

И, следовательно, каждый коэффициент разложения функции ξ_r в ряд присоединенных функций Лежандра будет меньше соответствующего коэффициента разложения функции

$$\frac{M_r}{\sqrt{1 - 2q\mu + q^2}},$$

таким образом, если мы покажем сходимость ряда

$$\frac{M_1 \lambda + M_2 \lambda^2 + \dots + M_r \lambda^r + \dots}{\sqrt{1 - 2q\mu + q^2}}, \quad \text{то}$$

вместе с этим докажем сходимость (I4).

Обозначим через $M(\lambda) = M_1 \lambda + M_2 \lambda^2 + \dots + M_r \lambda^r + \dots$

так как: $\left| \frac{2m+1}{2\pi\delta k} \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \int \int \xi(\mu', \phi') y_{mk} d\sigma \right| <$

$< M(\lambda) q^m$, то по разделу 5 будем иметь:

$$\frac{2m+1}{2\pi\delta k} \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \int \int \xi^n(\mu', \phi) y_{mk} d\sigma < (2m+1) M^n(\lambda) \times$$

$$\times \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{(m-1)!} \frac{(1-\theta)^{m-1}}{(1-\theta q)^{m-1}} \frac{q^m}{(1-\theta q)^{n+1}}.$$

Рассмотрим выражение, заключенное в фигурных скобках в (I7)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{n=2}^{m+3} \frac{2m+1}{2\delta k} \cdot \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \frac{(m+2)\dots(m-n-4)}{n!} \times \\
 & \times [P_m^k \cos k\phi \int \int_{S_1} \xi^n P_m^k(\mu') \cos k\phi' d\sigma + P_m^k \sin k\phi \int \int_{S_1} P_m^k(\mu') \times \\
 & \times \xi^n \sin k\phi' d\sigma] < \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{n=2}^{m+3} \frac{2m+1}{\delta k} \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \frac{(m+2)\dots(m-n+2)}{n!} \times \\
 & \times [P_m^k \cos k\phi + P_m^k \sin k\phi] \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{(m-1)!} \times \\
 & \times \left(\frac{1-\theta}{1-\theta q} \right)^{m-1} \frac{q^m (2m+1)}{1-\theta q^{n+1}} M^n(\lambda) \leq \quad (I8) \\
 & \leq 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{n=2}^{m+3} (2m+1) \frac{(m+k)!}{m!} \frac{(m+2)\dots(m-n+2)}{n!} \times \\
 & \times \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{(m-1)!} \frac{(1-\theta)^{m-1}}{(1-\theta q)^{m-1}} \frac{q^m M^n(\lambda)}{(1-\theta q)^{n+1}} = \\
 & = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{M^n(\lambda)}{n!} \frac{(1-\theta q)^{-n}}{1-\theta} \sum_{m=n-3}^{\infty} (2m+1)(2+m)\dots(m-n+4) \times \\
 & \times \frac{n\dots(n+m-1)}{(m-1)!} \left(\frac{1-\theta}{1-\theta q} \right)^m q^m \sum_{k=0}^{2m} \frac{(m+k)!}{m!} .
 \end{aligned}$$

Оценим внутреннюю сумму этого выражения:

$$S = \sum_{m=n-3}^{\infty} (2m+1)(m+2)\dots(m-n+4) \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{(m-1)!} x$$

$$xy^m \sum_{k=0}^{2m} \frac{(m+k)!}{m!},$$

где $y = \frac{1-\theta}{1-\theta q}$.

Так как мы доказываем сходимость, то оценку S можно производить и при больших n и k .

Рассмотрим

$$u_m = \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)(m+k)!}{(m-1)! m!} \quad \text{и найдем } \frac{u_{m+1}}{u_m}.$$

Это отношение, равное $(1 + \frac{n}{m})(1 + \frac{k}{m+1})$, остается для

всех значений m ограниченным по своей величине некоторым числом a .

Отсюда

$$u_m < a^{m-n+3} u_{n-3} = a^{m-n+3} \frac{n(n+1)\dots(2n-4)(n-3+k)!}{(n-4)!(n-3)!}.$$

Поэтому

$$S < \frac{n(n+1)\dots(2n-4)}{a^{n-3}(n-4)!} \sum_{k=0}^{2n-6} \frac{(n-3+k)!}{(n-3)!} x$$

$$x \sum_{m=n-3}^{\infty} (2m+1)(m+2)\dots(m-n+4)(ay)^m.$$

Здесь внутреннюю сумму обозначим через S_1

$$S_1 = \sum_{m=n-3}^{\infty} (2m+1)(m+2)\dots(m-n+4)(ay)^m.$$

Отметим, что

$$S < \frac{n(n+1)\dots(2n-4)}{a^{n-3}(n-4)!} \sum_{k=0}^{2n-6} \frac{(n-3+k)!}{(n-3)!} S_1,$$

но ряд S_1 можно просуммировать:

$$\sum_{m=n-3}^{\infty} (m+2)(m+1)\dots(m-n+4)z^m =$$

$$= z^{n-3} \frac{d^{n-1}}{dz^{(n-1)}} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{(n-1)! z^{n-3}}{(1-z)^n}.$$

Теперь рассмотрим ряд:

$$\sum_{m=n-3}^{\infty} 2m(m+2)(m+1)\dots(m-n+4)z^m = 2z \frac{d}{dz} x$$

$$x \frac{(n-1)! z^{n-3}}{(1-z)^n} = \frac{2(n-1)!}{(1-z)^{n+1}} (n+3z-3)z^{n-3}, \quad \text{следовательно,}$$

$$S_1 = \frac{(n-1)! z^{n-3}}{(1-z)^n} + \frac{2(n-1)! z^{n-3} (n+3z-3)}{(1-z)^{n+1}} =$$

$$= \frac{(n-1)! z^{n-3}}{(1-z)^{n+1}} [2n - 5(1+z)] < \frac{2n! z^{n-3}}{(1-z)^{n+1}}, \text{ то есть,}$$

$$S < \frac{n(n+1)\dots(2n-4)}{(n-4)!} \frac{2n! y^{n-3}}{a^2(1-ay)^{n+1}} \quad \text{ИЛИ}$$

$$S < n(n+1)\dots(2n-4)n(n-1)(n-2)(n-3) \times$$

$$\times \frac{2y^{n-3}}{a^2(1-ay)^{n+1}}.$$

Рассмотрим (18), применяя к этому неравенству, к его общему члену, найденные оценки, получим:

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \dots \right| < \frac{2 \cdot 2}{a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{M^n(\lambda)}{n!} \frac{(1-\theta q)^n}{1-\theta} n^2 (n+1) \dots (2n-4) \times$$

$$\times (n-1)(n-2)(n-3) \frac{y^{n-3}}{(1-ay)^{n+1}} \sum_{k=0}^{2n-6} \frac{(n-3+k)!}{(n-3)!} \quad \text{ИЛИ}$$

$$\times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{y^3(1-\theta)(1-ay)} \left(\frac{y M(\lambda)}{(1-\theta q)(1-ay)} \right)^n =$$

$$= \frac{4}{a^2 y^3 (1-\theta)(1-ay)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{n!} x$$

$$\times (n+4) \dots (2n-4) \left[\frac{(1-\theta) q M(\lambda)}{(1-\theta q)(1-ay)} \right]^n \sum_{k=0}^{2n-6} \frac{(n-3+k)!}{(n-3)!} .$$

При достаточно малых $M(\lambda)$ этот ряд сходится.

Таким образом, при замене в (17) интеграла $\frac{2m+1}{2\pi\delta k} x$

$$\times \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \int \int_S \xi^n y_{mk} d\sigma$$

величиной, большей его и дава-

емой (\mathfrak{K}) и (\mathfrak{K}), мы для малых $M(\lambda)$ получаем сходящийся ряд.

Ряд, находящийся в (\mathfrak{K}), пишется следующим образом:

$$\sum_{p=m}^{\infty} \gamma_p q^p = \sum_{p=m}^{\infty} \frac{n(n+1) \dots (n+p-1)}{p!} q^p,$$

следовательно:

$$\left| \frac{2m+1}{2\pi\delta k} \frac{(m-k)!}{(m+k)!} \int_{S_1} \int \xi^n y_{mk} d\sigma \right| <$$

$$< (2m+1) M^n(\lambda) \times$$

$$\times \sum_{p=m}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{p!} q^p,$$

правую часть подставляем в виде оценки в (I7) и пользуясь, что

$$\left| \frac{2m+1}{2\pi\delta k} \frac{(m-k)!}{(m+k)!} P_m^k \cos k\phi \right| < 1,$$

аналогично

$$\left| \frac{2m+1}{2\pi\delta k} \frac{(m-k)!}{(m+k)!} P_m^k \sin k\phi \right| < 1,$$

получим некоторое число, ограничивающее сверху $|\xi_r(\mu, \phi)|$, это число, в силу вышеизложенного, можно приравнять к $\frac{M_r}{1-q}$.

Итак:

$$\frac{M_r}{1-q} = \frac{1}{r!} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{m+3} (2m+1) M^n(\lambda) \sum_{k=0}^{2m} \frac{(m+k)!}{m!} \right\} \times$$

(I9)

$$x \frac{(m+2)\dots(m-n+4)}{n!} \sum_{p=m}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{p!} q^p \Big|_{\lambda=0}$$

Для функции $\xi_1(\mu, \phi)$ ограничение можно получить исходя из того, что $\Phi(\mu, \phi)$ — заданная функция. Это неравенство для ξ_1 можно записать в виде тождества:

$$\frac{M_1}{1-q} = \frac{M_1}{1-q} \quad \text{отсюда } M_1 \text{ определяется по } \Phi(\mu, \phi). \quad (19')$$

Продолжаем следующее:

$$(19) \quad x \lambda^2 + (19') \quad x \lambda, \quad \text{при } r = \overline{2^{\infty}}. \quad (19)$$

В результате получим:

$$- \frac{M}{1-q} = \frac{M_1 \lambda}{1-q} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{m+1} (2m+1) M^n \sum_{k=0}^{2m} \frac{(m+k)!}{m!} x$$

$$x \frac{(m+2)\dots(m-k+4)}{n!} \sum_{p=m}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{p!} q^p$$

при $\lambda = 0$, $M = 0$, т.е. наше уравнение имеет лишь один член с первой степенью M , а именно $\frac{M}{1-q}$, обладает единст-

венным голоморфным решением, изображенным степенным рядом по переменному λ , сходящимся вблизи $\lambda = 0$, причем, все коэффициенты степенного ряда $M(\lambda)$ положительны.

Таким образом, мажоранта ряда, изображающего искомую

функцию ξ_1 , построена и мы утверждаем, что (14) сходится и представляет решение нашей задачи для достаточно малых λ или $\alpha = \lambda A^3$.

В ы в о д . Если дана функция u на плоскости $x_3 = 0$, которая может быть представлена в виде ряда

$$u = \frac{4}{3} \pi A^3 \frac{\mu}{h} + \alpha \frac{\mu}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n [A_n^k \mu^n P_n^k(\mu) \times$$

$$\times \cos k \phi + B_n^k \mu^n P_n^k(\mu) \sin k \phi],$$

где $|A_n^k|$, $|B_n^k| < Nq^n$ и $q < \frac{A}{h}$, а A , h - данные числа, то можно найти под плоскостью $x_3 = 0$ для достаточно малых значений параметра задачи α такое однородное тело с плотностью, равной единице, мало уклоняющееся от шара радиуса A , находящееся на глубине h , которое в точках плоскости $x_3 = 0$ обладало бы заданными значениями (20) своего ньютоновского потенциала. Функция u зависит от переменного μ , связанного с расстоянием ρ точки плоскости $x_3 = 0$ от начала координат формулой

$$\mu = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \rho^2}}.$$

Поставленная нами задача имеет лишь одно решение [5].

Л и т е р а т у р а .

1. Сретенский Л.Н. Об одной обратной задаче теории потенциала. - Изв. АН СССР, серия матем., 5-6, (1938), 551-570.

2. Иванов В.К. Обратная задача теории потенциала, близкого к данному. - Изв. АН СССР, серия матем., 20, (1956), 793-818.
3. Прилепко А.И. О разрешимости обратной задачи объемного потенциала переменной плотности для тела, близкого к данному. - Сиб. матем.ж., 9, № 6, (1970), 1321-1332.
4. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. - ОГИЗ - ГОСТЕХИЗДАТ, 1946, М.-Л.
5. Новиков П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала. - ДАН, новая серия, т. 18, вып.3, (1938), 165-168.

С.П.Белинский

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ
 t -ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим гиперболическую систему уравнений первого порядка с $(n + 1)$ независимыми переменными:

$$u_t = \sum_{i=1}^n A_i u_{x_i} + Du + f, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2)$$

Здесь A_i - симметрические квадратные матрицы размера $n \times n$, D - матрица размера $n \times n$; u , f , u_0 - вектор-функции. Мы будем заниматься задачей об отыскании одной из матриц A_i при заданных матрицах D , $A_j: j \neq i$ и некоторой информации о решении прямой задачи (1)-(2). В работе [1] решалась подобная задача для матрицы D . Поэтому некоторые моменты в доказательстве, которые протекают аналогичным

образом, мы будем опускать.

Так же, как и в работе [1], рассмотрим n прямых задач вида (I)-(2):

$$u_t^k = \sum_{i=1}^n A_i u_{x_i}^k + Du^k + f^k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (I')$$

$$u^k|_{t=0} = u_0^k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2')$$

порожденных различными начальными условиями u_0^k и правыми частями f^k . Будем считать, что относительно каждой из этих задач известна следующая информация:

$$u^k|_{x_n=0} = g^k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Для удобства дальнейшего рассмотрения запишем системы (I')-(2') и (3) в матричной форме, вводя в рассмотрение квадратные матрицы U , U_0 , F , G , столбцы которых состоят соответственно из вектор-функций u^k , u_0^k , f^k , g^k . В этих обозначениях системы (I')-(2') и информация (3) примут следующий вид:

$$U_t = \sum_{i=1}^n A_i U_{x_i} + DU + F, \quad (4)$$

$$U|_{t=0} = U_0(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (5)$$

$$U|_{x_n=0} = G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t). \quad (6)$$

Сделаем некоторые предположения.

Пусть элементы $a_k^{ij}(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ искомой матрицы A_k : $k = 1, 2, \dots, n$ принадлежат к классу функций, представимых в виде конечных сумм вида:

$$a_k^{ij}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) = \sum_{m=1}^N c_m^{kij}(x_1, \dots, x_{n-1}) b_m^{kij}(t), \quad (7)$$

где функции $c_m^{kij}(x_1, \dots, x_{n-1})$ принадлежат к классу C^1 по x_1, \dots, x_{n-1} , $l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, а функции b_m^{kij} непрерывны при $t \geq 0$. Пусть, кроме того, элементы матриц U_0 , G_t , D , A_j : $j \neq k$ имеют непрерывные производные по пространственным переменным x_1, \dots, x_n до порядка $l + 1$, а по t - непрерывны. Пусть, далее, некоторая область Ω пространства x_1, \dots, x_n, t ограничена замкнутой поверхностью, которая разбивается на две гладких части. Первая из этих частей представляет собой ограниченный кусок плоскости $t = 0$, а вторая является как-бы "шарочкой", опирающейся на границу первой и расположена в полупространстве $t \geq 0$. Потребуем еще, чтобы на боковой поверхности Ω квадратичная форма

$$([\tau_0 E - \sum_{i=1}^n \tau_i A_i]u, u) \quad (ж)$$

была бы неотрицательной. Здесь $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n)$ - вектор внешней нормали к боковой поверхности Ω , а E - единичная матрица. Чтобы избавиться от неконструктивного условия (ж) (одна из матриц A_k у нас ведь искомая) потребуем от элементов матриц A_k ; $k = 1, 2, \dots, n$, выполнения следующего условия:

$$\max_{(x,t)} \max_k \sum_{i,j=1}^n (a_k^{ij})^2 < M, \quad M > 0. \quad (жж)$$

Тогда класс областей Ω , удовлетворяющий условию (ж) будет $\Omega(M)$, то есть в этом случае легко получить соотношение, которому должен удовлетворять вектор нормали к поверхности Ω из класса $\Omega(M)$. При этом очевидно, что если $M_1 > M$, то и $\Omega(M_1) \subset \Omega(M)$. Пусть, наконец, информация G задана в области Ω_1 , являющейся сечением некоторой области Ω описанной выше, гиперплоскостью $x_n = 0$, причем проекция Ω на гиперплоскость $x_n = 0$ совпадает с областью Ω_1 . При этих предположениях имеет место

Т е о р е м а . Если в Ω_1 неизвестна одна из матриц A_k : $k = 1, 2, \dots, n-1$, то, при условии, что

$$\det G_{x_k}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) \neq 0 \text{ в } \Omega_1 \quad (8)$$

матрица A_k определяется в Ω_1 однозначно заданием матрицы G . Пусть неизвестна матрица A_n . Тогда, при условии, что

$$\det[G_t - \sum_{i=1}^{n-1} A_i G_{x_i} - DG - F] \neq 0 \text{ в } \Omega_1 \quad (9)$$

матрица A_n так же определяется однозначно заданием матрицы G .

З а м е ч а н и е . Из условия (9) и системы (4), следует, что

$$\det[A_n \cdot U_{x_n}] \neq 0 \text{ в } \Omega_1. \quad (9')$$

То есть $\det A_n \neq 0$ и $\det U_{x_n} \neq 0$ всюду в Ω_1 . Последнее условие нам фактически и понадобится. Это условие

$$\det U_{x_n} \neq 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (9'')$$

заведомо выполняется в некоторой полосе $0 \leq t \leq T(x)$, если $\det(U_0)_{x_n} \neq 0$. При этом

$$T(x) = T(M, \|(U_0)_{x_n}\|, \|D\|, \|F\|).$$

Доказательство теоремы. Пусть U^1 и U^2 два решения системы (4)-(5), которым отвечают соответственно матрицы A_k^1 и A_k^2 . Тогда разность $\tilde{U} = U^1 - U^2$ удовлетворяет следующей системе:

$$\tilde{U}_t = \tilde{A}_k U_{x_k}^1 + A_k^2 \tilde{U}_{x_k} + D\tilde{U} + \sum_{i \neq k} A_i \tilde{U}_{x_i}, \quad (10)$$

$$\tilde{U}|_{t=0} = 0, \quad (11)$$

$$\tilde{U}|_{x_n=0} = 0. \quad (12)$$

Здесь через \tilde{A}_k обозначена разность $A_k^1 - A_k^2$. Проинтегрируем систему (10) по x_n (учитывая, что \tilde{A}_k и A_k^2 от x_n не зависят):

$$V_t = A_k^2 V_{x_k} + D_{x_n} \tilde{U} + DV + \tilde{A}_k U_{x_k}^1 + \left(\sum_{i \neq k} A_i \tilde{U}_{x_i} \right)_{x_n}. \quad (13)$$

Мы обозначили здесь через V величину \tilde{U}_{x_n} . Пусть $k = 1, 2, \dots, n-1$. Тогда, рассматривая систему

(10) на гиперплоскости $x_n = 0$, получаем следующее соотношение

$$\tilde{A}_k G_{x_k} = -A_n^2 V \Big|_{x_n=0} \quad (14')$$

Если $k = n$, то система (14') будет выглядеть так:

$$A_n U_{x_n} \Big|_{x_n=0} = -A_n^2 V \Big|_{x_n=0} \quad (14'')$$

Пусть S_τ есть сечение области Ω гиперплоскостью $t = \tau$. Тогда для матрицы \tilde{A}_k нетрудно получить следующее неравенство методом, изложенным в работе [1]:

$$\max_{x \in S_t} \|\tilde{A}_k\| \leq h_k \| \|V\| \|_{W_2^1(S_t)} \quad (15)$$

Здесь через $\|\tilde{A}_k\|$ и $\| \|V\| \|_{W_2^1(S_t)}$ обозначены следующие матричные нормы:

$$\|\tilde{A}_k\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_k^{ij})^2 \quad (16)$$

$$\| \|V\| \|_{W_2^1(S_t)} = \int_{\substack{t=\text{const} \\ x \in S_t}} \dots \int \sum_{|\beta| \leq 1} \left\| \frac{\partial |V|}{\partial x^\beta} \right\|^2 dx_1 \dots dx_n \quad (17)$$

Константа $h_k > 0$ в (15) от t не зависит.

Для получения энергетических оценок для матрицы V и ее производных по x до порядка 1 можно воспользоваться тем же приемом, что и в работе [1]. Покажем, как получить систему для оценки первых производных по x матрицы V .

Для этого, к системе (10) добавим еще n систем, получающихся из (10) дифференцированием по x_1, x_2, \dots, x_n . В частности последняя система — это система (13). Запишем эти $(n + 1)n^2$ уравнений в одну матричную систему:

(18)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}_{x_1} \\ \vdots \\ \tilde{U}_{x_n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n A_i^0 \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}_{x_1} \\ \vdots \\ \tilde{U}_{x_n} \end{pmatrix} + D^0 \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}_{x_1} \\ \vdots \\ \tilde{U}_{x_n} \end{pmatrix} + A_k^{00} \frac{\partial}{\partial x_k} \begin{pmatrix} U^1 \\ U_{x_1}^1 \\ \vdots \\ U_{x_n}^1 \end{pmatrix}$$

Здесь A_i^0 , D^0 , A_k^{00} — это квадратные матрицы размера $(n^2 + n) \times (n^2 + n)$. Эти матрицы выглядят достаточно громоздко, чтобы их здесь не выписывать. Заметим, что особого труда это не составит. Нетрудно, однако, понять почему система (18) останется симметрической, как и система (10), если обратить внимание на вид матриц A_i^0 . Система для оценок старших производных матрицы V по x получается из системы (18) аналогично тому, как получается система (18) из системы (10).

Таким образом величину $\|V\|_{W_2^1(S_t)}$ оценим так же, как и в работе [1]:

$$\|V\|_{W_2^1(S_t)} \leq h_k^0 \int_0^t \|\tilde{A}_k\|_{W_2^1(S_\tau)} d\tau. \quad (19)$$

Здесь $h_k^0 > 0$ — константа, не зависящая от t . Тем самым неравенство (15) продолжается до следующего неравенства:

$$\max_{x \in S_t} \|\tilde{A}_k\| \leq h_k^0 \cdot h_k^0 \int_0^t \|\tilde{A}_k\|_{W_2^1(S_\tau)} d\tau. \quad (20)$$

Нам осталось показать, что неравенство (20) допускает в Ω лишь тривиальное решение. То есть, если некоторая функция f , определенная на Ω представима в виде конечной суммы:

$$f = \sum_{i=1}^N a_i(x_1, \dots, x_{n-1}) b_i(t) \quad (21)$$

и удовлетворяет неравенству:

$$\|f\|_{C(S_t)} \leq k \int_0^t \|f\|_{W_2^1(S_\tau)} d\tau, \quad (22)$$

где $k > 0$ от t не зависит, то $f \equiv 0$ в Ω .

Будем предполагать, что функции a_i линейно независимы при $t = 0$, то есть на S_0 . В противном случае мы можем перейти к меньшему числу функций a_i . Поскольку для всех t_1, t_2 ; $t_1 > t_2$ проекция S_{t_1} на плоскость $t = t_2$ лежит целиком в области S_{t_2} , то, если функции a_i линейно-зависимы на S_{t_2} , они будут линейно зависимы и на S_{t_1} . Пусть область Ω заключена между плоскостями $t = 0$ и $t = t_0$. Это значит, что плоскость $t = t_0$ и Ω имеют единственную общую точку — точку касания плоскости и области Ω . Тогда пусть число функций a_i в представлении (21) больше чем 1. Случай $N = 1$ мы рассмотрим в конце. Поскольку на S_0 функции a_i линейно независимы, то найдется такое $t_1: 0 < t_1 \leq t_0$, что для всех $t < t_1$ функции a_i будут линейно независимы на S_t , а для всех $t > t_1$ функции a_i будут линейно зависимы на S_t . Покажем, что в этом случае функции a_i будут линейно зависимы на S_{t_1} . Действительно, возьмем некоторую последовательность $\{t^k\}: t^k \rightarrow t_1$, а также такой набор $c_m(t^k)$; $m = 1, 2, \dots, N$; $\sum_{m=1}^N |c_m(t^k)| = 1$, что $\sum_{i=1}^N a_i(x_1, \dots$

..., x_{n-1}) $c_i(t^k) = 0$ на S_{t^k} . Поскольку, для всех $m = 1, 2, \dots, N$; $k = 1, 2, \dots$: $|c_m(t^k)| \leq 1$, то, не уменьшая общности можно считать, что $\{c_m(t^k)\}$ сходится для каждого $m = 1, 2, \dots, N$. Пусть предельные точки для этих последовательностей есть c_m . Тогда, очевидно $\sum_{i=1}^N |c_m| = 1$ и, кроме того, для любой точки $x \in S_{t_1}$ выполнено равенство:

$$\sum_{i=1}^N a_i(x) c_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N a_i(x) c_i(t^k) = 0. \quad (23)$$

Тем самым a_i линейно зависимы на S_{t_1} .

Как было показано в работе [1] функция $f \equiv 0$ для всех $t < t_1$. По непрерывности f отсюда следует, что $f \equiv 0$ и для $t = t_1$. Если $t_1 = t_0$, то все доказано, если же нет, то переходя к меньшему числу функций a_1^1 , которые будут уже линейно независимы на S_{t_1} , мы повторим для той части Ω , которая находится между плоскостями $t = t_1$ и $t = t_0$ те же рассуждения, которые мы только что провели для Ω . При этом найдется такое $t_2: t_1 < t_2 \leq t_0$, что функции a_1^1 будут линейно независимы для $t < t_2$ и линейно зависимы для $t \geq t_2$. Ясно, что указанный процесс продлится не более чем на $N - 1$ шагов и мы придем либо к случаю $N = 1$, либо к тому, что $f \equiv 0$ в Ω . Для завершения доказательства нам остается рассмотреть случай, когда $N = 1$. В этом случае имеет место альтернатива: либо найдется такое $t_1: 0 < t_1 \leq t_0$, что для всех $t: t_1 \leq t \leq t_0$ функция $a_1 \equiv 0$ на S_t , а для всех $t < t_1$ функция a_1 отлична от нуля на S_t . Либо же такого t_1 не найдется. В первом случае альтернативы $f \equiv 0$ для всех $t < t_1$, а при $t \geq t_1: a_1 \equiv 0$ и, поэтому, $f \equiv 0$ в Ω . Во втором же случае мы сразу получаем, что $f \equiv 0$ в Ω . Теорема доказана полностью.

З а м е ч а н и е . Может случиться, что нам нужно отыскать не все коэффициенты матриц A_i или D . Здесь возможны различные случаи, но во всех них, так или иначе просматривается зависимость необходимой информации от числа разыскиваемых коэффициентов. Приведем один пример. Пусть нам известны некоторые коэффициенты матрицы D . И пусть $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ вектор информации, заданный на гиперплоскости $x_n = 0$. Соотношение типа (I4) для элементов матрицы D будет выглядеть следующим образом:

$$A_n u_{x_n} = -\tilde{D} F. \quad (24)$$

Из вида вектора $-\tilde{D}F$ ясно, как следует формулировать теорему единственности в этом случае. В каждой координате вектора $-\tilde{D}F$ должно присутствовать не более одного искомого коэффициента. Итак, можно ставить задачу об отыскании коэффициентов $a_{11_1}, a_{21_2}, \dots, a_{n1_n}$. При этом, для единственности определения коэффициентов в классе конечных сумм вида (7), необходимо, чтобы $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_n}$ были бы отличны от нуля в области задания информации Ω_1 .

Л и т е р а т у р а .

- [I.] Белинский С.П. Об одной обратной задаче для линейных симметрических t - гиперболических систем с $n + 1$ независимыми переменными. - Дифференциальные уравнения, т. 12, № 1, 1976. с 15-23.

А. Л. Бухгейм

ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Настоящая заметка является продолжением работ [1-2]. В ней доказывается аналитичность решений некоторых линейных интегральных уравнений, возникающих в теории многомерных обратных задач (см. [3]). Отсюда следуют новые теоремы единственности для этих уравнений в классе непрерывных финитных функций. В качестве приложения рассмотрена одна обратная задача для гиперболического уравнения.

Введем следующие обозначения:

$$\Omega = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| < r\}, \quad d = d(\Omega) = 2r,$$

$$S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| = 1\}, \quad Q = \Omega \times \Omega \times S^{n-1}.$$

Здесь и далее $n \geq 3$.

Пусть G - открытое множество в R^m . Тогда через $A(G)$ мы обозначаем класс функций $u: G \rightarrow R^1$, R - аналитических в G .

$A(\bar{G}) - R$ - аналитические функции в окрестности G . (Здесь множество G не обязательно открыто). $C(G)$ - банахово пространство непрерывных в G и ограниченных в \bar{G} функций.

Пусть функция $p: \bar{Q} \rightarrow R^1 ((\xi, x, v) \rightarrow p(\xi, x, v))$, $\xi, x \in \Omega$, $v \in S^{n-1}$ удовлетворяет условиям:

$$1^0. p \in A(\bar{Q})$$

$$2^0. p|_{\xi=x} = 0, D_{\xi} p|_{\xi=x} = v, x \in \Omega, v \in S^{n-1},$$

Условие 2^0 означает, что гиперповерхность $\Gamma(x, v) = \{\xi \in \Omega \mid p(\xi, x, v) = 0\}$ проходит через точку x и имеет в ней нормаль v . В силу 2^0 и формулы Тейлора

$$p(\xi, x, v) = \langle \xi - x, v \rangle + \langle p_2(\xi, x, v) (\xi - x), (\xi - x) \rangle, \quad (I)$$

где p_2 - матрица вторых производных функции p .

Предположим далее, что существует число $\mu < 1$ такое, что

$$3^0. \|p_2\|_{C(Q)} \cdot d(\Omega) < \mu$$

$$4^0. \sqrt{2} \|D_v p_2\|_{C(Q)} \cdot d(\Omega) < \sqrt{1 - \mu^2}.$$

В шаре Ω рассмотрим интегральное уравнение относительно функции $u \in C(\Omega)$. (вне Ω функция u продолжена нулем):

$$Pu \equiv \sum_{j=0}^1 \int a_j(\xi, x, v) \delta^{(-j)}(p(\xi, x, v)) u(\xi) d\xi = f(x, v), \quad (2)$$

$x \in \Omega, \quad v \in S^{n-1}.$

Здесь функция p удовлетворяет условиям Γ^0-3^0 , а функции a_j такие, что

$$5^0. \quad a_j \in A(\bar{\Omega}), \quad j = 0, 1$$

6⁰. $a_0(\xi) \equiv a_0(\xi, \xi, v)$ - не зависит от v и отлична от нуля в $\bar{\Omega}$.

$\delta(p)$ - функция Дирака, $\delta^{(-1)}(p) \equiv \theta(p)$ - функция Хевисайда.

При условиях Γ^0-6^0 имеет место следующая

Т е о р е м а I. Если для функции $u \in C(\Omega)$

$$Pu \in A(\Omega \times S^{n-1}), \quad \text{то } u \in A(\Omega).$$

С л е д с т в и е I. Решение уравнения (2) единственно в классе $C_0(\Omega)$.

Для доказательства теоремы I нам понадобится одно простое обобщение известной теоремы об аналитичности решений интегральных уравнений со слабой особенностью ([4]).

Пусть функция $K(x, \xi, v, e)$ ($x, \xi \in \Omega, v \in [-d, d], e \in S^{n-1}$) удовлетворяет следующим условиям:

а) $K \in A(\bar{G}), \quad G = \Omega \times \Omega \times [-d, d] \times S^{n-1}.$

б) $K(\xi, \xi, 0, e)$ - не зависит от $e \in S^{n-1}$ и отлична от нуля в $\bar{\Omega}$.

Определим оператор $K: C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ по формуле

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} \frac{K(x, \xi, |\xi - x|, \frac{\xi - x}{|\xi - x|})}{|\xi - x|^{n-\alpha}} u(\xi) d\xi, \quad x \in \Omega.$$

Здесь $\alpha > 0$, $\alpha \neq n$, $n + 2$, $n + 4 \dots$

Т е о р е м а 2. Пусть функция K удовлетворяет условиям а), б). Тогда, если $Ku \in A(\Omega)$, то $u \in A(\Omega)$.

В частном случае, когда $K(x, \xi, s, e)$ не зависит от s и e эта теорема (в предположении, что $u \in C^1(\Omega)$) доказана в работе [4]. Анализ доказательства показывает, что теорема справедлива и в приведенной выше формулировке. Доказательство теоремы 2 основано на сведении уравнения $Ku = f$ к интегральному уравнению второго рода $u + K_1 u = f_1$, где $f_1 \in A(\Omega)$ и ядро оператора K_1 аналитично при $x \neq \xi$. Продолжая затем оператор K_1 в комплексную область не трудно установить аналитичность u . Подробности см. в [4].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы I. Положим $S: C(\Omega \times S^{n-1}) \rightarrow C(\Omega)$

$$(Sf)(x) = \int_{|v|=1} f(x, v) d\omega_v$$

($d\omega_v$ - евклидов элемент поверхности единичной сферы). Тогда, применяя оператор S к (2) и меняя порядок интегрирования, получим

$$(SPu)(x) = \int \frac{K(x, \xi)}{|x - \xi|} u(\xi) d\xi = (Sf)(x),$$

где

$$K(x, \xi) = K_0(x, \xi) + |x - \xi| \cdot K_1(x, \xi), \quad (3)$$

$$K_j(x, \xi) = \int_{|v|=1} a_j(\xi, x, v) \delta^{(-j)} \left(\frac{p(\xi, x, v)}{|\xi-x|} \right) d\omega_v, \quad j = 0, 1. \quad (4)$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что

$$\delta^{(-j)}(\lambda p) = \lambda^{-1+j} \delta^{(-j)}(p), \quad \lambda > 0.$$

Так как $Pu \in A(\Omega \times S^{n-1})$, то $SPu \in A(\Omega)$ и, следовательно, в силу теоремы 2 достаточно показать, что

$$K(x, \xi) = \tilde{K}(x, \xi, |\xi-x|, \frac{\xi-x}{|\xi-x|}),$$

где функция \tilde{K} удовлетворяет условиям а) и б). С этой целью преобразуем ядро K_0 .

Положим

$$v = \frac{\xi-x}{|\xi-x|}, \quad e = \frac{\xi-x}{|\xi-x|}, \quad e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0). \quad (5)$$

Следуя работе [1], сделаем в (4) замену переменных

$$\tau(e, \zeta, v_1) \equiv Uv = v + 2\langle v, e_1 \rangle e - \frac{1}{1 + \langle e, e_1 \rangle} \langle v, e + e_1 \rangle (e + e_1), \quad (6)$$

$$v \equiv (v_1, \sqrt{1-v_1^2} \tilde{\zeta}), \quad \tilde{\zeta} \in S^{n-2}, \quad \langle e, e_1 \rangle \geq 0 \quad (7)$$

$$d\omega_{\nu} = (1 - \nu_1^2)^{\frac{n-3}{2}} d\omega_{\zeta} d\nu_1 \quad (8)$$

Не трудно проверить, что U - ортогональная матрица, причем

$$Ue_1 = e, \quad U^*e = e_1. \quad (9)$$

Так как мера $d\omega_{\nu}$ инвариантна относительно вращения, то интеграл (4) ($j=0$) с учетом формул (1), (5)-(9) принимает вид

$$K_0(x, \xi) \equiv \tilde{K}_0(x, \xi, s, e) = \int_{|\zeta|=1} d\omega_{\zeta} \int_{-1}^1 a_0(\xi, x, \tau) \delta(p_1) (1 - \nu_1^2)^{\frac{n-3}{2}} d\nu_1,$$

$$p_1 = p_1(\xi, x, s, e, \tilde{\zeta}, \nu_1) \equiv \nu_1 + s \cdot \langle p_2(\xi, x, \tau(e, \tilde{\zeta}, \nu_1)) e, e \rangle.$$

В силу условий $3^0 - 4^0$ уравнение $p_1 = 0$ (относительно ν_1) имеет в интервале $[-1, 1]$ единственный и простой корень $\nu_1 = \nu_1^*(\xi, x, s, e, \tilde{\zeta})$, причем $\nu_1^* \in [-\mu, \mu]$ ($\mu < 1$). Следовательно

$$\delta(p_1) = \frac{1}{|D_{\nu_1} p_1|} \Big|_{\nu_1 = \nu_1^*} \cdot \delta(\nu_1 - \nu_1^*)$$

и

$$\tilde{K}_0 = \int_{|\tilde{\zeta}|=1} a_0(\xi, x, \tau(e, \tilde{\zeta}, v_1)) (1-v_1^2)^{\frac{n-3}{2}} \cdot [D_{v_1} p_1]^{-1} \left| \frac{d\omega_{\tilde{\zeta}}}{v_1 = v_1^*} \right. \quad (10)$$

Так как $p_1|_{s=0} \equiv v_1$, то $v_1^*|_{s=0} = 0$. Используя это замечание и условие b^0 имеем из (3), (10)

$$\tilde{K}(\xi, \xi, 0, e) = \tilde{K}_0(\xi, \xi, 0, e) = a_0(\xi) \omega_{n-2} \neq 0 \quad \forall \xi \in \bar{\Omega}$$

(ω_{n-2} - площадь единичной сферы S^{n-2}).
Итак, условие а) выполняется. Проверим условие аналитичности б). Из формул (6)-(7) видно, что функция $\tau = \tau(e, \tilde{\zeta}, v_1)$
R - аналитична при

$$|e| = 1, \quad |\tilde{\zeta}| = 1, \quad v_1 \in [-\mu, \mu], \quad \langle e, e_1 \rangle \geq 0.$$

Из теорем об аналитичности сложной функции и функции, заданной неявно, вытекает R - аналитичность функций p_1 и v_1^* (в соответствующих областях), а следовательно и ядра $\tilde{K}_0(x, \xi, s, e)$ по x, ξ, s, e при

$$x, \xi \in \bar{\Omega}, \quad |s| \leq d, \quad |e| = 1, \quad \langle e, e_1 \rangle \geq 0. \quad (11)$$

(Здесь мы использовали условия $I^0, 5^0$). Так как поворотом системы координат всегда можно добиться (локально), чтобы $\langle e, e_1 \rangle \geq 0$, то последнее условие в (11) можно отбросить. Ядро \tilde{K}_1 исследуется аналогично. Для окончания доказательства достаточно сослаться на теорему 2.

З а м е ч а н и е I. Техника доказательства аналитичности ядра K во многом похожа на технику, использованную Ионом при доказательстве аналитичности решений эллиптических

уравнений с аналитическими коэффициентами. (см. [5] гл. III).

З а м е ч а н и е 2. Теорема, аналогичная теореме I, справедлива и для задачи нахождения функции $u \in C(\Omega)$ через интегралы по кривым $\gamma(x, v)$ с весом a_0 :

$$\int_{\gamma(x, v)} a_0(\xi, x, v) u(\xi) ds = f(x, v), \quad x \in \Omega, \quad v \in S^{n-1}. \quad (I2)$$

Здесь $\gamma(x, v): s \rightarrow \xi(s, x, v)$ — кривая, проходящая через точку $x \in \Omega$ в направлении $v \in S^{n-1}$ (функция $\xi \in \mathbb{R}^n$ — аналитична по s, x, v), а вес a_0 удовлетворяет условиям $5^0 - 6^0$. Аналогом условий $3^0 - 4^0$ является следующее требование.

Для каждой фиксированной точки $x \in \Omega$ систему кривых $v \in S^{n-1}$, $v \in S^{n-1}$ можно принять за криволинейную систему координат в $\bar{\Omega}$.

Сведение задачи (I2) к интегральному уравнению со слабой особенностью имеется в [2].

П р и м е р. $\gamma(x, v)$ — семейство геодезических метрики, $ds = a(\xi) |d\xi|$, ($a \in A(\bar{\Omega})$) регулярное в $\bar{\Omega}$ (т.е. через любые две точки $y, z \in \bar{\Omega}$ проходит единственная геодезическая). В силу замечания 2 справедлива

Т е о р е м а 3. Пусть вес a_0 удовлетворяет условиям $5^0 - 6^0$, $\gamma(x, v)$ — регулярное в $\bar{\Omega}$ семейство геодезических метрик $ds = a(\xi) |d\xi|$, $a \in A(\bar{\Omega})$. Тогда решение уравнения (I2) единственно в пространстве $C_0(\Omega)$.

З а м е ч а н и е 3. Теоремы, аналогичные теоремам I-3, справедливы и при $n = 2$.

П р и л о ж е н и е теоремы 3. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 относительно функции $u(x, x^0, t)$ ($x^0 \in \mathbb{R}^3$) задачу Коши

$$a^2(x) u_{tt} = \Delta u + c(x)u + \delta(x - x^0, t), \quad (I3)$$

$$u|_{t=0} \equiv 0. \quad (I4)$$

Поставим следующую обратную задачу (см. [3], стр. 94): коэффициент $a \in C^2(\mathbb{R}^3)$ известен; точка x^0 пробегает $\partial\Omega$; решение задачи (I3)–(I4) известно на множестве точек x , $x^0 \in \partial\Omega$ в моменты времени, лежащие в окрестности $t = \tau(x^0, x)$, где $\tau(x^0, x)$ – время прихода возмущения из точки x^0 в x ; требуется найти коэффициент $c(x) \in C_0(\Omega)$.

Из теоремы 3 и результатов В.Г.Романова ([3] гл. II, § 4) следует

Т е о р е м а 4. Пусть $a \in A(\bar{\Omega})$ и семейство геодезических метрики $ds = a(x) |dx|$ регулярно в $\bar{\Omega}$. Тогда решение поставленной выше обратной задачи единственно.

В заключение сделаем еще два замечания.

З а м е ч а н и е 4. Теоремы 1 и 2 справедливы и в том случае, когда Ω произвольное открытое ограниченное множество. Если в условиях теоремы 2 предполагать, что $Ku \in A(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$ для некоторой функции

$u \in L_p(\Omega)$ $p \in [1, \infty]$, то можно доказать, что $u \in A(\Omega)$.

З а м е ч а н и е 5. За счет незначительного усиления условий теоремы 1 можно доказать аналитичность искомого решения $u \in C(\bar{\Omega})$ в замкнутой области $\bar{\Omega}$. Отсюда, используя, например, результаты работы [6], легко показать, что решение уравнения (2) единственно в пространстве $C(\bar{\Omega})$.

Л и т е р а т у р а .

1. Лаврентьев М.М., Бухгейм А.Л. Об одном классе операторных уравнений первого рода. – Функциональный анализ, 1973, вып.4, с. 44–53.
2. Бухгейм А.Л. Нормальная разрешимость некоторых специальных операторных уравнений первого рода (достаточные условия). – В сб.: Математические

проблемы геофизики, вып. 6, ч. I, Изд-во
ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975.

3. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск, Изд. "Наука", 1972, с. 161.
4. Kahane C. Analyticity of solutions of mildly singular integral equations.—Comm. Pure Math. vol. 18, 1965, pp. 593-626.
5. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. ИЛ, 1958, с. 151.
6. Аниконов Д.Е. О единственности решения обратных задач. — В об.: Математические проблемы геофизики. вып. I, Новосибирск, Изд. ВЦ СО АН СССР, 1969, с. 26-40.

В. В. Воронин

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКОЙ
ВОЛНЫ НА УПРУГОМ ТЕЛЕ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

В данной работе изучается дифракция акустической волны, распространяющейся в бесконечной однородной среде, на однородном упругом теле в двумерном случае. Применяемый метод потенциалов позволяет свести задачу нахождения волнового поля к решению системы одномерных сингулярных интегральных уравнений на границе тела. Преимущество этого метода по сравнению с разностными состоит в том, что одинаково просто вычисляется волновое поле в любой точке плоскости, не лежащей на границе тела. При этом приближенное поле автоматически удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению и ошибка зависит лишь от того, насколько точно выполняются условия согласования на границе раздела двух сред. До этого аналогичный метод был предложен в работе [1] для дифракции электромагнитных волн, хотя система интегральных уравнений имела там другой вид.

Γ^0 . Обозначения и постановка задачи. Пусть Γ - замкнутая плоская кривая без самопересечений из класса $C^{1,\alpha}$, т.е. в каждой точке $x \in \Gamma$ существует единичная внешняя нормаль $\vec{n}(x) \equiv (n_1(x), n_2(x))$, причем $|\vec{n}(x) - \vec{n}(y)| \leq \text{const} \cdot |x - y|^\alpha$. Обозначим внутреннюю и внешнюю области, ограниченные кривой Γ , через D и D_e . Единичный вектор, касательный к Γ в точке x и направленный против часовой стрелки, будем обозначать $\vec{t}(x) \equiv (t_1(x), t_2(x))$. \vec{t} и \vec{n} связаны соотношениями: $t_1 = -n_2$; $t_2 = n_1$.

Поле смещений при установившихся колебаниях в области D имеет вид $\text{Re} \{ \vec{u}(x) e^{-i\omega t} \}$, где $\vec{u}(x)$ - комплекснозначная вектор-функция с компонентами $u_1(x)$, $u_2(x)$. Если область D заполнена упругой средой с плотностью I и константами Ляме λ , μ , то $\vec{u}(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \omega^2 \vec{u} = 0. \quad (1)$$

Для дальнейшего введем обозначения $k_1 = \omega / \sqrt{\lambda + 2\mu}$, $k_2 = \omega / \sqrt{\mu}$.

В области D_e имеются исходная волна, смещения в которой есть $\text{Re} \{ \vec{u}_0(x) e^{-i\omega t} \}$, и дифрагированная волна со смещениями $\text{Re} \{ \vec{u}_e(x) e^{-i\omega t} \}$. Если область D_e заполнена жидкостью с плотностью ρ , и скоростью распространения волн c , то $\vec{u}_e = \text{grad } \Phi$, где звуковой потенциал $\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Phi + k_2^2 \Phi = 0 \quad (2)$$

и условию излучения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - ik_2 \Phi \right) \sqrt{r} = 0. \quad (3)$$

Здесь $k_3 = \omega/c$. Будем считать, что $\vec{u}_0(x) = \text{grad } \Phi_0(x)$.

Поле смещений в D порождает на линейном элементе кривой Γ с нормалью \vec{n} напряжение

$$T^{(n)} \vec{u} = 2\mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} + \lambda \vec{n} \cdot \text{div } \vec{u} + \mu \vec{t} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \quad (4)$$

Давление в акустической волне со звуковым потенциалом Φ есть $\rho \omega^2 \Phi$.

Зададим на границе раздела двух сред условия согласования:

- 1) совпадают нормальные компоненты смещения;
- 2) нормальная компонента напряжения изнутри равна давлению снаружи;
- 3) тангенциальная компонента напряжения равна нулю.

Тогда задача формулируется так:

И с х о д н а я з а д а ч а : найти заданную в D вектор-функцию $\vec{u}(x)$ и заданную в D_e функцию $\Phi(x)$, удовлетворяющие соответственно соотношениям (1) и (2)-(3), такие, что при $x \in \Gamma$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial n} (\Phi + \Phi_0) \\ T^{(n)} \vec{u} \cdot \vec{n} = \rho \omega^2 (\Phi + \Phi_0) \\ T^{(n)} \vec{u} \cdot \vec{t} = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

2⁰. Сведение к системе интегральных уравнений. Возьмем фундаментальные решения $\vec{r}^{(1)}(x, y)$, $\vec{r}^{(2)}(x, y)$ уравнения (1) (см. [2]):

$$\Gamma_j^{(i)}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} \left[\ln \frac{1}{r} \right] \cdot \frac{1}{\omega^2} [k_2 r H_1(k_2 r) - k_1 r H_1(k_1 r)] +$$

$$+ \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\lambda + 2\mu} H_0(k_1 r) - \frac{1}{\mu} H_0(k_2 r) \right] + \delta_{ij} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot H_0(k_2 r),$$

где $r = |x - y|$, $H_0(z)$ и $H_1(z)$ - функции Ханкеля I-го рода порядка 0 и I; δ_{ij} - символ Кронекера.

Физический смысл: $\vec{\Gamma}^{(i)}(x, y)$ есть вектор смещения в точке x , вызванного силой величиной 2π , приложенной в точке y и направленной вдоль i -ой координатной оси ($i = 1, 2$). $\vec{\Gamma}^{(i)}(x, y)$ как функция от x удовлетворяет уравнению (I).

Отметим, что $\vec{\Gamma}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) как функции от x удовлетворяют условиям излучения, которые в данном случае формулируются так (см. [2]):

пусть $\vec{\Gamma}^{(i)} = \vec{\Gamma}_p + \vec{\Gamma}_s$, где $\vec{\Gamma}_p = \text{grad } U$, $\vec{\Gamma}_s = \text{rot } \vec{V}$; $r = |x|$;

тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \vec{\Gamma}_p}{\partial r} - ik_1 \vec{\Gamma}_p \right) = o(1), \\ \sqrt{r} \left(\frac{\partial \vec{\Gamma}_s}{\partial r} - ik_2 \vec{\Gamma}_s \right) = o(1) \end{array} \right.$$

при $r \rightarrow \infty$ равномерно относительно направления при любой фиксированной точке y ,

Будем искать функцию $\vec{u}(x)$ в виде

$$\vec{h}(x) = \int_{\Gamma} [\mu_1(y) \vec{\Gamma}^{(1)}(x, y) + \mu_2(y) \vec{\Gamma}^{(2)}(x, y)] ds_y. \quad (6)$$

Фундаментальным решением уравнения (2), удовлетворяющим условию (3), является функция $H_0(k_3 r)$. Поэтому $\Phi(x)$ будем искать в виде

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} \mu_3(y) H_0(k_3 r) ds_y. \quad (7)$$

Такие функции удовлетворяют соотношениям (I)-(3). Осталось найти μ_1, μ_2, μ_3 , чтобы выполнялись условия согласования (5), которые принимают вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Gamma} [\mu_1(y) \vec{\Gamma}^{(1)}(x, y) \cdot \vec{h}(x) + \mu_2(y) \vec{\Gamma}^{(2)}(x, y) \cdot \vec{h}(x)] ds_y = \\ & = 2i \mu_3(x) + \int_{\Gamma} \mu_3(y) \frac{\partial}{\partial n_x} H_0(k_3 r) ds_y + \frac{\partial \Phi_0}{\partial n}(x), \quad (8.1) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Gamma} [\mu_1(y) T^{(n)} \vec{\Gamma}^{(1)}(x, y) n(x) + \mu_2(y) T^{(n)} \vec{\Gamma}^{(2)}(x, y) \cdot \vec{n}(x)] ds_y - \\ & - 2i [n_1(x) \mu_1(x) + n_2(x) \mu_2(x)] = \omega^2 \rho \int_{\Gamma} \mu_3(y) H_0(k_3 r) ds_y + \\ & + \omega^2 \rho \Phi_0(x), \quad (8.2) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Gamma} [\mu_1(y) T^{(n)} \vec{\Gamma}^{(1)}(x, y) \cdot \vec{t}(x) + \mu_2(y) T^{(n)} \vec{\Gamma}^{(2)}(x, y) \cdot \\ & \cdot \vec{t}(x)] ds_y + 2i [n_2(x) \mu_1(x) - n_1(x) \mu_2(x)] = 0. \quad (8.3) \end{aligned} \right.$$

Посмотрим внимательнее на эту систему.

Внеинтегральные члены, содержащие μ_1, μ_2, μ_3 , появляются при переходе к предельным значениям на границе.

Особенности функций $\Gamma_j^{(k)}$, N_0 и $\frac{\partial}{\partial n} N_0$ имеют порядок соответственно $\ln r$, $\ln r$ и $r^{\alpha-1}$, т.е. являются интегрируемыми.

Учитывая (4), можно записать:

$$\begin{aligned} T^{(n)} \vec{\Gamma}^{(i)} \cdot \vec{n} = & 2\mu_1 (n_1^2 \frac{\partial \Gamma_1^{(i)}}{\partial x_1} + n_2^2 \frac{\partial \Gamma_2^{(i)}}{\partial x_2}) + 2\mu_1 n_1 n_2 (\frac{\partial \Gamma_1^{(i)}}{\partial x_2} + \\ & + \frac{\partial \Gamma_2^{(i)}}{\partial x_1}) + \lambda (\frac{\partial \Gamma_1^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Gamma_2^{(i)}}{\partial x_2}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$T^{(n)} \vec{\Gamma}^{(i)} \cdot \vec{t} = 2\mu n_1 n_2 (\frac{\partial \Gamma_1^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Gamma_2^{(i)}}{\partial x_2}) + \mu (n_1^2 - n_2^2) (\frac{\partial \Gamma_1^{(i)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Gamma_2^{(i)}}{\partial x_1}).$$

Если обозначить $\rho_j = (x_j - y_j) / |x - y|$; $j1 = 3 - j$; $k1 = 3 - k$, то особенности здесь будут такие:

$$\frac{\partial \Gamma_j^{(j)}}{\partial x_j} : \frac{1}{r} \frac{1}{\pi \omega^2} \rho_j [k_1^2 (\rho_j^2 + \rho_{j1}^2) + k_2^2 (\rho_j^2 - \rho_{j1}^2)]$$

$$\frac{\partial \Gamma_j^{(j)}}{\partial x_{j1}} : \frac{1}{r} \frac{1}{\pi \omega^2} \rho_{j1} [k_1^2 (\rho_{j1}^2 - \rho_j^2) + k_2^2 (\rho_j^2 + \rho_{j1}^2)]$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j1}^{(j)}}{\partial x_k} : \frac{1}{r} \frac{1}{\pi \omega^2} \rho_{k1} (k_1^2 - k_2^2) (\rho_{k1}^2 - \rho_k^2).$$

($j, k = 1, 2$). Поэтому интегралы, стоящие в правых частях уравнений (8.2) и (8.3), нужно понимать в смысле главного зна-

чения. Если обозначать буквой F интегральные операторы со слабой особенностью в ядре, через S - сингулярные интегральные операторы, через a - различные комплекснозначные функции, то система (8.1)-(8.3) условно запишется в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} F\mu_1 + F\mu_2 = F\mu_3 + a\mu_3 + a \\ a\mu_1 + a\mu_2 + S\mu_1 + S\mu_2 = F\mu_3 + a \\ a\mu_1 + a\mu_2 + S\mu_1 + S\mu_2 = 0 \end{array} \right.$$

К системе такого вида применима теория систем сингулярных интегральных уравнений, изложенная, например, в [4].

3°. Индекс системы (8.1)-(8.3). Приведем общие факты.

Пусть Γ - контур в комплексной плоскости. Комплексную переменную обозначаем буквой t . $\vec{\mu}(t)$, $\vec{f}(t)$ - комплексные вектор-функции, определенные на Γ ; $A(t)$ и $B(t, t_0)$ - квадратные матрицы.

Если система сингулярных интегральных уравнений имеет вид

$$A(t_0) \vec{\mu}(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{B(t, t_0) \vec{\mu}(t)}{t - t_0} dt = \vec{f}(t_0), \quad (9)$$

то ее индексом называется целое число, равное приращению аргумента величины

$$\det [(A(t) - B(t, t))(A(t) + B(t, t))^{-1}]$$

вдоль контура Γ , деленному на 2π .

Л е м м а I. Индекс системы (8.1)-(8.3) равен нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Посмотрим, как приводится эта система к виду (9). Пусть контур Γ в комплексной плоскости параметризован по длине дуги: $t = t(\sigma)$. Сингулярный интеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{S(t, t_0)}{|t - t_0|} \varphi(t) d\sigma \quad (10)$$

имеет смысл, если $S_+(t_0) \equiv S_+(t(\sigma_0)) \equiv \lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0+0} S(t(\sigma), t(\sigma_0)) =$
 $= -\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0-0} S(t(\sigma), t(\sigma_0))$. Поскольку $|t - t_0| = (t - t_0) e^{-i \cdot \arg(t-t_0)}$
 и $d\sigma = |dt| = dt \cdot e^{-i \cdot \arg t}$, то если (10) переписать в виде (9), получим $B(t, t) = \pi i S_+(t)$. Остается заметить, что $(\rho_1)_+ = -n_2$; $(\rho_2)_+ = n_1$. Приведа систему (8.1)-(8.3) к виду (9), имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2i \\ -2in_1(x) & -2in_2(x) & 0 \\ 2in_2(x) & -2in_1(x) & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -n_2(x) & n_1(x) & 0 \\ -n_1(x) & -n_2(x) & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{a_1}{\lambda + a_1}$$

Поэтому $\det(A \pm B) = 8i[1 - \mu^2/(\lambda + a_1)^2]$, и приращение аргумента этой величины вдоль Γ равно нулю. Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что система (8.1)-(8.3) разрешима при любой правой части тогда и только тогда, когда однородная система имеет только тривиальное решение.

4°. Разрешимость системы (8.1)–(8.3) и ее эквивалентность исходной задаче. Нам известно следующее:

1) исходная задача имеет единственное решение. Доказательство этого факта повторяет рассуждения, приведенные в [2] и [3] для случая двух упругих сред;

2) если μ_1, μ_2, μ_3 – решение системы (8.1)–(8.3), то функции $\tilde{u}(x)$ и $\Phi(x)$, определяемые формулами (6) и (7), являются решением исходной задачи.

Следовательно, чтобы убедиться в единственности решения однородной системы, соответствующей (8.1)–(8.3), достаточно проверить, что если в формулах (6) и (7) равны нулю левые части, то $\mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3 \equiv 0$.

Л е м м а 2. Если для любого $x \in D$ функция $\tilde{u}(x)$, определяемая формулой (6), равна нулю, то $\mu_1 \equiv \mu_2 \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tilde{u}(x)$ определена той же формулой (6) и для $x \in D_e$. Поскольку интеграл со слабой особенностью непрерывен на Γ , $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in D_e} \tilde{u}(x) = 0$ при $x_0 \in \Gamma$. Кроме того, $\vec{\Gamma}^{(i)}(x, y)$, а поэтому и $\tilde{u}(x)$, удовлетворяют условиям излучения и являются решениями уравнения (I). В [2] и [3] показано, что тогда $\tilde{u}(x) = 0$ при $x \in D_e$. Там же приведены формулы Бетти, из которых получаем:

$$(\mu_1(x_0), \mu_2(x_0)) = \frac{1}{2\pi} \left[\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} T^{(n)} \tilde{u}(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_e}} T^{(n)} \tilde{u}(x) \right] = 0.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 3. Пусть задача

$$\begin{cases} \Delta \phi(x) + k_3^2 \phi(x) = 0 & (x \in D) \\ \phi(x) = 0 & (x \in \Gamma) \end{cases} \quad (\text{II})$$

имеет только тривиальное решение. Тогда, если $\Phi(x)$, определяемая по формуле (7), равна нулю при $x \in D_e$, то $\mu_3 \equiv 0$.

Доказательство. Пусть функция $\Phi(x)$ определяется тем же интегралом (7) и для $x \in D$. Поскольку $N_0(k_3, \Gamma)$ содержит лишь логарифмическую особенность, интеграл этот непрерывен на Γ . Значит, $\Phi(x) = 0$ при $x \in \Gamma$ и удовлетворяет уравнению (2) в области D , т.е. Φ есть решение задачи (II) и по условию леммы равна нулю в D .

Из формулы

$$\mu_3(x_0) = \frac{1}{4i} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \lim_{x \rightarrow D_e} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]$$

следует утверждение леммы.

Сформулируем результаты.

Теорема. Если $k_3^2 = \omega^2/c^2$ не является собственным числом оператора Лапласа в области D , то система (8.1)–(8.3) однозначно разрешима при любой $\Phi_0(x)$ относительно μ_1, μ_2, μ_3 ; при этом формулы (6) и (7) дают решение исходной задачи.

Л и т е р а т у р а

1. Дробница В.В., Цецохо В.А. Метод расчета плоского электромагнитного поля в среде со слоем переменной толщины. — В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. 2, Новосибирск, 1971, с. 251–284.
2. Купрадзе В.Л. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.-Л., 1950.
3. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М., 1963.
4. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

Е.С.Глушкова

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе рассмотрены три различные постановки задачи определения функции трех пространственных переменных, которая является коэффициентом в телеграфном уравнении. В качестве информации о решении обратных задач используется решение задачи Коши для этого уравнения в фиксированный момент времени. Выделены классы единственности рассматриваемых задач.

п. 1⁰. Рассмотрим в трехмерном пространстве $x = (x_1, x_2, x_3)$ дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = \Delta u + q(x)u + r(x, t) \quad (1)$$

и задачу Коши для него с начальными данными

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \quad (2)$$

По отношению к (I), (2) рассмотрим следующую обратную задачу: требуется определить коэффициент $q(x)$, если решение задачи (I), (2) известно в некоторый момент времени

$$u(x, T) = F(x). \quad (3)$$

Различные постановки обратных задач для уравнения (I) рассматривались в работах [1, 4]. Специфика данной задачи (I) - (3) состоит в том, что особым образом задается информация (3) о решении $u(x, t)$. Ниже мы докажем единственность решения обратной задачи (I)-(3) в некотором классе функций E .

О п р е д е л е н и е I. Пусть E - множество финитных функций $q(x)$ со свойствами:

1. носитель $q(x)$ содержится в конечном прямоугольном параллелепипеде D с основанием параллельным плоскости $x_3 = 0$;

2. $q(x) \in C^2$ в D и представима в виде

$$q(x) = \sum_{k=1}^{N_q} g_k(x_1, x_2) s_k(x_3), \quad \text{где } N_q - \text{натуральное число;}$$

3. существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|q\| = \max_{x \in D} |q(x)| \leq M \quad \text{для всех } q(x).$$

Имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а I. Пусть $\varphi(x) \in C^3(R^3)$, $\psi(x) \in C^2(R^3)$, $f(x, t) \in C^2(R^3 \times [0, T])$

и, кроме того, $|\varphi(x)| \geq \varepsilon > 0$. Тогда, если решение обратной задачи (I)-(3) существует на множестве E , то оно единственно.

Доказательство проводится методом от противного. Предположим, что имеются две функции $q_1, q_2 \in E$, которые являются решением задачи (I)-(3). Покажем, что $q_1 \equiv q_2$.

Обозначим за $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ решения задачи Коши (I)-(2) при $q = q_1$, $q = q_2$ соответственно.

При этом $u_1(x, T) = u_2(x, T) = F(x)$. Рассмотрим функцию

$$\tilde{u}(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t),$$

$$\tilde{q}(x) = q_1(x) - q_2(x).$$

Сразу же отметим, что $\tilde{q}(x) \in E$ в силу линейности множества E . Легко убедиться, что $\tilde{u}(x, t)$ и $\tilde{q}(x)$ удовлетворяют таким дифференциальным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{tt}(x, t) &= \Delta \tilde{u} + q_1(x) \tilde{u} + \tilde{q}(x) u_2 \\ \tilde{u}|_{t=0} &= 0, \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\tilde{u}(x, T) = 0. \quad (5)$$

Решение задачи (4) $\tilde{u}(x, t)$ представляется формулой

$$u(x, t) = \int_{|x-\xi| \leq t} \tilde{q}(\xi) \cdot \left\{ \int_0^{t-|x-\xi|} v(x, \xi, t-\tau) u_2(\xi, \tau) d\tau \right\} d\xi, \quad (6)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а функция Грина $v(x, \xi, t-\tau)$ является решением следующей задачи Коши:

$$v_{tt} = \Delta v + q_1(x)v + \delta(x-\xi, t-\tau)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0.$$

Запишем $v(x, \xi, t - \tau)$ в виде

$$v(x, \xi, t - \tau) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - \tau - |x - \xi|)}{|x - \xi|} + R(x, \xi, t - \tau).$$

В работе [1] показано, что функция $R(x, \xi, t - \tau)$ является непрерывным решением уравнения типа Вольтерра

$$R(x, \xi, t - \tau) = \frac{1}{2\pi^2 [(t - \tau)^2 - |x - \xi|^2]} \cdot \int |\eta - \xi|^2 q_1(\eta) d\omega + \\ + A(q_1(x) \cdot R(x, \xi, t - \tau)), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3).$$

Здесь $S(x, t - \tau) = \{\eta \mid |\eta - x| + |\eta - \xi| = t - \tau\}$

поверхность эллипсоида вращения, $d\omega$ - элемент телесного угла с центром в точке ξ , а линейный оператор A имеет вид

$$A(q_1 \cdot R) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\tau}^t \frac{\alpha \zeta}{|x - \xi| \zeta^2 - |x - \xi|^2} \int |\eta - \xi|^3 q_1(\eta) R(\eta, \xi, t - \\ - \tau - |\eta - x|) d\omega.$$

Положим в формуле (6) $t = T$ и воспользуемся условием (5). Отсюда приходим к задаче интегральной геометрии

$$0 = \int_{|x-\xi| \leq T} \tilde{q}(\xi) \cdot \rho(x, \xi, T) d\xi, \quad (7)$$

где

$$\rho(x, \xi, t) = \int_0^{t-|x-\xi|} v(x, \xi, t-\tau) u_2(\xi, \tau) d\tau. \quad (8)$$

Для доказательства единственности решения уравнения (7) на множестве E воспользуемся теоремой из работы [2]. Проверим выполнение условий этой теоремы в нашем случае. С этой целью рассечем параллелепипед D плоскостями параллельными основанию на некоторое число новых параллелепипедов D_1, \dots, D_k , высота каждого из которых меньше либо равна $T - a$, где $0 < a < T$ фиксированное число. Рассмотрим равенство (7) только для тех точек $x \in D_1$ трехмерного пространства, для которых $\inf_{\xi \in D_1} |x - \xi| \geq a$. Тогда в (7) интегрирование идет по семейству областей, поверхность каждой из которых является частью полусферы лежащей в D_1 с центром в точке $x \in D_1$ и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к поверхностям в теореме единственности задач интегральной геометрии на множестве E .

Теперь проверим условия на весовую функцию $\rho(x, \xi, T)$. Она должна быть непрерывной и ограниченной вместе с производными $\partial \rho / \partial x_i$, $\partial \rho / \partial \xi_i$ ($i = 1, 2, 3$), а при $|x - \xi| = T$ знакопостоянной. Используя вид функции $v(x, \xi, t - \tau)$ представим $\rho(x, \xi, T)$ следующим образом:

$$\rho(x, \xi, T) = \frac{1}{4\pi} \frac{u_2(\xi, T - |x - \xi|)}{|x - \xi|} + \int_0^{T - |x - \xi|} u_2(\xi, \tau) R(x, \xi, T - \tau) d\tau \quad (9)$$

Отсюда получаем, что при $|x - \xi| = T$

$$|\rho(x, \xi, T)| = \frac{1}{4\pi} \frac{|u_2(\xi, 0)|}{T} = \frac{1}{4\pi} \frac{|\varphi(\xi)|}{T} > 0,$$

так как по предположению $|\varphi| \geq \epsilon > 0$. Убедимся в непрерывности и ограниченности $\rho(x, \xi, T)$ и $\partial\rho/\partial x_i$, $\partial\rho/\partial \xi_j$, ($i = 1, 2, 3$), $\xi \in D_1$. В работе [7] даны оценки для частных производных $\partial R/\partial x_j$, $\partial R/\partial \xi_j$, $\partial R/\partial \tau$

$$\left| \frac{\partial R(x, \xi, T - \tau)}{\partial x_j} \right| \leq c_{1j} |x - \xi|^{-1} + c_{2j} \cdot [(T - \tau)^2 - |x - \xi|^2]^{-1/2}$$

$$\left| \frac{\partial R(x, \xi, T - \tau)}{\partial \xi_j} \right| \leq c_{3j} \cdot |x - \xi|^{-1} + c_{4j} \cdot [(T - \tau)^2 - |x - \xi|^2]^{-1/2} \quad (10)$$

$$\left| \frac{\partial R(x, \xi, T - \tau)}{\partial \tau} \right| \leq c_{5j} \cdot [(T - \tau)^2 - |x - \xi|^2]^{-1/2}.$$

в области $P(T_0) = \{x, \xi, \tau: -\infty < x_1, x_2 < +\infty, |x_3| \leq T_0, 0 \leq \tau \leq T - |x - \xi|\}$. Здесь T_0, c_{ij} — конечные положительные числа ($i = 1, 2, \dots, 5$). Там же доказана непрерывность $\partial R / \partial x_j, \partial R / \partial \xi_j$ всюду в $P(T_0)$ за исключением поверхности $T - \tau = |x - \xi|$. Условий гладкости, наложенных на функции φ, ψ, f и q , достаточно, согласно [3], для существования непрерывно-дифференцируемого решения $u_2(\xi, \tau)$ задачи (I)-(2) при $q = q_2$. Очевидно, что функция $u_2(\xi, \tau)$ вместе со своими частными производными $\partial u_2 / \partial \tau, \partial u_2 / \partial \xi_i$ ($i = 1, 2, 3$) ограничена в области $D_1 \times [0, T]$. Из свойств функций $R(x, \xi, T - \tau), u_2(\xi, \tau)$ и формулы (9) следует непрерывность и ограниченность ρ и $\partial \rho / \partial x_i, \partial \rho / \partial \xi_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Таким образом, все условия теоремы единственности для задач интегральной геометрии на множестве E выполнены и в параллелепипеде $D_1, \tilde{q} \equiv 0$. Теперь рассмотрим задачу (7) в D_2, D_3 и т.д. D_k и, повторяя все предыдущие рассуждения, получим, что $\tilde{q}(x) \equiv 0$ в D .

З а м е ч а н и е I. Используя результаты работ [5], [6] отметим еще два класса функций $q(x)$, в которых есть единственность решения обратной задачи (I)-(3).

Введем оператор A_t по формуле

$$A_t q = \int_{|x-\xi| \leq t} q(\xi) \cdot \rho(x, \xi, t) d\xi.$$

Рассмотрим множество L функций $q(x)$ отличных от нуля лишь в области $\Pi = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \leq x_3 \leq K, T \leq K < +\infty\}$, где они положительны и аналитичны, и множество P положительных функций $q(x)$, заданных во всем R^3 и являющихся полиномами степени k_q по каждой из переменных x_1, x_2, x_3 . Будем считать, что функции $\varphi(x), \psi(x) > 0$ во всем R^3 , а $f(x, t) > 0$ в $R^3 \times [0, T]$. Тогда

$\rho(x, \xi, t) > 0$ и оператор A_t знакопостоянен на элементах множеств L и P в смысле определения работы [5]. Отсюда получаем два следствия.

С л е д с т в и е 1. Пусть $q_1, q_2 \in L$. В силу линейности множества L $\tilde{q} \in L$ и по соответствующей теореме [5] имеем, что из равенства $A_T \tilde{q} = 0$ следует $\tilde{q} \equiv 0$ в области Π , т.е. L есть множество единственности решения обратной задачи (I)-(3).

С л е д с т в и е 2. Если теперь $q_1, q_2 \in P$, тогда $\tilde{q} \in P$ и по теореме из [6] получаем $\tilde{q} \equiv 0$ во всем R^3 , что и означает единственность решения обратной задачи (I)-(3) на множестве P .

П. 2⁰. В этом пункте рассмотрим следующую обратную задачу для (I), (2): определить коэффициент $q(x)$ по информации вида

$$\frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = F(x). \quad (3')$$

Здесь T - фиксированный момент времени. Исследование этой задачи удалось провести опираясь на результаты работы [4]. Докажем единственность решения обратной задачи (I)-(3') в классе функций $q(x)$, который определим ниже.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\Omega \subset R^3$ - область с гладкой границей и конечным диаметром $d(\Omega)$. Обозначим за B множество функций $q(x)$ таких, что:

1. носитель $q(x)$ лежит в Ω ;
2. $q(x) \in C^4(\Omega)$;

3. существует константа $M > 0$, которая ограничивает сверху $\|q\|_{C^4(\Omega)}$, т.е.

$$\sum_{\alpha=0}^4 \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial^\alpha q(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \right| \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Будем считать, что начальные данные $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и правая часть $f(x, t)$ удовлетворяют таким условиям гладкости:

$$\varphi \in C^4(R^3), f \in C^4(R^3 \times [0, T]), \psi \in C^5(R^3) \quad (II)$$

и пусть $|\varphi| \geq \varepsilon > 0$. При этих предположениях имеет место теорема:

Т е о р е м а 2. При достаточно малом $d(\Omega)$ решение обратной задачи (I)-(3') единственно в классе функций V .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторяя рассуждения теоремы I, приходим к формуле (6). Сразу же отметим, что условие (5) в нашем случае принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{u}(x, T)}{\partial t} = 0. \quad (5')$$

Продифференцируем соотношение (6) по переменной t . Используя (5') приходим к новой задаче интегральной геометрии

$$0 = \int_{|x-\xi|=T} \tilde{q}(\xi) \rho(x, \xi, T) d\sigma + \int_{|x-\xi|\leq T} \tilde{q}(\xi) \frac{\partial \rho(x, \xi, T)}{\partial t} d\xi,$$

где функция $\rho(x, \xi, t)$ задается формулой (8). В теореме I было установлено, что при $|x-\xi|=T$ $|\rho(x, \xi, T)| \geq \varepsilon > 0$,

поэтому полученное выше уравнение можно записать в виде

$$0 = \int \tilde{q}(\xi) \delta(P) d\xi + \int_{|x-\xi| \leq T} \tilde{q}(\xi) \cdot \tilde{\rho}(x, \xi, T) d\xi. \quad (I2)$$

Здесь $\delta(P)$ - обобщенная функция Дирака сосредоточенная на поверхности

$$P(x, \xi, T) = \frac{|x - \xi|^2 - T^2}{\rho(x, \xi, T)} = 0,$$

$$а \quad \tilde{\rho}(x, \xi, T) = \frac{\partial \rho(x, \xi, T)}{\partial t}.$$

Пусть $S = \{x \in R^3 | \inf_{\xi \in \Omega} |x - \xi| \geq d_0, 0 < d_0 < T\}$.

В работе [4] доказано, что уравнение (I2) имеет в некоторой малой области единственное решение, если весовая функция $\tilde{\rho}(x, \xi, T)$ удовлетворяет следующим условиям:

I. $\tilde{\rho}(x, \xi, T)$ непрерывна вместе с $\partial^2 \tilde{\rho} / \partial x_i \partial x_j$, $(i, j = 1, 2, 3)$ в области

$$K(T) = \{x \in S, \xi \in \Omega | |x - \xi| < T\};$$

$$2. \frac{\partial \tilde{\rho}(x, \xi, T)}{\partial x_i} = v_i(T^2 - |x - \xi|^2)^{-1/2} + w_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (I3)$$

где функции $v_i(x, \xi, T)$ и $w_i(x, \xi, T)$ непрерывны вместе с $\partial v_i / \partial x_j$, $\partial w_i / \partial x_j$ в $S \times \Omega$, $(j = 1, 2, 3)$;

$$3. \sqrt{\sum_{j=1}^3 (\partial v_i / \partial x_j)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^3 (\partial w_i / \partial x_j)^2} \leq c_1 (T^2 - |x - \xi|^2)^{-1/2},$$

c_i ($i = 1, 2, 3$) - некоторые положительные константы. Проверим выполнение этих условий в нашем случае. Дифференцируя (8) по t и полагая $t = T$, получаем

$$\tilde{\rho}(x, \xi, T) = \frac{1}{4\pi} \cdot |x - \xi|^{-1} \frac{\partial u_2(\xi, T - |x - \xi|)}{\partial t} + u_2(\xi, T - |x - \xi|) \quad (I4)$$

$$+ R(x, \xi, |x - \xi|) + \int_0^{T - |x - \xi|} R_t(x, \xi, T - \tau) u_2(\xi, T - |x - \xi|) d\tau.$$

Непрерывность резольвенты $R(x, \xi, T)$ была отмечена в п. I⁰. Для производных $\partial R / \partial x_i$, $\partial R / \partial t$, как установлено в [4], справедливо представление типа (I3), и соответствующие функции v_i , w_i удовлетворяют всем требуемым условиям. Также в [4] показано, что $R(x, \xi, T) \in C^2(K(T))$.

Из этих замечаний и формулы (I4) ясно, что для $\tilde{\rho}(x, \xi, T)$ имеет место представление (I3). Для непрерывности $\partial^2 \tilde{\rho} / \partial x_i \partial x_j$ в $K(T)$, как видно из (I4), достаточно непрерывности

$\partial^3 u_2 / \partial t^3$, которую, согласно работе [3], гарантируют условия (II). Таким образом, в области Ω достаточно малого диаметра $d(\Omega)$ уравнение (I2) имеет единственное решение, т.е. $\tilde{q} \equiv 0$, что и требовалось доказать.

П. 3⁰. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} = \Delta u + q(x)u_t + f(x, t) \quad (I5)$$

с начальными данными (2). Поставим обратную задачу для (I'), (2): требуется определить коэффициент $q(x)$ по информации (3). Введем класс функций $E = E \cap C^5(D)$. Множество функций E и параллелепипед D те же, что и в п. I⁰. Относительно функций φ , ψ , f предположим: $f(x, t) \in C^3(R^3 \times [0, T])$, $\varphi(x) \in C^4(R^3)$, $\psi(x) \in C^3(R^3)$ и $|\varphi(x)| \geq \epsilon > 0$.

Применяя результаты работ [1, 3] и [7] докажем следующую теорему:

Т е о р е м а 3. Если решение обратной задачи (I')-(3) существует на множестве E , то оно единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы во многом аналогично доказательству теоремы I. Мы остановимся здесь только на отдельных моментах. Сохраняя обозначения п. I⁰, получаем для $\tilde{u}(x, t)$ и $\tilde{q}(x)$ дифференциальные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{tt} &= \Delta \tilde{u} + q_1(x) \tilde{u}_t + \tilde{q} u_{2t} \\ \tilde{u}|_{t=0} &= 0, \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

и условие (5). Соответствующая (4') функция Грина $v(x, \xi, t-\tau)$ есть решение следующей задачи Коши:

$$v_{tt} = \Delta v + q_1(x) v_t + \delta(x-\xi, t-\tau),$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0.$$

При помощи функции Грина решение (4') $\tilde{u}(x, t)$ можно представить формулой

$$\tilde{u}(x, t) = \int_{|x-\xi| \leq t} \tilde{q}(\xi) \cdot \left\{ \int_0^{t-|x-\xi|} v(x, \xi, t-\tau) u_{2t}(\xi, \tau) d\tau \right\} d\xi. \quad (15)$$

Обозначим интеграл в фигурных скобках за $\rho_1(x, \xi, t)$.
 Теперь запишем (15) при $t = T$ и, используя (5), получаем уравнение

$$0 = \int_{|x-\xi| \leq T} \tilde{q}(\xi) \rho_1(x, \xi, T) d\xi, \quad (16)$$

Способом, описанным в теореме I, разобьем параллелепипед D на некоторое число параллелепипедов D_1, \dots, D_k . Будем рассматривать (16) только для тех точек $x \in D_1$, для которых $\inf_{\xi \in D_1} |x - \xi| \geq d$, $0 < d < T$.

Проверим условия на весовую функцию $\rho_1(x, \xi, T)$ необходимые для единственности решения задачи интегральной геометрии на множестве E , которые указаны в теореме I. Для этого отметим некоторые свойства функции $v(x, \xi, t - \tau)$. Представим ее в виде

$$v(x, \xi, t - \tau) = \frac{1}{4\pi} \sigma(\xi, x) \cdot \delta(t - \tau - |x - \xi|) + R_0(x, \xi, t - \tau),$$

$$\text{где } \sigma(\xi, x) = |x - \xi|^{-1} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} |x - \xi| \cdot \int_0^1 q_1(x + s(\xi - x)) ds\right].$$

В работе [7] показано, что функция $R_0(x, \xi, T - \tau)$ является непрерывной в области $P(T_0)$, а также обладает частными производными $\partial R_0 / \partial t$, $\partial R_0 / \partial x_i$, $\partial R_0 / \partial \xi_i$ ($i = 1, 2, 3$) непрерывными всюду в $P(T_0)$ за исключением поверхности $T - \tau = |x - \xi|$. Для них имеют место оценки (10). Используя представление функции $v(x, \xi, T - \tau)$, можно записать $\rho_1(x, \xi, T)$ следующим образом:

$$\rho_1(x, \xi, T) = \frac{1}{4\pi} \sigma(\xi, x) u_{2_t}(\xi, T - |x - \xi|) + \int_0^T R_0(x, \xi, T - \tau) u_{2_t}(\xi, \tau) d\tau.$$

При $|x - \xi| = T$ получаем

$$|\rho_1(x, \xi, T)| = (4\pi T)^{-1} \exp\left[-\frac{T}{2} \int_0^1 q_1(x+s(\xi-x)) ds\right] \cdot |\phi(\xi)| > 0,$$

так как по предположению $|\phi| \geq \varepsilon > 0$.

Существование непрерывных вторых частных производных функции $u_2(\xi, t)$ обеспечивает нужную гладкость веса $\rho_1(x, \xi, T)$.

Ограниченность ρ_1 , $\partial \rho_1 / \partial x_i$, $\partial \rho_1 / \partial \xi_i$ очевидна, так как все эти функции непрерывны, а область D_1 конечна. Итак, $\tilde{q} \equiv 0$ в D_1 и аналогичным образом в D_2 и т.д. D_k , т.е. и во всем D .

З а м е ч а н и е 2. Если ввести следующим образом оператор $A_t q$:

$$A_t q = \int_{|x-\xi| \leq t} q(\xi) \rho_1(x, \xi, t) d\xi, \quad \text{то множества } L$$

и P , рассмотренные в замечание I, также будут классами единственности решения обратной задачи $(I^*)-(3)$ при условии положительности функций $\phi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$.

Л и т е р а т у р а .

1. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Изд. "Наука", Новосибирск, 1972.
2. Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Спецкурс для студентов НГУ, НГУ, 1973.
3. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. СО АН СССР, 1962.
4. Бухгейм А.Л. Теоремы единственности и устойчивости решения некоторых операторных уравнений первого рода. Кандидатская диссертация, Новосибирск, 1974.

5. Аниконов Ю.Е. О геометрических методах исследования обратных задач I. Сб.: Математические проблемы геофизики, вып.П, Новосибирск, 1971.
6. Аниконов Ю.Е. Теорема единственности для операторного уравнения. Сб.: Математические проблемы геофизики, вып. П, Новосибирск, 1971.
7. Яхно В.Г. Теорема единственности одной обратной задачи для уравнения гиперболического типа. Дифф. уравнения, в публикации.

С. Елубаев, О. Ш. Турсинбеков

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим гиперболическое уравнение третьего порядка

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + b \frac{\partial u}{\partial x_3} + cu \quad (I)$$

с данными на характеристиках

$$u(x, \lambda) \Big|_{x_1=0} = g(x_2 - \lambda_2)g(x_3 - \lambda_3), \quad u(x, \lambda) \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (2)$$

и пусть

$$u(x, \lambda) \Big|_{\substack{x_2=h_2 \\ x_3=h_3}} = \varphi(x_1, \lambda) \quad (0 < x_1 < h_1), \quad (3)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ - трехмерный вектор; $u(x, \lambda)$ - семейство решений уравнения (I), зависящих от вектора $\lambda = (\lambda_2, \lambda_3)$ ($0 \leq \lambda_i \leq h_i$; $i = 2, 3$); $a = a(x)$, $b = b(x)$ и $c = c(x)$ - коэффициенты уравнения (I), $g(x_i - \lambda_i)$ ($i = 2, 3$) - функции Хевисайда; $\varphi(x_1, \lambda)$ - известная функция в параллелепипеде $Q[0, h_1; 0, h_2; 0, h_3]$; h_i ($i = 1, 2, 3$) - положительные числа.

Пусть для коэффициентов уравнения (I) в замкнутом параллелепипеде Q выполняются следующие условия:

A) $a(x)$, $b(x)$ и $\frac{\partial b(x)}{\partial x_3}$ - известные непрерывные функции, $c(x)$ - неизвестная непрерывная функция в Q .

B) $(\|a(x)\|, \|b(x)\|, \|\frac{\partial b(x)}{\partial x_3}\|) \leq \|c(x)\|$,

B) $\max |c(x) - c_0(x)| \leq M$,

$$(0 \leq x_i \leq h_i; i = 1, 2, 3),$$

где $c_0(x)$ - известная непрерывная функция в \bar{Q} , которая определенным образом выражается через смешанную производную третьего порядка от функции $\varphi(x)$ взятую последовательно по x_1 , x_2 , x_3 и производную первого порядка функции $b(x)$ по x_3 , а M - некоторое положительное число.

Множество непрерывных функции $c(x)$, удовлетворяющих условию (B) , является шаром радиуса M с центром в точке $c_0(x)$. Обозначим его через T .

Данная работа посвящена однозначному восстановлению коэффициента $c(x)$ уравнения (I) в шаре T пространства Банаха S и является обобщением работы [I] для гиперболического уравнения третьего порядка.

Т е о р е м а . Если $h_1 \cdot h_2 \leq \tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2$, $h_3 \leq \tilde{h}_3$ ($\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$ - некоторые положительные числа) и выполняются условия (А) - (В), то по заданным функциям $a(x)$, $b(x)$, $\phi(x)$ в параллелепипеде Q коэффициент $c(x)$ уравнения (I) восстанавливается однозначно в шаре T пространства Банаха S .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Семейство решений уравнения (I), удовлетворяющих данным (2), эквивалентно семейству решений следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$u(x, \lambda) = f(\tilde{x}, \lambda) + \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} [a(\xi) \frac{\partial^2 u(\xi, \lambda)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + b(\xi) \frac{\partial u(\xi, \lambda)}{\partial \xi_3} + c(\xi) u(\xi, \lambda)] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (4)$$

где для сокращения записи введены обозначения $f(\tilde{x}, \lambda) = g(x_2 - \lambda_2)g(x_3 - \lambda_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Из уравнения (4), методом последовательных приближений, получим:

$$u(x, \lambda) = f(\tilde{x}, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} P_n(x, \tau) [b(\tau) \frac{\partial f(\tilde{\tau}, \lambda)}{\partial \tau_3} + c(\tau) f(\tilde{\tau}, \lambda)] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \quad (5)$$

где

$$P_n(x, \tau) = \int_{\tau_3}^x P_{n-1}(\tau_1, \tau_2, \xi_3, \tau) a(\tau_1, \tau_2, \xi_3) d\xi_3 + \int_{\tau_2}^{x_2} \int_{\tau_1}^{x_1} P_{n-1}(\xi_1, \xi_2, \tau_3, \tau) b(\xi_1, \xi_2, \tau_3) d\xi_1 d\xi_2 + \int_{\tau_3}^{x_3} \int_{\tau_2}^{x_2} \int_{\tau_1}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 P_{n-1}(\xi, \tau)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \times a(\xi) + \frac{\partial P_{n-1}(\xi, \tau)}{\partial \xi_3} b(\xi) + P_{n-1}(\xi, \tau) c(\xi) \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (6)$$

$$P_1 = 1, \quad \tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3), \quad f(\tilde{\tau}, \lambda) = g(\tau_2 - \lambda_2)g(\tau_3 - \lambda_3).$$

Из (5), в силу условия (3) и свойства функции Хевисайда, получим следующее уравнение:

$$\varphi(x_1, \lambda) = f(\tilde{x}_1, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{h_2} \int_0^{x_1} P_n(\tilde{x}_1, \tau_1, \tau_2, \lambda_3) b(\tau_1, \tau_2, \lambda_3) g(\tau_2 -$$

$$-\lambda_2) d\tau_1 d\tau_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{h_3} \int_0^{h_2} \int_0^{h_1} P_n(\tilde{x}_1, \tau) c(\tau) g(\tau_2 - \lambda_2) g(\tau_3 - \lambda_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3,$$

здесь кроме прежних обозначений введено $\tilde{x}_1 = (x_1, h_2, h_3)$.

Покажем теперь, что функциональный ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n(\tilde{x}_1, \tau) \quad (8)$$

сходится абсолютно и равномерно в \bar{Q} .

Из условия (B) следует, что

$$\max |c(x)| \leq \|c_0(x)\| + M = K \quad (9)$$

$$(0 \leq x_i \leq h_i; \quad i = 1, 2, 3)$$

Из условия (B), в силу (9) в \bar{Q} будет выполняться следующее неравенство:

$$(\|a(x)\|, \|b(x)\|, \|\frac{\partial b(x)}{\partial x^3}\|) \leq K \quad (10)$$

$$(0 \leq x_i \leq h_i; \quad i = 1, 2, 3).$$

Из соотношения (6) при $x_1 = h_1$ ($i = 2, 3$) в силу условий (9) и (10), получим следующие оценки для $P_n(\tilde{x}_1, \tau)$ в \bar{Q} :

$$|P_n(\tilde{x}_1, \tau)| \leq K^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{m=j}^{n-1} C_{n-1}^j C_{n-j-1}^{n-m-1} \frac{(|x_1 - \tau_1| (h_2 - \tau_2))^{n-j-1}}{[(n-j-1)!]^2} \times \frac{(h_3 - \tau_3)^m}{m!}, \quad (II)$$

$$(0 \leq x_1 \leq h_1; i=1, 2, 3; n=2, 3, \dots),$$

где C_{n-1}^j , C_{n-j-1}^{n-m-1} — число сочетаний из $n-1$, $n-j-1$ элементов по j , $n-m-1$, а $C_{n-1}^0 = C_{n-j-1}^0 = 1$.

Следовательно, функциональный ряд (8) сходится абсолютно и равномерно в \bar{Q} . Отсюда и ограниченности функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и функции Хевисайда в параллелепипеде \bar{Q} , мы можем в уравнении (7) переставить суммы с интегралами. В результате, выделяя его линейную часть, получим следующее уравнение:

$$\varphi(x_1, \lambda) = f(\tilde{x}_1, \lambda) + \int_0^{h_2} \int_0^{h_1} [1 + R(\tilde{x}_1, \tau_1, \tau_2, \lambda_3)] b(\tau_1, \tau_2, \lambda_3) g(\tau_2 - \lambda_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^{h_3} \int_0^{h_2} \int_0^{h_1} [1 + R(\tilde{x}_1, \tau)] c(\tau) g(\tau_2 - \lambda_2) g(\tau_3 - \lambda_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \quad (I2)$$

$$- \lambda_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^{h_3} \int_0^{h_2} \int_0^{h_1} [1 + R(\tilde{x}_1, \tau)] c(\tau) g(\tau_2 - \lambda_2) g(\tau_3 - \lambda_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3,$$

где

$$R(\tilde{x}_1, \tau) = \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\tilde{x}_1, \tau), \quad R(\tilde{x}_1, \tau_1, \tau_2, \lambda_3) = \sum_{n=2}^{\infty} P_n(x_1, \tau_1, \tau_2, \lambda_3), \quad (13)$$

Покажем теперь дифференцируемость функции $R(\tilde{x}_1, \tau)$ по x_1 в \bar{Q} . Формально продифференцировав первого ряда в (13) по x_1 в \bar{Q} получим:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial P_n(\tilde{x}_1, \tau)}{\partial x_1} \quad (I4)$$

Дифференцируя соотношение (6) при $x_i = h_i$ ($i = 2, 3$) по x_1 , получим следующее явное выражение в \bar{Q} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n(\tilde{x}_1, \tau)}{\partial x_1} &= \int_{\tau_2}^{h_2} P_{n-1}(x_1, \xi_2, \tau_3, \tau) b(x_1, \xi_2, \tau_3) d\xi_2 + \\ &+ \int_{\tau_3}^{h_3} \int_{\tau_2}^{h_2} \left[\frac{\partial^2 P_{n-1}(x_1, \xi_2, \xi_3, \tau)}{\partial x_1 \partial \xi_2} \cdot a(x_1, \xi_2, \xi_3) + \frac{\partial P_{n-1}(x_1, \xi_2, \xi_3, \tau)}{\partial \xi_3} \right. \\ &\left. \times b(x_1, \xi_2, \xi_3) + P_{n-1}(x_1, \xi_2, \xi_3, \tau) c(x_1, \xi_2, \xi_3) \right] d\xi_2 d\xi_3. \end{aligned}$$

Из соотношения (I5), в силу условий (9), (I0) и оценок (II), получим следующие оценки для $\frac{\partial P_n(\tilde{x}_1, \tau)}{\partial x_1}$ в \bar{Q} :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial P_n(\tilde{x}_1, \tau)}{\partial x_1} \right| &\leq K^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{m=j}^{n-1} C_{n-1}^j C_{n-j-1}^{n-m-1} \frac{|x_1 - \tau_1|^{n-j-2}}{(n-j-2)!} \times \\ &\times \frac{(h_2 - \tau_2)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \frac{(h_3 - \tau_3)^m}{m!} \quad (I6) \end{aligned}$$

$$(0 \leq x_i \leq h_i; \quad i = 1, 2, 3; \quad n = 2, 3, \dots).$$

Из оценок (I6) следует, что функциональный ряд (I4) сходится абсолютно и равномерно в \bar{Q} . Поэтому сумма этого ряда будет равна $\frac{\partial R(\tilde{x}_1, \tau)}{\partial x_1}$, т.е.

$$\frac{\partial R(\tilde{x}_1, \tau)}{\partial x_1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial P_n(\tilde{x}_1, \tau)}{\partial x_1}. \quad (I7)$$

Из соотношения (I6), в силу условия (A), следует непрерывность функции $\frac{\partial P_n(\tilde{x}_1, \tau)}{\partial x_1}$ для любого фиксированного

n ($n = 2, 3, \dots$) в параллелепипеде \bar{Q} . Отсюда, в силу равномерной сходимости функционального ряда (I4) в \bar{Q} , следует непрерывность его суммы $\frac{\partial R(\tilde{x}_1, \tau)}{\partial x_1}$ в этом \bar{Q} .

Из дифференцируемости функции $R(\tilde{x}_1, \tau)$ по x_1 в \bar{Q} следует дифференцируемость функции $\varphi(x_1, \lambda)$ по x_1 в Q .

Так же как мы показали дифференцируемость $R(\tilde{x}_1, \tau)$ по x_1 в \bar{Q} можем показать дифференцируемость функции $R(\tilde{x}_1, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)$ по λ_3 в \bar{Q} .

Покажем теперь, что функция $\frac{\partial R(\tilde{x}_1, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1}$ дифференцируема по λ_3 в \bar{Q} . Формально продифференцировав ряд (I7) при $\tau_i = \lambda_i$ ($i = 2, 3$) по λ_3 в \bar{Q} получим:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^2 P_n(\tilde{x}_1, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1 \partial \lambda_3}. \quad (I8)$$

Дифференцируя соотношение (I5) при $\tau_i = \lambda_i$ ($i = 2, 3$) по λ_3 получим в \bar{Q} следующее явное выражение:

$$\frac{\partial^2 P_n(\tilde{x}_1, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1 \partial \lambda_3} = \frac{h_2}{\lambda_2} \int [P_{n-1}(x_1, \xi_2, \lambda_3, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3) \left(\frac{\partial b(x_1, \xi_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_3} - \right. \quad (I9)$$

$$\left. - c(x_1, \xi_2, \lambda_3) - \frac{\partial^2 P_{n-1}(x_1, \xi_2, \lambda_3, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1 \partial \xi_2} a(x_1, \xi_2, \lambda_3) \right] d\xi_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\lambda_3}^{h_3} \int_{\lambda_2}^{h_2} \left[\frac{\partial^3 P_{n-1}(x_1, \xi_2, \xi_3, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1 \partial \xi_2 \partial \xi_3} a(x_1, \xi_2, \xi_3) + \right. \\
& + \frac{\partial^2 P_{n-1}(x_1, \xi_2, \xi_3, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \xi_3 \partial \lambda_3} b(x_1, \xi_2, \xi_3) + \\
& \left. + \frac{\partial P_{n-1}(x_1, \xi_2, \xi_3, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_3} c(x_1, \xi_2, \xi_3) \right] d\xi_2 d\xi_3.
\end{aligned}$$

Из соотношения (19), в силу условий (9), (10) и оценок (II), (16), получим следующие оценки для членов функционального ряда (18) в \bar{Q} :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^2 P_n(\tilde{x}_1, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1 \partial \lambda_3} \right| \leq 2K(h_2 - \lambda_2), \\
& \left| \frac{\partial^2 P_n(\tilde{x}_1, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1 \partial \lambda_3} \right| \leq (3K)^{n-1} \left[\frac{|x_1 - \tau_1|^{n-2}}{(n-2)!} \frac{(h_2 - \lambda_2)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(h_3 - \lambda_3)^m}{m!} \right] + \\
& \hspace{20em} (20)
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-3} \sum_{m=j}^{n-2} \frac{|x_1 - \tau_1|^{n-j-3}}{(n-j-3)!} \frac{(h_2 - \lambda_2)^{n-j-2}}{(n-j-2)!} \frac{(h_3 - \lambda_3)^m}{m!} \Big] (0 \leq x_1 \leq h_1),$$

$n=3, 4, \dots; i=1, 2, 3$

Следовательно, функциональный ряд (18) сходится абсолютно и равномерно в \bar{Q} . Поэтому его сумма будет равна

$$\frac{\partial R(\tilde{x}_1, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1} \quad \text{в } \bar{Q}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{\partial^2 R(\tilde{x}_1, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1 \partial \lambda_3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^2 P_n(\tilde{x}_1, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1 \partial \lambda_3}. \quad (21)$$

Непрерывность функции $\frac{\partial^2 R(\tilde{x}_1, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1 \partial \lambda_3}$ в \bar{Q} очевидна.

Из дифференцируемости функции $R(\tilde{x}_1, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\frac{\partial R(\tilde{x}_1, \tau_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_1}$ по λ_3 в \bar{Q} и в силу условия (A) следует дифференцируемость функции $\frac{\partial \varphi(x_1, \lambda)}{\partial x_1}$ последовательно по λ_2 и λ_3 в параллелепипеде Q .

Поэтому дифференцируя уравнения (I2) последовательно по x_1 , λ_2 и λ_3 в Q , в силу свойства функции Хевисайда (дельта-функции Дирака) и заменяя λ_i ($0 \leq \lambda_i \leq h_i$; $i = 2, 3$) соответственно на x_i ($0 \leq x_i \leq h_i$; $i = 2, 3$) получим:

$$[1 + R(\tilde{x}_1, x)]c(x) = \varphi(x) + \int_0^{x_1} F(\tilde{x}_1, \tilde{\tau}_1) d\tau_1, \quad (22)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{\partial^3 \varphi(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial [(1 + R(\tilde{x}_1, x))b(x)]}{\partial x_3},$$

$$F(\tilde{x}_1, \tau_1) = \frac{\partial [b(\tilde{\tau}_1) \frac{\partial R(\tilde{x}_1, \tilde{\tau}_1)}{\partial x_1}]}{\partial x_3} - \frac{\partial R(\tilde{x}_1, \tilde{\tau}_1)}{\partial x_1} c(\tilde{\tau}_1). \quad (22^*)$$

Здесь $\tilde{\tau}_1 = (\tau_1, x_2, x_3)$, а $R(\tilde{x}_1, x)$ выражается через известную функцию $a(x)$ и итерированные функции от этой функции.

Покажем теперь, что при достаточно малом $h_3 > 0$ функция $1 + R(\tilde{x}_1, x) \neq 0$. Действительно, из соотношения (6) при $x_i = \tau_i$ ($i = 2, 3$) и $\tau_i = x_i$ ($i = 2, 3$) в силу уравнения (I0) очевидна

$$|1 + R(\tilde{x}_1, x)| \geq 2e^{-Kh_3} \quad (0 \leq x_3 \leq h_3).$$

Отсюда следует

$$1 + R(\tilde{x}_1, x) \geq \frac{1}{2} \quad (\text{при } 0 \leq x_3 \leq h_3 \leq h_3^*), \quad (23)$$

$$\text{где } h_3^* = \frac{1}{K} \ln \frac{3}{2}.$$

Поэтому уравнение (22) можно записать в виде

$$c(x) - c_0(x) = Ac, \quad (24)$$

где

$$c_0(x) = \frac{1}{1+R(\tilde{x}_1, x)} \phi(x), \quad Ac = \frac{1}{1+R(\tilde{x}, x)} \int_0^{x_1} F(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1) dt_1. \quad (25)$$

A является нелинейным непрерывным оператором в шаре T , а $\phi(x)$ и $F(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1)$ определяются из соотношения (22^к).

Уравнение (24) является нелинейным интегральным уравнением относительно функции $c(x)$; к которому можно применить принцип сжатых отображений. Для этого рассмотрим два произвольных элемента $c(x)$ и $c^*(x)$ из шара T и пусть

$$\rho(c, c^*) = \max |c - c^*|, \quad (26)$$

$$(0 \leq x_1 \leq h_1; \quad i = 1, 2, 3).$$

Ясно, что для элементов $c(x)$ и $c^*(x)$ выполняются условия (9) и (10).

В силу условий (9), (10), соотношений (17), (21), (23),

(25), (22^ж), (26) и оценок (I6), (20) получим следующее неравенство в шаре T:

$$\rho(Ac, Ac^*) \leq \rho(c, c^*), \quad (27)$$

где

$$S = 2 \left[S_1 + \sum_{n=3}^{\infty} K^{n-1} (3^{n-1} (n-1) S_{n-1} + (2n-1) T_{n-1}) \right], \quad (I5)$$

$$S_1 = Kh_1 h_2 (4 + 3h_3), \quad T_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{m=j}^{n-1} C_{n-1}^j C_{n-j-1}^{n-m-1} \frac{(h_1 \cdot h_2)^{n-j-1}}{[(n-j-1)!]^2} \frac{h_3^m}{m!}, \quad (28)$$

$$S_{n-1} = \frac{(h_1 h_2)^{n-1}}{[(n-1)!]^2} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{h_3^m}{m!} + \sum_{j=0}^{n-3} \sum_{m=j}^{n-2} \frac{(h_1 \cdot h_2)^{n-j-2}}{[(n-j-2)!]^2} \frac{h_3^m}{m!},$$

$S = S(h_1, h_2)$ является монотонно возрастающей непрерывной функцией от $h_1 \cdot h_2$, которая при $h_1 h_2 = 0$ обращается в нуль. Отсюда следует, что существует такое $h_1^* h_2^* > 0$ для любого $h_1 \cdot h_2 \leq h_1^* h_2^*$

$$S(h_1 \cdot h_2) < 1. \quad (29)$$

Из соотношения (25) в силу условий (9), (I0), соотношений (22^ж), (I7), (2I), (23), (25) и оценок (I6), (20) получим следующее неравенство в шаре T:

$$\|Ac\| \leq \tilde{S}, \quad (30)$$

где

$$\tilde{S} = 2[\tilde{S}_1 + \sum_{n=3}^{\infty} K^n (3^{n-1} S_{n-1} + 2T_{n-1})], \quad \tilde{S}_1 = 2K^2 h_1 h_2 (2 + h_3),$$

а S_{n-1} и T_{n-1} определяются из (28).

Выбирая достаточно малые $h_1^* h_2^* > 0$, $h_3^* > 0$, при любых $h_1 h_2 \leq h_1^* h_2^*$, $h_3 \leq h_3^*$ можем получить, что

$$\tilde{S} \leq M. \quad (31)$$

Из неравенств (27), (30) при $\tilde{h}_1 \tilde{h}_2 = \min(h_1^*, h_2^*, h_1^* h_2^*)$ и $\tilde{h}_3 = \min(h_3^*, h_3^*)$ в силу (29), (31) следует, что A является нелинейным оператором сжатия в шаре T пространства Банаха C , который переводит элементы шара T в элементы того же шара. Тогда, согласно принципу сжатых отображений, из уравнения (24) единственным образом восстанавливается коэффициент $c(x)$ уравнения (I) в шаре T пространства Банаха C , что и требовалось доказать.

Аналогичным способом можно однозначно восстановить коэффициент $c(x)$ в гиперболическом уравнении третьего порядка

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = a \frac{\partial u}{\partial x_1} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + cu$$

с данными на характеристиках (2) и условию (3).

Л и т е р а т у р а .

- I. Елубаев С. Об одной обратной задаче для телеграфного уравнения. - ДАН СССР, т. 189, № 3, стр. 461-463, 1969.

В. Б. Кардаков

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ НЕГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу: определить функцию $u(t, x) = u(t, x_1, x_2, x_3)$ в области $R_{++}^4 = \{t, x \mid 0 < t, 0 < x_3, x' \in R^2\}$, если выполнены условия:

- (1) $u \in C^2(\bar{R}_{++}^4)$ (черта означает замыкание множества);
- (2) $u_{tt} - u_{x_1 x_2} - u_{x_2 x_2} - u_{x_3 x_3} = 0$, в R_{++}^4 ,
- (3) $u_{x_3}(t, x', 0) = 0$, $0 < t, x' \in R^2$,
- (4) $u = f(t, x')$ на множестве Σ_T , где

$$\Sigma_T \equiv \{t, x \mid 0 < t, |x'| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r, x_3 = 0\},$$

r - задано

- (5) носители $\varphi_0(x) \equiv u(0, x)$, $\varphi_1(x) \equiv u_t(0, x)$

лежат в множестве $\bar{Q} : |x| \leq a, |x_3| \geq \delta$, где $0 < \delta < a < +\infty$ заданные постоянные.

Задача (I)-(5) рассматривалась в [1], [2]. В [1] была установлена теорема единственности решения (I)-(5).

В данной работе получена оценка устойчивости для решения (I)-(5) по известной $f(t, x')$. Из результатов [2] следует, что данная оценка не может быть существенно улучшена. Хорошо известно, что для любого числа $0 < T$ для решения задачи (I)-(5) имеет место:

$$\|u\|_C \leq C_0(T)(\|\varphi_0\|_{C^1} + \|\varphi_1\|_C).$$

Ввиду этого замечания нам достаточно исследовать устойчивость определения функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ по известной на $\Sigma_T f(t, x')$.

2. Продолжим решение $u(t, x)$ четным образом по переменной x_3 на значения $x_3 < 0$. Условие (3) будет автоматически выполнено, а задача (I)-(5) сведется к эквивалентной, но уже рассматриваемой в $R_+^4 : 0 < t, x \in R^3$. Воспользовавшись (4) и формулой Кирхгофа для решения волнового уравнения получаем уравнение для определения $\varphi_i(x)$, ($i = 0, 1$)

$$f(t, x') = \frac{\partial}{\partial t} S_t(\varphi_0) + S_t(\varphi_1), \quad (6)$$

где $S_t(\varphi) \equiv \frac{1}{4\pi t} \int_{|x'-y|=t} \varphi(y) dS_y$.

Положим $x' = r\xi$, $|\xi| = 1$, $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2)$ и воспользуемся далее приемом, предложенным в [2] для получения уравнения вида:

$$F_i(\alpha, p\xi) = \int_R K_i(\alpha, p\xi, y) \varphi_i(y) dy, \quad (7)$$

$$(i = 0, 1),$$

где $F_i(\alpha, p\xi)$ — целая по $p = p_1 + ip_2$, известная при

$$|p_1| \leq r, \quad p_2 = 0.$$

Продолжив F_i с отрезка $[-r, r]$ на всю числовую прямую, мы приходим к частному случаю задачи (I)–(5), когда $r = \infty$, $\varphi_1 \equiv 0$ (соответственно $\varphi_0(x) \equiv 0$). Устойчивость этой частной задачи была ранее установлена Р.М.Гариповым и автором в [1].

3. Вкратце напомним получение (7).

Последовательное применение к обеим частям (6) операторов

$$A_1 u(t) \equiv \int_0^\infty e^{i\alpha t^2} u(t) dt,$$

$$A_2 u(t) \equiv \int_0^\infty e^{i\alpha t^2} \frac{\partial}{\partial t} u(t) dt, \quad \alpha > 0$$

дает нам соответствующую пару уравнений:

$$F(\alpha, p_1 \xi) \equiv A_1 f(t, p_1, \xi) = \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{R^3} \exp(i\alpha P^2(p_1, y)) \varphi_0(y) dy + \quad (8)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \exp(i\alpha P^2(p_1, y)) P^{-1}(p_1, y) \varphi_1(y) dy \equiv F_0(\alpha, p_1 \xi) + F_1(\alpha, p_1 \xi),$$

$$G(\alpha, p_1 \xi) \equiv A_2 f(t, p_1, \xi) = -\frac{\alpha}{2\pi i} \int_{R^3} \exp(i\alpha P^2(p_1, y)) P(p_1, y) \varphi_0(y) dy +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-\alpha)}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \exp(i\alpha P^2(p_1, y)) P^3(p_1, y) \varphi_0(y) dy + \\
& + \frac{\alpha}{2\pi i} \int \exp(i P^2(p_1, y)) \varphi_1(y) dy \equiv \\
& \equiv G_0(\alpha, p_1, \xi) + G_1(\alpha, p_1, \xi), \tag{9}
\end{aligned}$$

$$P^2(p_1, y) \equiv (p_1^2 - 2p_1(\xi \cdot y) + |y|^2),$$

где через $G_0(\alpha, p_1, \xi)$ мы обозначили сумму первых двух интегралов в правой части (9).

Положим

$$\Omega_1 \equiv \{p = p_1 + ip_2 \mid x \in \Omega, P(p, y) = 0\}.$$

Через $\Omega_{1\sigma}$ определим окрестность множества Ω_1 :

$$|p| \leq a + \sigma, \quad \delta - \sigma \leq |p_2|, \quad 0 < \sigma < \delta.$$

Круг радиуса R в комплексной плоскости обозначим через B_R . Тогда в силу определения $\Omega_{1\sigma}$ существует постоянная C_σ :

$$|P(p, y)| \geq c_\sigma \quad \text{для} \quad p \notin \Omega_{1\sigma}.$$

Введем в рассмотрение компактное множество Q :

$$\varphi_i(x) \in Q \Leftrightarrow \|\varphi_i\|_{C^e(R^3)} \leq M. \quad (I0)$$

φ_i ($i = 0, I$) удовлетворяют (5).

Из (8) и (9) следует, что на множестве $B_R \setminus \Omega_{1\sigma}$

$$\max_P \{ |F(\alpha, p, \xi)|, |G(\alpha, p, \xi)| \} \leq \alpha C_1 e^{\alpha R^2} \quad (II)$$

Здесь и далее C_i - вычислимые постоянные, зависящие от параметров задачи δ, a, r, σ и M .

Л е м м а I. Если $\max \{ |F(\alpha, p, \xi)|, |G(\alpha, p, \xi)| \} \leq \epsilon$ при $|p_1| \leq r, p_2 = 0$, то существуют постоянные C_2, θ_2 :

$$\max \{ |F_0(\alpha, p_1, \xi)|, |G_1(\alpha, p_1, \xi)| \} \leq C_2 e^{\alpha R_1} \alpha \epsilon^{\theta_2}, \quad (I2)$$

$$0 < \theta_2 < 1$$

для каждого $R_1 \leq R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о : Обозначим аналитическое продолжение F и G из произвольной точки $p_1 \in [-r, r]$ по пути Γ_1 опять в ту же точку, через \tilde{F}, \tilde{G} соответственно (см. рис. I).

Тогда см. 2

$$F_0(\alpha, p_1, \xi) = \frac{1}{2} \{ \tilde{F}(\alpha, p_1, \xi) + F(\alpha, p_1, \xi) \},$$

$$G_1(\alpha, p_1, \xi) = \frac{1}{2} \{ \tilde{G}(\alpha, p_1, \xi) + G(\alpha, p_1, \xi) \}.$$

Оценка (I2) получается из леммы Карлемана [3] следующим образом:

I) оценивается продолжением с $[-r, r]$ на $[-R_1, R_1]$,

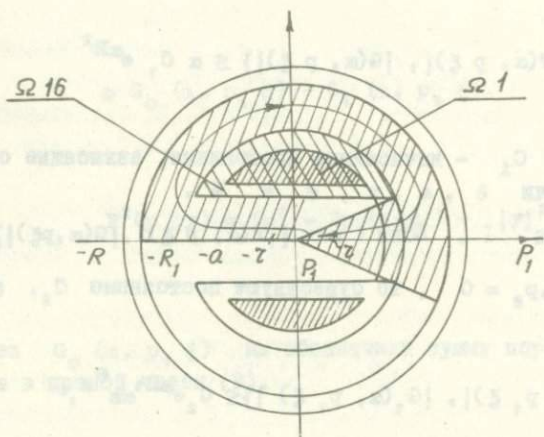


Рис. I

2) с помощью конформного отображения оценивается продолжение в подобласть кольца:

$$-\phi_0 \leq \arg p \leq \pi, a + \sigma \leq |p| \leq R_1, \phi_0 = \arctg \frac{2(\delta - \alpha)}{R_1 + 3(a + \sigma)} ;$$

3) затем оценивается продолжение с дуги:

$$|p| = \frac{R_1 + a + \sigma}{2}, |\arg p| \leq \phi_0 \quad \text{на отрезок } [-r, r].$$

Л е м м а 2 . На всей числовой прямой $p_2 = 0$ имеет место неравенство

$$|F_0(\alpha, p_1 \xi)| \leq \alpha C_3 e^{\alpha N^2 \varepsilon^{\theta_3}} + C_3 \alpha^{-5} N^{-6} . \quad (13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Выпишем выражение для $F_0(\alpha, p \xi)$;

(14)

$$F_0(\alpha, p \xi) = \frac{\alpha}{2\pi i R^3} \int \exp(i \alpha(p^2 - 2p \xi \cdot y + |y|^2)) \phi_0(y) dy.$$

Вспомяная, что на B_R

$$|F_0(\alpha, p \xi)| \leq \alpha C_1 e^{\alpha R^2}$$

на $[-r, r]$

$$|F_0(\alpha, p_1 \xi)| \leq \alpha C_2 e^{\alpha R_1^2 \varepsilon^{\theta_2}}, \quad (21)$$

мы, воспользовавшись снова леммой Карлемана, очевидным образом, получаем

$$|F_0(\alpha, p_1, \xi)| \leq \alpha C_3 e^{\alpha N^2} \varepsilon^{\theta_3};$$

$$\forall p \in B_N, \quad \forall N \leq R_1 \leq R.$$

Рассмотрим далее часть числовой оси $|p_1| \geq N, p_2 = 0$.

Если одна из компонент вектора ξ , $\xi_{\nu} \neq 0$ ($|\xi| = 1$ по условию) мы можем проинтегрировать по частям (14) по y_{ν}

(15)

$$F_0(\alpha, p_1, \xi) = \frac{-\alpha}{2\pi i} \int_{R^3} e^{i\alpha(p^2 - 2p\xi \cdot y + |y|^2)} \left\{ \frac{\varphi_0(y)}{2i \alpha (p\xi_{\nu} - y_{\nu}/|y|)} \right\} dy_{\nu}.$$

Внеинтегральные члены в (15) исчезают ввиду финитности $\varphi_0(x)$. Интегрируя по частям шесть раз мы убеждаемся в справедливости следующей оценки для $F_0(\alpha, p_1, \xi)$ при $|p_1| \geq N$:

$$|F_0(\alpha, p_1, \xi)| \leq C_3 \alpha^{-5} N^{-6}. \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует требуемое утверждение (13).

З а м е ч а н и е . Ясно, что аналогичная оценка имеет место и для $G_1(\alpha, p_1, \xi)$.

Л е м м а 3 . Для $\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} S_t(\varphi_0)$ имеет место:

(17)

$$\sup_{0 < t} \left| \frac{\partial^{k+1} S_t(\varphi_0)}{\partial t^{k+1}} \right| \leq C_4 N^{k+2} e^{N^2} \varepsilon^{\theta_4} + C_4 N^{-7}, \quad x' = p_1 \xi,$$

$$x' \in R^2, \quad x_3 = 0$$

$$0 < N, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Доказательство. $\frac{\partial}{\partial t} S_t(\varphi_0)$ - восстанавливается по $F_0(\alpha, p_1, \xi)$ как обратное косинус-преобразование Фурье [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} S_t(\varphi_0) = \frac{4t}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\alpha t^2) \operatorname{Re} F_0(\alpha, x') d\alpha. \quad (18)$$

Дифференцируя обе части (18) по t k -раз, получим

$$\left| \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} S_t(\varphi_0) \right| \leq C_4^1 \int_0^{\infty} \alpha^k |F_0(\alpha, p_1, \xi)| d\alpha. \quad (19)$$

В (19) использовано условие (5).

В силу леммы 2 имеем:

$$\int_0^{\infty} \alpha^k |F_0(\alpha, x')| d\alpha \leq \int_0^N \alpha^k |F_0(\alpha, x')| d\alpha + \quad (20)$$

$$+ \int_N^{\infty} \alpha^k |F_0(\alpha, x')| d\alpha \leq C_4 N^{k+2} e^{N^3 \varepsilon^4} + C_4 N^{-7}.$$

Из (19) и (20) следует утверждение леммы 3.

Очевидно, что воспользовавшись (9) для $G_1(\alpha, p_1, \xi)$ и повторив предыдущие рассуждения для функции $\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} S_t(\varphi_1)$, мы получаем для нее аналогичную оценку.

Сформулируем окончательный результат в виде теоремы.

Т е о р е м а. Пусть $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ принадлежат компакту Q и выполнены условия (I)-(5). Тогда имеет место следующая оценка:

$$\max \{ |\varphi_0(x)|, |\varphi_1(x)| \} \leq C |\log^{-7/3} \frac{1}{\|x\|^\theta}|, \quad 0 < \theta < 1, \quad (21)$$

где $\|f\| \equiv \sup_{t, x' \in \Sigma_T} \{|f_t(x', t)|, |f(t, x')|\}$.

Доказательство. Рассмотрим следующую норму:

$$\|f\|_{3, \gamma} \equiv \sup_{\substack{k=1, 2, 3 \\ x' \in R^2, 0 < t, x_3 = 0}} \left\{ (1+t)^{2\gamma} e^{2\gamma|t-x'|} \left(\left| \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} S_t(\varphi_0) \right| + \left| \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} S_t(\varphi_1) \right| \right) \right\}.$$

*) , где $p > 0$ - число

В виду условий (I)-(5) она эквивалентна норме, используемой в [I] (теорема 2). Минимизируя оценку (20) по N получаем:

$$\|f\|_3 \leq c |\log^{-7/3} \frac{1}{\|f\|_6}|. \quad (22)$$

Применение оценки теоремы 2 из [I] и результатов лемм (I)-(3) дает нам оценку (2I).

Л и т е р а т у р а .

1. Гарипов Р.М., Кардаков В.Б. Задача Коши для волнового уравнения с непространственным начальным многообразием. - ДАН СССР, 213, № 5, 1973, 1047-1050.
2. Гарипов Р.М. Негиперболическая граничная задача для волнового уравнения. - ДАН СССР, 1974, т. 219, № 4, стр. 777-780.
3. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа. - Изв. АН СССР, серия математическая, 20, 1956, 819-842.

В.Р. Кирейтов

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ВОЛНОВОЙ ОПТИКИ I

В в е д е н и е

В работе рассматривается задача определения параметров протяженного источника монохроматического скалярного электромагнитного поля по параметрам поля, измеренным вдали от источника на ограниченном куске двумерной поверхности; пространство между источниками и областью измерений предполагается пустым или заполненным однородной средой с заданным коэффициентом преломления. Для краткости, указанную задачу будем называть задачей D .

Предлагается один прием решения задачи D , названный нами, условно, стереоскопическим методом. Сущность метода заключается в переходе к некоторым производным характеристикам первично измеренного поля (так называемым линейаризованным изображениям объекта) с последующим извлечением информации об изучаемом объекте путем сравнения его линейаризованных изображений, соответствующих разным участкам окружающего пространства.

В оптическом диапазоне этот прием практически используется в так называемом стереоскопическом способе изучения рельефа оптических поверхностей: путем визуального изучения стереопары фотоизображений участка светящейся поверхности идентифицируют одноименные изображения отдельных (выделяющихся) объектов поверхности на элементах стереопары и затем, из геометрических соображений, определяют превышение точек поверхности друг относительно друга в некотором направлении отсчета.

В работах [1], [2], [3] в оптическом диапазоне показана возможность восстановления участка оптической поверхности по нескольким его фотоизображениям, сделанным из разных точек окружающего пространства, без предварительной идентификации фотоизображений, но при условии принадлежности идиокатриссы яркости излучения определенному типу. Для реальных оптических поверхностей последнее условие выполняется, как правило, лишь приближенно.

Однако, можно показать, что в волновом диапазоне яркости свечения поверхностей простого волнового и двойного волнового потенциалов (имеется в виду яркость, определенная фотометрическим способом (см. [8]), которая только и существенна в рассматриваемом случае) имеют в точности тип, указанный в вышеприведенных работах.

Замена δ - образного фотоприбора, используемого в [2], реальной линзовой оптической системой не вносит существенных трудностей и позволяет перенести стереоскопический прием в волновую область.

Возвращаясь к задаче D заметим, что возможны различные варианты ее постановок в зависимости от типов источников, параметров измерений и искомых параметров. В настоящей работе рассматриваются волновые источники потенциального типа с компактными носителями (дискретные, линейные, объемные тела, поверхности). Параметрами измерений являются амплитуда и фаза поля от источника, которое прошло через объектив (однолинзовой) оптической системы и измерено в приближении Фраунгофера в некоторой ограниченной области на задней фокальной плоскости оптической системы.

Таким образом, мы имеем дело не с чистой обратной задачей восстановления параметров объекта по данным измерений са-

мого поля, а с некоторым линейризованным ее вариантом, который и назовем линейризованным вариантом задачи D . Исходной информацией об излучающем объекте в линейризованном варианте служит семейство оптических изображений этого объекта, полученных в приближении Фраунгофера с помощью некоторой (однолинзовой) оптической системы.

Искомными параметрами являются: в случае поверхностей - светящаяся часть поверхности (носитель плотности потенциала) и плотность потенциала на ней;

в случае 0 - мерных и I - мерных тел - сами тела и плотности на них;

в случае трехмерных тел - геометрические параметры тела при заданной постоянной плотности потенциала, или функция плотности при заданном теле.

Постановки, в которых по тем или иным (неполным) характеристикам изображений (амплитуда, фаза, полная энергия, линии уровня поля изображения и т.д.) ищутся некоторые (не определяющие) параметры потенциального тела, участвовавшего в формировании этих изображений (метрические характеристики носителя (толщина, поперечные размеры и т.д.), общая масса, объем, характеристики плотности) в данной статье не рассматриваются по причине ограниченности объема последней.

Представляется, что линейризованный вариант задачи и стереоскопический метод выделяют и решают некоторую, в значительной степени устойчивую относительно возмущений исходных данных, часть задачи D .

Краткое содержание статьи по разделам.

В разделе I приводятся основные определения, обозначения и соглашения.

Во втором разделе вводятся основные понятия полного и линейризованного изображений потенциальных поверхностей с помощью элементарной оптической системы, выписываются основные формулы и обсуждается строгая формулировка линейризованной задачи D .

Раздел 3 посвящен элементарной оценке разности между полным и линейризованным изображением.

В разделе 4 доказывается теорема I об однозначном определении светящейся части потенциальной поверхности простого слоя

по трем ее линейризованным изображениям при выполнении ряда ограничений на взаиморасположение указанных объектов.

В разделе 5 выводятся основные формулы 5.4 - 5.8 для потенциальных поверхностей двойного слоя и обсуждается постановка задачи D .

Раздел 6 посвящен выяснению степени неоднозначности восстановления потенциальной поверхности двойного слоя по семейству ее изображений, т.к., по всей видимости, однозначности восстановления в этом случае нет.

Основной результат раздела 6 - теорема 2, связывающая степень неоднозначности решения с поведением функции плотности по отношению к некоторой "эталонной" дифференциальной форме.

Раздел 7 содержит вывод основных формул 7.1 - 7.3 для потенциальных тел.

В разделе 8 решается ряд простейших постановок линейризованной задачи D для потенциальных тел. Для O - мерных и I - мерных тел теоремы 3-4 показывают возможность однозначного восстановления объектов по заданной стереопаре изображений.

В разделе 9 собраны различные замечания и варианты дальнейших обобщений стереоскопического метода. В частности приводятся соображения в некоторой степени оправдывающие уместность сильных ограничений, наложенных на строение носителя плотности потенциальных поверхностей при рассмотрении вопросов однозначности восстановления последних по их изображениям в разделах 2, 4-6.

Для утверждений и формул статьи принята двухиндексная нумерация, при которой первый индекс указывает номер раздела, содержащего данную формулу (утверждение), а второй индекс - номер формулы (утверждения) в этом разделе.

Основные результаты статьи опубликованы в [1], [2], [3].

В заключение автор выражает признательность членам-корреспондентам АН СССР М.М.Лаврентьеву и А.С.Алексееву за обсуждения по теме работы и внимание, проявленное к ней.

I.

Символом E^3 в статье обозначается трехмерное вещественное евклидово пространство; для обозначения элементов пространства E^3 используются малые латинские буквы p , r ,

q, \dots, v, w .

Скалярное произведение векторов $x, y \in E^3$ обозначается символом $\langle x, y \rangle$; для обозначения расстояния между точками $p, q \in E^3$ приняты обозначения $|p - q|$ или R_{pq} . Элементарная оптическая система (О.С.) F в про-

странстве E^3 определяется заданием следующих объектов:

а) связной ограниченной области на некоторой плоскости пространства E^3 ; область Σ будем называть диафрагмой, плоскость \mathcal{L}_Σ - носителем диафрагмы;

в) плоскости \mathcal{E} , называемой экраном;

с) связной ограниченной области, называемой эффе-ктивной областью;

д) комплекснозначной функции $u(q)$, определенной для всех точек $q \in \Sigma$; функцию u будем называть функцией пропускания.

Для указанных объектов должны выполняться условия:

- 1) плоскости \mathcal{L}_Σ и \mathcal{E} параллельны и не пересекаются;
- 2) прямая, проходящая через центры тяжести областей Σ и W , ортогональна к \mathcal{E} .

Коротко можно записать, что О.С. $F = \{\Sigma, \mathcal{E}, W, u\}$, где объекты указанного набора определены в а)-д) и для них выполнены условия 1)-2).

Если обозначить через q_0 центр тяжести диафрагмы Σ , то набор $\{q_0, \mathcal{E}, W\}$ определит проекционную схему (П.С.) в смысле работы [1].

Мы будем пользоваться понятиями оптической оси, центра экрана, геометрического изображения с помощью П.С. и т.д. по отношению к О.С. F в том смысле, в котором эти понятия определены для соответствующей П.С. $\{q_0, \mathcal{E}, W\}$ в [1]. Единственное различие будет состоять в том, что расстояние от точки q_0 до экрана \mathcal{E} будет теперь называться не фокусным расстоянием, а прицельным параметром; термин же фокусное расстояние будет использован для характеристики функции пропускания u .

Примем следующие обозначения:

n_F - нормаль О.С. F ,

W_0 - центр экрана \mathcal{E} ,

d_1 - прицельный параметр (расстояние от q_0 до \mathcal{E}),

F_+ - допустимая область,

$F(X)$ - геометрическое изображение подмножества $X \subseteq F_+$.

Собственной системой координат $O.C.$ $F = \{\Sigma, \mathcal{E}, W, \kappa\}$

Будем называть систему координат экрана \mathcal{E} , определяемую начальной точкой q_0 и ортонормированным репером e_1, e_2 , $\langle e_i, n_F \rangle = 0, i = 1, 2$.

При изучении механизма формирования изображения от точечного или протяженного источника света в оптических приборах, в первую очередь рассматривают упрощенную схему, в которой, кроме самого источника света, присутствуют:

а) непроницаемая для света плоскость (перегородка) с вырезанным в ней отверстием Σ ;

в) прозрачный или полупрозрачный для света предмет V , закрывающий отверстие Σ и характеризуемый функцией пропускания $\kappa(q)$, $q \in \Sigma$;

с) плоскостью фиксации света от источника, прошедшего через отверстие Σ и предмет V .

Понятие элементарной оптической системы можно рассматривать как формализацию такого рода простейшего оптического прибора, в которой присутствуют все геометрические элементы последнего, а закрывающий отверстие Σ предмет представлен своей функцией пропускания.

Согласно [6] (стр. 369), если функция пропускания $\kappa(q)$ предмета V такова, что модуль $|\kappa(q)| = 1$ для всех $q \in \Sigma$, то мы имеем дело с фазовым объектом V ; в этом случае мы называем функцию пропускания κ фазовым преобразователем.

Функцию $\chi(q)$, дающую представление фазового преобразователя в виде $\kappa(q) = \exp ik \chi(q)$, k - волновое число излучения, назовем фазовой задержкой.

Будем всегда предполагать, что функция $\chi(q)$ непрерывно дифференцируема на диафрагме Σ , $\chi(q_0) = 0$ и символом v будем обозначать вектор $d_1 \text{grad } \chi(q_0)$.

Если отверстие Σ закрыто тонкой сферической прозрачной линзой, то, как показано, например, в [7], с точностью до постоянного слагаемого, $\chi(q) = -\frac{1}{2f} |q_0 - q|^2$,

где f - фокусное расстояние линзы.

Почти все рассуждения настоящей статьи относятся к О.С., соответствующим однолинзовому прибору с полностью прозрачной линзой (т.е., амплитудных изменений в прошедшее через нее поле линза не вносит).

В настоящей статье мы пользуемся $\alpha - \omega$ терминологией и некоторыми результатами статей [4], [5]. Напомним, в частности, определение ω - множеств ([5]). Для поверхности $S \subseteq E^3$ множество $\omega(p) \subseteq E^3$, $p \in S$, определяется формулой

$$\omega(p) = \{q \in S_+ \mid [p, q] \cap S_- = \emptyset\}.$$

Для подмножества $X \subseteq S$ полагаем

$$\omega(X) = \bigcap_{p \in X} \omega(p).$$

В указанных статьях изучены некоторые свойства множеств типа $\omega(X)$, $X \subseteq S$; в частности, в [5] выделен класс подмножеств $X \subseteq S$, для которых множество $\omega(X)$ обладает внутренними точками и указан простой способ нахождения множества $\omega(X)$ для некоторого класса подмножеств $X \subseteq S$. Из результатов работы [4], [5] легко вывести справедливость следующего утверждения.

Л е м м а . Пусть S - гладкая поверхность, $X \subseteq S$ - замкнутое подмножество, F - О.С. и $X \subseteq F_+$. Тогда, из условия $\Sigma \subseteq \omega(X)$ следует, что $\cos(\widehat{q_0 - p, n_p}) \neq 0$ для любой точки $p \in X$.

Эту лемму мы используем без всяких ссылок почти во всех разделах настоящей статьи.

Потенциальной поверхностью будем называть пару (S, μ) , состоящую из замкнутой гладкой поверхности $S \in E^3$ и ограниченной, кусочно-непрерывной комплекснозначной функции μ , называемой плотностью.

Светящейся частью потенциальной поверхности (S, μ) будем называть подмножество $\text{Supp } \mu \subseteq S$ всех точек поверхности S , в которых μ отлична от 0.

Потенциальную поверхность (S, μ) назовем потенциальной поверхностью простого слоя, если скалярное поле $U(q)$, порожденное парой (S, μ) вне поверхности S задается формулой

$$U(q) = k \iint_S \mu(p) G(p, q) dS_p,$$

где $G(p, q) = \frac{\exp ik R_{pq}}{R_{pq}}$;

пару (S, μ) назовем потенциальной поверхностью двойного слоя, если поле $U(q)$, ею порожденное, задается формулой

$$U(q) = \iint_S \mu(p) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_p} dS_p,$$

где $\frac{\partial}{\partial n_p}$ - операция дифференцирования по внешней нормали к поверхности S в точке p .

Пусть $F = \{\Sigma, \zeta, w, n\}$ - O.C., (S, μ) - потенциальная поверхность и $S \subseteq F_+$. Символом U_Σ будем обозначать след скалярного поля U , порожденного парой (S, μ) , на диафрагме Σ .

Символом u_F обозначим скалярное поле, определенное на экране \mathcal{E} о.с. F и являющееся следом на \mathcal{E} решения v задачи Дирихле

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad v|_{\mathcal{E}} = \begin{cases} u_{\Sigma}(q), & \text{если } q \in \Sigma, \\ 0, & \text{если } q \notin \Sigma \end{cases}$$

в области $E^3 \setminus F_+$.

Таким образом, $u_{\Sigma}(q) = U(q)$ для $q \in \Sigma$, $u_F(w) = V(w)$ для $w \in \mathcal{E}$.

Пользуясь терминологией, близкой к общепринятой в физической оптике, поле U_{Σ} будем называть полем от (S, μ) , падающим на диафрагму Σ , поле $v|_{\mathcal{E}}$ — прошедшим через диафрагму Σ , поле u_F — полным изображением потенциальной поверхности (S, μ) с помощью о.с. F .

В оставшейся части этого раздела и в разделах 3,4 рассматриваются только потенциальные поверхности простого слоя, называемые, для краткости, просто потенциальными поверхностями.

Пользуясь функцией Грина, вышеупомянутой задачи Дирихле, можно написать представление поля u_F в виде

$$u_F(w) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} U_{\Sigma}(q) u(q) \frac{\exp ik R_{qw}}{R_{qw}} \left(ik - \frac{1}{R_{qw}} \right) \cos(\widehat{q-w, n_F}) \times$$

$$\times d\Sigma_q = \frac{k}{2\pi} \iint_S \mu(p) \iint_{\Sigma} \frac{\exp ik(R_{qp} + R_{qw} + \chi(q))}{R_{qp} R_{qw}} \left(ik - \frac{1}{R_{qw}} \right) \cos \eta \, d\Sigma_q \, dS_p,$$

$w \in \mathcal{E}$, $p \in S$, $q \in \Sigma$, η - угол между векторами $q-w$ и n_F . В дальнейшем мы будем пользоваться понятием полного приведенного F - изображения $J_F(w)$ потенциальной поверхности (S, μ) с помощью О.С. F , которое определим формулой

$$J_F(w) = \frac{R_{q_0 w} \exp ik R_{q_0 w}}{\cos \eta_0} U_F(w), \quad w \in \mathcal{E},$$

здесь q_0 - центр диафрагмы Σ , η_0 - угол между векторами $w - q_0$ и n_F . Ясно, что при заданной О.С. F задание одной из функций U_F , J_F полностью определяет другую.

Принимая обозначения

$$H = H(p, q, w) = \frac{R_{q_0 p} R_{q_0 w} \cos \eta}{R_{qp} R_{qw} \cos \eta_0} \left(ik - \frac{1}{R_{qw}} \right),$$

$$L = L(p, q, w) = R_{qp} - R_{q_0 p} + R_{qw} - R_{q_0 w} + \chi(q),$$

напишем формулу представления для приведенного F - изображения в виде

$$J_F(w) = \iint_S \mu(p) D(w, p) dS_p,$$

(2.1)

$$D(w, p) = \frac{k}{2\pi} \frac{\exp ik R_{q_0 p}}{R_{q_0 p}} \iint_{\Sigma} H \cdot \exp ik L d\Sigma_q.$$

Приведенным линейризованным F - изображением потенциальной поверхности (S, μ) назовем функцию $\mathcal{J}_F(w)$, определенную на экране \mathcal{E} формулами:

$$\mathcal{J}_F(w) = \iint_S \mu(p) D_0(w, p) dS_p,$$

$$D_0(w, p) = \frac{ik^2}{2\pi} \frac{\exp ik R_{q_0 p}}{R_{q_0 p}} \iint_{\Sigma} \exp - \frac{ik}{d_1} \langle q - q_0, v + w - q_0 \rangle + d_1 \frac{p - q_0}{\langle p - q_0, n_F \rangle} \rangle d\Sigma_q. \quad (2.2)$$

Полагая, для краткости, $T = T(p, q, w) = \frac{1}{d_1} \langle q - q_0, v + w - q_0 \rangle + d_1 \frac{p - q_0}{\langle p - q_0, n_F \rangle}$, можно написать

$$D_0(w, p) = \frac{ik^2}{2\pi} \frac{\exp ik R_{q_0 p}}{R_{q_0 p}} \iint_{\Sigma} \exp - ikT d\Sigma_q.$$

Линейризованное изображение получается из полного путем ряда упрощений, точный вид которых будет указан далее при оценке разности $J_F(w) - \mathcal{J}_F(w)$.

Предположим дополнительно, что $\Sigma \subseteq \omega(\text{Supp } \mu)$.

Тогда в интегралах формул (2.1), (2.2) допустима замена переменных $\bar{w} = F(p) = q_0 - d_1 \frac{q_0 - p}{\langle q_0 - p, n_F \rangle}$, $p \in S$, соответствующая переходу от интегрирования по поверхности S к интегрированию по плоской области $F(S)$. Действительно, выбирая какую-либо регулярную параметризацию поверхности S и произ-

вольную собственную систему координат на экране ξ , находим, что якобиан указанной замены переменных равен

$$d_1^2 \frac{\langle q_0 - p, n_p \rangle}{\langle q_0 - p, n_p \rangle} \sqrt{EG - F^2}, \text{ где } n_p - \text{внешняя нормаль к } S \text{ в}$$

точке p , а E, F, G - коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S в выбранной параметризации (см. [2]). На множестве $\text{Supp } \mu$ якобиан отличен от 0 в силу условия $\Sigma \subseteq \text{Supp } \mu$ (см. [5]), на оставшейся части $S \setminus \text{Supp } \mu$ поведение якобиана для указанных интегралов несущественно. Таким образом, на множестве $\text{Supp } \mu$ преобразование $\bar{w} = F(p)$ обратимо, что символически можно записать в виде $p(\bar{w}) = F^{-1}(\bar{w})$.

Для элемента площади dS поверхности S в точке p имеем выражение $dS_p = \frac{R_{q_0 p}^2 \cos^3 \eta_0}{d_1^2 \cos \zeta_0} d\Sigma_{\bar{w}}$, где ζ_0 - угол между векторами n_p и $q_0 - p$, η_0 - угол между векторами $\bar{w} - q_0$ и n_p , $d\Sigma_{\bar{w}}$ - элемент площади экрана ξ . Производя указанную замену переменных в интегралах формул (2.1), (2.2) и вводя функцию

$$\Phi(\bar{w}) = \begin{cases} \mu(p(\bar{w})) \frac{\cos^3 \eta_0(\bar{w}) R_{p(\bar{w}) q_0} \exp ik R_{p(\bar{w}) q_0}}{\cos \zeta_0(\bar{w})}, & \text{если } p(\bar{w}) \in \text{Supp } \mu, \\ 0, & \text{если } p(\bar{w}) \in S \setminus \text{Supp } \mu, \end{cases} \quad (2.3)$$

получаем выражения

$$J_F(w) = \iint_{\xi} \Phi(\bar{w}) \Delta(w, \bar{w}) d\Sigma_{\bar{w}}, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{J}_F(w) = \iint_{\mathcal{E}} \Phi(\bar{w}) \Delta_0(v + w - \bar{w}) d\Sigma_{\bar{w}}, \quad (2.5)$$

где

$$\Delta(w, \bar{w}) = \frac{k}{2\pi d_1^2} \iint_{\Sigma} H \exp ikL d\Sigma_q, \quad (2.6)$$

$$\Delta_0(w - \bar{w}) = \frac{ik^2}{2\pi d_1^2} \iint_{\Sigma} \exp ikT d\Sigma_q. \quad (2.7)$$

Относительно функции $\Phi(\bar{w})$ заметим, что она является функцией с компактным носителем на плоскости \mathcal{E} и аналитические ее свойства (гладкость, интегрируемость) в значительной мере определяются свойствами функции плотности μ ; в частности, легко видеть, что $\Phi(\bar{w}) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{E})$.

На основании выведенных формул можно более точно, чем это делалось во введении, сформулировать задачу определения (восстановления) потенциальной поверхности (или каких-то ее параметров) по ее F -изображениям.

Линеаризованный вариант задачи ставится следующим образом.

Пусть (S, μ) - потенциальная поверхность, $F^1 = \{\mathcal{E}^i, \Sigma^i, w^i, \mu^i\}_{i \in J}$ - семейство О.С. и пусть $S \subseteq F^1_+$ для каждого $i \in J$. Спрашивается, в какой мере задание линеаризованных F^1 -изображений $\mathcal{J}_{F^1}(w)$ поверхности (S, μ) на множествах $w^i \subseteq \mathcal{E}^i$ определяет самое поверхность (S, μ) ?

Ограничимся рассмотрением такого взаиморасположения поверхности (S, μ) и О.С. F^1 , что $\Sigma^i \subseteq \omega(\text{Supp } \mu)$ для

каждого $i \in J$.

В этом случае имеет место формулы 2.5, 2.7, дающие интегральное представление линеаризованного изображения через ядро $\Delta_0(v + w - \bar{w})$.

Из этих формул можно заключить, что функции $\mathcal{F}_{F^i}^i(w)$ аналитичны в своих областях определения для каждого $i \in J$. По условиям задачи функции $\mathcal{F}_{F^i}^i(w)$ известны в эффективной области w^i соответствующей О.С. F^i .

В этом случае выражения 2.5 можно для каждого $i \in J$ рассматривать как интегральное уравнение с ядром $\Delta_0(v+w-w)$ относительно неизвестной функции $\Phi^i(\bar{w})$, $w \in w^i$, $\bar{w} \in \mathcal{E}^i$.

Пользуясь операцией аналитического продолжения, доопределим функции $\mathcal{F}_{F^i}^i(w)$ на весь экран \mathcal{E}^i и получим интегральные уравнения вида 2.5, в которых все аргументы меняются уже в бесконечных пределах.

Известно, что такого рода интегральные уравнения однозначно разрешимы в классе функций $\Phi(\bar{w})$ с ограниченным носителем. Таким образом, для каждого $i \in J$ получаем однозначно определенную функцию $\Phi^i(w)$, $w \in \mathcal{E}^i$ и задача сводится к выяснению взаимосвязи определенного так семейства функций с исходной поверхностью (S, μ) . Знание уже некоторых свойств функций $\Phi^i(\bar{w})$ позволяет сделать некоторые заключения о поверхности (S, μ) . Так, носитель $\text{Supp } \Phi^i(\bar{w})$ функции Φ^i совпадает с множеством $F^i(\text{Supp } \mu)$; если $q_0^i \neq q_0^j$, то задание множеств $\text{Supp } \Phi^i$, $\text{Supp } \Phi^j$ (или границ этих множеств) однозначно определяет границу $\partial(\text{Supp } \mu)$ множества $\text{Supp } \mu$, которая совпадает с пересечением конусов с вершинами в q_0^i , q_0^j и образующими множествами $\partial(\text{Supp } \Phi^i)$, $\partial(\text{Supp } \Phi^j)$, соответственно.

Нетрудно также убедиться, что задание одной или двух функций из семейства $\{\Phi^i\}_{i \in J}$ не определяет однозначно светящуюся часть поверхности (S, μ) .

В этом разделе будем рассматривать О.С. с фазовым преобразователем вида $\exp - \frac{1}{2f} R^2_{q_0 q_1}$, соответствующим действию тонкой сферической двояковыпуклой линзы, закрывающей диафрагму О.С. При заданной О.С. $F = \{ \xi, \Sigma, w, \mu \}$ рассматриваем только те потенциальные поверхности (S, μ) , для которых $S \in F_+$ и $\Sigma \in \omega(\text{Supp } \mu)$.

Проведем элементарную оценку разности $K_F(w) = J_F(w) - \mathcal{H}_F(w) = \iint_{\xi} \Phi(\bar{w})(\Delta(w, \bar{w}) - \Delta_0(w, \bar{w})) d\bar{w}$, рассматриваемую как элемент функционального пространства $\mathcal{L}_2(w)$, когда $w \in W$. Символом V обозначим множество всех точек вида $F(p)$, $p \in \text{Supp } \mu$. Так как функции J , \mathcal{H} , Φ , Δ , Δ_0 определены на всем экране ξ и в силу свойств этих функций для любого подмножества $X \subseteq \xi$ следы этих функций на X определяют элементы функционального пространства $\mathcal{L}_2(X)$, мы пишем $\|J\|_{\mathcal{L}_2(X)}$, понимая под этим норму следа функции J на множестве X в пространстве $\mathcal{L}_2(X)$, аналогичный смысл имеет такая запись для всех вышеперечисленных функций. Если $X \subseteq \xi$ - подмножество экрана ξ , то символом $|X|$ обозначается площадь X .

Исходим из стандартного неравенства

$$\|\mathcal{H}_F(w)\|_{\mathcal{L}_2(w)} \leq P \|\Phi(\bar{w})\|_{\mathcal{L}_2(V)}, \quad \text{где}$$

$$P = \left(\iint_V \iint_W |\Delta(w, \bar{w}) - \Delta_0(w, \bar{w})|^2 d\bar{w} dw \right)^{1/2}, \quad \bar{w} \in V, w \in W.$$

$$\text{Очевидно, что } |\Delta(w, \bar{w}) - \Delta_0(w, \bar{w})| = \frac{k^2}{2\pi d_1^2} \left| \int_{\Sigma} \exp ikL - \frac{1}{k} \right|$$

$$\begin{aligned}
 -i \exp -ikT \int_{\Sigma} d\Sigma_q & \leq \frac{k^2}{2\pi d_1^2} |\Sigma| \max_{q \in \Sigma} \left| N \frac{\exp ikL}{k} - i \exp -ikT \right| = \\
 & = \frac{k^2 |\Sigma|}{2\pi d_1^2} \max_{q \in \Sigma} |E(q, w, \bar{w})|,
 \end{aligned}$$

где $E(q, w, \bar{w}) = N \frac{\exp ikL}{k} - i \exp -ikT$.

Если $\max_{q \in \Sigma, w \in W, \bar{w} \in V} |E(q, w, \bar{w})| \leq M$, то $P \leq \frac{k^2 |\Sigma|}{2\pi d_1^2} M \sqrt{|V||W|}$,

и для $\mathcal{H}_F(w)$ имеем оценку

$$\|\mathcal{H}_F(w)\|_{L_2(W)} \leq \frac{k^2 |\Sigma| M}{2\pi d_1^2} \sqrt{|V||W|} \cdot \|\Phi(\bar{w})\|_{L_2(V)}. \quad (3.1)$$

Оставшаяся часть раздела посвящена нахождению одной из верхних границ M функции $|E(q, w, \bar{w})|$ на множестве $\Sigma \times W \times V$ изменения переменных q, w, \bar{w} ; величина M будет дана как функция четырех числовых параметров $O.C.$ F и двух числовых параметров потенциальной поверхности (S, μ) . Дадим определения указанных числовых параметров.

Пусть $F = \{ \xi, \varepsilon, w, \kappa \}$ — $O.C.$ Числа a, b, d_1 определим формулами:

$$a = \max_{q \in \Sigma} |q - q_0|,$$

$$b = \max_{w \in W} |w - w_0|,$$

$$d_1 = \min_{w \in \mathcal{E}} |q_0 - w| = |q_0 - w_0|,$$

здесь q_0 , w_0 - центры диафрагмы Σ и экрана \mathcal{E} соответственно. Ясно, что число d_1 есть определенный ранее прицельный параметр О.С. F . Число D_1 определим формулой

$$D_1 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{d_1}} = \frac{f d_1}{d_1 - f}.$$

Точку $p_0 \in F_+$, лежащую на оптической оси О.С. F на расстоянии D_1 от центра q_0 диафрагмы Σ назовем, условно, точкой наведения О.С. F . Для точки p_0 имеет место формула

$$\frac{1}{R_{p_0 q_0}} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f},$$

называемая в оптике формулой линзы; выполнение этой формулы для точки p_0 означает, что изображение точечного источника, помещенного в точку p_0 с помощью О.С. F будет наиболее резким.

Параметры δ , h характеризующие взаиморасположение потенциальной поверхности (S, μ) и О.С. $F = \{\mathcal{E}, \Sigma, w, \kappa\}$ определим формулами:

$$\delta = \max_{p \in \text{Supp } \mu} |n_F \times (n_F \times (p - p_0))|,$$

$$h = \max_{p \in \text{Supp } \mu} |\langle p - p_0, n_p \rangle|.$$

Для указанных шести основных числовых параметров имеем очевидные соотношения:

$$R_{q_0 q} \leq a, \quad q \in \Sigma; \quad R_{q_0 p} \geq D_1 - h, \quad p \in \text{Supp } \mu;$$

$$R_{w_0 w} \leq b, \quad w \in W; \quad R_{p_0 p} \leq \sqrt{h^2 + \delta^2}, \quad p \in \text{Supp } \mu.$$

$$R_{q_0 w} \geq d_1, \quad w \in W;$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим правилом оценки некоторых выражений (условно называемым далее τ -правилом): если $P(x, y, z)$ - монотонно убывающая (в смысле, не возрастающая), $Q(s, t)$ - монотонно возрастающая (в смысле, не убывающая) функции каждой своей одной переменной при фиксированных значениях остальных, то имеет место соотношение:

$$\frac{P(R_{q_0 q}, R_{w_0 w}, R_{p_0 p})}{Q(R_{q_0 w}, R_{q_0 p})} \leq \frac{P(a, b, \sqrt{h^2 + \delta^2})}{Q(d_1, D_1 - h)}.$$

Перейдем к нахождению одной из верхних границ функции $|E(q, w, \bar{w})|$ когда $q \in \Sigma, w \in W, \bar{w} \in V$.

Исходим из формулы

$$|E|^2 = \left| H \frac{\exp ikL}{k} - i \exp -ikT \right|^2 = \frac{HH^*}{k^2} - \frac{2}{k} \operatorname{Im}(H \exp ik(L+T)) +$$

$$+ 1 = X^2 - 2X \cos k(L+T) + 1 - \frac{Y}{k} \sin k(L+T) + \frac{Y^2}{k^2}, \quad (3.1)$$

где функции $X = X(q, w, \bar{w})$, $Y = Y(q, w, \bar{w})$ определены формулой $Y + ikX = H$.

Если $|1 - X(q, w, \bar{w})| \leq \epsilon$, то для выражения $R(q, w, \bar{w}) = X^2 - 2X \cos k(L+T) + 1$ имеем оценку

$$|R| \leq \epsilon^2 + 2(1 - \cos k(L+T))(1 + \epsilon).$$

Отсюда, с учетом того, что $|\sin t| \leq |t|$, $1 - \cos t \leq |t|$ при всех значениях t , получаем неравенство

$$|E|^2 \leq \epsilon^2 + 2k |L+T| (1 + \epsilon) + |Y(L+T)| + \frac{Y^2}{k^2}. \quad (3.2)$$

Перейдем к оценке величин $|1 - X|$, $|Y|$, $|L+T|$ при следующих дополнительных предположениях: для рассматриваемых О.С. F и потенциальных поверхностей (S, μ) выполнены условия $a < d_1$, $a < D_1 - h$. При выполнении указанных условий имеют место неравенства

$$R_{q_0 q} < R_{q_0 p}, \quad R_{q_0 q} < R_{q_0 w} \quad \text{для всех } q \in \Sigma, w \in W.$$

Оценка $|1 - X|, |Y|$.

Напомним, что $Y + ikX = H = \frac{\cos \eta}{\cos \eta_0} \frac{R_{q_0 p}}{R_{qp}} \frac{R_{q_0 w}}{R_{qw}} \left(ik - \frac{1}{R_{wq}} \right)$.

Так как $\cos \eta = \frac{\langle w - q, n_F \rangle}{|w - q|} = \frac{\langle (w - q_0) + (q_0 - q), n_F \rangle}{|w - q|} = \frac{\langle w - q_0, n_F \rangle}{|w - q|}$,

$\cos \eta_0 = \frac{\langle w - q_0, n_F \rangle}{|w - q_0|}$, то $\frac{\cos \eta}{\cos \eta_0} = \frac{R_{q_0 w}}{R_{qw}}$,

$X = \frac{R_{q_0 p} R_{q_0 w}^2}{R_{qp} R_{qw}^2}$, $Y = - \frac{R_{q_0 p} R_{q_0 w}^2}{R_{qp} R_{qw}^2}$.

На основании неравенств $R_{qp} \geq R_{q_0 p} - R_{q_0 q}$, $R_{qw} \geq R_{q_0 w} - R_{q_0 q}$ можно утверждать, что

$|1 - X| \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{R_{q_0 q}}{R_{q_0 p}}\right) \left(1 - \frac{R_{q_0 q}}{R_{q_0 w}}\right)^2} - 1$,

$|Y| \leq \frac{1}{R_{q_0 w}} \frac{1}{\left(1 - \frac{R_{q_0 q}}{R_{q_0 p}}\right) \left(1 - \frac{R_{q_0 q}}{R_{q_0 w}}\right)^3}$.

Отсюда, пользуясь r - правилом, получаем неравенства

$$|1 - X| \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{D_1 - h}\right)\left(1 - \frac{a}{d_1}\right)^2} - 1, \quad (3.3)$$

$$|Y| \leq \frac{1}{d_1} \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{D_1 - h}\right)\left(1 - \frac{a}{d_1}\right)^3}.$$

Оценка $L + T$.

Согласно определению,

$$L + T = R_{qp} - R_{q_0p} + R_{qw} - R_{q_0w} + \frac{1}{2f} R_{q_0q}^2 + \frac{1}{d_1} \langle w - q_0 + \frac{p - q_0}{\langle p - q_0, n_p \rangle}, q - q_0 \rangle, \quad (3.4)$$

Воспользуемся разложениями:

$$R_{qp} = R_{q_0p} \left(\sum_{n \geq 0} Q_n(\cos \phi_0) \left(\frac{R_{q_0q}}{R_{q_0p}} \right)^n \right),$$

$$R_{qw} = R_{q_0w} \left(\sum_{n \geq 0} Q_n(\cos \phi_0) \left(\frac{R_{q_0q}}{R_{q_0w}} \right)^n \right),$$

где полиномы $Q_n(t)$, $t \in [-1, 1]$, определяются из рекуррентных соотношений $Q_0(t) = 1$, $Q_1(t) = -t$,

$$Q_n(t) = P_n(t) - 2t P_{n-1}(t) + P_{n-2}(t), \quad n \geq 2,$$

$P_n(t)$ — полином Лежандра,
 $\alpha \varphi_0$, φ_0 — угол между векторами $q - q_0$ и $p - q_0$,
 $q_0 - w$, соответственно.

Подставляя указанные разложения в формулу (3.4) и производя несложную перегруппировку слагаемых, получим выражение

$$L + T = \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{R_{q_0 w}} \right) (w - q_0) + \left(\frac{1}{\langle p - q_0, n_F \rangle} - \frac{1}{R_{q_0 p}} \right) (p - q_0), \quad q - q_0 - \\ - \frac{R_{q_0 q}^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \varphi_0}{R_{q_0 w}} + \frac{\sin^2 \varphi_0}{R_{q_0 p}} - \frac{1}{r} \right) + \sum_{n \geq 2} Q_n(\cos \varphi_0) \frac{R_{q_0 q}^n}{R_{q_0 p}^{n-1}} + \\ + \sum_{n \geq 2} Q_n(\cos \varphi_0) \frac{R_{q_0 q}^n}{R_{q_0 w}^{n-1}}.$$

Оценку члена $\Lambda = \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{R_{q_0 w}} \right) (w - q_0) + \left(\frac{1}{\langle p - q_0, n_F \rangle} - \frac{1}{R_{q_0 p}} \right) (p - q_0), \quad q - q_0$

произведем на основании соотношений

$$p - q_0 = (p_0 - q_0) + (p - p_0),$$

$$q_0 - w = (q_0 - w_0) + (w - w_0),$$

где w_0 — центр экрана \mathcal{E}_0 , а p_0 — точка наведения О.С.
 r , и элементарного неравенства

$$|\sqrt{1+x^2} - 1| \leq \frac{x^2}{2}.$$

Таким образом, получаем соотношения

$$\langle p - q_0, q - q_0 \rangle \leq R_{pp_0} R_{q_0 q},$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{1}{R_{q_0 p}} - \frac{1}{z} \right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{D_1} \right) - \frac{\cos^2 \varphi_0}{R_{q_0 p}} \leq \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{R_{q_0 w}^2}{R_{q_0 w}^3 d_1^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{b^2}{R_{q_0 w}^3} + \frac{1}{2} \frac{R_{p_0 p}^2}{R_{q_0 p} z^2} + \frac{h}{D_1^2} + \frac{\delta^2}{R_{q_0 p}^3} \right)
 \end{aligned}$$

здесь, как и раньше, $z = \langle p - q_0, n_F \rangle$.

Наконец, из того, что $|Q_n(t)| \leq 1$, $t \in [-1, 1]$, получаем неравенства

$$\left| \sum_{n \geq 3} Q_n(\cos \varphi_0) \frac{R_{q_0 q}^n}{R_{q_0 w}^{n-1}} \right| \leq \frac{R_{q_0 q}^3}{R_{q_0 p}^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{R_{q_0 q}}{R_{q_0 p}}} \right), \quad (3.7)$$

$$\left| \sum_{n \geq 3} Q_n(\cos \varphi_0) \frac{R_{q_0 q}^n}{R_{q_0 w}^{n-1}} \right| \leq \frac{R_{q_0 q}^3}{R_{q_0 w}^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{R_{q_0 q}}{R_{q_0 w}}} \right).$$

Теперь, пользуясь r -правилом, можно написать оценку выражения $L + T$ через основные параметры:

$$|L+T| \leq \frac{ab^3}{2d_1^3} + \frac{a \sqrt{h^2 + \delta^2}}{2(D_1 - h)^3} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} \frac{b^2}{d_1^3} + \frac{1}{2} \frac{h^2 + \delta^2}{(D_1 - h)^3} \right) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{h}{D_1^2} + \frac{\delta^2}{(D_1 - h)^3} + \frac{a^3}{(D_1 - h)^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{D_1 - h}\right)} + \\
 & + \frac{a^3}{d_1^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{a}{d_1}} \right) = G(a, b, d_1, D_1, h, \delta) = G;
 \end{aligned}$$

здесь мы пользовались также очевидным неравенством $|z - D_1| \leq h$.

На основании формул (3.3), (3.5)–(3.8) напомним формулу для вычисления одной из верхних границ M функции $|E(q, w, \bar{w})|$, $q \in \Sigma, w \in W, \bar{w} \in V$ через основные параметры:

$$\begin{aligned}
 M = & \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a}{D_1 - h}\right) \left(1 - \frac{a}{d_1}\right)} - 1 \right)^2 + 2k \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{D_1 - h}\right) \left(1 - \frac{a}{d_1}\right)^2} \cdot G + \\
 & \left(\frac{1}{d_1 \left(1 - \frac{a}{D_1 - h}\right) \left(1 - \frac{a}{d_1}\right)^3} + \frac{1}{k^2 d_1^2 \left(1 - \frac{a}{D_1 - h}\right)^2 \left(1 - \frac{a}{d_1}\right)^6} \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

где G – обозначенная выше верхняя граница функции $|L + T|$.

Хотя оценка (3.1) со значением M , вычисляемым по формуле (3.9), является грубой, из нее вытекает осуществимость условий, при которых норма оператора $\Phi \rightarrow \mathcal{H}_F(\Phi)$, отображающего пространство $\mathcal{L}_2(\Sigma)$ в $\mathcal{L}_2(W)$, является величиной малой по сравнению с нормами операторов $\Phi \rightarrow \mathcal{J}_F(\Phi)$ и $\Phi \rightarrow \mathcal{I}_F(\Phi)$, действующих в тех же пространствах; следовательно, при наличии таких условий, оператор линейризованного изображения $\Phi \rightarrow \mathcal{I}_F(\Phi)$ можно рассматривать как

аппроксимацию оператора полного изображения $\Phi \rightarrow \mathcal{F}_F(\Phi)$.

Условия, о которых идет речь, известны в физической оптике как условие парааксиальности изображения и условие дифракции Фраунгофера (см. [6], стр. 353).

Пусть $F = \{ \xi, \Sigma, w, \eta \}$ — О.С., в которой Σ , w — квадраты с центрами в q_0 , w_0 и сторонами $2a$, $2b$ — соответственно и $\chi(q) = -\frac{1}{2f} R_{q_0}^2$.

Условие парааксиальности изображения требует в этом случае малости величин $\frac{h}{D_1}$, $\frac{\delta}{D_1}$; условие дифракции Фраунгофера состоит в требовании малости величин $\frac{a}{d_1}$, $\frac{b}{d_1}$, $\frac{a}{D_1}$ и больших значений величины $\frac{ka}{d_1}$.
Выполняя эти требования можно добиться того, чтобы величина

$$\frac{k^2 |\Sigma| M}{2\pi d_1^2} \sqrt{|V| |W|} = m \cdot \frac{4k^2 a^2 b}{d_1^2} \sqrt{|V|}$$

оператора $\Phi \rightarrow \mathcal{K}_F(\Phi)$ было сколь угодно малой, а норма оператора $\Phi \rightarrow \mathcal{F}_F(\Phi)$ была при этом величиной близкой к 1.

Говоря неформальным языком, условие парааксиальности сводится к требованию малости рассматриваемых оптических тел в сравнении с расстояниями до них, а условия дифракции Фраунгофера — к требованию малости диафрагмы и эффективной области в сравнении с расстояниями от объектива О.С. до предмета и экрана, а также к требованию малости длины волны излучаемого света в сравнении с параметром $\frac{a}{f}$ оптической системы F .

4.

В этом разделе рассматривается задача восстановления светящейся части потенциальной поверхности простого слоя по трем заданным линейризованным F — изображениям этой поверхности, сделанным с помощью О.С. некоторым образом расположенных в окружающем пространстве.

Пусть (S, μ) — потенциальная поверхность простого слоя, μ — непрерывная на $\text{Supp } \mu$ функция,

$F^j = \{\xi^j, \Sigma^j, W^j, \kappa^j\}$, $j = 1, 2, 3$ - три О.С. и пусть выполнены условия:

а) $\text{Supp } \mu \subseteq \bigcap_{j=1}^3 F^j$, $q_0^j \in \text{int } \omega(\text{Supp } \mu)$, $S \subseteq F_+^j$,

в) тройка векторов $q_0^1 - p$, $q_0^2 - p$, $q_0^3 - p$ линейно независима для любой точки $p \in \text{Supp } \mu$.

Символом $\mathcal{F}^j(w)$ обозначим линеаризованное F^j - изображение $\mathcal{F}^j(w)$ поверхности (S, μ) . При выполнении вышеприведенных условий имеет место

Т е о р е м а I. По заданным изображениям $\mathcal{F}^j(w)$, $j = 1, 2, 3$ светящаяся часть потенциальной поверхности (S, μ) и плотность μ на ней определяются однозначно, лишь только фиксировано положение хотя бы одной точки $p_0 \in \text{Supp } \mu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . При выполнении условий теоремы для каждой О.С. F^j , $j = 1, 2, 3$ возникает интегральное уравнение

$$\mathcal{F}^j(w) = \int_{\xi^j} \int_{\Sigma^j} \Phi^j(\bar{w}) \Delta_0^j(w - \bar{w}) d\Sigma_{\bar{w}} \quad (4.I)$$

с неизвестной функцией $\Phi^j(\bar{w})$ и ядром $\Delta_0^j(w - \bar{w})$ (см. раздел 2). В силу условий теоремы для функции $\Phi^j(\bar{w})$, связанной с потенциальной поверхностью (S, μ) , должно быть выполнено включение $\text{Supp } \Phi^j(\bar{w}) \subseteq W^j$.

Так как решение каждого из интегральных уравнений (4.I) единственно в классе функций из $L_2(\xi^i)$ с компактным носителем, то функции $\Phi^i(\bar{w})$ однозначно определяются по функциям $\mathcal{F}^i(w)$, $i = 1, 2, 3$. Таким образом, можно считать, что функции $\Phi^i(\bar{w})$ нам известны.

Пусть $\Omega \subseteq E^3$ - множество всех точек пространства, удовлетворяющих условиям:

$$F^i(p) \in \text{Supp } \Phi^i(\bar{w}),$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

Ясно, что $\text{Supp } \mu \subseteq \Omega \subseteq \bigcap_{i=1}^3 F^i$ и Ω обладает внутренними точками.

Векторное поле $X(p)$ на множестве Ω определим условиями:

$$\langle X(p), q^1 - p - \frac{|q_0^1 - p|}{|q_0^j - p|} \frac{\Phi^j(F^j(p)) \cos^3 \eta_0^1(p) R_{pq_0^1}}{\Phi^j(F^j(p)) \cos^3 \eta_0^j(p) R_{pq_0^j}} \times \\ \times \frac{\exp i k R_{pq_0^1}}{\exp i k R_{pq_0^j}} (q_0^j - p) \rangle = 0, \quad j = 2, 3, \quad (4.2)$$

$$\langle X(p), q_j - p \rangle \geq 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$|X(p)| = 1.$$

Нетрудно убедиться, что таким образом векторное поле $X(p)$ определено однозначно всюду на множестве Ω ; ясно также, что поле $X(p)$ непрерывно на Ω .

Покажем, что светящаяся часть исходной поверхности (S, μ) является ортогональным сечением поля $X(p)$.

Действительно, если $p \in \text{Supp } \mu$, то, согласно формуле (2.3),

$$\Phi^j(F^j(p)) = \mu(p) \frac{\cos^3 \eta_0^j(p)}{\cos \zeta_0^j(p)} R_{pq_0^j} \exp i k R_{pq_0^j}, \quad (4.3)$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Подставляя эти выражения в формулу (4.2), получим

$$\langle X(p), (q_0^1 - p) - \frac{|q_0^1 - p| \cos(\widehat{n_p, q_0^1 - p})}{|q_0^j - p| \cos(\widehat{n_p, q_0^j - p})} (q_0^j - p) \rangle =$$

(4.4)

$$= \frac{1}{\langle q_0^j - p, n_p \rangle} \langle X(p), \langle q_0^j - p, n_p \rangle (q_0^1 - p) - \langle q_0^1 - p, n_p \rangle (q_0^j - p) \rangle = 0, \quad j = 2, 3.$$

Следствием уравнений (4.4) является уравнение

(4.5)

$$\langle X(p), \langle q_0^2 - q_0^3, n_p \rangle (q_0^1 - p) - \langle q_0^1 - p, n_p \rangle (q_0^2 - q_0^3) \rangle = 0,$$

полученное вычитанием левых частей уравнений (4.4).

Из уравнений (4.4), (4.5) и условий $\langle X(p), q_0^j - p \rangle \geq 0$, $j = 1, 2, 3$, $|X(p)| = 1$ вытекает, что $X(p) = n_p$ для каждой точки $p \in \text{Supp } \mu$. Следовательно, часть $\text{Supp } \mu$ поверхности S ортогональна полю $X(p)$ в каждой своей точке.

Пользуясь теоремой о единственности поверхности ортогонального сечения векторного поля, проходящей через заданную точку (см. [9]), заключаем, что светящаяся часть $\text{Supp } \mu$ потенциальной поверхности действительно определена однозначно заданием F^j - изображений $\mathcal{F}_j(w)$ поверхности (S, μ) и какой-либо точки $p \in \text{Supp } \mu$. Если светящаяся часть (S, μ) найдена, то плотность μ однозначно определяется из формул (4.3)

В этом разделе и разделе 6 рассматриваются только потенциальные поверхности двойного слоя и, если не оговорено противное, под потенциальной поверхностью понимается всегда потенциальная поверхность двойного слоя.

Если $F = \{t, \Sigma, W, \kappa\}$ - О.С., (S, μ) - потенциальная поверхность двойного слоя, $S \subseteq F_+$, то, в обозначениях раздела 2, для полного изображения U_F потенциальной поверхности (S, μ) с помощью О.С. имеет место представление

$$U_F(w) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} U_{\Sigma}(q) \kappa(q) \frac{\exp i k R_{qw} (ik - \frac{1}{R_{qw}}) \cos \eta}{R_{qw}} d\Sigma_q =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_S \mu(p) \iint_{\Sigma} \frac{\exp ik(R_{qp} + R_{qw} + \chi(q))}{R_{qp} R_{qw}} (ik - \frac{1}{R_{qw}}) \times$$

$$\times (ik - \frac{1}{R_{qp}}) \cos \eta \cos \zeta d\Sigma_q dS_p ;$$

здесь ζ - угол между векторами n_p и q - p.

Приведенным F - изображением потенциальной поверхности (S, μ) будем называть функцию $J_F(w)$, определенную на экране \mathcal{E} формулой

$$J_F(w) = \frac{R_{q_0 w} \exp ik R_{q_0 w}}{\cos \eta_0} U_F(w),$$

здесь q_0 - центр диафрагмы Σ , η_0 - угол между векторами $w - q_0$ и n_p , $w \in \mathcal{E}$.

Пусть ζ_0 обозначает угол между векторами n_p и $q_0 - p$. Принимая обозначения

$$K = K(p, q, w) = \frac{R_{q_0 p} R_{q_0 w} \cos \zeta}{R_{qp} R_{qw} \cos \zeta_0} \left(ik - \frac{1}{R_{qp}} \right) \left(ik - \frac{1}{R_{qw}} \right),$$

$$L = L(p, q, w) = R_{qp} - R_{q_0 p} + R_{qw} - R_{q_0 w} + \chi(q), \text{ напомним}$$

формулу для представления приведенного F - изображения в виде

$$J_F(w) = \int_S \int \mu(p) \cos \zeta_0 D(w, p) dS_p, \text{ где}$$

(5.2)

$$D(w, p) = \frac{1}{2\pi} \frac{\exp ik R_{q_0 p}}{R_{q_0 p}} \int_{\Sigma} K \exp ik L d\Sigma_q.$$

Приведенное линейризованное F - изображение $\mathcal{J}_F(w)$ потенциальной поверхности (S, μ) определим формулами:

$$\mathcal{J}_F(w) = \int_S \int \mu(p) \cos \zeta_0 D_0(w, p) dS_p,$$

$$D_0(w, p) = -\frac{k^2}{2\pi} \frac{\exp ik R_{q_0 p}}{R_{q_0 p}} \int_{\Sigma} \exp -ik T d\Sigma_q, \quad (5.3)$$

$$T = T(p, q, w) = \frac{1}{d_1} \langle q - q_0, v + w - q_0 + d_1 \frac{p - q_0}{\langle p - q_0, n_F \rangle} \rangle,$$

где $v = \text{grad } \chi(q_0)$.

Если $O.C.F = \{\Sigma, \xi, w, \kappa\}$ и потенциальная поверхность (S, μ) таковы, что $S \subseteq F_+$ и $\Sigma \subseteq \omega(\text{Supp } \mu)$, то в формулах 5.2, 5.3 допустима замена переменных $\bar{w} = F(p) = q_0 - d_1 \frac{q_0 - p}{\langle q_0 - p, n_p \rangle}$, $p \in S$. Производя указанную подстановку, получаем формулы:

$$J_F(w) = \int_{\xi} \int \Phi(\bar{w}) \Delta(w, \bar{w}) d\Sigma_{\bar{w}}, \quad (5.4)$$

$$\int_{\xi} J_F(w) = \int_{\xi} \int \Phi(\bar{w}) \Delta_0(w - \bar{w}) d\Sigma_{\bar{w}}, \quad (5.5)$$

где

$$\Phi(\bar{w}) = \begin{cases} \mu(p(\bar{w})) \cos^3 \eta_0(\bar{w}) R_p(\bar{w}) q_0 \exp ik R_p(\bar{w}) q_0, & \text{если } p(\bar{w}) \in \text{Supp } \mu, \\ 0, & \text{если } p(\bar{w}) \in S \setminus \text{Supp } \mu, \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\Delta(w, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi d_1^2} \int_{\Sigma} \int K \exp ik L d\Sigma_q, \quad (5.7)$$

$$\Delta_0(w - \bar{w}) = - \frac{k^2}{2\pi d_1^2} \int_{\Sigma} \int \exp -ik T d\Sigma_q. \quad (5.8)$$

Подобно тому, как это было сделано в разделе 3 для случая потенциальных поверхностей простого слоя, можно с помощью элементарных оценок убедиться в возможности осуществления ситуаций, при которых линейризованное изображение $\mathcal{J}_F(w)$ с хорошей степенью точности аппроксимирует (в норме L_2) полное изображение $J_F(w)$ на эффективной области $w \in O.C. F$.

Линейризованный вариант задачи восстановления потенциальной поверхности двойного слоя по ее F - изображениям ставится также как и в случае потенциальных поверхностей простого слоя: пусть (S, μ) - потенциальная поверхность, $F^i = \{\xi^i, \Sigma^i, w^i, \eta^i\}_{i \in I}$ семейство $O.C.$ и пусть $S \subseteq F^i$ для каждого $i \in I$; спрашивается, в какой мере задание линейризованных F - изображений $\mathcal{J}_{F^i}(w)$ поверхности (S, μ) на множествах $w^i \subseteq E^i$ определяет самое поверхность (S, μ) ?

Как и прежде, ограничиваемся рассмотрением такого взаиморасположения поверхности (S, μ) и $O.C. F^i$, что $\Sigma \subseteq \omega(\text{Supp } \mu)$ для каждого $i \in I$.

Дословно повторяя рассуждения, приведенные в конце раздела 2 о решении интегрального уравнения 5.5, можно считать, что функции-решения $\Phi^i(\bar{w})$ этого уравнения найдены для каждого $i \in I$. После этого задача сводится к выяснению взаимосвязи семейства функций $\{\Phi^i(\bar{w})\}_{i \in I}$ и потенциальной поверхности (S, μ) .

В разделе 6 разбираются вопросы, связанные с возможностью определения поверхности (S, μ) по заданному семейству функций вида $\Phi^i(\bar{w})$; т.е., при условии, что интегральные уравнения 5.5 уже разрешены и мы имеем систему соотношений вида

$$\Phi^i(F^i(p)) = \mu(p) \cos^3 \eta_0^i R_{pq_0^i} \exp ik R_{pq_0^i}, i \in I, \quad (5.9)$$

где функции $\Phi^i(F^i(p)) = N_i(p)$ заданы, а искомая поверхность S и плотность μ неизвестны.

Заметим сразу, что теоремы единственности определения потенциальной поверхности двойного слоя по семейству ее линейризованных изображений в предположениях того же вида, что и в теореме I раздела 4 мы не доказываем; такой теоремы, по-видимому, нет, как нет ее и в другом важном случае определения ламбертовой оптической поверхности по ее фотоизображениям.

В разделе 6 выясняется степень неоднозначности определения исходной поверхности по заданному семейству функций

$$\{\Phi^i(w)\}_{i \in I}$$

З а м е ч а н и е . Пусть (S, μ) - потенциальная поверхность двойного слоя, $F = \{ \Sigma, \xi, w, \kappa \}$ - О.С. с тонкой сферической линзой на диафрагме и пусть $\Sigma \subseteq \omega(\text{Supp } \mu), S \subseteq F_w$. Сопоставим потенциальной поверхности (S, μ) ламбертову оптическую поверхность (S, A) (см. [2]) с яркостью $A(p) = \mu(p)$, а О.С. F сопоставим П.П.С. $F^1 = \{q_0, E, W, D\}$ с фильтрацией $D(p, w) = R_{pq_0} \exp ik R_{pq_0} \delta(w - F(p))$, здесь q_0 - центр диафрагмы Σ , $\delta(\cdot)$ - δ -функция Дирака.

F^1 - изображение $\mathcal{H}(w)$ пары (S, A) задается, согласно [2], формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(w) &= \int_S A(p^1) R_{p^1 q_0} (\exp ik R_{p^1 q_0}) \delta(w - F(p^1)) dS_{p^1} = \\ &= \mu(p) \cos^3 \eta_0 R_{pq_0} \exp ik R_{pq_0} \text{ при } w = F(p). \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с выражением 5.9 видим, что $\Phi(w) = \mathcal{H}(w)$ при $w = F(p)$, $p \in S$ и, следовательно, функцию $\Phi(w)$ можно рассматривать как F^1 - изображение ламбертовой оптической поверхности (S, A) с помощью δ -образной П.П.С. F^1 . На этом основании построения и результаты статьи [2] могут быть использованы и при рассмотрении задачи определения потенциальной поверхности (S, μ) по ее F -

изображениям с помощью О.С. Г. Мы, однако, в следующем разделе рассмотрим интересующие нас вопросы несколько иным способом и более полно, чем это сделано при рассмотрении таких же вопросов в [2].

6.

В этом разделе мы рассмотрим возможность определения параметров потенциальной поверхности двойного слоя по нескольким заданным линеаризованным изображениям этой поверхности, полученных с помощью О.С. из разных точек окружающего пространства. При рассмотрении этого вопроса будем исходить из более общей, по отношению к рассмотренной в предыдущем разделе, постановки.

Все рассуждения в настоящем разделе проводятся для n -мерного евклидова пространства E^n со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$. Терминология и обозначения аналогичны употребляющимся в работе [2] при рассмотрении задачи определения ламбертовой оптической поверхности по ее изображениям с помощью П.С.; в частности, определяемая ниже дифференциальная форма $\omega_Q(p)$ в точности совпадает с формой ω_π работы [2].

Перейдем к формулировке задачи.

Пусть заданы N комплекснозначных функций $c_i(p, q)$, $p, q \in E^n$, непрерывных и непрерывно дифференцируемых по аргументу p при фиксированном q при всех $p \neq q$; пусть $F^i = \{q^i, \xi^i, w^i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ - семейство N проекционных схем (П.С.) (см. [2]); пусть, наконец, (S, μ) - некоторая потенциальная поверхность такая, что $S \subseteq \bigcap_{i=1}^N F^i$, $q^i \in \text{int } \omega(\text{Supp } \mu)$ для $i = 1, 2, \dots, N$. Предположим, что для каждого $i = 1, 2, \dots, N$ в эффективной области w^i П.С. F^i задана функция $\Phi^i(w)$, $w \in w^i$, связанная с функцией $c_i(p, q)$ и потенциальной поверхностью (S, μ) формулой

$$\Phi^i(F^i(p)) = \mu(p) c_i(p, q^i) \cos^n \psi_i(p), p \in S, \quad (6.1)$$

где $\phi_i(p)$ - угол между векторами $p - q_i$ и n_{F^i} .

Спрашивается, в какой мере задание семейства функций $\{\Phi^i\}_{1 \leq i \leq N}$ определяет потенциальную поверхность (S, μ) ?

Если $X \subseteq \mathcal{E}^i$ подмножество экрана \mathcal{E}^i П.С. F^i , то символом F_X^i обозначаем подмножество всех точек p пространства E^n для которых $F^i(p) \in X$.

Введем в рассмотрение функции $G_{ij}(p)$, определенные для каждой $i, j = 1, 2, \dots, N$ в области $F^i \cap F^j$ формулами:

$$G_{ij}(p) = \frac{\Phi^i(F^i(p))}{\Phi^j(F^j(p))} - \frac{c_i(p, q^i) \cos^n \phi_i}{c_j(p, q^j) \cos^n \phi_j} \quad (6.2)$$

Известно, что $G_{ii} \equiv 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots, N$ и что множество $\text{Supp } \mu$ целиком содержится в множестве решений системы уравнений $G_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, N$.

Для выяснения некоторых нужных нам свойств функций G_{ij} дадим вспомогательные определения. Пусть S - гладкая замкнутая поверхность, $p \in S$ и $q \in \text{int } \omega(p)$; пусть m - единичный вектор и выполнены условия $\langle m, n_p \rangle > 0$, $\langle q - p, n_p \rangle > 0$. Определим на поверхности S кривую $T_m(t)$, $t \in [0, \epsilon]$, считая точку $T_m(t)$ ближайшей к точке q точкой пересечения луча, выходящего из точки q в направлении вектора $p + tm - q$, с поверхностью S . Из соображений аналитической геометрии нетрудно вычислить касательный вектор τ_m к кривой $T_m(t)$ в точке p поверхности S и получить формулу

$$\tau_m = m - \frac{\langle m, n_p \rangle}{\langle q - p, n_p \rangle} (q - p). \quad (6.3)$$

Очевидно, что при фиксированной поверхности S кривая T_m , вектор τ_m и число ϵ зависят от взаиморасположения точек p, q, m .

Будем говорить, что кривая $T_m(t)$ (и вектор τ_m) получены проекцией вектора m из точки q на поверхность S в точке p .

Возвращаясь к условиям задачи, предположим, что m - единичный вектор в пространстве E^n такой, что $\langle m, q^i - p \rangle > 0$ для заданной точки $p \in \text{Supp } \mu \subseteq S$ и всех $i = 1, 2, \dots, N$; кривую $T_m^i(t)$ и вектор τ_m^i , полученные проекцией вектора m из точки q^i на поверхность S в точке p обозначим символами $T_i(t)$, τ_i соответственно; функцию $\Phi^i(F^i(p))$, определенную и ненулевую на множестве

$F_{\text{Supp } \mu}^i$, будем обозначать символом $H_i(p)$.

У т в е р ж д е н и е 6.1. Если $p \in \text{Supp } \mu$, то

$$\frac{\partial G_{i,j}(p)}{\partial m} = \frac{H_i(p)}{H_j(p)} \left(\frac{\partial \ln \mu(p) c_j(p, q^i)}{\partial \tau_i} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \ln \mu(p) c_j(p, q^j)}{\partial \tau_j} - \frac{\partial \ln c_j(p, q^i)}{\partial m} \frac{c_j(p, q^j)}{c_j(p, q^i)} \right). \quad (6.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Согласно определению производной по заданному направлению,

$$\frac{\partial G_{i,j}(p)}{\partial m} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G_{i,j}(p+tm) - G_{i,j}(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{H_i(p+tm)}{H_j(p+tm)} - \frac{H_i(p)}{H_j(p)} - \frac{c_i(p+tm, q^i) \cos^n \phi_i(p+tm)}{c_j(p+tm, q^j) \cos^n \phi_j(p+tm)} - \frac{c_i(p, q^i) \cos^n \phi_i(p)}{c_j(p, q^j) \cos^n \phi_j(p)} \right].$$

Замечая, что $H_k(p+tm) = \mu(T_k(t)) c_k(T_k(t), q^k) \cos^n \phi_k(p+tm)$, $\left. \frac{d \mu(T_k(t))}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\partial \mu(p)}{\partial \tau_k}$,

пользуясь представлением непрерывно-дифференцируемой функции $f(p)$ вида $f(p+tm) = f(p) + t \frac{\partial f}{\partial m}(p) + O(t)$ и производя несложные арифметические преобразования, приходим к искомой формуле.

Используя выражение 6.3, формулу для $\frac{\partial G_{i,j}}{\partial m}$ утверждения 6.1 можно привести к виду

$$\frac{\partial G_{i,j}}{\partial m} = \frac{\langle m, n_p \rangle}{\langle m_j, n_p \rangle} \frac{\partial \ln \mu(p) c_j(p, q^j)}{\partial m_j} - \frac{\langle m, n_p \rangle}{\langle m_i, n_p \rangle} \frac{\partial \ln \mu(p) c_i(p, q^i)}{\partial m_i} \quad (6.6)$$

где $m_i = \frac{q^i - p}{|q^i - p|}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$.

Отметим два частных случая этой формулы, которые условно назо-

вем запись $\frac{\partial G_{ij}(p)}{\partial m}$ в форме α) и β).

α) пусть $m = m_1 = \frac{q^i - p}{|q^i - p|}$; тогда

$$\frac{\partial G_{ij}(p)}{\partial m_1} = \frac{\langle m_1, n_p \rangle}{\langle m_j, n_p \rangle} \frac{\partial \ln \mu(p) c_j(p, q^j)}{\partial m_j} - \frac{\partial \ln \mu(p) c_i(p, q^i)}{\partial m_1} \quad (6.7)$$

β) положим $m = n_p$ - нормаль к S в точке p ; в этом случае

$$\frac{\partial G_{ij}(p)}{\partial n_p} = \frac{1}{\langle m_j, n_p \rangle} \frac{\partial \ln \mu(p) c_j(p, q^j)}{\partial m_j} - \frac{1}{\langle m_i, n_p \rangle} \frac{\partial \ln \mu(p) c_i(p, q^i)}{\partial m_i} \quad (6.8)$$

Утверждение 6.2. $\frac{\partial G_{ij}(p)}{\partial m} = - \frac{H_i^2(p)}{H_j^2(p)} \frac{\partial G_{ji}(p)}{\partial m}$,

$i, j = 1, 2, \dots, N, p \in V_{ij}$.

Доказательство. Сразу следует из формулы 6.5.

Утверждение 6.3. Если при фиксированном k ($1 \leq k \leq N$) $\frac{\partial G_{ik}}{\partial m} = 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots, N$, то $\frac{\partial G_{ij}(p)}{\partial m} = \frac{H_i(p)}{H_k(p)} \frac{\partial G_{kj}(p)}{\partial m}$ при любых $i, j = 1, 2, \dots, N$.

Доказательство. Если $\frac{\partial G_{ik}}{\partial m} = 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots, N$, то из формулы 6.5. следует, что

$$\frac{\partial \ln \mu(p) c_i(p, q^i)}{\partial \tau_1} - \frac{\partial \ln c_i(p, q^i)}{\partial m} = \frac{\partial \ln \mu(p) c_k(p, q^k)}{\partial \tau_k} - \frac{\partial \ln c_k(p, q^k)}{\partial m}$$

для тех же значений i . Теперь, заменяя в формуле для $\frac{\partial G_{ij}}{\partial m}$ выражение, совпадающее с левой частью этого равенства выражением, стоящим в правой части и производя очевидные арифметические операции, получаем искомую формулу настоящего утверждения. Векторное поле $m(p)$, определенное на светящейся части потенциальной поверхности (S, μ) , назовем положительным, если $\langle m(p), n_p \rangle > 0$ для каждой точки $p \in \text{Supp } \mu$.

Напомним, что наши рассуждения проводятся в n -мерном пространстве E^n .

Семейство точек $\{q^i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ назовем разрешенным относительно потенциальной поверхности (S, μ) , если $q^i \in \text{int } \omega(\text{Supp } \mu)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и система векторов $\{q^i - p\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, линейно независима для каждой точки $p \in \text{Supp } \mu$. Заметим, что если семейство точек $\{q^i\}$ является разрешенным относительно (S, μ) , то векторное поле $m_i(p) = \frac{q^i - p}{|q^i - p|}$ положительно при любом $i = 1, 2, \dots, n$.

Напомним, что одномерной дифференциальной формой, определенной на подмножестве X гладкой замкнутой поверхности S , называется функция, сопоставляющая каждой точке $p \in X$ линейный функционал $\omega(p)$, определенный на касательном пространстве к поверхности S в точке p . Значение формы $\omega(p)$ на векторе h , касательном к поверхности S в точке p , записываем в виде $[\omega(p)](h)$. Дифференциал гладкой функции f на X является дифференциальной формой, которую будем обозначать символом $df(p)$. Пусть $m(p)$ — положительное векторное поле на светящейся части потенциальной поверхности

(S, μ) , $Q = \{q^i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, — разрешенное относительно (S, μ) множество точек из E^n ; зададимся целым числом k , $1 \leq k \leq n$.

Дифференциальную форму $\omega_{Q, m, k}(p)$ определим на множестве $\text{Supp } \mu$ условиями:

$$а) [\omega_{Q,m,k}(p)](\tau_k - \tau_j) = \frac{d \ln c_j(p, q^j)}{\partial \tau_j} -$$

$$- \frac{\partial \ln c_k(p, q^k)}{\partial \tau_k} + \frac{\partial \ln (c_k(p, q^k)}{\partial m} \left(\frac{c_k(p, q^k)}{c_j(p, q^j)} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

в) если h - касательный к S вектор в точке p , то имеет место единственное разложение $h = \sum_{j \neq k}^n \alpha_j (\tau_k - \tau_j)$; в этом случае полагаем

$$[\omega_{Q,m,k}(p)](h) = \sum_{j \neq k}^n \alpha_j [\omega_{Q,m,k}(p)](\tau_k - \tau_j).$$

У т в е р ж д е н и е 6.4. Дифференциальная форма $\omega_{Q,m,k}(p)$ не зависит от выбора числа k и векторного положительного поля m .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Одно из доказательств этого утверждения можно получить, проделав ряд элементарных, но громоздких преобразований, устанавливающих равенство двух дифференциальных форм, соответствующих выбору разных полей m и чисел k . Здесь мы дадим другое схематичное, но короткое доказательство.

Как видно из формулы 6.5, $\frac{\partial G_{kj}}{\partial m} = \frac{H_k(p)}{H_j(p)} \left(\frac{\partial \ln \mu}{\partial (\tau_k - \tau_j)} -$

$$- [\omega_{Q,m,k}(p)](\tau_k - \tau_j) \right), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Выберем функцию μ так, чтобы $\frac{\partial G_{kj}(p)}{\partial m} = 0$ для каждого $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда, как следует из утверждений 6.2,

6.3, $\frac{\partial G_{kj}(p)}{\partial m} = 0$ для каждого $k, j = 1, 2, \dots, n$, и, следовательно, $\frac{\partial \ln \mu(p)}{\partial (\tau_k - \tau_j)} = [\omega_{Q,m,k}(p)](\tau_k - \tau_j)$ для всех $k, j = 1, 2, \dots, n$, т.е., $d \ln \mu(p) = \omega_{Q,m,k}(p)$. Поскольку дифференциал $d \ln \mu(p)$ от выбора поля m и числа k не зависит, то это же самое можно сказать и о форме $\omega_{Q,m,k}(p)$.

Единственное недоказанное предположение, использованное нами при доказательстве — возможность выбора плотности μ , влекущую уравнения $\frac{\partial G_{kj}(p)}{\partial m} = 0$ для каждого $j = 1, 2, \dots,$

n , нетрудно установить из следующих соображений. Если $\lambda_j = d \ln \mu(p)[\tau_k - \tau_j] - [\omega_{Q,m,k}(p)](\tau_k - \tau_j)$ и $\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \neq 0$,

построим дифференцируемую функцию $\mu^*(p)$, $p \in \text{Supp } \mu$, для которой $d\mu^*(p, \tau_k - \tau_j) = \lambda_j$ и положим $\mu''(p) = \mu(p) - \mu^*(p)$.

Легко видеть, что для потенциальной поверхности (S, μ'') и множества Q форма $\omega_{Q,m,k}(p)$ осталась прежней и

$\frac{\partial G_{kj}''(p)}{\partial m} = 0$ для каждого $j = 1, 2, \dots, n$. Утверждение доказано.

Дифференциальную форму $\omega_{Q,m,k}(p)$ будем обозначать теперь символом $\omega_Q(p)$.

Точку $p \in S$ назовем критической для потенциальной поверхности (S, μ) , если $dG_{ij}(p) = 0$ для каждого $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Т е о р е м а 2. Точка $p \in S$ — критическая для потенциальной поверхности (S, μ) тогда и только тогда, когда $d\mu(p) = \omega_Q(p)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Сразу следует из формулы

$$\frac{\partial G_{ij}(p)}{\partial n_p} = \frac{H_i(p)}{H_j(p)} \left(\frac{\partial \ln \mu}{\partial (\tau_1 - \tau_j)} - \omega_Q(p)(\tau_1 - \tau_j) \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \text{ и}$$

очевидных равенств $\frac{\partial G_{1j}(p)}{\partial \tau_k} = 0$ для всех $i, j, k = 1, 2, \dots, n$.

Здесь n_p - нормаль к поверхности S в точке p , τ_k - проекция вектора n_p из точки $q^k \in Q$ на поверхность S в точке p . Конкретизируя вид весовой функции $c(p, q)$ рассмотрим два частных случая.

1. $c_1(p, q)$ при каждом i - постоянная функция с общим значением c_1 . Этот случай соответствует рассмотрению ламбертовых оптических поверхностей и их изображений с помощью δ -образных П.П.С. с весовой функцией c_1 .

В этом случае форма ω_Q является нулевой формой на любой потенциальной поверхности (S, μ) . Точка $p \in S$ будет критической точкой для системы уравнений 6.2, если и только если точка p является критической точкой для плотности μ на поверхности S . В двух крайних случаях вопрос единственности восстановления потенциальной поверхности по разрешенной системе ее изображений решается тривиально: если плотность μ постоянна на светящейся части, то однозначно определяется лишь граница светящейся части, а в остальном светящаяся часть поверхности произвольна и не может быть зафиксирована указанием одной или нескольких точек на ней; если же плотность μ не имеет на внутренности своей светящейся части критических точек, то светящаяся часть определяется из уравнений 6.2 однозначно, лишь только указана хотя бы одна точка на ней.

Если указанные крайние случаи не имеют места, то задачу восстановления можно ставить в некоторых, достаточно широких классах потенциальных поверхностей при наличии той или иной дополнительной информации либо о поверхностях, либо о плотностях потенциальных поверхностей выбранного класса.

2. Пусть $c_j(p, q) = R_{qp^j} \exp ik R_{pq^j}$ для каждого $j = 1, 2, \dots, n$. Этот случай соответствует рассмотрению потенциальных поверхностей двойного слоя и их линеаризованных изображений с помощью О.С. в смысле раздела 5 этой статьи.

Форма ω_Q имеет в записи α) вид

$$[\omega_Q(p)](\tau_j) = ik \left(\frac{\langle m_1, n_p \rangle}{\langle m_j, n_p \rangle} - 1 \right) + \left(\frac{\langle m_1, n_p \rangle}{\langle m_j, n_p \rangle} \frac{1}{R_{pq}^j} - \frac{1}{R_{pq}^1} \right), j=1, 2, \dots, n;$$

здесь опорное поле $m = m_1$, i - мнимая единица, k - волновое число.

Если точки q^1 достаточно удалены от поверхности, то вещественной частью выражений в правой части можно пренебречь и приближенно можно записать

$$[\omega_Q(p)](\tau_j) \approx ik \left(\frac{\langle m_1, n_p \rangle}{\langle m_j, n_p \rangle} - 1 \right), j = 1, 2, \dots, n.$$

При больших значениях числа k (т.е. на больших частотах волнового поля) характерной особенностью формы ω_Q является большая величина ее мнимой части по отношению к действительной в каждой точке поверхности (под величиной дифференциальной формы в точке p понимается норма соответствующего в точке p функционала).

Вопрос единственности восстановления потенциальной поверхности по разрешенной системе ее линеаризованных F - изображений и в этом случае требует соотношения с тем или иным подклассом общей совокупности потенциальных поверхностей, так как в общем случае единственность восстановления не может быть гарантирована.

Л и т е р а т у р а .

1. Лаврентьев М.М., Кирейтов В.Р. Об одном классе отображений биповерхностей трехмерного пространства. ДАН СССР, т. 216, № 2, 1974.
2. Лаврентьев М.М., Кирейтов В.Р. О точках ветвления оптических гиперповерхностей. ДАН СССР, т. 221, № 5, 1975.

3. Кирейтов В.Р. Об одном классе отображений биповерхностей трехмерного пространства. - В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. 5, часть I, Новосибирск, 1974.
4. Кирейтов В.Р. О некоторых свойствах $(n - 1)$ -мерных поверхностей в n -мерном пространстве. - В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. 5, часть 2, Новосибирск, 1974.
5. Кирейтов В.Р. О некоторых свойства $(n - 1)$ -мерных поверхностей в n -мерном пространстве. - В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. 5, ч. I, Новосибирск, 1975.
6. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., "Наука", 1973.
7. Гудмен Д. Введение в Фурье-оптику. М., "Мир", 1970
8. Гуревич М.М. Введение в фотометрию. Л., "Энергия", 1968.
9. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., Гостехиздат, 1948.

Р.Г.Мухометов

О ЗАДАЧЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассматривается задача нахождения функции $u(x, y)$ в плоской замкнутой области \bar{D} , если известны интегралы от нее по всякой кривой из заданного семейства K . Существенное требование для справедливости основных результатов работы заключается в том, чтобы для любой точки из D существовали в K кривые, проходящие в любом направлении через эту точку. Приведем некоторые результаты по этой задаче для плоских областей. В случае задания интегралов по прямым эта задача сделана Радоном (см., например, [1]), для полуокружностей, опирающихся на прямую, была решена Р.Курантом [2]. В последнее время рядом авторов были получены теоремы единственности для других конкретных кривых. Для некоторых общих классов кривых известны следующие результаты. В работе [3] задача рассматривалась для кривых, инвариантных к сдвигу относительно координатной оси. В работе [4] доказана теорема единственности для гладких кривых, но для достаточно малых областей задания искомой функции. Величина области зависела от максимальной кривизны кривых.

В настоящей работе совершенно отличными от [1-4] методами доказана теорема единственности в плоском случае для достаточно гладких кривых и для произвольной области задания искомой функции. Получена также оценка устойчивости решения для случая ограниченной области.

Отметим, что в [2-3] задача интегральной геометрии рассматривалась в другой постановке. А именно, в работе [2] теорема единственности получается для случая, когда семейство K состоит из всех тех полуокружностей, которые целиком лежат в некоторой определенной полуокружности и концы их всех опираются на одну и ту же прямую. В работе [3] единственность задачи получается в случае, когда семейство K заполняет полосу, бесконечную в обе стороны или круговое кольцо. В этих задачах, как нетрудно видеть, не требуется ограничение, сформулированное в самом начале введения на семейство кривых K .

1. Постановка задачи, теорема единственности и оценка устойчивости.

Пусть D - плоская, ограниченная, односвязная область, имеющая гладкую границу Γ :

$$x = \xi(z), \quad y = \eta(z), \quad z \in [0, L], \quad \xi(0) = \xi(L), \quad \eta(0) = \eta(L), \quad (I)$$

где z - длина кривой Γ . В \bar{D} заданы гладкие кривые уравнениями

$$x = \phi(x_0, y_0, \theta; s), \quad y = \psi(x_0, y_0, \theta, s), \quad (2)$$

где (x_0, y_0) - точка, из которой выходит кривая под углом θ , переменный параметр s есть длина дуги. Множество определения функций ϕ и ψ есть множество $T = \{(x_0, y_0, \theta, s) \mid (x_0, y_0) \in \bar{D}, \theta \in [0, 2\pi], s \in [0, l(x_0, y_0, \theta)]\}$, где $l(x_0, y_0, \theta)$ - длина части кривой, выходящей из точки (x_0, y_0) под углом θ и лежащей между (x_0, y_0) и точкой пересечения кривой с границей. Из дальнейших ограничений будет ясно, что функция

$l(x, y, \theta)$ будет всегда корректно определена.

Пусть множество кривых (2) будет таково, что его можно рассматривать как дупараметрическое семейство кривых $K(\gamma, z)$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) через любые две различные точки из \bar{D} проходит единственная кривая $K(\gamma, z)$; каждая кривая семейства $K(\gamma, z)$ пересекает Γ в точках $(\xi(z), \eta(z))$ и $(\xi(\gamma), \eta(\gamma))$, другие точки не лежат на Γ ; длины всех кривых равномерно ограничены;

б) $\phi \in C^3(T)$, $\psi \in C^3(T)$, причем все производные этих функций равномерно ограничены в T ;

в) $\frac{1}{s} \frac{D(\phi, \psi)}{D(\theta, s)} \geq c > 0$, где c - постоянная;

г) $\phi(x, y, 0, s) = \phi(x, y, 2\pi, s)$, $\psi(x, y, 0, s) = \psi(x, y, 2\pi, s)$, аналогичные равенства справедливы также для производных от этих функций до третьего порядка включительно.

Из способа задания кривых (2) и множества T следует, что через любую точку D в любом направлении проходит единственная кривая семейства $K(\gamma, z)$.

Сформулируем теперь основную задачу. Пусть $u(x, y) \in C^2(\bar{D})$ и

$$v(\gamma, z) = \int_{K(\gamma, z)} u(x, y) ds. \quad (3)$$

По данным кривым $K(\gamma, z)$ и функции $v(\gamma, z)$, заданной в прямоугольнике $0 \leq \gamma$, $z \leq L$, требуется определить $u(x, y)$ на множестве \bar{D} . Иначе говоря, нам известна функция v , заданная на любой паре точек границы Γ . Через каждую пару таких точек проходит единственная кривая из семейства K и смысл функции v дается формулой (3).

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Т е о р е м а I. Если ограниченная односвязная область D имеет кусочно-гладкую границу, семейство кривых (2) удов-

летворяет условиям а)-г), то задача интегральной геометрии (3) может иметь в пространстве функций $u(x,y) \in C^2(\bar{D})$ не более одного решения и имеет место оценка устойчивости

$$\|u\|_{L_2(\bar{D})} \leq (2\pi)^{-1/2} \|v_z(\gamma, z)\|_{L_2([0,L] \times [0,L])}. \quad (4)$$

В этом пункте теорема будет доказана для D с гладкой границей. В п^0_4 доказательство теоремы будет завершено для случая кусочно-гладкой границы. Вместо уравнения (3) будем рассматривать эквивалентную задачу, поставленную для некоторого дифференциального уравнения. Введем функцию

$$w(x, y, z) = \int_{K(x,y,z)} u \, ds, \quad (5)$$

где $K(x, y, z)$ — часть кривой из семейства $K(\gamma, z)$, соединяющая точки (x, y) и $(\xi(z), \eta(z))$, и $(x, y, z) \in \Omega = \bar{D} \times [0, L]$. Функция $w(x, y, z)$ обладает следующими дифференциальными свойствами:

1) $w(x, y, z) \in C(\Omega)$ и имеет непрерывные производные до второго порядка включительно на множестве

$$\Omega_1 = \Omega \setminus \{(\xi(z), \eta(z), z) \mid z \in [0, L]\};$$

2) производные w_x, w_y, w_z ограничены в Ω_1 , а w_{xz}, w_{yz}, w_{xy} в окрестности любой точки вида $(\xi(z), \eta(z), z)$ могут иметь особенность типа $[(x - \xi(z))^2 + (y - \eta(z))^2]^{-1/2}$. Эти свойства вытекают из условий а)-г) и принадлежности $u(x, y)$ классу $C^2(\bar{D})$. Они будут доказаны в п^0_3 .

Дифференцируя (5) в направлении касательной к $K(x, y, z)$ в точке (x, y) , имеющим угол $\theta(x, y, z)$, получим

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta = u(x, y). \quad (6)$$

Функция $\theta(x, y, z)$ дифференцируема на множестве Ω_1 .
 Производная θ_z в окрестности любой точки вида $(\xi(z), \eta(z), z)$ имеет особенность типа $[(x-\xi(z))^2 + (y-\eta(z))^2]^{-1/2}$.
 Это будет доказано в п⁰2.

Дифференцируя (6) по z , получим уравнение

$$Lw \equiv \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \right) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega_1. \quad (7)$$

Из данных задачи (3) получаем для w граничное условие $w(\xi(z), \eta(z), z) = v(\gamma, z)$, причем $v(z, z) = 0$. (8)

Если семейство $K(\gamma, z)$ удовлетворяет условиям а)-г), то задача (3) при условии $u(x, y) \in C^2(\bar{D})$ эквивалентна задаче (7)-(8) при условии, что функция $w(x, y, z)$ обладает свойствами I)-2). Получение уравнения (7) с условием (8) из (3) было показано выше. Если имеем (7)-(8), то интегрируя (7) по z , получим (6) с некоторой функцией $u(x, y)$, а потом интегрируя (6) по кривым $K(\gamma, z)$ и используя оба условия из (8), получим (3). Функции $w(x, y, z)$ и $u(x, y)$ взаимно выражаются с помощью формул (5), (6).

Из определения множества Ω следует, что Ω гомеоморфно тору, а данные (8) заданы на всей поверхности этого тора Ω . Функция $w(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению (7) на множестве Ω_1 , т.е. на торе Ω , исключая особую кривую $x = \xi(z)$, $y = \eta(z)$, лежащую на поверхности Ω .

Уравнение (7) является линейным уравнением гиперболо-параболического типа с двумя семействами бихарактеристик, одним из которых является семейство кривых $K(x, y, z)$, а другим - семейство прямых $x = x_0$, $y = y_0$, где $(x_0, y_0) \in \bar{D}$. Поверхность тора Ω , на которой заданы граничные условия (8), является следовательно характеристической поверхностью.

Для уравнения (7) можно поставить другую задачу. Для этого зададим следующие данные:

$$w(x, y, z) \Big|_{z=0} = f(x, y), \quad (8')$$

$$w(\xi(z), \eta(z), z) = 0. \quad (8'')$$

Нетрудно заметить, что поверхность $z = 0$ является характеристической поверхностью. Задача (7), (8'), (8'') решается очевидным образом. Из (8') находим

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta(x, y, 0) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta(x, y, 0) = u(x, y). \quad (8''')$$

Интегрируя (7) по z с использованием (8''), а затем интегрируя полученный результат по каждой кривой $K(\gamma, z)$ с использованием (8''), получаем искомую функцию $w(x, y, z)$ на всем множестве Ω . Эту задачу обычно называют прямой. Задачу же (3), или эквивалентную ей задачу (7)-(8), называют обратной.

Приступим к доказательству теоремы I. Для $(x, y, z) \in \Omega$, имеем

$$2\left(-\frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta\right) L w \equiv \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta\right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta\right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \quad (9)$$

Для проверки можно открыть скобки и, используя тождество $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, после приведения подобных членов получим исходное выражение.

Отделим от Ω ε - окрестность особой кривой $x = \xi(z)$, $y = \eta(z)$, $z \in [0, L]$ такую, чтобы оставшееся множество имело кусочно-гладкую границу. Как это можно сделать, будет

показано в п⁰2. Границу между множеством Ω^ϵ и ϵ - окрестностью особой кривой обозначим через T^ϵ , остальную часть границы множества Ω^ϵ обозначим через G^ϵ .

Интегрируя (9) по множеству Ω^ϵ и применяя формулу Остроградского, получим:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega^\epsilon} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega^\epsilon + \iint_{T^\epsilon} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta \right) \cos(N, z) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \cos(N, y) + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \cos(N, x) \right] dT^\epsilon + (10) \\ & + \iint_{G^\epsilon} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \cos(N, x) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \cos(N, y) \right] dG^\epsilon = 0, \end{aligned}$$

где $\cos(N, x)$, $\cos(N, y)$, $\cos(N, z)$ - компоненты единичного вектора внешней нормали к границе множества Ω^ϵ . В равенстве (10) совершим предельный переход, заключающийся в стягивании ϵ - окрестности особой кривой к самой кривой. Тогда интеграл $\iint_{T^\epsilon} [\dots] dT^\epsilon$ в (10) из-за ограниченности первых производных от w будет стремиться к 0. В результате будем иметь

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega = \iint_G \frac{\partial w}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \cos(N, y) - \frac{\partial w}{\partial y} \cos(N, x) \right] dG, \quad (11)$$

где G есть граница Ω . Выразим правую часть в (II) через известную функцию $v(\gamma, z)$. Вектор $(-\cos(N, y), \cos(N, x), 0)$ является касательным к поверхности G и ортогональным к оси z . Отсюда нетрудно заметить, что

$$-\frac{\partial w}{\partial x} \cos(N, y) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(N, x) \Big|_G = \frac{\partial v}{\partial \gamma}.$$

Очевидно также, что $\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_G = \frac{\partial v}{\partial z}$. Далее, интеграл по поверхности G в (II) выразится просто через повторный интеграл, если учесть, что G можно представлять в виде прямого цилиндра с перпендикулярными основаниями. Из всего сказанного следует

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega = - \int_0^L \int_0^L \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial \gamma} dz d\gamma. \quad (I2)$$

В уравнении границы (I) выберем такое направление обхода Γ , чтобы функция $\theta(x, y, z)$ была монотонно-возрастающей по z . Поэтому можно считать $\frac{\partial \theta}{\partial z} \geq 0$. Отсюда из (I2) очевидно следует единственность задачи (7)-(8), а следовательно и задачи (3). Получим теперь оценку устойчивости для $u(x, y)$.

Если возвести обе части равенства (6) в квадрат, то получим

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = u^2(x, y) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta \right)^2. \quad (I3)$$

Если подставить (I3) в (I2), то левая часть в равенстве (I2) оценивается снизу величиной $\iiint_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial z} u^2(x, y) d\Omega$.

Применяя теперь теорему Лебега-Фубини и учитывая равенство

$$\int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial z} dz = 2\pi, \quad \text{из (I2) получаем}$$

$$\iint_D u^2 dx dy \leq -(2\pi)^{-1} \int_0^L \int_0^L \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial \gamma} d\gamma dz. \quad (I4)$$

Используя неравенство Коши и равенство $v(\gamma, z) = v(z, \gamma)$ для интеграла в правой части (I4) имеем оценку:

$$-\int_0^L \int_0^L \frac{\partial v}{\partial \gamma} \frac{\partial v}{\partial z} d\gamma dz \leq \left[\int_0^L \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 d\gamma dz \right]^{1/2} \left[\int_0^L \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial \gamma} \right)^2 d\gamma dz \right]^{1/2} = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 d\gamma dz$$

Из (I4) и (I5) получаем оценку устойчивости, приведенную в теореме I. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В неравенстве (I4) равенство достигается в том случае, если кривые $K(\gamma, z)$ есть геодезические в метрике $ds = u(x, y)(dx^2 + dy^2)^{1/2}$. Конечно, при этом функция $u(x, y)$ должна быть такова, чтобы семейство $K(\gamma, z)$ обладало перечисленными в условии теоремы свойствами. Если при этом $u(x, y) = \text{const}$, а область D есть круг, то равенство достигается даже в (I4), т.к. в этом случае $\frac{\partial v}{\partial \gamma} = -\frac{\partial v}{\partial z}$.

З а м е ч а н и е 2. Правая часть равенства (I2) должна быть очевидно неотрицательной, хотя подинтегральное выражение $\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial \gamma}$ не во всех случаях бывает знакопостоянно. Однако с помощью замены переменных это выражение можно представить в виде суммы двух знакопостоянных слагаемых. Для этого, делая замену переменных $r = \frac{z - \gamma}{2}$, $p = \frac{z + \gamma}{2}$, получим

$$-\int_0^L \int_0^L \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial \gamma} dz d\gamma = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dr \int_{|r|}^{L-|r|} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)^2 \right] dp.$$

В новых переменных оценка устойчивости получается в виде

$$\|u\|_{L_2(D)} \leq (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial v}{\partial r} \right\|_{L_2(\tilde{G})},$$

где \tilde{G} - область изменения переменных r, p . Можно также получить следующее неравенство для данных нашей задачи, кото-

рое можно считать как одно из необходимых условий для существования решения задачи (3):

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial r} \right\|_{L_2(\tilde{G})} \geq \left\| \frac{\partial v}{\partial p} \right\|_{L_2(\tilde{G})}.$$

2. О дифференциальных свойствах кривых семейства $K(\gamma, z)$.

Используя (2) рассмотрим s и θ как функции точек $(x, y) \in D$ и $(\xi(z), \eta(z)) \in \Gamma$. Обозначая эти функции через $s = s(x, y, z)$ и $\theta = \theta(x, y, z)$, имеем для них систему уравнений

$$\xi(z) = \varphi(x, y, \theta, s), \quad \eta(z) = \psi(x, y, \theta, s), \quad (I6)$$

где $(x, y, z) \in \Omega_1$.

Л е м м а I. $\varphi_{\theta\theta} = s f_1(x, y, s, \theta)$, $\psi_{\theta\theta} = s f_2(x, y, s, \theta)$,
 $\varphi_{\theta s} = s f_3(x, y, s, \theta)$, $\psi_{\theta s} = s f_4(x, y, s, \theta)$ $f_1(x, y, 0, \theta) = -\sin \theta$
 $f_2(x, y, 0, \theta) = \cos \theta$, где $f_1(x, y, s, \theta)$ — непрерывные и ограниченные на множестве T функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Имеем

$$\varphi_{\theta\theta}(x, y, \theta, s) = \int_0^s \varphi_{\theta\theta\theta}(x, y, \theta, \tilde{s}) d\tilde{s}. \quad (I7)$$

В формуле (I7) считаем $\varphi(x, y, \theta, 0) = x$, поэтому $\varphi_{\theta\theta}(x, y, \theta, 0) = 0$. Так как $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi_s = \cos \theta$, то

$$\varphi_{s\theta} \Big|_{s=0} = -\sin \theta. \quad (I8)$$

Поэтому из (I7) следует $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi_\theta}{s} = -\sin \theta$. Отсюда можно получить $f_1(x, y, s, \theta) = \frac{1}{s} \Phi_\theta(x, y, s, \theta)$ $f_1(x, y, 0, \theta) = -\sin \theta$.

Дифференцируя (I7) и (I8) по θ , можно аналогично получить утверждение леммы для $\Phi_{\theta\theta}$. Аналогично доказываются утверждения для Φ_θ и $\Phi_{\theta\theta}$. Лемма доказана.

В лемме 2 через $f_1(x, y, z)$ будем обозначать непрерывные и ограниченные в Ω_1 функции.

$$\text{Л е м м а 2. } \theta_z = \frac{1}{s(x, y, z)} f_5(x, y, z), \theta_x = \frac{1}{s(x, y, z)}$$

$$f_6(x, y, z), \theta_y = \frac{1}{s(x, y, z)} f_7(x, y, z), \theta_{zx} = \frac{1}{s^2(x, y, z)} f_8(x, y, z),$$

$$\theta_{zy} = \frac{1}{s^2(x, y, z)} f_9(x, y, z), s_{zx} = \frac{1}{s(x, y, z)} f_{10}(x, y, z), s_{zy} =$$

$$= \frac{1}{s(x, y, z)} f_{11}(x, y, z), \text{ а } s_z(x, y, z), s_x(x, y, z), s_y(x, y, z)$$

являются непрерывными и ограниченными функциями в Ω_1 .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Дифференцируя оба равенства в (I6) по z , что можно делать в силу условий б) и в) п⁰I и теоремы о неявных функциях, имеем

$$\xi_z = \Phi_\theta \theta_z + \Phi_s s_z, \quad \eta_z = \Phi_\theta \theta_z + \Phi_s s_z. \quad (\text{I9})$$

Отсюда, используя лемму I,

$$s_z = \frac{\eta_z(z) \cdot f_1(x, y, \theta, s) - \xi_z(z) f_2(x, y, \theta, s)}{\frac{1}{s} \frac{D(\Phi, \Phi)}{D(s, \theta)}}$$

и для s_z утверждения леммы доказано. Аналогично доказываются утверждения относительно остальных производных. Лемма доказана.

3. 0 дифференциальных свойствах функции

$w(x, y, z)$.

Представляя формулу (5), определяющую функцию $w(x, y, z)$ с помощью обычного интеграла, получим

$$w(x, y, z) = \int_0^{s(x, y, z)} u(t, l) d\tilde{s}, \quad (20)$$

где

$$(21)$$

$$t = t(x, y, z, \tilde{s}) \equiv \varphi[x, y, \theta(x, y, z), \tilde{s}], \quad l = l(x, y, z, \tilde{s}) \equiv \psi[x, y, \theta(x, y, z), \tilde{s}].$$

Функции $s(x, y, z)$, $\theta(x, y, z)$ определены в Π^0_2 .

$$\begin{aligned} \text{Л е м м а 3. } t_{zx} &= \frac{1}{s(x, y, z)} f_{12}(x, y, z, \tilde{s}), \quad t_{zy} = \\ &= \frac{1}{s(x, y, z)} f_{13}(x, y, z, \tilde{s}), \quad l_{zx} = \frac{1}{s(x, y, z)} f_{14}(x, y, z, \tilde{s}), \\ & \quad l_{zy} = \frac{1}{s(x, y, z)} f_{15}(x, y, z, \tilde{s}), \end{aligned}$$

где f_i - непрерывные и ограниченные в $\Omega_2 = \{(x, y, z, \tilde{s}) | (x, y, z) \in \Omega_1, \tilde{s} \in [0, s(x, y, z)]\}$ функции, а производные $t_z, t_x, t_y, l_z, l_x, l_y$ непрерывны и ограничены в Ω_2 .

Доказательство. Из (21) имеем

$$t_z = \varphi_\theta \theta_z, \quad t_x = \varphi_x + \varphi_\theta \theta_x, \quad t_y = \varphi_y + \varphi_\theta \theta_y. \quad (22)$$

Используя теперь леммы I, 2 завершаем доказательство для t_z, t_x, t_y . Аналогично доказываются утверждения относи-

тельно l_x, l_y, l_z . Из (22) получаем $t_{zx} = \varphi_{\theta x} \theta_z + \varphi_{\theta \theta} \theta_z \theta_x + \varphi_{\theta} \theta_{zx}$. Отсюда, используя леммы 1, 2 получаем доказательство для t_{zx} . Аналогично доказываются утверждения для других производных. Лемма доказана.

Используя доказанную лемму и принадлежность функции $u(x, y)$ к классу $C^2(D)$, из (20) имеем

$$w_z = s_z u[\xi(z), \eta(z)] + \int_0^{s(x, y, z)} (u_t t_z + u_{\theta} l_z) d\bar{s}, \quad (23)$$

$$w_{zx} = s_{zx} u[\xi(z), \eta(z)] + s_x \theta_z \{u_{\xi}[\xi(z), \eta(z)] \cdot \varphi_{\theta} [x, y, \theta(x, y, z), s(x, y, z)] + u_{\eta}[\xi(z), \eta(z)] \cdot \varphi_{\theta} [x, y, \theta(x, y, z), s(x, y, z)]\} +$$

$$+ \int_0^{s(x, y, z)} [u_{tt} t_z t_x + u_{t1} t_z l_x + u_t t_{zx} + u_{1t} l_z t_x +$$

$$+ u_{11} l_z l_x + u_{1z} l_{zx}] d\bar{s}.$$

Аналогично можно получить w_x, w_y, w_{zy} .

Л е м м а 4. Производные w_z, w_x, w_y непрерывны и ограничены в Ω_1 , $w_{zx} = \frac{1}{s(x, y, z)} f_{16}(x, y, z)$

$$w_{zy} = \frac{1}{s(x, y, z)} f_{17}(x, y, z), \quad w_{xy} = \frac{1}{s(x, y, z)} f_{18}(x, y, z),$$

где $f_1(x, y, z)$ - непрерывны и ограничены в Ω_1 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя леммы 2, 3 из (23) получаем утверждение для w_z . Аналогично для w_x, w_y . Используя леммы 2, 3 из (24) получаем утверждение для w_{zx} . Аналогично для других производных. Лемма доказана.

Так как $\lim_{x \rightarrow \xi(z)} \frac{\rho(x, y, z)}{s(x, y, z)} = 1$, где $\rho(x, y, z) = [(x - \xi(z))^2 + (y - \eta(z))^2]^{1/2}$, то в леммах I-4 функцию $s(x, y, z)$ можно заменить на $\rho(x, y, z)$. Таким образом свойства I)-2) из п⁰I для функции $w(x, y, z)$ полностью доказаны.

В заключении этого пункта покажем как построить ϵ -окрестность особой кривой $x = \xi(z)$, $y = \eta(z)$, $z \in [0, L]$ с требуемым свойством. Для этого удобно использовать класс кривых $K(\gamma, z)$. Введем функции $\theta = \theta(z, \alpha)$, $s = s(z, \alpha)$ с помощью уравнений

$$\xi(z + \alpha) = \phi(\xi(z - \alpha), \eta(z - \alpha), \theta, s),$$

$$\eta(z + \alpha) = \psi(\xi(z - \alpha), \eta(z - \alpha), \theta, s),$$

где $z, \alpha \in [0, L]$ и $z + \alpha, z - \alpha$ нужно понимать соответственно в смысле $\text{mod}_L(z + \alpha)$ и $\text{mod}_L(z - \alpha)$. Покажем, что множество $\Omega_3^\epsilon = \{(x, y, z) | x = \phi(\xi(z - \alpha), \eta(z - \alpha), \theta(z, \alpha), \tilde{s}), y = \psi(\xi(z - \alpha), \eta(z - \alpha), \theta(z, \alpha), \tilde{s}), z \in [0, L], \alpha \in (0, \epsilon), \tilde{s} \in [0, s(z, \alpha)]\}$ можно взять за искомую ϵ -окрестность особой кривой, где $0 < \epsilon < L$. Действительно, границей смежности множеств Ω_3^ϵ и Ω^ϵ является поверхность

$$x = F_1(z, \tilde{s}; \epsilon) \equiv \phi(\xi(z - \epsilon), \eta(z - \epsilon), \theta(z, \epsilon), \tilde{s}), \quad (25)$$

$$y = F_2(z, \tilde{s}; \epsilon) \equiv \psi(\xi(z - \epsilon), \eta(z - \epsilon), \theta(z, \epsilon), \tilde{s}),$$

где $z \in [0, L]$ и $\tilde{s} \in [0, s(z, \epsilon)]$. Используя леммы п⁰2 и п⁰3, можно доказать, что эта поверхность является гладкой. Поверхность (25) пересекается с границей множества Ω по двум кривым:

(26)

$$x = \phi(\xi(z-\epsilon), \eta(z-\epsilon), \theta(z, \epsilon), 0), \quad y = \psi(\xi(z-\epsilon), \eta(z-\epsilon), \theta(z, \epsilon), 0);$$

(27)

$$x = \phi(\xi(z+\epsilon), \eta(z+\epsilon), \theta(z, \epsilon), s(z, \epsilon)), \quad y = \psi(\xi(z+\epsilon), \eta(z+\epsilon), \theta(z, \epsilon), s(z, \epsilon)).$$

Кривые (26) и (27) являются гладкими. Таким образом, множество Ω^ϵ имеет кусочно-гладкую границу.

4. Доказательство основной теоремы в случае области с кусочно-гладкой границей.

Будем вначале считать, что гладкость границы Γ области D нарушается только в одной точке $(\xi(z_0), \eta(z_0))$. Не ограничивая общности, считаем $z_0 \neq 0$. Тогда, как нетрудно заметить, гладкость границы множества Ω будет нарушена на отрезке $x = \xi(z_0)$, $y = \eta(z_0)$, $\{z | z \in [0, L]\}$. Плоскостью $z = z_0$ разделим множество Ω на две части Ω_4 и Ω_5 соответственно с точками, у которых $z < z_0$ и $z > z_0$. Из (17) видно, что θ_z и s_z будут иметь разрыв I-го рода в плоскости $z = z_0$. Если выписать аналогично (17) системы для θ_x , θ_y , s_x , s_y , то будет видно, что для них справедлива лемма 3. Отсюда из (22) следует, что для t_x , t_y , l_x , l_y справедлива лемма 4, а t_z и l_z при $z = z_0$ будут иметь разрыв I-го рода. И, наконец, из (23), и аналогичных выражений для w_x и w_y получаем, что w_z будет иметь при $z = z_0$ разрыв I-го рода, а для w_x и w_y справедлива лемма 5.

Интегрируя теперь равенство (9) по множествам Ω_4 и Ω_5 отдельно и, применяя теорему Остроградского, получим формулы:

$$\iiint_{\Omega_4} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega_4 - \iint_{\Omega_4} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \right) \frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta \right] \Big|_{z=0}^{z=z_0} dx dy = - \int_0^{z_0} \int_0^L \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} dz dy, \quad (28)$$

$$\iint_{\Omega_5} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega_5 + \iint_D \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta \right) \right]_{z=z_0}^{z=0} dx dy = - \iint_{z_0} \int \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} dz dy. \quad (29)$$

Складывая (28) и (29), получим равенство (17). Далее доказательство совпадает с п⁰I. Если гладкость границы нарушается в нескольких точках, то можно применить метод математической индукции. Итак, теорема I полностью доказана.

5. Об области D и семействе кривых $K(\gamma, z)$, которое не выпукло относительно D .

В условии а) п⁰I можно видимо ослабить требование того, чтобы для любой пары точек из \bar{D} существовала кривая в классе $K(\gamma, z)$ проходящая через эти точки. Всем остальным условиям в том числе и требованию, что через любую точку D в любом направлении проходит единственная кривая семейства $K(\gamma, z)$, класс кривых $K(\gamma, z)$ удовлетворяет. Приведем доказательство теоремы единственности и оценку устойчивости задачи для области D , имеющий конкретный вид, изображенный на рис. I. Ради простоты изложения семейство кривых $K(\gamma, z)$ пусть состоит только из отрезков прямых. Для кривых рассуждения остаются совершенно аналогичными.

На рисунке I точки a и b являются точками перегиба границы Γ , отрезки ac и bd — касательные к кривой Γ в этих точках, отрезок hf касается дуги ab в некоторой точке g . Введем теперь множество $\Omega = D(z) \times \{z \mid z \in [0, L]\}$. Здесь $\tilde{D}(z)$ является множеством тех точек $(x, y) \in D$, которые лежат на кривых семейства K и одним концом которых является точка $(\xi(z), \eta(z))$.

Опишем границу Ω . Длину z кривой Γ будем отсчитывать от точки c против часовой стрелки. Если z соот-

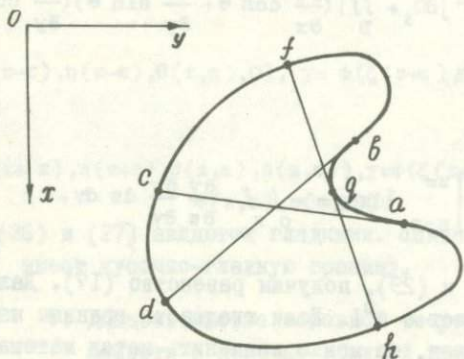


Рис. I

ответствует произвольной точке дуги cd , то $\tilde{D}(z) = D$ и для Ω имеем участок границы $G_{cd} = \Gamma_{*} \{z | z \in [0, l(cd)]\}$, где $l(cd)$ - длина дуги cd .

Введем функцию $\gamma_1 = \gamma_1(z)$, где параметр z соответствует точке, лежащей на дуге dha , а γ_1 - параметр точки, лежащей на дуге agb , причем отрезок, соединяющий эти точки и принадлежащий к Ω , касается дуги agb . Аналогично вводится функция $\gamma_2 = \gamma_2(z)$ для дуг bfc и agb , причем касание соответственного отрезка должно быть в точке c параметром γ_2 , лежащей на agb . Если z соответствует любой точке h дуги da , то $\tilde{D}(z)$ получается из D срезанием множества, ограниченного дугой gbf и отрезком gf , и для Ω получаем следующие части границы:

$$G_{da}^1 = \{(x, y) | (x, y) \in (\Gamma_{cda} \cup \Gamma_{ag(z)} \cup \Gamma_{f(z)c})_{*} \{z | z \in [l(cd), l(cda)]\},$$

где Γ_{cda} - множество точек (x, y) , лежащих на дуге cda , $g(z)$ и $f(z)$ - соответственно обозначение точек

$$(\xi(\gamma_1(z)), \eta(\gamma_1(z))) \quad (\xi(\gamma_2^{-1}(\gamma_1(z))), \eta(\gamma_2^{-1}(\gamma_1(z))));$$

$$^2_{da} = \{(x, y, z) | (x, y) \in K[\gamma_1(z), \gamma_2^{-1}(\gamma_1(z))], z \in [l(cd), l(cda)],$$

где под кривой $K(\gamma_1(z), \gamma_2^{-1}(\gamma_1(z)))$ понимаем только дугу, заключенную между граничными точками с параметрами $\gamma_1(z)$ и $\gamma_2^{-1}(\gamma_1(z))$.

Если z соответствует любой точке g дуги ab , то $\tilde{D}(z)$ получается из D срезанием множества, ограниченно-го дугой $hagb$ и отрезком hgf , и согласно этому для Ω будем иметь следующие части границы:

$$G^1_{ab} = \{(x, y) | (x, y) \in (\Gamma_{cd} \cup \Gamma_{dh(z)} \cup \Gamma_{f(z)c})\} \times \\ \times \{z | z \in [l(cda), l(cdab)]\},$$

где точкам $h(z)$ и $f(z)$ соответствуют параметры $\gamma_1^{-1}(z)$ и $\gamma_2^{-1}(z)$ границы Γ ;

$$G^2_{ab} = \{(x, y, z) | (x, y) \in K[\gamma_1^{-1}(z), z], z \in [l(cda), l(cdab)]\};$$

$$G^3_{ab} = \{(x, y, z) | (x, y) \in K[z, \gamma_2^{-1}(z)], z \in [l(cda), l(cdab)]\}.$$

И, наконец, для z , соответствующего любой точке f дуги bc , $D(z)$ получается из D срезанием множества, ограниченного дугой hag и отрезком hg . Отсюда для Ω получаем соответственно следующие части границы:

$$G^1_{bc} = \{(x, y) | (x, y) \in (\Gamma_{bcd} \cup \Gamma_{dh(z)} \cup \Gamma_{g(z)b})\} \times \{z | z \in [l(cdab), L]\},$$

где точкам $h(z)$ и $g(z)$ соответствуют параметры $\gamma_1^{-1}(\gamma_2(z))$ и $\xi_2(z)$;

$$G_{bc}^1 = \{(x, y, z) | (x, y) \in K[\gamma_1^{-1}(\gamma_2(z)), \gamma_2(z)], z \in [1(\text{сдab}), L]\}.$$

Теперь, после того как описано множество Ω и его граница, аналогично $\Pi^0 I$ интегрируем (9) по Ω и применяем формулу Остроградского. Заметим, что здесь также справедлива формула

$$\int_{Z(x,y)} \theta_z(x, y, z) dz = 2\pi,$$

где $(x, y) \in D$ и $Z(x, y)$ есть множество тех z , для которых $\theta_z(x, y, z)$ существует и интегрирование ведется в направлении возрастания z . Не повторяя аналогичных $\Pi^0 I$ выкладок, преобразуем появившиеся после применения формулы Остроградского новые по сравнению с $\Pi^0 I$ поверхностные интегралы к интегралам по множествам на плоскости $хоу$.

Поверхность G_{da}^2 дает интеграл (30)

$$G_{da}^2 \iint u[(w_y \cos \theta - w_x \sin \theta) \cos(N, z) - w_z w_x \cos(N, y) + w_z w_y \cos(N, x)] ds.$$

Так как эту поверхность можно рассматривать как сотканую из кривых $K(\gamma, z)$, то на G_{da}^2 справедливо равенство

$$\cos(N, x) \cos \theta + \cos(N, y) \sin \theta = 0. \quad (31)$$

В равенстве (31) возможны следующие случаи:

i) $\cos \theta \neq 0, \cos(N, y) \neq 0;$

ii) $\cos \theta \neq 0, \cos(N, y) = 0$, отсюда следует $\cos(N, x) = 0$.

Остальные возможности аналогичны или i), или ii).
 Рассмотрим случай i). Тогда $0 < \left| \frac{\cos(N,y)}{\cos \theta} \right| < +\infty$.

Имеем

$$-w_x \cos(N,y) + w_y \cos(N,x) = (w_x \cos \theta - w_y \frac{\cos(N,x)}{\cos(N,y)} \cos \theta) \left(- \frac{\cos(N,y)}{\cos \theta} \right) = -u(x,y) \frac{\cos(N,y)}{\cos \theta} .$$

Отсюда (30) переписывается в виде

(32)

$$G \int_{da} u [w_x (-\sin \theta \cos(N,z)) + w_y \cos \theta \cos(N,z) + w_z \left(-\frac{\cos(N,y)}{\cos \theta} \right)] ds .$$

Рассмотрим вектор $\vec{r} = (-\sin \theta \cos(N,z), \cos \theta \cos(N,z), -\frac{\cos(N,y)}{\cos \theta})$

Вектор \vec{r} - единичный вектор, т.к.

$$(\vec{r}, \vec{r}) = \sin^2 \theta \cos^2(N,z) + \cos^2 \theta \cos^2(N,z) + \frac{\cos^2(N,y)}{\cos^2 \theta} = \cos^2(N,z) +$$

$$+ \frac{\cos^2(N,y)}{\cos^2 \theta} = 1 - \frac{\cos^2(N,x) \cdot \cos^2 \theta + \cos^2(N,y) [\cos^2 \theta - 1]}{\cos^2 \theta} = 1 .$$

Равенство нулю числителя в последней дроби следует из (31). Вектор \vec{r} - касательный к поверхности $G \int_{da}$, т.к.

$$(\vec{r}, \vec{n}) = -\sin \theta \cos(N,z) \cos(N,x) + \cos \theta \cos(N,z) \cos(N,y) -$$

$$- \frac{\cos(N,y) \cos(N,z)}{\cos \theta} = -\sin \theta \cos(N,z) \cos(N,x) - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cos(N,z) \cos(N,y)$$

$$y) = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos(N, z) [\cos \theta \cos(N, x) + \sin \theta \cos(N, y)] = 0.$$

Проекцией r на плоскость xoy будет вектор $\cos(N, z)(-\sin \theta, \cos \theta)$. Проекцией на поверхности G^2_{da} на плоскость xoy будет область D_{abc} , ограниченная дугой abc и отрезком ca . Преобразуем теперь интеграл (32) так, чтобы интегрирование было по области D_{abc} . Очевидно, в (32) будет $ds = \frac{dx dy}{|\cos(N, z)|}$ и $\cos(N, z) \geq 0$.

Далее

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \left[\frac{\partial w(x, y, F_{da}(x, y))}{\partial x} (-\sin \theta) + \frac{\partial w(x, y, F_{da}(x, y))}{\partial y} \cos \theta \right] \cos(N, z),$$

где параметр $z = F_{da}(x, y)$ соответствует точке на дуге da , которая является концом кривой семейства $K(\gamma, z)$, проходящей через точку $(x, y) \in D_{abc}$ и касающейся дуги ab , и $\frac{\partial w(x, y, F_{da}(x, y))}{\partial x}$, $\frac{\partial w(\dots)}{\partial y}$ являются полными производными. Отсюда интеграл в (32) будет равен

$$\iint_{D_{abc}} u(x, y) \left[\frac{\partial w(x, y, F_{da}(x, y))}{\partial x} (-\sin \theta) + \frac{\partial w(x, y, F_{da}(x, y))}{\partial y} \cos \theta \right] dx dy. \quad (33)$$

Аналогично для поверхности G^3_{ab} получаем

$$\iint_{G^3_{ab}} u(x, y) \frac{\partial w}{\partial F} ds = \iint_{D_{abc}} u(x, y) \left[\frac{\partial w(x, y, F_{ab}(x, y))}{\partial x} (-\sin \theta) + \frac{\partial w(x, y, F_{ab}(x, y))}{\partial y} \cos \theta \right] dx dy, \quad (34)$$

где параметр $z = F_{ab}(x, y)$ соответствует точке на дуге ab , которая является концом кривой семейства $K(\gamma, z)$, проходящей через точку $(x, y) \in D_{abc}$ и касающейся дуги ab . Знак минус в (34) возникает из-за того, что $\text{сфн}(N, z) \leq 0$.

Складывая (33) и (34) и учитывая, что

$$w(x, y, F_{da}(x, y)) - w(x, y, F_{ab}(x, y)) = v(F_{da}(x, y), F_{ab}(x, y)),$$

получаем

$$\begin{aligned} \iint_{D_{abc}} u(x, y) \left[\frac{\partial v(F_{da}(x, y), F_{ab}(x, y))}{\partial x} (-\sin \theta) + \right. \\ \left. + \frac{\partial v(F_{da}(x, y), F_{ab}(x, y))}{\partial y} \cos \theta \right] dx dy. \end{aligned} \quad (35)$$

Аналогично (35), преобразовывая интегралы по поверхностям

G_{ab}^z и G_{bc}^z , получим

$$\begin{aligned} - \iint_{D_{dab}} u(x, y) \left[\frac{\partial v(F_{bc}(x, y), F_{ab}(x, y))}{\partial x} (-\sin \theta) + \right. \\ \left. + \frac{\partial v(F_{bc}(x, y), F_{ab}(x, y))}{\partial y} \cos \theta \right] dx dy, \end{aligned} \quad (36)$$

где область D_{dab} - есть множество, ограниченное дугой dab и отрезком bd , параметры $z = F_{ab}(x, y)$ и $z = F_{bc}(x, y)$ соответственно относятся к точкам на дугах ab и bc , которые являются концами кривых из семейства $K(\gamma, z)$, проходящих через точку $(x, y) \in D_{dab}$ и касающихся дуги ab .

Если имеет место случай 11), то из (30) сразу следует (33) и (34), а отсюда получаем (35). Аналогично получается (36).

Теперь можем выписать аналогичное (14) неравенство

$$\begin{aligned}
2\pi \iint_D u^2(x,y) dx dy &\leq \iint_{D_{dab}} u(x,y) \left[\frac{\partial v(F_{bc}(x,y), F_{ab}(x,y))}{\partial x} (-\sin \theta) + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial v(F_{bc}(x,y), F_{ab}(x,y))}{\partial y} \cos \theta \right] dx dy - \\
&- \iint_{D_{abc}} u(x,y) \left[\frac{\partial v(F_{da}(x,y), F_{ab}(x,y))}{\partial x} (-\sin \theta) + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial v(F_{da}(x,y), F_{ab}(x,y))}{\partial y} \cos \theta \right] dx dy - \\
&- \iint_V \frac{\partial v(\gamma, z)}{\partial z} \frac{\partial v(\gamma, z)}{\partial \gamma} dz d\gamma,
\end{aligned} \tag{37}$$

где множество V соответствует совокупности поверхностей G_{cd} , G_{da}^1 , G_{ab}^1 , G_{bc}^1 . Из этого неравенства нетрудно получить в классе $|u(x,y)| < M$ следующую оценку устойчивости

$$\|u\|_{L_2(D)} \leq C \max_{(\gamma, z) \in V} |v_z(\gamma, z)|, \tag{38}$$

где C зависит от кривых класса $K(\gamma, z)$ и числа M . Из (38) следует, очевидно, единственность нашей задачи.

6. Об одном случае невыполнения условия б) п⁰ I для кривых $K(\gamma, z)$.

Рассмотрим следующий пример. Возьмем за кривые полуокружности с центрами на оси ox и лежащие в полуплоскости $y \geq 0$.

За область D возьмем ограниченную область, границей которой является некоторый отрезок на оси ox и гладкая кривая в плоскости $y > 0$, концы которой совпадают с концами отрезка. За семейство кривых $K(\gamma, z)$ возьмем те части полуокружностей, которые отсекаются границей области D и лежат внутри D . При этом криволинейная часть границы пусть будет такова, чтобы кривые $K(\gamma, z)$ удовлетворяли условию а) п⁰I. Для кривых $K(\gamma, z)$ будет нарушено условие б) п⁰I, т.к. φ_{ss} и ψ_{ss} не будут равномерно ограничены в окрестности прямолинейного участка границы D , а это следует из того, что кривизны кривых $K(\gamma, z)$ в этой окрестности не будут равномерно ограничены. Однако, если непосредственно проверить для этой задачи доказательство теоремы I, то оно полностью проходит и, следовательно, эта теорема будет полностью справедлива для рассматриваемого случая. Ввиду громоздкости всех промежуточных формул, они здесь не приводятся. Этот же результат получен и в [2]. Однако в нашем случае не существенно рассматривать именно полуокружности. Если кривые $K(\gamma, z)$ в окрестности прямолинейного участка границы ведут себя так же как полуокружности, то доказательство единственности будет полностью сохранено.

7. Задача интегральной геометрии с весом

Вместо задачи (3) рассмотрим обобщенное уравнение (3):

$$v(\gamma, z) = \int_{K(\gamma, z)} u(x, y) \rho(x, y, \gamma, z) ds, \quad (39)$$

где $\rho(x, y, \gamma, z)$ - некоторая известная функция. Из (39) видно, что величину γ можно считать как функцию $\gamma = \gamma(x, y, z)$ и в дальнейшем уравнение (39) поэтому будем рассматривать в виде

$$v(\gamma, z) = \int_{K(\gamma, z)} u(x, y) \rho(x, y, z) ds \quad (40)$$

Т е о р е м а 2. Если ограниченная односвязная область D имеет кусочно-гладкую границу, семейство кривых (2) удовлетворяет условиям а)-г), функция $\rho(x, y, z) \in C^1(\Omega)$, $\rho > c_1 > 0$ и $\theta_z > |\frac{\rho_z}{\rho}|$, то задача интегральной геометрии (40) может иметь в пространстве функций $u(x, y) \in C^2(\bar{D})$ не более одного решения и справедлива оценка устойчивости

$$\|u\|_{L_2(\bar{D})} \leq c \|v_z(\gamma, z)\|_{L_2([0, L] \times [0, L])}, \quad (41)$$

где c зависит от кривых $K(\gamma, z)$ и функции $\rho(x, y, z)$ и $0 < c < +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой теоремы проведем для случая гладкой границы. Обобщение на случай кусочно-гладкого контура делается аналогично п⁰4. При доказательстве будем использовать обозначения п⁰1. Рассуждения, аналогичные п⁰1, будем опускать.

Введем функцию

$$w(x, y, z) = \int_{\tilde{K}(x, y, z)} u(x_1, y_1) \rho(x_1, y_1, z) ds. \quad (42)$$

Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta = u(x, y) \rho(x, y, z)$$

и

$$Lw \equiv \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\cos \theta}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\sin \theta}{\rho} \right) = 0, \quad (43)$$

Аналогично (9) можно получить

$$\begin{aligned}
 2\rho \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta \right) Lw &\equiv \left(\theta_z + \frac{\rho z}{\rho} \sin 2\theta \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \\
 - 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\rho z}{\rho} \cos 2\theta &+ \left(\theta_z - \frac{\rho z}{\rho} \sin 2\theta \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \right. \right. \\
 + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \left. \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta \right) \Big] - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\
 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Интегрируя (44) по Ω и применяя формулу Остроградского, получим

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} \left[\left(\theta_z + \frac{\rho z}{\rho} \sin 2\theta \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\rho z}{\rho} \cos 2\theta + \right. \\
 \left. + \left(\theta_z - \frac{\rho z}{\rho} \sin 2\theta \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega &= - \int_0^z \int_0^z \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} dz dy.
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

Будем рассматривать подынтегральное выражение слева в (45) как квадратичную форму относительно $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$. Так как определитель этой квадратичной формы равен $\theta_z^2 - \left| \frac{\rho z}{\rho} \right|^2$, то из условия $\theta_z > \left| \frac{\rho z}{\rho} \right|$ сразу вытекает положительная определенность этой формы. Используя неравенство

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \geq \frac{2(AC - B^2)}{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}} (x^2 + y^2),$$

которое справедливо для положительно-определенной квадратичной формы $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, получим

$$\iiint_{\Omega} (\theta_z - |\frac{\rho z}{\rho}|) u^2 \rho^2 d\Omega \leq \|v_z(\gamma, z)\|^2. \quad (46)$$

Из условий теоремы следует существование такого $c > 0$, что будет

$$\int_0^L (\theta_z - |\frac{\rho z}{\rho}|) \rho^2 dz \geq \frac{1}{c^2} > 0. \quad (47)$$

Из (47) и (46) получаем неравенство (4I). Теорема доказана.

8. Задача интегральной геометрии для поверхностей вращения

В полупространстве $x, y, z \geq 0$ пусть имеем ограниченную односвязную область D с кусочно-гладкой границей G . Возьмем сечение D_{y_0} области D плоскостью $y = y_0$. Будем предполагать относительно D , что D_{y_0} односвязно при любом y_0 . Для D_{y_0} граница G_{y_0} является кусочно-гладкой и пусть имеет уравнение

$$x = \xi(\gamma_1, y_0), \quad z = \eta(\gamma_1, y_0), \quad y = y_0, \quad (48)$$

где переменный параметр γ_1 кривой G_{y_0} имеет смысл длины

кривой. В D пусть задано семейство поверхностей вращения относительно прямых, лежащих в плоскости $z = 0$ и параллельных оси x . Эти поверхности $P(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0)$ зададим в виде системы уравнений

$$x = \varphi(s; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_0), \quad z = \sqrt{\phi^2(s; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_0) - (y - \gamma_0)^2}, \quad (49)$$

где s - переменный параметр для каждой поверхности, а $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0$ - параметры, определяющие данную поверхность и являющиеся постоянными на этой поверхности. Функции φ и ϕ должны удовлетворять следующим условиям. При фиксированном γ_0 система

$$x = \varphi(s; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_0), \quad z = \phi(s; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_0), \quad y = \gamma_0 \quad (50)$$

определяет семейство кривых $K(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0)$ в сечении D_{γ_0} аналогичное $K(\gamma, z)$ в p^0I . Параметры γ_1 и γ_2 определяют две точки на G_{γ_0} , через которые проходит кривая (50) при фиксированных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0$, и имеют смысл γ_1 в (48), s - переменный параметр кривой (50) и имеет смысл длины дуги, отсчитываемой от точки на G_{γ_0} , соответствующей γ_1 . При этом φ и ϕ должны быть таковы, чтобы семейство кривых (50) удовлетворяло при любом γ_0 аналогичным условиям для семейства $K(\gamma, z)$ в p^0I . При этом $\varphi, \phi \in C^3$ по всем переменным.

Сформулируем теперь нашу задачу. Пусть $u(x, y, z) \in C^2(\bar{D})$

и

$$v(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0) = \iint_{P(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0)} u \, d\sigma, \quad (51)$$

где $d\sigma$ - элемент площади поверхности $P(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0)$. По данным поверхностям $P(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0)$ и функции $v(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0)$

требуется определить $u(x, y, z)$ на множестве \bar{D} . Для задачи (5I) будет доказана только теорема единственности. Поэтому можно считать $v(\gamma_1, \gamma_2, y_0) \equiv 0$, кроме того для доказательства теоремы удобно считать $u(x, y, z) \equiv 0$ вне \bar{D} .

Т е о р е м а 3. Если ограниченная односвязная область D имеет кусочно-гладкую границу, поверхности (49) удовлетворяют перечисленным выше условиям, то задача интегральной геометрии (5I) может иметь в пространстве функций $u(x, y, z) \in C^2(\bar{D})$ не более одного решения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем цепочку равенств

$$\iint_{K(\gamma_1, \gamma_2, y_0)} u d\sigma = \iint_{K(\gamma_1, \gamma_2, y_0)} u(x, y, z) \frac{\phi \sqrt{\phi_s^2 + \phi_{\bar{s}}^2}(s; \gamma_1, \gamma_2, y_0)}{\sqrt{\phi^2 - (y - y_0)^2}} ds dy =$$

$$= \int_{K(\gamma_1, \gamma_2; y_0)} \left[\int_{z_1 = \sqrt{z^2 - (y - y_0)^2}} u(x, y, z_1) \frac{\phi(s; \gamma_1, \gamma_2, y_0)}{\sqrt{\phi^2 - (y - y_0)^2}} \right] \sqrt{\phi_s^2 + \phi_{\bar{s}}^2} ds =$$

$$= \int_{K(\gamma_1, \gamma_2, y_0)} \left[\int_{z_1 = \sqrt{z^2 - (y - y_0)^2}} u(x, y, z_1) ds_1 \right] ds_2,$$

где ds_1 - элемент длины дуги окружности $z_1 = \sqrt{z^2 - (y - y_0)^2}$, $x = \text{const}$, ds_2 - элемент длины кривой $K(\gamma_1, \gamma_2, y_0)$
Введем обозначения

$$N(x, y, z) = \int_{z_1 = \sqrt{z^2 - (y - y_0)^2}} u(x, y, z) ds_1. \quad (53)$$

Тогда из (5I), (52) имеем

$$K(\gamma_1, \gamma_2; y_0) \int N(x, y_0, z) ds_2 = 0. \quad (54)$$

Из (54) видно, что при каждом фиксированном y_0 (54) является задачей интегральной геометрии относительно искомой функции $N(x, y_0, z)$. Для подобной задачи теорема единственности доказана в $\Pi^0 I$. Следовательно, $N(x, y_0, z) \equiv 0$. Отсюда и из (53) имеем

$$\int u(x, y, z_1) ds_1 = 0, \quad z_1 = \sqrt{z^2 - (y - y_0)^2} \quad (55)$$

Соотношение (55) можно рассматривать как задачу интегральной геометрии в плоскости $x = \text{const}$ относительно $u(x, y, z_1)$. Кривые здесь являются полуокружностями. В $\Pi^0 6$ указано, что подобная задача имеет единственное решение. Отсюда $u(x, y, z_1) \equiv 0$. Теорема доказана.

Можно доказать аналогичную теорему единственности в $(n + 2)$ -мерном случае. При этом аналогичные (49) поверхности имеют вид

$$x = \varphi(s; \gamma_1, \gamma_2, y_1^0, \dots, y_n^0),$$

$$z = \sqrt{\varphi^2(s; \gamma_1, \gamma_2, y_1^0, \dots, y_n^0) - (y_1 - y_1^0)^2 - \dots - (y_n - y_n^0)^2}.$$

Л и т е р а т у р а

1. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., "Мир", 1967.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., "Мир", 1964.

3. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. "Наука", Новосибирск, 1969.

4. Лаврентьев М.М., Бухгейм А.Л. - ДАН, т. 211, № 1, (1973).

Р.Г.Мухометов

ОБРАТНАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СЕЙСМИКИ НА ПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача нахождения функции $n(x, y)$ в области двумерного пространства x, y , если известны расстояния между любыми двумя точками границы области. Элемент длины $d\tau$ определяется по формуле

$$d\tau = n(x, y)(dx^2 + dy^2)^{1/2} \quad (I)$$

Приведенная задача находит применение в геофизике в связи с изучением распределения внутри земного шара скоростей распространения упругих волн и носит название обратной кинематической задачи сейсмологии. Перечислим некоторые известные результаты по этой задаче. В работе [1] эта задача решена для одномерной функции $n = n(x)$, зависящей только от глубины x в полуплоскости $x \geq 0$. Причем здесь решена задача в более сильной постановке. А именно, $n(x)$ определяется по

величине τ , известной для любых двух точек поверхности (оси y), расстояние между которыми не превосходит некоторой величины. При этом, очевидно, τ инвариантно к сдвигу параллельному оси y . В работе [2] рассматривались случаи неоднозначного определения функции $n(x, y)$. В [3] доказана единственность этой задачи для функций $n(x, y)$ близких к постоянной и для достаточно малых выпуклых областей D с границей S класса C^k .

В настоящей работе доказана теорема единственности в классе функций $n(x, y) \in C^k(D)$ с кусочно-гладкой границей S области D при некотором условии регулярности геодезических, определяемых метрикой (I). Получена также оценка устойчивости задачи в целом.

I. Формулировка основного результата.

В двумерном пространстве x, y задана ограниченная односвязная область D с кусочно-гладкой границей Γ , удовлетворяющей уравнениям:

$$x = \xi(z), \quad y = \eta(z), \quad z \in [0, Z], \quad \xi(0) = \xi(Z), \quad (2)$$

$$\eta(0) = \eta(Z),$$

где z — длина кривой Γ .

Функция $n(x, y)$ из (I) принадлежит классу $C^k(\bar{D})$ и $n(x, y) > 0$. Определяемые $n(x, y)$ геодезические по метрике (I) пусть имеют уравнения:

$$x = \varphi(x_0, y_0, \theta; \tau), \quad y = \psi(x_0, y_0, \theta; \tau), \quad (3)$$

где (x_0, y_0) — фиксированная точка, из которой выходит геодезическая под углом θ , параметр кривой τ имеет смысл, характеризуемый формулой (I), и измеряется по формуле $\tau =$

$K(x_0, y_0; x, y) \int_{x_0, y_0}^{x, y} n ds$, где $K(x_0, y_0; x, y)$ — геодезическая, соединяющая точки (x_0, y_0) и (x, y) . Функция $n(x, y)$ должна быть такой, чтобы определяемые ее геодезические удовлетво-

ряи условиям:

а) через любые две различные точки из \bar{D} проходит единственная геодезическая, концы каждой геодезической $K(\gamma, z)$ лежат на Γ и являются точками $(\xi(\gamma), \eta(\gamma))$ и $(\xi(z), \eta(z))$, другие точки $K(\gamma, z)$ не лежат на Γ ; длины всех геодезических равномерно ограничены;

$$б) \frac{1}{\tau} \frac{D[\varphi(x_0, y_0, \theta; \tau), \psi(x_0, y_0, \theta; \tau)]}{D(\theta, \tau)} \geq c > 0, \text{ где}$$

c - постоянная и $(x_0, y_0) \in \bar{D}$.

Существование требуемых в условии б) производных, как будет показано в \mathbb{P}^2 , следует из условий $n(x, y) \in C^k(\bar{D})$ и $n(x, y) > 0$.

Описанная во введении задача сводится к решению уравнения

$$\tau(\gamma, z) = \int_{K(\gamma, z)} n(x, y) ds, \quad ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} \quad (4)$$

относительно $n(x, y)$ по известной функции $\tau(\gamma, z) \in C^1[0, Z] \times [0, Z]$. Геодезическая $K(\gamma, z)$, соединяющая граничные точки области D , является также неизвестной. Отсюда видно, что задача (4) в отличие от задачи интегральной геометрии [6] является нелинейной, так как здесь неизвестными будут также кривые $K(\gamma, z)$, в определении которых входит неизвестная функция $n(x, y)$. Сформулируем теперь основную теорему.

Т е о р е м а I. Если ограниченная односвязная область D имеет кусочно-гладкую границу (2), искомая функция $n(x, y) \in C^k(\bar{D})$, $n(x, y) > 0$ и, кроме того, $n(x, y)$ такова, что геодезические, определяемые метрикой (1), куда входит $n(x, y)$, удовлетворяют условиям а)-б), то задача (4) может иметь не более одного решения и справедлива оценка устойчивости:

$$\|\tilde{n}\|_{L_2(\bar{D})} \leq (2\pi)^{-1/2} \|\tilde{\tau}_z(\gamma, z)\|_{L_2([0, Z] \times [0, Z])}, \quad (5)$$

где $\tilde{n}(x, y) = n_1(x, y) - n_2(x, y)$, $\tilde{\tau} = \tau_1(\gamma, z) - \tau_2(\gamma, z)$, $n_1(x, y)$ - решение задачи (4) с данными $\tau_1(\gamma, z)$, $i = 1, 2$.

2. Леммы о геодезических.

Введем функцию

$$\tau(x, y; x_0, y_0) = \int_{K(x, y; x_0, y_0)} n \, ds, \quad (6)$$

где (x, y) , $(x_0, y_0) \in \bar{D}$ и $K(x, y; x_0, y_0)$ - геодезическая, соединяющая точки (x, y) и (x_0, y_0) .

Л е м м а I. Если $n(x, y) \in C^k(D)$, $n(x, y) > C_1 > 0$, то уравнение геодезических в параметрической форме представимо в виде

$$x = \varphi(x_0, y_0, \tau p, \tau q), \quad y = \psi(x_0, y_0, \tau p, \tau q), \quad (7)$$

где $(x, y) \in \bar{D}$, p и q определяются формулами:

$$p = 2n(x_0, y_0) \cos \theta, \quad q = 2n(x_0, y_0) \sin \theta,$$

θ - угол выхода геодезической из точки (x_0, y_0) , параметр τ геодезической есть расстояние между точками (x, y) и (x_0, y_0) в метрике (2). Функции φ и ψ имеют непрерывные ограниченные производные по всем своим аргументам x_0 , y_0 , τp , τq до второго порядка включительно, причем

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial (\tau p)} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial (\tau q)} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2n^2(x_0, y_0)},$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial (\tau q)} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial (\tau p)} \right|_{\tau=0} = 0.$$

Ввиду громоздкости доказательство леммы приводить не будем. Аналогичное утверждение имеется, например, в [4].

Л е м м а 2. Для того, чтобы $\frac{1}{\tau} \frac{D(x, y)}{D(\tau, \theta)} \geq c_1 > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{D(x, y)}{D(\tau p, \tau q)} \geq c_2 > 0$, где c_1 и c_2 некоторые постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы I нетрудно получить $\frac{1}{\tau} \frac{D(x, y)}{D(\tau, \theta)} = \frac{D(x, y)}{D(\tau p, \tau q)} \cdot 4n^2(x_0, y_0)$. Отсюда утверждение леммы очевидно.

Отметим, что из леммы I следует $\left. \frac{D(x, y)}{D(\tau p, \tau q)} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{4n^2(x_0, y_0)}$.

В дальнейшем понадобится методика доказательства теоремы единственности задачи интегральной геометрии [6], в которой семейство кривых $K(\gamma, z)$ являются геодезические (7). Если при доказательстве этой теоремы за семейство кривых $K(\gamma, z)$ возьмем наше семейство геодезических (7), а вместо параметра в кривых семейства возьмем τ , то, как нетрудно проверить, можно получить все совершенно аналогичные утверждения. Прежде всего выполнены условия а)-в) в [6]. Легко видеть, что будет выполнено и условие г), так как угол θ в (7) входит только в качестве аргумента функций синуса и косинуса. Заметим также, что при доказательстве леммы I в [6] в силу представлений функций ϕ и ψ в форме (7) достаточно, чтобы эти функции были дифференцируемы только до второго порядка включительно.

Итак, получаем следующую теорему для задачи:

$$v(\gamma, z) = \int_{K(\gamma, z)} u \, ds. \quad (8)$$

Т е о р е м а 2. Если ограниченная односвязная область D имеет кусочно-гладкую границу (2). Семейство кривых $K(\gamma, z)$ является геодезическими, которые определяются данной функцией $n(x, y) \in C^1(\bar{D})$ и $n(x, y) \geq c_1 > 0$ с помощью метрики (1) и $n(x, y)$ такова, что выполняются условия а)-б) для геодезических, тогда в классе функций $u(x, y) \in C^2(\bar{D})$ задача интегральной геометрии (8) может иметь не более одного решения и справедлива оценка устойчивости

$$\|u\|_{L_2(\bar{D})} \leq (2\pi)^{-1/2} \|v_z(\gamma, z)\|_{L_2([0, z] \times [0, z])}.$$

Если, следуя работе [5], линеаризовать задачу (4), то получим задачу (8). Таким образом, теорему 2 можно считать теоремой единственности для задачи (4) в линеаризованной постановке.

3. Доказательство теоремы I.

Будем считать пока, что граница Γ области D является гладкой. Введем функцию

$$\tau(x, y, z) = \int_{K(x, y, z)} n \, ds, \quad (9)$$

где $K(x, y, z)$ часть геодезической, соединяющая точки (x, y) и $(\xi(z), \eta(z))$, $(x, y, z) \in \Omega = \bar{D} \times [0, L]$, $n(x, y)$ — некоторое решение задачи (4). Функция $w(x, y, z)$ обладает аналогичными дифференциальными свойствами, что и функция $w(x, y, z)$ в задаче интегральной геометрии [6]. Нетрудно видеть, что $\tau(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению эйконала

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = n^2(x, y). \quad (10)$$

Дифференцируя (II) по z , получим следующее нелинейное дифференциальное уравнения для $\tau(x, y, z)$:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\tau_x^2 + \tau_y^2) = 0. \quad (II)$$

Из данных задачи (4) следует, что функция $\tau(x, y, z)$ должна удовлетворять условию

$$\tau(\xi(\gamma), \eta(\gamma), z) = \tau(\gamma, z), \quad \tau(\xi(z), \eta(z), z) = 0. \quad (I2)$$

Если выполнены условия теоремы относительно $n(x, y)$, то задача (4) эквивалентна задаче (II)-(I2) при выполнении дифференциальных свойств для $\tau(x, y, z)$ аналогичных I)-2) п⁰I работы [6].

Уравнение (II) является нелинейным гиперβολо-параболическим уравнением с двумя семействами бихарактеристик. Одно семейство образуют геодезические $K(\gamma, z)$, другое - семейство прямых

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad (I3)$$

где $(x_0, y_0) \in \bar{D}$. Данные задачи (I2) заданы на всей поверхности тора Ω . Эта поверхность, как нетрудно заметить, является характеристической поверхностью, состоящей из бихарактеристик семейства (I3).

Для уравнения (II) можно поставить другую задачу. Для этого зададим следующие данные:

$$\tau(x, y, z) \Big|_{z=0} = f(x, y), \quad \tau(\xi(z), \eta(z), z) = 0. \quad (I2')$$

Задача (II), (I2') решается известным образом. Эту задачу обычно называют прямой. В то время как задачу (4) или эквивалентную ей задачу (II)-(I2) называют обратной.

Пусть имеем решения $\tau_1(x, y, z)$ уравнения (II), удовлетворяющие на границе Ω соответственным условиям:

$$\tau_1(\xi(\gamma), \eta(\gamma), z) = \tau_1(\gamma, z), \quad \tau_1(z, z) = 0, \quad = 1, 2.$$

Подставляя $\tau_1(x, y, z)$ в (II) и вычитая соответственные выражения одно из другого, получим

$$Lw \equiv \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \tau_2}{\partial y} \right] = 0, \quad (I4)$$

где $w(x, y, z) = \tau_1(x, y, z) - \tau_2(x, y, z)$. Аналогично из (I2) имеем

$$w(\gamma, z) = w(\xi(\gamma), \eta(\gamma), z) = \tau_1(\gamma, z) - \tau_2(\gamma, z). \quad (I5)$$

Используя из вариационного исчисления известные формулы

$$(\tau_i)_x = n_i \cos \theta_i, \quad (\tau_i)_y = n_i \sin \theta_i, \quad i=1, 2, \quad (I6)$$

где $(\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ есть касательный вектор в точке (x, y) к геодезической, соединяющей (x, y) и $(\xi(z), \eta(z))$, перепишем (I4) в виде:

$$\frac{1}{n_1} L_w \equiv \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta_1 \right) + \frac{n_2}{n_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta_2 \right) = 0. \quad (I7)$$

Далее из (I7) имеем

$$\frac{2}{n_1} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta_1 + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta_1 \right) Lw \equiv \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta_1 \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta_1 - \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta_1 \right)]_z - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right)_y + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right)_x + (18)$$

$$+ \frac{1}{2} [n_2^2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2)]_z - [n_2^2(\theta_1 - \theta_2)]_z = 0.$$

Последние два слагаемых в (18) получаются следующим образом:

$$2 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta_1 + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta_1 \right) \frac{n_2}{n_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \cos \theta_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta_2 \right) =$$

$$= 2 \left[- (n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2) \sin \theta_1 + (n_1 \sin \theta_1 - n_2 \sin \theta_2) \cos \theta_1 \right]_z$$

$$\frac{n_2}{n_1} \frac{\partial}{\partial z} \left[(n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2) \cos \theta_2 + (n_1 \sin \theta_1 - n_2 \sin \theta_2) \sin \theta_2 \right] =$$

$$= 2n_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial}{\partial z} \cos(\theta_1 - \theta_2) = -2n_2^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \cdot (\theta_1 - \theta_2)_z =$$

$$= -n_2^2 [1 - \cos 2(\theta_1 - \theta_2)] (\theta_1 - \theta_2)_z = \frac{1}{2} [n_2^2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2)]_z -$$

$$- n_2^2 (\theta_1 - \theta_2)_z.$$

Остальные члены в (18) получаются аналогично как и в задаче интегральной геометрии [6].

Функции w_{xz} , w_{yz} , w_{xy} и $[\theta_1(x, y, z)]_z$ имеют особенности типа $[(\xi(z) - x)^2 + (\eta(z) - y)^2]^{-1/2}$. Далее совершаем аналогично как и в задаче интегральной геометрии [6] преобразования с (18), т.е. отделяем от множества Ω ε -окрестность особой кривой $x = \xi(z)$, $y = \eta(z)$, $z \in [0, L]$, интегрируем по оставшемуся множеству равенство (18), применяя при этом формулу Остроградского, и переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получим

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega = - \int_0^L \int_0^L \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} dz dx. \quad (19)$$

При получении (19) было использовано очевидное равенство

$$\iiint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} [n_2^2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2)]_z - [n_2^2(\theta_1 - \theta_2)]_z \right\} d\Omega = 0$$

Используя

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = (n_1 - n_2)^2 + 4n_1 n_2 \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \quad (20)$$

$(\theta_1)_z \geq 0$ и неравенство Коши из (19) получаем оценку (5).

В случае, если граница Γ кусочно-гладкая, доказательство проводится аналогично как и в задаче интегральной геометрии [6]. Доказательство теоремы I завершено.

Любопытно отметить, что оценка (5) совпадает с оценкой устойчивости задачи интегральной геометрии [6].

4. Формулы для средне-квадратического значения $n(x, y)$ по области D .

Используя (16), перепишем (11) в виде

$$L \tau \equiv \frac{\partial \tau}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \tau}{\partial y} \sin \theta \right) = 0. \quad (21)$$

Для $2 \left(-\frac{\partial \tau}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial \tau}{\partial y} \cos \theta \right) L \tau$ имеем аналогичное (18) выражение только без двух последних слагаемых. Совершая теперь аналогичные предыдущему пункту преобразования и используя равенство (10) вместо (20), получим

$$2\pi \iint_D n^2 dx dy = - \int_0^L \int_0^L \frac{\partial \tau(\gamma, z)}{\partial \gamma} \frac{\partial \tau(\gamma, z)}{\partial z} d\gamma dz. \quad (22)$$

Из (22) нетрудно получить средне квадратичное значение $n(x, y)$ по области D . Формулу (22) можно также получить из результатов, изложенных в [5].

Правую часть в (22) можно представить в другой форме, а именно, выразить через значения $n(x, y)$ на границе области D и через угол между геодезической на границе Γ и касательной в той же точке к границе области D .

Пусть $\beta(z)$ - угол, определяющий направление касательной к границе Γ области D в точке $(\xi(z), \eta(z))$ в сторону возрастания z , а $\alpha(z, \gamma)$ - угол, определяющий направление касательной к геодезической, соединяющей точки $(\xi(z), \eta(z))$ и $(\xi(\gamma), \eta(\gamma))$, в точке $(\xi(z), \eta(z))$. Тогда нетрудно получить

$$\frac{\partial \tau(\gamma, z)}{\partial z} = n(\xi(z), \eta(z)) \cos[\alpha(z, \gamma) - \beta(z)], \quad (23)$$

$$\frac{\partial \tau(\gamma, z)}{\partial \gamma} = n(\xi(\gamma), \eta(\gamma)) \cos[\alpha(\gamma, z) - \beta(\gamma)], \quad (24)$$

и вместо (22) получаем

$$2\pi \iint_D n^2 dx dy = - \int_0^L \int_0^L n(\xi(z), \eta(z)) n(\xi(\gamma), \eta(\gamma)) \cos[\alpha(z, \gamma) - \beta(z)] \cos[\alpha(\gamma, z) - \beta(\gamma)] dz d\gamma \quad (25)$$

В заключении приведем формулы перехода от данной функции $\tau(\gamma, z)$ к величинам, использованным в (25):

$$n(\xi(z), \eta(z)) = \lim_{\gamma \rightarrow z} \frac{\tau(\gamma, z)}{|z - \gamma|},$$

а $\alpha(z, \gamma)$ находится из (23).

Л и т е р а т у р а .

1. Herglotz G., Zs. Math. und Phys., В. 52 N3, 275, 1905.
2. Гервер М.Л., Маркушевич В.М. - ДАН, т.175, № 2, 334, 1967.
3. Романов В.Г. - ДАН, т. 218, № 2, 1974.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.2У, Г., М., 1953.
5. Сантало Л.А. Введение в интегральную геометрию. ИЛ, 1956.
6. Мухометов Р.Г. О задаче интегральной геометрии. Наст. сборник.

В.И. Рудерфер

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ В ЗАДАЧЕ О ПРОДОЛЖЕНИИ ВОЛНОВОГО
ПОЛЯ С ВРЕМЕНИПОДОБНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ
ТОЧКИ УПЛОЩЕНИЯ

В данной работе рассматривается вопрос о единственности
решения задачи Коши для неравенства

$$(\square u)^2 \leq a(u^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \quad (I)$$

с данными на куске времениподобной поверхности.

Общие теоремы единственности работ [1], [2 гл. У, УШ и
IX], [3] к сформулированной задаче неприменимы, и известные
в этой области результаты исчерпываются применениями теорем
Е. Хольмгрена [4] и Л. Ниренберга [5]. Если не ограничиваться
случаем линейного аналитического уравнения, то из работы [5]
следует единственность решения рассматриваемой задачи только
тогда, когда данные Коши определены на выпуклой, относительно
выводящей переменной, поверхности. В работе [6] условие выпук-

лости носителя данных Коши ослаблено и доказана единственность решения задачи Коши в том случае, когда данные Коши определены на времениподобной цилиндрической поверхности с выпуклой, не имеющей точек уплощения. Мы показываем, что условие отсутствия точек уплощения является излишним. Именно в этой работе получены априорные оценки решения задачи в окрестности точки уплощения носителя данных Коши, причем, при условии выпуклости направляющей, несущественно, является ли эта точка уплощения изолированной или нет.

Далее используется теорема I и лемма, которые мы приводим без доказательства. С доказательством можно ознакомиться в работе [6].

Т е о р е м а I. Пусть на области Ω пространства (x, y, t) ограниченного кусочно-гладкой поверхностью $\partial\Omega$, задана функция $u(x, y, t)$ с суммируемыми вторыми производными $u_{xx}, u_{yy}, \dots, u_{tt}$.
Далее, пусть $\partial\Omega = \partial\Omega^1 \cup \partial\Omega^{11}$ и

$$\|u\|_{C_1} \leq \begin{cases} M & \text{при } (x, y, t) \in \bar{\Omega}, \\ \varepsilon & \text{при } (x, y, t) \in \partial\Omega^1. \end{cases} \quad (2)$$

В дальнейшем будем обозначать $|\partial\Omega^1| = \text{mes } \partial\Omega^1, |\partial\Omega^{11}| = \text{mes } \partial\Omega^{11}$.
Введем функцию $E = E(x, y, t) = \exp \lambda(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma t^2)$,
где $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$ — вещественные параметры и положим

$$a = \max (|x|, |y|, |t|) \text{ при } (x, y, t) \in \bar{\Omega},$$

$$b = \max (|\alpha|, |\beta|, |\gamma|).$$

Тогда для любого $\lambda \geq 1$

$$4\lambda \int_{\Omega} [4\lambda(-\alpha x v_x - \beta y v_y + \gamma t v_t)^2 + (\alpha - \beta + \gamma)v_x^2 + (-\alpha + \beta + \gamma)v_y^2 + (\alpha + \beta + \gamma)v_t^2] dV + 16\lambda^3 \int_{\Omega} [(3\alpha + \beta - \gamma)\alpha^3 x^2 + (\alpha + 3\beta - \gamma)\beta^3 y^2 - (\alpha + \beta - 3\gamma)\gamma^3 t^2 - \frac{(\alpha + \beta - \gamma)^2}{2\lambda}] v^2 dV \leq \quad (3)$$

$$\leq \int_{\Omega} E^2(\square u)^2 dV + 4 \cdot 10^2 \lambda^3 (1 + a)^3 x$$

$$\times (1 + b)^3 [\max_{\partial\Omega} E^2 |\partial\Omega^1| \varepsilon^2 + \max_{\partial\Omega^{11}} E^2 |\partial\Omega^{11}| M^2],$$

где $v = E u$.

Л е м м а . Пусть для любой точки (x, y, t) области Ω имеют место неравенства

$$4\lambda x^2 - 3 > 0,$$

$$\frac{1}{6} x^2 - 9y^2 - \frac{1}{3} t^2 - \frac{1}{4\lambda} \geq 0, \quad (4)$$

$$41x^2 + 597y^2 - 39t^2 - \frac{78}{\lambda} \geq 0. \quad (5)$$

Тогда для любого $\lambda \geq 1$:

$$\frac{2}{3} \lambda \int_{\Omega} E^2 (u_x^2 + u_y^2 + u_t^2) dV + 4\lambda^2 \int_{\Omega} E^2 u^2 dV \leq \int_{\Omega} E^2 (\square u)^2 dV \quad (6)$$

$$+ 3 \cdot 10^5 \cdot \lambda^3 (1 + a)^3 \left[\max_{\partial \Omega^{11}} E^2 |\partial \Omega^{11}| \varepsilon^2 + \max_{\partial \Omega^{11}} E^2 |\partial \Omega^{11}| M^2 \right].$$

При этом $E = \exp \lambda (x^2 + 3y^2 - t^2)$.

Пусть S — гладкая цилиндрическая поверхность удовлетворяющая условиям:

образующие S параллельны оси ot ;
направляющая S выпукла.

Из этих условий следует:

для любой касательной к S плоскости π все точки S лежат в одном полупространстве относительно π .

Обозначим пересечение всех таких полупространств R_S ; если Σ некоторая окрестность S , то полуокружность Σ_S поверхности S будем называть $\Sigma \cap R_S$.

Пусть в некоторой полуокружности Σ_S поверхности S задано решение $u(x, y, t)$ неравенства (I), удовлетворяющее условиям:

производные $u_{xx}, u_{xy}, \dots, u_{tt}$ суммируемы:

$$\|u\|_{C_1} \leq M \quad \text{при} \quad (x, y, t) \in \Sigma_S,$$

(7)

$$\|u\|_{C_1} \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad (x, y, t) \in S.$$

Пусть A — точка утолщения на поверхности S , тогда имеет место

Т е о р е м а 2 . Существуют числа ξ, η, ζ с условиями:

$$0 < \xi < \eta < \zeta, \quad \eta - \frac{1}{2}(\xi + \zeta) > 0$$

и области $\Omega_\eta \subset \Omega_\xi \subset \Sigma_S$ такие, что $A \in \partial\Omega_\eta$ и

$$\frac{1}{3} \int_{\Omega_\eta} (u_x^2 + u_y^2 + u_t^2) dV + 2 \int_{\Omega_\eta} u^2 dV \leq 6 \cdot 10^5 (1+a)^3 \times$$

$$\times \left(\eta - \frac{\xi + \zeta}{2} \right)^{-2} (|\partial\Omega_\xi^1| \cdot |\partial\Omega_\xi^{11}|)^{1/2} \text{ см.}$$

Доказательство. Так как неравенство (I) инвариантно относительно сдвигов, то можно считать, что полуокружность лежит в пересечении полупространства $x > \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{внутренности гиперboloида } \frac{1}{6} x^2 - 9y^2 - \frac{1}{3} t^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\text{внешности гиперboloида } 41x^2 + 597y^2 - 39t^2 - 78 = 0.$$

В этом случае неравенства (4), (5) удовлетворены. А так как неравенство (I) инвариантно относительно отражений и поворотов в плоскости (x, y) , то можно считать, что направляющая S обобщена выпуклостью от начала координат, ось ox пересекает поверхность S в точке A и $ox \perp S$ в точке A . Поверхности уровня веса E есть гиперboloиды

$$x^2 + 3y^2 - t^2 = c.$$

Проведем поверхность уровня веса через точку A и рассмотрим сечение плоскостью $t = 0$. Так как направляющая S выпукла, то существует прямая $x = \text{const}$, проходящая левее (см. рис. I) точки A и пересекающая направляющую в точках B и C . Эллипс $x^2 + 3y^2 = c$ проходящий через точку A так же пересекает эту прямую в двух точках. Легко видеть, что если сдвигать направляющую S вместе с прямой $x = \text{const}$ вдоль оси ox , то ординаты точек пересечения прямой $x = \text{const}$ с эллипсом, проходящим через точку A неограниченно возрастают по абсолютной величине и при некотором $c = \xi$ они могут стать больше модуля ординат точек B и C . Легко

видеть, что тогда $x^2 + 3y^2 = \xi$ пересекает направляющую S в двух точках. Рассмотрим сечение плоскостью $y = 0$. У линии, принадлежащей поверхности S в точке A кривизна равна 0, а у линии, принадлежащей поверхности уровня веса E кривизна отлична от 0, и сама линия обращена выпуклостью к началу координат. Теперь ясно, что если взять $c = \xi$, где $\xi < \zeta$, но ξ достаточно близко к ζ , то поверхность

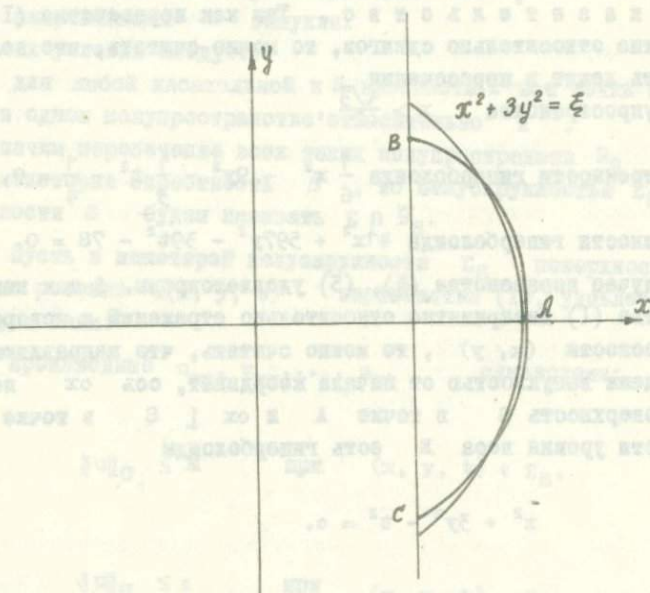


Рис. I.

$x^2 + 3y^2 - t^2 = \xi$ вместе с S ограничивает некоторую область $\Omega_\xi \subset \Sigma_S$. Положим $\partial\Omega_\xi^1 = \bar{\Omega}_\xi \cap S$. При так выбранных Ω_ξ и $\partial\Omega_\xi^1$ все условия леммы выполнены и для решения $u(x, y, t)$ неравенства (I) имеем:

$$\frac{2\lambda}{3} \int_{\Omega_{\xi}} E^2(u_x^2 + u_y^2 + u_t^2) dV + 4\lambda^2 \int_{\Omega_{\xi}} E^2 u^2 dV \leq d \int_{\Omega_{\xi}} E^2(u_x^2 + u_y^2 + u_t^2 + u^2) dV +$$

$$+ 3 \cdot 10^5 \lambda^3 (1+a)^3 \left[\max_{\partial\Omega_{\xi}^1} E^2 |\partial\Omega_{\xi}^1| \varepsilon^2 + \max_{\partial\Omega_{\xi}^{11}} E^2 |\partial\Omega_{\xi}^{11}| M^2 \right].$$

Отсюда, считая $\lambda \geq 3d$, легко получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \lambda \int_{\Omega_{\xi}} E^2(u_x^2 + u_y^2 + u_t^2) dV + 2\lambda^2 \int_{\Omega_{\xi}} E^2 u^2 dV &\leq \\ &\leq 3 \cdot 10^5 \lambda^3 (1+a)^3 \left[\max_{\partial\Omega^1} E^2 |\partial\Omega^1| \varepsilon^2 + \max_{\partial\Omega^{11}} E^2 |\partial\Omega^{11}| M^2 \right]. \end{aligned}$$

Возьмем число η с условиями $\xi < \eta < \zeta$, $\eta > \frac{\xi + \zeta}{2}$.

Очевидно, что поверхность уровня $x^2 + 3y^2 - t^2 = \eta$ и поверхность S ограничивают некоторую область $\Omega_{\eta} \subseteq \Omega_{\xi}$.
Из этого следует:

$$\frac{1}{3} \lambda \int_{\Omega_{\eta}} E^2(u_x^2 + u_y^2 + u_t^2) dV + 2\lambda^2 \int_{\Omega_{\eta}} E^2 u^2 dV \leq$$

$$\leq 3 \cdot 10^5 \cdot \lambda^3 (1+a)^3 \left[\max_{\partial\Omega_{\xi}^1} E^2 |\partial\Omega_{\xi}^1| \varepsilon^2 + \max_{\partial\Omega_{\xi}^{11}} E^2 |\partial\Omega_{\xi}^{11}| M^2 \right].$$

Так как $\max_{\partial\Omega_{\xi}^1} E^2 = \exp(2\lambda \cdot \zeta)$, $\max_{\partial\Omega_{\xi}^{11}} E^2 = \exp(2\lambda \xi)$

и при $(x, y, t) \in \Omega_{\xi}$ $E^2 \geq \exp(2\lambda \eta)$,

то из последнего неравенства получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \int_{\Omega_\eta} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dv + 2\lambda \int_{\Omega_\eta} u^2 dv \leq \\ & \leq 3 \cdot 10^5 (1+a)^3 \lambda^2 [e^{2\lambda(\xi-\eta)} |\partial\Omega_\xi^1| \varepsilon^2 + e^{-2\lambda(\eta-\xi)} |\partial\Omega_\xi^{11}| M^2] = \\ & = 3 \cdot 10^5 (1+a)^3 [\lambda^2 e^{-2\lambda(\eta \frac{\xi+\zeta}{2})} e^{2\lambda(\xi-\zeta)} |\partial\Omega_\xi^1| \varepsilon^2 + \\ & + \lambda^2 e^{-2\lambda(\eta \frac{\xi+\zeta}{2})} e^{-2\lambda(\zeta-\xi)} |\partial\Omega_\xi^{11}| M^2] \leq \\ & \leq 3 \cdot 10^5 (1+a)^3 (\eta - \frac{\xi+\zeta}{2})^{-2} [e^{2\lambda(\zeta-\xi)} |\partial\Omega_\xi^1| \varepsilon^2 + e^{-2\lambda(\zeta-\xi)} |\partial\Omega_\xi^{11}| M^2]. \end{aligned}$$

Полагая в последнем неравенстве $e^{2\lambda(\zeta-\xi)} = (\frac{|\partial\Omega^{11}| M^2}{|\partial\Omega^1| \varepsilon^2})^{\frac{1}{2}}$, приходим к утверждению теоремы.

Л и т е р а т у р а .

1. Calderon A. Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Am. J. Math., 80, 16-36, 1958.
2. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., "Мир", 1965.
3. Kumano-Go H., Pseudo differential operators and the uniqueness of the Cauchy problem, Comm. Pure Appl. Math. 22, 73-129, 1969.
4. Holmgren E. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen, Öfversigt at Konge. Vetenskaps Akad. Förh., 58, 91-105, 1901.
5. Nirenberg L., Uniqueness in Cauchy problems for differential equations with constant leading coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 10, 89-105, 1957.

6. Шиматский С.П. Априорные оценки в задаче о продолжении волнового поля с цилиндрической времениподобной поверхностью. - В сб.: Математические проблемы геофизики. ВЦ СО АН СССР, в. 4, 165-178, 1973.

$$u(x, y) = u(x, y) + \dots \quad (2)$$

где $u(x, y)$ - регулярно гармоническая в D^+ функция.

Пусть Γ - некоторая одноэлементная замкнутая кривая в D^+ с границей Γ состоящая из отрезков $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

Рассмотрим задачу Дирихле в области D^+ с граничными условиями $u|_{\Gamma_j} = \varphi_j$.

Решение задачи Дирихле в области D^+ с граничными условиями $u|_{\Gamma_j} = \varphi_j$ существует и единственно.

Решение задачи Дирихле в области D^+ с граничными условиями $u|_{\Gamma_j} = \varphi_j$ существует и единственно.

Решение задачи Дирихле в области D^+ с граничными условиями $u|_{\Gamma_j} = \varphi_j$ существует и единственно.

$$(1) \quad \dots \quad (2)$$

С. И. Темирбулатов

НЕКОТОРЫЕ НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА

п. I. Если в каждой точке области своего задания дифференциальное уравнение с частными производными наряду с действительными характеристиками имеет и комплексные, то говорят, что рассматриваемое уравнение является уравнением составного типа. Различные краевые задачи для таких уравнений рассмотрены Адамаром, Р. Девисом, Т. Д. Джураевым, М. С. Салахитдиновым, Г. И. Эскиным и другими. Краткий обзор работ этих авторов и литературная библиография даны в работе [1]. Отметим, что все эти работы посвящены исследованию классически корректных задач. Ниже мы рассмотрим некоторые задачи, некорректные в смысле Адамара.

Дано уравнение составного типа

$$\frac{\partial}{\partial y} (u_{xx} + u_{yy}) = 0. \quad (I)$$

Очевидно, что прямые $x = \text{const}$ являются характеристиками этого уравнения.

Решение $u(x, y)$ уравнения (I), непрерывное вместе со своими частными производными до второго порядка, назовем регулярным, если функция $\Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy}$ непрерывно дифференцируема по переменной y .

Как показано в работе [I], регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (I) представимо в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + \varphi(x), \quad (2)$$

где $v(x, y)$ - регулярная гармоническая, а $\varphi(x)$ - произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть D - некоторая односвязная область, заключенная между двумя характеристиками $x = 0$ и $x = 1$ уравнения (I) и ее граница Γ состоит из трех кусков гладких жордановых кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$, т.е. $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

При исследовании задач рассматриваются следующие виды области:

а) D - полуполоса $0 \leq x \leq 1$ и выше некоторой плоской линии (в частности, $y \geq 0$);

б) D - конечная область и каждая прямая $x = c$ $0 < c < 1$ пересекает границу Γ в двух точках. Поведение границы при переходе к прямым $x = 0$ и $x = 1$ каждый раз будем уточнять.

Сформулируем задачу:

Найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (I), непрерывное вплоть до границы этой области и удовлетворяющее условиям:

$$u|_{\Gamma_0} = f_1(s), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = f_2(s), \quad (3)$$

а также одному из следующих равенств:

$$\text{а) } u_{yy}'' \Big|_{\Gamma_1} = \phi(s) \quad \text{Б) } u_y' \Big|_{\Gamma_1} = \phi(s) \quad \text{в) } u_x' \Big|_{\Gamma_1} = \phi(s),$$

$$(4)$$

$$\text{г) } u_{xx}'' \Big|_{\Gamma_1} = \phi(s) \quad \text{и } i = 0, 1 \quad \text{д) } u \Big|_{\Gamma_1} = \phi(s),$$

где s - длина дуги Γ_0 , отсчитываемая от точки $O(0,0)$,
 n - внутренняя нормаль к границе области, f_1, f_2 ,
 ϕ - заданные гладкие функции, причем они на стыках кривых Γ_0 и Γ_1 удовлетворяют условиям согласованности.

В силу представления (2) и условия (3) для функции $v(x, y)$ получаем задачу Коши для уравнения Лапласа:

$$\Delta v = 0, \quad (5)$$

$$v \Big|_{\Gamma_0} = f_1(s) - \phi(x), \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = f_2(s) - \phi'(x) \cos(n, x). \quad (6)$$

Если последняя задача разрешима, то она имеет единственное решение, что следует из эквивалентности ее к задаче аналитического продолжения регулярной функции [2]

$$f(x, y) = v(x, y) + iw(x, y),$$

где $w(x, y)$ - функция сопряженная с $v(x, y)$ и она определяется через значения $\frac{\partial v}{\partial n}$ на кривой Γ_0 .

п. 2. Легко видеть, что задачу (3)-(4) в зависимости от области D и частей Γ_0, Γ_1 ее границы можно свести к различным задачам. Для некоторых из них удается показать единственности решения.

Сначала рассмотрим полуполосу $0 \leq x \leq 1, y \geq 0$.

Задача А. Пусть $\Gamma_0 \equiv [0, 1]$ оси x -в, а Γ_1 - совпадает с осью y -в.

Учитывая, что линейная функция $\alpha + \beta x$ гармоническая, при рассмотрении задачи А без ограничения общности произвольную функцию $\varphi(x)$ подчиним дополнительным условиям

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (7)$$

Теорема I. Решение задачи А единственно, только при условии

$$а) \quad \frac{u''}{yy} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{u''}{yy} \Big|_{y=0} = 0, \quad (8)$$

(в остальных условиях (4) нет единственности решения.

Доказательство. В нашем случае из условий (6), (8), для однородной задачи ($f_1 = 0, f_2 = 0, \varphi = 0$), получим

$$v \Big|_{y=0} = -\varphi(x), \quad v'_y \Big|_{y=0} = 0, \quad v''_{yy} \Big|_{y=0} = 0.$$

Отсюда, в силу гармоничности функции $v(x, y)$, имеем

$$v''_{xx} \Big|_{y=0} = \varphi''(x) = 0.$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$, в силу дополнительного предположения (7), будет только нулем. Таким образом, в этом случае, решение задачи единственно.

Теперь покажем, что при остальных вариантах условий (4) единственность решения задачи отсутствует

$$I) \quad \frac{u'_y}{y} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{v'_y}{y} \Big|_{x=0} = 0.$$

Очевидно, что функция $v(x, y) = x(x^2 + 3y^2 - 1)$ удовлетворяет всем требованиям задачи.

2) $v'_x|_{x=0} = 0$, т.е. $v'_x|_{x=0} = -\varphi'(0)$. Пусть функция $v(x, y) = \gamma(y) - \varphi(x)$. Следовательно, функции $\gamma(y)$, $\varphi(x)$ должны удовлетворять равенствам

$$\gamma'' = \varphi'' \quad \text{и} \quad \gamma(0) = \varphi'(0) = 0.$$

Но таких пар функции целый класс: $\gamma = ay^2$, $\varphi(x) = ax(x-1)$, где a — любое число.

$$3) \quad v''_{yy}|_{x=0} = 0 \quad \text{иначе} \quad v''_{yy}|_{x=0} = -v''_{xx}|_{x=0} = 0.$$

В этом случае функцию $v(x, y)$ ищем в виде

$$v(x, y) = \alpha(x) \cdot \beta(y) - \varphi(x). \quad (9)$$

Тогда для определения неизвестных функций $\alpha(x), \beta(y), \varphi(x)$ получим дифференциальное выражение

$$\alpha\beta'' + \alpha''\beta = \varphi'' \quad (10)$$

с дополнительными условиями

$$\alpha(0) = \beta(0) = \beta'(0) = 0. \quad (11)$$

Ясно, что существуют тройки функции $(\alpha, \beta, \varphi) \neq 0$, удовлетворяющие равенствам (10) и (11). Например,

$$\alpha(x) = \alpha x, \quad \beta(y) = y^2/2, \quad \varphi(x) = \frac{a}{6} (x^3 - x).$$

Неединственность задачи в остальных случаях равенств (4) просто получается из представления функции $v(x, y)$ в виде (9).

Итак, теорема I доказана полностью.

З а м е ч а н и е I. Результат легко переносится на случай любой конечной области и полуполосы, когда Γ_0 — любая гладкая простая кривая, соединяющая начало координат с точкой $A(1, y_0)$.

В самом деле

$$v''_{yy}|_{\Gamma_0} = -v''_{xx}|_{\Gamma_0} = -\varphi''(x)|_{\Gamma_0} = -\varphi''(x)|_{x \in [0, 1]} = 0.$$

З а д а ч а Б. Пусть теперь Γ_0 — ось y — в, а Γ_1 — отрезок

$$0 \leq x \leq 1.$$

При исследовании задачи Б в представлении (2) без ограничения общности можно полагать, что

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \quad (7')$$

Т е о р е м а 2. Решение задачи Б единственно в случаях:

$$1) \quad u|_{y=0} = 0 \rightarrow v|_{y=0} = -\varphi(x),$$

$$2) \quad u'_x|_{y=0} = 0 \rightarrow v'_x|_{y=0} = -\varphi'(x) \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$3) \quad u''_{xx}|_{y=0} = 0 \rightarrow v''_{xx}|_{y=0} = -\varphi''(x).$$

Доказательство. В силу условия (7) при $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ задача (5)-(6) имеет только нулевое решение, т.е. $v \equiv 0$. Следовательно, при указанных равенствах 1)-3), на основании того же условия (7') имеем, что $\varphi \equiv 0$.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 2 справедлива для полуполосы, когда Γ_1 - любая гладкая кривая, соединяющая точку $O(0, 0)$ с точкой $A(1, y_0)$.

Сейчас укажем еще две конечные области, для которых имеет место утверждение теоремы 2.

ж) Область D - однозначна отрезком $OB(\Gamma_0)$ оси y - в и кривой $\sigma(\Gamma_1 + \Gamma_2)$, лежащей в полуплоскости $x > 0$ и опирающейся на ось y - в в точках $O(0, 0)$ и $B(0, h)$, $h > 0$. Пусть часть Γ_1 совпадает дугой OA , $A(1, y_0)$.

жж) В только что описанной области D отрезок $OB(\Gamma_0)$ заменим дугой кривой $x = \alpha(y)$, причем $\alpha(y) < \exp\left(\frac{1}{|y|^{1+\delta}}\right)$,

$\delta > 0$ касающей ось y - в специальным образом.

Справедливость теоремы 2 для области ж) вытекает из замечания 2. Теперь приступим к доказательству ее для области жж). В этом случае, для определения функции $v(x, y)$, ($f_1 = 0$, $f_2 = 0$) из условия (6) имеем

$$v|_{x=\alpha(y)} = -\varphi(\alpha(y)), \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{x=\alpha(y)} = -\varphi'(\alpha(y)). \quad (I2)$$

Напишем в окрестности нуля ($\alpha(0) = 0$) формулы конечного приращения Лагранжа

$$\varphi(\alpha(y)) = \varphi(0) + \alpha(y)\varphi'(\theta\alpha), \quad 0 < \theta < 1,$$

$$\varphi'(\alpha(y)) = \varphi'(0) + \alpha(y)\varphi''(\theta_1\alpha), \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Откуда, в силу условия (7'), получим

$$|\varphi(\alpha(y))| \leq |\varphi'(\theta_\alpha)| \exp(-1/|y|^{1+\delta}) \leq C e^{-1/|y|^{1+\delta}},$$

(13)

$$|\varphi'(\alpha(y))| \leq |\varphi''(\theta_{\alpha_1})| \exp(-1/|y|^{1+\delta}) \leq C e^{-1/|y|^{1+\delta}}$$

Далее, воспользуемся теоремой из работы [2]: пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная внутри D , непрерывная в замкнутой области D и удовлетворяющая условию $|f(z)| \leq M$ $z \in D$. Кроме того, если $f(z)$ на Γ_0 удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leq \varepsilon, \quad z \in \Gamma_0,$$

(14)

то имеет место оценка

$$|f(z)| \leq M^{1-\omega(z)} \varepsilon^{\omega(z)},$$

(15)

где $\omega(z)$ — гармоническая мера кривой Γ_0 и области D . Из теории гармонических функций известно, что для гармонической меры $\omega(z)$ при фиксированной z имеет место неравенство

$$a(z)l \leq \omega(z) \leq b(z)l,$$

(16)

где функции $a(z)$, $b(z)$ ограниченные, l — длина дуги Γ_0 .

Берем круг K_r с центром в начале координат и радиусом r . У нас $\varepsilon = c \exp(-1/|z|^{1+\delta})$ и, следовательно, в круге

k_r имеем:

$$|f(z)| \leq M^{1-\omega(z)} C \exp(-\omega(z)/|z|^{1+\delta}) \leq$$

$$\leq C_1 \exp(-a(z)l/r^{1+\delta}) \sim e^{-1/r^\delta} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Поэтому, в области D функция $f \equiv 0$, а так как $|v| \leq |f|$ имеем, что $v \equiv 0$ то и требовалось доказать.

п. 3. Допустим, что конечная область D - симметрична относительно оси x - в и пусть с прямыми $x=0$ и $x=1$ имеет по одной общей точке O и $A(1, 0)$ (точки касания). Кроме того, пусть Γ_0 - нижняя дуга OA , а Γ_1 - часть верхней границы т.е. $\Gamma_1 = OC$, $C(x_0, y_1)$, $0 < x_0 < 1$. Заметим, что так как функция $u(x, y)$ вдоль кривой Γ_0 известна, а следовательно, известна производная от нее вдоль кривой Γ_0 , то, в силу (3), мы можем вычислить производные функции $u(x, y)$ по любому направлению, в том числе и производную u_y .

Итак, мы получили новую задачу.

З а д а ч а В. Найти регулярное решение уравнения (I) при условии

$$u|_{\Gamma_0 + \Gamma_1} = f_1(s), \quad u_y|_{\Gamma_0 + \Gamma_1} = f_2(s). \quad (3a)$$

Т е о р е м а 3. Решение задачи В единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Однородная задача В ($f_1 = 0$, $f_2 = 0$), в силу представления (2) редуцируется к задаче нахождения в области D регулярной гармонической функции $v(x, y)$, удовлетворяющей условиям

$$v|_{\Gamma_0 + \Gamma_1} = -\varphi(x), \quad v_y|_{\Gamma_0 + \Gamma_1} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (6)$$

В области D функция $v(x, y)$ будет четной относительно переменной y , ибо область симметрична и граничные данные на Γ_0 и Γ_1 одинаковы, и она определяется однозначно через функцию $\varphi(x)$, как решение задачи Коши для уравнения Лапласа. Поэтому, на всей границе области D , значение $v_y = 0$. Откуда, $v = \text{const}$ иначе $\varphi = \text{const}$, а в силу условия (7), эта $\text{const} = 0$, т.е. $\varphi \equiv 0$. Нетрудно видеть, что, если дуга Γ_0 не охватывает всю нижнюю половину границы области D , то решение задачи не будет единственным. В самом деле, тогда в оставшейся части границы области, в силу произвольности функции $\varphi(x)$, производная v_y может быть отлична от нуля.

В заключение выражаю благодарность проф. М.М.Лаврентьеву за постоянное внимание и полезные советы.

Л и т е р а т у р а .

1. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент, 1974.
2. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.

(1)

О.Ш. Турсынбеков

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБРАТНОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ n -ГО ПОРЯДКА

В данной работе исследуются вопросы существования и единственности решения обратной задачи для гиперболических уравнений n -го порядка с n независимыми переменными. Она состоит из двух частей.

I. Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x)u \quad (I)$$

с данными на характеристиках

$$u(x, \lambda) \Big|_{x_1=0} = f(\bar{x}, \lambda), u(x, \lambda) \Big|_{x_1=0} = 0, \quad (1 = 2, 3, \dots, n) \quad (2)$$

и пусть

$$u(x, \lambda) \Big|_{\substack{x_2=h \\ x_3=h \\ \dots \\ x_n=h}} = \varphi(x_1, \lambda) \quad (0 < x_1 < h), \quad (3)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - n -мерный, $\lambda = (\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$,
 $\lambda = (\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ ($0 \leq \lambda_i \leq h$, $i = 2, 3, \dots, n$) - $n-1$ -мерный векторы; $f(x, \lambda) = g(x_2 - \lambda_2)g(x_3 - \lambda_3) \dots g(x_n - \lambda_n)$,
а $g(x_i - \lambda_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) - функции Хависайда;
 $\varphi(x_1, \lambda)$ - заданная функция в n -мерном кубе $D[0, h; \dots; 0, h]$, h - положительное постоянное, а n ($n \geq 2$) - конечное натуральное число.

Предположим, что для коэффициентов $a_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) и $b(x)$ уравнения (I) и функции $\varphi(x_1, \lambda)$ в замкнутом \bar{D} выполняются следующие условия:

A) $a_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) - известные непрерывные функции со своими частными производными первого порядка по x_1, x_2, \dots, x_n и

$$\max_{x \in \bar{D}} (|a_j(x)|, \left| \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} \right|) \leq K_1 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

B) $b(x)$ - неизвестная непрерывная функция и

$$\max_{x \in \bar{D}} |b(x) - b^0(x)| \leq M,$$

где $b^0(x)$ - известная непрерывная функция в \bar{D} (определение $b^0(x)$ будет дано ниже, так как ее определению предшествует ряд выкладок, связанных с решением прямой задачи), а K_1 и M - некоторые положительные числа.

B) Функция $\varphi(x_1, \lambda)$ имеет непрерывную смешанную производную n -го порядка по $x_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и $\varphi(x_1, \lambda)|_{x_1=0} = 1$.

Множество непрерывных функций $b(x)$ ($x \in D$), удовлетворяющих условию (Б), является замкнутым шаром радиуса m с центром в точке $b^0(x)$ в функциональном пространстве C . Обозначим его через T .

Перейдем к постановке обратной задачи для уравнения (I) (см. [I]). Требуется определить коэффициент $b(x)$ уравнения (I) в шаре T по заданным коэффициентам $a_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) этого уравнения и по заданной функции $\varphi(x_1, \lambda)$ в D .

Т е о р е м а I. Пусть выполнены условия (А)-(В). Тогда найдется такое $h^* > 0$, что для $h \leq h^*$ решение поставленной обратной задачи существует и притом единственно в шаре T функционального пространства C .

З а м е ч а н и е. Отметим необходимость выполнения условия (В) для существования решения обратной задачи, что выяснится в дальнейшем.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Семейство обобщенных решений уравнения (I), удовлетворяющих данным (2), эквивалентно решению следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$u(x, \lambda) = f(\bar{x}, \lambda) + \int_0^x \left[\sum_{j=1}^n a_j(\xi) \frac{\partial u(\xi, \lambda)}{\partial \xi_j} + b(\xi) u(\xi, \lambda) \right] d\xi, \quad (4)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ - n -мерный вектор; интеграл n -кратный; $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$ - элемент объема в n -мерном кубе D .

Применяя к уравнению (4) метод последовательных приближений, находим:

$$u(x, \lambda) = f(\bar{x}, \lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^x P_m(x, \tau) \left[\sum_{j=2}^n a_j(\tau) \frac{\partial f(\bar{\tau}, \lambda)}{\partial \tau_j} + b(\tau) f(\bar{\tau}, \lambda) \right] d\tau, \quad (5)$$

где

$$P_m(x, \tau) = \int_{\mathcal{X}} a_1(\tau_1, \tilde{\xi}) P_{m-1}(\tau_1, \tilde{\xi}, \tau) d\tilde{\xi} + \sum_{j=2}^n \int_{t_j}^{y_j} a_j(\tau_j, \eta_j) P_{m-1}(\tau_j, \eta_j, \tau) d\eta_j, \quad (6)$$

$$\eta_j, \tau) d\eta_j + \int_{\tau}^x \left[\sum_{j=1}^n a_j(\xi) \frac{\partial P_{m-1}(\xi, \tau)}{\partial \xi_j} + b(\xi) P_{m-1}(\xi, \tau) \right] d\xi, P_1 = 1.$$

Здесь $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, $\tilde{\tau} = (\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n)$, $\tilde{\xi} = (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$,

$y_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $t_i = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_n)$ ($i = 2, 3, \dots, n-1$),

$y_n = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $t_n = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$, $d\tilde{\xi} = d\xi_2 d\xi_3 \dots d\xi_n$,
 так же $(\tau_1, \eta_1) = (\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \tau_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)$, $d\eta_1 = d\xi_1 \dots d\xi_{i-1} d\xi_{i+1} \dots d\xi_n$ ($i = 2, 3, \dots, n-1$), $(\tau_n, \eta_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \tau_n)$, $d\eta_n = d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1}$, $f(\tilde{\tau}, \lambda) = g(\tau_2 - \lambda_2) g(\tau_3 - \lambda_3) \dots g(\tau_n - \lambda_n)$.

Из уравнения (5), в силу условия (3) и свойств функции Хевисайда (δ -функции Дирака), получим следующее:

$$\varphi(x, \lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^x \int_0^x \sum_{j=2}^n a_j(\lambda_j, t_j) P_m(x_1, c, \lambda_j, t_j) f_j(\tilde{t}_j, \tilde{\lambda}) dt_j + \quad (7)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^c \int_0^x b(\tau) P_m(x_1, c, \tau) f(\tilde{\tau}, \lambda) d\tau,$$

где $c = (h, \dots, h)$ - $n-1$ -мерный, $\tilde{c} = (h, \dots, h)$ - $n-2$ -мерный векторы; также $(\lambda_1, t_1) = (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \lambda_i, \tau_{i+1}, \dots, \tau_n)$,

$dt_1 = d\tau_1 \dots d\tau_{i-1} d\tau_{i+1} \dots d\tau_n$ ($i = 2, 3, \dots, n-1$),

$$\begin{aligned}
 (\lambda_n, t_n) &= (\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \lambda_n), dt_n = d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{n-1}, f_2(\tilde{t}_2, \tilde{\lambda}) = \\
 &= g(\tau_3 - \lambda_3)g(\tau_4 - \lambda_4) \dots g(\tau_n - \lambda_n), f_1(\tilde{t}_1, \tilde{\lambda}) = g(\tau_2 - \lambda_2) \dots \\
 &\dots g(\tau_{i-1} - \lambda_{i-1})g(\tau_{i+1} - \lambda_{i+1}) \dots g(\tau_n - \lambda_n) \quad (i = 3, 4, \dots, n-1), \\
 f_n(\tilde{t}_n, \tilde{\lambda}) &= g(\tau_2 - \lambda_2)g(\tau_3 - \lambda_3) \dots g(\tau_{n-1} - \lambda_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Из условий (А) и (Б) следует, что в \bar{D} будут выполняться следующие условия:

$$\max_{x \in \bar{D}} |b(x)| \leq \max_{x \in \bar{D}} |b^0(x)| + M = K_2 \quad (8)$$

и

$$\max_{x \in \bar{D}} (|a_j(x)|, |\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j}|, |b(x)|) \leq K, \quad (9)$$

где $K = \max(K_1, K_2)$.

Покажем теперь, что ряды в (7) сходятся абсолютно и равномерно в \bar{D} . Для этого, в силу условия (9) и ограниченности $f(\tilde{t}, \lambda)$, $f_j(\tilde{t}_j, \tilde{\lambda})$ (произведения функции Хевисайда), достаточно показать абсолютную и равномерную сходимость в \bar{D} ряда

$$\sum_{m=2}^{\infty} p_m(x_1, c, \tau), \quad (10)$$

так как равномерная сходимость в \bar{D} остальных рядов показывается аналогичным способом.

Из соотношения (6) при $x_i = h$ ($i = 2, 3, \dots, n$), в силу условия (9), находим следующие оценки для $p_m(x_1, c, \tau)$ в \bar{D} :

$$|p_m(x_1, c, \tau)| \leq \frac{[K(nh^{n-1} + h^n)]^{m-1}}{[(m-1)!]^{n-2}}, \quad (II)$$

$$(0 \leq x_i \leq h; i = 1, 2, \dots, n; m = 2, 3, \dots)$$

З а м е ч а н и е I. Для $n = 2, 3$ следует воспользоваться более точными оценками, которых легко получить из выражения (6) при $n = 2, 3$. Например, для $n = 2$, т.е. для уравнения второго порядка:

(II')

$$|p_m(x_1, c, \tau)| \leq K^{m-1} \sum_{s_1=0}^{m-1} \sum_{s_2=s_1}^{m-1} C_{m-1}^{s_1} C_{m-s_1-1}^{m-s_2-1} \frac{h^{m-s_1-1}}{(m-s_1-1)! s_2!} \frac{h^{s_2}}{s_2!},$$

где C_{α}^{β} ($\alpha = m-1, m-s_1-1; \beta = s_1, m-s_2-1$) — число сочетания из α элементов по β , а $C_{\alpha}^0 = I$.

Из оценок (II) следует, что функциональный ряд (IO) сходится абсолютно и равномерно в \bar{D} . Тем самым показали абсолютную и равномерную сходимость каждого функционального ряда в (7). Тогда, в этом уравнении можем переставить суммы с интегралами, и в результате получим:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \lambda) = & 1 + \int_0^c \int_0^{x_1} \sum_{j=2}^n [1 + R(x_1, c, \lambda_j, t_j)] a_j(\lambda_j, t_j) f_j(\tilde{t}_j, \tilde{\lambda}) dt_j + \\ & + \int_0^c \int_0^{x_1} [1 + R(x_1, c, \tau)] b(\tau) f(\tilde{\tau}, \lambda) d\tau, \end{aligned} \quad (I2)$$

где

$$R(x_1, c, \lambda_j, t_j) = \sum_{m=2}^{\infty} p_m(x_1, c, \lambda_j, t_j), R(x_1, c, \tau) = \sum_{m=2}^{\infty} p_m(x_1, c, \tau) \quad (13)$$

Чтобы показать дифференцируемость функции $\varphi(x_1, \lambda)$ по x_1 достаточно показать дифференцируемость $R(x_1, c, \tau)$ по x_1 в \bar{D} . Для этой цели формально продифференцировав ряд (13) по x_1 в \bar{D} получим:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\partial p_m(x_1, c, \tau)}{\partial x_1} \quad (14)$$

Дифференцируя соотношение (6) при $x_i = h$ ($i = 2, 3, \dots, n$) по x_1 получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_m(x_1, c, \tau)}{\partial x_1} &= \sum_{j=2}^n \int_{\mu_j}^{\xi} a_j(x_1, \tau_j, \zeta_j) p_{m-1}(x_1, \tau_j, \zeta_j, \tau) d\zeta_j + \\ &+ \int_{\tilde{\tau}}^{\tilde{\xi}} [a_1(x, \tilde{\xi}) \frac{\partial p_{m-1}(x_1, \tilde{\xi}, \tau)}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^n a_j(x, \tilde{\xi}) \frac{\partial p_{m-1}(x, \tilde{\xi}, \tau)}{\partial \xi_j} + \\ &+ b(x_1, \tilde{\xi}) p_{m-1}(x_1, \tilde{\xi}, \tau)] d\tilde{\xi}, \quad (15) \end{aligned}$$

где $\mu_2 = (\tau_3, \tau_4, \dots, \tau_n)$, $\mu_i = (\tau_2, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_n)$ ($i = 3, 4, \dots, n-1$), $\mu_n = (\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{n-1})$, $(\tau_2, \zeta_2) = (\tau_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$,

$(\tau_1, \zeta_1) = (\xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \tau_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)$ ($i = 3, 4, \dots, n-1$),

$(\tau_n, \zeta_n) = (\xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \tau_n)$, $d\zeta_2 = d\xi_3 d\xi_4 \dots d\xi_n$, $d\zeta_1 = d\xi_2 \dots$

$\dots d\xi_{i-1} d\xi_{i+1} \dots d\xi_n$ ($i = 3, 4, \dots, n-1$), $d\zeta_n = d\xi_2 d\xi_3 \dots d\xi_{n-1}$.

Из соотношения (15), в силу условия (9) и оценок (II) получим следующие оценки в

$$\left| \frac{\partial p_m(x_1, c, \tau)}{\partial x_1} \right| \leq \frac{[K(nh^{n-1} + h^n)]^{m-1}}{h[(m-1)!]^{n-2}}, \quad (16)$$

$$(0 \leq x_i \leq h; i = 1, 2, \dots, n; m = 2, 3, \dots)$$

(здесь, как и в замечании I, можем получить аналогичные оценки для $\frac{\partial R_m(x_1, c, \tau)}{\partial x_1}$ при $n = 2, 3$).

Следовательно, функциональный ряд (I4) сходится абсолютно и равномерно в \bar{D} . Поэтому его сумма будет равна $\frac{\partial R(x_1, c, \tau)}{\partial x_1}$, т.е.

$$\frac{\partial R(x_1, c, \tau)}{\partial x_1} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\partial R_m(x_1, c, \tau)}{\partial x_1}. \quad (I7)$$

Из соотношения (I5), в силу условия (A), следует непрерывность функции $\frac{\partial R_m(x_1, c, \tau)}{\partial x_1}$ для любого фиксированного m ($m = 2, 3, \dots$) в \bar{D} . Отсюда и из равномерной сходимости функционального ряда (I4) в \bar{D} следует непрерывность его суммы $\frac{\partial R(x_1, c, \tau)}{\partial x_1}$ в этом \bar{D} (аналогично $\frac{\partial R(x_1, c, \lambda_j, \tau_j)}{\partial x_1}$ ($j = 2, 3, \dots, n$)).

Таким образом, показали дифференцируемость $\varphi(x_1, \lambda)$ по x_1 в D . Непрерывность $\frac{\partial \varphi(x_1, \lambda)}{\partial x_1}$ следует из вышесказанного. Результат дифференцирования (I2) по x_1 не приведем здесь, из-за громоздкости получаемого соотношения.

Покажем теперь, что $\frac{\partial R(x_1, c, \tau_1, \lambda)}{\partial x_1}$ дифференцируема по λ_j ($j = 2, 3, \dots, n$) в \bar{D} . Для этого нам достаточно показать дифференцируемость $\frac{\partial R(x_1, c, \tau_1, \lambda)}{\partial x_1}$ по λ_2 , так как дифференцируемость $\frac{\partial R(x_1, c, \tau_1, \lambda)}{\partial x_1}$ по λ_j ($j = 3, 4, \dots, n$) в \bar{D} аналогично.

Последовательно повторяя те же рассуждения (дифференцируемость $R(x_1, c, \tau)$ по x_1) для функции $\frac{\partial R(x_1, c, \tau_1, \lambda)}{\partial x_1}$, мы можем заключить, что $\frac{\partial R(x_1, c, \tau_1, \lambda)}{\partial x_1}$ дифференцируема

по λ_2 в \bar{D} . Тем самым показали дифференцируемость

по λ_j ($j = 2, 3, \dots, n$) в \bar{D} , причем $\frac{\partial R(x_1, c, \tau_1, \lambda)}{\partial x_1} \frac{\partial^2 R(x_1, c, \tau_1, \lambda)}{\partial x_1 \partial \lambda_j}$ ($j = 2, 3, \dots, n$) будут непрерывными функциями в \bar{D} , и выполняться следующие равенства;

(18)

$$\frac{\partial^2 R(x_1, c, \tau_1, \lambda)}{\partial x_1 \partial \lambda_j} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\partial p_m(x_1, c, \tau_1, \lambda)}{\partial x_1 \partial \lambda_j} \quad (j = 2, 3, \dots, n).$$

Из вышеизложенного следует дифференцируемость $\frac{\partial \Phi(x_1, \lambda)}{\partial x_1}$ последовательно по λ_j ($j = 2, 3, \dots, n$), причем $\frac{\partial^n \Phi(x_1, \lambda)}{\partial x_1 \partial \lambda_2 \dots \partial \lambda_n}$ будет непрерывной функцией в \bar{D} .

Поэтому, дифференцируя (I2) последовательно по $x_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и заменяя λ_j ($0 \leq \lambda_j \leq h$, $j = 2, 3, \dots, n$) соответственно на x_j ($0 \leq x_j \leq h$, $j = 2, 3, \dots, n$), получим следующее уравнение относительно в $b(x)$:

$$(1 + A(c, \tilde{x}))b(x) = (-1)^{n+1} \frac{\partial^n \Phi(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} +$$

$$+ \sum_{j=2}^n \frac{\partial [(1 + A(c, \tilde{x}))a_j(x)]}{\partial x_j} + \int_0^{x_1} \left[\sum_{j=2}^n \frac{\partial \left(\frac{\partial R(x_1, c, \tau_1, \tilde{x})}{\partial x_1} a_j(\tau_1, \tilde{x}) \right)}{\partial x_j} - \frac{\partial R(x_1, c, \tau_1, \tilde{x})}{\partial x_1} b(\tau_1, \tilde{x}) \right] d\tau_1, \quad (19)$$

где (20)

$$A(c, \tilde{x}) = \sum_{m=2}^{\infty} p_m(x_1, c, x), \quad \frac{\partial R(x_1, c, \tau_1, \tilde{x})}{\partial x_1} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\partial p_m(x_1, c, \tau_1, \tilde{x})}{\partial x_1},$$

здесь $A(c, \tilde{x})$ выражается через известную функцию $a_1(x)$ и итерированные функции от этой функции.

Подобно тому, как это было сделано в работах [2] - [4], нетрудно показать существование малого $\tilde{h} > 0$, при котором для любого $h \leq \tilde{h}$ будет выполняться, что

$$|1 + A(c, \tilde{x})| \geq \frac{1}{2} \quad (\text{при } 0 < h \leq \tilde{h}) \quad (21)$$

Тогда уравнение (19) можно записать в виде:

$$b(x) - b^0(x) = Bb, \quad (22)$$

$$b^0(x) = \frac{1}{1 + A(c, \tilde{x})} \{ (-1)^{n+1} \frac{\partial^n \varphi(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} + \sum_{j=2}^n \frac{\partial [(1 + A(c, \tilde{x})) a_j(x)]}{\partial x_j} \}, \quad (23)$$

$$Bb = \frac{1}{1 + A(c, \tilde{x})} \int_0^1 \left[\sum_{j=2}^n \frac{\partial \left(\frac{\partial R(x_1, c, \tau_1, \tilde{x})}{\partial x_1} a_j(\tau_1, \tilde{x}) - \frac{\partial R(x_1, c, \tau_1, \tilde{x})}{\partial x_1} b(\tau_1, \tilde{x}) \right) d\tau_1 \right]$$

здесь B - нелинейный непрерывный оператор в шаре T .

Уравнение (22) является нелинейным интегральным уравнением относительно $b(x)$, к которому применим принцип сжатых отображений. Покажем, что оператор B переводит шар T в себя и сжимает расстояние между элементами этого шара.

Действительно, при любой непрерывной функции $b(x) \in T$, из выражения (23) в силу условия (9), оценок (II), (I6) и соотношений (21), (20), (I8), (I7) можем получить:

$$\|Bb\| \leq s, \quad (24)$$

где

$$S = 2(nh + n - 1) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{K^m (nh^{n-1} + h^n)^{m-1}}{h[(m-1)!]^{n-2}}. \quad (24_I)$$

Далее, рассмотрим два произвольных элемента $b(x)$, $\tilde{b}(x) \in T$ и пусть

$$\rho(b, \tilde{b}) = \max_{x \in \bar{D}} |b(x) - \tilde{b}(x)|. \quad (25)$$

Ясно, что для элементов $b(x)$ и $\tilde{b}(x)$ выполняется условие (9).

Используя соотношения (23), (25), (2I), (20), (I8) и (I7), с учетом условия (9) и оценок (II), (I6) получим в шаре T следующее:

$$\rho(Bb, \tilde{Bb}) \leq \tilde{S} \rho(b, \tilde{b}), \quad (26)$$

где

$$(26_I)$$

$$\tilde{S} = 2 \sum_{m=2}^{\infty} [h(nm - n + 1) + (n - 1)(m - 1)] \frac{[K(nh^{n-1} + h^n)]^{m-1}}{h[(m-1)!]^{n-2}}.$$

$S = S(h)$, $\tilde{S} = \tilde{S}(h)$ — монотонно возрастающие функции от h , которые обращаются при $h = 0$ в нуль. Следовательно, существуют такие малые $h' > 0$, $h'' > 0$, при которых для любого $h \leq h'$, $h \leq h''$ будут выполняться следующие неравенства:

$$\begin{aligned} S &\leq M \quad (\text{при } h \leq h'), \\ S &< 1 \quad (\text{при } h \leq h''). \end{aligned} \quad (27)$$

З а м е ч а н и е 2. Когда рассматривается уравнение (I) при $n = 2, 3$ целесообразно воспользоваться вместо соотношения (24_I) и (26_I) более удобными, которых нетрудно получить приняв во внимание замечание I. Тогда выполнения неравенств (27) очевидно.

Из неравенств (24), (26) при $h^* = \min(\tilde{h}, h', h'')$ в силу (27) следует, что оператор V является на шаре T оператором сжатия и осуществляет сжатое отображение шара T в себя. Тогда, согласно теореме С.Банаха, оператор V в шаре T имеет единственную неподвижную точку, т.е. существует и притом единственное решение уравнения (22) в этом шаре, что и требовалось доказать.

Отметим, что решение этого уравнения можно получить методом последовательных приближений.

II. Рассмотрим теперь гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = a_1(x) \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_2 \partial x_3 \dots \partial x_n} + \quad (I')$$

$$+ \sum_{j=2}^{n-1} a_j(x) \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_1 \dots \partial x_{j-1} \partial x_{j+1} \dots \partial x_n} + a_n(x) \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}},$$

с данными на характеристиках

$$u(x, \lambda) \Big|_{\substack{x_i=0 \\ \lambda_i=h}} = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2')$$

и пусть

$$u(x, \lambda) \Big|_{\substack{\lambda_1=0 \\ x_k=h}} = \varphi_1, \quad u(x, \lambda) \Big|_{\substack{\lambda_i=0 \\ x_k=h}} = \varphi_i, \quad u(x, \lambda) \Big|_{\substack{\lambda_n=0 \\ x_k=h}} = \varphi_n, \quad (3')$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 < x_1 < h \\ k = 2, 3, \dots, n \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} 0 < x_i < h; i = 2, 3, \dots, n-1 \\ k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} 0 < x_n < h \\ k = 1, 2, \dots, n-1 \end{array} \right)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ($0 \leq \lambda_i \leq h; i = 1, 2, \dots, n$) - n -мерные векторы; $a_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) - компоненты вектор-функции $a(x) = a_1(x)e_1 + a_2(x)e_2 + \dots + a_n(x)e_n$, а e_j ($j = 1, 2, \dots, n$) - единичные векторы; $f_1 = g(x_2 - \lambda_2)g(x_3 - \lambda_3) \dots g(x_n - \lambda_n)$, $f_i = g(x_1 - \lambda_1) \dots g(x_{i-1} - \lambda_{i-1})g(x_{i+1} - \lambda_{i+1}) \dots g(x_n - \lambda_n)$ ($i = 2, 3, \dots, n-1$), $f_n = g(x_1 - \lambda_1)g(x_2 - \lambda_2) \dots g(x_{n-1} - \lambda_{n-1})$, а $g(x_i - \lambda_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) - функции Хевисайда; $\varphi_1 = \varphi_1(x_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\varphi_i = \varphi_i(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, x_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n)$ ($i = 2, 3, \dots, n-1$), $\varphi_n = \varphi_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, x_n)$ - заданные функции в n -мерном кубе $D[0, h; \dots; 0, h]$, h - некоторое положительное постоянное, а n ($n \geq 2$) - конечное натуральное число.

Будем предполагать, что для вектор-функции $a(x)$ и функций φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в замкнутом \bar{D} выполняются следующие условия:

А) неизвестная $a(x)$ - непрерывная вектор-функция и

$$\max_{x \in \bar{D}} |a(x) - a^0(x)| \leq M,$$

где $a^0(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_j} e_j$ - известная непрерывная функция в

\bar{D} , а M - некоторое положительное число;

Б) функции φ_i непрерывны со своими частными производными первого порядка по x_1, x_2, \dots, x_n и удовлетворяют очевидным условиям согласования.

Поставим задачу: определить вектор-функцию $a(x)$ в шаре T (T - множество непрерывных вектор-функций $a(x)$ ($x \in \bar{D}$), удовлетворяющих условию (А) в функциональном пространстве C) по заданным функциям φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в \bar{D} .

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия (А)-(Б). Тогда найдется такое $h^* > 0$, что для $h \leq h^*$ решение поставленной обратной задачи существует и притом единственно в шаре T .

Доказательство. Последовательно проводя те же рассуждения, что и в первой части, для данного уравнения (I') получим систему. Далее, дифференцируя полученную систему соответственно по x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) получим следующую систему из n уравнений относительно компонентов вектор-функции $a(x)$:

$$a_1(x) = \frac{1}{R_1(x, c, x)} \left[\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} - \sum_{j=2}^n \int_0^h \frac{\partial R(x_1, c, \tau_j, x_{1j})}{\partial x_1} a_j(\tau_j, x_{1j}) d\tau_j - \int_0^{x_1} \frac{\partial R(x_1, c, \tau_1, x_{11})}{\partial x_1} a_1(\tau_1, x_{11}) d\tau_1 \right], \quad (I9')$$

$$a_i(x) = \frac{1}{R_i(x, c, x)} \left[\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_i} - \left(\sum_{j=1}^{i-1} + \sum_{j=i+1}^n \right) \int_0^h \frac{\partial R(x_i, c, \tau_j, x_{ij})}{\partial x_i} a_j(\tau_j, x_{ij}) d\tau_j - \int_0^{x_i} \frac{\partial R(x_i, c, \tau_i, x_{ii})}{\partial x_i} a_i(\tau_i, x_{ii}) d\tau_i \right] \quad (i = 2, 3, \dots, \dots, n-1),$$

$$a_n(x) = \frac{1}{R_n(x_n, c, x)} \left[\frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n} - \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^h \frac{\partial R(x_n, c, \tau_j, x_{nj})}{\partial x_n} a_n(\tau_j, x_{nj}) d\tau_j - \int_0^{x_n} \frac{\partial R(x_n, c, \tau_n, x_{nn})}{\partial x_n} a_n(\tau_n, x_{nn}) d\tau_n \right],$$

где $R_j(x_j, c, x) = 1 + R(x_j, c, x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), также $(\tau_1, x_{11}) = (\tau_1, x_2, \dots, x_n)$, $(\tau_2, x_{12}) = (0, \tau_2, x_3, \dots, x_n)$, $(\tau_j, x_{1j}) = (0, x_2, \dots, x_{j-1}, \tau_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ ($j = 3, 4, \dots, n-1$), $(\tau_n, x_{1n}) = (0, x_2, \dots, x_{n-1}, \tau_n)$, $(\tau_1, x_{21}) = (\tau_1, 0, x_3, \dots, x_n)$, $(\tau_2, x_{22}) = (x_1, \tau_2, x_3, \dots, x_n)$, $(\tau_3, x_{23}) = (x_1, 0, \tau_3, x_4, \dots, x_n)$, $(\tau_j, x_{2j}) = (x_1, 0, x_3, \dots, x_{j-1}, \tau_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ ($j = 4, 5, \dots, n-1$), $(\tau_n, x_{2n}) = (x_1, 0, x_3, \dots, x_{n-1}, \tau_n)$, а $c = (h, \dots, h) - n - 1 -$

мерный вектор

По такой же схеме обозначены (τ_j, x_{ij}) ($i = 3, 4, \dots, n - i$; $j = 1, 2, \dots, n$), причем: при $i > j$ $(\tau_j, x_{ij}) = (x_1, \dots, x_{j-1}, \tau_j, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$, при $i = j$ $(\tau_i, x_{ii}) =$

$= (x_1, \dots, x_{i-1}, \tau_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, при $i < j$ $(\tau_j, x_{ij}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \tau_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$, а для $i = n$ $(\tau_1, x_{n1}) = (\tau_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$, $(\tau_j, x_{nj}) = (x_1, \dots, x_{j-1}, \tau_j, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}, 0)$ ($j = 2, 3, \dots, n-1$), $(\tau_n, x_{nn}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \tau_n)$.

Систему уравнений (I9') можем записать в виде

$$a(x) - a^0(x) = Ba, \quad (22')$$

где Ba - разность между суммой правых частей системы уравнений (I9') умноженной соответственно на e_j ($j = 1, 2, \dots, n$) и $a^0(x)$, а B является непрерывным оператором в шаре T .

Подобно тому, как было сделано в первой части, нетрудно показать, что оператор B является оператором сжатия на шаре T и отображает его в себя (см. [2]).

Тогда, согласно теореме С.Банаха, существует единственное решение уравнения (22') в шаре T , что и требовалось доказать.

Л и т е р а т у р а .

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. "Наука", Новосибирск, 1969.
2. Елубаев С. Теорема единственности одной обратной задачи для гиперболического уравнения второго порядка. - В сб.: Математические проблемы геофизики, вып.4, Новосибирск, 1973.
3. Елубаев С., Турсынбеков О.Ш. Об одной теореме единственности обратной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка. - В сб.: Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть II, Новосибирск, 1975.
4. Турсынбеков О.Ш. Об одной теореме единственности обратной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка. - Тезисы докладов У Казахской межвузовской научной конференции по математике и механике, часть I, математика, Алма-Ата, 1974.

А Н Н О Т А Ц И И

статей, помещенных в сборнике

УДК 550.834

Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмологии. Алексеев А.С., Добринский В.И.
В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6, часть II,
Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975, с.

В работе обсуждается обладающий большой степенью общности способ регуляризации алгоритмов решения обратных задач. Сформулировано условие разрешимости одномерной обратной динамической задачи с информацией в виде записей падающей и отраженной волны. Это условие является и критерием устойчивости алгоритма ее численного решения. Приводятся результаты обработки реальных динамических измерений. Проанализирована роль различных факторов, влияющих на качество построения искомой структуры среды.

УДК 513.73

К обратной задаче дифракции. Аниконов Ю.Е., Марчук А.Г.
В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6, часть II,
Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

В работе доказывается однозначная определенность выпуклой поверхности, если известно отраженное от нее поле плоской волны.

Обратная задача ньютоновского потенциала объемных масс для тела, близкого к данному. Атаходжаев М.А. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

Если на плоскости $x_3 = 0$ трехмерного евклидова пространства даны значения $u(x_1, x_2, 0)$ ньютоновского потенциала в виде ряда

$$u(\mu, \phi) = \frac{4}{3} \pi A^3 \frac{\mu}{h} + \alpha \frac{\mu}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n [A_n^k \mu^n P_n^k(\mu) + \cos k \phi + B_n^k \mu^n P_n^k(\mu) \sin k \phi],$$

где $|A_n^k|, |B_n^k| < Nq^n$ и $q < \frac{A}{h}$, а A, h -

данные числа, $\mu = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \rho^2}}$, $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$,

$0 \leq \phi \leq 2\pi$, то можно найти под плоскостью $x_3 = 0$ для достаточно малых значений параметра α , единственное однородное тело с плотностью равной единице мало уклоняющееся от шара радиуса A , находящейся на глубине h . Такой вывод сделан в работе методом мажорантных рядов.

Об обратной задаче для линейных симметрических t -гиперболических систем уравнений первого порядка. Белинский С.П. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып.6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

Для линейной симметрической t -гиперболической системы:

$$u_t = \sum_{i=1}^n A_i u_{x_i} + Du + f, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

рассматривается задача о нахождении матрицы A_k ; $k = \overline{1, \dots, n}$ при заданных матрицах D, A_j ; $j \neq k$ по некоторой информации о решении системы (1)-(2). Предполагается, что коэффициенты искомой матрицы A_k есть функции от пространственных переменных x_1, \dots, x_{n-1} и времени t . Кроме этого, предполагается, что эти коэффициенты представимы в виде конечных сумм вида:

$$a_k^{ij}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) = \sum_{m=1}^N c_m^{kij}(x_1, \dots, x_{n-1}) b_m^{kij}(t), \quad (3)$$

где c_m^{kij} - непрерывно дифференцируемы по x_1, \dots, x_{n-1} до порядка l : $l = \left[\frac{n}{2} \right] + 1$, а функции b_m^{kij} непрерывны при $t \geq 0$.

Информация о решении задается самим решением u на некоторой области Ω_1 гиперплоскости $x_n = 0$:

$$u|_{x_n=0} = g(x_1, \dots, x_{n-1}, t); \quad t \geq 0; (x, t) \in \Omega_1. \quad (4)$$

Рассматривается n прямых задач вида (1)-(2) с информацией вида (4), а так же накладываются некоторые достаточные условия на матрицу информации и область. При этом имеет место теорема единственности для описанного выше класса матриц.

УДК 517.946

Об аналитичности решений специальных интегральных уравнений первого рода. Бухгейм А.Л. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

В работе доказываются аналитичность решений некоторых линейных интегральных уравнений, возникающих в теории многомерных обратных задач. Отсюда следуют новые теоремы единственности для этих уравнений в классе финитных непрерывных функций. В качестве приложения рассмотрена одна обратная задача для гиперболического уравнения. Библи. - 5 назв.

УДК 517.948:534.26

Решение двумерной задачи дифракции акустической волны на упругом теле методом потенциалов. Воронин В.В. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

Изучается дифракция установившихся акустических колебаний, распространяющихся в бесконечной однородной среде, на однородном упругом теле. Звуковой потенциал рассеянной волны и амплитуда волнового поля внутри тела ищутся в виде интегралов типа потенциала, ядра которых есть фундаментальные решения для оператора Гельмгольца и соответствующего оператора теории упругости. Условия согласования на границе раздела двух сред дают систему одномерных сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных плотностей. Показано, что если частота колебаний не совпадает с собственной частотой некоторой вспомогательной задачи, то система эта разрешима, и, зная плотности, мы действительно получаем решение исходной задачи.

УДК 517.946

Об единственности некоторых обратных задач для телеграфного уравнения. Глушкова Е.С. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

В работе изучаются три различные постановки задачи опре-

деления функции, входящей в качестве коэффициента в телеграфное уравнение. Специфика рассматриваемых задач состоит в том, что информация о решении прямой задачи задается в фиксированный момент времени.

Выделены некоторые классы функций, в которых поставленные обратные задачи имеют единственное решение.

УДК 517.946

Об одной теореме единственности обратной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка. Елубаев С., Турсынбеков О.Ш. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

Рассмотрена обратная задача для гиперболического уравнения третьего порядка. С помощью принципа скатых отображений доказана теорема об однозначности восстановления одного коэффициента этого уравнения в шаре пространства Банаха C при известных двух других коэффициентах и при задании определенных краевых условий на характеристиках.

УДК 517.945

Оценка устойчивости негиперболической краевой задачи для волнового уравнения. Кардаков В.Б. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

Рассматривается следующая задача в области:

$$E = \{t, x \mid 0 \leq t, 0 \leq x_3, x' = (x_1, x_2) \in R^2\}.$$

Определена дважды непрерывно-дифференцируемая функция $u(t, x_1, x_2, x_3) = u(t, x)$, удовлетворяющая условиям:

$$1) \quad \square u = u_{tt} - u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} - u_{x_3 x_3} = 0 \quad \text{в } E,$$

$$2) \quad u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u_t(0, x) = \varphi_1(x),$$

$$\text{Supp } \varphi_1(x) \subseteq M \equiv \{x \mid \delta \leq x_3, |x| \leq a\},$$

где $0 < \delta < a < \infty$ - известные постоянные.

$$3) \frac{\partial u}{\partial x_3}(t, x', 0) = 0, \quad 0 < t, \quad x' \in \mathbb{R}^2,$$

$$4) u(t, x) \text{ на } \Sigma \text{ равна } f(t, x'),$$

$$\Sigma = \{(t, x') \mid 0 < t, |x'| < r, x_3 = 0\}.$$

Требуется по известной $f(t, x')$ определить $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$. Получена оценка устойчивости.

УДК 517.945

О некоторых обратных задачах волновой оптики. Кирейтов В.Р. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

В работе рассматривается один вариант постановки обратной задачи теории волновых потенциалов (поверхностных и объемных), в котором исходными данными об объекте являются изображения этого объекта с помощью некоторой оптической системы, а искомыми неизвестными - параметры носителя потенциального объекта и его плотности. Предлагается стереоскопический метод решения поставленной задачи, состоящий в извлечении информации об объекте путем сравнения изображений объекта, произведенных из разных точек окружающего пространства. В качестве результатов статьи получены (при выполнении определенных условий) теоремы единственности восстановления дискретных потенциальных тел и потенциальных кривых по заданной стереопаре их изображений; теорема единственности восстановления светящейся части потенциальной поверхности простого слоя по трем ее изображениям; теорема о характере неоднозначности восстановления светящейся части потенциальной поверхности двойного слоя по семейству ее изображений.

Указаны дальнейшие обобщения и обоснования применяемого метода.

УДК 517.946

О задаче интегральной геометрии. Мухометов Р.Г. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

Доказывается теорема единственности для задачи определения функции $u(x, y)$ в ограниченной области D по известной функции

$$v(\gamma, z) = \int_{K(\gamma, z)} u(x, y) ds, \quad (I)$$

где $K(\gamma, z)$ - известное семейство гладких кривых, соединяющих всевозможные пары точек γ, z на границе Γ области D . Получена оценка устойчивости. Этот результат обобщен также на случай наличия веса $\rho(x, y, z)$ в подынтегральном выражении в (I).

УДК 517.946

Обратная кинематическая задача сейсмоки на плоскости. Мухометов Р.Г. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

Доказывается теорема единственности для задачи определения $n(x, y)$ в ограниченной области D по известной функции

$$\tau(\gamma, z) = \int_{K(\gamma, z)} n(x, y) ds,$$

где $K(\gamma, z)$ - геодезическая, определяемая метрикой

$$dt = n(x, y) (dx^2 + dy^2)^{1/2}$$

и соединяющая две точки γ, z на границе Γ области D . Функция $\tau(\gamma, z)$ известна для всевозможных пар точек, принадлежащих Γ . Получена также оценка устойчивости.

УДК 517.945

Априорные оценки в задаче о продолжении волнового поля с времениподобной поверхности в окрестности точки уплощения. Рудерфер В.И. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

Получены априорные оценки решения задачи Коши для неравенства

$$(\square u)^2 \leq a(u_x^2 + u_g^2 + u_t^2 + u^2)$$

с данными на куске времениподобной поверхности в окрестности точки уплощения носителя данных. Из полученных оценок следуют соответствующие теоремы единственности и степенные оценки модуля решения в некоторых окрестностях носителя.

УДК 517.948

Некоторые некорректные задачи для уравнения составного типа. Темирбулатов С.И. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

Исследуются некорректные задачи для уравнения $\frac{\partial}{\partial y}(u_{xx} + u_{yy}) = 0$ для ряда односвязных областей в полуплоскости $x \geq 0$. В работе показано, что решение некоторых из этих задач единственно, а для других нет единственности.

УДК 517.946

Теоремы существования и единственности обратной задачи для гиперболических уравнений n -го порядка. Турсынбеков О.Ш. В кн.: Математические проблемы геофизики, вып. 6, часть II, Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1975,

В работе исследуются вопросы существования и единственности решения обратной задачи для гиперболических уравнений n -го порядка в многомерном случае. Она состоит из двух час-

тей.

В первой части доказывается теорема существования и единственности определения коэффициента при функции u данного уравнения в шаре функционального пространства C , в предположении, что коэффициенты при первых производных функции u заданы.

Во второй части доказывается теорема существования и единственности определения n -мерной вектор-функции в шаре функционального пространства C , при задании определенных условий на характеристиках данного уравнения.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ

Под редакцией

Михаила Александровича Лаврентьева
и Дмитрия Савельевича Ахмедовича

Томский редактор Т.А. Шанина

Печатно-полиграфическое предприятие
Иркутского государственного университета
Иркутск, ул. Свободы, 36
Тираж 800 экз.

Получено в печать 12.11.76г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОФИЗИКИ

Под редакцией

Михаила Михайловича Лаврентьева
и Анатолия Семеновича Алексева

УДК 517.945

Математические проблемы геофизики. Выпуск 1. Новосибирск: Наука, 1975. 120 с. (Математические проблемы геофизики, вып. 1, часть 1). Изд. № 101. Цена 1 руб. 20 коп.

В выпуске рассмотрены вопросы для уравнений эллиптического типа. Рассмотрены задачи: 1. о продолжении решений эллиптических уравнений в области с разрывами коэффициентов; 2. о продолжении решений эллиптических уравнений в области с разрывами коэффициентов; 3. о продолжении решений эллиптических уравнений в области с разрывами коэффициентов.

УДК 517.945

Теория уравнений в частных производных второго порядка. Новосибирск: Наука, 1975. 120 с. (Математические проблемы геофизики, вып. 1, часть 2). Изд. № 102. Цена 1 руб. 20 коп.

Технический редактор Т.А.Шандарова

Подписано в печать 12/П-76г. МНО95
Формат бумаги 60x90 1/16 18,6 п.л. 19,3уч.изд.л.
Тираж 600 экз. Заказ № 56 Цена 1-20

Ротапринт ВЦ СО АН СССР, Новосибирск-90

Цена 1 р. 20 к.

1535