

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

**ДИНАМИКА
И ПРОЧНОСТЬ
УПРУГИХ
И ГИДРОУПРУГИХ
СИСТЕМ**

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ИНСТИТУТ МАШИНОВЕДЕНИЯ

ДИНАМИКА
И ПРОЧНОСТЬ
УПРУГИХ
И ГИДРОУПРУГИХ
СИСТЕМ

1460



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1975



Сборник содержит ряд статей по вопросам колебаний упругих систем, в том числе работающих в жидкости, а также вопросам собственно прочности. Ряд статей относится к анализу свободных и вынужденных колебаний сложных систем с применением топологических методов и идентификации; в некоторых статьях исследуются случайные колебания и дается анализ случайных процессов нагружения. Группа статей посвящена анализу колебаний и статического напряженного состояния упругих систем, отражающих конструкции гидротурбин и насосов. Эта группа включает статьи, относящиеся к анализу усталостной прочности в машиностроении.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

доктор технических наук профессор

Ф. М. ДИМЕНТБЕРГ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник статей охватывает различные вопросы динамики и прочности упругих систем, в том числе систем, работающих в жидкости (например, рабочие колеса гидротурбин). Научная направленность сборника определяется тремя разделами с таким содержанием: 1) топологические методы анализа упругих систем и идентификация, 2) исследование случайных колебаний и анализ случайных процессов по записям колебаний на действующих машинах, 3) колебания, статика и прочность (усталостная) упругих систем — элементов машин.

В области теории колебаний в статьях сборника представлены современные методы анализа линейных и нелинейных колебаний: применены топологические методы анализа сложных колебательных структур с помощью графов; показаны методы построения уравнений движения системы, моделирующей объект, параметры движения которого определены путем измерений (идентификация); исследуются случайные и почти периодические колебания упругих систем, в том числе роторных (а также проводится анализ случайных процессов по записям колебаний на действующих машинах применительно к гидротурбинам); колебания упругих систем, находящихся в жидкости, с учетом влияния этой жидкости — эта схема отражает динамику рабочего колеса гидротурбины; — свойства двухкаскадной упругой подвески объекта при упруго-податливом основании; — влияние возмущения срединной поверхности оболочки на частоты ее собственных колебаний — это представляет интерес в связи с изучением спиральной камеры гидротурбины.

В области статика дана статья, в которой излагается вариант обобщенной теории криволинейных тонкостенных упругих стержней, с уточнением в части учета деформации и кручения (исследование, связанное непосредственно с анализом деформаций и напряжений в лопастях радиально-осевых гидротурбин), а также статья, посвященная задаче кручения призматического бруса в геометрически нелинейной постановке.

Наконец, вопросы прочности представлены двумя статьями, относящимися к статистическому анализу процесса усталостного повреждения при действии вибрационных нагрузок, в частности при амплитудах, изменяющихся во времени, что имеет непосредственное отношение к исследованию прочности элементов турбомашин.

Следует полагать, что рассматриваемый сборник окажется полезным для инженеров, работающих над созданием сложных машин и конструкций, подверженных действию вибраций, так как в нем приведены современные методы анализа колебаний и прочности, которые необходимо постепенно внедрять в практику.

Сборник будет полезен для научных работников и аспирантов, специализирующихся в области динамики упругих систем, а также усталостной прочности.

Ф. М. Диментберг

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. Д. ПЕРМИНОВ

При решении задач статики и динамики механических систем и конструкций с большим успехом используются топологические методы в сочетании с цифровыми вычислительными машинами [1, 2].

В данной статье рассматриваются некоторые задачи динамики сложных механических систем.

Предполагается, что действительная континуальная механическая система может быть заменена динамической расчетной моделью, отражающей наиболее существенные особенности природы в определенном ограниченном диапазоне частот. Динамическая модель является системой с конечным числом степеней свободы. Пути дискретизации, т. е. упрощения действительной континуальной системы, разнообразны и многочисленны [5]. Мы будем использовать метод сосредоточенных масс, который дает возможность быстро и просто получить результат в тех случаях, когда требуется определить ограниченное число частот и форм собственных колебаний, а также провести расчет вынужденных колебаний в низкочастотной области.

Замена континуальной механической конструкции системой сосредоточенных масс и упругих элементов является процессом, в известной мере произвольным. Этот процесс состоит в разбиении конструкции на жесткие элементы типа пространственных тел или сосредоточенных масс, соединенных упругими безинерционными элементами. В простейшем случае это балочные элементы или амортизаторы.

Осуществляя этот процесс, следует учитывать особенности рассматриваемой механической конструкции. Опыт показывает, что обычно необходимо разбить конструкцию по меньшей мере на вдвое большее число участков, нежели число исследуемых форм колебаний.

Отметим эти два этапа исследования больших динамических моделей.

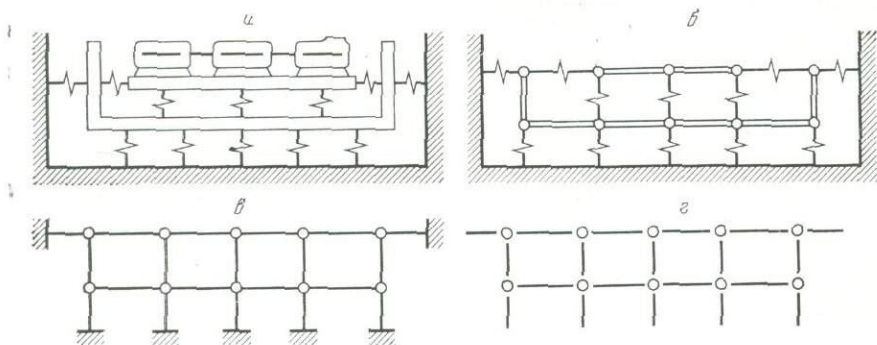
1) формулировка задачи и составление динамической матрицы системы.

2) решение и анализ результатов.

При исследовании дискретных линейных динамических моделей применим сетевую топологическую формулировку задачи.

На первом этапе роль топологии состоит в использовании некоторых свойств линейных графов применительно к упругим механическим системам, а также специальных матриц инциденции для описания способа и последовательности соединения отдельных ветвей линейного графа, соответствующего динамической модели.

На втором этапе, наряду с применением обычных методов, для анализа динамической матрицы [3, 4] целесообразно применять метод анализа по подсистемам, разработанный Г. Кроном [2]. Это объясняется тем, что во многих



практических случаях число уравнений становится достаточно большим и возникает необходимость в специальных приемах, сокращающих как объем численных операций, так и объем требуемой памяти ЭВМ.

Введем понятие *графа механической системы* как совокупности полюсных графов упругой, инерционной и демпфирующей компонент, полученной путем объединения вершин полюсных графов в соответствии с соединениями между полюсами компонент. Обеспечим геометрическое подобие между видом графа системы и механической упругой системой. Для этого используем несколько видоизмененный граф по сравнению с обычно принятым графом механических систем.

На рисунке представлены: схема двухкаскадной амортизации группы машин (турбины, генератора, насоса), смонтированных на общей раме (а), принятая динамическая модель рассматриваемой системы (б), граф системы (в), граф разделенной системы (г).

Здесь полюсный граф массы изображен в виде кружка в вершине графа. Полюсный граф упругого элемента системы представлен в виде отрезка прямой, соединяющей две вершины графа.

Полюсный граф демпфирующего элемента, как правило, совпадает с полюсным графом упругого элемента, поэтому он не представлен в графе системы.

Следующая особенность полюсного графа механической системы состоит в том: что ветви графа являются n -мерными ветвями. Состояние каждого входа ветви описывается шестью независимыми координатами, а не одной как в случае графов электрических цепей или механических однонаправленных систем.

Рассмотрим сначала характеристики отдельных элементов механической системы и напомним для них основные соотношения между силами и перемещениями [3]. Основным упругим элементом рассматриваемого класса механических систем является упругая элементарная балка. Масса балки присоединена к ее конечным точкам. Таким образом, элементарная балка есть идеальный упругий безинерционный элемент. Перемещение каждого конца упругого элемента характеризуется шестью обобщенными координатами X' (три линейных и три угловых перемещения) и имеется соответственно шесть обобщенных сил F' , действующих на каждом конце балочного упругого элемента.

Будем предполагать, что перемещения упругого элемента конструкции — линейные функции приложенных сил.

При выполнении закона Гука уравнение для балки в системе координат, связанной только с данной изолированной балкой, в матричном виде можно написать в форме:

$$\begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K'_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

или в развернутом виде

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{\Pi}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{\Pi}}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{\Pi}}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{\Pi}}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Уравнение написано в системе координат (x'), связанной с изолированной балкой. Для записи уравнений всей системы это уравнение должно быть преобразовано и записано в системе координат (x), связанной с исследуемой динамической системой.

Это преобразование (поворот осей) приводит изолированную балку в требуемое положение и обеспечивает перенос начала координат в узлы динамической модели. Необходимость преобразования связана с тем, что при присоединении упругих элементов к жестким телам точка присоединения балки не совпадает с точкой, относительно которой рассматриваются обобщенные координаты.

Матрицу преобразования $[T]$ можно написать в виде

$$[T] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ AR & A \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $[A]$ — матрица направляющих косинусов;

$[R]$ — матрица переноса начала координат, причем

$$[A] = \begin{matrix} x & y & z \\ x' \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \\ y' \\ z' \end{matrix} \quad [R] = \begin{matrix} x & y & z \\ x' \begin{bmatrix} 0 & r_z & -r_y \\ -r_z & 0 & r_x \\ r_y & -r_x & 0 \end{bmatrix} \\ y' \\ z' \end{matrix} \quad (4)$$

Преобразование матриц жесткости производится поблочно, например,

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ R^T A^T & A^T \end{bmatrix} [K'_{11}] \begin{bmatrix} A & AR \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $[A^T]$, $[R^T]$ транспонированные матрицы $[A]$, $[R]$.

Таким образом, положение упругого элемента в пространстве учитывается в матрице жесткости типа $[K]$, которая может быть непосредственно использована для объединения балок и присоединения к ним твердых тел.

Рассмотрим теперь основной инерционный элемент системы — твердое тело, предполагая, что инерционные элементы сосредоточены в узлах. Массу балки целесообразно отнести к вершинам графа и присоединить к массе твердого тела. Упругую балку в некоторых случаях можно также рассматривать состоящей из ряда упругих балок с массами в вершинах графа.

Для твердого тела с шестью степенями свободы зависимость между силами и перемещениями можно написать в виде:

$$\{F'\} = [M] p^2 \{X'\}, \quad (6)$$

где $[M]$ — матрица инерции твердого тела; $p = d/dt$ — оператор дифференцирования.

Если оси выбранной системы координат совпадают с осями инерции тела, то блок-матрица $[M]$ будет диагональной,

$$[M'] = \begin{bmatrix} M & & & & & \\ & M & & & & \\ & & M & & & \\ & & & I_x & & \\ & & & & I_y & \\ & & & & & I_z \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Если оси координат не совпадают с осями инерции тела, то необходимо, как и в случае матрицы жесткости, использовать матрицу преобразования

$$[M] = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ R^T A^T & A^T \end{bmatrix} [M'] = \begin{bmatrix} A & AR \\ 0 & A \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Для анализа вынужденных колебаний необходимо определение элементов матрицы демпфирования системы. Это определение представляет весьма сложную задачу экспериментального характера. В некоторых случаях разумно предположить, что параллельно каждому жесткостному элементу включен демпфирующий элемент.

В силу предположения о малости перемещений, формулы для преобразования исходных матриц демпфирования $[B']$ к новым осям аналогичны формулам (5) для преобразования матриц жесткости $[K']$.

Вернемся теперь к анализу линейного графа динамической модели (рис. 6, 2). Основные связевые соотношения между элементами механической системы определяются матрицей инцидентий. Элементами матрицы инцидентий, которая алгебраически определяет связевые соотношения между ветвями и узлами графа, являются только $+1, 0$. Если строки соответствуют ветвям (элементам механической структуры), а столбцы — узлам, то элементы матрицы инцидентий определяются следующим образом: $c_{ij} = (+1, 0)$, если i -я ветвь (да, нет) инцидентна j -узлу. Матрица инцидентий характеризует равенство деформаций элементов в вершинах графа. Используя условие равенства деформаций, можно построить матрицу инцидентий. Тогда полная динамическая матрица $[K_{\text{дин}}]$, описывающая колебания динамической модели, определяется по соотношению:

$$[K_{\text{дин}}] = [C_T] [\bar{K}] [C], \quad (9)$$

где $[\bar{K}]$ — диагональная матрица, составленная из блок-матрицы изолированных элементов (жесткостных, инерционных, демпфирующих).

Построение динамической матрицы удобно проводить с использованием ЭЦВМ.

Полученная динамическая матрица системы позволяет провести на ЭЦВМ расчет собственных и вынужденных колебаний системы при заданных внешних силах [4].

В настоящей статье топология системы использована для построения динамической матрицы механической системы. Использование графов и топологической формулировки динамического расчета конструкции весьма удобно так же, как показано в [6], для расчета систем по подсистемам с применением блочного метода, разработанного К. Кроном.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Филли. Матрицы в статике стержневых систем. М., «Строительство», 1966.
2. Г. Крон. Исследование сложных систем по частям — диакоптика. М., «Наука», 1972.
3. Л. Я. Банах, М. Д. Перминов, А. В. Синева. Методы расчета матриц жесткости, инерции и демпфирования для сложных пространственных систем. — Сб. «Виброизоляция машин и виброзащита человека-оператора». М., «Наука», 1973.
4. Л. Я. Банах, Е. А. Гальперин, Л. А. Мамонова, Б. И. Павлов, М. Д. Перминов, В. Д. Петров. Методика исследования на ЭЦВМ механических колебательных систем. — Сб. «Автоматизация исследований динамики машин». М., «Наука», 1973.
5. Р. Л. Бисплингофф, Р. Л. Халфмен. Аэроупругость. М., ИЛ, 1958.
6. М. Д. Перминов, В. Д. Петров. Исследование вынужденных колебаний сложных систем методом расчленений. — Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ РАСЧЛЕНЕНИЙ

М. Д. ПЕРМИНОВ, В. Д. ПЕТРОВ

При исследовании вынужденных колебаний сложных конструкций, динамическая модель которых представляет собой пространственную систему твердых тел и точечных масс, соединенных между собой упругими безинерционными связями, с помощью ЭВМ встречаются значительные трудности. Эти трудности связаны с высоким порядком системы, а также с плохой обусловленностью динамической матрицы жесткости из-за существенно разных порядков численных значений параметров системы.

Эффективным методом исследования сложных систем является метод расчленений, который позволяет перейти от исследования системы высокого порядка к исследованию подсистем более низкого порядка, а затем получить решение для полной системы.

Этот метод особенно удобен в том случае, когда исследуемая конструкция имеет отдельные узлы, которые часто изготавливаются различными предприятиями, и известны результаты расчетов или экспериментальных исследований для этих узлов.

Вопросам изучения сложных механических систем методом расчленений, в основу которого положен метод перемещений, посвящены работы [2, 3]. В исследовании [4] рассматривался способ расчленения, в котором использовалась «слабость» связей между подсистемами.

В данной работе для расчета вынужденных колебаний сложных механических систем применен метод расчленений, в основу которого положен метод сил [1].

Допустим, что составлена динамическая матрица жесткости $K_d = -\omega^2 M + K + iB$ для линейной дискретной модели механической подсистемы с использованием матриц жесткости K , демпфирования B , инерции M .

Тогда алгебраическое уравнение вынужденных колебаний при действии внешних сил F можно написать в виде

$$K_d X = F. \quad (1)$$

При разделении системы (а) на подсистемы проводим сечения через узлы (1—8) графа системы (рис. б), а границы раздела оставляем свободными. Именно для этих граничных условий составляются динамические матрицы жесткости подсистем.

Напишем динамическую матрицу податливостей подсистемы:

$$B_d = K^{-1} = (-\omega^2 M + K + iB)^{-1}.$$

Действительная и мнимая части матрицы B_d определяются выражениями

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B_d &= (\operatorname{Im} K_d)^{-1} \operatorname{Re} K_d [\operatorname{Re} K_d (\operatorname{Im} K_d)^{-1} \operatorname{Re} K_d + \operatorname{Im} K_d]^{-1}, \\ \operatorname{Im} B_d &= -[\operatorname{Re} K_d (\operatorname{Im} K_d)^{-1} \operatorname{Re} K_d + \operatorname{Im} K_d]^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим, что для каждой подсистемы написаны динамические матрицы K_d ; тогда полную систему, развитую, например, на две подсистемы (рис. в), характеризуем блочно-диагональной динамической матрицей жесткости:

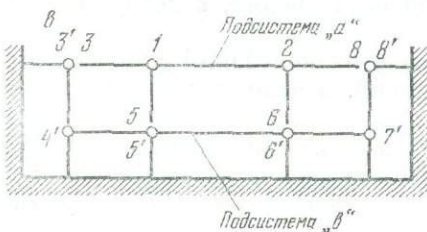
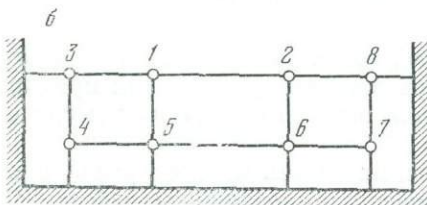
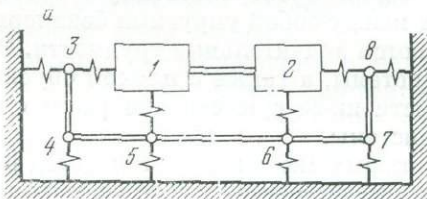
$$K_{\text{бл}} = \begin{bmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_b \end{bmatrix},$$

где K_a и K_b соответственно динамические матрицы жесткости подсистем а и б.

Используя выражение (2), можно аналогично написать блочно-диагональную матрицу податливостей:

$$B_{\text{бл}} = \begin{bmatrix} B_a & 0 \\ 0 & B_b \end{bmatrix}.$$

Перемещения исследуемой системы складываются из перемещений подсистем, возникающих при действии внешних сил и сил, действующих в сечениях между подсистемами.



Чтобы получить перемещения, обусловленные действием сил в сечениях, нужно построить матрицу динамических податливостей цепи пересечений $B_{\text{пер}}$ [1]. Построение матрицы динамических податливостей цепи пересечений производится с помощью матрицы соединений C , которая определяет связевые соотношения между подсистемами и соотношения между внутренними силами, возникающими в сечениях. Для пространственных систем элементами матрицы C являются либо нулевые, либо единичные матрицы E шестого порядка. Для динамической модели системы (рис. а), расчлененной на две подсистемы (рис. в), матрица соединений имеет вид [1]:

$$C = \begin{bmatrix} C_a \\ C_b \end{bmatrix},$$

где C_a и C_b — матрицы соединений подсистем a и b , причем

$$C_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 5 & 6 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad C_b = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 5 & 6 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \\ 5' \\ 6' \\ 7' \\ 8' \end{matrix} & \begin{bmatrix} -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Матрица динамических податливостей цепи пересечений определяется выражением

$$B_{\text{пер}} = C^T B C,$$

где верхний индекс t обозначает операцию транспонирования.

Рассмотрим теперь последовательность вычислений перемещений в системе при заданных внешних силах. Матрицу-столбец внешних сил напомним в виде:

$$F = \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix},$$

где F_a и F_b — матрицы-столбцы внешних сил, приложенных соответственно к подсистемам a и b .

На первом этапе определяются перемещения в отдельных подсистемах со свободными границами раздела, обусловленные действием внешних сил:

$$X' = B_{\text{бл}} \cdot F,$$

причем

$$\text{Re } X' = \text{Re } B_{\text{бл}} \cdot F, \quad \text{Im } X' = \text{Im } B_{\text{бл}} \cdot F. \quad (3)$$

На втором этапе вычисляются перемещения в цепи пересечений $X_{\text{пер}} = -C^T X'$,

причем

$$\text{Re } X_{\text{пер}} = -C^T \text{Re } X', \quad \text{Im } X_{\text{пер}} = -C^T \text{Im } X'. \quad (4)$$

На третьем этапе определяются внутренние силы f_c , возникающие в сечениях,

$$f_c = B_{\text{пер}}^{-1} \cdot X_{\text{пер}} = K_{\text{пер}} X_{\text{пер}},$$

так как

$$\text{Im } K_{\text{пер}} = -[\text{Re } B_{\text{пер}} (\text{Im } B_{\text{пер}})^{-1} \text{Re } B_{\text{пер}} + \text{Im } B_{\text{пер}}]^{-1},$$

$$\text{Re } K_{\text{пер}} = -[(\text{Im } B_{\text{пер}})^{-1} \text{Re } B_{\text{пер}}] [\text{Im } K_{\text{пер}}],$$

получим:

$$\text{Re } f_c = \text{Re } K_{\text{пер}} \cdot \text{Re } X_{\text{пер}} - \text{Im } K_{\text{пер}} \cdot \text{Im } X_{\text{пер}},$$

$$\text{Im } f_c = \text{Im } K_{\text{пер}} \text{Re } X_{\text{пер}} + \text{Re } K_{\text{пер}} \cdot \text{Im } X_{\text{пер}}.$$

Силы, приложенные к подсистемам со стороны сечений, будут

$$F_c = C f_c,$$

причем

$$\text{Re } F_c = C \cdot \text{Re } f_c, \quad \text{Im } F_c = C \text{Im } f_c.$$

Затем вычисляются перемещения в подсистемах, обусловленные действием сил F_c :

$$X'' = B_{\text{бл}} \cdot F_c,$$

причем

$$\operatorname{Re} X'' = \operatorname{Re} B_{\text{бл}} \cdot \operatorname{Re} F_c - \operatorname{Im} B_{\text{бл}} \cdot \operatorname{Im} F_c,$$

$$\operatorname{Im} X'' = \operatorname{Im} B_{\text{бл}} \cdot \operatorname{Re} F_c + \operatorname{Re} B_{\text{бл}} \cdot \operatorname{Im} F_c.$$

Полные перемещения в рассматриваемой системе, обусловленные действием внешних сил, определяются как сумма перемещений X' и X'' , т. е.

$$X = X' + X'',$$

причем

$$\operatorname{Re} X = \operatorname{Re} X' + \operatorname{Re} X'', \quad \operatorname{Im} X = \operatorname{Im} X' + \operatorname{Im} X''.$$

Амплитуда x_j и фазовый угол α_j определяются выражениями

$$|x_j| = \sqrt{(\operatorname{Re} x_j)^2 + (\operatorname{Im} x_j)^2},$$

$$\alpha_j = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} x_j}{\operatorname{Re} x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где n — порядок динамической модели полной системы.

Расчет вынужденных колебаний по изложенной методике позволяет определить амплитуды перемещений и фазы в исследуемой системе, используя решения для подсистем, порядок которых значительно ниже порядка исследуемой системы. Практика показала, что описанный метод и составленные на его основе алгоритмы и программы являются удобным средством для анализа и расчета сложных механических систем с помощью ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Крон. Исследование сложных систем по частям. М., «Наука», 1972.
2. Крейг Бемптон. Сочленение подконструкций при динамическом расчете конструкций. — Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 7.
3. Голдмен. Исследование колебаний методом расчленения. — Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 6.
4. Л. Я. Банах, М. Д. Перминов. Исследование сложных динамических систем с использованием слабых связей между подсистемами. «Машиноведение», № 4, 1972.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ПОДСИСТЕМ

В. Д. ПЕТРОВ

Известные методы определения параметров линейной дискретной модели, основанные либо на использовании результатов измерений всех фазовых координат системы и их производных, либо на использовании результатов измерений в окрестностях каждого резонанса [1—3], позволяют осуществить идентификацию механических систем. Однако при определении параметров систем высокого порядка указанными методами требуется экспериментальная информация, получение которой представляет значительные трудности. Это связано с тем, что часто частоты собственных колебаний исследуемой системы сгруппированы в очень узком диапазоне частот, и измеренные формы колебаний оказываются искаженными вследствие влияния соседних форм. Для выделения форм колебаний в таких случаях необходимо проводить чрезвычайно сложные эксперименты при наличии большого числа возбуждающих сил [4], что на практике осуществлять довольно сложно.

В настоящей статье рассматривается метод идентификации сложных механических систем, основанный на предварительном исследовании отдельных

частей системы известными методами и последующем определении жесткостных параметров полной механической системы. Использование в исследованиях подсистем, порядок которых значительно ниже порядка всей системы, дает возможность устранить трудности, возникающие при экспериментальном исследовании большой системы.

Рассмотрим колебательную систему, динамическая модель которой в области низких частот представляет собой пространственную систему твердых тел (или точечных масс), соединенных между собой упругими связями (рис. 1).

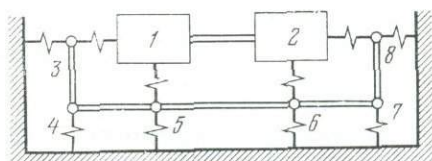


Рис. 1

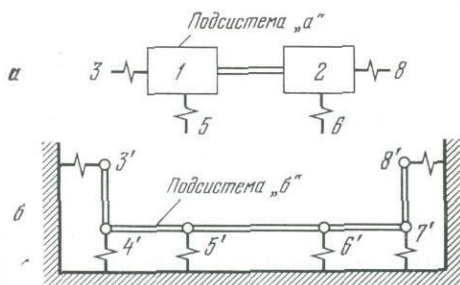


Рис. 2

Допустим, что исследуемая система может быть разделена на две подсистемы (рис. 2).

Матричному уравнению малых колебаний [6] каждой подсистемы соответствует задача о собственных значениях подсистем

$$(K - \Omega_i^2 M) \Phi_i = 0, \quad (1)$$

где K — матрица жесткости; M — матрица масс; Ω_i — частота собственных колебаний i -й формы; Φ_i — модальный столбец i -й формы колебаний; n — число степеней свободы подсистемы.

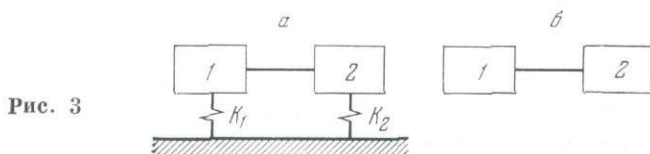


Рис. 3

Используя уравнение (1) и условие ортогональности

$$\Phi_i^T M \Phi_i = m_i, \quad \Phi_i^T M \Phi_j = 0,$$

где m_i — обобщенная масса i -й формы колебаний, а верхний индекс T обозначает операцию транспонирования, выражение для матрицы податливостей подсистемы $B = K^{-1}$ можно написать в виде [1]

$$B = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Omega_i^2 m_i} \Phi_i \Phi_i^T. \quad (2)$$

Каждое из слагаемых в этих суммах представляет вклад соответствующей нормальной формы колебаний в рассматриваемую матрицу, причем в матрице B присутствуют члены, соответствующие низким частотам собственных колебаний, и эти матрицы обеспечивают хорошую аппроксимацию в диапазоне низких частот.

Для дальнейшего исследования необходимо преобразовать полученные матрицы каждой подсистемы в динамические матрицы податливостей. Напи-

шем матрицу динамических податливостей B_d каждой подсистемы в виде

$$B_d = B + B_x, \quad (3)$$

где B_x — динамическая добавка к матрице B .

Тогда, учитывая, что $K_d = K - \omega^2 M$ и $K_d B_d = E$, получим,

$$B_d = B + B \omega^2 M B (E - \omega^2 M B)^{-1}, \quad (4)$$

где E — единичная матрица; ω — круговая частота колебаний.

Следует заметить, что матрицы податливостей, полученные для тех подсистем, которые содержат безинерционные узлы расчленения (рис. 2), не учитывают податливости связей между подсистемами, и порядок матрицы B будет равен порядку матрицы масс подсистемы. Поэтому в дальнейшем (вначале) мы будем экспериментально определять матрицы (4) для подсистем без связей, а затем, производя соответствующие преобразования, получать матрицы динамических податливостей для подсистем со связями.

Для того чтобы точно замерить формы колебаний подсистемы и воспользоваться (2), необходимо воспроизвести граничные условия подсистемы. Однако при экспериментальном исследовании не всегда удается воспроизвести граничные условия подсистем, особенно в тех случаях, когда подсистемы не имеют точек закрепления.

Рассмотрим способ построения матрицы податливостей подсистем, позволяющий использовать результаты измерений для подсистем, граничные условия которых отличаются от требуемых.

Предположим, что по экспериментальным данным, на основании (2) и (4), получены матрицы динамических податливостей для подсистем «а» и «б» (рис. 2), причем подсистема «а» (без связей) установлена на амортизаторах (рис. 3, а), характеристики которых известны. В дальнейших расчетах нам будет нужна матрица динамических податливостей для подсистемы «а», не имеющей точек закрепления (рис. 3, б), поэтому необходимо преобразовать матрицу, полученную для закрепленной подсистемы «а» (рис. 3).

Матрица жесткости K_a для незакрепленной подсистемы «а» имеет вид:

$$K_a = B_{аз}^{-1} - K_{ам},$$

где $B_{аз}$ — динамическая матрица податливостей закрепленной подсистемы «а»; $K_{ам}$ — матрица жесткости амортизаторов.

Представим матрицу динамических податливостей для незакрепленной подсистемы B_a в виде

$$B_a = B_{аз} + B_{ам};$$

учитывая, что $B_a \cdot K_a = E$, аналогично (4) получим:

$$B_{ам} = B_{аз} \cdot K_{ам} B_{аз} (E - K_{ам} B_{аз})^{-1};$$

тогда

$$B_a = B_{аз} + B_{аз} \cdot K_{ам} B_{аз} (E - K_{ам} B_{аз})^{-1}. \quad (5)$$

Как было указано выше, полученные матрицы для некоторых подсистем не включают податливостей связей между подсистемами, поэтому необходимо произвести их преобразование и получить матрицы податливостей с учетом связей.

Предположим, что методами, описанными выше, получены матрицы динамических податливостей B_a для подсистемы «а» (без связей) и B_b для подсистемы «б»:

$$B_a = \begin{matrix} & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \\ 5' \\ 6' \\ 7' \\ 8' \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad B_b = \begin{matrix} & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' & 8' \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \\ 5' \\ 6' \\ 7' \\ 8' \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{3'3'} & B_{3'4'} & B_{3'5'} & B_{3'6'} & B_{3'7'} & B_{3'8'} \\ B_{4'3'} & B_{4'4'} & B_{4'5'} & B_{4'6'} & B_{4'7'} & B_{4'8'} \\ B_{5'3'} & B_{5'4'} & B_{5'5'} & B_{5'6'} & B_{5'7'} & B_{5'8'} \\ B_{6'3'} & B_{6'4'} & B_{6'5'} & B_{6'6'} & B_{6'7'} & B_{6'8'} \\ B_{7'3'} & B_{7'4'} & B_{7'5'} & B_{7'6'} & B_{7'7'} & B_{7'8'} \\ B_{8'3'} & B_{8'4'} & B_{8'5'} & B_{8'6'} & B_{8'7'} & B_{8'8'} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где B_{ik} — блок-матрица динамических податливостей.

Найдем преобразование матрицы B_a , с помощью которого может быть получена матрица динамических податливостей B_a^* для подсистемы «а» со связями (рис. 2). Для этого напишем матрицу B_a^* в виде

$$B_a^* = B_{a1} + B_{cb}, \quad (6)$$

где B_{a1} — динамическая матрица податливостей подсистемы «а», полученная в предположении, что связи жесткие; B_{cb} — матрица податливостей связей.

Используя матрицы преобразования координат T_{ij} , имеющие вид

$$T_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} A_{ij} & 0 \\ \hline A_{ij}R_{ij} & A_{ij} \end{array} \right],$$

где A_{ij} и R_{ij} — соответственно матрицы направляющих косинусов и переноса начала координат [7], j и i — соответственно номера узлов расчленения и инерционных узлов подсистемы, а также выражения для сил F_i , приложенных в узлах 3, 5 и 6, 8 (рис. 2), записанных в системе координат с началом соответственно в инерционных узлах 1 и 2

$$F_1 = T_{13}F_3 = T_{15}F_5, \quad F_2 = T_{26}F_6 = T_{28}F_8,$$

напишем матрицу податливостей B_{a1} в виде

$$B_{a1} = T^T B_a T, \quad (7)$$

где

$$T = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} E & 0 & T_{13} & T_{15} & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & T_{26} & T_{28} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Матрица B_{cb} , написанная в общей системе координат: будет блочно-диагональной:

$$B_{cb} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{13}^T B_{13} T_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{15}^T B_{15} T_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{26}^T B_{26} T_{26} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{28}^T B_{28} T_{28} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где B_{13} , B_{15} , B_{26} , B_{28} — матрицы, определяющие податливость упругих связей между подсистемами «а» и «б» в узлах расчленения 3, 5, 6 и 8, при жестко закрепленных инерционных узлах 1, 2, написанные в системе координат, связанной с соответствующими упругими элементами.

Используя (6) и (7), получим:

$$B_a^* = T^T B_a T + B_{cb}.$$

Матрицу B_6 не преобразуем, поскольку подсистема «б» не включает связей. После вычисления матриц динамических податливостей каждой подсистемы перейдем к построению матрицы податливостей полной системы, используя метод расчленения [5].

Матрица податливостей цепи пересечений определяется выражением

$$B_{\text{пер}} = C^T B_{\text{бл}} C,$$

где $B_{\text{бл}}$ — блочно-диагональная матрица податливостей разделенных подсистем, C — матрица соединений.

Для системы, изображенной на рис. 1, матрицы $B_{\text{бл}}$ и C имеют вид:

$$B_{\text{бл}} = \begin{bmatrix} B_a^* & 0 \\ 0 & B_6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_a \\ C_6 \end{bmatrix},$$

где

$$C_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 5 & 6 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad C_6 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 5 & 6 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3' \\ 4' \\ 5' \\ 6' \\ 7' \\ 8' \end{matrix} & \begin{bmatrix} -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Уравнение частот полной системы определяется выражением

$$\det B_{\text{пер}} = 0.$$

Для определения собственных форм колебаний полной конструкции необходимо вычислить силы $f_{\text{св}}$, возникающие в связях в процессе свободных колебаний [5]. Для этого выделим в матрице $B_{\text{пер}}$ один диагональный элемент B_1 и напишем ее в виде:

$$B_{\text{пер}} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix},$$

пусть один из компонентов матрицы-столбца $f_{\text{св}}$, например, первый, равен единице, а остальные элементы неизвестны и равны f_x . Тогда из условия совместности деформаций

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ f_x \end{bmatrix} = 0$$

получим

$$f_x = -B_4^{-1} B_3.$$

Форма колебаний полной системы Φ_i^* для Ω_i определяется с помощью уравнений

$$\Phi_i^* = -B_{\text{бл}} C f_{\text{св}}.$$

Используя выражения (8) и (2), получим матрицу податливостей всей системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. G. Flannelly, I. H. Mc Garney, A. Bermann. A Theory of Identification of the Parameters in the Equations of Motion of a Structure Through Dynamic Testing. To be presented at the Symposium on Structural Dynamics, University of Technology, Loughborough, England, March 23—25, 1970.
2. I. P. Vatz. Determination of Modal Mass from Test Data. Shock and Vibration Bulletin, No. 38, Pt. 2, August 1968.

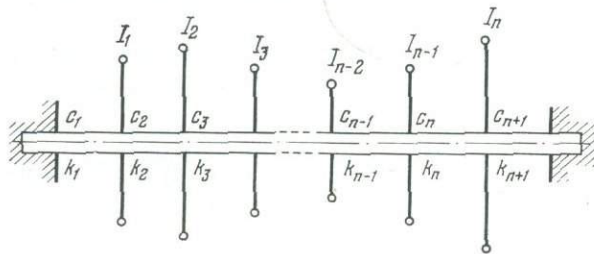
3. I. P. Roney. Identification of Complex Structures Using Near-Resonance Testing, Shock and Vibration Bulletin, No. 38, Pt. 2, August 1968.
4. P. Л. Вислинггофф, P. Д. Халфмен. Аэроупругость. М., ИЛ, 1958.
5. Г. Крон. Исследование сложных систем по частям — диагностика. М., «Наука», 1972.
6. М. Д. Перминов, В. Д. Петров. Исследование вынужденных колебаний сложных систем методом расчленений. — См. наст. сб.
7. М. Д. Перминов. Топологические методы расчета колебаний сложных динамических систем. — См. наст. сб.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЖЕСТКОСТИ И ДЕМПФИРОВАНИЯ ЦЕПНЫХ СИСТЕМ

К. К. ГЛУХАРЕВ, Д. Е. РОЗЕНБЕРГ

Рассматривается процедура метода динамических испытаний (МДИ) применительно к вычислению параметров линейных цепных механических систем по результатам наблюдений за движениями сосредоточенных инерционных элементов (масс или дисков).

Введение. На рисунке представлена весьма распространенная цепная механическая колебательная система с n степенями свободы, в которой через



I_j ($j = 1, \dots, n$) обозначены моменты инерции соответствующих дисков, через c_i ($i = 1, \dots, n + 1$) — коэффициенты жесткости соответствующих звеньев, k_i ($i = 1, \dots, n + 1$) — коэффициенты демпфирования тех же звеньев. Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$I\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + C\varphi = 0, \quad (1)$$

где матрицы I, B, C — квадратные матрицы n -го порядка вида $I = \text{diag} \{I_1, \dots, I_n\}$,

$$B = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -c_n & c_n + c_{n+1} \end{bmatrix}$$

и вектор $\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}^T$, причем φ_i ($i = 1, \dots, n$) — углы поворотов соответствующих дисков.

Пусть в уравнениях (1) матрицы B и C неизвестны; ставится следующая задача: по результатам экспериментальных наблюдений за крутильными

¹ Здесь и далее через $\{\dots\}^T$ обозначена операция транспонирования матрицы.



колебаниями дисков определить неизвестные коэффициенты матриц B и C , т. е. определить коэффициенты жесткости и демпфирования звеньев цепной системы.

Решение поставленной задачи осуществляется методом динамических испытаний, изложенным в [2].

Измерением (по МДИ) будем называть совокупность вида

$$\{\Phi_1(t_i), \dots, \Phi_n(t_i), \dot{\Phi}_1(t_i), \dots, \dot{\Phi}_n(t_i), \ddot{\Phi}_1(t_i), \dots, \ddot{\Phi}_n(t_i)\}.$$

Здесь $t_i \in [0, T]$, где T — время наблюдения за движениями системы (1).

Разрешающей операцией МДИ назовем процедуру отыскания такой совокупности измерений, которая дает возможность решить поставленную выше задачу.

Построим разрешающую операцию МДИ и дадим ее анализ для системы,

$$\dot{y} = Ay, \quad (2)$$

где A — неособенная квадратная матрица n -го порядка, к которой система (1) приводится заменой переменных:

$$y = \{y_1, y_2\}^T, \quad y_1 = \dot{\Phi}, \quad y_2 = \Phi, \quad A = \begin{bmatrix} -B & -C \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

Анализ разрешающей операции МДИ. Пусть система описывается уравнениями (2) и элементы матрицы A требуется определить по наблюдаемым движениям.

В соответствии с [2] поставленная задача имеет единственное решение, которое осуществляется решением n матричных уравнений вида

$$\dot{Y}_j = YA_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2')$$

где $A_j = \{a_{j1}, \dots, a_{jn}\}^T$, $\dot{Y}_j = \{\dot{y}_j^{(1)}, \dot{y}_j^{(2)}, \dots, \dot{y}_j^{(n)}\}^T$, Y — матрица с элементами $y_k^{(i)}$, $i, k = 1, \dots, n$, причем $y_k^{(i)} = y_k(t_i)$, $\dot{y}_j^{(i)} = \dot{y}_j(t_i)$, $t_i \in [0, T]$, T — время наблюдения.

Разрешающая операция МДИ в этом случае имеет вид:

$$\text{а) } \det Y \neq 0, \quad \text{б) } A_j = Y^{-1}\dot{Y}_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

т. е. для существования разрешающей операции МДИ, гарантирующей единственность определения всех a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$), необходимо и достаточно, чтобы матрица измерений Y была неособенной ($\det Y \neq 0$). Из условий (3) следует ряд утверждений.

У т в е р ж д е н и е 1. Для существования разрешающей операции МДИ необходимо и достаточно, чтобы векторы измерений $Y^{(k)} \{y_1^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}\}$ были линейно независимыми.

Заметим, что не всякие реально наблюдаемые движения гарантируют существование разрешающей операции МДИ. Выделим эти группы движений и покажем, что они определяются принадлежностью каждого вектора измерений $Y^{(k)}$ к некоторому инвариантному подпространству матрицы A^1 .

Действительно, если движение системы таково, что $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(t) = 0$ для $\forall t \in$

$[0, T]$, причем не все α_i равны нулю, то движение происходит в некотором подпространстве, размерность которого меньше n . В этом случае для каждого $t^* \in [0, T]$ имеют место условия:

$$(\alpha, y^*) = 0, \quad (\alpha, Ay^*) = 0, \quad \dots, \quad (\alpha, A^{n-1}y^*) = 0. \quad (4)$$

¹ Как известно, вектор b принадлежит инвариантному подпространству относительно матрицы A , если система векторов $b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b$ оказывается линейно-зависимой.

В частности, условия (4) имеют место для $t^* = 0$ и $t^* = T$. Из условий (4) следует, что, каковы бы ни были $t_k \in [0, T]$, всякие n векторов $Y^{(k)}$ оказываются линейно-зависимыми и условие (3а) не выполнено.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е II. Для того чтобы разрешающая операция (3) МДИ имела место, достаточно, чтобы векторы $y(0)$, $Ay(0)$, \dots , $A^{n-1}y(0)$ были линейно независимыми.

Будем говорить, что неособенная квадратная матрица A порядка n имеет n -полноту, если хотя бы одна из строк матрицы A_i не содержит нулевых элементов и элементы каждой строки отличаются модулем. Аналогично неособенная матрица A порядка n имеет $(n - k)$ -полноту, если в каждой строке матрицы содержится не более чем $n - k$ ненулевых различных по модулю элементов и хотя бы одна из строк содержит точно $n - k$ ненулевых элементов.

Покажем, что условия утверждения II можно существенно ослабить для матриц $(n - k)$ -полноты. Пусть матрица A имеет $(n - k)$ -полноту. Из определения $(n - k)$ -полноты следует, что в каждой строке матрицы не более чем $n - k$ ненулевых элементов, а система (2') будет иметь единственное решение A_j ($j = 1, \dots, n$) в том и только том случае, когда $\text{rang } Y \geq n - k$, т. е. имеет место следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е III. Разрешающая операция МДИ для матрицы A полноты $(n - k)$ имеет место в том и только том случае, когда ранг матрицы измерений не меньше $n - k$.

Утверждение III означает, что разрешающая операция МДИ для матриц $(n - k)$ -полноты имеет место и в тех случаях, когда наблюдаемые в эксперименте движения происходят в подпространстве размерности не меньше $n - k$.

Покажем, что такие подпространства существуют. Как известно [1], существует такое неособенное линейное преобразование T , при котором матрица TAT^{-1} имеет наиболее простой блочно-диагональный вид (жорданову нормальную форму): $TAT^{-1} = Q_1 \dot{+} Q_2 \dot{+} \dots \dot{+} Q_l$, где Q_i ($i = 1, \dots, l$) — так называемые жордановы ящики, соответствующие различным собственным числам, а $\dim Q_i$ определяется кратностью соответствующего собственного числа, причем каждой паре комплексно-сопряженных собственных чисел кратности ν соответствует ящик размерности 2ν . При этом матрица обладает l различными собственными инвариантными подпространствами, размерность которых равна размерности соответствующих Q_i . Из приведенного замечания следует утверждение.

У т в е р ж д е н и е IV. В условиях утверждения III для существования разрешающей операции МДИ необходимо, чтобы движение происходило в подпространстве, которое образовано комбинацией собственных инвариантных подпространств матрицы системы (2), но для которой выполняется условие

$$\dim(Q_i \dot{+} Q_{i+1} \dot{+} \dots \dot{+} Q_{i+m}) \geq n - k.$$

В заключение отметим, что для системы с внешним воздействием $\dot{y} = Ay + u$ сохраняются сформулированные выше утверждения. Разрешающая операция МДИ в этом случае имеет вид:

$$\det Y \neq 0, \quad A_j = Y^{-1}(\dot{Y}_j - u_j). \quad (5)$$

Разрешающая операция (5) при нулевых начальных условиях имеет место,

если векторы $U, AU, A^2U, \dots, A^{n-1}U$, где $U = \int_0^t e^{-A\tau} u(\tau) d\tau$, линейно-независимы.

В случае $(n - k)$ -полноты матрицы A можно ослабить выписанные условия и получить утверждение, аналогичное утверждению III. При ненулевых начальных условиях и внешних воздействиях аналогичным образом устанавливаются условия существования разрешающей операции МДИ.

Разрешающие операции для ценных систем. Для простоты рассмотрим цепные системы без демпфирования — уравнения (1) при $B = 0$. Аналогом условий (4) в этом случае являются $2n$ условий:

$$\begin{aligned} (\alpha, \varphi^*) &= 0, & (\alpha, \bar{C}\varphi^*) &= 0, \dots, & (\alpha, \bar{C}^{n-1}\varphi^*) &= 0, \\ (\alpha, \dot{\varphi}^*) &= 0, & (\alpha, \bar{C}\dot{\varphi}^*) &= 0, \dots, & (\alpha, \bar{C}^{n-1}\dot{\varphi}^*) &= 0, \end{aligned}$$

где $\bar{C} = I^{-1}C$. В силу утверждения II существование разрешающей операции гарантируется линейной независимостью векторов

$$\varphi^*, \bar{C}\varphi^*, \dots, \bar{C}^{n-1}\varphi^*, \dot{\varphi}^*, \bar{C}\dot{\varphi}^*, \dots, \bar{C}^{n-1}\dot{\varphi}^*.$$

Нетрудно видеть, что матрица \bar{C} имеет полноту 3. Поэтому в силу утверждения III разрешающая операция существует и при движениях в каком-нибудь из подпространств размерности 3 и выше.

Приведение к виду (2) цепной системы вида (1) при $B = 0$ дает матрицу $A = \begin{bmatrix} 0 & -I^{-1}C \\ I & 0 \end{bmatrix}$, а жорданова форма матрицы имеет вид $TAT^{-1} = Q_1 + \dots + Q_n$, причем $Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_i \\ \omega_i & 0 \end{bmatrix}$. Отсюда следует, что размерность собственных инвариантных подпространств матрицы A равна 2 и любое инвариантное подпространство матрицы A имеет четную размерность, т. е. движения в подпространстве размерности 3 не существует. В результате имеем следующее.

Утверждение V. Для существования разрешающей операции в случае цепной системы без демпфирования достаточно, чтобы движения системы происходили в подпространстве размерности 4.

Заметим, что формы собственных колебаний являются собственными векторами матрицы цепной системы. Действительно, если движение происходит по закону

$$\varphi(t) = H_i \sin \omega_i t, \tag{6}$$

где ω_i — частота собственных колебаний, $H_i = \{h_{1i}, h_{2i}, \dots, h_{ni}\}^T$ — форма собственных колебаний, то из уравнений движения можно получить соотношения

$$\omega_i^2 H_i = -\bar{C}H_i, \quad -\omega_i^4 H_i = -\bar{C}^2 H_i,$$

откуда следует, что векторы $H_i, \bar{C}H_i, \bar{C}^2 H_i$ линейно-зависимы, т. е. соответствующее подпространство имеет размерность 2.

Возбуждая две формы колебаний, получим движения в подпространстве размерности 4. Разрешающая операция в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -h_{1i}\omega_i^2 \\ h_{1j}\omega_j^2 \end{bmatrix} I_1 &= \begin{bmatrix} h_{1i} h_{2i} \\ h_{1j} h_{2j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} c_2 h_{2i} - \omega_i^2 h_{2i} I_2 \\ c_2 h_{2j} - \omega_j^2 h_{2j} I_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_{2i} h_{3i} \\ h_{2j} h_{3j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 + c_3 \\ -c_3 \end{bmatrix}, \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим цепную систему без демпфирования со свободным концом. В этом случае матрица жесткости имеет вид:

$$\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & \dots & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -c_{n-1} & c_{n-1} + c_n \end{bmatrix}.$$

Разрешающая операция для такой системы имеет место и при возбуждении одной формы собственных колебаний, так как разрешающие уравнения рас-

падают и могут быть разрешены последовательно относительно c_1, c_2, \dots , причем c_1 определяется из выражения

$$c_1 = \omega_1^2 \frac{h_{11} I_1}{h_{11} - h_{21}}.$$

Замечание I. Последний пример не противоречит утверждению III, так как для матрицы C в этом случае не выполняется условие полноты (здесь в первой строке два элемента по модулю равны между собой).

Замечание II. В случае вынужденных колебаний разрешающие операции строятся аналогично.

Замечание III. Для симметричных систем при колебаниях по некоторым собственным формам могут не существовать разрешающие операции. Однако, в силу утверждения III, найдутся такие формы, для которых разрешающая операция существует.

Замечание IV. Выше рассматривалось построение разрешающей операции на амплитудах колебаний элементов цепной системы. Разрешающую операцию, в силу замечания к утверждению I можно строить и при любых промежуточных значениях параметров движения этих элементов.

Замечание V. В случае цепных систем с демпфированием полнота матрицы $A = \begin{bmatrix} -B & -C \\ I & 0 \end{bmatrix}$ будет не более шести, т. е. для построения разрешающих операций достаточно возбуждать движения, соответствующие трем парам комплексно-сопряженных собственных значений.

ЛИТЕРАТУРА

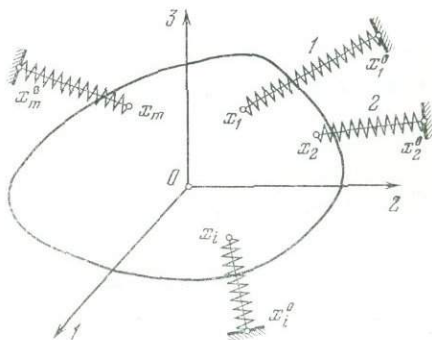
1. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
2. К. К. Глухарев, Д. Е. Розенберг. Метод динамических испытаний для синтеза уравнений движения механических систем с известным числом степеней свободы. — Машинное ведение, 1973, № 6.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ СВЯЗЕЙ УПРУГО-ПОДВЕШЕННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

К. К. ГЛУХАРЕВ, Д. Е. РОЗЕНБЕРГ

Рассматривается процедура метода динамических испытаний (МДИ) [2] применительно к вычислению параметров связей твердого тела.

1. Уравнения движения твердого тела с m связями. Составим уравнения движения твердого тела с m связями (см. рис. 1) в предположении, что связи обладают линейными характеристиками жесткости и демпфирования. Для простоты выкладок совместим начало координат с центром инерции твердого тела. Предположим, что оси прямоугольной системы координат совпадают с главными центральными осями инерции твердого тела. Через x_i $\{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}$ обозначим точку крепления i -й связи к твердому телу, а через x_i^0 $\{x_{i1}^0, x_{i2}^0, x_{i3}^0\}$ — неподвижный конец той же связи. Пусть M — масса твердого тела,



а I_1, I_2, I_3 — главные центральные моменты инерции тела. Обозначим через q_1, q_2, q_3 линейные независимые координаты, а через q_4, q_5, q_6 — соответствующие угловые координаты.

Уравнения движения тела (уравнения Лагранжа 2-го рода) имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (1)$$

где кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} [M (\dot{\zeta}_1^2 + \dot{\zeta}_2^2 + \dot{\zeta}_3^2) + I_1 \dot{\zeta}_4^2 + I_2 \dot{\zeta}_5^2 + I_3 \dot{\zeta}_6^2]$, потенциальная энергия $\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m c_i \Delta_i^2$ (Δ_i — деформация i -й связи) и диссипативная функция $R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m k_i \dot{\Delta}_i^2$. Перепишем уравнения (1) в виде:

$$\begin{aligned} M \ddot{q}_j &= - \sum_{i=1}^m c_i \Delta_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^m k_i \dot{\Delta}_i \frac{\partial \dot{\Delta}_i}{\partial \dot{q}_j}, \\ I_j \ddot{q}_{j+3} &= - \sum_{i=1}^m c_i \Delta_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_{j+3}} - \sum_{i=1}^m k_i \dot{\Delta}_i \frac{\partial \dot{\Delta}_i}{\partial \dot{q}_{j+3}}, \quad [j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2)$$

Вычислим величины деформаций Δ_i каждой связи системы. Для этого определим положение ее подвижной точки (точки крепления к телу) при движении. Координаты точки x_i в смещенном положении x'_i имеют вид

$$x'_i = \alpha x_i + \tilde{q}, \quad (3)$$

где $\tilde{q} = \{q_1, q_2, q_3\}^T$, α — матрица поворотов, получающаяся путем перемножения матриц $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, характеризующих последовательные углы поворота q_4, q_5, q_6 вокруг координатных осей:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 = \\ &= \begin{bmatrix} \cos q_5 \cos q_6 \sin q_4 \sin q_5 \cos q_6 - \cos q_4 \sin q_6 \cos q_4 \sin q_5 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_6 \\ \cos q_5 \sin q_6 \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6 + \cos q_4 \cos q_6 \cos q_4 \sin q_5 \sin q_6 - \sin q_4 \cos q_6 \\ - \sin q_5 & \sin q_4 \cos q_5 & \cos q_4 \cos q_5 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_4 & -\sin q_4 \\ 0 & \sin q_4 & \cos q_4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} \cos q_5 & 0 & \sin q_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_5 & 0 & \cos q_5 \end{bmatrix}, \\ \alpha_3 &= \begin{bmatrix} \cos q_6 - \sin q_6 & 0 \\ \sin q_6 & \cos q_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Величина деформации Δ_i определяется разностью длин связи в деформированном и недеформированном состояниях, т. е.

$$\Delta_i = \|l'_i\| - \|l_i^0\|, \quad (5)$$

где

$$\|l_i^0\| = \|x_i - x_i^0\| = \sqrt{(x_{i1} - x_{i1}^0)^2 + (x_{i2} - x_{i2}^0)^2 + (x_{i3} - x_{i3}^0)^2}, \quad \|l'_i\| = \|x'_i - x_i^0\|.$$

Обозначая через $(x, y) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$ скалярное произведение векторов x и y ,

¹ Здесь и далее через $\{\dots\}^T$ обозначена операция транспонирования матриц.

перепишем (5) в виде

$$\Delta_i = \sqrt{(\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0, \alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0)} - \sqrt{(x_i - x_i^0, x_i - x_i^0)}. \quad (6)$$

Далее вычислим величины $\partial \Delta_i / \partial q_l$ ($l = 1 \dots, 6$). Дифференцируя (6) по q_j , получим

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial q_j} = \frac{(\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0)_j}{\|\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0\|},$$

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial q_{j+3}} = \frac{\left(\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0, \frac{\partial}{\partial q_{j+3}} \alpha x_i \right)}{\|\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0\|}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Вычисление Δ_i производится аналогично.

Окончательно уравнения (2) с учетом (3) — (7) принимают вид

$$\begin{bmatrix} MI_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = - \sum_{i=1}^m c_i \left(1 - \frac{\|x_i - x_i^0\|}{\|\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0\|} \right) \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial}{\partial \psi} [\alpha x_i] \right)^T \end{bmatrix} (\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0) - \\ - \sum_{i=1}^m k_i \frac{(\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0, \dot{\alpha} x_i + \dot{\tilde{q}})}{\|\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0\|^2} \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial}{\partial \psi} [\alpha x_i] \right)^T \end{bmatrix} (\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0), \quad (8)$$

где

$$I = \text{diag} \{I_1, I_2, I_3\}, \quad \psi = \{q_4, q_5, q_6\}^T, \quad I_3 = \text{diag} \{1, 1, 1\}.$$

2. О существовании разрешающей операции МДИ для уравнения типа (8).

Уравнения типа (8) являются частным случаем нелинейных систем вида

$$\dot{q}_i = (c_i, F_i(q)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где c_i — постоянный m -вектор; $F_i(q)$ — непрерывная m -мерная липшицева вектор-функция, причем в общем случае $m \neq n$.

Пусть $F_i(q)$ — известные функции, а векторы c_i — неизвестны. Ставится задача: определить векторы c_i ($i = 1, \dots, n$) по наблюдаемым в эксперименте движениям системы (9).

В соответствии с [2] разрешающей операцией МДИ назовем процедуру определения векторов c_i системы (9) по результатам экспериментальных наблюдений за движениями изучаемой системы.

В данном случае разрешающая операция МДИ имеет вид

$$c_i = [F_i(q^{(j)})]_{j=1, \dots, m}^{-1}, \dots, m \begin{bmatrix} \dot{q}_i^{(1)} \\ \dots \\ \dot{q}_i^{(m)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

где $q^{(j)} = q(t_j)$, а t_j ($j = 1, \dots, m$) — моменты времени.

У т в е р ж д е н и е I. Разрешающая операция МДИ (10) существует в том и только в том случае, если

$$\det [F_i(q^{(j)})]_{j=1, \dots, m} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Установим условия, при которых неравенства (11) имеют место.

У т в е р ж д е н и е II. Пусть $F_{i1}(q), \dots, F_{im}(q)$ — компоненты вектор-функций $F_i(q)$. Тогда для того чтобы неравенства (11) имели место, необходимо и достаточно, чтобы для каждого i ($i = 1, \dots, n$) все $F_{i1}(q), \dots, F_{im}(q)$ были линейно-независимы.

Это означает, что для каждого i найдется ровно m различных измерений $q^{(j)}$ ($j = 1, \dots, m$) вектора F , при которых неравенство (11) будет выполнено.

Достаточным условием линейной независимости m функций может служить следующее утверждение.

Утверждение III. Пусть m функций f_1, \dots, f_m векторного аргумента q ($q \in D \subset R^n$) представимы в виде

$$f_i(q) = \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} g_j(q) + \Delta_i(q), \quad i = 1, \dots, m, \quad (12)$$

где g_j ($j = 1, \dots, m$) — линейно-независимые функции: γ_{ij} — постоянные, не все равные нулю. Тогда для линейной независимости функций $f_i(q)$ достаточно, чтобы $\det [\gamma_{ij}] \neq 0$, где $[\gamma_{ij}]$ — квадратная матрица m -го порядка, составленная из коэффициентов разложений (12).

Если функции $g_j(q)$ в (12) — члены ряда Тейлора, то функции $f_i(q)$ должны быть ν раз дифференцируемы по k ($k \leq n$) аргументам для того, чтобы общее число членов ряда было не меньше m , т. е. $\sum_{l=1}^{\nu} \prod_{r=1}^l (k+1-r)/l! \geq m$ при условии, что $k+1 > \nu$.

3. Разрешающая операция МДИ для твердого тела с m связями. Так как в уравнениях системы (8) параметры одни и те же, то разрешающая операция МДИ, в соответствии с (10) имеет следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix} = [X_1]^{-1} M \ddot{q}_1, \quad (13)$$

где $c = \{c_1, \dots, c_m\}^T$; $k = \{k_1, \dots, k_m\}^T$; $\ddot{q}_1 = \{\ddot{q}_1^{(1)}, \dots, \ddot{q}_1^{(m)}\}^T$; $[X_1]$ — матрица измерений, которая имеет вид

$$[X_1] = \begin{bmatrix} \left(\Delta_1 \frac{\partial \Delta_1}{\partial q_1} \right)_1 \cdots \left(\Delta_m \frac{\partial \Delta_m}{\partial q_1} \right)_1 \left(\dot{\Delta}_1 \frac{\partial \Delta_1}{\partial q_1} \right)_1 \left(\dot{\Delta}_m \frac{\partial \Delta_m}{\partial q_1} \right)_1 \\ \cdots \\ \left(\Delta_1 \frac{\partial \Delta_1}{\partial q_1} \right)_{2m} \cdots \left(\Delta_m \frac{\partial \Delta_m}{\partial q_1} \right)_{2m} \left(\dot{\Delta}_1 \frac{\partial \Delta_1}{\partial q_1} \right)_{2m} \cdots \left(\dot{\Delta}_m \frac{\partial \Delta_m}{\partial q_1} \right)_{2m} \end{bmatrix}$$

Разрешающую операцию МДИ для системы (8) можно построить также на базе любой другой строки системы уравнений движения (8).

В силу утверждений I и II для существования разрешающей операции (13), т. е. для единственности определения параметров c_i, k_i ($i = 1, \dots, m$) необходимо и достаточно, чтобы $\det [X_1] \neq 0$. Для выполнения этого условия нужно, чтобы функции

$$\left(1 - \frac{\|x_i - x_i^0\|}{\|\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0\|} \right) (\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0)_1$$

были линейно-независимыми.

Для построения разрешающей операции (13) следует составить матрицу измерений и вектор q_1 . Элементы матрицы $[X_1]$

$$\Delta_i(\tilde{q}^{(j)}, \psi^{(j)}) \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_1} \quad \text{и} \quad \dot{\Delta}_i(\tilde{q}^{(j)}, \psi^{(j)}, \dot{\tilde{q}}^{(j)}, \dot{\psi}^{(j)}) \frac{\partial \Delta_i}{\partial \dot{q}_1},$$

т. е. проекции деформаций и скоростей деформаций связей на направление оси 1 неподвижной системы координат (величины $\partial \Delta_i / \partial q_1 = \partial \dot{\Delta}_i / \partial \dot{q}_1$ — направляющие косинусы связей) зависят от обобщенных координат системы q, ψ и обобщенных скоростей $\dot{\tilde{q}}, \dot{\psi}$, которые непосредственно измерить весьма сложно.

В эксперименте несложно измерять длины связей и углы, которые связи образуют с осями неподвижной системы координат, т. е. измерять векторы $L_i \{l_i \cos \beta_{i1}, l_i \cos \beta_{i2}, l_i \cos \beta_{i3}\}$, где l_i — длина i -й связи, а $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3}$ — углы, которые i -я связь образует с осями 1, 2, 3, неподвижной системы координат.

Величина деформации i -й связи определяется по формуле (5). Как отмечено выше,

$$\{\partial\Delta_i/\partial q_1, \partial\Delta_i/\partial q_2, \partial\Delta_i/\partial q_3\} = \{\cos\beta_{i1}, \cos\beta_{i2}, \cos\beta_{i3}\}.$$

Покажем теперь, как из проводимых измерений получить величины \tilde{q} и элементы матрицы поворотов α . Выразим координаты точки крепления i -й связи к телу через координаты вектора L_i и координаты неподвижной точки крепления:

$$x'_i = x_i^0 + L'_i.$$

С другой стороны, по формуле (3) $x'_i = \alpha x_i + q$, т. е.

$$\alpha x_i + \tilde{q} = x_i^0 + L'_i,$$

или в проекциях на оси координат,

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_{i1} + \alpha_{12}x_{i2} + \alpha_{13}x_{i3} + q_1 &= x_{i1}^0 + l'_i \cos\beta_{i1}, \\ \alpha_{21}x_{i1} + \alpha_{22}x_{i2} + \alpha_{23}x_{i3} + q_2 &= x_{i2}^0 + l'_i \cos\beta_{i2}, \\ \alpha_{31}x_{i1} + \alpha_{32}x_{i2} + \alpha_{33}x_{i3} + q_3 &= x_{i3}^0 + l'_i \cos\beta_{i3}, \end{aligned} \quad (14)$$

причем в этих соотношениях неизвестными являются матрица α (ее элементы) и q_1, q_2, q_3 . Соотношения (14) являются линейными относительно искомых величин, причем в каждое уравнение входят четыре неизвестных. Следовательно, для определения этих неизвестных нужно выбрать такие четыре связи, у которых точки крепления к твердому телу в начальный момент не находятся в одной плоскости. Действительно, если, например, это связи 1, 2, 3, 4, то получим систему

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 1 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 1 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{k1} \\ \alpha_{k2} \\ \alpha_{k3} \\ q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1k}^0 + l'_1 \cos\beta_{1k} \\ x_{2k}^0 + l'_2 \cos\beta_{2k} \\ x_{3k}^0 + l'_3 \cos\beta_{3k} \\ x_{4k}^0 + l'_4 \cos\beta_{4k} \end{bmatrix}, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (15)$$

откуда следует, что для единственности решения системы (15) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 1 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 1 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{bmatrix} = 4.$$

Последнее равенство имеет место только в том случае, когда точки x_1, x_2, x_3, x_4 не лежат в одной плоскости.

О линейной независимости функций Δ_i ($\partial\Delta_i/\partial q_j$), $\dot{\Delta}_i$ ($\partial\dot{\Delta}_i/\partial\dot{q}_j$). Разрешающая операция (13), как было отмечено выше, существует лишь тогда, когда функции Δ_i ($\partial\Delta_i/\partial q_j$), $\dot{\Delta}_i$ ($\partial\dot{\Delta}_i/\partial\dot{q}_j$) линейно-независимы. Проведем анализ этих функций. Для простоты ограничимся консервативной системой. В этом случае в уравнении, на базе которого строится разрешающая операция, имеет m функций шести переменных Δ_i ($\partial\Delta_i/\partial q_1$) ($i = 1, \dots, m$). Для выяснения их линейной независимости достаточно рассмотреть независимость функций Δ_i ($i = 1, \dots, m$). Среди этих функций можно найти не более шести независимых.

Покажем, что такие шесть функций существуют и они по крайней мере линейно-независимы. Для этого рассмотрим условие линейной независимости

уравнений движения консервативной системы

$$\begin{bmatrix} MI_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{q}} \\ \ddot{\tilde{\psi}} \end{bmatrix} = - \sum_{i=1}^m c_i \left(1 - \frac{\|x_i - x_i^0\|}{\|\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0\|} \right) \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \alpha x_i \right)^T \end{bmatrix} (\alpha x_i + \tilde{q} - x_i^0); \quad (16)$$

произведем их линеаризацию. Линеаризованные уравнения (16) имеют вид

$$\begin{bmatrix} MI_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{q}} \\ \ddot{\tilde{\psi}} \end{bmatrix} = - \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{\|x_i - x_i^0\|^2} \left(\tilde{X}_i, \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{\psi} \end{bmatrix} \right) \tilde{X}_i, \quad (17)$$

где

$$\tilde{X}_i = \{x_{i1} - x_{i1}^0, x_{i2} - x_{i2}^0, x_{i3} - x_{i3}^0, x_{i3}^0 x_{i2} - x_{i2}^0 x_{i3}, x_{i1}^0 x_{i3} - x_{i3}^0 x_{i1}, x_{i2}^0 x_{i1} - x_{i1}^0 x_{i2}\}^T.$$

Пусть $m = 6$. Тогда векторы \tilde{X}_i (при их линейной независимости) могут служить базисом фазового пространства шести измерений. При этом условие линейной независимости уравнений состоит в том, что изображающая точка не должна совершать движения в подпространстве: для выполнения этого условия достаточно линейной независимости функций $c_i \left(\tilde{X}_i, \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{\psi} \end{bmatrix} \right)$. При этом условием линейной независимости указанных функций является

$$\det \begin{bmatrix} c_1 \left(\tilde{X}_1, \begin{bmatrix} \tilde{q}^{(1)} \\ \tilde{\psi}^{(1)} \end{bmatrix} \right) \cdots c_6 \left(\tilde{X}_6, \begin{bmatrix} \tilde{q}^{(1)} \\ \tilde{\psi}^{(1)} \end{bmatrix} \right) \\ \dots \\ c_1 \left(\tilde{X}_1, \begin{bmatrix} \tilde{q}^{(6)} \\ \tilde{\psi}^{(6)} \end{bmatrix} \right) \cdots c_6 \left(\tilde{X}_6, \begin{bmatrix} \tilde{q}^{(6)} \\ \tilde{\psi}^{(6)} \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} \neq 0,$$

т. е.

$$\det [c_1 \tilde{X}_1, \dots, c_6 \tilde{X}_6] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{q}^{(1)} \dots \tilde{q}^{(6)} \\ \tilde{\psi}^{(1)} \dots \tilde{\psi}^{(6)} \end{bmatrix} \neq 0, \quad (18)$$

где столбцы второй матрицы соответствуют различным измерениям. Отсюда следует, что если движение тела происходит во всем пространстве, то

$$\det [\tilde{X}_1 \dots \tilde{X}_6] \neq 0. \quad (19)$$

Условие (19) является необходимым условием линейной независимости (17). Достаточность условия (19) следует из того, что найдется шесть различных начальных условий (например, $\begin{bmatrix} \tilde{q}_0^{(i)} \\ \tilde{\psi}_0^{(i)} \end{bmatrix} = \tilde{X}_i$) таких, что вторая матрица в (18) будет неособенной.

У т в е р ж д е н и е IV. Если среди векторов \tilde{X}_i ($i = 1, \dots, m$), характеризующих только геометрию связей, в уравнениях (17) найдется хотя бы одна совокупность из шести векторов, такая, что имеет место (19), то уравнения (17) линейно-независимы.

Результат, аналогичный утверждению IV, имеется в [1]; однако он получен иным методом.

Если уравнения (17) линейно-независимы, то и уравнения (16) линейно-независимы, что следует из утверждения III.

Из изложенного выше следует, что среди Δ_i ($i = 1, \dots, m$) найдется шесть таких, которые, по крайней мере, будут линейно-независимыми, и $m-6$ зависимых, причем зависимость между ними может быть и нелинейной. Из выражения для потенциальной энергии и уравнений (16) следует, что да-

же в случае линейной зависимости можно определить жесткости при числе связей $m \leq 21$.

В заключение сделаем ряд замечаний.

Замечание I. Рассматриваемая система с m связями обладает потенциальной энергией $\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m c_i \Delta_i^2$, которая составляется в предположении, что потенциальные силы линейно зависят от деформаций связей. Для этой системы нельзя построить эквивалентной (с теми же инерционными характеристиками) системы, обладающей шестью связями с потенциальными силами, линейно зависящими от деформаций связей, хотя существует эквивалентная система с шестью связями, в которой потенциальные силы зависят от деформаций этих связей нелинейным образом.

Замечание II. При независимых уравнениях движения (16) разрешающую операцию МДИ можно строить на базе всех шести уравнений движения, что уменьшает число измерений, по которым составляется матрица измерений.

Замечание III. Как следует из (17), при числе связей $m > 6$ линеаризованные уравнения не допускают построения на их основе разрешающей операции МДИ.

Замечание IV. Для неконсервативных систем типа (8) построения проводятся аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Аверьянова, Ф. М. Диментберг. Геометрическая интерпретация колебаний упруго-подвешенного твердого тела. — Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 6.
2. К. К. Глухарев, Д. Е. Розенберг. Метод динамических испытаний для синтеза уравнений движения механических систем с известным числом степеней свободы. — Машиноведение, 1973, № 6.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Г. И. АНИКЕЕВ

Рассматриваются нестационарные случайные процессы в системах со многими степенями свободы. При этом предполагается, что на систему действуют внешние силы, зависящие от многих случайных параметров, кроме того, параметры самой системы также предполагаются случайными функциями времени. Функции распределения указанных случайных величин могут быть произвольными.

Движение системы описывается уравнениями

$$\frac{d\eta^*}{dt} = \Phi(\xi^*, \eta^*), \quad (1)$$

где ξ^* — известные случайные величины. Процесс на выходе системы будем описывать с помощью последовательности корреляционных функций $B_{\eta^*}(t_1)$, $B_{\eta^* \eta^*}(t_1, t_2)$, ..., $B_{\eta^* \dots \eta^*}(t_1, \dots, t_n)$. При этом очевидно, что $B_{\eta^*}(t_1) = m_{\eta^*}(t_1)$, где m_{η^*} — математические ожидания величин η^* . Индексы η^* у $B_{\eta^* \dots \eta^*}$ могут быть как неравными, так и равными друг другу; в случае равных индексов η^* мы имеем дело с автокорреляционными функциями.

Для нахождения указанной системы корреляционных функций выходного процесса необходимо иметь подобную же систему функций для входного процесса, т. е.

$$m_{\xi^*}(t), B_{\xi^*\xi^*}(t_1, t_2), \dots, B_{\xi^* \dots \xi^*}(t_1, \dots, t_n).$$

Для дальнейшего исследования удобнее ввести в рассмотрение так называемые флюктуационные уравнения:

$$\frac{d\eta}{dt} = F(\xi, \eta, m, \sigma^2, r, R), \quad (2)$$

где $\eta = \eta^* - m$ — центральные случайные величины; m — математические ожидания величин η^* ; σ^2 — дисперсии; r — ненормированные коэффициенты двойных корреляций, R — ненормированные коэффициенты корреляций высших порядков.

Для получения уравнения (2) осредним (1) по множеству реализаций

$$\frac{dm}{dt} = \langle \Phi \rangle. \quad (3)$$

Вычитая (1) из (3), получим требуемые флюктуационные уравнения, где $F = \Phi - \langle \Phi \rangle$. Умножим (2) на $\eta(t_2)$ и осредним по множеству реализаций, тогда получим:

$$\frac{\partial B_{\eta\eta}(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \alpha [B_{\xi\eta}(t_1, t_2), B_{\eta\eta}(t_1, t_2), B_3(t_1, t_1, t_2), \dots], \quad (4)$$

где

$$\alpha(B_2, B_3, \dots) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \eta F(\xi, \eta) w_{p+q}(\xi, \eta) d\xi \dots d\eta \dots \quad (5)$$

будет функцией смешанных моментов функций η второго и выше порядков. Кроме того, правая часть (4) будет включать взаимные корреляционные функции $B_{\xi\eta}$ известных и неизвестных величин также разных порядков. Выражение $w_{p+q}(\xi, \eta)$ в правой части (5) является совместной функцией распределения всех известных и неизвестных величин.

Система (4), естественно, неполна. Во-первых, не хватает уравнений, содержащих взаимные корреляционные функции в левой части, во вторых, необходимы уравнения, содержащие высшие корреляционные функции. Уравнения с $B_{\xi\eta}$ в левой части получаются аналогично (4) умножением (1) на ξ и осреднением по множеству

$$\frac{\partial B_{\eta\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \beta [B_{\xi\xi}(t_1, t_2), B_{\eta\xi}(t_1, t_2), B_3(t_1, t_1, t_2), \dots]. \quad (6)$$

Система уравнений (5), (6) содержит, помимо неизвестных величин $B_{\eta\eta}$ и $B_{\xi\eta}$, величины $B_{\eta\xi}$, а также вырожденные высшие корреляционные функции $B_3(t_1, t_1, t_2)$, $B_4(t_1, t_1, t_1, t_2)$. . .

Рассмотрим сначала случай, когда члены B_3, B_4 в правых частях (6) отсутствуют, что имеет место для линейной системы с постоянными коэффициентами. Отметим, что во всех случаях нахождение взаимных корреляционных функций известных и неизвестных величин $B_{\eta\xi}$ и $B_{\xi\eta}$ не входит в нашу задачу. Для уменьшения числа этих функций используем соотношение

$$B_{\eta\xi}(t_1, t_2) = B_{\xi\eta}(t_2, t_1).$$

Дифференцируя по времени t_2 , получим систему:

$$\frac{\partial B_{\eta\eta}(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \alpha [B_{\xi\eta}(t_1, t_2), B_{\eta\eta}(t_1, t_2)], \quad (7)$$

$$\frac{\partial B_{\xi\eta}(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \beta [B_{\xi\xi}(t_1, t_2), B_{\xi\eta}(t_1, t_2)]. \quad (8)$$

Правые части (7) и (8) будут линейными комбинациями величин B_2 , кроме того, $\alpha = \beta$. Поэтому соотношения (7), (8) часто пишут в операторной форме

$$LB_{\eta\eta} = B_{\xi\eta}, \quad LB_{\xi\eta} = B_{\xi\xi},$$

а затем выражают неизвестные величины через известные с помощью простой записи [1]

$$L_{t_1 t_2} B_{\eta\eta} = B_{\xi\xi}. \quad (9)$$

Этим и ограничиваются достоинства такого преобразования. Решение системы уравнений второго порядка в частных производных представляет значительные трудности.

Однако в этом преобразовании нет необходимости. Нетрудно заметить, что системы (7) и (8) интегрируются отдельно; сначала система (8), а потом и система (7). Интегрирование каждой из систем не представляет трудностей. Ввиду того, что в системах имеется производная только по одной из переменных, вторая переменная может рассматриваться как параметр. Тогда каждая из систем (8) и (7) интегрируется как система обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которой разыскиваются с точностью до функции второй переменной.

Аналогично строим уравнения для высших корреляционных функций. Так, для функций третьего порядка имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{\eta\eta\eta}}{\partial t_1} &= \gamma(B_{\xi\eta\eta}, B_{\eta\eta\eta}, \dots); & \frac{\partial B_{\eta\eta\xi}}{\partial t_1} &= \delta(B_{\xi\eta\xi}, B_{\eta\eta\xi}, \dots), \\ \frac{\partial B_{\eta\xi\eta}}{\partial t_1} &= \varepsilon(B_{\xi\xi\eta}, B_{\eta\xi\eta}, \dots); & \frac{\partial B_{\eta\xi\xi}}{\partial t_1} &= \kappa(B_{\xi\xi\xi}, B_{\eta\xi\xi}, \dots), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\gamma = \langle \eta\eta F \rangle$, $\delta = \langle \eta\xi F \rangle$, $\varepsilon = \langle \xi\eta F \rangle$, $\kappa = \langle \xi\xi F \rangle$.

Выразить корреляции $B_{\eta\eta\eta}$ через $B_{\xi\xi\xi}$ можно двумя способами. В одном из них используются первое, второе и четвертое уравнения системы (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{\eta\eta\eta}}{\partial t_1} &= \gamma(B_{\xi\eta\eta}, B_{\eta\eta\eta}, \dots), & \frac{\partial B_{\xi\eta\eta}}{\partial t_3} &= \delta(B_{\xi\xi\eta}, B_{\xi\eta\eta}, \dots), \\ \frac{\partial B_{\xi\xi\eta}}{\partial t_2} &= \kappa(B_{\xi\xi\xi}, B_{\xi\xi\eta}, \dots). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (11), начиная с последнего могут интегрироваться отдельно, причем как системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнения (11), как и (7), (8), содержат в правых частях вырожденные корреляционные функции высших порядков. Так, в уравнения (7), (8) входят высшие корреляционные функции, начиная с функций третьего порядка, а в уравнения (11) — с функций четвертого порядка. Процедуру построения уравнений для вырожденных корреляционных функций легче всего проследить на примере уравнений для моментных функций первого порядка.

Осредняя (1) по множеству, имеем

$$\frac{dm_n}{dt} = A(m_\xi, m_\eta, r_{\xi\xi}, r_{\xi\eta}, r_{\eta\eta}, \sigma_\xi^2, \sigma_\eta^2, R),$$

где коэффициенты корреляции r и дисперсии σ^2 есть не что иное, как вырожденные корреляционные функции второго порядка $r = B_2(t, t)$, а величины R — вырожденные корреляционные функции высших порядков $R = R_n(t, \dots, t)$.

Умножая (1) с индексом i на η_j , сложим с (1) с индексом j , умноженным на η_i :

$$\eta_j(t) \frac{d\eta_i}{dt} + \eta_i(t) \frac{d\eta_j}{dt} = \eta_j(t) F_i(t) + \eta_i(t) F_j(t);$$

осредняя по множеству, получим:

$$\frac{dr_{\eta\eta}}{dt} = C(m, \sigma^2, r, R), \quad (12)$$

где

$$C_{ij} = \langle \eta_j F_i + \eta_i F_j \rangle.$$

Для случая $i = j$ имеем

$$\frac{d(\sigma^2)}{dt} = D(m, \sigma^2, r, R), \quad (13)$$

где

$$D_i = 2\langle \eta_i F_i \rangle.$$

И, наконец, для коэффициентов корреляции известных и неизвестных величин получим

$$\frac{dr}{dt} = E(m, \sigma^2, r, R), \quad (14)$$

где

$$E = \langle \xi F \rangle + \left\langle \eta \frac{d\xi}{dt} \right\rangle. \quad (15)$$

Из (2) видно, что неизвестные функции η зависят только от ξ , а не от их производных. Если же в число ξ входят и производные каких-либо ξ_i , то они будут считаться отдельными параметрами ξ_k , т. е. $d\xi_i/dt = \xi_k$; тогда второй член в правой части (14), как это видно из (15), будет равен r_{jk} .

В правые части уравнений (12), (13), (14) входят также вырожденные корреляции третьего порядка $B_3(t, t, t)$ и выше. Для них уравнения составляются аналогичным путем:

$$\frac{dR_{\eta\eta\eta}}{dt} = \varepsilon(m, \sigma^2, r, R), \quad (16)$$

где

$$\varepsilon_{ijh} = \langle \eta_i \eta_j F_h + \eta_j \eta_h F_i + \eta_h \eta_i F_j \rangle.$$

При составлении уравнений для $B_{\xi\eta\eta}(t)$, $B_{\xi\xi\eta}(t)$ могут встретиться трудности, разрешить которые поможет знание свойств тройных корреляций.

Вырожденные корреляционные функции вида $B_3(t_1, t_1, t_2)$, $B_3(t_1, t_2, t_2)$, $B_3(t_1, t_2, t_1)$ занимают промежуточное положение между $B_3(t_1, t_2, t_3)$ и $B_3(t_1, t_1, t_1)$. Уравнения для таких функций также составляются двумя способами; либо аналогично уравнениям для $B_3(t_1, t_2, t_3)$, когда

$$\frac{\partial B_{\eta\eta\eta}^{ijk}(t_1, t_1, t_2)}{\partial t_2} = \left\langle \eta_i(t_1) \eta_j(t_1) \frac{d\eta_k(t_2)}{dt} \right\rangle, \quad (17)$$

либо аналогично уравнениям для $B_3(t_1, t_1, t_2)$, когда

$$\frac{\partial B_{\eta\eta\eta}^{ijk}(t_1, t_1, t_2)}{\partial t_1} = \left\langle \eta_k(t_2) \eta_i(t_1) \frac{d\eta_j(t_1)}{dt_1} + \eta_k(t_2) \eta_j(t_1) \frac{d\eta_i(t_1)}{dt_1} \right\rangle. \quad (18)$$

В первом случае система уравнений аналогична (10), только в этом случае $B_3 = B_3(t_1, t_1, t_2)$.

Для второго случая получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{\eta\eta\eta}(t_1, t_1, t_2)}{\partial t_1} &= \alpha^*(B_{\eta\xi\eta}, B_{\eta\eta\eta}), & \frac{\partial B_{\eta\eta\xi}}{\partial t_1} &= \beta^*(B_{\eta\xi\xi}, B_{\eta\eta\xi}), \\ \frac{\partial B_{\xi\eta\eta}}{\partial t_1} &= \gamma^*(B_{\xi\xi\eta}, B_{\xi\eta\eta}); & \frac{\partial B_{\xi\eta\xi}}{\partial t_1} &= \delta^*(B_{\xi\xi\xi}, B_{\xi\eta\xi}), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\alpha_{ijk}^* = \left\langle (\eta_i F_j + \eta_j F_i) \frac{d\eta_k}{dt_1} \right\rangle; \quad \beta^* = \left\langle (\eta_i F_j + \eta_j F_i) \frac{d\xi_k}{dt_1} \right\rangle,$$

$$\gamma^* = \left\langle (\xi_i F_j + \xi_j F_i) \frac{d\eta_k}{dt_1} \right\rangle; \quad \delta^* = \left\langle (\xi_i F_j + \xi_j F_i) \frac{d\xi_k}{dt_1} \right\rangle.$$

В силу частичной вырожденности функций как в первом, так и во втором случае в выражениях (10) и (19) возможна перестановка первого и второго индексов. Однако нетрудно заметить, что при помощи только системы (10) или только системы (19) найти искомые функции $B_{\eta_i \eta_j}$ невозможно. Если же использовать обе системы, то возможны несколько вариантов решения, например

$$\frac{\partial B_{\xi \eta \xi}}{\partial t_1} = \delta^* (B_{\xi \xi \xi}, B_{\xi \eta \xi}), \quad \frac{\partial B_{\xi \eta \eta}}{\partial t_2} = \varepsilon (B_{\xi \eta \xi}, B_{\xi \eta \eta}),$$

$$\frac{\partial B_{\eta \eta \eta}}{\partial t_1} = \alpha^* (B_{\eta \xi \eta}, B_{\eta \eta \eta}).$$
(20)

Здесь следует учесть, что для $B_3(t_1, t_1, t_2)$ имеет место равенство $B_{\xi \eta \eta} = B_{\eta \xi \eta}$. Неизбежная перестановка индексов в членах, входящих в правую часть (20), здесь не играет роли, так как индексы в разных уравнениях (19) не связаны между собой и обозначают набор возможных комбинаций из всех ξ и η .

Уравнения для корреляционных функций любого порядка можно написать в общем виде

$$\frac{\partial B_n^q}{\partial t_1} = \alpha_n(p_{n-1}, B_n, q_{n+1}, \dots),$$
(21)

где p_{n-1} — корреляционные функции низших порядков, включая вырожденные функции B_n ; q_{n+1} — вырожденные корреляционные функции высших порядков. Например, уравнения для корреляционных функций второго порядка будут:

$$\frac{\partial B_2}{\partial t_1} = \alpha_2 [m(t_1), \sigma^2(t_1) r(t_1, t_1) B_2(t_1, t_2), B_3(t_1, t_1, t_2), B_4(t_1, t_1, t_1, t_2), \dots].$$

Для выяснения возможности усечения уравнений воспользуемся свойством корреляционных функций, заключающемся в меньшей значимости высших корреляций. Поэтому решения уравнений (10) или (19) каждый раз будем разыскивать с точностью до корреляций определенного порядка. Что же касается величин p_{n-1} , то они определяются при интегрировании уравнений для корреляций порядка $n-1$ и ниже, так что в уравнения (21) они уже входят как известные величины.

Чтобы упростить получение выражений, входящих в правые части уравнений для корреляционных функций, и сократить выкладки, усечение старших корреляций необходимо произвести и в самой неизвестной функции распределения. Для этой цели очень удобно воспользоваться разложением функции распределения в ряд по квазимоментным функциям [2]:

$$w_n(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta_1, \dots, \eta_q, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \left\{ 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum b_s(t_\alpha, \dots, t_\omega) \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \right) \dots \left(-\frac{\partial}{\partial \eta_\beta} \right) \dots \left(-\frac{\partial}{\partial \eta_\omega} \right) \right\} w_n^0(\xi, \eta),$$
(22)

где $w_{n=p+q}$ — совместная плотность распределения всей совокупности известных и неизвестных величин; w_n^0 — плотность распределения процесса с теми же математическими ожиданиями и корреляционными функциями (второго порядка), что и для исходного процесса; $b_s(t_\alpha, \dots, t_\omega)$ — квазимомент-

ные функции, связанные с корреляционными функциями соотношениями:

$$\begin{aligned} b_3 &= B_3, & b_4 &= B_4, & b_5 &= B_5, \\ b_6 &= B_6 + 10 \{B_3 B_3\}_s, & b_7 &= B_7 + 35 \{B_3 B_4\}_s, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\{ \dots \}_s$ означает симметризацию по всем аргументам.

Выражение (22) может быть написано при помощи полиномов Эрмита;

$$\begin{aligned} w_n(\xi, \eta, t_1, \dots, t_n) &= \\ &= \left\{ 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{\alpha, \omega=1}^n b_s(t_\alpha, t_\omega) H_{\alpha \dots \omega} [(\xi - m(t), \eta - m(t))] \right\} w_n^0(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} w_n^0(\xi, \eta) &= 2\pi^{-\frac{n}{2}} \text{Det}^{-\frac{1}{2}} \| K_2(t_\alpha, t_\beta) \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \right\}, \\ x_\alpha &= (\xi_\alpha - m_\xi(t_\alpha), (\eta_\alpha - m_\eta(t_\alpha)); \frac{1}{2} \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = \varphi[x]; \end{aligned}$$

тогда

$$H_{\alpha \dots \omega}[x] = e^{z[x]} \left(-\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \dots \left(-\frac{\partial}{\partial x_\omega} \right) e^{-z[x]}.$$

Обозначив

$$y = y_\alpha[x] = \frac{\partial \varphi[x]}{\partial x_\alpha} = \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} x_\beta.$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} H_\alpha[x] &= y_\alpha, & H_{\alpha\beta}[x] &= y_\alpha y_\beta - a_{\alpha\beta}, \\ H_{\alpha\beta\gamma}[x] &= y_\alpha y_\beta y_\gamma - a_{\alpha\beta} y_\gamma - a_{\beta\gamma} y_\alpha - a_{\gamma\alpha} y_\beta, \\ H_{\alpha\beta\gamma\delta}[x] &= y_\alpha y_\beta y_\gamma y_\delta - a_{\alpha\beta} y_\gamma y_\delta - a_{\alpha\gamma} y_\beta y_\delta - a_{\alpha\delta} y_\beta y_\gamma - a_{\beta\gamma} y_\alpha y_\delta - \\ &- a_{\beta\delta} y_\alpha y_\gamma - a_{\gamma\delta} y_\alpha y_\beta - a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} - a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Матрица $\| a_{\alpha\beta} \|$, обратная корреляционной матрице $K_2(t_\alpha, t_\beta)$, т. е. $\| a_{\alpha\beta} \| = \| K_2(t_\alpha, t_\beta) \|^{-1}$, определяется из соотношения

$$\sum a_{\alpha\beta} K_2(t_\beta t_\gamma) = \delta_{\alpha\gamma},$$

где $\delta_{\alpha\gamma}$ — символ Кронекера.

Таким образом, вычисление правых частей уравнений в корреляционных функциях значительно облегчается: например, для $B_{n\gamma}$ имеем в корреляциях третьего порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{n\eta}}{\partial t_1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t_2) F(t_1) w^0(\xi, \eta) d\xi \dots d\eta + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{\alpha, \omega=1}^n B_3(t_\alpha, \dots, t_\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t_2) F(t_1) H_{\alpha \dots \omega} w_n^0(\xi, \eta) d\xi \dots d\eta \dots + \\ &+ \frac{10}{6!} \sum_{\alpha, \omega=1}^n \{B_3 B_3\}_s \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t_2) F(t_1) H_{\alpha \dots \omega} w_n^0(\xi, \eta) d\xi \dots d\eta \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Обозначая символом $\langle \dots \rangle^0$ осреднение по функции нормального распределения, т. е.

$$\langle F(\xi, \eta) \rangle^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) w_n^0(\xi, \eta) d\xi \dots d\eta \dots,$$

получим из (25)

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{\eta\eta}}{\partial t_1} = & \langle \eta(t_2) F(t_1) \rangle^0 + \frac{1}{3!} \sum_{\alpha, \omega=1}^n B_3(t_\alpha \dots t_\omega) \langle H_{\alpha \dots \omega} F(t_1) \rangle^0 + \\ & + \frac{1}{6!} \sum_{\alpha, \omega=1}^n \{B_3 B_3\}_s \langle \eta(t_2) H_{\alpha \dots \omega} F(t_1) \rangle^0. \end{aligned} \quad (26)$$

Как видно из примера, получение результатов осреднения в каждом из слагаемых правой части (26) не представляет трудностей ввиду того, что осредняется нормальный случайный процесс. Поэтому возможно применение формальных результатов осреднений, а также теоремы Прайса. Кроме того, исследование облегчается тем, что получающиеся уравнения для порядков $s = 3, 4, 5$ будут линейными относительно корреляционных функций указанных порядков. В случае высших порядков ($s = 6, 7, \dots$) эта тенденция нарушается, однако в практике вряд ли потребуются случаи корреляций 4 и 5-го порядков, не говоря уже о более высоких порядках. Значимость указанных корреляций в функции распределения w_n становится ничтожной.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Болотин. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971.
2. Б. Р. Левин. Теория случайных процессов и ее применения в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1960.

КОЛЕБАНИЯ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

М. Ф. ЗЕЙТМАН, Л. А. ТАРАН

Решение многих прикладных задач динамики гироскопических систем в ряде случаев невозможно без учета диссипативных сил. В реальных объектах эти силы всегда присутствуют и при определенных условиях оказывают существенное влияние на поведение таких систем. Наличие малых диссипативных сил внутреннего и внешнего трения позволяет рассматривать упругую гироскопическую систему с сосредоточенными и распределенными параметрами как близкую к консервативной. Это дает возможность эффективно использовать приближенные методы. Так, в работе [1] изучение колебаний неконсервативных упругих гиросистем осуществляется методом малого параметра [2], причем для сложных структур предлагается использовать его в сочетании с методами динамических податливостей и начальных параметров.

Обычно единичные объекты механических систем принадлежат к определенной партии однотипных машин, детали которых, в силу целого ряда случайных факторов, могут иметь конструктивные и технологические отклонения от их номинальных значений. Поэтому при исследовании динамики такие объекты можно рассматривать как системы со случайными распределенными и сосредоточенными параметрами. Поскольку отклонения случайных параметров от их номинальных значений малы, в изучаемой упругой гироскопической системе присутствуют две группы малых членов разной физической природы; диссипативные силовые факторы и возмущения распределенных и сосредоточенных параметров.

В настоящей работе для исследования колебаний гироскопических систем, близких к консервативным, со случайными распределенными и сосредоточенными параметрами предлагается использовать два малых параметра, из которых один (μ_1) вводится с целью определения вероятностных характеристик системы, а с помощью второго (μ_2) устанавливается влияние неконсервативных сил и моментов. Такое разделение малых возмущений позволяет эффективно использовать идеи метода малого параметра [2] и получить необходимые характеристики колебательного процесса. Для простейших систем с одной степенью свободы аналогичный прием использован в работе [3]. Вероятностная оценка поведения подобных систем приобретает особо важное значение при работе вблизи границ устойчивости.

Движение упругих гироскопических систем часто представляется квазилинейной n -точечной смешанной краевой задачей с квазилинейными условиями сопряжения. Для иллюстрации предлагаемой процедуры построения решения свободных колебаний таких систем рассмотрим наиболее простую из них: гибкий ротор с диском на конце. Пусть $w(x, t)$ — комплексный прогиб вала в сечении с абсциссой x ; EI , ρ — его изгибная жесткость и масса единицы длины; ω — угловая скорость вала; l — его длина; m — масса диска; K_1 , K_0 — его экваториальный и полярный моменты инерции; c_1 , c_2 — поперечная и угловая жесткости опоры; η , κ , κ_1 , κ_2 — коэффициенты внутреннего и внешнего трения в системе; λ — угловая скорость прецессии.

Тогда свободные колебания гиросистемы описываются уравнением

$$EI\partial^4 w/\partial x^4 + \rho\partial^2 w/\partial t^2 = F(x, t) \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$w = \partial w/\partial x = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} EI\partial^2 w/\partial x^2 &= -K_1\partial^3 w/\partial x\partial t^2 + iK_0\omega\partial^2 w/\partial x\partial t - c_2\partial w/\partial x + G(l, t), \\ EI\partial^3 w/\partial x^3 &= m\partial^2 w/\partial t^2 + c_1 w + P(l, t), \quad \text{при } x = l, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} F(x, t) &= -\kappa\partial w/\partial t - \eta EI|\lambda - \omega|^{-1}[\dot{w}^{IV}(x, t) - i\omega w^{IV}(x, t)], \\ G(l, t) &= -\kappa_1\partial^2 w/\partial x\partial t - \eta EI|\lambda - \omega|^{-1}[\dot{w}''(l, t) - i\omega w''(l, t)], \\ P(l, t) &= \kappa_2\partial w/\partial t - \eta EI|\lambda - \omega|^{-1}[\dot{w}'''(l, t) - i\omega w'''(l, t)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что рассматриваемая гироскопическая система является динамической моделью технологически единой совокупности одинаковых машин. В этом случае отклонения параметров EI , ρ , m от их номинальных значений лежат в пределах допусков и являются малыми величинами. Введем малый параметр μ_1 и положим, что

$$\begin{aligned} EI &= \langle EI \rangle + \mu_1 \bar{EI}, \quad \rho = \langle \rho \rangle + \mu_1 \bar{\rho}, \quad m = \langle m \rangle + \mu_1 \bar{m}, \\ K_1 &= \langle K_1 \rangle + \mu_1 \bar{K}_1, \quad K_0 = \langle K_0 \rangle + \mu_1 \bar{K}_0, \quad c_1 = \langle c_1 \rangle + \mu_1 \bar{c}_1, \\ c_2 &= \langle c_2 \rangle + \mu_1 \bar{c}_2, \quad \kappa = \langle \kappa \rangle + \mu_1 \bar{\kappa}, \quad \kappa_1 = \langle \kappa_1 \rangle + \mu_1 \bar{\kappa}_1, \\ \kappa_2 &= \langle \kappa_2 \rangle + \mu_1 \bar{\kappa}_2, \quad \eta = \langle \eta \rangle + \mu_1 \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь угловые скобки означают средние значения соответствующих параметров.

Предполагая значения функций (4) достаточно малыми, выделим другой малый параметр μ_2 . Тогда граничную задачу (1) — (4) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle EI \rangle \partial^4 w/\partial x^4 + \langle \rho \rangle \partial^2 w/\partial t^2 &= \mu_1 F_1(x, t) + \mu_2 F_2(x, t) + \\ &+ \mu_1 \mu_2 F_3(x, t) + \mu_1^2 \mu_2 F_4(x, t), \end{aligned} \quad (6)$$

граничные условия:

$$w = \partial w/\partial x = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (7)$$

при $x = l$

$$\begin{aligned} \langle EI \rangle w''(l, t) &= -\langle K_1 \rangle \dot{w}'(l, t) + i\omega \langle K_0 \rangle \dot{w}'(l, t) - \langle c_2 \rangle w'(l, t) + \\ &+ \mu_1 G_1(l, t) + \mu_2 G_2(l, t) + \mu_1 \mu_2 G_3(l, t) + \mu_1^2 \mu_2 G_4(l, t), \\ \langle EI \rangle w'''(l, t) &= \langle m \rangle \dot{w}(l, t) + \langle c_1 \rangle w(l, t) + \mu_1 P_1(l, t) + \\ &+ \mu_2 P_2(l, t) + \mu_1 \mu_2 P_3(l, t) + \mu_1^2 \mu_2 P_4(l, t), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= -\overline{EI} w^{IV}(x, t) - \bar{\rho} \dot{w}(x, t); \quad \mu_2 F_2 = -\langle \kappa \rangle \dot{w}(x, t) - \\ &- \langle \eta \rangle \langle EI \rangle |\lambda - \omega|^{-1} [\dot{w}^{IV}(x, t) - i\omega w^{IV}(x, t)]; \\ \mu_2 F_3 &= -\bar{\kappa} \dot{w}(x, t) - [\bar{\eta} \langle EI \rangle + \langle \eta \rangle \overline{EI}] |\lambda - \omega|^{-1} \dot{w}^{IV}(x, t) - i\omega w^{IV}(x, t); \\ \mu_2 F_4 &= -|\lambda - \omega|^{-1} \bar{\eta} \overline{EI} [\dot{w}^{IV}(x, t) - i\omega w^{IV}(x, t)]; \\ G_1 &= -\overline{EI} w''(l, t) - \bar{K}_1 \dot{w}'(l, t) + i\omega \bar{K}_0 \dot{w}'(l, t) - \bar{c}_2 w'(l, t); \\ \mu_2 G_2 &= -\langle \kappa_1 \rangle \dot{w}'(l, t) - \langle \eta \rangle \langle EI \rangle |\lambda - \omega|^{-1} [\dot{w}''(l, t) - i\omega w''(l, t)]; \\ \mu_2 G_4 &= -\bar{\eta} \overline{EI} |\lambda - \omega|^{-1} [\dot{w}''(l, t) - i\omega w''(l, t)]; \\ P_1 &= -\overline{EI} w'''(l, t) + \bar{m} \dot{w}(l, t) + \bar{c}_1 w(l, t); \\ \mu_2 P_2 &= \langle \kappa_2 \rangle \dot{w}(l, t) - \langle \eta \rangle \langle EI \rangle |\lambda - \omega|^{-1} [\dot{w}'''(l, t) - i\omega w'''(l, t)]; \\ \mu_2 P_3 &= \bar{\kappa}_2 \dot{w}(l, t) - [\bar{\eta} \langle EI \rangle + \langle \eta \rangle \overline{EI}] |\lambda - \omega|^{-1} [\dot{w}'''(l, t) - i\omega w'''(l, t)]; \\ \mu_2 P_4 &= -\bar{\eta} \overline{EI} |\lambda - \omega|^{-1} [\dot{w}'''(l, t) - i\omega w'''(l, t)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение краевой задачи (6) — (9) будем искать в виде двойного ряда по малым параметрам μ_1 и μ_2

$$w(x, t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \mu_1^k \mu_2^l W_{kl}(x) e^{(a+i\lambda)t}, \quad (10)$$

где

$$a + i\lambda = \sum_{k,l=0}^{\infty} \mu_1^k \mu_2^l (a_{kl} + ip_{kl}), \quad (11)$$

причем

$$p_{00} = \lambda_0, \quad a_{00} = 0.$$

При построении решения в выражении $|\lambda - \omega|^{-1}$ ограничимся членами второго порядка малости

$$|\lambda - \omega|^{-1} \cong |\lambda_0 - \omega|^{-1} [1 - y(\lambda_0 - \omega)^{-1} + y^2(\lambda_0 - \omega)^{-2}],$$

$$y = \lambda - \lambda_0 = \sum_{k,l=0}^{\infty} \mu_1^k \mu_2^l p_{kl} - \lambda_0.$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} |\lambda - \omega|^{-1} &= (\lambda_0 - \omega)^2 |\lambda_0 - \omega|^{-1} \left[M - N \sum_{m,n=0}^{\infty} \mu_1^m \mu_2^n p_{mn} + \right. \\ &\left. + \sum_{u,v=0}^{\infty} \mu_1^u \mu_2^v \sum_{\alpha,\beta=0}^{u,v} p_{\alpha\beta} p_{u-\alpha} p_{v-\beta} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

здесь

$$M = 3\lambda_0(\lambda_0 - \omega) + \omega^2, \quad N = 3\lambda_0 - \omega.$$

После подстановки (10) — (12) в (6) — (9) и ряда преобразований придем к системе краевых задач, представленных уравнениями

$$\begin{aligned} \langle EI \rangle W_{rs}^{IV}(x) - \langle \rho \rangle \lambda_0^2 W_{rs}(x) &= 2\lambda_0 \langle \rho \rangle (p_{rs} - ia_{rs}) W_{00}(x) + \Theta_{rs}(k_0 x) \\ k_0^4 &= \rho \lambda_0^2 / EI \quad (r, s = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (13)$$

и краевыми условиями

$$W_{rs}(0) = W'_{rs}(0) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (14)$$

при $x = l$

$$\begin{aligned} \langle EI \rangle W''_{rs}(l) &= KW'_{rs}(l) + (\partial K / \partial \lambda_0) (p_{rs} - ia_{rs}) W_{00}^*(l) + \Theta_{1rs}(k_0 l), \\ \langle EI \rangle W'''_{rs}(l) &= c^* W_{rs}(l) + (\partial c^* / \partial \lambda_0) (p_{rs} - ia_{rs}) W_{00}(l) + \Theta_{2rs}(k_0 l). \end{aligned} \quad (15)$$

В (13) — (15) для сокращения записи введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} K &= \langle K_1 \rangle \lambda_0^2 - \langle K_0 \rangle \omega \lambda_0 - \langle c_2 \rangle, & c^* &= \langle c_1 \rangle - \langle m \rangle \lambda_0^2, \\ \bar{K} &= \bar{K}_1 \lambda_0^2 - \bar{K}_0 \omega \lambda_0 - \bar{c}_1, & \bar{c}^* &= \bar{c}_1 - \bar{m} \lambda_0^2. \end{aligned}$$

Выражения для θ_{rs} , θ_{1rs} , θ_{2rs} представлены следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} \theta_{rs}(k_0 x) &= \langle \rho \rangle \sum_{rs} - 2\lambda_0 \langle \rho \rangle (p_{rs} - ia_{rs}) W_{00}(x) - [\overline{EI} W_{r-1,s}(x) - \\ &\quad - \bar{\rho} \lambda_0^2 W_{r-1,s}(x) - \bar{\rho} \sum_{r-1,s} + F_{r,s-1}^{(1)} + F_{r-1,s-1}^{(2)} + F_{r-2,s-1}^{(3)}], \\ \theta_{1rs}(k_0 x) &= \langle K_1 \rangle \sum'_{rs} + i\omega \langle K_0 \rangle \sigma'_{rs} - (\partial K / \partial \lambda_0) (p_{rs} - ia_{rs}) W'_{00}(x) - \\ &\quad - [\overline{EI} W'_{r-1,s}(x) - \bar{K} W'_{r-1,s} - (\bar{K}_1 \sum'_{r-1,s} + i\omega \bar{K}_0 \sigma'_{rs})] + \\ &\quad + G_{r,s-1}^{(1)} + G_{r-1,s-1}^{(2)} + G_{r-2,s-1}^{(3)}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \theta_{2rs}(k_0 x) &= -\langle m \rangle \sum_{rs} - (\partial c^* / \partial \lambda_0) (p_{rs} - ia_{rs}) W_{00}(x) - \\ &\quad - (\overline{EI} W'''_{r-1,s}(x) + \bar{c}^* W_{r-1,s}(x) + \bar{m} \sum_{r-1,s} + P_{r,s-1}^{(1)} + P_{r-1,s-1}^{(2)} + P_{r-2,s-1}^{(3)}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{rs}(x) &= - \left[\sum_{\delta=0}^r \sum_{\theta=0}^s \sum_{\alpha=0}^{\delta} \sum_{\beta=0}^{\theta} (a_{\alpha\beta} + ip_{\alpha\beta}) (a_{\delta-\alpha, \theta-\beta} + ip_{\delta-\alpha, \theta-\beta}) \times \right. \\ &\quad \left. \times W_{r-\delta, s-\theta}(x) + \lambda_0^2 W_{rs}(x) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\sigma_{rs}(x) = \sum_{\delta=0}^r \sum_{\theta=0}^s (a_{\delta\theta} + ip_{\delta\theta}) W_{r-\delta, s-\theta}(x) - i\lambda_0 W_{rs}(x).$$

Функции $F_{rs}^{(1)}$, $F_{rs}^{(2)}$, $F_{rs}^{(3)}$ имеют вид

$$F_{rs}^{(1)} = -\langle \kappa \rangle \sum_{\delta=0}^r \sum_{\theta=0}^s (a_{\delta\theta} + ip_{\delta\theta}) W_{r-\delta, s-\theta}(x) - \langle \eta \rangle \langle EI \rangle F_{rs}^*;$$

$$F_{rs}^{(2)} = -\bar{\kappa} \sum_{\delta=0}^r \sum_{\theta=0}^s (a_{\delta\theta} + ip_{\delta\theta}) W_{r-\delta, s-\theta}(x) - [\bar{\eta} \langle EI \rangle + \langle \eta \rangle \overline{EI}] F_{rs}^*;$$

$$F_{rs}^{(3)} = -\overline{EI} \bar{\eta} F_{rs}^*;$$

$$\begin{aligned} F_{rs}^* &= |\lambda_0 - \omega|^{-3} \left\{ -i\omega M W_{rs}^{IV}(x) + \sum_{\delta=0}^r \sum_{\theta=0}^s \left[(M a_{\delta\theta} + 3i\lambda_0^2 p_{\delta\theta}) W_{r-\delta, s-\theta}^{IV}(x) - \right. \right. \\ &\quad - \sum_{\alpha=0}^{\delta} \sum_{\beta=0}^{\theta} (N a_{\alpha\beta} + 3i\lambda_0 p_{\alpha\beta}) p_{r-\delta, s-\theta} W_{\delta-\alpha, \theta-\beta}^{IV}(x) + \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\alpha=0}^{\delta} \sum_{\beta=0}^{\theta} \sum_{m=0}^{\delta} \sum_{n=0}^{\theta} p_{mn} p_{r\nu} (a_{\alpha\beta} + ip_{\alpha\beta}) W_{\delta-\alpha, \theta-\beta}^{IV}(x) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\gamma = r - \delta - m, \quad \nu = s - \theta - n;$$

$$G_{rs}^{(1)} = -\langle \kappa_1 \rangle \sum_{\delta=0}^r \sum_{\theta=0}^s (a_{\delta\theta} + ip_{\delta\theta}) W'_{r-\delta, s-\theta}(x) - \langle \eta \rangle \langle EI \rangle G_{rs}^*;$$

$$G_{rs}^{(2)} = -\kappa_1 \sum_{\delta=0}^r \sum_{\theta=0}^s (a_{\delta\theta} + ip_{\delta\theta}) W'_{r-\delta, s-\theta}(x) - [\langle \eta \rangle \overline{EI} + \bar{\eta} \langle EI \rangle] G_{rs}^*;$$

$$G_{rs}^{(3)} = -\bar{\eta} \overline{EI} G_{rs}^*;$$

$$P_{rs}^{(1)} = -\langle \kappa_2 \rangle \sum_{\delta=0}^r \sum_{\theta=0}^s (a_{\delta\theta} + ip_{\delta\theta}) W''_{r-\delta, s-\theta}(x) - \langle \eta \rangle \langle EI \rangle P_{rs}^*;$$

$$P_{rs}^{(2)} = -\bar{\kappa}_2 \sum_{\delta=0}^r \sum_{\theta=0}^s (a_{\delta\theta} + ip_{\delta\theta}) W''_{r-\delta, s-\theta}(x) - [\langle \eta \rangle \overline{EI} + \bar{\eta} \langle EI \rangle] P_{rs}^*;$$

$$P_{rs}^{(3)} = -\bar{\eta} \overline{EI} P_{rs}^*;$$

здесь G_{rs}^* и P_{rs}^* получаются из F_{rs}^* заменой W^{IV} на W' и W'' соответственно при $x = l$.

Отметим, что в (16) отсутствуют члены, содержащие $W_{rs}(x)$ и $p_{rs} - ia_{rs}$, в чем легко убедиться, написав подробно выражения (17) и подставив их в равенства (16).

При $r = s = 0$ из (13) — (15) имеем порождающую линейную краевую задачу с коэффициентами в уравнениях и краевых условиях, равными их средним значениям. Решения последующих задач ($r, s > 0$) дают добавки к частотам собственных колебаний λ_0 , $a_0 = 0$ и к формам колебаний $W_{00}(x)$ порождающей системы.

Предположим теперь, что последовательно решены все краевые задачи (13) — (15) для приближений с индексами, представленными матрицей

$$\begin{array}{c} \rightarrow \mu_1 \\ \downarrow \\ \mu_2 \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} 00 & 01 & 02 & \dots & 0s \\ 10 & 11 & 12 & \dots & 1s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r0 & r1 & r2 & \dots & rs \end{bmatrix},$$

за исключением r, s -й задачи, и что известны все значения поправок к частотам p_{ik} , a_{ik} функций $W_{ik}(x)$ и их производных. Таким образом, известны выражения (16) для функций θ_{rs} , θ_{1rs} и θ_{2rs} . Получим рекуррентные формулы для определения частотных (p_{rs} , a_{rs}) и амплитудных $\{W_{rs}(x)\}$ добавок к порождающей системе.

Решение уравнения (13) с учетом (14) напишем в виде

$$W_{rs}(x) = C_{rs} Y_3(k_0 x) + D_{rs} Y_4(k_0 x) + 2\lambda_0 \langle \rho \rangle \times \\ \times \langle EI \rangle^{-1} (p_{rs} - ia_{rs}) \Phi_{00}(k_0 x) + \Psi_{rs}(k_0 x), \quad (18)$$

где C_{rs} , D_{rs} — некоторые комплексные постоянные;

$$\Phi_{00}(k_0 x) = \int_0^x Y_4[k_0(x - \xi)] W_{00}(\xi) d\xi \quad \text{и} \quad \Psi_{rs}(k_0 x) = \\ = \langle EI \rangle^{-1} \int_0^x Y_4[k_0(x - \xi)] \theta_{rs}(\xi) d\xi.$$

Подставляя (18) в краевые условия (15), получим

$$\begin{aligned} A_{11} C_{rs} + A_{12} D_{rs} &= (p_{rs} - ia_{rs}) b_1 + f_{1rs}, \\ A_{21} C_{rs} + A_{22} D_{rs} &= (p_{rs} - ia_{rs}) b_2 + f_{2rs}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \langle EI \rangle Y_1 - KY_2, & A_{12} &= \langle EI \rangle Y_2 - KY_3, \\
 A_{21} &= \langle EI \rangle k_0^4 Y_4 - c^* Y_3, & A_{22} &= \langle EI \rangle Y_1 - c^* Y_4, \\
 b_1 &= 2 \langle \rho \rangle \langle EI \rangle^{-1} \lambda_0 [K \Phi_{00}' - \langle EI \rangle \Phi_{00}'' + W_{00}' \partial K / \partial \lambda_0], \\
 b_2 &= 2 \langle \rho \rangle \langle EI \rangle^{-1} \lambda_0 [c^* \Phi_{00} - \langle EI \rangle \Phi_{00}'' + W_{00} \partial c^* / \partial \lambda_0], \\
 f_{1rs} &= - \langle EI \rangle \Psi_{rs}'' + K \Psi_{rs}' + \theta_{1rs}, \\
 f_{2rs} &= - \langle EI \rangle \Psi_{rs}''' + c^* \Psi_{rs}'' + \theta_{2rs},
 \end{aligned} \tag{20}$$

причем b_1, b_2 — действительные, а f_{1rs}, f_{2rs} — комплексные величины. В (20) все функции взяты при $x = l$.

Уравнение частот порождающей системы будет

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0.$$

Используя условие совместности уравнений (19), получим

$$p_{rs} - ia_{rs} = - (A_{22}f_{1rs} - A_{12}f_{2rs})(A_{22}b_1 - A_{12}b_2)^{-1}. \tag{21}$$

Найдем форму колебаний для $C_{rs} = 1 + i$. В этом случае с учетом (19) напишем выражение (18) в виде

$$\begin{aligned}
 W_{rs}(x) &= (1 + i) [Y_3(k_0x) - A_{11}A_{12}^{-1}Y_4(k_0x)] + [(p_{rs} - ia_{rs})b_1 + f_{1rs}] \times \\
 &\times A_{12}^{-1}Y_4(k_0x) + 2\lambda_0 \langle \rho \rangle \langle EI \rangle^{-1} (p_{rs} - ia_{rs}) \Phi_{00}(k_0x) + \Psi_{rs}(k_0x). \tag{22}
 \end{aligned}$$

Отделим вещественные и мнимые части в (21) и (22)

$$\begin{aligned}
 p_{rs} &= - (A_{22} \operatorname{Re} f_{1rs} - A_{12} \operatorname{Re} f_{2rs})(A_{22}b_1 - A_{12}b_2)^{-1}, \\
 a_{rs} &= (A_{22} \operatorname{Im} f_{1rs} - A_{12} \operatorname{Im} f_{2rs})(A_{22}b_1 - A_{12}b_2)^{-1},
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} W_{rs}(x) &= Y_3(x) - (A_{11} - p_{rs}b_1 - \operatorname{Re} f_{1rs}) A_{12}^{-1} Y_4(x) + 2\lambda_0 \langle \rho \rangle \langle EI \rangle^{-1} \times \\
 &\times p_{rs} \Phi_{00}(x) + \operatorname{Re} \Psi_{rs}(x), \quad \operatorname{Im} W_{rs}(x) = Y_3(x) - (A_{11} + a_{rs}b_1 - \\
 &- \operatorname{Im} f_{1rs}) A_{12}^{-1} Y_4(x) - 2\lambda_0 \langle \rho \rangle \langle EI \rangle^{-1} a_{rs} \Phi_{00}(x) + \operatorname{Im} \Psi_{rs}(x). \tag{24}
 \end{aligned}$$

Вследствие случайной природы параметров (5) рассматриваемой системы частот собственных колебаний λ , a и формы колебаний $W(x)$ будут случайными величинами. Их математические ожидания определяются решением последовательности краевых задач (13) — (15) для $r = 0, s = 0, 1, 2, \dots$ Таким образом,

$$\langle \lambda \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} p_{0s}, \quad \langle a \rangle = \sum_{s=1}^{\infty} a_{0s}, \quad \langle W(x) \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} W_{0s}(x). \tag{25}$$

В большинстве случаев достаточно ограничиться первым приближением, и вместо (25) использовать численные значения в виде:

$$\langle \lambda \rangle = \lambda_0 + p_{01}, \quad \langle a \rangle = a_{01}, \quad \langle W(x) \rangle = W_{00}(x) + W_{01}(x),$$

Порядок определения дисперсий частот λ , a и форм колебаний $W(x)$ покажем на примере двух случайных параметров из (5). Пусть, например, случайными являются ρ, m , остальные параметры полагаем детерминированными, следовательно, $\overline{EI}, \overline{K}_1, \overline{K}_0, \overline{c}_1, \overline{c}_2, \overline{\kappa}, \overline{\kappa}_1, \overline{\kappa}_2$ и $\overline{\eta}$ равны нулю. Обозначим

$$\begin{aligned}
 p &= \sum_{s=0}^{\infty} p_{1s}, \quad \alpha = \sum_{s=1}^{\infty} a_{1s}, \quad u(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \operatorname{Re} W_{1s}(x), \\
 v(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \operatorname{Im} W_{1s}(x)
 \end{aligned} \tag{26}$$

(еще раз отметим, что достаточно ограничиться членами рядов до $s = 1$ включительно). Снабдим величины (26) двумя индексами: ρm , $m\rho$, $\rho\rho$; mm в знак того, что эти величины определяются с помощью рекуррентных зависимостей (23), (24); при $\bar{\rho} = \sqrt{K_{\rho m}}$, $\bar{m} = 0$; $\bar{\rho} = 0$, $\bar{m} = \sqrt{K_{m\rho}}$; при $\bar{\rho} = \sqrt{D[\rho]}$, $\bar{m} = 0$; $\bar{\rho} = 0$, $\bar{m} = \sqrt{D[m]}$; здесь $K_{\rho m} = K_{m\rho}$ — корреляционные моменты второго порядка, $D[\rho]$, $D[m]$ — дисперсии соответствующих случайных величин, тогда дисперсии частот и форм колебаний определяются по формулам

$$D[\lambda] = p_{\rho m}^2 + p_{m\rho}^2 + p_{\rho\rho}^2 + p_{mm}^2,$$

$$D[a] = \alpha_{\rho m}^2 + \alpha_{m\rho}^2 + \alpha_{\rho\rho}^2 + \alpha_{mm}^2, \quad (27)$$

$$D[\operatorname{Re} W(x)] = u_{\rho m}^2(x) + u_{m\rho}^2(x) + u_{\rho\rho}^2(x) + u_{mm}^2(x),$$

$$D[\operatorname{Im} W(x)] = v_{\rho m}^2(x) + v_{m\rho}^2(x) + v_{\rho\rho}^2(x) + v_{mm}^2(x).$$

Формулы (27) нетрудно обобщить на случай, когда все параметры (5) являются случайными.

Предлагаемая процедура определения вероятностных характеристик гироскопических систем, близких к консервативным, может быть без изменения использована в случае, когда малые диссипативные силы представлены нелинейными зависимостями.

При исследовании гироскопической системы, представленной многоопорным ротором, построение решения для свободных колебаний методом двух малых параметров необходимо проводить совместно с методом начальных параметров в матричной форме. Общая система построения решений остается прежней, однако структура формул будет более сложной.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ф. Зейтман, Л. А. Таран. Применение метода малого параметра для исследования колебаний неконсервативных упругих гироскопических систем. — Сб. «Колебания и балансировка роторных систем». М., «Наука», 1974.
2. М. Я. Кушуль. Устойчивость периодических решений квазилинейных гироскопических систем с распределенными и сосредоточенными параметрами. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
3. Е. Гедгаудайте, К. Рагульскис. Метод двух малых параметров для исследования динамики механизмов при вибрирующем основании. — *Zagadnienia drągań nieliniowych*, 1973, N 4.

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. Б. ЗЕЛЕНСКИЙ, М. Ф. ЗЕЙТМАН

При изучении колебаний гироскопических систем с распределенными и сосредоточенными случайными параметрами особый интерес представляют квазилинейные системы, поскольку изменение их параметров может оказать значительное влияние на ожидаемое поведение отдельных объектов.

Для линейных гироскопических систем со случайными по ансамблю параметрами в [1] предложен способ определения ожидаемых динамических характеристик, основанный на использовании метода малого параметра. Аналогичный прием может быть применен и при изучении некоторых квазилинейных гиросистем.

В настоящей работе рассматриваются вынужденные периодические колебания квазилинейных упругих гироскопических систем со случайными распределенными и сосредоточенными параметрами. Их поведение представляет собой смешанную n -точечную граничную задачу с $n + 1$ квазилинейными условиями сопряжения в местах расположения сосредоточенных элементов со случайными характеристиками. Случайные изменения всех величин в гиросистеме не выходят за определенные, достаточно малые интервалы, что позволяет применять метод малого параметра.

Способ определения периодических режимов колебаний таких систем с детерминированными параметрами предложен в работе [2]. Представленная ниже процедура получения периодических решений отличается от изложенной в [2]. Система уравнений для определения амплитуд и фаз колебаний в этом случае имеет более простой вид, что является существенным при определении моментных характеристик периодических режимов.

Квазилинейные гироскопические системы с распределенными и сосредоточенными параметрами, как правило, находятся под воздействием возмущающих периодических сил, частоты которых кратны угловой скорости ω ротора гиросистемы. Изменчивость конструктивных параметров, появляющаяся в процессе изготовления отдельных экземпляров машин из некоторого ансамбля, приводит к отклонению динамических характеристик от их номинальных значений. Поэтому возникает необходимость в определении моментных характеристик периодических режимов таких систем с периодом $T = 2\pi/\omega$.

Пусть перемещение некоторого сечения гироскопической системы характеризуется комплексными функциями $w_m(\xi, \tau) = u_m(\xi, \tau) + iv_m(\xi, \tau)$, которые на участке $0 \leq \xi \leq 1$ удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$\alpha_{1m} \partial^4 w_m / \partial \xi^4 + \alpha_{2m} \alpha_{8m}^4 a_m^2 \partial^2 w_m / \partial \tau^2 + \alpha_{13m} \alpha_{8m}^4 a_m^2 \partial w_m / \partial \tau = \alpha_{2m} \alpha_{8m}^4 a_m^2 \omega_*^2 \langle \varepsilon(\xi) \rangle \alpha_{9m}(\xi) e^{i[\omega_* \tau + \langle \Psi \rangle + \alpha_{10m}(\xi)]} \quad (1)$$

и нелинейным условиям сопряжения при $\xi_{m+1} = 0$, $\xi_m = 1$:

$$w_{m+1} = w_m, \quad \alpha_{8m} \partial w_{m+1} / \partial \xi = \alpha_{8m+1} \sigma_m \partial w_m / \partial \xi,$$

$$\begin{aligned} \partial^2 w_{m+1} / \partial \xi^2 = & \pi_m \sigma_m^2 \{ \alpha_{1m} \alpha_{1m+1}^{-1} \alpha_{8m}^{-2} \alpha_{8m+1}^2 \partial^2 w_m / \partial \xi^2 + \alpha_{8m+1}^2 \alpha_{1m+1}^{-1} \alpha_{8m}^{-1} \times \\ & \times [\alpha_{3m} \eta_{1m} a_m^2 \partial^3 w_m / \partial \xi \partial \tau^2 - i \omega_* \alpha_{4m} \eta_{0m} a_m^2 \partial^2 w_m / \partial \xi \partial \tau + \alpha_{5m} \delta_{2m} \partial w_m / \partial \xi + \\ & + \alpha_{14m} a_m^2 \alpha_{1m} \partial^2 w_m / \partial \xi \partial \tau] + \alpha_{8m+1}^2 \alpha_{1m+1}^{-1} \langle l_m \rangle^2 \langle EI_m \rangle^{-1} [L_m^{(1)} (|w_m|) w_m |w_m|^{-1} + \\ & + L_m^{(2)} (|\partial w_m / \partial \xi|) (\partial w_m / \partial \xi) | \partial w_m / \partial \xi |^{-1}] \}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \partial^3 w_{m+1} / \partial \xi^3 = & \pi_m \sigma_m^3 \{ \alpha_{1m} \alpha_{1m+1}^{-1} \alpha_{8m}^{-3} \alpha_{8m+1}^3 \partial^3 w_m / \partial \xi^3 - \alpha_{1m+1}^{-1} \alpha_{8m+1}^3 \times \\ & \times [\alpha_{6m} \gamma_m a_m^2 \partial^2 w_m / \partial \tau^2 + \alpha_{7m} \delta_{1m} w_m + \alpha_{15m} \alpha_{2m} a_m^2 \partial w_m / \partial \tau] - \\ & - \alpha_{8m+1}^3 \alpha_{8m+1}^3 \langle l_m \rangle \langle EI \rangle^{-1} [Q_m^{(1)} (|w_m|) w_m |w_m|^{-1} + \\ & + Q_m^{(2)} (|\partial w_m / \partial \xi|) (\partial w_m / \partial \xi) | \partial w_m / \partial \xi |^{-1} + \\ & + \alpha_{6m} \alpha_{10m} \alpha_{8m}^3 \alpha_{1m+1}^{-1} \gamma_m a_m^2 \omega_*^2 \langle \varepsilon_m \rangle e^{i[\omega_* \tau + \alpha_{12m} \langle \Psi_{1m} \rangle]} \}. \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \langle l_{m+1} \rangle / \langle l_m \rangle, & \pi_m &= \langle EI_m \rangle / \langle EI_{m+1} \rangle; \\ a_m^2 &= \langle EI_1 \rangle \langle \rho_m \rangle \langle l_m \rangle^4 / \langle EI_m \rangle \langle \rho_1 \rangle \langle l_1 \rangle^4; \\ \omega_0^2 &= \langle EI_1 \rangle / \langle \rho_1 \rangle \langle l_1 \rangle^4, & \omega_* &= \omega / \omega_0, & \gamma_m &= \langle m_m \rangle / \langle \rho_m \rangle \langle l_m \rangle; \\ \delta_{1m} &= \langle c_{1m} \rangle \langle l_m \rangle^3 / \langle EI_m \rangle, & \delta_{2m} &= \langle c_{2m} \rangle \langle l_m \rangle / \langle EI_m \rangle; \\ \eta_{1m} &= \langle K_{1m} \rangle / \langle \rho_m \rangle \langle l_m \rangle^3, & \eta_{0m} &= \langle K_{0m} \rangle / \langle \rho_m \rangle \langle l_m \rangle^3; \\ \alpha_{1m} &= EI_m / \langle EI_m \rangle, & \alpha_{2m} &= \rho_m / \langle \rho_m \rangle, & \alpha_{3m} &= K_{1m} / \langle K_{1m} \rangle; \\ \alpha_{4m} &= K_{0m} / \langle K_{0m} \rangle, & \alpha_{5m} &= c_{2m} / \langle c_{2m} \rangle, & \alpha_{6m} &= m_m / \langle m_m \rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{7m} &= c_{1m}/\langle c_{1m} \rangle, & \alpha_{8m} &= l_m/\langle l_m \rangle, & \alpha_{9m} &= \varepsilon_m(\xi)/\langle \varepsilon_m(\xi) \rangle; \\ \alpha_{10m} &= \varepsilon_{1m}/\langle \varepsilon_{1m} \rangle, & \alpha_{11m} &= \psi_m(\xi)/\langle \psi_m(\xi) \rangle, & \alpha_{12m} &= \psi_{1m}/\langle \psi_{1m} \rangle; \\ \alpha_{13m} &= \kappa/\langle \kappa \rangle, & \alpha_{14m} &= \kappa_1/\langle \kappa_1 \rangle, & \alpha_{15m} &= \kappa_2/\langle \kappa_2 \rangle.\end{aligned}$$

Угловыми скобками обозначены средние по ансамблю значения параметров гиросистемы.

В уравнениях (1) и (2) заданные функции $L_m^{(k)}, Q_m^{(k)}$ ($k = 1, 2$) — непрерывные и аналитические относительно $w_m(\xi, \tau)$ и их частных производных $w_m(\xi, \tau)$. Кроме того, они являются функциями некоторого конечного числа параметров α_j ($j = 1, \dots, s$). Коэффициенты $\xi, l_m, EI_m, \rho_m, m_m, K_{1m}, K_{0m}, c_{1m}, c_{2m}, \kappa_1, \kappa_2$ — постоянные положительные величины, обозначающие соответственно безразмерную координату участка ротора, длину, изгибную жесткость и массу единицы длины ротора, сосредоточенную массу, экваториальный и полярный моменты инерции диска, линейную и угловую жесткости, коэффициенты линейного и углового внешнего трения; $\tau = \omega_0 t$ — безразмерное время; ω_0 — детерминированная скорость вращения.

Случайные безразмерные параметры α_{jm} ($j = 1, 2, \dots, s$) представим в виде:

$$\alpha_{jm} = 1 + \mu \bar{\alpha}_{jm},$$

где $\bar{\alpha}_{jm}$ — величина отклонения параметра α_{jm} ; μ — малый параметр, который может быть выбран вполне произвольно.

При $\mu = 0$, когда $\alpha_{jm} = \langle \alpha_{jm} \rangle = 1$, получаем обычную детерминированную граничную задачу, описывающую поведение единичного объекта из рассматриваемого ансамбля гироскопических систем с распределенными и сосредоточенными параметрами.

Определению моментных характеристик периодических режимов колебаний предшествует построение периодического решения квазилинейной n -точечной граничной задачи. Поэтому покажем процедуру определения амплитуд и фаз периодических колебаний с периодом $T = 2\pi/\omega$.

Положим $\mu = 0$. Тогда дифференциальные уравнения движения на участке $0 \leq \xi \leq 1$ примут вид:

$$\partial^4 w_m / \partial \xi^4 + a_m^2 \partial^2 w_m / \partial \tau^2 + \kappa_m \partial w_m / \partial \tau = a_m^2 \omega_*^2 \varepsilon_m(\xi) e^{i[\omega_* \tau + \psi(\xi)]} \quad (3)$$

условия сопряжения при $\xi_{m+1} = 0, \xi_m = 1$:

$$w_{m+1} = w_m, \quad \partial w_{m+1} / \partial \xi = \sigma_m \partial w_m / \partial \xi,$$

$$\begin{aligned}\partial^2 w_{m+1} / \partial \xi^2 &= \pi_m \sigma_m^2 \{ \partial^2 w_m / \partial \xi^2 + \eta_{1m} a_m^2 \partial^3 w_m / \partial \xi \partial \tau - \\ &- i \omega_* \eta_{0m} a_m^2 \partial^2 w_m / \partial \xi \partial \tau + \delta_{2m} \partial w_m / \partial \xi + a_m^2 \kappa_{1m} \partial^2 w_m / \partial \xi \partial \tau^2 + \\ &+ l_m^2 (EI_m)^{-1} [L_m^{(1)}(|w_m|) w_m |w_m|^{-1} + \\ &+ L_m^{(2)}(|\partial w_m / \partial \xi|) (\partial w_m / \partial \xi) |\partial w_m / \partial \xi|^{-1}] \},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial^3 w_{m+1} / \partial \xi^3 &= \pi_m \sigma_m^3 \{ \partial^3 w_m / \partial \xi^3 - (\gamma_m a_m^2 \partial^2 w_m / \partial \tau^2 + \delta_{1m} w_m + \kappa_{2m} a_m^2 \partial w_m / \partial \xi) - \\ &- l_m^3 (EI_m)^{-1} [Q_m^{(1)}(|w_m|) w_m |w_m|^{-1} + Q_m^{(2)}(|\partial w_m / \partial \xi|) (\partial w_m / \partial \xi) |\partial w_m / \partial \xi|^{-1}] + \\ &+ \gamma_m a_m^2 \omega_*^2 \varepsilon_{1m} e^{i(\omega_* \tau + \psi_{1m})} \}.\end{aligned} \quad (4)$$

Краевые условия на концах ротора для простоты будем считать линейными. Решение граничной задачи (3), (4) разыскиваем в виде

$$w_m(\xi, \tau) = W_m(\xi) e^{i\omega_* \tau}.$$

Тогда получим следующее дифференциальное уравнение для функции $W_m(\xi)$:

$$W_m^{IV}(\xi) - k_0^4 W_m(\xi) = a_m^2 \omega_*^2 \varepsilon(\xi) e^{i\psi_m(\xi)} \quad (5)$$

и квазилинейные условия сопряжения при $\xi_{m+1} = 0$, $\xi_m = 1$:

$$\begin{aligned} W_{m+1} &= W_m, & W'_{m+1} &= W'_m, \\ W''_{m+1} &= \pi_m \sigma_m^2 \{ W''_m + K_m(\omega_*) W'_m + L_{*m}^{(1)}(|W_m|) W_m |W_m|^{-1} + \\ &\quad + L_{*m}^{(2)}(|W'_m|) W'_m |W'_m|^{-1} \}, \\ W'''_{m+1} &= \pi_m \sigma_m^3 \{ W'''_m + c_m^*(\omega_*) W_m - Q_{*m}^{(1)}(|W_m|) W_m |W_m|^{-1} - \\ &\quad - Q_{*m}^{(2)}(|W'_m|) W'_m |W'_m|^{-1} + \gamma_m a_m^2 \omega_*^2 \varepsilon_m e^{i\psi_m} \}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} K_m(\omega_*) &= (\eta_{0m} - \eta_{1m}) a_m^2 \omega_*^2 + i a_m^2 \omega_* \kappa_1 + \delta_{2m}, \\ c_m^*(\omega_*) &= \gamma_m a_m^2 \omega_*^2 - i a_m^2 \omega_* \kappa_2 - \delta_{1m}. \end{aligned}$$

Напишем условия сопряжения (6) в матричном виде, для чего введем матрицу-столбец $Z_m(\xi)$, компонентами которой являются $W_m(\xi)$, $W'_m(\xi)$, $W''_m(\xi)$, $W'''_m(\xi)$. При $\xi_{m+1} = 0$, $\xi_m = 1$ имеем:

$$Z_{m+1} = A_m Z_m + P_m + \varepsilon_m \quad (m = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

где матрица четвертого порядка $A_m(\xi)$ является матрицей перехода от m -го к $m+1$ -му участку гиросистемы без учета нелинейных членов, а матрицы P_m и ε_m соответственно равны

$$\begin{aligned} P_m &= \{ 0, 0, \pi_m \sigma_m^2 [L_{*m}^{(1)}(|W_m|) W_m |W_m|^{-1} + L_{*m}^{(2)}(|W'_m|) W'_m |W'_m|^{-1}], \\ &\quad - \pi_m \sigma_m^3 [Q_{*m}^{(1)}(|W_m|) W_m |W_m|^{-1} + Q_{*m}^{(2)}(|W'_m|) W'_m |W'_m|^{-1}] \}, \\ \varepsilon_m &= \{ 0, 0, 0, \gamma_m a_m^2 \omega_*^2 \varepsilon_m e^{i\psi_m} \}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$h_m(\xi) = \{ W_m(\xi), W'_m(\xi) \}$$

и перепишем (7) в виде соотношения блочных матриц

$$\begin{bmatrix} h_{m+1}(0) \\ h''_{m+1}(0) \end{bmatrix} = [d_{mik}] \begin{bmatrix} h_m(1) \\ h''_m(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad (8)$$

где

$$d_{m11}, \quad d_{m12} = 0, \quad d_{m21} + T_m, \quad d_{m22},$$

а

$$T_m = \begin{bmatrix} \pi_m \sigma_m^2 L_{*m}^{(1)}(|W_m|) |W_m|^{-1} & \pi_m \sigma_m^2 L_{*m}^{(2)}(|W'_m|) |W'_m|^{-1} \\ -\pi_m \sigma_m^3 Q_{*m}^{(1)}(|W_m|) |W_m|^{-1} & -\pi_m \sigma_m^3 Q_{*m}^{(2)}(|W'_m|) |W'_m|^{-1} \end{bmatrix}$$

Квадратные матрицы второго порядка d_{mik} образованы как блоки при симметричном разбиении матрицы перехода A_m .

Матричные уравнения (8) содержат четыре группы неизвестных: $h_i(0)$, $h'_i(0)$, $h_j(1)$, $h'_j(1)$ ($i = 2, 3, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n-1$). Принимая за основные неизвестные значения амплитуды и их первые производные в концах участков $W_j(1)$, $W'_j(1)$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$), а также $W_1(0)$, $W'_1(0)$, $W_n(1)$, $W'_n(1)$, для исключения неизвестных $h_i(0)$, $h'_i(0)$ ($i = 2, 3, \dots, n$) в (8) воспользуемся методом начальных параметров. Представив решение краевой задачи (5), (6) в виде

$$\begin{aligned} W_m(\xi) &= W_m(0) Y_{1m}(\xi) + W'_m(0) Y_{2m}(\xi) + W''_m(0) Y_{3m}(\xi) + \\ &\quad + W'''_m(0) Y_{4m}(\xi) + \Phi_m(\xi), \end{aligned} \quad (9)$$

где $Y_{1m}, Y_{2m}, Y_{3m}, Y_{4m}$ — функции Крылова, а $\Phi_m(\xi)$ — частное решение (5), будем иметь

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_m(1) \\ \mathbf{h}_m''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1m} & \mathbf{X}_{2m} \\ k_m^4 \mathbf{X}_{2m} & \mathbf{X}_{1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_m(0) \\ \mathbf{h}_m''(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_m \\ \Phi_m'' \end{bmatrix}, \quad \Phi_m = \begin{bmatrix} \Phi_m \\ \Phi_m'' \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $\mathbf{X}_{1m}, \mathbf{X}_{2m}$ — квадратные матрицы, составленные из значений функций Крылова при $\xi = 1$, а $\Phi_m = \Phi_m(1), \Phi_m' = \Phi_m'(1)$.

Перепишем (10) в виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2m} & 0 \\ \mathbf{X}_{1m} - \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_m''(0) \\ \mathbf{h}_m''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{X}_{1m} & \mathbf{E}_2 \\ -k_m^4 \mathbf{X}_{2m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_m(0) \\ \mathbf{h}_m(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi_m \\ \Phi_m'' \end{bmatrix},$$

где \mathbf{E}_2 — единичная матрица второго порядка.

Допустим, что при определенных значениях параметров гироскопической системы матрица \mathbf{X}_{2m} не является особенной. Тогда после несложных преобразований найдем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_m''(0) \\ \mathbf{h}_m''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{X}_{2m}^{-1} \mathbf{X}_{1m} & \mathbf{X}_{2m}^{-1} \\ -\mathbf{X}_{1m} \mathbf{X}_{2m}^{-1} \mathbf{X}_{1m} + k_m^4 \mathbf{X}_{2m} & \mathbf{X}_{1m} \mathbf{X}_{2m}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_m(0) \\ \mathbf{h}_m(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2m}^{-1} \Phi_m \\ \mathbf{X}_{1m} \mathbf{X}_{2m}^{-1} \Phi_m - \Phi_m'' \end{bmatrix} \quad (11)$$

Теперь, решая систему (8), предварительно подставив в нее (9) и (11), получим систему алгебраических нелинейных уравнений для определения $\mathbf{h}_j(1)$ ($j = 1, 2, \dots, n$):

$$\mathbf{a}^{(m+1)} \mathbf{h}_{m+1}(1) + [\mathbf{b}^{(m)} - \mathbf{T}_m] \mathbf{h}_m(1) + \mathbf{c}^{(m-1)} \mathbf{h}_{m-1}(1) = \mathbf{d}^{(m)} \quad (m = 2, 3, \dots, n-1); \quad (12)$$

$$\mathbf{a}^{(m+1)} = \mathbf{X}_{2m+1}^{-1}, \quad \mathbf{b}^{(m)} = -(\mathbf{X}_{2m+1}^{-1} \mathbf{X}_{1m+1} d_{11m} + d_{22m} \mathbf{X}_{1m} \mathbf{X}_{2m}^{-1} + d_{21m});$$

$$\mathbf{c}^{(m-1)} = -d_{22m} (k_m^4 \mathbf{X}_{2m} - \mathbf{X}_{1m} \mathbf{X}_{2m}^{-1} \mathbf{X}_{1m}) d_{11m-1};$$

$$\mathbf{d}^{(m)} = \mathbf{X}_{2m+1}^{-1} \Phi_{m+1} - d_{22m} (\mathbf{X}_{1m} \mathbf{X}_{2m}^{-1} \Phi_m - \Phi_m'') + \varepsilon_m.$$

Поскольку матрица-столбец $\mathbf{h}_m(1)$ ($m = 1, 2, \dots, n$) содержит две компоненты, система уравнений (12) состоит из $2(n+1)$ уравнений относительно неизвестных $W_m(1), W_m'(1)$ ($m = 1, 2, \dots, n$) и $W_1(0), W_1'(0)$.

Введем в рассмотрение действительные и мнимые части неизвестных:

$$W_j(1) = x_j + iy_j, \quad W_j'(1) = z_j + ir_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (13)$$

$$W_1(0) = x_0 + iy_0, \quad W_1'(0) = z_0 + ir_0.$$

Тогда получим систему из $4(n+1)$ действительных алгебраических нелинейных уравнений, которая может быть решена одним из численных методов. В результате будут получены значения функций и их производных в точках $\xi_m = 1$ ($m = 1, 2, \dots, n$) и $\xi_1 = 0$:

$$W_m(1) = A_m e^{i\vartheta_m}, \quad W_m'(1) = B_m e^{i\varphi_m}, \quad W_1(0) = A_0 e^{i\vartheta_0}, \quad W_1'(0) = B_0 e^{i\varphi_0}.$$

$$A_m = \sqrt{x_m^2 + y_m^2}, \quad B_m = \sqrt{z_m^2 + r_m^2}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_m = y_m/x_m, \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_m = r_m/z_m \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

Подставив (14) в (11) и учитывая (13), получим численные значения неизвестных $W_m''(1)$ и $W_m'''(1)$.

Рассмотренная процедура определения неизвестных постоянных в (9) позволяет определить форму колебаний квазилинейной гироскопической системы с распределенными и сосредоточенными параметрами.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu \neq 0$, т. е. параметры могут иметь малые отклонения от номинальных значений.

Для определения моментных характеристик периодических режимов необходимо построить систему уравнений, аналогичную (12). Процедура получения этих уравнений, описанная выше, остается неизменной, только теперь коэффициенты уравнений (12) будут функциями случайных величин α_{jm} ($j = 1, 2, \dots, s; m = 1, 2, \dots, n$) и малого параметра μ . В связи с этим матрицы $\mathbf{h}_m(1)$, $\mathbf{h}_1(0)$ представим в виде матричных рядов по степеням малого параметра

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_m(1) &= \mathbf{h}_m^{(0)}(1) + \mu \mathbf{h}_m^{(1)}(1) + \dots \\ \mathbf{h}_1(0) &= \mathbf{h}_1^{(0)}(0) + \mu \mathbf{h}_1^{(1)}(0) + \dots \end{aligned} \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

Кроме того, обозначим чертой операцию определения коэффициента при μ в разложении некоторой функции от μ . Таким образом, если

$$f(1 + \mu \bar{\alpha}_1, 1 + \mu \bar{\alpha}_2, \dots, 1 + \mu \bar{\alpha}_s) = f(1) + \mu \bar{f},$$

то

$$\bar{f} = \sum_{k=1}^s (\partial f / \partial \alpha_k)_{\alpha_k=1} \bar{\alpha}_k.$$

Систему нелинейных алгебраических уравнений, соответствующую граничной задаче (1), (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}^{(m+1)} \mathbf{h}_{m+1}^{(0)}(1) + [\mathbf{b}^{(m)} - \mathbf{T}_m] \mathbf{h}_m^{(0)}(1) + \mathbf{c}^{(m-1)} \mathbf{h}_{m-1}^{(0)}(1) + \\ &+ \mu \{ \bar{\mathbf{a}}^{(m+1)} \mathbf{h}_{m+1}^{(0)}(1) + \bar{\mathbf{c}}^{(m-1)} \mathbf{h}_{m-1}^{(0)}(1) + [\bar{\mathbf{b}}^{(m)} - \bar{\mathbf{T}}_m] \mathbf{h}_m^{(0)}(1) + \mathbf{a}^{(m+1)} \mathbf{h}_{m+1}^{(1)}(1) + \\ &+ [\mathbf{b}^{(m)} - \mathbf{T}_m] \mathbf{h}_m^{(1)}(1) + \mathbf{c}^{(m-1)} \mathbf{h}_{m-1}^{(1)}(1) \} = \mathbf{d}^{(m)} + \mu \bar{\mathbf{d}}^{(m)}, \end{aligned}$$

приравнивая члены при одинаковых степенях μ , получим

$$\mathbf{a}^{(m+1)} \mathbf{h}_{m+1}^{(0)} + [\mathbf{b}^{(m)} - \mathbf{T}_m] \mathbf{h}_m^{(0)} + \mathbf{c}^{(m-1)} \mathbf{h}_{m-1}^{(0)} = \mathbf{d}^{(m)}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}^{(m+1)} \mathbf{h}_{m+1}^{(1)} + [\mathbf{b}^{(m)} - \mathbf{T}_m] \mathbf{h}_m^{(1)} + \mathbf{c}^{(m-1)} \mathbf{h}_{m-1}^{(1)} = \bar{\mathbf{d}}^{(m)} - \\ &- [\bar{\mathbf{a}}^{(m+1)} \mathbf{h}_{m+1}^{(0)} + (\bar{\mathbf{b}}^{(m)} - \bar{\mathbf{T}}_m) \mathbf{h}_m^{(0)} + \bar{\mathbf{c}}^{(m-1)} \mathbf{h}_{m-1}^{(0)}]. \end{aligned} \quad (16)$$

Порождающие уравнения (15) полностью совпадают с (12), так как их коэффициенты определяются при $\alpha_{km} = 1$ ($k = 1, 2, \dots, s; m = 1, 2, \dots, n$). Разделяя действительную и мнимую части в (13) и решая эти уравнения, можно определить математические ожидания амплитуд и фаз периодических колебаний гиросистемы в местах расположения опор.

Решения уравнений (16) первого приближения позволяют получить добавки к амплитудам и фазам, обусловленные малыми отклонениями параметров системы. Получая эти добавки при значениях $\bar{\alpha}_{jm}$, равных вторым корреляционным моментам системы случайных величин α_{jm} ($j = 1, 2, \dots, s; m = 1, 2, \dots, n$), можно найти дисперсии форм колебаний, подобно тому, как в [4] определялись дисперсии амплитуд вынужденных колебаний ротора. В самом деле, предположим, что параметры α_{jm} являются независимыми случайными величинами по индексу m (т. е. параметры разных участков гиросистемы независимы). Пусть

$$u_m^{(1)}(\xi, \tau, \alpha_{qr}), \quad v_m^{(1)}(\xi, \tau, \alpha_{qr}) \quad (q = 1, 2, \dots, s; r = 1, 2, \dots, s)$$

есть периодические составляющие форм колебаний первого приближения, полученные в результате решения задачи при значениях

$$\bar{\alpha}_{qm} = \sqrt{\langle (\alpha_{qm} - 1)(\alpha_{rm} - 1) \rangle} \quad \text{и} \quad \bar{\alpha}_{jm} = 0 \quad (j \neq q),$$

тогда дисперсии составляющих форм колебаний определяются по формуле

$$\langle [u_m^{(1)}(\xi, \tau, \alpha_{qr})]^2 \rangle = \sum_{q,r=1}^s u_m^{(1)}(\xi, \tau, \alpha_{qr}) u_m^{(1)}(\xi, \tau, \alpha_{rq}),$$

$$\langle [v_m^{(1)}(\xi, \tau, \alpha_{qr})]^2 \rangle = \sum_{q,r=1}^s v_m^{(1)}(\xi, \tau, \alpha_{qr}) v_m^{(1)}(\xi, \tau, \alpha_{rq}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Зеленский, М. Ф. Зейтман, Л. А. Таран. Колебания гироскопических систем со случайно изменяющимися параметрами. — Сб. «Колебания и балансировка роторных систем». М., «Наука», 1974.
2. М. Я. Кушурь. Устойчивость периодических решений квазилинейных упругих гироскопических систем с распределенными и сосредоточенными параметрами. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ГИДРОТУРБИНАХ

Г. И. АНИКЕЕВ, С. И. ЧУКАЕВА

Процессы, происходящие в гидротурбинах, очень сложны и разнообразны, что обусловлено течением рабочей жидкости. Возмущения, создаваемые ее потоком, представляют собой многочастотный процесс. Так, на входе в рабочее колесо сказываются неравномерности полей давления, создаваемые спиральной камерой, направляющим аппаратом гидротурбины, колоннами статора.

На выходе действуют реактивные силы отрывного обтекания. Кроме того, на колебаниях рабочего органа гидротурбины будут сказываться любые возмущения, возникающие в проточной части турбины, например, в напорном трубопроводе или отсасывающей трубе.

Как показывают экспериментальные исследования, все составляющие пульсаций давления в общем случае нестационарны: как амплитуды, так и частоты составляющих изменяются во времени. Эти изменения носят случайный характер.

В настоящее время не представляется возможным рассчитать параметры этих случайных процессов, поэтому всю основную информацию нужно получить из эксперимента.

Наибольший интерес представляют процессы, связанные с движением рабочего колеса гидротурбины.

Основными возмущающими силами, действующими на рабочее колесо, являются гидродинамические силы, измеряемые как пульсации давления с помощью соответствующих датчиков. Датчики устанавливаются на рабочем колесе и на неподвижных стенках элементов проточной части. Очевидно, что не все пульсации давления можно считать внешними возмущающими силами; пульсации давления в межлопастном пространстве в какой-то мере обусловлены также и движением самих лопастей. Поэтому более точное представление о возмущающих силах дадут датчики давлений, расположенные в непосредственной близости от входных и выходных кромок лопастей рабочего колеса.

Исследование движения элементов рабочего колеса также представляется довольно трудным уже в силу чисто технических причин. Основную информацию о перемещениях элементов рабочего колеса получают главным образом с помощью тензодатчиков, измеряющих деформации в различных точках лопастей и обода рабочего колеса.

Кроме того, некоторую косвенную информацию о возмущающих силах и движении рабочего колеса дают измерения на неподвижных частях гидротурбины. Основные параметры жгута за рабочим колесом могут быть определены датчиками давлений, установленными в отсасывающей трубе гидротурбины под рабочим колесом. Сведения о движении рабочего колеса, например, в осевом направлении, получены при исследовании вибраций крестовины генератора или опоры подшипника. Однако основную информацию дают непосредственные измерения на рабочем колесе.

Специальных исследований по динамике радиально-осевых рабочих колес до сих пор не проводилось, и все интересующие сведения приходится извлекать из прочностных и гидравлических испытаний. Так, о характере деформаций обода судят по показаниям датчиков, наклеенных не на самом обode, а в одноименных точках различных лопастей, например вблизи корневых сечений.

Датчики давлений также не были установлены непосредственно у кромок, а располагались на некотором отдалении от них, поэтому результаты измерений представляют несколько искаженную картину процессов. Тем не менее экспериментальные данные дают основной материал о характере колебаний, а также спектральные и статистические характеристики.

Для того чтобы полностью охарактеризовать внешние возмущающие силы, необходимо проводить измерения в возможно большем числе точек, так как указанные силы, являясь случайными функциями времени, будут различными в разных точках их приложения.

Переноса результаты измерений в конечном числе точек на всю зону действия сил, мы полагаем, что характер пульсаций давлений одинаков во всех точках. Как показывают результаты эксперимента, спектральный состав и статистические характеристики в различных точках лопасти действительно близки.

В настоящей работе приведены результаты спектрального и статистического анализов колебательных процессов на модели рабочего колеса радиально-осевой гидротурбины, измерения пульсации давления в межлопастном пространстве и деформации лопасти в ее корневом сечении.

Спектрограммы пульсаций давления (рис. 1) в какой-то мере подтверждают основную спектральную картину возмущающих сил. В спектре процесса присутствуют колебания с оборотной частотой и частотой возмущений от колонны статора, но практически не заметна лопаточная частота (направляющий аппарат не создает больших неравномерностей поля давлений). Из спектрограмм видно также, что указанные выше составляющие в ряде случаев имеют боковые частоты — это говорит о нестационарности этих составляющих колебаний.

Для определения вероятностных параметров каждой из составляющих колебаний была проведена статистическая обработка осциллограмм процессов.

В результате обработки получены математические ожидания, дисперсии и корреляционные функции для отдельных режимов работы модели рабочего колеса. Нахождение указанных параметров проводилось не для мгновенных значений колебаний, а для амплитуд и периодов составляющих процесса, в данном случае — для амплитуд и периодов составляющих колебаний с оборотной и статорной частотами.

Осреднение проводилось по амплитудам и периодам одной реализации для каждого из рассмотренных режимов.

Параметры процесса	Пульсации давления		Динамические деформации	
	≈ 16	≈ 200	≈ 16	≈ 200
$f_{гц}^*$				
K_{AT}	0,177	0,215	0,384	0,251
σ_A/m_A	0,28	0,34	0,28	0,35
σ_T/m_T	0,30	0,22	0,31	0,20
$m_T, сек$	0,0290	0,0024	0,0300	0,0025
$m_A, кг/см^2$	2,11	1,29	28,3	21,7

* В первой строке таблицы приведены приближенные значения частот.

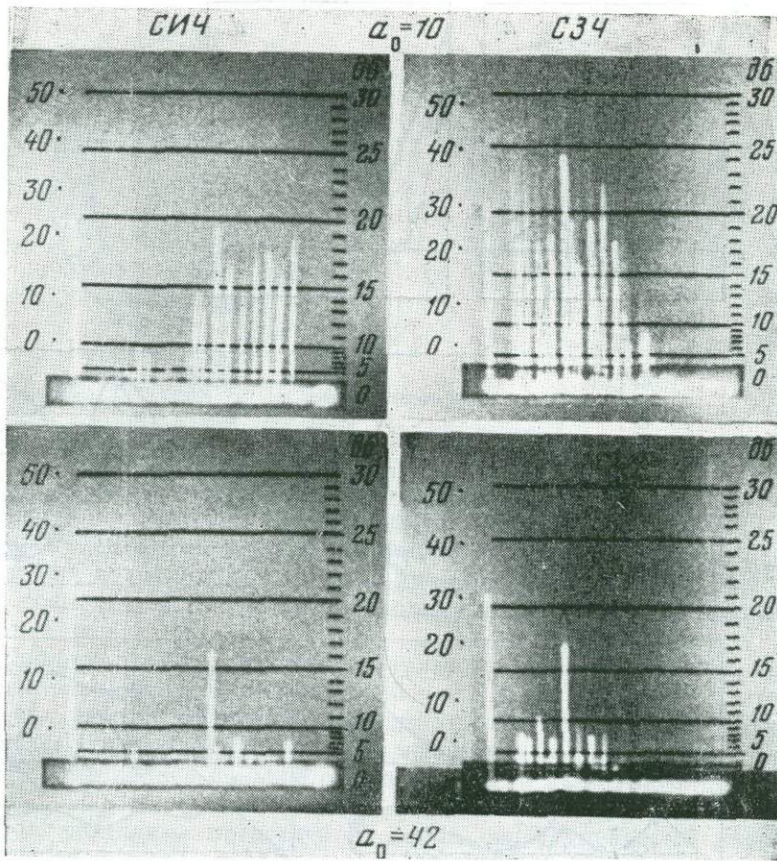


Рис. 1

В таблице приведены значения математических ожиданий и дисперсий амплитуд и периодов для составляющих колебаний с оборотной и статорной частотами для приведенных оборотов $n_i = 70$ об/мин и открытия направляющего аппарата $a_0 = 42$. Дисперсии амплитуд и периодов составляют несколько десятых от математических ожиданий.

Корреляционные функции для одной из составляющих (200 гц) пульсаций давления и динамических деформаций приведены на рис. 2, а и 2, б соответственно, жирными линиями обозначены корреляционные функции амплитуды, а штриховыми — корреляционные функции периода. Корреляционные функции как амплитуды, так и периода являются знакопеременными и быстро затухающими.

Взаимные нормированные коэффициенты корреляции амплитуды и периода имеют порядок нескольких десятых (см. таблицу), так что при статистических расчетах колебательных процессов в гидротурбинах амплитуды и период нельзя полагать независимыми и связь между ними следует учитывать.

На рис. 3 приведены семейства кривых, характеризующих тройные корреляционные функции амплитуд для оборотной (рис. 3, а) и статорной (рис. 3, б) частот в составе пульсации давления. Кривые знакопеременны, но явной тенденции приближения к оси τ не проявляют. Максимальные значения K_3 заметно меньше максимальных значений K_2 , что подтверждает известную гипотезу об уменьшении значимости корреляций с ростом их порядка.

На рис. 4 даны тройные корреляционные функции амплитуд и периодов деформаций составляющей $f \sim 200$ гц.

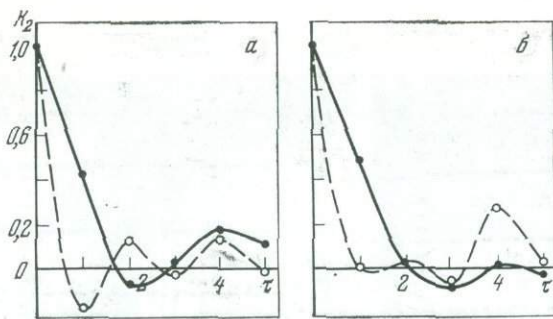


Рис. 2

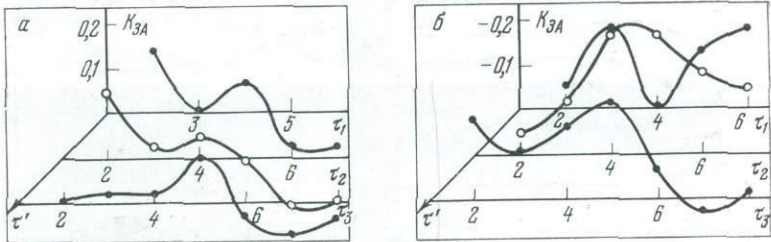


Рис. 3

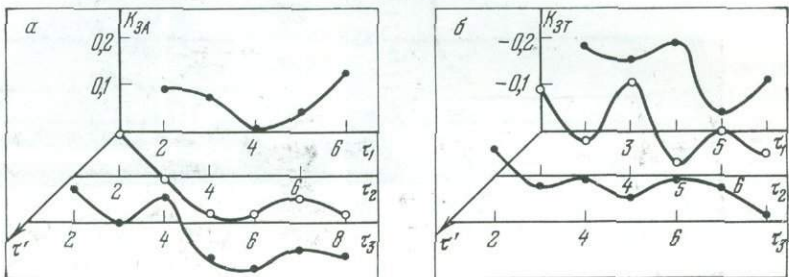


Рис. 4

Корреляционная функция амплитуды деформаций по характеру сходна с подобными корреляционными функциями пульсаций давления. Что касается тройной корреляционной функции периода, то она имеет примерно тот же вид, что и тройная корреляционная функция амплитуды, и даже проявляет некоторую тенденцию к уменьшению.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ В ЦЕНТРОБЕЖНОМ НАСОСЕ

Г. И. АНИКЕЕВ, Л. Н. ЕРМИЛОВ, Б. Н. ЗОТОВ, Э. И. КУЗОВКОВ

Совершенствование конструкций многих современных машин, в частности насосов, идет по пути увеличения рабочих скоростей и повышения удельной мощности. Эти факторы способствуют увеличению вибрационной напряженности элементов конструкций указанных машин и увеличению передачи энергии колебательной системы в окружающую среду.

Вибрации насоса в значительной степени связаны с его рабочим процессом: большинство из составляющих вибраций обусловлено гидродинамическими возмущающими силами. О характере и интенсивности указанных выше возмущающих сил судят в основном по вибрациям корпуса насоса. Ана-

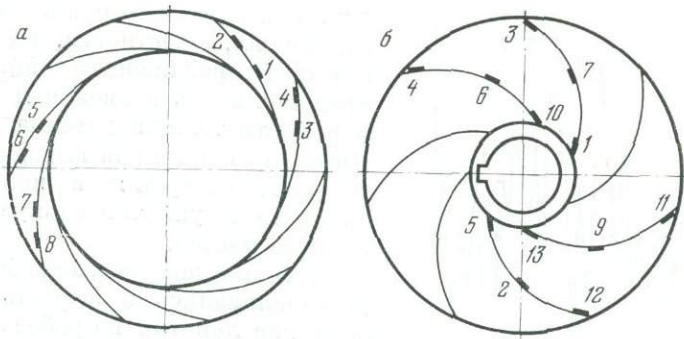


Рис. 1. Схема установки датчиков давления
 а — направляющий аппарат; б — рабочее колесо

лиз работы насоса и многочисленные экспериментальные работы по вибрациям насоса достаточно раскрывают природу источников вибраций в насосе.

Однако исследование вибраций на корпусе насоса не определяет ни места возникновения возмущений с той или иной частотой, ни пути распространения этих возмущений. Поэтому необходимо исследовать пульсации в рабочих каналах насоса.

В настоящей работе приведены результаты определений пульсаций давления в направляющем аппарате и рабочем колесе насоса на опытной установке. Стенд работал по замкнутому циклу. Вода из сборного бака подавалась во всасывающий трубопровод, а необходимое давление на всасывании ступени обеспечивалось подачей сжатого воздуха в верхнюю часть сборного бака.

Опытная установка представляет собой одноступенчатый насос. Единственное рабочее колесо располагается на свободном конце консольного вала, имеющего масляные опорные и упорный подшипники. Такая конструкция позволяет сравнительно быстро производить замену как направляющего аппарата, так и рабочего колеса насоса. Насос установлен на массивном железобетонном фундаменте на четырех резино-металлических амортизаторах. Приводной электродвигатель установлен на отдельном фундаменте и соединен с валом насоса пальцевой муфтой. Все трубопроводы присоединяются к корпусу установки через сильфонные компенсаторы.

Замер пульсаций давления в потоке жидкости производился с помощью датчиков, устанавливаемых в стенках каналов направляющего аппарата (рис. 1, а) и рабочего колеса насоса (рис. 1, б). В направляющем аппарате датчики были установлены в двух каналах, по два датчика на рабочей и нерабочей сторонах лопаток. Расположить датчики в большем количестве на

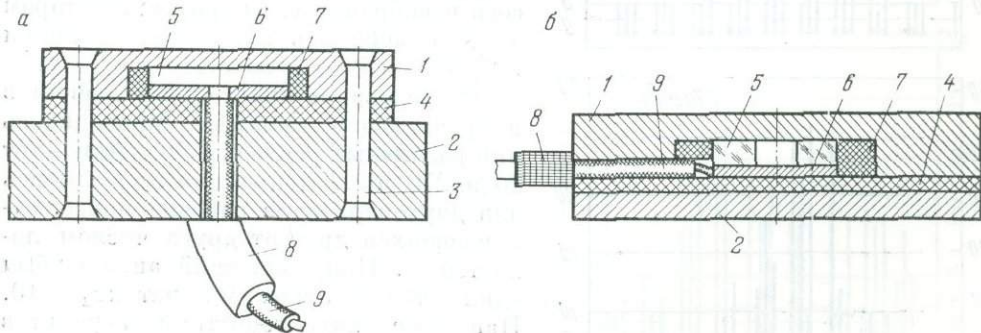


Рис. 2. Датчик давления

а — для направляющего аппарата; б — для рабочего колеса; 1 — мембрана; 2 — корпус; 3 — заклепка; 4 — прокладка; 5 — кристалл; 6 — контактное кольцо; 7 — фторопластовая шайба; 8 — экран; 9 — провод

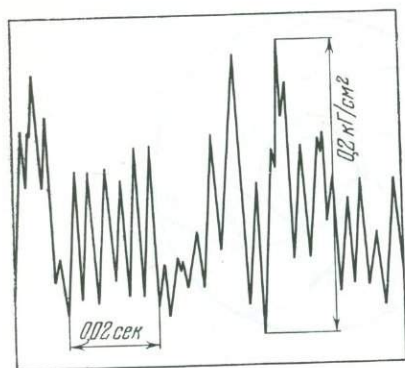


Рис. 3. Оциллограмма пульсаций давления в направляющем аппарате

ления на рабочем колесе укладывались в специальные канавки и заливались эпоксидной смолой. Концы проводов выводились через сквозное отверстие внутри вала к ртутному токосъемнику. Измерение пульсаций давления проводилось с помощью пьезоэлектрических датчиков.

Датчик состоит из мембраны, кристалла, бронзовой контактной площадки, фторопластового кольца, резиновой прокладки, металлической крышки и выводного провода. Датчики для направляющего аппарата и для рабочего колеса конструктивно несколько отличались друг от друга. Это отличие объясняется особенностями закрепления датчиков в каналах направляющего аппарата и рабочего колеса насоса. Конструкция датчиков давления приведена на рис. 2.

Сигналы с датчиков через предварительный усилитель типа *SM — 241* подавались на спектрометр типа *СЗг* и шлейфный осциллограф. Помимо этого, велась запись на магнитограф с целью обеспечения возможности повторного анализа процессов.

При исследовании пульсаций давления в насосе регистрировались также и вибрации его корпуса. Измерение вибраций проводилось в нескольких точках при помощи стандартных вибродатчиков типа *ИДК-3*.

Работа проводилась в два этапа. На первом этапе исследовались пульсации давления в направляющем аппарате насоса и вибрации его корпуса: на втором этапе измерялись пульсации давления на рабочем колесе насоса.

Исследование пульсаций давления в направляющем аппарате проводилось при различных расходах жидкости — от 20 до 270 м³/ч. Испытания проводились для двух вариантов рабочих колес, отличающихся друг от друга числом лопастей z_1 . Направляющий аппарат был один и тот же с числом лопаток $z_2 = 10$. Напорные характеристики вариантов несколько отличались друг от друга. В первом варианте ($z_1/z_2 = 9/10$) напорная характеристика имеет западающую часть в зоне расходов 0—70 м³/час при

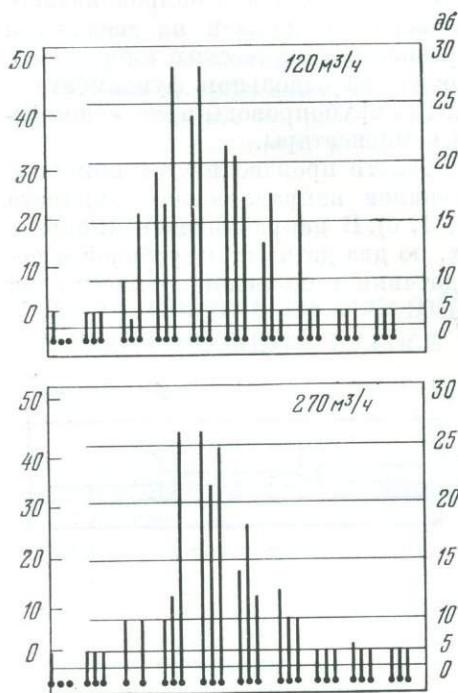


Рис. 4. Спектрограммы пульсаций давления в направляющем аппарате

к. п. д. в номинальном режиме 67,5%. Во втором варианте ($z_1/z_2 = 7/10$) напорная характеристика имеет более благоприятную форму при к. п. д. в номинальном режиме 68,5%.

Типичные осциллограммы пульсаций давления в точке установки датчика № 2 (рис. 1, а) даны на рис. 3. На осциллограммах явно преобладает лопаточная частота рабочего колеса. Отметим, что характер пульсаций давления одинаков во всех точках установки датчиков, различны лишь амплитуды.

На рис. 4 приведены спектрограммы пульсаций давления. Как следует из спектрограмм, основная энергия процесса сосредоточена в зоне лопаточной

частоты рабочего колеса $f = \frac{\omega}{2\pi} z_1$, интенсивность указанной составляющей измеряется десятками долями атмосферы. Это на 10—12 дб выше других составляющих процесса. В то же время спектр в зоне лопаточной частоты несколько размыт, что указывает на значительную нестационарность этой составляющей. Спектрограммы пульсаций давления в других точках аналогичны приведенным выше спектрограммам.

На рис. 5 даны осциллограммы вибраций корпуса насоса. Лопаточная частота (рабочего колеса) присутствует на осциллограммах, однако преобладает составляющая с оборотной частотой. Из осциллограмм нетрудно установить, что составляющая с оборотной частотой отличается некоторой нестационарностью, из чего следует, что указанная составляющая обусловлена не только чисто механическими причинами.

Анализ спектрограмм вибраций корпуса насоса также показывает, что составляющая с оборотной частотой является преобладающей для большинства спектрограмм. Это относится в равной мере к обоим испытанным колесам ($z_1 = 9$ и $z_1 = 7$) и имеет место на всех режимах работы насоса. На рис. 6 даны спектрограммы вибраций, измеренные на одном из амортизаторов корпуса. Помимо вибраций с оборотной частотой 50 гц, на большинстве спектрограмм присутствуют вибрации, порождаемые лопаточной частотой $f_1 = \frac{\omega}{2\pi} z_1$ и кратной ей частотой $f = \frac{\omega}{2\pi} z_1 (z_2 - z_1)$ (для $z_1/z_2 = 9/10$ эти частоты совпадают). Почти везде присутствует двойная оборотная частота и высокая частота порядка 13 кгц. На других амортизаторах, помимо оборотной частоты, присутствует группа частот с центральной частотой порядка 3,2 кгц.

На втором этапе исследовались пульсации давления в каналах рабочего колеса. Рабочая схема измерений отличалась от предыдущего случая лишь

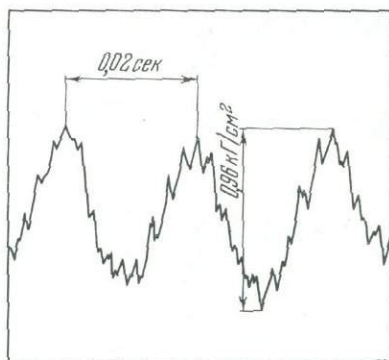


Рис. 5. Осциллограммы вибраций корпуса насоса

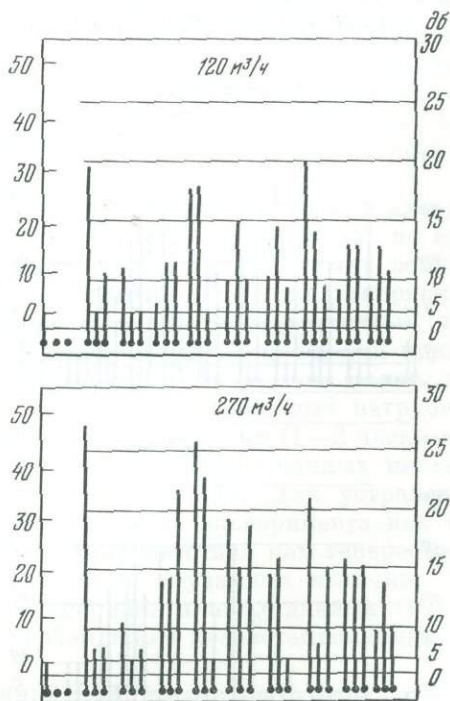


Рис. 6. Спектрограммы вибраций корпуса насоса

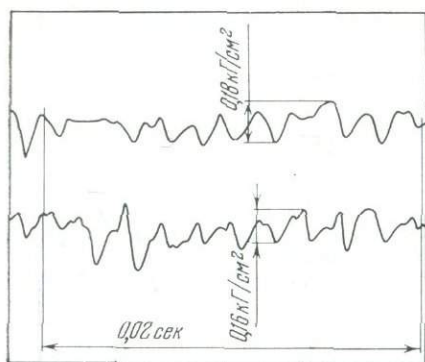


Рис. 7. Осциллограмма пульсаций давления на рабочем колесе

Более подробные сведения дают спектрограммы процессов (рис. 8).

Анализ спектрограмм показывает, что пульсации давления на рабочем колесе имеют более сложную природу, чем в направляющем аппарате. Датчики, расположенные ближе к периферии колеса, отмечают лопаточную частоту направляющего аппарата $f_2 = \frac{\omega}{2\pi} z_2$. Остальные датчики указанной частоты не регистрируют, часть из них отмечает лопаточную частоту самого рабочего колеса $f_1 = \frac{\omega}{2\pi} z_1$. Это в первую очередь относится к датчикам, установленным ближе к валу насоса. Большинство датчиков регистрирует оборотную частоту f_0 , это связано с неравномерностью поля давлений на входе в рабочее колесо. Кроме того, многие из датчиков регистрируют также частоту порядка 2—3 кГц. Указанная частота имеет место почти на всех режимах. Для указанной зоны характерно обилие боковых частот, что свидетельствует о значительной нестационарности указанной составляющей.

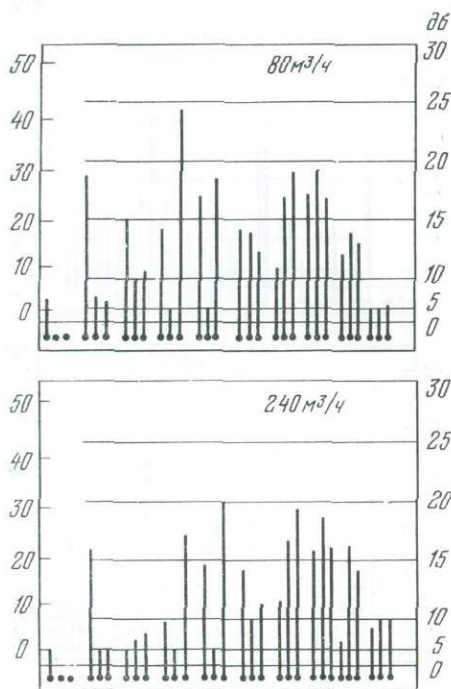


Рис. 8. Спектрограммы пульсаций давления на рабочем колесе

наличием ртутного токосъемника для передачи сигналов с вращающихся частей. Кроме того, корпус измерительной установки соединялся не с корпусом насоса, а с его ротором. Рабочее колесо, на котором устанавливались датчики, имело семь лопаток. Схема установки датчиков приведена на рис. 1, б. Исследования проводились на нескольких режимах при расходах 40—270 м³/ч.

Осциллограммы пульсаций давления на рабочем колесе насоса даны на рис. 7. Характер пульсаций довольно сложен. Из осциллограмм видно, что процесс содержит несколько составляющих, в частности лопаточную частоту 500 гц от направляющего аппарата.

Исследование пульсаций в направляющем аппарате и рабочем колесе насоса и сопоставление их со спектром вибраций корпуса насоса позволяет заключить, что большинство составляющих вибраций корпуса обусловлено гидродинамическими возмущающими силами. Помимо составляющих, воспринимаемых непосредственно корпусом через направляющий аппарат, в спектре вибраций присутствуют другие составляющие. Так, например, частота вибраций порядка 3 кГц, присутствующая в пульсациях давления на рабочем колесе и отсутствующая в направляющем аппарате, передается скорее всего через ротор и опоры. Отметим, что лопаточная частота направляющего аппарата f_2 в спектре вибраций незначительна, хотя на рабочем колесе имеют место интенсивные пульсации давления с этой частотой. Для выяснения природы и путей распространения других составляющих необходимо исследовать спектр пульсаций давлений других возможных источников, например, щелевых уплотнений, подшипников, а также входного и выходного трубопроводов.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ВО ВХОДНЫХ ПАТРУБКАХ ТУРБОМАШИН

Н. С. ЯЛОВОЙ, Г. Н. ПАМУХИНА, В. Н. СТЕПАНОВ

В статье делается попытка применить статистические методы интерпретации наблюдений для оценки гидродинамических параметров турбулентного потока во входных патрубках турбомашин. При разработке методики, изложенной в статье, было принято положение, согласно которому наблюдаемые в эксперименте гидродинамические поля не зависят от времени (квазистационарный процесс), и случайный характер исследуемых полей связывается со сложностью и хаотичностью их пространственных зависимостей. Связь между гидродинамическими параметрами исследуемых величин определяется в рамках корреляционной теории.

Совместным решением уравнений движения и энергии для турбулентного потока жидкости во входных патрубках турбомашин можно найти зависимость между безразмерными параметрами, характеризующими поток на входе в патрубок и на выходе из него.

Значение коэффициента снижения статического давления во входных патрубках турбомашин определяется из зависимости [1]:

$$\bar{\lambda}_n = \frac{\Delta p}{\frac{\rho v_{0n}^2}{2}} = \bar{\xi}_0 + \bar{\chi}_0^2 + \bar{\epsilon}_0^2 - \frac{1}{n^2} (\bar{\chi}_b^2 + \bar{\epsilon}_b^2), \quad (1)$$

где Δp — перепад статического давления между входным и выходным сечениями патрубка; ρ — плотность жидкости; v_{0n} — осредненное значение расходной составляющей скорости в выходном сечении патрубка; ξ_0 — коэффициент потерь полного давления при движении жидкости от входного к выходному сечению патрубка; χ_0^2 и χ_b^2 — коэффициенты кинетической энергии; ϵ_0 и ϵ_b — интенсивность турбулентности соответственно в выходном и входном сечениях патрубка; n — степень конфузурности входного патрубка, равная отношению площадей входного S_b и выходного S_0 сечений. Двойная черта сверху каждого слагаемого означает, что осреднение параметров необходимо проводить по времени и пространству.

Турбулентный поток во входном и выходном сечениях патрубка измеряется при помощи пневмометрических зондов, в которых осреднение по времени проводится автоматически вследствие инерционности самих зондов. Временное осреднение интенсивности турбулентных пульсаций, замеряемых термоанемометрическим способом, производится среднеквадратичным выходным вольтметром. Методы осреднения по характерным площадям приводятся в настоящей статье; однако необходимо иметь в виду, что замеры параметров потока при аэродинамических исследованиях входных патрубков производятся в довольно продолжительный период времени (1—2 часа), что дает значительные погрешности при использовании традиционных методов обработки результатов аэродинамического эксперимента. Для устранения этой погрешности необходимо рассматривать данные эксперимента как некоторую случайную выборку (реализацию) из неизвестной нам генеральной совокупности пространственно-временного поля случайных величин. Это позволяет использовать для обработки экспериментальных данных теорию случайных функций, считая процесс в турбомашине квазистационарным на рассматриваемом отрезке времени.

Применение теории случайных функций дает возможность использовать хорошо разработанный математический аппарат, устанавливающий корреляционные зависимости между рядом характерных величин, разнесенных в пространстве и времени.

При определении коэффициента $\bar{\lambda}_{\pi}$ по формуле (1) с учетом корреляционных связей между входящими в формулу величинами необходимо определить математическое ожидание величины $\bar{\lambda}_{\pi} - M(\bar{\lambda}_{\pi})$, его дисперсию $D(\bar{\lambda}_{\pi})$ и доверительный интервал, в котором находится с заданной надежностью значение $M(\bar{\lambda}_{\pi})$. Математическое ожидание коэффициента $\bar{\lambda}_{\pi}$ находится [2] в виде

$$M(\bar{\lambda}_{\pi}) = M(\bar{\xi}_0) + M(\bar{\chi}_0^2) + M(\bar{\varepsilon}_0^2) - \frac{1}{n^2} [M(\bar{\chi}_b^2) + M(\bar{\varepsilon}_b^2)], \quad (2)$$

где знак над определяемой величиной означает осреднение по времени, автоматически получающееся из-за особенностей измерительной аппаратуры.

При некоррелированности входящих в выражение (1) величин дисперсия величины $\bar{\lambda}_{\pi}$ определяется из выражения

$$D(\bar{\lambda}_{\pi}) = D(\bar{\xi}_0) + D(\bar{\chi}_0^2) + D(\bar{\varepsilon}_0^2) + \frac{1}{n^4} [D(\bar{\chi}_b^2) + D(\bar{\varepsilon}_b^2)]. \quad (3)$$

При наличии корреляционных связей между величинами, входящими в формулу (1), дисперсию $\bar{\lambda}_{\pi}$ можно найти из формулы

$$\begin{aligned} D(\bar{\lambda}_{\pi}) = & D(\bar{\xi}_0) + D(\bar{\chi}_0^2) + D(\bar{\varepsilon}_0^2) + \frac{1}{n^4} [D(\bar{\chi}_b^2) + D(\bar{\varepsilon}_b^2)] + 2K(\bar{\chi}_0^2, \bar{\xi}_0) + \\ & + 2K(\bar{\chi}_0^2, \bar{\varepsilon}_0^2) - \frac{2}{n^2} [K(\bar{\chi}_0^2, \bar{\chi}_b^2) + K(\bar{\chi}_0^2, \bar{\varepsilon}_b^2)] + 2K(\bar{\xi}_0, \bar{\varepsilon}_0^2) - \\ & - \frac{2}{n^2} [K(\bar{\xi}_0, \bar{\chi}_b^2) + K(\bar{\xi}_0, \bar{\varepsilon}_b^2)] - \frac{2}{n^2} [K(\bar{\varepsilon}_0^2, \bar{\chi}_b^2) + \\ & + K(\bar{\varepsilon}_0^2, \bar{\varepsilon}_b^2)] + \frac{2}{n^4} K(\bar{\chi}_b^2, \bar{\varepsilon}_b^2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $K(\bar{x}, \bar{y})$ — корреляционный момент связи между двумя величинами \bar{x} и \bar{y} .

Оценка точности вычислений величины $M(\bar{\lambda}_{\pi})$ и ее слагаемых проводилась по доверительным интервалам расчетных величин с надежностью $P = 0,95$:

$$DI_1 < M(\bar{x}) < DI_2, \quad (5)$$

где DI_1 и DI_2 — левая и правая границы доверительного интервала: $M(\bar{x})$ — математическое ожидание определяемой величины \bar{x} .

Доверительные интервалы вычислялись по известным формулам:

$$DI_1 = M(\bar{x}) - \gamma_1 \frac{\sqrt{D(\bar{x})}}{\sqrt{N-1}}, \quad DI_2 = M(\bar{x}) + \gamma_2 \frac{\sqrt{D(\bar{x})}}{\sqrt{N-1}}, \quad (6)$$

где $D(\bar{x})$ — дисперсия величины \bar{x} ; N — число замеров; γ_1 и γ_2 — числа, определяемые из таблицы распределения Стьюдента для числа степеней свободы $R = N - 1$ и надежности $P = 0,95$.

На рис. 1 приведена схема исследуемого патрубка турбомашины и мерные сечения на входе в патрубок (сечение $e - e$) и выходе из него (сечение $o - o$).

1. Вычисление параметров турбулентного потока во входном сечении патрубка. В соответствии с гипотезой эргодичности, математическое ожидание любой величины может быть приближенно вычислено не как среднее по множеству наблюдений, а как среднее по площади, т. е.

$$M(x) = \frac{1}{S} \int_S x dx.$$

Поле давлений и скоростей внутри патрубка является сложной функцией ряда параметров (геометрии патрубка, неравномерности и пульсации потока в характерных сечениях и т. п.), и его можно рассматривать как случай-

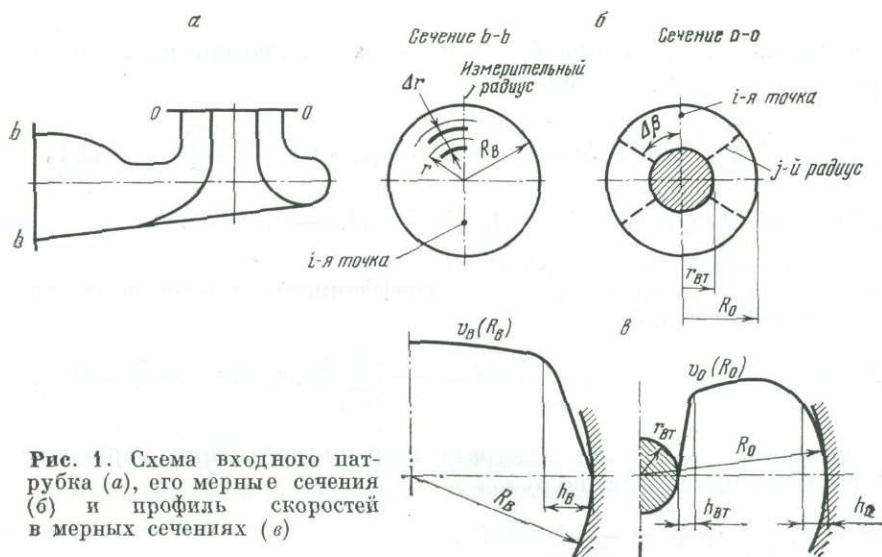


Рис. 1. Схема входного патрубка (а), его мерные сечения (б) и профиль скоростей в мерных сечениях (в)

ную функцию координат. В этом случае значение любой величины также можно заменить осредненным по площади. По аналогии примем, что среднее по расходу значение любой величины может быть представлено в виде математического ожидания этой величины:

$$M(x) = \frac{1}{Q} \int_Q x dQ = \frac{1}{v_n S} \int_s x \bar{v}_n dS = \frac{1}{S} \int_s x \frac{\bar{v}_n}{v_n} dS = \frac{1}{S} \int_s x \bar{\chi}_n dS, \quad (7)$$

где $\bar{\chi}_n = \bar{v}_n/v_n$ — коэффициент неравномерности нормальной составляющей скорости в i -й точке сечения $b-b$.

На основании (7), математическое ожидание средней скорости потока во входном сечении патрубка

$$M(\bar{v}_{bn}) = \frac{1}{S_b} \int_{s_b} \bar{v}_{bn} dS \simeq \frac{2}{R_b^2} \sum_{i=1}^m \bar{v}_{bn(i)} r_{(i)} \Delta r_{(i)}, \quad (8)$$

где m — количество замеров.

В соответствии с рекомендацией [3], для получения значения $M(\bar{v}_{bn})$ необходимо ввести в формулу (8) значение интеграла в переходной зоне потока, соответствующего профилю скоростей при степенном законе с показателем степени $1/7$.

Корректированное значение $M(\bar{v}_{bn})$ будет

$$M(\bar{v}_{bn}) = \frac{2}{R_b^2} \left(\sum_{i=1}^m \bar{v}_{bn(i)} r_{(i)} \Delta r_{(i)} + \bar{v}_{bn(m)} \cdot C_b \right). \quad (9)$$

Математическое ожидание полного давления во входном сечении патрубка

$$M(\bar{p}_b^*) = \frac{1}{Q} \int_Q \bar{p}_b^* dQ = \frac{1}{S_b} \int_{s_b} \bar{p}_b^* \frac{\bar{v}_{bn}}{v_n} dS = \frac{1}{S_b} \int_{s_b} \bar{p}_b^* \bar{\chi}_b dS. \quad (10)$$

Замена интеграла в формуле (10) суммированием требует введения корректировочных членов, учитывающих значения интеграла в переходной зоне шириной h_b .

Разложив полное давление \bar{p}_b^* у стенки на статическое и динамическое, пропорциональное $\rho \bar{v}_{bn}^2$, получим

$$M(\bar{p}_b^*) = \frac{2}{R_b^2} \left[\sum_{i=1}^m \bar{p}_{b(i)}^* \bar{\chi}_{b(i)} \Delta r_{b(i)} r_{b(i)} + \bar{p}_{ст} \cdot \bar{\chi}_{b(m)} \cdot C_b + \rho \frac{\bar{v}_{b(m)}^2}{2} \bar{\chi}_{b(m)} D_b \right], \quad (11)$$

где $C_b = 0,875h_b (R_b - 0,54h_b)$, $D_b = 0,7h_b (R_b - 0,588h_b)$,

а h_b — ширина пристеночного участка.

Математическое ожидание квадрата коэффициента неравномерности скорости во входном сечении

$$M(\bar{\chi}_b^2) = \frac{1}{Q} \int_Q \bar{\chi}_b^2 dQ = \frac{1}{S_b} \int_{S_b} \bar{\chi}_b^2 dS = \frac{2}{R_b^2} \left[\sum_{i=1}^m \bar{\chi}_{b(i)}^2 r_{b(i)} \Delta r_{b(i)} + \bar{\chi}_{b(m)}^2 D_b \right]. \quad (12)$$

Математическое ожидание квадрата степени пульсации турбулентного потока во входном сечении патрубка

$$M(\bar{\varepsilon}_b^2) = \frac{1}{Q} \int_Q \bar{\varepsilon}_b^2 dQ = \frac{1}{S_b} \int_{S_b} \bar{\varepsilon}_b^2 \bar{\chi}_b dS. \quad (13)$$

Считая, что на стенке пульсации скорости и давления отсутствуют, заменим интеграл в формуле (13) следующей суммой (считая, что пульсация в переходном слое изменяется по линейному закону):

$$M(\bar{\varepsilon}_b^2) = \frac{i_2}{R_b^2} \left[\sum_{i=1}^m \bar{\varepsilon}_{b(i)}^2 \bar{\chi}_{b(i)} r_{b(i)} \Delta r_{b(i)} + \bar{\varepsilon}_{b(m)}^2 \bar{\chi}_b G_b \right], \quad (14)$$

где константа $G_b = 0,318h_b (R_b - 0,7h_b)$.

Дисперсии перечисленных выше величин определялись без учета параметров в переходном слое потока по формуле [1]

$$D(\bar{x}_b) = \frac{2}{(R_b - h_b)^2} \sum_{i=1}^m [\bar{x}_{b(i)} - M(\bar{x}_b)]^2 r_{b(i)} \Delta r_{b(i)}, \quad (15)$$

где \bar{x}_b — определяемая величина в сечении $b - b$.

2. Вычисление параметров турбулентного потока в выходном сечении патрубка. Приближенно принимаем, следуя [3], что значения характерных параметров на одном радиусе постоянны в секторе, образованном дугой $r\Delta\beta$ и центральным углом $\Delta\beta$, т. е.

$$\Delta S_0 = \Delta r \cdot r \cdot \Delta\beta = \Delta r \cdot r \cdot \frac{2\pi}{k},$$

где k — число измерительных радиусов.

Так как общая площадь выходного сечения равна $S_0 = \pi (R_0^2 - r_{вТ}^2)$, то

$$M(\bar{v}_{n0}) = \frac{1}{S_0} \int_{S_0} \bar{v}_{n0} dS = \int_{r_{вТ}}^{R_0} \bar{v}_{n0} \frac{2\pi r_0 dr_0}{k} = \frac{2}{k (R_0^2 - r_{вТ}^2)} \int_{r_{вТ}}^{R_0} \bar{v}_{n0} r_0 dr_0. \quad (16)$$

Значения постоянных величин для переходного слоя (шириной $h_{вТ}$ и h_0) следующие:

$$C_{вТ} = 0,875h_{вТ} (r_{вТ} + 0,54h_{вТ}), \quad C_0 = 0,875h_0 (R_0 - 0,54h_0). \quad (17)$$

Заменяя интеграл в (16) суммой слагаемых и учитывая (17), получим

$$M(\bar{v}_{on}) = \frac{2}{k (R_0^2 - r_{вТ}^2)} \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^m \bar{v}_{on(i,j)} r_{0(i,j)} \Delta r_{0(i,j)} + \bar{v}_{on(1,j)} C_{вТ} + \bar{v}_{on(m,j)} C_0 \right], \quad (18)$$

где $h_{вТ}$ — ширина пристеночного участка у втулки, а h_0 — у периферии.

По аналогии находим

$$M(\bar{\xi}_0) = \frac{2}{k(R_0^2 - r_{\text{вт}}^2)} \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=1}^m \bar{\xi}_{0(i,j)} \bar{\chi}_{0n(i,j)} r_{0(i,j)} \Delta r_{0(i,j)} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\rho v_{0n}^2} \left[(p_0^* - p_{\text{ст.о}}) \bar{\chi}_{0n(1,j)} C_{\text{вт}} - \rho \frac{\bar{v}_{0n(1,j)}^2}{2} \bar{\chi}_{0n(1,j)} D_{\text{вт}} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\bar{p}_b - p_{\text{ст.о}}) \bar{\chi}_{0n(m,j)} C_0 - \rho \frac{\bar{v}_{0n(m,j)}^2}{2} \bar{\chi}_{0n(m,j)} D_0 \right] \right\}, \quad (19)$$

где

$$D_{\text{вт}} = 0,7h_{\text{вт}}(r_{\text{вт}} + 0,588h_{\text{вт}}); \\ D_0 = 0,7h_0(R_0 - 0,588h_0), \quad (20)$$

а p_0^* — полное давление в выходном сечении патрубка.

При наличии пространственной деформации потока в выходном сечении патрубка осредненный коэффициент кинетической энергии в этом сечении $\bar{\chi}_0^2$, имеет смысл определять в виде суммы

$$M(\bar{\chi}_0^2) = M(\bar{\chi}_{0n}^2) + M(\bar{\chi}_{0r}^2) + M(\bar{\chi}_{0t}^2), \quad (21)$$

где коэффициенты неравномерности расходной $\bar{\chi}_{0n}$, радиальной $\bar{\chi}_{0r}$ и окружной $\bar{\chi}_{0t}$ составляющих скорости определяются соответственно по формулам

$$\bar{\chi}_{0n} = \frac{\bar{v}_{0n}}{M(\bar{v}_{0n})}; \quad \bar{\chi}_{0r} = \frac{\bar{v}_{0r}}{M(\bar{v}_{0r})}; \quad \bar{\chi}_{0t} = \frac{\bar{v}_{0t}}{M(\bar{v}_{0t})}.$$

Сумму в (21) можно заменить, по аналогии с (12), суммой интегралов:

$$M(\bar{\chi}_0^2) = \frac{1}{S_0} \int_{S_0} \bar{\chi}_{0n}^2 \bar{\chi}_{0n} dS + \frac{1}{S_0} \int_{S_0} \bar{\chi}_{0r}^2 \bar{\chi}_{0r} dS + \frac{1}{S_0} \int_{S_0} \bar{\chi}_{0t}^2 \bar{\chi}_{0t} dS. \quad (22)$$

Каждое из слагаемых этой суммы определяется по формуле

$$M(\bar{\chi}_{0p}^2) = \frac{2}{k(R_0^2 - r_{\text{вт}}^2)} \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^m \bar{\chi}_{0p(i,j)}^2 \bar{\chi}_{0n(i,j)} r_{0(i,j)} \Delta r_{0(i,j)} + \right. \\ \left. + \bar{\chi}_{0p(1,j)}^2 \bar{\chi}_{0n(1,j)} D_{\text{вт}} + \bar{\chi}_{0p(m,j)}^2 \bar{\chi}_{0n(m,j)} D_0 \right], \quad (23)$$

где p последовательно принимает значения n, r, t .

По аналогии с (14) математическое ожидание энергии пульсации турбулентного потока в выходном сечении патрубка определялось по формуле

$$M(\bar{\varepsilon}_0^2) = \frac{2}{k(R_0^2 - r_{\text{вт}}^2)} \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^m \bar{\varepsilon}_{0(i,j)}^2 \bar{\chi}_{0n(i,j)} r_{0(i,j)} \Delta r_{0(i,j)} + \right. \\ \left. + \bar{\varepsilon}_{0(1,j)}^2 \bar{\chi}_{0n(1,j)} G_{\text{вт}} + \bar{\varepsilon}_{0(m,j)}^2 \bar{\chi}_{0n(m,j)} G_0 \right], \quad (24)$$

где

$$G_{\text{вт}} = 0,318h_{\text{вт}}(r_{\text{вт}} + 0,71h_{\text{вт}}), \quad G_0 = 0,318h_0(R_0 - 0,71h_0).$$

Дисперсии величин \bar{x}_0 в выходном сечении патрубка определялись без учета параметров в переходном слое потока по формуле

$$D(\bar{x}_0) = \frac{2}{k[(R_0 - h_0)^2 - (r_{\text{вт}} + h_{\text{вт}})^2]} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m [\bar{x}_0 - M(\bar{x}_0)]^2 \bar{\chi}_{0n(i,j)} r_{0(i,j)} \Delta r_{0(i,j)}. \quad (25)$$

Корреляционные моменты связи параметров турбулентного потока определялись по следующим формулам. Для коррелированных величин \bar{x}_b и \bar{y}_b во входном сечении патрубка

$$K(\bar{x}_b, \bar{y}_b) = \alpha_1 \sum_{i=1}^m [\bar{x}_b - M(\bar{x}_b)] [\bar{y}_b - M(\bar{y}_b)] \bar{\chi}_{b(i)} r_{b(i)} \Delta r_{b(i)}. \quad (26)$$

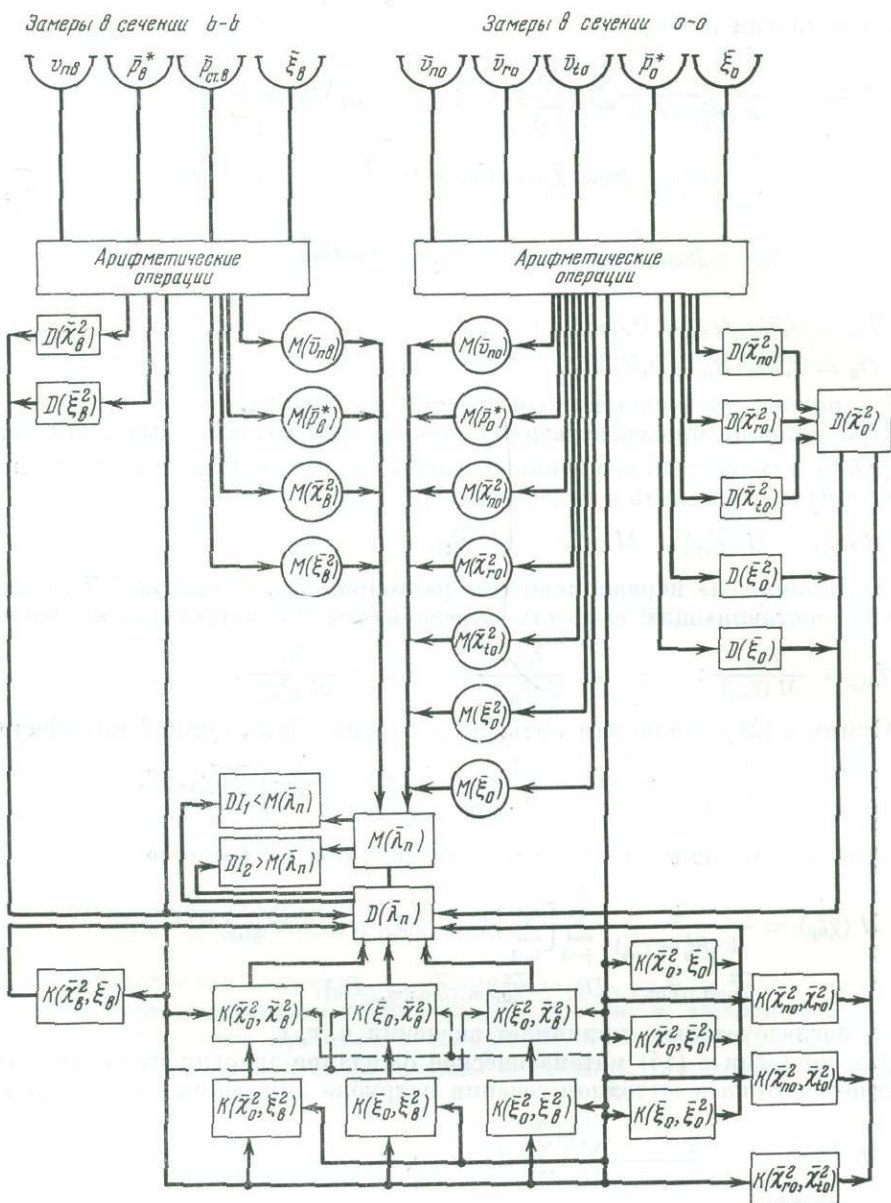


Рис. 2. Блок-схема программы расчета параметров турбулентного потока в патрубках

Для коррелированных величин \bar{x}_0 и \bar{y}_0 в выходном сечении патрубка

$$K(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \alpha_2 \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m [\bar{x}_0 - M(\bar{x}_0)] [\bar{y}_0 - M(\bar{y}_0)] \bar{\chi}_{0n(i,j)} \gamma_{0(i,j)} \Delta r_{0(i,j)}, \quad (27)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{2}{(R_b - h_b)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{k [(h_0 - h_b)^2 - (r_{BT} + h_{BT})^2]}.$$

Для коррелированных величин, относящихся к разным сечениям патрубков

$$K(\bar{x}_b, \bar{y}_b) = \frac{\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^m [\bar{x}_b - M(\bar{x}_b)] [\bar{y}_b - M(\bar{y}_b)]}{mk - 1}. \quad (28)$$

Отличие формул для корреляционных моментов типа (26) и (27) от формул типа (28) заключается в том, что корреляционные моменты в первом случае оцениваются аналогично дисперсиям, а во втором — усреднениям без веса по ядру потока.

По приведенному алгоритму была составлена машинная программа расчета параметров турбулентного потока во входных патрубках турбомашин. Укрупненная блок-схема программы приведена на рис. 2.

Как следует из рис. 2, в результате выполнения арифметических операций в соответствии с блок-схемой и алгоритмом, ЭВМ определяет и выдает на печать значения математических ожиданий характерных величин во входном и выходном сечениях патрубка, дисперсий этих величин и корреляционных моментов связи, а также их доверительных интервалов.

Результаты расчета параметров турбулентного потока в одном из патрубков, выполненного нами по предлагаемой методике на ЭВМ «Минск-22», даны в таблице.

Расчетная величина	Математическое ожидание	Дисперсия	Доверительный интервал		Расчетная величина	Математическое ожидание	Дисперсия	Доверительный интервал	
			левый	правый				левый	правый
\bar{v}_{bn}	12,08	0,094	11,65	12,50	$\bar{\chi}_{on}^2$	1,189	0,137	1,120	1,257
\bar{p}_b^*	53,06	0,002	53,00	53,12	$\bar{\chi}_{ot}^2$	0,031	0,001	0,025	0,037
$\bar{\chi}_b^2$	1,008	0,002	0,940	1,077	$\bar{\chi}_{or}^2$	0,010	0,0001	0,008	0,011
$\bar{\varepsilon}_b^2$	0,006	0,000	0,005	0,007	$\bar{\chi}_o^2$	1,230	0,124	1,164	1,295
\bar{v}_{on}	23,92	40,26	22,74	25,09	$\bar{\varepsilon}_o^2$	0,044	0,006	0,030	0,059
$\bar{\varepsilon}_o$	0,275	0,120	0,240	0,339	$\bar{\lambda}_n$	1,134	0,093	1,078	1,190

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Яловой. Определение перепада давления во входных патрубках турбомашин. Энергомашиностроение, 1974, № 12.
2. Ю. А. Розанов. Случайные процессы. М. «Наука», 1971.
3. А. Ш. Дорфман, М. М. Назарчук, Н. И. Польский, М. И. Сайковский. Аэродинамика диффузоров и выхлопных патрубков турбомашин. Киев, Изд-во АН УССР, 1960.

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ РОТОРА ЗА ВТОРОЙ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТЬЮ

Г. И. АНИКЕЕВ, П. Б. МОДЛИНА

Роторы многих современных машин имеют очень высокие рабочие скорости. Для некоторых из них эти скорости превышают критические обороты не только первого, но иногда второго и выше порядков. В таких режимах возможно проявление как первой, так и второй частот собственных колебаний ротора.

В большинстве работ по динамике роторов рассматриваются в основном колебания до первой критической скорости или за ней [1—4]. Очень мало работ, посвященных автоколебаниям за второй критической скоростью [3].

Динамику вала за второй критической скоростью изучим на примере двухопорного вала на жестких опорах (рис. 1, а), массы m с диском массы M ,

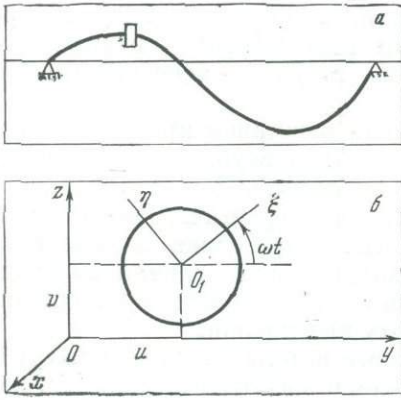


Рис. 1

расположенным не симметрично, а на расстоянии $l/2$ от левой опоры (полная длина вала равна $2l$). Поперечное сечение вала изображено на рис. 1, б.

Введем неподвижную систему осей координат $Oxyz$ и систему осей координат $O_1\xi\eta$, неизменно связанную с ротором.

Ось Ox направим по оси неизогнутого вала. Проекции перемещений точек оси вала на плоскости xOy и xOz обозначим соответственно через $u(x, t)$ и $v(x, t)$. Проекции центра тяжести диска на оси Oy и Oz обозначим через u_1 и v_1 .

Величины u, v и u_1, v_1 связаны соотношениями

$$u_1 = u\left(\frac{l}{2}, t\right) + \varepsilon \cos \omega t, \quad v_1 = v\left(\frac{l}{2}, t\right) + \varepsilon \sin \omega t, \quad (1)$$

где ε — величина, характеризующая небаланс диска; ω — частота оборотов ротора.

Проекция прогиба ротора на неподвижные оси координат будем разыскивать в виде

$$u(x, t) = \sum_{s=1}^2 q_s(t) X_s(x) = q_1(t) X_1(x) + q_2(t) X_2(x), \quad (2)$$

$$v(x, t) = \sum_{s=1}^2 p_s(t) X_s(x) = p_1(t) X_1(x) + p_2(t) X_2(x),$$

где $X_1(x)$ и $X_2(x)$ — нормированные собственные функции вала, которые будут определены позднее.

Для определения обобщенных координат q_s и p_s воспользуемся уравнениями Лагранжа II-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial V}{\partial q_s} = Q_s + Q_s^*,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial p_s} + \frac{\partial V}{\partial p_s} = P_s + P_s^*,$$

где Q_s, Q_s^*, P_s, P_s^* — обобщенные силы внутреннего и внешнего трения. Определим кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{1}{2} M \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \int_0^{2l} \rho dx \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] + T_0(\omega), \quad (3)$$

где ρ — масса единицы длины ротора, $T_0(\omega)$ — кинетическая энергия ротора, вращающегося вокруг нейтральной оси.

Подставляя (1) и (2) в (3) и учитывая, что

$$\int_0^{2l} \rho X_1(x) X_2(x) dx + M X_1\left(\frac{l}{2}\right) X_2\left(\frac{l}{2}\right) = 0,$$

получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 [(\dot{p}_s^2 + \dot{q}_s^2) B_s - 2\dot{q}_s \omega a_s \sin \omega t + 2\dot{p}_s \omega a_s \cos \omega t] + T_0(\omega), \quad (4)$$

где

$$B_s = \int_0^{2l} \rho X_s^2(x) dx + M X_s^2\left(\frac{l}{2}\right), \quad a_s = M \varepsilon X_s\left(\frac{l}{2}\right). \quad (5)$$

Ротор не имеет упругих опор. Тогда потенциальная энергия системы

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{2l} EI \kappa^2 dx, \quad (6)$$

где EI — жесткость вала, κ^2 — квадрат кривизны упругой линии ротора равный

$$\kappa^2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 - 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 \right] - \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]^2. \quad (7)$$

Подставляя (2) в (7), а затем (7) в (6) и учитывая, что

$$\int_0^{2l} EI X_m'' X_n'' dx = 0,$$

получим с точностью до членов второго порядка малости

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{2M} \lambda_s^2 B_s (q_s^2 + p_s^2), \quad (8)$$

где λ_s — собственная частота колебаний ротора.

Определим силы внутреннего трения. Исходя из экспериментальных данных, будем аппроксимировать неупругое напряжение в материале следующим выражением [3]:

$$\Delta \sigma = \frac{E}{\Omega^{1-\nu}} \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \cdot (\delta_1 + \delta_2 e_0^2), \quad (9)$$

где e — относительное удлинение волокон вала в произвольной точке поперечного сечения вала; Ω — частота деформации, равная

$$\Omega = |\omega - \lambda_k|; \quad (10)$$

e_0 — амплитуда относительной деформации; δ_1 и δ_2 — коэффициенты внутреннего трения.

Пользуясь известным выражением для удлинения волокон вала при изгибе и выражением (2), получим для скорости деформации [3]

$$\frac{\partial e}{\partial t_i} = - \sum_k X_k'' [y (\dot{q}_k + \omega p_k) + z (\dot{p}_k - \omega q_k)]. \quad (11)$$

Кроме того, будем полагать, что для неупругих напряжений закон независимого действия сил выполняется. Обобщенные силы внутреннего трения будут

$$Q_s = \int_0^{2l} \int_F y \Delta \sigma X_s'' dx dF, \quad P_s = \int_0^{2l} \int_F z \Delta \sigma X_s'' dx dF. \quad (12)$$

Подставляя (10) и (11) в (9), а затем (9) в (12), получим для линейных составляющих обобщенных сил внутреннего трения

$$Q_s = -\gamma_s \delta_1 B_s (\dot{q}_s + \omega p_s), \quad P_s = -\gamma_s \delta_1 B_s (\dot{p}_s - \omega q_s), \quad (13)$$

где

$$\gamma_s = \frac{\lambda_s^2}{|\omega - \lambda_s|}$$

Следуя [3], обобщенные силы внешнего трения определяются по формулам:

$$Q_s^* = - \int_0^{2l} (\kappa_0 + \kappa_1 r^2) \frac{\partial u}{\partial t} X_s dx, \quad P_s^* = - \int_0^{2l} (\kappa_0 + \kappa_1 r^2) \frac{\partial v}{\partial t} X_s dx, \quad (14)$$

где

$$r^2 = u^2 + v^2.$$

Подставляя (2) в (14), получим

$$\begin{aligned} Q_1^* &= - (\beta_1 + f_1) \dot{q}_1 - (\beta_2 + f_2) \dot{q}_2, & P_1^* &= - (\beta_1 + f_1) \dot{p}_1 - (\beta_2 + f_2) \dot{p}_2, \\ Q_2^* &= - (\beta_2 + f_2) \dot{q}_1 - (\beta_3 + f_3) \dot{q}_2, & P_2^* &= - (\beta_2 + f_2) \dot{p}_1 - (\beta_3 + f_3) \dot{p}_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_1 (q_1^2 + p_1^2) + \alpha_2 (q_2^2 + p_2^2) + 2\alpha_3 (q_1 q_2 + p_1 p_2), \\ f_2 &= \alpha_3 (q_1^2 + p_1^2) + \alpha_4 (q_2^2 + p_2^2) + 2\alpha_2 (q_1 q_2 + p_1 p_2), \\ f_3 &= \alpha_2 (q_1^2 + p_1^2) + \alpha_5 (q_2^2 + p_2^2) + 2\alpha_4 (q_1 q_2 + p_1 p_2), \\ \alpha_1 &= \kappa_1 \int_0^{2l} X_1^4 dx, & \alpha_2 &= \kappa_1 \int_0^{2l} X_1^2 X_2^2 dx, \\ \alpha_3 &= \kappa_1 \int_0^{2l} X_1^3 X_2 dx, & \alpha_4 &= \kappa_1 \int_0^{2l} X_1 X_2^3 dx, \\ \alpha_5 &= \kappa_1 \int_0^{2l} X_2^4 dx, & \beta_1 &= \kappa_0 \int_0^{2l} X_1^2 dx, \\ \beta_2 &= \kappa_0 \int_0^{2l} X_1 X_2 dx, & \beta_3 &= \kappa_0 \int_0^{2l} X_2^2 dx. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для кинетической и потенциальной энергий, а также для обобщенных сил внутреннего и внешнего трения в уравнения Лагранжа, получим следующие уравнения для определения q_s и p_s :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \lambda_1^2 q_1 &= \mu F_1 + \omega^2 a_1 \cos \omega t, & \ddot{p}_1 + \lambda_1^2 p_1 &= \mu F_2 + \omega^2 a_1 \sin \omega t, \\ \ddot{q}_2 + \lambda_2^2 q_2 &= \mu F_3 + \omega^2 a_2 \cos \omega t, & \ddot{p}_2 + \lambda_2^2 p_2 &= \mu F_4 + \omega^2 a_2 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (16)$$

где a_1 и a_2 определяются по формулам (5),

$$\begin{aligned} \mu F_1 &= - \gamma_1 \delta_1 (\dot{q}_1 + \omega p_1) - \beta_1 \dot{q}_1 - \beta_2 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \{ \alpha_1 (q_1^2 + p_1^2) + \alpha_2 (q_2^2 + p_2^2) + \\ &+ 2\alpha_3 (q_1 q_2 + p_1 p_2) \} - \dot{q}_2 \{ \alpha_3 (q_1^2 + p_1^2) + \alpha_4 (q_2^2 + p_2^2) + 2\alpha_2 (q_1 q_2 + p_1 p_2) \}, \\ \mu F_2 &= - \gamma_1 \delta_1 (\dot{p}_1 - \omega q_1) - \beta_1 \dot{p}_1 - \beta_2 \dot{p}_2 - \dot{p}_1 \{ \alpha_1 (q_1^2 + p_1^2) + \alpha_2 (p_2^2 + q_2^2) + \\ &+ 2\alpha_3 (q_1 q_2 + p_1 p_2) \} - \dot{p}_2 \{ \alpha_3 (q_1^2 + p_1^2) + \alpha_4 (p_2^2 + q_2^2) + 2\alpha_2 (q_1 q_2 + p_1 p_2) \}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mu F_3 &= - \gamma_2 \delta_1 (q_2 - \omega p_2) - \beta_2 \dot{q}_1 - \beta_3 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \{ \alpha_3 (q_1^2 + p_1^2) + \alpha_4 (q_2^2 + p_2^2) + \\ &+ 2\alpha_2 (q_1 q_2 + p_1 p_2) \} - \dot{q}_2 \{ \alpha_2 (q_1^2 + p_1^2) + \alpha_5 (q_2^2 + p_2^2) + 2\alpha_4 (q_1 q_2 + p_1 p_2) \}, \\ \mu F_4 &= - \gamma_2 \delta_1 (\dot{p}_2 - \omega q_2) - \beta_2 \dot{p}_1 - \beta_3 \dot{p}_2 - \dot{p}_1 \{ \alpha_3 (q_1^2 + p_1^2) + \alpha_4 (q_2^2 + p_2^2) + \\ &+ 2\alpha_2 (q_1 q_2 + p_1 p_2) \} - \dot{p}_2 \{ \alpha_2 (q_1^2 + p_1^2) + \alpha_5 (q_2^2 + p_2^2) + 2\alpha_4 (q_1 q_2 + p_1 p_2) \}. \end{aligned}$$

Введем новые переменные A , θ по формулам:

$$\begin{aligned} I_s &= A_{2s-1} \cos \Theta_{2s-1} - d_s \cos \omega t, & \dot{q}_s &= - \lambda_s A_{2s-1} \sin \Theta_{2s-1} + d_s \omega \sin \omega t, \\ P_s &= A_{2s} \cos \Theta_{2s} - d_s \sin \omega t, & \dot{p}_s &= - \lambda_s A_{2s} \sin \Theta_{2s} - d_s \omega \cos \omega t, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$d_s = \frac{\omega^2 a_s}{\omega^2 - \lambda_s^2}; \quad s = 1, 2.$$

Подставляя (18) в (16) и решая полученную систему уравнений относительно dA_i/dt и $d\theta_i/dt$ ($i = 1, 2, 3, 4$), получим нелинейные уравнения (11) в стандартной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dA_{2s-1}}{dt} &= -\frac{\mu}{\lambda_s} F_{2s-1}(A_1, \dots, \Theta_4) \sin \Theta_{2s-1}, \\ \frac{d\Theta_{2s-1}}{dt} &= \lambda_s - \frac{\mu}{\lambda_s A_{2s-1}} F_{2s-1}(A_1, \dots, \Theta_4) \cos \Theta_{2s-1}, \\ \frac{dA_{2s}}{dt} &= -\frac{\mu}{\lambda_s} F_{2s}(A_1, \dots, \Theta_4) \sin \Theta_{2s}, \\ \frac{d\Theta_{2s}}{dt} &= \lambda_s - \frac{\mu}{\lambda_s A_{2s}} F_{2s}(A_1, \dots, \Theta_4) \cos \Theta_{2s}, \quad s = 1, 2; \end{aligned} \quad (19)$$

где $\mu F_{2s-1}(A_1, \dots, \Theta_4)$, $\mu F_{2s}(A_1, \dots, \Theta_4)$ —

выражения (17) после подстановки в них (18).

Применим, наконец, преобразование Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова:

$$\begin{aligned} A_{2s-1} &= y_{2s-1} + \mu U_{2s-1}(t, y_1, \dots, y_4, \theta_1, \dots, \theta_4), \\ \Theta_{2s-1} &= \lambda_s t + \theta_{2s-1} + \mu U_{2s-1}(t, y_1, \dots, \theta_4), \\ A_{2s} &= y_{2s} + \mu U_{2s}(t, y_1, \dots, \theta_4), \\ \Theta_{2s} &= \lambda_s t + \theta_{2s} + \mu U_{2s}(t, y_1, \dots, \theta_4); \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (20)$$

Осредняя (19), получим следующие уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} \frac{dy_k}{dt} &= \mu Y_k(y_1, \dots, y_4, \theta_1, \dots, \theta_4), \\ \frac{d\theta_k}{dt} &= \mu Z_k(y_1, \dots, y_4, \theta_1, \dots, \theta_4), \quad k = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \mu Y_{2s-1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\lambda_s} \cdot \int_0^t \mu F_{2s-1}(y_1, \dots, \lambda_2 t + \theta_4) \sin(\lambda_s t + \theta_{2s-1}) dt \right), \\ \mu Z_{2s-1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\lambda_s y_{2s-1}} \int_0^t \mu F_{2s-1}(y_1, \dots, \lambda_2 t + \theta_4) \cos(\lambda_s t + \theta_{2s-1}) dt \right), \\ \mu Y_{2s} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\lambda_s} \int_0^t \mu F_{2s}(y_1, \dots, \lambda_2 t + \theta_4) \sin(\lambda_s t + \theta_{2s}) dt \right), \\ \mu Z_{2s} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\lambda_s y_{2s}} \int_0^t \mu F_{2s}(y_1, \dots, \lambda_2 t + \theta_4) \cos(\lambda_s t + \theta_{2s}) dt \right), \quad s = 1, 2; \end{aligned}$$

выражения $\mu F_i(y_1, \dots, y_4, \lambda_1 t + \theta_1, \dots, \lambda_2 t + \theta_4)$ даны в (17).

Вводя нециклические фазы $\chi_1 = \theta_1 - \theta_2$ и $\chi_2 = \theta_3 - \theta_4$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \mu Y_1(y, \kappa), & \frac{dy_4}{dt} &= \mu Y_4(y, \kappa), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \mu Y_2(y, \kappa), & \frac{d\kappa_1}{dt} &= \mu Z_1(y, \kappa) - \mu Z_2(y, \kappa), \\ \frac{dy_3}{dt} &= \mu Y_3(y, \kappa), & \frac{d\kappa_2}{dt} &= \mu Z_3(y, \kappa) - \mu Z_4(y, \kappa). \end{aligned} \quad (22)$$

Система (22) удовлетворяет соотношениям:

$$y_1 = y_2, \quad y_3 = y_4, \quad \chi_1 = \chi_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (23)$$

Кроме того, в стационарном режиме

$$y_k = \text{const}. \quad (24)$$

Учитывая (23) и (24), получим следующие выражения для определения стационарных амплитуд y_1 и y_3 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} y_1 \left[\gamma_1 \delta_1 \left(\frac{\omega}{\lambda_1} - 1 \right) - \beta_1 \right] - \frac{1}{2} \alpha_1 y_1^3 - \frac{1}{2} \alpha_2 y_1 y_3^2 - \frac{1}{2} \alpha_2 y_1 y_3^2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \\ - \frac{1}{2\lambda_1} \alpha_2 y_1 d_2^2 \omega - \frac{1}{\lambda_1} \alpha_3 y_1 d_1 d_2 \omega - \frac{1}{2\lambda_1} \alpha_1 y_1 d_1^2 \omega - \frac{1}{2} \alpha_1 y_1 d_1^2 - \\ - \frac{1}{2} \alpha_2 y_1 d_2^2 - \alpha_3 y_1 d_1 d_2 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} y_3 \left[\gamma_2 \delta_1 \left(\frac{\omega}{\lambda_2} - 1 \right) - \beta_3 \right] - \frac{1}{2} \alpha_5 y_3^3 - \frac{1}{2} \alpha_2 y_3 y_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} y_1^2 y_3 - \\ - \frac{1}{2} \alpha_2 y_3 d_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_5 y_3 d_2^2 - \alpha_4 y_3 d_1 d_2 - \frac{1}{2\lambda_2} \alpha_2 d_1^2 \omega y_3 - \frac{1}{2\lambda_2} \alpha_5 d_2^2 \omega y_3 - \\ - \frac{1}{\lambda_2} \alpha_4 d_1 d_2 \omega y_3 = 0. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$f_1 = \frac{1}{2} \left[\gamma_1 \delta_1 \left(\frac{\omega}{\lambda_1} - 1 \right) - \beta_1 \right] - \left(\frac{\omega}{\lambda_1} + 1 \right) \left(\frac{\alpha_1}{2} d_1^2 + \frac{\alpha_2}{2} d_2^2 + \alpha_3 d_1 d_2 \right),$$

$$f_2 = -\frac{1}{2} \alpha_2 \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right), \quad f_3 = -\frac{1}{2} \alpha_1,$$

$$g_1 = \frac{1}{2} \left[\gamma_2 \delta_1 \left(\frac{\omega}{\lambda_2} - 1 \right) - \beta_3 \right] - \left(\frac{\omega}{\lambda_2} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} \alpha_2 d_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_5 d_2^2 + \alpha_4 d_1 d_2 \right),$$

$$g_2 = -\frac{1}{2} \alpha_2 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right), \quad g_3 = -\frac{1}{2} \alpha_5.$$

Тогда уравнения (25) примут следующий вид:

$$\begin{cases} f_1 y_1 + f_2 y_1 y_3^2 + f_3 y_1^3 = 0, \\ g_1 y_3 + g_2 y_3 y_1^2 + g_3 y_3^3 = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Система (26) допускает следующие стационарные решения:

$$1) \quad y_1 = y_3 = 0; \quad 2) \quad y_1^2 = -\frac{f_1}{f_3}, \quad y_3 = 0;$$

$$3) \quad y_1 = 0, \quad y_3^2 = -\frac{g_1}{g_3}; \quad 4) \quad y_1^2 = \frac{-f_1 g_3 + f_2 g_1}{f_3 g_3 - f_2 g_2}, \quad y_3^2 = \frac{-f_3 g_1 + f_1 g_2}{f_3 g_3 - f_2 g_2}.$$

Эти решения удобнее написать в таком виде:

$$1) \quad y_1 = y_3 = 0, \quad 2) \quad y_1^2 = \frac{2}{\alpha_1} f_1, \quad y_3 = 0, \quad 3) \quad y_1^2 = 0, \quad y_3^2 = \frac{2}{\alpha_5} g_1,$$

$$4) \quad y_1^2 = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2} \alpha_5 f_1 - \frac{1}{2} \alpha_2 \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) g_1 \right],$$

$$y_3^2 = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2} \alpha_1 g_1 - \frac{1}{2} \alpha_2 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) f_1 \right], \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{1}{2} \left[\gamma_1 \delta_1 \left(\frac{\omega}{\lambda_1} - 1 \right) - \beta_1 \right] \left(-\frac{\omega}{\lambda_1} + 1 \right) \left[\frac{\alpha_1}{2} \left(\frac{\omega^2 a_1}{\omega^2 - \lambda_1^2} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_2}{2} \left(\frac{\omega^2 a_2}{\omega^2 - \lambda_2^2} \right)^2 + \alpha_3 \frac{\omega^2 a_1}{\omega^2 - \lambda_1^2} \frac{\omega^2 a_2}{\omega^2 - \lambda_2^2} \right]; \\
 g_1 &= \frac{1}{2} \left[\gamma_2 \delta_1 \left(\frac{\omega}{\lambda_2} - 1 \right) - \beta_3 \right] - \left(\frac{\omega}{\lambda_2} + 1 \right) \left[\frac{\alpha_2}{2} \left(\frac{\omega^2 a_1}{\omega^2 - \lambda_1^2} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_5}{2} \left(\frac{\omega^2 a_2}{\omega^2 - \lambda_2^2} \right)^2 + \alpha_4 \frac{\omega^2 a_1}{\omega^2 - \lambda_1^2} \frac{\omega^2 a_2}{\omega^2 - \lambda_2^2} \right]; \\
 \Delta &= \frac{1}{4} \alpha_1 \alpha_5 - \frac{1}{4} \alpha_2^2 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right).
 \end{aligned}$$

Динамику ротора рассмотрим на конкретном примере: длина вала $2l = 60$ см; диаметр ротора $d = 15$ мм, материал — сталь, $\gamma = 7,8$ г/см³, $E = 2,1 \times 10^8$ кг/см².

Собственные функции вала найдем методом начальных параметров, разбив вал на два участка: $\left(0, \frac{l}{2} \right)$ и $\left(\frac{l}{2}, 2l \right)$.

Имеем уравнение для собственной функции

$$X_i^{IV} - k^4 X_i = 0, \quad k = \frac{\rho \lambda^2}{EI} \quad (28)$$

при граничных условиях

$$X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(2l) = 0, \quad X''(2l) = 0 \quad (29)$$

и условиях сопряжения

$$X_0 \left(\frac{l}{2} \right) = X_1 \left(\frac{l}{2} \right), \quad X_0' \left(\frac{l}{2} \right) = X_1' \left(\frac{l}{2} \right), \quad (30)$$

$$X_0'' \left(\frac{l}{2} \right) = X_1'' \left(\frac{l}{2} \right), \quad X_0''' \left(\frac{l}{2} \right) - X_1''' \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{m l^2 X_2 \left(\frac{l}{2} \right)}{EI}.$$

Для приведенных значений параметров ротора, при условиях (29) и (30), частоты собственных колебаний системы, определенные методом начальных параметров, будут $\lambda_1 = 370$ сек⁻¹, $\lambda_2 = 1490$ сек⁻¹. Собственные функции вала (интеграл уравнения (28)) будут:

$$X_i = A_i S(kx) + B_i T(kx) + C_i U(kx) + D_i V(kx),$$

где S, T, U, V — функции А. Н. Крылова.

Кривые, изображающие собственные функции, приведены на (рис. 2). Стационарные решения уравнений (16), (17) исследовались при следующих значениях коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1,49 \text{ мм}; & a_2 &= 0,99 \text{ мм}; & \alpha_1 &= 0,53 \frac{1}{\text{сек} \cdot \text{мм}^2}; \\
 \alpha_2 &= 0,66 \frac{1}{\text{сек} \cdot \text{мм}^2}; & \alpha_3 &= -0,38 \frac{1}{\text{сек} \cdot \text{мм}^2}; & \alpha_4 &= -1,05 \frac{1}{\text{сек} \cdot \text{мм}^2}; \\
 \alpha_5 &= 2,00 \frac{1}{\text{сек} \cdot \text{мм}^2}; & \beta_1 &= 1,32 \frac{1}{\text{сек}}; & \beta_3 &= 2,17 \frac{1}{\text{сек}}.
 \end{aligned} \quad (31)$$

Непосредственный анализ выражений (27), определяющих значения каждой из не равных нулю амплитуд, сопряжен с большими трудностями. Графики зависимости $y_1^2 \neq 0$ и $y_3^2 \neq 0$ от относительной частоты оборотов ω/λ_1 для каждого из возможных режимов, вычисленные на ЭВМ, приведены на рис. 3, а, б и 4. Из рис. 3 видно, что за второй критической скоростью, при заданных значениях параметров системы, возможны автоколебания только со второй собственной частотой. Что касается режима автоколебаний с двумя

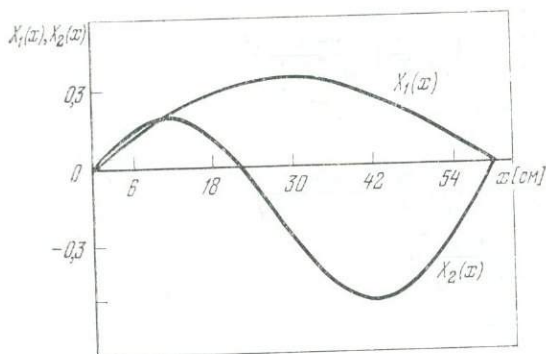


Рис. 2

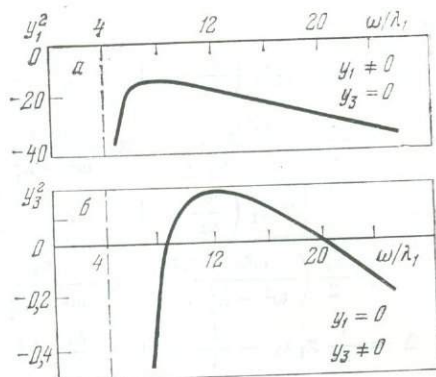


Рис. 3

частотами (рис. 4), то в данном случае он также невозможен, так как при этом одно из значений квадратов амплитуд, а именно y_3^2 , отрицательно. Варьирование параметров α , β , δ_1 , ω , a_1^2 в достаточно широких пределах не позволило обнаружить каких-либо зон существования режима автоколебаний с двумя частотами.

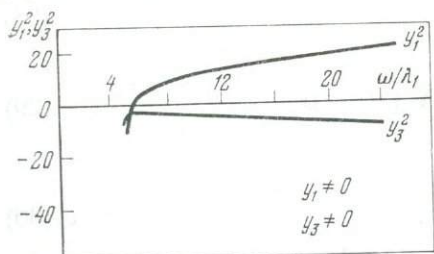


Рис. 4

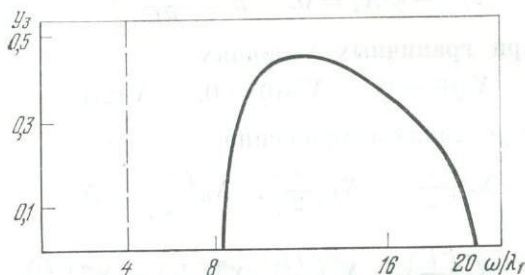


Рис. 5

Таким образом, за второй критической скоростью возможен лишь один почти периодический режим с частотами λ_2 и ω . Зависимость амплитуды автоколебательной составляющей указанного режима от относительной частоты оборотов ω/λ_1 дана на рис. 5.

Исследование показало, что этот режим устойчив во всей области существования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Диментберг. Изгибные колебания вращающихся валов. М., Изд-во АН СССР, 1959.
2. Ф. М. Диментберг, К. Т. Шаталов, А. А. Гусаров. Колебания машин. М., «Машиностроение», 1964.
3. М. Я. Кушуль. Автоколебания роторов. М., Изд-во АН СССР, 1963.
4. А. П. Филиппов. Колебания деформируемых систем. М., «Машиностроение», 1970.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РОТОРНОЙ СИСТЕМЕ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Э. Е. СИЛЬВЕСТРОВ

При изучении нестационарных процессов такие механизмы, как центрифуги, прядильные веретена, центробежные насосы и т. п., следует отнести к роторным системам с переменной массой. В большинстве случаев рабочие скорости указанных систем выше первых, а иногда вторых и третьих критических скоростей. Кроме того, как показывает практика, в закритических зонах часто возникают автоколебания, представляющие собой большую опасность. Поэтому проблема динамического расчета системы с гибким валом, кроме определения амплитуд устойчивых почти периодических колебаний в зарезонансной области, включает исследование системы при переходе через критические зоны и области автоколебаний.

В системах с переменной массой нестационарные процессы прохождения через резонанс и области автоколебаний связаны, как правило, с изменением во времени не только массы ротора, но и его угловой скорости. Вопрос о прохождении роторных систем с переменной массой через основной резонанс при учете и без учета гироскопического эффекта подробно рассмотрен в работах [1, 2]. Исследование перехода негироскопического ротора переменной массы через зону автоколебаний выполнено в [3], а в [4, 5] изучены почти периодические колебания гироскопической системы с переменной массой при фиксированных значениях угловой скорости вала.

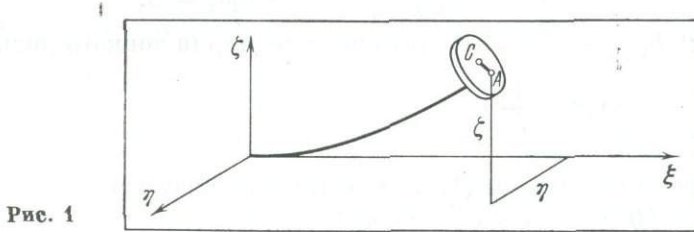


Рис. 1

В настоящей работе, в отличие от [5], рассматриваются нестационарные почти периодические колебания в гироскопической системе при одновременном изменении массы и угловой скорости ротора.

Рассматривается движение безынерционного консольного вала с одним неуравновешенным диском переменной массы на свободном конце (рис. 1). Масса диска m является функцией «медленного» времени τ и изменяется по детерминированному закону, не зависящему от характера движения системы. Отделение (или присоединение) частиц диска осуществляется с нулевой относительной скоростью. Отсутствуют перемещения частиц относительно диска.

Используя [4], получим следующие дифференциальные уравнения изгибных колебаний гироскопического ротора:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} + a_1\eta - a_2\alpha_1 &= -ha_1\dot{\eta} + ha_2\dot{\alpha}_1 - h\omega a_1\dot{\zeta} + h\omega a_2\dot{\beta}_1 - \gamma_0\dot{\eta} - \\ &\quad - \gamma_1\dot{\eta}(\eta^2 + \zeta^2) + \varepsilon [\dot{\omega} + \gamma_1 \cdot \omega(\eta^2 + \zeta^2)] \cdot \sin \varphi + \varepsilon\omega^2 \cos \varphi, \\ \ddot{\zeta} + a_1\dot{\zeta} - a_2\dot{\beta}_1 &= -ha_1\dot{\zeta} + ha_2\dot{\beta}_1 + h\omega a_1\dot{\eta} - h\omega a_2\dot{\alpha}_1 - \gamma_0\dot{\zeta} - \\ &\quad - \gamma_1 \cdot \dot{\zeta}(\eta^2 + \zeta^2) - \varepsilon [\dot{\omega} + \gamma_1 \cdot \omega(\eta^2 + \zeta^2)] \cdot \cos \varphi + \varepsilon\omega^2 \sin \varphi, \\ \ddot{\alpha}_1 + b_1\dot{\beta}_1 - b_2\dot{\eta} + b_3\dot{\alpha}_1 &= \left(\ddot{\alpha}_1 + \frac{1}{2} b_1\dot{\beta}_1 \right) (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (b_1\dot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}_1)(\alpha_1\dot{\alpha}_1 + \beta_1\dot{\beta}_1) - \\ &\quad - h(b_3\dot{\alpha}_1 - b_2\dot{\eta}) - h\omega(b_3\dot{\beta}_1 - b_2\dot{\zeta}) - \frac{K_0}{K_1} \cdot \dot{\omega} \cdot \beta_1 \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\ddot{\beta}_1 - b_1 \dot{\alpha}_1 - b_2 \dot{\zeta} + b_3 \beta_1 = \left(\ddot{\beta}_1 - \frac{1}{2} b_1 \dot{\alpha}_1 \right) (\alpha_1^2 + \beta_1^2) - (b_1 \alpha_1 - 2\beta_1) (\alpha_1 \dot{\alpha}_1 + \beta_1 \dot{\beta}_1) - \\ - h (b_3 \dot{\beta}_1 - b_2 \dot{\zeta}) + h \omega (b_3 \alpha_1 - b_2 \eta) + \frac{K_0}{K_1} \cdot \dot{\omega} \cdot \alpha_1 \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{2} \right).$$

Здесь

$$a_1 = \frac{12EI}{m(\tau) l^3}, \quad a_2 = \frac{6EI}{m(\tau) l^2}, \quad b_1 = \frac{K_0(\tau) \cdot \omega(\tau)}{K_1(\tau)}, \quad b_2 = \frac{6EI}{K_1(\tau) l^2}, \\ b_3 = \frac{4EI}{K_1(\tau) \cdot l}, \quad \gamma_0 = \frac{\kappa_0 \cdot m(0)}{m(\tau)}, \quad \gamma_1 = \frac{\kappa_1 \cdot m(0)}{m(\tau)}, \quad \varphi = \int_0^t \omega(\tau) \cdot dt,$$

η , ζ и α_1 , β_1 — линейные и угловые перемещения точки крепления диска к валу; h — коэффициент внутреннего трения; κ_0 , κ_1 — постоянные коэффициенты внешнего трения; ε — эксцентриситет диска; K_0 , K_1 — полярный и экваториальный моменты инерции диска; l — длина вала; I — экваториальный момент инерции площади сечения вала; E — модуль упругости. Предполагается, что угловая скорость ротора $\omega(\tau)$ является медленно изменяющейся функцией времени.

Все члены правых частей уравнений системы (1), кроме $\varepsilon \omega^2 \cdot \cos \varphi$ и $\varepsilon \omega^2 \cdot \sin \varphi$, имеют порядок малости μ (μ — малый положительный параметр). Поэтому (1) представляет собой систему квазилинейных дифференциальных уравнений с переменными во времени коэффициентами.

Вводя комплексные переменные $z_1 = \eta + i\zeta$, $z_2 = \dot{\eta} + i\dot{\zeta}$, $z_3 = \alpha_1 + i\beta_1$, $z_4 = \dot{\alpha}_1 + i\dot{\beta}_1$, из рассмотрения порождающей системы, получаемой отбрасыванием малых членов в (1), находим фундаментальное уравнение

$$\lambda^4 - b_1 \lambda^3 - (a_1 + b_3) \lambda^2 + a_1 b_1 \lambda + a_1 b_3 - a_2 b_2 = 0. \quad (2)$$

Полагая в (2) $b_1 = \frac{K_0}{K_1} \omega = 2\omega$, что имеет место для тонкого диска, получим

$$\omega = \frac{\lambda^4 - (a_1 + b_3) \lambda^2 + \frac{1}{4} a_1 b_3}{2\lambda (\lambda^2 - a_1)}.$$

Для приведения системы (1) к стандартному виду введем новые переменные $A_k(t)$ и $\theta_k(t)$ ($k = 1, \dots, 4$) по формулам

$$\eta = \sum_{k=1}^4 A_k \cos \theta_k + d_1 \cos \varphi, \quad \dot{\eta} = - \sum_{k=1}^4 \lambda_k A_k \sin \theta_k - \omega d_1 \sin \varphi, \\ \zeta = \sum_{k=1}^4 A_k \sin \theta_k + d_1 \sin \varphi, \quad \dot{\zeta} = \sum_{k=1}^4 \lambda_k A_k \cos \theta_k + \omega d_1 \cos \varphi, \\ \alpha_1 = \frac{1}{a_2} \sum_{k=1}^4 (a_1 - \lambda_k^2) A_k \cos \theta_k + d_2 \cos \varphi, \\ \dot{\alpha}_1 = - \frac{1}{a_2} \sum_{k=1}^4 \lambda_k (a_1 - \lambda_k^2) A_k \sin \theta_k - \omega d_2 \sin \varphi, \quad (3) \\ \beta_1 = \frac{1}{a_2} \sum_{k=1}^4 (a_1 - \lambda_k^2) A_k \sin \theta_k + d_2 \sin \varphi, \\ \dot{\beta}_1 = \frac{1}{a_2} \sum_{k=1}^4 \lambda_k (a_1 - \lambda_k^2) A_k \cos \theta_k + \omega d_2 \cos \varphi,$$

где $d_1(\tau)$ и $d_2(\tau)$ — амплитуды вынужденных колебаний при $\mu = 0$ и τ , рассматриваемом в качестве параметра,

$$d_1(\tau) = \frac{\varepsilon \omega^2 [\omega^2 - b_3(\tau)]}{f(\omega)}, \quad d_2(\tau) = \frac{\varepsilon b_2(\tau) \omega^2}{f(\omega)}, \\ f(\omega) = [a_1(\tau) - \omega^2] [\omega^2 + b_3(\tau)] - a_2(\tau) b_2(\tau).$$

Подставляя (3) в (1) и учитывая переменность τ , получим систему уравнений в стандартной форме

$$\frac{dA_k}{dt} = -\frac{1}{\lambda_k \cdot \Delta_k} \mu F_5, \quad \frac{d\theta_k}{dt} = \lambda_k + \frac{1}{\lambda_k \cdot A_k \cdot \Delta_k} \mu F_6, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \mu F_5 &= \mu \left[d_1' (\lambda_k + \omega) + \frac{d_2'}{b_2} (a_1 - \lambda_k^2) (\lambda_k - \omega) \right] \cdot \cos(\varphi - \theta_k) + \\ &+ \mu F_1 \sin \theta_k - \mu F_2 \cos \theta_k + \frac{a_1 - \lambda_k^2}{b_2} (\mu F_3 \sin \theta_k - \mu F_4 \cos \theta_k) - \\ &- \mu A_k \lambda_k' \frac{a_1 - \lambda_k^2}{a_2 b_2} [a_1 + b_3 - 6\lambda_k (\lambda_k - \omega)]; \\ \mu F_6 &= \mu \left[d_1' (\lambda_k + \omega) + \frac{d_2'}{b_2} (a_1 - \lambda_k^2) (\lambda_k - \omega) \right] \sin(\varphi - \theta_k) + \mu F_1 \cos \theta_k + \\ &+ \mu F_2 \sin \theta_k + \frac{a_1 - \lambda_k^2}{b_2} (\mu F_3 \cos \theta_k + \mu F_4 \sin \theta_k), \\ \Delta_k &= 2 \left[1 + \frac{(\lambda_k - \omega) (a_1 - \lambda_k^2)^2}{a_2 b_2 \lambda_k} \right], \\ d_1'(\tau) &= \frac{d}{d\tau} [d_1(\tau)], \quad d_2'(\tau) = \frac{d}{d\tau} [d_2(\tau)], \quad \lambda_k' = \frac{d}{d\tau} [\lambda_k(\tau)], \end{aligned}$$

μF_i ($i = 1, \dots, 4$) — малые члены правых частей соответствующих уравнений системы (1).

Раскрывая правые части уравнений (4), при помощи подстановки

$$A_k = y_k(\tau) + \mu U_k(t, y_k, \theta_k), \quad \theta_k = \int \lambda_k(\tau) dt + \theta_k(\tau) + \mu v_k(t, y_k, \theta_k)$$

получим следующие уравнения первого приближения для нерезонансного случая

$$\begin{aligned} \Delta_k(\tau) \frac{dy_k}{dt} &= -\gamma_1(\tau) y_k \left\{ \sum_{i=1}^4 [(1 - \delta_{ik}) C_{ik}(\tau) + 1] y_i^2 + [1 + C_{\omega k}(\tau)] d_1^2(\tau) \right\} - \\ &- h y_k \left\{ \frac{b_3(\tau) [a_1(\tau) - \lambda_k^2(\tau)]^2}{a_2(\tau) b_2(\tau)} + 2\lambda_k^2(\tau) - a_1(\tau) \right\} [1 - C_{\omega k}(\tau)] - \gamma_0(\tau) y_k - \\ &- y_k \frac{[a_1(\tau) - \lambda_k^2(\tau)] \lambda_k'(\tau)}{\lambda_k(\tau) a_2(\tau) b_2(\tau)} \{a_1(\tau) + b_3(\tau) + 6\lambda_k(\tau) [\omega - \lambda_k(\tau)]\} - \\ &- y_k \frac{[a_1(\tau) - \lambda_k^2(\tau)]^2 \omega'}{\lambda_k(\tau) a_2(\tau) b_2(\tau)} \left\{ \sum_{i=1}^4 (2 - \delta_{ik}) \left[\frac{a_1(\tau) - \lambda_i^2(\tau)}{a_2(\tau)} \right]^2 y_i^2 + 2 [d_2^2(\tau) - 1] \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_k(\tau) \frac{dv_k}{dt} &= \sum_{i=1}^4 (1 - \delta_{ik}) [\lambda_i(\tau) - \omega] \left[\frac{a_1(\tau) - \lambda_i^2(\tau)}{a_2(\tau)} \right]^2 \left[\frac{a_1(\tau) - \lambda_k^2(\tau)}{a_2(\tau) b_2(\tau)} \right] y_i^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^4 [\lambda_k(\tau) - \omega] \frac{[a_1(\tau) - \lambda_k^2(\tau)]^2}{a_2(\tau) b_2(\tau)} \frac{[a_1(\tau) - \lambda_i^2(\tau)]}{a_2(\tau)} y_i^2 + \\ &+ d_2^2(\tau) [\lambda_k^2(\tau) - \omega] \frac{[a_1(\tau) - \lambda_k^2(\tau)]^2}{a_2(\tau) b_2(\tau)}, \quad (i, k = 1, \dots, 4), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$C_{ik} = \frac{\lambda_i}{\lambda_k}, \quad C_{\omega k} = \frac{\omega}{\lambda_k}, \quad \omega' = \frac{d}{d\tau} [\omega(\tau)],$$

δ_{ik} — символ Кронекера.

Для определения амплитуды колебаний y_k используются уравнения (5). Затем из (6) находятся фазы ν_k . В рассматриваемом случае представляют интерес только амплитуды колебаний ротора.

Полагая в (5)

$$\frac{dy_k}{dt} = 0, \quad \dot{\lambda}_k = 0, \quad \dot{\omega} = 0,$$

получим систему уравнений для определения амплитуды колебаний y_k ($k = 1, \dots, 4$) рассматриваемой системы при стационарных режимах.

$$y_k \cdot \left\{ \sum_{i=1}^4 [1 + (1 - \delta_{ik}) \cdot C_{ik}] \cdot y_i^2 - H_k \right\} = 0, \quad (7)$$

где

$$H_k = - \left\{ \frac{h}{\gamma_1} \left[\frac{b_3 (a_1 - \lambda_k^2)^2}{a_2 b_2} - (a_1 - 2\lambda_k^2) \right] (1 - C_{\omega k}) + (1 + C_{\omega k}) d_1^2 + \frac{z_0}{z_1} \right\}. \quad (8)$$

Нестационарные почти периодические колебания системы, обусловленные одновременным изменением массы и угловой скорости ротора в закритических областях, наблюдаются при прохождении зон автоколебаний, в которых, как видно из (7), могут проявляться одна, две, три или четыре частоты собственных колебаний. В дальнейшем будем исследовать нестационарные процессы прохождения системы через область автоколебаний с первой частотой прямой прецессии λ_1 . Для этого случая при условии

$$y_1 \neq 0, \quad y_2 = y_3 = y_4 = 0, \quad (9)$$

принимая $h = \delta / (\omega - \lambda_1)$ (δ — постоянная величина), из (7) и (8) находим выражение амплитуды колебаний для стационарных режимов с частотами ω и λ_1 :

$$y_1^2 = H_1 = \frac{\delta}{\gamma_1 \lambda_1} \left[\frac{b_3 (a_1 - \lambda_1^2)^2}{a_2 b_2} + 2\lambda_1^2 - a_1 \right] - \left(1 + \frac{\omega}{\lambda_1} \right) d_1^2 - \frac{z_0}{z_1}. \quad (10)$$

Исследование устойчивости стационарных режимов колебаний с частотами ω и λ_1 выполняется с помощью уравнений в вариациях для системы (5)

$$\Delta_k \frac{dW_k}{dt} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial Y_k}{\partial y_j} W_j, \quad (11)$$

где W_k — малые возмущения; Y_k — правые части уравнений (5). На основании (11) и (9) получим следующее характеристическое уравнение:

$$\left[\frac{\gamma_1 (3y_1^2 - H_1)}{\Delta_1} + \gamma \right] \left\{ \frac{\gamma_1 [(1 + C_{12}) y_1^2 - H_2]}{\Delta_2} + \gamma \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\gamma_1 [(1 + C_{13}) y_1^2 - H_3]}{\Delta_3} + \gamma \right\} \left\{ \frac{\gamma_1 [(1 + C_{14}) y_1^2 - H_4]}{\Delta_4} + \gamma \right\} = 0, \quad (12)$$

где γ — характеристический показатель. При $\gamma < 0$ рассматриваемый стационарный режим является устойчивым. Так как $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $\gamma_1 > 0$ и $y_1^2 = H_1$, то из (12) определяются четыре условия устойчивости:

$$\frac{H_1}{\Delta_1} > 0, \quad H_1 (1 + C_{12}) - H_2 > 0, \quad H_1 (1 + C_{13}) - H_3 > 0, \\ H_1 (1 + C_{14}) - H_4 > 0. \quad (13)$$

Первое из неравенств (13) при $\Delta_1 > 0$ устанавливает область существования рассматриваемого режима, в которой амплитуда колебаний y_1 принимает действительные значения. Второе и четвертое из неравенств (13) всегда выполняются, так как $\lambda_2 > \omega$, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, $|\lambda_4| > \lambda_1$ и в закритической зоне $H_{2,3,4} < 0$. Следовательно, устойчивость стационарных режимов колебаний

с частотами ω и λ_1 определяется одним условием, выражаемым третьим из неравенств (13).

В дальнейшем будем полагать, что угловая скорость и масса ротора изменяются во времени по линейному закону

$$\omega = \omega_0 + k\tau, \quad m = m_0 + k_1\alpha\tau,$$

где ω_0 и m_0 — угловая скорость и масса ротора в начальный момент времени, соответственно k и k_1 — скорость изменения частоты оборотов и массы ротора; α — постоянная величина.

Рассмотрим нестационарные процессы прохождения через область автоколебаний с частотой λ_1 в результате одновременного изменения угловой скорости и массы ротора. Из (5), (6) с учетом (10) и начальных условий (9)

находим

$$\Delta_1 \frac{dy_1}{dt} = \gamma_1 y_1 \left\{ H_1 - y_1^2 - \frac{(a_1 - \lambda_1^2) \lambda_1'}{\gamma_1 a_2 b_2 \lambda_1} [a_1 + b_3 + 6\lambda_1(\omega - \lambda_1)] - \frac{(a_1 - \lambda_1^2)^2 \omega'}{\gamma_1 a_2 b_2 \lambda_1} \left[\left(\frac{a_1 - \lambda_1^2}{a_2} \right)^2 y_1^2 + 2(d_2^2 - 1) \right] \right\}, \quad (14)$$

$$\Delta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} = (\lambda_1 - \omega) \frac{(a_1 - \lambda_1^2)^2}{a_2 b_2} \left(d_2^2 + \frac{a_1 - \lambda_1^2}{a_2} y_1^2 \right). \quad (15)$$

Уравнение (14) можно упростить, если принять за новую переменную $u = y_1^{-2}$; после преобразований получим

$$\frac{du}{dt} + P(\tau)u = Q(\tau), \quad (16)$$

где

$$P(\tau) = \frac{2\gamma_1}{\Delta_1} \left\{ H_1 - \frac{(a_1 - \lambda_1^2) \lambda_1'}{\gamma_1 a_2 b_2 \lambda_1} [a_1 + b_3 + 6\lambda_1(\omega - \lambda_1)] - 2 \frac{(a_1 - \lambda_1^2)^2 \omega'}{\gamma_1 a_2 b_2 \lambda_1} (d_2^2 - 1) \right\}, \quad (16a)$$

$$Q(\tau) = \frac{2}{\Delta_1} \left[\gamma_1(\tau) + \frac{(a_1 - \lambda_1^2)^4 \omega'}{a_2^3 b_2 \lambda_1} \right].$$

Уравнение (16) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка с правой частью. Приводя его к квадратурам, а затем возвращаясь к переменной y_1 и полагая $y_1 = y_1(0)$ при $t = 0$, получим

$$y_1^2 = \frac{\exp\left(\int P(\tau) d\tau\right)}{\int Q(\tau) \exp\left(\int P(\tau) d\tau\right) d\tau + \frac{1}{y_1^2(0)}}. \quad (17)$$

После нахождения y_1^2 фаза ϑ_1 определяется из выражения

$$\vartheta_1 = \int \frac{(\lambda_1 - \omega) (a_1 - \lambda_1^2)^2}{a_2 b_2 \Delta_1} \left[d_2^2 + \frac{a_1 - \lambda_1^2}{a_2} y_1^2 \right] d\tau + \vartheta_1(0).$$

Преобразуем (17):

$$y_1^2 = y_1^2(0) \exp\left(\int P(\tau) d\tau\right) \left[1 + y_1^2(0) \int Q(\tau) \exp\left(\int P(\tau) d\tau\right) d\tau \right]^{-1}. \quad (18)$$

Из (18) видно, что амплитуда колебаний гироскопической системы в нестационарном процессе зависит от величин, определяющих подынтегральные выражения, и в первую очередь $P(\tau)$. От знака показателя экспоненты в (18), т. е. от знака $P(\tau)$, зависит характер изменения y_1^2 . Так как $\gamma_1 > 0$ и $\Delta_1 > 0$, то знак $P(\tau)$ определяется выражением в фигурных скобках (16a).

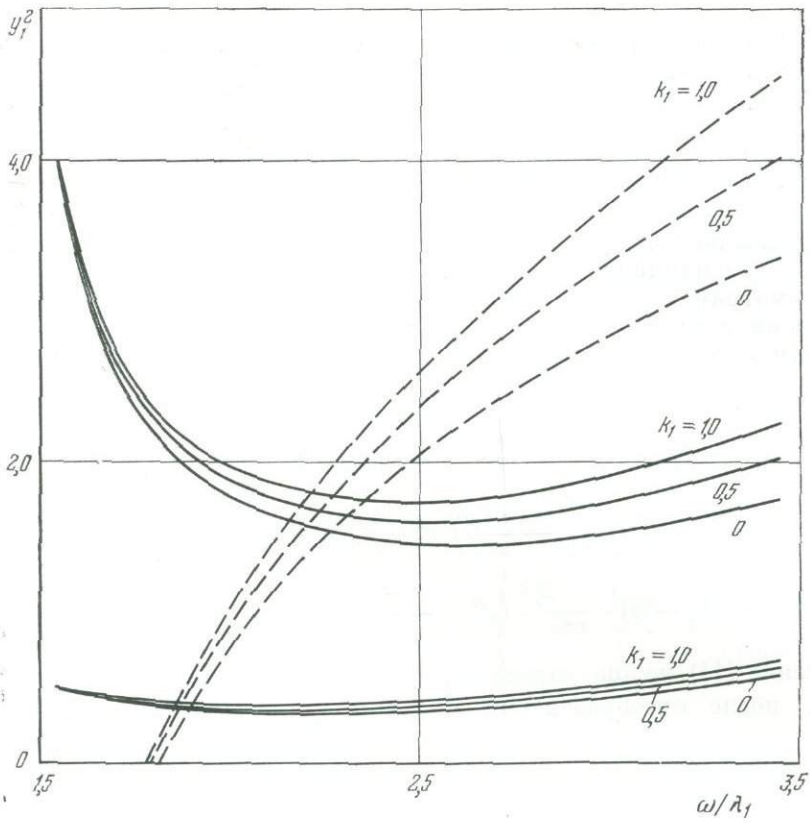


Рис. 2

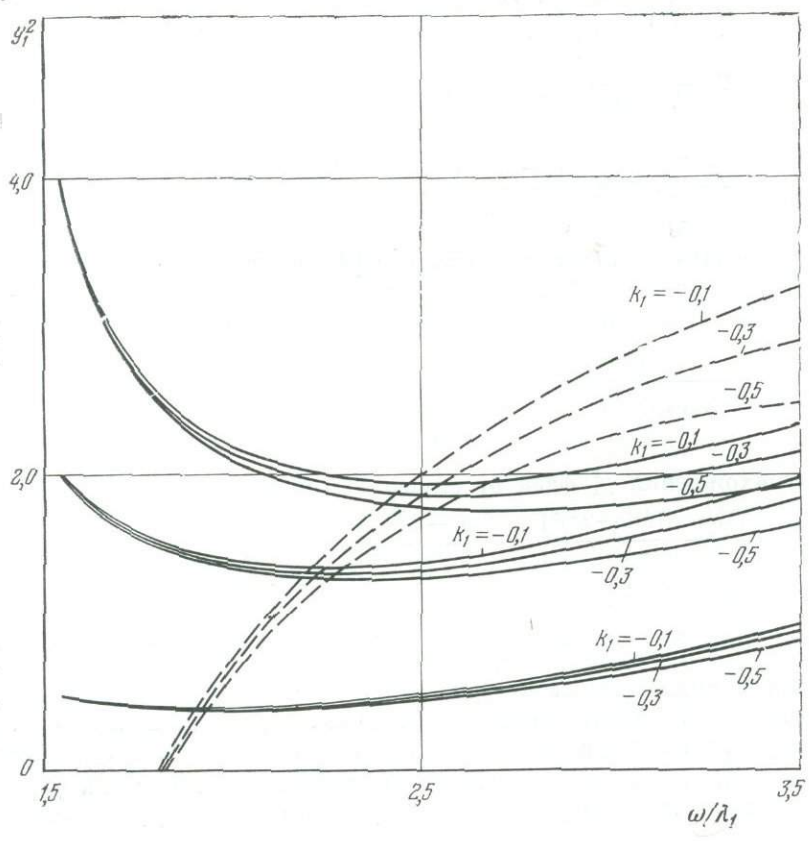


Рис. 3

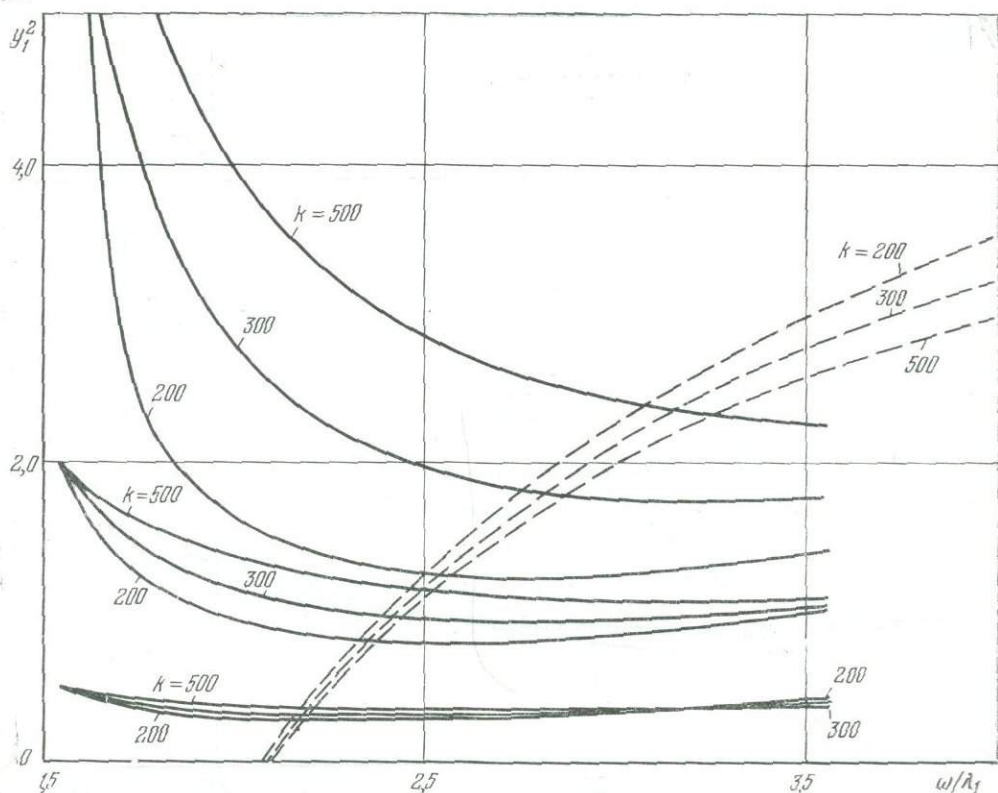


Рис. 4

Это выражение является алгебраической суммой трех членов. Первый член представляет собой амплитуду колебаний при стационарном режиме, а второй и третий члены учитывают соответственно скорость изменений частоты собственных колебаний λ_1' и частоты оборотов ω' . После прохождения основного резонанса система, приближаясь к области устойчивых стационарных режимов с частотами ω и λ_1 в результате роста угловой скорости и массы ротора, будет иметь $H_1 < 0$, т. е. $P(\tau) < 0$. Отсюда следует, что $\exp[\int P(\tau) d\tau] \rightarrow 0$. Это означает, что нестационарные колебания вне области существования рассматриваемых стационарных режимов затухают тем больше, чем дальше система находится в этой зоне.

При прохождении системой области стационарных режимов, т. е. при $H_1 > 0$, выражение $P(\tau)$ принимает положительные значения. Поэтому с увеличением времени нахождения системы в области стационарных режимов растет величина амплитуды нестационарных колебаний y_1^2 , приближаясь к H_1 .

Как видно из (18), y_1^2 зависит также и от начальных значений $y_1^2(0)$. Большим значением $y_1^2(0)$ будут отвечать большие значения y_1^2 при прочих равных условиях нестационарного процесса.

Рассмотрим влияние различных факторов (эксцентриситета диска, скорости изменения массы и числа оборотов ротора) на амплитуду колебаний при нестационарных процессах прохождения системы через область автоколебаний, расположенную за первой критической скоростью. С этой целью строим кривые зависимости y_1^2 от отношения частот ω/λ_1 при разных начальных значениях $y_1^2(0)$ и варьировании одного из параметров ε , k_1 или k . В качестве примера на рис. 2—7 приведены указанные кривые для нестационар-

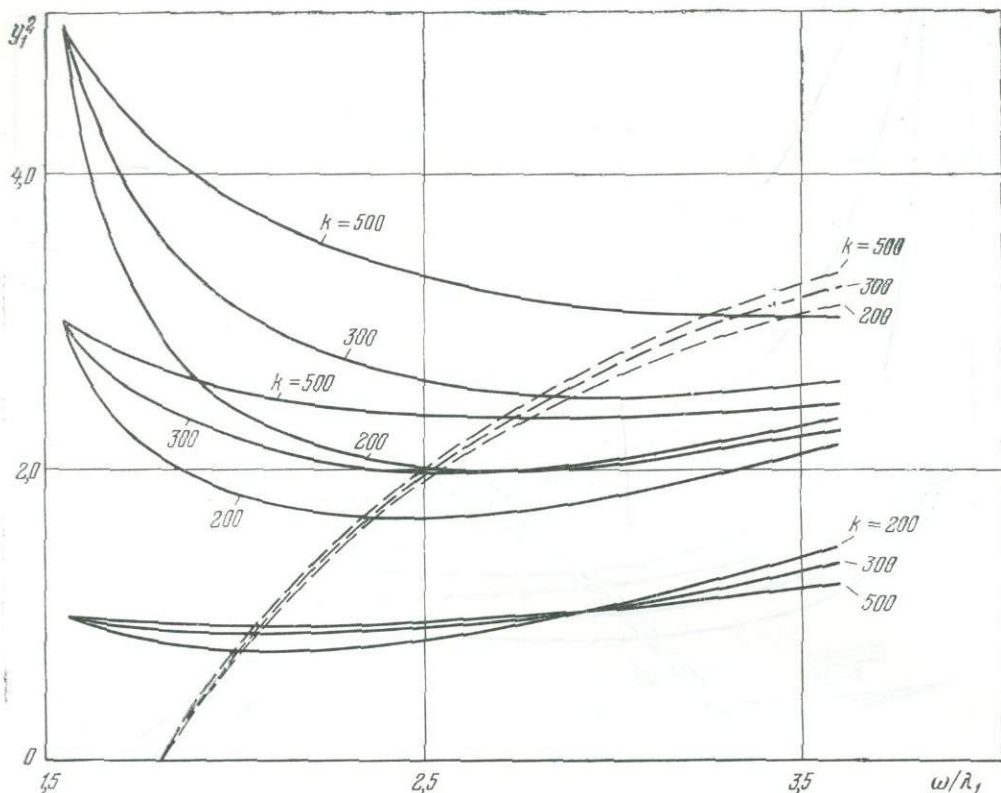


Рис. 5

ных процессов при следующих значениях параметров системы:

$EI = 1,62 \cdot 10^8$ кгсм², $l = 30$ см, радиус диска $R = 20$ см, $m_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг·см⁻¹сек², $\omega_0 = 600$ сек⁻¹, $\alpha = 0,0001$ кг·см⁻¹сек, $\delta = 0,003$, $\kappa_0 = 0,2$ сек⁻¹,

$\kappa_1 = 0,1$ сек⁻¹мм⁻². Кроме того, на этих рисунках нанесены штриховые линии, соответствующие амплитудам колебаний системы для устойчивых стационарных режимов при различных значениях варьируемых параметров.

В изучаемых нестационарных процессах колебаний рассматриваемой системы происходит одновременное изменение угловой скорости и массы ротора. Поэтому скорость прохождения области стационарных почти периодических режимов колебаний системы определяется как скоростью изменения числа оборотов, так и скоростью изменения массы ротора.

Сначала выясним влияние скорости изменения массы ротора (при прочих равных условиях) на амплитуду нестационарных колебаний. Зависимость функции y_1^2 от ω/λ_1 при разных начальных значениях $y_1^2(0)$, $k = 2001/\text{сек}^2$ и $\varepsilon = 1,0$ мм представлена на рис. 2 и 3. Из представленных графиков следует, что до области стационарных почти периодических режимов (при равных начальных условиях) квадрат амплитуды нестационарных колебаний падает тем быстрее, чем медленнее растет масса (рис. 2) и чем быстрее убывает масса (рис. 3). Далее, в области устойчивых стационарных режимов характер зависимости y_1^2 от ω/λ_1 изменяется. Величина квадрата амплитуды нестационарных колебаний y_1^2 начинает возрастать и тем быстрее, чем быстрее растет масса и чем медленнее убывает масса ротора.

Исследуем теперь влияние скорости изменения числа оборотов при нестационарных колебаниях системы. На рис. 4 и 5 приведены (при разных начальных условиях) зависимости функций y_1^2 от безразмерного отношения

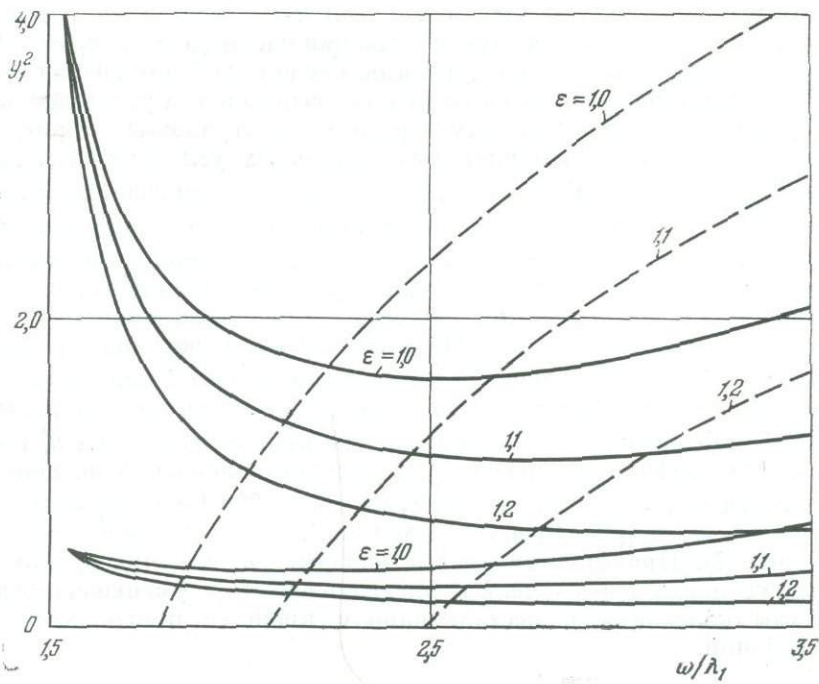


Рис. 6

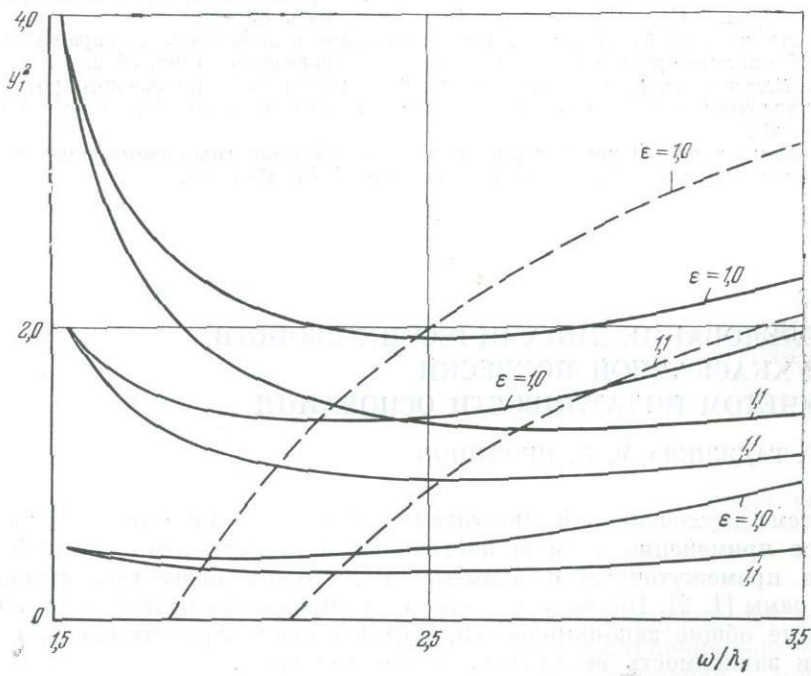


Рис. 7

ω/λ_1 для трех значений k . При этом для случая возрастания массы (рис. 4) $k_1 = 0,5$, $\varepsilon = 1,1$ мм, а для случая убывания массы (рис. 5) $k_1 = -0,2$, $\varepsilon = 1,0$ мм. Из рис. 4 и 5 следует, что амплитуда колебаний сначала уменьшается (первая стадия нестационарного процесса), а затем увеличивается в области устойчивых стационарных режимов (штриховые линии). Кроме того, замечаем, что (при одинаковых начальных условиях) чем медленнее увеличивается число оборотов k , тем быстрее уменьшается величина y_1^2 на первой стадии нестационарного процесса и тем медленнее нарастает y_1^2 на второй стадии этого процесса. При малых начальных значениях $y_1^2(0)$ указанное влияние величины k на амплитуду нестационарных колебаний не сказывается на последней стадии переходного процесса, начиная с некоторых значений отношения частот ω/λ_1 . На этих участках переходного режима меньшим скоростям увеличения числа оборотов отвечают большие значения y_1^2 .

Для определения влияния эксцентриситета ε на амплитуду нестационарных колебаний на рис. 6 и 7 представлены кривые изменения y_1^2 в функции от ω/λ_1 . Эти графики построены для различных значений эксцентриситета ε при разных начальных значениях $y_1^2(0)$ и $k = 200$ 1/сек², $k_1 = 0,5$ в случае возрастания массы (рис. 6) и $k = 200$ 1/сек², $k_1 = -0,1$ в случае убывания массы (рис. 7). Приведенные кривые показывают, что при одинаковых начальных условиях с увеличением эксцентриситета ε уменьшаются значения амплитуды колебаний в нестационарном процессе прохождения области автоколебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Бессонов, Е. Рахимов. Нестационарные колебания быстроходных вертикальных роторов с изменяющейся во времени массой. — *Машиноведение*, 1972, № 1.
2. Е. Рахимов. Нестационарные колебания гибкого ротора с переменной массой на жестких опорах. — Сб. «Механика машин», 1973, вып. 39—40.
3. Г. И. Аникеев, Б. В. Мацеевич. Нестационарные колебания в автовращательной роторной системе при изменении массы. — *Машиноведение*, 1968, № 2.
4. А. П. Бессонов, Э. Е. Сильвестров. Влияние массы гироскопического ротора на его автоколебания. — Сб. «Теория механизмов и машин», вып. 13. Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.
5. Э. Е. Сильвестров. О почти периодических колебаниях гироскопического ротора при изменении массы. — Сб. «Механика машин», 1974, вып. 46.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ДВУХКАСКАДНОЙ ПОДВЕСКИ С УЧЕТОМ ПОДАТЛИВОСТИ ОСНОВАНИЯ

Е. Г. ГАДЖИЕВА, М. Д. ПЕРМИНОВ

Система двухкаскадной амортизации объектов в последнее время находит широкое применение в машиностроении и судостроении. В этой системе имеется промежуточный фундамент под группу агрегатов, выполненный в виде рамы [1, 2]. Поэтому представляет определенный интерес исследовать некоторые общие закономерности, определяющие эффективность такой системы и зависимость ее свойств от параметров.

В настоящей работе на относительно простых моделях исследованы общие свойства системы двухкаскадной амортизации. Такое исследование позволило выявить как количественные, так и качественные закономерности.

Были проведены оценка эффективности двухкаскадной системы виброамортизации и сравнение ее с однокаскадной в широком диапазоне частот с учетом демпфирования при абсолютно жестком основании.

Рассмотрим динамическую модель в виде линейной двухмассовой системы с активным силовым гармоническим воздействием со стороны механизмов, смонтированных на основной раме (рис. 1).

Исследуем вибрации системы только в вертикальном направлении. Пусть M_1 — масса основной рамы с установленным на ней оборудованием, M_2 — масса промежуточной рамы. Каскад амортизации I характеризуется комплексной жесткостью

$$k_1^* = k_1 (1 + i\delta_1),$$

где k_1 — упругая жесткость каскада амортизации I; δk_1 — характеризует демпфирующие свойства амортизаторов каскада I; Каскад амортизации II характеризуется жесткостью $k_2^* = k_2 (1 + i\delta_2)$. Критерием оценки эффективности системы двухкаскадной амортизации служит коэффициент виброизоляции T :

$$T = F_2/F_1,$$

где F_2 — сила, передаваемая на фундамент; F_1 — сила возбуждения.

Введем некоторые обозначения: пусть α — отношение коэффициента жесткости каскадов I и II, т. е. $\alpha = k_2/k_1$; β — отношение масс основной и промежуточной рам, т. е.

$$\beta = M_2/M_1;$$

Ω — отношение частоты возбуждения системы ω к частоте собственных колебаний системы ω_0 при $M_2 = 0$, т. е. $\Omega = \omega/\omega_0$.

Уравнения движения системы напомним в виде:

$$M_1 \ddot{x}_1 + k_1^* (x_1 - x_2) = F_1 e^{i\omega t}, \quad (1)$$

$$M_2 \ddot{x}_2 + k_1^* (x_2 - x_1) + k_2^* x_2 = 0.$$

Из (1) получаем выражение для коэффициента виброизоляции

$$T = \frac{k_1^* k_2^*}{[\omega^4 M_1 M_2 - \omega^2 M_1 (k_1^* + k_2^*) - \omega^2 M_2 k_1^* + k_1^* - k_2^*]}. \quad (2)$$

Двухкаскадная система амортизации имеет наибольшую по сравнению с однокаскадной эффективность на высоких частотах. Действительно, при больших значениях ω выражение для коэффициента виброизоляции в случае двухкаскадной системы преобразуется к виду:

$$T \cong \frac{(1 + \alpha)^2}{\alpha \beta} \frac{[(1 - \delta_1 \delta_2) + (\delta_1 + \delta_2)^2]^{1/2}}{\Omega^4}; \quad (3)$$

Для однокаскадной системы соответствующее выражение имеет вид:

$$T = \frac{(1 + \delta_1^2)^{1/2}}{\Omega^2}. \quad (4)$$

Следовательно, на высоких частотах снижение коэффициента виброизоляции для двухкаскадной системы происходит пропорционально четвертой степени частоты возбуждения, в случае же однокаскадной — пропорционально лишь второй степени частоты возбуждения.

Таким образом, двухкаскадная система виброамортизации эффективна на высоких частотах, т. е. в случаях, когда промежуточная рама является антивибрационным элементом. Но система двухкаскадной амортизации имеет недостатки в области низких частот, на которых появляется дополни-

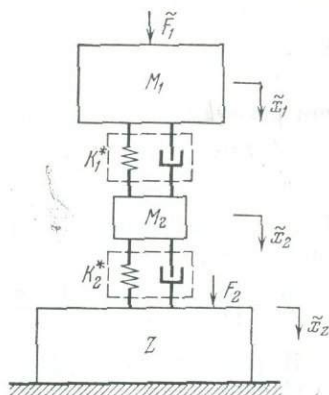


Рис. 1

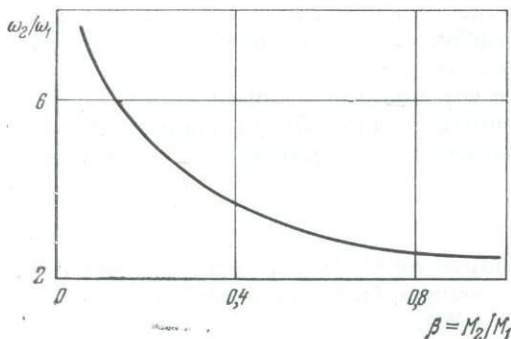


Рис. 2

второй резонансной частоты найдем из условия

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = 0. \quad (5)$$

Далее рассматриваем систему без учета демпфирования. Для такой системы T имеет вид:

$$T = \left[\frac{\alpha\beta}{(1+\alpha)^2} \Omega^4 - \frac{1+\alpha+\beta}{1+\alpha} \Omega^2 + 1 \right]^{-1}. \quad (6)$$

В результате дифференцирования получим: $\alpha_{\text{опт}} = 1 + \beta$.

Следовательно, относительные статические жесткости всех каскадов амортизаторов необходимо выбирать равными. Нагрузка, передаваемая статическим усилием на каскад II, будет $M_1 + M_2 = (1 + \beta) M_1$, а жесткость каскада II составит $k_2 (1 + \beta) k_1$. Для оптимального значения соотношения жесткостей имеем:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 + \sqrt{1 + \beta}}{\beta^{1/2}}. \quad (7)$$

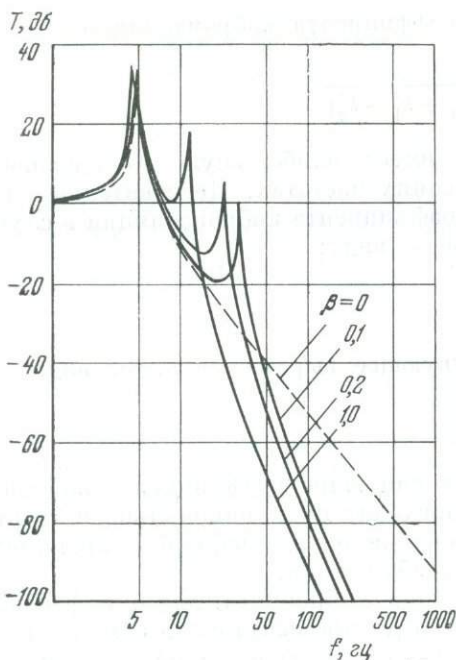


Рис. 3

тельный резонанс системы при частоте ω_2 , а следовательно, имеется провал амортизации.

Поэтому весьма желательно спроектировать систему двухкаскадной амортизации таким образом, чтобы вторая резонансная частота системы была наименьшей при определенном положении первого резонанса.

Проанализируем влияние на ω_2 отношения жесткостей каскада амортизаторов I и II, а также отношения масс основной и промежуточной рамы. Оптимальное отношение жесткостей при минимальном значении вто-

Графически зависимость отношения ω_2/ω_1 от отношения M_2/M_1 представлена на рис. 2.

График наглядно показывает, что увеличение массы промежуточной рамы улучшает динамические характеристики системы в области низких частот, так как снижает значение ω_2 при неизменном значении первой резонансной частоты ω_1 . В области высоких частот при увеличении β наблюдается улучшение вибрационных характеристик. Это следует из анализа выражения для коэффициента виброизоляции T .

Подстановка $\alpha_{\text{опт}}$ в (3) дает следующее выражение:

$$T = \frac{(2 + \beta)^2}{\beta(1 + \beta)} \cdot \frac{[(1 - \delta_1 \delta_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2]^{1/2}}{\Omega^4}. \quad (8)$$

Таким образом, увеличение массы промежуточной рамы улучшает общие характеристики двухкаскадной системы амортизации (см. рис. 3 сплош-

ные линии). С другой стороны, увеличение массы промежуточной рамы приводит к утяжелению всей установки, что не всегда желательно.

Далее проводилось исследование влияния податливости фундамента на динамические характеристики системы. Рассматривалась схема двухкаскадной системы амортизации с податливым фундаментом, имеющим конечный импеданс Z (рис. 1). Уравнение вынужденных колебаний для такой системы напишем в виде:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 + k_1^*(x_1 - x_2) = F_1 e^{i\omega t}, \\ M_2 \ddot{x}_2 + k_1^*(x_2 - x_1) + k_2^*(x_2 - x_z) = 0, \\ j\omega x_z Z + k_2(x_z - x_2) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Эффективность двухкаскадной системы амортизации будем характеризовать коэффициентом передачи $R = x_z/x_{zr}$, где x_z и x_{zr} — амплитуды после и до введения амортизации соответственно.

Из (9) для коэффициента передачи R получаем следующее выражение:

$$R = \frac{x_z}{x_{zr}} = \frac{k_1^* k_2^* \left[1 + \frac{i\omega (M_1 + M_2)}{Z} \right]}{\omega^4 M_1 M_2 - \omega^2 (M_1 + M_2) k_1^* - \omega^2 M_1 k_2^* + k_1^* k_2^* + \frac{i\omega M_1}{Z} [-\omega^2 M_2 + (1 + \beta) k_1^*]}.$$

В качестве расчетной принята динамическая модель со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} M_1 &= 230 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{см}, & M_2 &= 40 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{см}, & M_{\text{фунд}} &= 3500 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{см}, \\ k_1 &= 2,25 \cdot 10^6 \text{ кг}/\text{см}, & k_2 &= 2,4 \cdot 10^6 \text{ кг}/\text{см}, & \alpha_0 &= 0,91 \sqrt{\omega}, & \delta_1 &= \delta_2 = 0,1, \\ I_x &= 1,57 \cdot 10^9 \text{ см}^4, & l &= 8500 \text{ см}. \end{aligned}$$

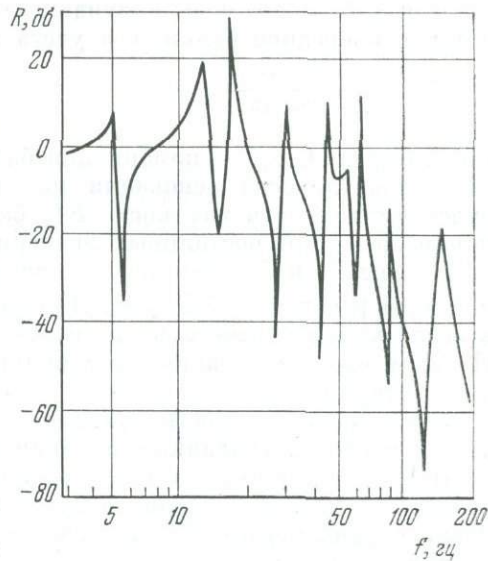


Рис. 4

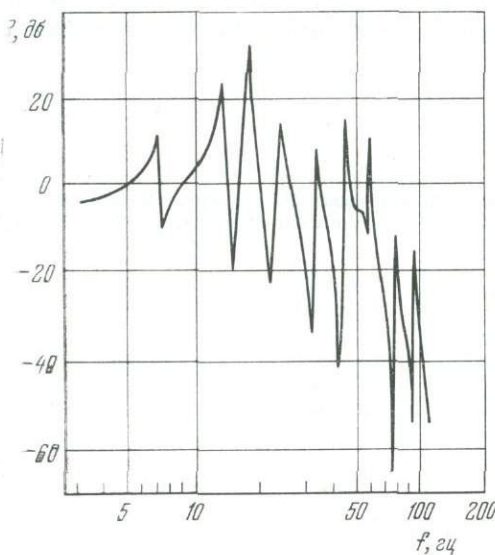


Рис. 5

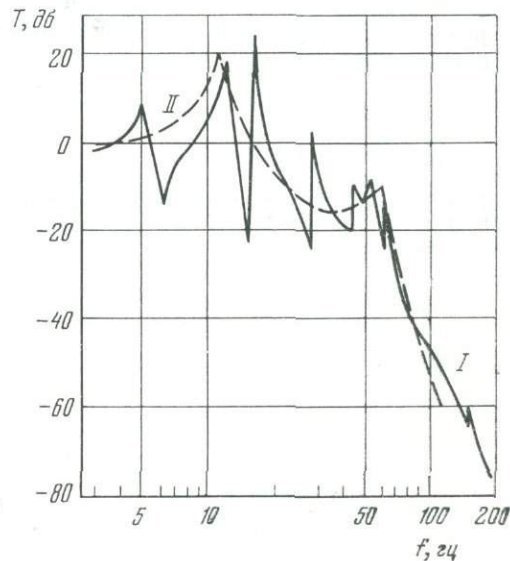


Рис. 6

Для выбранной модели фундамента в виде свободной балки импеданс Z_1 в точке посредине балки (без учета демпфирования) напишем в виде

$$\frac{Z}{i\omega M_{\text{фунд}}} = \frac{A(\alpha_0)}{\alpha_0 E(\alpha_0)},$$

где $E(\alpha_0)$ и $A(\alpha_0)$ — комбинации балочных функций. Для выявления влияния податливости основания на динамические характеристики системы будем варьировать жесткость EI_x балочного фундамента и соответственно параметр α при постоянных значениях остальных параметров системы.

На рис. 4 и 5 представлены зависимости R от f соответственно для $\alpha = 0,91 \sqrt{\omega}$ и $\alpha = 1,28 \sqrt{\omega}$. Наличие податливости приводит к выявлению в исследуемой колебательной системе дополнительных резонансных частот. На этих частотах возникают дополнительные пики кривой вибропередачи, что соответствует провалу амортизации вблизи этих частот (рис. 5).

Увеличение жесткости фундамента приводит к возрастанию резонансных частот системы, связанных с парциальными балочными частотами.

Представляет интерес анализ изменения величины коэффициента виброизоляции. Анализ проводился путем сопоставления схемы с жестко закрепленным фундаментом (II) и схемы с податливым фундаментом (I):

для схемы I:

$$T_1 = \frac{(1 + i\delta)^2}{\omega^4 \frac{M_1 M_2}{k_1 k_2} - \omega^2 \frac{M_1}{M_2} \left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right) (1 + i\delta) - \omega^2 \frac{M_1}{k_1} (1 + i\delta) + (1 + i\delta)^2 + \frac{M_1 \alpha_0 E_0}{M_0 A_0} \left[-\frac{\omega^2 M_2}{M_1} + 1 + \beta\right]},$$

для схемы II:

$$T_2 = \frac{k_2^* k_1^*}{M_1 M_2 \omega^4 - \omega^2 (M_2 k_1^* + M_1 k_1^* + M_1 k_2^*) + k_1^* k_2^*}.$$

На рис. 6 представлены зависимости коэффициента T от f для схем I и II. Анализ кривых, представленных на рис. 6, позволяет сделать следующий вывод: наличие податливости основания, и, следовательно, внутренних резонансов системы не влияет на наклон кривых и величину коэффициента виброизоляции на высоких частотах ($f > 100$ гц).

С увеличением жесткости фундамента уменьшается нежелательная зона повышенного вибрационного состояния системы.

В области низких частот при учете податливости отдельных элементов рамных конструкций возможно появление зон повышенного вибрационного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Скучек. Простые и сложные колебательные системы. М., «Мир», 1974.
2. I. C. Snowdon. Vibration and Shock in damped mechanical systems. London Willey, 1968.

ДИНАМИКА МОДЕЛИ РАБОЧЕГО КОЛЕСА РАДИАЛЬНО-ОСЕВОЙ ГИДРОТУРБИНЫ

Г. И. АНИКЕЕВ, В. Г. АВЕРЬЯНОВА, А. П. НИКИФОРОВ

В работе исследуются колебания рабочего колеса радиально-осевой гидротурбины. Используется динамическая модель колеса в виде круглого кольца на упругом основании. Подобная модель, но без учета влияния рабочей жидкости, предлагалась ранее [1] для определения частот собственных колебаний рабочих колес. В настоящей работе исследуется динамика указанной модели с учетом внешних воздействий. Существовало, что рассмотрено влияние жидкости на колебания системы. Все внешние воздействия на элементы рабочего колеса, в частности на лопасти, предполагаются приложенными непосредственно к ободу колеса.

Рабочее колесо радиально-осевой гидротурбины представляет собой сложную упруго пространственную конструкцию, состоящую из лопастей, наружного обода, имеющего вид кольца, к которому крепятся лопасти, и из внутреннего фланца (ступицы) — массивной металлической детали, которая служит для крепления лопастей колеса и соединения всего колеса с валом турбины. Лопасти — это кривые закрученные стержни переменного сечения, имеющие переменную по длине жесткость. Конструкция подвержена действию гидродинамических сил со стороны протекающей через нее жидкости. Жидкость оказывает не только непосредственное силовое воздействие, приводящее к возникновению вынужденных и параметрических колебаний конструкции; она влияет на ее инерционные и демпфирующие свойства.

Как показали экспериментальные и теоретические исследования [1, 2], при колебаниях рабочего колеса внешний обод его либо перемещается как твердое тело, либо колеблется как кольцо с различным числом узлов. Поэтому представляется естественным исследовать динамику рабочего колеса на примере упрощенной модели в виде круглого кольца, воздействие на обод со стороны лопастей заменить воздействием некоторого упругого основания с коэффициентами постели k_1 и k_2 в радиальном и тангенциальном направлениях. Действие лопастей на обод не ограничивается их упругой реакцией на перемещение точек обода. Через лопасти на обод передается силовое воздействие потока жидкости, проходящего через рабочее колесо. Это воздействие включает в себя внешние возмущающие силы, а также силы демпфирования и дополнительные инерционные силы, характеризующиеся как действие присоединенных масс жидкости.

Напишем уравнение для определения изгибных колебаний кольца в его плоскости

$$\frac{EI}{R^4} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + m_p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) = \frac{\partial Q_r}{\partial \theta} - Q_t. \quad (1)$$

Здесь w — тангенциальное перемещение точек кольца, связанное с радиальным перемещением u соотношением

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = u; \quad (2)$$

R — радиус упругой линии; E — модуль упругости; I — момент инерции сечения кольца; Q_r , Q_t — распределенные радиальные и тангенциальные силы, действующие на кольцо; m_p — распределенная масса кольца с учетом присоединенных масс жидкости.

Уравнения колебания кольца как твердого тела имеют вид:

$$m_c \ddot{s}_c = R_s, \quad m_c \ddot{q}_c = R_q, \quad I \ddot{\alpha}_c = M_c. \quad (3)$$

Здесь s_c , q_c — перемещения центра инерции кольца (точки C), α_c — угол поворота радиуса кольца вокруг оси, проходящей через точку C ; R_s , R_q — составляющие равнодействующей сил, приложенных к кольцу в точке C ;

M_c — суммарный момент сил, приложенных к кольцу, относительно точки C ; I_0 — полярный момент инерции кольца.

Определим сначала распределенные силы Q_r и Q_t , приложенные к элементу обода. На наружную часть обода действует давление жидкости, находящейся в кольцевом зазоре; на внутреннюю поверхность обода действуют упругие реакции лопастей и непосредственное давление жидкости.

Давление жидкости, приложенное к внешней поверхности кольца, найдем из усеченных уравнений Навье — Стокса и из уравнения неразрывности жидкости в полярных координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \nu \rho \frac{\partial^2 C_\varphi}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \nu \rho \frac{\partial^2 C_r}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial C_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z} = 0.$$

Напишем граничные условия на поверхности кольца для жидкости, находящейся между внешней боковой поверхностью кольца и камерой:

$$C_r = v_r, \quad C_\varphi = v_\varphi, \quad C_z = 0; \quad (5)$$

на поверхности камеры

$$C_r = 0, \quad C_\varphi = 0, \quad C_z = 0. \quad (6)$$

Здесь v_r , v_φ — радиальная и тангенциальная составляющие скорости точек на боковой поверхности кольца; φ , r , z — полярные координаты частиц жидкости; C_r , C_φ , C_z — радиальная, тангенциальная и осевая составляющие скорости частиц жидкости; $\nu \rho$ — коэффициент вязкости жидкости, или коэффициент внутреннего трения.

Используя для определения давления уравнения (4), мы пренебрегаем

инерционными свойствами жидкости и учитываем нестационарность только граничным условиям.

Уравнения (4) можно несколько упростить. Вследствие малости толщины слоя жидкости можно заменить r на ξ под знаком производной и на R — вне знака производной:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \nu \rho \frac{\partial^2 C_\varphi}{\partial \xi^2}, \quad (R \cong R_2 \cong R_0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \nu \rho \frac{\partial^2 C_z}{\partial \xi^2}, \quad (0 < \xi < h),$$

$$\frac{\partial C_r}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z} = 0,$$

где R_2 — радиус камеры; R_0 — радиус недеформированной упругой линии кольца; h — толщина слоя жидкости, равная, с точностью до величин порядка δ (рис. 1),

$$h = \delta + u - e \cos \varphi, \quad \delta = R_2 - R_0, \quad (8)$$

γ , e — полярные координаты центра инерции кольца; γ — угол между линией центров и осью абсцисс, e — расстояние между центрами.

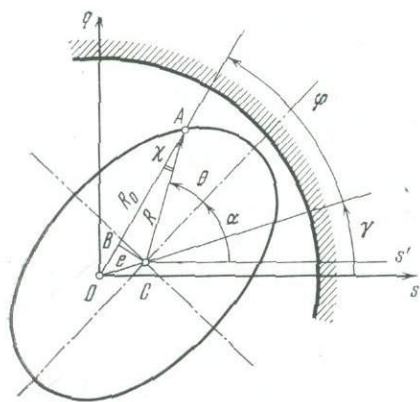


Рис. 1

Кроме того, на рис. 1 θ — угловая координата точки A на упругой линии кольца; u — радиальное смещение точки упругой линии, отсчитываемое вдоль радиуса в направлении к центру; α — угол поворота кольца вокруг оси, проходящей через его центр. Составляющие v_r , v_φ скорости точек поверхности кольца, входящие в граничные условия, определяются по формулам

$$v_r = \dot{e} \cos \varphi + e \dot{\gamma} \sin \varphi - \dot{u},$$

$$v_\varphi = (R_0 - u) \dot{\alpha} + e \dot{\gamma} \cos \varphi - \dot{e} \sin \varphi + \dot{w}.$$

Из уравнений (7) и граничных условий (5) и (6) нетрудно получить уравнения Рейнольдса для слоя жидкости

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{6\nu r}{R} \frac{\partial (v_\varphi h)}{\partial \varphi} - 12\nu r v_r$$

при граничных условиях

$$p = p_2, \quad z = 0, \quad p = p_1, \quad z = B_1,$$

где B_1 — толщина кольца.

Так как толщина кольца намного меньше диаметра ($B_1 \ll 2R$), то первым слагаемым в левой части уравнения (8) можно пренебречь.

Тогда давление на внешней поверхности будет

$$p = \frac{6\nu r e (\dot{\alpha} - 2\dot{\gamma}) \sin \varphi - 12\nu r \dot{e} \cos \varphi + 12\dot{u}}{(\delta + u - e \cos \varphi)^3} \cdot \frac{z(z-B)}{2} + \frac{p_1 - p_2}{B} z + p_2. \quad (9)$$

Давление на поверхность представляет собой нагрузку, нормальную к поверхности, направленную по радиусу кривизны кольца и поэтому несколько отличающуюся от радиальной составляющей, направленной по радиусу-вектору. В данном случае, когда величина прогиба u значительно меньше радиуса недеформированного кольца, это отличие несущественно; поэтому можно полагать, что составляющая радиальной нагрузки, распределенной по контуру, будет

$$Q_{r1} = \int_0^B (p_e - p_i) dz, \quad (10)$$

где p_e , p_i — давления на внешнюю и внутреннюю поверхности кольца.

По той же причине можно полагать, что тангенциальная составляющая нагрузки $Q_{t1} = 0$.

Радиальная нагрузка от внешнего давления будет

$$\int_0^B p_e dz = \frac{B^3 \nu r}{(\delta + u - e \cos \varphi)^3} [e \dot{\alpha} \cos \varphi - e(\dot{\alpha}/2 - \dot{\gamma}) \sin \varphi - \dot{u}] + \frac{p_1 + p_2}{2} B_1. \quad (11)$$

Из выражения (11) видно, что усилия на внешней поверхности обода обусловлены как изменениями давления жидкости в самом зазоре между ободом и стенкой камеры — первое слагаемое (11), так и величиной среднего давления вне зазора.

Из структуры первого члена (11) видно, что его величина быстро возрастает с уменьшением величины зазора. Если величина зазора различна на участках кольца, то интеграл в (11) распадается на сумму интегралов в соответствии с числом участков, причем каждый раз берется соответствующая ему величина зазора. В гидромашинах зазор обеспечивается с помощью уплотнения, которое занимает лишь часть боковой поверхности кольца. На участках кольца, где уплотнение отсутствует, зазор намного больше, и соответствующий ему первый член (11) будет намного меньше, чем для участков кольца, на котором расположено уплотнение. Поэтому в первый член (11) вместо ширины кольца B_1 следует подставить значение ширины уплотнения B .

Выражение для радиальной нагрузки, действующей со стороны жидкости на внутреннюю поверхность кольца, имеет ту же структуру, что и (11): но в этом случае первый член уравнения оказывается малым, так как слой жидкости внутри кольца большой. Радиальная нагрузка на внутреннюю поверхность кольца будет приближенно равна

$$\frac{p_1 + p_2}{2} B_1, \quad (12)$$

где B_1 — ширина кольца.

Учитывая (11) и (12), получим из (10) полную радиальную нагрузку, распределенную по контуру кольца,

$$Q_{r1} = \frac{B^3 \nu \rho [\dot{e} \cos \varphi - e (\dot{\alpha}/2 - \dot{\gamma}) \sin \varphi - \dot{u}] }{(\delta + u - e \cos \varphi)^3}.$$

Определим силы, действующие на внутреннюю поверхность кольца. Как уже отмечалось, мы упрощаем задачу, заменяя действие реальных лопастей действием упругого основания. При таком упрощении мы предполагаем лопасти невесомыми элементами и считаем массу лопастей не распределенной по поверхности лопасти, а некоторым образом присовокупленной к массе обода.

Силы реакции упругого основания, обусловленные смещением элементов кольца, будут пропорциональны относительным радиальным и тангенциальным смещениям элементов.

Для радиального смещения имеем (см. рис. 1)

$$\Delta R = R - R_0 = \sqrt{(R_0 - u)^2 - e^2 \sin^2 \varphi} + e \cos \varphi - R_0 \cong e \cos \varphi - u.$$

Величина распределенной радиальной нагрузки на кольцо, создаваемой действием упругого основания, будет

$$Q_{r2} = k_1 (e \cos \varphi_0 - u),$$

где

$$\varphi_0 = \theta + \alpha_0 - \gamma, \quad \alpha_0 = \alpha + \omega t.$$

Так как тангенциальное смещение элемента кольца

$$\Delta l = R \alpha_0 + w = (R_0 - u + e \cos \varphi_0) \alpha_0 + w,$$

то распределенная тангенциальная нагрузка будет

$$Q_{t2} = k_2 [(R_0 - u + e \cos \varphi_0) \alpha_0 + w].$$

Для определения сил, действующих на лопасть, необходимо решить задачу о течении жидкости в межлопастном пространстве. В общем виде эта задача очень сложна, поэтому сделаем ряд допущений.

Как уже отмечалось, воздействие жидкости на лопасти может быть подразделено на внешние возмущающие силы, силы демпфирования и дополнительные инерционные силы, характеризующиеся как действие присоединенных масс жидкости. В уравнениях движения жидкости силы демпфирования описываются членами, пропорциональными скорости, так называемыми вязкими членами, а действие присоединенных масс определяется, главным образом, инерционными членами.

Поскольку мы упрощаем инерционные характеристики самих лопастей, учитывая лишь их общую массу и распределяя ее по всему ободу, то вполне естественно поступить так же с присоединенными массами жидкости лопастей, полагая их отнесенными к ободу.

Не останавливаясь на процедуре определения величины присоединенных масс жидкости и полагая их найденными, сосредоточим внимание на определении сил демпфирования.

Для нахождения сил демпфирования рассмотрим уравнения жидкости без инерционных членов.

При исследовании течения жидкости в межлопастном пространстве следует иметь в виду, что лопасти искривлены и развернуты по отношению друг к другу на угол $\beta = 2\pi/n$ (где n — число лопастей, рис. 2). Будем рассматривать лопасти как стержни прямоугольного сечения с искривленной продольной осью. Кривизну профиля лопасти в направлении наименьшей жесткости учитывать не будем. В этом случае удобно воспользоваться уравнениями в цилиндрических координатах вида (7) и граничными условиями

$$\begin{aligned} C_\varphi = 0, \quad C_\eta = \dot{v}_2, \quad C_z = 0, \\ \eta = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} C_\varphi = 0, \quad C_\eta = \dot{v}_1 \cos \beta, \\ C_z = \dot{v}_1 \sin \beta, \quad \eta = h, \end{aligned}$$

где h — толщина слоя жидкости, равная

$$h = h_0 + \operatorname{tg} \beta \cdot z + v_2 - v_1 \cos \beta. \quad (14)$$

Среднюю толщину слоя h_0 выразим через углы α, β и перемещения v_1, v_2 лопастей:

$$h_0 = 2R_0 \operatorname{tg} \frac{B}{2} \left[\cos \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) - \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) \right] + v_1 \cos \beta - v_2.$$

Интегрируя (7) дважды, получим:

$$C_z = \frac{1}{2\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 \eta + C_2, \quad C_\varphi = \frac{1}{2R\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + C_3 \eta + C_4. \quad (15)$$

Из (15) с учетом (14) следует, что

$$C_1 = \frac{\dot{v}_1 \sin \beta}{h} - \frac{1}{2\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z} h, \quad C_2 = C_4 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{2R\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} h. \quad (16)$$

На основании (16) осевая и тангенциальная составляющие скорости частиц жидкости будут

$$C_z = \frac{1}{2\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial z} (\eta^2 - h\eta) + \frac{\dot{v}_1 \sin \beta}{h} \eta, \quad C_\varphi = \frac{1}{2R\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} (\eta^2 - h\eta). \quad (17)$$

Подставляя (17) в уравнения неразрывности жидкости, определим составляющую скорости C_η :

$$\begin{aligned} C_\eta = -\frac{1}{2\nu\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\eta^3}{3} - \frac{\eta^2 h}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(\frac{\eta^3}{3} - \frac{\eta^2 h}{2} \right) \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{v}_1 \eta^2}{2h} \sin \beta \right) + C_5. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая граничные условия (13), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} h^3 \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} h^3 \right) = \\ = 3\nu\rho \dot{v}_1 \frac{\partial h}{\partial z} \sin \beta - 6\nu\rho \dot{v}_2 + 6\nu\rho \dot{v}_1 \cos \beta. \end{aligned} \quad (19)$$

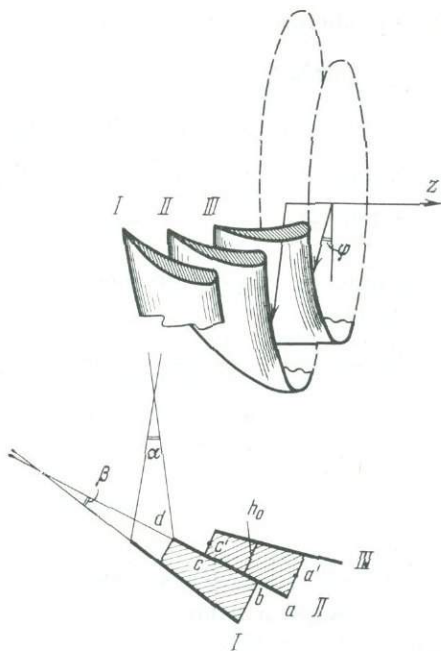


Рис. 2

Из уравнения (14) имеем

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \operatorname{tg} \beta.$$

Тогда правая часть (19) будет (β мало):

$$\begin{aligned} 3\nu\dot{v}_1 \operatorname{tg} \beta \sin \beta + 6\nu\dot{v}_1 \cos \beta - 6\nu\dot{v}_2 &\cong \\ \cong 6\nu\dot{v}_1 \left[\frac{v_1 \beta^2}{2} + \dot{v}_1 \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \right) - \dot{v}_2 \right] &\cong 6\nu\dot{v}_1 (\dot{v}_1 - \dot{v}_2), \end{aligned} \quad (20)$$

а уравнение, определяющее давление в межлопастном пространстве, будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} h^3 \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} h^3 \right) = 6\nu\dot{v}_1 (\dot{v}_1 - \dot{v}_2). \quad (21)$$

Частное решение (21) можно представить в виде

$$p = A(\varphi, z) (\dot{v}_1 - \dot{v}_2),$$

где A должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A}{\partial z} h^3 \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi} h^3 \right) = 6\nu\dot{v}_1.$$

При длинной и неширокой лопасти первый член в левой части (21) доминирует над вторым, в этом случае давление в межлопастном пространстве будет

$$p = 6\nu\dot{v}_1 (\dot{v}_1 - \dot{v}_2) \int \frac{z}{h^3} dz + C_6 \int \frac{dz}{h^3} + C_7.$$

Подставляя граничные условия

$$\begin{aligned} p &= p_a \quad \text{при } z = 0, \\ p &= p_b \quad \text{при } z = l \end{aligned}$$

и обозначая

$$B(z) = \int \frac{dz}{h^3}, \quad D(z) = \int \frac{z dz}{h^3}, \quad (22)$$

найдем, что

$$\begin{aligned} C_6 &= \frac{6\nu\dot{v}_1 (\dot{v}_1 - \dot{v}_2) [D(l) - D(0)] + p_a - p_b}{B(0) - B(l)}, \\ C_7 &= \frac{6\nu\dot{v}_1 (\dot{v}_1 - \dot{v}_2) [D(0)B(l) - D(l)B(0)] + B(0)p_b - B(l)p_a}{B(0) - B(l)}, \end{aligned}$$

а давление в межлопастном пространстве

$$p = \alpha(z) (\dot{v}_1 - \dot{v}_2) + \beta(z) p_a + \gamma(z) p_b, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= 6\nu\dot{v}_1 \left[D(z) - \frac{D(0) - D(l)}{B(0) - B(l)} B(z) + \frac{D(0)B(l) - D(l)B(0)}{B(0) - B(l)} \right], \\ \beta(z) &= \frac{B(z) - B(l)}{B(0) - B(l)}, \quad \gamma(z) = \frac{B(0) - B(z)}{B(0) - B(l)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из выражения (23) видно, что давление на лопасти пропорционально разности производных от прогибов лопастей, а также давлениям на входе и выходе межлопастного пространства.

Чтобы найти нагрузку на конкретную лопасть, например на лопасть II, необходимо учесть давление на обе поверхности лопасти. Для левой и правой поверхностей лопасти II имеем соответственно:

$$\begin{aligned} p_{12} &= \alpha_{12} (\dot{v}_1 - \dot{v}_2) + \beta_{12} p_{a12} + \gamma_{12} p_{b12}, \\ p_{23} &= \alpha_{23} (\dot{v}_3 - \dot{v}_2) + \beta_{23} p_{a23} + \gamma_{23} p_{b23}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{12} &= \alpha_{12}(z_2), & \alpha_{23} &= \alpha_{23}(z_3), \\ \beta_{12} &= \beta_{12}(z_2), & \beta_{23} &= \beta_{23}(z_3), \\ \gamma_{12} &= \gamma_{12}(z_2), & \gamma_{23} &= \gamma_{23}(z_3).\end{aligned}$$

Аргументы z_2 и z_3 связаны соотношением

$$z_3 = \frac{z_2 - a}{\cos \beta} \cong z_2 - a,$$

где a — ширина участка лопасти I .

Полученные соотношения (25) справедливы на участке bd для давления p_{12} и на участке ac для давления p_{23} (рис. 2). Давление на участках ab и cd отличается от давления, описываемого равенствами (25). Оно зависит от распределения давлений $p_a(\psi, \rho)$ и $p_b(\psi, \rho)$ перед решеткой лопастей и за ней.

Распределенная по длине лопасти сила будет

$$q = \int_a^b p_{a12}(\psi, \rho) dz + \int_b^d p_{12}^* dz - \frac{1}{\cos \beta} \left(\int_a^c p_{23}^* dz + \int_c^d p_{b23}^*(\psi, \rho) dz \right), \quad (26)$$

где p_{12}^* и p_{23}^* — давления в точках, соответствующих началу и концу межлопастного пространства.

Подставляя (25) в (26), получим

$$q = \mu A_{12}(\dot{v}_1 - \dot{v}_2) - \mu A_{23}(\dot{v}_3 - \dot{v}_1) + P_a - P_b, \quad (27)$$

где μ — малый параметр;

$$A_{12} = \int_b^d \alpha_{12} dz, \quad A_{23} = \int_a^c \alpha_{23} dz,$$

$$\Delta P_a = p_{12}(b) \int_b^d \beta_{12} dz + \int_a^b p_{a12}^* dz - p_{a23} \int_a^c \beta_{23} dz,$$

$$\Delta P_b = p_{23}(c) \int_a^c \gamma_{23} dz + \int_a^d p_{b23} dz - p_{b12}(c) \int_c^d \gamma_{12} dz.$$

$$\text{Так как } \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha, \quad \int_c^d \alpha dz - \int_a^b \alpha dz = \mu B,$$

то разность первых двух членов (27) можно представить в виде

$$\mu A_{12}(\dot{v}_1 - \dot{v}_2) - \mu A_{23}(\dot{v}_3 - \dot{v}_2) = \mu(\dot{v}_1 - \dot{v}_3) \int_a^c \alpha dz + \mu^2 B.$$

Тогда из (27) с точностью до членов порядка μ будем иметь

$$q = \mu A(\dot{v}_1 - \dot{v}_3) + \Delta P_a - \Delta P_b, \quad (28)$$

где

$$A = \int_a^c \alpha dz.$$

Воздействие лопасти на соответствующий участок кольца будет зависеть как от распределенной нагрузки q , так и от упругих свойств лопасти. Лопасть будем рассматривать как балку, жестко закрепленную одним концом и упруго опертую другим. Балку по-прежнему считаем искривленной, хотя, как и в случае определения сил демпфирования, это не имеет принципиального значения.

Полагая радиус кривизны балки $r \approx \text{const}$, напомним уравнение упругой линии

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + v = \frac{Mr^2}{EI}. \quad (29)$$

Граничные условия на левом конце балки ($\psi = \psi_0$)

$$\left. \begin{aligned} v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \quad \int v d\varphi = 0, \\ \text{а на правом конце } (\psi = 0) \\ \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} = k_1 v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = k_2 \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Здесь M — момент внешних сил, включающих внешнюю распределенную нагрузку q и реакции опор. Для правой части балки имеем:

$$M = -M_G - H_G r (1 - \cos \psi) - Gr \sin \psi + \int_0^\psi r^2 q(\psi) \sin(\psi - \theta) d\theta, \quad (31)$$

где

$$M_G = k_4 \frac{\partial v(0)}{\partial \psi} = k_4 \alpha, \quad G = -k_3 v(0) = -k_3 v, \quad (32)$$

$$H_G = k_5 \int v(0) d\psi = k_5 v.$$

Подставляя (32) в (31), а (31) в (30) и решая (30), получим

$$v = aG + bM_G + cH_G + Y. \quad (33)$$

Прогиб на правом конце балки

$$v(0) = -\frac{G}{k_3} = a_1 G + b_1 M_G + c_1 H_G + Y_1, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{r^3}{2EI} \left(\psi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_0 \right), \quad b_1 = \frac{r^2}{EI} (1 - \cos \psi_0), \\ c_1 &= -\frac{r^4}{2EI} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\psi_0 - 2 \cos \psi_0 \right), \\ Y_1 &= \frac{r^4}{2EI} F_2(\psi_0) (\psi_0 \cos \psi_0 - \sin \psi_0) - \frac{r^4}{2EI} F_1(\psi_0) (\psi_0 \sin \psi_0 - \cos \psi_0) - \\ &\quad - \frac{r^4}{EI} \cos \psi_0 \int_0^{\psi_0} \sin \psi_0 \cdot F_3(\psi_0) d\psi + \frac{r^4}{EI} \sin \psi_0 \int_0^{\psi_0} \cos \psi_0 \cdot F_3(\psi_0) d\psi. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\frac{\partial v(0)}{\partial \psi} = \frac{M}{k_4} = a_2 G + b_2 M_G + c_2 H_G + Y_2, \quad (35)$$

$$\int v(0) d\psi = \frac{H_B}{k_5} = a_3 G + b_3 M_G + c_3 H_G + Y_3,$$

где

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{r^3}{2EI} \left(\sin^2 \psi_0 - \frac{\psi_0}{2} \sin 2\psi_0 \right); \quad b_2 = \frac{r^2}{EI} \left(\sin \psi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_0 \right); \\ c_2 &= \frac{r^3}{4EI} (4 \cos \psi_0 - 3 - \cos 2\psi_0); \\ Y_2 &= \frac{r^4}{EI} \sin \psi_0 \int_0^{\psi_0} \sin \psi_0 \cdot F_3(\psi_0) d\psi - \frac{r^4}{4EI} F_2(\psi_0) \sin \psi_0 (2\psi_0 - \sin 2\psi_0) - \\ &\quad - \frac{r^4}{4EI} F_1(\psi_0) \sin \psi_0 (1 - \cos 2\psi_0); \end{aligned}$$

$$a_3 = -\frac{r^3}{2EI} \cos^2 \psi_0; \quad b_3 = \frac{r^2}{EI} \sin \psi_0; \quad c_3 = \frac{r^3}{4EI} (\sin 2\psi_0 - 4 \sin \psi_0 + 2\psi_0);$$

$$Y_3 = -\frac{r^4}{4EI} F_2(\psi_0) [2\psi_0 \sin \psi_0 + \cos \psi_0] - \frac{r^4}{2EI} F_1(\psi_0) \psi_0 \cos \psi_0 -$$

$$-\frac{r^4}{EI} \int_0^{\psi_0} \cos \psi_0 \int_0^{\psi_0} \sin \psi_0 F_3(\psi_0) d\psi_0 d\psi +$$

$$+\frac{r^4}{EI} \int_0^{\psi_0} \sin \psi_0 \int_0^{\psi_0} \cos \psi_0 F_3(\psi_0) d\psi_0 d\psi,$$

где

$$F_1(\psi_0) = \int_0^{\psi_0} q(\beta) \sin \beta d\beta; \quad F_2(\psi_0) = \int_0^{\psi_0} q(\beta) \cos \beta d\beta;$$

$$F_3(\psi_0 - \psi) = \int_0^{\psi_0 - \psi} q(\beta) \sin(\psi_0 - \psi - \beta) d\beta.$$

Из (34) и (35) находим силы и момент, передаваемые лопастью на элемент обода, т. е.

$$G = \frac{D_1}{D}, \quad H_G = \frac{D_2}{D}, \quad M_G = \frac{D_3}{D}, \quad (36)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + \frac{1}{k_3} & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \frac{1}{k_4} & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \frac{1}{k_5} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -Y_1 & b_1 & c_1 \\ -Y_2 & b_2 - \frac{1}{k_4} & c_2 \\ -Y_3 & b_3 & c_3 - \frac{1}{k_5} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 + \frac{1}{k_3} & -Y_1 & c_1 \\ a_2 & -Y_2 & c_2 \\ a_3 & -Y_3 & c_3 - \frac{1}{k_5} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 + \frac{1}{k_3} & b_1 & -Y_1 \\ a_2 & b_2 - \frac{1}{k_4} & -Y_2 \\ a_3 & b_3 & -Y_3 \end{vmatrix}.$$

Указанные силы и момент являются функциями распределенной силы q , которая определяется по формуле (28)

$$q = \mu A (\dot{v}_1 - \dot{v}_3) + \Delta P_a + \Delta P_b.$$

Второй и третий члены обусловлены распределением давления на входе и выходе в решетку лопастей

$$\Delta P_a = \Delta P_a(\theta, \psi), \quad \Delta P_b = \Delta P_b(\theta, \psi).$$

Первый член (28) зависит от разности скоростей смещения точек соседних лопастей. Из (32) и (33) имеем

$$v(\psi) = -ak_3 v(0) + bk_5 v + ck_4 \alpha + Y. \quad (37)$$

Смещения конца балки связаны со смещениями элемента обода

$$v(0) = n_1 w, \quad v(0) = n_2 u, \quad \alpha = n_3 \beta. \quad (38)$$

Поэтому (37) будет иметь вид

$$v = \gamma_1 w + \gamma_2 u + \gamma_3 \beta + \gamma_4 Y,$$

где

$$\gamma_1 = -ak_3 n_1, \quad \gamma_2 = ck_5 n_2, \quad \gamma_3 = bk_4 n_3.$$

Пусть лопасти II соответствуют значения

$$w = w_0, \quad u = u_0, \quad \alpha = 0, \quad q = q_0, \quad Y = Y_0,$$

для лопасти I для лопасти III

$$\begin{aligned} w &= w_0 - \Delta w, & w &= w_0 - \Delta w, \\ u &= u_0 - \Delta u, & u &= u_0 - \Delta u, \\ q &= q_0 - \Delta q, & Y(q) &= Y_0 - \Delta Y. \end{aligned}$$

Тогда для участка обода между лопастями I и III будем иметь

$$\dot{v}_1 - \dot{v}_3 = \gamma_1 \Delta \dot{w} + \gamma_2 \Delta \dot{u} + \gamma_3 \Delta \dot{\beta} + \gamma_4 \Delta \dot{Y}. \quad (39)$$

Распределенная сила $q(\theta, \psi)$, согласно (39), будет

$$q(\theta, \psi) = \mu A (\gamma_1 \Delta \dot{w} + \gamma_2 \Delta \dot{u} + \gamma_3 \Delta \dot{\beta}) + \Delta P(\theta, \psi), \quad (40)$$

где

$$\Delta P(\theta, \psi) = \Delta P_a(\theta, \psi) - \Delta P_b(\theta, \psi) + \mu \gamma_4 A \Delta \dot{Y}$$

или

$$\Delta P(\theta, \psi) \cong \Delta P_a(\theta, \psi) - \Delta P_b(\theta, \psi),$$

$P_a(\theta, \psi)$ — распределенные по длине лопасти и по ободу рабочего колеса силы на входе в решетку рабочего колеса, обусловленные главным образом неравномерностью распределения давлений в камере рабочего колеса, создаваемой элементами проточной части турбины: спиральной камерой, колоннами статора, направляющим аппаратом. Направление этих сил определяется геометрией лопасти. По мере того как лопасти проходят через определенные области давления, величина силы, действующей на лопасть, изменяется при практически неизменном относительно лопасти направлении. Выражение для $P_a(\theta, \psi)$ удобнее написать в следующем виде:

$$P_a(\theta, \psi) = P_0 + \sum_n P_n \cos [n(\varphi + \gamma) + \varphi_p].$$

Выражение для P_a можно представить в другом виде. Учитывая, что $\varphi + \gamma = \alpha + \theta - \chi$, где угол χ приближенно равен

$$\chi = \arcsin \frac{e \sin \varphi}{R_0 - u} \cong \frac{e \sin \varphi}{R_0 - u},$$

получим

$$P_a = P_0 + \sum_n P_n \cos [n(\alpha + \theta) + \varphi_n^0],$$

где

$$\varphi_n^0 = \varphi_n + \frac{ne \sin \varphi}{R_0 - u}.$$

Распределенные силы P_b обусловлены наличием вращающегося отрыва потока, имеющего место на нерасчетных режимах и неполных напорах. Как всякое круговое возбуждение, действие зоны отрыва удобно характеризовать вращающимся вектором. Обозначим угол поворота указанного вектора относительно колеса через H_p :

$$H_p = \int_{t_0}^t \omega_p dt, \quad (41)$$

где ω_p — угловая скорость вращения зоны отрыва потока, равная $\omega_p = (0,25-0,75) \omega_{06}$; ω_p может быть как положительной, так и отрицательной величиной в зависимости от направления вращения зоны отрыва.

Полагая начало отсчета угла H_p тем же, что и для угла θ , получим для лопасти, отстоящей от начала отсчета на угол θ :

$$P_b(\theta, \psi) = P_H \cos(H - \theta).$$

Таким образом, внешние возмущающие силы будут

$$P = P_0 + \sum_n P_n \cos[n(\varphi + \gamma) + \varepsilon_n]. \quad (42)$$

Сила, передаваемая каждой лопастью на обод, действует на небольшой его участок. Поэтому силы G , H_G и момент M по отношению к ободу будем считать элементарными и обозначим

$$G = \Delta P_t, \quad H_G = \Delta P_r, \quad M = \Delta m. \quad (43)$$

Указанные силы являются элементарными и по своей природе. Демпфирующая составляющая силы пропорциональна разности скоростей двух близко расположенных лопастей, а силовые возбуждения пропорциональны разностям давлений на входе (выходе) в соседних межлопастных пространствах.

Из (36) следует, что силы и момент, передаваемые лопастью на обод, являются линейными комбинациями величин Y_1, Y_2, Y_3 , которые в свою очередь зависят подобным же образом от величин

$$F_1(\psi_0) = r \int_0^{\psi_0} q(\beta) \sin \beta d\beta, \quad F_2(\psi_0) = r \int_0^{\psi_0} q(\beta) \cos \beta d\beta, \quad (44)$$

$$F_3(\psi_0) = r \int_0^{\psi_0} q(\beta) \sin(\psi_0 - \beta) d\beta.$$

Так как интегрирование осуществляется по элементу длины лопасти, то величины F_1, F_2, F_3 будут иметь ту же структуру, что и распределенная нагрузка q (40). Аналогичную структуру будут иметь величины Y_1, Y_2, Y_3 , а также величины D_1, D_2, D_3 , поэтому для элементарных сил и момента (43) будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta P_t &= \mu (\sigma_1 \Delta \dot{w} + \sigma_2 \Delta \dot{u} + \sigma_3 \Delta \dot{\beta}) + \sum_n \Delta P_p^I \cos(n\omega t + \varphi_p) + \Delta P_0^I \cos H(t), \\ \Delta P_r &= \mu (\delta_1 \Delta \dot{w} + \delta_2 \Delta \dot{u} + \delta_3 \Delta \dot{\beta}) + \sum_p \Delta P_0^{II} \cos(n\omega t + \varphi_p) + \Delta P_0^{II} \cos H(t), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\Delta m = \mu (\varepsilon_1 \Delta \dot{w} + \varepsilon_2 \Delta \dot{u} + \varepsilon_3 \Delta \dot{\beta}) + \sum_p \Delta P_p^{III} \cos(n\omega t + \varphi_p) + \Delta P_0^{III} \cos H(t).$$

Эти силы и момент действуют на участок обода, характеризуемый углом $\Delta\theta = 2\pi/n$, где n — число лопастей. С ростом числа n этот угол стремится к нулю. Для

$$Q_{tz} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta P_t}{R\Delta\theta}, \quad Q_{rz} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta P_r}{R\Delta\theta}, \quad K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta m}{R\Delta\theta}$$

получим:

$$\begin{aligned} Q_{tz} &= \frac{\mu}{R} \left(\sigma_1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \sigma_2 \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} + \sigma_3 \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \sum_p A_p \cos(n\omega t + \varphi_p) + \\ &+ \frac{A_0}{R} \cos H(t) + \frac{A_0}{R}, \\ Q_{rz} &= \frac{\mu}{R} \left(\delta_1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \delta_2 \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} + \delta_3 \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \sum_p L_p \cos(n\omega t + \varphi_p) + \\ &+ \frac{L_0}{R} \cos H(t) + \frac{L_0}{R}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$K = \frac{\mu}{R} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \varepsilon_2 \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} + \varepsilon_3 \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \sum_p E_p \cos (n\omega t + \varphi_p) + \frac{E_0}{R} \cos H(t) + \frac{E_0}{R}.$$

Формулы (46) определяют распределенную нагрузку, передаваемую жидкостью на обод через лопасти рабочего колеса. Непосредственное воздействие жидкости на обод специально рассматривать не будем, полагая его учтенным в выражениях (46).

Таким образом, на обод рабочего колеса будут действовать силы

$$Q_r^* = \nu \rho B^3 \frac{\dot{e} \cos \varphi - e (\dot{\alpha}/2 - \dot{\gamma}) \sin \varphi - \dot{u}}{(\delta + u - e \cos \varphi)^3} + k_1 (e \cos \varphi_0 - u) + \frac{\mu}{R} \left(\delta_1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \delta_2 \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} + \delta_3 \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \theta} \right) + \frac{L_0}{R} + \frac{1}{R} \sum_n L_n \cos [n\omega t + \varphi_n] + \frac{L_0}{R} \cos H(t), \quad (47)$$

$$Q_t^* = k_2 [(R_0 - u + e \cos \varphi_0) \alpha - w] + \frac{\mu}{R} \left(\sigma_1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \sigma_2 \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} + \sigma_3 \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \theta} \right) + \frac{A_0}{R} + \frac{1}{R} \sum_n A_n \cos [n\omega t + \varphi_n] + \frac{A_0}{R} \cos H(t).$$

При изучении колебаний кольца в относительном движении к действующим силам (47) необходимо присоединить силы инерции: переносную силу инерции Q_e и поворотную, или кориолисову, силу инерции Q_c . Воспользуемся известными из кинематики выражениями для переносного и кориолисова ускорения

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_0 \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}), \quad \mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \quad (48)$$

В нашем случае переносным движением является вращение обода-кольца вокруг оси, проходящей через неподвижную точку O , а относительным — перемещение произвольно выбранной точки A обода вдоль радиуса-вектора CA , модуль которого

$$R = \sqrt{(R_0 - u)^2 + e^2 \sin^2 \varphi} + e \cos \varphi$$

или

$$R \cong R_0 - u + e \cos \varphi.$$

Найдем величину угловой скорости переносного движения. Угловая скорость вращения кольца будет

$$\omega_0 = \dot{\varphi} + \dot{\gamma}, \quad (49)$$

где

$$\varphi + \gamma = \alpha + \theta - \chi$$

и

$$\chi = \arcsin \frac{e \sin \varphi}{R_0 - u} \approx \frac{e \sin \varphi}{R_0 - u},$$

следовательно

$$\varphi + \gamma = \alpha + \theta - \frac{e \sin \varphi}{R_0 - u}.$$

Здесь θ — угловая координата рассматриваемой точки поверхности кольца, отсчитываемая от выбранного диаметра. Величина θ не изменяется во времени. Разлагая $\sin \varphi$ в ряд и производя ряд преобразований, находим:

$$\varphi + \gamma = (\theta + \alpha) \left(1 - \frac{e}{R_0 - u} \right) + \frac{\gamma e}{R_0 - u}. \quad (50)$$

Подставив (50) в (49), получим

$$\omega = \dot{\varphi} + \dot{\gamma} = (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \left(1 - \frac{e}{R_0 - u}\right) - (\theta + \alpha) \frac{\dot{e}}{R_0 - u} + \frac{\dot{e}\gamma + e\dot{\gamma}}{R_0 - u} - \frac{\gamma e \dot{u}}{(R_0 - u)^2}$$

Так как последний член мал, а $\dot{\theta} = 0$, то

$$\begin{aligned}\omega &= \dot{\alpha} + \frac{1}{R_0 - u} [e(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}) + \dot{e}(\gamma - \theta - \alpha)] = \\ &= \dot{\alpha} - \frac{1}{R_0 - u} \frac{d}{dt} e(\gamma - \theta - \alpha)\end{aligned}$$

или ввиду малости отношения e/R

$$\omega \cong \dot{\alpha}.$$

Относительная скорость

$$v_r = \dot{e} \cos \varphi + e\dot{\gamma} \sin \varphi - \dot{u}.$$

Для определения сил инерции

$$Q_e = m \cdot w_e, \quad Q_c = m \cdot w_c$$

предварительно найдем w_e и w_c по формулам (48):

$$w_e = \ddot{\alpha} (R_0 - u + e \cos \varphi) + \dot{\alpha}^2 (R_0 - u + e \cos \varphi),$$

$$w_c = 2\dot{\alpha} (\dot{e} \cos \varphi + e\dot{\gamma} \sin \varphi - \dot{u}).$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned}Q_e &= m\ddot{\alpha} (R_0 - u + e \cos \varphi) + m\dot{\alpha}^2 (R_0 - u + e \cos \varphi), \\ Q_c &= 2m\dot{\alpha} (\dot{e} \cos \varphi + e\dot{\gamma} \sin \varphi - \dot{u}).\end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Составляющие сил инерции, согласно (51), равны:

$$Q_{ie} = m\ddot{\alpha} (R_0 - u + e \cos \varphi),$$

$$Q_{re} = m\dot{\alpha}^2 (R_0 - u + e \cos \varphi),$$

$$Q_{ic} = 2m\dot{\alpha} (\dot{e} \cos \varphi + e\dot{\gamma} \sin \varphi - \dot{u}),$$

$$Q_{rc} = 0.$$

Радиальная и тангенциальная составляющие сил инерции будут

$$Q_{re} + Q_{rc} = Q_r^{**} = m\dot{\alpha}^2 (R_0 - u + e \cos \varphi), \quad (52)$$

$$Q_{ie} + Q_{ic} = Q_t^{**} = m\ddot{\alpha} (R_0 - u + e \cos \varphi) + 2m\dot{\alpha} (\dot{e} \cos \varphi - e\dot{\gamma} \sin \varphi - \dot{u}).$$

Подставляя значения Q_t^* , Q_r^* из (47) и Q_r^{**} , Q_t^{**} из (52) в (1), получим уравнение для определения деформации кольца в следующем виде:

$$\begin{aligned}D \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + (D + k_1) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + k_2 w + m_p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) + \\ + k_1 s \cdot \sin \theta - k_1 q \cos \theta + k_2 R \alpha_0 + m_p \dot{\alpha}_0 R = \\ = -C_0 - \sum C_k \cos [k\omega t + \varepsilon_a] + \mu F_1 + \mu F_2,\end{aligned} \quad (53)$$

где

$$D = \frac{EI}{R^4}, \quad C_0 = \frac{\partial L_0}{\partial \theta} - A_0, \quad C_k = \frac{1}{R} \sqrt{A_n^2 + L_n^2},$$

$$\varepsilon_n = \varphi_n = \arctg \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \theta} L_n / \frac{\partial L_n}{\partial \theta} \right);$$

$$\mu F_1 = \frac{\nu \rho B^3}{h^4} \{a_0 + b_1 \sin \varphi + a_1 \cos \varphi + b_2 \sin 2\varphi + a_2 \cos 2\varphi\};$$

$$a_0 = -(\delta + u) \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} + 2e^2 (\dot{\alpha}/2 - \dot{\gamma}) + 3\dot{u} \frac{\partial u}{\partial \theta};$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\dot{e}(\delta + u) + 3e \frac{\partial u}{\partial \theta} (\dot{x}/2 - \dot{\gamma}) + 3e\dot{u}, \\
a_1 &= -e(\delta + u)(\dot{x}/2 - \dot{\gamma}) + e \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} - 3\dot{e} \frac{\partial u}{\partial \theta}; \\
b_2 &= -e\dot{e}, \quad a_2 = -e^2(\dot{x}/2 - \dot{\gamma}); \\
\mu F_2 &= -k_1 e \sin(\theta + \alpha_0 - \gamma) - k_1 \frac{\partial u}{\partial \theta} - \\
&\quad - \mu \left(\delta_1 \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \theta^2} + \delta_2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \theta^2} + \delta_3 \frac{\partial^2 \dot{\beta}}{\partial \theta^2} \right) + m\dot{x}^2 \frac{\partial u}{\partial \theta} + m\dot{x}^2 e \sin \varphi + \\
&\quad + k_2 \alpha_0 (u - e \cos \varphi_0) - \mu \left(\sigma_1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \sigma_2 \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} + \sigma_3 \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad + m\dot{x} (u - e \cos \varphi_0) - 2m\dot{x} (\dot{e} \cos \varphi + e\dot{\gamma} \sin \varphi - \dot{u}).
\end{aligned} \tag{54}$$

Определив силы Q_r , Q_t и момент внешних возмущающих сил, нетрудно найти силы, входящие в уравнение движения кольца как твердого тела. Указанные силы являются равнодействующими всех элементарных сил, приведенными к центру инерции. Уравнения движения кольца как твердого тела будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
m_c \ddot{s}_c &= \int_0^{2\pi} (R_0 - u + e \cos \varphi) [Q_r \cos(\varphi + \gamma) + Q_t \sin(\varphi + \gamma)] d(\varphi + \gamma), \\
m_c \ddot{g}_c &= \int_0^{2\pi} (R_0 - u + e \cos \varphi) [-Q_r \sin(\varphi + \gamma) + Q_t \cos(\varphi + \gamma)] d(\varphi + \gamma), \tag{55} \\
I\ddot{\alpha} &\int_0^{2\pi} (R_0 - u + e \cos \varphi)^2 Q_t d\theta + \int_0^{2\pi} (R_0 - u + e \cos \varphi)^2 G' d\theta.
\end{aligned}$$

Выражения (55) вместе с (53) позволяют исследовать динамику движения обода рабочего колеса в его плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Аронсон. Применение теории тонких стержней к расчету рабочего колеса радиально-осевой гидротурбины. Гидротурбостроение. М.—Л., Машгиз, 1957.
2. А. Я. Аронсон, А. У. Бугов, В. М. Мальшев, И. А. Скрялев, Г. Х. Франк-Каменецкий. Расчет на прочность деталей гидротурбин. М.—Л., 1965.

ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ФОРМЫ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОБОЛОЧКИ НА ЧАСТОТЫ ЕЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

А. Я. АРОНСОН, Ф. С. БЕДЧЕР

Влияние возмущений формы срединной поверхности оболочки на напряженное состояние рассмотрено в ряде работ. В частности, в работах [1, 2] показано, что сравнительно небольшие отклонения формы оболочки от заданной могут приводить к возникновению в ней значительных дополнительных напряжений. Известно также, что искажение срединной поверхности оболочки приводит к изменению спектра частот ее собственных колебаний.

В настоящей работе рассматривается влияние возмущений геометрии срединной поверхности длинной цилиндрической оболочки на частоты собственных колебаний. Возмущения геометрии при этом могут быть либо детерминированными, либо случайными функциями координат.

Поставленная задача решается методом, изложенным в работах [3, 4]. Используется метод «малого параметра», позволяющий определить поправку к частоте, обусловленную отклонениями формы срединной поверхности оболочки.

Система уравнений, описывающая колебания длинной цилиндрической оболочки, может быть написана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial s} + \frac{\bar{V}_z}{R} &= \rho h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}, & \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} - \frac{\bar{u}}{R} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial s} - \frac{\bar{V}_x}{R} &= \rho h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2}, & \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + \frac{\bar{w}}{R} &= \bar{\beta}, \\ \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial s} + \bar{V}_x &= 0, & \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial s} &= \frac{\bar{M}_y}{D}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Здесь \bar{u} и \bar{w} — соответственно радиальное и касательное перемещения точек срединной поверхности оболочки; V_x , V_z — перерезывающее и нормальное усилия, действующие в оболочке; \bar{M}_y и $\bar{\beta}$ — изгибающий момент и угол поворота нормали к сечению оболочки; R и D — радиус кривизны срединной поверхности и цилиндрическая жесткость, h — толщина оболочки, E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; t и s — время и длина дуг срединной поверхности оболочки; ρ — плотность материала.

При решении задачи считаем, что растяжение срединной поверхности оболочки отсутствует, т. е. $\varepsilon = 0$.

Предполагаем, что оболочка совершает гармонические колебания, т. е.

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u \sin \omega t, & \bar{w} &= w \sin \omega t, \\ \bar{V}_x &= V_x \sin \omega t & \text{и т. д.}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ω — частота собственных колебаний оболочки.

Уравнения колебаний оболочки при этом напишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{ds} + \frac{V_z}{R} &= -\rho h \omega^2 u, & \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R} &= 0, \\ \frac{dV_z}{ds} - \frac{V_x}{R} &= -\rho h \omega^2 w, & \frac{du}{ds} + \frac{w}{R} &= \beta, \\ \frac{dM_y}{ds} + V_x &= 0, & \frac{d\beta}{ds} &= \frac{M_y}{D}. \end{aligned} \quad (3)$$

Радиус кривизны срединной поверхности оболочки представляем в виде

$$R = a + \delta(s), \quad (4)$$

где a — радиус исходной оболочки; $\delta(s)$ — функция, характеризующая отклонение формы сечения оболочки от круга.

Усилия и момент, возникающие в оболочке при колебаниях, а также ее перемещения можно разбить на основные, соответствующие круговой цилиндрической оболочке, и возмущенные, связанные с отклонением формы срединной поверхности оболочки от заданной. Тогда получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k, & V_x &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k V_{xk}, \\ w &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k, & V_z &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k V_{zk}, \\ \beta &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \beta_k, & M_y &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k M_{yk}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь μ — малый параметр; b — максимальное отклонение точки срединной поверхности от окружности.

Полагаем, что частоту собственных колебаний оболочки можно представить аналогичным образом:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu\omega_1^2 + \mu^2\omega_2^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \omega_k^2. \quad (6)$$

Ограничиваясь членами с первой степенью малого параметра μ , получим выражение для частоты собственных колебаний оболочки с искаженной формой срединной поверхности в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu\omega_1^2,$$

где ω_0 — частота собственных колебаний невозмущенной оболочки; ω_1 — поправка к частоте, обусловленная возмущением.

Элемент дуги возмущенной срединной поверхности оболочки представим в виде

$$ds = a [1 - \mu\chi(\Theta)] d\Theta, \quad (7)$$

где $\chi(\Theta)$ — некоторая функция. Тогда, подставляя (4), (5), (6) в (3) и учитывая (7), получим, приравнивая члены с одинаковыми степенями μ , следующие системы уравнений нулевого и первого приближений:

$$\begin{aligned} \frac{dw_0}{d\Theta} + w_0 - a\beta_0 &= 0; & \frac{dV_{x_0}}{d\Theta} + V_{z_0} + \rho h \omega_0^2 a u_0 &= 0, \\ \frac{dw_0}{d\Theta} - u_0 &= 0, & \frac{dV_{z_0}}{d\Theta} - V_{x_0} + \rho h \omega_0^2 a w_0 &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{d\beta_0}{d\Theta} - \frac{a}{D} M_{y_0} = 0, \quad \frac{dM_{y_0}}{d\Theta} + aV_{x_0} = 0.$$

$$\frac{dw_1}{d\Theta} - u_1 = -\chi(\Theta) \frac{dw_0}{d\Theta} - \frac{\Delta(\Theta)}{a} \cdot \frac{dw_0}{d\Theta},$$

$$\frac{du_1}{d\Theta} + w_1 - a\beta_1 = -\left[\chi(\Theta) + \frac{\Delta(\Theta)}{a}\right] \frac{du_0}{d\Theta} + \beta_0 \Delta(\Theta), \quad (9)$$

$$\frac{d\beta_1}{d\Theta} = \frac{a}{D} M_{y_1} - \chi(\Theta) \frac{d\beta_0}{d\Theta},$$

$$\frac{dM_{y_1}}{d\Theta} + aV_{x_1} = -\chi(\Theta) \frac{dM_{y_0}}{d\Theta},$$

$$\frac{dV_{x_1}}{d\Theta} + V_{z_1} + \rho h a \omega_0^2 u_1 = -\left[\chi(\Theta) + \frac{\Delta(\Theta)}{a}\right] \frac{dV_{x_0}}{d\Theta} - \rho h a \left[\omega_1^2 + \frac{\Delta(\Theta)}{a} \omega_0^2\right] u_0,$$

$$\frac{dV_{z_1}}{d\Theta} - V_{x_1} + \rho h a \omega_0^2 w_1 = -\left[\chi(\Theta) + \frac{\Delta(\Theta)}{a}\right] \frac{dV_{z_0}}{d\Theta} - \rho h a \left[\omega_1^2 + \frac{\Delta(\Theta)}{a} \omega_0^2\right] w_0.$$

Система (8) представляет собой систему уравнений колебаний длинной цилиндрической оболочки и, как известно, может быть приведена к одному уравнению шестого порядка относительно перемещения w_0 :

$$\frac{d^6 w_0}{d\Theta^6} + 2 \frac{d^4 w_0}{d\Theta^4} + \left(1 - \frac{\rho a^4}{D} h \omega_0^2\right) \frac{d^2 w_0}{d\Theta^2} + \frac{\rho a^4}{D} h \omega_0^2 w_0 = 0. \quad (10)$$

Если значение $\Theta = 0$ соответствует значению $u_0 = 0$, то

$$w_0 = \cos n\Theta, \quad (11)$$

где n — целое число ($n = 2, 3, \dots$),

$$u_0 = -n \sin n\Theta; \quad \beta_0 = (1 - n^2) \frac{1}{a} \cos n\Theta,$$

$$\frac{d\beta_0}{d\Theta} = \frac{-n(1 - n^2)}{a} \sin n\Theta, \quad M_{v_0} = -\frac{Dn(1 - n^2)}{a^2} \sin n\Theta,$$

$$V_{x_0} = \frac{Dn^2(1 - n^2)}{a^3} \cos n\Theta, \quad V_{z_0} = \left[\frac{Dn^3(1 - n^2)}{a^3} - \rho h \omega_0^2 a n \right] \sin n\Theta; \quad (12)$$

$$\omega_0^2 = \frac{n^2(n^2 - 1)^2 D}{\rho h a^4 (1 + n^2)}.$$

Систему (9) можно привести к уравнению:

$$\frac{d^6 w_1}{d\Theta^6} + 2 \frac{d^4 w_1}{d\Theta^4} + \left(1 - \frac{\rho a^4}{D} h \omega_0^2 \right) \frac{d^2 w_1}{d\Theta^2} + \rho \frac{a^4}{D} h \omega_0^2 w_1 = f(\Theta, \omega_1), \quad (13)$$

где

$$f(\Theta, \omega_1) = \left(\frac{d^4 \Delta}{d\Theta^4} + \frac{d^2 \Delta}{d\Theta^2} \right) \beta_0 - \left[a \left(\frac{d\chi}{d\Theta} + \frac{d^3 \chi}{d\Theta^3} \right) - 2 \left(\frac{d\Delta}{d\Theta} + 2 \frac{d^3 \Delta}{d\Theta^3} \right) \right] \frac{d\beta_0}{d\Theta} +$$

$$+ \left[\Delta + 6 \frac{d^2 \Delta}{d\Theta^2} - 2a\chi - 4a \frac{d^2 \chi}{d\Theta^2} \right] \frac{d^2 \beta_0}{d\Theta^2} - \left(5a \frac{d\chi}{d\Theta} - 4 \frac{d\Delta}{d\Theta} \right) \frac{d^3 \beta_0}{d\Theta^3} -$$

$$- (2a\chi - \Delta) \frac{d^4 \beta_0}{d\Theta^4} + \left[\frac{\rho h \omega_0^2 a^3}{D} \left(2 \frac{d\Delta}{d\Theta} + a \frac{d\chi}{d\Theta} \right) - \left(\frac{d^5 \chi}{d\Theta^5} + \frac{1}{a} \frac{d^5 \Delta}{d\Theta^5} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{d^3 \chi}{d\Theta^3} + \frac{1}{a} \frac{d^3 \Delta}{d\Theta^3} \right) \right] u_0 + \left[\frac{\rho h a^4 \omega_1^2}{D} - 6 \left(\frac{d^4 \chi}{d\Theta^4} + \frac{1}{a} \frac{d^4 \Delta}{d\Theta^4} \right) - \right.$$

$$\left. - 4 \left(\frac{d^2 \chi}{d\Theta^2} + \frac{1}{a} \frac{d^2 \Delta}{d\Theta^2} \right) + \frac{\rho h \omega_0^2 a^4}{D} \left(\chi + 2 \frac{\Delta}{a} \right) \right] \frac{d u_0}{d\Theta} -$$

$$- \left[14 \left(\frac{d^3 \chi}{d\Theta^3} + \frac{1}{a} \frac{d^3 \Delta}{d\Theta^3} \right) + 5 \left(\frac{d\chi}{d\Theta} + \frac{1}{a} \frac{d\Delta}{d\Theta} \right) \right] \frac{d^2 u_0}{d\Theta^2} - \left[16 \left(\frac{d^2 \chi}{d\Theta^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a} \frac{d^2 \Delta}{d\Theta^2} \right) + 2 \left(\chi + \frac{\Delta}{a} \right) \right] \frac{d^3 u_0}{d\Theta^3} - 9 \left(\frac{d\chi}{d\Theta} + \frac{1}{a} \frac{d\Delta}{d\Theta} \right) \frac{d^4 u_0}{d\Theta^4} -$$

$$- 2 \left(\chi + \frac{\Delta}{a} \right) \frac{d^5 u_0}{d\Theta^5} - \left(\chi + \frac{\Delta}{a} \right) \frac{a^3}{D} \frac{dV_{z_0}}{d\Theta} - \frac{\rho h a^4}{D} \left(\omega_1^2 + \frac{\Delta}{a} \omega_0^2 \right) w_0 +$$

$$+ \frac{a^3}{D} \left(\frac{d\chi}{d\Theta} + \frac{1}{a} \frac{d\Delta}{d\Theta} \right) \frac{dV_{x_0}}{d\Theta} + \frac{a^3}{D} (\chi + a) \frac{d^2 V_{x_0}}{d\Theta^2}. \quad (14)$$

Из теории дифференциальных уравнений [5] известно, что условие существования решения уравнения (13) формулируется следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} w_0(\Theta) f(\Theta) d\Theta = 0. \quad (15)$$

Развернув выражение (15), найдем формулу для поправки к частоте ω_1^2 , обусловленной возмущением геометрии срединной поверхности оболочки:

$$\omega_1^2 = \frac{D}{\rho h a^4 \int_0^{2\pi} \left(w_0 - \frac{d u_0}{d\Theta} \right) w_0 d\Theta} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^4 \Delta}{d\Theta^4} + \frac{d^2 \Delta}{d\Theta^2} \right) \beta_0 w_0 d\Theta - \right.$$

$$- \int_0^{2\pi} \left[a \left(\frac{d\chi}{d\Theta} + \frac{d^3 \chi}{d\Theta^3} \right) - 2 \left(\frac{d\Delta}{d\Theta} + 2 \frac{d^3 \Delta}{d\Theta^3} \right) \right] \frac{d\beta_0}{d\Theta} w_0 d\Theta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left[\Delta + 6 \frac{d^2 \Delta}{d\Theta^2} - 2a\chi - 4a \frac{d^2 \chi}{d\Theta^2} \right] \frac{d^2 \beta_0}{d\Theta^2} w_0 d\Theta -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{2\pi} \left(5a \frac{d\chi}{d\Theta} - 4 \frac{d\Delta}{d\Theta} \right) \frac{d^3 w_0}{d\Theta^3} w_0 d\Theta - \int_0^{2\pi} (2a\chi - \Delta) \frac{d^4 \beta_0}{d\Theta^4} w_0 d\Theta + \\
& + \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho h \omega_0^2 a^3}{D} \left(2 \frac{d\Delta}{d\Theta} + a \frac{d\chi}{d\Theta} \right) - \left(\frac{d^5 \chi}{d\Theta^5} + \frac{1}{a} \frac{d^5 \Delta}{d\Theta^5} \right) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{d^3 \chi}{d\Theta^3} + \frac{1}{a} \frac{d^3 \Delta}{d\Theta^3} \right) \right] u_0 w_0 d\Theta + \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho h \omega_0^2 a^4}{D} \left(\chi + 2 \frac{\Delta}{a} \right) - \right. \\
& - \left. 4 \left(\frac{d^2 \chi}{d\Theta^2} + \frac{1}{a} \frac{d^2 \Delta}{d\Theta^2} \right) - 6 \left(\frac{d^4 \chi}{d\Theta^4} + \frac{1}{a} \frac{d^4 \Delta}{d\Theta^4} \right) \right] \frac{du_0}{d\Theta} w_0 d\Theta - \\
& - \int_0^{2\pi} \left[14 \left(\frac{d^3 \chi}{d\Theta^3} + \frac{1}{a} \frac{d^3 \Delta}{d\Theta^3} \right) + 5 \left(\frac{d\chi}{d\Theta} + \frac{1}{a} \frac{d\Delta}{d\Theta} \right) \right] \frac{d^2 u_0}{d\Theta^2} w_0 d\Theta - \\
& - \int_0^{2\pi} \left[16 \left(\frac{d^2 \chi}{d\Theta^2} + \frac{1}{a} \frac{d^2 \Delta}{d\Theta^2} \right) + 2 \left(\chi + \frac{\Delta}{a} \right) \right] \frac{d^3 u}{d\Theta^3} w_0 d\Theta - \\
& - 9 \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\chi}{d\Theta} + \frac{1}{a} \frac{d\Delta}{d\Theta} \right) \frac{d^4 u_0}{d\Theta^4} w_0 d\Theta - 2 \int_0^{2\pi} \left(\chi + \frac{\Delta}{a} \right) \frac{d^5 u_0}{d\Theta^5} w_0 d\Theta - \\
& - \int_0^{2\pi} \left(\chi - \frac{\Delta}{a} \right) \frac{a^3}{D} \frac{dV_{z0}}{d\Theta} w_0 d\Theta - \int_0^{2\pi} \frac{\rho h a^3 \Delta}{D} \omega_0^2 w_0^2 d\Theta + \\
& + \frac{a^3}{D} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\chi}{d\Theta} + \frac{1}{a} \frac{d\Delta}{d\Theta} \right) \frac{dV_{x0}}{d\Theta} w_0 d\Theta + \frac{a^3}{D} \int_0^{2\pi} \left(\chi + \frac{\Delta}{a} \right) \frac{d^2 V_{x0}}{d\Theta^2} w_0 d\Theta. \quad (16)
\end{aligned}$$

Учитывая (12), легко вычислить знаменатель в формуле (16). Действительно,

$$\int_0^{2\pi} \left(w_0 - \frac{du_0}{d\Theta} \right) w_0 d\Theta = \pi (1 + n)^2.$$

Пусть возмущение срединной поверхности оболочки — косинусоидальное, т. е.

$$\xi = [a + b \cos k\Theta] \cos \Theta, \quad \eta = [a + b \sin k\Theta] \sin \Theta.$$

Кроме того,

$$ds = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\Theta} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\Theta} \right)^2} \quad \text{и} \quad R = \frac{(\xi'^2 + \eta'^2)^{3/2}}{\xi' \eta'' - \xi'' \eta'},$$

где ds — элемент дуги оболочки; R — радиус кривизны срединной поверхности.

Ограничиваясь членами первого порядка малости, получим:

$$ds = a \left(1 + \frac{b}{a} \cos k\Theta \right) d\Theta.$$

Проведя необходимые выкладки, найдем:

$$R = a \left[1 + \frac{b}{a} (1 - k^2) \cos k\Theta \right].$$

Таким образом,

$$\delta(\Theta) = b(1 - k^2) \cos k\Theta, \quad (17)$$

$$\Delta(\Theta) = a(1 - k^2) \cos k\Theta. \quad (18)$$

Если подставить (17) и (18) в формулу (16), то получим интегралы двух типов:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos k\Theta \cos^2 n\Theta d\Theta; \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin k\Theta \sin 2n\Theta d\Theta.$$

Нетрудно убедиться в том, что эти интегралы равны нулю для любого $k \neq 2n$ и равны $\pi/2$ при $k = 2n$, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \cos k\Theta \cos^2 n\Theta d\Theta = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 2n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } k = 2n, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin k\Theta \sin 2n\Theta d\Theta = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 2n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } k = 2n. \end{cases}$$

Таким образом: косинусоидальное возмущение оси оболочки, например, с четырьмя узлами ($k = 2$) приведет только к изменению частоты, соответствующей $n = 1$, т. е. частоты, соответствующей изменению двухузловой формы. Все остальные частоты останутся теми же, что и для оболочки идеальной формы. Искажение формы, соответствующее восьми узлам ($k = 4$), приведет к изменению только частоты с четырьмя узлами и т. д.

Это наблюдается и в случае, если сечение оболочки изменяется по косинусоидальному закону.

Очевидно, что в случае, когда оболочка имеет случайные отклонения формы срединной поверхности от заданной, дисперсия поправки к частоте может быть найдена по методике, изложенной в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Аронсон. Влияние возмущений формы срединной поверхности оболочки на ее напряженное состояние. — *Машиноведение*. Изв. АН СССР, 1968, № 5.
2. А. Я. Аронсон, Л. Б. Гримзе, Л. А. Розин. Влияние точности изготовления спиральных камер на их напряженное состояние. Изв. Всес. ин-та гидротехники, 1969, № 88.
3. А. Я. Аронсон, Ф. С. Бедчер. Определение частот собственных колебаний деталей типа стержней и пластин, имеющих технологические отклонения размеров. — *Машиноведение* 1966, № 5.
4. А. Я. Аронсон, Ф. С. Бедчер. Об одном приближенном способе определения частот колебаний пластин переменной толщины. — Сб. «Труды VI Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек». М., «Наука», 1966.
5. Э. Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., ОНТИ, 1935.
6. А. Я. Аронсон, Ф. С. Бедчер. Влияние отклонений в изготовлении на частоты колебаний лопаток турбомашин. — *Энергомашиностроение*, 1966, № 12.

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ

А. Я. АРОНСОН

Уточнение классической теории стержней, сформулированной еще Кирхгофом [1] и Клебшем [2], шло по пути учета депланации сечения, деформации сдвига, а также уточнения влияния естественной закрутки стержня на его напряженное состояние. Теория тонкостенных незакрученных стержней с прямой осью была создана трудами советских ученых. Обширный материал по этому вопросу содержится в монографиях [3, 4].

Задача о напряженном состоянии закрученного изогнутого тонкостенного стержня была впервые рассмотрена в работе [5]. При этом допускалось

отсутствие сдвига сечения относительно оси и недеформируемость контура сечения.

Попытка построения более общей теории кривых стержней приведена в статье [6], в которой учитывалась деформация сдвига сечения относительно оси, но делалось допущение о пропорциональности депланации функции кручения.

Аналогичная задача несколько позже была рассмотрена в работе [7].

В предлагаемой теории стержней, как и в перечисленных работах, учитываются деформации сдвига сечения, влияние естественной закрутки на напряженное состояние и депланация сечения, причем депланация принимается равной произведению двух неизвестных функций, которые определяются из условия минимума потенциальной энергии системы. Для определения этих функций получены дифференциальные уравнения. Показано, что в общем случае депланация не будет пропорциональна функции кручения.

§ 1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ

В рассматриваемой нами теории стержней приняты следующие предположения о картине деформации при нагружении:

1) деформация в плоскости поперечного сечения стержня отсутствует, т. е. перемещения точек сечения стержня складываются из перемещений всего сечения как целого и его депланации;

2) депланация сечения пропорциональна произведению двух неизвестных функций $f(s)$ и $\Phi(x, y)$.

При сделанных предположениях перемещение точки сечения стержня с координатами x, y, z будет равно

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}^0(s) + \Theta(s) \times (x\bar{\mathbf{i}} + y\bar{\mathbf{j}}) + f(s) \Phi(x, y) \bar{\boldsymbol{\tau}}', \quad (1)$$

где $\bar{\mathbf{u}}^0(s)$ — перемещение точки стержня, лежащей на его оси; $\Theta(s)$ — вектор угла поворота сечения, т. е.

$$\Theta(s) = \alpha\bar{\mathbf{i}} + \beta\bar{\mathbf{j}} + \gamma\bar{\boldsymbol{\tau}}; \quad (2)$$

$f(s)$ и $\Phi(x, y)$ — некоторые функции, подлежащие определению, α, β, γ — проекции вектора угла поворота сечения на оси координат Ox, Oy, Oz , $\bar{\boldsymbol{\tau}}'$ — вектор, перпендикулярный к деформированному сечению, причем $\bar{\boldsymbol{\tau}}' = \boldsymbol{\tau} + \Theta \times \boldsymbol{\tau}$. При малых деформациях можно положить $\bar{\boldsymbol{\tau}}' \simeq \boldsymbol{\tau}$.

Система координатных осей Ox, Oy, Oz введена следующим образом: ось Oz направлена по касательной к оси стержня, оси Ox и Oy лежат в плоскости сечения стержня и совпадают с главными осями сечения.

Напишем систему уравнений, которая описывает напряженное состояние стержня. Эта система уравнений распадается на три группы:

1-я группа — система уравнений, связывающая перемещения и углы поворота сечений с изменениями кривизны и кручения (уравнения Клебша);

2-я группа — система уравнений равновесия (уравнения Кирхгофа);

3-я группа — уравнения, связывающие компоненты деформации с усилиями и моментами (соотношения Кирхгофа).

Вывод уравнений Клебша и уравнений равновесия приведен в [8]. Система уравнений Клебша может быть написана следующим образом:

$$\varepsilon = dw^0/ds - u^0\omega_y + v^0\omega_x, \quad (3)$$

$$\gamma_x = du^0/ds - \omega_\tau v^0 + \omega_y w^0 - \beta,$$

$$\gamma_y = dv^0/ds + \omega_\tau u^0 - \omega_x w^0 + \alpha,$$

$$\kappa_x = dx^*/ds - \beta^*\omega_\tau - \varepsilon\omega_x + \gamma\omega_y,$$

$$\kappa_y = d\beta^*/ds + \alpha^*\omega_\tau - \varepsilon\omega_y - \gamma\omega_x, \quad (4)$$

$$\Psi = d\gamma/ds - \alpha^*\omega_y + \beta^*\omega_x - \varepsilon\omega_\tau,$$

$$\alpha^* = \alpha - \gamma_y; \quad \beta^* = \beta + \gamma_x.$$

Здесь u^0, v^0, w^0 — проекции на оси Ox, Oy, Oz вектора перемещения точки, лежащей на оси стержня; ε — относительное удлинение оси стержня; ω — вектор кривизны оси стержня; ω_τ — кручение оси; γ — вектор сдвига сечения; κ — изменение вектора кривизны оси; Ψ — изменение кручения оси стержня.

Напишем систему уравнений равновесия в проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{ds} - \omega_\tau V_y + \omega_y V_z + q_x &= 0, \\ \frac{dV_y}{ds} + \omega_\tau V_x - \omega_x V_z + q_y &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_z}{ds} + \omega_x V_y - \omega_y V_x + q_z &= 0, \\ \frac{dM_x}{ds} - \omega_\tau M_y + \omega_y M_z - V_y + m_x &= 0, \\ \frac{dM_y}{ds} + \omega_\tau M_x - \omega_x M_z + V_x + m_y &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{dM_z}{ds} + \omega_x M_y - \omega_y M_x + m_z = 0.$$

Здесь V — внутреннее усилие; M — вектор-момент внутренних сил; q, m — внешние распределенные усилия и момент.

Итак, нами написаны 12 уравнений: шесть уравнений статики и шесть кинематических соотношений, характеризующих деформацию оси стержня. В написанные уравнения входят 16 неизвестных величин. Кроме того, не определены еще функции $f(s)$ и $\Phi(x, y)$, характеризующие деформацию поперечного сечения стержня и сдвиги γ_x и γ_y . Таким образом, для решения задачи необходимо получить еще восемь соотношений.

Эти дополнительные соотношения могут быть получены из условия минимума полной потенциальной энергии системы (стержня с приложенными к нему силами):

$$\delta \mathcal{E} = \delta(\Pi - W) = 0, \quad (7)$$

где Π — потенциальная энергия деформации стержня; W — работа внешних сил, приложенных к стержню.

Определим компоненты тензора деформации, входящие в выражение для потенциальной энергии деформации. Они могут быть получены с помощью процедуры, указанной в работе [6].

Произведя необходимые вычисления, получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0, \\ \varepsilon_z &= \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[y\kappa_x - x\kappa_y + \omega_\tau (y\gamma_x - x\gamma_y) + y \frac{d\gamma_y}{ds} + x \frac{d\gamma_x}{ds} + \right. \\ &\quad \left. + \omega_\tau f \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{df}{ds} \Phi \right], \\ \gamma_{xz} &= f \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\gamma_x - y\Psi - \varepsilon y \omega_\tau + f\Phi \omega_y + y(\gamma_y \omega_y + \gamma_x \omega_x)}{\sqrt{g}}, \\ \gamma_{yz} &= f \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\gamma_y + x\Psi + \varepsilon x \omega_\tau - f\Phi \omega_x - x(\gamma_y \omega_y + \gamma_x \omega_x)}{\sqrt{g}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\sqrt{g} = (1 - x\omega_y + y\omega_x).$$

Полученные выражения для компонентов тензора деформации отличаются от соответствующих выражений, приведенных в работах [6] и [9]. Однако, если ввести в рассмотрение величины κ_1, κ_2 и Ψ , связанные с изме-

нениями кривизны κ_x, κ_y и кручения Ψ соотношениями

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_x + \omega_z \gamma_x + \frac{d\gamma_y}{ds}, & \kappa_2 &= \kappa_y + \omega_z \gamma_y - \frac{d\gamma_x}{ds}, \\ \Psi_1 &= \Psi + \omega_z \varepsilon - \gamma_y \omega_y - \gamma_x \omega_x, \end{aligned} \quad (9)$$

и подставить их в (8), то последние (с точностью до множителя перед ε) совпадут с полученными в [6].

Действительно:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[y\kappa_1 - x\kappa_2 + \frac{df}{ds} \Phi - \omega_z f \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right], \\ \gamma_{xz} &= f \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\gamma_x - y\Psi_1 + f\Phi\omega_y}{\sqrt{g}}, & \gamma_{yz} &= f \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\gamma_y + x\Psi_1 + f\Phi\omega_x}{\sqrt{g}}, \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Потенциальная энергия деформации стержня определяется выражением

$$\Pi = \int_{(O)} \pi dx dy dz, \quad (11)$$

где V — объем стержня; π — удельная потенциальная энергия, вычисляемая по формуле

$$\pi = \frac{1}{2} [E^* \varepsilon_z^2 + \tilde{\mu} (\gamma_{zx}^2 + \gamma_{yz}^2)]. \quad (12)$$

Здесь

$$E^* = \bar{\lambda} + 2\tilde{\mu} = \frac{(\lambda - \nu) E^*}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)},$$

где $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ — упругие постоянные Ляме.

Подставляя (10) в (12), а (12) в (11), получаем следующее выражение для потенциальной энергии деформации стержня:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2g} \int_{(O)} \left\{ E^* \left[\sqrt{g} \varepsilon + y\kappa_1 - x\kappa_2 + \Phi \frac{df}{ds} + \omega_z f \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right]^2 + \right. \\ &+ \tilde{\mu} \left[\sqrt{g} f \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \gamma_x - y\Psi_1 - f\Phi\omega_y \right]^2 + \\ &+ \tilde{\mu} \left[\sqrt{g} f \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \gamma_y + x\Psi_1 - f\Phi\omega_x \right]^2 \left. \right\} dx dy dz. \end{aligned} \quad (13)$$

Вычислим работу W внешних сил, приложенных к стержню (объемными силами пренебрегаем):

$$W = \int_{S_1} \mathbf{p}_n \mathbf{u} dS_1, \quad (14)$$

где S_1 — полная поверхность стержня,

\mathbf{p}_n — вектор внешней нагрузки; \mathbf{u} — вектор перемещения.

Повторяя выкладки, проведенные в [6], получим следующее выражение для работы внешних сил:

$$W = \int_0^l [V_x \gamma_x + V_y \gamma_y + V_z \varepsilon + M_x \kappa_1 + M_y \kappa_2 + M_z \Psi_1 + bf] ds + B_0 f_0 + B_l f_l, \quad (15)$$

где b — бимомент, отнесенный к единице длины оси стержня; B_0 и B_l — главные векторы бимомента в торцевых сечениях стержня.

Перерезывающую и нормальную силы, изгибающий и крутящий моменты можно выразить по известным формулам через компоненты тензора напря-

жений следующим образом:

$$\begin{aligned} V_x &= \int_{(F)} \tau_{zx} dx dy; & V_y &= \int_{(F)} \tau_{zy} dx dy; & V_z &= \int_{(F)} \sigma_z dx dy, \\ M_x &= \int_{(F)} \sigma_{zy} dx dy; & M_y &= - \int_{(F)} \sigma_{zx} dx dy; & M_z &= \int_{(F)} (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dx dy. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15) и используя теорему Стокса, получим окончательное выражение для работы внешних сил:

$$\begin{aligned} W &= \int_{(V)} [\tau_{zx}\gamma_x + \tau_{zy}\gamma_y + \sigma_z\varepsilon + \sigma_{zy}\kappa_1 - \sigma_{zx}\kappa_2 + \\ &+ (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) \Psi_1 + \frac{\partial \sigma_z}{\partial s} f\Phi] dx dy ds + B_0 f_0 + B_1 f_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Как известно, для выполнения соотношения (7) необходимо, чтобы обобщенные изменения кривизны и кручения, относительное удлинение и сдвиги γ_x , γ_y , а также функции деформации $f(s)$ и $\Phi(x, y)$ удовлетворяли системе уравнений Эйлера — Остроградского. Действительно, если необходимо найти систему n функций $y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ от m независимых переменных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, реализующих максимум или минимум кратного интеграла

$$I = \int \dots \int F dx_1 dx_2, \dots, dx_m,$$

где F — заданная функция переменных y_i, x_k и $y_{ik} = \partial y_i / \partial x_k$, то каждая система функций y_i, x_k, y_{ik} , реализующая экстремум интеграла, должна удовлетворять системе уравнений:

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{ik}} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0. \quad (18)$$

В нашем случае система уравнений (18) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} 1) & E^* \left[\varepsilon + \frac{y\kappa_1}{\sqrt{g}} - \frac{x\kappa_2}{\sqrt{g}} + \frac{\Phi}{\sqrt{g}} \frac{df}{ds} + \omega_z \frac{f}{\sqrt{g}} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] = \sigma_z; \\ 2) & E^* \left[\varepsilon \frac{y}{\sqrt{g}} + \frac{y^2}{g} \kappa_1 - \frac{xy}{g} \kappa_2 + \frac{y}{g} \Phi \frac{df}{ds} + \frac{y}{g} \omega_z f \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] = \sigma_z y; \\ 3) & E^* \left[-\varepsilon \frac{x}{\sqrt{g}} + \frac{x^2}{g} \kappa_2 - \frac{xy}{g} \kappa_1 - \frac{x}{g} \Phi \frac{df}{ds} - \frac{x}{g} \omega_z f \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] = \\ &= -\sigma_z x; \\ 4) & \frac{\tilde{\mu}}{g} \left[\gamma_x - y \Psi_1 + f \left(\sqrt{g} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Phi \omega_y \right) \right] = \tau_{zx}; \\ 5) & \frac{\tilde{\mu}}{g} \left[\gamma_y + x \Psi_1 + f \left(\sqrt{g} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \Phi \omega_x \right) \right] = \tau_{zy}; \\ 6) & \frac{\tilde{\mu}}{g} \left\{ (x^2 + y^2) \Psi_1 + \gamma_{yx} - \gamma_{xy} + x f \left(\sqrt{g} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \Phi \omega_x \right) - \right. \\ & \left. - y f \left(\sqrt{g} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Phi \omega_y \right) \right\} = \tau_{zy}x - \tau_{zx}y; \\ 7) & E^* \left[\frac{\omega_z^2 f}{g} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\varepsilon \omega_z}{\sqrt{g}} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \right. \\ & + \frac{y \omega_z}{g} \kappa_1 \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \frac{x \omega_z}{g} \kappa_2 \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \\ & \left. + \Phi \frac{\omega_z}{g} \frac{df}{ds} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] + \tilde{\mu} \left[\frac{f}{g} \left(\Phi \omega_y + \sqrt{g} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \right. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma_x}{g} \left(\Phi \omega_y + \sqrt{g} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\Psi_1}{g} y \left(\Phi \omega_y + \sqrt{g} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \\
& + \frac{f}{g} \left(\sqrt{g} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \Phi \omega_x \right)^2 + \\
& + \frac{\gamma_y}{g} \left(\sqrt{g} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \Phi \frac{\omega_x}{g} \right) + \frac{\Psi_1}{g} x \left(\sqrt{g} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \Phi \omega_x \right) - E^* \frac{d}{ds} \left[\frac{\Phi^2}{g} \frac{df}{ds} + \right. \\
& \left. + \varepsilon \frac{\Phi}{\sqrt{g}} + \frac{y \kappa_1}{g} \Phi - \frac{x \kappa_2}{g} \Phi + \frac{\Phi \omega_\tau f}{g} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] = \frac{d\sigma_z}{ds} \Phi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8) \quad & \tilde{\mu} f^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \tilde{\mu} f^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{E^* f}{\sqrt{g}} \left[\left(\omega_\tau \frac{df}{ds} + f \frac{d\omega_\tau}{ds} \right) y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \\
& + \frac{E^* f}{\sqrt{g}} x \left(\omega_\tau \frac{df}{ds} + f \frac{d\omega_\tau}{ds} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \left[\frac{E^*}{g} \left(\frac{df}{ds} \right)^2 + \frac{\tilde{\mu}}{g} f^2 (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \right. \\
& + E^* \frac{f}{\sqrt{g}} \frac{d^2 f}{ds^2} \left. \right] \Phi - \frac{E^*}{g} \frac{df}{ds} \left(\sqrt{g} \varepsilon + y \kappa_1 - x \kappa_2 \right) + \\
& + \frac{\mu}{g} f \left[\gamma_x \omega_y - \gamma_y \omega_x - \Psi_1 (y \omega_y + x \omega_x) \right] + \frac{E^*}{g} y \kappa_2 \omega_\tau f + \frac{E^*}{g} \kappa_1 x \omega_\tau f - \\
& - E^* f \left[\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{y}{\sqrt{g}} \frac{d\kappa_1}{ds} - \frac{x}{\sqrt{g}} \frac{d\kappa_2}{ds} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Здесь отброшены члены, содержащие высшие степени ω_τ . Кроме того, должны выполняться следующие граничные условия: на контуре стержня

$$\begin{aligned}
\left\{ E^* \left[\frac{\omega_\tau \varepsilon f y}{\sqrt{g}} + \frac{\kappa_1 \omega_\tau f y^2}{g} - \frac{\kappa_2 \omega_\tau f x y}{g} + \frac{\Phi}{g} \frac{df}{ds} f \omega_\tau y - \right. \right. \\
- \left. \left(\frac{d\omega_\tau}{ds} f + \omega_\tau \frac{df}{ds} \right) \frac{y}{\sqrt{g}} \right] + \tilde{\mu} \left(f^2 \frac{\omega_y}{\sqrt{g}} \Phi + f^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\gamma_x f}{\sqrt{g}} - y \frac{\Psi_1 f}{\sqrt{g}} \right) - \\
- \left\{ E^* \left[- \frac{\varepsilon \omega_\tau f x}{\sqrt{g}} - \frac{\kappa_1 \omega_\tau f x y}{g} + \frac{\kappa_2 \omega_\tau f x^2}{g} - \right. \right. \\
- \left. \frac{\Phi}{g} \frac{df}{ds} f \omega_\tau x - \left(\frac{d\omega_\tau}{ds} f + \omega_\tau \frac{df}{ds} \right) \frac{x}{\sqrt{g}} \right] + \tilde{\mu} \left[f^2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \right. \\
\left. \left. - f^2 \frac{\omega_x}{\sqrt{g}} \Phi + \frac{\gamma_y f}{\sqrt{g}} + \frac{x f \Psi_1}{\sqrt{g}} \right] \right\} dx = 0, \quad (20)
\end{aligned}$$

на концах стержня

$$\begin{aligned}
E^* \left[\frac{\Phi \varepsilon}{\sqrt{g}} + \frac{y \Phi}{g} \kappa_1 - \frac{x \Phi}{g} \kappa_2 + \frac{\omega_\tau f}{g} \Phi \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\Phi^2}{g} \frac{df}{ds} \right]_{s=l} - \\
- \Phi \sigma_z = 0 \quad (21a)
\end{aligned}$$

или $f_l = 0$;

$$\begin{aligned}
- E^* \left[\frac{\Phi \varepsilon}{\sqrt{g}} + \frac{y \Phi}{g} \kappa_1 - \frac{x \Phi}{g} \kappa_2 + \right. \\
\left. + \frac{\omega_\tau f}{g} \Phi \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\Phi^2}{g} \frac{df}{ds} \right]_{s=0} - \Phi \sigma_z = 0 \quad (21б)
\end{aligned}$$

или $f_0 = 0$.

Проинтегрировав первые семь из соотношений (19) по сечению стержня и введя следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 P &= \iint_{(F)} \frac{dx dy}{g}; & P_x &= \iint_{(F)} \frac{y}{g} dx dy; & P_y &= \iint_{(F)} \frac{x}{g} dx dy; \\
 P_1 &= \iint_{(F)} dx dy; & P_{1x} &= \iint_{(F)} \frac{g}{Vg} dx dy; & P_{1y} &= \iint_{(F)} \frac{x}{Vg} dx dy; \\
 Q &= \iint_{(F)} \frac{\Phi}{g} dx dy; & Q_1 &= \iint_{(F)} \frac{\Phi}{Vg} dx dy; & Q_x &= \iint_{(F)} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx dy}{Vg}; \\
 Q_y &= \iint_{(F)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dx dy}{Vg}; & I_x &= \iint_{(F)} \frac{y^2}{g} dx dy; & I_y &= \iint_{(F)} \frac{x^2}{g} dx dy; \\
 I_{xy} &= \iint_{(F)} \frac{xy}{g} dx dy; & I_\Phi &= \iint_{(F)} \frac{\Phi^2}{g} dx dy; & I_{x\Phi} &= \iint_{(F)} \frac{x\Phi}{g} dx dy; \\
 I_{y\Phi} &= \iint_{(F)} \frac{y\Phi}{g} dx dy; & I_{\Phi_1} &= \iint_{(F)} \frac{\Phi}{Vg} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy; \\
 I_{\Phi_2} &= \iint_{(F)} \frac{\Phi}{Vg} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy; & I_\eta &= \iint_{(F)} \frac{\eta^2}{g} dx dy; \\
 I_{x\eta} &= \iint_{(F)} \frac{x\eta}{g} dx dy; & I_{y\eta} &= \iint_{(F)} \frac{y\eta}{g} dx dy; \\
 I_{\Phi\eta} &= \iint_{(F)} \frac{\Phi\eta}{g} dx dy; & T &= \iint_{(G)} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy; \\
 T_\eta &= \iint_{(F)} \frac{\eta}{Vg} dx dy,
 \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\eta = y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

получим систему уравнений Кирхгофа в виде:

$$\begin{aligned}
 P_1 \varepsilon + P_{1x} \varkappa_1 - P_{1y} \varkappa_2 + Q_1 \frac{df}{ds} + T_\eta \omega_\tau f &= \frac{V_z}{E^*}, \\
 P_{1x} \varepsilon + I_x \varkappa_1 - I_{xy} \varkappa_2 + I_{y\eta} \omega_\tau f + I_{y\Phi} \frac{df}{ds} &= \frac{M_x}{E^*}, \\
 P_{1y} \varepsilon + I_{xy} \varkappa_1 - I_y \varkappa_2 + I_{x\eta} \omega_\tau f + I_{x\Phi} \frac{df}{ds} &= \frac{M_y}{E^*}, \\
 P \gamma_x - P_x \psi_1 + Q \omega_y f + Q_x f &= \frac{V_x}{\mu}, \\
 P \gamma_y + P_y \psi_1 - Q \omega_x f + Q_y f &= \frac{V_y}{\mu},
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$(I_x + I_y) \psi + P_y \gamma_y - P_x \gamma_x - (\omega_y I_{y\Phi} + \omega_x I_{x\Phi} + T_\eta) f = \frac{M_z}{\mu},$$

$$\begin{aligned}
 E^* \left[T_\eta \varepsilon + I_{y\eta} \varkappa_1 - I_{x\eta} \varkappa_2 + I_\eta \omega_\tau f + I_{\Phi\eta} \frac{df}{ds} \right] - \\
 - \frac{d}{ds} \left(Q_1 \varepsilon + I_{y\Phi} \varkappa_1 - I_{x\Phi} \varkappa_2 + I_{\Phi\eta} \omega_\tau f + I_\Phi \frac{df}{ds} \right) + \\
 + \tilde{\mu} \left[(Q_x + \omega_y Q) \gamma_x + (Q_y - \omega_x Q) \gamma_y - (\omega_x I_{x\Phi} + \omega_y I_{y\Phi} + T_\eta) \psi_1 + \right. \\
 \left. + \left(\frac{1}{R^2} I_\Phi + 2\omega_x I_{\Phi_1} - 2\omega_y I_{\Phi_2} + T \right) f \right] = b.
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав таким же образом выражение (21а и б), получим:

$$E^* \left[Q_1 \varepsilon + I_{y\phi} \kappa_1 - I_{x\phi} \kappa_2 + I_{\phi\tau} \omega_\tau f + I_\phi \frac{df}{ds} \right]_{s=l} - B_l = 0$$

или $f_l = 0$; (24)

$$E^* \left[Q_1 \varepsilon + I_{y\phi} \kappa_1 - I_{x\phi} \kappa_2 + I_{\phi\tau} \omega_\tau f + I_\phi \frac{df}{ds} \right]_{s=0} + B_0 = 0$$

или $f_0 = 0$.

Восьмое из соотношений (19) и условие (20) интегрируем по длине стержня. Тогда получим:

$$\begin{aligned} & \tilde{\mu} I_{f_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \tilde{\mu} I_{f_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{E^*}{\sqrt{g}} I_{f_3} y \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{E^*}{\sqrt{g}} I_{f_3} x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \\ & - \frac{E^*}{g} I_{f_2} \Phi + \frac{E^*}{g} I_{f_4} + \frac{E^*}{g} x I_{f_5} + \frac{E^*}{g} y I_{f_6} = 0; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{E^*}{\sqrt{g}} y I_{\varepsilon\psi} + \frac{E^*}{g} y^2 I_{\kappa_1} - \frac{E^*}{g} xy I_{\kappa_2} + \frac{E^*}{g} I_{f_7} - \frac{E^*}{\sqrt{g}} y I_{\omega_\tau f} + \right. \\ & + \frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{g}} \Phi I_{\omega_y} - \tilde{\mu} I_{f_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \tilde{\mu} \frac{1}{\sqrt{g}} I_{\gamma_x} \left. \right\} dy - \left\{ - \frac{E^*}{\sqrt{g}} I_{\varepsilon\psi} - \frac{E^*}{g} xy I_{\kappa_1} + \right. \\ & + \frac{E^*}{g} x^2 I_{\kappa_2} - \frac{E^*}{g} \Phi x I_{f_7} - \frac{E^*}{\sqrt{g}} x I_{\omega_\tau f} + \tilde{\mu} I_{f_1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \\ & \left. - \tilde{\mu} \frac{1}{\sqrt{g}} \Phi I_{\omega_x} + \frac{E^*}{\sqrt{g}} I_{\gamma_y} \right\} dx = 0; \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} I_{f_1} &= \int_0^l f^2 ds; & I_{f_2} &= \int_0^l \left[\left(\frac{df}{ds} \right)^2 + \frac{\tilde{\mu}}{E^*} f^2 (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \sqrt{g} f \frac{d^2 f}{ds^2} \right] ds; \\ I_{f_3} &= \int_0^l \left(\omega_\tau \frac{df}{ds} + f \frac{d\omega_\tau}{ds} \right) ds; & I_{f_4} &= \int_0^l \left[\frac{\tilde{\mu}}{E^*} f (\gamma_x \omega_y - \gamma_y \omega_x) - \right. \\ & - \sqrt{g} \frac{df}{ds} \varepsilon - g f \frac{d\varepsilon}{ds} \left. \right] ds; & I_{f_5} &= \int_0^l \left(\frac{df}{ds} \kappa_2 - \frac{\tilde{\mu}}{E^*} f \psi_1 \omega_x + \omega_\tau \kappa_1 f + \right. \\ & \left. + f \sqrt{g} \frac{d\kappa_2}{ds} \right) ds; \\ I_{f_6} &= \int_0^l \left(\kappa_2 \omega_\tau f - \frac{df}{ds} \kappa_1 - f \sqrt{g} \frac{d\kappa_1}{ds} - \frac{\tilde{\mu}}{E^*} f \psi_1 \omega_y \right) ds, \\ I_{f_7} &= \int_0^l \frac{df}{ds} f \omega_\tau ds, & I_{\omega_x} &= \int_0^l f^2 \omega_x ds; & I_{\omega_y} &= \int_0^l f^2 \omega_y ds, \\ I_{\gamma_y} &= \int_0^l f \gamma_y ds, & I_{\gamma_x} &= \int_0^l f \gamma_x ds, & I_{\omega_\tau f} &= \int_0^l \left(\frac{d\omega_\tau}{ds} f + \omega_\tau \frac{df}{ds} \right) ds, \\ I_{\kappa_1} &= \int_0^l \kappa_1 \omega_\tau f ds, & I_{\kappa_2} &= \int_0^l \kappa_2 \omega_\tau f ds. \end{aligned} \quad (27)$$

Полученные семь уравнений (23), уравнение (25) вместе с уравнениями статики (Кирхгофа) и уравнениями неразрывности (Клебша) составляют полную систему уравнений теории стержней, учитывающую деформацию сдвига и деформацию сечения. Из этой системы уравнений определяются все неизвестные компоненты деформации, внутренние усилия и моменты, а также функции $f(s)$ и $\Phi(x, y)$, характеризующие деформацию сечения стержня.

Систему уравнений классической теории стержней можно получить из выведенной выше, если сделать ряд дополнительных предположений.

Действительно, уравнения Клебша классической теории стержней получаются, если предположить, что в (3) отсутствует деформация сдвига. Далее, в уравнениях (4), следует принять $\varepsilon = 0$, т. е. допустить, что изменение кривизны и кручения оси стержня не зависит от растяжения. Кроме того, здесь также необходимо, чтобы $\gamma_x = \gamma_y = 0$.

Уравнения неразрывности классической теории стержней имеют вид:

$$\frac{dw}{ds} - u\omega_y + v\omega_x = \varepsilon, \quad \frac{du}{ds} - v\omega_\tau + w\omega_y = \beta, \quad (28)$$

$$\frac{dv}{ds} + u\omega_\tau - w\omega_x = -\alpha,$$

$$\kappa_x = \frac{d\alpha}{ds} - \beta\omega_\tau + \gamma\omega_y, \quad \kappa_y = \frac{d\beta}{ds} + \alpha\omega_\tau - \gamma\omega_x, \quad (29)$$

$$\Psi = \frac{d\gamma}{ds} - \alpha\omega_y + \beta\omega_x.$$

Уравнения статики остаются без изменений:

$$\frac{dV_x}{ds} - \omega_\tau V_y + \omega_y V_z + q_x = 0, \quad \frac{dV_y}{ds} + \omega_\tau V_x - \omega_x V_z + q_y = 0, \quad (30)$$

$$\frac{dV_z}{ds} + \omega_x V_y - \omega_y V_x + q_z = 0,$$

$$\frac{dM_x}{ds} - \omega_\tau M_y + \omega_y M_z - V_y + m_x = 0,$$

$$\frac{dM_y}{ds} + \omega_\tau M_x - \omega_x M_z + V_x + m_y = 0. \quad (31)$$

$$\frac{dM_z}{ds} + \omega_x M_y - \omega_y M_x + m_z = 0.$$

Система 12 уравнений (28) — (31) содержит 16 неизвестных. Недостающие уравнения можно получить из обобщенных соотношений Кирхгофа, если положить, как уже указывалось, что оси O_x, O_y, O_z — главные оси инерции сечения, кривизна оси мала, т. е. $g = 1$, депланация сечения отсутствует и, как уже предполагалось, изменение кривизны и кручения не зависит от растяжения. Кроме того, полярный момент инерции сечения I_p заменяется геометрической жесткостью при кручении C , где

$$C = 2 \iint \Phi \, dx \, dy.$$

При этих предположениях уравнения (23) преобразуются в известные соотношения Кирхгофа, и недостающие уравнения примут вид:

$$EP_1\varepsilon = V_z, \quad EI_x\kappa_x = M_x, \quad EI_y\kappa_y = M_y, \quad C\psi = M_z. \quad (32)$$

Рассмотрим несколько примеров.

I. Прямой призматический стержень

Выпишем полную систему уравнений теории стержней в общем случае, пренебрегая влиянием деформации сдвига.

Уравнения Клебша для прямого стержня напомним следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{dw^0}{ds}; & \beta &= \frac{du^0}{ds}; & -\alpha &= \frac{dv^0}{ds}; \\ \kappa_x &= \frac{d\alpha}{ds}; & \kappa_y &= \frac{d\beta}{ds}; & \Psi &= \frac{d\gamma}{ds}. \end{aligned} \quad (33)$$

Уравнения равновесия будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{ds} &= -q_x, & \frac{dM_x}{ds} - V_y + m_x &= 0, \\ \frac{dV_y}{ds} &= -q_y, & \frac{dM_y}{ds} + V_x + m_y &= 0, \\ \frac{dV_z}{ds} &= -q_z, & \frac{dM_z}{ds} + m_z &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Соотношения Кирхгофа существенно упростятся.

$$\begin{aligned} P_1 \varepsilon + Q_1 \frac{df}{ds} &= \frac{V_z}{E^*}, & I_x \kappa_x + I_{y\varphi} \frac{df}{ds} &= \frac{M_x}{E^*}, \\ I_y \kappa_y - I_{x\varphi} \frac{df}{ds} &= \frac{M_y}{E^*}, & Q_x f &= \frac{V_x}{\tilde{\mu}}, \\ Q_y f &= \frac{V_y}{\tilde{\mu}}, & I_p \Psi - T_n f &= \frac{M_z}{\tilde{\mu}}, \\ -E^* \frac{d}{ds} \left(Q_1 \varepsilon + I_{y\varphi} \kappa_x - I_{x\varphi} \kappa_y + I_\varphi \frac{df}{ds} \right) &+ \tilde{\mu} (-T_n \Psi + T f) &= b. \end{aligned} \quad (35)$$

Наконец, уравнение для определения функции Φ примет следующий вид:

$$\tilde{\mu} I_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \tilde{\mu} I_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{E^*}{g} I_{f_2} \Phi + \frac{E^*}{g} I_{f_4} + \frac{E^*}{g} x I_{f_5} + \frac{E^*}{g} y I_{f_6} = 0. \quad (36)$$

Интегралы, входящие в (36), могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^l f^2 ds, & I_{f_2} &= \int_0^l \left[\left(\frac{df}{ds} \right)^2 - f \frac{d^2 f}{ds^2} \right] ds, \\ I_{f_4} &= \int_0^l \left(\frac{df}{ds} \varepsilon + f \frac{d\varepsilon}{ds} \right) ds, & I_{f_5} &= \int_0^l \left(\frac{df}{ds} \kappa_2 + f \frac{d\kappa_2}{ds} \right) ds, \\ I_{f_6} &= \int_0^l \left(\frac{df}{ds} \kappa_1 + f \frac{d\kappa_1}{ds} \right) ds. \end{aligned} \quad (37)$$

Последние четыре интеграла легко вычислить. Действительно,

$$\begin{aligned} I_{f_2} &= f(l) \frac{df}{ds}(l) - f(0) \frac{df}{ds}(0), & I_{f_4} &= f(l) \varepsilon(l) - f(0) \varepsilon(0), \\ I_{f_5} &= f(l) \kappa_2(l) - f(0) \kappa_2(0), & I_{f_6} &= f(l) \kappa_1(l) - f(0) \kappa_1(0). \end{aligned} \quad (38)$$

Граничное условие для определения функции Φ напомним следующим образом:

$$\left(I_{f_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - I_{f\varphi y} \right) dy - \left(I_{f_1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + I_{f\varphi x} \right) dx = 0. \quad (39)$$

Граничные условия на концах стержня останутся без изменений:

$$(\bar{\lambda} + 2\tilde{\mu}) \left(Q_1 \varepsilon + I_{y\varphi} \kappa_x - I_{x\varphi} \kappa_y + I_\varphi \frac{df}{ds} \right)_{s=0, l} = B_{0, l}.$$

Задачу будем решать следующим образом. Допустим, что Φ — функция кручения. Тогда интегралы, входящие в первые шесть соотношений Кирхгофа, можно полагать известными. Определим из первого, второго, третьего и шестого соотношений величины ε , κ_x , κ_y , Ψ и подставим их в седьмое уравнение.

Получим следующее уравнение для определения функции депланации:

$$\frac{d^2 f}{ds^2} - k^2 f = \frac{1}{\left(\frac{Q_1}{P_1} + \frac{I_{y\Phi}^2}{I_x} + \frac{I_{x\Phi}^2}{I_y} - I_\Phi \right)} \left[\frac{T_\eta}{E^* I_p} M_z - \frac{I_{x\Phi}}{E^* I_y} \frac{dM_y}{ds} + \right. \\ \left. + \frac{I_{y\Phi}}{E^* I_x} \frac{dM_x}{ds} + \frac{Q_1}{E^* P_1} \frac{dV_z}{ds} \right], \quad (40)$$

где

$$k^2 = \frac{\frac{\tilde{\mu}}{E^*} \left(\frac{T_\eta^2}{I_p} - T \right)}{\left(\frac{Q_1^2}{P_1} + \frac{I_{y\Phi}^2}{I_x} + \frac{I_{x\Phi}^2}{I_y} - I_\Phi \right)}.$$

Рассмотрим несколько частных задач.

а) Кручение консольного стержня под действием момента, приложенного к свободному торцу. Из уравнений равновесия имеем:

$$V_x = V_y = V_z = M_x = M_y = M_z = M_{кр}.$$

Решение уравнения (40) дает:

$$f = A_1 \operatorname{ch} ks + A_2 \operatorname{sh} ks + \frac{M_{кр}}{\tilde{\mu} C}, \quad (41)$$

$$C = I_p - T_\eta.$$

Граничные условия для определения произвольных постоянных A_1 и A_2 будут следующими:

при $s = 0$ депланация равна нулю, т. е. $f = 0$;

при $s = l$ бимомент равен нулю, т. е. $\frac{df}{ds} = 0$.

Из первого условия следует, что $A = -\frac{M_{кр}}{\tilde{\mu} C}$, из второго условия

$$A_2 = \frac{M_{кр}}{\tilde{\mu} C} \operatorname{th} kl, \text{ следовательно,}$$

$$f = \frac{M_{кр}}{\tilde{\mu} C} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl} \right]$$

или

$$f = \Theta \left[1 - \frac{\operatorname{ch} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl} \right], \quad (42)$$

где

$$\frac{M_{кр}}{\tilde{\mu} C} = \Theta.$$

Подставляя f и df/ds в соответствующие соотношения Кирхгофа, получим:

$$\varepsilon = -\frac{Q_1}{P_1} \Theta k \frac{\operatorname{ch} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl}, \quad \kappa_x = -\frac{I_{x\Phi}}{I_x} \Theta k \frac{\operatorname{sh} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl}, \\ \kappa_y = \frac{I_{y\Phi}}{I_x} \Theta k \frac{\operatorname{sh} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl}, \quad \Psi = \Theta \left[1 - \frac{T_\eta}{I_p} \frac{\operatorname{ch} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl} \right]. \quad (43)$$

Интеграл Q_1 , входящий в выражение для ε , можно положить равным нулю, так как функция кручения определяется с точностью до произвольной постоянной.

Рассмотрим далее уравнение для определения функции Φ .

В силу соотношений (38) и (43) интегралы I_{f_2} , I_{f_4} , I_{f_6} и I_{f_8} равны нулю. Тогда уравнение для определения функции Φ можно написать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (44)$$

Таким образом, функция Φ будет по-прежнему удовлетворять уравнению Лапласа.

Граничное условие на поверхности стержня будет иметь вид

$$\left(I_{f_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - I_{f_3} \psi \right) dy - \left(I_{f_1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x I_{f_5} \right) dx = 0. \quad (45)$$

Вычислим интегралы I_{f_1} и I_{f_3} :

$$\begin{aligned} I_{f_1} &= \tilde{\mu} \Theta^2 l \left(1 - \frac{3}{2kl} \operatorname{th} kl + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 kl} \right), \\ I_{f_3} &= \tilde{\mu} \Theta^2 l \left[1 - \left(1 + \frac{T_n}{2I_p} \right) \frac{\operatorname{th} kl}{kl} + \frac{T_n}{2I_p \operatorname{ch}^2 kl} \right]; \end{aligned} \quad (46)$$

следовательно, (45) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\left[1 - \left(1 + \frac{T_n}{2I_p} \right) \frac{\operatorname{th} kl}{kl} + \frac{T_n}{2I_p \operatorname{ch}^2 kl} \right]}{\left[1 - \frac{3}{2kl} \operatorname{th} kl + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 kl} \right]} (y \cos nx - x \sin ny). \quad (47)$$

Уравнение (47) преобразуется в граничное условие для определения функции кручения стержня при условии, что сечение стержня вытянутое, т. е. отношение C/I_p мало, а величина kl велика. Действительно, при этом множитель, стоящий в формуле (47), равен

$$1 + \frac{1}{2kl} \frac{C}{I_p}$$

и, следовательно, будет стремиться к единице. Граничное условие для определения функции Φ напомним следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = y \cos nx - x \cos ny. \quad (48)$$

Вычислим компоненты тензора напряжений. В соответствии с [10] они равны

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E^* \left\{ -\Theta k \frac{\operatorname{sh} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl} \left[\frac{Q_1}{P_1} + \frac{I_{y\Phi}}{I_x} y + \frac{I_{x\Phi}}{I_y} x \right] + \frac{df}{ds} \Phi \right\}, \\ \tau_{xz} &= G\Theta \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) + \frac{\operatorname{ch} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl} \left(y \frac{T_n}{I_p} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right], \\ \tau_{yz} &= G\Theta \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) - \frac{\operatorname{ch} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl} \left(x \frac{T_n}{I_p} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

Как известно, положение центра изгиба определяется формулами

$$x_c = -\frac{I_{y\Phi}}{I_x}; \quad y_c = \frac{I_{x\Phi}}{I_y}.$$

В случае, если центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения, интегралы $I_{x\Phi}$ и $I_{y\Phi}$ равны нулю. Напряжения в этом случае определяются

формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E^* \Theta k \frac{\operatorname{sh} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl} \Phi, \\ \tau_{xz} &= \tilde{\mu} \Theta \left[\frac{\operatorname{ch} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl} \left(\frac{T_\eta}{I_p} y - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - y + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right], \\ \tau_{yz} &= \tilde{\mu} \Theta \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} + x - \frac{\operatorname{ch} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl} \left(\frac{T_\eta}{I_p} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right].\end{aligned}\quad (50)$$

Отметим, что в этом случае формулы для f , k^2 напряжений и перемещений совпадают с полученными в работе [10].

Выпишем компоненты тензора напряжений для той же задачи, предполагая, что депланация сечения пропорциональна углу упругой закрутки. В этом случае мы получим

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E^* \Theta k_1 \Phi \frac{\operatorname{sh} k_1(l-s)}{\operatorname{ch} k_1 l}, \\ \tau_{xz} &= \tilde{\mu} \Theta \left[1 - \frac{\operatorname{ch} k_1(l-s)}{\operatorname{ch} k_1 l} \right] \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{yz} &= \tilde{\mu} \Theta \left[1 - \frac{\operatorname{ch} k_1(l-s)}{\operatorname{ch} k_1 l} \right] \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right).\end{aligned}\quad (51)$$

При выводе последних формул, мы, как и ранее, предполагали, что центр тяжести сечения совпадает с его центром изгиба.

Сравним выражение для k , полученное по обобщенной теории стержней, с k_1 , вычисленным по упрощенной теории. Легко убедиться, что

$$k^2 = k_1^2 \left(1 - \frac{C}{I_p} \right).\quad (52)$$

Для очень тонких профилей, как уже указывалось, отношение C/I_p может быть сколь угодно мало, следовательно, для него $k = k_1$.

Из выражений (51) и (52) следует также, что напряжения стесненного кручения, полученные по уточненным формулам, затухают медленнее, чем те же напряжения, вычисленные по приближенным теориям.

б) Изгиб консольного стержня силами, приложенными к торцовому сечению

Пусть к торцовому сечению стержня ($s = l$) в точке с координатами x_0 и y_0 приложены усилия P_x и P_y .

Из уравнений статики следует, что

$$\begin{aligned}V_x &= P_x; & V_y &= P_y; & V_z &= 0, \\ M_x &= -P_y(l-s); & M_y &= P_x(l-s); & M_z &= x_0 P_y - y_0 P_x.\end{aligned}\quad (53)$$

Уравнение для определения функции депланации с учетом (53) напомним следующим образом:

$$\frac{d^2 f}{ds^2} - k^2 f = \frac{1}{E^* \left(\frac{Q_1^2}{P_1} + \frac{I_{y\Phi}^2}{I_x} + \frac{I_{x\Phi}^2}{I_y} - I_\Phi \right)} \left[\frac{T_\eta}{I_p} (x_0 P_y - y_0 P_x) + \frac{I_{x\Phi}}{I_y} P_x + \frac{I_{y\Phi}}{I_x} P_y \right],\quad (54)$$

где

$$k^2 = \frac{\tilde{\mu} \left(\frac{T_\eta^2}{I_p} - T \right)}{\left(\frac{Q_1^2}{P_1} + \frac{I_{y\Phi}^2}{I_x} + \frac{I_{x\Phi}^2}{I_y} - I_\Phi \right)}.$$

Правая часть уравнения (54) обращается в нуль, если силы P_x и P_y приложены в точке с координатами

$$x_0 = -\frac{I_{y\Phi} I_p}{I_x T_\eta}; \quad y_0 = \frac{I_{x\Phi} I_p}{I_y T_\eta}. \quad (55)$$

Назовем эту точку центром депланации: в этом случае силы P_x и P_y не вызывают депланации сечения стержня.

Найдем координаты центра изгиба. Уравнение для определения функции ψ имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} - k^2\psi = \frac{T_\eta}{E^* I_p \left(\frac{Q_1^2}{P_1} + \frac{I_{y\Phi}^2}{I_x} + \frac{I_{x\Phi}^2}{I_y} - I_\Phi \right)} \left[\left(\frac{I_{y\Phi}}{I_x} + x_0 \right) P_y + \left(\frac{I_{x\Phi}}{I_y} - y_0 \right) P_x \right]. \quad (56)$$

Правая часть уравнения (56) обращается в нуль, если силы P_x и P_y приложены в точке с координатами

$$x_c = -\frac{I_{y\Phi}}{I_x}; \quad y_c = \frac{I_{x\Phi}}{I_y}. \quad (57)$$

В этом случае силы P_x и P_y не вызывают закручивания стержня, следовательно, точка (x_c, y_c) является центром изгиба.

Проинтегрируем уравнение (54). Определив произвольные постоянные, найдем

$$f = \frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{\left(\frac{T_\eta}{I_p} x_0 + \frac{I_{y\Phi}}{I_x} \right) P_y - \left(\frac{T_\eta}{I_p} y_0 - \frac{I_{x\Phi}}{I_y} \right) P_x}{\left(\frac{T_\eta^2}{I_p} - T \right)} \left[1 - \frac{\text{ch } k(l-s)}{\text{ch } kl} \right]. \quad (58)$$

Функция ψ будет определяться следующим образом:

$$\psi = \frac{1}{\tilde{\mu}} \left\{ \frac{x_0 P_y - y_0 P_x}{I_p} + \frac{\left(\frac{T_\eta}{I_p} x_0 + \frac{I_{y\Phi}}{I_x} \right) P_y - \left(\frac{T_\eta}{I_p} y_0 - \frac{I_{x\Phi}}{I_y} \right) P_x}{I_p \left(\frac{T_\eta^2}{I_p} - 1 \right)} \left[1 - \frac{\text{ch } k(l-s)}{\text{ch } kl} \right] \right\}. \quad (59)$$

Определим компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_z = & - \left\{ \frac{P_y(l-s)}{I_x} y + \frac{P_x(l-s)}{I_y} x + \frac{E^* k}{\tilde{\mu}} \left(\frac{I_{y\Phi}}{I_x} y + \frac{I_{x\Phi}}{I_y} x - \Phi \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\left[\left(\frac{T_\eta}{I_p} x_0 + \frac{I_{y\Phi}}{I_x} \right) P_y - \left(\frac{T_\eta}{I_p} y_0 - \frac{I_{x\Phi}}{I_y} \right) P_x \right]}{\left(\frac{T_\eta^2}{I_p} - T \right)} \frac{\text{sh } k(l-s)}{\text{ch } kl} \right\}, \\ \tau_{xz} = & \frac{\left[\left(\frac{T_\eta}{I_p} x_0 + \frac{I_{y\Phi}}{I_x} \right) P_y - \left(\frac{T_\eta}{I_p} y_0 - \frac{I_{x\Phi}}{I_y} \right) P_x \right]}{\left(\frac{T_\eta^2}{I_p} - 1 \right)} \left[1 - \frac{\text{ch } k(l-s)}{\text{ch } kl} \right] \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{y}{I_p} \right) - \\ & - y \frac{x_0 P_y - y_0 P_x}{I_p}, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\left[\left(\frac{T_{\eta}}{I_p} x_0 + \frac{I_{y\Phi}}{I_x} \right) P_y - \left(\frac{T_{\eta}}{I_p} y_0 - \frac{I_{x\Phi}}{I_y} \right) P_x \right]}{\left(\frac{T_{\eta}}{I_p} - 1 \right)} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} k(l-s)}{\operatorname{ch} kl} \right] \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{x}{I_p} \right) +$$

$$+ x \frac{x_0 P_y - y_0 P_x}{I_p}.$$

Рассмотрим уравнение для определения функции Φ .

Интегралы I_{f_1} , I_{f_4} , I_{f_5} и I_{f_6} оказываются равными нулю. Таким образом, функция Φ по-прежнему будет удовлетворять уравнению Лапласа.

Напишем граничное условие для функции Φ . В соответствии с (26) оно имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dy - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx = \frac{I_{f\psi}}{I_{f_1}} (y dy + x dx). \quad (61)$$

Таким образом, в случае, когда поперечные силы P_x и P_y приложены в произвольной точке сечения, Φ не является функцией кручения, ибо она удовлетворяет другому граничному условию. Лишь в том случае, если стержень имеет тонкое вытянутое сечение, можно показать, что отношение интегралов $I_{f\psi}/I_{f_1}$ стремится к единице, и соотношение (61) преобразуется в обычное условие для определения функции кручения.

III. Кольцевой стержень

Введем систему координат, связанную с сечением кольца. Пусть ось Oz направлена по касательной к оси стержня, ось Ox лежит в плоскости кольца, ось Oy — в перпендикулярной плоскости. Система координатных осей Ox , Oy , Oz — левая. Система уравнений обобщенной теории стержней для кругового кольца имеет вид:

$$\begin{aligned} dw/d\theta - u &= 0, & dv/d\theta &= -\alpha R, & d\alpha/d\theta + \gamma &= \kappa_x R, \\ d\beta/d\theta &= \kappa_y R, & du/d\theta + w &= \beta R, & d\gamma/d\theta - \alpha &= \psi R, \end{aligned} \quad (62)$$

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} dV_x/d\theta + V_z &= 0, & dM_x/d\theta + M_z - V_y R &= 0, & dV_y/d\theta &= 0; \\ dM_y/d\theta + V_x R &= 0, & dV_z/d\theta - V_x &= 0; & dM_z/d\theta - M_x &= 0, \end{aligned} \quad (63)$$

соотношения Кирхгофа

$$\begin{aligned} Q_1 \frac{df}{ds} &= \frac{V_z}{E^*}, & I_x \kappa_x + I_{y\Phi} \frac{df}{ds} &= \frac{M_x}{E^*}, \\ I_y \kappa_y - I_{x\Phi} \frac{df}{ds} &= \frac{M_y}{E^*}, & I_p \psi - \left(\frac{I}{R} I_{y\Phi} + T_{\eta} \right) f &= \frac{M_z}{\tilde{\mu}}; \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} E^* \left[-\frac{d}{d\theta} \left(I_{y\Phi} \kappa_x - I_{x\Phi} \kappa_y + I_{\Phi} \frac{1}{R} \frac{df}{ds} \right) + \tilde{\mu} R \left[-\left(\frac{1}{R} I_{y\Phi} + T_{\eta} \right) \psi + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{R^2} I_{\Phi} + T \right) f \right] \right] = 0. \end{aligned}$$

Уравнение для определения функции Φ и граничные условия для нее можно написать в виде

$$\tilde{\mu} I_{f_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - E^* I_{f_2} \Phi + E^* (I_{f_4} + x I_{f_5} + y I_{f_6}) = 0, \quad (65)$$

$$\left(\frac{1}{R} I_1 \Phi + I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y I_2 \right) dy - \left(I_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x I_2 \right) dx. \quad (66)$$

Решение системы уравнений (62) — (65) для задачи кручения консольного кольцевого стержня прямоугольного сечения показывает, что в случае стержня с вытянутым сечением предложенный вариант обобщения теории стержней дает существенное уточнение решения [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Kirchhoff*. Über das gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. — J. für Math., 1859, 56, Mechanik, Vorles 28.
2. *A. Clebsch*. Theorie der Elastizität fester Körper, 1862, 57.
3. *Г. Ю. Джанелидзе, Я. Г. Пановко*. Статика упругих тонкостенных стержней. М., Гостехиздат, 1948.
4. *В. З. Власов*. Тонкостенные упругие стержни. М., Физматгиз, 1959.
5. *Г. Ю. Джанелидзе*. Теория тонких криволинейных стержней, обладающих в поперечном сечении недеформируемым контуром. — ПММ, 1944, т. VIII, № 1.
6. *О. Б. Голубев*. Обобщение теории тонких стержней. Динамика и прочность машин. — Труды Ленингр. политехнического института, 1963, № 226.
7. *K. Washizu*. Some consideration on a naturally curved and twisted slender beam. — J. of Math and Phys., 1964, v. 43, N. 2.
8. *А. Я. Аронсон, А. У. Бугов, В. М. Малышев, И. А. Скрылев, Г. Х. Франк-Каме-нецкий*. Расчет на прочность деталей гидротурбин. — Машиностроение, 1965.
9. *Е. С. Гребень*. К теории тонких стержней. — Механика твердого тела, 1967, № 5.
10. *Н. В. Зволинский*. Приближенное решение задачи кручения упругого цилиндрического бруса с одним неизменяемым сечением. — Изв. АН СССР, ОТН, 1939, № 8.
11. *А. Я. Аронсон*. О кручении криволинейного стержня. Механика твердого тела (в печати).

ЗАДАЧА КРУЧЕНИЯ ОРТОТРОПНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО БРУСА В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Г. А. ПОГОСЯН

Задача кручения в геометрически нелинейной постановке, когда не выполняется принцип неизменности начальных параметров, ввиду значительности перемещения и углов поворота, является предметом изучения нелинейной теории упругости. Это объясняется тем, что в классической теории упругости имеет место суперпозиция отдельных видов деформаций.

Нелинейные задачи теории упругости исследуются различными методами. Одним из прямых методов является метод малого параметра, изученный Н. З. Зволинским, П. М. Ризом [1, 2]. Сущность этого метода заключается в том, что искомые компоненты смещения разлагаются в ряды относительно малых параметров ($\tau, \alpha, \beta, \gamma$), которые характеризуют отдельные простые виды деформации. В зависимости от требуемой точности результата ограничиваются определенным порядком разложения. В случае ограничения членами второго порядка малости получим четыре системы линейных уравнений упругого равновесия и 13 систем относительно $\tau^2, \beta^2, \alpha^2, \gamma^2, \tau\alpha, \tau\beta, \dots$

Решения системы уравнений упругого равновесия призматического тела относительно $\tau^2, \alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ определяют вторичные эффекты отдельных видов деформаций (кручение, растяжение, изгиб парой сил, изгиб поперечной силой), а относительно произведений $\tau\alpha, \tau\beta, \dots$ — взаимовлияние двух видов деформаций.

Рассматривая каждую систему в отдельности, изучают вторичные эффекты простых видов деформаций и их взаимовлияние.

Разложенные в ряды компоненты смещения при кручении с точностью до членов второго порядка малости имеют вид

$$u = \tau u_0 + \tau^2 u_1, \quad v = \tau v_0 + \tau^2 v_1, \quad w = \tau w_0 + \tau^2 w_1. \quad (1)$$

где u_0, v_0, w_0 — известные компоненты смещения линейной теории упругости; u_1, v_1, w_1 — искомые дополнительные компоненты смещения.

Поскольку в классической теории упругости изучаются бесконечно малые деформации, то в компонентах тензора деформации квадратами частных производных от компонентов смещения пренебрегают. Но на практике, в отдельных случаях, они могут оказывать существенное влияние на напряженное состояние тела.

Настоящая работа посвящена изучению вторичного эффекта при кручении методом малого параметра.

Постановка задачи. Имеем однородный ортотропный призматический брус. Поместим начало декартовой системы осей координат в центре тяжести закрепленного основания, оси $O\xi$ и $O\eta$ направим по главным центральным осям указанного основания, а ось $O\zeta$ — параллельно образующим боковой поверхности. Координатные плоскости совместим с плоскостями упругой симметрии.

Внешние силы, приложенные к свободному основанию, приводятся к паре сил, вектор-момент которой направлен по оси бруса.

Смещение считаем не настолько малыми, чтобы можно было пренебречь квадратами компонентов тензора деформации, но напряжения при этом не превосходят предела пропорциональности.

В отличие от линейной теории упругости, в упомянутой постановке задачи следует отличать недеформированное состояние тела от деформированного. Если через ξ, η, ζ обозначим координаты точки до деформации тела: x, y, z — координаты той же точки после деформации, то

$$x = u + \xi, \quad y = v + \eta, \quad z = w + \zeta. \quad (2)$$

При этих обозначениях зависимости между компонентами тензора деформации и компонентами вектора смещения в системе координат $Oxyz$ имеют вид

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \quad \dots \quad (3)$$

$$e_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Уравнение равновесия призматического тела и условия на боковой поверхности в той же системе $Oxyz$ сохраняют классическую форму [3].

Заметим, что задача решается с последующим переходом от деформированного состояния тела (x, y, z) к недеформированному (ξ, η, ζ) . Формулы перехода с точностью до членов второго порядка малости имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \dots \quad (4)$$

Направляющие косинусы $(\cos(n, x), \cos(n, y), \cos(n, z))$ нормали к деформированной поверхности $F(x - u, y - v) = 0$ выражаются через направляющие косинусы $(\cos(n, \xi), \cos(n, \eta))$ к недеформированной поверхности $F_1(\xi, \eta) = 0$ по зависимости

$$\cos(n, x) = \frac{M}{M_0} \left[\left(1 - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \cos(n, \xi) - \frac{\partial v}{\partial \xi} \cos(n, \eta) \right], \quad (5)$$

где

$$M = \left\{ \left[\left(1 - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) F'_\xi - \frac{\partial v}{\partial \xi} F'_\eta \right]^2 + \left[-\frac{\partial u}{\partial \eta} F'_\xi + \left(1 - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) F'_\eta \right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial z} F'_\xi + \frac{\partial v}{\partial z} F'_\eta \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}; \quad M_0 = \left[(F'_\xi)^2 + (F'_\eta)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Обобщенный закон Гука для ортотропного материала имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= Ae_{11} + He_{22} + Ge_{33}, & \tau_{22} &= He_{11} + Be_{22} + Fe_{33}, \\ \tau_{33} &= Ge_{11} + Ee_{22} + Ce_{33}, & \tau_{23} &= 2Le_{23}, \quad \tau_{13} = 2Me_{13}, \quad \tau_{12} = 2De_{12}. \end{aligned} \quad (6)$$

Закон Гука в эквивалентной форме представится:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{12}\tau_{22} - \sigma_1\tau_{33}), & e_{23} &= \frac{1}{2L} \tau_{23}, \\ e_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{22} - \sigma_2\tau_{33}), & e_{13} &= \frac{1}{2M} \tau_{13}, \\ e_{33} &= \frac{1}{E} (\tau_{33} - \sigma_1\tau_{11} - \sigma_2\tau_{22}), & e_{12} &= \frac{1}{2D} \tau_{12}. \end{aligned} \quad (6a)$$

где A, B, \dots, M — модули упругости, σ_{ij}, σ_i ($i, j = 1, 2$) — коэффициенты, выраженные через модули упругости по известным соотношениям [4].

При решении задачи в случае конечных деформаций используем результаты работы [4]. Тогда разложение (1) принимает вид

$$u = -\tau\eta\xi + \tau^2 u_1, \quad v = \tau\xi\xi + \tau^2 v_1, \quad w = \tau\varphi(\xi, \eta) + \tau^2 w_1,$$

здесь $\tau = M_{кр}/D^*$ — малый параметр; $\varphi(\xi, \eta)$ — функция кручения [4];

$D^* = \iint_{(S)} [L(\varphi'_\eta + \xi)\xi - M[(\varphi'_\xi - \eta)\eta]] d\xi d\eta$ — жесткость при кручении.

Компоненты тензора деформаций, вычисленные по формулам (3) с учетом соотношений [4] с точностью до τ^2 , имеют вид:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \tau^2 \left(\frac{1}{2} \xi^2 + e_{11}^{(0)} + \varepsilon_{11}^{(1)} \right), & e_{12} &= \tau^2 (e_{12}^{(0)} + \varepsilon_{12}^{(1)}), \\ e_{22} &= \tau^2 \left(\frac{1}{2} \xi^2 + e_{22}^{(0)} + \varepsilon_{22}^{(1)} \right), & e_{13} &= \frac{1}{2} [\tau(\varphi'_\xi - \eta) + \tau^2(-\xi\varphi'_\eta + 2\varepsilon_{13}^{(1)})], \\ e_{33} &= \tau^2 (e_{33}^{(0)} + \varepsilon_{33}^{(1)}), & e_{23} &= \frac{1}{2} [\tau(\varphi'_\eta + \xi) + \tau^2(\xi\varphi'_\xi + 2\varepsilon_{23}^{(0)})], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} e_{11}^{(0)} &= \eta\varphi'_\xi - \frac{1}{2}(\varphi'_\xi)^2, & e_{22}^{(0)} &= -\xi\varphi'_\eta - \frac{1}{2}(\varphi'_\eta)^2, \\ e_{33}^{(0)} &= \eta\varphi'_\xi - \xi\varphi'_\eta - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2), & e_{12}^{(0)} &= \frac{1}{2}(\eta\varphi'_\eta - \xi\varphi'_\xi - \varphi'_\xi\varphi'_\eta). \end{aligned}$$

$\varepsilon_{kj}^{(1)}$ ($k, j = 1, 2, 3$) дополнительные компоненты тензора деформаций, соответствующие смещениям u_1, v_1, w_1 и определяются по формулам:

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = \frac{\partial v_1}{\partial \eta}, \quad \dots, \quad \varepsilon_{12}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \right).$$

Компоненты тензора напряжений $\tau_{11}, \tau_{22}, \dots, \tau_{12}$, соответствующие деформациям (7) и вычисленные по формулам (6), выразятся так:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \tau^2 \left[\tau_{11}^{(0)} + \frac{1}{2}(A + H)\xi^2 + \tau_{11}^{(1)} \right]; & \tau_{22} &= \tau^2 \left[\tau_{22}^{(0)} + \frac{1}{2}(H + B)\xi^2 + \tau_{22}^{(1)} \right]; \\ \tau_{33} &= \tau^2 \left[\tau_{33}^{(0)} + \frac{1}{2}(G + F)\xi^2 + \tau_{33}^{(1)} \right]; & \tau_{12} &= \tau^2 (\tau_{12}^{(0)} + \tau_{12}^{(1)}); & \tau_{23} &= \tau L (\varphi'_\eta + \xi) + \tau^2 (L\xi\varphi'_\xi + \tau_{23}^{(1)}); \\ & & \tau_{13} &= \tau M (\varphi'_\xi - \eta) + \tau^2 (-M\xi\varphi'_\eta + \tau_{13}^{(1)}), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\tau_{kj}^{(1)}$ ($k, j = 1, 2, 3$) — искомые компоненты тензора напряжений, соответствующие дополнительным компонентам тензора деформаций $\varepsilon_{kj}^{(1)}$; $\tau_{kj}^{(0)}$ — известные компоненты тензора напряжений, вычисленные по формулам (6), соответствующие деформациям $e_{kj}^{(0)}$.

Подставляя выражения (8) в уравнения равновесия и используя формулы преобразования (4), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{11}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{12}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{13}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \xi} &= 0, & \frac{\partial \tau_{12}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{22}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{23}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{13}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{23}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{33}^{(1)}}{\partial \xi} + \xi Q_1(\xi, \eta) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$U(\xi, \eta) = \tau_{11}^{(0)} + \int \left\{ \frac{\partial \tau_{12}^{(0)}}{\partial \eta} + M [(1 - \varphi_{\xi n}'') \xi - \varphi_n' + \eta \varphi_{\xi \xi}'] \right\} d\xi,$$

$$V(\xi, \eta) = \tau_{22}^{(0)} + \int \left\{ \frac{\partial \tau_{12}^{(0)}}{\partial \xi} + L [(1 + \varphi_{\xi n}'') \eta + \varphi_{\xi} - \xi \varphi_{\eta \eta}'] \right\} d\eta,$$

$$Q_1(\xi, \eta) = 2(L - M) \varphi_{\xi n}'' + G + F + L + M.$$

Связь между направляющими косинусами нормали к деформированной и недеформированной поверхностям при условии сохранения членов первого порядка относительно τ , найденная по формулам (5), будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= \cos(n, \xi) - \tau \zeta \cos(n, \eta), & \cos(n, y) &= \tau \zeta \cos(n, \xi) + \cos(n, \eta), \\ \cos(n, z) &= \tau \eta \cos(n, \xi) - \tau \xi \cos(n, \eta). \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом (10) граничные условия на боковой поверхности бруса [3] можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau_{11}^{(1)} \cos(n, \xi) + \tau_{12}^{(1)} \cos(n, \eta) + \left[\frac{1}{2} (A + H) \zeta^2 + \tau_{11}^{(0)} + M (\varphi_{\xi} - \eta) \eta \right] \times \\ \times \cos(n, \xi) + [\tau_{12}^{(0)} - M (\varphi_{\xi} - \eta) \xi] \cos(n, \eta) = 0, \\ \tau_{12}^{(1)} \cos(n, \xi) + \tau_{22}^{(1)} \cos(n, \eta) + [\tau_{12}^{(0)} + L (\varphi_n' + \xi) \eta] \cos(n, \xi) + \\ + \left[\frac{1}{2} (H + B) \zeta^2 + \tau_{22}^{(0)} - L (\varphi_n' + \xi) \xi \right] \cos(n, \eta) = 0, \\ \tau_{13}^{(1)} \cos(n, \xi) + \tau_{23}^{(1)} \cos(n, \eta) + [(L - M) \varphi_n' + L \xi] \zeta \cos(n, \xi) + \\ + [(L - M) \varphi_{\xi} + M \eta] \zeta \cos(n, \eta) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению компонентов тензора напряжений $\tau_{kj}^{(1)}$ по системе уравнений (9) и условиям на боковой поверхности (11), при наличии определенных объемных и поверхностных сил. Заметим, что компоненты тензора деформации, соответствующие $\tau_{kj}^{(1)}$, должны удовлетворять также условиям совместности [3], т. к. задача решается в напряжениях. Задача решается полуобратным методом Сен-Венана. Задаемся видом решения, оставляя некоторый произвол (Φ, ω, d_i); это необходимо для того, чтобы удовлетворять всем необходимым условиям задачи. Будем определять компоненты $\tau_{kj}^{(1)}$ в виде:

$$\begin{aligned} \tau_{11}^{(1)} &= -\frac{1}{2} (A + H) \zeta^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - U + M \left(\omega + d_4 \varphi + \frac{1}{2} \xi^2 \right), \\ \tau_{22}^{(1)} &= -\frac{1}{2} (H + B) \zeta^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - V + L \left(\omega + d_4 \varphi + \frac{1}{2} \eta^2 \right), \\ \tau_{33}^{(1)} &= -\frac{1}{2} (G + F) \zeta^2 + \sigma_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - U \right) + \sigma_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - V \right) + \\ &+ (M \sigma_1 + L \sigma_2 - E) (\omega + d_4 \varphi) + \frac{1}{2} (M \sigma_1 \xi^2 + L \sigma_2 \eta^2), \\ \tau_{12}^{(1)} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2} d_4 (L \xi^2 - M \eta^2), \\ \tau_{13}^{(1)} &= -M [\omega_{\xi}' + d_4 (\varphi_{\xi}' - \eta) + \xi] \zeta, \\ \tau_{23}^{(1)} &= -L [\omega_{\eta}' + d_4 (\varphi_{\eta}' + \xi) + \eta] \zeta. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что компоненты тензора напряжений (12) будут удовлетворять выше упомянутым условиям задачи, а также условиям на торцевой поверхности $l = \zeta$, если функции ω и Φ являются решениями следующих граничных задач:

$$1) \Delta_1 \omega = 2(L - M) \varphi_{\xi n}'' \quad (13)$$

— в области (S),

$$\frac{d_1\omega}{dn} = (L - M) [(\varphi'_\eta + \xi) \cos(n, \xi) + (\varphi'_\xi - \eta) \cos(n, \eta)] \quad (14)$$

— на контуре Γ области (S) ;

$$2) \Delta_2\Phi = \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\beta_{11}U + \beta_{12}V) + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\beta_{12}U + \beta_{22}V) - (M\beta_{11} + E\sigma_1) \times \\ \times (\omega''_{\eta\eta} + d_4\varphi''_{\eta\eta}) - (L\beta_{22} + E\sigma_2) (\omega''_{\xi\xi} + d_4\varphi''_{\xi\xi}) - 2\beta_{12}(L - M) \varphi''_{\xi\eta} - \\ - \beta_{12}(L + M) \quad (15)$$

— в области (S) ;

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \int_s \left\{ \left[\tau_{12}^{(0)} + L(\varphi'_\eta + \xi)\eta + \frac{1}{2}d_4(L\xi^2 - M\eta^2) \right] \cos(n, \xi) + \right. \\ \left. + \left[\tau_{22}^{(0)} - V + L\left(\omega + d_4\varphi + \frac{1}{2}\eta^2\right) - L(\varphi'_\eta + \xi)\xi \right] \cos(n, \eta) \right\} ds, \quad (16)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \int_s \left\{ \left[U - \tau_{11}^{(0)} - M\left(\omega + d_4\varphi + \frac{1}{2}\xi^2\right) - M(\varphi'_\xi - \eta)\eta \right] \cos(n, \xi) + \right. \\ \left. + \left[M(\varphi'_\xi - \eta)\xi - \tau_{22}^{(0)} - \frac{1}{2}d_4(L\xi^2 - M\eta^2) \right] \cos(n, \eta) \right\} ds$$

— на контуре Γ области (S) ,

где

$$\beta_{kj} = \sigma_{kj} - \sigma_k\sigma_j, \quad (k, j = 1, 2),$$

$$\Delta_1 = M \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + L \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}, \quad \frac{d_1(\cdot)}{dn} = M \frac{\partial(\cdot)}{\partial\xi} \cos(n, \xi) + L \frac{\partial(\cdot)}{\partial\eta} \cos(n, \eta),$$

$$\Delta_2 = \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial\eta^4} + 2 \left(\beta_{12} + \frac{E}{2D} \right) \frac{\partial^4}{\partial\xi^2 \partial\eta^2} + \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial\xi^4},$$

d_4 — постоянная величина, условие определения которой приводится ниже. Легко заметить, что условие существования функции

$$\int_\Gamma \frac{d_1\omega}{dn} ds = \iint_{(S)} \Delta_1\omega d\xi d\eta$$

выполняется.

Выполняется также условие однозначности частных производных [3] функции Φ , а условие однозначности функции Φ выполняется, если d_4 имеет значение:

$$d_4 = \frac{1}{D^*} \iint_{(S)} [M\eta\omega'_\xi - L\xi\omega'_\eta + (L - M)(\xi\varphi'_\xi - \eta\varphi'_\eta)] d\xi d\eta.$$

При доказательстве однозначности функции Φ и ее частных производных применяется формула Остроградского — Грина и используется свойство обобщенного уравнения Пуассона

$$\iint_{(S)} M \frac{\partial}{\partial\xi} d\xi d\eta = \int_s \xi \frac{d_1}{dn} ds - \iint_{(S)} \xi \Delta_1 d\xi d\eta,$$

$$\iint_{(S)} L \frac{\partial}{\partial\eta} d\xi d\eta = \int_s \eta \frac{d_1}{dn} ds - \iint_{(S)} \eta \Delta_1 d\xi d\eta.$$

Подставляя (12) в (8), получим окончательные выражения для компонентов тензора напряжений с учетом вторичного эффекта.

$$\begin{aligned}
 \tau_{11} &= \tau^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + M(\omega + d_4 \varphi) + \int [(M - D) \varphi'_\eta + D(\varphi'_\xi - \eta) \varphi''_{\eta\eta} - \right. \\
 &\quad \left. - M \eta \varphi''_{\xi\xi} + (M + D) \xi \varphi''_{\xi\eta} + D \varphi'_\eta \varphi''_{\xi\eta}] d\xi \right\}, \\
 \tau_{22} &= \tau^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + L(\omega + d_4 \varphi) - \int [(L - D) \varphi'_\xi - D(\varphi'_\eta + \xi) \varphi''_{\xi\xi} - \right. \\
 &\quad \left. - L \xi \varphi''_{\eta\eta} + (D + L) \eta \varphi''_{\xi\eta} - D \varphi'_\xi \varphi''_{\xi\eta}] d\eta \right\}, \quad (17) \\
 \tau_{33} &= \tau^2 \left\{ \sigma_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \sigma_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + (M\sigma_1 + L\sigma_2 - E)(\omega + d_4 \varphi) - \right. \\
 &\quad - \sigma_1 \int [(D - M) \varphi'_\eta - D(\varphi'_\xi - \eta) \varphi''_{\eta\eta} + M \eta \varphi''_{\xi\xi} - (M + D) \xi \varphi''_{\xi\eta} - D \varphi'_\eta \varphi''_{\xi\eta}] d\xi - \\
 &\quad - \sigma_2 \int [(L - D) \varphi'_\xi - D(\varphi'_\eta + \xi) \varphi''_{\xi\xi} - L \xi \varphi''_{\eta\eta} + (D + L) \eta \varphi''_{\xi\eta} - D \varphi'_\xi \varphi''_{\xi\eta}] d\eta + \\
 &\quad \left. + E \left[\eta \varphi'_\xi - \xi \varphi'_\eta - \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) - \beta^* \xi - \beta^{**} \eta + \alpha^* \right] \right\}, \\
 \tau_{12} &= \tau^2 \left[\frac{1}{2} d_4 (L \xi^2 - M \eta^2) + D(\eta \varphi'_\eta - \xi \varphi'_\xi - \varphi'_\xi \varphi'_\eta) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \right], \\
 \tau_{13} &= \tau M (\varphi'_\xi - \eta) + \tau^2 \{ M \tau^* (\varphi'_\xi - \eta) - M [\omega'_\xi + \varphi'_\eta + d_4 (\varphi'_\xi - \eta) + \xi] \xi \}, \\
 \tau_{23} &= \tau L (\varphi'_\eta + \xi) + \tau^2 \{ L \tau^* (\varphi'_\eta + \xi) - L [\omega'_\eta - \varphi'_\xi + d_4 (\varphi'_\eta + \xi) + \eta] \xi \}.
 \end{aligned}$$

Постоянные β^* , β^{**} , α^* , τ^* , входящие в выражения для компонентов тензора напряжений, находятся из того условия, что совокупность всех действующих на свободном основании ($\xi = l$) усилий должна приводиться к заданному крутящему моменту $M_{кр}$:

$$\begin{aligned}
 \alpha^* &= - \frac{2}{ES} \iint_{(S)} \left[\sigma_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - U \right) + \sigma_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - V \right) + \tau_{33}^{(0)} + (M\sigma_1 + L\sigma_2 - E) \times \right. \\
 &\quad \left. \times (\omega + d_4 \varphi) + \frac{1}{2} (M\sigma_1 \xi^2 + L\sigma_2 \eta^2) - M (\varphi'_\xi - \eta) \varphi'_\xi - L (\varphi'_\eta + \xi) \varphi'_\eta \right] d\xi d\eta, \\
 \beta^* &= \frac{1}{EI_\eta} \iint_{(S)} \xi \left[\sigma_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - U \right) + \sigma_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - V \right) + \tau_{33}^{(0)} + (M\sigma_1 + L\sigma_2 - E) \times \right. \\
 &\quad \left. \times (\omega + d_4 \varphi) + \frac{1}{2} (M\sigma_1 \xi^2 + L\sigma_2 \eta^2) \right] d\xi d\eta, \\
 \beta^{**} &= \frac{1}{EI_\xi} \iint_{(S)} \eta \left[\sigma_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - U \right) + \sigma_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - V \right) + \tau_{33}^{(0)} + (M\sigma_1 + L\sigma_2 - E) \times \right. \\
 &\quad \left. \times (\omega + d_4 \varphi) + \frac{1}{2} (M\sigma_1 \xi^2 + L\sigma_2 \eta^2) \right] d\xi d\eta, \\
 \tau^* &= \frac{l}{D^*} \iint_{(S)} \{ L [\eta \varphi'_\eta + (\omega'_\eta - \varphi'_\xi) \xi + d_4 (\varphi'_\eta + \xi) \xi] + M [\xi \varphi'_\xi - (\omega'_\xi + \varphi'_\eta) \eta - \\
 &\quad - d_4 (\varphi'_\xi - \eta) \eta] \} d\xi d\eta,
 \end{aligned}$$

где (S) — площадь поперечного сечения; I_ξ, I_η — осевые моменты инерции.

Пример. Пусть (S) — область, ограниченная эллипсом с полуосями a и b . Тогда, на основании работы [5], для функции ω в этой области имеем

$$\omega(\xi, \eta) = \frac{L - M}{Mb^2 + La^2} (b^2 \xi^2 - a^2 \eta^2).$$

Аналогично находим функцию Φ для указанной области; выражение для функции Φ ввиду громоздкости не приводим. Отметим только, что функция Φ

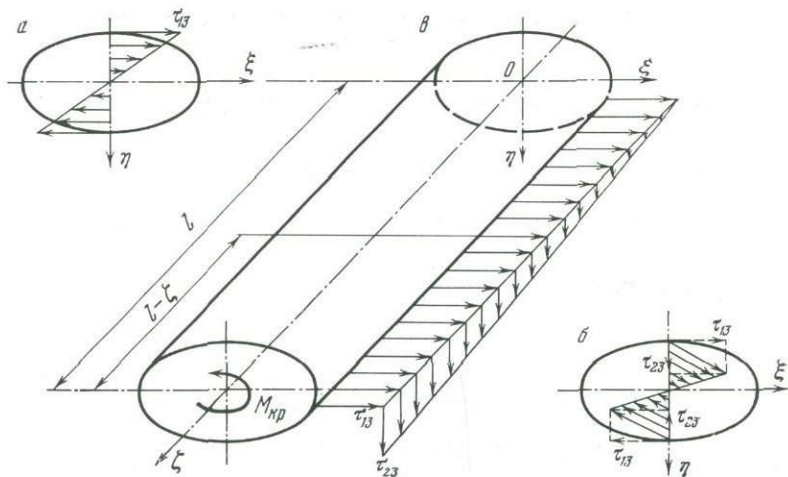


Рис. 1

ищется в виде:

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{j=1}^2 \int_s^l (r_j \mu_1 + s_j \mu_2) [-\kappa_j \cos(n, \xi) + \cos(n, \eta)] \ln \Omega_j ds,$$

где Φ_0 — некоторое частное решение уравнения (15);

$\mu_1(\xi^*, \eta^*)$, $\mu_2(\xi^*, \eta^*)$ — функции, подлежащие определению, ξ^* , η^* — текущие координаты точки контура эллипса; r_j , s_j — величины, зависящие от корней характеристического уравнения $\beta_{11}\kappa^4 + 2(\beta_{12} + E/2D)\kappa^2 + \beta_{22} = 0$,

$$\Omega_j = (\xi - \xi^*) + \kappa_j(\eta - \eta^*).$$

Тогда для бруса эллиптического сечения, изготовленного из стеклотекстолита и ДСП-Б, компоненты тензора напряжений (17) принимают вид:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \tau^2(N_0 + N_1\xi^2 + N_2\eta^2), & \tau_{22} &= \tau^2(R_0 + R_1\xi^2 + R_2\eta^2), \\ \tau_{33} &= \tau^2(K_0 + K_1\xi^2 + K_2\eta^2), & \tau_{12} &= \tau^2\Pi\xi\eta, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tau_{13} = -\frac{2\tau L M a^2}{M b^2 + L a^2} \eta - \frac{2\tau^2 L M b^2}{M b^2 + L a^2} \xi \zeta,$$

$$\tau_{23} = \frac{2\tau L M b^2}{M b^2 + L a^2} \xi - \frac{2\tau^2 L M a^2}{M b^2 + L a^2} \eta \zeta,$$

где N_i , R_i , K_i , Π ($i = 0, 1, 2$) — постоянные величины, зависящие от корней характеристического уравнения, упругих постоянных материала и полуосей эллипса.

Результаты численного вычисления показывают, что τ_{11} , τ_{22} , τ_{12} существенного влияния на напряженное состояние не оказывают. Компонент же τ_{33} в некоторых случаях может оказывать определенное влияние на напряженное состояние призматического бруса.

В компонентах тензора напряжений τ_{13} , τ_{23} появились члены, линейно зависящие от расположения закручиваемого сечения. При значительной длине бруса наличие этих членов может существенно влиять на напряженное состояние бруса. Эпюра распределения касательных напряжений в поперечном сечении бруса (рис. 1), с учетом вторичного эффекта, отличается от эпюры распределения в линейной теории.

На рисунке приведена эпюра распределения касательных напряжений в линейной теории *a*, эпюра распределения касательных напряжений в поперечном сечении бруса с учетом вторичного эффекта *б* и эпюра распределения касательных напряжений в различных сечениях бруса с учетом вторичного эффекта *в*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. В. Зволинский, П. М. Риз.* О некоторых задачах нелинейной теории упругости. — ПММ, 1939, т. II, вып. 4.
2. *Н. В. Зволинский, П. М. Риз.* Кручение растянутого призматического бруса. — Докл. АН СССР, 1938, т. XX, вып. 2—3.
3. *Н. И. Муслелишвили.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
4. *С. Г. Лехницкий.* Теория упругости анизотропного тела. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1950.
5. *М. О. Башелешвили.* Эффективное решение основных граничных задач статики анизотропного упругого тела для сплошного эллипса и для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием. — Труды Тбилисского матем. ин-та АН Груз.ССР, 1962, т. 28.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ КОНКРЕТИЗАЦИЯ ДЕТЕРМИНИСТСКОЙ МОДЕЛИ ПОВРЕЖДЕНИЯ НА ПЕРВОЙ СТАДИИ УСТАЛОСТИ

Р. Д. ВАГАПОВ

Для однозначной трактовки задач механики разрушения и оценки надежности изделий при действии вибронгрузок надо различать две стадии усталости: стадию накопления микрповреждений, рассеянных по объему тела, завершающуюся образованием первой макротрещины, и стадию разделения тела на части магистральной трещиной усталости [1, 2]. Долговечности повреждения первой макротрещиной N_t и излома N_r отвечают конечным состояниям этих различных процессов. Любую из них можно принять за характеристику «отказа» изделия. Пример вероятностной оценки этих характеристик для модели вала по результатам наших статистических опытов дан на рис. 1. Здесь $P(N_t | \sigma_{\max})$ и $P(N_r | \sigma_{\max})$ — распределения случайных значений N_t и N_r , параметр-амплитуда σ в опасной точке тела ($\sigma = \sigma_{\max}$, рис. 2). Из рис. 1 видно, что для образцов с кольцевыми выточками малого радиуса ρ , т. е. в условиях концентрации напряжений, долговечности N_r намного превосходят N_t . Однако с развитием магистральной трещины ($N > N_t$) деталь становится чувствительной к ударным и даже статическим нагрузкам. В целях безопасного проектирования за «отказ» принимаем повреждение первой макротрещиной, а оценку ведем по нижней границе рассеивания долговечностей $N_t = N_-$ с нулевой вероятностью повреждения $P \rightarrow 0$.

Приведенные на рис. 1 статистические оценки N_t относятся к нагружению с постоянной амплитудой $\sigma_{\max} = \text{const}$. Для перехода от результатов этих опытов к режимам, где амплитуды σ изменяются во времени (типичным для работы деталей машин), надо описать процесс повреждения на первой, стадии усталости, учитывая его нелинейность по числу циклов N (обусловленную, например, упрочнением) и случайные особенности процесса [3, 4].

Будет показано, что совокупность статистических и детерминистских особенностей повреждения и упрочнения можно определить, предполагая, что поверхностный слой поликристаллического тела находится в особом состоянии, а описание процессов можно упростить, разделив закономерности усталости на статистические, обусловленные макроскопической неоднородностью реального тела, и квазифункциональные (в последнем случае за средой сохраняется несовершенство структуры только на микроуровне, а процессы описываются в обычных терминах механики деформируемого тела).

Ниже предлагается соответствующая детерминистская модель повреждения, наделенная статистическими особенностями реального процесса.

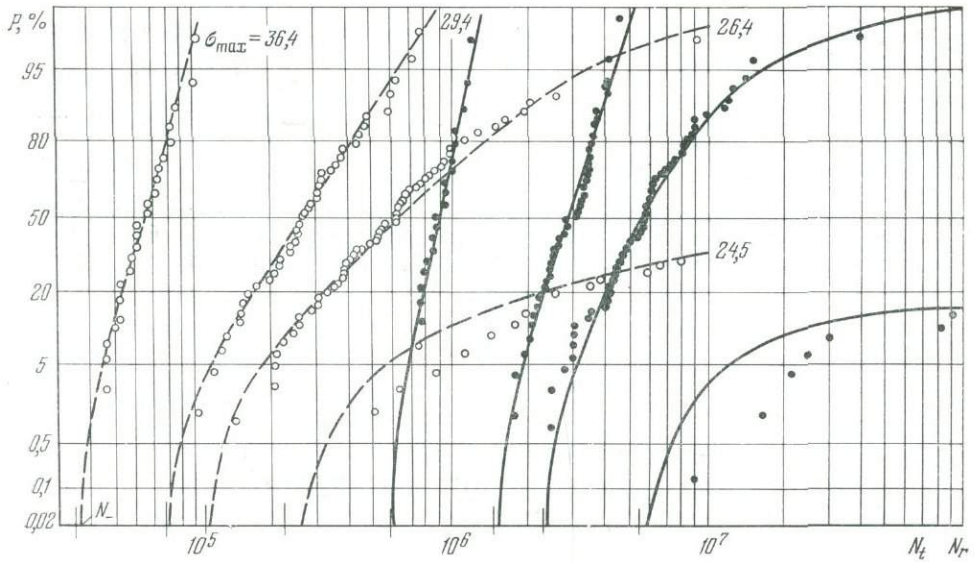


Рис. 1. Распределение случайных значений долговечностей для образцов с кольцевой выточкой $d = 10$ мм, $\rho = 0,4$ мм (изгиб вращающегося образца); 1 — N_t ; 2 — N_r .

1. Согласно принятой модели тонкий поверхностный слой поликристаллического тела ослаблен уже потому, что сдвиги по плоскостям скольжения в сторону внешней нормали не стеснены соседними хаотично ориентированными кристаллитами. Вероятность накопления микроповреждений критической плотности на глубине исчезающе мала; первая макротрещина формируется в этом слое и отождествляется с разрушением наиболее опасного макроскопического элемента этого слоя V_0 (рис. 3, а). Здесь V_0 — минимальный объем, начиная с которого соотношения между деформациями и напряжениями $\{\epsilon\sigma\}$ остаются неизменными, а σ — напряжения, вычисленные методами механики сплошной среды на основе макроскопических соотношений $\{\epsilon\sigma\}$. В силу совместного деформирования, макрообъемы V_0 статистически однородны в том смысле, что соотношения $\{\epsilon\sigma\}$ либо являются детерминированными функциями координат точек тела, либо вовсе от них не зависят.

Макротрещина определенным образом ориентирована относительно поля главных макроскопических напряжений σ (рис. 3, б); «повреждение» — вектор (тензор). Мера повреждения D — скаляр, описывающий процесс нарушения

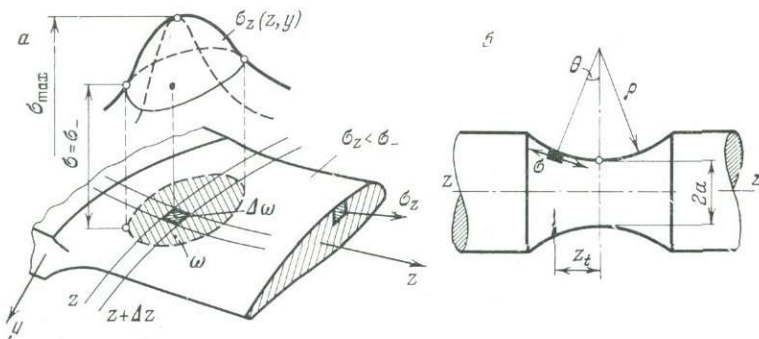


Рис. 2. Лопатка ротора (а) и образец с кольцевой выточкой (б)
 ω — зона возможного повреждения макротрещиной; z_t — координата случайного ее положения

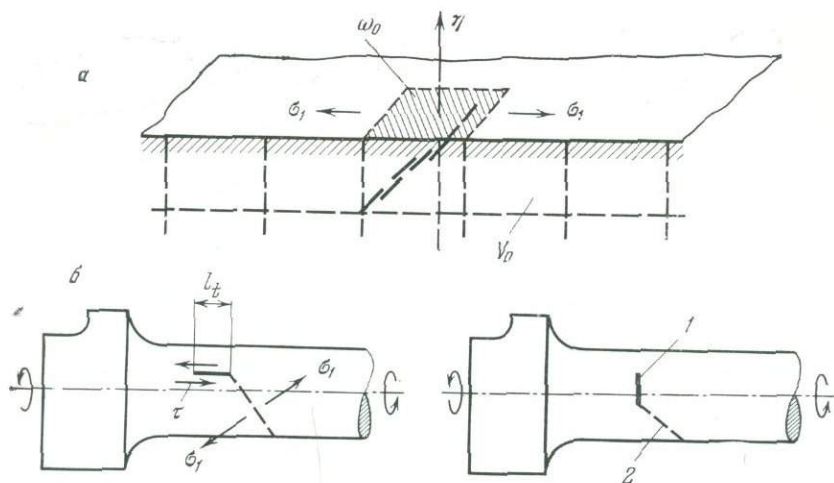


Рис. 3. Растяжение поверхностного слоя (а) и повреждение образца при переменном кручении (б)

1 — макротрещина критического размера l_t ; 2 — магистральная трещина

сплошности макрообъема V_0 на микроскопическом уровне

$$D = D(N, \sigma), \sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (1.4)$$

Полагаем, что D — вполне определенная, неубывающая функция N , амплитуда σ — параметр; $D = 0$ при $N = 0$, $D_t = 1$ при $N = N_t$. Кривая усталости $\sigma = \varphi(N_t)$ есть геометрическое место точек, соответствующих конечным состояниям процесса; параметр этой линии $D_t = 1$, а предел усталости σ_w — амплитуда σ , для которой значение $D_t = 1$ достигается при $N \rightarrow \infty$ (рис. 4, а). Принимаем, что в силу случайных особенностей в структуре и ориентации однородных в указанном смысле объемов V_0 их сопротивление усталости есть случайная функция координат точек тела; для поверхностного слоя это усугубляется технологией его обработки. Тогда для генеральной совокупности V_0 (1, 2, ..., n) мера повреждения D — случайная пространственная функция неслучайных аргумента N и параметра σ . Конечное состояние процесса повреждения характеризуется в координатах σ, N областью рассеивания (рис. 4, б). Область рассеивания может быть задана семейством линий равной вероятности равного повреждения ($P = \text{const}$, $D_t = 1$, рис. 4, 5). Линии $P = \text{const}$ отождествляем с кривыми усталости образцов равной прочности и детерминированный процесс повреждения рассматриваем как усталость макроскопически однородного тела. Сопоставляя области рассеивания, полученные нами для контрастных по неоднородности материалов, имеем почти непосредственную иллюстрацию этого (рис. 5). Для литой стали размах рассеивания очень велик: $\sigma_+ - \sigma_- \approx \approx 24 \text{ кг/мм}^2$ при медианном $\bar{\sigma} \approx 21 \text{ кг/мм}^2$, для армко-железа при том же $\bar{\sigma}$ величина $\sigma_+ - \sigma_- \approx 2,5 \text{ кг/мм}^2$, а место излома образцов почти совпадает с опасным сечением $z = 0$, как для макроскопически однородного тела (рис. 6). Узкая полоска области рассеивания для «гладких» образцов из армко-железа — аналог почти детерминированной кривой усталости для совокупности 100 испытанных образцов (точнее, для элементов V_0 с минимальной прочностью). Для каждого образца в отдельности «флуктуация» ординат σ от вполне детерминированной кривой $\sigma = \varphi(N_t)$ должна быть еще меньше. Вывод распространяем на область рассеивания для материала с крайней степенью неоднородности (литая сталь). Считаем, что любая линия $P = \text{const}$ этой области есть математическое ожидание кривых усталости для

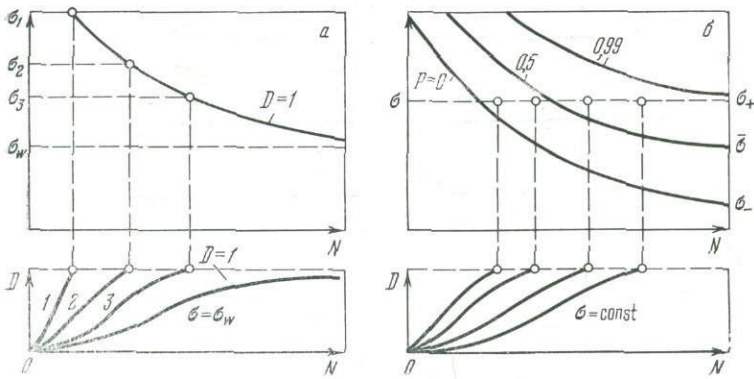


Рис. 4. Схема процесса повреждения макроэлементов V_0

образцов, долговечности которых N_t на каком-либо контрольном уровне σ почти совпадают. Уклонение кривых усталости от линии $P = \text{const}$ для таких образцов мало и имеет острый максимум. В этом смысле оценка опытных соотношений по параметру равной вероятности P с фиксацией геометрии повреждения позволяет выделить из статистических закономерностей детерминистские [2, 3, 4].

В данной работе при сравнительных статистических испытаниях образцов на переменный изгиб и кручение проведенных совместно с И. В. Карчевским установлено следующее. Для одинаковых долговечностей N_t отношение амплитуд напряжений при кручении и изгибе для всех значений P оказалось равным $\tau_a(P)/\sigma_a(P) \approx 1/2$. При кручении след макротрещины всегда совпадал с направлением τ_{max} , а развивающаяся от нее магистральная трещина была перпендикулярна σ_1 (рис. 3, б). Следовательно, процесс нарушения сплошности поверхностного слоя на микроуровне происходит в основ-

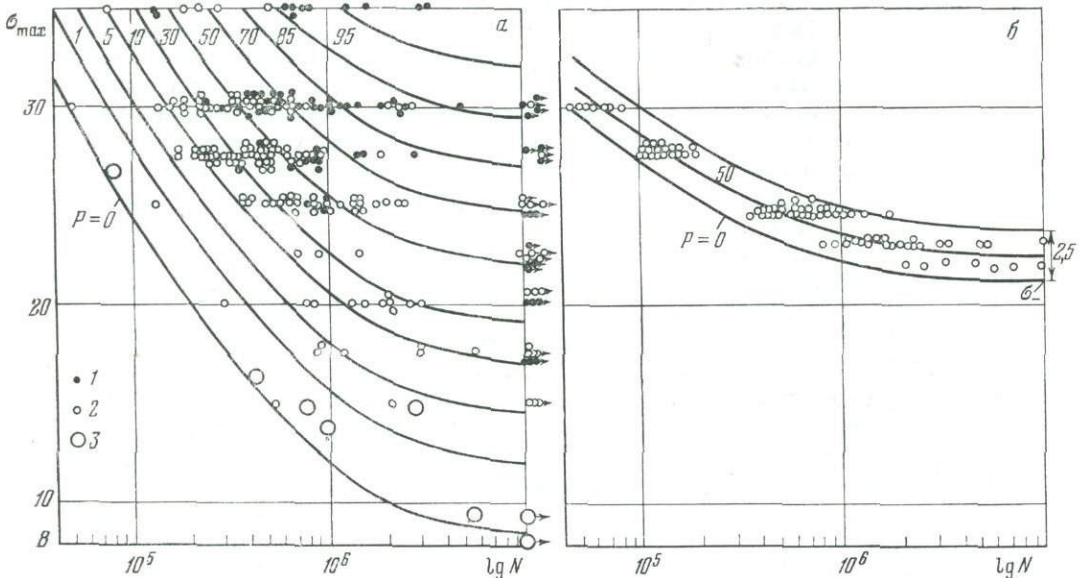


Рис. 5. Области рассеивания для гладких образцов $d = 7,5$ мм, $\rho = 75$ мм
 а — литая сталь лопастей гидротурбины; б — армо-железо. Для литой стали: 1 — образцы без дефектов; 2 — с дефектами; 3 — образцы сечением 100×70 мм

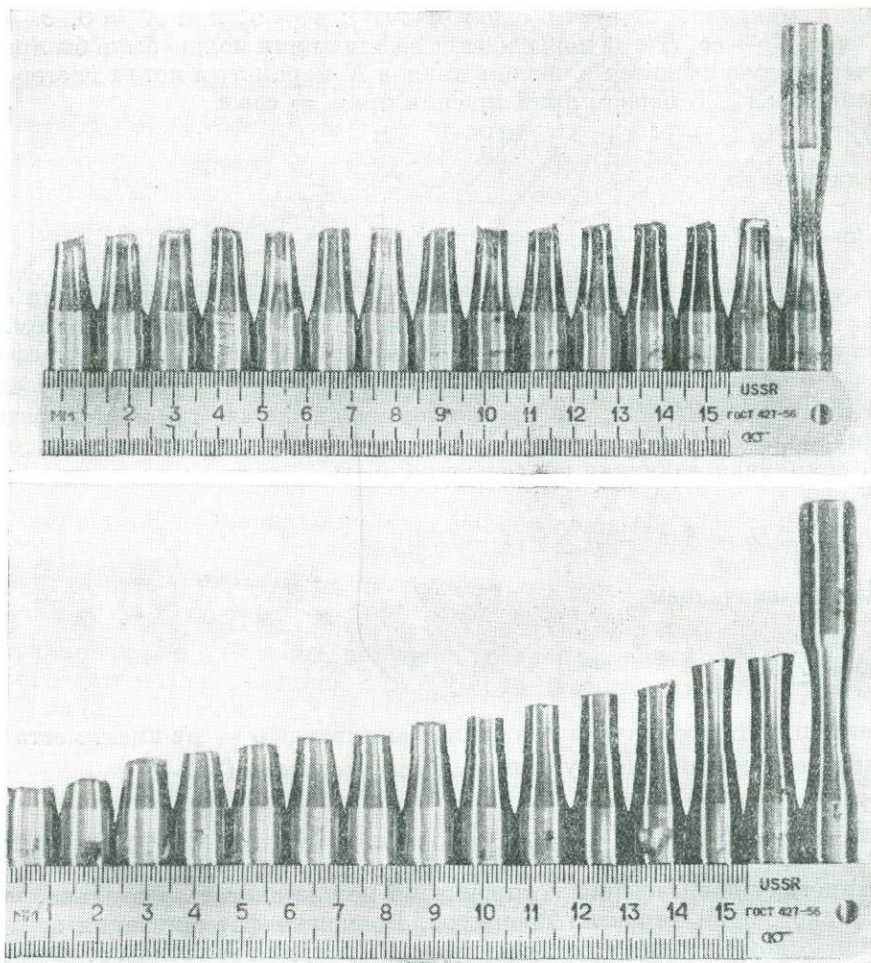


Рис. 6. Половинки разрушенных образцов:
 а — из армяо-железа; б — из литой стали (к рис. 5)

ном за счет макроскопических сдвигов. Детерминистский критерий повреждения в (1.1) есть амплитуда *

$$\sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3). \quad (1.2)$$

2. Рассмотрим простейший вариант детерминистской модели повреждения с упрочнением. Рентгеновские измерения напряжений в поверхностном слое образцов при их статическом растяжении показывают [11], что «текучесть» поверхностного слоя начинается при напряжении σ_0 , меньшем, чем напряжение текучести образца в целом: $\sigma_0 < \sigma_T$. Пусть ε — амплитуда деформаций в крайних волокнах тела. При $\sigma_0/E < \varepsilon < \sigma_T/E$ тонкий поверхностный слой «пластически» деформируется, элементы V_0 работают в условиях заданной амплитуды ε , постоянно которой обусловлено упругостью тела; возможен процесс циклического упрочнения, т. е. возрастание сопро-

* При изгибе активное скольжение наиболее вероятно под углом в 45° к поверхности и след макротрещины перпендикулярен к σ_1 (рис. 3, а). Зато при кручении четко устанавливается ранее постулировавшееся нами [1] различие в критериях повреждения на первой и второй стадиях: магистральная трещина развивается в основном за счет «разрывающих» напряжений.

тивления микропластическим сдвигам $\check{\sigma}(N)$; $\check{\sigma} = \sigma_0$ при $N = 0$, $\check{\sigma} \rightarrow \sigma = \varepsilon E$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда повреждение за один цикл можно было бы представить через изменяющиеся с числом циклов N параметры петли гистерезиса, отнесенной к V_0 . В первом приближении при $\varepsilon = \text{const}$

$$\Delta \check{D} = A (\sigma - \sigma_0) \psi [\sigma - \check{\sigma}(N)], \quad (2.1)$$

где величину

$$\frac{1}{E} [\sigma - \check{\sigma}(N)] = \varepsilon - \frac{\check{\sigma}(N)}{E} \quad (2.2)$$

можно трактовать как убывающую по числу циклов N ширину петли гистерезиса; коэффициент A зависит от разности $\sigma - \sigma_0$. Таким образом, при амплитудах деформаций ε , феноменологически близких к упругим, деформационные и силовые критерии повреждения формально совпадают, а приращение повреждений $\Delta \check{D}$ с числом циклов уменьшается так как сопротивление микропластическим сдвигам $\check{\sigma}(N)$ возрастает.

Пусть суммарная величина повреждения

$$\check{D} = \sum_1^N \Delta \check{D}_i = A (\sigma - \sigma_0) \sum_1^N \psi [\sigma - \check{\sigma}(N_i)] \quad (2.3)$$

ограничена значением

$$\check{D}_t = \sum_1^{N_t} \Delta \check{D}_i, \quad (2.4)$$

не зависящим от уровня σ , и при данной амплитуде $\sigma = E\varepsilon$ имеет место однозначное соответствие между $\check{\sigma}$ и \check{D} . Тогда, согласно (2.3)

$$\frac{d\check{D}}{dN} = \frac{d\check{D}}{d\check{\sigma}} \frac{d\check{\sigma}}{dN} \quad (2.5)$$

т. е. кинетику повреждения и упрочнения можно описать отдельно, учитывая только общий характер процессов. Возможна формализация этих описаний на основе «теории кривых роста» [12]. Так, для величины y , ограниченной значением λ , скорость роста которой убывает с увеличением y , имеем

$$dy/dx = (\lambda - y) g(x). \quad (2.6)$$

Решением (2.6) является неубывающая функция

$$y = \lambda (1 - \gamma e^{-G(x)}), \quad (2.7)$$

где $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, а λ и γ определяются из граничных условий. Положив $y = \check{\sigma}$, $x = W$, $g(x) = B(\sigma - \sigma_0)^2$ и учитывая, что $\check{\sigma} = \sigma_0$ при $N = 0$ и $\check{\sigma} = \sigma$ при $N \rightarrow \infty$, согласно (2.7) получим

$$\check{\sigma} = \sigma - (\sigma - \sigma_0) e^{-B(\sigma - \sigma_0)^2 N}. \quad (2.8)$$

Если $\sigma > \sigma_W$, то процесс обрывается при $N = N_t$. Если $\sigma \leq \sigma_W$, то $\check{\sigma} \rightarrow \sigma$ при $N \rightarrow \infty$. Если $\sigma \leq \sigma_0$, то $\sigma \equiv \sigma_0$.

Положив $y = \check{D}$, $x = \check{\sigma}$, $g(x) = \beta$, учитывая, что при $\check{\sigma} = \sigma_0$ $\check{D} = 0$ и полагая с точностью до постоянного множителя

$$\lambda = e^{\beta(\sigma - \sigma_0)}, \quad (2.9)$$

из (2.7) получим

$$\check{D} = e^{\beta(\sigma - \sigma_0)} - e^{\beta(\sigma - \check{\sigma})}. \quad (2.10)$$

Предельная величина \check{D}_t соответствует разрушению V_0 . Определяем ее из условия: для $\sigma = \sigma_W$ макротрещина образуется при $N \rightarrow \infty$, т. е. $\check{\sigma} \rightarrow \sigma_W$:

$$D_t = e^{\beta(\sigma_W - \sigma_0)} - 1. \quad (2.11)$$

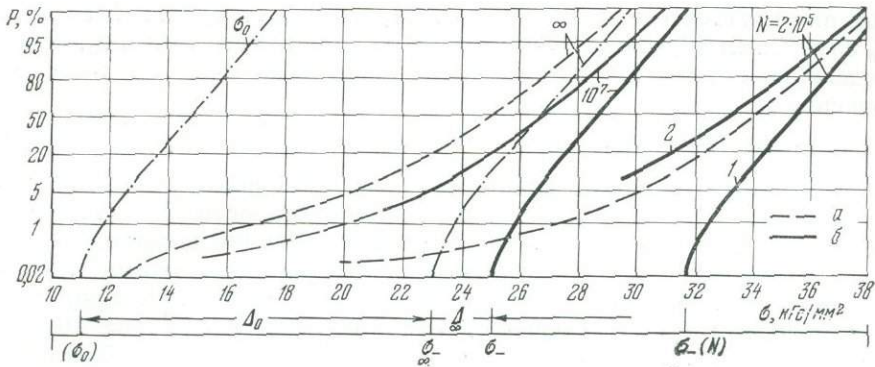


Рис. 7. Функции распределения пределов усталости и параметра σ_0 для образцов из стали 45 [3]

a — расчет, b — опыт. 1 — первичные распределения σ_W , 2 — вторичные

Имеем конкретное выражение для меры повреждения (1.1)

$$D = \frac{\check{D}}{\check{D}_t} = \frac{e^{\beta(\sigma - \sigma_0)} - e^{\beta(\sigma - \check{\sigma})}}{e^{\beta(\sigma_W - \sigma_0)} - 1} \quad (2.12)$$

Приравнявая (2.12) единице, получаем уравнение кривой усталости, написанное относительно переменной $\check{\sigma}(N)$. После преобразований с подстановкой $\check{\sigma}(N)$ из (2.8) получим

$$-\ln \left\{ \frac{\ln [e^{\beta(\sigma - \sigma_0)} - e^{\beta(\sigma_W - \sigma_0)} + 1]}{\beta(\sigma - \sigma_0)} \right\} \frac{1}{B(\sigma - \sigma_0)^q} = N_t \quad (2.13)$$

Это и есть реализация кривой усталости для конкретного макроэлемента V_0 .

3. Статистическое различие макроэлементов V_0 можно охарактеризовать тремя независимыми параметрами, например, D_t , β и σ_0 . Однако предположение о том, что эти величины случайные и независимые в статистическом

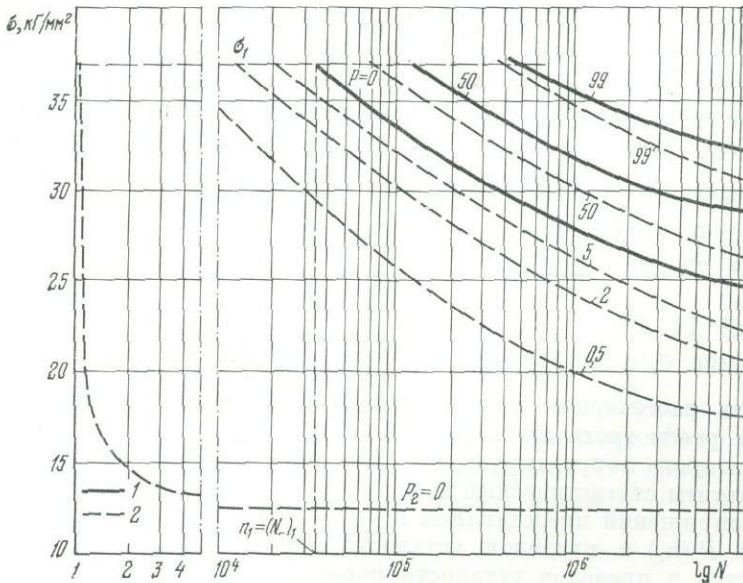


Рис. 8. Расчетные области рассеивания для образцов из стали 45
1 — первичная область; 2 — вторичная

смысле, оказывается слишком сильным. Пусть для генеральной совокупности V_0 случайным образом варьируются только параметры σ_w и σ_0 , функции распределения которых $P(\sigma_w)$ и $P(\sigma_0)$ показаны на рис. 7, и имеет место соотношение

$$\sigma_w(P) - \sigma_0(P) = \Delta_0, \quad (3.1)$$

где $\Delta_0 = \text{const}$. Тогда долговечности N_t для любых реализаций (2.13) определяются только разностью $\sigma - \sigma_0$, все кривые усталости (2.13) имеют одну и ту же форму и получаются параллельным смещением шаблонной кривой вдоль оси σ . Семейство этих кривых показано на рис. 8 сплошными линиями, P — их параметр. Результат качественно отвечает опыту: центрированные распределения пределов усталости $P(\sigma|N)$ от $N \approx 10^5$ до $N \approx 10^7$ совпадают (рис. 7), т. е. линии равной вероятности $P = \text{const}$ для областей рассеивания «параллельны» (сплошные линии на рис. 5 и рис. 8).

Параметры кривых (2.13) подбираются на основе статистических опытов. Медианный предел усталости $\bar{\sigma}_\infty$ при $N \rightarrow \infty$ определяется по аналитическому продолжению опытной кривой $P = 0,5$ на бесконечность по уравнению [6, 7].

$$[\bar{\sigma} - \sigma(P)]^m N_t = C. \quad (3.2)$$

Детерминированные параметры β , B , q и медианное значение $\bar{\sigma}_0$ подбираются по той же кривой $P = 0,5$. Случайные параметры устанавливаются так: распределение $P(\sigma)$ получается смещением опытного распределения пределов усталости $P(\sigma|N)$ на постоянную

$$\Delta = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0, \quad (3.3)$$

а распределение $P(\sigma_0)$ — смещением распределения $P(\sigma)$ на постоянную $\Delta_0 = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0$ (рис. 7). Поэтому функции распределений $x = \sigma_0$ и $x = \sigma$ имеют тот же вид, что и для опытных пределов усталости $x = \sigma|N$. Например, для цилиндрических образцов длиной l и диаметром $d = 2a$ имеем:

$$P(X) = 1 - \exp\left[-\frac{2\pi a l}{\omega_0 C_0} (X - X_-)^{\alpha_0}\right], \quad (3.4)$$

где $\omega_0 C_0$, α_0 — характеризуют изменчивость прочностных свойств элементов поверхностного слоя V_0 , а X_- — минимальные значения случайных величин σ_- , σ_0 . Для конкретных реализаций (2.13) по результатам испытаний образцов из стали 45 [3,4] получено

P	0	0,5	0,9
σ , кг/мм ²	23	27	28,5
σ_0 , кг/мм ²	11	15	16,5

т. е. отношение $\sigma_0/\sigma \approx (0,48-0,6)$. Уравнения (2.13) и (3.4) полностью задают область рассеивания при постоянных амплитудах нагружения. Теперь можно рассмотреть простейший нестационарный режим нагружения, на основе которого корректируется параметр q .

4. Результаты статистических испытаний образцов с однократной сменой амплитуд напряжений представляем в виде вторичных распределений долговечностей $P(n_2)$ и пределов усталости $P(\sigma_{w2})$ (рис. 7 и 9). Изменение долговечностей и пределов усталости после перегрузки оцениваем сравнением с первичными распределениями $P(N)$ и $P(\sigma_w)$ по параметру равной вероятности P . Это позволяет выделить из статистических функциональные закономерности повреждения и упрочнения [3, 4, 8]. Рассмотрим обратную

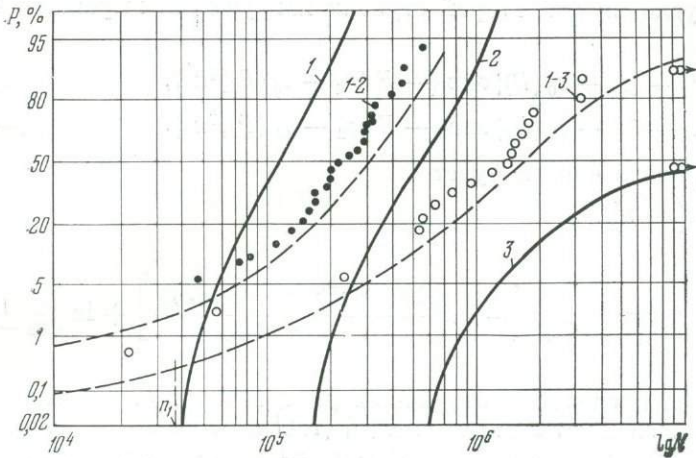


Рис. 9. Первичные (1) — (3) и вторичные (1—2 и 1—3) распределения долговечностей по данным [3]

1—3 — при стационарных режимах нагружения: $\sigma = 37, 33$ и 29 кг/мм²; 1—2 — после перегрузки с $\sigma_1 = 37$ кг/мм², на $\sigma_2 = 33$ кг/мм²; 1—3 — после перегрузки с $\sigma_1 = 37$ кг/мм² на $\sigma_2 = 29$ кг/мм². Пунктирные кривые — расчет по (4.9)

задачу: по заданному спектру реализаций упрочнения и повреждения (2.8), (2.10) определим вторичные распределения n_2 и σ_{W_2} . Сопротивление усталости генеральной совокупности внешне идентичных образцов можно охарактеризовать распределением одного случайного параметра

$$P \quad 0 \dots 0,3 \dots 0,5 \dots 0,9$$

$$\sigma_0(P) \quad (\sigma_0) \dots \sigma_0(0,3) \dots \sigma_0(0,5) \dots \sigma_0(0,9),$$

где вероятность P выступает как «порядковый» номер образца в вариационном ряду σ_0 , а величина σ_0 отнесена к наиболее опасному элементу V_0 поверхностного слоя образца.

Пусть представительная выборка образцов на уровне σ нагружается до одного и того же числа циклов n_1 , равного или меньшего, чем нижняя граница рассеивания N_t на этом уровне: $n_1 \leq (N_-)_1$. Упрочнение и повреждение образцов (их опасных элементов V_0) определяются в соответствии с «номером» P :

$$\check{\sigma}_1(P) = \sigma_1 - [\sigma_1 - \sigma_0(P)] \exp\{-B[\sigma_1 - \sigma_0(P)]^q n_1\}, \quad (4.1)$$

$$\check{D}_1(P) = e^{\beta[\sigma_1 - \sigma_0(P)]} - e^{\beta[\sigma_1 - \check{\sigma}_1(P)]}. \quad (4.2)$$

Принимаем линейный закон суммирования повреждений*. Вторичные долговечности $N_t = n_2$ после перегрузки образцов на уровень $\sigma_2 < \sigma_1$ определяем из условия

$$\check{D}_{t_2}(P) = \check{D}_t - \check{D}_1(P). \quad (4.3)$$

Величина

$$\check{D}_t = e^{\beta[\sigma_W(P) - \sigma_0(P)]} - 1 \quad (4.4)$$

для всех образцов одна и та же, так как принято $\sigma_W(P) - \sigma_0(P) = \text{const}$. Остаточная величина предельного повреждения \check{D}_{t_2} определяет конечное значение $\check{\sigma}_2(P)$. По (2.10) с заменой σ_0 на $\check{\sigma}_1$ имеем

$$\check{D}_{t_2}(P) = e^{\beta[\sigma_2 - \check{\sigma}_1(P)]} - e^{\beta[\check{\sigma}_2(P) - \check{\sigma}_1(P)]}. \quad (4.5)$$

* Здесь индексы 1 и 2 при амплитудах σ обозначают ступени нагружения, а не компоненты главных напряжений.

Граничные условия для второй ступени нагружения выражаем через числа циклов:

$$\check{\sigma}_1(P) = \sigma_2 - [\sigma_2 - \sigma_0(P)] \exp\{-B [\sigma_2 - \sigma_0(P)]^q n_2'\}, \quad (4.6)$$

$$\check{\sigma}_2(P) = \sigma_2 - [\sigma_2 - \sigma_0(P)] \exp\{-B [\sigma_2 - \sigma_0(P)]^q n_2''\}. \quad (4.7)$$

Вторичная долговечность будет

$$n_2(P) = n_2'' - n_2' \quad (4.8)$$

или

$$n_2(P) = \frac{1}{B [\sigma_2 - \sigma_0(P)]^q} \left\{ -\ln \left[\frac{\ln(e^{\beta[\sigma_2 - \check{\sigma}_1(P)]} - D_{t2}(P))}{\beta (\sigma_2 - \sigma_0(P))} \right] + \ln \left[\frac{\sigma_2 - \check{\sigma}_1(P)}{\sigma_2 - \sigma_0(P)} \right] \right\}. \quad (4.9)$$

Это и есть распределение вторичных долговечностей. Расчетные функции $P(n_2)$ почти совпадают с опытными [3] (точечные распределения на рис. 9). Нижние границы распределений есть $n_2 = (n_2)_- \rightarrow 0$, так как величина n_1 была равна $n_1 = (N_1)_- = N_t$, и для образцов с параметром $P \approx 0$ имеем $\check{D}_1 = \check{D}_t$ и $D_{t2} \approx 0$.

Распределение вторичных пределов усталости для $N \rightarrow \infty$ получаем из условия

$$\check{D}_{t2}(P) = e^{\beta[\sigma_{W2}(P) - \check{\sigma}_1(P)]} - 1, \quad (4.10)$$

После преобразований имеем:

$$\sigma_{W2}(P) = \check{\sigma}_1(P) + \frac{1}{\beta} \ln [1 + \check{D}_{t2}(P)]. \quad (4.11)$$

Предельное снижение прочности отлично от нуля, так как при $\check{D}_1 \approx \check{D}_t$ и $\check{D}_{t2} \approx 0$ величина $\sigma_{W2} \rightarrow \check{\sigma}_1$. Поэтому нижняя граница рассеивания вторичных распределений $\sigma_{W2} = (\sigma_2)_- \neq 0$ (рис. 8). При очень высоких уровнях

σ_1 величина $n_1 \approx (N_1)_-$ сравнительно мала и $\sigma_1 \approx (\sigma_0)_-$. Теоретическое рассмотрение статистической модели с «упрочнением» показало, что снижение пределов усталости по образованию макротрещины после перегрузки сверху вниз ($\sigma_1 > \sigma_2$) и при $n_1 \rightarrow (N_1)_-$ ограничено величиной $(\sigma_0)_-$, в то время как вторичная долговечность $n_2 \rightarrow 0$. Соответствующая кривая усталости показана линией $P_2 = 0$ на рис. 8 и является нижней границей вторичной области рассеивания при $n_1 = (N_1)_-$. Эту кривую можно интерпретировать так: если амплитуда σ чуть меньше $\check{\sigma}_1 = \sigma_{W2}$, то образец будет работать неограниченно долго ($N \rightarrow \infty$); если σ чуть выше $\check{\sigma}_1$, то трещина образуется после первых циклов нагружения. Остальные линии равной вероятности вторичной области рассеивания определяются по (4.9), если положить $P = \text{const}$, а варьировать амплитуду σ_2 .

В принятой модели случайный характер процесса повреждения обусловлен только начальным параметром σ_0 . Распределение σ_0 определяется по распределениям пределов усталости, которые существенно зависят от формы, размеров тела и способа его нагружения [1, 2, 7]. Рассмотрим эту зависимость с точки зрения особого состояния поверхностного слоя поликристаллического тела.

5. Напомним, что первая макротрещина отождествляется с разрушением опасного элемента поверхности V_0 . Случайная координата его положения обозначена на рис. 2 через Z_t .

С учетом ослабления поверхностного слоя было принято следующее. Прочность элементов V_0 не зависит от градиентов напряжений $\partial\sigma/\partial x$, $\partial\sigma/\partial y$, $\partial\sigma/\partial z$ и для генеральной совокупности V_0 распределена по закону

$$P_0(\sigma | N) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{\sigma_0}(\sigma - \sigma_-)^{\alpha_0}\right], \quad (5.1)$$

где C_0 , σ_0 и $\sigma_-(N)$ характерны только для данной обработки поверхности; вероятность повреждения тела $P(\sigma_{\max}|N)$ не зависит от распределения σ по глубине поверхностного слоя и определяется распределением σ по поверхности тела. Распределение σ задано с точностью до σ_{\max} , т. е. $\sigma_i = \sigma_{\max} f_{\omega}(x, y, z)$. По формуле умножения для независимых событий имеем

$$P(\sigma_{\max}|N) = 1 - \prod_1^n [1 - P_0(\sigma_i|N)] \quad (5.2)$$

или, учитывая (5.1),

$$P(\sigma_{\max}|N) = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{\omega_0 C_0} \sum_1^n [\sigma_i(xyz) - \sigma_-] \alpha_0 \Delta \omega \right\}. \quad (5.3)$$

Это и есть распределение пределов усталости по повреждению тела первой макротрещиной усталости. Здесь $\Delta \omega = \omega_0$, а $n = \omega/\omega_0$ — число элементов опасной зоны поверхности ω , контур которой определяется из условия $\sigma_i(xyz) \geq \sigma_-$. Вне этого контура вероятность разрушения V_0 тождественно равна нулю: $P_0(\sigma_i < \sigma_-) = 0$. При растяжении — сжатии или чистом изгибе тела вращения с кольцевой выточкой радиуса ρ (рис. 2, б) для первых главных напряжений $\sigma_1 = \sigma(\theta)$ имеем

$$\sigma(\theta) = \sigma_{\max}(1 - k\theta^2); \quad k = \frac{1}{2\sigma_{\max}} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} = f(a/\rho). \quad (5.4)$$

На поверхности $\sigma_3 \equiv 0$ и критерий повреждения согласно (1.2) будет: $\sigma = \sigma_1/2$. Подстановка (5.4) в (5.3) с учетом сказанного и после замены суммы интегралом дает:

$$P(\sigma_{\max}|N) = 1 - \exp \left[-\frac{2\pi a \rho}{C_1 \omega_0 C_0} \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_-)^{\alpha_0 + 0,5}}{\sqrt{k\sigma_{\max}}} \right], \quad (5.5)$$

где $C_1 = 2^{-\alpha_0}$.

Выражение (5.5) определяет зависимость $P(\sigma_{\max})$ от формы тела a/ρ и характерного размера a .

Полагая в (5.5) $\sigma_{\max} = \text{const}$, а $\sigma_- = \varphi(N)$, получаем распределение N_t . Здесь $\sigma_- = \varphi(N)$ — уравнение кривой усталости (3.2) по нижней границе области рассеивания (линия $P = 0$). Результаты опытов, проведенных совместно с В. И. Куракиным, на образцах с кольцевыми выточками, геометрия которых варьировалась в широких пределах (рис. 10), подтверждают зависимость (5.5). Кривые распределений σ_{\max} и N_t , на которые ложатся опытные точки, рассчитаны по (5.5) при одних и тех же значениях $\omega_0 C_0$, α_0 и σ , так как поверхности выточек обрабатывались одинаково.

Из сопоставления теории с опытом устанавливается правильность исходных положений; например, независимость рассеивания от распределения σ по глубине поверхностного слоя. Так, для геометрически подобных объектов, подобно нагружаемых, имеем [6]:

$$P_2(X) = 1 - [1 - P_1(X)]^n, \quad n = (a_2/a_1)^\lambda. \quad (5.6)$$

Здесь $X = N_t|\sigma_{\max}$ или $X = \sigma_{\max}|N$, $a_2 > a_1$ — характерные размеры тела 1 и 2. Показатель $\lambda = 3$, если произведение Π в (5.2) распространяется по объему опасной зоны с заменой $\Delta \omega$ на $\Delta V = V_0$; $\lambda = 2$, если это произведение распространяется по ее поверхности либо по поперечному сечению $z = 0$ (опасное сечение, где $\sigma = \sigma_{\max}$). Первый случай соответствует трехмерному распределению координаты повреждения Z_t , т. е. по поверхности и в глубину тела, два других — двумерному: только по поверхности или только в опасном сечении. Из известных опытов и в данном случае для геометрически подобных образцов ($d_1 = 10$ мм и $\rho_1 = 0,4$ мм, $d_2 = 50$ мм и $\rho_2 = 2$ мм) получено $\lambda = 2$. Случайная же координата повреждения Z_t всегда разбросана

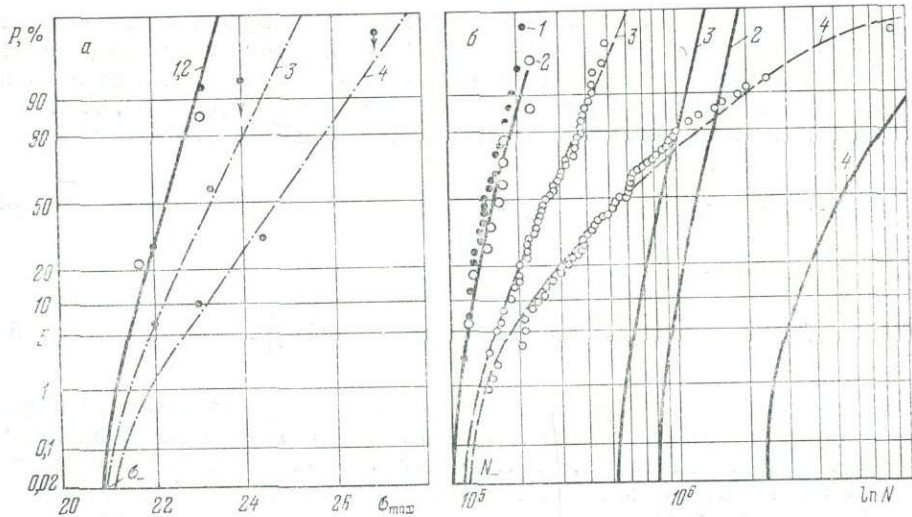


Рис. 10. Распределения пределов усталости (а) и долговечностей N_t (б) для образцов с кольцевыми выточками из армо-железа:

1 — $d = 7,5$ мм, $\rho = 75$ мм; 2 — $d = 50$ мм, $\rho = 2$ мм; 3 — $d = 10$ мм, $\rho = 2$ мм; 4 — $d = 10$ мм, $\rho = 0,4$ мм (сплошные линии на рис. «б» — распределения N_p , пунктирные — N_t)

на по поверхности ω (рис. 2 и 6). Следовательно, вероятность повреждения первой макротрещиной на глубине исчезающе мала, и рассеивание практически не зависит от распределения σ по толщине поверхностного слоя. Можно и теоретически оценить малую вероятность повреждения на глубине, учитывая возрастание сопротивления микросдвигам с удалением от поверхности и предполагая, что параметры $C_0 \alpha_0 \sigma_-$ в (5.1) являются функциями координаты η . С учетом этого выясняются особенности повреждения в случае весьма острых надрезов.

Из сопоставления теории [6, 7] с опытами устанавливается независимость прочности и долговечности V_0 от градиентов напряжений. Так как критерий повреждения $\sigma = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3)$, то градиенты напряжений по нормали к поверхности образцов в той точке, где $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ определялись так:

$$G = \frac{1}{\sigma_{\max}} \frac{\partial (\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \eta} = \frac{3}{\rho} + \frac{1}{a} \quad (5.7)$$

(при растяжении — сжатии слагаемое $1/a$ опускается). Для принятых форм образцов величина G варьировалась от $G = 0,32$ мм⁻¹ ($d = 7,5$ мм, $\rho = 75$ мм) до $G = 7,7$ мм⁻¹ ($d = 10$ мм, $\rho = 0,4$ мм). При изменении G более чем в 25 раз, изменение прочности V_0 не устанавливается, так как опытные распределения σ_{\max} и N_t описываются по (5.5) на основе исходного распределения прочности элементов (5.1). Это прямо следует из сравнения опытов на образцах $d_1 = 7,5$ мм, $\rho = 75$ мм, $k_1 = 30$ и $d = 50$ мм, $\rho = 2$ мм и $k_2 \approx 1$, а опытные функции распределений $P(\sigma_{\max})$ и $P(N_t)$ согласно (5.5) совпадают, так как

$$a_1 \rho_1 / \sqrt{k_1} \approx a_2 \rho_2 / \sqrt{k_2}. \quad (5.8)$$

Для этих образцов $G_1 = 5G_2$.

Выводы согласуются с результатами сравнительных статистических испытаний гладких образцов на растяжение — сжатие и переменный изгиб (вращающиеся образцы). Геометрия образцов была подобрана так, что выполнялось условие (5.8). Для изгиба $d_1 = 75$ мм, $\rho_1 = 7,5$ мм и $k_1 = 30$, для растяжения — сжатия $d_2 = 7,5$ мм, $\rho_2 = 40$ мм и $k_2 \approx 9$.

Из рис. 11 видно, что кривые распределения пределов усталости для изгиба и растяжения — сжатия от $N = 10^7$ до $N = 10^5$ совпадают, если совместить их центры распределений, т. е. при обоих видах нагружения рассеивание σ_w согласно (5.8) одинаково. Следовательно, нарушение сплошности на микроскопическом уровне сосредотачивается в тонком поверхностном слое не только при изгибе и концентрации напряжений, но и при равномерном распределении σ в поперечном сечении тела.

Некоторое смещение распределения $P(\sigma|N)$ в сторону меньшей прочности для растяжения — сжатия, по сравнению с изгибом вращающихся образцов, можно трактовать как результат несовершенной упругости тела: для достижения одинаковых амплитуд деформаций в крайних волокнах при изгибе с вращением нужно приложить дополнительный изгибающий момент, компенсирующий сдвинутый по фазе момент сил внутреннего трения, обусловленный пластическим деформированием такого поверхностного слоя, и учесть обусловленный этим поворот нейтральной оси. Поэтому расчетные напряжения при изгибе $\sigma = M/W$ несколько завышены по сравнению с действительными $\sigma = E\epsilon$. Следует учесть более интенсивный процесс виброполучести для растяжения — сжатия, эквивалентный небольшому повышению амплитуды σ в процессе нагружения. Все это в сумме дает поправку на 8—10%.

6. Рассмотрим рассеивание случайной координаты повреждения Z_t . Совокупность случайных величин N_t , σ_{\max} и Z_t , получаемая из опытов и сопоставляемая с детерминированным законом распределения σ по поверхности тела, дает исчерпывающую информацию для построения статистической модели макроскопически неоднородного тела [7]. Такое сопоставление является и прямой проверкой модели. Здесь приводим новые результаты.

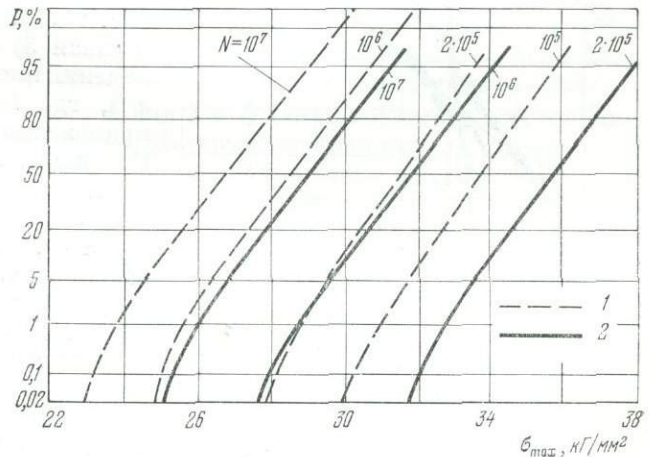


Рис. 11. Распределение пределов усталости:

1 — при растяжении — сжатии;
2 — при изгибе вращающегося образца

Для образцов с кольцевыми выточками (рис. 2, б) теория [7] устанавливает соответствие между среднеквадратичным отклонением Z_t от опасного сечения, вариацией пределов усталости $W(\sigma)$ и распределением σ вдоль контура выточки, т. е. величиной k в (5.4):

$$W(\sigma) = \frac{1}{[A/S(Z_t)]^2 - 3}, \quad A = \sqrt{6\rho/b} \sqrt{k}. \quad (6.1)$$

Здесь $W(\sigma) = S(\sigma)/\bar{\sigma}$, $S(\sigma)$ — среднеквадратичное отклонение пределов усталости от $\bar{\sigma}$; $\bar{\sigma}$ — медианное значение σ_w ($P = 0,5$).

Теоретическая зависимость (6.1) при $b = 4$ для образцов $d = 7,5$ мм, $\rho = 75$ мм, т. е. при $k = 30$, дана на рис. 12. Результаты наших опытов представлены в виде точек. Координаты точек найдены из различных опытов, что обеспечивало независимость их определения $W(\sigma)$ — по распределению $P(\sigma_w)$, величина $S(Z_t)$ — по измерениям Z_t на поврежденных образцах чис-

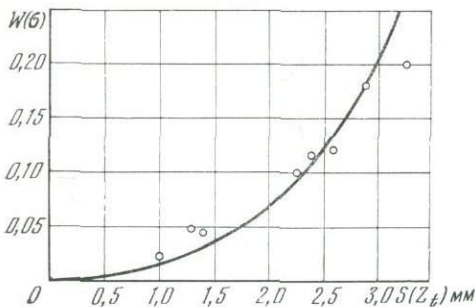


Рис. 12. Зависимость $W(\sigma)$ от $S(Z_t)$.

ние значения W получены для армо-железа, материала с чрезвычайно малым рассеиванием характеристик сопротивления усталости, и для литой стали лопастей мощных гидротурбин. Соответствующие области рассеивания и фотографии разрушенных половинок образцов сопоставлены на рис. 5 и 6. Результаты настолько контрастны, что не нуждаются в комментариях.

На рис. 13, а и б сравниваются опытные распределения Z_t для образцов из одного и того же сплава, но разной геометрии и по-разному нагружаемых,

лом m , причем

$$S(Z_t) = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_1^m (Z_{ti} - \bar{Z}_t)^2}, \quad (6.2)$$

где

$$\bar{Z}_t = \frac{1}{m} \sum_1^m Z_{ti}. \quad (6.3)$$

Из рис. 12 видно соответствие теории и опыта в широком диапазоне изменения прочностных свойств материалов от $W = 0,02$ до $W = 0,2$. Край-

не значения W получены для армо-железа, материала с чрезвычайно малым рассеиванием характеристик сопротивления усталости, и для литой стали лопастей мощных гидротурбин. Соответствующие области рассеивания и фотографии разрушенных половинок образцов сопоставлены на рис. 5 и 6. Результаты настолько контрастны, что не нуждаются в комментариях.

на рис. 13, а и б сравниваются опытные распределения Z_t для образцов из одного и того же сплава, но разной геометрии и по-разному нагружаемых, с распределением σ вдоль контуров их кольцевых канавок (рис. 13, в). Величина σ_{\max} принята за единицу. При чистом изгибе образцов координата z , где $\sigma = \sigma_{\max}$, совпадает с сечением d_{\min} ($z = 0$) (кривые 1, 2, рис. 13, в), при консольном изгибе (кривая 3) смещена в сторону увеличения плеча силы P на $z_0 = F(a/\rho, a/l)$, где l — длина плеча от точки приложения силы P до сечения $z_0 = 0$. Из рис. 13, б видно, что максимум плотности $p(Z_t)$ совпадает с ординатой σ_{\max} как при чистом изгибе ($\bar{Z}_t \approx 0$), так и при консольном ($\bar{Z}_t \approx z_0$). С удалением от этой точки частота повреждения убывает, с уменьшением ρ распределение $p(z_t)$ становится более компактным, т. е. распределение $p(Z_t)$ следует за распределением макронапряжений σ . Этим непосредственно устанавливается соответствие рассмотренной статистической теории рассеивания σ_{\max} и N_t с опытом. Здесь такое соответствие получено для образцов со сравнительно острым надрезом $\rho = 2,4$ мм (кривые 1) и при консольном изгибе для $\rho = 100$ мм (кривые 3). Опасное сечение, где $\sigma = \sigma_{\max}$, — лишь наиболее вероятное место повреждения, и σ_{\max} в общем случае не является «разрушающим напряжением», а есть параметр, определяющий величины σ_i в окрестностях σ_{\max} по (5.4): например, в условиях концентрации напряжений малым отклонениям Z_t ,

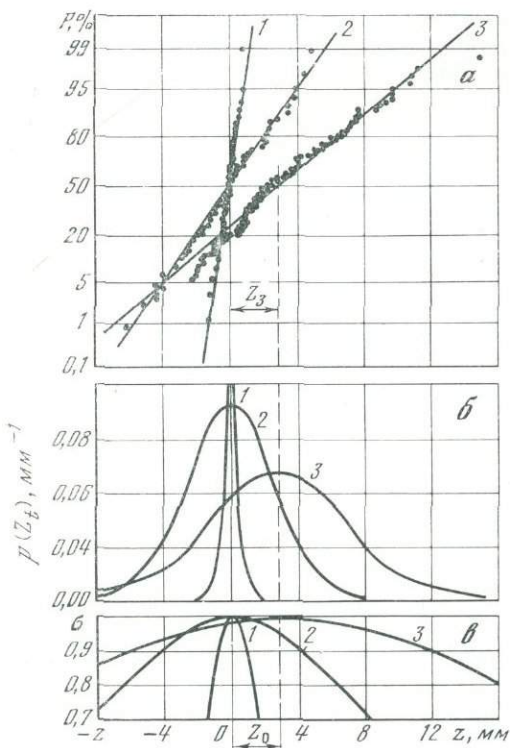


Рис. 13. Сравнение рассеивания Z_t с распределением напряжений вдоль контура кольцевых канавок

а — интегральные распределения $P(Z_t)$; б — плотности распределения $p(Z_t)$; в — эпюры напряжений;

1 — чистый изгиб образцов $d = 25$ мм, $\rho = 2,4$ мм; 2 — то же, но $d = 7,5$ мм; $\rho = 75$ мм; 3 — консольный изгиб образцов $d = 20$ мм, $\rho = 100$ мм, $l = 170$ мм.

но соизмеримым с ρ , соответствуют истинные напряжения повреждения, отличающиеся от σ_{\max} на 20—30% (рис. 13). Истинные напряжения повреждения вычисляются согласно (5.5)

$$\sigma(Z_t) = \sigma_{\max} [1 - k(Z_t/\rho)^2]. \quad (6.4)$$

При консольном изгибе в (6.4) надо положить $Z'_t = Z_t - z_0$ и $k' = k$. С учетом этой замены формулы (5.5), (6.1), полученные для чистого изгиба, будут справедливы и для консольного. Подсчеты $\sigma(Z_t)$ используются для корректировки нижней границы области рассеивания. Зависимость (6.1) применяется для непосредственной оценки неоднородности материала поверхностного слоя, независимого контроля распределений σ_w и ускоренных методов их построения. Теория применена при вероятностной оценке сопротивления усталости лопаток турбомашин (рис. 2, а), лопастей мощных гидротурбин (рис. 5) и крупногабаритных валопроводов. Она справедлива и по отношению к тонкому поверхностному слою — 1 детали с поверхностным упрочнением. Однако при этом существует вероятность повреждения тела первой макротрещиной P_2 на глубине, на границе зоны упрочнения, т. е. $P = 1 - (1 - P_1) \times (1 - P_2)$.

В настоящей работе результаты теории использованы для статистической конкретизации модели самого процесса повреждения и для анализа опытов с однократными перегрузками, т. е. применительно к вероятностной оценке сопротивления усталости деталей при амплитудах напряжений изменяющихся во времени: например, установлено, что предельное снижение σ_{w2} для конструкционных сталей должно быть порядка $0,5\sigma_w$. Это отвечает опытам с чередующимися амплитудами нагружения, по которым амплитуды, меньшие $0,5\sigma_w$, оказываются неповреждающими.

Ранее при оценке результатов статистических опытов по параметру P был объективно установлен эффект абсолютного повышения долговечностей n_2 после перегрузок снизу вверх и при амплитудах, близких к σ_w , что характерно для повреждения с упрочнением [4]. Описание этого тонкого эффекта требует более сложных зависимостей для $\check{\sigma}$ и \check{D} (типа логистических кривых) и выходит за рамки настоящей статьи. Детерминистская модель с упрочнением является развитием линейной теории накопления повреждений [10], предлагалась в [13], возможная формализация ее рассматривалась в [9]. Статистическая конкретизация дается, по-видимому, впервые. В заключение отметим, что в общем случае, повреждение поверхностного слоя тела протекает не независимо, а на фоне его объемного повреждения тела, например, при виброрелаксации и виброползучести. Обусловленная этим нелинейность процесса повреждения поверхностного слоя по числу циклов N рассмотрена нами в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Д. Ваганов. К определению долговечности крупногабаритных деталей по результатам испытаний модельных образцов.— Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
2. Р. Д. Ваганов. Статистические и детерминистские закономерности усталости и возможности их моделирования.— Сб. «Вопросы механической усталости». М., Машгиз, 1964.
3. Р. Д. Ваганов. Суммирование долговечностей по параметрам равной вероятности равного повреждения.— «Заводская лабор.», 1965, № 6.
4. Р. Д. Ваганов. Статистические и функциональные закономерности суммирования долговечностей при однократной смене амплитуд напряжений.— Машиноведение, 1968, № 1.
5. Р. Д. Ваганов. Виброрелаксация, виброползучесть и петля гистерезиса с переменными по числу циклов параметрами.— Сб. «Колебания и прочность при переменных напряжениях». М., «Наука», 1965.
6. Р. Д. Ваганов. Преобразование рассеивания характеристик усталостной прочности (статистическая теория и ее ограничения).— Машиноведение, 1965, № 4.
7. Р. Д. Ваганов. Статистическая теория рассеивания случайной координаты повреждения тела.— Машиноведение, 1970, № 4.

8. Р. Д. Вагапов, Х. В. Киштыков, В. П. Шадрин. Вторичные области рассеивания и распределения пределов усталости при однократной смене амплитуд напряжений. Наст. сб.
9. Н. Н. Вассерман, В. А. Гладковский. Закономерности упрочнения и накопления повреждений в процессе циклического нагружения малоуглеродистой стали. — Машиностроение, 1965, № 2.
10. Д. И. Гольцев. Об относительном расположении кривых усталости циклически тренированного материала. — Сб. «Вопросы динамики и динамической прочности». Вып. 4. Рига, Изд-во АН Латв.ССР, 1956.
11. Б. М. Ровинский. Об ослабленном поверхностном слое. Качество поверхностей деталей машин. Труды семинара по качеству поверхностей. Сб. 5. Методы и приборы, упрочнение металлов, технология машиностроения. Об ослабленном поверхностном слое. Изд-во АН СССР. М., 1961.
12. А. Хальд. Математическая статистика с техническими приложениями. М., ИЛ, 1956.
13. Nishihara, Jamada. Mem. Fac. Eng. Kyoto Univers., 1956, No 3.

ВТОРИЧНЫЕ ОБЛАСТИ РАССЕИВАНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ УСТАЛОСТИ ПРИ ОДНОКРАТНОЙ СМЕНЕ АМПЛИТУД НАПРЯЖЕНИЙ

Р. Д. ВАГАПОВ, Х. В. КИШТЫКОВ, В. П. ШАДРИН

1. Из статьи [1] настоящего сборника следует, что статистические испытания образцов с однократной сменой амплитуд напряжений σ являются определяющими для построения модели усталости, так как при применении «метода параметра равной вероятности» они позволяют выяснить относительную кинетику процессов повреждения и упрочнения. Но уже сейчас получаемую при этом информацию можно использовать для уточненной оценки надежности изделий, подверженных действию вибраций. Так при расчете

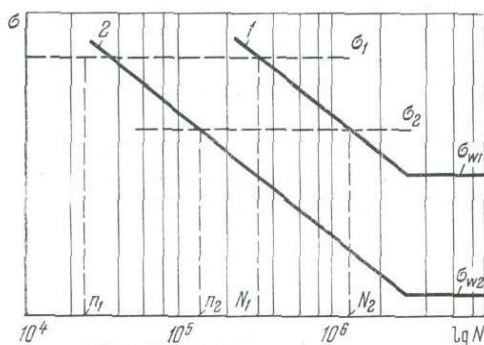


Рис. 1. Схема относительного расположения 1 — первичной (1) и вторичной (2) усталости

долговечности и прочности деталей машин, работающих при амплитудах вибронпряжений, изменяющихся во времени, широко используются закономерности, полученные в обычных опытах с однократной сменой амплитуд σ [2].

Схематично результаты таких опытов приведены на рис. 1. Здесь 1 — первичная кривая усталости (для образцов в исходном состоянии), 2 — вторичная кривая усталости (для образцов, поврежденных при нагружении на уровне $\sigma_1 > \sigma_{w1}$ до числа циклов $n_1 < N_1$). При перегрузке сверху вниз ($\sigma_1 > \sigma_2$) установлено, что смещение кривой 2 в сторону меньших долговечностей ($n_2 < N_2$) полностью определяется снижением предела усталости до значения σ_{w2} , так как наклон вторичной кривой совпадает с наклоном первичной. Оценка снижения предела усталости до значения σ_{w2} в зависимости от относительных величин n_1/N_1 и σ_1/σ_{w1} , определяющих степень поврежде-

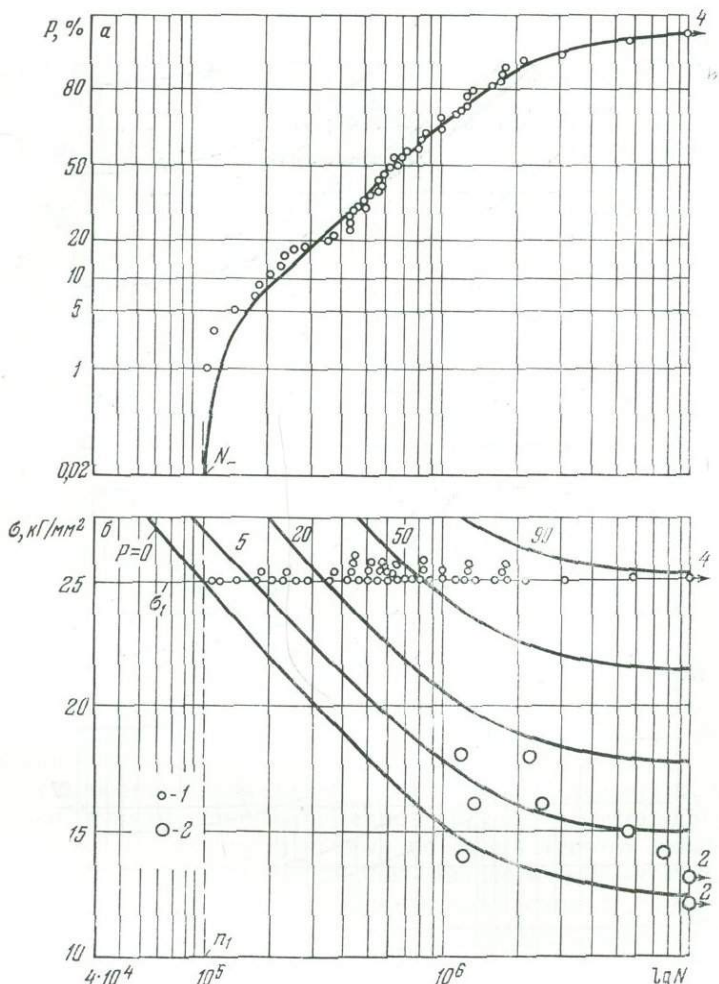


Рис. 2. Область рассеивания (б) и распределение долговечностей на уровне $\sigma = 25 \text{ кг/мм}^2$ (а) для образцов из литой стали 20ГСЛ:
 1 — образцы $d = 7,5 \text{ мм}$, $l = 60 \text{ мм}$; 2 — образцы сечением $200 \times 100 \text{ мм}$ [7]

ния, на первой ступени нагружения дается на основе эмпирических формул типа

$$\sigma_{W2} = \sigma_{W1} F(n_1/N_1, \sigma_1/\sigma_{W1}). \tag{1.1}$$

Эти закономерности используются в качестве исходных для указанных расчетов [2,3]. Из них также следует, что относительное снижение предела усталости

$$\Delta\sigma_W/\sigma_{W1} = F(n_1/N_1, \sigma_1/\sigma_{W1}) - 1 \tag{1.2}$$

характеризует чувствительность материала к перегрузкам. Обычно кривые 1 и 2 определяются осреднением результатов испытаний небольших серий образцов, т. е. близки к медианным линиям $P = 0,5$ областей рассеивания (рис. 2, б).

В настоящей работе, в связи с необходимостью вероятностной оценки сопротивления усталости деталей машин на основе поставленных нами опытов, дается статистическая конкретизация указанных закономерностей и уточняются функциональные закономерности. По-видимому, впервые в рассмотрение вводятся вторичные области рассеивания (рис. 3) и вторичные распределения пределов усталости (рис. 4, б). Приводится соответствующая

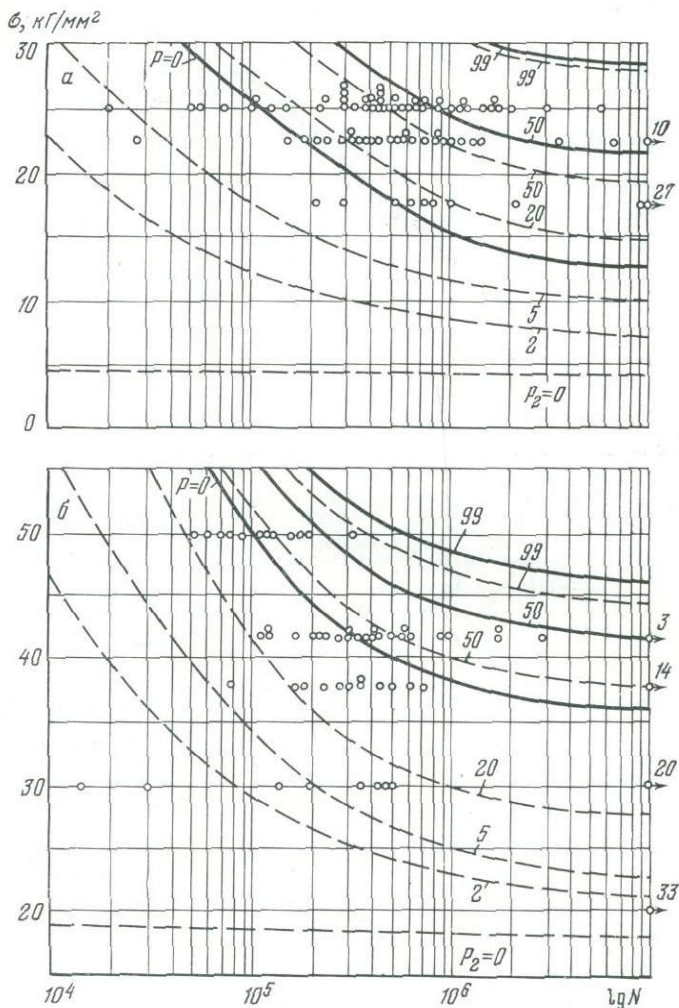


Рис. 3. Первичные и вторичные области рассеивания:
 а — литая сталь 20ГСЛ; б — прокат стали 38ХНМА

сравнительная оценка чувствительности к перегрузкам для двух типичных конструкционных материалов, отличающихся неоднородностью и имеющих различную структуру (литая сталь 20ГСЛ и прокат стали 38ХНМА). Функциональные зависимости снижения пределов усталости (рис. 5) выделяются из статистических по «методу параметра равной вероятности» P . Обоснование метода дано в статье [1] настоящего сборника и в [4,5]. В данном случае сопротивление усталости представительной выборки внешнеидентичных образцов числом m можно охарактеризовать одним случайным параметром, например, распределением пределов усталости σ_w или долговечности N для фиксированного уровня σ :

$$\begin{aligned}
 & P(1), P(2), \dots, P(i), P(k), \dots, P(m), \\
 & \sigma_w(1) < \sigma_w(2), \dots, \sigma_w(i) < \sigma_w(k), \dots, \sigma_w(m), \\
 & N(1) < N(2), \dots, N(i) < N(k), \dots, N(m) \mid \sigma.
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

В (1.3) величины σ_w и N отнесены к наиболее слабому элементу поверхностного слоя образца ω_0 , а вероятность $P = i/m$ можно рассматривать как порядковый номер образца в вариационном ряду σ или $N \mid \sigma$. Полагаем, что равным «номерам» P в разных, но достаточно представительных выбор-

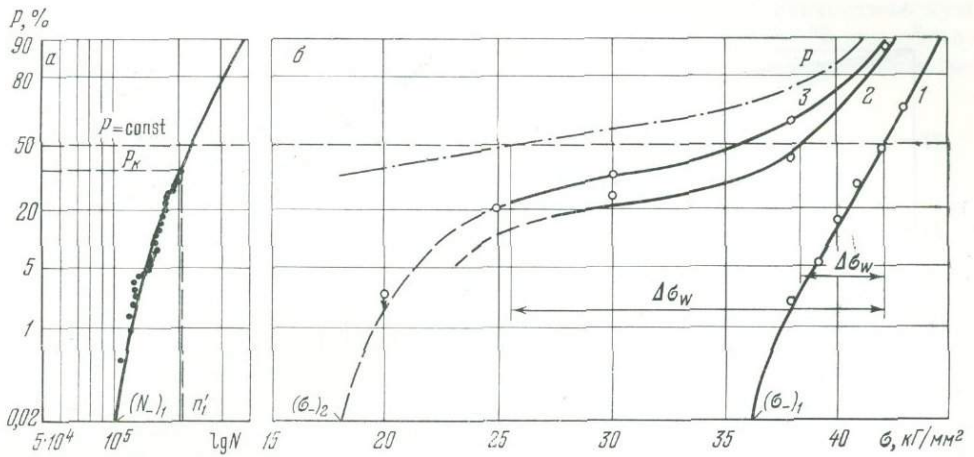


Рис. 4. Распределение долговечностей на уровне σ_1 для образцов из стали 38ХНМА (а) и распределения первичных и вторичных пределов усталости (б)

ках m отвечают образцы одинаковой прочности σ_W с одной и той же формой кривой усталости (повторяемость распределений). Соответственно, линии равной вероятности равного повреждения первичной и вторичной областей с равным «номером» P отождествляем с кривыми усталости равнопрочных образцов, испытанных при стационарных режимах нагружения $\sigma = \text{const}$ и при режимах с однократной сменой амплитуд напряжений. Это правило используем при определении функциональных зависимостей.

2. Чтобы исключить неопределенность в оценке параметра перегрузки σ_1/σ_W , мы испытывали цилиндрические образцы постоянного сечения ($d = 7,5$ мм, $l = 60$ мм), нагружаемые по схеме чистого изгиба. В этом случае амплитуда нагружения наиболее опасного элемента поверхности образца ω_0 не зависит от его случайного положения и равна расчетной $\sigma = M/W$ [6]. Для гладких образцов моменты повреждения первой макротрещиной (разрушения опасного элемента ω_0) и излом образцов практически совпадают, т. е. $N_t \approx N_r$. Поэтому под вероятностью повреждения P понимается и вероятность разрушения образцов. На рис. 2, б показана первичная область рассеивания для образцов, вырезанных из литой лопасти гидротурбины (сталь 20 ГСЛ). Она задана семейством линий равной вероятности разрушения (повреждения) $P = \text{const}$ и характеризует высокую изменчивость сопротивления усталости литого материала. То же иллюстрирует и распределение долговечностей $P(N|\sigma_1)$ на уровне $\sigma = 25$ кг/мм² (на рис. 2, а). Этот уровень σ_1 являлся первой ступенью нагружения. Здесь до одного и того же числа циклов n_1 , равного нижней границе рассеивания долговечностей $(N_-)_1$, нагружалась представительная выборка образцов в количестве 74 штуки. При этом ни один из них не разрушился, что усиливает достоверность оценки $(N_-)_1$. Поврежденные образцы перегружались на уровни $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$. Соответствующая вторичная область рассеивания дана на рис. 3, а семейством пунктирных линий $P_2 = \text{const}$. Там же сплошными линиями нанесены границы и медианная кривая $P = 0,5$ области рассеивания неповрежденных образцов. Сравнение первичных и вторичных «кривых» усталости с равным параметром разрушения $P = P_2$ показывает, что более интенсивное снижение сопротивления усталости имеет место для меньших значений P ; это согласуется с (1.3). Образцам с меньшим номером P , т. е. более слабым, отвечает большая относительная перегрузка $\sigma_1/\sigma_{W1}(P)$ и большая относительная длительность нагружения $n_1/N(P)$ на уровне σ_1 . Нижняя граница рассеивания вторичных долговечностей $(n_-)_2 \rightarrow 0$, так как долговечность наиболее слабых образцов $P(1) \rightarrow 0$ исчерпана на первой ступени нагружения $n_1/(N_-)_1 \rightarrow 1$. В пределе линии $P_2 \rightarrow 0$ совпадает с осью σ .

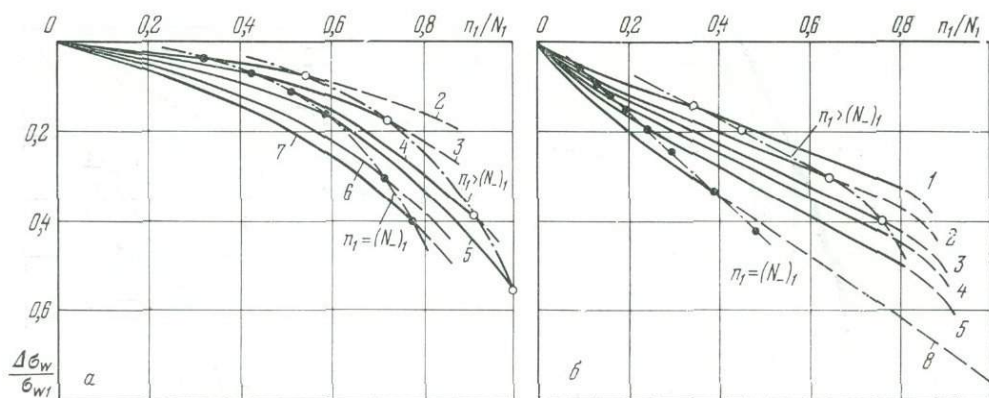


Рис. 5. Зависимости относительного снижения пределов усталости после перегрузки для образцов из проката стали 38ХНМА (а) и для образцов из литой стали 20ГСЛ (б)
 1 — $K_1 = 1,05$; 2 — $K_1 = 1,12$; 3 — $K_1 = 1,16$; 4 — $K_1 = 1,19$; 5 — $K_1 = 1,21$; 6 — $K_1 = 1,24$; 7 — $K_1 = 1,27$; 8 — $K_1 = 1,39$

Из сравнения следует, что вторичные кривые усталости примерно до $P_2 = 0,05$ совпадают по форме с первичными. Как те, так и другие получаются параллельным опусканием одной и той же шаблонной кривой $\sigma = f(N)$, что соответствует результатам обычных опытов (рис. 1). Начиная с $P \approx 0,05$, т. е. при больших перегрузках $\sigma_1 / \sigma_w(P) > 1,4$ и $n_1 / N(P) > 0,8$, наблюдается заметное отклонение от этого правила.

Для образцов, вырезанных из проката стали 38ХНМА и поврежденных на уровне $\sigma_1 = 50 \text{ кг/мм}^2$ до $n_1 = (N_-)_1$, имеет место та же закономерность в относительном расположении вторичных и первичных «кривых усталости» (рис. 3, б). Присоединяя сюда результаты опытов на образцах из стали 45 [4,5] и результаты теории [1], можно считать закономерность достаточно общей.

3. Из рис. 4, б видно, что статистические закономерности снижения пределов усталости после перегрузки характеризуются повышением вероятности разрушения на данном уровне σ или смещением вторичных распределений $P(\sigma_w)$ в сторону меньшей прочности. На рис. 4, б показаны первичные и вторичные распределения $P(\sigma_w) = P(\sigma|N)$ для стали 38ХНМА (точки — опытные значения $P(\sigma/N)$ для $N = 10^7$). Они определены как вероятность разрушения,

$$P(\sigma|N) = m_r/m, \quad (3.1)$$

где m — общее число образцов, испытанных на данном уровне σ до $N = 10^7$, а m_r — число сломавшихся. Величина m_r/m — оценка вероятности того, что $\sigma_w \leq \sigma$. Для неповрежденных образцов (кривая 1) точечное распределение аппроксимировано по [2]

$$P(\sigma|N) = 1 - \exp \left[- \frac{2\pi a l}{\omega_0 C_0} (\sigma - \sigma_-)^{\alpha_0} \right], \quad (3.2)$$

а нижняя граница рассеивания $\sigma_- = 36 \text{ кг/мм}^2$ определена аналитическим продолжением (3.2) к вероятности повреждения $P \rightarrow 0$.

Вторичные распределения (кривые 2 и 3) построены по результатам испытаний образцов, поврежденных на уровне $\sigma_1 = 50 \text{ кг/мм}^2$. Повреждение осуществлялось в двух вариантах: нагружением образцов до числа циклов $n_1 = (N_-)_1$ и нагружением за нижнюю границу рассеивания долговечностей на этом уровне ($n_1 = n'_1 = 2,06 \cdot 10^5$). Числу циклов n'_1 на уровне σ_1 отвечает вероятность разрушения $P_R = 36\%$ (рис. 4, а). Усеченное точечное распределение N для 63 образцов, разрушившихся на первой ступени нагружения

$(N_- < n'_1)$, совпадает с первичным $P(N|\sigma_1)$, что подтверждает статистическую однородность представительных выборок образцов. После перегрузки оставшейся части образцов (111 штук) на уровне $\sigma_i < \sigma_1$ получены следующие вероятности разрушения:

σ , кг/мм ²	38	30	25	20
$(m)_2$	25	30	23	33
$(m_r)_2$	16	11	5	0
P_2	64	36,6	27,8	$P_2 < 3\%$

На уровне $\sigma = 20$ кг/мм² ни один из 33 образцов не разрушился, т. е. $P_2 < 1/33$. С учетом этого кривая \mathcal{Z} распределения σ_{W_2} для $n_1 > (N_-)_1$ экстраполирована к $P \rightarrow 0$ (пунктирная линия). Она фиксирует нижнюю границу рассеивания, отличную от нуля ($(\sigma_-)_2 \approx 18$ кг/мм², т. е. примерно $0,5 \sigma_-$ для неповрежденных образцов). Таким образом, нами экспериментально подтверждена возможность существования предельного снижения прочности при перегрузках, предсказанная теорией [1]. По медианным значениям σ_W , т. е. для $P = 0,5$, снижение прочности значительно меньше. Величина снижения, обозначенная на рис. 4 $\Delta\sigma_W$, уменьшается с увеличением параметра P , что также согласуется с (1.3).

4. Функциональную зависимость (1.2) относительного снижения пределов усталости $(\sigma_{W_2} - \sigma_{W_1})/\sigma_{W_1}$ от n_1/N_1 и параметра $K_1 = \sigma_1/\sigma_{W_1}$ можно получить только при испытаниях равнопрочных образцов. Реально же величины σ_{W_1} , σ_{W_2} и N_1 не только случайные, но и неопределенные, так как неизвестно, какая их комбинация отвечает изменению предела усталости от наугад выбранного значения σ_{W_1} до значения σ_{W_2} . Однако если эти величины относить к одной и той же вероятности повреждения P , то опытная зависимость (1.2) становится вполне определенной:

$$\Delta\sigma_W(P) = \sigma_{W_2}(P) - \sigma_{W_1}(P), \quad (4.1)$$

$$\Delta\sigma_W(P)/\sigma_{W_1}(P) = F[n_1/N_1(P); \sigma_1/\sigma_{W_1}(P)] - 1.$$

Ее можно считать функциональной, если равным «номерам» P в разных, но достаточно представительных выборках (1.3) действительно отвечают образцы одинакового сопротивления усталости. Исходные данные для расчета по (4.1) приведены на рис. 4: это кривые 1 и 2 первичных и вторичных распределений пределов усталости и кривая a распределения долговечностей $P(N_1|\sigma_1)$ для стационарного режима нагружения на уровне σ_1 . Сечение этих кривых горизонталью $P = \text{const}$ дает искомые значения $N_1(P)$, $\sigma_{W_1}(P)$, а величина $\Delta\sigma_W(P)$ получается как разность абсцисс кривых 2 и 1. Величины $n_1 = (N_-)_1$ и σ_1 заданы. Изменяя положение горизонтали $P = \text{const}$, получаем непрерывный ряд величин, определяющих функцию (4.1) при $n_1 = \text{const}$ и $\sigma_1 = \text{const}$. Соответствующие точки показаны на рис. 5 черными точками. Для каждой из них будет свой параметр перегрузки $K_1 = \sigma_1/\sigma_{W_1}(P)$. Пунктирная кривая, проходящая через эти точки, есть зависимость (4.1) с непрерывно изменяющимся параметром K_1 . Из (4.1) следует, что кривые $K_1 = \text{const}$ можно получить, только изменяя n_1 . С этой целью для сравниваемых материалов мы провели вторую серию опытов с нагружением образцов на первой ступени σ_1 до числа циклов $n'_1 > (N_-)_1$. Число циклов n'_1 отвечает вероятности разрушения P_R (рис. 4, а). Поэтому после перегрузки испытывается усеченная выборка $m_2 = m(1 - P_R)$, из которой исключены образцы с долговечностью $N_1 \leq n'_1$, разрушившиеся при «тренировке». Порядковые «номера» образцов во вторичных распределениях $P_2 = (m_r)_2/m_2$ теперь не совпадают с их «номерами» P в первоначальном ряду (1.3). Соотношение между величинами P и P_2 для равнопрочных образцов в первичных и вторичных распределениях N и σ_W при $n_1 > (N_-)_1$ следующее [5]

$$P = P_k + (1 - P_k) P_2. \quad (4.2)$$

Соответствующая (4.2) вспомогательная кривая 3 дана на рис. 4, б пунктирной линией. Там же показана оценка $\Delta\sigma(P)$ и $\sigma_{W_2}(P)$ для «номера» сравнения $P = 0,5$ при $n_1 > N_-$. Полученные таким образом значения относительного снижения пределов усталости при $n_1 > (N_-)_1$ нанесены на график (рис. 5) белыми кружками. Через эти точки и точки для $n_1 = (N_-)_1$ с равным параметром $\sigma_1/\sigma_{W_1}(P)$ проведены кривые $K_1 = \text{const}$. Из рис. 5 видно, что каждая предыдущая кривая вынуждает положение последующей, т. е. зависимости (4.1), определенные по параметру P , можно считать по крайней мере квазифункциональными.

Для $P_2 \rightarrow 0$, т. е. по нижней границе рассеивания σ_{W_2} при $n_1 > (N_-)_1$ «порядковый» номер сравнения $P = P_h$. Это следует и из усеченного распределения N (рис. 4, б). Имеем: $n_1/N_1(P_h) \approx 1$, $\sigma_{W_1} = 40,5 \text{ кг/мм}^2$, $(\sigma_-)_2 \approx \approx 18 \text{ кг/мм}^2$ и $\Delta\sigma/\sigma_{W_1} \approx 0,56$. Эта точка на графике рис. 5, а характеризует предельное снижение прочности по повреждению тела первой макротрещиной усталости при $K_1 = \sigma_1/\sigma_{W_1} = 1,22$. Соответствующая кривая $K_1 = \text{const}$ дана на рис. 5, а.

Аналогично построены зависимости относительного снижения пределов усталости $\Delta\sigma/\sigma_{W_1}$ от относительной длительности нагружения n_1/N_1 для литой стали 20ГСЛ (рис. 5, б). Из сравнения этих кривых по параметру $K_1 = \sigma_1/\sigma_{W_1}$ видно, что чувствительность к перегрузкам у литой стали выше, чем у проката стали 38ХНМА (рис. 5, а). Предельное снижение прочности для литой стали близко к $0,8-0,9$, т. е. $\sigma_{W_2} \approx (0,1-0,2) \sigma_{W_1}$. Это связано с наличием мелких литейных дефектов, рассеянных по объему литого тела. Дефекты — источники концентрации напряжений, около них возникают макроскопические трещины еще на первой ступени нагружения (σ_1, n_1), и предельное снижение прочности после перегрузки определяется критическим значением амплитуды σ_2 , при котором прекращается развитие этих трещин.

3. Сформулируем основной результат исследований. До настоящего времени функциональные закономерности изменения сопротивления усталости при однократной смене амплитуд напряжений определялись по экспериментальным первичным и вторичным кривым $\sigma = f(N)$, близким к медианным линиям областей рассеивания $P = 0,5$ (рис. 1). Однако оставалось неясным, верны ли они для любой вероятности повреждения, т. е. для любой линии $P = \text{const}$ области рассеивания. Постановка этой задачи дана в [4,5]. Здесь же показано, что закономерности относительного снижения пределов усталости $\Delta\sigma/\sigma_{W_1} = f[n_1/N_1(P); \sigma_1/\sigma_{W_1}(P)]$ и относительного изменения вторичных кривых усталости, по-видимому, общие для любой исходной кривой $P = \text{const}$ первичной области рассеивания, в том числе и для малых вероятностей повреждения P . Это существенно для обоснования расчетных схем применительно к стационарному нагружению деталей. Так, в [6], применительно к действию случайных нагрузок, с целью упрощения расчетов и повышения надежности оценок, было предложено рассеивание характеристик сопротивления усталости из рассмотрения исключить, приняв за первичную кривую усталости вполне определенную зависимость $\sigma_{\text{max}} = f(N_t)$ по нижней границе рассеивания долговечностей $N(P \rightarrow 0)$. Эту кривую можно получить по результатам статистических испытаний модельных образцов. Для стационарных режимов нагружения такая оценка прочности и долговечности крупногабаритных деталей была обоснована экспериментально и теоретически [7, 8]. Было установлено, что нижняя граница рассеивания N_t и σ_W по повреждению тела первой макротрещиной практически инвариантна к форме и размерам тела, если амплитуда σ выражена через σ_{max} (амплитуда в опасной точке тела). Применительно к литым сталям подтверждение этого дано здесь на рис. 2 и рис. 5 из работы [1] настоящего сборника, где большие кружки — результаты опытов [9, 10] на образцах с характерным размером сечения $100-200 \text{ мм}$. Из графиков видно, что эти точки лежат вблизи нижних границ областей рассеивания, полученных нами по результатам испытаний образцов диаметром всего $7,5 \text{ мм}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Д. Ваганов*. Статистическая конкретизация детерминистской модели процесса повреждения на первой стадии усталости. Наст. сб.
2. *С. В. Серенсен, В. П. Козаев, Р. М. Шнейдерович*. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М., Машгиз, 1963.
3. *Б. З. Слобин*. К расчету на прочность при нестационарных режимах переменных напряжений. — Вестн. машиностроения, 1964, № 6.
4. *Р. Д. Ваганов*. Суммирование долговечностей по параметрам равной вероятности равного повреждения. — Заводская забор., 1965, № 6.
5. *Р. Д. Ваганов*. Статистические и функциональные закономерности суммирования долговечностей при однократной смене амплитуд напряжений. — Машиноведение, 1968, № 1.
6. *Р. Д. Ваганов, О. И. Шишорина, М. В. Яковлева*. Предельные амплитуды крутильных колебаний на переходных и рабочих режимах для валопроводов мощных судовых установок. — Машиноведение, 1968, № 2.
7. *Р. Д. Ваганов, Л. А. Хрипина, О. И. Шишорина*. Оценка усталостной прочности крупногабаритных деталей по результатам испытаний модельных образцов. — Изв. АН СССР, ОТН Механика и машиностроение, 1958, № 7.
8. *Р. Д. Ваганов*. Преобразование рассеивания характеристик усталостной прочности. Статистическая теория и ее ограничения. — Машиноведение, 1965, № 4.
9. *С. В. Серенсен, В. П. Козаев, Т. П. Бекш*. Исследование сопротивления усталости металла натурной лопасти поворотной-лопастной гидротурбины. — Вестн. машиностроения, 1959, № 6.
10. *И. В. Кудрявцев, Е. В. Рымынова*. Влияние структуры и наклепа на чувствительность сталей к нагреву при циклических нагрузках. — Металловедение и термическая обработка металлов, 1965, № 1.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Предисловие	3
<i>М. Д. Перминов</i>	
Топологические методы расчета сложных динамических систем	5
<i>М. Д. Перминов, В. Д. Петров</i>	
Исследование вынужденных колебаний сложных систем методом расчленения	9
<i>В. Д. Петров</i>	
Идентификация сложных систем на основе анализа подсистем	12
<i>К. К. Глухарев, Д. Е. Розенберг</i>	
Применение метода динамических испытаний для вычисления коэффициентов жесткости и демпфирования цепных систем	17
<i>К. К. Глухарев, Д. Е. Розенберг</i>	
Применение метода динамических испытаний к вычислению параметров связей упруго-подвешенного твердого тела	24
<i>Г. И. Аникеев</i>	
Исследование нелинейных случайных колебаний с помощью системы корреляционных функций	27
<i>М. Ф. Зейтман, Л. А. Таран</i>	
Колебания неконсервативных гидроскопических систем со случайными распределенными и сосредоточенными параметрами	33
<i>В. Б. Зеленский, М. Ф. Зейтман</i>	
Изгибные колебания нелинейных упругих гидроскопических систем со случайными параметрами	39
<i>Г. И. Аникеев, С. И. Чукаева</i>	
Исследование статистических параметров случайных колебаний в гидротурбинах	45
<i>Г. И. Аникеев, Л. Н. Ермилов, Б. Н. Зотов, Э. И. Кузовков</i>	
Исследование пульсаций давлений в центробежном насосе	48
<i>Н. С. Яловой, Г. Н. Памухина, В. Н. Степанов</i>	
Корреляционные зависимости между параметрами турбулентного потока во входных патрубках турбомашин	53
<i>Г. И. Аникеев, П. В. Модлина</i>	
Исследование автоколебаний ротора за второй критической скоростью	59
<i>Э. Е. Сильвестров</i>	
Нестационарные процессы в роторной системе с переменной массой . .	67
<i>Е. Г. Гаджиева, М. Д. Перминов</i>	
Исследование динамических свойств двухкаскадной подвески с учетом податливости основания	76

<i>Г. И. Анисеев, В. Г. Аверьянова, А. П. Никифоров</i>	
Динамика модели рабочего колеса радиально-осевой гидротурбины	81
<i>А. Я. Аронсон, Ф. С. Бедчер</i>	
Влияние возмущений формы срединной поверхности на частоты ее собственных колебаний	94
<i>А. Я. Аронсон</i>	
Об одном варианте построения обобщенной теории стержней	99
<i>Г. А. Погосян</i>	
Задача кручения ортотропного призматического бурса в геометрически нелинейной постановке	114
<i>Р. Д. Вагапов</i>	
Статистическая конкретизация детерминистской модели повреждения на первой стадии усталости	121
<i>Р. Д. Вагапов, Х. Б. Киштыков, В. П. Шадрин</i>	
Вторичные области рассеивания и распределения пределов усталости при однократной смене амплитуд напряжений	136

ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ УПРУГИХ И ГИДРОУПРУГИХ СИСТЕМ

Утверждено к печати
Государственным научно-исследовательским институтом машиноведения

Редактор *Л. В. Глики*. Художественный редактор *А. Н. Жданов*
Художник *Т. К. Самигулин*. Технический редактор *Ю. В. Рылина*
Корректоры *В. Г. Петрова, Н. Г. Васильева*

Сдано в набор 11/IV 1975 г. Подписано к печати 16/VI 1975 г. Формат 70×108^{1/16}
Бумага № 1 Усл. печ. л. 12,95 Уч.-изд. л. 12,8 Тираж 2200
Т-07778. Тип. зак. 2432 Цена 90 к.

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 10
2-я типография издательства «Наука». 121059, Москва, Г-49, Шубинский пер., 10

УДК 534.015

Топологические методы расчета колебаний сложных динамических систем. П е р м и н о в М. Д. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

Рассматривается приложение топологических методов к анализу колебаний сложных механических систем и конструкций. Предполагается, что непрерывная механическая система может быть заменена динамической расчетной моделью с конечным числом степеней свободы, отражающей наиболее существенные особенности природы в определенном ограниченном диапазоне частот.

Для составления динамической матрицы системы использована теория n -мерных графов и матрица инцидентности.

Рис. 1, библи. назв. 6.

УДК 534.015

Исследование вынужденных колебаний сложных систем методом расчленений. П е р м и н о в М. Д., П е т р о в В. Д. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

Рассматривается расчет вынужденных колебаний динамических моделей сложных конструкций. В основу расчета положен метод сил. Показано, что для получения решения исследуемой системы можно использовать решения для подсистем, порядок которых значительно ниже порядка исследуемой системы.

Рис. 1, библи. назв. 6.

УДК 534.015

Идентификация сложных систем на основе анализа подсистем. П е т р о в В. Д. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

Рассматривается метод идентификации линейной дискретной модели сложной конструкции. Предполагается, что распределение масс известно. Метод основан на преварительном исследовании отдельных частей системы и последующем определении жесткостных параметров полной механической системы.

Рис. 4, библи. назв. 7.

УДК 534.015

Применение метода динамических испытаний для вычисления коэффициентов жесткости и демпфирования цепных систем. Г л у х а р е в К. К., Р о з е н б е р г Д. Е. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

Рассматриваются процедуры метода динамических испытаний применительно к вычислению параметров линейных цепных механических систем по результатам наблюдений за движениями сосредоточенных инерционных элементов (масс или дисков). Указаны условия существования разрешающей операции метода динамических испытаний, а также минимальное число измерений, необходимое для построения разрешающей операции.

Рис. 1, библи. назв. 2.

УДК 534.015

Применение метода динамических испытаний к вычислению параметров связей упруго-подвешенного твердого тела. Г л у х а р е в К. К., Р о з е н б е р г Д. Е. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

Рассматривается применение метода динамических испытаний к вычислению параметров связей твердого тела. Построены разрешающие операции метода при прямых и косвенных измерениях обобщенных координат системы. Указаны условия существования разрешающей операции, а также минимальное число измерений для ее построения.

Рис. 1, библи. назв. 2.

УДК 531.534.1

Исследование нелинейных случайных колебаний с помощью системы корреляционных функций. А н и к е е в Г. И. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

Рассматриваются нестационарные случайные процессы в системах со многими степенями свободы. Внешние возмущающие силы и параметры системы являются случайными функциями с произвольным распределением и заданы системой корреляционных функций второго и выше порядков. Для неизвестных случайных величин строится система уравнений, содержащих корреляционные функции тех же порядков.

Библи. назв. 2.

УДК 539.3/319 (047) : 621.224

Исследование статистических параметров случайных колебаний в гидротурбинах. А н и к е е в Г. И., Ч у к а е в С. И. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

Приведены результаты спектрального и статистического анализа колебательных процессов при испытаниях на модели рабочего колеса гидротурбины. Получены корреляционные функции второго и третьего порядков амплитуд и фаз колебаний.

Рис. 4.

УДК 621.671.

Исследование пульсаций давления в центробежном насосе. А н и к е е в Г. И., Е р м и л о в а А. Н., З о т о в Б. Н., К у з о в к о в Э. И. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.]

Приведены результаты исследования пульсаций давления в направляющем аппарате и рабочем колесе центробежного насоса. Исследования проводились на одноступенчатом насосе. Рис. 8.

УДК 621.175.5

Корреляционные зависимости между параметрами турбулентного потока во входных патрубках гидротурбин. Я л о в о й Н. С., П а м у х и н а Г. Н., С т е п а н о в В. Н. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

В статье делается попытка применить статистические методы интерпретации наблюдений для оценки гидродинамических параметров турбулентного потока во входных патрубках турбомашин. Принято, что наблюдаемые в эксперименте гидродинамические поля не зависят от времени (квазистационарный процесс), и случайный характер исследуемых полей связывается со сложностью и хаотичностью их пространственных зависимостей. Связь между гидродинамическими параметрами исследуемых величин определяется в рамках корреляционной теории. Рис. 2, библиогр. назв. 3.

УДК 534:621.824

Колебания неконсервативных гироскопических систем со случайными распределенными и сосредоточенными параметрами. З е й т м а н М. Ф., Т а р а н Л. А. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

Рассматриваются изгибные колебания упругой гироскопической системы со случайно изменяющимися параметрами, в том числе и коэффициентами демпфирования. Периодическое решение находится с помощью метода малого параметра — разложением в ряд по двум малым параметрам, отражающим различную физическую природу случайно изменяющихся величин. Получены рекуррентные зависимости для нахождения любого приближения по формам колебаний и частотам. Приводятся формулы для вероятностей оценки поведения системы. Библиогр. назв. 2.

УДК 534:621.824

Изгибные колебания нелинейных упругих гироскопических систем со случайными параметрами. З е л е н с к и й В. В., З е й т м а н М. Ф. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

Рассматриваются вынужденные колебания упругой гиросистемы с квазилинейными граничными условиями, малым демпфированием и случайными параметрами. Приводится процедура построения периодического решения с помощью метода малого параметра. Даются вероятностные характеристики периодических режимов колебаний системы при малых случайных отклонениях ее параметров. Библиогр. назв. 2.

УДК

Исследование автоколебаний ротора за второй критической скоростью. А н и к е е в Г. И., М о д л и н а П. Б. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М. «Наука», 1975.

Исследуется движение простейшей модели ротора (упругий вал с диском) за второй критической скоростью. Получены уравнения движения ротора и проанализированы возможные режимы движений. Показано, что за второй критической скоростью, помимо частоты оборотов, проявляется только частота собственных колебаний ротора, соответствующая второй форме колебаний. Рис. 5, библиогр. назв. 4.

УДК 534.1

Нестационарные процессы в роторной системе с переменной массой. С и л ь в е с т р о в Э. Е. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

Исследуются нестационарные почти периодические колебания в гироскопической системе при одновременном изменении угловой скорости и массы ротора. Использование асимптотического метода Крылова—Боголюбова получены уравнения первого приближения для амплитуд и фаз нестационарных процессов автоколебаний. Изучено влияние скорости, изменения числа оборотов и массы ротора, а также эксцентриситета на амплитуду колебаний системы при прохождении области автоколебаний, в которой проявляется первая частота прямой прецессии. Рис. 7, библиогр. назв. 5.

УДК. 534.1

Исследование динамических свойств двухкаскадной подвески с учетом податливости основания. Г а д ж и е в а Е. Г., П е р м и н о в М. Д. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М. «Наука», 1975.

Проведена оценка эффективности системы двухкаскадной амортизации объекта и дано сравнение с однокаскадной в широком диапазоне частот. Построены зависимости коэффициентов виброизоляции и вибропередачи в этом диапазоне частот. Исследовано влияние податливости фундамента на динамические характеристики системы. Рис. 6, библиогр. 2.

УДК 534.1.

Динамика модели рабочего колеса радиально-осевой гидротурбины. А н и к е е в Г. И., А в е р ь я н о в а В. Г., Н и к и ф о р о в А. П. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М. «Наука», 1975.

Исследуется динамика модели рабочего колеса радиально-осевой гидротурбины в виде кругового кольца на упругом основании. Рассматриваются изгибные деформации кольца в его плоскости, а также движение кольца как твердого тела. Найдены основные силы, действующие на кольцо.

Рис. 2, библи. 2 назв.

УДК 534.1.

Влияние возмущений формы срединной поверхности оболочки на частоты ее собственных колебаний. А р о н с о н А. Я., Б е д ч е р Ф. С. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М. «Наука», 1975.

Исследуется влияние искажений формы срединной поверхности длинной цилиндрической оболочки на спектр ее собственных колебаний. При этом возмущения геометрической формы могут быть либо детерминированными, либо случайными функциями координат. Решение задачи проводится по методу малого параметра.

Библи. 6 назв.

УДК. 624.042.

Об одном варианте построения обобщенной теории стержней. А р о н с о н А. Я. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М. «Наука», 1975.

Исследуется напряженное состояние закрученного тонкостенного стержня с учетом влияния естественной закрутки деформаций сдвига и деформации сечения. При этом деформация выражается аналитически произведением двух неизвестных функций, которые определяются из условия минимума потенциальной энергии системы.

Библи. 11 назв.

УДК 539.3.

Задача кручения ортотропного призматического бруса в геометрической нелинейной постановке. П о г о с я н Г. А. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М. «Наука», 1975.

Изучается вторичный эффект при кручении ортотропного призматического бруса, когда материал допускает большие перемещения и углы поворота, подчиняясь при этом линейному закону Гука. Задача решается введением малого параметра с применением полуобратного метода Сен-Венана.

Решение сведено к известным граничным задачам — определению одной обобщенно гармонической и одной обобщенно бигармонической функций.

Получены аналитические выражения компонентов напряжения для эллиптического бруса.

Рис. 1, библи. 5 назв.

УДК 539.388.1

Статистическая конкретизация детерминистской модели повреждения на первой стадии усталости. В а г а п о в Р. Д. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М. «Наука», 1975.

Применительно к режимам нестационарного процесса вибрационного нагружения деталей рассматривается детерминистская модель усталостного повреждения, наделенная статистическими особенностями реального процесса на первой стадии усталости (т. е. до появления первой макротрещины).

Рис. 14, библи. 14 назв.

УДК 539.388.1

Вторичные области рассеивания и распределения пределов усталости при однократной смене амплитуд напряжений. В а г а п о в Р. Д., И ш т ы к о в Х. Б., Ш а д р и н В. П. Сб. «Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем». М., «Наука», 1975.

Приведены экспериментально найденные закономерности статистических распределений пределов усталости после однократной перегрузки. Данные эксперимента сопоставляются с нелинейной теорией накопления повреждений.

Рис. 5, библи. 10 назв.

90 коп.

1460